# Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

## Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1894

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von E. Ritter.

GÖTTINGEN 1894.

# Inhaltsverzeichniss zu den linearen Differentialgleichungen.

Seite

## Fälle algebraischer Integrirbarkeit.



## Theorie der Lamé'schen Polynome.



# III. Eigentliche transcendente Untersuchungen.

## A. Das Oscillationstheorem.



### Die Hermite'sche Gleichung.



### Ausdehnung des Oscillationstheorems auf allgemeinere Differentialgleichungen.

Seite

## B. Von den automorphen Functionen.

### Beispiele eindeutiger automorpher Functionen.



### Von den Beweisen des Fundamentaltheorems.

## Vorbemerkungen.

Di. d. 24. Apr. 94.

Die gegenwärtige Vorlesung soll sich, wie ihrem Inhalte nach, so auch in ihrer ganzen Tendenz an die Vorlesung des letzten Semesters über die hypergeometrische Function anschliessen. Es ist nämlich folgender wesentliche Unterschied der hierin vorgetragenen Betrachtungen gegenüber den gewöhnlichen Darstellungen der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu betonen, wie man sie z. B. in dem kürzlich erschienenen Buch von Heffter findet: Während man gewöhnlich nur das *Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung in der Umgebung einzelner Stellen* untersucht und den Character der an einer bestimmten Stelle geltenden Reihenentwicklung discutirt, trat in meiner Vorlesung, besonders nach Weihnachten, das Bestreben hervor, den *Gesamtverlauf der durch die Differentialgleichung definirten Functionen* zu erfassen, wobei die

Hülfsmittel der conformen Abbildung und sonstige geometrische Methoden ihre naturgemäße Verwendung fanden. Wenn wir aber auf diese Weise tiefer in die Sache eindrangen, als die übliche Theorie, so konnten wir leider ebendeswegen nicht so allgemeine Probleme behandeln, wie jene Autoren. Das Buch von Heffter beschäftigt sich mit Differentialgleichungen von allgemeiner, n-ter Ordnung und mit einer beliebigen Zahl m von singulären Punkten; wir dagegen waren zufrieden, zuvörderst nur bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit 3 singulären Punkten unsere Methoden zu erproben, und wir fanden schon da Gelegenheit zu so vielen interessanten Überlegungen, daß wir noch gar nicht darüber hinaus gehen konnten. Und auch in der jetzigen Sommervorlesung werden wir uns auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränken, und vorzüglich an solche specielle Fälle anknüpfen, wo wir etwas Besonderes machen können.

Wenn wir da auch manche Untersuchung

nicht bis zum vollen Abschluss durchführen werden, so hoffe ich doch anregend auf solche Zuhörer zu wirken, welche Ansätze zu neuen Gedankenentwicklungen fertigen Schematen vorziehen; solche fertige Schemata sind wohl bequem, um nach einer feststehenden Methode beliebig viele analoge Untersuchungen durchzuführen, sie lehren aber nicht selbständig denken, sondern nur nach der Mode denken.

Ferner mögen noch wenige Worte über das Verhältnis der jetzigen Vorlesung zu der Vorlesung von 1890-91 über denselben Gegenstand Platz finden: Die Absicht derselben war von der meiner jetzigen Vorlesung nicht sehr verschieden. Aber damals ging ich zum ersten Mal an den grossen Stoff heran, und habe dabei mehr mit der Fantasie als mit der Kritik gearbeitet, so dass verschiedenes, was ich damals behauptete, bei schärferer Überlegung sich nicht als stichhaltig erweist. Manches werden wir daher jetzt fallen lassen müssen, dafür hoffe ich aber, dass das, was ich in dieser Vorlesung ausspreche, wirklich richtig ist, so dass die Hefte der damaligen Vorlesung durch die neue Vorlesung überflüssig werden und zugleich die endgültige Formulierung gewonnen ist.

Die Zeit etwa bis Pfingsten werde ich zu einer Art Einleitung benutzen, worin ich Ihnen überhaupt die Probleme vorführen werde, die uns künftig beschäftigen sollen.

# Einleitung.

## I. Algebraische Form der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$y'' + p y' + q y = 0$$

### A. Rationale Coefficienten.

Für uns, die wir auf functionentheoretische Behandlung Nachdruck legen, werden p und q algebraische Functionen sein, zuerst sogar speciell rationale Functionen, dann allgemein algebraische Functionen auf einer Riemann'schen Fläche. Dabei werden wir an der Beschränkung festhalten, dass wir durchweg Differentialgleichungen mit nur regulären singulären Punkten betrachten, d. h. dass sich in der Umgebung jedes singulären Punktes a eine Lösung von der Gestalt

$$y = (x-a)^{\alpha} \mathfrak{P}(x-a)$$

finden lässt, wo $\mathfrak{P}(x-a)$ eine in der Umgebung der Stelle a auf der Riemann'schen

Fläche endliche, stetige und eindeutige Function, speciell, wenn a kein Verzweigungspunkt der Fläche ist, eine nach $(x-a)$ fortschreitende Potenzreihe ist. Sind in der Umgebung eines solchen regulären Punktes

$$y_1 = (x-a)^{\alpha'} \mathfrak{P}'(x-a); \; y_2 = (x-a)^{\alpha''} \mathfrak{P}''(x-a)$$

zwei linear unabhängige Lösungen, so bezeichnet man $\alpha'$ und $\alpha''$ als die „Exponenten" des Punktes $a$.

Wenn wir uns nun zuerst auf <u>Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten</u> $p, q$ beschränken, so mögen $a, b, c, \ldots\ldots m, n$ die singulären Punkte sein, $\alpha', \alpha''; \beta', \beta''; \gamma', \gamma''; \ldots\ldots \mu', \mu''; \nu', \nu''$ die zugehörigen Exponentenpaare. Den unendlich fernen Punkt werden wir meistens als nichtsingulär voraussetzen; wenn es aber einmal bequem ist, einen singulären Punkt nach $\infty$ zu legen, so soll dies der Punkt $n$ sein.

Wenn der unendlich ferne Punkt nicht singulär ist, so kann man die allgemeine Form der Differentialgleichung, wie ich schon im Winter ausführte, etwa folgendermaßen hinschreiben:

$$y'' + y'\left\{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{x-a} + \dots\dots + \frac{1-\nu'-\nu''}{x-n}\right\} + \frac{y}{(x-a)\dots(x-n)}\cdot\left\{\frac{\alpha'\alpha''(a-b)\dots(a-n)}{x-a} + \dots + \frac{\nu'\nu''(n-a)\dots(n-m)}{x-n} + G_{n-4}(x)\right\} = 0,$$

wobei die Exponenten der Relation

$$\alpha'+\alpha''+\dots+\nu'+\nu'' = n-2$$

genügen müssen.

Es ist dies diejenige Form der Differentialgleichung, welche ich gewöhnlich benutze; andere schreiben sie vielfach anders, indem sie den Coefficienten von $y$ vollständig in Partialbrüche zerlegen:

$$y''+y'\left\{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{x-a}+\dots\frac{1-\nu'-\nu''}{x-n}\right\} + y\left\{\frac{\alpha'\alpha''}{(x-a)^2}+\dots+\frac{\nu'\nu''}{(x-n)^2}+\frac{A}{x-a}+\dots\dots+\frac{N}{x-n}\right\} = 0,$$

wobei aber die Größen $A, B, \dots N$ noch 3 linearen Gleichungen genügen müssen.

Legt man den $n$-ten singulären Punkt nach $\infty$, so lautet die Differentialgleichung im übrigen gerade so, als wenn sie nur die singulären Punkte $a, b, \dots m$ hätte, nur das Polynom $G_{n-4}(x)$ erhält noch ein Glied $(n-3)$ten Grades, nämlich $\nu'\nu''.x^{n-3}$, und in der zweiten angegebenen Gestalt brauchen die noch bleibenden $A, B, \dots M$ nur noch zwei linearen Gleichungen zu genügen.

Die allgemeine Differentialgleichung, in der kein singulärer Punkt nach $\infty$ gelegt ist, enthält insgesamt $4n-4$ Constanten, nämlich

1. Die $n$ singulären Punkte: $n$ Const.
2. die $2n$ Exponenten, welche aber einer Gleichung genügen: $2n-1$ "
3. die Coefficienten des Polynoms $g_{n-4}(x)$: $n-3$ "

Sa. $4n-4$ "

Dieselbe Constantenzahl ergibt sich bei Abzählung von der zweiten Schreibweise aus.

Wenn der $n$ te singuläre Punkt im Unendlichen liegt, also über eine der singulären Stellen bereits verfügt ist, erniedrigt sich die Zahl der Constanten natürlich um 1, man hat also dann $4n-5$ willkürliche Parameter. Dasselbe ergibt sich durch Abzählung an der Differentialgleichung mit einem singulären Punkt im Unendlichen.

Di. d. 26. Apr. 1894.]

Heute richte ich Ihre Aufmerksamkeit

darauf, daſs von den $4n-4$ Constanten der allgemeinen regulären Differentialgleichung mit $n$ singulären Punkten nicht alle wesentlich sind. Wir ziehen nämlich zwei Transformationen der Variablen heran:

1, eine lineare Transformation der unabhängigen Variablen:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Dadurch können wir 3 Parameter herausschaffen, z. B. können wir irgend 3 der singulären Punkte nach $0, \infty, 1$ legen so daſs aus

$$a, b, c, d, \ldots\ldots n$$

die Werte $0, \infty, 1, d', \ldots\ldots n'$

werden. Allgemeiner können wir die Sache so bezeichnen, daſs wir sagen:

<u>Die $n$ Punkte haben gegenüber den projectiven Transformationen des $x$ $n-3$ absolute Invarianten, als welche wir beispielsweise $n-3$ unabhängige Doppelverhältnisse ansehen dürfen, – nur diese Invarianten sind für die Differentialgleichung wesentlich.</u>

Dadurch sinkt die Zahl der Parameter

schon auf $4n-7$ herab.

Zweitens aber führen wir eine andere abhängige Variable $Y$ durch die Substitution ein:

$$y = Y.(x-a)^{\rho}(x-b)^{\sigma}\ldots(x-n)^{\omega},$$

wobei $\rho, \sigma, \ldots \omega$ irgend welche Werte haben dürfen, die nur, damit kein singulärer Punkt bei $x=\infty$ entsteht, der Relation genügen:

$$\rho+\sigma+\ldots\ldots+\omega=0.$$

In den Exponenten $\rho, \sigma, \ldots \omega$ dieser Substitution habe ich noch $n-1$ Constanten zur Verfügung und kann dadurch die Anzahl der Constanten in der linearen Differentialgleichung auf $3n-6$ herunterdrücken.

Man kann die letztgenannte Substitution dazu benutzen, um die Differentialgleichung auf irgend eine besonders bequeme <u>Normalform</u> zu bringen. Natürlich kann man sich sehr viele verschiedene Normalformen ausdenken, je nach dem Zwecke, den man damit verfolgt. Ich will vor allem folgende Normalform erwähnen:

Wenn $y$ an der Stelle $a$ die Exponenten $\alpha', \alpha''$ hat, so sind die Exponenten von $Y$ an derselben Stelle $\alpha'-\rho$, $\alpha''-\rho$.

Beim Übergang von $y$ zu $Y$ bleibt also die Differenz

$$\alpha'-\alpha''=\alpha$$

der Exponenten ungeändert, während die Summe

$$\alpha'+\alpha'' \text{ in } \alpha'+\alpha''-2\rho$$

übergeht, also durch geeignete Wahl der Zahl $\rho$ auf jeden beliebigen Wert gebracht werden kann.

Bei der Normalform nun, die ich im Sinne habe, wird diese Summe der beiden Exponenten $=1$ gesetzt, also

$$(\alpha'-\rho)+(\alpha''-\rho)=1,$$
$$(\alpha'-\rho)-(\alpha''-\rho)=\alpha,$$
$$\alpha'-\rho=\frac{1+\alpha}{2}, \qquad \alpha''-\rho=\frac{1-\alpha}{2},$$
$$\rho=\frac{1-\alpha'-\alpha''}{2}.$$

Da wir aber wegen der Bedingung $\rho+\sigma+\dots+\omega=0$ nur über $n-1$ der Zahlen $\rho, \sigma, \dots \omega$ verfügen können, so wollen wir einen der singulären Punkte auszeichnen und nach $\infty$ verlegen, um dann nur für jeden der $n-1$ im Endlichen bleibenden Punkte $a, b, \dots m$ die Exponentensumme $=1$ zu setzen.

Dann haben wir in der gestern angegebenen Differentialgleichung den Punkt $n$ wegzulassen, $G_{n-4}(x)$ durch $G_{n-3}(x)$ zu ersetzen, und dann für $\alpha', \alpha''$ die neuen Exponenten $\alpha'-\varrho = \frac{1+\alpha}{2}$ und $\alpha''-\varrho = \frac{1-\alpha}{2}$ einzusetzen, und entsprechend für die andern im Endlichen liegenden Punkte. Es fällt so der Coefficient des Gliedes $Y$ ganz weg und die Differentialgleichung geht in folgende Normalform über:

$$0 = Y'' + \frac{Y}{(x-a)\cdots(x-m)} \cdot \left\{ \frac{\frac{1-\alpha^2}{4}(a-b)\cdots(a-m)}{x-a} + \cdots + \frac{\frac{1-\mu^2}{4}(m-a)\cdots(m-l)}{x-m} + G_{n-3}(x) \right\}.$$

<u>Bei dieser Form liegt die Bequemlichkeit darin, daß das Glied mit $Y'$ wegfällt, und daß nur die Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \ldots \mu$ auftreten; dafür aber hat man den unendlich fernen Punkt zu einem singulären Punkt machen müssen und dadurch die Symmetrie der Formel beeinträchtigt.</u>

Dieser Umstand, daß man bei Normirung der Differentialgleichung irgend eine Unsymmetrie einführen muß, stellt sich ganz allgemein ein, wenn man sich nicht zu dem Schritt entschließt, <u>homogene Variablen</u> einzuführen.

Was den Gebrauch homogener Variablen betrifft, so herrschen darüber unter den Mathematikern zwei ganz entgegengesetzte Richtungen. Die einen; die algebraisch-geometrische Schule, welche an Cayley, Clebsch u. s. w. anknüpft, arbeiten nur mit homogenen Variablen und haben geradezu einen Widerwillen, man möchte sagen: ästhetischer Art gegen nicht homogen geschriebene Formeln. Die andere Richtung umfasst die Mehrzahl der Funktionentheoretiker, welche die homogenen Formeln für etwas unbestimmtes zu halten scheinen, indem sie sich nicht gewöhnen können, einen homogenen Ausdruck wirklich als Function der zwei Variablen $x_1, x_2$ anzusehen, sondern immer nur auf das Verhältnis $x_1 : x_2$ achten. Wir hier werden einen Mittelweg zwischen diesen beiden extremen Richtungen einhalten, indem wir bald die homogene, bald die unhomogene Schreibweise bevorzugen, je nach dem Zwecke, den wir gerade verfolgen.

Wenn wir irgend eine Function $y$ von $x$

haben

$$y = F(x),$$

so spalten wir Argument und Function, indem wir setzen

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

$$F(x) = F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\psi(x_1, x_2)}.$$

Dabei kann diese Spaltung von Ein Zähler und Nenner nach verschiedenen Rücksichten geschehen. Wenn z. B. $F(x)$ eine rationale Function ist, wird man $\varphi(x_1, x_2)$ und $\psi(x_1, x_2)$ so einrichten, dass es ganze rationale Formen von $x_1$, $x_2$ sind. Solche ganze Formen haben den Vorzug, für endliche Werte der Variablen $x_1$, $x_2$ immer endlich zu bleiben. Unendlich grosse Werte der homogenen Variablen dürfen wir aber von vornherein ausschliessen, weil $x = \frac{x_1}{x_2}$ auch schon bei der Beschränkung auf endliche Werte von $x_1$, $x_2$ alle seine Werte annimmt. Im Zusammenhang damit sagen wir:

Überhaupt ist es ein Hauptzweck bei der Einführung homogener Variablen, dass man das Unendlichwerden der in

<u>Betracht zu ziehenden Grössen vermeidet.</u>

Aber noch einen andern Vorzug bietet die Benutzung homogener Variablen:

<u>Die Formeln, welche bei linearer Transformation herauskommen, werden symmetrischer.</u>

Nämlich statt der gebrochenen Substitution

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

erhalten wir eine ganze lineare binäre Substitution

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2,$$
$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2.$$

Mit solchen Substitutionen hat es aber die gewöhnliche Invariantentheorie zuthun, wir sagen also:

<u>Insbesondere erreichen wir durch Einführung der homogenen Variablen den Anschluss an den Algorithmus der Invariantentheorie.</u>

Wir werden jetzt, um dies auf unsere Differentialgleichung anzuwenden, statt einer Function $y$ vielmehr eine Form $\Pi$ einführen, indem wir setzen:

$$y = \Pi \cdot (x_1 - a x_2)^\rho (x_1 - b x_2)^\sigma \dots (x_1 - n x_2)^\omega.$$

Da liegt nun gar kein Grund vor, die Zahlen $\rho, \sigma, \dots \omega$ irgend einer Beschränkung zu unterwerfen, da ja der unendlich ferne Punkt für die zugesetzten Factoren gar kein singulärer Punkt mehr ist. Nur wird dann, wenn wir $\rho + \sigma + \dots + \omega$ von $0$ verschieden annehmen, auch der Grad des $\Pi$ von $0$ verschieden, nämlich

$$k = -(\rho + \sigma + \dots + \omega).$$

Die Exponenten $\rho, \sigma, \dots \omega$ können wir jetzt ganz beliebig annehmen, nur wird der Grad der Form $\Pi$, welche durch unsere Substitution eingeführt wird, durch die Zahlen $\rho, \sigma, \dots \omega$ bestimmt.

Infolge dieser vollständigen Willkürlichkeit der $\rho, \sigma \dots$ ist jetzt auch eine symmetrische Normirung der Differentialgleichung möglich. Ein zweiter Fortschritt liegt aber noch in folgendem: Während wir die Function $y$ einmal und zweimal nach $x$ zu differenziren hatten, haben wir von der Form $\Pi$ zwei erste und drei zweite Differentialquotienten, die wir so bezeichnen:

$$\Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad \Pi_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial x_2},$$

$$\Pi_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2}, \quad \Pi_{12} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \Pi_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2}.$$

Zwischen diesen bestehen natürlich die bekannten für homogene Functionen geltenden Eulerschen Relationen:

$$x_1 \Pi_1 + x_2 \Pi_2 = k \Pi,$$
$$x_1 \Pi_1 + x_2 \Pi_{12} = (k-1) \Pi_1,$$
$$x_1 \Pi_{21} + x_2 \Pi_{22} = (k-1) \Pi_2.$$

Indem wir an Stelle von zwei Differentialquotienten jetzt deren 5 haben, sind wir in der Lage, unsere normirten Differentialgleichungen, von denen wir sprechen wollen, in der Art symmetrisch zu schreiben, daſs die invariante Auffassung, die wir ohnehin immer zu Grunde legen, auch in der Formel hervortritt.

Wir erörtern zunächst die Frage, in welcher Weise wir unser $\Pi$ normiren wollen. Die Exponenten sind bei irgend einer Wahl der $\rho, \sigma, \ldots$

$$\alpha' - \rho, \quad \beta' - \sigma, \quad \ldots \quad \nu' - \omega;$$
$$\alpha'' - \rho, \quad \beta'' - \sigma, \quad \ldots \quad \nu'' - \omega.$$

Wir setzen nun $\rho = \alpha''$, $\sigma = \beta''$, $\ldots$ $\omega = \nu''$, was ja jetzt möglich ist, da $\rho, \sigma, \ldots \omega$ von einander völlig unabhängig sind. Dann wird an jeder Stelle der eine Exponent gleich $0$, der andere gleich der Exponentendifferenz $\alpha$. Die $\Pi$-Form, welche wir so bekommen, habe ich früher als „Normal-$\Pi$ zweiter Art" benannt; wir werden dasselbe jetzt vorzugsweise zu Grunde legen, und wollen es als „Normal-$\Pi$" schlechtweg bezeichnen.

Das Normal-$\Pi$ denken wir uns in der Weise gewählt, daß es an jeder einzelnen singulären Stelle einen Exponenten $= 0$ hat, worauf der andere Exponent gleich der von vornherein vorgeschriebenen Exponentendifferenz sein wird.

Fr. d. 27. Apr. 94.] Ein solches $\Pi$ bezeichnen wir im Anschluß an das Riemann'sche Schema mit

$$\Pi \left| \begin{array}{ccccc} a & b & \ldots & n & \\ \alpha & \beta & & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array} \right| .$$

Der Grad desselben ist

$$K = \frac{\alpha + \beta + \cdots + \nu + 2 - n}{2} .$$

Nun bedenken wir noch, daß das Vorzeichen jeder Exponentendifferenz $\alpha, \beta, \ldots$ noch willkürlich ist, da es ja freisteht, welchen der beiden Exponenten wir vom andern abziehen wollen. Wir wollen nun die Festsetzung, wenn eine solche nötig wird, so treffen, dass $\alpha, \beta, \dots$ positiv sind, oder falls sie complex sind, dass die reellen Theile positiv sind wobei wir also die Möglichkeit bei Seite lassen, dass eine der Grössen rein imaginär sein möchte. Dann wird an einer singulären Stelle kein Zweig der $\Pi$-Form unendlich, mit andern Worten, $\Pi$ ist eine ganze (transcendente) Form von $x_1, x_2$. Zugleich verschwinden an keiner Stelle alle Zweige gleichzeitig, so dass wir keinen weiteren Factor mehr aus dem $\Pi$ herausheben können, ohne dass es aufhörte, eine ganze Form zu sein. Wir sagen also:

<u>Die homogenen Variablen können insbesondere dazu benutzt werden, der Form $\Pi$ eine solche Normirung zu erteilen, dass sie eine ganze Form von $x_1, x_2$ ohne überflüssigen Teiler ist.</u>

Wir wollen nun auch die <u>Differentialgleichung für unser Normal-$\Pi$</u> in homogener, invarianter Form aufstellen.

Ich schliesse mich dabei an das von Waelsch in den „Schriften der deutschen Prager mathematischen Gesellschaft 1892" veröffentlichte Resultat an. Waelsch hat allerdings nicht unsern allgemeinen Standpunkt, sondern er beschränkt sich auf Differentialgleichungen mit rationalen Lösungen. Es hängt das mit der gestern berührten Parteispaltung der Mathematiker zusammen, indem die Mathematiker, welchen die homogenen Variablen geläufig sind, wieder durchaus an den algebraischen Functionen haften. Aber nichtsdestoweniger gilt die Waelsch'sche Formel allgemein, auch für die transcendenten $\pi$-Formen.

Wir werden zunächst einen gewissen invarianten Differentialprocess zu definiren haben, der zuerst von Cayley ersonnen worden ist, um aus zwei binären Formen eine Covariante zu bilden, und der übrigens in der Invariantentheorie allgemein üblich ist.

Wir definiren als „$\nu$te Überschiebung zweier binären Formen $\pi$ und $\varphi$" diejenige Form, welche man erhält, wenn man auf das Product $\Pi(x_1, x_2)\cdot\varphi(y_1, y_2)$ den durch das Symbol $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$ definirten Process $\nu$ mal anwendet und hinterher $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ setzt, also

$$(\Pi, \varphi)_\nu = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^\nu \Pi(x_1, x_2)\varphi(y_1, y_2)\right]_{y_1, y_2 = x_1, x_2}.$$

Das ergibt speciell für $\nu = 0, 1, 2$:

$\nu = 0 \quad (\Pi, \varphi)_0 = \Pi\cdot\varphi,$ (also das Product),

$\nu = 1 \quad (\Pi, \varphi)_1 = \Pi_1\varphi_2 - \Pi_2\varphi_1,$ (die Functionaldeterm.)

$\nu = 2 \quad (\Pi, \varphi)_2 = \Pi_{11}\varphi_{22} - 2\Pi_{12}\varphi_{21} + \Pi_{22}\varphi_{11}$

Ich behaupte nun, dass unser Normal-$\Pi$ folgender Differentialgleichung genügt

$$(\Pi, \varphi)_2 + (\Pi, \psi)_1 + (\Pi, \chi)_0 = 0$$

Hierin bedeutet $\varphi$ die Form, welche an sämtlichen singulären Stellen verschwindet:

$$\varphi = (x_1 - a x_2)(x_1 - b x_2)\cdots(x_1 - n x_2),$$

während $\psi$ und $\chi$ zwei ganz beliebige ganze Formen von den Graden $n-2$ und $n-4$ sind.

Umgekehrt, wenn $\Pi$ einer Differentialgleichung von dieser Gestalt genügt, ist es ein Normal-$\Pi$. Wir können also geradezu sagen:

<u>Unser normirtes $\Pi$ ist dadurch definirt, dass eine einfache Summe von Überschiebungen verschwindet.</u>

Die Grade von $\psi$ und $\chi$ müssen dabei $n-2$ und $n-4$ sein, damit die ganze Summe homogen ist. —

Zunächst können wir leicht die Übereinstimmung der Constantenzahl mit der Constantenzahl des Normal-$\Pi$ constatiren: $\Pi$ hat $3n-6$ wesentliche Constanten, oder wenn wir nicht nur auf die Doppelverhältnisse, sondern auf die Lage der singulären Punkte selbst achten, $3n-3$ Constanten. Die Differentialgleichung enthält in der Form $\varphi$, deren höchster Coefficient oben $=1$ angenommen wurde, $n$ Parameter, in $\psi$ $n-1$ und in $\chi$ $n-3$ Coefficienten, also $3n-4$ Parameter; das alles aber unter der Voraussetzung, daß der Grad $k$ von $\Pi$ als fest angesehen wird. Derselbe ist aber an sich eines jeden beliebigen Wertes fähig, da er durchaus keine ganze oder rationale oder auch nur reelle Zahl zu sein braucht, und er muß bei unserer Differentialgleichung noch ausdrücklich festgelegt werden, damit sie überhaupt ein bestimmtes Problem vorstellt.*)

*) Anders ausgedrückt: Wir müssen neben unsere Differentialgleichung die andere stellen: $\Pi_1 x_1 + \Pi_2 \cdot x_2 = k \cdot \Pi$.

Wir müssen also in der Differentialgleichung den vorzugebenden Grad $\kappa$ als einen weiteren Parameter ansehen, und erhalten so im Ganzen $3n-3$ willkürliche Parameter, wie es sein soll.

Wir könnten von den $3n-3$ Constanten, welche in der Formel auftreten, gerne 3 durch lineare Transformation der $x_1, x_2$ zerstören. Es hätte dies aber gar keine tiefergehende Bedeutung, weil aus der Bauart unserer Gleichung ohne weiteres hervorgeht, daß das $\Pi$ in covarianter Weise an die drei Formen $\varphi, \psi, \chi$ angeknüpft ist.

Um zu zeigen, daß die homogene Differentialgleichung wirklich ein Normal-$\Pi$ definirt, werde ich – inconsequenter Weise, weil wir nicht geübt genug sind, mit homogenen Variablen zu operiren – das Verfahren einschlagen, daß ich sie geradezu in nichthomogene Gestalt umrechne. Zuerst drücke ich vermittelst der Euler'schen Relationen alle Differentialquotienten, in denen nach $x_2$ differenzirt ist, durch die Differentialquotienten $\Pi, \Pi_1, \Pi_{11}$ aus, in denen nur nach $x_1$ differenzirt ist. Ich setze also

$$\Pi_2 = \frac{\kappa\Pi - x_1 \Pi_1}{x_2},$$

$$\Pi_{12} = \frac{(k-1)\,\Pi_1 - x_1\,\Pi_{11}}{x_2}$$

$$\Pi_{22} = \frac{k(k-1)\,\Pi - 2(k-1)\,x_1\,\Pi_1 + x_1^2 \cdot \Pi_{11}}{x_2^2},$$

und analog beim $\varphi$, etc.
Dies eingesetzt gibt:

$$\frac{n(n-1)\cdot\varphi}{x_2^2}\cdot\Pi_{11} + \left(\frac{(n-2)\cdot\psi}{x_2} - \frac{2(k-1)(n-1)\varphi_1}{x_2^2}\right)\Pi_1 +$$

$$\left(\chi - \frac{k\,\psi_1}{x_2} + \frac{k(k-1)\,\varphi_{11}}{x_2^2}\right)\Pi = 0.$$

Nun schreiben wir etwa:

$$\frac{\Pi(x_1, x_2)}{x_2^{\,k}} = \mathfrak{P}(x), \quad \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2^{\,n}} = f(x),$$

$$\frac{\psi(x_1, x_2)}{x_2^{\,n-2}} = g(x), \quad \frac{\chi(x_1, x_2)}{x_2^{\,n-4}} = h(x),$$

und erhalten

$$n(n-1)\cdot f\cdot\mathfrak{P}'' + \left((n-2)g - 2(k-1)(n-1)f'\right)\mathfrak{P}' +$$

$$\left(h - k\cdot g' + k(k-1)f''\right)\mathfrak{P} = 0$$

oder

$$\mathfrak{P}'' + \left(\frac{(n-2)g}{n(n-1)f} - \frac{2(k-1)f'}{nf}\right)\mathfrak{P}' + \left(\frac{h - kg' + k(k-1)f''}{n(n-1)}\right)\cdot$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{f} = 0$$

Man sieht aus dieser Form sogleich, dass singuläre Punkte nur an den Verschwindungsstellen von $f(x)$ auftreten, abgesehen vom Punkte

$\infty$, der nur durch den Übergang zur nicht homogenen Schreibweise einen singulären Character erhalten hat. Ferner sehen wir, dass der Coefficient des letzten Gliedes nach Heraussetzung des Nenners $f$ eine ganze Function vom Grade $n-3$ ist. Es fehlen also vollständig die Glieder $\frac{\alpha'\alpha''}{x-a}(a-b)\cdots(a-n)$ u. s. w. welche den singulären Punkten $a, b, \ldots n$ entsprechen sollten. Das kann aber nicht anders geschehen, als indem

$$\alpha'\alpha''=0, \quad \beta'\beta''=0 \quad \text{u. s. w.}$$

ist, d. h. es muss an jedem singulären Punkte einer der beiden Exponenten verschwinden.

<u>Die sämtlichen singulären Punkte $a, b, \ldots n$ haben immer einen Exponenten $0$, weil mit $\frac{P}{f}$ nur eine ganze Function multiplicirt ist, weil also die in der allgemeinen Form an dieser Stelle vorkommenden Partialbrüche wegfallen.</u>

Der andere Exponent z. B. $\alpha$ des Punktes $a$ bestimmt sich leicht, aus der Bemerkung, dass der Coefficient von $P'$ an der Stelle $x=a$ wie $\frac{1-\alpha}{x-a}$ unendlich werden muss. Man findet aber, dass er in Wahrheit mit dem Coefficienten:

$$\frac{(n-2)\,g(a)}{n(n-1)\cdot f'(a)} - \frac{2(K-1)}{n}$$

unendlich wird, daß also

$$\alpha = 1 + \frac{2(K-1)}{n} - \frac{(n-2)\cdot g(a)}{n(n-1)\cdot f'(a)}$$

sein muß:

Die von Waelsch aufgestellte Differentialgleichung definirt, wenn wir unter $\Pi$ eine Form $k$ ten Grades verstehen, ein Normal-$\Pi$, welches die Wurzeln von $\varphi = 0$ zu singulären Punkten hat, und im einzelnen singulären Punkt die Exponenten $0$ und

$$\alpha = 1 + \frac{2(K-1)}{n} - \frac{(n-2)\cdot g(a)}{n(n-1)\cdot f'(a)}$$

besitzt.

Mo. d. 30. Apr. 1894.] Im Anschluß hieran mache ich auf folgende schöne Eigenschaft der Waelsch'schen Differentialgleichung aufmerksam:

Man findet die singulären Stellen $a, b, \dots n$ der Differentialgleichung durch $0$-Setzen der Function $f$, oder was dasselbe heißt, der Form $\varphi(x_1, x_2)$. Zur Berechnung der Exponenten $\alpha, \beta, \dots \nu$ braucht man, nachdem man die singulären Stellen selbst, also die

Function $f$, als bekannt ansieht, nur noch die Function $g$, oder homogen gedacht, die Form $\psi$ hinzu zu nehmen, und endlich nach Festlegung der singulären Punkte und der Exponenten ergiebt die Form $\chi(x_1, x_2)$ die $n-3$ accessorischen Parameter. So bestimmt also in der Waelsch'schen Differentialgleichung

$$(\overset{\kappa}{\Pi}, \overset{n}{\varphi})_2 + (\overset{\kappa}{\Pi}, \overset{n-2}{\psi})_1 + (\overset{\kappa}{\Pi}\, \overset{n-4}{\chi})_0 = 0$$

das erste Glied die singulären Punkte, das zweite Glied die Exponenten, das dritte die accessorischen Parameter

Die elegante Form, in welcher bei unserer Normalgleichung die singulären Punkte, die Exponenten und die accessorischen Parameter durch die Coefficienten von $\varphi, \psi, \chi$ vertreten werden, lässt es als wahrscheinlich erscheinen, daſs eine Benutzung der Normalform angezeigt ist, sobald man neben $x$ die genannten drei Gröſsen als veränderlich betrachten will.

Ich möchte ferner noch einige specielle Bemerkungen hinzufügen:

1.) Für $n=3$ sollte $\chi$ eine ganze rationale Form vom Grade $-1$ mit 0 Coefficienten sein, d. h. sie muss identisch 0 sein.

Die Normalgleichung im hypergeometrischen Fall heisst also

$$(\overset{k}{\Pi}, \overset{3}{\varphi})_2 + (\overset{k}{\Pi}, \overset{1}{\psi})_1 = 0.$$

In dieser Gestalt hat Hilbert in Math. Ann. 30. 1887 die Differentialgleichung angesetzt, nur dass bei Hilbert, wie auch bei Waelsch das Interesse nur darauf gerichtet ist, ganze rationale Formen, Polynome, zu finden, welche einer solchen Relation genügen, so dass die Allgemeingültigkeit des Ansatzes für die Theorie der linearen Differentialgleichungen nicht in Augenschein tritt.

2.) Wir wollen zusehen, was für einen Spezialfall wir erhalten, wenn wir identisch

$$\psi \equiv 0$$

setzen, wenn wir also nur eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(\overset{k}{\Pi}, \overset{n}{\varphi})_2 + (\overset{k}{\Pi}, \overset{n-4}{\chi})_0 = 0$$

ins Auge fassen. Dann ergibt unsere Formel für die Exponenten, dass alle Exponenten einander gleich, nämlich

$$\alpha = \beta = \cdots\cdots = \nu = \frac{n+2k-2}{n}$$

werden. Hiervon ist es nun noch ein weiter specialisirter Fall, auf den man durch die mathematische Physik hingeführt wird, nämlich der Fall der <u>allgemeinen Lamé'schen Differentialgleichung</u>. Ich darf mich in Betreff dieses Gegenstandes auf meine Vorlesung vom W. 1889/90 beziehen, deren Inhalt zugleich die Grundlage für die Preisarbeit von <u>Bôcher</u> bildet: „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie". Dort wird gezeigt, wie die mathematische Physik dazu veranlaßt, die Idee der allgemeinen Lamé'schen Gleichung zu bilden, aus der alle in der Potentialtheorie sonst gebräuchlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung durch Grenzübergang hervorgehen. Diese allgemeine Lamé'sche Gleichung erhält man, indem man alle Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \ldots\ldots \nu = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn die Anzahl $n$ der singulären Punkte vorgegeben ist, indem man neben $\psi \equiv 0$:

$$K = \frac{4-n}{4}$$

setzt. Also

<u>Wir verstehen unter der allgemeinen Lame'schen Gleichung in Normalform denjenigen Fall der allgemeinen Normalform, der entsteht, wenn $\psi$ identisch $= 0$ ist und wenn $k = \frac{4-n}{4}$ gesetzt wird.</u>

Man sieht, wie elegant sich bei Benutzung homogener Schreibweise die Formeln darstellen; wir werden daher stets dann die homogene Formulirung vorziehen, wenn es sich um explicite Rechnungen handelt. Aber, wie wir uns vorbehalten haben, je nach der besondern Brauchbarkeit bald die eine, bald die andere Schreibweise zu verwenden, werden wir, wenn wir uns über den allgemeinen Verlauf der Functionen unterrichten wollen, durchaus die unhomogenen Variablen benutzen, ja wir werden sogar da, wo sich das homogene von selbst einstellt, unhomogen machen: Wir werden nicht nur $\frac{x_1}{x_2} = x$ setzen, sondern auch $\frac{y_1}{y_2} = \eta$ als unabhängige Variable einführen.

<u>Wir werden das Homogene immer heranziehen, wenn es sich um definitive Formulirung der Rechnungen handelt, dagegen werden wir zur vorläufigen functio-</u>

nentheoretischen Untersuchung durchaus das Nichthomogene bevorzugen und statt $y_1, y_2$ den Quotienten $\frac{y_1}{y_2} = \eta$ in die Betrachtung einführen.

Des Nähern vergleiche man wegen der Einführung des $\eta$ S. 250 der Wintervorlesung über die hypergeometrische Function.

$\eta$ genügt einer Differentialgleichung 3. Ordnung, nämlich, wenn

$$y'' + p y' + q y = 0$$

die Differentialgleichung ist, der $y_1$ und $y_2$ genügen, der Gleichung

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = [\eta]_x = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}.$$

Haben wir diese Gleichung, die „Differentialresolvente 3. Ordnung", integrirt, so können wir leicht zu den Lösungen $y_1, y_2$ der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgelangen durch die Formeln:

$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int^x p\,dx}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta'}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int^x p\,dx}.$$

(Vergl. Wintervorlesung S. 268.)

Diese Formeln auf unsere explicit hingeschriebene Differentialgleichung S. 7 angewandt ergibt für $\eta$ die Gleichung:

$$[\eta]_x = \frac{1}{(x-a)\cdots(x-n)}\left\{\frac{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)(a-b)\cdots(a-n)}{x-a}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{\frac{1}{2}(1-\nu^2)(n-a)(\cdots)(n-m)}{x-n}+G'_{n-4}(x)\right\},$$

wobei $G'_{n-4}(x)$ ein Polynom $(n-4)$ten Grades ist, wie $G_{n-4}(x)$ in der Differentialgleichung 2. Ordnung, allerdings nicht dasselbe Polynom. Natürlich kommen in dieser Differentialgleichung für den Quotienten der beiden Partikularlösungen nicht mehr die Exponenten $\alpha'$, $\alpha''$; u. s. w. selbst vor, sondern nur noch die Exponentendifferenzen $\alpha = \alpha' - \alpha''$, u. s. w. Eben dies ist eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der ursprünglichen Gleichung:

Der Vorzug der Differentialresolvente 3. Grades gegenüber der Differentialgleichung 2. Grades ist der, daß bloß die Exponentendifferenzen, nicht die Exponenten selbst hier auftreten.

Für den Übergang von $\eta$ zu $y_1$ und $y_2$ haben wir hier

$$e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} = (x-a)^{\frac{\alpha'+\alpha''-1}{2}}(x-b)^{\frac{\beta'+\beta''-1}{2}}\cdots(x-n)^{\frac{\nu'+\nu''-1}{2}}$$

in die Formeln für $y_1$, $y_2$ einzusetzen.

Ich habe die Differentialresolvente 3. Ordnung auf für die Normalform von Waelsch berechnet; um Ihnen jedoch dieselbe mitteilen zu können, muss ich erst noch bei einer allgemeinen Eigenschaft des Differentialausdrucks $[\eta]_x$ verweilen.

Bekanntlich bleibt $[\eta]_x$ vollständig ungeändert, wenn ich für $\eta$ eine beliebige lineare Function $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ setze.

Denn wir haben ja $[\eta]_x$ seinerzeit gerade von dieser Forderung aus als einfachste Differentialinvariante gegenüber linearen Substitutionen construirt.

Wie aber verhält sich $[\eta]_x$, wenn man nicht auf $\eta$, sondern auf $x$ eine lineare Transformation

$$X = \frac{ax+b}{cx+d}$$

anwendet.[2]

Man rechnet aus, dass

$$[\eta]_X = [\eta]_x \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^4}$$

wird.

Diese Formel kann wieder in eleganter Weise umgesetzt werden, wenn wir zu homogenen Variablen übergehen, indem wir

$$x = \frac{x_1}{x_2} \quad , \quad X = \frac{X_1}{X_2}$$

und

$$X_1 = a x_1 + b x_2$$
$$X_2 = c x_1 + d x_2$$

setzen. Dann können wir schreiben:

$$\left(\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x\right) = \left(\frac{1}{X_2^4}[\eta]_X\right)\cdot(ad-bc)^2.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x$ zeigt also gegenüber binären linearen homogenen Substitutionen von $x_1, x_2$ das einfache Verhalten, dass er sich nur mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante multiplicirt. D. h.:

Der Ausdruck

$$\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x$$

ist nicht nur gegenüber linearen Substitutionen von $\eta$ invariant, und zwar absolut invariant, sondern er ist auch invariant gegenüber linearen Substitutionen von $x$.

Setzen wir diesen Ausdruck auf die linke Seite der Differentialgleichung, so dürfen wir daher erwarten, dass auf der rechten Seite lauter Covarianten der Formen $\varphi, \psi, \chi$ auftreten.

Die Rechnung habe ich ausgeführt, indem ich Alles in unhomogene Gestalt umschrieb, und indem ich nachträglich wieder homogen machte; das Resultat der Rechnung ist folgendes:

Es bedeute $H(\varphi)$ die Hesse'sche Determinante

$$\mathcal{H}(\varphi) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2,$$

welche mit der zweiten Überschiebung von $\varphi$ über sich selbst $(\varphi,\varphi)_2$ bis auf einen Factor $\frac{1}{2}$ übereinstimmt.

Ferner sei die Functionaldeterminante von $\varphi$ und $\psi$ mit

$$\mathcal{T}(\varphi,\psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$$

bezeichnet.

Dann heißt die Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x = \frac{1}{n(n-1)\varphi}\left\{\frac{2(K-1)(K+n-1)\mathcal{H} + (n-1)(n+2K-2)\,\mathcal{T} - (n-2)^2\psi^2}{n(n-1)\varphi} + 2\chi\right\}.$$

In dem speciellen Fall, wo alle Exponentendifferenzen gleich sind, wo also $\psi$ verschwindet, geht die Gleichung über in

$$\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x = \frac{\frac{1}{2}(\alpha^2-1)\mathcal{H}}{(n-1)^2\varphi^2} + \frac{2\chi}{n(n-1)\varphi}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{n+2K-2}{n}$$

ist, und endlich im Lamé'schen Fall $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x = -\frac{3}{8}\cdot\frac{\mathcal{H}}{(n-1)^2\varphi^2} + \frac{2\chi}{n(n-1)\varphi}. —$$

Ich will jetzt dazu übergehen, zu schildern, welche <u>specielle Bedeutung die allgemeinen Lamé-schen Gleichungen</u>: <u>in der Theorie der</u>

der übrigen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt den Ideen zufolge, welche in meiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen und in Böcher's Preisschrift entwikkelt sind.

Die Lamé'sche Gleichung in Normalform lautet:

$$(\overset{k}{\Pi}, \overset{n}{\varphi})_2 + \overset{k}{\Pi} \cdot \overset{n-4}{\chi} = 0,$$

wobei $K = \frac{4-n}{4}$

ist. Alle Exponentendifferenzen sind $= \frac{1}{2}$.

Dabei ist aber vorausgesetzt, dass die $n$ Wurzeln von $\varphi = 0$ sämtlich verschieden sind. Was geschieht nun aber, wenn mehrere Wurzeln zusammenfallen? Da werden wir sehen:

Läßt man in der allgemeinen Lamé'schen Differentialgleichung 2. Ordnung die singulären Punkte beliebig zusammenrücken, so erhält man die allgemeinste lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, und es ist die hier entstehende Auffassung, welche die Lamé'sche Differentialgleichung an die Spitze stellt und aus ihr die weiteren Differentialgleichungen derivirt, durch das Studium der mathematischen Physik, nämlich der Potentialtheorie, notwendig gegeben.

Es entsteht nämlich durch Zusammenrücken zweier Punkte mit den Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}$ ein Punkt mit einer beliebigen Exponentendifferenz, und durch Zusammenrücken dreier oder einer noch größeren Zahl im Allgemeinen ein irregulärer Punkt von um so höherem Character, je mehr Punkte zusammengerückt sind.

[Di. d. 1. Mai 1894.

Wir wollen dies nur, was reguläre Punkte betrifft, näher prüfen. Wir wollen nämlich die Richtigkeit folgender Behauptung nachweisen:

Wenn zwei singuläre Punkte der Lamé'schen Gleichung zusammenfallen, so entsteht ein regulärer Punkt von allgemeiner Exponentendifferenz, dessen beide Exponenten einander gleich sind.

Eine Lamé'sche Normalgleichung in nicht homogener Gestalt geschrieben, hat nach p. die Form

$$P'' + \frac{f'}{2f}\cdot P' + \frac{h + \frac{1}{16}n(n-4)f''}{n(n-1)}\cdot\frac{P}{f} = 0.$$

Ist nun $x - a$ ein einfacher Factor von $f$, und denkt man sich sowohl den Coefficienten $\frac{f'}{2f}$ von $P'$, wie den Coefficienten

$$\frac{h+\frac{1}{16}n(n-4)f''}{n(n-1)\cdot f}$$

nach Partialbrüchen zerlegt, so lautet der Coefficient von $\frac{1}{x-a}$ im zweiten Glied $\frac{1}{2}$ und im letzten Glied kommt $\frac{1}{(x-a)^2}$ gar nicht vor, d. h. es hat den Coefficienten $0$. Also ist

$$1-\alpha'-\alpha''=\frac{1}{2}, \quad \alpha'\alpha''=0,$$

folglich etwa $\alpha'=\frac{1}{2}$, $\alpha''=0$, wie es sein soll.

Anders, wenn $x-a$ ein Doppelfactor von $f$ ist; dann ist der Coefficient von $\frac{1}{x-a}$ in $\frac{f'}{2f}$ gleich $1$, und der Coefficient von $\frac{1}{(x-a)^2}$ im letzten Glied gleich

$$\frac{h(a)+\frac{n(n-4)}{16}\cdot f''(a)}{n(n-1)\frac{1}{2}f''(a)},$$ so daſs man die Gleichungen hat

$$1-\alpha'-\alpha''=1,$$

$$\alpha'\alpha''=\frac{h(a)+\frac{n(n-4)}{8}(a-b)\ldots(a-n)}{n(n-1)(a-b)\ldots(a-n)}=C.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\alpha'+\alpha''=0,$$

d. h. die beiden Exponenten sind entgegengesetzt gleich, in der zweiten Gleichung aber kann die rechte Seite einen ganz beliebigen Wert haben, sodass also auch $\alpha'$ und $\alpha''$ ganz beliebiger, nur entgegengesetzt gleicher Werte fähig sind.

Um z. B. von einer allgemeinen Lamé'-schen Gleichung zu einer hypergeometrischen Gleichung mit allgemeinen Exponentendifferenzen zu gelangen, nehmen wir $n=6$ und lassen die 6 Wurzeln von $\varphi=0$ päarweise zusammenfallen, nach dem Schema:

Wir setzen also

$$\varphi(x_1, x_2) = (xa)^2 (xb)^2 (xc)^2.$$

Da $n=6$ ist, haben wir $\kappa = -\frac{1}{2}$ zu setzen, und bekommen also die Differentialgleichung:

$$\left(\overset{-\frac{1}{2}}{\Pi}, \overset{6}{\varphi}\right)_2 + \left(\overset{-\frac{1}{2}}{\Pi}, \overset{2}{\chi}\right)_0 = 0$$

Die hierdurch definirte $\Pi$-Form hat das Schema

$$\Pi \left| \begin{matrix} a & b & c & -\frac{1}{2} \\ +\frac{\alpha}{2} & +\frac{\beta}{2} & +\frac{\gamma}{2} & x_1, x_2 \\ -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & \end{matrix} \right|.$$

Das ist aber gerade eine solche $\Pi$-Form, wie ich sie im vorigen Semester als „Normal-$\Pi$ erster Art" bezeichnet habe. Also:

<u>Beispielsweise erscheint die Normalform</u>

## 1. Art der hypergeometrischen Function als Grenzfall einer allgemeinen Lamé'schen Gleichung mit $n = 6$.

Was aber die Functionen der mathematischen Physik betrifft, so ist es der Fall von 5 Verzweigungspunkten, aus dem sie sich alle ableiten. Die nähere Ausführung dieser Idee möge man in meiner Vorlesung über Lamé'sche Functionen, oder in Böschers Arbeit nachsehen;*) hier will ich nur die allgemeine Tabelle mitteilen.

1.) 5 getrennte singuläre Punkte:

Allgemeine Lamé'sche Gleichung (übrigens Lamé selbst unbekannt)

Diese Functionen stellen sich ein, wenn man zur Coordinatenbestimmung im Raum ein System von confocalen Cycliden zu Grunde legt.

2.) 3 getrennte, zwei zusammenfallende Punkte.

Functionen der 3-axigen Flächen 2. Grades. Lamé'sche Functionen im engeren Sinne.

3.) 1 einfacher, zwei doppelte Punkte.

Rotationsflächen 2. Grades. Diese Functionen

*) Die bald noch weiter ausgeführt in Buchform erscheinen soll.

sind bekannt als die „Kugelfunctionen einer Variablen“:

$P_n(\cos\vartheta)$ oder $X_n$ (Legendre'sche Polynome).

Man sieht aus dem Schema, daß die Kugelfunctionen hypergeometrische Functionen sind, bei denen aber eine Exponentendifferenz $= \frac{1}{2}$ ist. In der That haben wir auch im vorigen Semester die Kugelfunctionen in dieser Weise definirt.

Kugelfunctionen eines Arguments sind diejenigen speciellen Fälle der hypergeometrischen Function, wo eine Exponentendifferenz $= \frac{1}{2}$ ist.

4.) 2 einfache, ein 3facher Punkt

Functionen des zweiaxigen Cylinders.

5.) 1 doppelter und 1 dreifacher Punkt:

Functionen des Rotationscylinders = Bessel'sche Functionen.

6.) 1 einfacher und 1 vierfacher Punkt:

Functionen des parabolischen Cylinders.

7.) 1 fünffacher Punkt:

Diese Art kommt nicht zur Verwendung und führt keinen besondern Namen. –

Soviel für jetzt über die Idee, aus der allgemeinen Lamé'schen Gleichung andere durch Grenzübergang entstehen zu lassen. Jedenfalls sehen Sie aus der letzten Übersicht, in der die scheinbar so verschiedenartigen Functionen der mathematischen Physik unter einem gemeinsamen höheren Gesichtspunkt erscheinen, dass die genannte Idee nicht nur eine mathematische Abstraction ist, sondern in der Natur der Sache liegt.

## B. Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

Jetzt wollen wir uns, nach Betrachtung der Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, dazu wenden, die <u>Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten</u> ins Auge zu fassen. D. h. in der Gleichung

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

oder $\quad [\eta]_x = r(x)$

sollen $p, q$ bezw. $r$ nicht mehr rationale, sondern algebraische Functionen von $x$ vorstellen. Es ist das genau die entsprechende Verallgemeinerung des Problems, als wenn man in der Integralrechnung nach Erle digung der Integrale von rationalen Functionen zuerst Quadratwurzeln, dann die allgemeinsten algebraischen Functionen als Integranden hereinzieht, und so zu den Abel'schen Integralen gelangt.

Der characteristische Gedanke für die Behandlung der Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten ist derselbe, welcher in der Theorie der Abel'schen Integrale seine Ausbildung gefunden hat.

Nämlich sei $s$ irgend eine algebraische Function von $x$, definirt durch eine algebraische Gleichung

$$f(s,x) = 0.$$

Dann werden wir folgendermaßen verfahren:

Wir wollen nicht eine einzelne isolirte Differentialgleichung für sich betrachten, sondern alle Gleichungen zusammen, deren Coefficienten sich aus der Irrationalität $s$ und $x$ selbst rational aufbauen.

Jede Gleichung $f(s,x)=0$ definirt nämlich ein „algebraisches Gebilde", welches alle diejenigen Functionen umfaßt, die sich rational aus $s$ und $x$ zusammensetzen lassen. Von einer derartigen Function sagt man dann, sie gehöre zu dem algebraischen Gebilde, oder, sie sei auf dem algebraischen Gebilde eindeutig. Abel'sche Integrale, mit solchen Functionen von $s$ und $x$ gebildet, wird man ebenfalls als zu dem algebraischen Gebilde gehörig bezeichnen, und gerade so sagen wir von einer Differentialgleichung, deren Coefficienten $p$ und $q$ in $x$ und $s$ rational sind, daß sie zu dem durch die Gleichung $f(s, x)$ definirten algebraischen Gebilde „gehört"

Wir verabreden also, immer diejenigen Differentialgleichungen gleichzeitig zu betrachten, welche zu demselben algebraischen Gebilde gehören.

Wir werden dann den Stoff in ähnlicher Weise anordnen können, wie in der Theorie der Abel'schen Integrale:

Sowie man die Abel'schen Integrale auf einem gegebenen algebraischen Gebilde einteilt in überall endliche Integrale, welche keine Unendlichkeitspunkte haben, und in solche Integrale, welche 1, 2, 3, ... vorgeschriebene Unendlichkeitspunkte haben, so werden wir die linearen Differentialgleichungen auf einem algebraischen Gebilde einteilen in solche, welche keine singulären Punkte auf dem algebraischen Gebilde haben, d. h. also unverzweigte Differentialgleichungen und in solche, welche eine gegebene Anzahl von singulären Stellen von irgend welchem vorgeschriebenen Character haben.

Nun müssen wir uns natürlich zuerst eine Vorstellung davon machen, was ein eindimensionales algebraisches Gebilde ist, ein solches mit einer unabhängigen Variablen. Hiermit muß ich weiter zurückgreifen als auf die Vorlesung des letzten Semesters, nämlich auf meine beiden Vorlesungen über Riemann'sche Flächen 1891-92.

Wenn wir eine algebraische Gleichung haben:

$$f(s, x) = 0,$$

und wir denken uns $x$ als unabhängige Variable, so giebt es zur Veranschaulichung des Verlaufs von $s$ zwei verschiedene Arten der geometrischen Interpretation.

Einmal kann man sich die sämtlichen reellen und complexen Werte der Variablen $x$ als die Punkte einer Ebene, der „complexen Zahlenebene" deuten. Indem wir nun darauf unser Augenmerk richten, dass jedem Werte von $x$ immer eine bestimmte Zahl von Werten der Function $s$ entspricht, denken wir uns die $x$-Ebene mit einer mehrblättrigen Riemann'schen Fläche überdeckt, in der wir die verschiedenen zu einem $x$ gehörigen Werte $s$ an den verschiedenen über der Stelle $x$ der $x$-Ebene übereinander liegenden Stellen der Riemann'schen Fläche localisirt denken.

Die andere Art der Interpretation berücksichtigt nur die reellen Werte von $x$, indem man dieselben längs einer Geraden deutet. An Stelle der mehrfach überdeckten $x$-Ebene tritt dann eine mehrfach überdeckte $x$-Gerade; was aber die complexen Werte betrifft, so drückt man sich, obwohl sie der Anschauung bei dieser Deutung nicht zugänglich sind, doch ebenso aus, als ob sie reell wären.

Die erste ist die Methode der Functionentheoretiker in engerem Sinne, die zweite die Methode der „Geometer", obwohl die erstere, welche wirklich jeden Wert geometrisch vorstellt, und jede Beziehung durch Figuren begleiten kann, gewiss viel mehr den Namen Geometrie verdient, als die zweite, welche von der Geometrie nur die Sprechweise, die Terminologie entlehnt, sobald sie über das Reelle hinausgeht, was doch unumgänglich ist. Wir aber werden auch hierin uns vorbehalten, bald die eine, bald die andere Methode zu verwenden, da jede ihre eigentümlichen Vorzüge hat, und man darum beide kennen muss.

Weiter: Wenn wir auf einem algebraischen Gebilde zu operiren haben, so müssen wir den Gesichtspunkt der <u>eindeutigen Transformation</u> heranziehen: Es seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{X}$ zwei verschiedene algebraische Functionen auf dem durch

$$f(s,x)=0$$

gegebenen algebraischen Gebilde, also etwa

$$\mathfrak{S}=R_1(s,x) \qquad \mathfrak{X}=R_2(s,x).$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden wir mit Hülfe der Gleichung $f(s,x)=0$ $s$ und $x$ eliminiren können und erhalten so eine neue algebraische Gleichung:

$$F(\mathfrak{S},\mathfrak{X})=0,$$

von der wir sagen, sie entstehe aus der

Gleichung $f(s, x) = 0$ durch eindeutige Transformation. Die Abhängigkeit zwischen $S$ und $X$ können wir nun wieder durch eine mehrblättrige Riemann'sche Fläche oder durch eine mehrfach überdeckte $X$-Axe deuten. So stellen sich neben die ursprüngliche Riemann'sche Fläche unendlich viele andere, die alle dasselbe algebraische Gebilde vorstellen, nur immer auf eine andere unabhängige Variable bezogen. Man muss sich nun durchaus daran gewöhnen, alle diese verschiedenen Riemann'schen Flächen, welche auseinander durch eindeutige Transformation hervorgehen, als durchaus gleich berechtigt anzusehen:

<u>Alle die verschiedenen Riemann'schen Flächen, die sich ergeben, wenn man auf die ursprüngliche Gleichung $f(s, x) = 0$ beliebige eindeutige Transformationen anwendet, sind Abbilder ein und desselben algebraischen Gebildes, sozusagen nur verschiedene Erscheinungsformen desselben algebraischen Zusammenhangs.</u>

Neben die Interpretation des algebraischen

Gebildes durch eine mehrfach überdeckte $x$-Axe oder $x$-Ebene stellt sich eine freiere geometrische Deutung in einem Raume von 2, 3 und mehr Dimensionen [statt auf der eindimensionalen $x$-Axe].

Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ die (nichthomogenen) Coordinaten eines Punktes in einem $n$-dimensionalen Raume. Setzen wir nun

$$x_1 = R_1(s,x), \; x_2 = R_2(s,x), \dots x_n = R_n(s,x)$$

unter $s$ und $x$ die durch die algebraische Gleichung

$$f(s,x) = 0$$

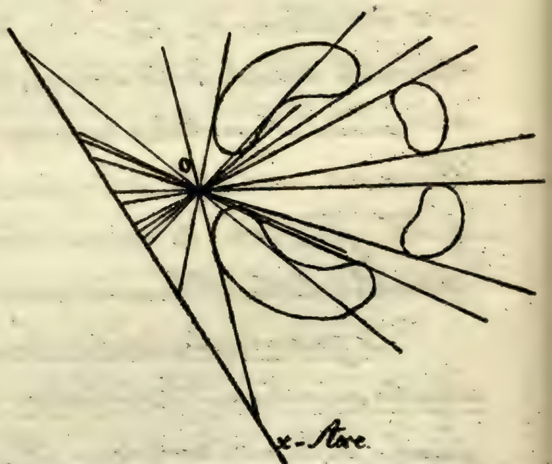
verbundenen Größen verstanden, so stellen $x_1, x_2, \dots x_n$, wenn man $x$ und damit auch $s$ als variabel denkt, die Coordinaten eines Punktes einer gewissen algebraischen Curve im $n$ dimensionalen Raume vor, z. B. für $n=2$ eine ebene Curve, für $n=3$ eine gewöhnliche Raumcurve.

Als geometrische Erscheinungsform eines algebraischen Gebildes kann nicht nur ein mehrfach überdeckter $R_1$, sondern eine beliebige algebraische Curve in einem $R_1$, $R_2$, $R_3$, ... einem $R_n$ gelten.

Von der Curve in einem höheren Raume

kann man zu einer entsprechenden Curve in einem Raume von geringerer Dimensionszahl durch das Verfahren der Projection gelangen. Hat man z. B. eine Curve im 3dimensionalen Raum, so kann man sie von einem beliebigen Punkt aus auf eine beliebige Ebene projiciren und erhält so eine ebene Curve, welche auf die Raumcurve im Allgemeinen ein – eindeutig bezogen ist.

Oder denken wir uns beispielsweise eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung; wir können dieselbe von irgend einem Punkte O auf eine gerade Linie, die x-Axe, projiciren. Da jeder Projectionsstrahl die Curve vierter Ordnung in 4 Punkten trifft, also 4 Punkten der Curve ein und derselbe Punkt der x-Axe entspricht, so haben wir uns die x-Axe vierfach überdeckt zu denken, bezw. wenn wir behufs Deutung auch der complexen Werte von x die x Axe durch eine x-Ebene ersetzt,



zen, haben wir uns die x-Ebene 4fach überdeckt zu denken. Die vier Blätter der so resultirenden Riemann'schen Fläche hängen überall da durch einen Verzweigungspunkt zusammen, wo eine der von O an die Curve gelegten Tangenten die x-Axe trifft, und zwar entspricht jede einfache Tangente gerade einem einfachen Verzweigungspunkt der Fläche. Wir wissen nun, aus den Plücker'schen Formeln, dass man an eine allgemeine ebene Curve 4. Ordnung von einem beliebigen Punkte aus immer 12 Tangenten legen kann. Daraus schliessen wir sofort, dass die 4-blättrige Riemann'sche Fläche, welche der allgemeinen Curve 4. Ordnung entspricht, 12 Verzweigungspunkte besitzt.

Ein Beispiel für eindeutige Transformation, welche von der einen Erscheinungsform eines algebraischen Gebildes zu einer andern hinführt, ist die Projection einer Curve aus einem höheren Raum in einen niedrigeren Raum, beispielsweise die Projection einer ebenen Curve 4. Ordnung auf eine vierfach überdeckte Gerade, wobei

12 Verzweigungspunkte auftreten.

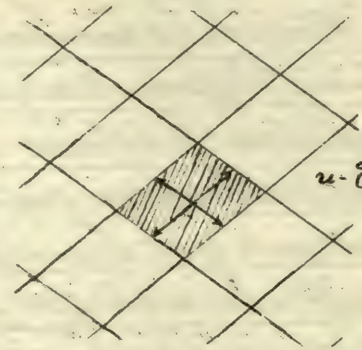
Sie sehen, wie hier die projective Geometrie in höheren Räumen hereinspielt, und dass es sehr unzweckmässig sein würde, durchaus an der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche zu haften. Aber letztere hat wieder vor der Deutung durch eine Curve den Vorzug voraus, alles, auch die Verhältnisse im Complexen, wirklich geometrisch vor Augen zu führen. Wir müssen daher beides kennen, und sowohl die gewöhnliche functionentheoretische, wie die projectiv-geometrische Betrachtungsweise vollständig beherrschen, um im gegebenen Falle uns der zweckmässigsten Vorstellungsweise zu bedienen.

Nach diesen Bemerkungen, über die verschiedenen Darstellungsweisen eines algebraischen Gebildes kehren wir wieder zu unserm engeren Thema zurück, zum Studium der Differentialgleichungen auf einem gegebenen algebraischen Gebilde.

Ein bestimmtes algebraisches Gebilde hat, wie wir sahen, unendlich viele verschiedene Erscheinungsformen, schon bei Deutung in einer Dimension; noch viel mehr, wenn man in höhere Räume geht. Da gibt es nun zwei – im Grunde allerdings nicht allzu verschiedene – Möglichkeiten, sich von der Zufälligkeit der Erscheinungsform frei zu machen:

Wir werden uns einmal das Princip bilden, die Differentialgleichungen auf den algebraischen Gebilden so zu behandeln, dass nur solche Elemente hervortreten, die bei eindeutiger Transformation invariant sind, also von der besonderen Erscheinungsform des algebraischen Gebildes unabhängig sind, oder aber das andere Princip, dass wir bei Behandlung der Differentialgleichungen jeweils diejenige Erscheinungsform des algebraischen Gebildes heraussuchen, welche für den besonderen Zweck die einfachste ist.

Ich habe bis jetzt nur von algebraischen Darstellungen eines algebraischen Gebildes gesprochen; oft aber ist es sehr viel einfacher, ein algebraisches Gebilde in transcendenter Form darzustellen. So kann man z. B. im Falle $p = 1$ $s$ und $x$, und damit jede algebraische Function des Gebildes als eine eindeutige doppeltperiodische Function, als elliptische Function einer Hülfsvariablen $u$ darstellen. Wir haben uns die $u$-Ebene in lauter congruente Parallelogramme geteilt zu denken, von denen dann jedes einzelne für sich vermöge der linearen Zuordnung der gegenüberliegenden Kanten, — sie gehen durch blosse Parallelverschiebung aus einander hervor — ein vollständiges Abbild des ganzen algebraischen Gebildes ist.




Es entspricht nämlich jedem durch die Gleichung $f(s,x)=0$ verbundenen Wertsystem $s, x$ ein und nur ein Punkt eines jeden Parallelogramms, und umgekehrt jedem Punkte eines Parallelogramms ein und nur ein Wertsystem $s, x$. Wir werden es daher für zweckmässig erkennen, auch bei Behandlung der Differentialgleichungen $u$ als unabhängige Variable einzuführen; die Gleichung geht dann in eine ebenfalls lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, aber mit eindeutigen doppeltperiodischen Functionen von $u$ als Coefficienten über; unter dieser Überschrift findet man denn auch die Differentialgleichungen auf algebraischen Gebilden $p = 1$ in den Lehrbüchern. Also:

Unter Umständen sind auch transcendente Darstellungen der algebraischen Gebilde sehr nützlich. Wenn z. B. das Geschlecht eines algebraischen Gebildes $= 1$ ist, so wird es vortheilhaft sein, $s$ und $x$ als doppeltperiodische Functionen einer Hülfsgröſse $u$ darzustellen, worauf sich die Differentialgleichung, die wir untersuchen wollen, in eine Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten verwandelt.

Wir fragen uns, ob es ähnliche einfache transcendente Darstellungen eines algebraischen Gebildes auch im Falle eines höheren Geschlechtes gibt, ob sich etwa auch für $p > 1$ $s$ und $x$ als eindeutige Functionen einer Hülfsgröſse darstellen lassen.? Es zeigt sich, daſs dies in der That möglich ist, und zwar mit Hülfe der „automorphen Functionen". Aber einerseits ist die Theorie der automorphen Functionen noch lange nicht so ausgebildet, daſs wir thatsächlich durch das postulirte Verfahren eine Vereinfachung in den Rechnungen erzielen würden; andererseits wollen wir ja gerade erst von den Differentialgleichungen aus zur Theorie der automorphen Functionen vordringen; werden doch die automorphen Functionen gewöhnlich geradezu durch Differentialgleichungen auf einem algebraischen Gebilde erst definirt.

Wir sagen:

<u>Etwas analoges, wie die Darstellung der algebraischen Gebilde vom Geschlechte 1 durch doppeltperiodische Functionen einer Hülfsgrösse u, ist bei höherem p die Darstellung von s und x durch automorphe Functionen einer Hülfsgrösse u. Doch werden wir von dieser Darstellung hier in dieser Vorlesung keinen Gebrauch machen, weil die Theorie der automorphen Functionen noch nicht entwickelt genug ist, und weil wir andererseits die Theorie der automorphen Functionen für ein späteres Semester gerade dadurch zugänglich machen wollen, daß wir hier die Differentialgleichungen</u>

dungen mit algebraischen Coefficienten studiren.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir an concrete Aufgaben heran gehen, indem wir nacheinander die Fälle $p=0$, $p=1$, $p>1$ behandeln.

## Geschlecht $p=0$.

Wenn das Geschlecht $p=0$ ist, so läßt sich in der algebraischen Relation

$$f(s,x)=0$$

$s$ und $x$ beides rational durch eine gewisse dritte ebenfalls zum Gebilde gehörigen Function $\xi$ darstellen:

$$s=r_1(\xi)\,,\; x=r_2(\xi).$$

Die Hülfsgröße $u$ ist also bei $p=0$ eine algebraische Function $\xi$ des Gebildes selbst, wir nennen sie die „Hauptfunction" auf dem Gebilde. Wählen wir diese als unabhängige Variable, so werden die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen von $\xi$.

Ist bei der Gleichung $f(s,x)=0$ das Geschlecht $p=0$, so kann man statt $s,x$ eine andere algebraische Function des Gebildes die sogenannte „Hauptfunction" $\xi$. als unabhängige Variable einführen, in welcher $s$ und $x$ beide rational sind, und wir haben dann wieder Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten zu studieren und fallen dadurch auf den Gegenstand der vorigen Stunden zurück.

## Elliptische Gebilde.

Es sei nun $p = 1$. Da pflegt man gewöhnlich eine bestimmte Normalform der algebraischen Gleichung zu Grunde zu legen, nämlich die Gleichung

$$s^2 = f_4(x),$$

worin $f_4(x)$ ein Polynom vierten Grades vorstellt. Wir haben so eine zweifach überdeckte $x$-Axe, bezw. $x$-Ebene mit 4 Verzweigungspunkten. Neben diese Darstellung tritt die Darstellung durch elliptische Functionen einer Hülfsgröße $u$, welche durch das „Integral 1. Gattung"

$$u = \int \frac{dx}{s}$$

definirt ist.

In $s, x$ hat die Differentialgleichung 3. Ordnung – um von dieser zuerst zu sprechen und erst nachher zur linearen Differentialgleichung aufzusteigen – die Gestalt:

$$[\eta]_x = R(s,x)$$

worin $R$ eine rationale Function bedeutet.

Um nun zu der andern Darstellung, durch das Integral 1. Gattung, überzugehen, benutzen wir folgende durch einfache Rechnung zu beweisende Formel für die Transformation unseres Differentialparameters bei Einführung einer neuen Variablen:

$$[\eta]_x = [u]_x + [\eta]_u \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

Setzen wir in diese Formel, welche allgemein für ganz beliebige Functionen $u$ von $x$ gilt, den Ausdruck

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

ein, so bekommen wir

$$[\eta]_u = f\cdot[\eta]_x + \frac{4ff''-3f'^2}{8f} = f\cdot R(s,x) + \frac{4ff''-3f'^2}{8f} = P(s,x).$$

Hierin ist $P(s,x)$ offenbar wieder eine rationale Function von $s$ und $x$. Nun wissen wir aber, daſs jede rationale Function von $s, x$ eine eindeutige doppeltperiodische Function $F(u)$ ist, wie auch umgekehrt jede eindeutige doppeltperiodische Function $F(u)$ ohne wesentlich singuläre Punkte eine rationale Function von $s$, $x$ ist. Wir haben also den Satz:

<u>Bei Zugrundelegung des $u$ als unabhängige Variable werden wir uns mit Differentialgleichungen</u>

$$[\eta]_u = F(u)$$

<u>zu beschäftigen haben, deren rechte Seite $F(u)$ eine eindeutige doppeltperiodische Function von $u$ ist, welche nur ausserwesentlich singuläre Punkte besitzt.</u>

[Mo. d. 7. Mai 1894]. Ich will heute noch als Nachtrag zur letzten Stunde die algebraische Form der Differentialgleichung 3. Ordnung, mit der Variablen $x$, damit Sie das einfache Bildungsgesetz derselben erkennen, in homogener Gestalt hinschreiben. Statt der Function $f$, welche die Verzweigungspunkte der algebraischen Function $s$ auf der zweiblättrigen Fläche $x$ bestimmt, will ich die Form vierten Grades

$$x_2{}^4 \cdot f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \varphi(x_1, x_2)$$

einführen. Bedeutet dann $\mathcal{H}$ die Hesse'sche Determinante:

$$\mathcal{H} = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2 ,$$

so schreibt man die Differentialgleichung folgendermaßen:

$$\frac{1}{X_2^2}[\eta]_x = -\frac{1}{24}\cdot\frac{\mathcal{H}}{\varphi^2} + [\eta]_u \cdot \frac{1}{\varphi} = -\frac{1}{24}\cdot\frac{\mathcal{H}}{\varphi^2} + \frac{P(s,x)}{\varphi}.$$

Wir kehren nun wieder zur Differentialgleichung mit der transcendenten Variablen $u$ zurück.

In $$[\eta]_u = \mathcal{F}(u)$$
ist die Gestalt der doppeltperiodischen Function $\mathcal{F}(u)$ näher zu bestimmen.

Jeder Verzweigungsstelle der Differentialgleichung auf dem algebraischen Gebilde mit der Exponentendifferenz $\alpha$ entspricht in der $u$-Ebene in jedem Parallelogramm eine bestimmte Stelle $a$, an welcher $\mathcal{F}(u)$ zweifach unendlich wird, und zwar wie

$$\frac{\frac{1-\alpha^2}{2}}{(u-a)^2} + \frac{\mathfrak{a}}{u-a} + \dots .$$

Entsprechend für alle $n$ singulären Punkte der Differentialgleichung. Wie sieht eine doppeltperiodische Function aus, welche an $n$ gegebenen Stellen jedes Periodenparallelogramms in solcher Weise unendlich wird?

Zunächst will ich einen besonders einfachen Fall vorwegnehmen, der sich hier bei $p = 1$ zum ersten Male einstellt, und auch bei höherem $p$ immer wiederkehren wird, während ihm sein Analogon für $p = 0$ fehlt; es ist der Fall einer Differentialgleichung ohne singuläre Punkte auf dem algebraischen Gebilde, auf den ich schon in der vorigen Stunde aufmerksam gemacht habe.

<u>Hier bei $p = 1$ zum ersten Male gibt es eine Differentialgleichung ohne singuläre Punkte.</u>

Dieselbe lautet einfach

$$[\eta]_u = C,$$

unter $C$ eine Constante verstanden.

Hierzu könnte man sagen, dies sei ja überhaupt eine Differentialgleichung mit rationalem Coefficienten in $u$, und wir hätten somit eine unverzweigte Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. Aber in der $u$-Ebene betrachtet ist der Punkt $u = \infty$ ein singulärer Punkt, und zwar ein irregulärer Punkt.

In der $u$-Ebene betrachtet ist also die vor=

liegende Differentialgleichung durchaus nicht ohne singuläre Punkte. Zum Glücke kommt für das algebraische Gebilde, auf dem wir ja eigentlich die Differentialgleichung studiren, dieser Punkt $u = \infty$ gar nicht in Betracht, da schon jedes einzelne Parallelogramm für sich ein vollständiges Abbild des ganzen algebraischen Gebildes ist, und $u$ dem Unendlich-fernen, der Häufungsstelle aller dieser Bilder, nur zustrebt, wenn man auf der Riemann'schen Fläche unendlich viele Umläufe macht, ohne dasselbe jemals erreichen zu können.

<u>Die Differentialgleichung</u>

$$[\eta]_u = C$$

<u>hat in der $u$-Ebene allerdings den unendlich weiten Punkt zum singulären Punkt und sogar zum irregulären singulären Punkt, aber es überträgt sich das nicht auf das algebraische Gebilde $p = 1$, weil der unendlich ferne Punkt hier nur als Häufungsstelle der Periodenparallelogramme gilt und überhaupt keinem bestimmten Punkte auf dem algebraischen Gebilde entspricht.</u>

Im Übrigen ist die Gleichung $[\eta]_u = C$ leicht zu integriren. Wir gehen zur Differentialgleichung 2. Ordnung zurück. Hat letztere die allgemeine Gestalt

$$y'' + py' + qy = 0,$$

so lautet die Differentialresolvente 3. Ordnung:

$$[\eta] = 2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx};$$

setze ich speziell $p = 0$, so sieht man, daß die beiden Gleichungen:

$$y'' + qy = 0 \quad \text{und} \quad [\eta] = 2q$$

einander entsprechen.

Identificire ich $[\eta] = C$ mit $[\eta] = 2q$, so lautet also die zugehörige lineare Differentialgleichung

$$y'' + \frac{C}{2}\, y = 0.$$

Dies ist nun eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, welche auf bekanntem Wege die beiden Particularlösungen ergibt:

$$y_1 = e^{+\sqrt{-\frac{C}{2}}\cdot u}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{-\frac{C}{2}}\cdot u}$$

Hieraus folgt

$$\eta = \frac{y_1}{y_2} = e^{\sqrt{-2C}\cdot u},$$

wofür ich schreibe

$$\eta = e^{k\cdot u}.$$

Also haben wir das Resultat:

Diejenige Function, welche auf dem algebraischen Gebilde $p=1$ durch die unverzweigte Differentialgleichung definirt ist, ist die wohlbekannte Exponentialfunction $e^{ku}$.

Die unverzweigte Differentialgleichung enthält, wie man sieht, eine Constante, nämlich $C$.

Es seien nun $n$ singuläre Stellen gegeben, welchen in einem bestimmten Periodenparallelogramm der $u$-Ebene die Stellen $a, b, \dots n$ entsprechen mögen. Dann soll $F(u)$ an diesen Stellen je zweifach unendlich werden, und zwar so, dass die Coefficienten der unendlich werdenden Glieder 2. Ordnung $\frac{1-\alpha^2}{2}, \frac{1-\beta^2}{2}, \dots \frac{1-\nu^2}{2}$, die Coefficienten der Glieder erster Ordnung $A, B, \dots N$ sind. Nun wird die Weierstrass'sche doppeltperiodische Function $\wp(u)$ an der Stelle $u=0$ gerade zweifach unendlich und zwar mit dem Coefficienten $1$ im Glied zweiter Ordnung, während das Glied erster Ordnung fehlt. Durch Substraction einer geeigneten Summe solcher $\wp$-Functionen kann man also gerade die Glieder zweiter Ordnung neutralisiren. Um die Glieder erster Ordnung aufzuheben; wendet man die Function

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u) = -\int \wp(u)\,du$$

an, welche an der Stelle $u=0$ nur einfach unendlich wird, aber nicht mehr doppeltperiodisch im gewöhnlichen Sinne ist, sondern bei Vermehrung des Arguments um die Perioden $\omega_1$, $\omega_2$ (in Weierstraß' Bezeichnung $2\omega, 2\omega'$) sich um $\eta_1, \eta_2$ $(2\eta, 2\eta')$ vermehrt.

Setzen wir daher

$$F(u) = \frac{1-\alpha^2}{2}\wp(u-a) + \frac{1-\beta^2}{2}\wp(u-b) +$$
$$\dots + \frac{1-\nu^2}{2}\wp(u-n) + A.\frac{\sigma'}{\sigma}(u-a) +$$
$$B.\frac{\sigma'}{\sigma}(u-b) + \dots + N.\frac{\sigma'}{\sigma}(u-n)$$
$$+ku+k',$$

so müssen wir noch die $A, B, \dots N, k, k'$ solchen Bedingungen unterwerfen, daß $F(u)$ bei Vermehrung des Arguments um die Perioden $\omega_1$, $\omega_2$ ungeändert bleibt. Der allgemeine Ausdruck würde aber die Perioden haben:

$$(A+B+\dots+N)\,\eta_1 + k\omega_1,$$
$$(A+B+\dots+N)\,\eta_2 + k\omega_2.$$

Beide Ausdrücke sollen verschwinden, was zwei homogene lineare Gleichungen ergibt. Da die Determinante

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pm 2\pi i,$$

($\pm$, je nachdem die Periode $\omega_2$ links oder rechts von $\omega_1$ liegt) also gewiß von $0$ verschieden ist, so muß sowohl

$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\dots+\mathfrak{N}=0$ wie $k=0$ sein, und man erhält also für $F(u)$ als allgemeinsten Ausdruck den folgenden:

$$F(u) = \frac{1-\alpha^2}{2}\cdot\wp(u-a)+\frac{1-\beta^2}{2}\wp(u-b)+\dots+\frac{1-\nu^2}{2}\wp(u-n)$$
$$+\mathfrak{A}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-a)+\mathfrak{B}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}(u-b)+\dots+\mathfrak{N}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}(u-n)+k'$$

mit der Bedingung

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\dots+\mathfrak{N}=0.$$

Die Anzahl der willkürlichen Constanten hierin ist leicht abzuzählen:

| | |
|---|---|
| 1. $n$ singuläre Punkte $a, b, \dots n$ | $n$ Parameter |
| 2. $n$ Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \dots \nu$ | $n$ " |
| 3. $n$ Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots \mathfrak{N}$ mit einer Bedingungsgleichung | $n-1$ " |
| 4. eine additive Constante $k'$ | $1$ " |
| Sa | $3n$ " . |

Diese Zahl gilt aber nur für $n>0$, da für $n=0$ keine Bedingungsgleichung auftreten kann; darum habe ich den Fall $n=0$ vorweg genommen.

<u>Während wir bei $n=0$ eine Constante in der Differentialgleichung hatten, gibt es für $n>0$</u>

3n Constanten.

Fragen wir weiter, wie viele von diesen $3n$ Constanten wesentlich sind, so ist folgendes zu bedenken. Im Falle $p=0$ konnten wir das algebraische Gebilde, für welches ja die schlichte $x$-Ebene ein Abbild war, auf $\infty^3$ verschiedene Weisen linear d.h. eindeutig in sich transformiren, und also etwa 3 der singulären Punkte an vorgegebene Stellen, z.B. nach $0, \infty, 1$ legen.

Unsere in Parallelogramme eingeteilte $u$-Ebene aber können wir nur auf $\infty^1$ Weisen (mit einem complexen, also 2 reellen Parametern) so eindeutig transformiren, daſs die Periodicität dieselbe bleibt, nämlich nur durch Parallelverschiebung um eine willkürliche Strecke mit willkürlicher Richtung. Wir können dadurch einen, aber nur einen Punkt der Ebene in einen beliebigen andern Punkt überführen, wir können z.B. einen der singulären Punkte nach $u=0$ legen. Dadurch können wir die Zahl der Constanten um 1 erniedrigen. Also:

Sowie eine schlichte Ebene und also ein algebraisches Gebilde $p=0$ durch $\infty^3$ eindeutige Transformationen in sich selbst übergeht, so geht ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p=1$ durch $\infty^1$ eindeutige Transformationen in sich über, entsprechend der Formel

$$u' = u + \text{const.}$$

Hierdurch sind wir in der Lage, von den $3n$ Constanten unserer Differentialgleichung für $n \geq 0$ eine zu zerstören, beispielsweise den singulären Punkt $a$ in den 0-Punkt der $u$-Ebene zu legen, was wir dadurch ausdrücken, dass wir sagen, die Differentialgleichung enthalte $3n-1$ wesentliche Constanten.

Wir können die eindeutige Transformation des algebraischen Gebildes in sich, welche in transcendenter Form durch die Gleichung

$$u' = u + c$$

gegeben ist, übrigens auch in rein algebraischer Form ausdrücken, indem wir nach dem bekannten Additionstheorem

$$X = \wp(u+c), \quad S = -\wp'(u+c)$$

rational durch

$$x = \wp u \qquad s = -\wp' u$$

ausdrücken. —

Als weitere Frage bietet sich uns nun die, wie man $\eta$ in Formen $\Pi_1$ und $\Pi_2$ zu spalten hat? Wie in allgemeinster, und wie in einfachster Weise?

Die Frage, wie man nun $\eta$ in Zähler und Nenner $\Pi_1$ und $\Pi_2$ in zweckmäßiger Weise spalten kann, wollen wir hier nicht ausführen, weil es zu weit in die Theorie der elliptischen Functionen hineinführen würde.

Nur eine specielle Spaltung will ich hier angeben, dieselbe, die wir eben im Falle der unverzweigten Differentialgleichung betrachteten: Im Allgemeinen wird man, unter $p$ irgend eine zu der Parallelogrammeinteilung gehörige elliptische Function verstanden, behufs Übergang zur linearen Differentialgleichung

$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{d\eta}{du}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,du}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\eta}{du}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,du}$$

setzen. Nehmen wir hier speciell $p=0$, also

$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{d\eta}{du}}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\eta}{du}}},$$

so lautet die zugehörige lineare Differential=

gleichung

$$\frac{d^2 y}{d u^2} + \frac{F(u)}{2} \cdot y = 0.$$

Die singulären Punkte dieser Differentialgleichung auf dem algebraischen Gebilde sind diejenigen, welche den Unendlichkeitsstellen $u = a, b, \dots n$ von $F(u)$ entsprechen. Da der Coefficient von $y'$ fehlt, so muss (nach S. 12) die Summe der Exponenten an jeder solchen Stelle $= 1$, also die Exponenten selbst $= \frac{1 \pm \alpha}{2}, \frac{1 \pm \beta}{2}, \dots \frac{1 \pm \nu}{2}$ sein. Wir haben also eine solche Differentialgleichung vor uns, wie ich sie auf S. 12 als normirte Differentialgleichung bezeichnete. Damals mussten wir aber als Mangel jener normirten Differentialgleichung bemerken, dass im Unendlichen durch die Normirung sich eine überflüssige singuläre Stelle einstellte. Das kommt aber hier, wie wir schon soeben beim Beispiel der unverzweigten Differentialgleichung hervorhoben, nicht in Betracht.

Wir haben also den Satz:

<u>Die lineare Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{d u^2} + \frac{F(u)}{2} y = 0$ hat auf dem algebraischen Gebilde $n$ und nur $n$ singuläre Punkte, welche regulär sind und die Exponenten $\frac{1 \pm \alpha}{2}, \frac{1 \pm \beta}{2}, \frac{1 \pm \nu}{2}$</u>

<u>besitzen.</u>

Wir kehren nun zu der Differentialgleichung 3. Ordnung zurück, und zwar mit $x$ als unabhängiger Variablen.

Dieselbe lautete (vergl. S. $\boxed{59}$)

$$[\eta]_x = \frac{3f'^2 - 4ff''}{8f^2} + \frac{F(u)}{f},$$

oder homogen geschrieben:

$$\frac{1}{x_2^4}[\eta]_x = -\frac{H}{24\varphi^2} + \frac{F(u)}{\varphi}$$

wobei

$$f = (x-a')(x-b')(x-c')(x-d')$$

und

$$\varphi(x_1, x_2) = x_2^4 \cdot f(x)$$

ist, und für $F(u)$ sein rationaler Ausdruck durch $s = \sqrt{f}$ und $x$ eingesetzt zu denken ist.

Wir fragen nun nach dem Bildungsgesetz der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, und wie man dieselbe als algebraische Function der zweiblättrigen Fläche characterisiren kann, ohne durch $u$ hindurch zu gehen?

Zunächst wollen wir noch eine die Allgemeinheit nur unwesentlich beeinträchtigende, aber die Untersuchung sehr erleichternde Voraussetzung machen: Wir denken uns in dem

Periodenparallelogramm, dem Abbild des algebraischen Gebildes erstens diejenigen 4 Stellen markirt, welche den 4 Verzweigungspunkten der über der $x$-Ebene liegenden zweiblättrigen Riemann'schen Fläche entsprechen, dann die zwei Punkte, welche den beiden unendlich fernen Stellen der Riemann'schen Fläche entsprechen; endlich seien $a, b, \ldots n$ die singulären Stellen der Differentialgleichung. Dann setzen wir voraus – was durch eine passende eindeutige Transformation des Gebildes immer erreicht werden kann, – dass alle diese dreierlei Stellen voneinander verschieden seien, also:

<u>Bei der Untersuchung der rechten Seite unserer Differentialgleichung wollen wir die vereinfachende Voraussetzung machen, dass keiner der Verzweigungspunkte der Fläche im Unendlichen liegt, und keiner der singulären Punkte von $F(u)$ in einen Verzweigungspunkt der zweiblättrigen Fläche oder in einen der beiden Punkte $x = \infty$ hineinfällt.</u>

Wir haben nun das Verhalten von $[\eta]_x$ an diesen dreierlei Stellen des algebraischen

Gebildes zu charasterisiren.

1. An einer singulären Stelle $a, b, \ldots n$, wo sich ja die Fläche schlicht verhalten soll, ergibt die analoge Überlegung wie bei der schlichten $x$-Ebene der Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten folgendes Verhalten:

<u>In einem eigentlichen singulären Punkt der Differentialgleichung, der nicht in einen Verzweigungspunkt oder nach $x = \infty$ fällt, haben wir für $[\eta]_x$ eine Reihenentwicklung genau von der bekannten Art:</u>

$$[\eta]_x = \frac{\frac{1-\alpha^2}{2}}{(x-a)^2} + \frac{A}{x-a} + \mathfrak{P}(x-a).$$

2. An den beiden Stellen $x = \infty$ zeigt sich wieder, wie bei $p = 0$:

<u>Bei $x = \infty$ verschwindet $[\eta]_x$ je vierfach.</u>

3. Als neues Element gegenüber dem rationalen Falle stellen sich jetzt die Verzweigungspunkte der Fläche ein. Wie verhält sich $[\eta]_x$ an einem solchen?

In der Nähe eines Verzweigungspunktes wird bekanntlich das Verhalten einer Function des algebraischen Gebildes, statt durch eine nach Potenzen von $x - a'$ fortschreitende durch eine nach Potenzen von $(x-a')^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Entwicklung gegeben. $F(u)$, welches in $a'$ nicht singulär ist, ist daher einfach durch eine $\mathfrak{P}((x-a')^{\frac{1}{2}})$ gegeben. Ebenso soll $\eta$ seine Entwicklung haben

$$\eta = A_0 + A_1(x-a')^{\frac{1}{2}} + A_2(x-a')^{\frac{2}{2}} + A_3(x-a')^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Hieraus leitet man für $[\eta]_x$ folgendes Verhalten ab:

$$[\eta]_x = \frac{\frac{3}{8}}{(x-a')^2} + * + \frac{A'}{x-a'} + \frac{B'}{(x-a')^{\frac{1}{2}}} + \mathfrak{P}((x-a')^{\frac{1}{2}}).$$

Also:

*Die Reihenentwicklung von $[\eta]_x$ im Verzweigungspunkte $x = a'$ beginnt mit dem Gliede $\frac{\frac{3}{8}}{(x-a')^2}$, und es folgt dann gleich ein Glied $\frac{A'}{(x-a')}$, als wenn man nicht einen Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche, sondern einen singulären Punkt der schlichten Ebene mit der Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ vor sich hätte.*

Dass wir es aber wirklich mit einem Verzweigungspunkte der Fläche zuthun haben, zeigen die folgenden Glieder, welche gebrochene Exponenten haben. Da an einem Verzweigungspunkt überhaupt $(x-a')^{\frac{1}{2}}$ an die Stelle von $x-a'$ tritt, indem es sich gerade reproducirt, wenn man die volle (zweiblättrige) Umgebung des Verzweigungspunktes umkreist, so hat man seit Riemann folgende Verabredung getroffen:

Man misst das Unendlich werden einer Function in einem Verzweigungspunkte $a'$, wo 2 Blätter zusammenhängen, in der Weise, dass man sagt $\frac{1}{(x-a')^{\frac{1}{2}}}$ werde einfach unendlich. $[\eta]_x$ wird also in $a'$ 4fach unendlich, doch so dass das dreifach unendlich werdende Glied der Entwicklung verschwindet.

Wir fassen jetzt das Verhalten in den dreierlei Punkten in folgenden Satz zusammen:

<u>In jedem eigentlichen singulären Punkt der Differentialgleichung wird $[\eta]_x$ auf der Riemann'schen Fläche doppelt unendlich bei $x = \infty$ verschwindet es vierfach und in den Verzweigungspunkten der Fläche wird $[\eta]_x$ vierfach unendlich, doch so, dass nur die Glieder zweiter und erster Ordnung ($\frac{1}{x-a'}$ und $\frac{1}{(x-a')^{\frac{1}{2}}}$) willkürlich Coefficienten behalten.</u>

Ich behaupte nun:

<u>Durch diese Angaben ist $[\eta]_x$ vollkommen definirt.</u>

Um dies zu zeigen, muss ich eine Constantenabzählung auf dem algebraischen Gebilde anstellen und zeigen, dass vermöge des characterisirten Verhaltens an den einzelnen Punkten $[\eta]_x$ genau ebensoviele Constanten enthält, als die gestrige Abzählung in der $u$-Ebene ergeben hat.

Eine solche Constantenabzählung einer algebraischen Function würde uns, wenn ich sie ausführlich ableiten wollte, in eine umständliche Theorie, die sich um den Riemann-Roch'schen Satz gruppirt, hineinführen, wozu ich hier keine Zeit habe; ich will nur das Resultat dieser Theorie angeben, ohne Rücksicht auf etwaige Ausnahmefälle – die übrigens bei $p=1$ von selbst ausbleiben –: Ich sage zunächst: <u>Eine algebraische Function eines gegebenen Gebildes vom Geschlechte $p$, welche an $N$ vorgegebenen Stellen je einfach unendlich werden darf, enthält noch $N-p+1$ willkürliche Constanten.</u>

In unserm Falle liegen $n$ zweifache $\infty$-Stellen bei $a, b, \dots n$ und 4 vierfache $\infty$-Stellen bei $a', b', c', d'$. Die ersteren zählen jede als zwei einfache, zusammen also als $2n$ einfache Unendlichkeitsstellen. An den Stellen $a', b', c', d'$ sind nur die Coefficienten der Glieder erster und zweiter Ordnung willkürlich. Für die Constantenabzählung zählen sie also nur als zweifache $\infty$-Stellen, so dass wir schliesslich

$$N = 2n + 8$$

haben. $p$ ist $= 1$, also $N - p + 1 = 2n + 8$. Aber jetzt haben wir noch zu berücksichtigen, dass an jeder der beiden Stellen $x = \infty$ vierfaches Verschwinden eintreten soll, was 8 Bedingungsgleichungen für die $2n + 8$ Constanten ergibt, so dass noch $2n$ Constanten willkürlich bleiben. Dabei haben wir aber die singulären Punkte $a, b, \ldots n$ als vorgegeben betrachtet; betrachten wir auch diese als willkürlich, so kommen $n$ weitere Constanten hinzu, so dass wir also thatsächlich $3n$ willkürliche Constanten finden, genau wie mit Hülfe von $u$.

<u>Aus dieser Abzählung der Constanten geht hervor, dass der Ausdruck $[\eta]_x$ durch die drei angegebenen Eigenschaften vollkommen definirt ist.</u>

Nun werden wir fragen, wie heisst die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{F(u)}{2} \cdot y = 0,$$

in $x$ ausgedrückt, oder homogen in $x_1, x_2$?

Wir setzen

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{f}}, \text{ also } y_1 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta\sqrt{f}}},\ y_2 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta\sqrt{f}}},$$

und erhalten durch directe Umrechnung:

$$f\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}f'\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{F(u)}{2}\cdot y = 0.$$

Betrachten wir die Punkte $a', b', c', d'$, so wird daselbst in der $x$-Ebene betrachtet der Coefficient von $y'$ (nach Division durch den Coefficienten des ersten Gliedes) einfach unendlich mit dem Coefficienten $\frac{1}{2}$, und im Coefficienten von $y$ kommt kein zweifach unendlich werdendes Glied vor, so dass sich in der $x$-Ebene betrachtet die Coefficienten $0$ und $\frac{1}{2}$ ergeben würden. Aber die Entwicklung von $F(u)$ an der Stelle $x = a'$ enthält im allgemeinen auch Glieder mit Exponenten $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ u.s.w. so dass derartige Glieder auch in die Entwicklung von $y_1, y_2$ hineinkommen. Wir müssen daher das Verhalten von $y_1, y_2$ an der Stelle $a'$ im Riemann'schen Sinne auf der Riemann'schen Fläche messen, und haben dann die Exponenten $0$ und $1$, wie in jedem sonstigen nicht-singulären Punkte der Differentialgleichung.

In den Punkten $a, b, \ldots n$ ergeben sich die Exponenten $\frac{1\pm\alpha}{2}$, $\frac{1\pm\beta}{2}$, ... $\frac{1\pm\nu}{2}$, da im Coefficienten von $y'$ kein bei $x = a, b, \ldots n$ unendlich werdendes Glied vorkommt. $x = \infty$ ist kein singulärer Punkt, da $\frac{F(u)}{2}$ daselbst nicht unendlich ist, also der Coefficient $\frac{F(u)}{2f}$ von $y$ vierfach verschwindet. Durch diese Bestimmungen ist das Verhalten der Differentialgleichung vollständig angegeben:

Wir können obige Differentialgleichung durch ihr Verhalten in den Verzweigungspunkten der Fläche und in den eigentlichen singulären Punkten des Gebildes characterisiren, wobei wir ausdrücklich bemerken, dass $x = \infty$ kein singulärer Punkt ist.

Wir wollen nun die betrachtete lineare Differentialgleichung noch homogen machen, indem wir

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad f(x) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_2^{\,4}}$$

setzen. Die Function $y$ will ich rein formell als eine Form 0ten Grades von $x_1, x_2$ auffassen, schreibe also

$$y(x) = \Pi_0(x_1, x_2).$$

Berechne ich nun die zweite Überschiebung von $\Pi$ über $\varphi$, so ergibt sich

$$(\Pi, \varphi)_2 = 12\left(f y'' + \tfrac{1}{2} f' y'\right),$$

wodurch sich unsere Differentialgleichung in der Gestalt schreibt:

$$(\Pi, \varphi)_2 + 6 F(u) \cdot \Pi = 0.$$

<u>Unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich in vorstehende elegante Form setzen, und es ist an dieser Form bemerkenswert, daß die wirklichen singulären Punkte, welche die Differentialgleichung auf dem algebraischen Gebilde hat, alle in das zweite Glied als Unendlichkeitsstellen von $F(u)$ hineingeschoben sind, während die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche, die nur uneigentliche singuläre Punkte sind, ausschließlich in dem ersten Gliede $(\Pi, \varphi)_2$ enthalten sind.</u>

Gleichzeitig haben wir

$$\Pi_1 = \eta \sqrt{\frac{d\omega}{d\eta}}, \quad \Pi_2 = \sqrt{\frac{d\omega}{d\eta}},$$

wo

$$d\omega = \frac{(x\,dx)}{\sqrt{\varphi}}$$

das zur Fläche gehörige überall endliche Differential ist.

<u>Die hiermit für $p = 1$ gegebenen Entwickelungen werden sich nun bei geeignetem Ansatze</u>

ohne wesentliche Änderung auf die höheren algebraischen Gebilde übertragen lassen.

## Hyperelliptische Gebilde.

Do. d. 10. Mai 1894.] Heute wollen wir die analogen Betrachtungen für den Fall eines hyperelliptischen Gebildes durchführen. Man pflegt ein solches in seiner Normalform durch eine Gleichung

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(x)}$$

zu definiren, worin $f_{2p+2}(x)$ ein Polynom $(2p+2)$-ten Grades ohne Doppelwurzeln bedeutet, d. h. man legt eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit $2p+2$ Verzweigungspunkten zu Grunde. Das Geschlecht ist dann $p$. Wir führen gleich homogene Variable ein, und setzen

$$\sigma = \sqrt{\varphi_{2p+2}(x_1, x_2)},$$

so dass $\sigma$ eine ganze algebraische Form auf der zweiblättrigen Fläche ist, und zwar vom Grade $p+1$ in $x_1, x_2$. Die Hesse'sche Determinante der rationalen ganzen Form $\varphi_{2p+2}(x_1, x_2)$ lautet, wenn man sie durch die unhomogene Function $f(x)$ ausdrückt:

$$\mathcal{H}(\varphi) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2 = x_2^{4p} \cdot \left((2p+1)(2p+2) f f'' - (2p+1)^2 f'^2\right).$$

Wir wollen nun eine Differentialgleichung dritter Ordnung hinschreiben, welche der Differentialgleichung des elliptischen Falls auf S. 72 analog gebildet ist; dabei müssen wir das Glied $\frac{\mathcal{H}}{\varphi^2}$ mit einem solchen Coefficienten behaften, dass es sich an einer Verzweigungsstelle der Riemann'schen Fläche, d. h. an einer 0-Stelle $a'$ des Polynoms $f(x)$ gerade verhält wie $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(x-a')^2} \cdot \frac{1}{x_2^{\,4}}$, oder was dasselbe ist, dass es ein Glied $\frac{3}{8}\left(\frac{f'}{f}\right)^2$ enthält. Man findet so, dass das Glied $\frac{\mathcal{H}}{\varphi^2}$ den Coefficienten $-\frac{3}{8(2p+1)^2}$ bekommen muss. Ferner muss man statt der Function $F(u)$ eine algebraische Form vom Grade $2p-2$ einsetzen, damit auch das zweite Glied der rechten Seite die Dimension $-4$ in $x_1, x_2$ hat. Die Differentialgleichung lautet also

$$\frac{\varphi}{x_2^{\,4}} [\eta]_x + \frac{3}{8(2p+1)^2} \cdot \frac{\mathcal{H}}{\varphi} = \Gamma_{2p-2}(x_1, x_2).$$

Nun muss man natürlich die Form $\Gamma$ so einrichten, dass an den singulären Stellen $a$, $b$, … $n$ der Differentialgleichung auf dem algebraischen Gebilde die rechte Seite zweifach unendlich wird, z. B. bei $x = a$ wie

$$\frac{\varphi}{x_2^4}\left(\frac{\frac{1-\alpha^2}{2}}{(x-\alpha)^2} + \frac{A}{x-\alpha} + \cdots\right).$$

<u>Die Frage ist, wie viele Constanten in der Form $\Gamma_{2p-2}$ enthalten sind, welche $n$ doppelte Unendlichkeitsstellen $a, b, \ldots n$ besitzt.</u>

Wir haben schon gestern den Riemann-Roch'schen Satz benutzt, daß eine algebraische Function, welche an $N$ vorgegebenen Stellen unendlich werden darf, im Allgemeinen $N - p + 1$ Constanten enthält. Um den Satz hier anwenden zu können, müssen wir die Form $\Gamma_{2p-2}$ durch Division mit einer andern Form $(2p-2)$ten Grades, etwa mit $x_2^{2p-2}$ in eine „Function" verwandeln. Dadurch kommt aber zu den schon vorhandenen $n$ doppelten $\infty$-Stellen noch in jeder der beiden Stellen $x_2 = 0$, d. h. $x = \infty$ je eine $2p-2$ fache $\infty$ Stelle hinzu, so daß für die Function $\frac{1}{x_2^{2p-2}} \cdot \Gamma_{2p-2}(x_1, x_2)$ $N = 2n + 4p - 4$ ist. Diese Function, also auch die Form $\Gamma_{2p-2}(x_1, x_2)$ enthält folglich $2n + 3p - 3$ Parameter*). Dabei sind aber

*) und zwar gilt diese Abzählung nicht nur im allgemeinen, sondern immer, weil die sog. Ausnahmefälle des Riemann-Roch'schen Satzes hier nicht eintreten.

die $n$ Stellen $a, b, \ldots n$ als fest gegeben angesehen. Rechnen wir sie ebenfalls zu den willkürlichen Parametern, so ergibt sich folgender fundamentale Satz, der, wie wir sehen werden, nicht nur für die hyperelliptischen Gebilde, sondern bei jedem beliebigen algebraischen Gebilde seine Giltigkeit behält:

<u>Die Form $\Gamma_{2p-2}$ und also die Differentialgleichung auf dem gegebenen algebraischen Gebilde vom Geschlechte $p$ enthält $3p-3 + 3n$ Constanten.</u>

Setzen wir insbesondere $n = 0$, richten wir also unser Augenmerk auf die unverzweigten Differentialgleichungen, so ergeben sich $3p-3$ Constanten.

Sowie es auf dem hyperelliptischen Gebilde $p$ linear unabhängige überall endliche Integrale gibt, so gibt es $\infty^{3p-3}$ unverzweigte Differentialgleichungen.

Wir können in unserm hyperelliptischen Falle die allgemeine Gestalt der ganzen Form $\Gamma_{2p-2}(x_1, x_2)$ explicit angeben, so daß die darin enthaltenen $3p-3$ willkürlichen Parameter unmittelbar in Evidenz treten. Da $s = \sqrt{f_{2p+2}(x)}$ eine Quadratwurzel aus einem rationalen

---

können, ich gehe nur deshalb hierauf nicht näher ein, weil es zu weit führen würde.

Ausdruck ist, so kann jede rationale Function von $s$ und $x$, d. h. jede algebraische Function des Gebildes in die Gestalt $R_1(x) + R_2(x) \cdot s$ gesetzt werden, und für jede ganze algebraische Function sind $R_1$ und $R_2$ Polynome von $x$. Hieraus folgt, dass die allgemeinste ganze algebraische Form vom Grade $2p-2$ die Gestalt hat:

$$\Gamma_{2p-2}(x_1, x_2) = \chi_{2p-2}(x_1, x_2) + \psi_{p-3}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\varphi_{2p+2}(x_1, x_2)},$$

worin für $p=1$ und $p=2$ das zweite Glied rechts einfach wegfällt. $\chi$ und $\psi$ bedeuten hierin ganze rationale Formen von $x_1, x_2$ von den durch die Indices angezeigten Graden. Hier enthält nun $\chi_{2p-2}$ gerade $2p-1$, $\psi_{p-3}$ für $p \geqq 2$ $p-2$ Constanten linear und homogen, was in der That die vorausgesagte Anzahl $3p-3$ gibt. Nur für $p=1$ gilt diese Formel nicht, sondern es ergibt sich, wie auch früher gefunden, die Constantenzahl 1. Wir haben also den Satz:

<u>Um die allgemeinste unverzweigte Differentialgleichung zu bilden, haben wir $\Gamma = \chi + \psi\sqrt{\varphi}$ zu setzen, wo $\chi$ und $\psi$ rationale ganze Formen vom Grade</u>

$2p-2$ und $p-3$ in $x_1, x_2$ sind.

Um nunmehr von der Differentialgleichung 3. Ordnung zu der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung aufzusteigen, schliessen wir uns wieder genau der Analogie des elliptischen Falles an. Dort setzten wir

$$\Pi_1 = \eta . \sqrt{\frac{du}{d\eta}} \qquad \Pi_2 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}} \; ,$$

wobei das Differential $du$ durch die Formel

$$du = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

oder homogen geschrieben

$$du = -\frac{(x, dx)}{\sqrt{\varphi_4(x_1, x_2)}}$$

definirt war.

Dieses $du$ ist als Differential auf dem algebraischen Gebilde dadurch ausgezeichnet, dass es nirgends unendlich wird und nirgends verschwindet. (Man vergleiche wegen dieser und der weiteren Angaben über Formen auf dem algebraischen Gebilde meine Abhandlung: Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. Bd. 36. 1889).

Ein ganz ebenso gebildetes überall endliches und von 0 verschiedenes Differential existirt auch in den Fällen $p > 1$; nur ist es dann nicht eine Function von $x$, sondern eine Form von $x_1, x_2$ von einem Grade, der von $0$ verschieden ist.

Im hyperelliptischen Falle lautet es

$$du = \frac{(x, dx)}{\sqrt{f_{2p+2}(x_1, x_2)}} ;$$

es ist also in $x_1, x_2$ von der Dimension $-(p-1)$.

Nun schreiben wir wieder, wie im elliptischen Fall

$$\Pi_1 = \eta . \sqrt{\frac{dw}{d\eta}} , \quad \Pi_2 = \sqrt{\frac{dw}{d\eta}} .$$

Die so erhaltenen Formen sind vom Grade $\frac{1-p}{2}$, in Übereinstimmung damit, dass wir im Falle $p = 1$ Functionen, d. h. Formen vom Grade $0$ hatten. Die Exponenten der Formenschar $\Pi_1, \Pi_2$ an den Stellen $a, b, \ldots n$ sind $\frac{1 \pm \alpha}{2}, \frac{1 \pm \beta}{2}, \ldots \frac{1 \pm \nu}{2}$, an den Verzweigungsstellen $a', b', \ldots$ dagegen $0$ und $\frac{1}{2}$, wenn man sie in der $x$-Ebene betrachtet, auf der Riemann'schen Fläche gemessen $0$ und $1$. Die Differentialgleichung endlich lautet

$$(\Pi, f)_2 - (p+1)(2p+1)\, \Pi . \Gamma_{2p-2} = 0 .$$

<u>Beschränken wir uns auf diejenigen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf dem hyperelliptischen Gebilde, welche auf</u>

dem Gebilde unverzweigt sind, und deren Particularlösungen nirgendwo unendlich werden und keine gemeinsamen 0-Punkte besitzen, so lauten diese Differentialgleichungen folgendermaßen:

$$(\Pi, \varphi)_2 - (p+1)(2p+1)\,\Pi.\Gamma_{2p-2} = 0,$$

wofür $\Gamma$ der Ausdruck

$$\Gamma_{2p-2}(x_1,x_2) = \chi_{2p-2}(x_1,x_2) + \psi_{p-3}(x_1,x_2).\sqrt{\varphi_{2p+2}(x_1,x_2)}$$

einzutragen ist, und $\Pi$ vom Grade $\frac{1-p}{2}$ ist.

Hier drängt sich uns eine merkwürdige Beziehung zu der allgemeinen Lamé'schen Differentialgleichung auf. Die vorstehende Differentialgleichung ist nämlich genau ebenso gebaut, wie die allgemeine Lamé'sche Gleichung mit den 0-Stellen von $\varphi$ als singulären Stellen, also mit $n = 2p+2$. Auch der Grad der Formen $\Pi_1, \Pi_2$ ist derselbe, wie bei der Lamé'schen Gleichung; denn im Lamé'schen Falle sind $\Pi_1, \Pi_2$ vom Grade $\frac{4-n}{4}$, was beim Einsetzen von $2p+2$ in der That den vorliegenden Grad $\frac{1-p}{2}$ gibt.

Nur der eine Unterschied liegt vor, daß im Lamé'schen Falle $\Gamma_{2p-2}(x_1,x_2)$ eine ganze rationale Form sein muss, während es hier auch ein Glied mit $\sqrt{f_{2p+2}(x_1,x_2)}$ enthalten darf, wenigstens im Falle $p \geqq 3$. Also:

*In den Fällen $p = 1$ und $p = 2$ ist unsere auf dem hyperelliptischen Gebilde unverzweigte Differentialgleichung identisch mit der allgemeinen Lamé'schen Gleichung für $n = 4$ bezw. $n = 6$, für $p \geqq 3$ geht sie in die allgemeine Lamé'sche Gleichung für $n = 2p+2$ über, wenn man in $\Gamma_{2p-2}(x_1,x_2)\,\psi = 0$ setzt.*

Soviel über die Differentialgleichungen auf hyperelliptischen Gebilden.

## Allgemeine algebraische Gebilde.

Wie werden wir die gefundenen Ansätze für den allgemeinen Fall eines beliebigen algebraischen Gebildes verallgemeinern können? Sehen wir einmal zu, worin eigentlich die besondere Einfachheit in der Behandlung des hyperelliptischen Falles ruht, – offenbar in der Eigentümlichkeit der Function $s = \sqrt{f_{2p+2}(x)}$ bezw. der Form $\sigma = \sqrt{f_{2p+2}(x_1,x_2)}$. In bezug auf die zweiblättrige Riemann'sche Fläche ist diese Form einfach so zu characterisiren, dass sie auf derselben eindeutig und überall endlich ist, und dass ihre 0-Stellen gerade die Verzweigungsstellen der Fläche, nämlich die 0-Stellen des Differentials $(x, dx)$ sind.

Die Einfachheit der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche für die analytische Behandlung beruht darin, dass die Verzweigungspunkte der Fläche die 0-Stellen einer zur Fläche gehörigen algebraischen Form sind.

Man wird sich fragen, ob nicht auch bei einem allgemeinen algebraischen Gebilde unter den unendlich vielen zugehörigen Riemann'schen Flächen eine von der genannten Eigenschaft ist, dass es auf ihr eine ganze Form gibt, deren 0-Stellen gerade die Verzweigungspunkte der Fläche sind? Ich nenne eine solche Fläche eine „kanonische Fläche".

Ich behaupte nun, dass man in der That für jedes algebraische Gebilde eines höheren Geschlechtes $p$ kanonische Riemann'sche Flächen aufstellen kann, d. h. Riemann'sche Flächen, deren Verzweigungspunkte die 0-Stellen einer auf dem Gebilde existiren den ganzen algebraischen Form $\sigma$ sind.

Den Beweis dieses Satzes (Math. Ann. 36) will ich hier nicht wiedergeben, sondern nur über die Eigentümlichkeiten der kanonischen Fläche das notwendigste berichten.

Die Blätterzahl der kanonischen Fläche ist immer ein Teiler von $2p-2$ oder $2p-2$ selbst, so daß man

$$2p-2 = m.d$$

setzen kann. Die Zahl der Verzweigungspunkte ist

$$2p-2+2m = m(d+2).$$

Dies sind die 0-Stellen einer ganzen Form, welche in $x_1, x_2$ vom Grade $(d+2)$ ist, in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze, daß die Anzahl der 0-Stellen einer ganzen algebraischen Form immer gleich dem Producte aus dem Grade der Form und der Blätterzahl der Fläche ist.

Die kanonische Fläche hat $m$ Blätter, wobei $2p-2 = m.d$ ist, die Zahl ihrer Verzweigungspunkte ist $2p-2+2m = m(d+2)$, und diese Verzweigungspunkte sind die 0-Stellen einer ganzen algebraischen Form der Fläche, die wir $\sigma$ nennen, und die den Grad $d+2$

besitzt.

Fr. d. 11. Mai 1894.] Lassen Sie uns heute zuerst insbesondere zwei Beispiele einer kanonischen Riemann'schen Fläche betrachten, um daran unsere letzten Angaben bestätigt zu finden.

Das erste Beispiel ist natürlich die zweiblättrige Fläche des hyperelliptischen Falls selbst. Dabei ist $m=2$, also $d=p-1$, und die Form $\sigma$ vom Grade $d+2=p+1$.

In der That: die Verzweigungspunkte der Fläche werden durch die 0-Stellen der rationalen ganzen Form $\varphi_{2p+2}(x_1,x_2)$ gegeben. Diese Form wird aber an jeder dieser Verzweigungsstellen auf der Fläche gemessen zweifach 0, z.B. bei $x=a$ wie $(x-a)^{\frac{2}{2}}$. Es ist daher $\sqrt{\varphi_{2p+2}(x_1,x_2)}$ eine Form, welche an jeder Verzweigungsstelle gerade einfach verschwindet, also

$$\sigma = \sqrt{\varphi_{2p+2}(x_1,x_2)}$$

die gesuchte Verzweigungsform. Der Grad derselben ist in der That der vorausgesagte $p+1$.

Als zweites Beispiel denken wir uns ein algebraisches Gebilde durch eine allgemeine Curve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte vorgestellt, das Geschlecht ist dann $p=3$, und es liegt das allgemeinste Gebilde dieses Geschlechtes vor. Die Gleichung der Curve laute in homogenen Punktcoordinaten

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

worin $f$ eine ganze rationale Form 4. Grades von $x_1, x_2, x_3$ bedeutet.

Wir denken uns nun die Curve von der einen Ecke $x_1 = 0, x_2 = 0$ des Coordinatendreiecks auf die gegenüberliegende Coordinatenaxe $x_3 = 0$ projicirt, wie auf S. 50. Jedem Wertesystem $x_1 : x_2$ entspricht dabei ein bestimmter Projectionsstrahl, und vier Werte von $x_3$ bezw. Punkte der Curve. Wir sehen also $x_1$ und $x_2$ allein als unabhängige Variable an, und bestimmen $x_3$ durch die Gleichung $f = 0$ als Function von $x_1, x_2$, und zwar als homogene Function ersten Grades, denn wenn wir $x_1$ und $x_2$ beide mit irgend einer Constanten multipliciren, müssen wir auch $x_3$ mit derselben Constanten multipliciren, wenn die Gleichung $f = 0$ richtig bleiben soll.

<u>$x_3$ ist also eine auf der Riemann'schen Fläche, der vierfach überdeckten $x_3$-Axe, existirende ganze algebraische Form ersten Grades.</u>

Wo liegen nun die Verzweigungspunkte

der Riemann'schen Fläche? Sie entsprechen denjenigen Projectionsstrahlen, welche die Curve 4. Ordnung berühren, bezw. ihren Berührungspunkten selbst. Diese Berührungspunkte liegen aber bekanntlich auf der „Polare" des Punktes $x_1 = 0, x_2 = 0$ ~~in~~ in Bezug auf die Curve $f = 0$, und die Gleichung dieser Polare ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = f_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze rationale Form 3. Grades von $x_1, x_2, x_3$, also auch eine ganze algebraische Form dritten Grades von $x_1, x_2$, welche gerade in den Berührungspunkten der Projectionsstrahlen, d. h. in den Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche verschindet, mit andern Worten: $f_3$ ist die gesuchte Verzweigungsform. Es ist auch nicht etwa noch die Wurzel auszuziehen, denn die Polare schneidet jeden einfachen Berührungspunkt der Projectionsstrahlen einfach aus, so dass $f_3$ daselbst auf der Curve einfach verschwindet.

<u>Wenn wir die Curve 4. Ordnung von der einen Ecke des Coordinatensystems aus auf</u>

die gegenüberliegende Seite des Coordinatensystems projici-
ren, so erhalten wir eine 4 blätterige Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte sich ergeben, indem wir die ganze algebraische Form dritten Grades von $x_1, x_2$ $f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ setzen.

Die $x_3$-Axe ist hier 4 fach überdeckt, wir haben also $m = 4$. Da $p = 3$ ist, so ist $2p - 2 = 4$ und $d = 1$. Der Grad der Verzweigungsform $d+2$ muss also $= 3$ sein, was in der That bei der Form $f_3$ zutrifft. –

Wir stellen jetzt die Differentialgleichung auf dem allgemeinen algebraischen Gebilde auf:

Indem wir $\varphi$ durch $\sigma^2$ ersetzen und bedenken, dass im hyperelliptischen Falle $p = d + 1$ ist, geht die linke Seite der Differentialgleichung auf S. 83 in folgenden Ausdruck über:

$$\frac{\sigma^2}{x_2^4}\,[\eta]_x + \frac{3}{8(2d+3)^2}\cdot\frac{\mathcal{H}(\sigma^2)}{\sigma^2},$$

wofür wir auch einfacher schreiben können:

$$\frac{\sigma^2}{x_2^4}[\eta]_x + \frac{3}{2(d+1)(2d+3)}\cdot\mathcal{H}(\sigma).$$

Dieser Ausdruck bleibt aber, abweichend vom hyperelliptischen Fall, an den Verzweigungspunkten der Fläche im Allgemeinen nicht endlich, sondern wird an einem einfachen Verzweigungspunkt einfach, an einem mehrfachen Verzweigungspunkt 2 fach unendlich, mit Coefficienten, welche von den Entwicklungscoefficienten des $\eta$ unabhängig sind.

Wir können daher setzen

$$\frac{\sigma^2}{x_2^4}[\eta]_x + \frac{3}{2(d+1)(2d+3)} \cdot \mathcal{H}(\sigma) = \frac{\tau}{\sigma} + \Gamma_{2d}(x_1, x_2),$$

unter $\tau$ eine bestimmte ganze Form vom Grade $3d+2$ verstanden, welche für die Fläche ebenso characteristisch ist, wie $\sigma$. *)
$\Gamma$ ist hierin definirt als die allgemeinste algebraische Form $2d$ten Grades auf unserer Fläche, welche in den gegebenen singulären Punkten in der Weise 2fach unendlich wird, dass $x_2^4 \cdot \frac{\Gamma}{\sigma^2}$ sich verhält wie

$$\frac{\frac{1-\alpha^2}{2}}{(x-a)^2} + \frac{A}{x-a} + \cdots$$

Die Constantenabzählung nach dem Riemann-Roch'schen Satz ergibt, dass die Form $\Gamma$ unter dieser Bedingung $2n + 3p - 3$, also wenn man auch die singulären Punkte $a, b, \ldots n$ selbst mit zu den Constanten rechnet, $3p - 3 + 3n$ Constanten enthält. Also:

Es gibt auf unserer kanonischen Fläche und deshalb überhaupt auf dem algebraischen Gebilde bei gegebener Zahl $n$ der singulären Punkte in der zugehörigen Differentialgleichung $3p - 3 + 3n$ willkürliche Constanten.

Von dieser Differentialgleichung 3. Ordnung steigen wir nun in ganz entsprechender Weise, wie beim hyperelliptischen Gebilde zur

*) Ursprünglich hatte ich in der Vorlesung das Glied $\frac{\tau}{\sigma}$ weggelassen und erst Herr Pick hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass hier eine Unrich-

linearen Differentialgleichung 2. Ordnung auf. Wir definiren durch die Formel

$$d\omega = \frac{(x, dx)}{\sigma}$$

das überall endliche und nirgends verschwindende Differential der Fläche (vergl. Math. Ann. 36). Dann spalten wir $\eta$ folgendermaßen in Zähler und Nenner:

$$\Pi_1 = \eta\sqrt{\frac{d\omega}{d\eta}}, \quad \Pi_2 = \sqrt{\frac{d\omega}{d\eta}}.$$

Der Grad der Formen $\Pi_1$; $\Pi_2$ stellt sich dabei als $-\frac{d}{2} = -\frac{p-1}{m}$ heraus.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher $\Pi_1$, $\Pi_2$ genügen, lautet

$$(\Pi, \sigma^2)_2 + (d+2)(2d+3) \cdot \Pi \cdot \left(\frac{\tau}{\sigma} + \Gamma_{2d}\right) = 0$$

Ich möchte diese Gleichung noch insbesondere für die oben behandelte allgemeine Curve 4. Ordnung specialisiren, weil sich daran eine gewisse Frage von allgemeiner Bedeutung anschliesst.

Es sei wieder $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung der Curve 4ter Ordnung, welche das algebraische Gebilde repräsentirt. Dadurch wird $x_3$ als algebraische Form 1. Grades von $x_1, x_2$ auf dem Gebilde definirt. Irgend eine rationale Form von $x_1, x_2, x_3$ wird

tigkeit vorlag.

dadurch eine algebraische binäre Form von $x_1, x_2$, welche wir als unabhängige Variable auf der 4 fach überdeckten Geraden, d. h. auf der Riemann'schen Fläche ansehen, auf die sich die Curve projicirt. Mit $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}$ mögen die partiellen Differentialquotienten einer solchen Form bezeichnet werden, insofern man nur $x_1, x_2$ als unabhängige Variable ansieht, also $x_3$ durch $x_1, x_2$ ausgedruckt denkt. Dagegen mögen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ die partiellen Differentialquotienten derselben Form bezeichnen, insofern man $x_1, x_2, x_3$ als unabhängig von einander ansieht.

Es ist dann der Zusammenhang dieser zweierlei Differentiationen miteinander durch folgende symbolische Formeln gegeben:

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_3}{dx_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad \frac{d}{dx_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dx_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Dabei sind die Differentialquotienten $\frac{dx_2}{dx_1}$ und $\frac{dx_3}{dx_2}$ entlang der Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ zu nehmen, also

$$\frac{dx_3}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_3}, \quad \frac{dx_3}{dx_2} = -\frac{f_2}{f_3}$$

zu setzen, so dass wir die Formeln erhalten:

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{f_1}{f_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$\frac{d}{dx_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{f_2}{f_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Entsprechende Umsetzungsformeln sind für die zweiten, dritten u. s. w. Differentialquotienten auszurechnen.

In der Differentialgleichung ist nun $\sigma = f_3$ und der Grad von $\Gamma$ ist $= 2$ zu setzen.

Zugleich läſst sich die Form $\tau$ in einfachster Weise hinschreiben, nämlich

$$\tau = -\frac{1}{90}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} = -\frac{1}{90}\mathcal{H}_3,$$

unter $\mathcal{H}$ in die Hesse'sche Covariante der Curve $f = 0$ verstanden.

"Wir fassen $\Gamma$ mit dem numerischen" Factor vor dem zweiten Glied der linken Seite in der linearen Differentialgleichung zu einer algebraischen Form zweiten Grades zusammen, die wir $\Lambda$ nennen wollen." Wir haben also die lineare Differentialgleichung

$$\left(\Pi, f_3^{\,2}\right)_2 + \left(-\frac{1}{6}\frac{\mathcal{H}_3}{f_3} + \Lambda_{(2)}\right)\Pi = 0.$$

Hierin ist die Überschiebung so zu verstehen, daſs man in $f_3$ erst $x_3$ durch $x_1, x_2$ auszudrücken hat, und dann mit den homogenen Variablen $x_1, x_2$ allein operirt. Hierin liegt aber eine unsymmetrische Bevorzugung der einen Variablen $x_3$. Um diese zu beseitigen, wird man in $(\Pi, f_3{}^2)_2$ die Differentiationen $\frac{d^2}{dx_1{}^2}$, $\frac{d^2}{dx_1 dx_2}$, $\frac{d^2}{dx_2{}^2}$ durch Differentiationen nach $x_1, x_2, x_3$ ausdrücken, wozu die oben hingeschriebenen Formeln dienen. Auch die algebraische Form zweiten Grades $\Lambda_2$ werden wir symmetrisch durch $x_1, x_2, x_3$ ausdrücken. Man sieht leicht, daß die allgemeinste algebraische Form von $x_1, x_2$ vom 2. Grad mit der allgemeinsten rationalen Form 2. Grades von $x_1, x_2, x_3$ identisch ist. In der That stimmt die Constantenzahl in beiden genau überein.

Wollen wir eine unverzweigte Differentialgleichung haben, so brauchen wir für $\Lambda$ nur die allgemeinste ganze rationale Form 2. Grades von $x_1, x_2, x_3$, d. h. die linke Seite der allgemeinsten Kegelschnittsgleichung einzusetzen.

<u>Wir haben damit die $\infty^6$ unverzweigten Differentialgleichungen, die es bei der Curve 4. Ordnung gibt, wirklich hingeschrieben.</u>

Wenn wir aber auch in dieser Weise die Differentialgleichung durch $x_1, x_2, x_3$ ausgedrückt denken, so befriedigt sie uns doch noch nicht, so lange nicht $x_1, x_2, x_3$ ganz symmetrisch in denselben auftreten. Wir formuliren daher die Aufgabe:

Unsere Aufgabe wird sein, der Formel eine Gestalt zu erteilen, in welcher die einseitige Bevorzugung des $x_3$ vermieden ist, in welcher also statt der binären die ternäre invariante Auffassung zu Tage tritt.

Genau dieselbe Aufgabe tritt uns schon in der Theorie der Abel'schen Integrale entgegen, wenn wir dieselben nach dem Vorgange von Aronhold als Integrale auf einer algebraischen Curve darstellen, welche durch eine Gleichung zwischen homogenen Coordinaten $x_1, x_2, x_3$ gegeben ist. Sieht man da zunächst nur $x_1, x_2$ als unabhängige Coordinaten an, und denkt sich $x_3$ als algebraische Form derselben ausgedrückt, so schreibt sich ein Abel'sches Integral in der Gestalt

$$\int \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{f_3} \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

unter $\varphi$ irgend eine rationale Form vom Grade 1 (wenn $f$ vom 4. Grade ist) verstanden. Um hierin die Bevorzugung der Variablen $x_3$ zu beseitigen, berücksichtigt man, daß auf der Curve identisch

$$\frac{x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2}{f_1} = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{f_2} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{f_3}$$

ist. Wir sehen: die Sache ist hier sehr einfach. <u>Die Bevorzugung der $x_3$ in unserer Formel ist nur scheinbar.</u> Wollen wir die Bevorzugung auch formel aufheben, so werden wir Zähler und Nenner des ersten Bruches mit einer beliebigen Constanten $c_1$, des zweiten mit $c_2$, des dritten mit $c_3$ multipliciren und dann die Zähler einerseits, sowie andererseits die Nenner addiren, so daß folgender Ausdruck entsteht.

$$\frac{c_1(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) + c_2(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3) + c_3(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3}$$

$$= \frac{|c_1, x_2, dx_3|}{\Sigma c_i f_i}.$$

Die analoge Frage würden wir hier zu discutiren haben:

<u>Es wird zu untersuchen sein, wie die verschiedenen Ausdrücke miteinander verwandt sind, die sich aus unserer 2ten Überschiebung von $\Pi$ mit $f_3{}^2$ durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 ergeben, und es ist dann weiter die</u>

Aufgabe eine derartige Schreibweise einzuführen, welche diese genannten Ausdrücke symmetrisch berücksichtigt, und damit dem $\Pi$ eine Definition gibt, die von dem gewählten Coordinatensystem unabhängig ist, die also ternär-invarianten Character besitzt.

Eine derartige Durcharbeitung der linearen Differentialgleichungen auf einem algebraischen Gebilde auch in formaler Hinsicht ist ein dringendes Bedürfnis, da wir uns bemühen müssen, so wie die Abel'schen Integrale als erste einfachste Transsendenten auf algebraischen Gebilden zum unentbehrlichen Hülfsmittel für alle Mathematiker beim Studium der algebraischen Gebilde geworden sind, so auch als eine weitere höhere Classe von Functionen diejenigen herauszuarbeiten, welche durch lineare Differentialgleichungen definirt werden. Dieselben werden ohne Zweifel für die Erkenntnis der Eigenschaften eines algebraischen Gebildes ebenso fruchtbar sein, als es die Abel'schen Transcendenten bislang waren.

Damit schliefse ich die Einleitung dieser Vorlesung, in welcher ich zunächst Rechenschaft über die algebraischen Formulirungen unserer Differentialgleichungen auf rationalen und auf algebraischen Gebilden abgelegt habe. Nach Pfingsten wollen wir uns dann der Erforschung der transcendenten Eigenschaften der Functionen zuwenden, welche durch unsere Differentialgleichungen definirt sind. Dabei wird sich naturgemäfs der Anschlufs an die geometrischen Methoden darbieten, die wir vor Ostern bei Untersuchung der hypergeometrischen Function entwickelt haben.

---

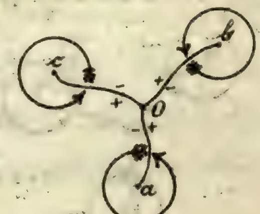
# Haupttheil der Vorlesung: Von den transcendenten Eigenschaften der Differentialgleichungen.

## I. Allgemeine Darlegung.

Mo. d. 21. Mai 1894.] Nachdem wir vor Pfingsten das algebraische Substrat unserer Betrachtungen, die expliciten Definitionsformeln unserer Differentialgleichungen gewonnen haben, wird es nunmehr unsere Aufgabe sein, die inneren Eigenschaften der hierdurch definirten Functionen zu studiren, wobei wir je nach den besonderen Fragestellungen bald auf das $\eta$, bald auf $y_1$, $y_2$, bald endlich auf $\pi_1$, $\pi_2$ uns beziehen werden.

Wollen wir heute einmal die der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entsprechenden Functionen $y_1, y_2$ ins Auge fassen, um an ihnen zunächst die Betrachtungen zu verallgemeinern, zu denen uns die Monodromiegruppe bei $n = 3, p = 0$ Anlass gab.

Bei $n = 3$, $p = 0$ hatten wir eine schlichte $x$-Ebene, in dieser drei singuläre Punkte $a, b, c$, bei deren Umlaufung die $y_1, y_2$ sich linear substituiren. Um ein bestimmtes Paar von Ausgangszweigen zu definiren, zerschnitten wir die $x$-Ebene längs dreier von einem beliebigen Punkte $O$ nach $a$, nach $b$ und nach $c$ hinlaufender Schnitte.



Irgend ein Zweigpaar $y_1, y_2$ ist in der so zerschnittenen Ebene eindeutig, besitzt aber auf dem positiven Ufer jedes Schnittes Werte, die sich aus denen auf dem negativen Ufer durch eine lineare Substitution ergeben, längs $Oa$ durch $A$, längs $Ob$ durch $B$, längs $Oc$ durch $C$, so dass z. B. längs $Oa$

$$\left\{\frac{y_1'}{y_2'}\right\} = A \left\{\frac{y_1}{y_2}\right\}$$

ist. Dabei sind die drei Substitutionen nicht unabhängig voneinander, sondern sie geben, wenn man zuerst $C$, dann $B$, dann $A$ anwendet, die Identität

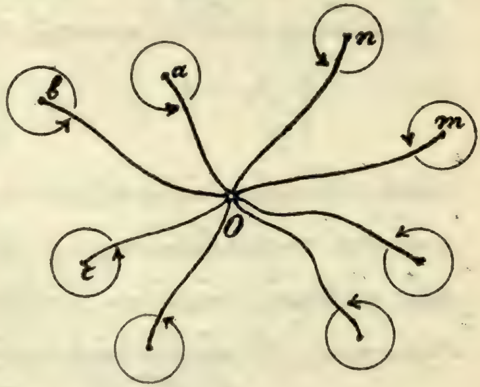
$$ABC = 1,$$

entsprechend der geometrischen Thatsache, dass ein alle drei Punkte umkreisender Weg sich auf irgend einen nichtsingulären Punkt zusammenziehen lässt. Die Wiederholung und Combination der 3. Substitutionen $A, B, C$ ergibt dann die Monodromiegruppe der $y_1, y_2$: d. h. $A, B, C$ sind die „erzeugenden Substitutionen" der Monodromiegruppe. (Vergl. S. 100 der Winterautographie)

<u>Diese Lehre von der Monodromiegruppe und ihren Erzeugenden haben wir nun auf den</u>

Fall eines höheren $p$ mit beliebig vielen Verzweigungspunkten zu übertragen.

Zunächst im Falle $p=0$ haben wir eine schlichte $x$-Ebene mit $n$ singulären Punkten $a, b, \ldots n$. Wir ziehen wieder von einem beliebigen Punkte $O$ aus Schnitte nach $a, b, \ldots n$ und definiren vermöge derselben ein Zweigpaar $y_1, y_2$, sowie $n$ erzeugende Substitutionen $A, B, \ldots N$, welche der Relation



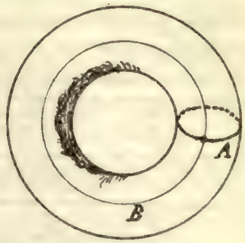

$$A \cdot B \ldots N = 1$$

genügen, und welche miteinander combinirt und wiederholt die Monodromiegruppe der $y_1, y_2$ erzeugen.

Haben wir $p>0$, so tritt der neue Umstand ein, dass auch geschlossene nicht auf einen Punkt zusammenziehbare Wege auf der Riemann'schen Fläche existiren, denen ebenfalls lineare Substitutionen entsprechen. Am besten sieht man dies, wenn man die ringförmige Gestalt der Fläche zu Grunde legt.

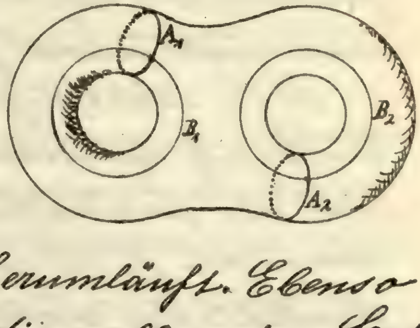
Z.B. im Falle $p=1$ kann man sich die

Riemann'sche Fläche in einen gewöhnlichen Kreisring deformirt denken. Auf diesem sind insbesondere zwei geschlossene nicht in einen Punkt zusammenziehbare Wege möglich, nämlich eine Meridiancurve A und eine Breitencurve B.




Alle übrigen geschlossenen Curven auf der Fläche kommen auf eine Wiederholung dieser beiden fundamentalen Wege zurück, nämlich der Durchlaufung der Meridiancurve A und der Durchlaufung der Breitencurve B.

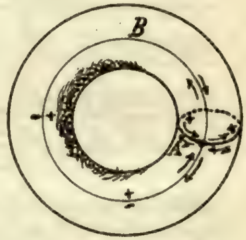
Ähnlich ist es bei höherem $p$. z. B. die Doppelringfläche des Falles $p = 2$ läßt jeder ihrer beiden Öffnungen entsprechend einmal einen Weg A zu, der durch die Öffnung hindurchgeht, andererseits einen Weg B, der um die Öffnung herumläuft. Ebenso bei $p > 2$, so daß wir diese allgemeine Sachlage haben:




Auf einer Fläche von höherem $p$ kann man

$p$ Paare von jedesmal zwei Wegen (Meridiancurve und Breitencurve) so einführen, daß jeder andere geschlossene Weg, den man auf der Fläche ziehen mag, als Aufeinanderfolge ganzer Wiederholungen dieser Wege dargestellt werden kann.

Nun denken wir uns die Fläche zunächst des Falles $p=1$ längs der Fundamentalwege aufgeschnitten. Dieselbe wird dadurch ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, dessen Berandung von den beiden Ufern jedes Schnittes gebildet wird. Wir wollen nun den Rand dieser einfach zusammenhängenden Fläche entlang laufen und zusehen, wie die einzelnen Randstücke aufeinander folgen.



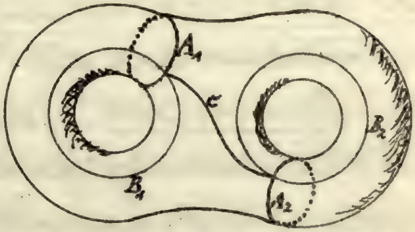

Man sieht, daß man zuerst den Schnitt $A$ entlang in einem gewissen Sinne läuft, den wir als positiven Sinne bezeichnen wollen, dann an $B$ in einem bestimmten Sinn, der ebenfalls der positive sein soll, dann an $A$ in negativem Sinn, endlich wieder an $B$ in negativem Sinn, worauf man an die Ausgangsstelle des Randes zurückgelangt ist.

Wir bezeichnen die geschilderte Aufeinanderfolge der Wege mit

$$A^{+1}\,B^{+1}\,A^{-1}\,B^{-1}.$$

Also: Wenn wir die Fläche $p=1$ längs der beiden zusammengehörigen Curven zerschneiden, dann besteht die Begrenzung der entstehenden zerschnittenen Fläche aus der Aufeinanderfolge der Wege $A^{+1}B^{+1}A^{-1}B^{-1}$.

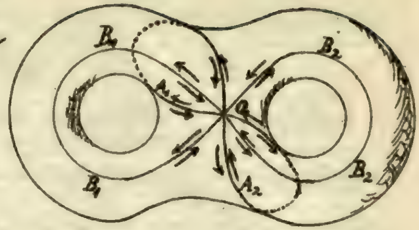
Wie ist die Sache bei $p=2$? Wenn wir da längs der oben beschriebenen Fundamentalwege zerschneiden, so besitzt das entstehende Flächenstück immer noch zweifachen Zusammenhang; und wir müssen noch die beiden Randcurven — die eine von $A_1^{\pm1}$, $B_1^{\pm1}$, die andere von $A_2^{\pm1}$, $B_2^{\pm1}$ gebildet — durch einen




weiteren Schnitt $c$ verbinden, den man etwa vom Kreuzungspunkt der Curven $A_1$, $B_1$ nach dem Kreuzungspunkt der Curven $A_2\,B_2$ legen mag. Wir sagen also:

Wir reichen jetzt nicht aus mit den Schnitten $A_1 B_1$ einerseits $A_2 B_2$ andererseits, sondern wir brauchen noch ein Verbindungsstück $c$.

Dieser Verbindungsschnitt c ist aber sehr unbequem. Man kann denselben dadurch vermeiden, dafs man, wie in nebenstehender Figur, die Kreuzungspunkte beider Schnittpaare an denselben Punkt der Fläche heranzieht.




Man kann die Zerschneidung der Fläche $p=2$ so einrichten, dafs der Kreuzungspunkt des Paares $A_1 B_1$ und der Kreuzungspunkt des Paares $A_2 B_2$ zusammenfallen und dafs also das Verbindungsstück c überflüssig wird.

Nachdem wir die Fläche $p=2$ in dieser Weise „Kanonisch" zerschnitten haben, besteht ihre Berandung der Reihe nach aus der folgenden Aufeinanderfolge von Wegen:

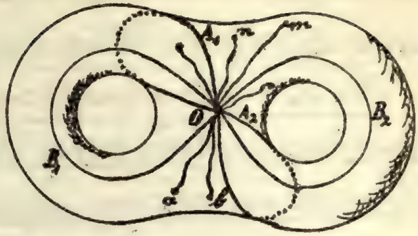
$$A_1^{+1} B_1^{+1} A_1^{-1} B_1^{-1} . A_2^{+1} B_2^{+1} A_2^{-1} B_2^{-1} .$$

Entsprechend ist es bei höherem p einzurichten.

Was bedeutet dies für die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf einem algebraischen Gebilde?

Wenn n singuläre Punkte a, b, ... n existieren, so haben wir behufs Absonderung eines

Zweigpaares $y_1, y_2$ die gerade geschilderte Zerschneidung nur noch durch $n$ etwa von der Ecke $B_p^{-1} A_1^{+1}$ des bisherigen Schnittsystems aus




nach den Punkten $a, b, \ldots n$ gehende Einschnitte zu vervollständigen, die wir $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{N}$ nennen.

In der so zerschnittenen Riemann'schen Fläche ist $y_1, y_2$ gewiss eindeutig, da wir es mit einem einfach zusammenhängenden Flächenstück zu thun haben, innerhalb dessen sich jede geschlossene Curve auf einen beliebigen nichtsingulären Punkt zusammenziehen lässt. Bei Überschreitung eines Schnittes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{N}$ dagegen, d. h. bei Umlaufung eines Punktes $a, b, \ldots n$ wird $y_1, y_2$ genau wie bei $p=0$ eine lineare Substitution $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{N}$ erleiden. Aber auch bei Überschreitung der Schnitte $B_1, A_1, B_2, A_2$ d. h. bei Durchlaufung eines der Wege $A_1, B_1, A_2, B_2$, liegt kein Grund vor, warum $y_1, y_2$ ungeändert bleiben sollten; sie werden im Allgemeinen auch längs dieser Periodenwege lineare

Substitutionen erleiden, welche wir ebenso wie die Wege, nämlich mit $A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots$ benennen wollen. Wir sagen also zusammenfassend:

In der zerschnittenen Fläche, welche einfach zusammenhängend ist und keinen singulären Punkt in ihrem Innern enthält, definiren wir uns zunächst ein Zweigpaar $y_1, y_2$. Vermöge der kanonischen Zerschneidung unserer Fläche setzen sich dann alle Substitutionen, welche $y_1, y_2$ bei Umläufen über die Fläche hin erleidet, aus $n + 2p$ Fundamentalsubstitutionen zusammen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots \mathcal{N}; A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots A_p, B_p$.

Aber diese sind nicht unabhängig voneinander, sondern sie müssen folgender Bedingung genügen: Wenn man den ganzen Rand des zerschnittenen Bereiches umläuft, so müssen sich $y_1, y_2$ reproduciren, da ein solcher Weg auf einen beliebigen Punkt im Innern des Bereichs zusammengezogen werden kann. Es kommt so die Bedingung heraus:

Die $n + 2p$ Fundamentalsubstitutionen genügen der Fundamentalrelation:

$$\mathcal{A}.\mathcal{B} \ldots \mathcal{N}.\, A_1^{+1} B_1^{+1} A_1^{-1} B_1^{-1} . \ldots . A_p^{+1} B_p^{+1} A_p^{-1} B_p^{-1} = 1.$$

Di. d. 22. Mai 1894.] Nachdem wir so die Erzeugenden der Monodromiegruppe übersehen, wollen wir heute die Anzahl der Constanten in derselben abzählen.

Jede der $n+2p$ binären Substitutionen der $y_1, y_2$, welche wir als Erzeugende gewählt haben, besitzt 4 Constanten; zusammen also $4n+8p$. Die Fundamentalrelation vermindert aber diese Anzahl um 4. Die Gruppe enthält also insgesamt $4n+8p-4$ Constanten. Von diesen ist aber eine gewisse Zahl unwesentlich, da wir statt $y_1, y_2$ irgend zwei andere linear unabhängige Verbindungen derselben als Variable einführen, d. h. die Gruppe irgend einer linearen Transformation unterwerfen können; dadurch wird die Constantenzahl aber nicht um 4, sondern nur um 3 vermindert, da eine simultane Multiplication von $y_1, y_2$ mit einer beliebigen Zahl die Gruppe nicht ändert. Mithin hat die binäre Substitutionsgruppe der $y_1, y_2$ zusammen $4n+8p-7$ wesentliche Constanten.

Achten wir dagegen statt auf $y_1, y_2$ vielmehr auf den Quotienten $\eta$, so enthält jede der nichthomogenen gebrochenen Substitutionen, welche $\eta$ erleidet, nur 3 Constanten, die Erzeugenden zusammen also $3n+6p$ Constanten. Diese Zahl vermindert sich vermöge der Fundamentalrelation um 3, vermöge der noch zur Verfügung stehenden linearen Transformation der Gruppe abermals um 3, so dass nur $3n+6p-6$ wesentliche Constanten übrig bleiben. Wir haben also den Satz:

Sofern wir die erzeugenden Substitutionen der Gruppe als willkürlich annehmen, enthält die Gruppe der $y_1, y_2$ $4n+8p-7$, die Gruppe des $\eta$ $3n+6p-6$ wesentliche Constanten.

Wir wollen nun im Anschluss an diese Constantenabzählung gewisse Fragen, die wir für $p=0$ schon vor Weihnachten erörtert haben, auf den allgemeinen Fall $p>0$ ausdehnen.

1. Es kann ein singulärer Punkt ganzzahlige Exponenten haben, ohne dass doch in der Entwicklung eines Zweigs $y_1, y_2$ in der Umgebung desselben logarithmische Glieder auftreten. Der Punkt ist dann ein „Nebenpunkt" in dem vor Weihnachten bei Besprechung von Riemann's Arbeit festgesetzten Sinne.

Er liefert als solcher keinen Beitrag zur Monodromiegruppe oder $y_1, y_2$ sondern $y_1, y_2$ sind in seiner Umgebung eindeutig. Wir fragen nun:

Wie viele bewegliche Nebenpunkte müssen wir in eine Differentialgleichung neben den gegebenen „Hauptpunkten" (d. h. welche einen Beitrag zur Gruppe liefern) einführen damit die Differentialgleichung genau so viele Parameter hat, als die allgemeine Monodromiegruppe nach unserer Abzählung?

Es ist dies die Fragestellung, welche für die Weiterbearbeitung von Riemann's Fragment über die linearen Differentialgleichungen vorab zu behandeln ist.

2. Wir werden diese Frage für die Differentialgleichung des $\eta$ beantworten, wie wir überhaupt bei höherem $p$ uns wesentlich mit $\eta$ beschäftigen werden, da wir sonst bei $p = 1$ die Theorie der elliptischen Functionen, bei $p > 1$ noch andere Transcendenten zu sehr heranziehen müssten.

Es sei $p$ das Geschlecht, $n$ die Anzahl der singulären Hauptpunkte der Differentialgleichung für $\eta$. Dann haben wir, wenn die Hauptpunkte vorgegeben sind, folgende noch willkürliche Constanten:

$n$ Exponentendifferenzen ——— $n$ Constanten

$n+3p-3$ Accessorische Parameter ——— $n+3p-3$ "

Sa $2n+3p-3$ "

Es fehlen also an der Zahl $3n+6p-6$ der Gruppenparameter noch $n+3p-3$. Da jeder Nebenpunkt eine neue willkürliche Constante einführt, müssen wir also noch $n+3p-3$ willkürliche Nebenpunkte adjungieren.

<u>Wollen wir bei gegebenem algebraischem Gebilde und gegebenen Hauptpunkten doch so viele Parameter in der Differentialgleichung haben, als in der allgemeinen Monodromiegruppe enthalten sind, so müssen wir die Differentialgleichung mit $n+3p-3$ beweglichen Nebenpunkten ausstatten.</u>

3. Was für Functionen erhalten wir, wenn wir nur Nebenpunkte zulassen?

a) Bei <u>$p=0$</u> treten dann überhaupt keine Substitutionen auf, $\eta$ reproducirt sich also bei jedem Umlauf, ist folglich eine eindeutige Function in der ganzen $x$-Ebene. Da wir wesentlich singuläre Stellen ausschliessen, so ist $\eta$ eine rationale Function von $x$:

$$\eta = R(x).$$

<u>Die Annahme, dass nur Nebenpunkte vorhanden sind, ergibt für $p=0$ das triviale Resultat,</u>

<u>dass $\eta$ eine rationale Function von $x$ ist.</u>

c.) Anders liegt die Sache schon bei <u>$p=1$</u>. Da sind noch zwei Periodenwege möglich, so dass wir im Allgemeinen eine Gruppe mit zwei Erzeugenden $A$ und $B$ haben.

Wir fragen, wie sich die Function $\eta$ verhalten wird, wenn wir $u$ als unabhängige Variable einführen?

Denken wir uns die $u$-Ebene mit ihrer Parallelogrammeinteilung construirt; dann liegen in jedem Parallelogramm eine gewisse Anzahl von Nebenpunkten, in deren Umgebung aber $\eta$ eindeutig ist; Verzweigungspunkte für $\eta$ gibt es aber in der ganzen $u$-Ebene nicht.

Da die $u$-Ebene mit dem einen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen als Begrenzung ein einfach zusammenhängendes überall schlichtes Gebiet ist, so muss $\eta$, weil es überall unverzweigt ist, auch eindeutig sein. Also:

<u>Im Falle $p=1$ ist $\eta$ eine eindeutige Function von $u$</u>. Was aber geschieht mit $\eta$, wenn wir $u$ um eine Periode $\omega_1$ oder $\omega_2$ vermehren? Einer Vermehrung des $u$ um $\omega_1$ entspricht auf der geschlossenen Riemann'schen Fläche ein geschlossener Periodenweg $A$, einer Ver-

mehrung um $\omega_2$ ein Periodenweg B. Längs des ersten Periodenwegs aber erleidet $\eta$ die gleich-benannte lineare Substitution A, längs des zwei-ten die Substitution B. Wir erhalten also den Satz:

<u>$\eta$ ist eine eindeutige Function von u, welche bei Vermehrung des Arguments u um Perioden bestimmte lineare Substitutionen erleidet:</u>

$$\eta(u+\omega_1) = A\eta(u), \quad \eta(u+\omega_2) = B\eta(u).$$

<u>Diese Functionen sind insbesondere von Picard im Anschluss an frühere Untersuchungen von Hermite ausführlich behandelt worden.</u>
Auf die explicite Darstellung derselben durch elliptische $\Theta$-Functionen können wir hier nicht eingehen; nur ein Resultat, welches aus rein gruppentheoretischen Principien folgt, wollen wir hier noch hervorheben:

Wir bilden uns $\eta(u+\omega_1+\omega_2)$ auf zweierlei Weise, indem wir u einmal erst um $\omega_1$, dann um $\omega_2$ vermehren, ein andermal indem wir u erst um $\omega_2$, dann um $\omega_1$ vermehren. Beidemal muss man, da $\eta$ in der u-Ebene eindeutig ist, zum selben Resultat gelangen, nämlich

$$AB\eta(u) = BA\eta(u).$$

Das heisst:

<u>Die beiden Substitutionen A und B erweisen sich als vertauschbar.</u>

Dies konnten wir aber von vornherein wissen. Denn die Fundamentalrelation

$$ABA^{-1}B^{-1} = 1$$

geht, indem wir auf beiden Seiten $BA$ noch rechts zusetzen, unmittelbar in $AB = BA$ über, und umgekehrt folgt aus $AB = BA$ die Fundamentalrelation in der von uns angegebenen Gestalt. Also:

<u>Die Vertauschbarkeit von A und B ist gerade das, was im vorliegenden Falle die Fundamentalrelation besagt.</u>

4.) Auf den Fall $p > 1$ ohne Hauptpunkte gehe ich hier nur zu dem Zweck ein, um zu sagen, wie es nicht ist, um falschen Analogieschlüßen vom $p = 1$ auf $p > 1$ vorzubeugen, welche in der That gelegentlich gemacht worden sind.

Dieselbe Rolle, wie das überall endliche elliptische Integral $u$ im Falle $p = 1$, spielen in vielen auf höheres $p$ bezüglichen Untersuchungen die überall endlichen Abel'schen Integrale $u_1, u_2, \dots u_p$. Z. B. lassen sich die algebraischen Functionen $s$ und $z$ des algebraischen Gebildes als eindeutige $2p$ fach periodische Functionen der zusammengehörigen Werte $u_1, u_2, \dots u_p$ ausdrücken, nämlich mit Hülfe der höheren $\Theta$-Functionen.

Man könnte nun nach der Analogie des Falles $p=1$ vermuten, dass auch $\eta$ durch $u_1, u_2, \dots u_p$ eindeutig darstellbar wäre, etwa mit Hülfe von $\Theta$-Functionen. Dem ist aber nicht so. Wir sagen zunächst:

<u>Die Änderungen von $u_1, u_2, \dots u_p$ bei Durchlaufung verschiedener Periodenwege sind immer commutativ, weil es sich ja nur um Hinzufügung additiver Constanten handelt.</u>

Man kommt also von einem Ausgangswertsystem $u_1, u_2 \dots u_p$ zu demselben Wertsystem $u_1 + \omega_{11} + \omega_{12}, u_2 + \omega_{21} + \omega_{22}, \dots\dots u_p + \omega_{p1} + \omega_{p2}$, einerlei ob man den Weg $A_1$ oder den Weg $A_2$ zuerst durchläuft. Wenn also $\eta$ eindeutig in $u_1, u_2, \dots u_p$ sein soll, so muss es ebenfalls denselben Wert erlangen, einerlei ob man den Weg $A_1$ oder $A_2$ zuerst durchläuft, d. h.

<u>$\eta$ kann nur dann eindeutig in $u_1, u_2 \dots u_p$ sein, wenn alle linearen Substitutionen, welche $\eta$ bei beliebigen Umläufen auf der Riemann'schen Fläche erleidet, commutativ</u>

<u>sind.</u>

Zur Vertauschbarkeit der $2p$ Substitutionen $A, B$ liegt aber hier <u>gar</u> kein Grund vor.

Denn die eine Fundamentalrelation

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} = 1$$

kann unmöglich die vielen voneinander unabhängigen Relationen zur Folge haben, welche in der Vertauschbarkeit der $2p$ Substitutionen untereinander liegen würden.

Danach ist folgendes die Sachlage, wenn wir uns daran erinnern wollen, was wir im Wintersemester über die Tendenz der Functionentheorie, überall eindeutige Functionen statt vieldeutiger einzuführen, gesagt haben:

<u>Bei $p=1$ ist das Integral erster Gattung nicht nur für die algebraischen Functionen, sondern auch für unsere Differentialgleichungen ohne Hauptpunkte die uniformisirende Variable. Bei $p>1$ dagegen sind die Integrale $u_1, u_2 \dots u_p$ zwar für gewisse Zwecke als uniformisirende Variable brauchbar, aber nicht für unsere Functionen $\eta$.</u>

Wir müssen hier nach einer andern Verallgemeinerung des elliptischen $u$ suchen, welche das gewünschte leistet, und welche nur für $p=1$ in das überall endliche Integral übergeht. Diese richtige uniformisirende Variable wird durch die Theorie der automorphen Functionen geliefert.

5. Wir wollen nun, um unsern Stoff einzuteilen und unsere Gesichtspunkte für die weiteren Untersuchungen richtig zu fassen, uns zunächst eine allgemeine Auffassung von der systematischen Stellung unserer $\eta$-Functionen innerhalb der Functionentheorie bilden.

Wie ordnen wir $\eta$ in die Functionen ein, die wir auf algebraischen Gebilden bereits kennen? Wir können folgendermaßen sagen:
Die einfachsten Functionen auf einem algebraischen Gebilde sind diejenigen, welche sich bei Umläufen auf demselben reproduciren, d.h. die algebraischen Functionen. Die Monodromiegruppe derselben reducirt sich auf die Identität

$$\eta' = \eta.$$

Die nächsthöheren Functionen sind diejenigen, welche sich bei Umläufen additiv ändern:

$$\eta' = \eta + \alpha$$

d. h. die Abel'schen Integrale.

Dann kommen die multiplicativen Functionen

$$\eta' = \alpha \eta ,$$

die von Prym gefundenen und von Appell neuerdings eingehender untersuchten „Integrale multiplicativer Functionen":

$$\eta' = \alpha \eta + \beta ,$$

und endlich folgen als naturgemäße Verallgemeinerung unsere $\eta$ Functionen als solche Functionen, welche bei Umläufen allgemeine lineare Substitutionen erleiden:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \; !$$

Wir können diese Aufzählung noch fortsetzen, indem wir statt $\eta$ die $y_1, y_2$ zu Grunde legen. Wir haben in $y_1, y_2$ zwei Functionen der Riemann'schen Fläche, die sich bei beliebigen Umläufen homogen linear substituiren:

$$y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2 \; ; \quad y_2' = \gamma y_1 + \delta y_2 .$$

Es liegt nahe, Systeme von 3, 4 . . . . n Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von der entsprechenden Eigenschaft in Betracht zu ziehen. <u>Das gibt uns diejenigen Functionen unseres algebraischen Gebildes, welche linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung genügen.</u> Dann wieder können wir Functionspaare . . . auf dem Gebilde in Betracht ziehen, welche sich linear und ganz, aber nicht homogen substituiren:

$$y_1' = \alpha y_1 + \beta y_2 + C_1 \;,\quad y_2' = \gamma y_1 + \delta y_2 + C_2 \;,$$

etc. etc. Wir bekommen so eine systematische Reihe bestimmter functionentheoretischer Fragestellungen. Ich erinnere insbesondere an das, was in Bd. I meiner Riemann'schen Flächen auf pag. 155 über die Minimalflächen-theorie gesagt ist. Innerhalb des so entstehenden allgemeinen functionentheoretischen Programms nehmen unsere hier zu betrachtenden $\eta$-Functionen, bezw. unsere $y_1$, $y_2$, eine wohldefinirte Stelle ein.

Do. d. 24. Mai 1894.] Wir wenden uns nun der Riemann'schen Fragestellung zu, die uns fortan immer begleiten wird.

In der Theorie der Abel'schen Functionen liegt bekanntlich die Sache so, daß man, nachdem man Periodicität und Unendlichkeitsstellen als die wesentlichen Elemente eines Abel'schen Integrals erkannt hat, die Unendlichkeitsstellen und gewisse Eigenschaften der Periodicität vorgibt, und zusieht ob die Functionen dadurch auf dem algebraischen Gebilde eindeutig bestimmt sind. Da ergibt sich, dass die Integrale z. B. dadurch eindeutig festgelegt werden können, dass man die reellen Teile ihrer sämtlichen Perioden vorschreibt.

Ganz entsprechend werden wir es für die Differentialgleichungen, zunächst der 2. Ordnung, auf einem algebraischen Gebilde machen. Wir geben von den singulären Stellen die Hauptpunkte vor und fragen uns, was wir von der Monodromiegruppe noch verlangen können, und ob wir der Monodromiegruppe insbesondere solche Eigenschaften auferlegen können, dass die Differentialgleichung dadurch eindeutig bestimmt ist.

Wir haben bereits vor Weihnachten des Riemann'schen Fragmentes gedacht, wo eine solche Frage formulirt wird. Da gibt Riemann – um gleich von beliebigem $p$ zu sprechen – die ganze Monodromiegruppe, d. h. ihre $n+2p$ Erzeugenden beliebig vor, und fragt, ob es zugehörige Functionen, d. h. zugehörige Differentialgleichungen auf dem algebraischen Gebilde gibt. Damit das allgemein möglich sei, müssen natürlich mindestens $n+3p-3$ bewegliche Nebenpunkte zugelassen sein. Bei beliebiger Zahl der zugelassenen Nebenpunkte handelt es sich dann natürlich nicht um eine einzige Differentialgleichung, sondern um ein ganzes System verwandter Differentialgleichungen.

Riemanns eigene Fragestellung läuft darauf hinaus, ob man bei gegebener Riemann'scher Fläche und gegebenen Hauptpunkten die Monodromiegruppe beliebig vorgeben darf, um dadurch eine ganze Schar miteinander verwandter Differentialgleichungen festzulegen.

Wir sagten aber schon im vorigen Semester, daß wir mit dieser Fragestellung zur Zeit noch nicht vollständig durchdringen, weil wir die Eigenschaften der conformen Abbildung noch nicht genügend beherrschen. Wir werden daher die Frage etwas modificiren, wie wir schon andeuteten, indem wir nicht die ganze Monodromiegruppe vorgeben, sondern ihr nur gewisse Eigenschaften auferlegen, dafür aber die Existenz von Nebenpunkten ausschliessen, und indem wir zusehen, ob dadurch eine einzelne Differentialgleichung eindeutig sich characterisiren läßt. In der That gibt es einige Entwicklungen, die in dieser Hinsicht erfolgreich gewesen sind. Diese darzulegen wird fortan unsere eigentliche Aufgabe sein.

Wir stellen uns in diesem Semester die Aufgabe eine Reihe von einzelnen Entwicklungen kennen zu lernen, vermöge deren auf einer Riemann'schen Fläche mit gegebenen Hauptpunkten eine Differentialgleichung durch Eigenschaften ihrer Monodromiegruppe vollständig festgelegt ist.

Dabei wird die Methode der conformen Abbildung ein wesentliches Hülfsmittel sein. Ich erinnere daran, das wir im vorigen Semester bei Untersuchung der hypergeometrischen Function alles durch unsere geometrische Methode erreicht haben. Die Betrachtung der verschiedenen Kreisbogendreiecke gab uns eine Übersicht über den Zusammenhang der verschiedenen verwandten Functionen untereinander und die Untersuchung der Gestalt des einzelnen Kreisbogendreiecks lieferte uns ein Bild vom Gesamtverlauf der $\eta$-Function. Des Weiteren beherrschten wir geometrisch die analytische Fortsetzung der Function. Ich weise eigentlich auf diese geometrischen Dinge darum mit besonderem Nachdruck zurück, weil z. Z. manche andere Mathematiker behaupten, die

Geometrie sei in der Functionentheorie überflüssig, und man müsse alles rein analytisch machen. Man versuche es doch, nur eine einzige der genannten Entwicklungen, ohne Geometrie durchzuführen! Statt uns auf einen voreingenommenen Standpunkt für oder gegen eine Methode zu stellen, wollen wir lieber mit einer Methode etwas machen. Wenn die Anderen es hinterher auch ohne Geometrie können, so werden sie immer noch die zweiten sein.

Wir denken uns die Riemann'sche Fläche, wie neulich, durch $2p$ Periodenwege und $n$ nach den singulären Punkten hinlaufende Einschnitte in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ohne singuläre Punkte im Innern zerschnitten. Ein Zweig $\eta$ bildet die so zerschnittene Riemann'sche Fläche auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ab, dessen $2n + 4p$ Ränder einander paarweise durch im Ganzen $n + 2p$ lineare Substitutionen zugeordnet sind. Und zwar sind die beiden Ufer eines nach einem singulären Punkte gehenden Einschnittes $A, B, \ldots N$ je durch die entsprechende Substitution $A, B, \ldots N$ verbunden, die Ufer eines Periodenweges $A_k$ jedoch durch die Substitution $B_k$ und umgekehrt. In seinem Innern wird der Bereich dann und nur dann Windungspunkte enthalten, wenn die Differentialgleichung auch Nebenpunkte besitzt; im Übrigen kann er, auch ohne Windungspunkte im Innern, doch in mannigfachster Weise über sich selbst hinweggreifen, wofür wir im Winter schon beim Dreiecksfall viele Beispiele kennen gelernt haben.

Dann sind wir im Winter dazu übergegangen, die $\eta$-Kugel als Fundamentalfläche einer Nicht-Euklidischen Maßbestimmung anzusehen, <u>wobei sich eine lineare Substitution allgemein als eine Schraubenbewegung um eine Axe darstellt, welche die beiden Fixpunkte der Substitution auf der Kugel verbindet</u>. In unserm Fall haben wir $n+2p$ Erzeugende;

<u>Die zugehörigen $n+2p$ Schraubenaxen bilden zusammen den „Kern" der Figur, und in diesen Kern ist unser Periodicitätsbereich „eingehängt."</u>

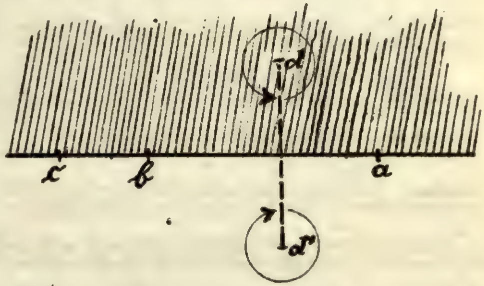
<u>Verwandte Periodicitätsbereiche sind jeweils in denselben Kern mit derselben Kantenaufeinanderfolge eingehängt.</u>

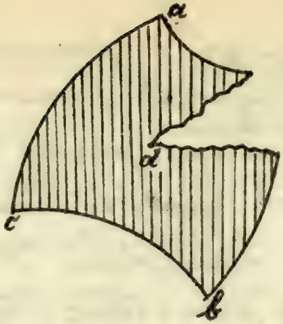
Mit dieser allgemeinen Ausdrucksweise ist noch nicht viel gewonnen, und wir werden wohl bis auf Weiteres darauf verzichten müssen, viel über diese allgemeineren Bereiche zu sagen, da wir schon für $p=0, n=3$ mit dem allgemeinsten Falle nicht zustande gekommen sind. Wir haben uns, da der allgemeine Fall zu schwer war, im vorigen Winter auf die symmetrischen Fälle beschränkt. Dann hatten wir es nur mit der conformen Abbildung einer Halbebene auf ein Kreisbogendreieck zu thun, welches durch seine Winkel im Wesentlichen völlig bestimmt war.

Wie wird sich in unserem allgemeineren Falle $p, n$ das Problem vereinfachen, wenn wir uns ebenfalls auf den symmetrischen Fall beschränken? D. h. wenn wir uns nur mit Differentialgleichungen mit reellen Coefficienten beschäftigen? Sei zuerst <u>$p=0$, $n$ beliebig.</u> Die Verzweigungspunkte der Differentialgleichung müssen dann teils reell teils paarweise conjugirt complexe sein; die zu den reellen Verzweigungspunkten gehörigen Exponentendifferenzen müssen reell oder rein imaginär sein, die zu den conjugirt complexen Verzweigungspunkten gehörigen Exponentendifferenzen müssen conjugirt complexe Werte haben, und endlich die accessorischen Parameter müssen sämtlich reell sein. Wie bildet nun ein solches $\eta$ die positive Halbebene $x$ ab?

Zunächst sehen wir genau wie bei der hypergeometrischen Function: Jedes Stück der reellen Axe bildet sich als ein Kreisbogen ab.

Wenn wir nun aber wie bei $n = 3$ längs der reellen Axe zerschneiden und dann das Bild der einen Halbebene untersuchen, so bekommen wir doch nur, wenn alle Verzweigungspunkte reell sind, ein gewöhnliches Kreisbogenpolygon. Wenn jedoch auch Paare complexer Verzweigungspunkte existiren, müssen wir behufs Isolirung eines Zweigs von $\eta$ auch diese noch in das Schnittsystem hereinziehen, indem wir etwa jedes Paar conjugirter Verzweigungspunkte je durch einen die reelle Axe kreuzenden Verzweigungsschnitt verbinden. Die Ufer dieses Schnittes sind dann durch eine lineare






Substitution miteinander verbunden, schliessen sich also bei der Abbildung in der $\eta$-Ebene keineswegs aneinander.

Wir bekommen so als Bild der Halbebene einen Bereich, der nur zum Teil von Kreisbogen begrenzt ist, zum Teil aber von Paaren anderer Randstücke, die durch lineare Substitutionen zusammengehören. Wir bekommen nur dann ein eigentliches Kreisbogenpolygon von $n$ Seiten, wenn alle singulären Punkte reell sind und natürlich die Differentialgleichung selbst mit reellen Coefficienten vorausgesetzt ist.

Wenn hiernach die Behandlung der complexen Verzweigungspunkte zu schwer sein dürfte, werden wir uns in der Hauptsache auf reelle Verzweigungspunkte beschränken; aber auch dann noch stellt sich die Notwendigkeit heraus, dass sich Jemand vorab in derselben Weise mit den allgemeinen Kreisbogenpolygonen beschäftigt, wie wir es im vorigen Semester mit den Kreisbogendreiecken gethan haben. In dieser Richtung liegen nur erst zwei Beiträge vor, indem Herr Prof. Schönflies einmal in Bd. 42 der Math. Ann. die geradlinigen Polygone untersucht hat, und neuerdings in Bd. 44 die Kreisbogenvierecke. Aber auch hierbei ist noch nicht alles so fertig, wie bei den Dreiecken.

Bei $p > 0$ werden wir zuerst fragen müssen, was überhaupt ein reelles algebraisches Gebilde ist? Wie die Riemann'sche Fläche eines solchen sich von anderen Riemann'schen Flächen unterscheidet? Wir kommen hiermit auf eine Theorie, die ich im Sommer 1892 ausführlich entwickelt (Riemann'sche Flächen II) und in Math. Ann. 42 veröffentlicht habe (Über Realitätsverhältnisse bei der Normalcurve der $\varphi$). Die Grundauffassung ist die, dass zu einer reellen algebraischen Gleichung eine symmetrische Riemann'sche Fläche gehört.

Eine symmetrische Riemann'sche Fläche ist eine solche, welche durch eine conforme Abbildung zweiter Art, bei der die Winkel umgelegt werden, in sich selbst übergeht.

Wenn man das algebraische Gebilde statt durch eine Riemann'sche Fläche durch eine algebraische Curve darstellt, so findet man:

Die reellen Züge der Curve sind die Symmetrielinien der Fläche.

Wir fragen nun, welche Fläche in Bezug auf die Symmetrie zu unterscheiden sind, wie viel Symmetrielinien, resp. reelle Curvenzüge es gibt? u. s. w.

Wir schliessen dabei jetzt ausdrücklich die Fälle aus, wo eine Riemann'sche Fläche sich selbst auf mehrere Weisen symmetrisch ist, wo also ein algebraisches Gebilde auf mehrere reelle Weisen in Erscheinung treten kann.

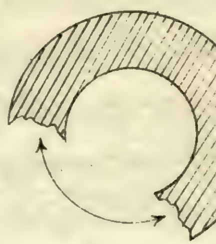
Da bietet sich uns die Einteilung der symmetrischen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische; unter orthosymmetrischen Flächen versteht man nämlich solche Flächen, die längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten in zwei Stücke zerfallen, unter diasymmetrischen solche, welche dann immer noch zusammenhängend bleiben. Bei jeder Art sind noch eine Reihe von Unterarten zu unterscheiden je nach der Anzahl der Symmetrielinien, worüber ich morgen noch einiges wenige sagen will.

Fr. d. 25. Mai 1894.] Die orthosymmetrischen Flächen können $p+1$, $p-1$, $p-3$ . . . , allgemein $p+1-2\pi$ Symmetrielinien besitzen bis zu 2 (bei ungeradem $p$) oder 1 (bei geradem $p$) herunter, die diasymmetrischen Flächen können $p$, $p-1$, $p-2$ . . . 2, 1, 0 Symmetrielinien besitzen:

Ersichtlich tritt nur bei den orthosymmetrischen Flächen die Vereinfachung ein, daß wir nur die Hälfte des algebraischen Gebildes, wie im Falle $p=0$ die Halbebene, auf die $\eta$-Ebene abzubilden brauchen, um von da nach dem Princip der Symmetrie weiter zu gehen.

Aber die Abbildung der Hälfte des algebraischen Gebildes auf ein einfach zusammenhängendes $\eta$-Polygon ist doch noch nicht ohne weiteres möglich, weil für $p > 0$ auch die einzelne Hälfte der Riemann'schen Fläche nicht höheren Zusammenhang besitzt, und man also um ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zu bekommen, in welchem $\eta$ eindeutig ist, noch weitere Querschnitte einführen muß. (wobei ich von dem Auftreten conjugirt imaginärer Verzweigungspunkte noch absehen will). Man denke sich z. B. einen Kreisring, dessen Vorder- & Hinterseite zu einander symmetrisch sind, längs der beiden Symmetrielinien, nämlich des innern

und des äußern Breitenkreises aufgeschnitten. Dann bildet die eine, etwa die vordere, Hälfte immer noch ein zweifach zusammenhängendes Flächenstück, in welchem noch ein geschlossener nicht auf einen Punkt zusammenziehbarer Umlauf möglich ist, in welchem also $\eta$ noch im Allgemeinen mehrdeutig ist. Man muß noch längs einer Meridiancurve aufschneiden, um ein eindeutiges $\eta$ zu erhalten; es fügen sich dann aber in der $\eta$-Ebene die Ränder dieses Schnittes nicht aneinander, sondern sie sind durch eine lineare Substitution mit einander verbunden. Also:



Die Hälfte einer orthosymmetrischen Fläche $p > 0$ ist immer noch eine mehrfach zusammenhängende Fläche und es bedarf weiterer Querschnitte, um sie in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln und um von einer einzelnen zugehörigen $\eta$-Function einen einzelnen Zweig abzuspalten.

Infolgedessen wird man in der $\eta$-Ebene im Allgemeinen einen Bereich bekommen welcher neben einer Anzahl kreisförmiger

Kanten, welche den Symmetrielinien entsprechen, noch eine Anzahl Hülfskanten aufweist, die paarweise durch lineare Transformation aufeinander bezogen sind.

Direct Kreisbogenpolygone entstehen also von speciellen Fällen abgesehen (wo die zu den Hülfskanten gehörigen Substitutionen sich auf die Identität reduciren) bei der Abbildung nur dann, wenn es sich um eine reelle Differentialgleichung auf einem Gebilde $p=0$ handelt und alle singulären Punkte reell sind.

Das ist's, was ich speciell über reelle Differentialgleichungen den gestrigen allgemeinen Bemerkungen über Periodicitätsbereiche hinzufügen wollte. Damit schliesse ich meine allgemeinen Vorbemerkungen, um mich nun zur Besprechung specieller Fragen zu wenden. Diese speciellen Fragen, mit denen wir uns beschäftigen wollen, werden alle folgenden Typus haben (den wir schon gestern bezeichneten):

(Gegeben ist eine Riemann'sche Fläche, gegeben sind auf ihr die singulären Punkte; nun versucht man der zugehörigen Monodromiegruppe oder aber der zugehörigen conformen

Abbildung solche Bedingungen aufzuerlegen, dass dadurch die Differentialgleichung gerade eindeutig bestimmt wird.

Bevor ich mit diesen speciellen Problemen beginne, gestatten Sie mir einige allgemeine Gedanken über die Methoden der Mathematik vorauszuschicken.

1. Die Geometrie der Alten, wie ihre Mathematik überhaupt ist wesentlich synthetisch, dieses Wort im alten eigentlichen Sinne verstanden. Ich meine damit, dass aus einzelnen Überlegungen allmählich ein Satz, aus einzelnen Sätzen ein Lehrgebäude mühsam zusammengesetzt wird, dass ein allgemeiner Satz so gewonnen wird, dass man der Reihe nach alle Specialfälle erledigt. [Was man in der modernen Mathematik unter „synthetischer Geometrie" versteht, hat mit der alten Bedeutung des Wortes „synthetisch" nichts zu thun; die moderne Bezeichnung „synthetische Geometrie" will nur einen Gegensatz zur „analytischen Geometrie" ausdrücken, und meint, dass die synthetische Geometrie sich ihres eignen Algorithmus bedient, der von der Betrachtung projectiver Punktreihen ausgeht, während

die „analytische Geometrie" den Algorithmus der Analysis, der Algebra heranzieht. Im engeren Sinne „synthetisch" ist das eine so wenig wie das andere.]

2. Dem gegenüber ist der modernen Mathematik ein Characterzug eigentümlich, den Sie alle kennen, und den ich als „algorithmisch" bezeichnen möchte, da das Wort analytisch der Misdeutung zu sehr ausgesetzt ist. Damit meine ich folgendes: Wenn z.B. die Kegelschnitte untersucht werden sollen, so behandeln die Alten zuerst nacheinander die Eigenschaften des Kreises, der Parabel, der Ellipse, der Hyperbel, untersuchen z.B. unter welchen Umständen eine Gerade zwei, einen oder keinen Punkt mit der Curve gemein hat. Die algorithmische Methode dagegen, durch die moderne analytische Geometrie repräsentirt, setzt von vornherein die allgemeinste Gleichung zweiten Grades an, und sagt, dass dieselbe mit einer linearen Gleichung immer zwei Wurzeln gemein habe, dass also eine gerade Linie einen Kegelschnitt immer in zwei Punkten treffe. Trifft sie ihn thatsächlich nur in einem Punkte, so sagt man eben, das sind doch

zwei Punkte, sie fallen nur zusammen, und trifft sie ihn in Wahrheit gar nicht, so sagt man wieder, sie trifft ihn doch in zwei Punkten, die nur imaginär sind. Man erreicht also durch gewisse Verabredungen, durch geeignete verallgemeinernde Modification der Grundbegriffe, dass man allgemeine Sätze aussagen kann und dass man nur allgemeine Schlussreihen aneinanderzusetzen braucht, um allgemeine Resultate zu bekommen. Diese Herrschaft der allgemeinen Schlussmethode, des Algorithmus, ist est, was sich als „algorithmisches Verfahren" bezeichne.

3. Nun ist es das merkwürdige, dass die neueste Mathematik vielfach wieder synthetisch wird, wie die der Alten. In die Functionstheorie z. B. hat man ja ursprünglich die complexen Grössen $x + iy$ eingeführt, weil sich zeigte, dass man dadurch allgemeingültige Sätze erhält, z. B. dass eine Gleichung $f(z) = 0$ vom $n$ten Grade immer $n$ Wurzeln besitzt. Es schien recht eigentlich der Zweck der Functionentheorie von $x + iy$, allgemeingültige Sätze zu gewinnen, und noch vor 30 Jahren glaub-

te man, man habe in der That ein für alle denkbaren Functionen allgemeine Sätze lieferndes Verfahren. Da kann die Cöse Entdeckung der natürlichen Grenzen, welche den Functionentheoretiker wieder zu ausführlichen Fallunterscheidungen, d. h. zur synthetischen Methode zwingt; dies ist natürlich nur ein einzelnes Beispiel.

4. Man kann sich wohl die Auffassung bilden, dass noch der jetzt wieder beginnenden synthetischen, einzelnes Material zusammentragenden Periode wiederum eine jüngere Generation kommen mag, welche den richtigen Standpunkt der Allgemeinheit finden wird, um das, was wir synthetisch bruchstückweise schaffen, auf algorithmischem Wege unter höherem Gesichtspunkt aus einem Gusse fertig hinzustellen.

Jetzt aber geht in der gesammten Mathematik überall das Wiedereinsetzen der synthetischen Methode neben der algorithmischen her, und man kann die Probleme, die sich in den einzelnen Disciplinen bieten, sehr wohl danach unterscheiden, ob sie unter die eine oder die andere Behandlungsweise fallen. Ich glaube

man kann den Wert der beiden Methoden
so gegeneinander abwägen: Mit der algorith-
mischen Methode bekommt man, wo sie über-
haupt anwendbar ist, sicher etwas heraus, und
zwar allgemeine vielumfassende Sätze; es ist
das aber dann weniger das Verdienst des ein-
zelnen Mathematikers, sondern er arbeitet
mit dem Kapital seiner Vorgänger, mit
dem Vorrate von Ideen, den frühere Ma-
thematiker durch Schaffung des Algorith-
mus angehäuft haben. Anders bei der
synthetischen Methode; da kommt alles da-
rauf an, den richtigen neuen Gedanken
zu haben, da kann man nicht wissen, ob man
etwas findet, da muss man seinen Weg
selbst schaffen. Was man erreicht, ist viel-
leicht wenig, dafür aber in höherem Maße
das Eigentum des Forschers. Der Algorith-
mus führt weiter in objectiver Hinsicht,
aber nicht subjectiv; man ist weniger
gezwungen selbständig zu denken. Der
Algorithmus gleicht dem Reisen mit der
Eisenbahn, welches rasch und weit vor-
wärts führt, doch nur durch cultivirte
Gegenden, die synthetische Methode ist die

des Ansiedlers, der mit der Axt mühsam im Urwald vordringt und neue Gebiete der Cultur erobert. Jedenfalls muss die letztere Arbeit der ersteren vorangehen.

Für eine Arbeit, die in gegebener Zeit fertig sein und gewiss zu einem abgeschlossenen Resultate kommen soll, ist ein Problem, welches algorithmische Behandlung zulässt, unstreitig zweckmässiger, während ein Problem der andern Art nur langsam vorwärts zu bringen ist, und dann gewöhnlich noch zu keinem völligen Abschluss führt, wie Sie an den letzten hiesigen Dissertationen von Schilling, van Vleck, Woods sehen, die sämmtlich der zweiten Art angehören.

In dieser Vorlesung werden wir Probleme beiderlei Art behandeln, nämlich

a. <u>Fragen algorithmischer Art</u>, indem wir uns an die Ideenbildungen von Picard und Vessiot anschliessen, und insbesondere die Frage nach der <u>algebraischen Integrirbarkeit</u> und die Theorie der Lamé'schen Polynome heranziehen werden.

b. <u>Fragen synthetischer Art</u>, wo uns die allgemeinen Methoden im Stich lassen, zuerst das Oscillationstheorem, und dann die Fundamentaltheoreme der automorphen Functionen, wo es sich darum handelt, wann die $\eta$-Function eindeutig umkehrbar ist.

Die Untersuchungen unter a. sind leicht zu verallgemeinern, z. B. für Differentialgleichungen 3. Ordnung, während bei denen der zweiten Gruppe noch gar keine Möglichkeit einer solchen Verallgemeinerung auch nur von ferne zu sehen ist. Trotzdem wird man ihnen eine ganz besondere Bedeutung nicht absprechen wollen.

---

## II. Frage betreffend die Rationalitäts-Gruppe.

Mo: d. 28. Mai 1894.] In dem jetzt zu beginnenden Teile der Vorlesung, der diejenigen Fragen behandeln soll, die eine mehr algorithmische Betrachtungsweise gestatten, werde ich mich im Wesentlichen an die Entwicklungen von Picard und Vessiot anschliessen, deren Grundideen ich bereits im vorigen Semester (Autographie S. 510-513), und früher in der Vorlesung über Höhere Geometrie II (Aut. S. 266-290) auseinandergesetzt habe.

Man bildet sich zunächst die Idee der „algebraischen Gruppe", indem man hierunter eine solche Gruppe versteht, deren Substitutionen sich durch eine endliche Anzahl verschiedener Formeln ausdrücken lassen, in denen etwaige Parameter nur algebraisch vorkommen. Diese Begriffsbestimmung ist darum wichtig, weil nur zu algebraischen Gruppen algebraische Invarianten gehören, zu transcendenten Gruppen transcendente Invarianten (letzteres, wenn sie nicht zugleich zu einer umfassenderen Gruppe gehören sollen). Solcher algebraischer Gruppen gibt es für die linearen Substitutionen einer

Variablen $\eta$ folgende 12, bei denen zugleich die zugehörige einfachste rationale Differentialinvariante angegeben ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.) $\eta_1 = \eta$ | Identität | Invariante: | $\eta$ |
| 2.) $\eta_1 = \varepsilon^\rho \eta$ | Kreisteilungstypus | " | $\eta^n$ |
| 3.) $\eta_1 = \varepsilon^\rho \eta, \frac{\varepsilon^\rho}{\eta}$ | Diedertypus | " | $\eta^n + \frac{1}{\eta^n}$ |
| 4.) | Tetraedergruppe | | |
| 5.) | Octaedergruppe | | |
| 6.) | Ikosaedergruppe | " | $\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)}$ |
| 7.) $\eta_1 = \alpha\eta$ | Erweiterter Kreisteilungstypus | " | $\frac{\eta'}{\eta}$ |
| 8.) $\eta_1 = \alpha\eta, \frac{\alpha}{\eta}$ | " Diedertypus | " | $\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2$ |
| 9.) $\eta_1 = \eta + \beta$ | | " | $\eta'$ |
| 10.) $\eta = \varepsilon^\rho \eta + \beta$ | | " | $(\eta')^n$ |
| 11.) $\eta_1 = \alpha\eta + \beta$ | | " | $\frac{\eta''}{\eta'}$ |
| 12.) $\eta_1 = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ | | " | $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$. |

Diese Reihenfolge der 12 möglichen algebraischen Gruppen wird ein rationelles Einteilungsprincip für die Differentialgleichungen für die $\eta$-Funktion abgeben.

Zuvörderst jedoch muss ich auf die Gruppen der Tabelle selbst noch etwas eingehen, indem ich einige allgemeine Bemerkungen über dieselben gebe:

<u>1. Jede Gruppe ist auf ein besonders gewähltes Coordinatensystem bezogen.</u>

Z. B. in 7), welche sich im Allgemeinen dahin characterisiren läßt, daß es zwei Punkte gibt, die bei allen Substitutionen der Gruppe fest=bleiben, ist der eine derselben zum 0 Punkt, der andere zum unendlich fernen Punkt der Variablen $\eta$ gewählt, in 9) 10) 11), wo immer ein Punkt bei allen Substitutionen festbleibt, ist dieser zum Punkt $\eta = \infty$ gemacht worden.

2. Ich will folgende Sprechweise gebrauchen:

Eine Gruppe ist kleiner als eine andere, wenn sie nur einen Teil der Operationen der letzteren umfasst.

Z. B. ist 1) kleiner als alle folgenden Gruppen, 4) ist kleiner als 5) u. s. w.

3. Es würde nicht schwer sein, für zwei und auch für 3 homogene Veränderliche die entsprechende Liste sofort hinzuschreiben, wobei natürlich längere Tabellen entstehen müssen.

Dies würde in Betracht kommen, wenn man die linearen homogenen Differentialgleichungen 2ter und 3ter Ordnung genau ebenso untersuchen wollte, wie jetzt die unhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung für $\eta$.

Was hat nun die Aufzählung der algebraischen Gruppen überhaupt mit unserer Differentialgleichung

$$[\eta] = R(x) \text{ bezw. } = R(s, x)$$

zu thun?

Unter der „Rationalitätsgruppe" der vorgelegten Differentialgleichung versteht man diejenige unter den 12 algebraischen Gruppen, welche eine doppelte Eigenschaft hat:

1. jede rationale Function $P(\eta, \eta', \eta'', \ldots s, x)$ der geeignet herausgewählten Particularlösung $\eta$ und ihrer Differentialquotienten, welche bei den Substitutionen der Rationalitätsgruppe numerich ungeändert bleibt, ist eine rationale Function von $s$ und $x$;

2. jede rationale Function von $\eta, \eta', \eta'', \ldots$, welche eine rationale Function von $s$ und $x$ ist, bleibt bei den Operationen der Rationalitätsgruppe numerisch ungeändert.

In welchem Verhältnisse steht die Rationalitätsgruppe zur Monodromiegruppe der vorgelegten Gleichung? Letztere Gruppe, ist immer eine discontinuirliche Gruppe.

Wir halten hier der Einfachheit halber an der Idee fest, daß die Differentialgleichung nur reguläre singuläre Punkte besitzt, daß $\eta$ also (auf der Riemann'schen Fläche $p, x$) keine wesentlich singulären Stellen besitzt.

Unter dieser Voraussetzung gilt folgender sonst nicht so einfach anszusprechende Satz:

Die Rationalitätsgruppe einer vorgelegten Gleichung ist unter den 12 möglichen algebraischen Gruppen die kleinste Gruppe, in der die Monodromiegruppe als Untergruppe enthalten ist.

Dies ist noch etwas zu erläutern. Nehmen wir an, eine $P(\eta, \eta', \dots)$ bleibe bei der so definirten algebraischen Gruppe numerisch ungeändert. Dann muſs sie auch bei der Monodromiegruppe als einer Untergruppe jener ersten algebraischen Gruppe ungeändert bleiben, d. h. sie muſs bei geschlossenen Umläufen von $s$ und $x$ auf der Riemann'schen Fläche ungeändert bleiben, also eine eindeutige Function auf der Riemann'schen Fläche sein. Da nun aber für $\eta$, folglich auch für $P(\eta, \eta', \eta'', \dots)$ jede wesentlich singuläre Stelle ausgeschlossen ist, so kann diese eindeutige Function nur eine algebraische Function der Fläche sein, d. h. eine rationale Function von $s$ und $x$.

Unsere eindeutige Function ist rational in $x$ und $s$, weil sie nach Voraussetzung nur ausserwesentlich singuläre Punkte hat.

Wir schlieſsen daraus, daſs die betreffende algebraische Gruppe entweder selbst die Rationalitätsgruppe ist, oder letztere als Untergruppe enthält.

Wenn zunächst noch zweifelhaft ist, ob unsere Gruppe die Rationalitätgruppe selbst ist oder die Rationalitätsgruppe in sich enthält, so wird dieser Zweifel dadurch beseitigt, daſs wir sagten, unsere Gruppe solle die kleinste sein, welche die Monodromiegruppe in sich enthält.

Wir fahren fort:

Durch diese Betrachtung selbst wird die Frage erledigt, ob es denn nur eine kleinste algebraische Gruppe gibt, in der unsere Monodromiegruppe enthalten ist.

In der That kann es nur eine solche „kleinste" algebraische Gruppe geben, weil doch nur eine Rationalitätsgruppe existirt. –

Dies war das Verhältniſs der Rationalitätsgruppe zur Monodromiegruppe; wir wollen dies aber auch noch geometrisch wenden, indem wir das Verhältniſs der Rationalitätsgruppe zum Periodicitätsbereich untersuchen. Da ist zu sagen:

Die Rationalitätsgruppe einer gegebenen Gleichung ist diejenige kleinste algebraische Gruppe, der sämtliche Schraubenbewegungen angehören, durch welche die Kanten des Periodicitätsbereichs paarweise zusammengeordnet sind.

Was heißt das in concreto? Ich werde mich immer vorzüglich auf 3 Beispiele als die wichtigsten oder typischsten beziehen, nämlich auf die Gruppen 1), 6), 11); Wir fragen also insbesondere, was es geometrisch für den Periodicitätsbereich bedeutet, wenn die Rationalitätsgruppe die Gruppe 1), 6) oder 11) ist. Wenn 1) die Rationalitätsgruppe ist, so kommen gar keine von der Identität verschiedene Substitutionen, also als Schraubenbewegungen nur volle Umdrehungen vor. Der Periodicitätsbereich ist also eine geschloßene Riemann'sche Fläche, da seine Kanten sämtlich paarweise aneinander passen. In der That, da $\eta$ eine rationale Function von $x$ und $s$ ist, so wird die Riemann'sche Fläche $x, s$ eindeutig auf eine geschlossene Riemann'sche Fläche über der $\eta$-Kugel abgebildet.

Wenn die Gruppe 6), die Ikosaedergruppe, die Rationalitätsgruppe ist, so liegen folgende geometrischen Verhältniße vor:

Damit die Rationalitätsgruppe einer $\eta$-Differentialgleichung die Ikosaedergruppe sei, ist notwendig, daß alle Schraubenaxen des Kerns, welche nicht identische Substitutionen liefern, in die 6 fünfzähligen, 10 dreizähligen, 15 zweizähligen Axen des Ikosaeders hineinfallen, und dass die zugehörigen Schraubenbewegungen Drehungen um $\frac{\rho}{5}$, $\frac{\sigma}{3}$, $\frac{\tau}{2}$ des Kreisumfangs sind. ($\rho$, $\sigma$, $\tau$ ganze Zahlen)

Außerdem ist natürlich notwendig, dass unsere Schraubenbewegungen nicht schon einer Untergruppe des Ikosaeder, d. h. einer Tetraedergruppe, oder einer geeigneten Diedergruppe, oder Kreisteilungsgruppe angehören.

Die Gruppe 11) als Specialfall 10) oder 9) liegt vor, wenn alle Schraubenbewegungen des Kerns einen Kugelpunkt ungeändert lassen, den wir dann als $\infty$-Punkt wählen, d. h. wenn alle Schraubenaxen des Kerns, zu denen nicht identische Schraubenbewegungen gehören, durch einen festen Punkt der Kugel hindurchlaufen.

Di. d. 29. Mai 1894.] Indem wir uns auf den Fall einer reellen Differentialgleichung $p = 0$ mit reellen Verzweigungspunkten beschränken, wo wir als Abbild der Halbebene ein Kreisbogenpolygon haben, werden wir sagen:

Im Falle 1) darf dieses Kreisbogenpolygon nur von einer einzigen Kreislinie begrenzt sein, Im Falle 6) mufs das Kreisbogenpolygon von den Symmetriekreisen des Ikosaeders begrenzt sein, (deren es 15 gibt).

Im Falle 11) wird sich das Kreisbogenpolygon als geradliniges Polygon zeichnen lassen. Denn die begränzenden Kreislinien müßen alle dort den festbleibenden Punkt der Kugel hindurchlaufen und ergeben also, wenn man von diesen aus stereographisch auf die Ebene projicirt, gerade Linien.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir an die speciellen Durchführung der Theorie. Dabei gliedere ich die Betrachtung immer so, daß ich bei jedem unserer 12 Typen folgende drei Fragestellungen unterscheide:

1. Aufstellung der $\eta$-Differentialgleichung in independenter Form;
2. Einordnung einer vorgelegten Differentialgleichung;
3. Festlegung etwaiger Parameter in der Differentialgleichung, sodaß eine Differentialgleichung von gegebenem Typus resultirt.

Was diese drei Fragestellungen betrifft, so will ich dazu historisch vorerst folgendes bemerken: Es rubricieren hier drei Probleme, welche die Mathematiker besonders beschäftigt haben.

a. Wann ist eine $\eta$-Differentialgleichung algebraisch integrirbar? Die Antwort hierauf lautet, dass dies gerade in den Fällen 1)–6) und nur in diesen der Fall ist.

Die Frage nach der algebraischen Integrirbarkeit ist also von selbst mit erledigt, wenn wir unsere Hauptfragen von 1) bis 6) erledigen.

b. Andere Mathematiker fragen nur, wann die Differentialgleichung reducibel ist, indem sie hierunter den Fall verstehen, wo die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $\eta$ auf eine solche niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden kann.

Bei genauerer Untersuchung zeigt sich, dass das gerade die Fälle 1) 7) 9) 11) unserer Tabelle sind. Wir sagen also:

Die Frage, ob die Differentialgleichung für $\eta$ reducibel ist oder nicht, kommt darauf hinaus, dass wir die Fälle 1) 7) 9) 11) unseres Schema's characterisiren.

c. Theorie der Lamé'schen Polynome. Ich behaupte, dass diese Theorie ein Beispiel für die Fragestellung 3) beim Typus 11) ist. Ich muss dies etwas ausführlicher erläutern.

Was ist überhaupt ein Lamé-sches Polynom?

Es seien $a, b, c, \ldots n$ die singulären Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ die Exponentendifferenzen der Differentialgleichung mit beliebigem Vorzeichen genommen. Dann können wir ja $\eta$ in zwei homogene Formen spalten

$$\eta = \frac{\pi_1}{\pi_2},$$

welche an den singulären Stellen die Exponenten $0$ und $\alpha$, $0$ und $\beta$, ... haben und vom Grade

$\underline{\frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \nu + 2 - n}{2}}$ sind.

Da kann nun der besondere Fall sein, dafs eine der Particularlösungen sagen wir $\pi_2$ selbst eine <u>rationale ganze Form</u> ist:

$$\pi_2 = \varphi_k \ (x_1, x_2).$$

Dieses $\varphi_k (x_1, x_2)$ nennt man – natürlich in viel allgemeinerem Sinne, als sie bei Lamé selbst vorkommen – ein <u>Lamé'sches Polynom.</u>

Wann tritt nun der geschilderte Fall ein?

Das Normal-$\pi_2$ zweiter Art ist durch die Formel definirt:

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{(x, dx)}{d\eta}} \ (xa)^{\frac{\alpha-1}{2}} (xb)^{\frac{\beta-1}{2}} \ldots (xn)^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

Daraus gewinnt man umgekehrt für $\eta$ den Ausdruck:

$$\eta = \int (x\, dx) \cdot \frac{(xa)^{\alpha-1} (xb)^{\beta-1} \ldots (xn)^{\nu-1}}{\varphi_k (x_1, x_2)^2}$$

Wir haben also für $\eta$ einen Ausdruck in Form eines unbestimmten Integrals über einer multiplicativen Function gewonnen. Ein solches Integral kann aber bei geschlossenen Umläufen der Variablen nur Substitutionen von der Form

$$\eta_1 = \alpha\eta + \beta$$

erleiden, und wir haben daher den Satz:

<u>Wenn die Differentialgleichung 2. Ordnung ein Lamé'sches Polynom als Lösung zulassen soll, so muss $\eta$ die Gestalt eines unbestimmten Integrals haben, und wir haben also einen Fall des Typus 11) oder insbesondere Fälle zu № 10) oder № 9) vor uns.</u>

<u>Umgekehrt, wenn ein Fall 11) oder 10) oder 9) vorliegt, so wird $\eta$ ein unbestimmtes Integral sein, und wir werden aus dem Nenner von $\eta$ ein Lamé'sches Polynom entnehmen.</u>

Damit wissen wir in abstracto was Lamé'sche Polynome sind. In der Theorie derselben stellt sich aber die Sache so, dass man zunächst eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer gewissen Anzahl noch willkürlicher Parameter hat, und dass man nun fragt, ob und wie man diese Parameter so festlegen kann, dass ein Lamé'sches Polynom als Lösung auftritt?

Die Theorie der Lamé'schen Polynome wird so gewendet, daß man verlangt, in einer vorgelegten Differentialgleichung die noch unbestimmten accessorischen Parameter so zu bestimmen, daß der Fall des Lamé'schen Polynoms vorliegt.

Also in der That die Theorie der Lamé'schen Polynome ein Beispiel zu der Fragestellung 3).

Wir sehen aus diesen Bemerkungen, wie sich verschiedene Fragen, mit denen sich die Mathematiker in den letzten Jahrzehnten beschäftigt haben, in unser allgemeines Schema einordnen lassen.

## Fälle algebraischer Integrirbarkeit.

Nun gehen wir zur Behandlung der einzelnen Typen über. Von den algebraischen Fällen 1) bis 6) will ich nur den Fall 1) und den Fall 6) als typische Beispiele untersuchen; dabei schließe ich mich an meine Darstellung in Math. Ann. 11 und 12. 1876–77 an.

Mit der Frage der algebraischen Integrirbarkeit überhaupt hat sich bekanntlich zuerst Fuchs beschäftigt in Crelle's Journal 81. 1875–76 und 83. 1877. Fuchs hat damals aber noch nicht die volle Aufzählung der endlichen Gruppen gehabt, und deswegen ließen sich seine Resultate noch vervollständigen.

Im Falle 1) soll $\eta = \text{Rat}(x)$ sein; wir haben die betreffende Differentialgleichung zunächst independent aufzustellen.

Es sei $\eta = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, unter $\varphi$ und $\psi$ Polynome von $m$ten Grade verstanden. Man findet:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''\psi - \varphi\psi''}{\varphi'\psi - \varphi\psi'}\right)^2 + \frac{(\varphi'''\psi - \varphi\psi''') + 3(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\varphi'\psi - \varphi\psi'}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{T} = \varphi'\psi - \varphi\psi''$$

so kann man schreiben

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}}\right)^2 + \frac{\mathfrak{T}'' + 2(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'')}{\mathfrak{T}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muß eine einfache Covariante der beiden Polynome $\varphi$ und $\psi$ sein, und zwar eine sogenannte „Combinante" derselben, d. h. eine solche Function, welche ungeändert bleibt, wenn man für $\varphi$ und $\psi$ lineare Verbindungen derselben, $\alpha\varphi + \beta\psi$, $\gamma\varphi + \delta\psi$ einsetzt. In der That heißt das nichts anderes, als daß man für $\eta$ eine lineare Function $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ setzt, wobei ja die linke Seite ungeändert bleibt. Wir wollen aber hierauf nicht weiter eingehen, sondern die functionentheoretische Seite mehr betonen, um gleich zu untersuchen, wann eine vorgelegte Differentialgleichung in der obigen Gestalt geschrieben werden kann.

Welches sind zunächst die singulären Punkte?

Die singulären Punkte unserer Differentialgleichung erhalten wir durch Nullsetzen der Functionaldeterminante $F = \varphi'\psi - \varphi\psi'$.

Was ferner die Exponenten betrifft, so ist zu sagen:

Wir wissen von vornherein, dass im vorliegenden Falle nur Nebenpunkte als singuläre Punkte auftreten können, und dass daher die zugehörigen Exponentendifferenzen nur die ganzzahligen Werte 2, 3, 4, u.s.w. haben können.

Wir sagten schon, die singulären Punkte unserer Differentialgleichung seien die Wurzeln der Gleichung, die man durch Nullsetzen der Functionaldeterminante erhält. Genauer ist zu sagen, indem wir sogleich die Exponenten mit hereinziehen:

Ist $x = a$ eine $\rho$fache Wurzel der Gleichung $F = 0$, dann ist die zur Stelle $x = a$ gehörige Exponentendifferenz:

$\alpha = \rho + 1.$

Do. d. 31. Mai 1894.] Zum Beweise gehen wir von der Annahme aus, dass $\alpha$ die Exponentendifferenz sei, und berechnen hieraus $\rho$ als Function von $\alpha$.

$\eta$ soll also die Gestalt haben $(x-a)^{\alpha}\mathfrak{P}(x-a)$; da man in $\eta = \frac{\varphi}{\psi}$ die Polynome $\varphi$ und $\psi$ jedenfalls als teilerfremd ansehen darf, so muss $\varphi$ die Form $\varphi = (x-a)^{\alpha}\varphi_1$ haben, während $\psi$ den Factor $(x-a)$ nicht enthält. Dann ist aber in

$$T = \varphi'\psi - \varphi\psi'$$

das erste Glied durch $(x-a)^{\alpha-1}$, das zweite mindestens durch $(x-a)^{\alpha}$ teilbar; folglich das ganze durch $(x-a)^{\alpha-1}$ und durch keine höhere Potenz von $x-a$ teilbar, also

$$\alpha - 1 = \rho,$$

woraus die zu beweisende Gleichung unmittelbar folgt.

Die Exponentendifferenzen können hiernach nur $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ sein, da für $\alpha = 1$ überhaupt kein singulärer Punkt vorliegt. Damit können wir die allgemeine Gestalt der Differentialgleichung, wenigstens, was die quadratischen Glieder betrifft, sofort hinschreiben.

$$[\eta] = \Sigma \frac{1-\alpha^2}{2(x-a)^2} + \Sigma \frac{A}{x-a},$$

und wir werden von einer Differentialgleichung dieser Gestalt jedenfalls folgendes erste Kriterium für die rationale Integrirbarkeit angeben:

<u>Soll unsere Differentialgleichung rational integrirbar sein, so dürfen in den quadratischen Gliedern der Partialbruchzerlegung nur die Exponentendifferenzen $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ auftreten.</u>

Es sollen aber in den Reihenentwickelungen auch keine logarithmischen Glieder auftreten. Dies gilt zunächst für die Umgebungen der Punkte $a, b, \ldots$; weiterhin aber darf auch kein singulärer Punkt mit $\alpha = 1$, aber logarithmischer Entwicklung vorkommen. Ein solcher Punkt würde in den quadratischen Gliedern nicht zur Erscheinung kommen, wohl aber in den Gliedern erster Ordnung. Mit Bezug hierauf sagen wir:

<u>Eine weitere Bedingung ist, dass in den linearen Gliedern der Partialbruchzerlegung kein singulärer Punkt auftritt, der nicht auch in den quadratischen Gliedern aufträte.</u>

Wenn man jetzt für die Punkte $a, b, \ldots$ mit den grösseren ganzzahligen Exponentendifferenzen $2, 3, 4, \ldots$ die Bedingungen explicit aufstellt, dass es keine logarithmischen Verzweigungspunkte, sondern nur Nebenpunkte sind, so erhält man für die $A, B \ldots$ ein System von quadratischen

Gleichungen, deren Erfüllung die hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Differentialgleichung rational integrirbar ist.

Nun kommt es aber darauf an, die Polynome $\varphi$ und $\psi$ wirklich zu berechnen, nachdem wir die Verzweigungspunkte $a$ und ihre Exponentendifferenzen $\alpha$, d. h. die Functionaldeterminante

$$F = \Pi (x-a)^{\alpha-1}$$

kennen. Wenn wir $\varphi$ und $\psi$ beide von gleichem Grade $m$ annehmen, so wird die Functionaldeterminante $T$ den Grad $2m-2$ haben. Andererseits ist der Grad der Functionaldeterminante $= \Sigma(\alpha-1)$. Folglich setzt uns die Formel

$$2m-2 = \Sigma(\alpha-1)$$

oder $m = \dfrac{\Sigma\alpha + 2 - n}{2} = \dfrac{\Sigma(\alpha-1)+2}{2}$

in den Stand, den Grad $m$ der Polynome $\varphi$ und $\psi$ sofort anzugeben.

Dann aber kommen hierin nur noch eine angebbare endliche Zahl zu bestimmender Constanten, nämlich die Coefficienten der beiden Polynome vor, und die kann ich jedenfalls durch eine endliche Anzahl von Coefficientenvergleichungen aus der vorgelegten Differentialgleichung bestimmen, sofern sie überhaupt rational integrirbar ist, und dabei kann ich durch eine endliche Anzahl von Versuchen zugleich erfahren, ob die Gleichung rational integrirbar ist.

Bei Aufgaben, wie die vorliegende, muss es immer der Zielpunkt sein, die Entscheidung auf eine endliche Anzahl von Versuchen zurückzubringen. Dieses Moment wird im vorliegenden Falle erreicht, indem wir aus der Gestalt von $T$ den Grad der unbekannten Polynome $\varphi, \psi$ ableiten.

Wir wollen eine genauere Abzählung vornehmen. Durch eine lineare Transformation des $\eta$ können wir jedenfalls bewirken, dass $\varphi$ und $\psi$ folgende Gestalt haben:

$$\varphi = x^m + \; * \; + Kx^{m-2} + \dots$$
$$\psi = * \; + x^{m-1} + K'x^{m-2} + \dots$$

Hier haben wir im Ganzen $2m-2$ unbekannte Coefficienten.

Setzen wir dies in $T$ ein, so gibt die Gleichung

$$T = x^{2m-2} + 2K' x^{2m-3} + \dots = \Pi (x-a)^{\alpha-1}$$

gerade $2m-2$ Gleichungen für die $2m-2$ unbekannten Coefficienten in den $\varphi, \psi$. Und zwar sind die Gleichungen quadratisch, da die Coefficienten von $\varphi$ mit denen von $\psi$ multiplicirt darin auftreten.

Wir haben durch den Vergleich mit $T$ $2m-2$ Gleichungen für die Coefficienten von $\varphi$ und $\psi$ bekommen.

Setzen wir weiter auch noch in

$$U = \varphi''\psi' - \varphi'\psi''$$

die für $\varphi$ und $\psi$ angesetzten Ausdrücke ein, so liefert die gestern aufgestellte Gleichung

$$[\eta] = -\frac{3}{2}\left(\frac{T'}{T}\right)^2 + \frac{T'' + 2U}{T},$$

durch Vergleich mit der vorgelegten Differentialgleichung noch weitere $2m-5$ quadratische Bedingungen für die unbekannten Coefficienten (das höchste Glied von $U$ liefert nur wieder die schon bekannte Gleichung für $m$, und das zweite Glied liefert nur dieselbe Gleichung für $k'$, wie der Vergleich mit $T$). So haben wir im Ganzen $4m-7$ unabhängige quadratische Gleichungen für die $2m-2$ Coefficienten.

<u>Nachdem der Grad $m$ der möglicherweise existirenden Polynome $\varphi$ und $\psi$ festgelegt worden ist, müssen wir versuchen, ob gewisse $4m-7$ quadratische Gleichungen für die Coefficienten von $\varphi$ und $\psi$ mit einander verträglich sind und eventuell aus diesen quadratischen Gleichungen die zulässigen Werte von $\varphi$ und $\psi$ bestimmen.</u>

Die Bedingung für die Verträglichkeit dieser Gleichungen wird nichts anderes sein, als die Bedingung, daß die singulären Punkte nur Nebenpunkte sind, von welcher oben die Rede war. Wenn aber diese Bedingungen einmal erfüllt sind, was auf eine endliche Anzahl verschiedener Arten der Fall sein kann, so ist in jedem einzelnen dieser möglichen Fälle jedenfalls im Wesentlichen nur eine bestimmte Function $\eta$ möglich, welche der Differentialgleichung genügt, also:

<u>Sicher haben unsere $4m-7$ Gleichungen, wenn sie überhaupt ein Lösungssystem haben, auch nur ein Lösungssystem, weil doch unsere Differentialgleichungen ihre Integrale vollkommen bestimmen.</u>

Wir haben es hier mit einem System überschüssiger quadratischer Gleichungen zu thun, deren Verträglichkeit und deren ev. Lösung durch eine endliche Anzahl von Versuchen festzustellen ist. Bei der grossen Complication und Umständlichkeit, die sich der praktischen Ausführung dieser Aufgabe entgegenstellt, wird man jedenfalls gerne fragen, ob man nicht dasselbe Problem auf anderem bequemerem Wege lösen kann?

In der That ist das der Fall, wenn man zur <u>homogenen Formulirung</u> übergeht.

Spalten wir $\eta$ in zwei Normal-$\Pi$, d. h. in zwei teilerfremde ganze Formen

$$\eta = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$$

so ist nach unseren früheren Überlegungen

(S 18) der Grad dieser Formen durch die Formel gegeben

$$m = \frac{\Sigma\alpha + 2 - n}{2},$$

so dass unsere Formen $\Pi_1$, $\Pi_2$ im Grade genau mit dem Grade der Polynome $\varphi$, $\psi$ übereinstimmen, in der That sind sie nichts anderes als die homogen gemachten $\varphi$, $\psi$. Die Formen $\Pi_1$, $\Pi_2$ genügen nun aber einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$(\overset{m}{\Pi}, \overset{n}{\Phi})_2 + (\overset{m}{\Pi}, \overset{n-2}{\Psi})_1 + (\overset{m}{\Pi}, \overset{n-4}{X})_0 = 0,$$

worin

$$\Phi = (xa)(xb)\ldots(xn)$$

zu setzen ist, und $\Psi$, $X$ leicht zu berechnen sind. Wir sehen:

<u>Unsere ganze Frage kommt darauf hinaus zu versuchen, ob die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung durch eine Schar ganzer rationaler Formen $\lambda\varphi + \mu\psi$ vom Grade $m$ befriedigt wird.</u>

Wir werden also eine ganze Form $\varphi$ vom Grade $m$ mit unbestimmten Coefficienten in die Differentialgleichung eintragen und bekommen so, da die linke Seite der Gleichung den Gesamtgrad $m + n - 4$ hat, im Ganzen $m + n - 3$ lineare homogene Gleichungen für die $m + 1$ Coefficienten von $\varphi$, wobei aber noch zwei dieser Coefficienten willkürlich bleiben sollen. Also bekommen wir die Bedingung:

Damit diese Gleichungen lösbar seien, müssen alle $m$ gliedrigen Determinanten aus ihrer Coefficientenmatrix verschwinden, und es berechnen sich dann die $\varphi, \psi$ aus irgend $m-1$ unabhängigen linearen Gleichungen unserer Reihe.

Hiermit haben wir die Frage nach der rationalen Integrirbarkeit erledigt. So müßte man sämtliche 11 Fälle unserer Tabelle der Reihe nach durchgehen. Wir behandeln von den algebraischen Fällen nur noch als das complicirteste Beispiel den Fall der ikosaedrisch integrirbaren Differentialgleichungen.

Wir fragen zuerst: Wie sieht die allgemeinste Differentialgleichung aus, welche ikosaedrisch integrirbar ist? d. h. in der Form integrirbar ist.

$$\frac{\mathcal{H}^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = \text{Rationale Function von } x\,?$$

Wir wollen, da mit der Invariante $\dfrac{\mathcal{H}^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)}$ auch irgend eine andere Combination 0ten Grades der drei Formen $\mathcal{H}$, $f$, $T$ gleichberechtigt ist, um nicht eine derselben zu bevorzugen, die Integralgleichung in folgender Gestalt schreiben

$$\mathcal{H}^3(\eta) : \mathcal{T}^2(\eta) : -1728\, f^5(\eta) = \varphi : \chi : \psi ,$$

wo $\varphi, \chi, \psi$ drei Polynome ohne einen allen gemeinsamen Teiler bedeuten sollen, welche der Relation genügen

$$\varphi + \chi + \psi = 0 .$$

Um nicht einen der verschiedenen hieraus zu bildenden Quotienten, etwa $\frac{\varphi}{\psi}$, oder $\frac{\chi}{\psi}$ zu bevorzugen, wollen wir (was übrigens nur eine vorübergehende Massregel ist) eine rationale Function von $x$, welche von den Verhältnissen der Polynome abhängt, mit Hülfe dreier Hülfsgrössen $a, b, c$ durch folgende Proportion einführen:

$$\varphi : \chi : \psi = (b-c)(R-a) : (c-a)(R-b) : (a-b)(R-c) .$$

Außerdem sollen $T$ und $U$ folgende identische Differentialausdrücke bedeuten:

$$T = \varphi\psi' - \varphi'\psi = \psi\chi' - \psi'\chi = \chi\varphi' - \chi'\varphi ,$$

$$U = \varphi'\psi'' - \varphi''\psi' = \psi'\chi'' - \psi''\chi' = \chi'\varphi'' - \chi''\varphi' .$$

Fr. d. 1. Juni 1894.] Ferner benutzen wir folgende Formeln:

$$R - a = \frac{-(a-b)(a-c)\varphi}{a\varphi + b\chi + c\psi} , \quad R' = \frac{(a-b)(b-c)(c-a) \cdot T}{(a\varphi + b\chi + c\psi)^2} .$$

Wir sehen nun das $\eta$ unsere Differentialgleichung zuerst einmal statt als Function von $x$ vielmehr als Function von $R$ an. Setzt man aber die Invariante $\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)}$ = einer linearen Function von $R$, so ist das nichts anderes, als die gewöhnliche Ikosaedergleichung, nur mit einer linearen Transformation der Variablen auf der rechten Seite. $\eta$ als Function von $R$ genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung des Ikosaeders, nur mit den Verzweigungsstellen bei $R = a$, $R = b$, $R = c$:

$$[\eta]_R = \frac{1}{(R-a)(R-b)(R-c)} \left\{ \frac{4(a-b)(a-c)}{9(R-a)} + \frac{3(b-a)(b-c)}{8(R-b)} + \frac{12(c-a)(c-b)}{25(R-c)} \right\}.$$

Nun benutzen wir für den Übergang zu der Variablen $x$ die von früher bekannte Formel

$$[\eta]_x = R'^2 [\eta]_R + [R]_x,$$

und erhalten so, wenn wir mit Hülfe von $T$ und $U$ vereinfachen, die Gleichung:

$$[\eta]_x = \frac{T^2}{\varphi \cdot \chi \cdot \psi} \left\{ \frac{4}{9\varphi} + \frac{3}{8\chi} + \frac{12}{25\psi} \right\} - \frac{3}{2}\left(\frac{T'}{T}\right)^2 + \frac{T'' + 2U}{T},$$

worin, wie es ja auch notwendig ist, die Hülfsgrößen $a, b, c$, wieder vollständig herausgefallen sind.

Damit haben wir die erste Aufgabe, nämlich die explicite Aufstellung der allgemeinsten zum ikosaedrischen Typus gehörigen Differentialgleichung, wirklich gelöst.

Wir werden nun zweitens fragen: Wenn uns irgend eine Differentialgleichung vorgelegt ist:

$$[\eta]_x = \sum \frac{1-\alpha^2}{2(x-a)^2} + \sum \frac{A}{x-a},$$

wie entscheiden wir, ob dieselbe ikosaedrisch integrirbar ist?

Wann läßt sich die rechte Seite in Gestalt unserer allgemeinen ikosaedrischen Gleichung schreiben?

Wir sehen zunächst, was die singulären Punkte betrifft:

Die singulären Punkte unserer Differentialgleichung werden durch die Wurzelpunkte von $\varphi, \psi, \chi, T$ geliefert.

Um nun aber über die Exponenten in denselben genaueres zu erfahren, werden wir bei $\varphi$, $\psi, \chi, T$ alle Arten vielfacher Wurzeln, die denkbar sind, zulassen müssen. Wir setzen also

$$\varphi = \Pi(x-a_i)^{\alpha_i}; \quad \chi = \Pi(x-b_i)^{\beta_i}; \quad \psi = \Pi(x-c_i)^{\gamma_i}.$$

Außerdem spalten wir aber $\varphi$ noch in drei Teile, indem wir in den ersten, $\varphi_1$, alle Factoren zusammenfassen, deren Exponenten nicht durch 3 teilbar sind, im zweiten, $\varphi_2$, alle

Factoren mit dem Exponenten 3 selbst und im dritten alle Factoren mit Exponenten, die durch 3 teilbar, aber gröfser als 3 sind. Das entschrechende geschehe bei $\chi$ und bei $\psi$, nur statt auf die Zahl 3 vielmehr auf die Zahl 2 bezw. 5 bezogen. Ich setze also

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 = \Pi(x-a_{1i})^{\alpha_{1i} \gtrless 0 \pmod 3} \cdot \Pi(x-a_{2i})^{\alpha_{2i}=3} \cdot \Pi(x-a_{3i})^{\alpha_{3i}=3\alpha'_{3i}>3};$$

$$\chi = \chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \chi_3 = \Pi(x-b_{1i})^{\beta_{1i} \gtrless 0 \pmod 2} \cdot \Pi(x-b_{2i})^{\beta_{2i}=2} \cdot \Pi(x-b_{3i})^{\beta_{3i}=2\beta'_{3i}>2};$$

$$\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 = \Pi(x-c_{1i})^{\gamma_{1i} \gtrless 0 \pmod 5} \cdot \Pi(x-c_{2i})^{\gamma_{2i}=5} \cdot \Pi(x-c_{3i})^{\gamma_{3i}=5\gamma'_{3i}>5}$$

Bilden wir uns jetzt aus $\varphi, \psi, \chi$ die Functionaldeterminante $T$ in der Gestalt $\varphi\chi' - \varphi'\chi$, so zeigt sich, dafs dieselbe durch jeden Factor $x - a_i$ von $\varphi$ in der Potenz $\alpha_i - 1$ teilbar sein mufs, durch jeden Factor $(x - b_i)$ von $\chi$ in der Potenz $\beta_i - 1$. Ebenso findet man aus der anderen Darstellung $\chi\psi' - \chi'\psi$, dafs jeder Factor $x - c_i$ $\gamma_i - 1$ mal in $T$ enthalten sein mufs. Hat $T$ noch weitere Factoren, so wollen wir diese mit $(x-d_i)^{\delta_i - 1}$ bezeichnen. Wir schreiben also:

$$T = \Pi(x-a_i)^{\alpha_i - 1}\,\Pi(x-b_i)^{\beta_i - 1}\,\Pi(x-c_i)^{\gamma_i - 1}\,\Pi(x-d_i)^{\delta_i - 1}$$
$$= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4.$$

Inwiefern sind nun die Wurzelpunkte $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$ von $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\tau$ singuläre Punkte der Differentialgleichung? Welche Exponentendifferenzen haben sie?

Ich sage:

Der singuläre Punkt $a_i$ hat die Exponentendifferenz $\frac{\alpha_i}{3}$, der Punkt $b_i$ die Exponentendifferenz $\frac{\beta_i}{2}$, der Punkt $c_i$ die Exponentendifferenz $\frac{\gamma_i}{5}$, der Punkt $d_i$ die Exponentendifferenz $\delta_i$.

Zum Beweise beachte man nur, daß in der Integralgleichung

$$\frac{H^3(\eta)}{-1728 f^5(\eta)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

an einer Nullstelle, wo $\varphi = 0$ ist, auch $H = 0$ ist, und zwar so, daß die rechte Seite der Gleichung $\alpha_i$ fach als Function von $x$ verschwindet, die linke Seite dagegen als Function von $\eta$ dreifach verschwindet, so daß $\eta$ als Function von $x$ den Exponenten $\frac{\alpha_i}{3}$ hat. Entsprechend für die andern Punkte. Also:

Die Angaben über die Exponentendifferenzen folgen bereits aus der Integralgleichung und können selbstverständlich aus der Differentialgleichung durch directe Partialbruchzerlegung bestätigt werden.

Die quadratischen Glieder der rechten Seite unse-
rer Differentialgleichung heißen demnach:

$$\sum\left(\frac{1-\frac{\alpha_i^2}{9}}{2(x-a_i)^2}+\frac{1-\frac{\beta_i^2}{4}}{2(x-b_i)^2}+\frac{1-\frac{\gamma_i^2}{25}}{2(x-c_i)^2}+\frac{1-\delta_i^2}{2(x-d_i)^2}\right)$$

Wenn wir nun die einzelnen Teile einer vorgelegten Differentialgleichung, in der natürlich nur ganze Zahlen oder Multipla von $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{5}$ als Exponentendifferenzen vorkommen dürfen, mit dieser eben hingeschriebenen Summe identificiren wollen, so wissen wir von einem Punkte, dessen Exponentendifferenz etwa $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ ist, sofort, dass wir ihn als Wurzelpunkt $a_i$ von $\varphi$ ansetzen müssen.

Wenn er aber eine ganzzahlige Exponentendifferenz, etwa 2, hat ist er dann ein 6facher Punkt von $\varphi$? oder ein 4facher von $\chi$? oder ein 10facher von $\psi$? oder endlich ein einfacher von $T_4$? Ein Wurzelpunkt von $\varphi, \chi, \psi$ aber von der Multiplicität 3, 2, 5 würde überhaupt nicht als singulärer Punkt hervortreten. Wir sehen:

<u>Aus den quadratischen Gliedern der Partialbruchzerlegung können wir die $\varphi, \chi, \psi$ und das $T_4$ noch nicht ohne weiteres ablesen, weil einige Wurzelpunkte von $\varphi, \psi, \chi$ geradezu wegfallen.</u>

(wenn $\alpha_i = 3$, oder $\beta_i = 2$, oder $\gamma_i = 5$ ist), und weil andere Wurzeln von $\varphi, \psi, \chi$ von den überschüssigen Wurzeln der Functionalgleichung nicht zu unterscheiden sind (wenn $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ durch 3, 2, 5 teilbar ist).

Trotzdem aber können wir den Grad $m$ der Polynome $\varphi, \psi, \chi$ aus der Partialbruchzerlegung sofort angeben.

Wir machen nämlich homogen, indem wir $\eta$ in zwei teilerfremde ganze $\Pi$-Formen, Normal-$\Pi$ zweiter Art, spalten, die wir hier mit $\eta_1, \eta_2$ bezeichnen:

$$\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}.$$

Als Normal-$\Pi$ sind dieselben nach einem frühern allgemeinen Satze vom Grad

$$\frac{\Sigma\left(\frac{\alpha_i}{3}-1\right)+\Sigma\left(\frac{\beta_i}{2}-1\right)+\Sigma\left(\frac{\gamma_i}{5}-1\right)+\Sigma\left(\delta_i-1\right)+2}{2}.$$

Die Ikosaederformen $H^3(\eta_1, \eta_2)$, $T^2(\eta_1, \eta_2)$, $-1728 f^5(\eta_1, \eta_2)$ sind in $\eta_1, \eta_2$ vom 60ten Grade und dabei den Polynomen $\varphi, \chi, \psi$ proportional. Die $\eta_1, \eta_2$ sind selbst ganze Formen von $x_1, x_2$, ebenso also die $H^3(\eta_1, \eta_2)$, $T^2(\eta_1, \eta_2)$, $-1728 f^5(\eta_1, \eta_2)$, und zwar sind letztere notwendig rationale Formen von $x_1, x_2$. Zugleich sind sie teilerfremd. Folglich sind sie nicht nur proportional mit den Polynomen $\varphi, \chi, \psi$, sondern sie sind geradezu mit den homogen geschriebenen $\varphi(x_1, x_2)$, $\chi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$ identisch.

<u>Der Grad der Polynome $\varphi, \chi, \psi$ ist daher</u>

$$\underline{m = 30\left(\Sigma\left(\frac{\alpha_i}{3} - 1\right) + \Sigma\left(\frac{\beta_i}{2} - 1\right) + \Sigma\left(\frac{\gamma_i}{5} - 1\right) + \Sigma\left(\delta_i - 1\right) + 2\right).}$$

So haben wir den Grad unserer Polynome in der That aus der Partialbruchzerlegung abgeleitet. Die Unbestimmtheit betr. die einzelnen singulären Punkte, die wir vorhin erwähnten, fällt dabei von selbst heraus. Denn z. B. ein Punkt mit der Exponentendifferenz 2 liefert zu dem Klammerausdruck immer den Beitrag 1, einerlei ob man ihn zu $\varphi$ oder $\chi$ oder $\psi$ oder $T_+$ rechnet, und ein Punkt mit der Exponentendifferenz 1, der also gar kein singulärer Punkt ist, mag er auch aus dem $\varphi$ oder dem $\chi$ oder dem $\psi$ herstammen, liefert überhaupt keinen Beitrag.

Wir wollen aber jetzt die einzelnen singulären Punkte noch genauer discutiren. Es handle sich z. B. um einen Wurzelpunkt $a_i$ von $\varphi = 0$. Wir unterscheiden dann, ob er zu $\varphi_1$ oder $\varphi_2$ oder $\varphi_3$ gehört, d. h. ob seine Multiplicität in $\varphi$ durch 3 nicht teilbar ist, oder $= 3$ ist, oder von 3 verschieden, doch durch 3 teilbar ist.

a.) Es sei $a_i = a_{1i}$, d. h. die Exponentendifferenz ein Bruch $\frac{\alpha_{1i}}{3}$. Dann ist kein Zweifel, dass der Punkt in $\varphi$ gehört und nicht etwa in $X, \Psi$ oder in $T_4$. Also:

<u>Der Bestandteil $\varphi_1$ von $\varphi$ ist direct durch die Partialbruchzerlegung gegeben.</u>

b.) Es sei $a_i = a_{2i}$, d. h. die Exponentendifferenz $= 1$. Da keine logarithmischen Glieder auftreten dürfen, so kann $a_{2i}$ überhaupt kein singulärer Punkt sein.

<u>$\varphi_2$ tritt in den singulären Punkten überhaupt nicht hervor.</u>

c. Es sei $a_i = a_{3i}$, d. h. die Exponentendifferenz eine ganze Zahl, die grösser als 1 ist. Da wieder keine logarithmischen Glieder auftreten dürfen, hat man den Satz:

<u>$\varphi_3$ liefert Nebenpunkte der Differentialgleichung.</u>

Ganz das entsprechende gilt von den einzelnen Teilen der $\Psi, X$; $T_4$ endlich liefert nur Nebenpunkte der Differentialgleichung.

Ho. d. 4. Juni 1894.] Seien $a_{3i}$, $b_{3i}$, $c_{3i}$, $d_i$ die Nebenpunkte, dann sind ihre Exponenten $\alpha'_{3i}$, $\beta'_{3i}$, $\gamma'_{3i}$, $\delta'_i$. Die Gesamtheit dieser Nebenpunkte und ihre Exponenten lassen sich aus der Differentialgleichung ablesen, ohne dass man freilich weiss, welcher Punkt ein $a_{3i}$, welcher ein $b_{3i}$ u.s.w. ist. Man kann daher jedenfalls das Produkt:

$$P = \Pi(x-a_{3i})^{\alpha'_{3i}-1} \cdot \Pi(x-b_{3i})^{\beta'_{3i}-1} \, \Pi(x-c_{3i})^{\gamma'_{3i}-1} \, \Pi(x-d_i)^{\delta_i-1}$$

aus der Differentialgleichung heraus ablesen. Dieses Product $P$ ist aber ein Teiler der Functionaldeterminante $T$, welche ja die Factoren $x-a_{3i}$, $x-b_{3i}$, $x-c_{3i}$, $x-d_i$ in den Potenzen $3\alpha'_{3i}-1$, $2\beta'_{3i}-1$, $5\gamma'_{3i}-1$, $\delta_i-1$ enthält.

Nun sei irgend eine $\eta$-Differentialgleichung vorgelegt. Es ist zu entscheiden, ob dieselbe ikosaedrisch integrirbar ist. Eine erste notwendige Bedingung ist natürlich folgende:

Außer Nebenpunkten dürfen nur solche singuläre Punkte vorkommen, deren Exponentendifferenzen Multipla von $\frac{1}{3}$, von $\frac{1}{2}$ oder von $\frac{1}{5}$ sind.

Dann können wir aus der Differentialgleichung die $\varphi_1$ $\chi_1$, $\psi_1$ unmittelbar ablesen. Da die Factoren von $\varphi_2$ und $\varphi_3$ sämtlich durch 3 teilbare Exponenten haben, ist $\varphi_2 \cdot \varphi_3$ die dritte Potenz eines Polynoms, ebenso $\chi_2 \chi_3$ die zweite, $\psi_2 \psi_3$ die fünfte Potenz je eines Polynoms, so daß wir ansetzen dürfen

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi'^3, \quad \chi = \chi_1 \cdot \chi'^2, \quad \psi = \psi_1 \cdot \psi'^5.$$

Dabei läßt sich der gemeinsame Gesamtgrad $m$ von $\varphi, \chi, \psi$, also auch der Grad von $\varphi', \chi', \psi'$ aus der Differentialgleichung ablesen. Wir haben somit in $\varphi'$, $\chi'$, $\psi'$ je eine wohlbestimmte Anzahl unbekannter Coefficienten. Für diese unbekannten Coefficienten ergeben sich zuerst eine Reihe von Gleichungen, indem man $\varphi, \chi, \psi$, der Bedingung unterwirft, dass

$$\varphi + \chi + \psi = 0$$

sein muss, und eine zweite Reihe von Gleichungen durch die Bemerkung, dass die aus $\varphi, \psi, \chi$ zu bildende Functionaldeterminante $T$ durch das aus der Differentialgleichung abzulesende Product $P$ teilbar sein muss. Hat man endlich die $\varphi$, $\psi$, $\chi$ mit allen diesen Bedingungen in Einklang gebracht, dann hat man dieselben in die allgemeine Ikosaedergleichung einzusetzen, und die so gewonnene Differentialgleichung mit der vorgelegten zu vergleichen.

Man sieht also, dass das ganze Problem darauf hinauskommt, eine endliche Anzahl unbekannter Coefficienten einer endlichen, wenn auch vielleicht sehr grossen Zahl überschüssiger algebraischer Gleichungen zu unterwerfen. Die Lösbarkeit ist also gewiss durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen zu entscheiden. In Math. Ann. 12 habe ich einige Beispiele auf diesem Wege durchgerechnet, bei denen ich nur die Identität $\varphi + \chi + \psi = 0$ und die Teilbarkeit des $T$ durch $P$ zu benutzen brauchte.

Ich habe dieselben in der Wintervorlesung (Autographie 483–84) berührt. Im Allgemeinen ist jedoch die Rechnung unübersichtlich, so dass wir uns gern nach einer weiteren Vereinfachung umsehen werden.

Wir gehen zu dem Zwecke zur homogenen Schreibweise über. Die Normalform lautet:

$$(\Pi, \Phi)_2 + (\Pi, X)_1 + (\Pi, \Psi)_0 = 0$$

wobei $\Phi = \Pi(x a_i)(x b_i)(x c_i)(x d_i)$ ist.

Wir nennen zwei Zweige von $\Pi$, deren Quotient $= \eta$ ist, mit $\eta_1, \eta_2$, wie schon oben geschehen war.

Wir müssen jetzt einen in dieser Vorlesung noch nicht berührten, aber sehr naheliegenden Gedanken formuliren.

Bilden wir nämlich aus $\eta_1, \eta_2$ die Ausdrücke

$$\eta_1^2, \; \eta_1 \eta_2, \; \eta_2^2,$$

so werden sich diese bei Umläufen der Variablen ternär linear substituiren, also einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen.

Allgemein müssen die homogenen Functionen von $\eta_1 \eta_2$ von der Ordnung $\mu$ einer linearen homogenen Differentialgleichung der Ordnung $\mu + 1$

genügen, welche sich aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\eta_1, \eta_2$ rational berechnen läßt.

Daraus folgt:

Die Invarianten $H(\eta_1\eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$, $f(\eta_1, \eta_2)$ als homogene ganze rationale Funktionen $20^{\text{ten}}$, $30^{\text{ten}}$, $12^{\text{ten}}$ Grades der $\eta_1, \eta_2$ genügen je einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten von der Ordnung 21, 31, 13.

Diese Differentialgleichungen seien mit

$$\Lambda_{21} = 0 \qquad \Lambda_{31} = 0 \qquad \Lambda_{13} = 0$$

bezeichnet. Sie sind aus der vorgelegten Gleichung ohne principielle Schwierigkeit zu berechnen. Aber unsere $\eta_1, \eta_2$ sind ganze algebraische Functionen der $x_1 x_2$. Daher haben wir einfach mit unbestimmten Coefficienten in den $\varphi', \chi', \psi'$ anzusetzen

$$H = \sqrt[3]{\varphi_1 \cdot \varphi'}, \quad T = \sqrt{\chi_1 \cdot \chi'}, \quad f = \sqrt[5]{\psi_1 \cdot \psi'}$$

und zuzusehen, ob man die Coefficienten so bestimmen kann, daß die Gleichungen $\Lambda_{21} = 0$, $\Lambda_{31} = 0$, $\Lambda_{13} = 0$ durch die angegebenen Werte von $H$, $T$, $f$ erfüllt werden. Ich sage:

Wenn unsere linearen Differentialgleichungen durch solche Polynome $\varphi', \chi', \psi'$ befriedigt werden, dann ist unsere Differentialgleichung wirklich ikosaedrisch integrirbar, und man wird

$$H^3 : T^2 : -1728 f^5 = \varphi_1 \varphi'^3 : \chi_1 \chi'^2 : \psi_1 \psi'^5 = \varphi : \chi : \psi$$

setzen können, nachdem man in die $\varphi, \chi, \psi$ noch geeignete Zahlenfactoren aufgenommen hat.

Aber noch mehr. Ich behaupte:

Wenn nur die Gleichung $\Lambda_{13} = 0$ durch $\sqrt[5]{\psi_1} \cdot \psi'$ befriedigt wird, dann haben wir auch bereits sicher ikosaedrische Integrirbarkeit, und die Gleichungen $\Lambda_{21}$ und $\Lambda_{31} = 0$ werden nur benutzt, um auch $\varphi'$ und $\chi'$ bequem auszurechnen.

Diese letzte Behauptung soll aber ausdrücklich voraussetzen, daß die vorgelegte Differentialgleichung nicht schon einem der 5 vorangehenden Typen unserer Tabelle angehöre.

Der Beweis ist einfach der folgende:

Wenn $\Lambda_{13} = 0$ eine Lösung von der Form $\sqrt[5]{\psi_1} \cdot \psi'$ besitzt, dann muß die Monodromiegruppe der $\eta_1, \eta_2$ so beschaffen sein, daß eine lineare Verbindung der $\eta_1^{12}, \eta_1^{11} \cdot \eta_2, \dots \eta_1 \eta_2^{11}, \eta_2^{12}$ sich als $\sqrt[5]{\psi_1} \cdot \psi'$ darstellt. Diese Function verhält sich aber bei Umläufen des $x$ nur multiplicativ, ist also eine Invariante der Monodromiegruppe.

Die Monodromiegruppe muß so beschaffen

sein, dass sie eine rationale ganze Invariante 12ten Grades besitzt. Daraus folgt, da wir die Fälle 1, 2, 3, 4, 5 ausgeschlossen haben, dass die Monodromiegruppe von $\eta_1, \eta_2$ direct die Ikosaedergruppe sein muss, womit dann die ikosaedrische Integrirbarkeit der vorgelegten Differentialgleichung ausser Frage steht.

Im Falle wir ein $\psi'$ und weiterhin ein $\chi'$ und ein $\varphi'$ bestimmen können, werden diese bis auf einen numerischen Factor auch völlig bestimmt sein, weil doch die vorgelegte Differentialgleichung nur auf eine Weise integrirt werden kann.

In der Weise, wie wir erst den Fall 1) und jetzt den Fall 6) behandelt haben, wird man alle die 11 Fälle der Reihe nach durchzugehen haben. Wir wollen nur noch den Fall 11) ausführlicher besprechen. Das gibt dann die Theorie der „Lamé'schen Polynome"

Vorher will ich jedoch noch eine allgemeinere Betrachtung einschalten.

Was ich über die ikosaedrische Integrirbarkeit als Beispiel der algebraischen Integrirbarkeit heute vorgetragen habe, ist in mehreren Richtungen hin weiter entwickelt, als was in der Litteratur vorliegt: In Math. Ann. 12 bleibe ich bei der unhomogenen, der $\eta$-Differentialgleichung stehen. Fuchs hat zwar die Differentialresolvente 13^ter^ Ordnung, aber benutzt diese nur so, dass er fragt, ob sie durch die fünfte Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt wird, – während es sich bei uns um eine rationale ganze Function $\sqrt[5]{\Psi_1}\cdot\Psi'$ handelt, bei der wir den irrationalen Bestandtheil $\sqrt[5]{\Psi_1}$, von Hause aus kennen.

Es wäre wünschenswert, dass diese ganze Behandlung einmal genauer ausgearbeitet, und dabei gleich auf die Differentialgleichungen 3. Ordnung ausgedehnt würde. Wir wollen hier das Problem der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung in allgemeinen Umrissen formuliren

Wie können wir das Problem der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung am kürzesten bezeichnen?

Es handelt sich um eine binäre Formenschar

$$\lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 ,$$

ein Formenbüschel.

Aus welchen Stücken soll nun dies Büschel bestimmt werden?

Die Form $\Pi$, ihre ersten und ihre zweiten Differentialquotienten in der linearen Differentialgleichung lassen sich sämtlich linear und homogen durch die drei zweiten Differentialquotienten $\Pi^{(1,1)}$, $\Pi^{(1,2)}$, $\Pi^{(2,2)}$ ausdrücken, so dass die Differentialgleichung allgemein die Form haben wird

$$A\Pi^{(1,1)} + B\Pi^{(1,2)} + C\Pi^{(2,2)} = 0.$$

Die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind ihrem Verhältnisse nach durch die Determinanten der Matrix gegeben

$$\left|\begin{matrix} \Pi_1^{(1,1)}, & \Pi_1^{(1,2)}, & \Pi_1^{(2,2)} \\ \Pi_2^{(1,1)}, & \Pi_2^{(1,2)}, & \Pi_2^{(2,2)} \end{matrix}\right|.$$

Und diese Verhältnisse $A : B : C$ sollen dem Verhältnis dreier rationalen Funktionen gleich sein. Also:

<u>Das binäre Problem läßt sich folgendermaßen formuliren: Für ein Büschel binärer Formen sind die einfachsten Combinanten, nämlich die Determinanten der obigen Matrix, ihrem Verhältnisse nach als rationale Formen gegeben. Man soll hieraus das Formenbüschel berechnen.</u>

Das $\eta$ Problem entsteht, wenn wir nicht das Büschel selbst, sondern den Quotienten zweier Formen des Büschels als unbekannte Functionen betrachten.

Di. d. 5. Juni 1894.] Ganz entsprechend handelt es sich bei den linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung um das ternäre Problem, ein „Formennetz" zu finden:

$$\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \lambda_3 \pi_3 ,$$

von dem als einfachste Combinanten die Determinanten der Matrise

$$\left| \begin{array}{llll} \pi_1^{(111)}, & \pi_1^{(112)}, & \pi_1^{(122)}, & \pi_1^{(222)} \\ \pi_2^{(111)}, & \pi_2^{(112)}, & \pi_2^{(122)}, & \pi_2^{(222)} \\ \pi_3^{(111)}, & \pi_3^{(112)}, & \pi_3^{(122)}, & \pi_3^{(222)} \end{array} \right|$$

ihrem Verhältnisse nach als rationale Formen gegeben sind. Analog, wie man beim binären Problem statt $\pi_1 \pi_2$ selbst auch deren Verhältnis $\eta = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ betrachten kann, so auch hier.

Bei der Behandlung dieser Differentialgleichungen wird man zunächst alle diejenigen Fälle zusammenfassen können, bei denen die $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ die nämlichen Verhältnisse aufweisen, oder, was dasselbe ist, nur um einen gemeinsamen Factor geändert sind.

Ich bringe diese Verallgemeinerung der binären formentheoretischen Auffassung besonders deswegen hier zur Sprache, weil ich dabei (in Übereinstimmung mit gewissen Ansätzen bei Horn und Fuchs) noch einen weiteren Wunsch habe.

Es dürfte nämlich zweckmäßig sein, bei dem ternären Problem statt der binären unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2$ gleich drei unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, x_3$ einzuführen, so daß es sich also um die Bestimmung der Formen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ durch die dreiseitigen Determinanten der Matrise von 10 Reihen handelt:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} \Pi_1^{(111)} & \Pi_1^{(112)} & \Pi_1^{(113)} & \Pi_1^{(122)} & \Pi_1^{(123)} & \Pi_1^{(133)} & \Pi_1^{(222)} & \Pi_1^{(223)} & \Pi_1^{(233)} & \Pi_1^{(333)} \\ \Pi_2^{(111)} & \Pi_2^{(112)} & \Pi_2^{(113)} & \Pi_2^{(122)} & \Pi_2^{(123)} & \Pi_2^{(133)} & \Pi_2^{(222)} & \Pi_2^{(223)} & \Pi_2^{(233)} & \Pi_2^{(333)} \\ \Pi_3^{(111)} & \Pi_3^{(112)} & \Pi_3^{(113)} & \Pi_3^{(122)} & \Pi_3^{(123)} & \Pi_3^{(133)} & \Pi_3^{(222)} & \Pi_3^{(223)} & \Pi_3^{(233)} & \Pi_3^{(333)} \end{array}\right|$$

Das wird dann ein System partieller Differentialgleichungen nach den zwei unabhängigen Verhältnissen $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ sein.

<u>Es scheint richtig, beim Übergang zum Formennetz auch die Zahl der unabhängigen homogenen Variablen auf 3 zu vermehren und also nicht bloß lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung</u>

mit einer unabhängigen Variablen zu studiren, was ein specieller Fall ist, sondern Systeme partieller Differentialgleichungen mit 2 unabhängigen Variablen.

Die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung erscheinen als ein specieller Fall.

Bei diesen ternären Problemen wird man nun wieder die Monodromiegruppe und die Rationalitätsgruppe zu unterscheiden haben. Erstere wird, den discontinuirlichen Umläufen der Variablen entsprechend, immer eine discontinuirliche Gruppe sein, letztere dagegen kann discontinuirlich oder continuirlich oder endlich gemischt sein, ist aber ihrem Wesen nach jedenfalls eine algebraische Gruppe. Da wird nun die erste Aufgabe sein, zunächst einmal sämtliche überhaupt möglichen algebraischen ternären Gruppen aufzuzählen. Was die discontinuirlichen dieser Gruppen betrifft, so ist das von C. Jordan und mir selbst schon geschehen. Die continuirlichen algebraischen Gruppen braucht man nur aus der vollständigen Aufzählung aller continuirlichen Gruppen bei Lie (in den Werken Lie-Scheffers und Lie-Engel) herauszusuchen; die gemischten Gruppen endlich sind noch nicht aufgezählt, doch dürfte es keine Schwierigkeit mehr bereiten, dieselben alle zu bilden. So wird man eine natürlich etwas umfangreichere Liste erhalten, welche der Liste der 12 Typen der $\eta$-Gruppe genau entspricht. Zu jeder dieser aufgezählten Gruppen wird man die einfachsten Invarianten aufstellen und sie rationalen Functionen der gegebenen Grössen gleich setzen. Von da aus berechne man die Verhältnisse des 3reihigen Determinanten der auf der vorigen Seite mitgetheilten Matrix. So bekommt man das dem einzelnen Typus zugehörige ternäre Differentialproblem in independenter Form. Darauf wird man zusehen, wie man von einer vorgelegten Differentialgleichung entscheidet, welchem der einzelnen Typen sie angehört, um so nicht nur eine blos logische, sondern wirklich mathematisch durchgeführte Classification unserer ternären Differentialprobleme zu haben.

Nach dieser kleinen Einschaltung kehren wir wieder zur Betrachtung der $\eta$-Differentialgleichung zurück, indem wir jetzt <u>den Fall 11)</u> besprechen, d. h. die <u>Theorie der Lamé'schen</u>

## Polynome.

Wir geben sofort die homogene Formulirung: Es handelt sich um die Frage, ob man die Differentialgleichung

$$(\overset{k}{\Pi}, \overset{n}{\Phi})_2 + (\overset{k}{\Pi}, \overset{n-2}{\Psi})_1 + (\overset{k}{\Pi}, \overset{n-4}{X})_0 = 0$$

durch ein Polynom $\overset{\smile}{E}_K(x_1^{\smile}, x_2^{\smile})$ befriedigen kann. So oft ein solches Polynom als Particularlösung der Differentialgleichung existirt, dann nennen wir dies Polynom ein Lamé'sches Polynom.

Ob die allgemeine Lösung $\Pi$ eine ganze Function ist, darauf kommt es bei dieser Fragestellung nicht an; das wesentliche ist nur, dass der eine Exponent jedes singulären Punktes verschwindet.

Die singulären Punkte sind durch die Wurzelpunkte der Form $\Phi = (xa)(xb)\cdots(xn)$ gegeben. Der eine Exponent jedes singulären Punktes ist $= 0$, der andere durch die Formel

$$\alpha = 1 + \frac{2k-2}{n} - \frac{(n-2)\Psi(a)}{n(n-1)\Phi'(a)}$$

gegeben. Da in dieser Formel $\Psi$ und $\Phi$ unhomogen geschrieben sind, könnte es scheinen, als ob dieselbe nicht symmetrisch von den homogenen Coordinaten der Stelle $a$ abhinge, was doch der Natur der Sache widerspricht. Aber man sieht leicht, dass man mit Hülfe der im Punkte a geltenden Gleichung

$$a_1 \varphi_1(a_1, a_2) + a_2 \varphi_2(a_1, a_2) = 0$$

dieselbe Formel auch in den Gestalten:

$$\alpha = 1 + \frac{2K-2}{n} - \frac{(n-2)a_2 \psi}{n(n-1)\varphi_1},$$

$$\alpha = 1 + \frac{2K-2}{n} + \frac{(n-2)a_1 \psi}{n(n-1)\varphi_2},$$

oder auch mit Hülfe zweier willkürlichen Constanten $c_1, c_2$ in der symmetrischen Gestalt

$$\alpha = 1 + \frac{2K-2}{n} - \frac{(n-2)}{n(n-1)} \cdot \psi \cdot \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2}$$

schreiben kann.

Wir wollen nun den Fall, dass $\alpha, \beta, \dots \gamma$ ganze Zahlen wären als Ausnahmefall betrachten. Da in der Reihenentwicklung von $\mathfrak{E}_K(x_1, x_2)$ jedenfalls keine gebrochene Potenz vorkommt, haben wir:

<u>So lange die $\alpha, \beta, \dots \gamma$ nicht zufälligerweise ganze positive Zahlen sind, gehört das Polynom $\mathfrak{E}_K$ in jedem singulären Punkt zum Exponenten $0$.</u>

Nun ist folgendes die characteristische Wendung in der Theorie der Lamé'schen Polynome: <u>Man denkt sich die Formen $\varphi$ und $\psi$, d. h. die singulären Puncte und ihre Exponenten gegeben, und fragt dann, ob man die Form $\chi$, welche die von uns sogenannten accessorischen Parameter ent-</u>

hält, so bestimmen kann, dass eine Partikularlösung der Differentialgleichung ein Lamé'sches Polynom wird?

Die Lösung dieser Aufgabe stellt sich als ein höheres algebraisches Problem heraus.

Ich will heute nur noch eine historische Bemerkung machen: Die geschilderte Fragestellung stammt aus der mathematischen Physik, wo sie aber nicht in voller Allgemeinheit auftritt. Vielmehr:

Der gewöhnliche Fall der mathematischen Physik ist dadurch characterisirt, dass die $n-1$ ersten Exponentendifferenzen $\alpha = \beta = \dots = \mu = \frac{1}{2}$ sind, worauf die letzte Exponentendifferenz $\nu = 2k + \frac{n-3}{2}$ wird.

Do. d. 7. Juni 1894.] Es ist heute das algebraische Problem näher zu formuliren, von dem, wie wir in der letzten Stunde sagten, das Problem der Lamé'schen Polynome abhängt.

Man setze das Polynom $E_k(x_1, x_2)$ vom Grade $k$ mit seinen $k+1$ unbestimmten Coefficienten in die Differentialgleichung

$$(\overset{k}{E}, \overset{n}{\Phi})_2 + (\overset{k}{E}, \overset{n-2}{\Psi})_1 + (\overset{k}{E}, \overset{n-4}{X})_0 = 0$$

ein. Die entstehende ganze rationale Form $(n+k-4)$ten Grades soll identisch verschwinden, d. h. ihre $n+k-3$ Coefficienten sollen verschwinden. Das gibt aber $n+k-3$ homogene lineare Gleichungen für die $k+1$ Unbekannten, Damit diese verträglich seien, müssen besondere Bedingungen für die Coefficienten der $\varphi, \psi, \chi$ erfüllt sein: $\varphi$ und $\psi$ sehen wir als gegeben an; dann hat $\chi$ als ganze rationale Form vom Grade $n-4$ gerade $n-3$ willkürliche Coefficienten, genau ebensoviel, als wir Bedingungen erfüllen müssen, um alle Gleichungen verträglich zu machen. Die Aufgabe ist also folgendermassen zu formuliren:

<u>Die sämtlichen $n+k-3$ linearen Gleichungen sollen die Folge von nur $k$ Gleichungen sein.</u>

<u>Das hierdurch bedingte Verschwinden der $(k+1)$ reihigen Determinanten der aus den Coefficienten gebildeten Matrix liefert $n-3$ Bedingungen für die Coefficienten der $\varphi, \psi, \chi$, insbesondere, indem wir $\varphi$ und $\psi$ als gegeben ansehen, für die $n-3$ Coefficienten von $\chi$.</u>

<u>Die $n-3$ unbekannten Coefficienten von $\chi$ treten linear aber nicht homogen in allen einzelnen Gliedern der Matrix auf und</u>

<u>können daher als Unbekannte angesehen werden, durch welche wir unsere $n-3$ Bedingungsgleichungen befriedigen.</u>

Es ist dann die Frage, wie viele Lösungen das genannte Gleichungssystem besitzt, wie viel Lamé'sche Polynome von irgend einem bestimmten Grad also existiren?

Es hat diese Abzählung zuerst <u>Heine</u> in den Berliner Monatsberichten 1864 geleistet. Seine Entwickelungen sind sehr mühsam. Seitdem ist aber von Seiten der algebraischen Geometrie her die Technik in der Behandlung solcher Matrixgleichungen sehr entwickelt worden. Man findet die Frage nach der Anzahl der gemeinsamen Lösungsysteme eines Systems von Matrixgleichungen in allgemeinster Form beantwortet bei <u>S. Roberts</u> in Crelle's Journal 67, 1867. Der Gegenstand ist übrigens in <u>Salmon-Fiedler</u>, Raumgeometrie, in dem Kapitel von der allgemeinen Theorie der algebraischen Flächen ausführlich dargestellt. Ich kann hier nur das Resultat angeben, wie es sich bei unserem speciellen Problem herausstellt. Man findet:

<u>Die Anzahl der verschiedenen Lösungs-</u>

systeme unseres Matrixgleichungssystems und also die Anzahl der verschiedenen Lamé'schen Polynome vom Grade $k$ bei $n$ singulären Punkten beträgt

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-3)}{1.2\ldots(n-3)}$$

Z. B. im Falle $n=5$, $k=1$ handelt es sich um das Verschwinden einer Matrixe mit 2 Horizontal- und 3 Verticalreihen, deren einzelne Glieder in den beiden gesuchten Coefficienten linear sind. Das bedeutet aber geometrisch den Schnitt einer Coordinatenebene mit einer Raumcurve 3. Ordnung. Man bekommt so 3 Lösungssysteme, in Übereinstimmung mit unserer Formel.

Soweit ist diese Theorie ganz allgemein, von algorithmischem Character. Mehr synthetischen Character haben die folgenden Betrachtungen, welche sich auf Realität und Lage der Wurzelpunkte der verschiedenen Lamé'schen Polynome $E_k$ beziehen.

Wir fragen: Wie viele reelle Wurzeln besitzt ein Polynom $E_k$, und wie verteilen sich dieselben auf die einzelnen durch die Verzweigungspunkte $a, b, \ldots m, n$ gebildeten Seg-

<u>mente der reellen Zahlenaxe?</u>

Wir knüpfen zuerst an den eigentlichen Lamé'schen Fall an, wo alle Exponentendifferenzen mit Ausnahme einer einzigen $= \frac{1}{2}$ sind. Den letzten Punkt, dessen Exponentendifferenz von $\frac{1}{2}$ verschieden ist, nämlich $= 2k + \frac{n-3}{2}$, pflegt man nach $\infty$ zu werfen. Wir haben also das Schema


Dann wird behauptet:

<u>Im vorliegenden Falle sind alle $E_\kappa$ reell und haben reelle Wurzeln, die durchaus in den Intervallen von $a$ bis $m$ liegen.</u>

Wir wollen diese Intervalle, welche, wenn $n$ ins Unendliche gelegt wird, ganz im Endlichen liegen, als die „innern Intervalle" bezeichnen.

Der ausgesprochene Satz ist schon von Heine bewiesen. Ich habe denselben in Math. Ann. 18 in der Weise vervollständigt, daß ich die Verteilung der Wurzeln auf die einzelnen Intervalle für die verschiedenen $E_\kappa$ näher bestimmt habe.

<u>Die nähere Untersuchung beginnt mit der Überlegung, daß die Zahl der $E_\kappa$ gerade mit</u>

der Anzahl von Möglichkeiten übereinstimmt, $k$ Punkte auf $n-2$ Intervalle zu verteilen; die Sache ist dann so, dass geradezu jeder einzelnen Verteilungsweise ein und nur ein $E_k$ entspricht.

Z. B. hat man für $n=4$ die $k$ Punkte auf 2 innere Intervalle zu verteilen, was gerade $k+1$ Möglichkeiten gibt, genau soviel, als es Polynome $E_k$ gibt.

Dieses Theorem hat Stieltjes in Acta mathematica 6. 1884 erweitert, und in einer ganz besonders anschaulichen Weise bewiesen.

Stieltjes sagt; das Theorem bleibt ungeändert bestehen, sobald $\alpha, \beta, \ldots \mu$ sämtlich $<1$ sind. Insbesondere dürfen $\alpha, \beta, \ldots \mu$ beliebige negative Zahlen sein.

Die hierin liegende Erweiterung ist nicht überraschend; ich sage:

Wenn ich das Realitätstheorem nur im Falle der mathematischen Physik kenne, so kann ich von da aus den verallgemeinerten Stieltjes'schen Satz sehr leicht durch Continuität ableiten. Folgendermassen:

Da $\alpha<1, \beta<1, \ldots \mu<1$ sein soll, so muss das Polynom $E_k$ an jeder der Stellen $a, b, \ldots m$

gewiss zum Exponenten 0 gehören. Das heisst:

Keine Wurzel des Polynoms $E_k$ fällt in einen der singulären Punkte $a, b, \ldots m$ hinein.

Ferner aber behaupte ich:

$E_k = 0$ kann niemals im Innern eines Intervalls eine mehrfache Wurzel haben.

Denn wäre das der Fall, so würde an der betreffenden Stelle nicht nur $E$, sondern auch $E'$ verschwinden, folglich, da im Innern eines Intervalls der Coefficient $\varphi$ von $E''$ in der Differentialgleichung

$$\varphi \cdot E'' + \text{—} E' + \text{—} E = 0$$

nicht verschwindet, müsste auch $E''$ und dann auch jede höhere Ableitung von $E$ verschwinden, also $E$ constant $= 0$ sein. Also:

Unsere Behauptung, dass $E$ niemals eine Doppelwurzel im Innern eines Intervalls hat, folgt daraus, dass $E$ einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung genügt.

Nun möge $\alpha, \beta, \ldots \mu$ sich langsam ändern, von den Werten $\frac{1}{2}$ ausgehend. Alle Wurzeln eines Polynoms liegen getrennt in den innern Intervallen, sie werden sich langsam und stetig verschieben, doch so, dass nie einer der Punkte mit einem Punkte a, b, ... m oder mit einem der andern Wurzelpunkte zusammenrückt.

Da wären nun zwei Möglichkeiten, wie sich Anzahl und Verteilungsweise der reellen Wurzelpunkte ändern könnte. Einmal könnte ein Polynom zwar reell bleiben, aber zwei Wurzelpunkte conjugirt complexe werden; das ist von vorne herein auszuschliessen, weil die beiden Punkte dann erst zusammenrücken müssten. Andererseits könnte ein $E_k$ überhaupt complexe Coefficienten bekommen; dann müsste aber ein anderes $E_k$ die conjugirt complexen Coefficienten bekommen, und vorher müssten beide $E_k$ identisch werden, was deswegen unmöglich ist, weil die Verteilungsweise der Wurzeln auf die reellen Intervalle von vorn herein für alle $E_k$ wesentlich verschieden war. Folglich müssen alle Wurzeln reell bleiben und für jedes $E_k$ dieselbe Verteilungsweise auf die Intervalle beibehalten, wie für $\alpha = \beta = \ldots = \mu = \frac{1}{2}$. —

Nun wollen wir zu dem allgemeinen Beweise von Stieltjes übergehen, der das betr. Theorem gleich nach seinem vollen Umfange beweist.

Die Differentialgleichung für $\mathcal{E}$ hat die Form (unabh. Var. $z$.)

$$\mathcal{E}'' + \left(\frac{1-\alpha}{z-a} + \cdots + \frac{1-\nu}{z-n}\right)\mathcal{E}' + (\ldots\ldots)\,\mathcal{E} = 0$$

Ist $z_i$ einer der $k$ Wurzelpunkte von $\mathcal{E}$, so wird für einen solchen die Gleichung sich schreiben lassen:

$$\left(\frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'}\right)_{z=z_i} + \left(\frac{1-\alpha}{z_i-a} + \cdots + \frac{1-\nu}{z_i-n}\right) = 0.$$

Nun ist

$$\mathcal{E} = (z-z_1)(z-z_2)\cdots\cdots(z-z_k).$$

Daraus berechnet man

$$\left(\frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'}\right)_{z=z_i} = \frac{2}{z_i-z_1} + \frac{2}{z_i-z_2} + \cdots + \frac{2}{z_i-z_k};\quad i=1,2,\ldots k,$$

und man bekommt also den Satz:

<u>Die Wurzelpunkte $z_i$ $(i=1,2,\ldots k)$ eines Lamé'schen Polynoms genügen den Gleichungen</u>

$$\frac{1}{z_i-z_1} + \frac{1}{z_i-z_2} + \cdots + \frac{1}{z_i-z_k} + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{z_i-a} + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{z_i-b} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(1-\nu)}{z_i-n} = 0,$$

<u>und umgekehrt, wenn man $k$ Punkte $z_1, z_2, \ldots z_k$ hat, welche diesen Gleichungen genügen, dann bilden dieselben die Verschwindungsstellen eines Lamé'schen Polynoms.</u>

Fr. d. 8. Juni 1894.] Die gestern gefundenen

Gleichungen für die Verschwindungsstellen eines Polynoms $E_k$ lassen nun nach Stieltjes eine sehr einfache mechanische Deutung zu. Ich werde Ihnen dieselbe hier in der Weise entwickeln, wie es Bôcher in seinem demnächst erscheinenden Buche „Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie" darstellt, nämlich unter Ausdehnung auf beliebig complexe $z_i$, resp. $a, b, .. n$.

Es sei $z$ ein beweglicher Massenpunkt $\mu$, $z'$ ein fester Punkt mit der Masse $\mu'$ in einer $z$-Ebene. Bedeutet $r_{\mu\mu'}$ die gegenseitige Entfernung der beiden Massenpunkte, so stellt

$$U = \mu \mu' \log r_{\mu\mu'},$$

oder, was dasselbe ist

$$U = \mu \mu' R \log (z - z')$$

das „logarithmische Potential" der beiden Punkte aufeinander vor, und es ist $+\frac{\partial U}{\partial r}$ eine in der Richtung des Radius vector $r_{\mu\mu'}$ wirkende Kraft, welche der eine Punkt auf den andern ausübt, eine Abstoßung, wenn $\mu$ und $\mu'$ gleiches, eine Anziehung, wenn die ungleiches Vorzeichen haben.

Als Function des Punktes $z$ wird $U$ an der

Stelle $z = z'$ negativ logarithmisch unendlich, außerdem aber an der Stelle $z = \infty$ positiv logarithmisch unendlich, als wenn sich im Unendlichen ebenfalls ein Massenpunkt und zwar von der Masse $-\mu'$ befände.

Wenn wir diese Sonderstellung des unendlich fernen Punktes vermeiden wollen, so dürfen wir in der Theorie des logarithmischen Potentials auf einen beweglichen Punkt nur solche Massenaggregate wirken lassen, deren Summe $= 0$ ist.

Es seien nun $n$ feste Punkte $a, b, \dots m, n$ je mit den Massen $\frac{1}{2}(1-\alpha), \frac{1}{2}(1-\beta), \dots \dots \frac{1}{2}(1-\mu), \frac{1}{2}(1-\nu)$ gegeben, und es bedeuten $z_i$ $(i = 1, 2, \dots k)$ $k$ bewegliche Punkte je mit der Masse 1. Das Gesamtpotential dieser Punkte auf einander ist dann durch die Summe vorgestellt:

$$\begin{aligned} U = \Re(U + iV) = \Re\Big[&\sum_i \sum_{i'} \log(z_i - z_{i'}) + \sum_i \tfrac{1}{2}(1-\alpha)\log(z_i - a) \\ &+ \sum_i \tfrac{1}{2}(1-\beta)\log(z_i - b) + \dots\dots + \sum_i \tfrac{1}{2}(1-\nu)\log(z_i - n) \\ &+ \tfrac{1}{2}(1-\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}(1-\beta)\log(a-b) + \dots\dots + \tfrac{1}{2}(1-\mu)\cdot\tfrac{1}{2}(1-\nu)\log(m-n)\Big]. \end{aligned}$$

Auf irgend einen der beweglichen Punkte $z_i$ wirken hier die $k-1$ übrigen beweglichen Punkte je mit der Masse 1, sowie die Punkte $a, b, \dots n$ je mit der Masse $\frac{1}{2}(1-\alpha), \frac{1}{2}(1-\beta) \dots \frac{1}{2}(1-\nu)$, also eine Massensumme

$$k - 1 + \Sigma \tfrac{1}{2}(1-\alpha).$$

Wir treffen nun von Hause aus die Verabredung so, daß für den beweglichen Punkt $z_i$ das Unendlichferne keine Unstetigkeit ist, d. h. wir setzen

$$k - 1 + \Sigma \tfrac{1}{2}(1-\alpha) = 0.$$

In der That stimmt diese Festsetzung genau damit überein, daß der Grad eines Lamé'schen Polynoms

$$k = \frac{\Sigma(\alpha-1)+2}{2}$$

ist.

Nun fragen wir, ob die $k$ beweglichen Punkte so zwischen den $n$ festen Punkten angeordnet werden können, daß sie sich im Gleichgewicht – einerlei ob in stabilem oder in labilem – befinden. Die auf einen Punkt $z_i = x_i + iy_i$ wirkende Kraft ist durch ihre Componenten $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ gegeben; beide müssen verschwinden, wenn der Punkt $z_i$ im Gleichgewicht sein soll:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0;$$

mit $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ muß auch $\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$ sein. Dann kann man beide reelle Gleichungen in die eine complexe zusammenfassen:

$$\frac{\partial (U+iV)}{\partial x_i} = 0$$

oder, da $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial (x_i + i y_i)} = \frac{\partial}{\partial z_i}$ ist:

$$\frac{\partial (U+iV)}{\partial z_i} = 0.$$

Die 2k Bedingungen für das Gleichgewicht sind in den k complexen Gleichungen zusammengefaßt:

$$\frac{\partial (U+iV)}{\partial z_i} = \sum_{i'} \frac{1}{z_i - z_{i'}} + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{z_i - a} + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{z_i - b} + \dots + \frac{\frac{1}{2}(1-\nu)}{z_i - n} = 0.$$

$$i = 1, 2, \dots k.$$

Diese Gleichungen sind aber genau die Gleichungen, denen die k 0-Stellen eines Lamé'schen Polynoms genügen. Also:

<u>Die k 0-Stellen eines Lamé'schen Polynoms $E_k$ sind direkt definirt als Gleichgewichtslage von k beweglichen Punkten, welche die Masse 1 besitzen, während in den festen Punkten $a, b, \dots n$ die Massen $\frac{1}{2}(1-\alpha), \frac{1}{2}(1-\beta), \dots \frac{1}{2}(1-\nu)$ angebracht sind.</u>

Im Falle von Stieltjes ist

$$\alpha < 1, \ \beta < 1, \ \dots \ \mu < 1 \quad \nu = 2k - 1 + \Sigma(1-\alpha) > 1;$$

folglich sind die Massen in den Punkten $a, b, \dots m$ sämtlich positiv. Also:

<u>Der einzelne Punkt $z_i$ erfährt im Falle von Stieltjes nicht nur seitens der andern Punkte $z_i$ Abstossung, sondern auch seitens der $n-1$ festen Punkte $a, b, \ldots m$, während er allerdings vom Punkte $n$ stark angezogen wird.</u>

Nun beschränken wir die Lage der festen und der beweglichen Massenpunkte auf die reelle Axe. Wir denken uns die $k$ beweglichen Massenpunkte irgend wie in die Intervalle zwischen den Punkten $a, b, \ldots m$ hingestreut. Dieselben werden sich dann irgendwie in eine Gleichgewichtslage anordnen müssen, und zwar muss jeder der $\frac{(k+1)\cdot\cdot(k+n-3)}{1\cdots(n-3)}$ verschiedenen möglichen Verteilungsweisen der $k$ Punkte auf die $n-2$ Intervalle mindestens eine Gleichgewichtslage entsprechen. Denn bei den Bewegungen, die sich nach der Ausstreuung einstellen, kann kein Punkt über eine Intervallgrenze hinweggehen, weil er von dem betreffenden Punkte $a, b, \ldots m$ vorher unendlich stark abgestossen würde. Ebensowenig, wie einer der Punkte $z_i$ an einen Punkt $a, b, \ldots m$ heranrücken kann, ebensowenig können zwei derselben zusammenrücken. Wir haben also den Satz:

Wie immer wir die $k$ Punkte als reelle Punkte auf die $n-2$ innern Intervalle verteilen mögen, ganz gewiss gibt es dieser Verteilungsweise entsprechend mindestens eine Gleichgewichtslage der Punkte und also ein entsprechendes Lamé'sches Polynom $E_k$.

Nun gibt es gerade ebensoviele verschiedene Verteilungsweisen der Punkte, als es Polynome gibt. Jeder Verteilungsweise, haben wir gesehen, entspricht mindestens ein Polynom; also läßt sich schliessen, daß jeder Verteilungsweise auch gerade nur ein einziges Polynom entspricht.

Andere Gleichgewichtslagen der $k$ Punkte in der $z$-Ebene, als auf der reellen Axe kann es daher auch nicht geben, da ja schon die Zahl aller Polynome mit den gefundenen Gleichgewichtslagen auf der reellen Axe erschöpft ist. Also:

Alle Polynome $E_k$ sind reell und liefern $=0$ gesetzt $k$ reelle Wurzeln, welche auf die $n-2$ innern Intervalle so verteilt sind, daß das einzelne $E_k$ durch die Art und Weise der Verteilung seiner Wurzeln auf die $n-2$ Intervalle characterisirt ist.

Bôcher hat diesen Satz und den Beweis

von Stieltjes in folgender Weise für den Fall verallgemeinert, daß die singulären Punkte a, b, … m, n allgemeine Lage in der complexen Zahlenebene haben:

Es sei der Punkt n ins Unendliche geworfen. Alle übrigen, im Endlichen gelegenen Punkte schließe man in ein geradliniges Polygon ohne überstumpfe Winkel ein. Dann gilt der Satz:

Die Wurzeln $\varepsilon_k$ der sämtlichen zugehörigen Lamé'schen Polynome sind in unserem geradlinigen Polygon enthalten.

Denn wenn Punkte $z_i$ außerhalb des Polygons lägen, so könnte man wenigstens durch einen dieser Punkte eine solche gerade Linie ziehen, daß nicht nur alle Punkte a, b, … m, sondern auch alle übrigen Punkte $z_i$, d. h. alle auf den betreffenden Punkt abstoßend wirkenden Punkte auf ein und derselben Seite der Geraden liegen. Dann kann der betr. Punkt aber auf keinen Fall im Gleichgewicht sein, sondern er muß nach der andern Seite hin abgestoßen werden.

Construiren wir das Böcher'sche Polygon in dem Falle, wo die Punkte a, b, … m sämtlich auf der reellen Axe liegen, so reducirt sich dasselbe auf einen unendlich


schmalen nur die Segmente der reellen Axe von a bis m einschliessenden Flächenstreifen. Daraus folgt unmittelbar, dass alle Wurzeln von $E_K = 0$ auf diesen $n-2$ Segmenten der reellen Axe liegen müssen.

Eine unmittelbare Folge des Böcher'schen Satzes ist, dass die sämtlichen Wurzeln $z_i$ im Falle reeller a, b, … m zwischen a und m auf der reellen Axe liegen. Es bleibt blos unbekannt, wie sich die Punkte $z_i$ auf die verschiedenen Intervalle von a bis m verteilen. —

Wenn bei Beschränkung auf reelle z die Punktsysteme $z_i$ des Stieltjes'schen Falles sich notwendig im stabilen Gleichgewicht befinden, so wird das Gleichgewicht sofort labil, sobald wir den Punkten $z_i$ freie Beweglichkeit in der z-Ebene gestatten.

Denn man braucht nur durch denjenigen der Punkte $z_i$, der nach einer kleinen Verrükkung in das complexe Gebiet hinein am weitesten von der reellen Axe entfernt ist, eine parallele Gerade zur reellen Axe zu construiren, um zu sehen, dass dann alle abstossenden Punkte auf derselben Seite dieser Geraden, wie die reelle Axe sich befinden, und dass also der Punkt notwendig noch weiter von der reellen Axe fortgetrieben wird.

Soviel über den Stieltjes'schen Gedankengang mit der Bôcher'schen Erweiterung.

Di. d. 12. Juni 1894.] Wir wollen heute den in der vorigen Stunde besprochenen allgemeinen Stieltjes'schen Satz <u>speciell für $n=3$, d. h. für die hypergeometrische Function</u> genauer überlegen und insbesondere sehen, wie man denselben vermittelst der Methode der conformen Abbildung bestätigt.

Sind $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$ die Exponenten der drei singulären Punkte $a$, $b$, $c$, so muss, wenn ein Polynom $E_k(x)$ zu der Differentialgleichung als Particularlösung existiren soll

$$\alpha+\beta+\gamma = 2k+1$$

sein. Die Anzahl der $E_k$ ist einfach $=1$. In der That drückt man $E_k$ leicht durch eine abbrechende hypergeometrische Reihe aus,

nämlich, wenn wir sogleich homogen machen:
$$\mathfrak{E}_k(x_1,x_2)=(x_1-c x_2)^k \cdot F\left(k+1-\alpha-\beta,\,-k,\,1-\alpha,\,\frac{x-a}{x-c}\cdot\frac{b-c}{b-a}\right)$$
Der Satz von Stieltjes behauptet nun, dass für $\alpha<1$, $\beta<1$ das vorstehende Polynom, d. h. die abbrechende hypergeometrische Reihe zwischen $x=a$ und $x=b$ gerade $k$ reelle Wurzeln besitzt.

Andererseits haben wir im vorigen Semester aus der conformen Abbildung folgenden Satz über die Anzahl der reellen Wurzeln einer hypergeometrischen Reihe in ihrem Intervall abgeleitet (S. 441 der Autogr.)

Die Anzahl der 0-Stellen der einzelnen hypergeometrischen Reihe im Intervall ist

$$E\left(\frac{(\gamma)-|\alpha|-|\beta|+1}{2}\right)+\varepsilon,$$

wo $\varepsilon=0$ oder $-1$ zu wählen ist, und zwar so, dass die Gesamtzahl der Wurzeln gerade oder ungerade ist, je nachdem die $F$-Reihe bei 1 positiv oder negativ ist.

Dass die so zu bestimmende Zahl gerade $=k$ wird, das wäre ins Einzelne auszuführen.

Wir aber wollen an dieser Stelle statt dessen das Resultat von Stieltjes lieber durch Betrachtung der conformen Abbildung ableiten, einerseits, weil wir die Formel des vorigen Semesters selbst erst aus der conformen Abbildung abgeleitet haben, andererseits, um zu sehen, ob wir nicht mit der Methode der conformen Abbildung wenigstens im Falle $n = 3$ noch über das Stieltjes'sche hinausgehende Resultate gewinnen können.

$\eta$ stellt sich in Form eines Integrals dar:

$$\eta = \int \frac{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}(x, dx)}{E_k(x_1, x_2)^2}.$$

Die positive Halbebene $x$ wird durch dieses Integral auf ein geradliniges Dreieck mit den Winkeln $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ abgebildet, wobei negative Winkel so zu verstehen sind, daß die betreffende Ecke im Unendlichen liegt. Denn für $\alpha < 0$ wird $\eta$ bei $x = a$ unendlich.

Aber diese eventuell bei $x = a, b, c$ liegenden Unendlichkeitspunkte von $\eta$ collidiren nicht mit denjenigen $\infty$-Punkten von $\eta$, welche von den $0$-Stellen des $E(x_1, x_2)$ herrühren, da ja diese durchaus von $a, b, c$ getrennt liegen. Wenn eine $0$-Stelle von $E$ auf der reellen Axe liegt, sagen wir zwischen $a$ und $b$, so muß $\eta$ auf der diesem Segment entsprechende[n]

Dreieckseite $\infty$ werden, die Seite sich also durchs Unendlichferne hindurchziehen.

Wenn dagegen $E$ eine complexe 0 Stelle hat, so tritt diese immer mit ihrer conjugirten zusammen auf, da ja für $n=3$ bei reellen $\alpha, \beta, \gamma$ die Differentialgleichung immer reell ist; von jedem Paare conjugirt complexer Wurzeln liegt aber immer eine in der positiven Halbebene, d. h. $\eta$ wird ihr entsprechend einmal in der Dreiecksfläche unendlich, oder anders ausgedrückt, die Dreiecksfläche zieht sich einmal durchs Unendliche. Also:

<u>Aus der Anzahl der Seitendurchgänge unseres Dreiecks, bezw. aus der Anzahl der Flächendurchgänge erfahren wir die Anzahl der reellen Wurzeln von $E_x$ im einzelnen Intervall und die Anzahl der complexen Wurzeln überhaupt.</u>

Im vorigen Semester haben wir uns mit dem allgemeinen Kreisbogendreieck beschäftigt und vom geradlinigen Dreieck nur nebenbei gesprochen. Wir fragten damals, wie oft eine Seite sich überschlage; diese Frage, auf eine geradlinige Seite bezogen, ist von der jetzigen, wie oft die Seite sich durch $\infty$ zieht, etwas verschieden. Denn die Anzahl der Durchgänge durch $\infty$ kann ev. um 1 größer sein als die Zahl der Überschlagungen der Seite. Also:

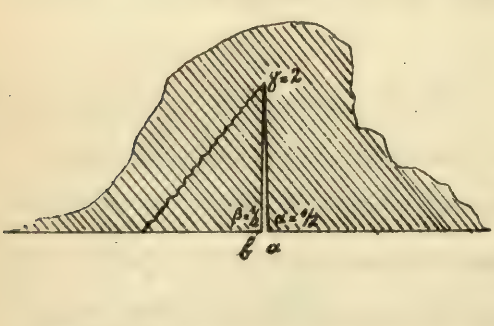
Die hier vorliegende Fragestellung, wie oft die einzelne Seite des Dreiecks durch den $\infty$-Punkt der $\eta$-Ebene läuft, ist der Fragestellung des Wintersemesters, wie oft sich die einzelne Seite überschlägt, d. h. über jeden beliebigen ihrer Punkte hinläuft, ausserordentlich benachbart, aber doch nicht mit ihr identisch.

Wir wollen nun durch wirkliches Zeichnen der geradlinigen Dreiecke den Stieltjes'schen Satz beweisen.

1. Wir gehen aus von dem Dreieck

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2k,$$

welches für $k = 1$ folgendes Aussehen zeigt,




während man sich für $k > 1$ noch längs der geschlängelten Linie $k-1$ Halbebenen polar angehängt zu denken hat.

Man sieht aus der Figur, daß für $k = 1$ die Seite $ab$ sich einmal durch's $\infty$ zieht, und für $k > 1$ noch $k-1$

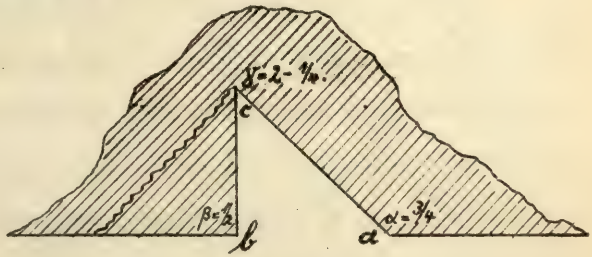
mal mehr, d.h. allgemein k mal. Also

Alle Wurzeln von $E_K$ sind reell und liegen im Intervall von a bis b.

Nun wollen wir uns die Figur continuirlich abgeändert denken, und zwar, indem wir dabei die Grösse des Winkels $\beta = \frac{1}{2}$ festhalten, und $\alpha$ einmal von $\frac{1}{2}$ bis zu seiner Grenze 1 wachsen lassen, dann von $\frac{1}{2}$ durch 0 zu negativen Werten abnehmen lassen.

2). $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2k - \frac{1}{4}$.

Man sieht, wenn der Schenkel ca des Winkels $\gamma$ allmählich nach rechts gedreht wird, dass die Seite ab

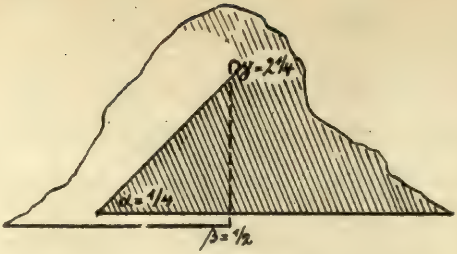



so lange nicht aufhört, einmal, bezw. bei k-1 polar angehängten Halbebenen K mal durch ∞ zu ziehen, als $\gamma > 1\frac{1}{2}$, $\alpha < 1$ bleibt. Das ist genau die Stieltjes'sche Gränze.

Unsere Figur behält ihren Character bis zu dem Moment, in welchem $\alpha = 1$ wird, wo andere Verhältnisse eintreten, die noch näher untersucht werden sollen.

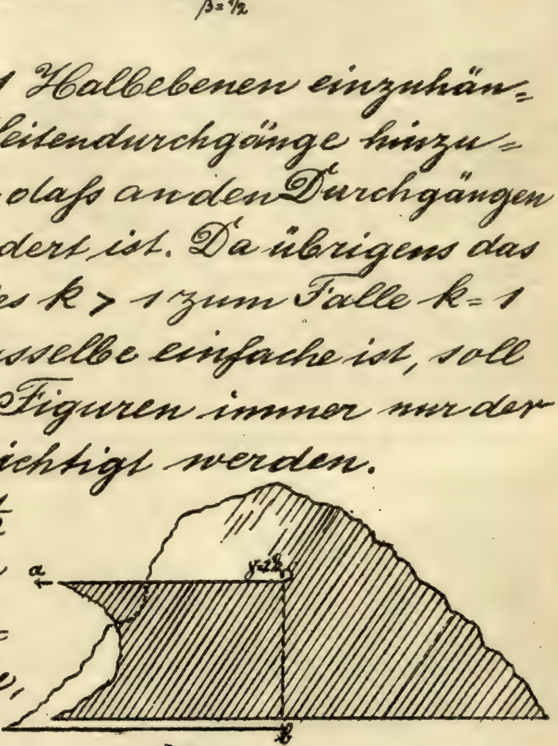
3). Wir lassen nun $\beta$ von $\frac{1}{2}$ an continuirlich

abnehmen. Zuerst:
$\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 2k + \frac{1}{4}$
Die Figur hat für $k = 1$ das Ansehen nebenstehenden Dreiecks; für $k > 1$ hat




man nur noch $k-1$ Halbebenen einzuhängen, wodurch $k-1$ Seitendurchgänge hinzukommen. Wir sehen, dass an den Durchgängen durch $\infty$ nichts geändert ist. Da übrigens das Verhältnis des Falles $k > 1$ zum Falle $k = 1$ immer wieder dasselbe einfache ist, soll in den folgenden Figuren immer nur der Fall $k = 1$ berücksichtigt werden.

4) $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 2k + \frac{1}{2}$
Die Seite a b geht auch jetzt gerade noch einmal durchs Unendliche, wie es sein soll. Dass a in's Unendliche gerückt ist, darf dabei nicht mitgezählt werden.





5) $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 2k + \frac{3}{4}$
Wir können jetzt den

Schenkel $ca$ beliebig immer weiter drehen, ohne dass sich an der Seite $ab$ oder $bc$ etwas ändert. Es hängen sich dabei, so oft man um $\pi$ oder $2\pi$ weiter gedreht hat, an die Dreiecksseite $ca$ Halbebenen und Vollebenen lateral an; das ist die ganze Aenderung.

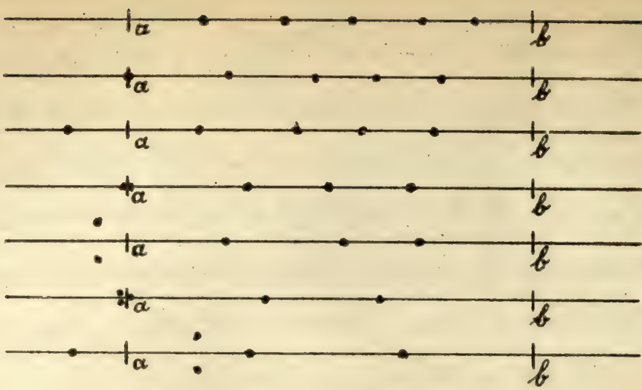
Wir sehen also:

<u>Die hiermit erreichte Gestalt des Dreiecks ändert sich nun, wenn $\alpha$ weiter ins negative wächst, was die Seiten $cb$, $ba$ angeht, gar nicht, nur der Schenkel $ca$ dreht sich im Sinne des Uhrzeigers fortschreitend um $c$ herum, wobei er die Membran des Dreiecks hinter sich her zieht.</u>

Damit ist der Satz von Stieltjes, wenigstens in Bezug auf die Änderung von $\alpha$ vollständig bestätigt. Ganz entsprechendes findet man, wenn man nun auch noch $\beta$ in unsern Figuren variirt.

Wie ist's nun aber wenn wir $\alpha$ über die Grenze 1 hinaus wachsen lassen? Ich will heute nur noch kurz das Resultat angeben, welches durch folgende schematische Figuren zu übersehen ist, bei denen ich $k = 5$ nehme.

1., $\alpha < 1$, $\beta < 1$.
2., $\alpha = 1$, $\beta < 1$.
3., $1 < \alpha < 2$.
4., $\alpha = 2$.
5., $2 < \alpha < 3$.
6., $\alpha = 3$.
7., $3 < \alpha < 4$.



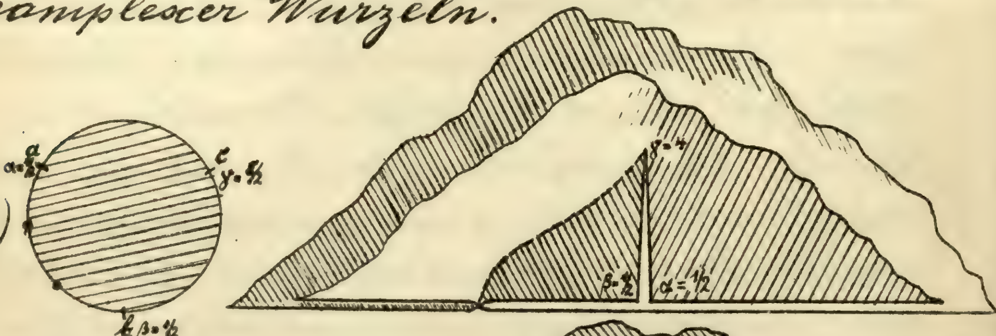

Für $\alpha = 1$ rückt einer der vorher im Intervall ab gelegenen Wurzelpunkte nach a selbst hinein und für $\alpha > 1$ darüber hinaus in das Intervall a c. Für $\alpha = 2$ wird dieser Punkt wieder an a herangezogen, zugleich mit einem der übrigen Punkte und für $\alpha < 2$ werden diese beiden Wurzelpunkte complex. Darauf wiederholt sich dasselbe Spiel mit den $k-2$ noch reell gebliebenen und im Intervall ab gelegenen Wurzeln, bis schließlich alle Wurzeln complex sind, oder nur eine einzige reelle übrig bleibt.

Daß alle Wurzeln complex werden, tritt ein, wenn $k$ eine gerade Zahl ist und $\alpha$ zwischen $k$ und $k + \frac{1}{2}$ liegt; dann liegt aber wegen $\beta = \frac{1}{2}$ auch $\mu$ zwischen $k$ und $k + \frac{1}{2}$, die beiden Punkte $\alpha$ und $\mu$ sind also gleichberechtigt. Läßt man nun $\alpha$ weiter wachsen, immer bei festgehaltenem Werte von $\beta$, so nimmt dafür $\rho$ ab, und wird kleiner als $k$. Es übernimmt daher jetzt das Intervall $c\,b$ dieselbe Rolle wie vorher das Intervall $a\,b$, und es treten nach und nach alle die complexen Wurzelpunkte von $E_k$ in das Intervall $c\,b$ hinein, indem nur die Figuren der vorigen Seite in umgekehrter Reihenfolge und mit Vertauschung von $a$ und $c$ zu durchlaufen sind. Schließlich, wenn $\alpha > 2k - \frac{1}{2}$, also $\rho < 1$ geworden ist, sind wieder alle Wurzelpunkte reell, und wir haben wieder den Stieltjes'schen Fall, nur mit $c\,b$ als innerem Segment. Ähnlich wie für gerad zahlige $k$ verläuft die Sache bei ungeradem $k$; nur bleibt ein Punkt reell und wandert statt durchs Complexe hindurch direct durch das Intervall $a\,c$ hindurch aus $b\,a$ nach $b\,c$ hinein.

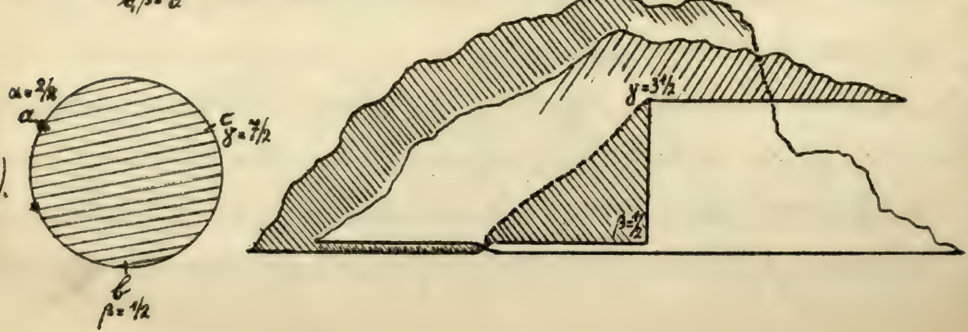
D$^o$. d. 14. Juni 1894.] Zur Illustration mögen die Figuren für $k = 2$ sämmtlich gezeichnet werden. Um die Gleichberechtigung der Intervalle $b\,a$ und $b\,c$ besser hervortreten zu lassen, will ich die reelle Zahlenaxe durch einen Kreis ersetzen, auf dem die Punkte a b c in gleichem Abstand verteilt sind.

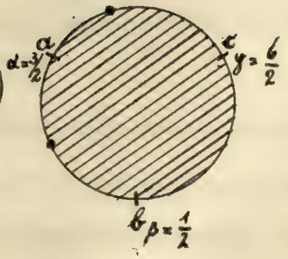
Zum Beweise für die Richtigkeit der Figuren für die Verteilung der Wurzeln von $E_k$ sollen ihnen sogleich die entsprechenden geradlinigen Dreiecke mit den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegenübergestellt werden. Man sieht dann, daſs in der That jedem Seitendurchgang durch $\infty$ eine reelle Wurzel in dem betr. Intervall entspricht, jedem Flächendurchgang ein Paar complexer Wurzeln.

1.)



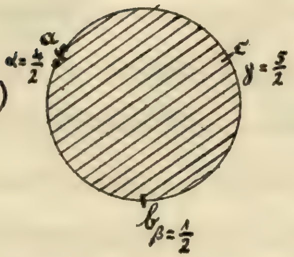

2).



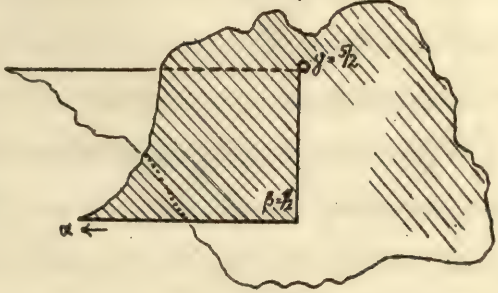

a
c
$\alpha = \frac{3}{2}$
$\gamma = \frac{6}{2}$
b $\beta = \frac{1}{2}$

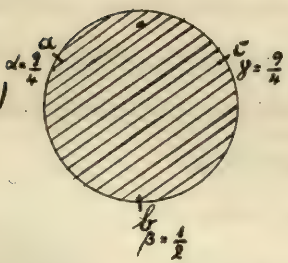
3)


$\gamma = 3$
$\beta = \frac{1}{2}$
$\alpha = 3/2$


a
c
$\alpha = \frac{4}{2}$
$\gamma = \frac{5}{2}$
b $\beta = \frac{1}{2}$

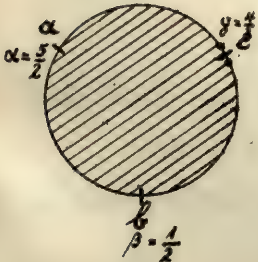
4.)


$\gamma = 5/2$
$\beta = 1/2$
$\alpha \leftarrow$

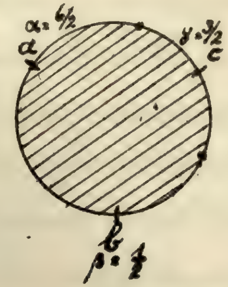

a
c
$\alpha = \frac{9}{4}$
$\gamma = \frac{9}{4}$
b
$\beta = \frac{1}{2}$

5)

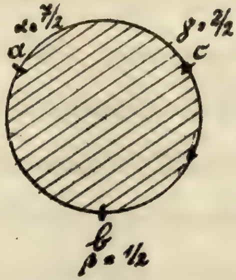

$\gamma = 5/4$
$\beta = 1/2$
$\alpha = 5/4$


a
$\alpha = \frac{5}{2}$
$\gamma = \frac{4}{2}$
c
b
$\beta = \frac{1}{2}$

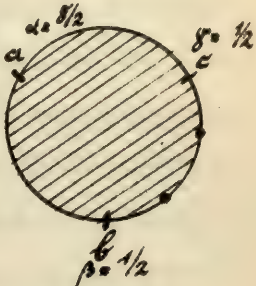
6)


$\alpha = 6/2$
a
$\gamma = 3/2$
c
b
$\beta = \frac{1}{2}$

7)


$\alpha = 7/2$
a
$\gamma = 2/2$
c
b
$\beta = 1/2$

8).

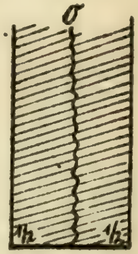

$\alpha = 8/2$
a
$\gamma = 1/2$
c
b
$\beta = 1/2$

9).

Die Dreiecke zu den Fällen 6) 7) 8) 9) brauche ich nicht zu zeichnen, da sie einfach die Spiegelbilder der Dreiecke 4) 3) 2) 1) sind.

Nun noch einige Bemerkungen zu den einzelnen Zeichnungen.

Ad 1. Die Figur 1) haben wir construirt, indem wir zuerst ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$ construirten, und an dieses von der Ecke $\gamma$ aus längs des Verzweigungsschnittes eine Halbebene polar anhängten. Man könnte fragen, warum wir nicht lieber von dem Dreieck $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ ausgegangen sind und an dieses 2 Halbebenen polar angehängt haben? Wenn wir dies versuchen würden, indem wir von dem gewöhnlichen Dreieck mit den Winkeln $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ausgehen, so sehen wir, daß wir durch polare Anhängung einer Halbebene nicht ein Dreieck, sondern zwei zum Teil übereinander- bezw. durcheinandergeschobene Zweiecke erhalten, die gar nicht mit einander zusammenhängen. Also:



Wir dürfen nicht von dem gewöhnlichen Dreieck $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ausgehen, weil dieses gar keine polare Anhängung verträgt.

Wenn wir wirklich von einem Dreieck $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ ausgehen wollen, so dürfen wir nicht von dem oben gezeichneten Dreieck ausgehen, sondern von einem ausgearteten unendlich schmalen Dreieck von endlicher Höhe. Hier hat es dann in der That keine Schwierigkeit, eine Halbebene polar anzuhängen, wodurch wir unser Ausgangsdreieck $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ bekommen. Also sagen wir noch als Ergänzung zur vorigen Bemerkung:

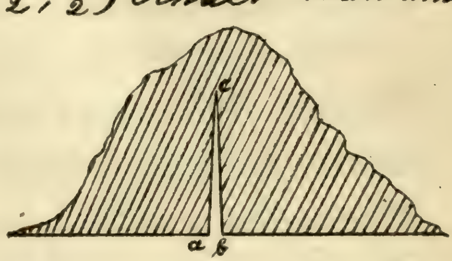
Immer können wir mit dem Falle $\mu = 0$ beginnen, wenn wir uns nicht scheuen, das Dreieck $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ in ausgearteter Form zu zeichnen.

Ad 2. Die eine Ecke $\alpha$ ist ins Unendliche gerückt und hat logarithmischen Character bekommen. Dasselbe sehen wir bei der Figur 4). In beiden Fällen sind Wurzelpunkte von $E_x$, bei 2) einer, bei 4) zwei mit a zusammengefallen. Wir sehen:

Unsere singulären Punkte erhalten bei

ganzzahliger Exponentendifferenz nur dann einen logarithmischen Character, wenn eine oder mehrere Wurzeln von $E$ in den singulären Punkt hineinrücken. (vergl. hierzu die allgemeine Regel auf pag. 72, 428 der Winterautographie).

Ad 3. Das Dreieck $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{6}{2})$ erhält man am einfachsten, indem man an das nebenstehende Dreieck $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ längs $ca$ eine Halbebene lateral anhängt.




Ad 4. Bei der Betrachtung des Dreiecks sehen wir:

Bei dem Dreieck 4) wird das Unendliche nur von der Ecke $\alpha$ selbst erreicht, und es sind also in der That beide Wurzeln von $E_\kappa$ nach $a$ gefallen, wobei übrigens, wie schon oben bemerkt, ein logarithmisches Glied in der Reihenentwicklung von $\eta$ auftritt.

Ad 5. Wir sehen hier an der Figur:

Keine Seite des Dreiecks zieht sich mehr durchs Unendliche, wohl aber die Fläche des Dreiecks, dem Umstande entsprechend, daß $E_\kappa = 0$ jetzt zwei complexe Wurzeln be-

besitzt, in jeder Halbebene eine.

Alle unsere Figuren zusammen geben uns jetzt den Satz:

Indem unsere Dreiecke jeweils die richtigen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ haben und mit ihren Seiten bezw. mit ihren Flächen genau so durchs Unendliche ziehen, wie es der angegebenen Lage der Wurzeln von $\mathfrak{E}_k = 0$ entspricht, so wird durch die Gestalt der Dreiecke unsere Angabe über die Lage der Wurzeln von $\mathfrak{E}_k = 0$ bewiesen.

Überblicken wir unsere Figuren noch einmal im Ganzen, so müssen wir gestehen, dass dieselben trotz der Einfachheit der Voraussetzungen $\beta = \frac{1}{2}$ und $k = 2$ doch verhältnismässig sehr complicirt sind.

In der That geschah das Heranziehen der Dreiecke mehr im Hinblick auf spätere Entwicklungen, wo die Methode der conformen Abbildung die einzige ist, die uns bleibt, alsweil es im vorliegenden hypergeometrischen Falle oder überhaupt bei den Lamé'schen Polynomen nötig wäre.

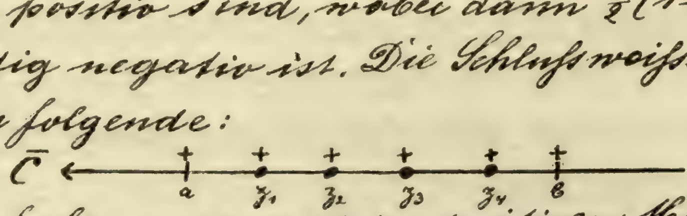
Mit rein algebraischen Mitteln ist die Frage der Wurzelverteilung bei der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe von Stieltjes in Comptes rendus 100. 1885 und von Hilbert in Crelle's Journ. 103. 1883 behandelt worden.

Wir aber wollen morgen sehen, dass wir unsere Theoreme direct durch Betrachtung des logarithmischen Potentials unseres Punktsystems erweisen. Derartige Betrachtungen hat bereits früher in meinem Seminare Hr. van Vleck angestellt.

Fr. d. 15. Juni 1894.] Die 0-Punkte $z_i$ $(i=1,2\dots k)$ eines Polynoms $E_k$ genügen, wie wir gesehen haben, den $k$ Gleichungen

$$\frac{1}{z_i-z_1}+\dots+\frac{1}{z_i-z_k}+\frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{z_i-a}+\frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{z_i-b}+\frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{z_i-c}=0.$$
$$(i=1,2\dots k).$$

Der Stieltjes'sche Fall liegt vor, wenn $\alpha<1$ und $\beta<1$ ist d. h. wenn $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ und $\frac{1}{2}(1-\beta)$ beide positiv sind, wobei dann $\frac{1}{2}(1-\gamma)$ notwendig negativ ist. Die Schlussweise war dann folgende:




Wir haben uns a mit der positiven Masse $\frac{1}{2}(1-\alpha)$, b mit der positiven Masse $\frac{1}{2}(1-\beta)$, c mit der negativen Masse $\frac{1}{2}(1-\mu)$ geladen zu denken. Wenn wir nun die Punkte $z_1, z_2, \dots, z_k$ sämtlich mit der positiven Ladung 1 versehen irgendwie in das Intervall $ab$ eingestreut denken, so müssen sie notwendig, da sie sowohl von den Enden des Intervalls wie untereinander abgestoßen werden, eine Gleichgewichtslage innerhalb des Intervalls annehmen. Jede Gleichgewichtslage entspricht aber gerade der Wurzelverteilung eines $E_k$, und da es in unserm Falle $n = 3$ nur ein $E_k$ gibt, so ist gerade dieses durch unsere Gleichgewichtslage elektrischer Punkte gegeben, hat also notwendig seine Wurzeln sämtlich im Intervall $ab$.

Nun werde $\alpha = 1$, so daß also der Punkt $a$ seine abstoßende Wirkung auf die Punkte $z_1, z_2, \dots z_k$ verliert; dann hindert nichts mehr, daß ein Punkt $z_1$ an den Punkt $a$ heran oder darüber hinaus rückt.

Wir werden versuchen, ob wir nicht den für die $z_i$ geltenden Gleichungen Genüge leisten können, indem wir einen der Punkte $z_i$, nämlich $z_1$, nach $a$ selbst legen.

Es sei $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ vorerst nur eine sehr kleine positive Größe $\vartheta$. Wir setzen $z_1 = a + \varepsilon$, und sehen zu, ob wir für ein $\varepsilon$, welches mit $\vartheta$ in einer noch zu bestimmenden Weise verschwindet, den Gleichungen genügen können. Die erste auf $z_1$ bezügliche Gleichung wird dann lauten

$$\frac{1}{a-z_2} + \frac{1}{a-z_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{a-z_k} + \lim \frac{\vartheta}{\varepsilon} + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{a-b} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{a-c} + (\varepsilon) = 0,$$

wobei $(\varepsilon)$ eine Grösse bedeutet, die mit $\varepsilon$ wenigstens in der ersten Potenz verschwindet. Wir sehen, dass wir der ersten Gleichung thatsächlich durch ein verschwindendes $\varepsilon$ genügen können, wenn wir nur den Punkt $z_1$ für $\lim \frac{1}{2}(1-\alpha) = 0$ mit solcher Geschwindigkeit nach $a$ hineinrücken lassen, dass

$$\lim \frac{\vartheta}{\varepsilon} = -\frac{1}{a-z_2} - \frac{1}{a-z_3} - \cdots - \frac{1}{a-z_k} - \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{a-b} - \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{a-c}$$

ist. Also

<u>Die erste Gleichung bleibt richtig, wenn wir nur für $\lim \alpha = 1$ den Punkt $z_1$ mit einer bestimmten Geschwindigkeit in den Punkt $a$ hineinrücken lassen.</u>

Die übrigen Gleichungen gehen nun für $\lim \alpha = 1$, $\lim z_1 = a$ in die folgenden über:

$$\frac{1}{z_i-z_2} + \frac{1}{z_i-z_3} + \cdots + \frac{1}{z_i-z_k} + \frac{1}{z_i-a} + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{z_i-b} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{z_i-c} = 0.$$

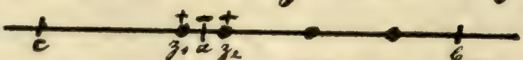
Diese $k-1$ Gleichungen für die übrigen Wurzelpunkte von $E_k$ sind aber nichts anderes als die Gleichungen für die Wurzelpunkte des $E_{k-1}$ im Falle $\alpha = -1$, $\beta = \beta$, $\gamma = \gamma$. Dies ist aber wieder ein Stieltjes'scher Fall; also liegen die $z_2, z_3 \dots z_k$ thatsächlich sämtlich im Intervall $a\,b$. Wir haben also das folgende Resultat, welches in der Lagebestimmung der nicht nach $a$ gerückten Wurzelpunkte über die Angaben der vorigen Stunde hinausgeht:

Wird $\alpha = 1$, so rückt ein Wurzelpunkt des $E_k$ nach $a$, und die übrigen $k-1$ bleiben im Intervall $a\,b$ und bilden dort die 0-Stellen desjenigen $E_{k-1}$, welches dem Werte $\alpha = -1$ entspricht.

Wird nun $\alpha > 1$, so entsteht im Punkt $a$ eine schwache Anziehung. Der Punkt $z_1$ wird eine labile Gleichgewichtslage in dem Intervall $a\,c$ finden, dessen beide Enden anziehend auf ihn wirken, er wird aber immer noch mehr in der Nähe von $a$ bleiben, da dieser Punkt eine geringere Masse als $c$ hat. Der Punkt $z_2$ wird im Intervall $a\,b$ jetzt näher an $a$ heranrücken, da die abstossende Wirkung des Punktes $z_1$ einerseits durch dessen Verschiebung

nach links, anderer-seits durch die schwache Anziehung des Punktes a verringert ist. Immer aber wird die Abstossung des Punktes $z_1$ die Anziehung des Punktes a nach ingenügendem Masse überwiegen, um ein vollständiges Heranrücken von $z_2$ an a zu verhindern.

Nun werde $\alpha = 2$, die Masse des Punktes a also $= -\frac{1}{2}$. Da wird die Anziehung des Punktes a auf den Punkt $z_2$ so gross, dass auch die Nähe des Punktes $z_1$ nicht mehr verhindern kann, dass $z_2$ nach a heranrückt; dadurch wird aber auch die van a auf $z_1$ ausgeübte Anziehung so verringert, dass $z_1$ ebenfalls ganz an a herangehen muss, um nicht von dem




Punkte c weggerissen zu werden. In der That werden wir unserm Gleichungssystem für lim $\alpha = 2$ Genüge leisten können, indem wir $z_1$ und $z_2$ in gewisser Weise gleichzeitig in a hineinrücken lassen.

Es werde $\alpha = 2$, also $\frac{1}{2}(1-\alpha) = -\frac{1}{2}$ gesetzt; dann lauten die ersten beiden Gleichungen, wenn man $z_1$ und $z_2$ beide nahe an a annimmt etwa $z_1 = a - \varepsilon_1 \quad z_2 = a + \varepsilon_2$, und wenn man kleine Grössen von der Ordnung $\varepsilon_1$ bezw. $\varepsilon_2$ vernachlässigt:

$$\frac{1}{a-z_3} + \cdots + \frac{1}{a-z_k} + \left(-\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\right) + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{a-b} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{a-c} = 0,$$

$$\frac{1}{a-z_3} + \cdots + \frac{1}{a-z_k} + \left(+\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} - \frac{1}{2\varepsilon_2}\right) + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{a-b} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{a-c} = 0.$$

Hieraus ergibt sich, dass bis auf Grössen höherer Ordnung, zu deren Bestimmung als Function des Exponenten $\alpha$ man auch die vernachlässigten Glieder berücksichtigen müsste,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

zu setzen ist. Also

<u>Die Punkte $z_1$ und $z_2$ sollen von den beiden Seiten her mit gleicher Geschwindigkeit in den Punkt $a$ hineinrücken.</u>

Die weiteren Gleichungen lauten dann:

$$\frac{1}{z_i-z_3} + \cdots + \frac{1}{z_i-z_k} + \frac{\frac{3}{2}}{z_i-a} + \frac{\frac{1}{2}(1-\beta)}{z_i-b} + \frac{\frac{1}{2}(1-\gamma)}{z_i-c} = 0,$$

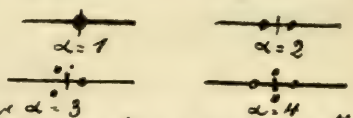
$$(i = 3, 4, \ldots k).$$

Das ist aber nichts anderes, als das Gleichungssystem für die 0-Stellen des $E_{k-2}$ im Stieltjes'schen Falle $\alpha = -2$, $\beta = \beta$, $\gamma = \gamma$.

Folglich haben wir den Satz:

Wird $\alpha = 2$, so bekommen wir eine Gleichgewichtslage, wenn wir zwei Wurzeln in den Punkt a hineinlegen und die übrigen $k-2$ im mittleren Intervall so arrangiren, wie es der Annahme $\alpha = -2, \beta = \beta, \gamma = \gamma$ nach Stieltjes entspricht.

Für $\alpha = 3, 4, \dots$ hat man die genau entsprechenden Überlegungen anzustellen; man findet, dass für $\alpha = 3$ 3 Punkte, für $\alpha = 4$ 4 Punkte u. s. w. im Punkte a zusammenrücken und zwar so dass sie in der complexen Ebene die Ecken eines regulären Polygons mit dem Centrum a bilden.




Die restierenden $k-3$, $k-4$, ... Punkte, bilden jedesmal die Gleichgewichtslage für $\alpha = 3, \beta = \beta, \gamma = \gamma$, resp. $\alpha = -4$, $\beta = \beta, \gamma = \gamma$, etc. Auf solche Weise finden unsere obigen Angaben sämtlich ihre Bestätigung resp. Verallgemeinerung.

d. 18/6.94.] Wendet man das Verfahren der letzten Stunde in der Weise an, dass man nicht nur $\alpha$, sondern nachher auch $\beta$ von einem echten Bruch bis zu einem beliebigen Werte anwachsen lässt, so findet man, wenn man mit $\gamma$ den grössten Winkel bezeichnet für die Anzahl der Wurzeln in den einzelnen Intervallen folgende Werte:

Wenn $\gamma \geqq \alpha + \beta - 1$ ist:

im Intervall $ab$ $\quad k - E(\alpha) - E(\beta)$,

" " $ac$ $\quad$ 0 oder 1, je nachdem $E(\alpha)$ gerade oder ungerade ist,

" " $bc$ $\quad$ 0 " 1, " " $E(\beta)$ " " " ".

dagegen für $\gamma < \alpha + \beta - 1$:

im Intervall $ab$ $\quad$ 0 oder 1, je nachdem $k + E(\alpha) + E(\beta)$ " " " ",

" " $ac$ $\quad$ 0 " 1, " " $k + E(\alpha) + E(\gamma)$ " " " ",

" " $bc$ $\quad$ 0 " 1, " " $k + E(\beta) + E(\gamma)$ " " " ".

Ist eine der Zahlen, etwa $\alpha < 0$, und $\beta < \gamma$, so hat man

im Intervall $ab$ $\quad k - E(\beta)$,

" " $ac$ $\quad 0$ ,

" " $bc$ $\quad$ 0 oder 1, je nachdem $E(\beta)$ gerade oder ungerade ist.

Diese Angaben gelten für nicht ganzzahlige $\alpha, \beta, \gamma$. Ist dagegen eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma$ eine positive ganze Zahl, so können sich in der betreffenden Ecke so viele Wurzeln vereinigen, als der Exponent angibt. Wir verfolgen das nicht genauer.

Wir stellen aber folgende Frage: Wenn wir die Anzahl $\varrho$ der Wurzeln eines Polynoms $E$ in einem Intervall, etwa in $ab$ kennen, wenn wir ferner die Winkel $\alpha$ und $\beta$ kennen, kön=

nen wir dann den Grad $k$ des Polynoms und den dritten Exponenten $\gamma$ angeben?

Wenn wir von dem Falle absehen, wo einer der beiden gegebenen oder beide Winkel negativ sind, so zeigt ein Blick auf unsere Tabelle:

Wenn die Anzahl der Wurzeln im Intervall $ab$ größer als 1 ist, dann kann man bestimmt sagen, welchen Wert $k$ bezw. $\gamma$ besitzt, nämlich

$$k = \varrho + E(\alpha) + E(\beta), \quad \gamma = 2\varrho + 1 + 2E(\alpha) + 2E(\beta) - \alpha - \beta.$$

Wenn aber $\varrho$ auf 1 oder 0 herabsinkt, dann sind allgemein zu reden mehrere Werte von $k$ beziehungsweise $\gamma$ zulässig.

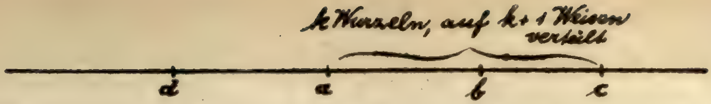
Ein geradliniges Dreieck ist daher durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel im Allgemeinen nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Seite mindestens 2 mal durchs Unendliche zieht.

Dies noch als Ergänzung zur vorigen Stunde.

Heute wollen wir in entsprechender Weise den Fall von 4 Punkten $a\ b\ c\ d$ mit den Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ behandeln.

Der Stieltjes'sche Fall liegt vor, wenn etwa $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma < 1$, also $\delta = 2k + 2 - \alpha - \beta - \gamma$ im Allgemeinen $> 1$ ist, wenigstens für $k \geqq 1$.

Dann liegen alle Wurzeln



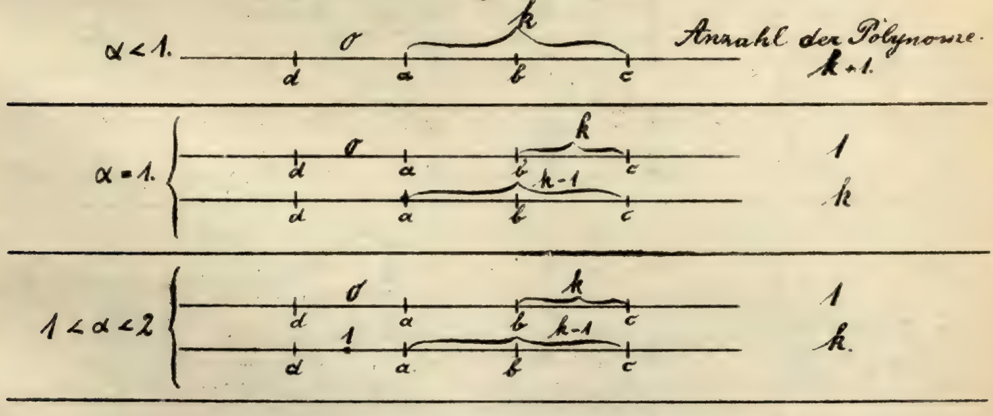

der $k+1$ existirenden Polynome in den beiden Intervallen $ab$ und $bc$, und zwar so, daß jeder möglichen Verteilungsweise ein Polynom entspricht. Nun wollen wir von dem Stieltjes'schen Fall auf folgende Weise zu allgemeinen Fällen aufsteigen: Wir halten einmal $\beta$ und $\gamma$ fest, und lassen $\alpha$ wachsen unter gleichzeitiger Abnahme des $\delta$, oder wir halten $\alpha$ und $\beta$ fest und lassen $\gamma$ wachsen. Beides wird natürlich ganz entsprechende Resultate ergeben, nur mit Vertauschung von $\alpha$ und $\gamma$, so daß wir nur die eine Art der Änderung ausführlich zu betrachten brauchen. Dagegen ganz anders geartet wird die Veränderung der Polynome sein, wenn wir $\alpha$ und $\gamma$ festhalten, und $\beta$ wachsen lassen.

Heute möge $\beta$ und $\gamma$ festgehalten werden, und $\alpha$ möge nach und nach von einem echten Bruch als Anfangswert beginnend über 1, 2, 3, u. s. w. hinaus zunehmen, natürlich unter entsprechender Abnahme des $\delta$.

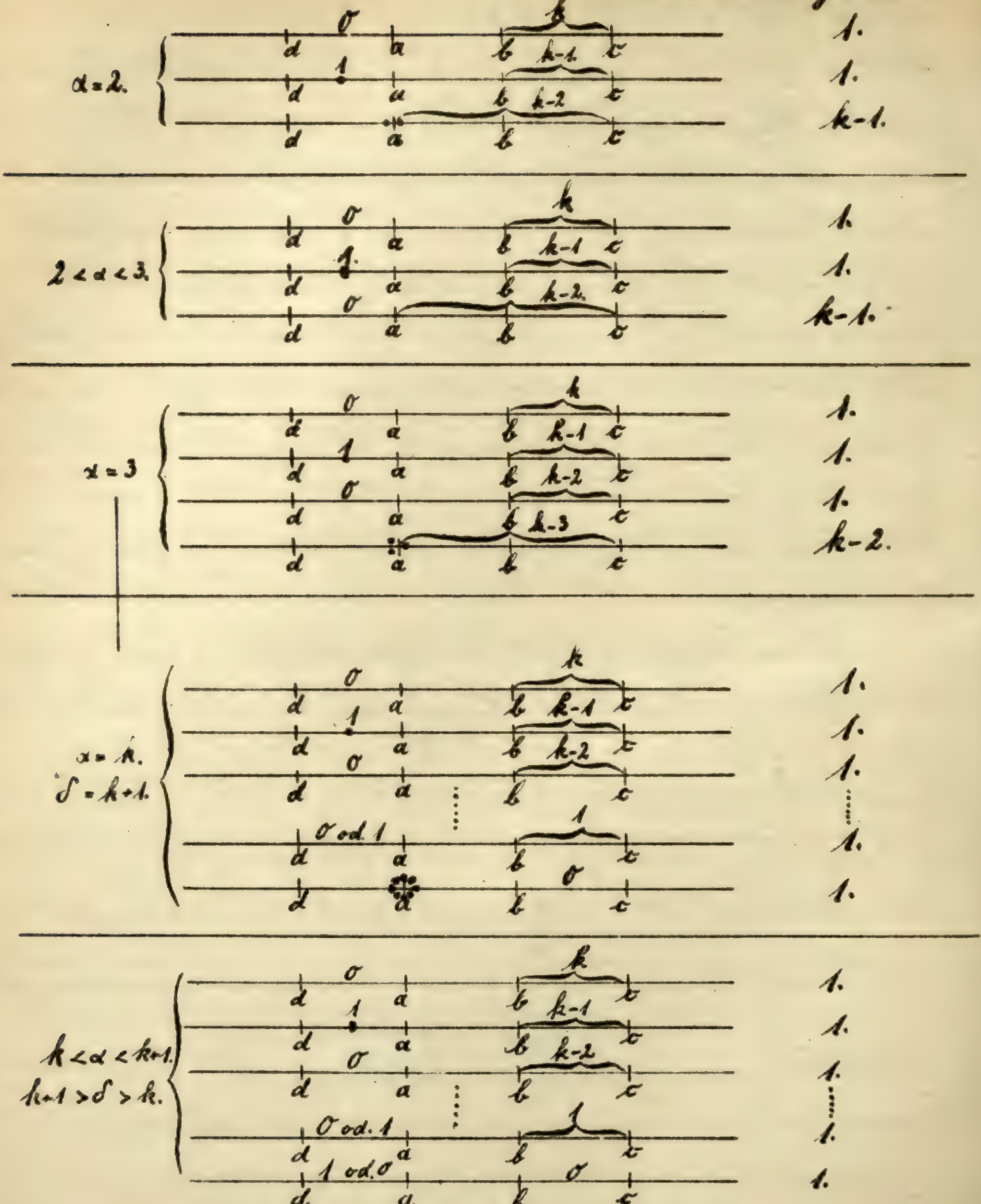
Es zeigt sich, daß für $\alpha = 1$ von denjenigen

Pólynomen, welche noch Wurzelpunkte im Intervale $ab$ haben, ein Wurzelpunkt nach $a$ rückt, dass dagegen das eine Pólynom, dessen Wurzelpunkte sämtlich in $bc$ liegen, qualitativ ganz ungeändert bleibt. Dieses Pólynom bleibt auch weiterhin ungeändert. Für $\alpha > 1$ rückt der in $a$ liegende Wurzelpunkt der übrigen $k$ Pólynome über $a$ hinaus in das Intervall $da$. Für $\alpha = 2$ bleibt nun wieder ausser dem schon vorhin ungeändert gebliebenen Pólynom ein weiteres Pólynom ungeändert, nämlich dasjenige, welches in $ab$ keine Wurzelpunkte hat; bei den übrigen $k-1$ Pólynomen wird der in $da$ liegende Wurzelpunkt und ein Wurzelpunkt aus dem Intervall $ab$ nach $a$ herangezogen, und für $\alpha > 2$ werden beide imaginär. Allgemein spaltet sich jedesmal, wenn $\alpha$ eine ganze Zahl wird, ein weiteres Pólynom ab, um weiterhin, was die Anordnung seiner Wurzeln betrifft, sich nicht mehr zu ändern, und bei den übrigen Pólynomen werden $\alpha$ Wurzeln entweder eine aus $ab$, die übrigen aus dem Complexen, oder eine aus $da$, eine aus $ab$, die übrigen aus dem Complexen in $a$ zusammengezogen. So geht es, bis $\alpha = k$, $\delta = k+1$ geworden ist. Dann wird $\alpha = k+1$, $\delta = k$ und es kehrt sich derselbe Vorgang in der Weise um, daß nun wieder alle Wurzeln durch $d$ hindurchgehend nach und nach in das Intervall $cd$ hineinwandern, welches jetzt mit $bc$ zusammen „inneres Intervall" geworden ist, wie es erst $ab$ mit $bc$ war. Schließlich kommt man wieder zum Stieltjes'schen Fall zurück, nur daß dann alle Wurzeln in $bc$ und $cd$ liegen, statt wie zuerst, in $ab$ und $bc$. Von da ab bleibt die Anordnung ganz ungeändert.

Man bekommt so der Reihe nach folgende schematischen Figuren von $\alpha < 1$ bis $\alpha = k$:



Anzahl der Polynome:

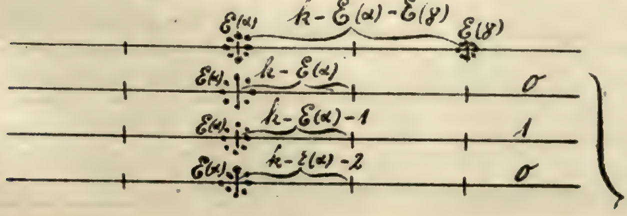


Die aus den Intervallen verschwindenden Wurzeln werden jedesmal paarweise conjugirt imaginär; wir haben also den Satz:

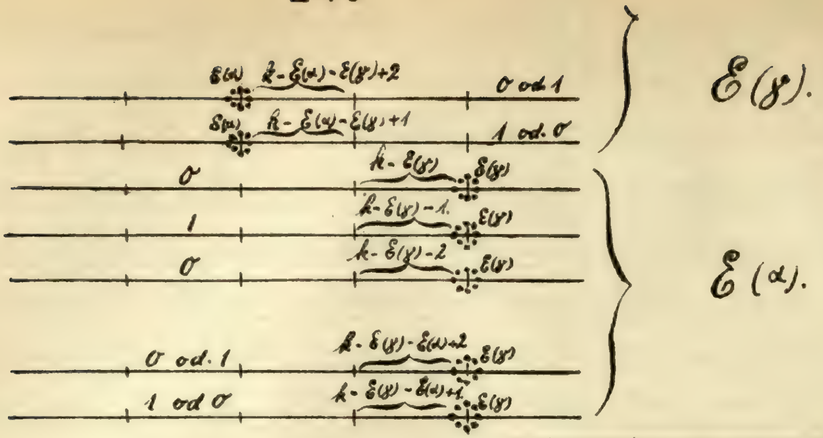
<u>Wenn $\alpha$ wächst, aber $\beta$ und $\gamma$ ungeändert bleiben, so bleiben alle Polynome $E_k$ reell, behalten aber nicht mehr lauter reelle Wurzeln. Ist insbesondere $\alpha$ eine ganze Zahl kleiner als $k+1$, so gibt es $k+1-\alpha$ Polynome, welche den Punkt $a$ zur $\alpha$-fachen Wurzel haben, und $\alpha$ Polynome, welche den Punkt $a$ überhaupt nicht zur Wurzel haben.</u>

Statt $\alpha$ könnten wir geradesogut $\gamma$ wachsen lassen. Was geschieht nun aber, wenn wir $\alpha$ und $\gamma$ gleichzeitig wachsen lassen?

Wir wollen nur den Fall betrachten, dass $\alpha+\gamma \leqq k$ bleibt, $\delta$ also $\geqq k+1$ (wegen $\beta < 1$). Lassen wir $\alpha$ und $\gamma$ zunächst nur bis $E(\alpha)$, $E(\gamma)$ wachsen, so bekommt man folgende Tabelle, aus der die Tabelle für $\alpha$, $\gamma$ selbst durch Auflösung der in $a$ bezw $c$ liegenden vielfachen Punkte hervorgeht.




Anzahl: $k - E(\alpha) - E(\gamma) + 1$




Gesamtzahl: $k+1$.

Also:

Ändert sich $\alpha$ und $\gamma$ gleichzeitig, bleibt aber $\alpha+\gamma \leqq k$, so lassen sich $k+1$ reelle Polynome mit bestimmter Wurzelverteilung sofort nachweisen.

Den Fall $\alpha+\gamma > k$ wollen wir bei Seite lassen.

Wir gehen nun dazu über die Änderung der Polynome unter der Voraussetzung zu betrachten, daß $\alpha$ und $\gamma$ festgehalten, dagegen $\beta$ vergrößert, $\delta$ entsprechend verkleinert werde. Man wird von vornherein sagen können:

Wenn wir $\alpha$ und $\gamma$ innerhalb der Stieltjes'schen Grenzen festhalten und $\beta$ wachsen lassen, so werden die bisherigen Theoreme, soweit sie allgemeine algebraische Verhältnisse betreffen, jedenfalls wiederkehren müssen; die Theoreme aber, welche sich auf die Realität der Polynome und ihrer Wurzeln beziehen, können möglicherweise eine Modification erfahren.

Zu den Theoremen der ersten Art, welche von der Aufeinanderfolge der 4 Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unabhängig sein müssen, gehört z. B. der Satz, der sich einfach von $\alpha$ auf $\beta$ überträgt, dass, wenn $\beta$ eine ganze Zahl $< k+1$ ist, immer $k+1-\beta$ Polynome den Punkt $b$ als $\beta$ fachen 0 Punkt haben, die übrigen $\beta$ Polynome aber daselbst überhaupt nicht verschwinden.

Di. d. 19. Juni 1894.] Es möge z. B. $\alpha < 1$, $\gamma < 1$, dagegen $\beta = 1$ sein. Dann muss nach dem letzten Satz der vorigen Stunde ein $E_k$ existiren, welches in $b$ nicht verschwindet, und die übrigen $k$ Polynome $E_k$ müssen in $b$ je eine einfache 0-Stelle haben.

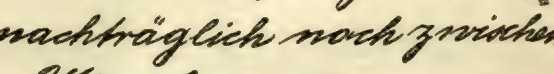
Gehen wir auf die Stieltjes'sche mechanische Deutung zurück, so würden wir also für das ausgezeichnete, in $b$ nichtverschwindende Polynom in $a$ die positive Masse $\frac{1-\alpha}{2}$, in $c$ die positive Masse $\frac{1-\gamma}{2}$ und in $b$ die Masse $\frac{1-\beta}{2}$, d. h. keine Masse anzubringen haben. Der

Punkt $b$ ist also für das ausgezeichnete Polynom gar kein singulärer Punkt, und es liegt also nur der schon besprochene Fall dreier singulären Punkte $a, c, d$ mit Exponenten $\alpha < 1$, $\gamma < 1$, $\delta = 2k + 1 - \alpha - \gamma$ vor. Da dies ein Stieltjes'scher Fall ist, so können wir sofort den Satz aussprechen.

<u>Das isolirte Polynom $E_k$ hat in dem Intervall $a$ bis $c$ $k$ Wurzeln, welche sich irgendwie auf die Teilintervalle $ab$, $bc$ verteilen.</u>

Offenbar können wir über die Verteilung derselben auf $ab$, $bc$ gar nichts bestimmtes aussagen, da ja die Lage der Wurzeln von der Lage des Punktes $b$, der in ihren Bestimmungsgleichungen gar nicht vorkommt, ganz unabhängig ist und also $b$ nachträglich noch zwischen zwei ganz beliebigen Wurzeln angenommen werden kann.

Es mögen allgemein etwa $i$ Wurzeln des isolirten Polynoms in $bc$, $k-i$ Wurzeln in $ab$ liegen; $i$ kann



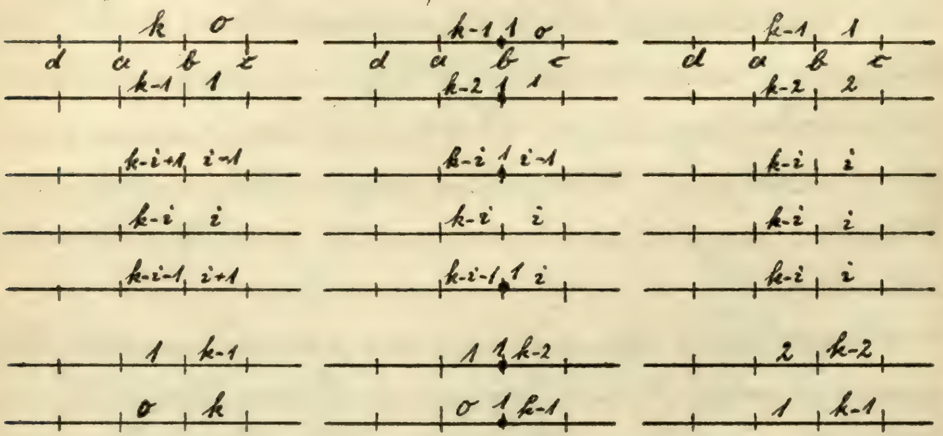

je nach dem Werte des Doppelverhältnisses der 4 Punkte $a, b, c, d$ jeden Wert von $0$ bis $k$ bedeuten; wir nehmen es, der Bestimmtheit halber, $> 0$.

Von den k übrigen Polynomen wissen wir, dass sie eine Wurzel in b haben. Es ist also nur noch die Gleichgewichtslage von k-1 Punkten mit der Masse 1 zwischen folgenden festen Punkten zu bestimmen: a mit der positiven Masse $\frac{1-\alpha}{2}$, b mit der positiven Masse 1 – wegen des von vornherein dort anzunehmenden festen Wurzelpunktes –, c mit der positiven Masse $\frac{1-\gamma}{2}$, und d mit der negativen Masse $-(k+1-\frac{\alpha+\gamma}{2})$.

Das ist aber nichts anderes, als die Bestimmung der Wurzelpunkte eines $E_{k-1}$, wenn die Exponenten $\alpha=\alpha, \beta=-1, \gamma=\gamma, \delta=2k+3-\alpha-\gamma$ sind, d.h. in einem Stieltjesschen Falle. Wir bekommen also noch k Polynome, welche alle eine Wurzel in b haben, während die k-1 übrigen Wurzeln auf alle möglichen Weisen auf die Intervalle ab, bc verteilt sind.

Vergleicht man die so gewonnenen Schemata der k+1 Polynome $E_k$ des Falles $\beta=1$ mit den entsprechenden Polynomen des Falles $\beta<1$, (folgende Seite), so sieht man, dass das $(i+1)$-te Polynom mit der Verteilung $k-i, i$ ungeändert geblieben ist, dass bei den vorhergehenden immer eine Wurzel aus dem Intervall $ab$ nach $b$ gerückt ist, bei den nachfolgenden dagegen eine Wurzel aus $bc$ nach $b$ gefallen ist. Läßt man dann diese Wurzel noch über $b$ hinaus bei den ersten Polynomen ins Intervall $bc$, bei den letzten ins Intervall $ab$ hinein wandern, so bekommt man die Schemata für $\beta > 1$. In folgenden Figuren sind die so entstehenden Wurzelverteilungen für $\beta < 1$, $\beta = 1$, $\beta > 1$ nebeneinandergestellt.

$\beta < 1.$ $\quad$ $\beta = 1.$ $\quad$ $1 < \beta < 2.$




Wir sehen hieraus:

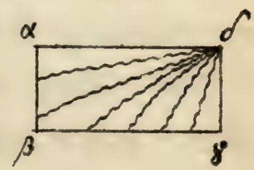
<u>Sobald $\beta$ den Wert 1 überschreitet, finden sich nur noch $k-1$ Verteilungsweisen der Wurzeln</u>

vor und darunter eine Verteilungsweise 3 mal (nämlich $k-i, i$).

Indem jetzt 3 Polynome $E_k$ von derselben Wurzelverteilung vorliegen, ist die Möglichkeit gegeben, dass zwei Polynome zusammenfallen und imaginär werden, womit ein neues Moment in die Sache hineinkommt, dessen Tragweite wir nicht zu überblicken vermögen.

Wir wollen dies daher nicht weiter verfolgen, sondern wollen vielmehr die gemachten Angaben durch die Betrachtung der zugehörigen Vierecke bestätigen. Wir betrachten vor Allem die Fälle von Stieltjes.

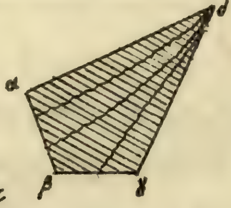
Es möge zuerst $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 2k + \frac{1}{2}$ sein. Wir erhalten das Viereck aus dem Viereck $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$, d. h. aus einem gewöhnlichen Rechteck durch polare Anhängung von $k$ Halbebenen an die Ecke $\delta$:



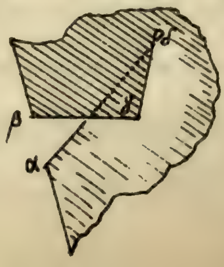

und zwar kann man jede dieser Halbebenen entweder durch die Gerade $\alpha\beta$ begrenzen –, wodurch ein Wurzelpunkt des $E$ im Intervall $ab$ entsteht – oder durch die Gerade $\beta\gamma$ – wodurch wir einen Wurzelpunkt im Intervall $bc$ erhalten. Es sind das gerade $k+1$ Möglichkeiten, jede einem Polynom $E_k$ entsprechend. Also:

Die Polygone, welche den $k+1$ verschiedenen $E_k$ entsprechen, die es gibt, ergeben sich jedes aus einem gewöhnlichen Rechteck $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{2}$, indem wir von der Ecke $\delta$ aus $k$ Halbebenen polar einhängen, wobei uns freisteht, beliebig viele dieser Halbebenen durch die verticale Kante $\alpha\beta$ beziehungsweise durch die horizontale Kante $\beta\gamma$ begrenzen zu lassen, was gerade $k+1$ Möglichkeiten sind.

Lassen wir nun $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ jedes um einen kleinen Betrag wachsen, so bleibt der Character der Figur vorerst derselbe.

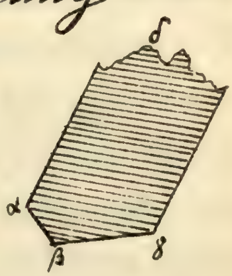



Die Anhängungen von Halbebenen sind in derselben Anordnung vorzunehmen. Aber es ist nicht mehr nötig, daſs *jedes* Viereck mit $k>0$ aus einem Viereck $k=0$ durch solche polare Anhängungen abzuleiten ist. Es kann z. B. ein Viereck $k=1$ eventuell auch die Gestalt des in nebenstehender



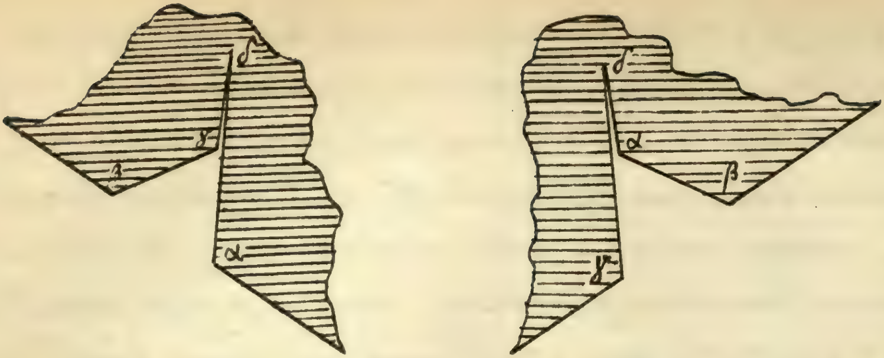
Figur gezeichneten Vierecks haben, welches nur aus einem überschlagenen Viereck abzuleiten wäre. Dann wird es nur notwendig, statt von dem Viereck $k=0$ von dem Viereck $k=1$ mit seinen schon mannigfacheren Gestalten auszugehen, um die höheren Vierecke durch polare Einhängung von Halbebenen abzuleiten. Immer sieht man aber, daſs der Proceſs der Einhängung keine Schwierigkeiten bietet.

Im Beispiel $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}$ bekommen wir für $k=0$ ein Viereck mit logarithmischer Ecke im Unendlichen. An dieses können wir von der Ecke $\delta$ aus überhaupt keine Halbebenen einhängen.




Wir müssen also auch in diesem Falle die Vierecke für $k=1$ selbstständig construiren, um von ihnen aus dann zu den höheren Vierecken aufzusteigen. Die Sache gestaltet sich folgendermaſsen:

Für $k=1$ liegen zwei Wurzelverteilungen vor, nämlich $(1,0)$ und $(0,1)$. Diesen beiden entsprechen folgende beiden Vierecke:




Wollen wir nun aber von diesen beiden Vierecken aus ein solches für $k > 1$ herstellen, so zeigt sich, dass zwar der Einhängung von Halbebenen nach $\alpha\beta$ hinüber, wie nach $\beta\gamma$ hinüber nichts im Wege steht; aber es tritt folgende Schwierigkeit ein: Wollen wir das Viereck construiren, welches einer Wurzelvertheilung $(k_1, k_2)$ entspricht, so wissen wir nicht, ob wir dasselbe aus einem Viereck des Typus 1) durch Einhängung von $k_1 - 1$ Halbebenen nach $\alpha\beta$, und von $k_2$ Halbebenen nach $\beta\gamma$ hinüber, oder aus einem Viereck des Typus 2) durch Einhängung von $k_1$ Halbebenen nach $\alpha\beta$ und von $k_2 - 1$ Halbebenen nach $\beta\gamma$ herstellen sollen. Nur wenn $k_2 = 0$ ist, wissen wir, dass wir vom Typus 1) auszugehen haben;

und wenn $k_1 = 0$ ist, daß der Typus 2) zu benutzen ist. Diese Unbestimmtheit der Gestalt hat folgenden Grund:

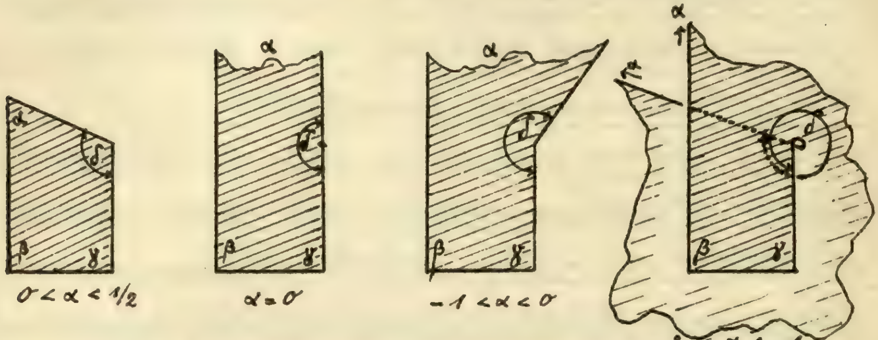
Unsere 4-Ecke sind durch die Angabe ihrer Winkel und die Anzahl der Durchgänge durch $\infty$ doch nur insoweit definiert, als die Verzweigungsstellen $a, b, c, d$ auf der $X$-Axe gegeben sind. Betrachten wir diese letzteren selbst als veränderlich, so kommt noch ein reeller Parameter in die Figuren hinein, das Doppelverhältnis der $a, b, c, d$. Von dem Werte dieses Doppelverhältnisses wird es abhängen, ob bei dem einzelnen Eck das Stück $\gamma\delta$ länger oder kürzer als $\alpha\delta$ ist, ob also das entsprechende Polygon dem einen unserer beiden Typen zuzuordnen ist, oder dem andern.

Wenn wir die Winkel innerhalb der Stieltjesschen Gränze noch weiter wachsen lassen, werden die Gestalten der Vierecke noch mannigfaltiger. Wir werden das nicht weiter verfolgen.

Ich will nur noch angeben, welchen Character die Figuren für negative Winkel bekommen. Es zeigt sich:

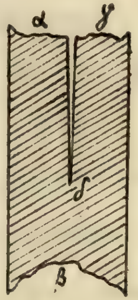
Indem wir $\alpha, \beta, \gamma$ abnehmen und negativ werden lassen, vereinfachen sich unsere Figuren.

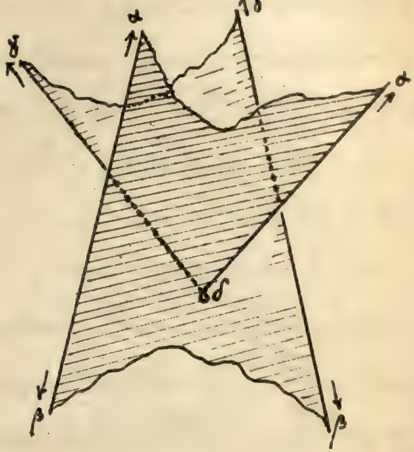
Es sei z. B. $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, und $\alpha$ nehme ab. Man bekommt dann etwa folgende Figuren:




Die polare Einhängung (von $\delta$ aus) ist in jeder dieser Figuren sowohl nach $\alpha\beta$ wie nach $\beta\gamma$ möglich, und die Anzahl der Einhängungen nach jeder dieser Seiten liefert die Anzahl der Wurzelpunkte im Intervall $ab$ bezw. $bc$. Hieran wird offenbar nichts geändert, wenn man $\alpha$ beliebig weit ins negative wachsen läßt, d. h. den Schenkel $\delta\alpha$ der letzten Figur immer weiter dreht. Die Einfachheit der Figur liegt darin, daß hierbei die Ecken $\alpha$, $\delta$ selbst ganz ungeändert bleiben.

Es mögen noch das Viereck $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 2$, und ein Viereck mit durchaus negativen Winkeln Platz finden. (Folg. Seite) Bei beiden ist Anhängung von Halbebenen sowohl nach $\alpha\beta$ wie $\beta\gamma$ unbeschränkt gestattet. Hier tritt die erwähnte Einfachheit in noch höherem Grade hervor. Man kann nämlich bei diesen Polygonen alle Seiten beliebig weiter drehen, alle Winkel beliebig nach der negativen Seite vergrößern, ohne daß die Ecken (von denen 3 im Unendlichen liegen) ihre Lage ändern.




Do. d. 21. Juni 1894.] Es sollen nur noch die Vierecksfiguren für den Fall angegeben werden, daß $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2} + E(\alpha)$, $\gamma = \frac{1}{2} + E(\gamma)$, also $\delta = 2k + \frac{1}{2} - E(\alpha) - E(\gamma)$ ist. Dabei nehmen wir $\delta > \alpha + \beta$ an.

Zunächst als Schemata für die Wurzelverteilungen folgen aus den Figuren auf S. 239 die folgenden:

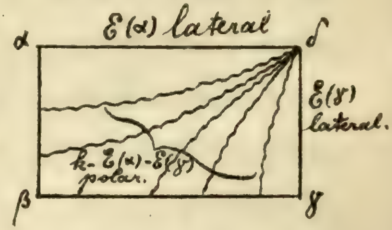
I). $d=\infty \xleftarrow{E(\alpha)-2E(\frac{\alpha}{2})} \overbrace{a \text{———} b \text{———} c}^{k-E(\alpha)-E(\gamma)} \xrightarrow{E(\gamma)-2E(\frac{\gamma}{2})} d=\infty$ $\quad k - E(\alpha) - E(\gamma) + 1$ Fälle.

II). $d=\infty \xleftarrow{E(\alpha)-2E(\frac{\alpha}{2})} a \overset{k-E(\alpha)-\sigma}{\text{———}} b \overset{\sigma}{\text{———}} c \xrightarrow{\sigma-2E(\frac{\gamma}{2})} d=\infty$ $\quad E(\gamma)$ Fälle, (für $\sigma = 0, 1, \ldots, E(\gamma)-1$).

III) $d=\infty \xleftarrow{\tau - 2\mathcal{E}(\frac{\tau}{2})} a \xrightarrow{\sigma} b \xrightarrow{k-\mathcal{E}(\gamma)-\tau} c \xrightarrow{\mathcal{E}(\gamma)-2\mathcal{E}(\frac{\gamma}{2})} d=\infty$ $\quad \mathcal{E}(\alpha)$ Fälle (für $\tau = 0, 1, \dots, \mathcal{E}(\alpha)-1$)

Die Zahl der Wurzeln in den äußeren Intervallen da und cd ist 0 oder 1, z. B. in ad der Fig. I gleich 0, wenn $\mathcal{E}(\alpha)$ eine gerade Zahl ist, $=1$, wenn $\mathcal{E}(\alpha)$ eine ungerade Zahl ist, in Uebereinstimmung mit dem Werte des Ausdrucks $\mathcal{E}(\alpha) - 2\mathcal{E}(\frac{\alpha}{2})$. Die Zahl der complexen Wurzeln ist in I): $2\left(\mathcal{E}(\frac{\alpha}{2}) + \mathcal{E}(\frac{\gamma}{2})\right)$, in II): $2\left(\mathcal{E}(\frac{\alpha}{2}) + \mathcal{E}(\frac{\sigma}{2})\right)$, in III) $2\left(\mathcal{E}(\frac{\tau}{2}) + \mathcal{E}(\frac{\gamma}{2})\right)$.

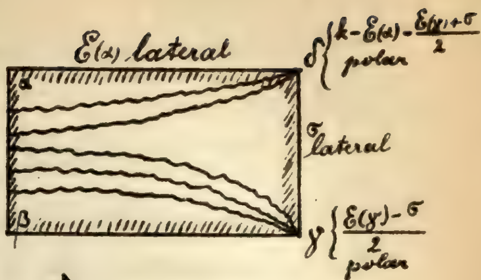
Das Viereck zu I) entsteht aus einem gewöhnlichen Rechteck indem man an $\alpha\delta$ $\mathcal{E}(\alpha)$ Halbebenen, an $\gamma\delta$ $\mathcal{E}(\gamma)$ Halbebenen lateral anhängt, und indem man darauf von $\delta$ aus nach $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ in jeder möglichen Verteilung auf diese beiden Seiten zusammen $k-\mathcal{E}(\alpha)-\mathcal{E}(\gamma)$ Halbebenen polar anhängt.



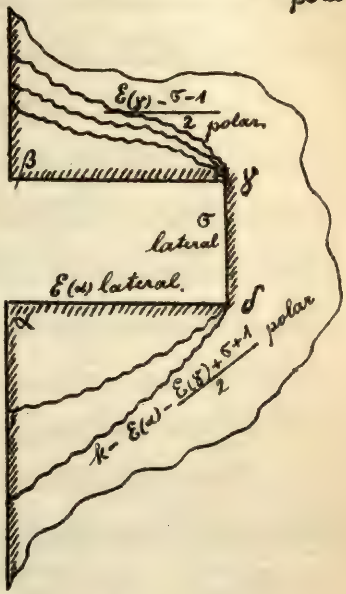

Bei II (und analog bei III, wo nur die Rolle von $\alpha$ und $\gamma$ vertauscht ist) sind 2 Fälle zu unterscheiden, nämlich ob

a) $\mathcal{E}(\gamma)+\sigma$ eine gerade Zahl oder b) $\mathcal{E}(\gamma)+\sigma$ eine ungerade Zahl ist.

Im Falle a) erhält man das Viereck aus einem




gewöhnlichen Rechteck, indem man zuerst an die Seite $(\alpha\delta)$ $E(\alpha)$, an die Seite $(\beta\delta)$ $\sigma$ Halbebene lateral, dann von $\delta$ nach $\alpha\beta$: $k - E(\alpha) - \frac{E(\gamma)+\sigma}{2}$ Halbebenen, u. von $\gamma$ nach $\alpha\beta$ $\frac{E(\gamma)-\sigma}{2}$ Halbebenen polar anhängt.




Im Falle C) jedoch muss man von einem Viereck mit den Winkeln $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ ausgehen, und an $\alpha\delta$ $E(\alpha)$, an $\gamma\delta$ $\sigma$ Halbebenen lateral, dann von $\delta$ nach $\alpha\beta$ $k - E(\alpha) - \frac{E(\gamma+\sigma+1)}{2}$ und von $\gamma$ nach $\alpha\beta$ $\frac{E(\gamma)-\sigma-1}{2}$ Halbebenen polar anhängen.

Mit diesen Figuren will ich abschliessen, was ich überhaupt über die Lamé'schen Polynome sagen wollte. Nur noch eine kurze Bemerkung über die *Verallgemeinerung der Lamé'schen Fragestellung auf Differentialgleichungen höherer Ordnung* finde hier Platz.

Wir waren ja von der homogenen Differentialgleichung

$$(\Pi, \overset{n}{\varphi})_2 + (\Pi, \overset{n-2}{\psi})_1 + (\Pi, \overset{n-4}{\chi})_0 = 0$$

ausgegangen, indem wir fragten, wie man die Coefficienten in $\chi$ bestimmen müsse, damit man für $\Pi$ ein Polynom $\mathcal{E}_K(x_1, x_2)$ setzen kann. Wir bekamen ein ganz bestimmtes algebraisches Problem, über welches wir eine Reihe allgemeiner Sätze aufstellen konnten; sobald wir aber auf Realitätsfragen eingingen, bekamen unsere Untersuchungen jenen synthetischen Character, bei dem man Fall von Fall zu unterscheiden hat.

Nun denken wir uns die entsprechende Differentialgleichung $m$ter Ordnung:

$$(\Pi, \overset{n}{\varphi})_m + (\Pi, \overset{n-2}{\psi})_{m-1} + \cdots \quad + (\Pi, \overset{n-2m}{\omega})_0 = 0.$$

Da würden wir in analoger Weise fragen können, ob wir etwa die Coefficienten von $\omega$ so bestimmen können, dass man der Differentialgleichung durch ein Polynom $\mathcal{E}_K(x_1, x_2)$ Genüge leisten kann. Diese Frage ist in der That bereits behandelt, nämlich in noch etwas specialisirter Form von Hilbert in Math. Ann. 28. 1886: „Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiet", und dann in der schon erwähnten Arbeit von Wälsch. All' das sind algebraische Untersuchungen von algorithmischem Character.

Die verallgemeinerte Fragestellung hat nach Hilbert und Wälsch bei zahlreichen Fragen der Invariantentheorie und der projectiven Geometrie ihre gute Bedeutung. Man möchte wissen ob man hier ebensolche Realitätsbetrachtungen anknüpfen kann, wie im Falle $m=2$ geschehen ist.

Damit schließen wir überhaupt diesen ersten Teil unserer Vorlesung, in welchem wir wesentlich in Anschluß an den Begriff der Rationalitätsgruppe algebraische Fragen besprechen wollten.

Nunmehr im zweiten Teile werden wir unser Augenmerk auf die Monodromiegruppe richten, wobei wir überall zu speciellen Fragestellungen von durchaus synthetischem Character gelangen werden.

---

# III. Eigentlich-transcendente Untersuchungen.

## A. Das Oscillationstheorem
### (Gestalt des einzelnen Polygons).

Wir fragen allgemein, ob wir der Monodromiegruppe solche Eigenschaften auferlegen können, dass die Differentialgleichung dadurch bestimmt ist. Insbesondere bei den jetzt folgenden Betrachtungen handelt es sich um gestaltliche Eigentümlichkeiten des <u>einzelnen</u> Polygons, — etwa wie oft eine Seite sich überschlägt, —, während wir erst in einem weiteren Abschnitt mit Eigenschaften des ganzen Polygonnetzes uns beschäftigen werden, welches durch analytische Wiederholung des einzelnen Polygons entsteht, also z. B. verlangen werden, dass das Polygonnetz die Ebene nur einfach überdeckt.

Was nun das Oscillationstheorem betrifft, so ist dasselbe aus gewissen <u>physikalischen Betrachtungen</u> hervorgegangen, über die ich hier kurz referiren will.

Es sei $\varrho$ die Dichte, $s$ die Spannung einer transversal schwingenden Saite. Dieselbe sei längs der $x$-Axe ausgespannt, und der Ausschlag an einer Stelle sei $q$. $t$ sei die Zeit. Dann ist die Gestalt der Saite zu einer Zeit $t$ bekanntlich durch die Differentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = s . \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

bestimmt. Man betrachte nun insbesondere stehende harmonische Schwingungen, d. h. solche, wo alle Punkte der Saite gleichzeitig und gleichphasig je eine harmonische Schwingung ausführen. $q$ ist dann das Product aus einer Function $y$ von $x$ allein, und aus sin oder cos $\frac{2\pi t}{T}$, unter $T$ die Dauer der harmonischen Schwingung verstanden,

$$q(x, t) = y(x) \cdot \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Die Differentialgleichung für $q(x, t)$ verwandelt sich dann in eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für $y(x)$:

$$s \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \rho \cdot y = 0,$$

oder, indem wir den Coefficienten von $y$ zu einer Constanten $k$ zusammenfassen,

$$s . y'' + k y = 0.$$

Diese Gleichung gibt unmittelbar die Gestalt der Saite zur Zeit des größten Ausschlags. Die Gestalt zu einer beliebigen Zeit erhält man, indem man alle Ordinaten der Curve im Verhältnis $1 : \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ verkleinert, bezw. im Zeichen wechselt.

$\rho$ und $s$ sind hier Constanten, welche von vornherein fest angenommen sind, $\kappa$ ist ein ebenfalls constanter Parameter, dem man aber zunächst beliebige Werte geben kann.

Zwei particuläre Lösungen der Differentialgleichungen lauten

$$y_1 = \sin\sqrt{\frac{\kappa}{s}}\cdot x\ ;\quad y_2 = \cos\sqrt{\frac{\kappa}{s}}\cdot x.$$

Die 0-Punkte der ersten Lösung liegen an den Stellen $x = 2\nu\cdot\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\cdot\frac{\pi}{2}$, diejenigen der zweiten Lösung dagegen an $x = (2\nu+1)\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\cdot\frac{\pi}{2}$,


wobei uns das Gesetz entgegentritt, dafs die 0-Punkte der verschiedenen Particularlösungen $y_1$, $y_2$ auf der $x$-Axe gerade alternieren.

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten, die halbe Wellenlänge, hat den Wert

$$\frac{\lambda}{2} = \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\cdot\pi.$$

Die Wellenlänge ist also noch eine veränderliche

Grösse, welcher wir durch Annahme des Parameters jeden beliebigen Wert erteilen können.

Dabei gilt jedoch unsere Saite als beiderseits unbegrenzt. Wie sich das ändert, wenn die Saite begrenzt, an den Enden befestigt ist, werden wir morgen sehen.

Fr. d. 22. Juni 1894.] Wir denken nun die Saite begrenzt; $l$ sei ihre Länge, $x=0$ und $x=l$ seien ihre Enden. Dann sind folgendes die wichtigsten in der mathematischen Physik vorkommenden Grenzbedingungen: Es soll für $x=0$ und für $x=l$

1.) $y=0$, 2.) $\frac{dy}{dx}=0$, 3.) $y+p\frac{dy}{dl}=0$ sein,

wobei in 3.) $p$ eine positive Constante und $dl$ eine von der Saite nach aussen gerichtete Differentiation $\pm dx$ bedeutet. Indem die erste, zweite oder dritte dieser Bedingungen für $x=0$ und unabhängig davon für $x=l$ vorgeschrieben sein kann, sehen wir im Ganzen 9 Fälle zu unterscheiden. Es fragt sich, wie man den Parameter $k$ bestimmen muss, um im einzelnen Falle stehende Schwingungen zu bekommen:

<u>Ich sage, es gibt in jedem Falle eine Anzahl wohlbestimmter Parameterwerte</u>

<u>$K_0, K_1, K_2, \ldots$ welche dadurch individualisirt sind, dass im Innern der Strecke 0, 1, 2, … Schwingungsknoten d. h. Null-Punkte der Function $y$ liegen.</u>

Mit andern Worten, die unsern Grenzbedingungen genügenden Lösungen sind noch in unendlicher Zahl vorhanden, aber so, dass jede von ihnen durch Angabe einer gewissen ganzen Zahl characterisirt werden kann. Dieser Satz mit allen seinen daran anschliessenden Erweiterungen ist es, den ich als das <u>Oscillationstheorem</u> bezeichne.

Wir wollen uns der Einfachheit halber bei den folgenden Erläuterungen an den beiden Enden der Saite immer die gleichen Gränzbedingungen denken, so dass wir nur 3 Fälle zu unterscheiden haben.

Im Falle 1) und 2) ist der Satz dann leicht zu beweisen.

1) Soll für $x = 0$ $y$ verschwinden, so muss man $y = \sin\sqrt{\frac{k}{s}}\cdot x$ ansetzen. Die 0-Stellen dieser Lösung liegen bei $x = \pi\cdot\sqrt{\frac{s}{k}}$, $2\pi\sqrt{\frac{s}{k}}$, $3\pi\sqrt{\frac{s}{k}}$, … $x = l$ soll eine 0-Stelle sein; also ist $l = \nu\pi\sqrt{\frac{s}{k}}$ zu setzen, oder
$$k = \frac{\nu^2\pi^2 s}{l^2}.$$

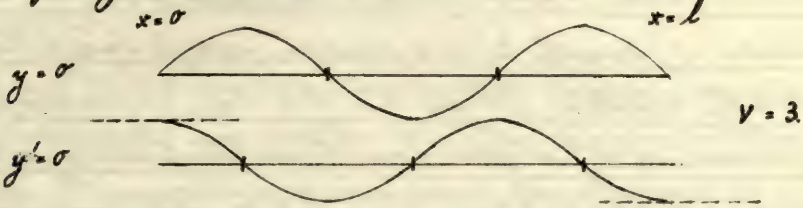
Die Lösung hat dann $(\nu - 1)$ 0-Stellen im Intervalle, so daß man der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \dots$ zu setzen hat, um $k_0, k_1, k_2, \dots$ zu erhalten.

2) Im Falle $y' = 0$ hat man ganz ähnlich

$$y = \cos\sqrt{\frac{k}{s}}\,x, \qquad k = \frac{r^2\pi^2 s}{l^2}$$

zu setzen, erhält aber $r$ (statt $r-1$) 0-Stellen im Intervall, so daß die Reihe der Werte $r$ mit 0 beginnt.

Die Saite hat in den beiden Fällen 1) und 2) etwa folgende Gestalt:




Die Lösungen für $r = 1, 2, 3, \dots$ unterscheiden sich dadurch, daß die Saite entweder als Ganzes schwingt, oder sich in mehrere stehende Schwingungen teilt, daß sie also je nachdem den Grundton und seine harmonischen Obertöne gibt.

3) Im Falle $y + p\frac{dy}{dl} = 0$ ist die Bestimmung der Constanten schwieriger. Man hat zu setzen

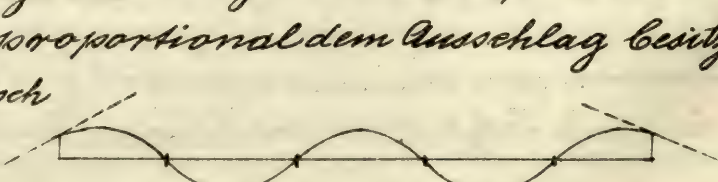
$$y = \sin\sqrt{\frac{k}{s}}\,(x-\xi),$$

(was gerade so gut ist, als wenn wir eine lineare Function von sin und von $\cos\sqrt{\frac{k}{s}}\cdot x$ angesetzt hätten). Jetzt sind die <u>beiden</u> Zahlen $k$ und $\xi$

simultan so zu bestimmen, dass den Bedingungen Genüge geleistet wird, während man bei 1) und 2) den Wert von $\xi$ bereits kannte. Das führt aber auf transcendente Gleichungen, die nur durch Näherung zu lösen sind (Vergl. Riemann – Hattendorf S. 158 ff. sowie meine Vorlesung über partielle Differentialgleichungen Teil II)

Der dritte Fall unterscheidet sich von den Fällen 1) und 2) dadurch, dass man die unendlich vielen Werte $k_0, k_1, k_2, \ldots$, welche den aufeinanderfolgenden Oscillationszahlen entsprechen sollen, nicht a priori in rationaler Form angeben kann, sondern nur durch Stetigkeitsbetrachtungen ihre Existenz darthun kann. Analytisch sind dieselben zusammen mit dem zugehörigen $\xi$ durch die beiden transcendenten Gleichungen gegeben, welche aussagen, dass an den beiden Enden der Saite die Grenzbedingungen erfüllt sind.

Geometrisch bedeutet die Grenzbedingung des Falles 3), dass die Tangente im Endpunkte eine Neigung proportional dem Ausschlag besitzt. Physikalisch



kann man sich an einer Saite den Fall 1) dadurch realisirt denken, dass man die Saite an den Enden genau festhält, den Fall 3) dagegen, indem man die Enden nur so befestigt, dass sie den Schwingungen der Saite etwas nachgeben. Der Fall 2) dürfte dagegen an einer Saite nur schwierig zu realisiren sein; leicht dagegen, indem man einen elastischen Stab mit freien Enden in Longitudinalschwingungen versetzt.

Die Existenz der discreten Lösungen $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots$ bedeutet in allen Fällen, dass die Saite ausser ihrem Grundton noch eine unbegrenzte Reihe von Obertönen geben kann; in den Fällen 1) und 2) sind diese Obertöne zum Grundton genau harmonisch, im Falle 3) dagegen nicht, was sich mathematisch dadurch ausspricht, dass man die Werte $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ in den Fällen 1) und 2) in einfachster Weise sofort angeben, in 3) aber nur durch Näherung berechnen kann.

Diese Theorie ist nun ohne Weiteres auf <u>nicht homogene Saiten</u> zu übertragen. $\rho$ und $s$ seien Functionen von $x$, $q$ der Ausschlag als Function von $x$ und $t$. Dann lautet die partielle

Differentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(s \frac{\partial q}{\partial x}\right).$$

Setzen wir, wie oben, $q = y \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, so wird

$$\frac{d}{dx}\left(s \frac{dy}{dx}\right) + \rho\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = 0,$$

oder indem wir den mit einem willkürlichen Parameter multiplicirten Coefficienten von $y$ mit $k \cdot \varphi(x)$ bezeichnen:

$$s y'' + s' y' + k \cdot \varphi(x) \cdot y = 0.$$

Nun ist die Sache so, dass der Character der Lösungen im Grossen und Ganzen derselbe ist, wie bei der homogenen Saite. Insbesondere:

Das erste, was wir bemerken, ist, dass jede Lösung $y$ unserer Differentialgleichung einen oscillatorischen Character hat.

Zwei Lösungen $y$, welche derselben Differentialgleichung genügen, haben alternierende 0-Stellen.

Wenn $k$ wächst und wir halten einen 0-Punkt der $y$-Curve fest, so schieben sich alle folgenden 0-Punkte auf den ersten zu.

Daraufhin gilt auch das Oscillationstheorem für eine begrenzte Saite von der Länge

<u>c, bei der wir irgend welche von unsern Grenzbedingungen vorschreiben.</u>

Diese Sätze betr. die unhomogenen Saiten sind in den berühmten Arbeiten von <u>Sturm und Liouville</u> in Bd. I und <u>II</u> von Liouville's Journal 1836-38 zum ersten Male ausgesprochen und mathematisch bewiesen. Leider hat Sturm, der ursprünglich dabei von physikalischen Betrachtungen ausging, das in seiner Arbeit ganz zurücktreten lassen.*)

Der Existenz der verschiedenen Lösungen $y_0, y_1, y_2, \ldots$ der Differentialgleichung entsprechen in der Akustik, wie wir schon andeuteten, die sämtlichen Obertöne der Saite. Von da kommt man – da sich akustisch jeder Ton der Saite aus dem Grundton und den Obertönen zusammensetzt – von selbst zu dem Satze, dass sich eine willkürliche Function in dem Intervall der Saite in der Gestalt entwickeln lassen muss

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu y_\nu ,$$

wie bei constantem $\rho$ und $s$ in eine Fourier'sche Reihe.

<u>Mit</u> dem Beweise dieser Entwickelbarkeit, der

*) Die physikalischen Betrachtungen brauchen nicht gerade vom Problem

Convergenz der Reihen, der Berechnung ihrer Coefficienten haben sich Sturm und Liouville besonders eingehend beschäftigt, (was ja in der gegenwärtigen Vorlesung durchaus zurücktreten muss).

Ich habe zu erwähnen, dass man die hier vorliegenden Fragen in neuerer Zeit wieder aufgenommen hat. Man kann die Behauptungen von Sturm und Liouville sofort auf die allgemeine Differentialgleichung

$$Ly'' + My' + Ny = 0$$

übertragen, falls im Intervall $\frac{M}{L}$ immer endlich und $\frac{N}{L}$ immer positiv ist. Picard denkt sich nun N als ganze Function eines Parameters k und fragt insbesondere, wie er die ausgezeichneten Werte $k_0, k_1, k_2, \dots$, deren Existenz durch das Oscillationstheorem verlangt wird, durch ein convergentes Verfahren wirklich im gegebenen Fall berechnen, und dadurch in ihrer Existenz sicher stellen kann. (Comptes Rendus 1893–94)

In der That genügen die Existenzbeweise, wie sie Sturm und Liouville führen, keineswegs den heutigen Anforderungen der Strenge. Man wird verlangen, alle die von ihnen

der Saitenschwingungen auszugehen; bei Sturm stand das Problem der Wärmeleitung im Vordergrunde.

gegebenen Entwicklungen in neuer Weise abzuleiten.

Mo. d. 25. Juni 1894.] Wir dagegen werden vielmehr den Standpunkt einnehmen, dass wir auf die formal strenge mathematische Begründung der Sätze weniger Gewicht legen, als dass wir uns die physikalische und geometrische Anschauung speciell des Oscillationstheorems so lebendig vor Augen führen, dass wir vermittelst desselben neue theoretische Sätze gewinnen, es vielleicht weiterbilden und so das Gebiet der mathematischen Erkenntnis erweitern. Die strenge logisch lückenlose Begründung derselben ist zwar notwendig; aber die überlasse ich andern. Die Naturen sind eben verschieden: was dem einen, dem visuell veranlagten, eine unwidersprechliche zwingende Anschauung ist, das sieht oder fühlt der auditiv veranlagte nicht; er muss die Bilder erst durch anschauungslose abstracte Begriffe, oder vielmehr durch die sprachlichen Symbole solcher Begriffe ersetzen, um dieselben durch logische d. h. sprachliche Verknüpfungen umzuformen.

aber jeder einzelne darf doch gewiss auf diejenige Art, die seiner Natur entspricht, und mit der er am meisten leisten wird, seinen Teil zur Förderung des Ganzen beitragen. Wenn wir der Mathematik neue Gedankenkreise, neue Probleme und Fragestellungen, neue Beweisansätze erobern, so ist dass gewiss nicht weniger verdienstlich, als die detaillirte Durcharbeitung einzelner Gebiete. —

Ich werde dabei zumeist eine gegen früher abgeänderte physikalische Deutung zu Grunde legen.

Die Differentialgleichung der unhomogenen schwingenden Saite lautete

$$s y'' + s' y' + \rho \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y = 0.$$

Wir wollen dieselbe durch Einführung einer andern unabhängigen Variablen t so umformen, dass das Glied mit y' wegfällt; wir können dann, indem wir t als die Zeit deuten, die Differentialgleichung als Bewegungsgleichung eines elastisch schwingenden Punktes ansehen, wobei die elastische Kraft nur mit der Zeit variabel ist.

Wir setzen

$$t = \int \frac{dx}{s},$$

und bekommen dann

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varrho \cdot s \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot y = -\kappa \cdot \psi(x) \cdot y,$$

worin $\kappa$ als ein veränderlicher positiver Parameter anzusehen ist. Dies drückt in der That, wenn $\psi(x)$ an einer Stelle $x$, d. h. zu der entsprechenden Zeit $t$ einen positiven Wert hat, aus, dass der Punkt $y$ mit einer Kraft an seine Ruhelage $y = 0$ herangezogen wird, welche seiner Entfernung von der Ruhelage proportional ist. Diesen Character, den einer elastischen Schwingung, wird die Bewegung so lange behalten, als $\psi(x)$ positiv ist. Vergrössert man den Parameter $\kappa$, so wird der Elasticitätscoefficient vergrössert, die Schwingungen werden also notwendig beschleunigt, ihre Anzahl in einem gegebenen Zeitintervall vergrössert. Die Grenzbedingungen sind Bedingungen für Elongation und Geschwindigkeit des Punktes am Anfang und am Ende des Zeitintervalls.

<u>Das Oscillationstheorem besagt: es ist möglich, durch geeignete Wahl des Parameters $\kappa$ die attractive Kraft so zu temperiren,</u>

daſs unser Punkt bei Erfüllung gewisser Anfangs- und Endbedingungen in gegebener Zeit eine bestimmte Anzahl von Malen durch die Ruhelage hindurchgeht.

## Verallgemeinerung des Oscillationstheorems.

Das so formulirte Theorem habe ich nun in Math. Ann. 18: „Über Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind" 1881 in 2 Richtungen zu verallgemeinern gesucht.

Erstens ging ich von einer Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Parametern $\kappa, \lambda$ aus:

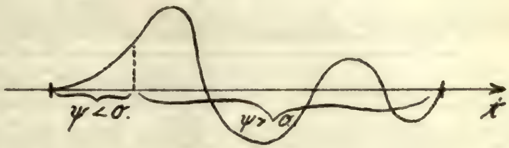
$$y'' = -\psi(x; \kappa, \lambda) \cdot y$$

und betrachtete demgemäſs auf der $t$-Axe zwei Segmente gleichzeitig.

Die Frage habe ich so gestellt, ob man über die beiden Parameter $\kappa$ und $\lambda$ so verfügen kann, daſs in zwei verschiedenen Segmenten zwei beliebig vorgegebene Oscillationsbedingungen erfüllt werden.

<u>Dabei läßt es sich nicht vermeiden, daß wir Functionen $\psi(x; \kappa, \lambda)$ einführen, welche im einzelnen Intervall das Zeichen wechseln, so daß für den beweglichen Punkt auf eine repulsive eine attractive Periode folgt oder umgekehrt.</u>

Es wird dann, wenn wir etwa $t$ als Abscisse, den Ausschlag $y$ als Ordinate gezeichnet denken,




die Curve an den Stellen mit negativem Werte von $\psi$ gegen die $t$-Axe convex, an den Stellen mit positivem Werte von $\psi$ dagegen concav sein. Die Oscillationen kommen dadurch zu Stande, daß die attractive Kraft die Wirkung der repulsiven im Ganzen überwiegt. Es fragt sich natürlich, ob unter so veränderten Umständen die früheren Betrachtungen noch in Geltung bleiben.

Zweitens aber will ich gleich die Aufmerksamkeit auf den andern Punkt richten:

Es war bislang immer vorausgesetzt, daß der Elasticitätscoefficient in dem Zeitintervall nie unendlich werde. Schon wir aber von irgend einer linearen Differentialgleichung mit den auf der reellen Axe gelegenen singulären Punkten a, b, c, ... aus, so wird ja der Coefficient von $y$, also der Elasticitätscoefficient, in der Nähe dieser Punkte unendlich groß.

Es ist dann die Frage, ob man die Segmente, von denen die Oscillationseigenschaft verlangt wird, bis an die singulären Punkte herandehnen kann.

Ich will jetzt in der Weise verfahren, daß ich mich an die besondere in Math. Ann. 18 besprochene Gleichung anschließe.

Es handelt sich dort um 4 singuläre Punkte, von denen drei je die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ haben, während die Exponentendifferenz des vierten Punktes, den man etwa nach $\infty$ legen mag, einen beliebigen Wert $\delta = 2\kappa + \frac{1}{2}$ haben


soll, unter $\kappa$ einen – nicht notwendig ganzzahligen – Parameter verstanden.

Wenn $\kappa$ insbesondere eine ganze Zahl sein soll – wie bei den Lamé'schen Polynomen der vorigen Woche – dann wollen wir es mit $K$ bezeichnen.

In Bd. 18 der Annalen hatte ich übrigens zunächst ein anderes Ziel als jetzt im Auge:

Die damalige Aufstellung des Oscillationstheorems war nicht als ein Beitrag zur Lehre von den linearen Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen gemeint, sondern als ein Hülfsmittel, um Normal-Functionen zu finden, nach denen ich in der Potentialtheorie willkürliche Functionen in Reihen entwickeln könnte.

Speciell handelte es sich damals darum, für einen von 6 confocalen Flächen 2. Grades begrenzten Körper die Randwertaufgabe der Potentialtheorie zu lösen, d. h. zu gegebenen Oberflächenwerten ein im Innern des Körpers stetig verlaufendes Potential zu construiren.

Dies ist der Ansatz von 1881. In der Vorlesung über Lamé'sche Functionen von 1889-90 habe ich die Betrachtung noch etwas verallgemeinert. Es erwies sich zweckmäßig, statt confocaler Flächen 2. Grades ein allgemeineres Orthogonalsystem zu Grunde zu legen, von dem die confocalen Flächen 2. Grades nur eine Ausartung sind, nämlich ein System confocaler Cycliden, d. h. von Flächen vierten Grades, welche den unendlich fernen Kugelkreis doppelt enthalten. Der Name „Cycliden" stammt von Dupin, hat bei ihm aber noch eine speciellere Bedeutung. Nämlich:

<u>Unter den allgemeinen Cycliden ist die Dupin'sche Cyclide speciell dadurch ausgezeichnet, dass sie 4 Doppelpunkte im Endlichen enthält.</u>

Bei den confocalen Cycliden treten an Stelle der oben besprochenen 4 singulären Punkte mit 3 Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}$ und der einen willkürlichen Exponentendifferenz $2K+\frac{1}{2}$ fünf singuläre Punkte sämtlich mit der Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}$

$$\underset{\alpha=1/2}{a} \qquad \underset{\beta=1/2}{b} \qquad \underset{\gamma=1/2}{c} \qquad \underset{\delta'=1/2}{d'} \qquad \underset{\delta''=1/2}{d''}$$

Die zugehörige Differentialgleichung nenne ich die „<u>verallgemeinerte Lamé'sche Gleichung</u>", die besondere Lamé'sche Gleichung entsteht aus ihr, wenn die zwei Punkte $d'$ und $d''$ zusammenrücken. Dass dann in der That eine beliebige Exponentendifferenz herauskommt, das haben wir zu

Anfang dieses Semesters gesehen. Des Näheren liegt die Sache so:

Die verallgemeinerte Lamé'sche Differentialgleichung hat nur feste Exponentendifferenzen, dazu aber zwei willkürliche accessorische Parameter $\kappa, \lambda$. Die gewöhnliche Lamé'sche Gleichung dagegen hat nur einen accessorischen Parameter $\lambda$, dafür aber hängt die eine Exponentendifferenz $\delta = 2\kappa + \frac{1}{2}$ von einem willkürlichen Parameter $\kappa$ ab. In jedem Falle hat man also 2 willkürliche Parameter zur Verfügung.

<u>Ich habe nun versucht, auch für diese verallgemeinerte Lamé'sche Gleichung das Oscillationstheorem mit zwei Intervallen durchzuführen.</u>

Es bietet sich dabei die Aufgabe, das Oscillationstheorem für alle diejenigen Fälle zu untersuchen, die aus der verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung durch irgend welches Zusammenrücken von singulären Punkten entstehen können.

Diese Theorie ist von <u>Böcher</u> in seiner Preisarbeit von 1891 behandelt. In größerer Ausführlichkeit wird man dieselbe in dem gerade im Erscheinen begriffenen Buche von Böcher: „Über die Reihenentwicklungen der

Potentialtheorie" auseinandergesetzt finden.

Di$^c$: d. 26. Juni 1894.] Wir wollen die **gewöhnliche Lamé'sche Differentialgleichung** in unhomogener Gestalt so normiren, dass bei den im Endlichen gelegenen singulären Punkten $a, b, c$ je die Exponenten $\frac{1}{2}, 0$, bei $d = \infty$ folglich, da die Summe aller Exponenten $n-2=2$ sein muss, die Exponenten $+\kappa+\frac{1}{2}, -\kappa$ vorliegen. Sie lautet dann:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-a}+\frac{\frac{1}{2}}{x-b}+\frac{\frac{1}{2}}{x-c}\right) + \frac{y}{(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)}\cdot\left\{-\kappa\cdot(\kappa+\tfrac{1}{2})x+\lambda\right\} = 0.$$

Wir setzen nun, um das Glied $\frac{dy}{dx}$ wegzuschaffen:

$$t = \int^x \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}, \quad x = p(t),$$

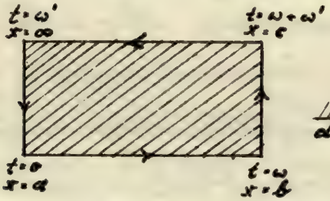
wo also $p(t)$ eine doppeltperiodische Function von $t$ ist, welche von der Weierstrass'schen Function $\wp(t)$ nur unwesentlich verschieden ist. Die Differentialgleichung geht über in

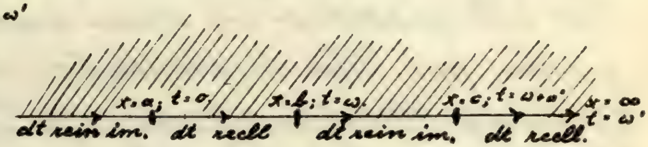
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Big(2\kappa(2\kappa+1)\,x - 4\lambda\Big)\,y = (\mathcal{A}x+\mathcal{B})y = (\mathcal{A}\,p(t)+\mathcal{B})\,y.$$

**Unsere Lamé'sche Differentialgleichung hat hier die Gestalt einer linearen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten angenommen, und das ist diejenige Form der Gleichung, welche beispielsweise Her-**

<u>mite in seinen berühmten Untersuchungen zu Grunde gelegt hat, wie man bei Halphen vergleichen möge.</u>

Wir hier lassen zunächst die allgemeinen functionentheorethischen Betrachtungen bei Seite. Unsere Aufgabe ist es, uns den Verlauf der Lösungen im Reellen recht klar zu machen. Zuerst müssen wir den Zusammenhang der Argumente $x$ und $t$ uns deutlich vor Augen führen. Lassen wir $x$ die ganze reelle Zahlenaxe durchlaufen, so beschreibt $t$ die Umgrenzung eines Rechteckes, des vierten Teils eines Periodenparallelogramms von $\wp(t)$:

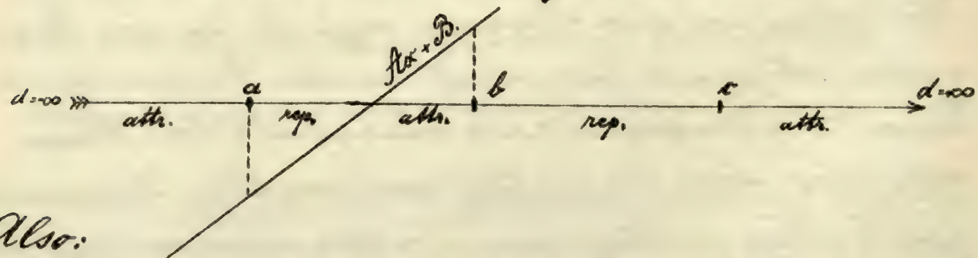



Wir sehen aus den Figuren, daſs $dt$ in den Intervallen $ab$ und $c\infty$ reell, in den Intervallen $bc$ und $\infty a$ dagegen rein imaginär ist. Wenn wir also eine Variable mit reellen Incrementen haben wollen, um unsere mechanische Deutung anwenden zu können, so können wir in den Intervallen $ab$ und $c\infty$ die Gröſse $t$ selbst brauchen, in $bc$ und $\infty a$ aber müssen wir $t' = it$ als Variable einführen, wodurch $\frac{d^2y}{dt^2}$ sein Zeichen wechselt.

Nun kommt es ja bei unserer mechanischen Deutung darauf an, ob $(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B})$ positiv ist oder negativ, und zwar wird in den Intervallen $ab$ und $c\infty$ Attraction im ersten Fall, im zweiten Fall Repulsion, dagegen in den Intervallen $bc$ und $\infty a$ bei positivem $(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B})$ Repulsion, bei negativem Attraction zu finden sein.

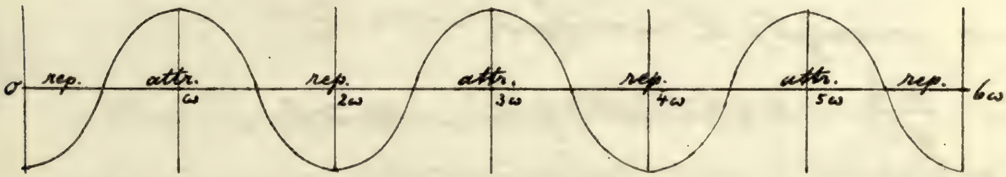
Denken wir uns über der $x$-Axe als Abscisse $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$ als Ordinate aufgetragen, so erhalten wir eine Gerade $\eta = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$, welche die $x$-Axe in zwei Gebiete scheidet, so daſs in dem einen $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$ positiv, in dem andern $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$ negativ ist. Sie wird dabei irgend eines d. 4 von den Verzweigungspunkten begränzten Intervalle der $x$-Axe in zwei Teile spalten,




Also:

Die ganze $x$-Axe ist in 5 Stücke zerlegt und diese zeigen von $d = -\infty$ beginnend bis zu $d = +\infty$ alternirend attractives und repulsives Verhalten.

Wollen wir die entsprechende Construction über der reellen $t$-Axe ausführen, indem wir $A\,p(t)+B$ senkrecht dazu auftragen, so müssen wir bedenken, dass, während $t$ die reelle Axe von $0$ über $\omega$, $2\omega$, $3\omega$, u. s. w. durchläuft, dass dann der Punkt $x$ immer nur zwischen $a$ und $b$ hin und her geht. Die der Hülfsgeraden $Ax+B$ entsprechende Curve $A\,p(t)+B$ ist also periodisch und wird etwa folgendes Aussehen haben:




<u>Das Bild der Hülfsgeraden über der $t$-Axe ist eine periodische Curve, welche übrigens nur dasjenige Stück der Hülfsgeraden (und dieses unendlich oft) wiedergibt, das zwischen $x=a$ und $x=b$ liegt.</u>

Die Tangente dieser Curve in den Punkten $0, \omega, 2\omega, \ldots$ ist horizontal, da $\frac{d\,(A\,p(t)+B)}{dt} = A.\,2\sqrt{(x-a)(b-x)(x-c)}$ für $x=a$ und $x=b$ verschwindet.

Nun lassen Sie uns noch eine allgemeine Verabredung treffen. Es fragt sich, wie wir die <u>Stärke der Oscillation</u> zweier verschiedenen Functionen in einem Intervall vergleichen wollen, wenn auch unvollständige Oscillationen am Ende des Intervalls vorkommen?

Es möge etwa ein positiver fester Wert von $\frac{y'}{y}$ am Anfangspunkt $t=0$ des Intervalls vorgeschrieben sein (im besondern Fall der Wert $0$ oder $\infty$). Wir bedenken nun, dass $\frac{y'}{y}$ überall im Intervall, sobald attractives Verhalten vorliegt, monoton abnimmt (ausser in den Nullpuncten von $y$, wo es von $+\infty$ nach $-\infty$ springt). Denn aus

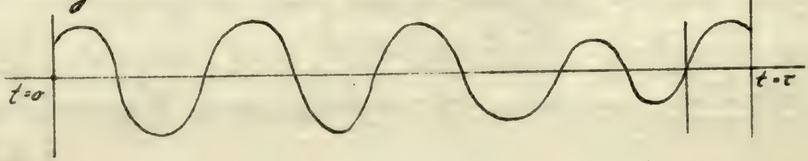
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\psi(t; \mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,y\,, \qquad \psi > 0$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\psi - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 < 0\,.$$

Während jeder Halboscillation geht so $\frac{y'}{y}$ von $+\infty$ bis nach $-\infty$.

Eine unvollständige Halboscillation werden wir also mit einem um so grösseren Bruchteil mitzuzählen haben, je tiefer während derselben $\frac{y'}{y}$ von $+\infty$ an herabsinkt.



Jedesmal, wenn $\frac{y'}{y}$ von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft, haben wir eine 1, jedesmal wo dieses Intervall nicht vollständig durchlaufen wird, einen um so grösseren echten Bruch anzusetzen, ein je grösserer Teil einer Halboscillation durchlaufen wird, und zu summiren, d. h. wir müssen eine Function suchen, welche während der Oscillationen beständig wächst, und zwar bei jeder Halboscillation um eine Einheit. Eine diesen Bedingungen genügende Function ist

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y'}{y}.$$

Der Zuwachs dieser Function von $t=0$ bis $t=\tau$ wird also als Mass für die Stärke der Oscillation im Intervall $t=0$ bis $t=\tau$ dienen können. Also:

<u>Zwei Curven, welche bei $t=0$ mit demselben vorgeschriebenen Wert von $\frac{y'}{y}$ beginnen, werden hinsichtlich der Stärke ihrer Oscillationen im Segment verglichen, indem man für beide Curven den Ausdruck</u>

$$\underline{\left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y'}{y}\right]_{t=0}^{t=\tau}}$$

<u>bildet.</u>

Eine genauere Discussion des oben gegebenen Ausducks *)[1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{y}\right) = -\psi - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$

ergibt den Satz, der physikalisch unmittelbar klar ist:

<u>Wenn das $\psi$ im ganzen Intervalle wächst, die Kraft *)[2] also durchweg vergrössert wird, so wächst bei unserer Integralcurve, die für $t=0$ mit dem vorgeschriebenen Werte $\frac{y'}{y}$ beginnt, die Stärke des Oscillation.</u>

Es sei nun in dem Intervall $ab$ ein Segment $t=(0,\tau)$ gegeben. Das Oscillationstheorem besagt, dass man die Constanten $A$ und $B$ so bestimmen, d. h. der Hülfsgeraden $Ax+B$ eine solche Richtung und Lage geben kann, dass in dem <u>Segment</u> eine ganz bestimmte vorgegebene Stärke der Oscillation entwickelt wird, also wenn $\frac{y'}{y}$ bei $t=0$ vorgegeben ist, dass in dem Segment eine bestimmte Zahl von 0-Stellen liegt und dass $\frac{y'}{y}$ bei $t=\tau$ wieder einen vorgeschriebenen Wert hat.

---

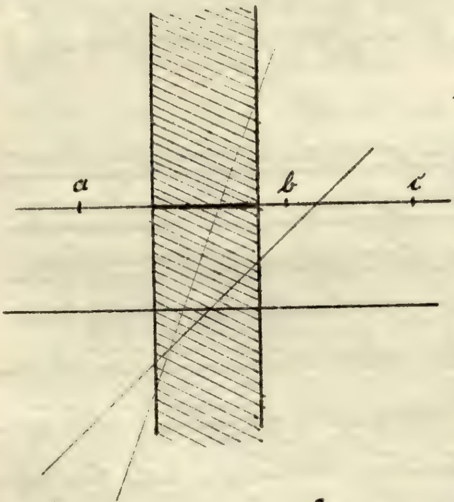
*)1. Man vergl. die Entwickelungen von <u>Sturm</u>, l. c.

*)2. Es möge hier und im Folgenden diese eigentlich ungenaue kurze Ausdrucksweise gestattet sein, wo es sich auch nicht um die Kraft selbst handelt – diese wäre $(Ax+B).y$ – sondern nur um den Coefficienten $(Ax+B)$, den Elasticitätscoefficienten.

Da das nur eine Bedingung für die Lage der Geraden ist, so gibt es natürlich noch $\infty^1$ Geraden, welche der Bedingung genügen, in dem einen Segment denselben Oscillationszustand hervorzurufen. Wir fragen dann:

Wie sieht die Enveloppe aller derjenigen Hülfsgeraden aus, welche in unserem Segmente eine bestimmte Oscillationsbedingung befriedigen lassen?

Do. d. 28. Juni 1894.] Wir denken uns in der $(x, y)$ Ebene durch die Endpunkte des Segmentes zwei zur $x$-Axe senkrechte gerade Linien gezogen; diese begrenzen dann in der $xy$ Ebene einen Streifen, dessen Breite durch die Länge des Segments gegeben ist.




Damit durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (Ax + B) \cdot y$$

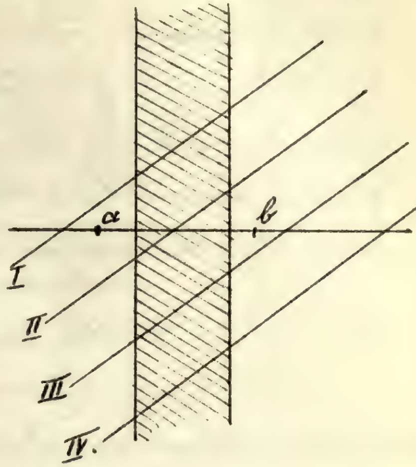
überhaupt Oscillationen in dem Segment hervorgerufen werden, muss $(Ax + B)$ wenigstens in einem Teile des Segments negativ sein, d. h. die Gerade $y = Ax + B$ muss notwendig den unterhalb der $x$-Axe liegenden Teil des Streifens durchsetzen.

Setzen wir z. B. $A = 0$, verlangen also, dass die Gerade der $x$-Axe parallel ist, so kann man $B'$ auf elementarem Wege – denn es handelt sich dann nach Einführung von $t$ als unabhängiger Variabler, nur um Sinusschwingungen – so als negative Grösse bestimmen, dass gerade die vorgegebene Oscillationszahl herauskommt, und zwar nur auf eine Weise. Was ferner die übrigen möglichen Lagen der Hülfsgeraden bei vorgegebener Oscillationszahl betrifft, so ist der Satz auszusprechen:

<u>Zwei verschiedene Hülfsgeraden, welche dieselbe Oscillationseigenschaft liefern, müssen sich innerhalb des verticalen Streifens schneiden.</u>

Denn wenn sie sich innerhalb des Streifens nicht schnitten, wäre bei der einen von ihnen $(Ax + B')$ im ganzen Intervall grösser, die anziehende Kraft also durchweg kleiner als bei der andern, was auch eine Verschiedenheit der Oscillationszahlen zur notwendigen Folge haben müsste. Damit ist der Satz bewiesen.

Wählen wir für $A$ irgend einen bestimmten Wert – wie oben den Wert $0$ – so ist damit die Richtung der Hülfsgeraden gegeben. Wenn wir nun die Hülfsgerade noch mit sich selbst parallel verschieben, etwa von der Lage I in nebenstehender Figur nach unten zu, so wird dabei die anziehende Kraft im ganzen Intervall gleichzeitig verstärkt, ebenso also auch die Oscillationszahl stetig vergrössert, bis zu jedem beliebig grossen Werte hin,



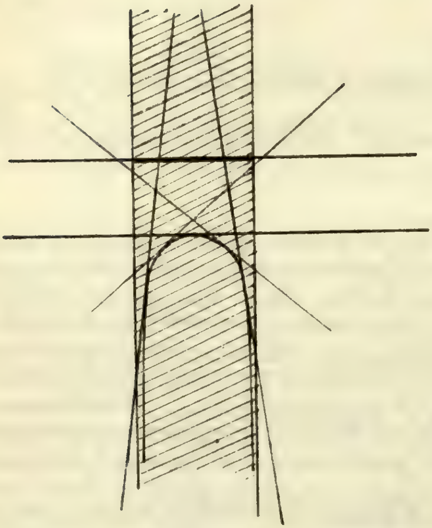

so dass dabei die vorgegebene Oscillationszahl einmal und nur einmal erreicht wird. Wir haben also den Satz:

Die Richtung der Hülfsgeraden kann eine beliebige sein; dann ist aber die Lage der Hülfsgraden durch die Forderung der vorgegebenen Oscillationseigenschaft eindeutig bestimmt.

In der That können ja nicht zwei parallele Geraden zu derselben Oscillationseigenschaft gehören, da sich zwei solche Geraden nicht im Streifen schneiden würden, entgegen dem vorhin ausgesprochenen Satze.

Denken wir uns nun bei vorgegebener

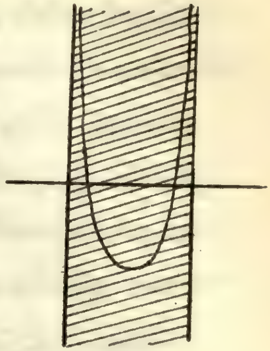
Oscillationsbedingung alle möglichen zugehörigen Hülfsgeraden construirt, so ist das eine einfach unendliche Schaar von Geraden, welche eine gewisse Curve einhüllen. Irgend ein Punkt dieser Hüllcurve ist der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarten Geraden, muss also, wie der Schnittpunkt irgend zweier Geraden der Schar überhaupt, innerhalb des verticalen Streifens liegen.



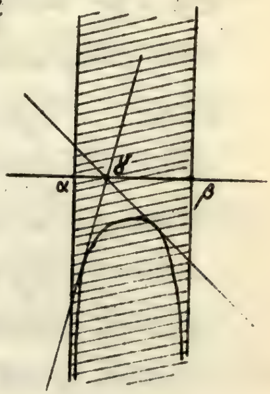
Die Hüllencurve hat eine solche Gestalt, daß alle ihre Punkte in dem verticalen Streifen liegen, und zu jeder Richtung eine einzige parallele Tangente vorhanden ist.

Die Hüllcurve kann keine andere Gestalt haben, als die in nebenstehender Figur angegebene, bei welcher die Ränder des Streifens Asymptoten sind.

Man könnte in Zweifel sein, ob die Curve nicht vielleicht die nebenstehende Gestalt haben muss, welche ja mit den obigen Angaben über die Anzahl der Tangenten von gegebener Richtung ebensogut verträglich wäre. Aber man kann zeigen, dass von jedem Punkte der Strecke $\alpha\beta$ mindestens 2 Tangenten an die fragliche Hüllcurve existiren, dass also das Segment $\alpha\beta$ von der Hüllcurve nicht geschnitten werden kann.



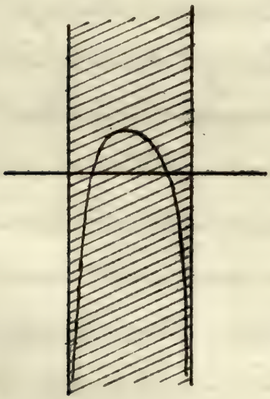
In der That, lassen wir eine Gerade sich um den beliebigen Punkt $\gamma$ des Segmentes $\alpha\beta$ drehen, etwa indem sie sich bei $\alpha$ nach unten senkt, so wird man auf der Teilstrecke $\alpha\gamma$ Anziehung, auf der Teilstrecke $\gamma\beta$ Abstossung haben, und zwar werden mit zunehmender Neigung der Hülfsgeraden beide, die Anziehung, wie die Abstossung auf der ganzen Strecke dem Tangens der Neigung proportional vergrössert. Dabei wird die Oscillationszahl auf der Strecke $\alpha\gamma$



vergrößert, auf der Strecke $\gamma\beta$, nach der negativen Seite hin, verkleinert. Nun ist aber physikalisch klar, daß man die Oscillationszahl auf einer Strecke $\alpha\gamma$, wo nur Anziehung herrscht, durch Verstärkung der Anziehung beliebig vergrößern kann, daß dagegen die Oscillationszahl auf der Strecke $\gamma\beta$, wo nur Abstoßung herrscht, nie bis auf $-1$ heruntersinken kann, wie sehr man die Abstoßung auch verstärken mag. Daraus folgt, daß man durch stetige Drehung der Hülfsgeraden um den Punkt $\gamma$ der Oscillationszahl auf der ganzen Streck $\alpha\beta$ jeden beliebig großen Wert erteilen kann, also auch mindestens einmal den vorgegebenen Wert. Ein Zweifel bleibt höchstens, wenn die vorgegebene Oscillationszahl kleiner als $O_0 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{c^2\tau}{1+c^2+c\tau}$ ist, wobei $c$ den Wert $\frac{y'}{y}$ am Anfang des Segments und $\tau$ die Länge des Segments in $t$ gemessen bedeutet. Im Allgemeinen also d. h. wenn die vorgegebene Oscillationszahl nicht kleiner als die ebenangegebene Größe $O_0$ ist, insbesondere stets, wenn die Oscillationszahl $\geqq 1$ sein soll, gibt es mindestens eine Lage der Hülfsgeraden durch $\gamma$ mit positivem Werte von

$A$, für welche sie zur Tangente wird. Genau ebenso findet man mindestens eine Lage mit negativem $A$, wo also von $\alpha$ bis $\gamma$ Abstoßung, von $\gamma$ bis $\beta$ Anziehung herrscht; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

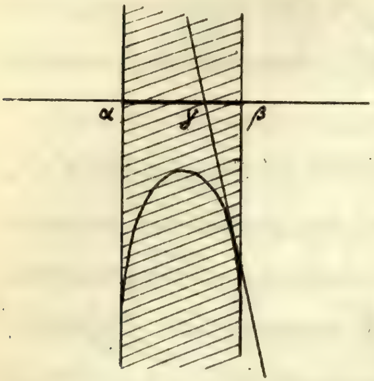
Wenn die vorgegebene Oscillationszahl $< O_0$ ist, dann kann man allerdings nicht mehr von allen Punkten des Segmentes Tangenten an die Hüllcurve legen. Dann aber läßt sich zeigen, daß die horizontale Tangente der Hüllcurve oberhalb der $x$-Axe verläuft, daß also die Curve im wesentlichen ebenso wie vorhin liegen muß,



nur mit dem Unterschied, daß sie ihren Scheitel jetzt über die Abscissenaxe erhebt. Die später an die Gestalt der Hüllcurve anzuknüpfenden Folgerungen werden durch diese Modification in keiner Weise berührt.

Daß die Curve die Begrenzungsgeraden des Streifens thatsächlich zu Asymptoten haben muß und dieselben nicht etwa schon im

Endlichen erreicht, wie in nebenstehender Figur, sieht man leicht, wenn

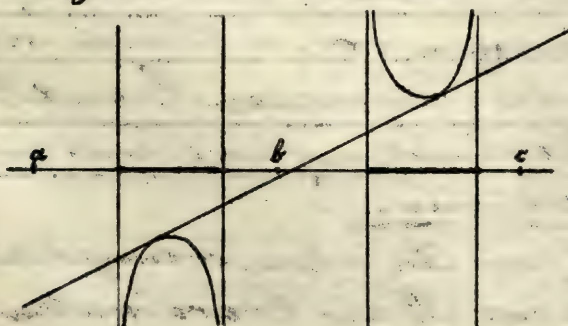



man in dieser Figur von einem Punkte $\gamma$ des Segmentes, welcher dem Endpunkt sehr nahe liegt die nach vorn abwärts gerichtete Tangente an die Curve zieht. Da diese Gerade über dem Segmenttheil $\alpha\gamma$ sich sehr hoch erhebt, unter das Segmentteil $\gamma\beta$ aber nur bis zu einer endlichen Tiefe hinabsinkt, so entspricht sie dem physikalischen Falle, daß längs $\alpha\gamma$ eine anfangs sehr große abstoßende Kraft wirkt, längs des verschwindend kleinen Segmentstücks $\gamma\beta$ aber nur eine endlich bleibende anziehende Kraft. Eine endlich bleibende Kraft kann aber in einem unendlich kleinen Zeitintervall gewiß keine Oscillationen von gegebener, nicht verschwindender Größe hervorrufen, zumal auch noch der Punkt in Folge der abstoßenden Kraft längs $\alpha\gamma$ bei Beginn des Intervalls $\gamma\beta$ einen sehr großen Wert von $\frac{y'}{y}$ besitzt. Also muß, wenn $\gamma\beta$ unendlich klein genommen wird, längs

$\rho$ 1 die anziehende Kraft unendlich gross werden, d. h. die Tangente muss unendlich tief hinunterreichen, die Begrenzungsgerade des Streifens also als Tangente der Curve betrachtet ihren Berührungspunkt im Unendlich-fernen haben, d. h. Asymptote sein.

Die Hüllcurve erstreckt sich nach unten, wie gezeichnet, wenn das Segment in ab oder in cd liegt. Wenn dagegen das Segment in da oder in bc liegt, so tritt Attraction dann ein, wenn die Hülfsgerade oberhalb der x-Axe verläuft, und die Figur ist also in der Weise umzukehren, dass die Hüllcurve in der oberen Hälfte des Streifens verläuft.

Nun mögen zwei Segmente betrachtet werden, welche nicht übereinandergreifen. Dieselben können sonst aber beliebig in ein und demselben oder in verschiedenen Intervallen liegen. Nur beispielsweise soll das eine in ab,




das andere in bc gezeichnet werden. Nun sei für jedes der beiden Segmente unabhängig vom andern, eine Oscillationsbedingung vorgegeben. Man denke sich dann über jedem der beiden Segmente die der betreffenden Oscillationsbedingung entsprechende Hüllcurve construirt.

<u>Unsere beiden Hüllcurven haben dann, sobald die Segmente überhaupt getrennt liegen, notwendig eine und nur eine gemeinsame Tangente, wie die Figur zeigt.</u>

Denn hätten sie zwei gemeinsame Tangenten, so müssten sich dieselben sowohl in dem Verticalstreifen über dem einen Segment, wie in denjenigen über dem andern Segment schneiden, was unmöglich ist.

Damit haben wir das Oscillationstheorem erreicht:

<u>Schreiben wir für zwei Segmente der x-Axe, welche kein Stück miteinander gemein haben, und welche in verschiedenen oder in demselben Intervall liegen können, zwei beliebige Oscillationsbedingungen vor, so können wir dementsprechend die Parameter A und B der Lamé'schen Gleichung auf eine und nur auf eine Weise bestimmen.</u>

Der Beweis ist, wie Sie sehen, so eingekleidet, dass wir A und B als Coordinaten einer geraden Linie deuten. Es fragt sich, wie die Betrachtung sich ändert, wenn man A und B als Punktcoordinaten deutet und die einzelnen Schritte durch strenge mathematische Schlüsse begründet. Näheres darüber findet man in dem Buche von Pockels über $\Delta u + k^2 u = 0$ S. 117–120. Wir werden das erweiterte Oscillationstheorem in dem Umfang unserer jetzigen Betrachtung fortan als bewiesen ansehen.

Jetzt werden wir die Segmente bis an die singulären Punkte a, b, c, d heranziehen. Es möge z. B. ein Segment von a bis b reichen, d. h. mit dem Intervall a b identisch sein.

Es fragt sich, was wir an die Stelle der Grenzbedingungen, dass $\frac{y'}{y}$ an den Enden des Segments vorgeschriebene Werte haben soll, jetzt zu setzen haben.

An einer gewöhnlichen Stelle etwa $x = 0$, gibt es zwei „Fundamentallösungen" von der Form

$$y_1 = \quad + x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

$$y_2 = 1 + \quad + c_2' x^2 + c_3' x^3 + \cdots,$$

und die allgemeine Lösung setzt sich aus diesen in der Gestalt zusammen:

$$y = \mu y_1 + \nu y_2 = \nu + \mu x + c_2'' x^2 + c_3'' x^3 + \ldots$$

Dann ist an der Stelle $x = 0$

$$y' = \mu\ , \quad y = \nu, \quad \frac{y'}{y} = \frac{\mu}{\nu}.$$

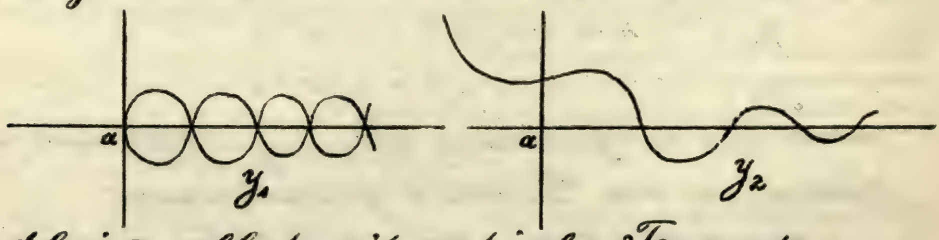
Die Grenzbedingung der Physik, welche $\frac{y'}{y}$ als gegeben ansieht, kann auch so formulirt werden: wir geben das Verhältnis $\mu : \nu$ derjenigen Constanten, mit deren Hülfe sich die Lösung $y$ aus den beiden zum Punkt $x = 0$ gehörigen Fundamentallösungen $y_1, y_2$ zusammensetzt.

Dies überträgt sich nun sofort auf den Fall, wo der Anfangs- oder Endpunkt des Segments ein singulärer Punkt ist.

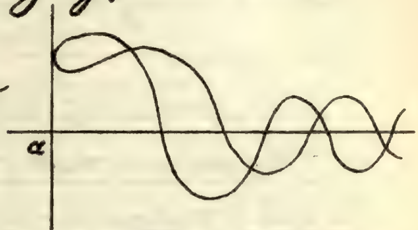
Z. B. bei $a$ existiren zwei Fundamentallösungen

$$y_1 = (x-a)^{\frac{1}{2}}\left(1 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots\right),$$
$$y_2 = \qquad\qquad \left(1 + c_1'(x-a) + c_2'(x-a)^2 + \dots\right).$$

Die beiden Lösungen verlaufen etwa nach Art der folgenden beiden Curven, die erste so, dass sie nur rechts von $a$ reell ist




und bei $a$ selbst mit verticaler Tangente um-liegt, die zweite aber so dass sie die Gerade $x = a$ unter irgend einem Winkel schneidet, und zwar in der Höhe $y = 1$. Wenn man $y_1$ mit $i$ multiplicirt, so ist sie nur links von $a$, statt rechts reell, indem ein anderer Teil der Lösung $y_1$ in reelle Erscheinung tritt.




Die allgemeine Lösung

$y = \mu y_1 + \nu y_2$

zeigt einen Verlauf, wie nebenstehende Curve, bei reellem $\mu$ nur rechts, bei rein imaginärem $\mu$ nur links vom Punkte a in reelle Erscheinung tretend. Wählen wir $\mu$ immer kleiner, so wird die Umbiegung der Curve an der Geraden $x = a$ immer schärfer, indem zugleich die beiden von der Umbiegung auslaufenden Curvenzweige immer näher aneinander hinlaufen, bis sie schliesslich für $\mu = 0$ ganz zusammenfallen zu einem einzigen Curvenstück, welches an der Geraden $x = a$ einfach abbrechen würde, wenn sich nicht als Fortsetzung links ein plötzlich aus dem imaginären herantretender Curvenzweig einstellte. Also:

Die typische Gestalt der allgemeinen Curve

$y$ schliefst nicht nur die Curve $y_1$, sondern auch die Curve $y_2$ als einen Grenzfall ein, wobei die Curve $y_2$ als doppeltzählend auftritt und eben darum eine reelle Fortsetzung über $x = a$ hinaus gestattet.

Die Grenzbedingung läfst sich nun so aussprechen:

Die specielle Curve $y$, welche im Innern des Segments eine bestimmte Anzahl mal durch 0 gehen soll, soll an der Grenze $a$ zu einem bestimmten Quotienten $\frac{\mu}{\nu}$ gehören, wo $\mu, \nu$ die Factoren sind, mit deren Hülfe sich $y$ aus den beiden Fundamentallösungen $y_1, y_2$ zusammensetzt.

Es handelt sich bei dieser Übertragung der Grenzbedingungen auf die ausgearteten Segmente nicht nur um eine Analogie, sondern um ein genaues Entsprechen, wie sich sofort ergibt, wenn wir die Variable $t$ einführen.

Nämlich die Differentialgleichung mit $t$ hat bei $x = a$, d. h. bei $t = 0$ überhaupt keinen singulären Punkt. Da sich nun $x - a$ wie $t^2$ verhält, multiplicirt mit einer Potenzreihe nach $t$, so wird $y_1$ und $y_2$ in $t$ die Gestalt haben

$$y_1 = t \cdot \mathfrak{P}_1(t)\,,\quad y_2 = \mathfrak{P}_2(t)\,,$$

d. h. $y_1$ und $y_2$ sind auch in Bezug auf $t$ Fundamentallösungen, nämlich Fundamentallösungen des nichtsingulären Punktes $t=0$. Wir sehen also:

<u>Wir können unser Oscillationstheorem auch auf den Fall anwenden, wo sich unsere Segmente bis an die singulären Punkte heranziehen; nur müssen wir uns $\frac{y'}{y}$ in den singulären Punkten dabei so gegeben denken, dass wir $t$ als unabhängige Variable dabei meinen.</u>

Fr. d. 29. Juni 1894.] Wir wollen heute zusehen, wie man vom Oscillationstheorem aus, bezogen auf zwei benachbarte Intervalle $ab$, $bc$, zu den <u>Lamé'schen Polynomen</u> zurückgelangt, indem wir damit in unseren jetzigen Betrachtungen eine Neubestätigung der früher ganz anders gefundenen Sätze finden.

Die beiden Segmente seien also geradezu die beiden Intervalle $ab$ und $bc$. Es sollen in $ab$ $m$ 0Stellen, in $bc$ $n$ Nullstellen je einer Lösung $y$ vorhanden sein, und zwar soll die Lösung $y$ des Intervalls $ab$ in $a$ und $b$ sich verhalten, wie $(x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}\,\mathfrak{P}(x-a)$ bezw. wie $(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}\,\mathfrak{P}(x-b)$, die

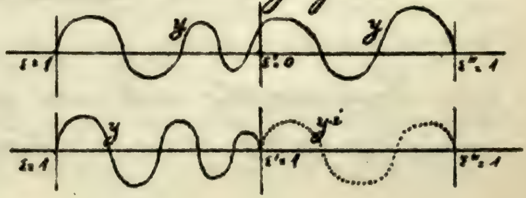
Lösung des Intervalls $bc$ bei $x=b$ wie $(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}\mathfrak{P}(x-b)$, bei $x=c$ wie $(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\mathfrak{P}(x-c)$, wobei $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ jedes den Wert $0$ oder $1$ haben kann; d. h. es sind für $\frac{y'}{y}$ im Sinne des letzten Satzes der vorigen Stunde in den Segmentgrenzen die Werte $0$ oder $\infty$ vorgeschrieben.

In unserer Festsetzung liegt die particuläre Verabredung, daß im Punkte $b$ von linker Seite her und von rechter Seite her jedesmal dieselbe Randbedingung erfüllt sein soll.

Wenn, wie hier die Lösung $y$ des Intervalls $ab$ und die Lösung $y$ des Intervalls $bc$. in einem Punkte $b$ beide wie die erste, oder beide wie die zweite Fundamentallösung des Punktes sich verhalten sollen, so können sie sich nur um einen constanten Factor unterscheiden. Also:

Infolge unserer Verabredung betr. den Punkt $b$ werden die in den beiden Segmenten zu betrachtenden Particularlösungen jetzt dieselben sein, soweit sie überhaupt bestimmt sind, nämlich bis auf einen constanten Factor.

Wenn $\varepsilon'=0$ ist, so zieht die Lösung $y$ als ein und dieselbe reelle analytische Curve von $a$ über $b$ nach $c$.



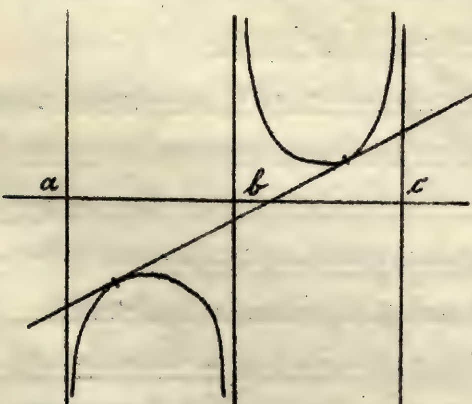
Wenn dagegen $\varepsilon' = 1$ ist, so ist die Lösung nur in dem einen Intervall, etwa $a\,b$, durch eine reelle Curve darstellbar, und wird erst nach Multiplication mit $i$ in $b\,c$ reell, dafür aber in $a\,b$ imaginär. Die Oscillationsbedingung wird jedoch durch eine solche Multiplication mit einer, wenn auch imaginären Constanten nicht berührt, so dass wir die Curve $y$ links von $b$ getrost durch die Curve $y\,i$ rechts von $b$ fortsetzen dürfen.

Wir setzen nun

$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot (x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}} \cdot (x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\, P(x),$$

unter $P(x)$ eine Function von noch zu bestimmendem Character verstanden.

Man sieht, dass $P(x)$ im Endlichen sich überall unverzweigt und wie eine ganze Function verhält. Im Unendlichen muss es daher auch notwendig unverzweigt sein. Die Zeichnung der Hüllcurven über $a\,b$ und $b\,c$ zeigt, dass die Hülfsgerade $Ax + B$ jedenfalls nicht vertical, $A$ also jedenfalls von endlichem Werte ist. Dann ist aber



der Punkt $x = \infty$ für die Differentialgleichung ein regulärer singulärer Punkt, mit den Exponenten $-\kappa$ und $\kappa + 1/2$, wo $2\kappa(2\kappa+1) = A$ ist. $y$ muss sich daher im Unendlichen wie eine Potenz $x^{\kappa}$ verhalten, wobei der Exponent $\kappa$ durch die Gleichung

$$2\kappa(2\kappa+1) = A.$$

bestimmt ist.

Da nun $P(x)$ für $x = \infty$ unverzweigt sein muss, so muss

$$k = \kappa - \frac{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''}{2}$$

eine ganze Zahl und $P(x)$ ein Polynom vom Grade $k$ sein.

Die Particularlösung $y_1$, welche bei einem beliebigen unserer 8 Bedingungssysteme in Betracht kommt, ist analytisch in der Form darstellbar,

$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot (x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}} \cdot (x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}} \cdot P(x),$$

wo $P(x)$ ein rationales Polynom ist, welches sich sofort als Lamé'sches Polynom erweisen wird.

In der vorigen Woche haben wir die Lamé'schen Polynome in der Weise eingeführt, dass wir ihren Grad $k$ gaben und dann zeigten, dass alle $k$ Wurzeln reell auf die beiden Intervalle $ab$ und $bc$ verteilt liegen. Jetzt umgekehrt geben wir die Anzahl $m+n$ der reellen Wurzeln von $P(x)$ nebst ihrer Verteilungsweise $m, n$ auf die beiden Intervalle $ab$, $bc$, und wir zeigen nun, daſs $m+n$ der Grad des Polynoms ist, daſs also unser Polynom weder im Reellen noch im Complexen irgend welche andern Wurzeln hat, als durch unsere Oscillationsforderungen von vornherein vorgeschrieben sind.

In der That sieht man leicht mit Bezugnahme auf unsere früheren Betrachtungen über Lamé'sche Polynome, daſs $P(x)$ ein solches sein muſs und zwar ein solches in den Stieltjes'schen Grenzen, dessen $k$ Wurzeln alle reell und zwischen $a$ und $c$ gelegen sind, sodaſs also $k = m+n$ sein muſs. Denn wenn $y$ bei $a, b, c$ die Exponenten $\frac{1}{2}, 0$; $\frac{1}{2}, 0$; $\frac{1}{2}, 0$ besitzt, so muſs auch $P$ einer linearen Differentialgleichung genügen und zwar mit den Exponenten $\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{-\varepsilon}{2}$; $\frac{1-\varepsilon'}{2}, \frac{-\varepsilon'}{2}$; $\frac{1-\varepsilon''}{2}, \frac{-\varepsilon''}{2}$ bei $a, b, c$, d.h. mit den Exponenten $\pm\frac{1}{2}, 0$; $\pm\frac{1}{2}, 0$; $\pm\frac{1}{2}, 0$, wo $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ gleich $0$ oder $= 1$ ist.

$P(x)$ ist also ein Polynom, welches einer Differentialgleichung genügt, die an den Stellen

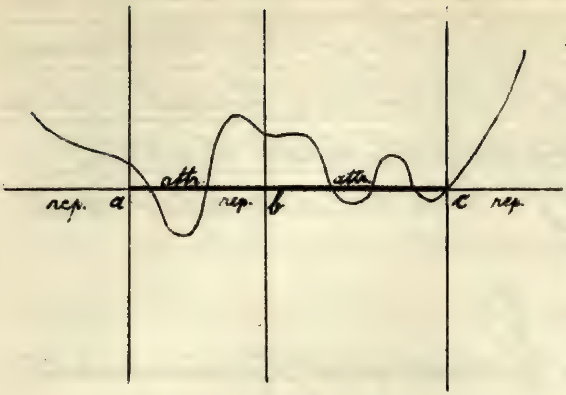
$a, b, c$ die Exponenten $\pm\frac{1}{2}$ und $0$ besitzt.

Die Lamé'schen Polynome, auf welche wir hier kommen, liegen alle innerhalb der Stieltjes'schen Grenzen, und es gelten für sie also in der That die Realitätsverhältnisse, auf die wir uns soeben bezogen haben.

Wir wollen nun aber den ganzen Zusammenhang von Neuem ableiten, ohne Zuhülfenahme der Stieltjes'schen Betrachtungen, nur aus dem Oscillationstheoreme heraus. Wir bekommen so zugleich eine Controle der früheren Überlegungen, besonders wenn wir auch hier versuchen über die Stieltjes'sche Grenze hinauszugehen.

Es handelt sich, wie gesagt, insbesondere darum, dass $P(x)$ keine anderen Wurzeln haben soll, als die durch die Oscillationseigenschaft von vorne herein gegebenen. In dieser Hinsicht sage ich zunächst:

Die Hülfsgerade muss im Intervall $ab$ notwendig ganz oder teilweise negative, in $bc$ ganz oder teilweise positive Ordinaten haben; sie muss daher notwendig in $a$ und links von $a$ durchweg unterhalb, in $c$ und rechts von $c$ oberhalb der $X$ Axe liegen, also muss so-




wohl in da, wie in cd repulsives Verhalten herrschen, so dass es in diesen Intervallen keine Wurzeln mehr geben kann. (Die Zeichnung ist so zu verstehen, dass die Curve zwischen ab und cd so gezeichnet ist, wie sie sich in der $t$-Ebene, zwischen bc und da, so wie sie sich in der $t' = it$-Ebene darstellt).

Dass unser $P$ in den beiden äusseren Intervallen cd, da keine 0-Stellen mehr hat, geht ohne Weiteres daraus hervor, dass dort $Ax + B > 0$ bezw. $< 0$ ist, so dass repulsives Verhalten in den betreffenden Intervallen der Zeit $t$ statt hat.

Nun muss man aber auch noch nachweisen, dass $P(x)$ keine complexen Wurzeln hat:

Um zu sehen, dass $P(x)$ im Complexen keine Wurzeln mehr besitzt, suche ich das Polygon zu construiren, welches dem Quotienten zweier Particularlösungen unserer Differentialgleichung entspricht und wünsche zu zeigen, dass wir mit Notwendigkeit auf diejenige Gestalt der Polygone komme, die wir früher ausgehend vom Realitätstheoreme der Lamé'schen Polyname bereits aufgestellt haben.

Mo. d. 2. Juli 1894.] Wir bilden also den Quotienten

$$\eta = \frac{y_2}{y_1},$$

wobei wir für $y_1$ gerade die Particularlösung nehmen:

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\, P(x).$$

$\eta$ bildet die Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon ab. Wir behaupten:

Unser Kreisbogenpolygon ist in diesem Fall ein geradliniges Polygon.

Die Behauptung folgt einfach daraus, dass

$$\eta = \int \frac{dx}{(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}(x-c)^{\frac{1}{2}}\cdot y_1^2},$$ d.h. im vorliegenden Falle

$$\eta = \int \frac{dx}{(x-a)^{\varepsilon+\frac{1}{2}}(x-b)^{\varepsilon'+\frac{1}{2}}(x-c)^{\varepsilon''+\frac{1}{2}}\, P(x)^2},$$

das Integral einer multiplicativen Function ist.

Zugleich erkennen wir aus dieser Formel den Satz:

Die Winkel des geradlinigen Polygons, welche den Punkten $a$, $b$, $c$ entsprechen, sind rechte Winkel und liegen im Endlichen oder im Unendlichen, je nachdem das betreffende

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ gleich $0$ oder $1$ ist.

Um die Natur der vierten, dem Punkte $d$ der $x$-Ebene entsprechenden Ecke zu erkennen, führen wir homogene Schreibweise ein, indem wir $x = \frac{x_1}{x_2}$ setzen. Wir bekommen dann, wenn $k$ der unbekannte Grad des Polynoms $P(x)$ ist, den Ausdruck:

$$\eta = -\int \frac{x_2^{\,2k+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''-\frac{1}{2}}\,(x, dx)}{(xa)^{\varepsilon+\frac{1}{2}}(xb)^{\varepsilon'+\frac{1}{2}}(xc)^{\varepsilon''+\frac{1}{2}}\,P_k(x_1, x_2)^2}.$$

Daraus liest man ab, dass der vierte Winkel des Polygons

$$\delta = \pi\left(2k + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \tfrac{1}{2}\right)$$

sein muss. Also:

Der Grad $k$ unseres Polynoms bestimmt sich nach der vorstehenden Formel durch Betrachtung der Grösse des vierten Winkels im Viereck.

Wenn uns also die geometrische Figur des Polygons einen bestimmten Wert des vierten Winkels ergibt, so kann uns dieser zur Bestimmung des Grades von $k$ dienen.

Ich wünsche aber diese Betrachtung noch von der benutzten Integralformel unabhängig zu machen; d.h. ich will den Satz, dass unser

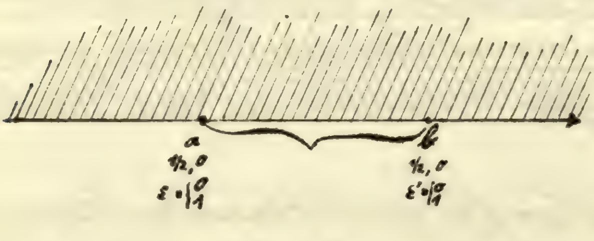
Polygon geradlinig ist, direct ableiten, und ebenso den Satz, dass jede Ecke im Endlichen oder im Unendlichen liegt, je nachdem das betreffende $\varepsilon = 0$ oder $= 1$ ist.

Unser

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\mathfrak{P}_x(x)$$

ist offenbar gleichzeitig für jeden der drei Punkte $a$, $b$, $c$ Fundamentallösung, nämlich die zum Exponenten $0$ oder $\frac{1}{2}$ gehörige, je nachdem das betreffende $\varepsilon = 0$ oder $= 1$ ist.

Nun wollen wir überhaupt einmal folgenden Fall untersuchen: Eine reelle lineare Differentialgleichung mit beliebig vielen singulären Punkten habe in zwei auf der reellen Axe aufeinanderfolgenden Punkten $a$, $b$ je die Exponenten $\frac{1}{2}$ und $0$. Es

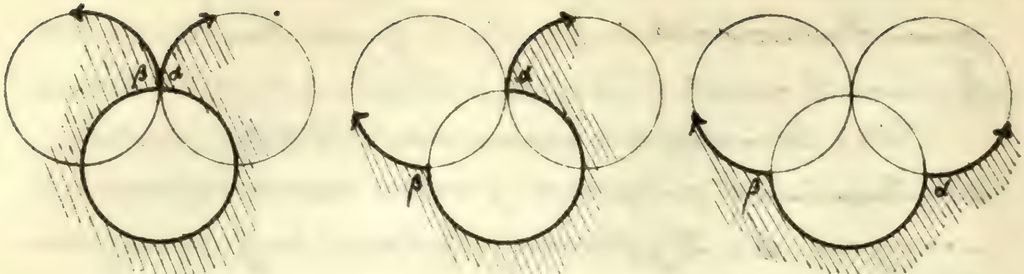



existire eine Lösung $y_1$ der Differentialgleichung, welche gleichzeitig für jeden der beiden Punkte Fundamentallösung ist, und welche in dem Intervall $ab$ $m$ mal verschwindet. Das ergibt im Ganzen 4 Möglichkeiten, je nach dem Exponenten, zu welchem $y_1$ in jedem der beiden Punkte gehört; es gehöre $y_1$ in $a$ zum Exponenten $\frac{\varepsilon}{2}$, in $b$ zum Exponenten $\frac{\varepsilon'}{2}$, wo $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ jedes $= 0$ oder $-1$ sein kann.

Wir betrachten dann das Abbild, welches der Quotient $\eta$ irgend zweier particulären Lösungen der Differentialgleichung von dem Segment $ab$ sowie von den angrenzenden Stücken der Nachbarsegmente der reellen $x$-Axe entwirft. Die Segmente der reellen Axe werden natürlich, da es sich um eine reelle Differentialgleichung handelt, auf Kreisstücke abgebildet, die auf gewissen Kreislinien liegen. Es ist nun zu behaupten:

<u>Die drei Kreislinien, auf denen unsere drei Kreisbogen liegen, schneiden sich in einem Punkte, und zwar fällt mit diesem Schnittpunkt das Bild von $a$ bezw. das Bild von $b$ dann und nur dann zusammen, wen $\varepsilon$ bezw. $\varepsilon' = 1$ ist.</u>

Man erhält so, jenachdem beide $\varepsilon$, oder nur ein $\varepsilon$, oder kein $\varepsilon = 1$ ist, etwa folgende drei Figuren:




$\varepsilon = 1;\ \varepsilon' = 1.$ $\varepsilon = 1;\ \varepsilon' = 0.$ $\varepsilon = 0;\ \varepsilon' = 0.$

Dabei hat man sich jedoch die Seite $\alpha\beta$, was in den Figuren nicht angedeutet ist, noch $m$ mal um den ganzen Kreis herumlaufend zu denken.

Setzen wir speziell $\eta = \frac{y_2}{y_1}$, unter $y_1$ die ausgezeichnete Lösung verstanden, so fällt der Schnittpunkt der drei Kreislinien ins Unendliche und man hat also den Satz:

<u>Die drei aufeinanderfolgenden Seiten unseres Polygons werden sich als gerade Linien darstellen, und die Ecken $a$ $b$ werden im Endlichen liegen oder im Unendlichen, je nachdem das zugehörige $\varepsilon$ bezw. $\varepsilon' = 0$ oder $= 1$ ist.</u>

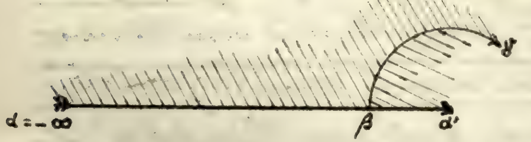
Sie sehen, was ich behaupte, ist genau in dem enthalten, was oben bewiesen ist, aber in der Form allgemeiner, da nur zwei Ecken in Rücksicht gezogen werden.

Der Beweis ist am einfachsten, wenn $\varepsilon=\varepsilon'=1$ ist.

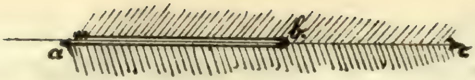
Nämlich $\frac{y_2}{y_1}$ fängt bei $a$ mit dem Wert $\infty$ an – da $y_1=0$ ist –, geht noch $m$ mal durchs Unendliche, und hört in $b$ wieder mit dem Wert $\infty$ auf. Die Ecken $\alpha$ und $\beta$ liegen also in der That in demselben Punkt der $\eta$-Ebene, nämlich, wenn man $\eta=\frac{y_2}{y_1}$ wählt, im Punkt $\infty$. Also

<u>Der erste Fall erledigt sich ohne weiteres, wenn man beachtet, dass $\frac{y_2}{y_1}$ von $\infty$ bis $\infty$ läuft, wenn $x$ von $a$ bis $b$ geht.</u>

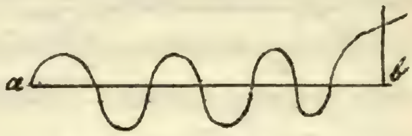
Im zweiten Falle $\varepsilon=1$, $\varepsilon'=0$ wird $\eta=\frac{y_2}{y_1}$ bei geeigneter Wahl der Lösung $y_2$ auf der reellen Axe von $-\infty$ nach einem endlichen Punkte $\beta$ laufen – dazwischen natürlich noch $m$ mal durch $\infty$ – wenn man $x$ von $a$ nach $b$ laufen läßt. Das folgende an $b$ anstoßende Segmentstück wird sich dann als ein



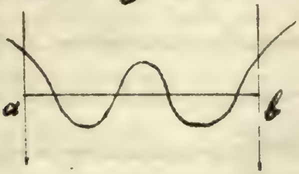

rechtwinklig an die gerade Linie $-\infty\beta$ angesetztes Kreisbogenstück darstellen. Nun denke man sich einerseits das $\eta$-Polygon an $\beta\gamma$ an-

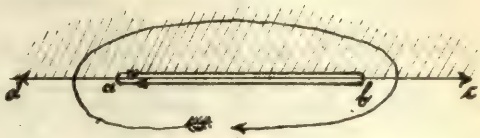



dererseits die positive $x$-Halbebene an $bc$ gespiegelt. Man sieht dann, daſs das untere Ufer des Segmentes $ab$ dem Spiegelbild der Strecke $-\infty\beta$, d. h. der Strecke $\beta\alpha'$ entsprechen muſs, wo $\alpha'$ den Mittelpunkt der Kreislinie $\beta\gamma$ bedeutet. Der Punkt $\eta$ wandert also von $-\infty$ nach $\beta$ und von da nach $\alpha'$, wenn $x$ von $a$ längs des oberen Ufers von $ab$ nach $b$ und dann längs des unteren Ufers nach $a$ zurückläuft. Nun denke man sich über dem Segment $ab$ die Curve $y_1$ gezeichnet. Wegen $\varepsilon' = 0$ hat dieselbe in $x = b$ überhaupt keinen singulären Punkt, wird also einfach wieder von $b$ nach $a$ zurück durchlaufen, wenn der Punkt $x$ von $b$ nach $a$ zurückläuft. $y_1$ muſs also mit dem Werte $0$, $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ folglich mit dem Werte $\infty$ endigen, wenn $x$ wieder von $b$ nach $a$ zurückkommt. Das heiſst aber, daſs der Punkt $\alpha'$, der Mittelpunkt der Kreislinie $\beta\gamma$, im Unendlichen liegt, daſs also die Kreislinie $\beta\gamma$ eine gerade Linie ist, was zu beweisen war.




Im dritten Falle $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ verläſst uns auch das Symmetrieprincip, und wir müssen zu dem allgemeineren Princip der analytischen Fortsetzung greifen.



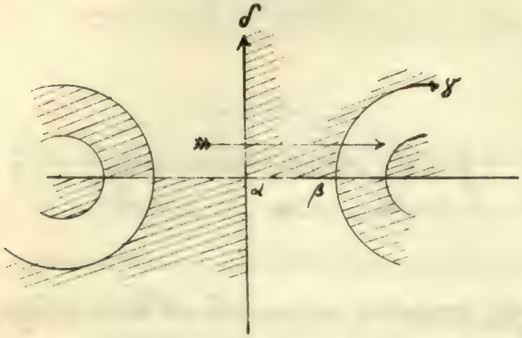

Da wegen $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ für $y_1$ weder a noch b ein singulärer Punkt ist, so reproducirt sich $y_1$, wenn $x$ einen geschlossenen Umlauf um beide Punkte a und b ausführt. Irgend eine andere Particularlösung $y_2$ dagegen wird sowohl bei Umlauf um a wie bei Umlauf um b je eine lineare Substitution erfahren, und zwar wegen des Exponenten $\frac{1}{2}$ von der Form $y_2' = -y_2 + c y_1$. Bei gleichzeitigem Umlauf um a und b bekommt man also

$$\left. \begin{aligned} y_2' &= y_2 + C y_1 \\ y_1' &= y_1 \end{aligned} \right\}$$

Folglich $\eta' = \eta + C$.

<u>Im dritten Falle bemerken wir zunächst, daß dem Umlauf um a b die parabolische Substitution $\eta' = \eta + C$ entspricht.</u>

Nun möge $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ so gewählt sein, daß die beiden von a auslaufenden Segmente der $x$-Axe sich auf zwei rechtwinklig zu einander stehende gerade Linien $\alpha\beta$, $\alpha\delta$

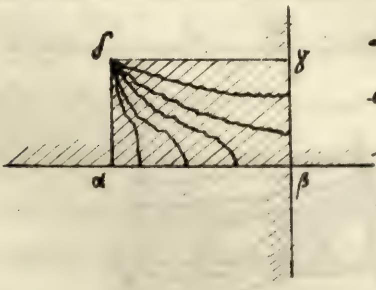



abbilden (was keine Partikularisation ist). Bc wird sich dann im Allgemeinen auf einen Kreisbogen $\beta\gamma$ abbilden, welcher in $\gamma$ rechtwinklich an $\alpha\beta$ ansetzt. Nun spiegeln wir die positive $x$-Halbebene an $ad$, und an $bc$ hintereinander. Von dem einen Spiegelbild zum andern gelangt man dann durch eine Umkreisung beider Punkte $a$ und $b$. Wenn man also in der $\eta$-Ebene in entsprechender Weise erst an der Geraden $\alpha\delta$, dann am Kreise $\beta\gamma$ spiegelt (vergl. den der Figur beigesetzten Pfeil), <u>so wird das erste Spiegelbild durch eine blose Parallelverschiebung $\eta' = \eta + C$ in das zweite übergehen müssen. Dies ist aber nicht anders möglich, als indem nicht nur die Kante $\alpha\delta$, sondern auch die Kante $\beta\gamma$ eine gerade Linie ist, was behauptet wurde.</u> —

Hiermit ist unser allgemeiner Satz vollständig bewiesen. Wendet man denselben im Falle von 4 singulären Punkten mit einer den drei Punkten $a, b, c$ gemeinsamen Fundamentallösung $y_1 = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}} \cdot P(x)$ zweimal an, so ergibt sich, daſs alle 4 Seiten des $\eta$ – 4Ecks als gerade Linien gewählt werden können, und daſs die den Punkten $a, b, c$ entsprechenden Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ rechte Winkel sind, die im Endlichen oder Unendlichen liegen, je nachdem $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = 0$ oder $= 1$ ist. Dabei muſs die Seite $\alpha\beta$ nach unserer Voraussetzung über die 0-Stellen von $P(x)$ noch $m$ mal, $\beta\gamma$ $n$ mal durchs Unendliche ziehen.

<u>Wir wollen nun zeigen, daſs ein so beschaffenes Viereck notwendig als vierten Winkel $\pi(2k + \frac{1}{2} + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'')$ hat, unter $k$ die Zahl $m+n$ verstanden.</u>

Di. d. 3. Juli 1894. Wir wollen dies nur für den Fall $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ näher ausführen. Wir müssen da 4 im Endlichen sich rechtwinklig kreuzende gerade Linien haben, zwischen denen eine Membran so einzuhängen ist, daſs $ab$ $m$ mal, $bc$ $n$ mal durch $\infty$ zieht. Ich setze hierfür

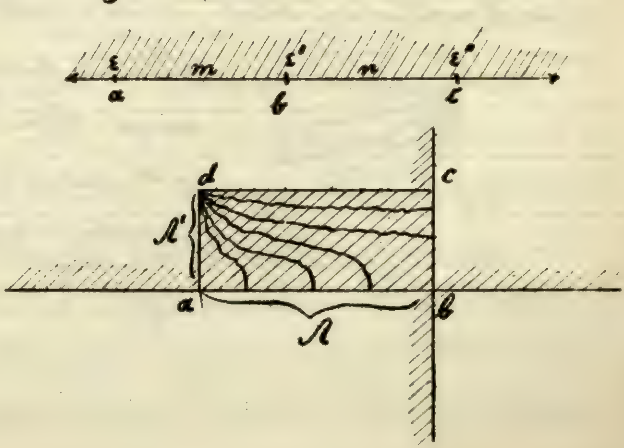


keine andere geometrische Möglichkeit, als die eines gewöhnlichen Rechtecks, an welches von $\delta$ nach $\alpha\beta$ $m$ Halbebenen, von $\delta$ nach $\beta\gamma$ $n$ Halbebenen polar eingehängt sind. (Des näheren vergleiche man wegen der Notwendigkeit dieser Construction Schönflies Math. Ann. 42) Dann wird aber in der That $\delta = 2(m+n)+\frac{1}{2}$, also $k = m+n$.

<u>Wir haben so von den Oscillationsbetrachtungen aus vollen Anschluss an die Theorie der Lamé'schen Polynome gewonnen.</u>

Wir wollen nun heute weiterhin den allgemeinen analytischen Character der Function $\eta$ untersuchen, welche die $x$-Ebene auf unser Kreisbogenviereck abbildet.

Wir werden vier verschiedene geometrische Bilder zueinander in Beziehung setzen, nämlich:

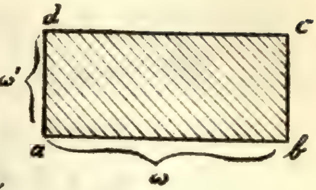



1.) Die $x$ Ebene mit den beiden Halbebenen, in die sie durch die reelle Axe zerlegt wird.

2.) Die $\eta$-Ebene, worin der positiven $x$-Halbebene das Rechteck mit den polar eingehängten Halbebenen entspricht.

3. Die Ebene der Variablen

$$s = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}},$$




welche die positive $x$-Halbebene auf ein <u>schlichtes</u> Rechteck abbildet.

4. Die zweiblättrige Riemann'sche Fläche der Function

$$s = 2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$


Wir wollen zuerst 1) und 4) vergleichen, insbesondere zusehen, was wir unter geschlossenen Wegen einerseits in der $x$-Ebene, andererseits in der Riemann'schen Fläche $x, s$ zu verstehen haben.

Es ist sofort zu sehen, dass in der $x$-Ebene schon jede Umkreisung eines einzelnen der Punkte $a$, $b$, $c$ ein geschlossener Weg ist, in der Riemann'schen Fläche aber erst eine Umkreisung zweier Verzweigungspunkte geschlossen ist. Wenn wir also von der Monodromiegruppe des $\eta$ sprechen, so müssen wir wohl unterscheiden, ob wir sie auf geschlossene Umläufe in der $x$-Ebene oder in der Riemann'schen Fläche beziehen. Die zweite Monodromiegruppe ist natürlich eine ausgezeichnete Untergruppe der ersten.

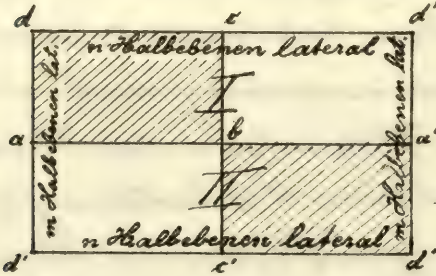
Bei geschlossenen Umläufen in der $x$-Ebene erleiden $y_1$, $y_2$, sowie $\eta$ Substitutionen von der Gestalt

$$y_1' = y_1 \qquad d\eta' = \pm d\eta, \qquad \eta' = \pm \eta + 2\Lambda,$$
$$y_2' = \pm y_2 + 2\Lambda y_1,$$

unter $2\Lambda$ gewisse Periodicitätsconstanten verstanden.

Diese Substitutionen resultiren geometrisch, wenn wir die Abbildung der positiven $x$ Halbebene auf das oben beschriebene $\eta$-Rechteck vermöge des Princips der Symetrie analytisch fortsetzen.

Man spiegele erst, indem man von den eingehängten Halbebenen absieht, das Rechteck an der Seite $bc$. So bekommt man als Bild der $x$-Ebene das mit I bezeichnete Doppelrechteck nebenstehender Figur.




Spiegeln wir nun das ganze nochmals an der unteren Kante $aba'$, so ist das genau dasselbe, als wenn man an die $x$ Ebene noch eine zweite $x$-Ebene längs $ab$ durch einen Verzweigungsschnitt anhängt. (wodurch wir zur zweiblättrigen Fläche über der $x$ Ebene übergehen). Aber um auch die in das $\eta$-Rechteck eingehängten Halbebenen zu berücksichtigen, so ist klar, dass an unserem vierfachen Rechteck die Einhängung etwa einer Halbebene von $d$ nach $ab$ zusammen mit der Einhängung der symmetrischen Halbebene von $d'$ nach $ab$ nichts anderes ist, als die laterale Anhängung einer Vollebene an die Kante $dd'$. Entsprechend bei den andern Kanten. Also

<u>Um unsere Figur, welche eine conforme Abbildung der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche auf die $\eta$-Ebene ist, möglichst einfach aufzufassen, denken wir uns das schlichte Rechteck $d\,d'\,d''\,d'''$ in der Weise erweitert, dass wir längs der horizontalen Kanten jedesmal $n$ Vollebenen, längs der verticalen Kanten jedesmal $m$ Vollebenen lateral anhängen.</u>

Den auf der $x$-Ebene geschlossenen Umläufen entsprechen, wie wir sahen, Substitutionen von der Gestalt $\eta' = \pm\eta + 2\Lambda$; z. B. einem Umlauf um $a$ die Substitution $\eta' = -\eta$, d. h. eine Drehung des Rechtecks $d\,a\,b\,c$ um den Punkt $a$ um den Winkel $\pi$. Alle andern Substitutionen kann man als blosse Verschiebungen ev. in Verbindung mit dieser ersten Drehung $\eta' = -\eta$ dar stellen

Betrachtet man dagegen nur Umläufe, die auf der Riemann'schen Fläche geschlossen sind, so ergibt sich folgendes:

Vervielfältigt man die gewonnene Figur $dd'd''d'''$ doppeltperiodisch, so hat man die sämtlichen Wertsysteme vor Augen, welche $\eta$ bei Umläufen auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche erhält, entsprechend der Formel

$$\eta' = \eta + 2r\Lambda + 2r'\Lambda',$$

wo $r, r'$ beliebige ganze Zahlen sind, $2\Lambda, 2\Lambda'$ die Zuwächse, welche $\eta$ erhält, indem man die geschlossenen Wege um $ab$ und um $bc$ auf der Riemann'schen Fläche zurücklegt.

In $y_1, y_2$ lauten die Substitutionen auf der zweiblättrigen Fläche

$$y_2' = y_2 + (2r\Lambda + 2r'\Lambda')y_1 \quad , \quad y_1' = y_1 .$$

Diese Formeln, welche sich auf die zweiblättrige Riemann'sche Fläche beziehen, unterscheiden sich von den auf die $x$-Ebene bezüglichen nur dadurch, dass das doppelte Vorzeichen fehlt und also nur parabolische Substitutionen vorkommen.

Bei allen diesen parabolischen Substitutio-

-nen bleibt die Lamé'sche Lösung $y_1$ ungeändert.

Wir werden überhaupt bei irgend einer binären Substitution der $y_1, y_2$ zu fragen haben, ob es solche lineare Combinationen von $y_1, y_2$ gibt, die sich bei der Substitution jede nur multiplicativ verhalten, d.h. ob es solche particuläre Lösungen der Differentialgleichung, Fundamentallösungen gibt, die bei dem betreffenden Periodenweg der Riemann'schen Fläche sich nur multiplicativ verhalten. Man hat von hier aus bekanntlich den Satz:

Zu jedem geschlossenen Wege der unabhängigen Variablen gehören zwei Fundamentallösungen der Differentialgleichung, welche bei Durchlaufung des geschlossenen Weges sich bis auf einen Factor reproduciren.

Im Falle einer parabolischen Substitution fallen die beiden Fundamentallösungen zusammen, im Falle einer rein multiplicativen Substitution ($y_1' = \varrho\, y_1$, $y_2' = \varrho\, y_2$) werden sie unbestimmt.

Hiermit bekommen wir eine besondere Bedeutung unserer Lamé'schen Polynome innerhalb der Monodromiegruppe:

Die doppeltzählende Fundamentallösung

welche in dem eben ausgesprochenen Sinn zu jeder einzelnen parabolischen Substitution zugehört, ist im Falle unserer Umläufe auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche allgemein das Lamé'sche Polynom selbst. Das Lamé'sche Polynom läßt sich also characterisiren als gemeinsame und einzige Fundamentallösung unserer Differentialgleichung für alle geschlossenen Wege, welche auf unserer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche möglich sind.

Wie ist überhaupt die Lamé'sche Differentialgleichung auf der $x, s$ Fläche statt auf der $x$- Ebene zu kennzeichnen?

Aus den Exponenten $\frac{1}{2}, 0$; $\frac{1}{2}, 0$; $\frac{1}{2}, 0$; $k+\frac{1}{2}, -k$ werden, wenn man sie auf der Fläche mißt, die Exponenten $1, 0$; $1, 0$; $1, 0$; $2k+1, -2k$. Folglich:

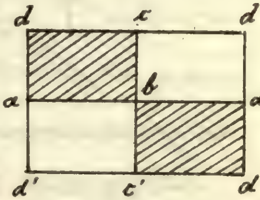
Unsere Lamé'sche Differentialgleichung betrachtet als Differentialgleichung auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche ist eine von den unverzweigten Differentialgleichungen auf dieser Fläche.

Sie hat nur an der Stelle $\infty$ einen Nebenpunkt.

Das Geschlecht der Fläche ist in unserem Falle = 1. Für die unverzweigten Differentialgleichungen auf $p = 1$ haben wir früher (S. 73) den Satz gelernt, dass $\eta, y_1, y_2$ eindeutige Functionen des Integrals erster Gattung, also der Variablen

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

sind. Insbesondere




Wenn $t$ sein Periodenparallelogramm durchläuft (die Schraffirung entspricht der Einteilung der Riemann'schen Fläche in zwei positive und zwei negative Halbebenen, wie oben beim $\eta$ Parallelogramm), so durchläuft $\eta$ die oben (S 316) gezeichnete Figur und von da aus ergibt sich die analytische Fortsetzung in übersichtlichster Form nach dem Gesetz der Symmetrie.

Fragen wir nun nach einer expliciten eindeutigen Darstellung von $\eta$ durch $t$, so bedenken wir, dass $\eta$ als Function von $t$ im Periodenparallelogramm, wenn wir uns auf den Fall $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ beschränken, an $m$ Stellen von $ab$ und den symmetrischen $m$ Stellen von $ba'$; ferner an $n$ Stellen von $bc$ und an den symmetrischen $n$ Stellen von $bc'$ je einfach unendlich wird, und bei Vermehrung von $t$ um die Perioden ebenfalls additive Perioden erhält.

Eine derartige Function läſst sich aber bekanntlich immer in der Form darstellen:

$$\eta = c_1 \zeta_1(t) + c_2 \zeta_2(t) + \dots + C \cdot t + C',$$

wobei $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ Integrale zweiter Gattung mit je einer einfachen $\infty$ Stelle im Parallelogramm sind.

Aber die Coefficienten sind nicht beliebig, sondern:

Von einer beliebigen Vereinigung von Integralen zweiter Gattung $c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \dots + C t + C'$ unterscheidet sich unser $\eta$ insbesondere dadurch, daſs sämmtliche Nullpunkte des Differentials

$$d\eta = \frac{x_2^{2k-1} \cdot dx}{(x-a)^{\frac{1}{2}} (x-b)^{\frac{1}{2}} (x-c)^{\frac{1}{2}} P_k(x_1, x_2)^2}$$

in die eine Stelle $d$ zusammenrücken.

Diese Eigenschaft könnte man an die Spitze stellen und so die Lehre von den Lamé'schen Polynomen von der Theorie der elliptischen

Integrale aus zur Ableitung bringen.

## Die Hermite'sche Gleichung.

Do. d. 5. Juli 1894.] Wir wollen heute über die Untersuchungen von Hermite über die Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dt^2} = (A\wp(t) + B)\,y$ berichten, welche zuerst 1872 in den „feuilles lithographiés de l'École Polytechnique" erschienen, und dann in den Comptes Rendus Bd. 85–94, 1877–1882 unter dem Titel: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" mitgeteilt sind.

Ich kann auf die Einzelheiten der Theorie, welche sich auf die elliptischen Functionen beziehen, nicht eingehen, sondern verweise in dieser Richtung auf die Zusammenstellung der Hermite'schen Untersuchungen bei Halphen im 2. Bd. seiner elliptischen Functionen. Dafür aber werde ich eine Reihe geometrischer und functionentheoretischer Gesichtspunkte hervorheben, wie ich es bereits in Math. Ann. 40 gethan habe.

Wenn die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (A x + B) . y$$

eine Lösung der Form

$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}} P_k(x)$$

haben soll, so muss $A$ die Gestalt haben

$$A = 2\kappa\,(2\kappa+1),$$

wo $\quad \kappa = k + \frac{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''}{2}$

der Grad der geforderten Lösung $y$, $2\kappa$ also eine beliebig vorzugebende ganze Zahl ist. $B$ ist dann durch die Forderung, dass $P$ ein Polynom sein soll, auf eine endliche Anzahl discreter Möglichkeiten eingeschränkt.

Hermite hat nun an diesem Werte

$$A = 2\kappa\,(2\kappa+1)$$

festgehalten, dem $B$ aber beliebige veränderliche Werte anzunehmen gestattet. Die Lamé'schen Polynome bezw. die zugehörigen $y$, erscheinen dann als gewisse specielle Fälle allgemeiner Functionen, welche bestimmten ausgezeichneten Werten des stetig veränderlichen Parameters $B$ entsprechen.

Zuerst wollen wir abzählen, wie viele solcher ausgezeichneten Werte von $B$ es bei gegebenem $A$ gibt.

Wir unterscheiden dabei, ob $2\kappa$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist

1. $2\kappa \equiv 1 \pmod 2$. Dann sind folgende 4 Fälle möglich:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ \varepsilon = 1\,,\ \varepsilon' = 0\,,\ \varepsilon'' = 0, \\ \text{II)}\ \varepsilon = 0\,,\ \varepsilon' = 1\,,\ \varepsilon'' = 0, \\ \text{III},\ \varepsilon = 0\,,\ \varepsilon' = 0\,,\ \varepsilon'' = 1, \end{array}\right\}\ k = K - \tfrac{1}{2}$$

$$\text{IV},\ \varepsilon = 1\,,\ \varepsilon' = 1\,,\ \varepsilon'' = 1. \quad k = K - \tfrac{3}{2}$$

In jedem der 4 Fälle ist die Zahl der zugehörigen Polynome gleich $k+1$, dem um 1 vermehrten Grade $k$ der Polynome, da sich ja die $k$ 0-Stellen genau auf $k+1$ Weisen auf die zwei Intervalle verteilen lassen.

Also hat man zu I, II, III je $K + \frac{1}{2}$, zu IV $K - \frac{1}{2}$ Polynome, zusammen also $4K+1$ Polynome. Also:

<u>Zu einem gegebenen Werte von $A$, oder was dasselbe ist, von $2K$, gehören bei freier Auswahl der $\varepsilon$ im vorliegenden Falle $4K+1$ Polynome und dementsprechend $4K+1$ ausgezeichnete Werte des accessorischen Parameters $B$.</u>

Ist

2.) $2K \equiv 0 \pmod 2$, so hat man die Fälle

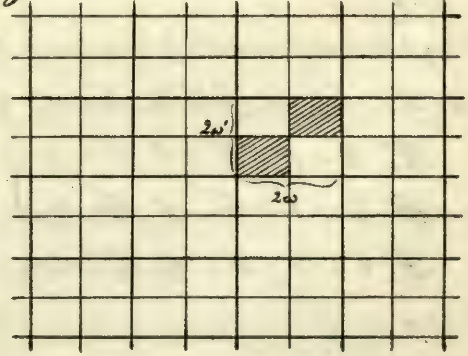
$$\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{l} \text{I.}\ \varepsilon = 0\,,\ \varepsilon' = 1\,,\ \varepsilon'' = 1, \\ \text{II.}\ \varepsilon = 1\,,\ \varepsilon' = 0\,,\ \varepsilon'' = 1, \\ \text{III.}\ \varepsilon = 1\,,\ \varepsilon' = 1\,,\ \varepsilon'' = 0, \end{array}\right\}\ k = K-1 & \begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{array} & \begin{array}{l} K \\ K \\ K \end{array} \\ \text{IV.}\ \varepsilon = 0\,,\ \varepsilon' = 0\,,\ \varepsilon'' = 0, \quad k = K & \text{"} & K+1 \\ \hline & \text{S}^{\text{a}} & 4K+1 \end{array}$$

Unsere Abzählung bleibt also im Resultat auch dann bestehen, wenn $2k$ eine gerade Zahl ist.

Nun werden wir mit Hermite auf die ausgezeichneten Werte des $B$ nur beiläufig achten, und $B$ ganz beliebige Werte annehmen lassen. $A$ dagegen werden wir festhalten $= 2k(2k+1)$, wo $2k$ irgend eine ganze Zahl ist. Die Folge davon ist, daß der Punkt $x = \infty$ nach wie vor die Exponenten $-k$, $k+\frac{1}{2}$ besitzt, während die Exponenten bei $x = a, b, c$ natürlich erst recht ungeändert bleiben. Daraus folgt:

Unsere Differentialgleichung ist bei dem Werte $2k(2k+1)$ von $A$ nach wie vor auf der Riemann'schen Fläche unverzweigt und der weitere Schluß ist, daß die Lösungen der Differentialgleichung in der Hülfsvariablen $t$ eindeutig sind.

Wir werden infolgedessen natürlich $t$ als unabhängige Veränderliche einführen.




Wir denken uns in der $t$ Ebene die Parallelogrammeinteilung. Jedem Periodenwege auf der

Riemann'schen Fläche $x, s$ entspricht dann in der $t$-Ebene der Fortschritt von einem Punkte des Ausgangsrechtecks zu dem congruenten Punkte eines andern Rechtecks, d. h. Vermehrung von $t$ um eine Periode. Alle Periodenwege auf der Fläche lassen sich wegen $p=1$ aus zweien zusammensetzen, und entsprechend alle Perioden der $t$-Ebene aus zwei primitiven Perioden $2\omega, 2\omega'$, den Seiten des Periodenrechtecks.

Bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und um $2\omega'$ müssen daher $y_1, y_2$ je eine lineare binäre Substitution $S$ und $T$ erfahren, aus denen sich durch Wiederholung und Combination die allgemeinste Substitution zusammensetzt, welche $y_1, y_2$ bei irgend einem Umlauf auf der Riemann'schen Fläche erleiden:

$$S) \quad \begin{aligned} y_1(t+2\omega) &= \alpha_{11} y_1(t) + \alpha_{12} y_2(t), \\ y_2(t+2\omega) &= \alpha_{21} y_1(t) + \alpha_{22} y_2(t), \end{aligned}$$

$$T) \quad \begin{aligned} y_1(t+2\omega') &= \beta_{11} y_1(t) + \beta_{12} y_2(t), \\ y_2(t+2\omega') &= \beta_{21} y_1(t) + \beta_{22} y_2(t). \end{aligned}$$

Diese $S$ und $T$ werden dann wegen der schon früher dargelegten Gründe mit einander vertauschbar sein, so dass $ST = TS$ ist. Ausserdem behaupte ich:

Die Substitutionen $S$ und $T$ haben im vorliegenden Falle die Determinante 1.

Denn aus $y_1'' = (A_x + B)y_1$

und $y_2'' = (A_x + B)y_2$

folgt. $y_1'' y_2 - y_2'' y_1 = \frac{d}{dt}(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0,$

$y_1' y_2 - y_2' y_1 = \text{Const.}$

Wenn man nun $y_1, y_2$ der Substitution $S$ oder $T$ unterwirft, so muss sich $y_1' y_2 - y_2' y_1$ mit der Substitutionsdeterminante multipliciren, was mit der Constanz des Ausdrucks nur so vereinbar ist, dass die Substitutionsdeterminante $= 1$ ist.

Nun werden wir versuchen, $S$ und $T$ je auf eine kanonische Form zu bringen. Da muss man unterscheiden, ob die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\rho + 1 = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln oder eine Doppelwurzel hat. Im ersten Falle ist $S$ nichtparabolisch, im zweiten Falle parabolisch. Im ersten Falle ist $\rho_1 \rho_2 = 1$, so dass man $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \frac{1}{\rho}$ setzen kann, im zweiten Falle dagegen ist $\rho^2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$.

Im nichtparabolischen Falle gibt es zwei Fundamentallösungen $y_1, y_2$ die sich der betreffenden

Periode gegenüber jede multiplicatio verhalten:

$$y_1(t+2\omega) = \varrho \cdot y_1(t),$$

$$y_2(t+2\omega) = \frac{1}{\varrho} \cdot y_2(t),$$

im parabolischen Falle dagegen existirt nur eine solche Fundamentallösung $y_1$, zu der man dann noch eine beliebige andere Lösung $y_2$ hinzunehmen muss, so dass sich die parabolische Substitution in der kanonischen Gestalt so schreibt:

$$y_1(t+2\omega) = \pm y_1(t),$$

$$y_2(t+2\omega) = \mu y_1(t) \pm y_2(t).$$

Nun möge $S$, welches wir zuerst als nicht-parabolisch voraussetzen wollen, in der kanonischen Gestalt geschrieben sein. Die Substitution $T$ soll nun mit $S$ vertauschbar sein, d.h.

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \varrho\beta_{11}, & \varrho\beta_{12} \\ \frac{1}{\varrho}\beta_{21}, & \frac{1}{\varrho}\beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}\varrho, & \beta_{12} \cdot \frac{1}{\varrho} \\ \beta_{21} \cdot \varrho, & \beta_{22} \cdot \frac{1}{\varrho} \end{pmatrix},$$

folglich

$$\varrho\beta_{12} = \beta_{12}\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{1}{\varrho}\beta_{21} = \beta_{21}\varrho,$$

also, da $\varrho$ von $\pm 1$ verschieden ist

$$\beta_{12} = \beta_{21} = 0.$$

Schreiben wir nun für $\beta_{11}$ und $\beta_{22}$ $\sigma$ und $\frac{1}{\sigma}$, mit Rücksicht darauf, dass die Substitutionsdeterminante $= \beta_{11} \cdot \beta_{22} = 1$ ist, so lautet $T$ notwendig

$$y_1(t+2\omega') = \sigma \cdot y_1(t),$$
$$y_2(t+2\omega') = \frac{1}{\sigma}\, y_2(t),$$

und wir haben somit den Satz:

Wegen der Vertauschbarkeit von $S$ und $T$ haben die beiden Substitutionen im vorliegenden nicht parabolischen Falle dieselben beiden Fundamentallösungen $y_1, y_2$ und lassen sich beide gleichzeitig in der hier hingeschriebenen kanonischen Form schreiben.

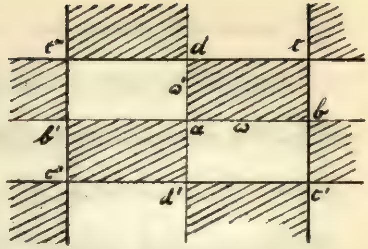
Analog im parabolischen Falle: mit $S$ zusammen ist auch $T$ parabolisch von der Form

$$y_1(t+2\omega') = \pm\, y_1(t),$$
$$y_2(t+2\omega') = \tau\, y_1(t) \pm y_2(t) \quad \left(\begin{array}{c}\pm \text{ unabhängig von} \\ \text{dem } \pm \text{ in } S\end{array}\right),$$

und die beiden parabolischen Substitutionen liefern dieselbe doppeltzählende Fundamentallösung.

Wir haben nun den functionentheoretischen Character der Fundamentallösungen im allgemeinen und im parabolischen Fall zu untersuchen.

Es möge die Ecke $a$ des Periodenparallelo-



gramms in den 0-Punkt der $t$-Ebene gelegt sein. Dann ist $x = \wp(t)$ eine gerade Function des Arguments $t$. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\mathfrak{A}\wp(t) + \mathfrak{B})y$$

bleibt daher ungeändert, wenn man $t$ durch $-t$ ersetzt. Ersetzt man also in einer Lösung, etwa in $y_1$, $t$ durch $-t$, so muſs man wieder eine Function von $t$ bekommen, welche eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wir wollen sehen, in welcher Beziehung die Lösungen $y_1(-t)$, $y_2(-t)$ zu den Lösungen $y_1(t)$, $y_2(t)$ stehen.

Wir schreiben, um zuerst vom allgemeinen Fall zu reden, Sin der Form:

$$y_1(t) = \frac{1}{\rho}\cdot y_1(t+2\omega),$$
$$y_2(t) = \rho\cdot y_2(t+2\omega).$$

Ersetzen wir nun $t$ durch $-t-2\omega$, so ergibt sich

$$y_1(-t-2\omega) = \frac{1}{\rho}\, y_1(-t),$$
$$y_2(-1-2\omega) = \rho\cdot y_2(-t),$$

d.h. $y_1(-t)$ als Function von $t$ betrachtet multiplicirt sich bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ mit $\frac{1}{\rho}$, $y_2(-t)$ mit $\rho$. Diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche sich mit

$\frac{1}{\rho}$ multiplicirt, ist aber notwendig abgesehen von einem Factor, den ich durch geeignete Bestimmung der willkürlichen multiplicativen Constante in $y_2$ gleich 1 machen kann, identisch mit $y_2(t)$ und die Lösung, die sich mit $\rho$ multiplicirt, identisch mit $y_1(t)$. Also ist im vorliegenden allgemeinen Falle:

$$y_1(-t) = y_2(t)$$

$$y_2(-t) = y_1(t).$$

Ebenso ergibt sich im parabolischen Fall, dass $y_1(-t)$ von $y_1(t)$ selbst nur um einen constanten Factor verschieden sein kann:

$$y_1(-t) = \alpha \cdot y_1(t).$$

Vertauscht man hierin $t$ mit $-t$, so ergibt sich nach Umsetzung der Seiten und Division mit $\alpha$

$$y_1(-t) = \frac{1}{\alpha} \cdot y_1(t),$$

also $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, mithin $\alpha = \pm 1$ und

$$y_1(-t) = \pm\, y_1(t).$$

<u>Wir bilden jetzt das Product</u>

$$y_1 \cdot y_2 \text{, \underline{beziehungsweise}}$$

<u>im parabolischen Fall, das Quadrat</u> $y_1^2$.

Man sieht, dass $y_1 y_2$ bezw. $y_1^2$ eine gerade Function von $t$ ist, welche sich nicht ändert, wenn man $t$ um $2\omega$ oder um $2\omega'$ vermehrt.

Eine solche Function ist aber, wenn sie, wie hier keine wesentlich singulären Stellen im Periodenparallelogramm besitzt, notwendig eine rationale Function von $p(t) = x$.

Da für $y_1$ und $y_2$ die Stelle $t = 0$ d. h. $p(t) = x = \infty$ überhaupt die einzige singuläre Stelle im Periodenparallelogramm ist, so muss die besagte rationale Function von $p(t) = x$ eine ganze Function sein, und wir haben also das Resultat:

Im parabolischen Falle wird $y_1^2$ ein Polynom in $x$ (und wir kommen also gerade zum Falle der Lamé'schen Polynome zurück); in den andern Fällen aber, die jetzt neu hinzutreten, ist $y_1 \cdot y_2$ ein Polynom in $x$.

Fr. d. 6. Juli 1894.] Um die letzte Bemerkung noch näher auszuführen:

Wenn $y_1^2$ ein Polynom ist, so müssen, da $y_1$ nur in $a, b, c, \infty$ verzweigt sein kann, alle Wurzeln des Polynoms, welche nicht nach $a, b, c$ fallen, Doppelwurzeln sein, und wir kommen also, indem wir die Quadratwurzel ausziehen, zu dem Ausdruck:

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\, P(x),$$

was gerade die frühere zum Lamé'schen Falle führende Forderung ist. Also:

Wenn S und T parabolisch sind, kommt man notwendig zum Lamé'schen Ausnahmefall. (Bisher hatten wir nur gewusst, dass der Lamé'sche Ausnahmefall zu parabolischen S, T führt).

Wir setzen allgemein:

$y_1 \cdot y_2 = F_{2k}(x) = x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + a_2 x^{2k-2} + \dots + a_{2k-1} x + a_{2k}$.

Der parabolische Fall ist hierin mit enthalten, insofern $y_2$ mit $y_1$ gegebenenfalls identisch werden kann.

Im speciellen Falle hat $F(x)$ den Wert

$$(x-a)^{\varepsilon}(x-b)^{\varepsilon'}(x-c)^{\varepsilon''} \cdot E_k(x)^2,$$

so dass alle Wurzeln von $F(x)$, welche nicht nach a, b, c fallen, Doppelwurzeln sind, und dass nach jedem der Punkte a, b, c entweder keine oder nur eine Wurzel fällt.

Im allgemeinen Falle dagegen verschwindet $F(x)$ in keinem der Punkte a, b, c, und hat in den andern Punkten keine Doppelwurzeln.

Die letzten Behauptungen sieht man so ein: Verschwände $y_1$ in a, so müsste es eine Entwicklung haben:

$$y_1 = (x-a)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_1(x-a).$$

$y_2$ muss dann folgende Gestalt haben:

$$y_2 = (x-a)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_1(x-a) + \mathfrak{P}_2(x-a),$$

wobei das Anfangsglied von $\mathfrak{P}_2$ nicht verschwinden kann, da sonst $y_2$ mit $y_1$ zusammenfiele.

Multiplicirt man aber nun $y_1 \cdot y_2$ aus, so kann $(x^2-a)^{\frac{1}{2}}$ nicht herausfallen, sondern es bleibt mit der gewiss nicht verschwindenden Potenzreihe $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2$ multiplicirt. $y_1 y_2$ könnte daher kein Polynom sein.

Sollte endlich $y_1 y_2$ im Intervall eine Doppelwurzel haben, so müsste entweder $y_1$ oder $y_2$ eine Doppelwurzel haben, oder $y_1$ und $y_2$ müssten eine gemeinsame Wurzel haben. Das erste ist unmöglich, weil sonst ein singulärer Punkt vorläge, das zweite, weil dann $y_2$ mit $y_1$ zusammenfiele.

Wir gehen nunmehr mit unseren analytischen Entwicklungen weiter.

Die tiefere Bedeutung der Hermite'schen Theorie, welche wir gestern begonnen haben und heute noch ein wenig fortsetzen, liegt darin, dass sie zum ersten Male die Lösung linearer Differentialgleichungen mit den elliptischen Functionen in Verbindung brachte.

Das wesentliche dabei ist, dass die Lösungen <u>eindeutige</u> Functionen der Hülfsvariablen $t$ werden.

Die Untersuchungen von Hermite haben bald darauf durch Poincaré ihre Fortsetzung in der Weise gefunden, daß man lineare Differentialgleichungen auf höheren Riemann'schen Flächen studirt und nun die algebraischen Functionen der Fläche als eindeutige automorphe Functionen einer Hülfsvariablen darstellt.

Aber so weit sind wir noch nicht; wir wollen noch den Hermite'schen Fall weiter discutiren, indem wir uns fragen, wie $F$ berechnet werden kann. Wir sagen zunächst:

<u>$F = y_1 y_2$ oder $= y_1^2$ genügt, wie überhaupt die quadratischen Verbindungen $y_1^2, y_1 \cdot y_2, y_2^2$ einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung, und zwar ist es die einzige Lösung derselben, welche ein Polynom oder überhaupt eine doppeltperiodische Function ist.</u>

Letzteres sieht man sofort, wenn man auf die Substitutionsformeln $S$ und $T$ zurückgeht.

Diese Differentialgleichung 3. Ordnung berechnen wir nun. Wir haben der Reihe nach:

$$z = y^2, \quad z' = 2yy', \quad z'' = 2yy'' + 2y'^2 = 2(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B})y^2 + 2y'^2,$$

$$z''' = 2\mathfrak{A}x'y^2 + 4(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B})yy' + 4y'y'' = 2\mathfrak{A}x'y^2 + 8(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}) \cdot yy'.$$

Im Ausdruck für $z'''$ setzen wir

$$y^2 = z, \quad 2yy' = z'$$

ein und bekommen so die gesuchte Gleichung:

$$z''' = 4(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}).z' + 2\mathfrak{A}x'z.$$

Um nun zu sehen, durch welches Polynom in $x$ derselben genügt wird, führen wir noch für $A$ die unabhängige Variable $x$ ein, wodurch wir erhalten:

$$2f.\frac{d^3z}{dx^3} + 3f'.\frac{d^2z}{dx^2} + (f'' - 2\mathfrak{A}x - 2\mathfrak{B})\frac{dz}{dx} - \mathfrak{A}z = 0.$$

$$\bigl(f = (x-a)(x-b)(x-c)\bigr).$$

Es ist dann leicht durch Einsetzen von

$$\mathfrak{F}(x) = z = x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \dots + a_{2k}$$

ein recurrentes Bildungsgesetz für die $a_1, a_2, \dots a_{2k}$ zu berechnen.

Wir sehen nun $\mathfrak{F}$ als bekannt an; wir wollen daraus $y_1$ und $y_2$ selbst berechnen. Es ist

$$\mathfrak{F} = y_1 \cdot y_2,$$

$$\mathfrak{F}' = y_1' y_2 + y_1 y_2'.$$

Dazu ist $\mathfrak{C} = y_1' y_2 - y_1 y_2'$. (vergl. S. 328)

Die Constante $\mathfrak{C}$ muss jedoch noch berechnet werden. Wir bilden

$$\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{F}'^2 - 4y_1 y_2 \cdot y_1' y_2' = \mathfrak{F}'^2 - 4\mathfrak{F} y_1' y_2',$$

$$\mathfrak{F}'' = 2y_1' y_2' + y_1'' y_2 + y_1 y_2'' = 2y_1' y_2' + 2(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}) y_1 y_2$$

$$= y_1' y_2' + 2(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}).\mathfrak{F},$$

$$2y_1' y_2' = \mathfrak{F}'' - 2(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}).\mathfrak{F}.$$

Dies in $\mathfrak{C}^2$ eingeführt ergibt:

$$\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{F}'^2 - 2\mathfrak{F}\mathfrak{F}'' + 4(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}).\mathfrak{F}^2.$$

Unser Polynom $F$ hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass
$$F'^2 - 2F\,F'' + 4(Ax + B).F^2$$
eine Constante $C^2$ ist *)

Ist $y_2 = y_1$, so ist $y_1' y_2 - y_1 y_2' = 0$, also $C = 0$ {so dass wir aus dem $F$ selbst über das Eintreten des parabolischen Falles entscheiden können.

Nun berechnen wir $y_1$ und $y_2$ selbst.

Ist $C = 0$, so ist $y_1^2 = F$ und also
$$y_1 = \sqrt{F}.$$

Ist aber $C$ von $0$ verschieden, so folgt aus
$$F' = y_1' y_2 + y_1 y_2'$$
$$C = y_1' y_2 - y_1 y_2'$$
$$F = y_1 y_2,$$
dass $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{F' + C}{2F}$, $\frac{y_2'}{y_2} = \frac{F' - C}{2F}$, ist folglich:
$$y_1 = \sqrt{F}\cdot e^{+\int\frac{C}{2F}.dt}, \quad y_2 = \sqrt{F}\cdot e^{-\int\frac{C}{2F}.dt}.$$

Auf solche Weise kann man die $y_1, y_2$ im gegebenen Falle wirklich mit Hülfe von $F$ berechnen.

Natürlich zeigen diese $y_1, y_2$ bei Vermehrung des $t$ um Perioden ein multiplicatives Verhalten.

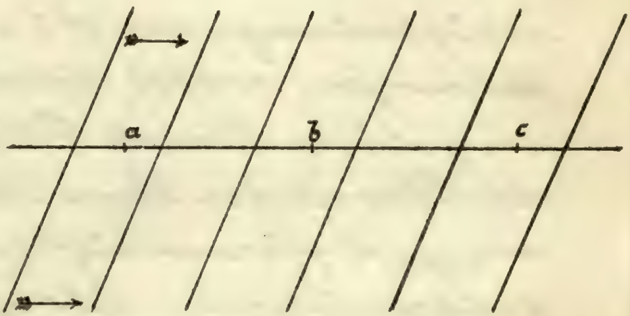
Hermite bezeichnet solche Functionen als doppelt periodische Functionen der zweiten Art und untersucht allgemein, wie man solche doppelt periodische Functionen der $2^{\text{ten}}$ Art durch $\vartheta$-Functionen darstellen kann.

Wir wollen diese analytischen Fragestellungen

*) Wie schreibt sich das vermöge homogene Variable in invariante Form?

gen nicht weiter verfolgen, statt dessen aber versuchen, uns von den Eigenschaften der Hermite'schen Gleichung im Reellen wie im Complexen ein möglichst vollständiges geometrisches Bild zu machen. In der That ordnet sich die Hermite'sche Gleichung vortrefflich in unseren allgemeinen geometrischen Gedankengang ein. Im vorigen Winter haben wir die geometrische Theorie der linearen Differentialgleichungen mit 3 singulären Puncten entworfen, wobei mit den Exponenten der singulären Puncte Alles gegeben war. Mit der Theorie der Lamé'schen Polynome sind wir zu Differentialgleichungen mit 4 singulären Puncten übergegangen. Aber dabei lag noch eine Specialisirung vor, durch welche die Fragestellung den Entwicklungen des vorigen Winters noch besonders nahe gerückt erscheint: Differentialgleichungen mit 4 singulären Puncten enthalten neben den Exponenten an sich noch einen accessorischen Parameter (das B der Hermite'schen Gleichung), dieser aber muss, im Falle der Lamé'schen Polynome, noch in ganz specieller Weise festgelegt werden. Es ist offenbar ganz consequent, dass wir jetzt zur Betrachtung solcher Gleichungen mit 4 singulären Punkten übergehen, bei denen das $B$ willkürlich bleibt.

Wir beginnen die geometrische Discussion der Hermite'schen Gleichung im Reellen. Wir betrachten zunächst die Lage der Hülfsgeraden $y = Ax + B$. Dieses ist ja von vornherein klar, dass sich die Hülfsgerade bei veränderlichem $B$ parallel mit sich selbst verschiebt. Wir werden vor allen Dingen fragen, welches die $4k+1$ Lagen dieser Hülfsgeraden sind, die den $4k+1$ Fällen Lamé'scher Polynome entsprechen? Wie insbesondere diese $4k+1$ Lagen nach der Verteilung der Polynomwurzeln und den Werthen der $e, e', e''$ aufeinander folgen?




Wir wollen uns an das Beispiel $2\kappa = 5$, also $A = 30$, $4\kappa + 1 = 11$ halten. Wir fragen:

Wo liegen die Hülfsgeraden der 11 ausgezeich-

<u>neten Fälle? in welche Intervalle sind sie eingeschlossen? und wie folgen sie aufeinander?</u>

Wir haben da 4 Kategorien zu unterscheiden:

| I | II | III |
|---|---|---|
| $\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0,\ \varepsilon''=1$ | $\varepsilon=0,\ \varepsilon'=1,\ \varepsilon''=0$ | $\varepsilon=1,\ \varepsilon'=0,\ \varepsilon''=0$ |
| 3 Fälle | 3 Fälle | 3 Fälle |

IV

$\varepsilon=1,\ \varepsilon'=1,\ \varepsilon''=1$

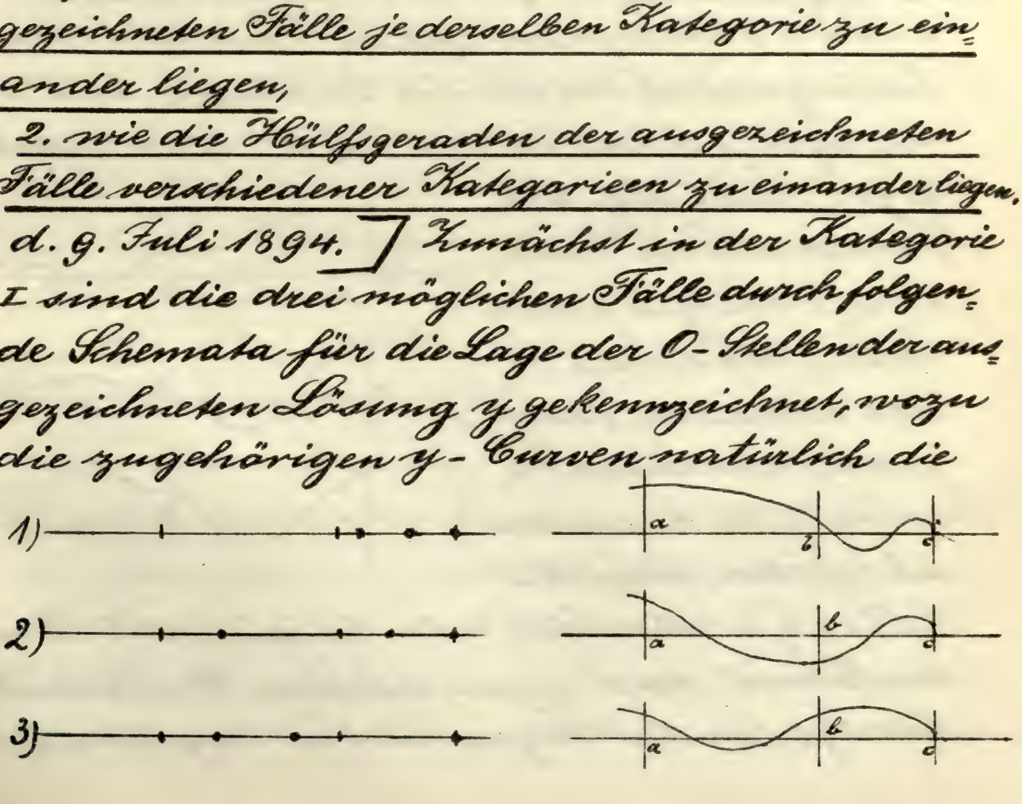
2 Fälle.

<u>Es soll sich darum handeln:</u>

<u>1. zu untersuchen, wie die Hülfsgeraden der ausgezeichneten Fälle je derselben Kategorie zu einander liegen,</u>

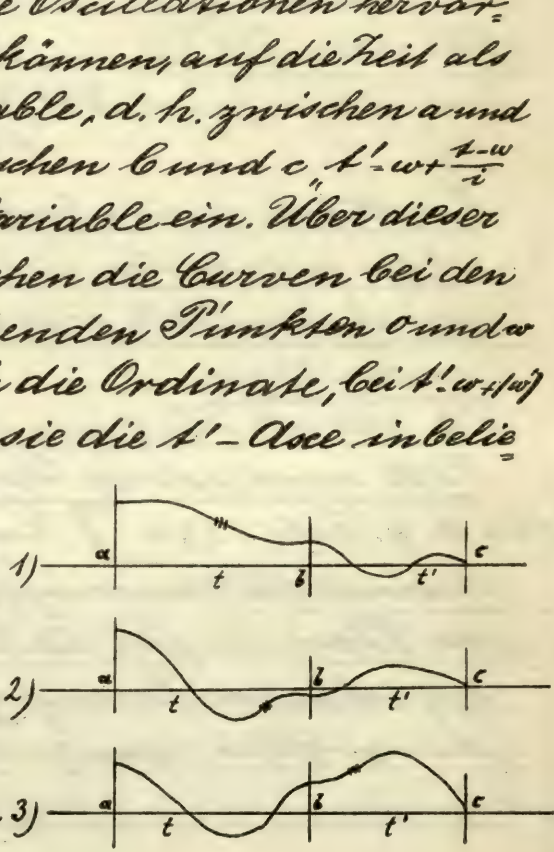
<u>2. wie die Hülfsgeraden der ausgezeichneten Fälle verschiedener Kategorieen zu einander liegen.</u>

Mo. d. 9. Juli 1894.] Zunächst in der Kategorie I sind die drei möglichen Fälle durch folgende Schemata für die Lage der 0-Stellen der ausgezeichneten Lösung y gekennzeichnet, wozu die zugehörigen y-Curven natürlich die



rechts gezeichnete Gestalt haben, indem sie durch die Ordinate bei a und b, wo $E$ bezw. $E' = 0$ ist, in beliebiger Weise hindurchgehen, bei c aber, wo $E'' = 1$ ist, die $x$ = Axe senkrecht schneiden.

Wir reduciren diese Curven, um die elastische Kraft, welche die Oscillationen hervorruft, beurteilen zu können, auf die Zeit als unabhängige Variable, d. h. zwischen a und b führen wir $t$, zwischen b und c $t' = \omega + \frac{t-\omega}{i}$ als unabhängige Variable ein. Über dieser $t$- bezw. $t'$-Axe gehen die Curven bei den a und b entsprechenden Punkten $0$ und $\omega$ horinzontal durch die Ordinate, bei $t' = \omega + i(\omega)$ dagegen schneiden sie die $t'$-Axe in beliebiger Richtung. Die Curven müssen Wendepunkte besitzen an den Stellen, wo sie die $t$-Axe schneiden, ferner, wo sie aus einem Intervall in das andere übertreten, ohne die




$t$-Axe zu schneiden, also bei a und b. Wenn die Curve noch einen weiteren Wendepunkt besitzt, (in der Figur mit $\#$ bezeichnet), so

-muſs dieser der Stelle entsprechen, wo die Hülfs-gerade die x-Axe schneidet. In der Fig 1) ist es nun, da die Curve sowohl die Ordinate a wie b horizontal schneiden muſs, ohne einmal durch die Axe zu gehen, klar, daſs noch ein solcher Wendepunkt im Intervall liegen, daſs also die Hülfsgerade die x-Axe im Intervall ab schneiden muſs. Bei 2) und 3) läſst sich nur noch angeben, daſs wenigstens entweder in ab oder in bc ein Wendepunkt liegen muſs, welcher den Schnitt der Hülfsgeraden mit der x-Axe anzeigt. Denn die Curve muſs sowohl im Intervall ab wie im Intervall bc wenigstens teilweise concav gegen die t-Axe sein, da sie sonst bei ihrer horizontalen Richtung in b die t Axe nicht innerhalb bezw. am Ende des betr. Intervalls erreichen könnte. Bei b muſs aber ein Wechsel von Concavität zu Convexität eintreten, es sei denn, daſs die Hülfsgerade genau in b die x-Axe schnitte, was ein specieller Fall ist, den wir hier ausschlieſsen dürfen. Die Curve wird sich also von b aus entweder in ab hinein oder in bc hinein convex erstrecken, und sie muſs daher in diesem Intervalle noch einen Wendepunkt besitzen, w. z. b. w. Wir haben also für die Lage der Hülfsgeraden zunächst folgendes Resultat:

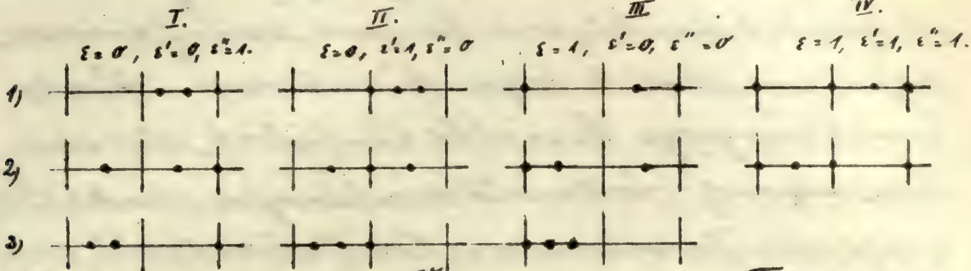
Im Falle 1) muss die Hülfsgerade die x-Axe notwendig zwischen a und b schneiden, in den Fällen 2) und 3) wenigstens noch zwischen a und c.

Ich behaupte nun aber noch genauer:

Die Hülfsgerade des Falles 1) liegt am höchsten, dann kommt die Hülfsgerade des Falles 2) und dann die Hülfsgerade des Falles 3).

Diese Angabe über die gegenseitige Lage der drei Hülfsgeraden entspricht einfach dem Umstande, dass wir für das Stück bc der x-Axe bei denselben Randbedingungen das eine Mal $2\frac{1}{2}$, das andere Mal $1\frac{1}{2}$ und das drittemal nur $\frac{1}{2}$ Halboscillationen haben, was nur damit verträglich ist, dass in dem Elasticitätscoefficienten $Ax+B$ die Constante $B$ das erste Mal den grössten, das letzte Mal den kleinsten Wert hat.

Discutiren wir in derselben Weise, wie hier die Fälle der Kategorie I, auch die Kategorien II, III, IV, so finden wir innerhalb jeder dieser Kategorieen die durch folgende Schemata gegebene Reihenfolge, wobei immer die Fälle einer Kategorie nach abnehmenden Werten von $B''$ geordnet sind.




Schwieriger, als die Reihenfolge der Fälle je einer Kategorie, ist die Reihenfolge der Fälle verschiedener Kategorieen zu beurteilen. Ich behaupte: <u>Was die gegenseitige Reihenfolge aller 11 ausgezeichneten Hülfsgeraden angeht, so kommt zuerst immer eine Hülfsgerade aus I, dann eine aus II, dann eine aus III, dann eine aus IV u. s. f.</u>


Man bekommt so folgendes Schema für die Anordnung der 11 Fälle nach abnehmenden Werten der zugehörigen Werte von $B''$.

Um die Werte $B''$ für irgend zwei aufeinanderfolgende Wurzelverteilungen zu vergleichen, braucht man nur die Oscillations-werte in einem solchen der beiden Intervalle $ab$, $bc$ zu vergleichen, in welchem entweder die Anfangs- oder die Endbedingung für $\frac{y'}{y}$ übereinstimmt; (das letztere kommt darauf hinaus, dass man statt $t$ bezw. $t'$ $-t$ resp. $-t'$ als unabhängige Variable einführt, also die Schwingung rückwärts durchlaufen denkt). Dann zeigt eine Zunahme der Oscillationszahl in $ab$, oder eine Abnahme der Oscillationszahl in $bc$ immer eine Abnahme des Wertes von $\breve{B}$ an.

Z. B. um $\breve{B}_1$ und $\breve{B}_2$ zu vergleichen, achte man auf das Intervall $ab$, in welchem die Grenzbedingung $\left(\frac{y'}{y}\right) = 0$ gemeinsam ist. Dabei ist die Oscillationszahl für $\breve{B}_1$ gleich $0$, für $\breve{B}_2$ gleich $\frac{1}{2}$, folglich $\breve{B}_1 > \breve{B}_2$.

Für die Vergleichung von $\breve{B}_2$ und $\breve{B}_3$ benutze man $bc$, in welchem die Endbedingung $\left(\frac{y'}{y}\right)_c = 0$ übereinstimmt, die Oscillationszahlen aber $2\frac{1}{2}$ und $2$ sind, woraus $\breve{B}_2 > \breve{B}_3$ folgt. So fortfahrend gewinnt man in der That die Ungleichung

$$\breve{B}_1 > \breve{B}_2 > \breve{B}_3 > \breve{B}_4 > \breve{B}_5 > \breve{B}_6 > \breve{B}_7 > \breve{B}_8 > \breve{B}_9 > \breve{B}_{10} > \breve{B}_{11},$$

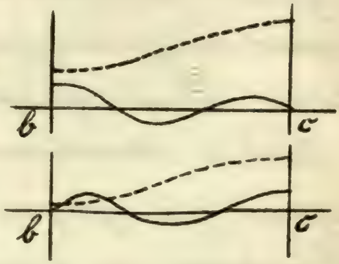
welche zu beweisen war.

Dabei stellt sich ein scheinbarer Widerspruch heraus, indem beim Übergang von einem $B_\nu$ zum nächsten die Oscillationszahl sich immer nur in dem einen der beiden Intervalle ändert. Es fragt sich, wie es mit unserer physikalischen Anschauung vereinbar ist, dass trotz durchgängiger Zunahme des Elasticitätscoefficienten im ganzen Intervall doch die Schwingungszahl die gleiche bleibt? Darauf ist zunächst zu sagen:

Unser Satz von der Zunahme der Oscillationszahl bei durchgängiger Zunahme des elastischen Kraftcoefficienten war nur für den Fall bewiesen, dass wenigstens eine der beiden Grenzbedingungen des Intervalls dieselbe bleibt.

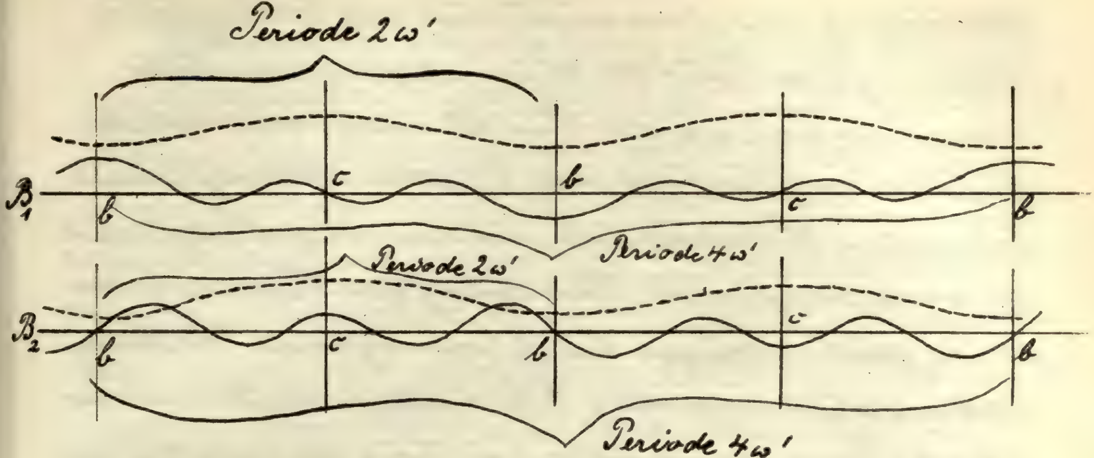
Lassen sie uns nun z. B. auf das Intervall $bc$ in den Fällen $B_1$ und $B_2$ achten. Die Oscillationszahl ist jedesmal $2\frac{1}{2}$, die Grenzbedingungen aber sind gegenseitig vertauscht, nämlich $\left(\frac{y'}{y}\right)_b = 0$, $\left(\frac{y'}{y}\right)_c = \infty$ bei $B_1$, $\left(\frac{y'}{y}\right)_b = \infty$, $\left(\frac{y'}{y}\right)_c = 0$ bei $B_2$. Der Satz findet also keine Anwendung.

Aber wir werden wünschen, die Sache noch vollständiger zu verstehen. Zu dem Zwecke zeichnen wir die entsprechenden $y$-Curven, wie sie über $t'$ sich darstellen; zugleich möge in jede der Figuren die Curve eingezeichnet werden, weche der Hülfsgeraden über der $x$-Axe entspricht (gestrichelt); sie möge als „Hülfscurve" benannt werden; die Curve, welche der Lösung $y$ der Differentialgleichung entspricht,




welche den Ort des schwingenden Punktes wiedergibt, heiße die „Ortscurve". Die Hülfscurven der beiden Fälle sind natürlich congruent, nur die Ordinaten der zweiten um eine constante Strecke gegen die Ordinaten der ersten verkleinert.

Nun denken wir uns beide Figuren nach links und rechts über der $t'$-Axe analytisch fortgesetzt (also nicht wie die Figuren auf S. 342 ; wo links und rechts von $b$ verschiedene unabhängige Variablen gelten, sondern wie in Fig. auf S. 279): Die Hülfscurve wie die Ortscurve erweitern sich dann zu periodischen Curven, und zwar, wie man sieht, die erstere zu einer solchen mit der Periode $2\omega'$, die letztere zu einer solchen mit der Periode $4\omega'$ (unter $2i\omega'$ die verticale Seite des Periodenparallelogramms der t-Ebene verstanden)



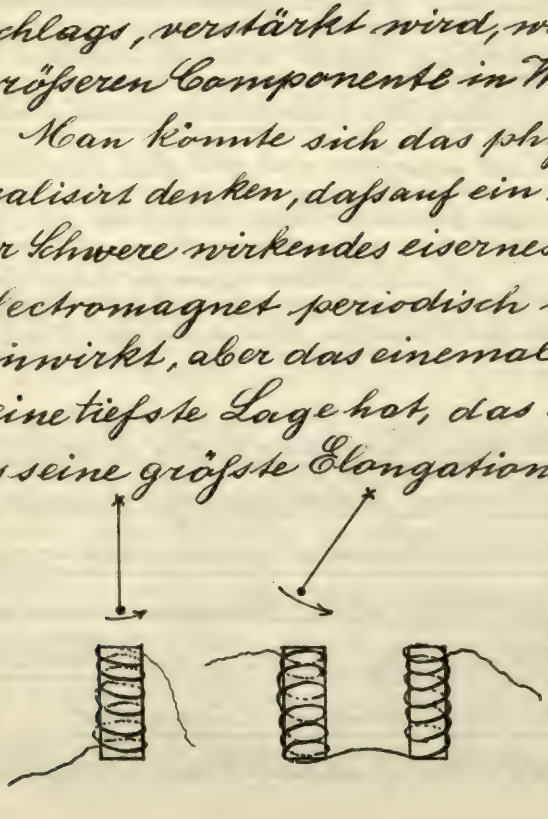

Wir haben beidemal zwei periodische Orts=curven von derselben Zahl von 0=Stellen bei zwei periodischen Kräften, von denen die eine um ein constantes Stück größer ist als die andere.

Der Unterschied der beiden Fälle liegt in der Phase. Das eine Mal ist bei b ein Schwingungsbauch und bei c ein Schwingungsknoten, das andere Mal ist es umgekehrt:

Das eine Mal fällt das Minimum des Elasticitäts coefficienten mit einem Schwingungsbauche, das Maximum mit einem Knoten zusammen, das andere Mal umgekehrt das Minimum des Elasticitätscoefficienten mit einem Knoten, das Maximum mit einem Bauche.

Nun ist aber doch die elastische Kraft selbst nicht nur von dem Elasticitätscoefficienten abhängig, sondern auch von der Elongation des bewegten Punktes. Wenn also in der Nähe eines Knotens, wo der Punkt nicht weit von der t' Axe entfernt ist, der Elasticitätscoefficient über den Durchschnitt hinaus vergrößert wird, so wird das für die Bewegung des Punktes jedenfalls viel weniger beschleunigende Wirkung haben, als wenn der Elasticitätscoefficient eine gleiche Zeit lang, aber zur Zeit des größten Ausschlags, verstärkt wird, wo er mit einer viel größeren Componente in Wirkung tritt.

Man könnte sich das physikalisch etwa so realisirt denken, daß auf ein unter dem Einfluß der Schwere wirkendes eisernes Pendel noch ein Electromagnet periodisch im Sinn der Schwere einwirkt, aber das einemal, wenn das Pendel seine tiefste Lage hat, das andere Mal, so oft es seine größte Elongation hat:



Also:

<u>Die elastische Kraft wird viel besser ausgenutzt, wenn die Maxima der elastischen Kraft auf die Schwin=</u>

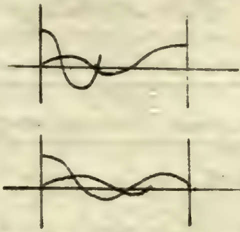
gungsbäuche fallen und die Minima auf die Knoten, als umgekehrt.

Wir schliessen hieraus, dass im Falle $B_2$ die elastische Kraft besser zur Beschleunigung für die Schwingung des Punktes $y$ ausgenutzt wird, als im Falle $B_1$. Da aber das Resultat das Gleiche ist, nämlich 10 Halboscillationen auf die Periode $4\omega'$, so schliessen wir, dass die elastische Kraft im ersten Falle grösser ist als im Falle 2), dass die Hülfscurve in 1) also grössere Ordinaten hat als im Falle 2).

Di. d. 10. Juli 1894.] Wir haben gestern gesehen, dass die ausgezeichnete, nämlich die periodische Lösung $y_1$ im Falle $B_2$ trotz der geringeren Elasticität doch dieselbe Oscillationszahl aufweist, wie im Falle $B_1$, weil die elastische Kraft im Falle $B_2$ besser ausgenutzt wird.

Wie steht es nun aber mit der allgemeinsten, nichtperiodischen Lösung $y_2$ der Differentialgleichung? Deren Anfangsbedingungen kann man doch gewiss so einrichten, dass schon im Falle $B_1$ sofort die günstigste Ausnutzung der elastischen Kraft vorliegt, oder im Falle $B_2$, dass sofort die ungünstigste

Ausnutzung vorliegt. Man braucht die Curve $y_2$ bei $B_1$ nur mit einem Schwingungsbauche, bei $B_2$ dagegen mit einem Knoten beginnen zu lassen. Dann müssen die Oscillationen von $y_2$ im Falle $B_1$ kürzer, im Falle $B_2$ länger als die



Oscillationen der ausgezeichneten Lösung $y_1$ sein. Längs der Strecke $\omega'$ wird also bei $B_1$ $y_2$ eine stärkere Oscillation besitzen als $y_1$, umgekehrt bei $B_2$. Dasselbe gilt von jeder der folgenden Strecken $\omega'$, da immer die Lösung $y_1$ die ungünstigste bezw. günstigste Ausnutzung der elastischen Kraft hat.

Das scheint nun aber im Widerspruch mit dem Sturm-Liouville'schen Satze zu stehen, dass die 0 Stellen irgend zweier Particularlösungen, also auch $y_1$, $y_2$ immer alterniren müssen, dass also auf grosse Längen hin die durchschnittliche Oscillationslänge von $y_1$ und $y_2$ die gleiche sein muss.

Um diesen Scrupel zu erledigen, gehen wir auf die geometrische Bedeutung der Substitution, welche $y_2$ bei Vermehrung um eine Reihe von Perioden $2\omega'$ erfährt, für die Gestalt der Curve $y_2$ und die Lage ihrer 0-Stellen zurück. Es ist nämlich

$$y_2\,(t'+2\omega') = \pm\, y_2(t') + c\,y_1(t'),$$
$$y_2\,(t'+n.2\omega') = \pm\, y_2(t') + n.c\,y_1(t').$$

Wenn man also die Lösung $y_2$ statt in dem Ausgangsintervall in einem sehr weit nach rechts hingelegenen Intervall $2\omega'$ betrachtet, wo $n.c$ sehr gross gegen $\pm 1$ ist, so wird sich daselbst die Curve $y_2$ nur noch sehr wenig von der $(nc)$ mal vergrösserten Curve $y_1$ unterscheiden, insbesondere werden die 0 Stellen von $y_2$ immer näher an die 0-Stellen von $y_1$ herangerückt sein.

Die analytische Fortsetzung der Lösung $y_2$ verwandelt sich immermehr in ein Multiplum der Lösung $y_1$. Dieses Multiplum $n\,c\,y_1$ ist die asymptotische Grenze, der sich die analytische Fortsetzung der Lösung $y_2$ unbegränzt annähert:

Achten wir insbesondere auf die 0-Stellen von $y_2$, so sehen wir, dass dieselben mit wachsender Zeit $t'$ den 0-Stellen von $y_1$ immer näher rücken.

Es löst sich also unser Scrupel jetzt in folgender Weise (wobei ich, der Einfachheit halber, nur den Fall $B_1^c$ im Auge habe):

Es ist vollkommen richtig, dass die Halboscillationen von $y_2$ zunächst rascher aufeinanderfolgen, als die von $y_1$; aber das hat zur Folge, dass die Phase von $y_2$ der Phase von $y_1$ immer näher rückt und dass in demselben Masse auch $y_2$ sich den ungünstigen Ausnutzungsbedingungen der Kraft nähert, wie sie bei $y_1$ vorliegen. Die Oscillationen von $y_2$ werden daher denen von $y_1$ immer ähnlicher, und die 0-Stellen von $y_1$ sind eine asymptotische Grenze für die 0-Stellen von $y_2$, denen dieselben immer näher kommen, ohne sie je zu erreichen oder gar zu überschreiten.

Wenn die erste 0-Stelle von $y_2$ nach rechts hin zwischen die in 0 gelegene und die erste nach rechts gelegene 0-Stelle von $y_1$ fällt, wird die entsprechende 0 Stelle von $y_2$ in den weiteren Intervallen immer näher an die der 0 entsprechende 0-Stelle von $y_1$ heranrücken. Ebenso wird aber auch beim Fortschreiten nach links immer mehr die links von 0 gelegene 0 Stelle von $y_2$ an die der 0 entsprechende 0-Stelle von $y_1$ heranrücken, so dass, wenn man die Curve $y_2$ von $-\infty$ bis $+\infty$ mit der Curve $y_1$ auf ihre Oscillationen hin vergleicht, die erstere von der zweiten sich nur durch Einschiebung einer einzigen Halboscillation unterscheidet.

Dies steht im Einklang damit, dass, wenn in der Grenze für $n = +\infty$ die Schwingungen des $y_2$ im selben Sinne erfolgen wie die von $y_1$ (bei positivem $c$), dass dann für $n = -\infty$ die Schwingungen in entgegengesetztem Sinne stattfinden, da dann

$$y_2(t'-2w) = \pm y_2(t') - nc\, y_1(t')$$

ist. Umgekehrt, wenn $c$ negativ ist.

<u>Schliesslich dürfen wir also sagen, dass auf die ganze Strecke von $-\infty$ bis $+\infty$ bei dem $y_2$ nur eine einzige Halboscillation mehr vorkommt, als bei dem $y_1$, und dass also dies der einzige durch die günstige Annahme der Anfangsphase herbeigeführte Gewinn ist.</u> —

<u>Ganz ähnlich ist es im Falle von $B_2'$, nur dass die Lösung $y_2$ dort schliesslich eine Halboscillation weniger ausführt, als die Lösung $y_1$.</u>

Wir haben uns mit der so gewonnenen Erkenntnis des asymptotischen Characters der ausgezeichneten Lösung in Verhältnis zur allgemeinen Lösung eigentlich nur den geometrischen Sinn der parabolischen Substitution klar gemacht.

Überhaupt findet etwas analoges immer statt bei einer Differentialgleichung mit periodischen Coefficienten, sobald die dem Periodenzuwachs entsprechende lineare Substitution der Particularlösungen parabolischen Character hat, und es ist dabei nicht etwa nötig, wie das zunächst im Beispiel der Fall war, daſs die periodische Lösung $y_1$ überhaupt 0-Stellen hat; auch wenn sie keine 0-Stellen hat, stellt sie nach rechts und nach links hin mit einer wachsenden Zahl $n\,c$ multiplicirt (nach einer Seite natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen) eine Asymptote für die andern Lösungen dar, welche dann zwischen $-\infty$ und $+\infty$ je eine 0-Stelle besitzen müssen.

Diese Betrachtungen haben eine besonders wichtige Bedeutung nicht nur in der mathematischen Physik, sondern ganz besonders auch in der modernen theoretischen Astronomie. Den ersten Ansatz dazu gab die Methode, mit welcher der americanische Astronom Hill den Umlauf des Mondperigaeums entwickelt hat.

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Coefficienten und gerade die Frage, wie sich die Lösungen dieser Gleichungen im Laufe der Zeit verhalten, sind ein Hauptgegenstand der modernen Astronomie, wo die Abweichung der Bahn des Himmelskörpers von gewissen Normalbahnen eben durch solche Differentialgleichungen untersucht wird. (Des Nähern vergleiche man Poincaré, Méc. céleste)

Wir wollen noch eine allgemeine Bemerkung über das Verhältnis der jetzigen Betrachtungen zu den Sturm'schen Fragestellungen zufügen:

Wir werden bemerken, daſs diese Fragestellung, welche sich speciell auf Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten bezieht, als eine Fortsetzung der Sturm'schen Fragestellung erscheint, insofern untersucht wird, wie sich die 0-Stellen verschiedener Particularlösungen oder die Particularlösungen selbst bei immer wiederholtem Zutritt einer Periode gegeneinander verschieben, während

Sturm zusieht, wie sich innerhalb eines festen Stückes der Axe $t$ die 0-Stellen der Particularlösungen verschieben, wenn man einen in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter abändert.

Wir kehren zu unsern eignen Betrachtungen zurück.

Wir haben im parabolischen Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}).y.$$

d. h. im Falle der Lamé'schen Polynome, die geometrische Bedeutung der Hauptlösung $y_1$ als Asymptote der allgemeinen Lösung kennen gelernt.

Jetzt werden wir den <u>allgemeinen Hermite'schen Fall</u> ins Auge fassen, dem Parameter $\mathfrak{B}$ also einen ganz beliebigen Wert beilegen.

In diesem allgemeinen Falle gibt es im Intervalle $bc$ {an dem ich der Bestimmtheit halber festhalte} statt einer zwei ausgezeichnete Particularlösungen der Differentialgleichung, $y_1, y_2$, welche jede multiplicatives Verhalten zeigen:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t'+2\omega') &= \sigma . y_1(t') \\ y_2'(t'+2\omega') &= \tfrac{1}{\sigma} . y_2(t') \end{aligned}\right\}$$

Wir werden nun zusehen, ob diese beiden ausgezeichneten, multiplicativ periodischen Lösungen zur allgemeinen Lösung eine ähnliche Beziehung haben, wie die periodische Lösung zur allgemeinen Lösung im parabolischen Fall.

Zwecks dieser geometrischen Discussion müssen wir wieder zwei Fälle unterscheiden, nämlich

1. den hyperbolischen Fall:

$$\underline{\sigma,\ y_1,\ y_2 \text{ reell},}$$

2. den elliptischen Fall

<u>$\sigma$ complexe, aber vom absoluten Wert 1, $y_1, y_2$ conjugirt complex.</u>

Zur Unterscheidung dieser beiden Fälle gibt es ein einfaches analytisches Criterium.

Wir denken uns nach den Formeln auf S. 337 das reelle Polynom $F = y_1 \cdot y_2$ und hieraus die reelle Constante $C^2$ berechnet.

Diese muss mit

$$\left(y_1 \cdot \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt}\right)^2$$

identisch sein.

Führen wir, da wir im Intervall $bc$ operiren, für $dt$ $- i \cdot dt'$ ein, um reelle Zeitzuwächse zu haben, so wird

$$\left(y_1 \frac{dy_2}{dt'} - y_2 \frac{dy_1}{dt'}\right)^2 = -C^2$$

sein müssen, unter $t'$ eine reelle Variable verstanden.

Wenn nun $y_1$ und $y_2$ reell sind, so steht links das Quadrat einer reellen Grösse, $C^2$ muss also einen negativen Werth haben.

Sind aber $y_1$ und $y_2$ conjugirt complexe, etwa $y_1 = u + iv$, $y_2 = u - iv$,

so ist $y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt} = 2i\left(v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}\right)$,

so steht also links das Quadrat einer rein imaginären Grösse, $C^2$ muss also positiv sein. Im parabolischen Fall muss endlich $C^2$ bekanntlich verschwinden. Also:

<u>Ob wir im Intervall $bc$ der $x$-Axe hyperbolisches oder elliptisches oder parabolisches Verhalten haben, das hängt von dem Vorzeichen der Constante $C$ ab, die durch $\left(y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt}\right)^2$ definirt ist, und zwar haben wir hyperbolisches, elliptisches oder parabolisches Verhalten, je nachdem $C$ negativ, positiv oder $0$ ist.</u>

Diese Angabe gilt für das Intervall $bc$; sie gilt natürlich ebenso für das Intervall $da$, wo wir abgesehen vom Vorzeichen dieselbe reelle Variable $t'$ als Zeit deuten. Dagegen in $ab$ und $cd$ deuten wir $t$ selbst als Zeit, und $dt$ selbst ist reell. Infolgedessen kehrt sich daselbst die Regel für die Bestimmung des elliptischen und des hyperbolischen Verhaltens gerade um.

Wir bemerken also, dass das Vorzeichen von $C^2$ in den aufeinanderfolgenden Intervallen da, ab, cd alternirende Bedeutung hat, so dass, wenn nicht gerade in allen Intervallen parabolisches Verhalten vorliegt, wir in den aufeinanderfolgenden Intervallen alternirend elliptisches und hyperbolisches Verhalten haben.

Do. d. 12. Juli 1894.] Wir haben gestern Sätze über elliptisches und hyperbolisches Verhalten in den einzelnen Intervallen der $x$-Axe ausgesprochen, ohne überhaupt zu wissen, was das eigentlich für zwei verschiedene Verhaltungsarten sind. Dies wollen wir heute zuerst feststellen.

Bei hyperbolischem Verhalten etwa in $ab$ coexistiren zwei reelle Particularlösungen $y_1, y_2$, welche bei Vermehrung des Arguments $t$ um die dem Doppelintervall $aba$ entsprechende Periode $2\omega$ sich reell multiplicativ verhalten, also, unter $\rho$ eine reelle Constante verstanden, die wir $>1$ voraussetzen können, den Gleichungen genügen:

$$y_1(t+2\omega) = \rho \cdot y_1(t),$$
$$y_2(t+2\omega) = \frac{1}{\rho}\, y_2(t).$$

Wir sehen hieraus:

Wir haben zwei reelle Fundamentallösungen, welche multiplicativ periodisch sind. Die 0-Stellen von $y_1$ oder von $y_2$ sind genau periodisch, und zwar haben $y_1$ und $y_2$ innerhalb der Periode je dieselbe Anzahl von 0-Stellen, welche wir $\nu$ nennen.

Es folgt letzteres einfach daraus, dass die 0-Stellen von $y_1$ und $y_2$ alterniren müssen.

Die Amplituden der Schwingungen werden dagegen bei $y_1$ nach rechts hin immer grösser, nach links hin immer kleiner, umgekehrt bei $y_2$.

Irgend eine Particularlösung

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

verwandelt sich bei Vermehrung von $t$ um eine beliebige Periode $2n\omega$ in

$$y' = c_1 \cdot \varrho^{n} y_1 + c_2 \varrho^{-n} y_2,$$

so dass also bei sehr grossem positivem $n$ das erste, bei sehr grossem negativem $n$ das zweite Glied immer mehr überwiegt. Also:

Eine beliebige Particularlösung $c_1 y_1 + c_2 y_2$ fällt bei analytischer Fortsetzung nach rechts hin je weiter, immer mehr mit der analytischen Fortsetzung der Lösung $c_1 y_1$

<u>zusammen, dagegen bei analytischer Fortsetzung nach links hin schliesst sie sich an die analytische Fortsetzung der Lösung $c_2 y_2$ asymptotisch an.</u>

Während wir also im parabolischen Fall für das asymptotische Verhalten nach rechts und links hin nur eine Function in Betracht zu ziehen hatten, haben wir jetzt deren zwei verschiedene.

Ganz anders beim <u>elliptischen Verhalten</u>.

Wir setzen, da $y_1$ und $y_2$, sowie $\varrho$ und $\frac{1}{\varrho}$ conjugirt complex sind

$$y_1 = u + iv,$$
$$y_2 = u - iv,$$
$$\varrho = e^{i\varphi}.$$

Um reelle Lösungen zu erhalten, müssen wir

$$u = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad v = \frac{y_1 - y_2}{2i}$$

bilden. Diese zeigen bei Vermehrung von $t$ um eine Periode folgendes Verhalten:

$$u' = u \cdot \cos\varphi - v \cdot \sin\varphi,$$
$$v' = u \sin\varphi + v \cos\varphi,$$

und bei Vermehrung um $n$ Perioden wird daraus:

$$u^{(n)} = u \cos n\varphi - v \sin n\varphi,$$
$$v^{(n)} = u \sin n\varphi + v \cos n\varphi.$$

Es wäre nun zu unterscheiden, ob die Grösse

$\varphi$ ein rationaler Teil von $2\pi$ ist oder nicht; wir werden nur vom ersten Fall sprechen, also

$$\varphi = 2\pi \frac{n}{N}$$

setzen, und den irrationalen Fall als Grenzfall ansehen.

Wir sehen dann, dass

$$u^{|N|} = u \quad , \quad v^{|N|} = v$$

wird; also, da auch für $y = c_1 u + c_2 v$ $\quad y^{|N|} = y$ wird:

Das characteristische Verhalten des elliptischen Falls liegt darin, wenigstens im Falle eines rationalen Winkels $\varphi$, dass nach Durchlaufung einer gewissen Anzahl von Perioden jede reelle Particularlösung in sich selbst ungeändert zurückkehrt.

Soviel über den Unterschied des hyperbolischen und des elliptischen Verhaltens in einem Intervall.

Heute wollen wir uns nun über das Verhalten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (Ax + B)\,y$$

nicht nur für einzelne Werte von $B$ und für einzelne Intervalle der $x$-Axe, sondern für alle Werte von $B$ und $x$ gleichzeitig (natürlich bei festgehaltenem Werte $A = 2\kappa(2\kappa+1)$ eine

Übersicht in folgender Weise bilden:

Wir richten ein Coordinatensystem $x, B'$ ein, in welchem wir die ausgezeichneten Werte von $B'$ durch $4k+1$ wagrechte, die drei Verzweigungswerte $x = a, b, c$ durch drei verticale Geraden zu markiren haben. Die $(x, B)$. Ebene zerfällt so in $4(4k+2)$, also bei unserm Beispiel $2k = 5$ in 48 Felder, von denen jedes einzelne dem Falle entspricht, daß $B'$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden ausgezeichneten Werten und $x$ in einem bestimmten Intervall der $x$-Axe liegt.

Wir fragen nun, ob sich die Differentialgleichung in irgend einem Intervall bei irgend einem nicht ausgezeichnetem Werte von $B'$ elliptisch oder hyperbolisch verhält, und werden so die einzelnen der 48 Felder in solche von elliptischem und in solche von hyperbolischem Verhalten einteilen und dem entsprechend mit e oder h bezeichnen (Figuren auf 369. Seite). Da die ausgezeichneten Werte von $B$, für welche in jedem Intervall das Verhalten parabolisch wird, immer elliptisches von hyperbolischem Verhalten trennen müssen, da ebenso die Verzweigungswerte $x = a, b, c$ elliptisches von hyperbolischem Verhalten trennen, wie wir soeben lernten, so muss die Einteilung der Ebene in elliptische und hyperbolische Felder in der Weise eines Schachbrets sich darstellen, mit 24 elliptischen und 24 hyperbolischen Feldern.

Ausserdem wollen wir uns aber auf jeder Geraden $\mathfrak{B}$ die 0 Punkte von $y_1$ und die von $y_2$ gleichzeitig markirt denken, d. h. die 0 Punkte von

$$y_1 \cdot y_2 = \mathfrak{F}(x, \mathfrak{B}).$$

Denken wir die Gerade $\mathfrak{B}$ beweglich, so werden die auf ihr liegenden 0 Punkte von $y_1 \cdot y_2$ eine Curve beschreiben, deren Gleichung geradezu

$$\mathfrak{F}(x, \mathfrak{B}) = 0$$

ist. Dieselbe ist von der Ordnung $2k$ in $x$ und ebenso in $\mathfrak{B}$ (wie sich aus dem Bildungsgesetze des Polynoms $\mathfrak{F}$ ergibt).

Wir können über diese Curve Folgendes aussagen:

1. Innerhalb eines elliptischen Feldes ist $y_1 \cdot y_2 = u^2 + v^2$, und dieses besitzt keine reellen 0-Punkte, da $u$ und $v$ im Intervall nicht gleichzeitig verschwinden können. In

einem hyperbolischen Feld dagegen steht dem Verschwinden von $y_1\, y_2$ nichts im Wege. Also:

Indem wir nach den reellen 0-Stellen von $y_1, y_2$ fragen, erhalten wir nur Punkte in den hyperbolischen Intervallen. Es ist aber nicht gesagt, daſs in jedem hyperbolischen Intervall reelle 0 Punkte liegen müssen.

Es kommt das darauf hinaus, daſs die Curve $F(x, B) = 0$ sich durch kein elliptisches Feld hindurchzieht.

2. Nimmt $B$ einen der ausgezeichneten Werte an, so wird $y_2 = y_1$ und $F$ verschwindet, wo es innerhalb eines Intervalls geschieht, zweifach, wo es aber an einer der Stellen $a$, $b$, $c$ geschieht, nur einfach. Das heiſst für unsere Curve $F(x, B) = 0$:

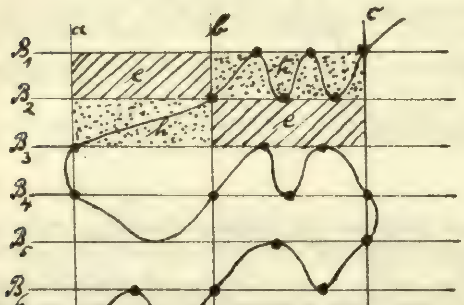
In allen 0 Punkten von $y_1$ für einen der ausgezeichneten Werte $B_1, B_2, \ldots$ muſs die Curve die betreffende horizontale Gerade $B = B_1, B_2 \ldots$ berühren, auſser in den 0 Punkten, welche mit $a$, $b$, oder $c$ zusammenfallen, wo die Curve die Gerade nur einfach schneidet.

3. Ferner folgt aus den früheren Sätzen über $F$: Unsere Curve hat keine anderen horizontalen Tangenten, als die ausgezeichneten $4k+1$ Linien,

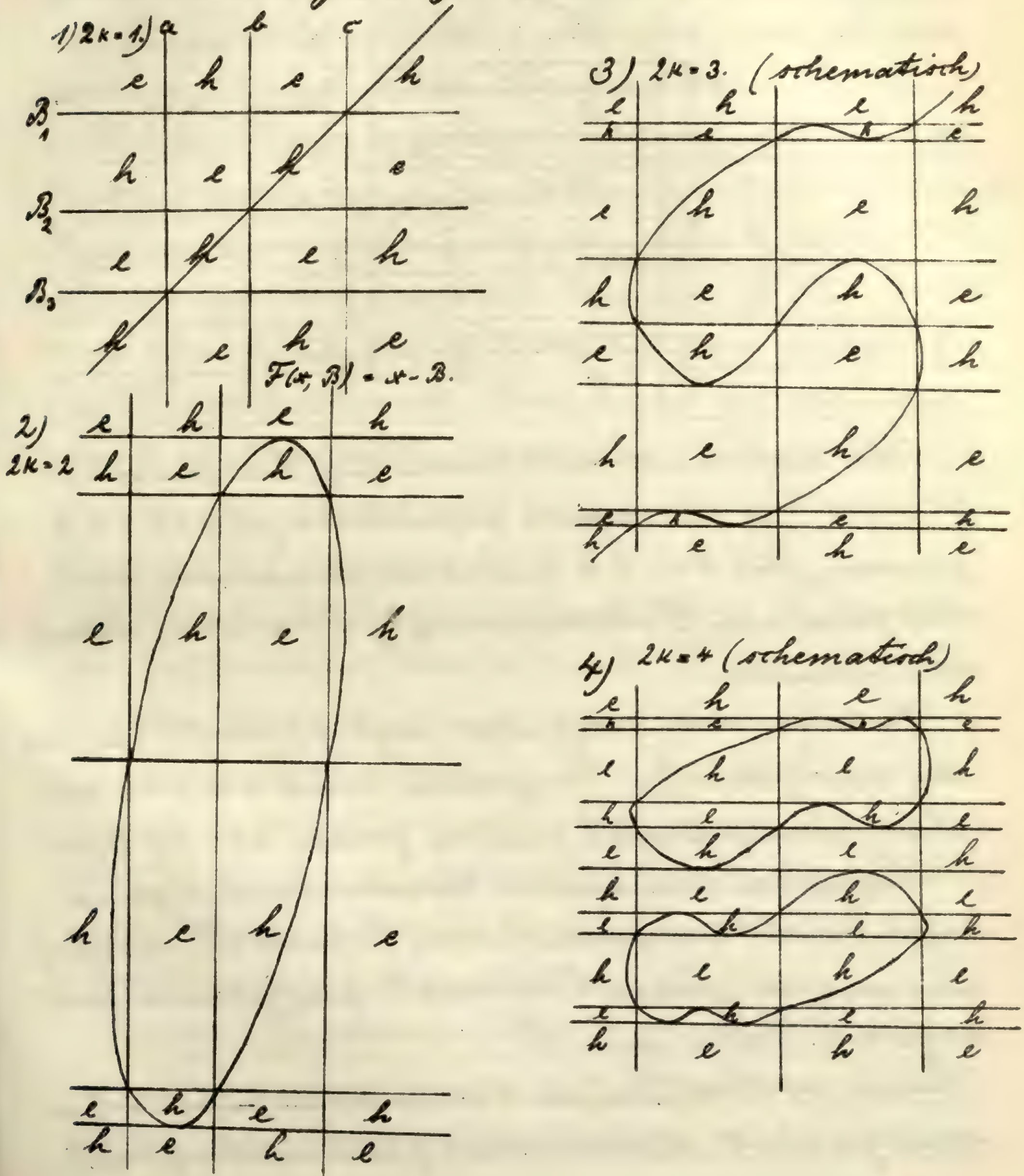
denn $F$ hat sonst keine Doppelwurzeln.

Unsere Curve schneidet die Verticallinien $x=a, b, c$ nirgends als in den bekannten auf den Geraden $B_1, B_2 \ldots$ liegenden Punkten; denn das Polynom $F$ kann nur in den ausgezeichneten Fällen in den Punkten $a, b, c$ verschwinden.

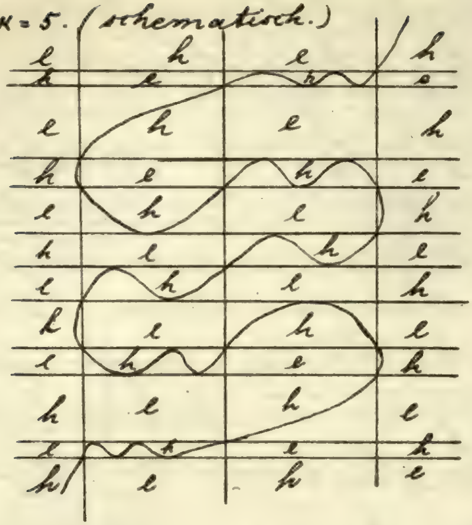
Um nun die Entscheidung über die Verteilung der Bezeichnungen $e$ und $h$ in unsere 48 Felder zu treffen, brauchen wir nur für ein einziges Feld die Frage zu beantworten, ob es hyperbolisch oder elliptisch ist.




Achten wir z. B. in nebenstehender Figur, wo auf den Geraden $B_1, B_2 \ldots$ die 0 Stellen von $F$ eingetragen sind, auf die schraffirten Felder, so sehen wir, dass in dieselben die Curve unmöglich eintreten kann, da sie sonst nur eine Eintrittsstelle (bei: $x=b$, $B=B_2$) aber keine Austrittsstelle haben würde. Da die Curve aber doch notwendig durch den Punkt $x=b$ $B=B_2$ hindurchgehen muſs, so kann sie nur in die beiden punktirten Felder eintreten, diese sind also mit h zu bezeichnen.



5). $2K = 5$. (schematisch.)



Wir haben nebenstehend die Curven für $2K = 1, 2, 3, 4, 5$ wirklich gezeichnet, für $2K = 1, 2$ genau, für $2K = 3, 4, 5$ nur schematisch, da die genauen Dimensionen zu unübersichtlich sein würden.

Interessant ist dabei, daſs die Zahl der rechten horizontalen Tangenten, wenn wir jede mit ihrer Multiplicität zählen, gerade $2K(2K-1)$ ist.

Schneiden wir unsere Curven durch irgend eine nicht ausgezeichnete Gerade $\mathfrak{B}$, so erhalten wir in jedem Intervall eine gewisse Zahl $\nu$ von $0$ Stellen von $\mathfrak{F}$.

Einer vollen Periode $2\omega$ entspricht das hin und zurück, also doppelt zu durchlaufende

Intervall ab. $y_1, y_2$ besitzt also in der Periode $2\omega$ gerade $2\nu$ 0 Stellen; da nun $y_1$ und $y_2$ gleich viel 0-Stellen besitzen, so ist $\nu$ zugleich die Anzahl der 0 Stellen sowohl von $y_1$ wie von $y_2$ längs einer Periode $2\omega$.

Unsere Figuren geben uns also nicht blos die Unterscheidung hyperbolischer und elliptischer Intervalle, sondern auch für jedes hyperbolische Stück einer horizontalen Geraden $B$ die Zahl $\nu$ der Verschwindungsstellen von $y_1$ oder $y_2$ im Doppelintervall. Diese Zahl ist nämlich gleich der Anzahl der reellen Schnittpunkte, welche die Gerade $B$ im Intervall mit der Curve $F = 0$ gemein hat.

Soweit haben wir durch blose Discussion im Reellen das Studium der Hermite'schen Differentialgleichung gefördert. Um nun auch die Verhältnisse im Complexen zu untersuchen, werden wir uns wieder der Methode der conformen Abbildung bedienen, und dieselbe wird uns eine grosse Reihe neuer Ergebnisse liefern.

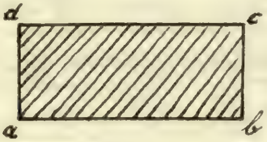
Unsere Methode soll die sein, dass wir zunächst noch einmal die conforme Abbildung in den ausgezeichneten parabolischen

Fällen studiren, um dann die so erhaltenen Figuren als Ausgangspunkte zu benutzen, von wo aus sich die Figuren für ein allgemeines $B$ durch stetige Abänderung müssen erreichen lassen.

Ich will nur die Figuren für die Fälle $2k = 0, 1, 2$ angeben, indem ich die richtige Reihenfolge der $B_i$ festhalte:

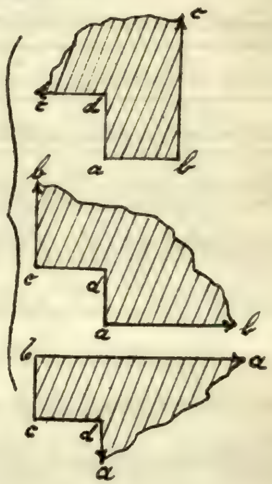
$\underline{2k = 0}$

$B = 0$

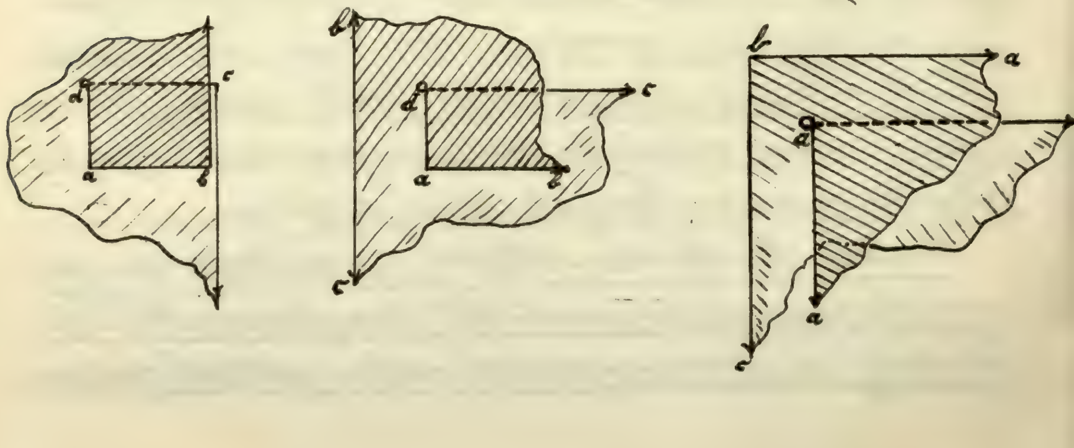



(Nicht wesentlich verschieden von dem Rechteck in der $t$-Ebene, da ja $y$ hier $= ct + c'$)

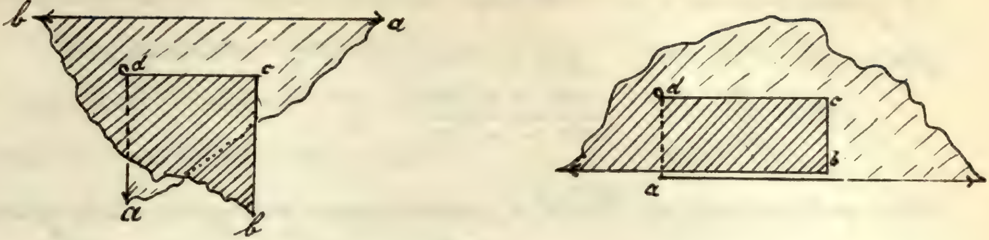
$\underline{2k = 1}$




$\underline{2k = 2.}$



$2\kappa = 2.$ (Fortsetzung).




Nunmehr fragen wir nach den Figuren für allgemeine, nichtausgezeichnete Werte von $\mathfrak{B}$.

Seien $y_1, y_2$ die beiden Fundamentallösungen und

$$\eta = \frac{y_1}{y_2},$$

so werden wir fragen, wie sich die einzelnen Intervalle der reellen $x$-Axe in der Ebene der Variablen $\eta$ darstellen.

In einem hyperbolischen Intervall sind $y_1, y_2$ beides reelle Functionen, nur ev. multiplicirt mit irgend einer complexen Constanten. Infolgedessen hat man den Satz

<u>Ein hyperbolisches Intervall bildet sich auf ein Stück der reellen $\eta$-Axe, oder wenn man den multiplicativen Constanten in $y_1, y_2$ allgemeine Werte läßt, auf ein Stück einer geraden Linie ab, welche durch den 0-Punkt der $\eta$-Ebene geht.</u>

In einem elliptischen Intervall dagegen ist abgesehen von multiplicativen Constanten $y_1 = u + i\,v$, $y_2 = u - i\,v$; also hat

$$\eta = \frac{y_1}{y_2} = \frac{u + i\,v}{u - i\,v}$$

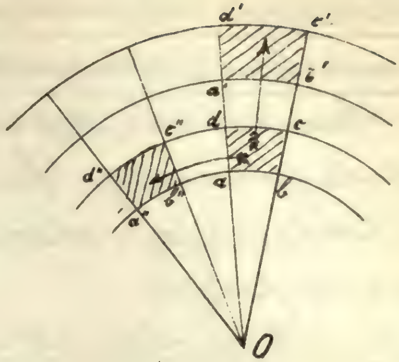
den absoluten Wert 1, und das allgemeine $\eta$ constanten absoluten Wert. Folglich:

<u>Ein elliptisches Intervall der x-Axe bildet sich als ein Stück des Einheitskreises der $\eta$-Ebene ab, oder, wenn wir den multiplicativen Constanten in $y_1$, $y_2$ allgemeine Werte geben, als ein Stück eines beliebigen um $\eta = 0$ als Centrum herumgelegten Kreises.</u>

Die Bilder der 4 Intervalle, welche ja abwechselnd elliptisch und hyperbolisch sind, müssen demnach auf zwei concentrischen Kreislinien und zwei vom Centrum auslaufenden Geraden liegen. In ein solches Gerüst ist die Membran des Vierecks so einzuhängen, dass die richtigen Winkel herauskommen.

<u>Es werde zuerst der einfachste, der Fall $2K = 0$ erläutert.</u>

Die Halbebene $x$ bildet sich etwa auf das Viereck $a\,b\,c\,d$ nebenstehender Figur ab. Wenn $x$ von $b$ nach $c$ und wieder zurück nach $b$ läuft, bewegt sich $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ von $b$ über $c$ nach $b'$, $A'$ wächst um $2\omega'$.



Aus der Substitution

$$y_1' = \sigma \cdot y_1 \qquad y_2' = \frac{1}{\sigma}\, y_2$$

ergibt sich für diesen Weg die Substitution

$$\eta' = \sigma^{-2} \cdot \eta$$

der Variablen $\eta$. Also ist $Ob' = \sigma^{-2} \cdot Ob$, und $\sigma^2$ ist nichts anderes als das Streckenverhältnis $\frac{Ob}{Ob'}$, oder allgemeiner das Verhältnis zwischen dem Radiusvector des ursprünglichen und des transformirten Punktes.

Läßt man andererseits $x$ einem Umlauf um $b\,a$ machen, so nimmt $A$ um $2\omega$ ab, und es wird

$$y_1' = e^{-i\varphi} \cdot y_1, \quad y_2' = e^{+i\varphi} \cdot y_2, \quad \eta' = e^{2\varphi i} \cdot \eta$$

$2\varphi$ ist dann der Winkel, den der Radiusvector des transformirten Punktes mit demjenigen des ursprünglichen Punktes bildet. Also:

<u>Die hyperbolische Substitution erscheint als eine von $O$ auslaufende Ähnlichkeitstrans-</u>

formation mit dem Parameter $\sigma^{-2}$, und die elliptische Substitution als eine Drehung um $O$ mit dem Drehwinkel $2\varphi$.

Bedenken wir, daſs die beiden Substitutionen jede durch zweimalige Spiegelung des Vierecks $abcd$ entstehen, daſs also $bb' = 2 \cdot bc$ und $bb' = 2ab$ ist, so folgt:

Speciell erscheint $\sigma$ als das Streckenverhältnis $\frac{Ob}{Oc}$, oder, was dasselbe ist, als das Doppelverhältnis $\frac{Ob}{Oc} \cdot \frac{\infty c}{\infty b}$, $\varphi$ aber als die Bogenlänge der Kreisbogenseite $ab$.

Damit haben diese beiden Constanten ihre einfache geometrische Bedeutung bekommen; es ist das namentlich für das $\varphi$ wichtig, weil dasselbe jetzt absolut definirt erscheint, während es in die früheren Formeln nur modulo $2\pi$ einging.

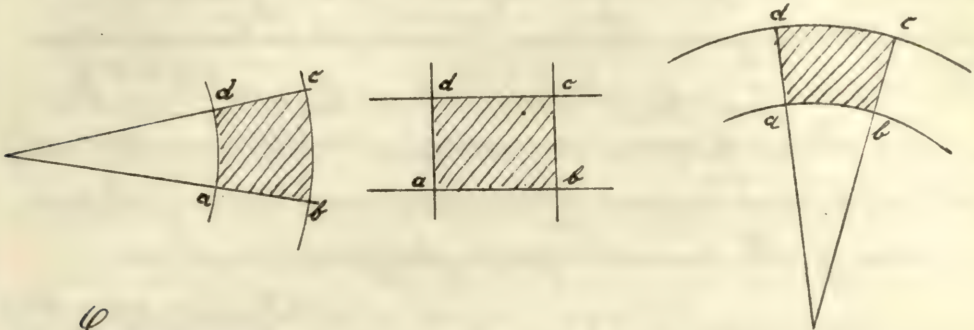
Ferner aber bemerken wir:

Als neues Resultat, abgeleitet aus der conformen Abbildung, haben wir die Formeln

$$\sigma_{bc} = \sigma_{ad} \qquad \varphi_{ab} = \varphi_{dc}.$$

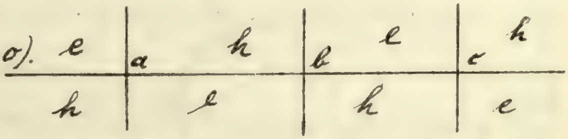
Anstatt $ab$ und $cd$ zu Kreisbogen zusammenzubiegen, kann man auch umgekehrt die Figur des parabolischen Falles so deformiren, daſs $ab$ und $cd$ gerade Linien, $bc$ und $ad$

Kreisbogen werden. Zwischen diesen und den heute als Beispiel benutzten Fall stellt sich dann als Übergang das geradlinige Rechteck des parabolischen Falls




Es entspricht dies der schematischen Eintheilung der x. $B_1$ Ebene in Felder, welche im vorliegenden Falle $2K=0$ die nebenstehende einfache Gestalt aufweist:

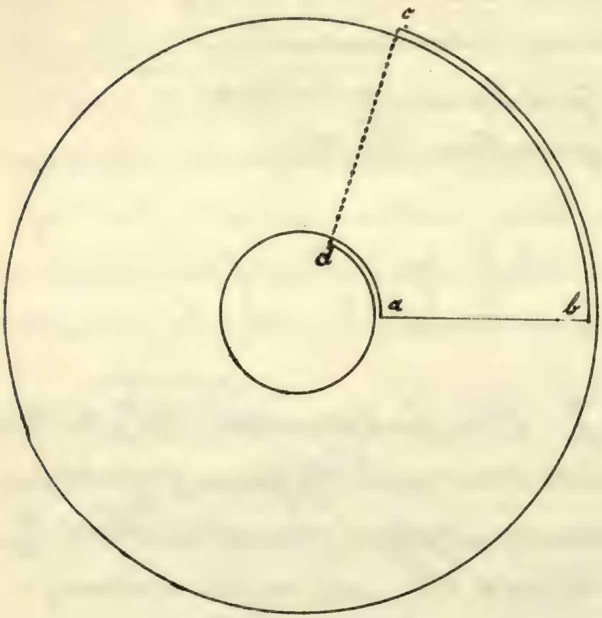
($B_1=0$).




Mo. 15. Juli 1894.] Wir haben das letzte Mal für den Fall $2K=0$ das $\eta$ Polygon gezeichnet, und zwar für den ausgezeichneten Wert $B_1=0$ sowie für zwei Werte $B_1$, die nur wenig oberhalb bezw. unterhalb dieses ausgezeichneten Wertes liegen.

Aber das Aussehen der Figur kann sich sehr ändern – wenn sie auch im Sinn der analysis situs denselben Character behält, sobald $B'$ sehr grofs positiv oder negativ wird. Das $\varphi$ der beiden Kreisbogenseiten wird dann immer gröfser, und gleichzeitig das $\sigma$ der geradlinigen Seiten (entsprechend den Formeln $\varphi_{ad} = \varphi_{bc} = 2\frac{\omega}{i}\sqrt{B'}$, $\sigma_{ab} = \sigma_{dc} \cdot e^{2\omega\sqrt{B'}}$).

Die Kreisbogen werden sich dann beliebig oft überschlagen können, und wir bekommen z. B. eine Figur folgender Art:




Immer aber bleiben die Relationen, die wir das vorige Mal aus der Figur abgelesen haben: $\sigma_{ab} = \sigma_{dc}$, $\varphi_{ad} = \varphi_{bc}$ auch im Falle unserer neuen Figur richtig.

Jetzt aber brauchen wir $\varphi$ nicht mehr wie früher, wo wir zu dem Zwecke ausschliesslich auf die Coefficienten der Substitution $T_c$ angewiesen waren, nur mod $2\pi$ zu bestimmen, sondern wir können ihm auch einen absoluten Wert beilegen:

In Übereinstimmung mit der früheren Definition des $\varphi$, aber über dieselbe hinausgehend, werden wir unter $\varphi$ jetzt direct die Länge der Kreisbogenseite $bc$ verstehen.

Ist $\varphi = \frac{m}{n}\pi$, unter $m$ und $n$ teilerfremde ganze Zahlen verstanden, so werden $2n$ unserer Vierecke nebeneinandergelegt gerade $m$ Kreisringe vollkommen ausfüllen, was bei einer kleinen Zahl von Vierecken nicht statt hat.

Die Folge hiervon ist die schon auf S. 363 analytisch constatirte Eigentümlichkeit der elliptischen Substitution:

Unsere elliptische Substitution hat die Eigenschaft, zum ersten Mal nach $n$-maliger Durchlaufung des Doppelintervalls die identische Substitution zu geben.

Dabei überschlägt sich die Kreisbogenseite genau $m$ mal, geht also, wenn sie durch eine passende lineare Transformation zur geraden Linie gestreckt wird, $m$ mal durchs Unendliche. Wählt man in $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ $y_2$ und $y_1$ als reelle Lösungen, so erhält man eine solche gerade Linie, auf der dann also $\eta$ $m$ mal $\infty$ wird, d. h. $y_1$ genau $m$ mal verschwindet. Also:

<u>Das genannte Verhalten der elliptischen Substitution kommt darauf hinaus, dass bei $n$-maligem Durchlaufen des Doppelintervalls jede reelle Particularlösung $y$ der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung $m$ Halboscillationen ausführt.</u>

<u>Indem wir die Amplitude $\varphi$ der elliptischen Substitution in der hier geschilderten Weise als eine Kreisbogenlänge festlegen, drücken wir nicht nur die Periodicität der elliptischen Substitution, sondern auch die Art der Oscillationen der Particularlösungen $y$ durch eine ganz bestimmte Grösse aus.</u>

<u>Was den Multiplicator $\sigma$ der hyperbolischen Substitution angeht, so beschränken wir uns einstweilen auf die Bemerkung, dass derselbe von 1 beginnend immermehr wächst, wenn $B'$ von $B_1$ beginnend zunimmt.</u>

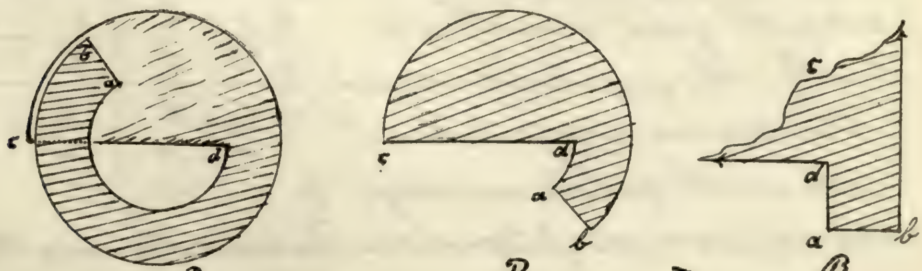
Nun sollen alle diese Erläuterungen auf die höheren Fälle, zuerst $2K = 1$, übertragen werden.

Wir sehen aus dem für $2K = 1$ gegebenen

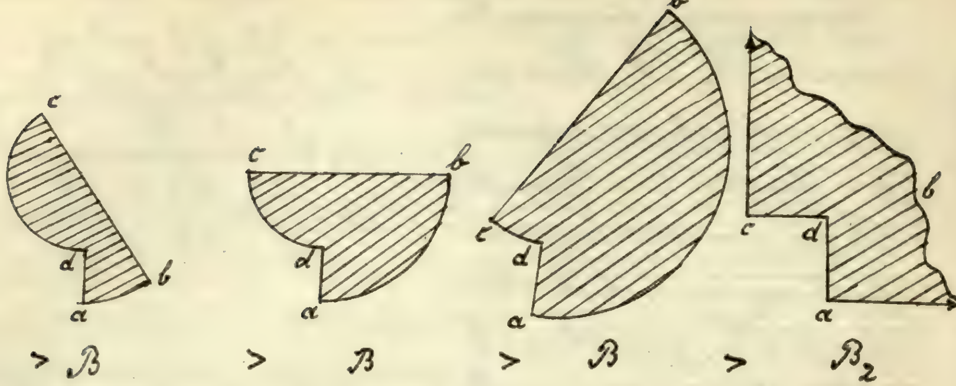
Schema, dass wir ausser den ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$ vier wesentlich verschiedene Lagen der Geraden $\mathfrak{B}'$ zu unterscheiden haben, nämlich oberhalb $\mathfrak{B}_1'$, zwischen $\mathfrak{B}_1'$ und $\mathfrak{B}_2'$, zwischen $\mathfrak{B}_2'$ und $\mathfrak{B}_3'$, und unterhalb $\mathfrak{B}_3'$.

| | | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| | e | h | e | h |
| $\mathfrak{B}_1$ | | | | |
| | h | e | h | e |
| $\mathfrak{B}_2$ | | | | |
| | e | h | e | h |
| $\mathfrak{B}_3$ | | | | |
| | h | e | h | e |

Wir werden uns die Gerade $\mathfrak{B}'$ stetig von oben nach unten diese Lagen durchlaufend denken, und werden uns eine Reihe von Figuren zeichnen, welche uns gestatten, die stetige Änderung des $\eta$-Polygons zu übersehen. Dabei brauchen wir dies nur bis $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_2'$ auszuführen, da die Figuren für die Lagen unterhalb $\mathfrak{B}_2'$ aus denen für $\mathfrak{B}' > \mathfrak{B}_2'$ einfach dadurch hervorgehen, dass man die Rolle der Seiten $ab$ und $bc$ vertauscht. Wir bekommen folgende schematische Figuren:




$\mathfrak{B}$ > $\mathfrak{B}$ > $\mathfrak{B}_1$




Wir entnehmen aus den Figuren den Satz:

<u>Auch im Falle $2\kappa = 1$ sind die Amplituden der beiden elliptischen Intervalle und die Multiplicatoren der beiden hyperbolischen Intervalle je durch eine einfache Gleichung mit einander verbunden, nämlich durch die Formeln:</u>

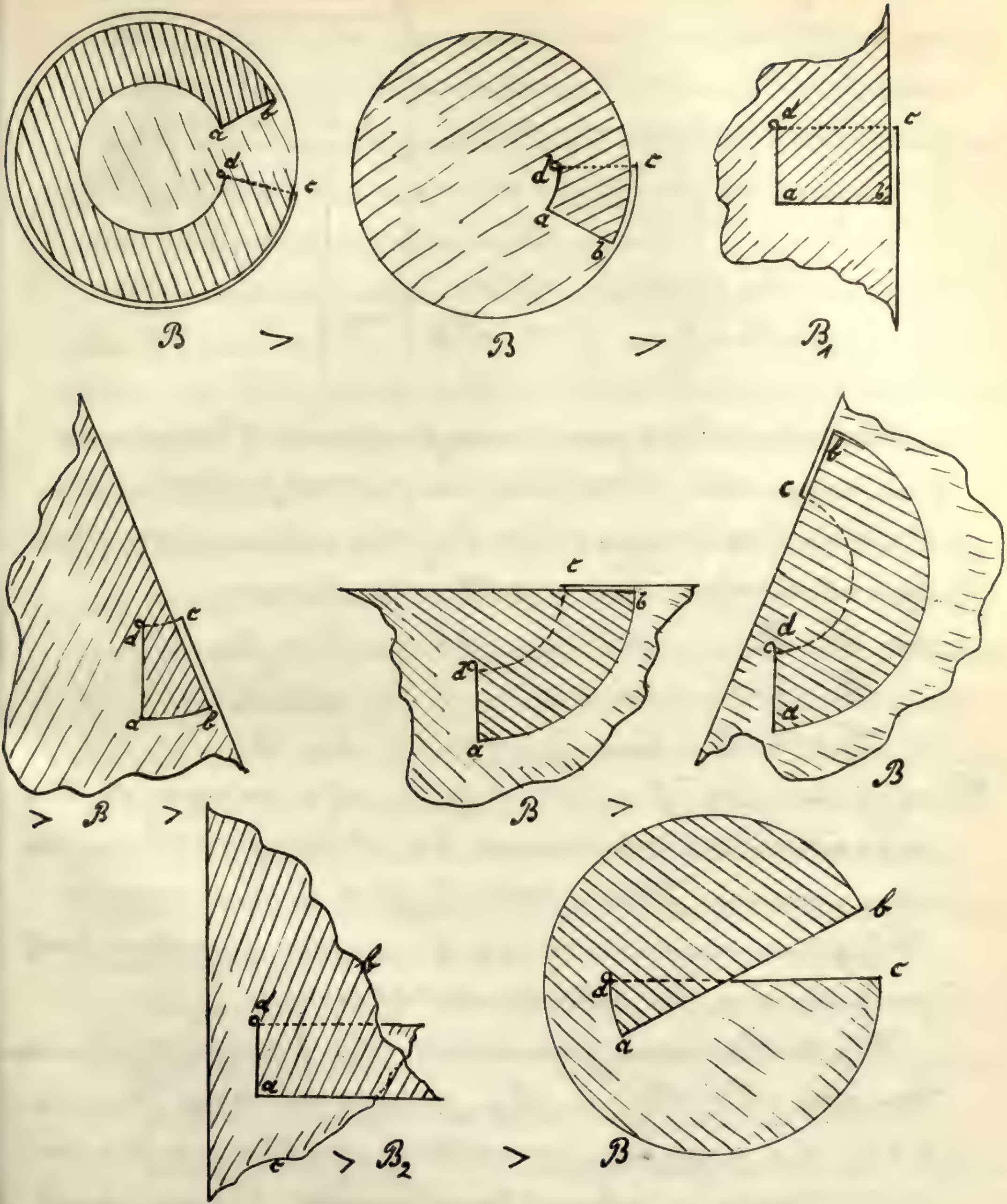
<u>für $\mathfrak{B} > \mathfrak{B}_1$ : $\varphi_{bc} = \varphi_{ad} + \pi$, $\tau_{ab} = -\tau_{dc}$,</u>

<u>für $\mathfrak{B}_1 > \mathfrak{B} > \mathfrak{B}_2$ : $\tau_{bc} = -\tau_{ad}$, $\varphi_{ab} = \pi - \varphi_{dc}$.</u>

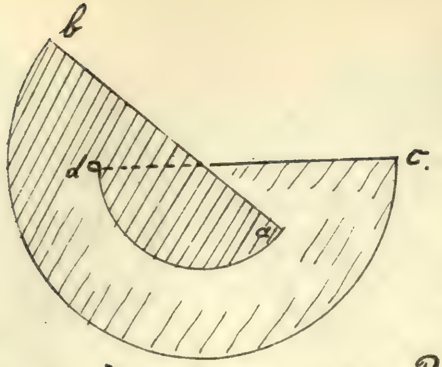
Die entsprechenden Figuren sollen jetzt für $2\kappa = 2$, wo es fünf ausgezeichnete Werte von $\mathfrak{B}$ gibt, von $\mathfrak{B} = +\infty$ bis $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_3$ gezeichnet werden.

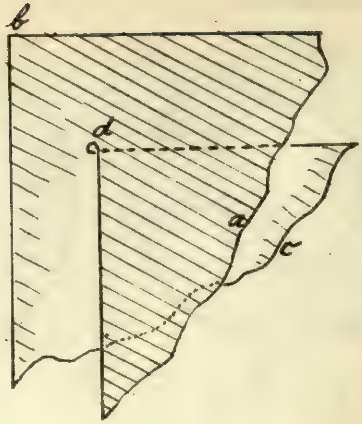
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | e | h | e | h |
| $\mathfrak{B}_1$ | h | e | h | e |
| $\mathfrak{B}_2$ | e | h | e | h |
| $\mathfrak{B}_3$ | h | e | h | e |
| $\mathfrak{B}_4$ | e | h | e | h |
| $\mathfrak{B}_5$ | h | e | h | e |

Von da an wiederholen sich die Figuren, nur dass die aufeinanderfolgenden Intervalle ihre Rolle wechseln.



a b c d
$\mathcal{B}$ > $\mathcal{B}$ > $\mathcal{B}_1$
> $\mathcal{B}$ > $\mathcal{B}$ > $\mathcal{B}$
> $\mathcal{B}_2$ > $\mathcal{B}$




$> \mathfrak{B} \qquad > \mathfrak{B}_3.$

Aus den Figuren sind folgende Relationen zwischen dem Amplituden $\varphi$ und zwischen den Multiplicatoren $\sigma$ der beiden elliptischen bezw. hyperbolischen Intervalle abzulesen

für $\mathfrak{B} > \mathfrak{B}_1$ : $\varphi_{ad} = +\varphi_{bc} - 2\pi$ , $\sigma_{ab} = \sigma_{dc}$ ;

" $\mathfrak{B}_1 > \mathfrak{B} > \mathfrak{B}_2$ : $\sigma_{ad} = \sigma_{bc}$ , $\varphi_{ab} = \varphi_{dc}$ ;

" $\mathfrak{B}_2 > \mathfrak{B} > \mathfrak{B}_3$ : $\varphi_{ad} = -\varphi_{bc} + 2\pi$ , $\sigma_{ab} = \sigma_{dc}$ .

Di. d. 17. Juli 1894.] Für $2K = 3$ wollen wir uns die Übersicht über die Verhältnisse bei beliebigem $\mathfrak{B}$ auf eine etwas andere Weise verschaffen, indem wir die Polygone weglassen und nur die aus ihnen abzuleitenden Resultate tabelliren.

Wir denken uns zunächst die 7 ausgezeichneten Geraden $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_7$, ferner die drei Geraden $x = a, b, c$ gezogen, und wir wollen, in die so entstandene schachbrettartige Figur in jedem Felde eintragen, nicht nur, ob es sich elliptisch oder hyperbolisch verhält, sondern auch, zwischen welchen Grenzen im ersten Falle die Amplitude liegt. Die hyperbolischen Felder wollen wir schraffiren, vorderhand aber noch nichts eintragen.

Die parabolischen Fälle, welchen die horizontalen Geraden $\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2', \ldots \mathfrak{B}_7'$ entsprechen, wollen wir als Grenzfälle elliptischer Fälle ansehen, und demgemäß auch für ein parabolisches Intervall eine Amplitude $\varphi$ definiren.

Wenn wir eine geradlinige Seite als Teil eines unendlich großen Kreises ansehen, so ist die Winkelöffnung einer ganz im Endlichen liegenden Seite offenbar $\varphi = 0$, das $\varphi$ einer Seite, die einen Endpunkt im Endlichen, einen im Unendlichen hat, ist $= \pi$ zu setzen, und das $\varphi$ jeder geraden Linie, die sich einmal durchs Unendliche zieht, ist $= 2\pi$, wenn sie sich $n$ mal durchs Unendliche zieht $= n \cdot 2\pi$.

Infolgedessen haben wir irgend einem Intervall einer Linie $\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2' \ldots \mathfrak{B}_7$ als Amplitude zu geben $\pi$ multiplicirt mit der doppelten Anzahl der <u>im</u> Intervall liegenden 0-Punkte von $y$, und der einfachen Anzahl der an den

Enden des Intervalls liegenden 0 Punkte.

Man erhält so die Zahlen, die in dem unten folgenden Schema an den einzelnen Intervallen der ausgezeichneten Geraden eingetragen sind. (S. 390 & 391).

Gibt man nun $B$ einen allgemeinen Wert, d. h. zieht man eine horizontale Gerade, welche die Felder durchsetzt, so wird in denjenigen Intervallen, wo sie hyperbolische Felder durchsetzt, von einer Amplitude $\varphi$ vorläufig nicht zu reden sein, <u>in den elliptischen Feldern dagegen wird $\varphi$ zwischen denjenigen beiden Werten liegen, welche an der oberen und an der unteren horizontalen Begrenzung des Feldes angeschrieben sind.</u>

Dies folgt aus der Gestalt das $\eta$ Polygon, auch wenn wir die Polygone nicht explicit construiren

Es soll dies einfach dadurch ausgedrückt werden, dass wir den Buchstaben $\varphi$ zwischen die Werte an den beiden Grenzen schreiben.

Aber noch mehr: <u>durch die Polygone wissen wir von vornherein, dass immer eine, beim Übergang von $B$ über einen ausgezeichneten Wert allerdings wechselnde, sehr einfache</u>

Beziehung zwischen den Amplituden der jedesmaligen beiden elliptischen Intervalle besteht, von der Form

$$\varphi_{cd} = \pm \varphi_{ab} + \text{const}, \text{ bezw. } \varphi_{da} = \pm \varphi_{bc} + \text{const.}$$

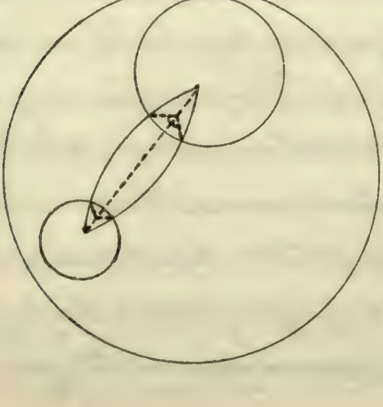
Das Vorzeichen und die Constante hierin können wir nun jedesmal leicht durch Vergleichung der Wert $\varphi$ längs der oberen und unteren Begrenzungsgeraden des betreffenden Horizontalstreifens finden. Es ergeben sich so die Amplituden in den äusseren Intervallen als Functionen der Amplituden in den inneren Intervallen, so wie es in das Schema eingetragen ist.

Damit haben wir die gewünschte Übersicht über die Amplituden der elliptischen Intervalle.

Um auch über die <u>hyperbolischen Intervalle</u> etwas entsprechendes aussagen zu können, müssen wir auf die nichteuklidischen Begriffsbestimmungen zurückgehen, welche wir im vorigen Semester bei Besprechung der trigonometrischen Formeln entwickelt haben.

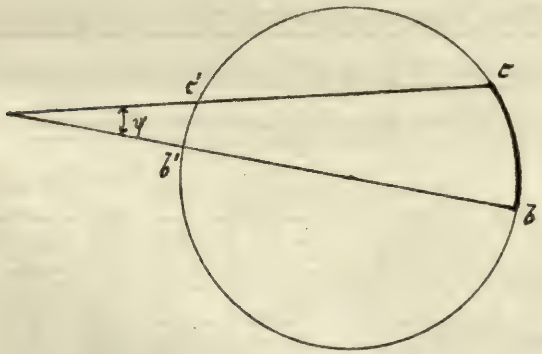
Jetzt haben wir anstatt eines Dreiecks ein Viereck; wir haben dasselbe bisher in der $\eta$-Ebene so particulär gezeichnet, daß zwei seiner Seiten auf geraden Linien liegen, die durch den 0-Punkt – und natürlich auch durch den Punkt $\infty$ – gehen, und dafs die andern beiden Seiten auf concentrischen Kreisen um den 0-Punkt als Centrum liegen.

Wenn wir jetzt von der Ebene in allgemeinster Weise auf eine $\eta$-Kugel übergehen, so gehen die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ in zwei beliebige Punkte der Kugel über, die beiden Radii vectores werden Kreise, die durch zwei Ebenen eines Büschels ausgeschnitten werden, das die Verbindungsgerade der beiden Puncte 0 und $\infty$ zur Axe hat, und die beiden concentrischen Kreise werden durch Ebenen desjenigen Büschels ausgeschnitten, das durch die conjugirte Polare der Verbindungsgeraden von 0 und $\infty$ geht. Was bedeutet jetzt $\varphi_{ab}$?



Zu dem Zwecke denken wir uns auf die Kugel als Fundamentalfläche eine nichteuklidische Mafsbestimmung gegründet und verfahren dann folgendermafsen:

Um die Länge einer Seite ab eines Kreisbogenpolygons a b c d . . . . n zu messen, schneiden wir die Ebene des Kreises ab mit den Ebenen der folgenden und der vorhergehenden Seite bc und na, und der Winkel, den die Schnittlinien dieser beiden Ebenen mit der Ebene ab in der Ebene ab mit einander bilden, ist uns das Maß für die Länge der Seite a b, wobei die absolute Fixirung der Größe dieses Winkels von der Art und Weise abhängt, wie die Kreisbogenseite ab längs der tragenden Kreislinie hinläuft.




Diese Definition läßt sich nun auch auf die Seiten b c und a d übertragen. Es schneiden sich dann nur die Spuren der Nachbarebenen nicht innerhalb, sondern ausserhalb der Kreislinie bc, und es kommt also heraus:

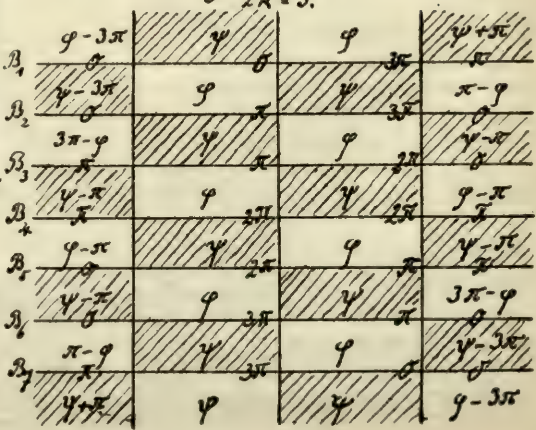
Als Länge des Stückes bc erscheint hier eine rein imaginäre Größe.

Dieser rein imaginäre Winkel wird aber um reelle Multiplica von $\pi$ zu vermehren sein, je nach den Umläufen der Seite $C$ entlang der sie tragenden Kreislinie, entsprechend den Verabredungen, die wir im vorigen Winter (Autogr. S. 400) getroffen haben.

Die Größe $\psi$ gibt also durch ihren reellen Teil ein Maß für die Umläufe der Kreisbogenseite, und wir werden verlangen, in die hyperbolischen Felder unserer Schemata die zugehörigen Amplituden $\psi$, die also aus einem Multiplum von $\pi$ und einem rein imaginären Teile bestehen, einzutragen. Der Multiplicator der hyperbolischen Substitution hängt mit diesem $\psi$ einfach durch die Formel zusammen.

$$\sigma = e^{i\psi}.$$

$2\kappa = 3.$




Was nun die Verteilung der $\psi$ in die Felder unseres Schemas betrifft, so ist zu sagen:

Im einzelnen hyperbolischen Intervall bleibt der reelle Bestandtheil des $\psi$ gleich dem für die beiden parabolischen Grenzen angeschriebenen Multiplum von $\pi$ (die in der That allemal dieselben sind), und der imaginäre Bestandtheil ändert sich irgendwie von 0 beginnend bis wieder zu 0 hin.

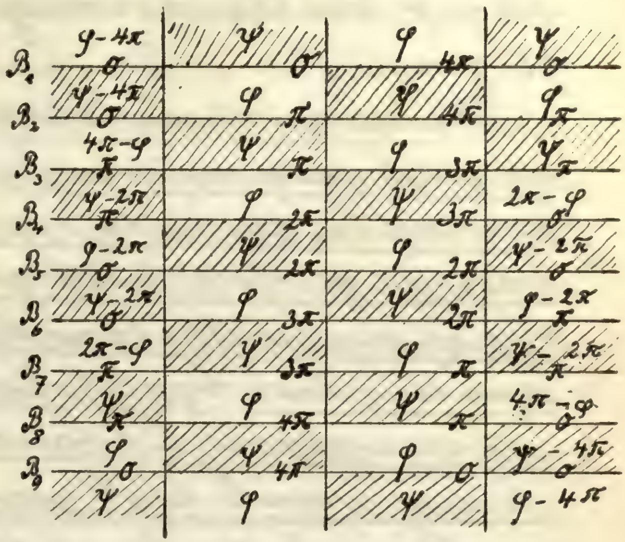
Den Relationen

$$\sigma_{ab} = \pm\, \sigma_{cd},$$

welche zwischen den Multiplicatoren des innern und des äußern hyperbolischen Intervalls bestehen, entsprechen für die $\psi$ Relationen der Gestalt.

$$\psi_{ab} = \psi_{cd} + \text{const.},$$

$2\kappa = 4.$




worin man die Constante wieder durch Vergleichung der Werte an den Grenzen des Streifens findet. Die $\psi$ der äußern Intervalle drücken sich daraufhin durch die der innern so aus, wie es in dem Schema eingetragen ist, das ich gleich auch für $2\kappa = 4$

mittheile.

Diese beiden Schemata für $2k = 3$ und $2k = 4$ lassen sofort erkennen, wie sich die Verhältnisse bei einem beliebigen ungeraden oder geraden Werte von $2k$ gestalten. Wir wollen hier diesbezüglich keine weiteren Sätze formuliren, sondern nur noch auf das verschiedene Verhalten hinweisen, welches die $\varphi, \psi$ bei Aenderung des Parameters $B$ zeigen:

Was die mittleren Felder unserer Figur angeht, so zeigt das $\varphi$ ein progressives Verhalten; es wird in der einen oder anderen Richtung immer größer und größer; dagegen das $\psi$ zeigt ein oscillatorisches Verhalten: in jedem einzelnen hyperbolischen Feld vollzieht der imaginäre Bestandtheil eine Schwankung von $0$ bis $0$ zurück, während der reelle Teil constant bleibt.

Es hängt dieses verschiedene Verhalten damit zusammen, daß die Forderung eines bestimmten $\varphi$ für ein einzelnes mittleres Intervall auf eine Forderung im Sinne des Oscillationstheorems zurückkomt, durch welche die Hermite'sche Gleichung

<u>eindeutig festgelegt wird, während betreffs des hyperbolischen Winkels $\psi$ keine solche Beziehung zum Oscillationstheorem besteht.</u>

Diese Beziehung zum Oscillationstheorem soll jetzt noch näher besprochen werden.

Do. d. 19. Juli 1894.] Wenn die Forderung gestellt wird, dass ein Intervall $ab$ die Amplitude $\varphi = \frac{m}{n}\pi$ haben soll – unter $m$ und $n$ ganze Zahlen verstanden, welche keinen gemeinsamen Teiler besitzen –, so wird das Kreisbogenviereck der $\eta$-Ebene $2n$ mal an $ad$ bezw. $bc$ gespiegelt den geschlossenen Kreisring gerade $m$-fach überdecken müssen. D. h., wenn wir auf die Lösungen $y$ der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgehen:

<u>Wenn wir für ein inneres Intervall $ab$ oder $bc$ die elliptische Amplitude $\varphi = \frac{m}{n}\pi$ angeben, so bedeutet das für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, dass bei $n$facher Durchlaufung des Doppelintervalls $aba$ resp. $bcb$ eine jede Particularlösung der Differentialgleichung gerade $m$ Halboscillationen ausführen soll.</u> *)

*) Von den äusseren Intervallen $da$ und $cd$ ist hier überall nicht die Rede (trotzdem dieselben für das $\eta$ Polygon keine andere Rolle spielen, als die inneren Intervalle). In der That werden ja die Particularlösungen $y$ bei $d$ allgemein zu reden unendlich und

Umgekehrt können wir sagen, wenn wir $n > 1$ voraussetzen:

Wenn irgend eine Particularlösung der Differentialgleichung bei $n$ maliger Durchlaufung des Doppel-Intervalls $m$ Halboscillationen ausführt, so bedeutet das, dass unser Intervall elliptisch ist und die Amplitude $\frac{m}{n}\pi$ besitzt.

Den Beweis führen wir folgendermassen:

1. Unsere Particularlösung, welche bei $n$-maliger Durchlaufung des Doppelintervalls $m$ 0-Stellen darbietet, kann keine Fundamentallösung des Intervalls sein, weil sonst $m$ ein Multiplum von $n$ sein müsste.

Denn wir haben auf S. 348 gesehen, dass eine Fundamentallösung, wenn sie reell ist, notwendig die Periode $2\omega$ oder $4\omega$ hat, also auf die Periode $4\omega$ notwendig eine ganze Zahl von vollständigen Oscillationen, d.h. auf die Periode $2\omega$ eine ganze Zahl von Halboscillationen besitzt

2. Unsere Lösung $y$ muss also notwendig die Gestalt haben

$$y = a y_1 + b y_2,$$

---

es kann also von „Oscillationen" des $y$ im elementaren Sinne nicht weiter die Rede sein.

und zwar muss hierin sowohl $a$ wie $b$ von $0$ verschieden sein. Sei $\varrho$ der reelle oder complexe Multiplicator von $y_1$, $\varrho^{-1}$ also der von $y_2$, bei einmaliger Durchlaufung des Doppelintervalls. Dann wird aus $y$ bei $n$-maligem Umlauf der Ausdruck

$$y' = a y_1 \cdot \varrho^{n} + b y_2 \cdot \varrho^{-n}.$$

Dies soll aber ein Multiplum von $y$ sein; folglich muss

$$\varrho^{n} = \varrho^{-n} \quad \text{oder} \quad \varrho^{2n} = 1$$

sein.

$\varrho$ ist also eine $2n$ te Einheitswurzel, und zwar, da $n$ die kleinste Zahl von Umläufen ist, nach welcher die $0$ Stellen sich wiederholen, ein primitive $2n$ te Einheitswurzel. Da $\varrho$ also complexe ist, so ist die Substitution elliptisch, und dann zeigt der Vergleich mit den allgemeinen Sätzen über das Verhalten in einem elliptischen Intervalle, dass die Amplitude desselben keine andere, als $\frac{m}{n}\pi$ sein kann. Also:

<u>Wenn wir eine elliptische Amplitude $\varphi = \frac{m}{n}\pi$ vorgeben, so heisst das dasselbe, als wenn wir für das $n$-fach durchlaufene Doppelintervall $m$ Halboscillationen einer Particularlösung verlangen, also dasselbe, als wenn wir für das</u>

n fach durchlaufene Doppelintervall eine Oscillationsbedingung vorgeben.

Darin liegt offenbar eine Erweiterung unseres Oscillationsproblemes gegenüber den früheren Formulirungen. Aber das erweiterte Problem ist ganz in derselben Weise zu behandeln, wie das einfache; wir werden alle Lagen der Hülfsgeraden ins Auge fassen, welche für das n fach durchlaufene Doppelintervall zu denselben Oscillationszahl m führen, und bekommen so den Satz:

Entsprechend der Forderung, $\varphi$ solle $= \frac{m}{n}\pi$ sein, werden wir für unsere Hülfsgerade eine ganz bestimmte Enveloppe von dem früheren Typus bekommen.

Es gilt dies vermöge einer Grenzbetrachtung auch wenn $\varphi$ nicht ein rationaler sondern ein irrationaler Teil von $\pi$ sein sollte.

Neben unsere frühere Oscillationsbedingung, dass $\frac{y'}{y}$ an den beiden Enden eines Segments bestimmte Werte haben, und dazwischen eine gewisse Anzahl von Malen von $+\infty$ nach $-\infty$ laufen sollte, stellt sich also jetzt eine neue Art von Oscillationsbedingung, welche darin besteht, dass man für ein inneres Intervall eine bestimmte elliptische Amplitude vorschreibt. Denken wir $A$ und $B$ beide als veränderliche Parameter, so werden wir diese jetzt dadurch festlegen können, daſs wir für jedes der beiden inneren Intervalle je eine beliebige Amplitude vorschreiben.

<u>Es ist also hier eine Erweiterung des ursprünglichen Oscillationstheorems gegeben, indem wir für die beiden Intervalle $ab$ und $bc$ statt der früheren „physikalischen" Oscillationsforderungen elliptische Amplituden vorgeben können.</u>

Bei der Hermite'schen Gleichung kommt diese allgemeine Formulirung des Problems natürlich nicht in Betracht, weil da $A$ nicht continuirlich veränderlich, sondern von vornherein in discreter Weise festgelegt ist. Man hat hier also nur eine einzige Enveloppe zu construiren, und an diese dem Werte von $A$ entsprechend eine Tangente von bestimmter Richtung zu legen. Da an eine Enveloppe von der früher characterisirten Gestalt nur immer eine einzige Tangente von bestimmter Richtung existirt, so ergibt sich der Satz:

<u>Bei gegebenem $A$ ist die Hermite'sche Gleichung vollkommen bestimmt, sobald wir</u>

für eines der beiden inneren Intervalle eine bestimmte elliptische Amplitude $\varphi$ vorschreiben.

Diesen Satz nenne ich „das Oscillationstheorem für die Hermite'sche Gleichung". Damit tritt zu den Angaben unserer Schemata auf S. 390/1, wo für die einzelnen Werte des Parameters $B$ die Grenzen angegeben sind, zwischen denen $\varphi$ liegt, noch eine weitere Angabe hinzu, nämlich:

Wir schliessen aus dem Oscillationstheorem, dass das $\varphi$ im Intervall $a\,b$ und ebenso das $\varphi$ im Intervall $b\,c$ eine monotone Function von $B$ ist, die das eine Mal mit abnehmendem $B$, das andere Mal mit zunehmendem $B$ beständig wächst.

Denn wenn $\varphi$ in einem elliptischen Felde nicht monoton sich änderte, sondern einmal zu-, dann abnähme, so müsste es Werte von $\varphi$ geben, die mindestens für zwei Werte von $B$ in dem betreffenden Intervalle angenommen würden, was dem Oscillationstheorem widerspricht. Und wenn z. B. für das Intervall $ab$ $\varphi$ sowohl zwischen $B_1$ und $B_2$, wie zwischen $B_3$ und $B_4$ u. s. w. monoton ist, so kann derselbe

Wert von $\breve{B}$ auch nicht in verschiedenen dieser elliptischen Felder vorkommen, da die Werte im Felde zwischen $\breve{B}_3$ und $\breve{B}_4$ gerade da beginnen (bei $\pi$), wo die Werte im Felde $\breve{B}_1 \breve{B}_2$ aufhören. Diese Betrachtung läßt aber sogleich noch folgende merkwürdige Eigenschaft von $\breve{B}$ als Function von $\varphi$ hervortreten; nämlich:

Der weitere Vergleich mit dem Schema läßt bemerken, daß $\breve{B}$ allerdings eine eindeutige Function der Amplitude $\varphi$ ist, die aber da, wo die hyperbolischen Zwischenfelder einsetzen, ganz bestimmte Unstetigkeiten hat.

$\breve{B}$ springt z. B. für $2\kappa = 3$ im Intervall $ab$ von $\breve{B}_2$ zu $\breve{B}_3$, von $\breve{B}_4$ zu $\breve{B}_5$ und von $\breve{B}_6$ zu $\breve{B}_7$, sobald $\varphi = \pi, = 2\pi, = 3\pi$ wird.

Das alles bezieht sich nur auf die inneren Intervalle.

Was die äußeren Intervalle betrifft, so zeigt unser Schema, daß das $\breve{B}$ nicht mehr eindeutig bestimmt sein würde, wenn man für ein solches, $da$ oder $cd$, eine elliptische Amplitude vorschreiben wollte.

Denn im Intervall $cd$ z. B. kommt irgend ein zwischen $0$ und $\pi$ gelegener Wert von $\varphi$ sowohl zwischen $\breve{B}_1$ und $\breve{B}_2$, wie zwischen

$B_3$ und $B_4$, zwischen $B_5$ und $B_6$ und endlich unterhalb $B_7$ vor; ähnlich im Intervall $d_a$.*)

In den hyperbolischen Intervallen ferner wissen wir von vornherein, dass $\psi$ nicht monoton ist; daraus folgt:

<u>Auch würde $B$ nicht eindeutig festgelegt werden, wenn wir in irgend einem der 4 Intervalle eine hyperbolische Amplitude vorschreiben wollten.</u>

Damit schliessen wir unsere Betrachtungen über die Lamé-Hermite'sche Gleichung ab. Was noch fehlt, wäre die genaue quantitative Bestimmung und analytische rechnungsmässige Bestätigung unserer allgemeinen orientirenden Sätze. Überhaupt würde eine consequente lückenlose Darstellung der Theorie der Hermité'schen Gleichung von den entwickelten Gesichtspunkten aus sehr wünschenswert sein, ähnlich wie die Arbeit von Bôcher sich zu meinen Vorlesungen über die Lamé'sche Differentialgleichung stellt.

*) Diese Vieldeutigkeit gilt allerdings nur für Werte von $\psi$ zwischen 0 und $\pi$, für Werte $\psi > \pi$ tritt wieder Eindeutigkeit ein, wie ein Blick auf unser Schema zeigt. Es ist das sehr merkwürdig.

Wir wollen hier gleich einige allgemeine Angaben anfügen betreffend die Weiterführung und Erweiterung der bisherigen Betrachtungen über das Oscillationstheorem.

Unsere bisherige Theorie war durch folgende Maßnahmen zu kennzeichnen:

1. Festlegung der Parameter der Differentialgleichung durch zwei physikalische Oscillationsbedingungen. Von da aus ergab sich eine

2. Neue Theorie der Lamé'schen Polynome.

Im Anschluß hieran fand seine Stelle ein

3. Excurs über den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung, was auf das Oscillationstheorem in der Weise zurückwirkte, daß statt der physikalischen Oscillationsbedingungen eine bestimmte Amplitude einer elliptischen Substitution gefordert wurde.

Die Weiterführung der Theorie wird sich nun wesentlich auf folgende Punkte zu beziehen haben

4. Ausdehnung auf den Fall von n singulären Punkten.

5. Wir erinnern uns der früher ausgesprochenen Idee, die gewöhnliche Lamé'sche Differentialgleichung, welche an 3 Punkten

die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$, am vierten aber eine von $\frac{1}{2}$ verschiedene Exponentendifferenz aufweist, als Grenzfall einer Differentialgleichung mit 5 singulären Punkten aufzufassen, welche jeder die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ haben. Es würde also eine Theorie der allgemeinen Lamé'schen Gleichung mit den Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}$ in der entsprechenden Weise durchzuführen sein.

6. Endlich wäre zu fragen, inwieweit das Oscillationstheorem aufrecht erhalten bleibt, wenn wir die Exponentendifferenzen als veränderlich betrachten, ganz im Sinne der Stieltjes'schen Betrachtungen betreffend die Lamé'schen Polynome.

Fr. d. 20. Juli 1894.] Lassen Sie mich heute

A. über die Ausdehnung auf $n$ singuläre Punkte einige Angaben machen.

Es mögen $n-1$ Punkte $a, b, c \dots m$ mit den Exponenten $\frac{1}{2}, 0$ im Endlichen gelegen sein, und ein $n$ter Punkt mit den Exponenten $-k, +k+\frac{n-3}{2}$ liege im Unendlichen. Die Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$$0 = y'' + \tfrac{1}{2}y'\left\{\frac{1}{x-a} + \dots + \frac{1}{x-m}\right\} - \frac{y}{4(x-a)\dots(x-m)}\left\{A x^{n-3} + B x^{n-4} + \dots + L\right\}$$

wobei $\mathcal{A} = +2k(2k+n-3)$,
und $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots \mathcal{L}$ sogenannte „accessorische Parameter" sind.

Wir führen zur Vereinfachung das hyperelliptische Integral:

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(x-m)}}$$

als unabhängige Variable ein, und erhalten so die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\mathcal{A}x^{n-3} + \mathcal{B}x^{n-4} + \cdots + \mathcal{L})\cdot y.$$

Unser Oscillationssatz wird nun in folgender Weise erweitert werden müssen:

<u>Die $n-2$ Parameter unserer Gleichung sind dadurch eindeutig festzulegen, dass wir in $n-2$ Segmenten Oscillationsbedingungen vorschreiben.</u>

Es fragt sich, wie wir diesen Satz beweisen.

Zunächst für $n=5$ können wir dieselbe Betrachtung, welche wir in der Ebene mit der Hülfsgeraden anstellten, auf den dreidimensionalen Raum übertragen, wo wir es mit einer „<u>Hülfsebene</u>" $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ zu thun haben, durch deren Lage an jeder Stelle der $x$-Axe die Intensität der elastischen Kraft bestimmt ist.

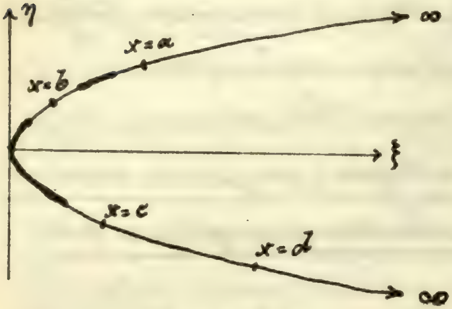
Die Gleichung lautet für $n = 5$

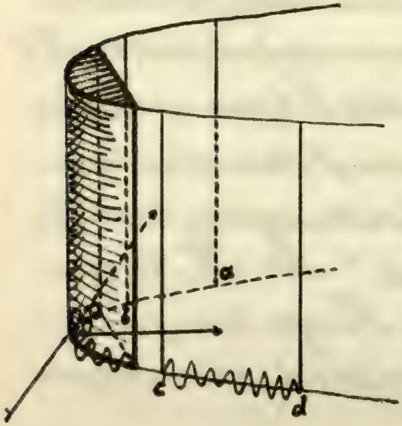
$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}) \cdot y.$$

Wir gehen nun in einen $R_3$ mit den Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$, indem wir setzen

$$\xi = x^2, \quad \eta = x, \quad \zeta = y.$$

Durch $\xi = x^2$, $\eta = x$, ist in der $\xi\eta$-Ebene eine Parabel vorgestellt, welche jetzt an Stelle der $x$-Axe tritt. Nehmen wir die dritte Coordinate $\zeta$ hinzu, so erhalten wir einen verticalen parabolischen Cylinder, auf welchem die $x$-Axe durch den Schnitt mit einer horizontalen Ebene vorgestellt wird. Auf diesem Cylinder, den wir uns geradezu als ein parabolisch



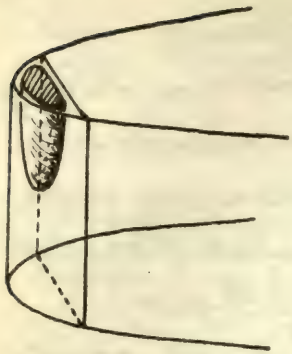
zusammengebogene $x\,y$-Ebene vorstellen können, haben wir nun genau ebenso zu operiren wie früher in der $x\,y$-Ebene. Irgend eine Lösung $y$ der Differentialgleichung wird sich als eine Curve auf dem Cylinder darstellen, die in bestimmter Weise um die horizontale Parabel auf und ab oscillirt (vergl. die Figur).

Wie früher die Gerade $y = Ax + B$, so gibt jetzt die Ebene $\zeta = A\xi + B\eta + C$, oder vielmehr deren Schnittcurve mit dem Cylinder durch ihre Erhebung über die Parabel $y = 0$ die Größe der elastischen Kraft an, welche an einer Stelle der $x$-Axe herrscht. Man wird nun fragen:

Was ist die Umhüllungsfläche der $\infty^2$ Hülfsebenen, welche bewirken, daß für ein einzelnes gegebenes Segment eine bestimmte Oscillationsbedingung befriedigt wird?

Es wird dann darauf ankommen, einzusehen, daß drei beliebige Hüllflächen der genannten Art, welche sich auf drei getrennte Segmente beziehen, eine und nur eine gemeinsame Tangentialebene haben.

Wir denken uns die beiden Enden des Segments auf der Parabel, für welches eine



Oscillationsbedingung gegeben ist, durch eine gerade Linie verbunden. Errichten wir nun über dieser Geraden eine zur $\xi$-Axe parallele Ebene, so wird dieselbe von dem parabolischen Cylinder ein verticales Segment abschneiden. Physikalische Überlegungen führen nun sofort zu dem Satze:

<u>Irgend zwei Ebenen, welche für unser Segment dieselbe Oscillationsbedingung liefern, müssen sich innerhalb unseres Cylindersegmentes schneiden.</u>

Dem folgt aber, dass die Hüllfläche der Ebenen vollständig in dem Cylindersegment liegen muss, und zwar so, dass sie durchweg convex von oben (wie in der Figur) oder von unten in das Segment wie ein Sack hineinhängt, indem sie sich im Unendlichen den Wandungen des Segmentes asymptotisch nähert.

Wenn man nun diese Hüllflächen über irgend drei aufeinanderliegenden Segmenten construirt, so ist es infolge der geschilderten gestaltlichen Verhältnisse klar, dass die Hüllflächen nur eine einzige gemeinsame Tangentialebene besitzen, dass also das Oscillationstheorem für $n = 5$ richtig ist.

Für $n > 5$ müsste man, um die entsprechenden geometrischen Überlegungen durchzuführen, in Räumen von 4, 5, und mehr Dimensionen operiren. Da aber die beweisende Kraft unserer geometrischen Überlegung wesentlich darin liegt, dass wir die Figuren wirklich klar vor Augen sehen, was bei höheren Räumen versagt, so wollen wir die Frage der Ausdehnbarkeit des Oscillationstheorems auf $n > 4$ lieber noch offen lassen.

Es bliebe zu überlegen, ob die bisher in Ebene und Raum gegebenen Constructionen sich analytisch so formuliren lassen, dass der Beweis ohne wesentliche Abänderung für beliebig grosse Werte von $n$ gegeben werden kann.

Seine Stütze findet das Oscillationstheorem für grössere $n$ jedenfalls in den Sätzen, welche über die Lamé'schen Polynome für grössere n bekannt sind.

Gehen wir nämlich von der Frage aus, ob wir die Parameter $A, B, \dots L$ so einrichten können, daß eine Lösung der Differentialgleichung die Gestalt hat:

$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}} (x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}} \cdots (x-m)^{\frac{\varepsilon^{(m)}}{2}} \cdot E_k(x)$$

worin $E_k(x)$ ein Polynom $k$ ten Gerades bedeuten soll, so führt das auf die Theorie der Lamé'schen Polynome zurück, insofern das einzelne $E_k$ eine Differentialgleichung befriedigt, welche bei $a, b, \dots m$ je nach dem Werte des zugehörigen $\varepsilon$ die Exponenten $\pm\frac{1}{2}$ und $0$ hat. Man findet also auf algebraischem Wege, daß dies in der That möglich ist, und zwar für jede der $2^{n-1}$ verschiedenen möglichen Verfügungen über die $\varepsilon$, $\varepsilon', \dots \varepsilon^{(m)}$ bei gegebenem $k$ auf

$$R = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n-3)}{1.2\cdots(n-3)}$$

verschiedene Weisen.

Dabei stellt sich heraus, daß von den $R$ Polynomen $E_k$ eines Typus ein jedes lauter reelle Wurzeln hat, welche sämtlich in den inneren Intervallen verteilt liegen, bei jedem Polynom auf andere Weise.

Geben wir also die Anzahl der Wurzeln eines Polynoms $E_x$, die Verteilung derselben auf die Intervalle $ab$ bis $lm$ und die $\varepsilon, \varepsilon' \dots \varepsilon^{(\kappa)}$ an, so ist dadurch die Differentialgleichung vollständig festgelegt. Wenn wir aber die Verteilung der Wurzeln auf die Intervalle $ab$ bis $lm$ angeben, so heisst das doch nichts anderes, als dass wir für jedes dieser Intervalle die Oscillationszahl einer Lösung in ihrem ganzzahligen Teile festlegen, worauf die Angabe der $\varepsilon, \varepsilon' \dots \varepsilon^{(\kappa)}$ darüber verfügt, ob das betr. $y$ an den einzelnen Punkten $a, b, \dots m$ die eine oder die andere Fundamentallösung vorstellen soll. Also

<u>Die verschiedenen $y$, welche wir bei unserm Ansatz gewinnen, befriedigen jedes in den $n-2$ inneren Intervallen eine Reihe specifischer Oscillationsbedingungen. Nehmen wir an, dass das Oscillationstheorem richtig ist, so können wir von vornherein sagen, dass es ein und nur ein $y$ gibt, welches eine solche specifische Reihe von Oscillationsbedingungen befriedigt.</u>

<u>Das zweite wäre, dass wir jetzt einfach schliessen, unser $y$ hat die Gestalt:</u>

$$\underline{(x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}\dots(x-m)^{\frac{\varepsilon^{(n)}}{2}}\, E_k(x),}$$

<u>wo $E_k(x)$ ein Polynom von einem noch unbekannten Grade ist.</u>

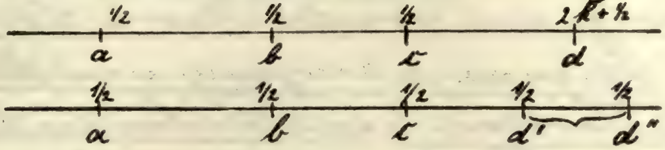
$E(x)$ ist nämlich notwendig in der ganzen $x$-Ebene im Endlichen unverzweigt und endlich und besitzt auch im Unendlichen keinen wesentlich singulären Punkt. Ob aber der Grad $k$ genau gleich der Anzahl der durch die Oscillationsbedingungen vorgegebenen reellen 0-Stellen ist, oder ob $y$ noch weitere reelle oder complexe 0-Stellen besitzt, das bleibt vorderhand noch fraglich.

<u>Drittens zeigen wir durch Construction des Polygons in der $\eta$-Ebene, dass der Grad $k$ des Polynoms $E$ einfach gleich der Zahl der in den inneren Intervallen vorgeschriebenen reellen 0 Stellen ist.</u>

<u>In dem Umstande, dass die so geordnete Überlegung zu der nämlichen Theorie der Lamé'schen Polynome hinführt, die wir von dem algebraischen Ausgangspunkt her kennen, liegt eine Bestätigung des Oscillationstheorems auch für grössere Werte von $n$.</u>

Dies ist's was ich heute unter A) noch über den Fall von $n$ singulären Punkten vortragen wollte.

B. Wir erinnerten schon früher daran, daß man die gewöhnliche Lamé'sche Gleichung des Falles $n = 4$ als Grenzfall der sog. <u>allgemeinen Lamé'schen Gleichung</u>




ansehen kann, indem man den singulären Punkt $d = \infty$ mit der von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Exponentendifferenz $2k + 1/2$ in zwei Punkte $d'$ und $d''$ mit den Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}$ auflöst.

Umgekehrt kann man durch weiteres Zusammenrückenlassen von Verzweigungspunkten die übrigen Functionen der mathematischen Physik, Kugelfunctionen, Bessel'sche Functionen u. s. w. entstehen lassen, wie wir ebenfalls schon damals hervorgehoben haben.

<u>Ob das Oscillationstheorem für die allgemeine Lamé'sche Gleichung einerseits und für ihre sämtlichen Specialisirungen andererseits noch gültig bleibt, das ist die Frage, welche Böcher in seinem</u>

Buche ausführlich untersucht.

Bei diesem Ansatze kommt die Theorie der Lamé'schen Polynome, die uns sonst ein willkommener Vergleichungspunkt ist, ganz in Wegfall, und es ist eben darum früher, wo man nur von der Theorie der Lamé'schen Polynome ausging und deren Realitätstheoreme suchte, über die hier vorliegende Fragestellung auch nicht vorbereitend gearbeitet worden.

Mo. d. 23. Juli 1894.] Die allgemeine Lamé'sche Gleichung, welche das Schema hat:

$$\overset{\frac{1}{2},\,0}{\vert} \qquad \overset{\frac{1}{2},\,0}{\vert} \qquad \overset{\frac{1}{2},\,0}{\vert} \qquad \overset{\frac{1}{2},\,0}{\vert} \qquad \overset{\frac{1}{2},\,0}{\vert}$$

schreibt sich, wie wir vor Pfingsten gesehen haben, am bequemsten in homogener Form:

$$\left(\overset{-\frac{1}{4}}{\Pi}, \overset{5}{\varphi}\right)_2 + \left(\overset{-\frac{1}{4}}{\Pi}, \overset{1}{\chi}\right)_0 = 0,$$

worin $\varphi = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$

und $\chi$ eine beliebige Linearform ist, deren beide Coefficienten die accessorischen Parameter der Gleichung sind.

Für die Zwecke unserer geometrisch-physikalischen Betrachtungen müssen wir uns aber doch entschliessen, die Differentialgleichung in unhomogene Gestalt umzurechnen. Wir bekommen, indem wir mit $f$ das Product

$$f = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$$

bezeichnen, die Gleichung:

$$f \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} f' \frac{dy}{dx} + \frac{1}{64} f'' y = \frac{Ax+B}{4} \cdot y.$$

Dabei ist im Unendlichen ein unwesentlicher singulärer Punkt eingeführt, d. h. ein solcher, der bei Bildung des Quotienten $\eta$ herausfällt, mit den Exponenten $\varrho' = \frac{5}{4}$, $\varrho'' = \frac{1}{4}$.

Wir führen nun analog dem Verfahren bei der gewöhnlichen Lamé'schen Gleichung eine neue unabhängige Veränderliche $t$ ein, durch das hyperelliptische Integral

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}},$$

welches allerdings bei $x = \infty$ noch einen für unsere Zwecke überflüssigen Verzweigungspunkt besitzt.

Auf der Riemann'schen Fläche des Integrals ist unsere Differentialgleichung umzweigt, — der Punkt $\infty$ stört dabei nicht —. Wir bekommen die Formel:

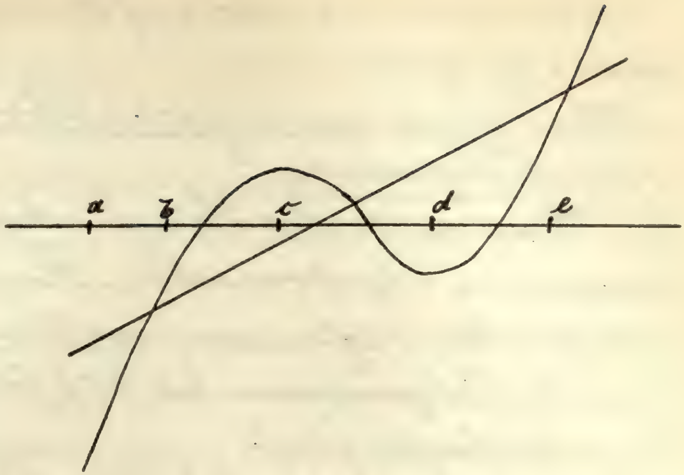
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left(-\frac{1}{16} f''(x) + Ax + B\right) \cdot y.$$

Man sieht, daß hier im Coefficienten von $y$ nicht nur die beiden noch festzulegenden accessorischen Parameter vorkommen, sondern außerdem noch ein Ausdruck dritter Ordnung $-\frac{1}{16} f''(x)$, entsprechend der singulären Stellung des unendlich fernen Punktes auf der Riemann'schen Fläche sowohl wie bei unserer nichthomogenen Schreibweise.

Deutet man also wieder $A$ und $B$ als Coordinaten einer „Hülfsgeraden" $y = Ax + B$, so geben die Ordinaten dieser Geraden noch nicht ohne weiteres den Coefficienten der elastischen Kraft an jeder Stelle $x$ an, sondern:

<u>Man bekommt den Coefficienten der elastischen Kraft an irgend einer Stelle, indem man die Ordinaten der Hülfsgeraden um die Ordinaten einer festen Curve dritter Ordnung $y = \frac{1}{16} f''(x)$ vermindert.</u>

In den Intervallen, wo $t$ reell ist, wird also Anziehung herrschen, wenn die Hülfsgerade unterhalb der festen Curve dritter Ordnung liegt, Abstoßung, wenn sie oberhalb liegt; umgekehrt in den Intervallen, wo $t$ imaginär ist und als reelle Zeit daher $i\,t$ zu benutzen ist.




Diese Modification der mechanischen Bedeutung der Hülfsgeraden hindert aber offenbar nicht, genau dieselben Fragen und Ansätze, wie früher, durchzuführen.

Indem man die Hülfsgerade als beweglich ansieht und die Enveloppen in Betracht zieht, welche sie umhüllt, wenn man in irgend einem Segment eine bestimmte Oscillationsbedingung vorschreibt, beweist man ganz in früherer Weise in dem früheren Umfang das Oscillationstheorem.

Nun will ich nur auf eine einzige Frage dabei eingehen:

<u>Was wird aus unserer Theorie der Lamé'schen Polynome?</u>

Wenn wir die Lamé'schen Polynome von dem algebraischen Standpunkt aus, wie früher, definiren wollen, indem wir nach Polynomen $E_K(x)$ fragen von der Eigenschaft, daſs

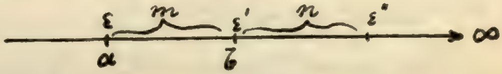
$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}} \cdot E_K(x)$$

einer Differentialgleichung von der vorausgesetzten Form mit speciellen Werten $A$, $B$ genügt, so müssen wir sofort sagen, daſs es im Fall der allgemeinen Lamé'schen Gleichung solche Polynome nicht geben kann. Denn bei $x = \infty$ hätte ein solches $y$ den Exponenten $k + \frac{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''}{2}$, während doch unsere Differentialgleichung dort nur die beiden Exponenten $5/4$ und $1/4$ hat, was mit einander unverträglich ist. Also:

<u>Der gewöhnliche algebraische Ansatz aus der Theorie der Lamé'schen Polynome wird hier gegenstandslos.</u>

Um so erfreulicher ist es, daſs der Oscillationsansatz sich auf die allgemeine Lamé'sche Gleichung übertragen läßt, und bei ihr, natürlich nicht zu Polynomen, aber doch zu solchen Functionen führt, die man als Verallgemeinerung der Lamé'schen Polynome zu betrachten hat.

Wir sind nämlich vom Oscillationstheorem aus zu den Lamé'schen Polynomen gekommen, indem wir verlangten, es sollten die Parameter $A$ und $B$ so bestimmt werden, dass eine Particularlösung $y$ an der Stelle $a$ sich verhielte wie $(x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}$, bei $b$ wie $(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}$, bei $c$ wie $(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}$, und




dass sie im Intervall $ab$ $m$ Nullstellen, im Intervall $bc$ $n$ Nullstellen besitzen sollte; ich will kurz sagen, durch die Oscillationsbedingung
$[\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''; m, n]$.

Dieselbe Forderung können wir nach dem Oscillationstheorem auch bei der allgemeinen Lamé'schen Gleichung stellen. Es ergibt sich dann:

<u>Durch die Forderung, dass eine Particularlösung $y$ von diesem Verhalten existiren soll, sind die accessorischen Parameter $A$, $B$ der</u>

<u>Differentialgleichung sowie die zugehörige Particularlösung $y$ (letztere natürlich von einem constanten Factor abgesehen) eindeutig festgelegt.</u>

Wir könnten auch hier

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}}(x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}}(x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}}\mathfrak{E}(x)$$

setzen, doch ist dann $\mathfrak{E}(x)$ kein Polynom mehr, sondern ein bei $a, b, c$ allerdings unverzweigte, bei $d$ und $e$ jedoch noch verzweigter Functionszweig.

Wir wollen nun über die Natur der Function $y_1$ sowie der zugehörigen Differentialgleichung Näheres erfahren.

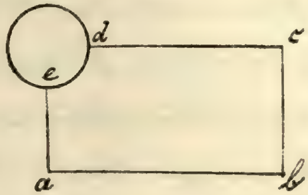
Um uns über die Natur der festgelegten Differentialgleichung klar zu werden, versuchen wir das Polygon in der $\eta$-Ebene zu construiren also ein Kreisbogenfünfeck mit fünf rechten Winkeln.

Die Particularlösung $y_1$ ist nach unserer Forderung für jeden der drei Punkte $a, b, c$ gleichzeitig eine Fundamentallösung. Daraus folgt nach dem auf S 301 ff. bewiesenen allgemeinen Satze:

<u>Wählen wir speciell $\eta = \frac{y_2}{y_1}$, wo $y_1$ die Particularlösung ist, die unseren Oscillationsbe-</u>

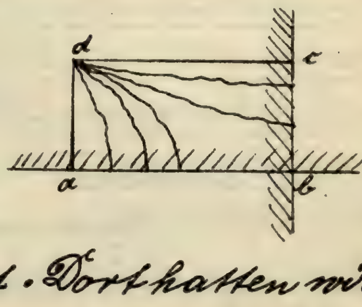
dingungen genügt, dann werden die 4 Seiten da, ab, bc, cd unseres Fünfecks geradlinig werden.

Wenn speciell alle $\varepsilon = 0$ sind, auf welchen Fall wir unsere Überlegungen vorzugsweise exemplificiren wollen, so liegen alle Ecken im Endlichen. Der Bereich wird also etwa in nebenstehende

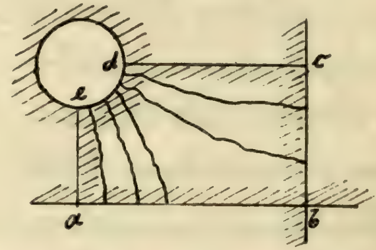



Figur einzuhängen sein, und zwar so, dass die Seite ab $m$ mal, die Seite bc $n$ mal durchs Unendliche zieht.

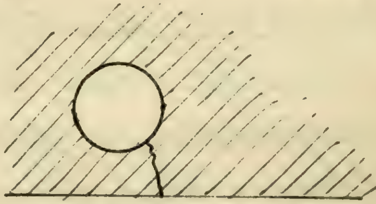
Um zu sehen, wie wir diese Einhängung vorzunehmen haben, und um zugleich den stetigen Zusammenhang unserer jetzigen Functionen mit denen des gewöhnlichen Lamé'schen Falles zu verstehen, werde das $\eta$-Viereck hergesetzt, welches bei der gewöhnlichen Lamé'schen Gleichung derselben Oscillationsbedingung etwa für




$m = 3$, $n = 2$ entspricht. Dort hatten wir von der Ecke d aus nach ab $m$ (3) Halbebenen, nach $bc$ $n$ (2) Halbebenen polar einzuhängen. Jetzt aber ist die Ecke $d$ durch den die Ecke abschneidenden Kreisbogen $de$ ersetzt. Unsere Verzweigungsschnitte werden also jetzt von der Seite $ab$ bezw. $bc$ nach der Seite $de$ hin laufen. [Nicht nach den Winkeln $d$ oder $e$, da ja diese $= \frac{1}{2}\pi$ bleiben sollen.]




Anstatt Halbebenen haben wir jetzt Flächen einzuhängen, welche aus den früheren Halbebenen entstehen, indem man das Innere der Kreislinie $de$ herausschneidet; wir wollen ein solches Flächenstück allgemein einen „Kreisring" nennen.



Wir bekommen also das Polygon der $\eta$-Ebene, wenn wir an das gezeichnete aus dem Rechteck entstandene 5-Eck $m$ Kreisringe von $de$ nach $ab$ und $n$ Kreisringe von $de$ nach $bc$ einhängen.

Wir sehen dann weiter aus der Figur:

Während früher der singuläre Punkt $d$ den Winkel $(2m + 2n + \frac{1}{2})\pi$ bekam, bekommt jetzt die Kreisbogenseite de die elliptische Amplitude $(2m+2n+\frac{1}{2})\pi$. Ferner aber

Die Seiten cd und ae haben rein imaginäre d.h. hyperbolische Amplituden.

Denn die Nachbarkreise ed und bc, bezw. ed und ab schneiden sich nicht.

Uebertragen wir dies auf die Fälle beliebiger $\varepsilon$, so erhalten wir den allgemeinen Satz:

Wenn wir in der allgemeinen Lamé'schen Gleichung die beiden accessorischen Parameter $A$, $B$ durch die Oscillationsbedingung $[\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''; m, n]$ festlegen, so bekommen wir für die beiden Intervalle ac und cd hyperbolische Amplituden, welche bis auf einen reellen Bestandteil $\varepsilon\pi$ bezw. $\varepsilon''\pi$ rein imaginär sind, für das fünfte Intervall de aber eine elliptische Amplitude von dem Betrag $(2m+2n+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''+\frac{1}{2})\pi$.

Bei den Dreiecken konnten wir uns zum Beweise solcher Sätze auf eine ausgebildete Theorie, die sphärische Trigonometrie, stützen.

Offenbar sollten wir, um Differentialgleichung mit 4, 5 und mehr singulären Punkten zu behandeln, eine allgemeine Polygonometrie der Kreisbogenvielecke besitzen, ganz entsprechend der Trigonometrie, die wir im vorigen Winter betrachteten.

Die Lehren dieser Polygonometrieen wären dann bei der Discussion der einzelnen Differentialgleichungen heranzuziehen. Was wir bei der Hermite'schen Gleichung und nun bei der allgemeinen Lamé'schen Gleichung mit aus den Polygonen gemacht haben, das sind besonders einfache Fälle einer derartigen allgemeinen Discussion.

Ich habe bereits oben (13) die wenige Literatur genannt, welche wir bis jetzt in Richtung der hier postulirten allgemeinen Polygonometrie besitzen.

## Veränderliche Exponenten.

Di. d. 24. Juli 1894.] Heute wollen wir nun einen Blick darauf werfen, was aus dem Oscillationstheorem wird, wenn wir $\alpha, \beta, \gamma$ allgemeine Werte, die von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, zuerteilen — um uns auf den Fall von 4 singulären Punkten zu beschränken —.

Es mögen also $a, b, c$ die Exponenten $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$ haben, wobei wir $\alpha, \beta, \gamma$ jedenfalls als positive Grössen annehmen wollen, pour fixer les idées, während der vierte singuläre Punkt $d$ mit beliebiger Exponentendifferenz im Unendlichen liegen mag. Ganzzahlige Werthe der $\alpha, \beta, \gamma$ schliessen wir der Kürze halber aus.

Die Differentialgleichung hat dann die Gestalt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{Ax+B}{4(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot y$$

Unsere Aufgabe möge dahin begränzt werden die früheren Angaben über Lamé'sche Polynome bei veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma$ mit unsern Oscillationsbetrachtungen in Verbindung zu setzen.

Wir fragen also, ob wir den Parameter $A$, welcher die Exponenten des unendlich fernen Punkts bestimmt, und den accessorischen Parameter $B$ in der Differentialgleichung so festlegen können, dass eine Particularlösung der Differentialgleichung in der Form enthalten ist:

$$y_1 = (x-a)^{\varepsilon\alpha}(x-b)^{\varepsilon'\beta}(x-c)^{\varepsilon''\gamma} \cdot E_k(x),$$

unter $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ wie früher die Zahlen 0 oder 1 und unter $E_k(x)$ ein Polynom verstanden.

Da $y_1$ Lösung einer Differentialgleichung mit den Exponenten $\alpha, 0; \beta, 0; \gamma, 0$ bei $a, b, c$ ist, ist $E_\kappa(x)$ Lösung einer andern Differentialgleichung mit den Exponenten $\pm\alpha, 0; \pm\beta, 0; \pm\gamma, 0$, wobei $+$ oder $-$ zu setzen ist, je nachdem das betreffende $\varepsilon = 0$ oder $= 1$ ist, und zwar gehört $E_\kappa(x)$ als Lösung dieser Differentialgleichung bei jedem der Punkte $a, b, c$ gleichzeitig zum Exponenten 0.

In dieser letzten Weise, als Lösung einer Differentialgleichung, bei der immer der eine Exponent je eines Punktes verschwindet, der andere aber beliebig positiv oder negativ sein darf, haben wir das Lamé'sche Polynom bereits früher vermittelst der Normalform von Waelsch definirt.

<u>Das $E_\kappa$, welches früher zu einem positiven Exponenten $+\alpha$ gehörte, erhalten wir jetzt, wenn wir $\varepsilon = 0$ nehmen, das $E_\kappa$ aber, welches zu dem negativen Exponenten $-\alpha$ gehörte, bekommen wir aus unserer Differentialgleichung, indem wir $\varepsilon = 1$ nehmen.</u>

Was für Realitätstheoreme lassen sich nun über die so eingeführten $E_\kappa(x)$ aussagen?

Wir entnehmen unseren früheren Entwickelungen die folgenden Sätze.

Im Falle negativer Exponenten sind alle $E_\kappa$ reell und einzeln durch die Verteilung ihrer Wurzeln auf die Intervalle $ab$, $bc$ characterisirt. Dasselbe gilt für positive Exponenten, die unterhalb 1 bleiben.

Werden aber die Exponenten $> 1$, so treten Fallunterscheidungen auf, und es sind dann die $E_\kappa(x)$ jedenfalls nicht immer durch ihre Wurzelverteilung in den Intervallen $ab$, $bc$ eindeutig characterisirt.

Daraus folgt, wenn wir an die Differentialgleichung der vorigen Seite anknüpfen und eine Oscillationsbedingung $[\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''; m, n]$ vorgeben:

1. Wenn $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$ ist, dann sind die $E_\kappa(x)$ immer eindeutig bestimmt.

Denn dann genügt $E_\kappa(x)$ einer Differentialgleichung, welche in $a, b, c$ neben $0, 0, 0$ die negativen Exponenten $-\alpha, -\beta, -\gamma$ aufweist.

2. Wenn irgend ein $\varepsilon = 0$, die zugehörige Exponentendifferenz $\alpha$ aber $< 1$ ist, dann sind die $E_\kappa$ ebenfalls eindeutig bestimmt.

3. Wenn ein $\varepsilon = 0$ und $\alpha > 1$ ist, dann ist es noch zweifelhaft, ob eindeutige Bestimmtheit vorliegt oder nicht.

Wir bekommen in dem letzteren Falle, wenn $n = 3$, nicht $= 4$ ist, die Regel:

<u>Wenn nur 3 Verzweigungspunkte vorliegen, so können wir die zweifelhaften Fälle genau einteilen: Wenn nämlich die Zahl der 0-Stellen, die im Intervall vorgeschrieben wird, $\geqq 2$ ist, dann ist alles bestimmt, wenn sie aber $< 2$ ist, so liegen wirklich verschiedene Möglichkeiten vor.</u> (vergl. S.234)

Ich streife aber diesen Fall von 3 Verzweigungspunkten, wo alles vollständig durchführbar ist, nur beiläufig; im wesentlichen bleiben wir bei $n = 4$.

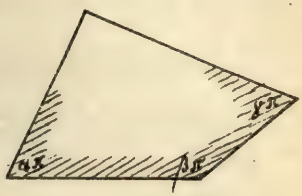
<u>Die genannten Oscillationssätze folgen aus der Theorie der Lamé'schen Polynome. Die Aufgabe müsste sein, sie durch directe mechanisch-physikalische Betrachtungen aus der Differentialgleichung selbst herauszubringen.</u>

<u>Das Resultat muss sein, dass für $\varepsilon = 1$ und für $\varepsilon = 0$ mit $\alpha < 1$ die alten mechanischen Betrachtungen in der Hauptsache gültig bleiben, während bei $\varepsilon = 1$ und $\alpha > 1$ irgend etwas sich wesentlich ändern wird.</u>

Wir setzen, um das Glied mit $y'$ wegzuschaffen:

$$t = \frac{1}{2}\int^{x}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}\,dx.$$

Die Variable $t$ bildet dann die positive Halbebene $x$ auf ein geradliniges Viereck mit den drei Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ ab, welche alle 3 im Endlichen liegen, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sämtlich positiv sind, wie wir voraussetzen.




Erstrecken wir das Integral etwa vom Werte $x = a$ an und multipliciren dasselbe noch mit einer passenden Einheitswurzel, so können wir bewirken, daß durch das so modificirte Integral, welches wir $t$ nennen wollen, speciell das Stück $ab$ der reellen Axe in der $x$-Ebene als Stück der reellen Axe in der $t$'-Ebene abgebildet wird: so daß wir im Intervall $ab$ direct das so definirte $t$' als Zeit deuten können.

Die Differentialgleichung rechnet sich um:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\mathfrak{A}x + \mathfrak{B})(x-a)^{1-2\alpha}(x-b)^{1-2\beta}(x-c)^{1-2\gamma}\cdot y.$$

Unsere Differentialgleichung hat also nicht ganz die frühere einfache Gestalt, sondern es treten noch „störende Factoren" hinzu, wel-

<u>che bei $x = a, b, c$ verschwinden oder $\infty$ werden, je nachdem $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$ sind.</u>

Ich sage da zunächst:

<u>„Wenn wir die Segmente, für welche die Oscillationsbedingungen vorgeschrieben werden, nicht bis an die singulären Punkte heran erstrecken, dann kommen die störenden Factoren kaum in Betracht, und das Oscillationstheorem gilt wie früher.</u>

Für die Lamé'schen Polynome ist es aber gerade wesentlich, daß die Segmente bis an die Grenzen der Intervalle herangezogen werden. „Wie modifiziren sich da die mechanischen Überlegungen?

Die Grenzbedingungen $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = 0$ der Lamé'schen Polynome kommen darauf hinaus, daß $y$ an der Stelle $a$ entweder die erste oder die zweite Fundamentallösung des betreffenden Punktes sein soll, welche ja die Gestalt haben:

$$y_1 = (x-a)^{\alpha}\, \mathfrak{P}_1(x-a), \quad (\text{entspr. } \varepsilon = 1)$$

$$y_2 = \qquad \mathfrak{P}_2(x-a), \quad ( \quad " \quad \varepsilon = 0)$$

Nun hat $x-a$ als Function von $t$, wenn wir etwa die Integration bei $t$ von $a$ aus beginnen lassen, eine Entwicklung:

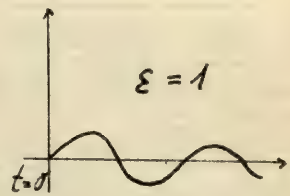
$$x - a = t^{\frac{1}{\alpha}} \mathfrak{P}(t^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Das gibt für $y_1$, $y_2$ als Functionen von $t$ Entwicklungen folgender Art:

$$\varepsilon = 1 \quad y_1 = t \cdot \mathfrak{P}_1'(t^{\frac{1}{\alpha}}), \quad y_1' = \mathfrak{P}_1''(t^{\frac{1}{\alpha}});$$

$$\varepsilon = 0 \quad y_2 = \mathfrak{P}_2'(t^{\frac{1}{\alpha}}), \quad y_2' = t^{\frac{1}{\alpha}-1} \mathfrak{P}_2''(t^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Wie verhalten sich nun die beiden Particularlösungen auf Grund dieser Formeln jede beim Zuschreiten auf die Grenze $x = a$, d. h. $t = 0$?



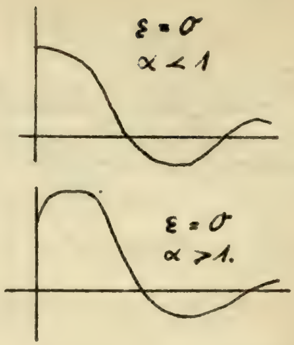

<u>Diese Particularlösung, welche durch $\varepsilon = 1$ characterisirt ist, hat in allen Fällen die Eigenschaft, für $t = 0$ zu verschwinden und einen endlichen von 0 verschiedenen Differentialquotienten zu besitzen.</u>

Die Curve $y_1$ endigt also bei $t = 0$ immer so, wie in vorstehender Fig. angegeben.

Anders bei $y_2$, d. h. wenn $\varepsilon = 0$ vorgeschrieben ist:

<u>Was die Bedingung $\varepsilon = 0$ angeht, so ist das zugehörige $y_2$ für $t = 0$ allerdings immer end-</u>

lich, sein Differentialquotient bei $t=0$ ist aber $0$ oder $\infty$, je nachdem $\alpha<1$ oder $\alpha>1$ ist.




Wir werden folgendermassen sagen können:

Wenn $\alpha<1$ ist, so ist das Verhalten der beiden Particularlösungen bei $t=0$ genau dasselbe, wie wir es bei unserer physikalischen Formulirung gebrauchen.

Wenn aber $\alpha>1$ ist, dann hat nur noch das $y_1$ den früheren Character, das $y_2$ hat einen ganz anderen Character: es hat bei endlichem Wert der Function einen unendlichen Wert des Differentialquotienten.

Von da aus haben wir nun das Resultat:

In Übereinstimmung mit dem, was wir von den Lamé'schen Polynomen wissen, läßt sich im Falle $\varepsilon=1$ für beliebige Werte des $\alpha$ die physikalische Betrachtung ansetzen, und ohne daß wir im Augenblick die Rolle der störenden Factoren ganz übersehen können, erscheint es doch von vornherein sehr wahrscheinlich, daß das Oscillationstheorem bestehen bleibt.

Wenn wir aber $\varepsilon = 0$ geben, so gilt das hiermit Gesagte nur für $\alpha < 1$. Bei $\alpha > 1$ tritt eine Grenzbedingung auf, die von der gewöhnlichen physikalischen Grenzbedingung ganz verschieden ist, und es folgt aus den physikalischen Betrachtungen keinerlei Grund, dafs das Oscillationstheorem bestehen bleiben sollte.

Die Stieltjes'sche Grenze ist also auch eine Grenze für die bisher aufgewandte mechanisch-physikalische Betrachtung. –

Damit schliefse ich das ab, was ich über das Oscillationstheorem zu sagen hatte, obwohl noch wesentliche Desiderate übrig bleiben.

Erstens wünsche ich, dafs man explicit zeigt, dafs unterhalb der Stieltjes'schen Grenze trotz der störenden Factoren das Oscillationstheorem wirklich bestehen bleibt, und zweitens, dafs man doch auch die Fälle jenseits der Stieltjes'schen Grenze mechanisch-physikalisch auf ihre Bedeutung untersuchen soll.

Im allgemeinen aber habe ich den Eindruck, dass wir mit diesen Oscillationsbetrachtungen nur erst im Anfange einer Entwickelung stehen, deren Richtung und allgemeine Tragweite sich im Augenblicke noch nicht übersehen lassen.

## B. Von den automorphen Functionen.

Do. d. 26. Juli 1894.] Ich will die wenigen Tage des Semesters, die uns noch übrig bleiben, dazu benutzen, Ihnen einige besonders wichtige Grundbegriffe und Sätze der Theorie zu entwickeln, auf welche ja meine jetzigen Vorlesungen durchaus hinstreben, nämlich der Theorie der automorphen Functionen.

In der That kann man die Theorie der eindeutigen automorphen Functionen unter einem ganz ähnlichen Gesichtspunkt betrachten wie das Oscillationstheorem, von dem wir seit Pfingsten gesprochen haben. Da war es doch so:

<u>Dadurch dass wir bestimmte Eigenschaften beim einzelnen Polygon der $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ - Ebene verlangten, haben wir die in der Differentialgleichung noch willkürlichen Parameter festgelegt.</u>

Jetzt ist das Ziel dasselbe, nämlich die Parameter der Differentialgleichung durch gewisse Eigenschaften der Integralfunctionen festzulegen. Aber wir achten jetzt nicht mehr auf das einzelne Polygon, auf das eine Halbebene, bezw. im unsymmetrischen Falle auf den einzelnen Fundamentalbereich, auf den die zerschnittene Vollebene oder Riemann'sche Fläche conform abgebildet wird; wir denken uns vielmehr unsere Function $\eta$ durch Symmetrie bezw. durch die linearen Substitutionen der zum Bereich gehörigen Gruppe analytisch fortgesetzt, so weit als diese analytische Fortsetzung möglich ist. Wir bekommen so über der $\eta$-Ebene ein ganzes Netz von aneinandergelagerten Polygonen und Bereichen, und es ist der führende Gedanke jetzt der, daß wir diesem ganzen Netz von im Allgemeinen unbegrenzt vielen Polygonen oder Bereichen d. h. der Gesamtheit der analytischen Fortsetzungen des $\eta$ bestimmte Eigenschaften vorschreiben, um dadurch die Parameter der Differentialgleichung festzulegen. Und zwar werden wir vor Allem folgendes verlangen:

<u>Wir versuchen, die Parameter, welche wir in der Differentialgleichung haben, nach Möglichkeit so zu bestimmen, daß das $\eta$ eindeutig um=</u>

<u>kehrbar wird.</u>

Das heißt, wir werden zusehen, ob wir nicht erreichen können, daß $x$ eine eindeutige Function von $\eta$ ist, während ja $\eta$ eine im Allgemeinen sehr vieldeutige Function von $x$ ist, ähnlich wie in der Theorie der elliptischen Functionen das überall endliche Integral $u$ eine unendlich vieldeutige Function von $x$ ist, $x$ dagegen eine eindeutige Function von $u$. $\eta$ wird dann also uniformisirende Variable für die functionelle Abhängigkeit zwischen $x$ und $\eta$ sein. Auf die Wichtigkeit dieser Frage nach der uniformisirenden Variablen habe ich schon früher mehrfach hingewiesen, und wir werden dieselbe bald noch weiter hervorkehren.

Geometrisch bedeutet die gestellte Forderung der eindeutigen Umkehrbarkeit, <u>daß die Gesamtheit aller Bereiche, die durch analytische Fortsetzung aus dem Ausgangsbereiche entstehen, die Ebene $\eta$ nirgends mehrfach überdecken soll.</u>

Jetzt wollen wir gleich in die Einzeldiscussion eintreten, indem wir zuerst einmal von dem Fall der <u>Dreiecksfunctionen</u> das recapituliren, was wir bereits am Ende des Wintersemesters in der jetzt bezeichneten Richtung kennen gelernt haben.

1.) Wir gingen davon aus, $\eta$ als Function von $x$ und den Exponenten $\lambda, \mu, \nu$ zu betrachten:

$$\eta(\lambda, \mu, \nu; x)$$

Wenn $\lambda, \mu, \nu$ sämtlich reell sind, bildet $\eta$ die positive Halbebene $x$ auf ein Kreisbogendreieck der $\eta$-Ebene mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ ab. Wir konnten jedes derartige Dreieck wirklich zeichnen und hatten so zugleich den Überblick über sämtliche $\eta$-Functionen mit reellen Exponenten und eine neue geometrische Begründung ihrer Existenz.

Für complexe Werte von $\lambda, \mu, \nu$ mußten wir die Abbildung der ganzen $x$-Ebene, passend eingeschnitten gedacht, auf einen Fundamental<u>bereich</u> der $\eta$-Ebene in Betracht ziehen. Freilich war es damals noch nicht gelungen, einen solchen Bereich für jedes beliebige Tripel complexer Zahlen $\lambda, \mu, \nu$ wirklich zu construiren; die Schilling'sche Dissertation, an welche wir uns dabei anzuschließen hatten, bot nur erst Ansätze. Ich freue mich mitteilen zu können, das Schilling diese Construction in den letzten Tagen vollständig durchgeführt hat, wie er uns vorgestern in der mathematischen Gesellschaft vortrug.

Bei unserer Frage nach der eindeutigen Umkehrbarkeit der $\eta$-Function kommen übrigens nur reelle Exponentendifferenzen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ in Betracht, da in der Umgebung eines Punktes a mit complexer Exponentendifferenz $\lambda$ nicht allein $\eta$ als Function von $x$, sondern auch $x$ als Function von $\eta$ gewiss verzweigt, also nicht eindeutig ist.

Man findet im Falle der Dreiecksfunctionen als hinreichende und notwendige Bedingung für die eindeutige Umkehrbarkeit von $\eta(\lambda, \mu, \nu; x)$ die, dass $\lambda, \mu, \nu$ die reciproken Werte ganzer reeller Zahlen sein müssen.

$$\lambda = \frac{1}{L}, \quad \mu = \frac{1}{M}, \quad \nu = \frac{1}{N}.$$

2.) Wir mussten nun alle dieser Bedingung genügenden $\eta$ Functionen in 3 functionentheorethisch wesentlich unterschiedene Fälle einteilen, je nachdem

I) $\lambda + \mu + \nu > 1$

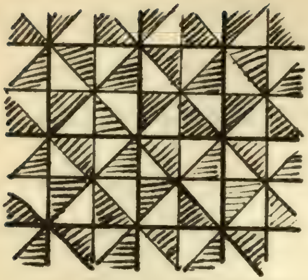
II) $\lambda + \mu + \nu = 1$

III) $\lambda + \mu + \nu < 1$

ist.

Im Falle I ergaben sich die Functionen der <u>regulären Körper</u>. Die drei Ebenen, in denen die drei Kreisbogenseiten des $\eta$-Dreiecks liegen, schneiden sich im Innern der $\eta$-Kugel, und sind, wenn man diesen Schnittpunkt zum Centrum der Kugel macht, Symmetrieebenen eines regulären Körpers. Die Vervielfältigung des Ausgangsdreiecks gibt nur eine endliche Zahl weiterer Dreiecke, welche die $\eta$-Kugel vollständig und schlicht überdecken. $\eta$ ist infolgedessen eine algebraische Function von $x$, und $x$ ist nicht nur eine eindeutige Function von $\eta$, wie wir verlangt haben, sondern geradezu eine rationale Function.

II) Ist $\lambda + \mu + \nu = 1$, so schneiden sich die Ebenen der drei Kreisbogenseiten auf der Kugel selbst. Projicirt man von diesem Punkte aus die Kugel stereographisch auf die Ebene, so erhält man eine Einteilung der ganzen Ebene <u>in unendlich viele geradlinige Dreiecke</u>, und zwar ist diese Einteilung so beschaffen, dass immer mehrere der Dreiecke zusammen ein Viereck bilden – z. B. in umstehender Figur je 4 schraffirte und 4



nichtschraffirte Dreiecke ein Quadrat – durch dessen Parallelverschiebung man die ganze Einteilung der Ebene erzeugen kann. Wir bekommen so eine Figur, die in demselben Sinne „doppelperiodisch" ist, wie die Parallelogrammeinteilung, die zu einer doppelperiodischen Function gehört.

Bei einer solchen doppelt periodischen Einteilung der Ebene spielt aber der Punkt $\eta = \infty$ eine besondere Rolle, wie man am besten sieht, wenn man die Einteilung wieder auf die Kugel überträgt.

Man erkennt daß die einzelnen Parallelogramme und also auch die Dreiecke in der Umgebung des Punktes $\eta = \infty$ sich unendlich dicht häufen, indem sie ihm beliebig nahe kommen, ohne ihn doch jemals zu erreichen. Der Punkt $\eta = \infty$ ist, wie wir sagen, ein „Grenzpunkt" des Polygonnetzes. In dem Auftreten eines solchen Grenzpunktes liegt ein wesentlicher Gegensatz des Falles II gegenüber dem Falle I. Hierin liegt zugleich begründet, daß $x$ als Function von $\eta$

zwar, wie verlangt eindeutig ist, – wegen der der schlichten Aneinanderlagerung der Polygone – nicht aber rational, sondern transcendent. Denn bei rationalen Functionen könnten solche Grenzpuncte nicht auftreten. Und zwar ist $x$ eine eindeutige doppeltperiodische Function von $\eta$, weil sich die Dreiecke in der oben geschilderten Weise zu Parallelogrammen zusammenordnen.

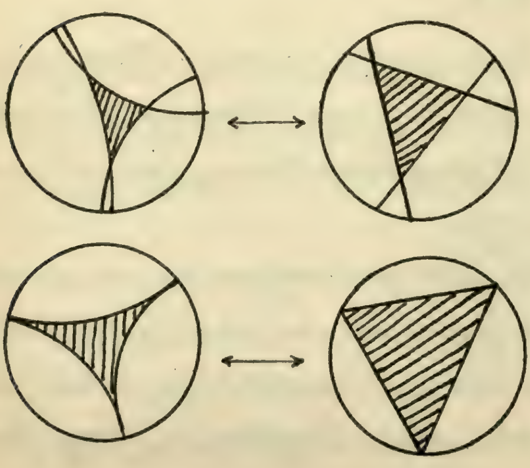
III.) Wenn $\lambda+\mu+\nu<1$ ist, so liegt der Mittelpunkt des Kerns außerhalb der Kugel. Construiren wir von diesem Punkte aus den Berührungskegel an die Kugel, so berührt derselbe die Kugel in einem Kreise, der von jeder der drei Kreislinien, welche das Dreieck begrenzen, orthogonal geschnitten wird. Wir nennen diesen Kreis den „Hauptkreis". Also:

<u>Im vorliegenden Falle haben die drei Kreisbogenseiten einen reellen Orthogonalkreis, den Hauptkreis. Dieser Hauptkreis ist zugleich Grenzkreis für die conforme Abbildung.</u>

Denn bei jeder der Spiegelungen an einer der drei Dreiecksseiten geht er in sich selbst über, und zwar immer sein Inneres in sein Inneres, sein Äußeres in sein Äußeres. Man kann also so oft man die Spiegelungen wiederholen mag, nie aus dem Hauptkreise herausgelangen. Wohl aber kann man, wie leicht zu beweisen ist, beliebig nahe an den Hauptkreis herankommen, nur werden die Dreiecke immer kleiner und immer zahlreicher, je mehr man sich dem Hauptkreis nähert.

Ein specieller Fall der Dreiecke des Falles III, die das Innere eines Hauptkreises in unendlicher Zahl durchaus schlicht aber vollständig erfüllen, wird durch das Beispiel der elliptischen Modulfunction $\omega(x) = \eta(0,0,0;x)$ dargeboten. Die drei Winkel des Dreiecks sind, hier $= 0$ und die Ecken desselben liegen in Folge dessen selbst auf dem Hauptkreis.

Es verdient noch Erwähnung, dass man sich die Figuren des Falles III auch geradlinig zeichnen kann, indem man sie von dem Mittelpunkt des Kerns auf irgend eine Ebene, z.B. auf die Polarebene, welche den Hauptkreis enthält, projicirt.



Die Spiegelung an einer der drei Seiten ist dann eine rein projective Construction, wodurch sich an das erste Dreieck ein zweites ebenfalls geradliniges Dreieck anlagert, welches mit dem ersten genau symmetrisch = congruent ist, wenn man den Hauptkreis als Fundamentalkreis einer nichteuklidischen Maßbestimmung zu Grunde legt.

Hierin tritt die Beziehung unserer linearen Substitutionsgruppe zur nichteuklidischen Geometrie hervor, die wir ja ebenfalls bereits im Winter ausführlich besprochen haben.

Betrachten wir die Kugel der Variablen $\eta$ als Fundamentalfläche einer nichteuklidischen Maßbestimmung, so können wir alle linearen Transformationen der Variablen $\eta$ einfach als Bewegungen des ganzen Raumes im Sinne dieser nichteuklidischen Maßbestimmung deuten. Bei jeder unserer drei Arten von Gruppen I, II, III bleibt dabei ein bestimmter Punkt des Raumes fest, nämlich der Schnittpunkt der Ebenen, in denen die drei Dreiecksseiten liegen. Wir haben es also im Sinne der nichteuklidischen Maßbestimmung mit blosen Drehungen und Spiegelungen in dem Strahlen- und

Ebenenbündel zu thun, welches durch den festen Punkt geht. Übertragen wir nun die in diesem Strahlenbündel mit Beziehung auf die Kugel als Fundamentalfläche geltende Maßbestimmung auf die Kugel selbst, so erscheinen alle Dreiecke unseres Netzes einander congruent bezw. symmetrisch congruent im Sinne dieser Maßbestimmung. Die letztere hat im Falle I elliptischen Character, im Falle II parabolischen und im Falle III hyperbolischen Character. Demgemäß gelten im Falle I die Formeln der gewöhnlichen sphaerischen Trigonometrie, im Falle II die der gewöhnlichen ebenen Trigonometrie und im Falle III die der Gauß-Lobatscheffsky'sche Geometrie, der nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne.

Dabei ist unser Dreiecksnetz das übersichtlichste geometrische Bild der Monodromiegruppe der $\eta$-Function, d. h. der Gruppe linearer Substitutionen, welche ein Zweig $\eta$ erfährt, wenn man $x$ alle möglichen geschlossenen Umläufe in seiner Ebene ausführen läßt. Nämlich bei jedem solchen Umlauf geht $\eta$ von einem Punkte eines schraffirten oder nicht schraffirten Dreiecks in den entsprechenden Punkt eines andern schraffirten bezw. nichtschraffirten Dreiecks über. Jeden solchen Übergang können wir als eine Bewegung auffassen. Also:

Die Monodromiegruppe der Function $\eta(x)$ ist dargestellt durch diejenige Gruppe ternärer Bewegungen, bei denen der Mittelpunkt unseres Kerns fest bleibt, und bei welcher die Gesamtheit unserer nebeneinanderliegenden abwechselnd invers und eigentlich congruenten Dreiecke in sich übergeht.

So ist mit jeder unserer Functionen $\eta(x)$ eine ganz bestimmte discontinuirliche Gruppe ternärer Bewegungen verknüpft, bei welcher die Gesamtheit der in Betracht kommenden Dreiecke in sich übergeht, und bei welcher daher auch die Function $x(\eta)$ ungeändert bleibt.

$x$ bleibt also ungeändert, wenn man $\eta$ irgend einer Substitution $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ dieser Gruppe unterwirft; solche Functionen, welche bei einer Gruppe linearer Substitutionen, auf die Variable ausgeübt, immer wieder dieselbe Gestalt, τὴν αὐτὴν μορφήν annehmen, nennen wir „automorphe Functionen", also:

<u>In allen unsern Fällen ist $x$ eine eindeutige automorphe Function von $\eta$.</u>

<u>Fr. d. 27. Juli 1894.</u>] Nachdem wir gestern als erstes Beispiel der automorphen Functionen die Dreiecksfunctionen uns ins Gedächtnis zurückgerufen haben, wollen wir heute einige <u>weitere Beispiele automorpher Functionen</u> kennen lernen. Wir werden überhaupt zunächst das Ziel verfolgen, an solchen einzelnen Beispielen unsere Vorstellungskraft so zu üben, dass wir im Stande sind, an ihnen allgemeine Ideen uns zu bilden.

Wir sprechen heute zuerst von dem Beispiel der <u>doppelt periodischen Functionen</u>, d. h. derjenigen Functionen von $\eta$, welche ungeändert bleiben, wenn man $\eta$ einer Substitution der Gruppe

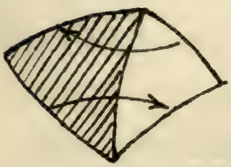
$$\eta' = \eta + m_1 \omega + m_2 \omega_2$$

unterwirft, unter $m_1 m_2$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen verstanden. Hier handelt es sich natürlich nur um eindeutige doppeltperiodische Functionen.

<u>Die eindeutigen doppeltperiodischen</u>

Functionen sind ein neues Beispiel für den Begriff der automorphen Functionen einer Variablen $\eta$.

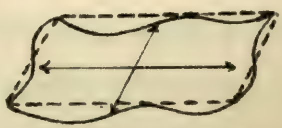
Wir wollen dieses Beispiel näher mit dem gestern besprochenen Beispiel der Dreiecksfunctionen vergleichen. Bei den letzteren besteht der Fundamentalbereich in dem Viereck, welches man erhält, wenn man das der positiven Halbebene $x$ entsprechende Kreisbogendreieck an einer seiner Seiten spiegelt;



das so entstehende Viereck ist dann insofern ein automorpher Fundamentalbereich, als seine 4 Kanten paarweise durch je eine lineare Substitution der Variablen $\eta$ einander zugeordnet sind, und $x$ ist eine automorphe Function dieses Fundamentalbereichs, weil es in entsprechenden Punkten des Randes je dieselben Werte besitzt.

Bei den doppeltperiodischen Functionen besteht dagegen der Fundamentalbereich aus einem Parallelogramm der $\eta$-Ebene, dessen gegenüberliegende Kanten je durch eine lineare Transformation, nämlich durch eine blose Parallelverschiebung der Ebene einander zugeordnet sind, und eine automorphe Function des Bereichs ist dadurch characterisirt, dass sie in Paaren einander entsprechender Randpunkte je dieselben Werte hat. In der That hat dies zur Folge, dass sie auch in jedem weiteren der Polygone, die sich vermöge der die Kanten zusammenordnenden Substitutionen neben das erste lagern, in entsprechenden Punkten genau dieselbe Wertverteilung aufweist.

Bei der Theorie der automorphen Functionen handelt es sich allemal darum, einen Fundamentalbereich anzugeben, dessen Begrenzungslinien durch die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen linearen Substitutionsgruppe paarweise zusammengeordnet sind. Dieser Fundamentalbereich besteht im Falle der Dreiecksfunctionen aus zwei zueinander symmetrischen Hälften. Es ist das aber **an** sich durchaus nicht nötig, wie das Beispiel der doppeltperiodischen Functionen zeigt.



Hiermit hängt zusammen, dass die Begrenzungslinien des Fundamentalbereichs nur im speciellen Fall vollkommen bestimmte Linien sind, nämlich die Kreisbogen, an denen gespiegelt werden soll, dass sie aber in dem allgemeineren Falle mannigfach abgeändert werden können.

Man kann nämlich bei unserem Parallelogramme an irgend einer Stelle des Randes ein Stück abtrennen, wenn man nur Sorge trägt, dasselbe an der entsprechenden Stelle der anderen Randlinie wieder anzutragen.

Ferner aber zeigt sich folgender wesentliche Unterschied der Dreiecksfunctionen und der doppeltperiodischen Functionen. Denken wir uns das Doppeldreieck im Sinn der analysis situs zusammengebogen und entsprechende Randstücke zusammengeheftet, so bekommen wir eine geschlossene räumliche Fläche, die wir durch continuirliche Deformation in eine Kugelfläche überführen können, d. h. eine Fläche vom Geschlechte $p = 0$. Biegen wir jedoch das Periodenparallelogramm der doppeltperiodischen Functionen in derselben Weise zusammen, so ergibt sich zuerst ein röhrenartiges Gebilde, dann beim Zusammenheften der beiden noch freigebliebenen Enden eine Ringfläche vom Geschlechte $p=1$. Also:

Ein weiterer Unterschied der beiden Fälle ist der, dass der Fundamentalbereich bei den Dreiecken das Geschlecht 0, bei den doppelt periodischen Functionen das Geschlecht 1 besitzt.

Dies hat für die zugehörigen automorphen Functionen sofort eine durchschlagende functionentheoretische Bedeutung.

Ich sage zunächst, dass wir allgemein einen solchen Fundamentalbereich, wie wir ihn betrachten, mit linear einander paarweise zugeordneten Kanten geradezu als einen in abstracto geschlossenen Bereich ansehen dürfen, indem wir entsprechende Punkte des Randes als identisch nehmen, so dass ein Punkt, der an der einen Stelle aus dem Bereiche austritt, an der correspondirenden Stelle in ihn wieder eintritt. Auf der so definirten geschlossenen Mannigfaltigkeit kann man dann in genau derselben Weise Functionen betrachten, wie auf einer auch räumlich geschlossenen Riemann'schen Fläche. Die auf diesem geschlossenen Fundamentalbereiche eindeutigen Functionen sind dann eben die automorphen Functionen des Fundamentalbereichs. Ihre Theorie ist dann, was ihre gegenseitigen Beziehungen angeht, genau dieselbe, wie die der algebraischen Functionen einer geschlossenen Riemann'schen Fläche, und sie hängt insbesondere in derselben Weise vom Geschlechte $p$ des Fundamentalbereichs ab, wie bei einer geschlossenen Riemann'schen Fläche. Hieraus ergeben sich sofort eine Reihe besonderer Sätze für die automorphen Functionen des Doppeldreiecks wie für die des Periodenparallelogramms.

<u>Für das Doppeldreieck existirt eine einfachste automorphe Function $x(\eta)$, welche jeden Wert im Fundamentalbereiche genau einmal annimmt, und welche deshalb den Fundamentalbereich auf eine vollständige $x$-Ebene conform abbildet.</u>

Es ist das eben die Variable $x$ von der wir von Hause aus in der Differentialgleichung für $\eta$ Gebrauch machen. Was wir neu hinzufügten, ist dass die Existenz dieser Function $x$ aus den Riemann'schen Existenzsätzen folgt, welche sich von den räumlich geschlossenen Riemann'schen Flächen ohne Weiteres auch auf die nur in abstracto geschlossenen automorphen Fundamentalbereiche übertragen.

Alle andern Functionen, die auf dem geschlossen gedachten Fundamentalbereich eindeutig sind, sind rationale Functionen von $\chi$ [sofern wir das Auftreten wesentlicher Singularitäten im Fundamentalbereich ausschliessen, was hinfort immer geschehen soll].

Im Falle der doppeltperiodischen Functionen, nun wo das Geschlecht des Fundamentalbereichs $p=1$ ist, haben die entsprechenden Existenzsätze einen andern Character:

Wir müssen auf die Theorie der algebraischen Gebilde vom Geschlechte $p=1$ recurriren, d. h. der sogenannten elliptischen Gebilde. Aus der Theorie der elliptischen Gebilde wissen wir, dass man immer zwei Functionen $x$ und $y$ auf dem Bereiche finden kann, zwischen denen eine Gleichung der Gestalt besteht:

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

$x$ nimmt dabei jeden Wert zweimal, $y$ jeden Wert 4 mal auf dem Bereiche an, und erst das Wertepaar $x$, $y$ bezeichnet den einzelnen Punkt des Gebildes und also des Fundamentalbereichs in eindeutiger Weise. Infolge dessen sind alle anderen algebraischen Functionen des Gebildes in $x$ und $y$ zusammengenommen rational.

Also, wenn wir bedenken, dass die auf dem Fundamentalbereiche eindeutigen Functionen, weil sie in entsprechenden Randpunkten dieselben Werte annehmen, sich in der $\eta$-Ebene als automorphe Functionen fortsetzen müssen, und dass umgekehrt jede automorphe Function auf dem Fundamentalbereich, geschlossen gedacht, eindeutig ist, haben wir die Sätze:

Im vorliegenden Falle, wo das Geschlecht des Fundamentalbereichs $p = 1$ ist, gibt es keine automorphe, d. h. doppeltperiodische Function, welche jeden Wert im Periodenparallelogramm nur einmal annimmt, wohl aber kann man noch auf mannigfache Weise eine Function $x$ finden, welche jeden Wert im Periodenparallelogramm zweimal annimmt. Man kann dann eine zugehörige Function $y$ finden, welche jeden Wert im Periodenparallelogramm 4 mal annimmt, so dass zwischen dem $x$ und dem $y$ eine Gleichung

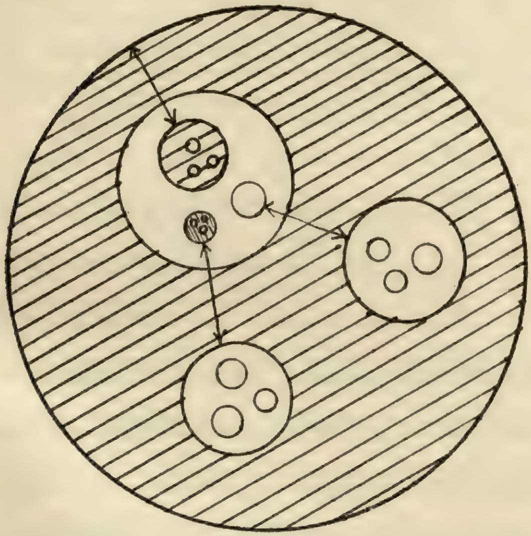
$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

besteht. Alle andern eindeutigen automorphen Functionen des Bereichs, d. h. alle eindeutigen doppeltperiodischen Functionen sind dann, wenn wir das Auftreten von wesentlich singulären Punkten im Fundamentalbereich ausschliessen, rationale Functionen von $x$ und $y$ zusammengenommen.

Was die Geschichte betrifft, so sind die Dreiecksfunctionen wesentlich durch Schwarz geschaffen in der öfter genannten Arbeit in Crelle's Journal Bd. 75, 1872. Die doppeltperiodischen Functionen dagegen sind schon länger bekannt und gehen auf Abel und Jacobi zurück.

Ein weiteres Beispiel automorpher Functionen, welches wir hier besprechen wollen, komt zuerst in Riemanns Nachlass vor, wo sich Riemann das Problem stellt, die Gleichgewichtsverteilung der Electricität auf einem Systeme paralleler Cylinder zu untersuchen. Gleichzeitig mit der Veröffentlichung der Riemann'schen Arbeit (1876) hat Schottky denselben Fall automorpher Functionen in seiner Dissertation behandelt, welche 1877 in Umarbeitung in Crelle's Journal 83 erschienen ist.

Wir denken uns ein Kreisbogenpolygon – um diesen Ausdruck auch dann zu gebrauchen, wo der Bereich gar keine Ecken hat – etwa von n einander nicht schneidenden Kreisen begrenzt.



Denken wir uns nun die Fläche desselben an irgend einer seiner begrenzenden Kreislinien gespiegelt, so fällt das Spiegelbild ganz innerhalb der kreisförmigen Öffnung, ohne mit dem ursprünglichen Polygon zu collidiren. Fahren wir nun fort, beliebig oft an den immer neu entstehenden Öffnungen zu spiegeln, so collidirt niemals ein Polygon mit einem der früheren und wir bekommen also eine durchaus schlichte

Überdeckung der Ebene. Dabei werden die Öffnungen im Polygonnetz immer zahlreicher und immer kleiner, und ziehen sich schließlich bei unendlich oft fortgesetztem Spiegelungsverfahren auf Punkte zusammen, die offenbar in unendlicher Menge immer in den Öffnungen jedes einzelnen Polygons liegen. Also:

<u>Unser Polygon ergibt durch Spiegelung eine schlichte Überdeckung der ganzen $\eta$-Ebene mit $\infty$ vielen Grenzpunkten.</u>

Nehmen wir das ursprüngliche Polygon mit einem seiner Spiegelbilder zusammen, so bekommen wir einen Fundamentalbereich, der von $2n-2$ einander nicht schneidenden Kreisen begrenzt ist, wobei diese Kreise paarweise durch $n-1$ lineare Substitutionen zusammengeordnet sind, wie in der Figur durch Pfeile angedeutet ist. Heften wir diese Kreislinien wirklich zusammen, so bekommen wir offenbar eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $p = n-1$, in unserer Figur vom Geschlechte 3. Also:

<u>Der Fundamentalbereich, d. h. unser Doppelpolygon vertritt vermöge der Zu-</u>

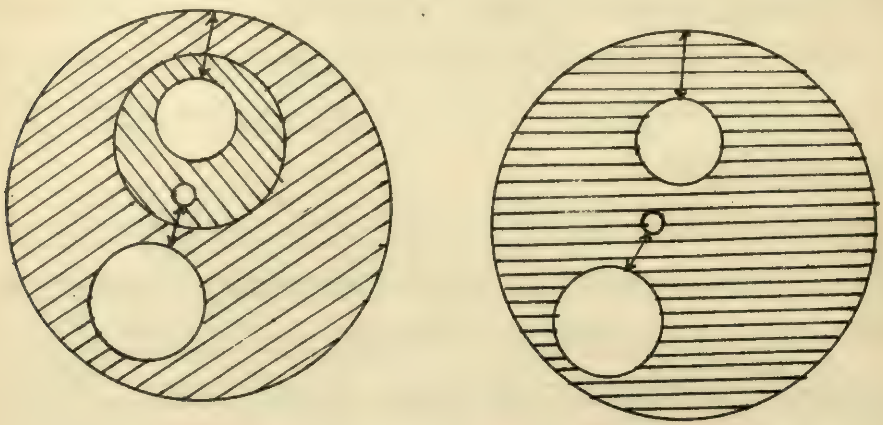
<u>sammengehörigkeit seiner $2n-2$ Begrenzungslinien eine geschlossene Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p = n-1$.</u>

Aber dies ist nicht etwa die allgemeinste Riemann'sche Mannigfaltigkeit vom Geschlechte $n-1$. Denn sie besitzt eine Symmetrielinie, nämlich den Kreis, an dem gespiegelt worden ist. Ebenso ist aber auch jeder andere der $n$ Begrenzungskreise des ursprünglichen Polygons eine Symmetrielinie der Mannigfaltigkeit, wie man aus den nebeneinanderliegenden Bereichen der $\eta$ Figur sofort sieht. Wir haben also $n = p+1$ Symmetrielinien, durch welche die Mannigfaltigkeit in zwei symmetrische Hälften zerfällt.

<u>Unser Fundamentalbereich mit seinen $2n-2$ paarweise zusammengeordneten Randcurven repräsentirt eine orthosymmetrische Fläche vom Geschlechte $p = n-1$ mit $p+1$ Symmetrielinien, und alle algebraischen Functionen, die auf einer solchen orthosymmetrischen Riemann'schen Fläche eindeutig sind, sind, als Functionen von $\eta$ betrachtet, die automorphen Functionen, welche zu unserer Gebietseinteilung der $\eta$-Ebene gehören.</u>

Mo. d. 30. Juli 1894.] Heute wollen wir das letzte Beispiel der vorigen Stunde einer leichten Verallgemeinerung unterziehen, wie sie zuerst von <u>Poincaré</u> im Jahre 1882 vorgenommen worden ist.

Indem wir das von $p+1$ Kreisen begrenzte Polygon an irgend einem seiner Begrenzungskreise spiegelten, bekamen wir in dem Doppelpolygon einen Fundamentalbereich, der von $p$ Paaren einander zugeordneter Kreise begrenzt war:



Derselbe stellte ein orthosymmetrisches Gebilde vom Geschlechte $p$ mit $p+1$ Übergangslinien vor.

Die Verallgemeinerung Poincaré's ist

nun folgende. Er sagt, man braucht gar nicht erst von dem Halbbereiche, dem Kreisbogenpolygon, auszugehen, um von ihm aus durch Spiegelung zum Vollbereiche überzugehen, sondern man kann von vornherein einen Vollbereich in die Betrachtung einführen, mit 2 p Randcurven, welche einander paarweise durch gewisse lineare Substitutionen zugeordnet sind. Wir repräsentiren dadurch nicht mehr nur symmetrische Gebilde vom Geschlechte p, sondern auch allgemeine Gebilde vom Geschlechte p.

Bei diesen allgemeinen nicht symmetrischen Bereichen hat die Verfügung, den Bereich durch Kreisbogen zu begrenzen nur eine unwesentliche Bedeutung, genau wie bei den doppeltperiodischen Functionen die Verabredung, daß wir das Periodenparallelogramm geradlinig begrenzen. Wir können in jedem Paare zusammengeordneter Kreise immer den einen Kreis durch eine innerhalb gewisser Grenzen durchaus willkürlich geschlossene Curve ersetzen, wenn wir nur immer auch den andern Kreis durch die vermöge der linearen Substistution genau entsprechende Curve ersetzen. Das wesentliche an dem

Fundamentalbereich sind eben nicht die zufälligen Begrenzungslinien, sondern die zugehörigen linearen Substitutionen.

Unser Fundamentalbereich läßt sich nun eindeutig auf eine räumlich geschlossene Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p$ – etwa, indem wir $p = 2$ nehmen, auf einen Doppelring – beziehen. Wie verhält sich die Variable $\eta$, in deren Ebene der Fundamentalbereich gezeichnet ist, als Function auf der geschlossenen Riemann'schen Fläche?

Weil die verschiedenen nebeneinanderliegenden Bereiche der $\eta$-Ebene alle aus dem anfänglichen durch lineare Substitution von $\eta$ hervorgehen, wird das $\eta$ auf der geschlossenen Riemann'schen Fläche die Eigenschaft haben, bei irgend welchen Umläufen sich immer linear gebrochen zu reproduciren, und es genügt eben deshalb auf unserer Riemann'schen Fläche einer Differentialgleichung 3. Ordnung mit algebraischen Coefficienten.

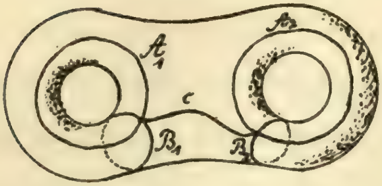
Unser Fundamentalbereich besitzt weder Windungspuncte im Innern, noch Ecken auf dem Rande, um welche herum mehr als zwei Bereiche lägen. Die Umgebung einer jeden beliebigen Stelle des algebraischen Gebildes wird also in der $\eta$-Ebene durch die schlichte volle Umgebung eines Punktes vorgestellt. Daraus folgt:

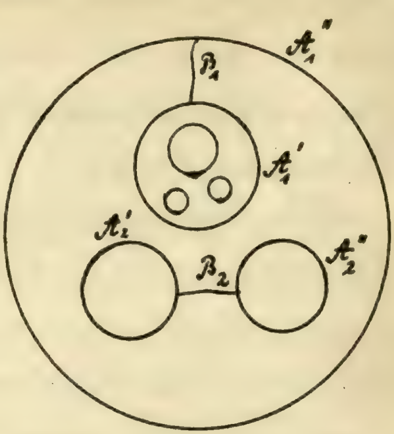
Die Differentialgleichung für $\eta$ hat auf dem algebraischen Gebilde keinerlei singuläre Punkte, und ist also eine von den $\infty^{3p-3}$ nirgends singulären Differentialgleichungen, die auf dem Gebilde existiren.

Wir haben ja seiner Zeit alle solche unverzweigten Differentialgleichungen explicit hingeschrieben, wobei sich $3p-3$ accessorische Parameter herausstellten; für eine bestimmte Wahl dieser accessorischen Parameter muss gerade unser $\eta$ sich als Lösung ergeben.

Entsprechend der Entwickelungen der letzten Stunde werden wir jetzt diese Betrachtungen umkehren, indem wir fragen, wie sich eine auf dem algebraischen Gebilde gegebene Function als Function in der $\eta$-Ebene verhält.

Je zwei einander zugeordneten Rändern $A_1'$, $A_1''$ des Fundamentalbereichs entsprechen auf der geschlossenen Fläche das rechte und das linke Ufer eines die Fläche




nicht zerstückenden Rückkehrschnittes $A_1$, ebenso den Rändern $A_2'$ $A_2''$ die beiden Ufer eines andern den ersten nicht treffenden Rückkehrschnittes $A_2$. Wir vervollständigen dieses Schnittsystem auf der Fläche noch durch die zugehörigen Schnitte $B_1$ und $B_2$, sowie durch das Verbindungsstück $c$.

Wir sehen, daſs ein Weg $A_1$ oder $A_2$ auf der Riemann'schen Fläche in der $\eta$-Ebene sich als ein geschlossener Weg darstellt, da ja die beiden Ufer des Schnittes $B_1$ bezw. $B_2$, welche durch den Weg verbunden werden, auch in der $\eta$-Ebene zusammenliegen. Ein Weg $B_1$ oder $B_2$ dagegen verbindet nicht zusammenliegende Ränder des $\eta$-Bereichs.

Durchläuft man $B_1$ oder $B_2$ mehrmals, so setzt sich der entsprechende Weg in der $\eta$-Ebene weiter in die Nachbarbereiche fort, indem er, ohne einen seiner früheren Punkte nochmals zu überstreichen, immer mehr einem bestimmten Grenzpunkte des Polygonnetzes zustrebt. Die functionentheoretische Folge dieser Thatsachen ist diese:

<u>Unsere $\eta$-Function leistet als uniformisirende Variable Folgendes: Jede auf der Riemann'schen Fläche unverzweigte Function, welche bei Durchlaufung der beiden Curven $A_1$ und $A_2$ ihren ursprünglichen Wert wieder annimmt, ist in unserem $\eta$ eindeutig.</u>

Z. B. alle algebraischen Functionen der Fläche $p = 2$

$$x, \quad s = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)}, \quad \mathrm{Rat}(x, s)$$

lassen sich eindeutig durch die eine Variable $\eta$ ausdrücken, genau, wie bei $p = 1$ durch das überall endliche Integral $u$.

Aber nicht genug damit:

<u>Auch ein Abel'sches Integral des Gebildes $p=2$, welches so normirt ist, daſs es bei der Durchlaufung der Wege $A_1$ und $A_2$ verschwindende Perioden liefert, und welches</u>

<u>überdies keine logarithmischen $\infty$ Punkte, sondern nur algebraische Pole besitzt, ist in der Variablen $\eta$ geschrieben eine eindeutige Function.</u>

$\eta$ ist also für eine grosse Functionsclasse auf dem zugehörigen algebraischen Gebilde $p=2$ uniformisirende Variable.

Da erhebt sich nun die Frage, ob man eine solche uniformisirende Variable $\eta$ von dem geschilderten Verhalten zu jedem beliebigen vorgegebenen algebraischen Gebilde $p=2$ finden kann? Wir kommen damit zu dem „<u>Fundamentaltheorem</u>", welches ich für den hier vorliegenden Fall zuerst in Math. Ann. 19. 1882 ausgesprochen habe.

Wir denken uns auf der Riemann'schen Fläche vom Geschlechte $p$ $p$ einander nicht kreuzende Rückkehrschnitte $A_1, A_2 \ldots A_p$ gezogen, welche die Fläche nicht zerfällen. Es fragt sich dann, ob es zu einer so zerschnittenen Fläche immer eine $\eta$-Function gibt, welche von ihr eine Abbildung der im Vorhergehenden beschriebenen Art liefert. Das Fundamentaltheorem behauptet nun:

<u>Auf jeder gegebenen Riemann'schen Fläche</u>

vom Geschlechte $p$, auf der wir beliebige $p$ einander nicht kreuzende und die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte angenommen haben, gibt es eine und nur eine $\eta$-Function, welche gerade eine solche Abbildung liefert, wie wir sie haben wollen.

Auf den Beweis können wir an dieser Stelle noch nicht eingehen; nur durch Constantenabzählung wollen wir wenigstens das Erfülltsein einer notwendigen Bedingung nachweisen.

Wir zählen nämlich einerseits die Mannigfaltigkeit aller in der angegebenen Weise zerschnittenen algebraischen Gebilde, andererseits die Mannigfaltigkeit der wesentlich unterschiedenen $\eta$-Bereiche der gewollten Art ab.

Wir wissen, dass es $\infty^{3p-3}$ algebraische Gebilde vom Geschlechte $p$ gibt. Diese Mannigfaltigkeit wird dadurch nicht erhöht, dass wir hier solche algebraische Gebilde als verschieden anzusehen haben, welche in verschiedener Weise zerschnitten sind. Denn die Anzahl der verschiedenen Zerschneidungen ist zwar eine unendliche, aber doch nur eine discrete.

(Es ist dies, daſs ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p$ $3p-3$ Moduln hat, nicht etwa damit zu confundiren, daſs eine unverzweigte Differentialgleichung auf gegebenen algebraischen Gebilde auch gerade $3p-3$ Parameter besitzt. Diese Übereinstimmung ist zwar merkwürdig, doch zufällig, d. h. man kennt noch keinen inneren Grund für dieselbe).

Unser $\eta$ Bereich ist durch Angabe der $p$ erzeugenden Substitutionen vollständig characterisirt; das gibt $3p$ Constanten. Hiervon gehen aber noch 3 Constanten deswegen ab, weil wir die ganze Figur noch einer beliebigen linearen Transformation unterwerfen können, ohne daſs sie aufhört demselben algebraischen Gebilde zu entsprechen.

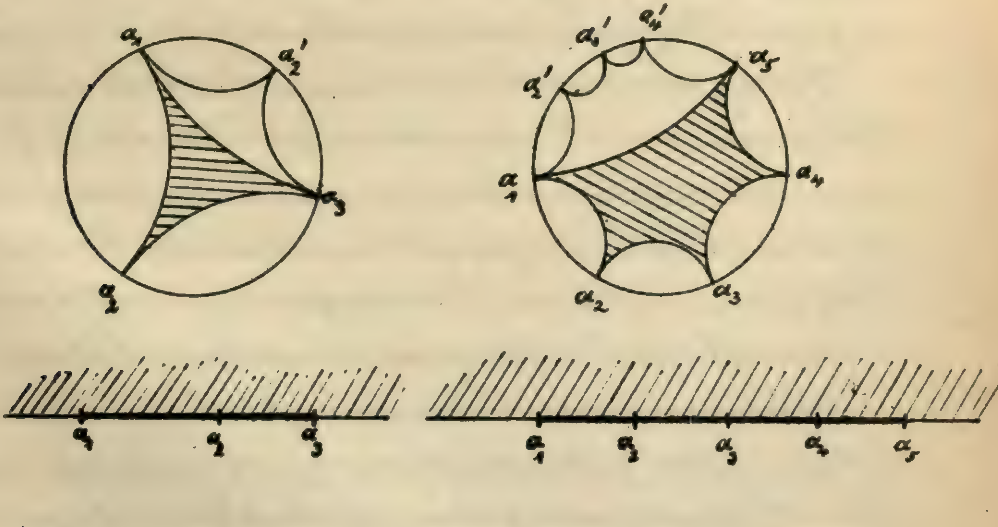
Also stimmt die Constantenzahl der $\eta$-Function mit der Modulzahl der Riemann'schen Fläche genau überein, so daſs hierin kein Wiederspruch gegen das Fundamentaltheorem liegt.—

Lassen sie mich in meiner Aufzählung

von Beispielen eindeutiger automorpher Functionen weiter gehen.

In seinen ersten Mittheilungen im Jahre 1882 hat Poincaré besonders den Fall behandelt, wo ein Grenzkreis existirt, wie im Falle der Dreiecksfunctionen mit den Winkeln $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, wo $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$.

Denken wir z. B. an den Fall der Modulfunctionen, wo ein Dreieck mit den Winkeln 0, 0, 0 vorliegt, dessen Seiten alle auf dem Grenzkreise senkrecht stehen, und dessen Ecken auf dem Grenzkreise selbst liegen:




Statt des Dreiecks können wir uns ein Polygon von einer grösseren Eckenzahl, z. B. 5, construiren, dessen Ecken sämtlich auf ein und demselben Kreise liegen, den Winkel 0 haben, und dessen Seiten auf dem Kreise orthogonal stehen. Spiegeln wir dieses Polygon dann an einer seiner Seiten, so liegt das neue Polygon ganz ausserhalb des ersten, ferner ganz im Innern des festen Kreises, mit Ausnahme der Ecken, welche auf dem festen Kreise liegen. Dasselbe gilt, wenn wir das erhaltene Doppelpolygon weiter spiegeln. Wir bekommen also eine schlichte Überdeckung des Innern des festen Kreises mit Polygonen, und es ist der feste Kreis der Grenzkreis dieser Polygonüberdeckung.

Ganz ebenso ist es, wenn die Ecken des Polygons von 0 verschiedene Winkel $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{n}$ u. s. w. haben und also auch nicht auf dem festen Kreise liegen, wenn nur die Seiten des Polygons in ihrer Verlängerung auf dem festen Kreise orthogonal stehen. Also:

<u>Wenn wir von einem einfach zusammenhängenden einfach berandeten überall schlichten Polygon ausgehen, dessen Kreisbogenseiten gegen einen festen Kreis normal stehen und dessen sämtliche Winkel ganzzahlige Teile von</u>

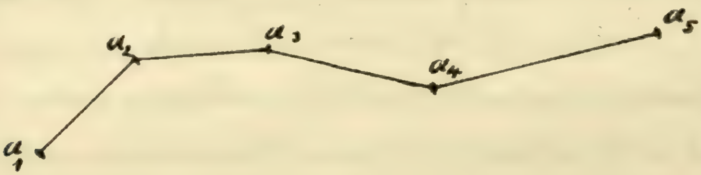
$\pi$ sind, dann gibt die Reproduction dieses Polygons nach dem Gesetz der Symmetrie nur zu einer einfachen Überdeckung des Kreisinnern Anlass, und wenn wir jetzt das Polygon auf eine Halbebene $x$ abbilden, so ist $x$ (zusammen mit allen Functionen von $x$ welche höchstens bei $a_1, a_2 \ldots a_\nu$ verzweigt sind) in der $\eta$-Ebene eindeutig.

(Bei der Angabe über die verzweigten Functionen sind die Winkel der Kürze halber $= 0$ angenommen worden).

Di. d. 31. Juli 1894.] Diese Functionen mit Grenzkreis, welche durch Abbildung eines geeigneten Kreisbogenpolygons auf eine Halbebene entstehen, sind nun von Poincaré in demselben Sinne verallgemeinert worden, wie die Riemann-Schottky'schen Figuren mit nur Grenzpunkten, von denen wir vorher sprachen. Nämlich auch hier stellt sich Poincaré unmittelbar den Vollbereich durch directe Definition her, so dass die Beschränkung auf solche Bereiche, die durch eine Symmetrielinie in zwei symmetrische Hälften zerfallen jetzt wegfällt. Da kann man dann auch Bereiche von beliebigem $p$ herstellen.

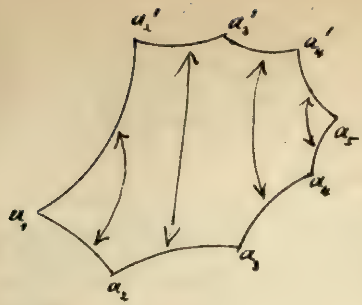
Poincaré's ursprüngliche Leistung im Jahre 1882 bestand darin, daſs er die Figuren, welche für den symmetrischen Fall $p=0$ bekannt waren, für den unsymmetrischen Fall $p=0$ und überhaupt für beliebiges $p$ verallgemeinerte, daſs er also für diese Fälle Bereiche construirte, welche gleichfalls bei analytischer Fortsetzung einen ausgezeichneten Kreis zum Grenzkreis haben.

Es sei – um mit dem Falle $p=0$ zu beginnen – in der Ebene $x$ eine Reihe beliebig gelegener Punkte $a_1, a_2, \dots a_n$ (in Fig. $n=5$) gegeben




Man verbinde dieselben durch ein von $a_1$ über $a_2, a_3 \dots$ bis $a_n$ reichendes Einschnittsystem.

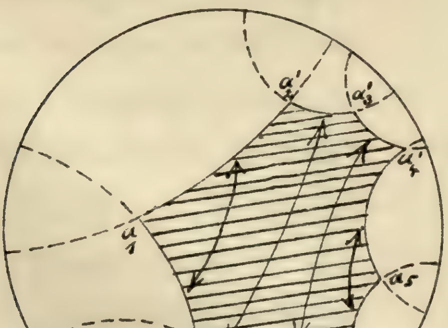
Eine Function $\eta$ nun, deren Verzweigungspunkte bei $a_1, a_2, \dots a_n$ liegen, wird die zerschnittene $x$-Ebene auf einen von $2(n-1)$ einander paarweise linear zugeordneten Randcurven begrenzten Fundamentalbereich abbilden. Und zwar werden die Winkel dieses Fun-




damental Bereichs in folgender Weise mit den Exponentendifferenzen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_n$ bei $a_1 a_2 \dots a_n$ zusammenhängen:

Der Winkel des Bereichs bei $a_1$ wird $= \vartheta_1 \cdot 2\pi$, der bei $a_n = \vartheta_n \cdot 2\pi$ sein, dagegen wird der Winkel bei $a_2$ erst mit dem Winkel bei $a_2'$ zusammen den Betrag $\vartheta_2 \cdot 2\pi$ geben und entsprechend bei $a_3 \dots a_{n-1}$.

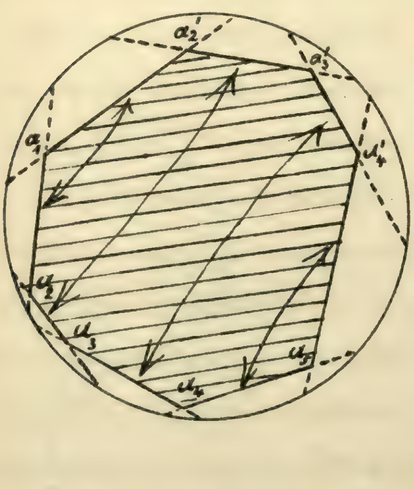
Nun sei umgekehrt ein Fundamentalbereich $\eta$ in der Weise gegeben, daſs seine Begrenzung von $2(n-1)$ Kreisbogen gebildet ist, welche sämtlich zu einem bestimmten festen Kreise orthogonal stehen, welche




ferner einander in der durch die Pfeile der Figur gegebenen Aufeinanderfolge durch solche lineare Substitutionen zugeordnet sind, welche den festen Orthogonalkreis wieder in sich selbst überführen, und daſs die Winkel bei $a_1$ und $a_n$, sowie die Summen der Winkel bei $a_2$ und $a_2'$, bei $a_3$ und $a_3'$ u. s. w. ganzzahlige Teile von $2\pi$, etwa $\frac{2\pi}{L_1}$, $\frac{2\pi}{L_n}$ $\frac{2\pi}{L_2}$ u. s. w. sind.

<u>Vermöge des Riemann'schen Existenzsatzes stellt ein solcher Bereich in der That die Abbildung einer geeignet eingeschnittenen $x$-Ebene dar.</u>

Und nun kommt es darauf an, sich zu überzeugen, dafs bei der analytischen Fortsetzung $x(\eta)$ eine eindeutige Function bleibt, d. h. dafs die Bereiche, welche sich jetzt vermöge der erzeugenden Substitutionen nebeneinanderlegen, nie miteinander collidiren. Am leichtesten wohl sieht man dies ein, wenn man die Figur der $\eta$-Ebene zunächst auf der $\eta$-Kugel deutet, und von da aus durch Projection von dem Mittelpunkt des Kerns aus etwa auf die Ebene des Hauptkreises überträgt.



Man kann sich der Bequemlichkeit halber den Hauptkreis als Aequator der Kugel vorstellen. Jeder der Begrenzungskreise schneidet nun (auf der Kugel betrachtet) den Aequatorkreis orthogonal, seine Ebene steht also auf der Aequatorebene senkrecht, und ist somit der Axe der Kugel parallel.

Der Kern hat also ein Centrum, nämlich im Unendlichen, und die Projection von hier aus, ergibt die gewünschte Figur. In derselben stellen sich die Seiten des Polygons geradlinig dar. Führt man eine hyperbolische Maßbestimmung mit dem Hauptkreis als unendlich fernem Gebilde ein, so haben die Winkel des geradlinigen Polygons in dieser Maßbestimmung gemessen genau dieselbe Größe, wie vorher die Winkel des Kreisbogenpolygons in gewöhnlicher Weise gemessen, und die linearen Substistutionen, durch welche die Kanten einander zugeordnet sind, sind „Bewegungen" im Sinne der Maßbestimmung. Und nun zeigt sich, und dies bemerkt zu haben ist die eigentliche Leistung von Poincaré (obgleich er ja die Sache ganz anders ausdrückt.)

<u>Jedes geradlinige Polygon der hyperbolischen Ebene, bei welchem die Kanten paarweise durch nichteuklidische Drehungen zur Dekkung gebracht werden können und welche</u>

derartige Winkel besitzt, daſs die zusammengehörige Winkel eine Summe liefern, die ein ganzzahliger Teil von $2\pi$ ist, ergibt, durch die zugehörigen Bewegungen reproducirt, eine einfache Überdeckung des Innern des Fundamentalkegelschnitts, für welche der Kegelschnitt selbst eine Grenzcurve bildet. – Man sieht:

Diese Formulirung des Satzes reicht über das unmittelbare Bedürfnis hinaus, indem man es ja im Augenblick nur mit einer ganz bestimmten Zusammenordnung der Kanten zu thun hat, während in dem ausgesprochenen Satze die Zusammengehörigkeit der Kanten in der That beliebig gedacht ist, was zu anderen Schnittsystemen und zu höherem $p$ des algebraischen Gebildes hinführt.

Es fragt sich nun, nachdem wir sehen, daſs die Function $\eta$ eines Bereiches von der geschilderten Beschaffenheit für $x$ – und für alle nur in $a_1, a_2, \ldots a_n$ in bestimmter Weise verzweigten Functionen von $x$ uniformisirende Variable ist, ob es nicht auch hier ein Fundamentaltheorem betr. die Existenz eines solchen $\eta$ gibt?

In der That hat dies Poincaré nachgewiesen, d. h. er hat gezeigt, daſs eine irgendwie gegebene $x$-Ebene mit $n$ Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche eine ganz beliebige Lage aber vorgeschriebene Exponentendifferenzen haben, welche reciproke Werte ganzer Zahlen sind, immer und nur auf eine einzige Weise auf einen derartigen Bereich conform abgebildet werden kann, wie er beschrieben worden ist.

Wir wollen diese Behauptung an dieser Stelle auch nur wieder durch Abzählung der Constanten bestätigen.

Dabei müssen wir reelle Constante zählen und also eine willkürliche complexe Constante mit 2 Einheiten in Rechnung stellen.

In der $x$-Ebene sind als Constanten die $n-3$ unabhängigen Doppelverhältnisse der $n$ Verzweigungspuncte anzusehen, was, da jedes dieser Doppelverhältnisse beliebig complex sein kann, $2n-6$ reelle Parameter gibt.

Zweitens sehen wir, wie viele unabhängige Constanten unser $\eta$-Bereich enthält: Wenn der Grenzkreis irgendwie, etwa als der Einheitskreis festgelegt ist, so kann man zunächst die $n$ Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$

jeden willkürlich wählen, was $2n$ reelle Parameter gibt. Durch die Bedingung, orthogonal zum Hauptkreis zu sein, sind dann die Kreisbogen $a_1 a_2, a_2 a_3, \ldots a_{n-1} a_n$ eindeutig bestimmt. Ferner ist durch $\lambda_0$ die Richtung des von $a_n$ ausgehenden Bogens $a_n \; a'_{n-1}$, sowie durch die nichteuklidische Länge von $a_{n-1} a_n$ auch diejenige von $a_n a'_{n-1}$ gegeben, d. h. der Punkt $a'_{n-1}$ ist bereits festgelegt. Durch $\lambda_{n-1}$ und den Winkel bei $a_{n-1}$ ist ferner der Winkel des Bereichs bei $a_{n-1}$, durch die Länge von $a_{n-2} a_{n-1}$ die von $a'_{n-1} a'_{n-2}$ gegeben, folglich auch die Lage des Punktes $a'_{n-2}$. So sind schliesslich auch alle weiteren Punkte festgelegt.

Aber es kommt noch die Bedingung hinzu, dass das Polygon sich schliesst, dass also der in der eben geschilderten Weise schliesslich zu construirende Punkt $a'_1$ mit $a_1$ zusammenfällt – was 2 reelle Bedingungen gibt – und dass der Winkel in $a_1$ gerade die vorgegebene Grösse $\lambda_1 \cdot 2\pi$ hat – noch 1 weitere Bedingung.

So vermindert sich die Zahl der reellen Constanten in unserer Figur auf $2n-3$.

Davon sind aber noch 3 Constanten unwesentlich, da ja noch $\infty^3$ lineare Transformationen vorgenommen werden können, welche den Hauptkreis in sich selbst überführen und also die inneren Maassverhältnisse der Figur ungeändert lassen.

Also bekommen wir $2n-6$ wesentliche Constanten unseres $\eta$ Bereiches, genau so viele, wie sie das algebraische Gebilde besitzt.

Wie wird nun $\eta$ von dem $x$ abhängen? Ein $\eta$, welches nur bei $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit den Exponentendifferenzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ verzweigt ist, genügt jedenfalls einer Differentialgleichung

$$[\eta]_x = \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}\left\{\frac{\frac{1-\lambda_1^2}{2}}{x-a_1}(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n) + \cdots + A x^{n-4} + B x^{n-3} + \cdots\right\}$$

mit $n-3$ accessorischen Parametern $A, B \ldots$

Sicher ist $\eta$ als Function von $x$ durch eine Differentialgleichung 3. Ordnung der hier angeschriebenen Form gegeben, in welcher die accessorischen Parameter $A, B, \ldots$ uns noch unbekannt sind.

Und das Fundamentaltheorem sagt: Man kann diese accessorischen Parameter auf eine und nur auf eine Weise so festlegen, dass die Abbildung, welche das $\eta$ von der zerschnittenen $x$-Ebene entwirft, die geforderten Eigentümlichkeiten hat. Genau so hatte sich die Sache oben, bei dem ersten der von uns aufgeführten Fundamentaltheoreme gestellt. Wir werden sagen, – und das passt zugleich auf unsere ferneren Entwickelungen –:

Indem wir die accessorischen Parameter der Differentialgleichung den Fundamentaltheoremen zufolge gerade auf eine Weise so festlegen können, dass ein $\eta$-Bereich von den gewünschten geometrischen Eigenschaften besteht, so ordnen sich die Fundamentaltheoreme in den allgemeinen Gedankengang dieser Vorlesung ein, welcher ja überhaupt darauf ausging, die Parameter der Differentialgleichung durch Eigentümlichkeiten der conformen Abbildung festzulegen.

Do. d. 2. Aug. 1894.]

Heute wollen wir nun die entsprechenden Fundamentalbereiche für beliebiges Geschlecht $p$ construiren.

Wir betrachten eine $\eta$-Function auf einer Riemann'schen Fläche von höherem Geschlecht

b. Dieselbe sei relativ zur Fläche etwa an $n$ bestimmten Punkten verzweigt, und zwar, damit überhaupt von eindeutiger Umkehrbarkeit des $\eta$ die Rede sein kann, mit Exponentendifferenzen, welche die reciproken Werte ganzer Zahlen sind. Nimmt man die letzteren unendlich gross, so haben wir einfache logarithmische Verzweigungen.

Der Einfachheit halber aber wollen wir heute von der Existenz solcher Verzweigungspunkte absehen; wir setzen also $n = 0$ und beschäftigen uns nur mit solchen $\eta$-Functionen, welche auf der Riemann'schen Fläche unverzweigt oder genauer gesagt: nirgends singulär sind. Wir wissen, dass es $\infty^{3p-3}$ solcher Functionen gibt. Wir fragen nun, ob es unter diesen $\infty^{3p-3}$ unverzweigten $\eta$-Functionen vielleicht eine solche gibt, welche eindeutig umkehrbar gibt, und deren Fundamentalbereich bei der unbegrenzten analytischen Fortsetzung einen Grenzkreis besitzt.[?] Ich habe hierauf in Ann. 20 geantwortet:

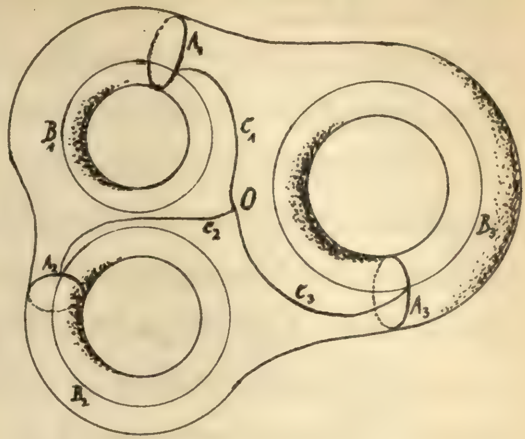
<u>Die nähere Untersuchung zeigt, dass hier in der That wieder ein Fundamenthaltheorem existirt, dass unter den $\infty^{3p-3}$ nirgends sin</u>

<u>gulären $\eta$-Functionen, die auf einer beliebig gegebenen Riemann'schen Fläche existiren, immer gerade eine und nur eine ist, die in der Weise eindeutig umkehrbar ist, daſs der Bereich der $\eta$-Ebene analytisch reproducirt auf einen bestimmten Grenzkreis zustrebt.</u>

Hierbei, sowie bei den folgenden Erläuterungen ist stets $p \geqq 2$ zu nehmen. Für $p = 1$ sieht die Sache etwas anders aus, und vollends für $p = 0$ hören die nirgends singulären $\eta$-Functionen überhaupt auf zu existiren.

Wir wollen uns zunächst davon Rechenschaft geben, wie der Fundamentalbereich einer nirgends singulären $\eta$-Function im Allgemeinen aussehen muſs, und beginnen zu dem Zwecke damit, auf der Riemann'schen Fläche selbst eine gewiſse Art der Zerschneidung zu verabreden. Denn von der Zerschneidungsweise der Riemann'schen Fläche wird es abhängen, in welcher Weise die Ränder des Bildes in der $\eta$-Ebene aufeinander folgen, und in welcher Weise sie einander zugeordnet sind.

Wir haben bereits kurz nach Pfingsten in dieser Vorlesung der <u>kanonischen Zerschneidung</u> einer Riemann'schen Fläche gedacht.

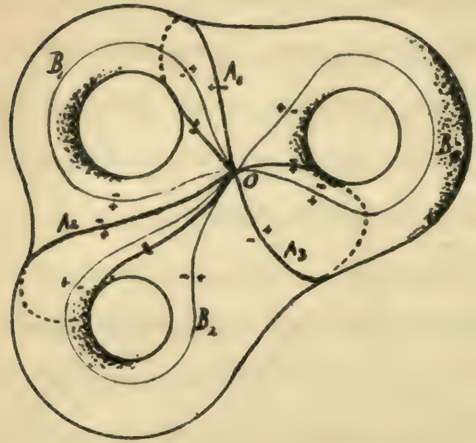



Um diese kanonische Zerschneidung auszuführen, construiren wir erst $p$ einander nicht scheidende und die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \ldots A_p$ z. B. die 3 Meridiancurven auf dem dreifachen Ring nebenstehender Figur. Dann verbinde man die beiden Ufer eines jeden dieser Schnitte $A_\nu$ durch einen die Fläche nicht zerstückenden Querschnitt $B_\nu$, welcher keinen der andern Schnitte, außer $A_\nu$ überschreitet. Man kommt so zu $p$ weiteren Curven $B_1, B_2 \ldots B_p$, in unserer Figur den drei Breitencurven. Endlich ziehe man von einem beliebig gewählten Punkte $O$ der Riemann'schen Fläche $p$ Schnitte $c_1, c_2, \ldots c_p$ nach den Punkten, wo sich die Schnitte $A_\nu$ mit den zugehörigen $B_\nu$ kreuzen.

Dies ist die von Riemann eingeführte kanonische Zerschneidung, durch welche die Fläche in ein einfach berandetes einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt wird.

Dieses Schnittsystem läßt sich noch so vereinfachen, daß man die Stücke $c_r$ vollständig einspaart, worauf alle die Schnitte $A_r$, $B_r$ sich im Punkte $O$ schneiden.

Man mag sich etwa in $O$ eine Person denken, welche die elastisch über die Fläche gespannten Fäden $A_r$, $B_r$ vermittelst der in ihren Kreuzungspunkten befestigten Fäden $c_r$ an sich heranzieht, bis sie alle die Fäden $A_r$, $B_r$ selbst in der Hand vereinigt.



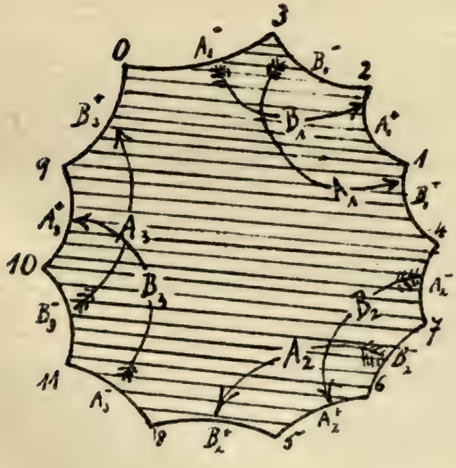

Wenn man nun am Rande des so entstandenen einfach zusammenhängenden Flächenstücks entlang geht, die Fläche zur Rechten, so läuft man, wenn man die beiden Ufer eines jeden der Schnitte in passender Weise als positives und negatives Ufer bezeichnet, der Reihe nach an folgenden Stücken entlang:

$A_1^-, B_1^-, A_1^+, B_1^+; A_2^-, B_2^-, A_2^+ B_2^+; \ldots A_p^-, B_p^-, A_p^+ B_p^+.$

Wir haben also $4p$ Randstücke, von denen immer je zwei als verschiedene Ufer desselben Schnittes zusammenliegen.

Bei der Abbildung in der $\eta$-Ebene werden wir also ebenfalls einen von $4p$ Randcurven begrenzten Bereich erhalten; aber diejenigen Ränder, die auf der Riemann'schen Fläche genau aneinander paßten, liegen jetzt außereinander, nur noch durch lineare Substitutionen verbunden, wie es die Pfeile in der Figur angeben.

Wir bekommen in der $\eta$-Ebene einen Bereich, der von $4p$ Kanten begrenzt ist, welche zu je 4 kreuzweise zusammengehören.




Die Winkel, unter denen unsere $4p$ Kanten zusammenstoßen, bilden zusammengenommen die Umgebung des nichtsingulären Punktes O ab, und liefern daher ein Summe $= 2\pi$.

Die lineare Substitution, welche z. B. die Kante $A_1^-$ in die Kante $A_1^+$ überführt, erhält man offenbar, wenn man die algebraischen Variablen der Function $\eta$ auf der Riemann'schen Fläche vom negativen Ufer des Schnittes $\mathfrak{A}_1$, ohne Überschneidung eines anderen Schnittes nach dem positiven Ufer laufen läßt d. h. etwa längs des Schnittes $\mathfrak{B}_1$. Wir wollen nun diesen Weg auf der Riemann'schen Fläche sowohl, wie die Substitution, welche $\eta$ dabei erleidet, mit dem griechischen Buchstaben $B_1$ bezeichnen.

Ich verstehe also unter $B_1$ denjenigen Weg auf der Riemann'schen Fläche, der längs $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{A}_1^+$ führt, oder auch die lineare Substitution, die $\eta$ längs dieses Weges erleidet; ebenso unter $A_1$ diejenige Durchlaufung des Weges $\mathfrak{A}_1$, welche von dem negativen Ufer des $\mathfrak{B}_1$ zum positiven Ufer von $\mathfrak{B}_1$ hinführt, oder auch diejenige lineare Substitution, welche $\eta$ bei Durchlaufung dieses Weges erfährt.

Wenn wir nun die Substitution $B_1$ anwenden, so geht der Eckpunkt 0 des Bereichs in den Eckpunkt 1 über.

1 geht durch $A_1^{-1}$ in 2, dieses durch $B_1^{-1}$ in 3, und 3 durch $A_1^{+1}$ in 4 über. Also

Durch die Substitution $B_1^{+1}\, A_1^{-1}\, B_1^{-1}\, A_1^{+1}$ geht aus dem Punkt 0 der Figur der Punkt 4 hervor.

Fährt man in derselben Weise fort, so geht 4 in 5, 6, .... u. s. w. über, bis endlich der Punkt 12 mit 0 zusammenfällt, was nur dadurch geschehen kann, dass die entsprechende Substitution die Identität ist, da ja 0 kein singulärer Punkt ist, also nicht Fixpunkt irgend einer wirklichen Substitution sein kann. Wir finden so die Relation:

$$\underline{B_1^{+1} A_1^{-1} B_1^{-1} A_1^{+1} B_2^{+1} A_2^{-1} B_2^{-1} A_2^{+1} \ldots B_p^{+1} A_p^{-1} B_p^{-1} A_p^{+1} = 1.}$$

Also:

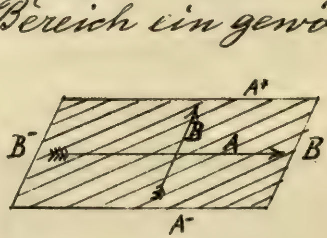
<u>Aus unserer conformen Abbildung lesen wir insbesondere ab, was wir früher (vor Pfingsten) durch Umgänge auf der Riemann'schen Fläche selbst bewiesen hatten, dass eine gewisse Aufeinanderfolge unserer Substitutionen die Identität liefert.</u>

All' diese Angaben gelten für jede beliebige unserer $\infty^{3p-3}$ unverzweigten $\eta$-Functionen, denn dass wir unseren Fundamentalbereich auf S. 481 so gezeichnet haben, dass er die Ebene nur schlicht überdeckt, war nur der Bequemlichkeit halber geschehen, und von der Existenz eines Grenzkreises ist gar nicht die Rede gewesen. Nun aber werden wir eine $\eta$-Function durch Forderung ganz bestimmter

Eigenschaften der conformen Abbildung auswählen:

Das besondere $\eta$ hat die Eigenschaft, dass erstens sein Bereich durchaus schlicht ausgebreitet ist, und dass zweitens vor allen Dingen die zugehörigen Substitutionen $A, B$ einen gewissen Kreis fest lassen.

Was wird aus unserem $\eta$ - Bereich im Falle $p=1$, den wir bisher ausgeschlossen haben? Da werden wir es nur mit 4 Kanten zu thun haben, also mit einem Viereck, dessen Kanten kreuzweise verbunden sind. Das aus einem solchen Viereck entspringende Bereichnetz besitzt im Allgemeinen zwei Grenzpunkte, zwischen denen herum es die Ebene auch mehrfach überdecken kann. Nur in einem Falle gibt es blos einen Grenzpunkt – und dann natürlich immer schlichte Überdeckung der Ebene –, den wir gern ins Unendliche legen werden: es ist der Fall, dass der $\eta$ Bereich ein gewöhnliches Periodenparallelogramm ist. Dieser besondere Fall entspricht ganz genau unserem Grenzkreisfall bei höherem Geschlecht.




Man kann unsere Figur für $p>1$ gerade

zu als Verallgemeinerung des für $p = 1$ bekannten Periodenparallelogramms ansehen, nur daß statt des Grenzpunktes, der im Falle $p = 1$ vorliegt, ein Grenzkreis gesetzt wird, und daß also die Zusammengehörigkeit der Kanten nicht durch euklidische Bewegungen, sondern durch nicht euklidische Bewegungen vermittelt wird.

Dieser Unterschied ist geometrisch darin begründet, daß in der euklidischen Geometrie nur bei einem Vierecke die Winkelsumme $= 2\pi$ sein kann, daß wir also, wenn wir ein Polygon von $4p > 4$ Seiten construiren wollen, uns durchaus der nichteuklidischen Geometrie bedienen müssen, wo die Forderung erfüllbar ist.

Wir nannten bereits das Fundamentaltheorem, daß es unter den $\infty^{3p-3}$ unverzweigten $\eta$-Functionen irgend einer vorgegebenen Riemann'schen Fläche immer eine und nur eine gibt, die den gestellten Bedingungen genügt.

Wir bestätigen das hier nur durch Constantenzählung.

An unserem $\eta$-Bereich sind das wesentliche nur die $2p$ Substitutionen $A_\nu, B_\nu$, von denen aber nur $2p-1$ unabhängig sind, da die 2p te schon vermöge der Fundamentalrelation aus den übrigen folgt. Jede enthält, da sie den festen Kreis in sich selbst überführen soll, nur 3 reelle Parameter, was im Ganzen $6p-3$ reelle Constanten in der Gruppe gibt. Nun sind hiervon aber noch 3 reelle Constanten als unwesentlich abzuziehen, da man die Figur noch, ohne die inneren Maßverhältnisse derselben zu ändern, jeder der $\infty^3$ linearen Transformationen unterwerfen kann, durch welche der feste Kreis in sich selbst übergeht. Wir haben also thatsächlich $6p-6$ wesentliche reelle Constanten in der Gruppe, in vollem Einklang damit, daß die Riemann'schen Fläche $3p-3$ complexe Moduln enthält.

<u>Die Figur der $\eta$-Ebene hängt von ebenso viel wesentlichen reellen Constanten ab, als die allgemeine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p$.</u>

Wir wollen nun schließlich noch sehen, was wir mit der Aufstellung unserer jetzigen $\eta$-Function gewonnen haben, wie weit die uniformisirende Kraft derselben reicht? Wir sehen:

Alle geschlossenen Wege der Riemann'schen Fläche, die sich nicht von selbst auf Punkte zusammenziehen lassen, verwandeln sich in der $\eta$- Ebene in offene Wege.

Die Folge davon ist die:

Alle Functionen der Riemann'schen Fläche welche auf der Fläche unverzweigt sind, aber dadurch vieldeutig sein können, dass sie bei Periodenumläufen sich nicht reproduciren, alle diese Functionen werden in unserem $\eta$ eindeutig.

Beispiele für solche vieldeutige Functionen, die in $\eta$ eindeutig werden, sind die algebraischen Functionen, dann alle Abel'schen Integrale, welche keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte haben, ferner alle die $\infty^{3p-3}$ auf der Fläche unverzweigten $\eta$-Functionen u. s. w. Das ist noch um Vieles günstiger als bei der am Montage betrachteten Function.

Fr. d. 3. Aug. 1894.] Mit diesen Beispielen mag es genug sein; wir haben mit denselben die verschiedenen Typen eindeutiger automorpher Functionen, die es gibt, allerdings in keinerlei Hinsicht erschöpft.

Dagegen wollen wir noch auf den Zusammenhang der automorphen Functionen mit den übrigen Gegenständen unserer Vorlesung hinweisen. Eine Seite dieses Zusammenhangs, nämlich die Festlegung der willkürlichen Parameter in der Differentialgleichung durch transcendente Bedingungen, haben wir schon betont. Dafür haben wir die Bedeutung der eindeutig umkehrbaren $\eta$-Functionen für die Theorie der allgemeinen $\eta$-Functionen gestern nur erst gestreift.

Es sei $H$ irgend eine allgemeine $\eta$-Function auf der Riemann'schen Fläche. Verzweigt oder sonst singulär sei dieselbe auf der Fläche nur in den Punkten $a, b, c, \dots,$ wobei ausdrücklich auch irreguläres Verhalten in diesen Puncten zugelassen sein soll, und die Exponentendifferenzen keinen Bedingungen unterworfen werden.

Ausserdem kann dieses $H$ auf der Riemann'schen Fläche auch noch beliebige Nebenpunkte haben.

<u>Ich behaupte dann, daß man immer eine bestimmte zweite $\eta$-Function so einführen kann, daß in diesem $\eta$ nicht nur die</u>

algebraischen Functionen der Fläche, sondern auch die Function $H$ eindeutig ist.

Dies Theorem haben wir für $p=0$ bereits in der vorletzten Vorlesung ausgesprochen, für $p>0$ gestern, doch nur für den Fall, dass keine Verzweigungspunkte $a, b, c, \ldots$ existiren. Man kann nun leicht beides combiniren (Poincaré, 1882 in den Comptes Rendus)

Wir denken uns auf der Riemann'schen Fläche zuerst, wie neulich, ein kanonisches Querschnittsystem construirt. Dann ziehen wir noch von dem Punkte $O$ aus nach den $n$ singulären Punkten $a, b, c, \ldots$ $n$ Einschnitte, etwa alle in dem Winkelraum zwischen $B_p^+$ und $A_1^-$ verlaufend.

Man hat nun unsere Function $\eta$ so zu wählen, dass sie auf der Fläche in den Punkten $a, b, c, \ldots$ je die Exponentendifferenz $0$ besitzt, und dass der zugehörige $\eta$-Bereich die Ebene schlicht überdeckt und bei der Reproduction einen Grenzkreis aufweist. Der $\eta$-Bereich wird dann den in umstehender Figur angedeuteten Character haben, d. h. es werden zwischen die Ufer $B_p^+$ und $A_1^-$ der Fig. auf S. 481 noch $n$ Kantenpaare

sich einschieben, welche den Ufern der $n$ Einschnitte entsprechen, und zwar werden dieselben zu je zweien parabolische Zipfel mit Winkeln 0 bilden, welche sich bis an den Grenzkreis selbst heranziehen.

Dieselben Überlegungen nun, welche uns am Ende des vorigen Semesters den Satz ergaben, dass jede Dreiecksfunction $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ durch die Modulfunction $\eta(0,0,0, x)$ eindeutig ausdrückbar ist, geben uns jetzt den Satz:

Jede nur in $a, b, c, \ldots$ verzweigte $\eta$-Function der Fläche zusammen mit der sie tragenden Riemann'schen Fläche kann durch das genannte Hülfs-$\eta$ eindeutig dargestellt werden.

Wir kommen also dazu, die uniforme Darstellung für die Lösungen der linearen Differentialgleichungen als ein allgemein erreichbares Ziel ins Auge zu fassen, so dass also unsere Theorie der automorphen Functionen für die Theorie der linearen Differentialglei-

<u>chungen eine ganz neue Perspective eröffnet, welche die Aufgabe der nächsten Zukunft sein muss.</u>

Um so lieber möchte ich Ihnen heute vorführen, wie weit eigentlich die Theorie der automorphen Functionen entwickelt ist, besonders was in der letzten Zeit, in den letzten 2–3 Jahren in dieser Richtung geschehen ist. Wir teilen diesen Bericht in eine Reihe von Punkten.

1.) <u>Aufstellung aller brauchbaren Bereiche,</u> welche eindeutige Umkehr ermöglichen. Dieser Punkt kann als erledigt angesehen werden.

2.) <u>Auffassung des Bereichs als Riemann'sche Fläche.</u>

Fasst man den Bereich als geschlossene Mannigfaltigkeit auf, so lassen sich auf ihm alle die für gewöhnliche Riemann'sche Flächen geltenden Existenzsätze in gleicher Weise, wie auf diesen, durch das Schwarz-Neumann'sche Grenzverfahren beweisen (cfr. u. A. Ritter, Math. Ann. 41. S. 2).

Auf einer Riemann'schen Fläche existiren nach diesen Existenzsätzen algebraische Functionen, Abelsche Integrale, ferner existiren $\eta$-Functionen u. s. w. Auf dem automorphen Fundamentalbereich werden das Functionen, die sich bei den zugehörigen linearen Substitutionen invariant verhalten – d. h. automorphe Functionen –, oder welche sich nur um additive Constanten ändern, oder endlich solche, welche bei den linearen Substitutionen des fundamentalen $y$ selbst lineare Substitutionen – aber andere – erleiden. Diese letzteren wollen wir als „homomorphe Functionen" bezeichnen.

Jedenfalls, wenn der Bereich als Riemann'sche Fläche gilt, steht die Existenz zugehöriger automorpher und homomorpher Functionen fest.

Wenn der Bereich speciell ein solcher ist, wie wir ihn zu Ende der gestrigen oder zu Beginn der heutigen Stunde in's Auge gefaßt haben, dann sind alle diese Functionen in der Variablen $\eta$ eindeutig. –

3.) All dies ist mehr eine geometrische Formulirung der Probleme und der Möglichkeit ihrer Lösung. Es wird sich nun aber auch wesentlich um die analytische Durchführung derselben handeln; und zwar sind es wesentlich zwei Probleme:

a. Aufstellung der Gruppe $\eta' = \dfrac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}$.

Wir wünschen, nachdem der Fundamentalbereich geometrisch characterisirt und gezeichnet ist, die zugehörige Substitutionsgruppe wirklich numerisch aufzustellen.

C. Formelmässige Därstellung der zugehörigen automorphen und homomorphen Functionen.

Was ist in diesen beiden Richtungen bisher geleistet?

4.) ad a). Wenn wir einen Fundamentalbereich geometrisch gegeben haben, dann ist es


keine Schwierigkeit, diejenigen Substitutionen $S_1, S_2, S_3$ u. s. w. wirklich numerisch hinzuschreiben, durch welche die Kanten zusammengeordnet sind.

Die Gruppe können wir dann immer erzeugen, indem wir die Substitutionen, welche die Kanten des Bereichs paarweise zusammenordnen, in beliebiger Wiederholung beliebig combiniren.

Diese Erzeugung der Gruppe genügt uns aber nicht; wir möchten ein äusseres Kennzeichen aller Substitutionen haben, die der

Gruppe angehören, um diese Substitutionen auch analytisch oder arithmetisch in ihrer Gesamtheit übersehen zu können.

So ist es z. B. bei den elliptischen Modulfunctionen geleistet, wo die Substitutionen der Gruppe dadurch gekennzeichnet sind, dass $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ganze Zahlen sind, die der Relation $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$ genügen.

Bei allgemeineren Gruppen hat man das entsprechende nur erst in einzelnen Fällen erreicht, nicht einmal bei allen Dreiecksgruppen. Mit diesem Problem hat sich in der letzten Zeit besonders Fricke beschäftigt, und dasselbe in einer Reihe einzelner Fälle durch Heranziehung schwieriger zahlentheoretischer Entwickelungen gelöst. Man vergl. in dieser Hinsicht seine Arbeiten in Math. Ann. 42. 1892. „Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen" und die neuerdings in den Gött. Nachr. erschienene Note: „Idealtheorie und Substitutionsgruppen."

5.) ad c) Für die explicite Darstellung der automorphen und homomorphen Functionen hat man bis jetzt nur die Poincaré'

<u>schen Reihenentwicklungen</u> (C. R. 1882).

Der Grundgedanke derselben, wenn auch bei Poincaré nicht in dieser Form ausgesprochen, ist der, dass man homogene Variablen einführt, $\eta$ in $y_1 : y_2$ spaltet, welche sich binär und unimodular substituiren:

$$y_1^{(i)} = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 \qquad y_2^{(i)} = \gamma_i y_1 + \delta_i y_2 ,$$

und dass man nun zuerst automorphe Formen von $y_1, y_2$ bildet, nicht Functionen, welche letztere erst als Quotienten zweier Formen herauskommen. Zu solchen automorphen Formen gelangt Poincaré, indem er gewisse in Bezug auf alle Substitutionen der Gruppe symmetrische Summen, eine Art von Partialbruchreihen bildet, von der Form:

$$\sum_i \mathrm{Rat}\left(\frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}\right) \cdot \frac{1}{(\gamma_i y_1 + \delta_i y_2)^n} .$$

Für hinreichend grosse Zahlenwerte $n$ convergirt eine solche Summe absolut d. h. unabhängig von der Reihenfolge der Glieder. Wenn man dann $y_1, y_2$ einer Substitution der Gruppe unterwirft, so ändern die Glieder der Summe nur ihre Reihenfolge, die Summe selbst bleibt also ungeändert, d. h. sie ist eine automorphe Form von $y_1, y_2$:

Analog gebildet sind die homomorphen Reihen, worauf ich aber hier nicht eingehen kann.

Poincaré ist es in der That gelungen, automorphe Formen, d. h. homogene Functionen von $y_1, y_2$, die sich bei den Substitutionen der unimodularen Gruppe nicht ändern, aufzustellen, und zwar in der Gestalt von Partialbruchreihen. Die automorphen Functionen müssen hieraus durch Quotientenbildung abgeleitet werden. Analoges gilt für die homomorphen Functionen.

6.) Kritik der Poincaré'schen Reihen.

So schön auch die Poincaré'schen Reihen sind, so unmittelbar sie ins besondere die Functionaleigenschaft der dargestellten Functionen hervortreten lassen, so sind sie doch noch nicht eigentlich das, was man sucht, nämlich Formeln, mit denen man rechnen kann.

Die Poincaré'schen Reihen entsprechen dem was in der Theorie der elliptischen Functionen die Eisenstein'schen Reihen sind, die auch den Vorzug haben, den automorphen Character der in Betracht kommenden Formen ohne Weiteres hervortreten zu lassen.

Aber diese Eisenstein'schen Reihen sind doch für die wirkliche Rechnung äußerst unbequem, ja ganz unbrauchbar. Statt ihrer benutzt man in der Theorie der elliptischen Functionen für Rechnungszwecke andere Reihen, nämlich die $\vartheta$-Reihen, welche der mannigfachsten Umformungen fähig, alle Eigenschaften der elliptischen Functionen als Identitäten abzuleiten gestatten.

Während wir nun für die automorphen Functionen die Verallgemeinerung der Eisenstein'schen Reihen thatsächlich besitzen, existirt etwas den $\vartheta$-Reihen entsprechendes noch nicht. Die Poincaré'schen Reihen sind wie die Eisenstein'schen Reihen für die practische Rechnung unbrauchbar, es fehlt das Analogon der elliptischen $\vartheta$-Reihen, auf die es eigentlich ankommt.

Zufälligerweise bezeichnet Poincaré gerade seine eignen Reihen leider als $\Theta$-Reihen, was wieder Anlaß zu Misverständnissen geben kann.

7.) Ich möchte endlich geradezu an einem Beispiel ausführen, was meiner Ansicht nach das Ziel der Theorie der automorphen Functionen sein müsste.

Sehr viele Beispiele der Mechanik – wie die Pendelbewegung, die Drehung eines festen Körpers um seinen Schwerpunkt, oder die Drehung eines Kreisels auf einer feststehenden Spitze – führen auf elliptische Functionen.

Jacobi und seine Schüler haben nun explicite Formeln gegeben, um die Lage des Körpers und die Zeit durch elliptische $\vartheta$-Functionen einer Hülfsvariablen auszudrücken.

Diese Formeln sind gewissermassen ideal, denn man kann mit Hülfe derselben auf Grund blosser mechanischer Rechnung tabellarisch die Änderung der Lage des Körpers mit der Änderung der Zeit darstellen.

Andere Probleme der Mechanik führen dagegen auf hyperelliptische Integrale, z. B. die Bewegung eines Kreisels, dessen Spitze auf einer horizontalen Ebene gleitet. Da wäre nun eine unserer eindeutig umkehrbaren $\eta$-Functionen die naturgemässe uniformisirende Hülfsvariable.

Hier muss es mit Hülfe der zu einem Gebilde $p=2$ gehörigen automorphen Functionen möglich sein, ebenfalls die Lage des Körpers und die Zeit durch eindeutige Functionen einer Hülfsvariablen $\eta$ auszudrücken, und so lange das noch nicht gemacht und in alle Lehrbücher aufgenommen, und allgemein bekannt ist, ich meine nicht nur für das Kreiselproblem, sondern für alle anderen analogen Probleme der Mechanik auch, so lange hat die Theorie der automorphen Functionen noch nicht ihr wirkliches Ziel erreicht.

Mo. d. 6. Aug. 1894]. Wir wollen heute und morgen zum Schluss noch ganz kurz über den

Beweis des Fundamentaltheorems

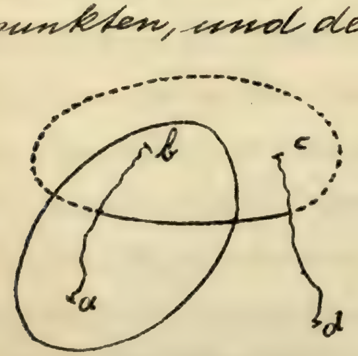
berichten, d. h. über den Beweis des Satzes, dass es zu jeder beliebig vorgegebenen Riemann'schen Fläche mit gegebenen Verzweigungspunkten auf ihr eine und nur eine $\eta$ Function von den vorhin bezeichneten Eigenschaften gibt, z. B. dass es zu jeder Riemann'schen Fläche ein und nur ein unverzweigtes eindeutig umkehrbares $\eta$ mit Grenzkreis gibt.

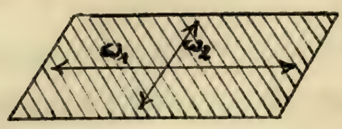
Eine allgemeine Beweismethode für diese Theoreme ist die von mir und Poincaré gleichzeitig gefundene Continuitätsmethode, welche ich zuerst in Math. Ann. 21 skizzirte, und welche dann Poincaré in Acta math. II näher ausgeführt hat.

Ausser dieser Continuitätsmethode, welche allgemein anwendbar ist, existiren für den Fall eines Grenzkreises noch zwei ganz anders geartete Methoden, auf die ich später eingehe.

Heute will ich Ihnen den Grundgedanken des Continuitätsbeweises vor Augen führen. Dazu genügt es, wenn ich ein Ihnen bereits von anderer Seite her vollständig bekanntes Beispiel nach der Continuitätsmethode behandle. Es fallen bei dem Beispiel nur gewisse den allgemeinen Fall betreffende Schwierigkeiten fort, wegen deren Sie Math. Ann. 40 vergleichen mögen.

Denken Sie sich eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit 4 Verzweigungspunkten, und denken Sie sich dieselbe



durch zwei Rückkehrschnitte in kanonischer Weise zerschnitten. Es wird nun behauptet, dass man die so zerschnittene Fläche auf eine und im Wesentlichen nur auf eine Weise auf einen parallelogrammatischen Fundamentalbereich conform abbilden kann, d. h. dass die beiden Perioden $\omega_1, \omega_2$, welche das Parallelogramm characterisiren, bis auf eine willkürliche beiden gemeinsame multiplicative Constante wohlbestimmt sind. Denn offenbar kommt es nur auf die Gestalt des Parallelogramms, nicht auf seine Grösse und Lage in der $\eta$- Ebene an. Wir können also den Fundamentalbereich, wenn wir von allem Unwesentlichen absehen, einfach durch das Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ characterisiren.

Bei der Riemann'schen Fläche andererseits kommt es nur auf das Doppelverhältnis der 4 Verzweigungspunkte und auf die Anordnung – nicht auf die Gestalt – der 2 Rückkehrschnitte an. Aber dieselben 4 Verzweigungspunkte geben ja 6 verschiedene Doppelverhältnisse, je nach der Reihenfolge, in der man sie berücksichtigt; da aber diese Reihenfolge für die Fläche gleichgültig ist, so werden wir zur Characterisirung der Riemann'schen Fläche nicht das Doppelverhältnis selbst, sondern eine symmetrische Function der 6 Doppelverhältnisse zu benutzen haben, nämlich die rationale absolute Invariante $J$. Durch Angabe der Größe $J$ ist die Lage der 4 Verzweigungspunkte, also die Riemann'sche Fläche, über der $x$-Ebene, bis auf eine beliebige lineare Transformation von $x$ vollständig bestimmt.

Wir behaupten also, daß eine Riemann'sche Fläche mit irgend einer bestimmten Invariante $J$ und mit bestimmter kanonischer Zerschneidung sich auf ein Periodenparallelogramm mit einem einzigen wohl bestimmten Werte $\omega$ abbildet; daß zu jedem Werte $J$ in Verbindung mit irgend einer kanonischen Zerschneidung ein und nur ein Wert von $\omega$ gehört.

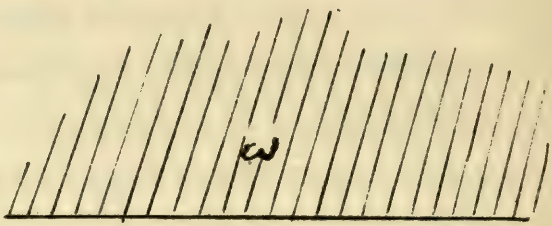
Daß dieser Satz richtig ist, wissen wir aus der Theorie der elliptischen Functionen. Jetzt aber wollen wir uns auf den Standpunct stellen, auf dem wir in der Theorie der automorphen Functionen thatsächlich stehen, daß wir nämlich keine Formeln zum Beweise des Satzes zur Verfügung haben und zusehen müssen, wie wir anderweitig die Existenz eines und nur eines Parallelogramms mögen beweisen können.

Wir vergleichen zu dem Zwecke die beiden Mannigfaltigkeiten, die eine die aller möglichen wesentlich verschiedenen Riemann'schen Flächen, und die andere die aller möglichen wesentlich verschiedenen Parallelogrammbereiche.

Alle wesentlich identischen Parallelogramme sind wie wir sagten durch einen bestimmten Wert von $\omega$ characterisirt. Wir können uns also die Mannigfaltigkeit aller Fundamentalbereiche geradezu durch die Mannigfaltigkeit aller Werte $\omega$ veranschaulichen, die wir geometrisch in einer $\omega$-Ebene uns deuten.

Es zeigt sich aber, daſs diese Mannigfaltigkeit eine Grenze hat. Wir pflegen das Periodenparallelogramm $\omega_1, \omega_2$ so zu zeichnen, daſs die Richtung $\omega_2$ links von der Richtung $\omega_1$ liegt, daſs also $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen positiven imaginären Bestandteil hat. Von dieser Verfügung aus gibt es keinen andern stetigen Übergang zu der andern denkbaren Verfügung, $w_2$ rechts von $w_1$ anzunehmen, als indem man $w$ einmal reell werden läßt, $w_1$ und $w_2$ also in derselben Richtung annimmt. Da artet aber das Parallelogramm so aus, daß es entweder functionentheoretisch unbrauchbar wird, oder doch wenigstens kein Gebilde vom Geschlechte 1 mehr repräsentirt. Die reellen Werte von $w$ sind also eine natürliche Grenze für unsere Mannigfaltigkeit. Also:

<u>Die Mannigfaltigkeit aller Parallelogramme wird uns durch die Punkte der positiven Halbebene $\omega$ dargestellt.</u>




<u>Diese Mannigfaltigkeit wollen wir $M'$ nennen.</u>

Versuchen wir nun, auch die andere Mannigfaltigkeit der zerschnittenen Riemann'schen Flächen uns unter einem geometrischen Bilde vorzustellen.

Die Riemann'sche Fläche, ohne Rücksicht auf die Zerschneidungsart, wird uns einfach durch den Wert der absoluten Invariante

$\mathfrak{J}$ repräsentirt. $\mathfrak{J}$ kann alle möglichen Werte annehmen, jedesmal bekommt man eine Riemann'sche Fläche; nur für $\mathfrak{J} = \infty$ bekommt man eine ausartende Fläche von niedrigerem Geschlecht, indem zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken.

Wir werden uns also alle möglichen Riemann'schen Flächen als Mannigfaltigkeit durch die Punkte einer ganzen Ebene vorstellen, in der nur der Punkt $\infty$ als Grenze der Mannigfaltigkeit gilt.

Nun aber ist für unsere jetzige Betrachtung nicht die Riemann'sche Fläche schlechtweg maßgebend, sondern wir haben zwei Riemann'sche Flächen mit denselben Verzweigungspunkten doch noch als verschieden anzusehen, wenn sie in verschiedener Weise zerschnitten sind. Da auf derselben Riemann'schen Fläche immer noch unendlich viele wesentlich verschiedene kanonische Zerschneidungen möglich sind, <u>so haben wir uns die $\mathfrak{J}$-Ebene unendlich oft überdeckt zu denken, um ein Bild der Mannigfaltigkeit aller verschiedenen zerschnittenen Riemann'schen Flächen zu erhalten.</u>

Wir fragen nun, ob und wie diese unendlich vielen Blätter über der J-Ebene mit einander zusammenhängen? kann man etwa ein kanonisches Schnittsystem stetig in ein anderes überführen, indem man die 4 Verzweigungspunkte der zweiblättrigen Fläche irgendwie um einander herumlaufen läßt, zu ihren alten Stellungen zurück, oder so, daß sie ihre Plätze nur vertauscht haben? D. h. kann man durch stetige Abänderung, durch Umläufe des J um gewisse singuläre Punkte aus einem der Blätter über der J-Ebene in ein anderes gelangen? Oder kurz gesagt:

Wie verhalten sich die verschiedenen Zerschneidungen der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche gegenüber Monodromie der Verzweigungspunkte?

Man findet in der Theorie der elliptischen Functionen, daß die unendlich vielen Blätter, welche wir den verschiedenen Zerschneidungen der Riemann'schen Fläche entsprechend über der J-Ebene construirt haben, alle zusammenhängen, nämlich durch Verzweigungspunkte, welche bei $J = 0, 1, \infty$ liegen.

Die so entstehende, über der J-Ebene ausgebreitete und durchaus zusammenhängende Fläche mit ihren unendlich vielen Blättern stellt durch ihre Punkte die Mannigfaltigkeit $M$ vor, welche wir in Betracht zu ziehen haben, die „Mannigfaltigkeit der kanonisch zerschnittenen zweiblättrigen Riemann'schen Flächen mit 4 Verzweigungspunkten".

Zu beweisen ist nun, dass jedem Punkte von $M$ ein und nur ein Punkt von $M'$ entspricht.

Die Beweisgründe unseres Continuitätsbeweises sind nun folgende

1. Jedem Punkte von $M'$ entspricht ein und nur ein Punkt von $M$.

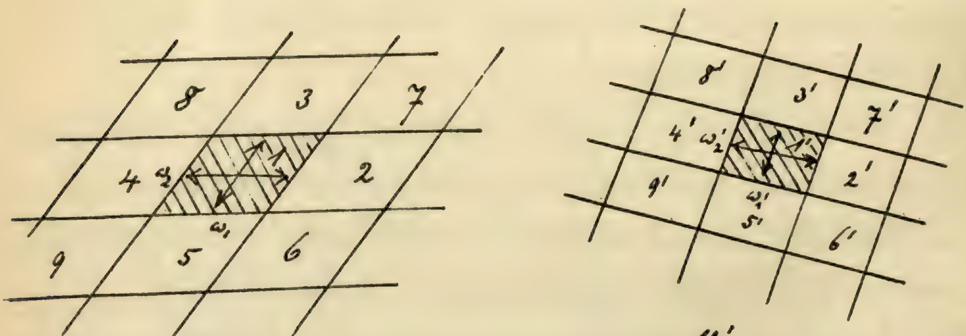
Denn es folgt dies einfach aus den Riemann'schen Existenztheoremen, bezogen auf das als Riemann'sche Fläche gedachte Fundamentalparallelogramm.

2. Wir nehmen an, – was allerdings eines strengen Beweises bedarf – dass bei stetiger Änderung des Punktes $M'$ auch der Punkt $M$ sich stetig fortbewegt, das heisst, dass einer stetigen Abänderung des Parallelogramms in seiner Gestalt eine stetige Änderung der Riemann'schen Fläche entspricht. Man vergleiche hierzu eine eben nun in den math. Annalen zum Abdruck gelangende Arbeit von Ritter.

3. Das „Lemma von der Eindeutigkeit": Nämlich wir sagen. Wenn überhaupt einem Punkt von $M$ ein Punkt in $M'$ entspricht, dann entspricht ihm gewiss auch nur ein einziger Punkt.

Dieses Lemma, welches wir jetzt beweisen wollen, ist der Kern des ganzen Continuitätsbeweises.

Gesetzt es entsprächen ein und derselben in derselben Weise zerschnittenen Riemann'schen Fläche zwei verschiedene Periodenparallelogramme mit verschiedenen Werten von $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Dann sind die beiden Parallelogramme auf die R. Fl., also auch aufeinander conform ein-eindeutig bezogen, und zwar so, dass entsprechenden




$u$ $u'$

Randpunkten des einen Parallelogramms entsprechende Randpunkte im andern Parallelogramm correspondiren.

Wenn aber die Ausgangsparallelogramme 1 und 1' aufeinander in dieser Weise conform bezogen sind, ist nach dem Princip der analytischen Fortsetzung auch jedes weitere Parallelogramm des ganzen Netzes auf das entsprechende Parallelogramm des andern Netzes in genau derselben Weise bezogen. Daraus folgt aber, dass die ganze Ebene $u$ auf die Ebene $u'$ ein-eindeutig conform bezogen ist, bis in beliebige Nähe der beiderseitigen unendlich fernen Punkte, für die man unmittelbar nichts aussagen kann, weil man sie bei beliebig wiederholter analytischer Fortsetzung der Parallelogramme nie erreicht.

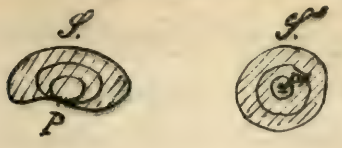
Wenn aber zwei Ebenen $u$ und $u'$ durchaus ein-eindeutig conform aufeinander bezogen sind mit Ausnahme beliebig vieler discreter Punkte, für deren Umgebung man nichts aussagen kann — hier die beiderseitigen Punkte $\infty$ — so zeigt man in der Functionentheorie, dass ein solches $u'$ notwendig eine lineare Function von $u$ ist, also in unserem Falle, wo die Unendlichkeitspunkte zusammengeordnet sind, eine ganze lineare Function von $u$: $u' = cu + c'$.

Dann sind aber die beiden Parallelogramme thatsächlich von einander nicht wesentlich verschieden, indem man das eine durch Verschiebung, Drehung und Vergrößerung aus dem andern erhält, entgegen unserer ersten Annahme.

Um nun zum Continuitätsbeweis selbst zu kommen, denken wir uns irgend einen Punkt $P'$ in $M'$ markirt. Demselben entspricht nach 1) ein und nur ein Punkt $P$ in $M$.

Grenzen wir nun um den Punkt in $M'$ ein denselben allseitig umgebendes kleines Gebiet $S'$ ab, so wird demselben nach 2) auch in $M$ ein den betreffenden Punkt allseitig umgebendes kleines Gebiet $S$ entsprechen. Denn würde das Gebiet $S$ den Punkt $P'$ in $M$ nicht allseitig umgeben, so wäre dies ohne Unterbrechung der Stetigkeit nur so möglich, daß der Bereich $S$ entweder längs einer durch $P$ oder in der Nähe von $P$ verlaufenden Linie sich umklappt


– was dem Eindeutigkeitslemma widerspricht – oder so, daß einer Schar von einander und den Punkt $P$ umschließenden in $S'$ gezogenen Curven in $S$ eine Schar von Curven entspräche, die alle durch $P$ gingen.




Dann würde aber der eine Punkt $P$ einer ganzen Curve in $S'$ entsprechen, was ebenfalls dem Eindeutigkeitslemma widerspricht.

Denken wir uns nun daß das Gebiet $S'$ in $M'$ sich allseitig stetig ausdehnt, bis es schließlich die ganze $w$-Halbebene ausfüllt.

Es ist nun zuzusehen, in welcher Weise sich dabei der Bereich $S$ auf der $\infty$-blättrigen Riemann'schen Fläche über der $J$-Ebene erweitert, ob er schließlich jeden beliebigen Punct derselben, so weit er auch vom Ausgangspunct $P$ und vom Ausgangsblatt entfernt liegt, überstreichen muß, oder ob es Punkte – außer dem Grenzpunkt $\infty$ bez. den in den verschiedenen Blättern gelegenen Gränzpunkten $\infty$ – gibt, welche nie erreicht werden.

Daß ein Punkt nicht erreicht würde, kömmt, da ein Umklappen des Bereiches $S$ oder ein Stehenbleiben desselben nach den Überlegungen der vorigen Seite unmöglich ist, nur so eintreten, daß die Grenze des Bereiches $S$, bevor sie den Punkt erreicht, dadurch aufgehalten wird, dass sie sich einer den Punkt ausschliessenden Curve asymptotisch nähert. Eine solche Grenzcurve in $\mathfrak{F}$ müsste aber notwendig der Grenze der $w$ Halbebene entsprechen, nicht inneren Punkten, da sie ja sonst bei der Ausdehnung des Bereichs wirklich einmal erreicht würde.

Nun zeigt aber Poincaré – worauf wir hier nicht näher eingehen können – dass den Punkten der reellen $w$-Axe, oder allgemeiner der Grenze der Mannigfaltigkeit $M'$ in der Mannigfaltigkeit $M$ nur Elemente von einer um 2 niedrigeren Dimension, d. h. hier isolirte Punkte entsprechen können, nämlich die Punkte $\infty$ der Blätter über der $\mathfrak{F}$-Ebene.

Insbesondere Poincaré hat dieses Verhalten der Grenzen der beiden Mannigfaltigkeiten genauer untersucht, und darauf hingewiesen, dass auch diese einander thatsächlich correspondiren.

Punkte können nun aber das Wachsen des Bereiches $S$ bis zu einem beliebigen Punkte hin nicht aufhalten.

Da hiernach bei stetiger Ausdehnung

des Bereichs S über die ganze w-Halbebene der Bereich S' jeden auf endlichem Wege erreichbaren Punkt der ∞ blättrigen Riemann'schen Fläche über der J-Ebene ein- und nur einmal überstreicht, so entspricht nicht nur jedem Elemente von M' ein Element von M, sondern auch umgekehrt jedem Elemente von M ein und nur ein Element von M'.

Das ist aber nichts Anderes als unser Fundamentaltheorem.

Genau so, wie hier bei unserm speciellen Beispiel der elliptischen Functionen ist der Continuitätsbeweis in allen den andern allgemeinern Fällen zu führen. Allerdings stellen sich dabei in Betreff der Grenzfälle noch weitere Schwierigkeiten ein, worauf wir hier nicht eingehen können. Überhaupt ist es notwendig, dass der Continuitätsbeweis in seiner Allgemeinheit noch einmal sorgfältig durchgearbeitet wird, da auch die Untersuchungen von Poincaré in Acta math. 4, obwohl sehr viel eingehender als die meinen, doch jedenfalls noch nicht genügend alle denkbaren Ausnahmefälle erschöpfen.

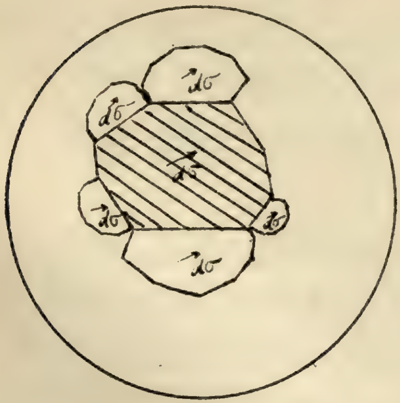
Di. d. 7. Aug. 1894.] Der gestrige Continuitätsbeweis, der auf alle automorphen Fundamentaltheoreme anwendbar ist, beruht auf Variation der Moduln, d. h. der Constanten des algebraischen Gebildes einerseits, des Fundamentalbereichs andererseits. Darin beruht seine Schwierigkeit, aber auch sein Vorzug; denn er führt uns direct in das noch gänzlich unbekannte Gebiet der automorphen Modulfunctionen hinein, welche sich zur gewöhnlichen Theorie der automorphen Functionen ebenso verhalten, wie die elliptischen Modulfunctionen zur gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen.

Aber für den speciellen Fall des Fundamentaltheorems, dass wir ein eindeutig umkehrbares $\eta$ mit Grenzkreis verlangen, existiren noch zwei ganz andere Beweismethoden, welche beide von einer festen Riemann'schen Fläche ausgehen und das zugehörige $\eta$ auf ihr durch Approximation construiren.

Beide Methoden gehen in ihrem Grundgedanken auf Schwarz zurück und sind dann von den französischen Geometern ausgeführt worden. Der Einfachheit halber denke ich mir das $\eta$ auf der Riemann'schen Fläche unverzweigt; es bedingt das, dafs wir $p \geqq 2$ nehmen.

A.) Die erste Methode will ich bezeichnen als die <u>Methode des Linienelementes.</u>

Es sei eine Riemann'sche Fläche $p \geqq 2$ mehrblättrig über der $x + iy$ - Ebene gegeben. Denken wir nun dieselbe auf einen $\eta$- Bereich mit Grenzkreis abgebildet, so wie es das Fundamentaltheorem postulirt. Den $\eta$- Bereich wollen wir uns in der früher beschriebenen Weise geradlinig gezeichnet denken, mit einer auf den Grenzkreis gegründeten nichteuklidischen Mafsbestimmung. Irgend einem <u>Linienelement</u> $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ der Riemann'schen Fläche wird dann in dem $\eta$- Bereich ein nichteuklidisches Längenelement $d\sigma$ entsprechen, und zwar wird sich dasselbe, da die Abbildung conform ist,




in der Gestalt darstellen $d\sigma^2 = \mathcal{E}.(dx^2+dy^2)$, wobei $E$ eine Function von $x$ und $y$ ist, die noch näher zu characterisiren ist.

Machen wir auf der R. Fl. einen geschlossenen Umlauf, so kommen wir in der $\eta$-Ebene von einer Stelle des Ausgangsbereiches zu der genau entsprechenden Stelle eines Nachbarbereichs. Da nun der Nachbarbereich im nichteuklidischen Sinne dem Ausgangsbereich Punkt für Punkt congruent ist, so nimmt $d\sigma$ wieder denselben Wert an, und es ergibt sich also für $E$ der Satz:

Die Function $E$ ist eine auf der gegebenen Riemann'schen Fläche eindeutige Function von $x$ und $y$, welche in den Verzweigungspunkten der R. Fl. und in den unendlich fernen Punkten derselben ein (hier nicht näher anzugebendes) characteristisches Verhalten zeigt.

Alles kommt nun darauf an, diese eindeutige Function $E(x, y)$ auf unserer R. Fl. zu bestimmen, denn es ist klar, wenn wir $E$ haben, dass dann die ganze Abbildung der Riemann'schen Fläche auf die $\eta$-Ebene bestimmt ist.

Wir müssen uns hierzu auf die allgemeine Theorie der Differentialform

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

beziehen, welche ja in der Gauß'schen Flächentheorie in bekannter Weise entwickelt ist.

Diese Differentialform besitzt gegenüber beliebigen Substitutionen $x = \varphi(x', y')$ $y = \psi(x', y')$ eine Invariante, das Gauß'ische Krümmungsmaß. Der allgemeine Ausdruck desselben durch $E$, $F$, $G$ ist sehr complicirt. In unserm Falle aber, wo $F = 0$, $E = G$ ist, vereinfacht er sich folgendermaßen:

$$-K = \frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dE}{dy}\right)^2}{2E^3} - \frac{\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{d^2E}{dy^2}}{2E^2}$$

und noch einfacher wird er, wenn wir

$$E = e^u$$

setzen, wodurch

$$-K = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}}{2e^u}$$

wird.

Indem wir nun wissen, daß unser nichteuklidisches Bogenelement constantes negatives Krümmungsmaß besitzen muß, verwandelt sich unsere zuletzt hingeschriebene Gleichung in eine partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 2Ke^u \quad , \quad e^u = E,$$

der die Function $u$ bezw. $E$ genügen muss.

Sobald es uns gelingt, für diese partielle Differentialgleichung eine Lösung $u(x, y)$ zu finden, welche auf unserer ganzen Riemann'schen Fläche eindeutig ist, und in den Windungspunkten und den $\infty$-Stellen der R. Fl. das richtige Verhalten zeigt, (welches wir hier nicht näher specificiren), dann schreiben wir:

$$d\sigma^2 = E(dx^2 + dy^2),$$

und haben damit ein nichteuklidisches Bogenelement und durch Vermittlung desselben die richtige Abbildung auf die $\eta$-Ebene.

Die Frage ist also: Habe ich eine Methode, um die Differentialgleichung

$$\Delta u = 2K \cdot e^u$$

auf einer geschlossenen Riemann'schen Fläche durch eine eindeutige Function mit characteristischen Unstetigkeitsstellen zu integriren?

Es kommen hier die Theorieen von Picard in Betracht, welcher die gewöhnlichen Entwicklungen über die Integration von $\Delta u = 0$ unter vorgegebenen Unstetigkeits- und sonstigen Bedingungen auf allgemeinere partielle Differentialgleichungen mit Erfolg übertragen hat.

Speciell die hier vorliegende Aufgabe hat Picard in Liouv. sér. 4 t. 9. 1893 zu Ende geführt vermittelst der bekannten Methode der successiven Approximationen.

Picard hat gezeigt, daſs auf gegebener geschlossener Riemann'scher Fläche in der That immer eine und nur eine einzige Function $u$ resp. $E$ gefunden werden kann, welche der partiellen Differentialgleichung genügt, welche durchaus eindeutig ist, und welche die characteristischen Unstestigkeitsstellen aufweist, von denen wir wiederholt sprachen.

Indem wir mit Hülfe dieser Function $E$ das $d\sigma^2 = E(dx^2 + dy^2)$ berechnen, haben wir das nichteuklidische Bogenelement unserer $\eta$-Ebene gewonnen, und damit die völlig bestimmte Existenz des $\eta$, d. h. unser Fundamentaltheorem, für den Grenzkreisfall bewiesen.

B.) Für den Grenzkreisfall liegt, wie schon oben bemerkt auſser der Continuitätsmethode noch ein zweiter ebenfalls von Schwarz herrührender Beweisansatz vor; derselbe ist von Poincaré in sehr allgemeiner Form durchgeführt; ich will die Methode die

Methode der unendlichfach überdeckten Riemann'schen Fläche benennen.

Denken wir uns wieder die durch das Fundamentaltheorem als möglich behauptete conforme Abbildung auf einen $\eta$-Bereich mit Grenzkreis wirklich ausgeführt. Die zerschnittene Riemann'sche Fläche entspricht dabei gerade einem Fundamentalbereich. Sie entspricht aber auch jedem der andern durch die Substitutionen der Gruppe aus dem Ausgangsbereich entstehenden, in ihrer Gesamtheit das Innere des Grenzkreises vollständig überdeckenden Bereiche. Umgekehrt ist $\eta$ auf der Riemann'schen Fläche zwar unverzweigt, aber unendlich vieldeutig; wir haben uns, um $\eta$ auf der Riemann'schen Fläche zu deuten, dieselbe unendlich oft überdeckt zu denken, indem wir uns etwa die ringförmige Gestalt der Fläche mit unendlich vielen Ringschalen überdeckt denken, von denen jede mit einer andern längs eines der $2p$ kanonischen Rückkehrschnitte zusammenhängt. Verzweigungspunkte treten dabei nicht auf.

Die unendlich vielen äquivalenten nebeneinanderliegenden Bereiche der $\eta$-Ebene liefern rückwärts auf die Riemann'sche Fläche abgebildet eine unendlichfache Überdeckung der letzteren.

Das Ende der Sache ist, daſs die von dem Grenzkreis umschlossene Kreisfläche der $\eta$-Ebene auf die unendlichfach überdeckte Riemann'sche Fläche conform abgebildet ist, so zwar, daſs jedem Fundamentalbereich der $\eta$-Ebene eine einzelne Überdeckung der R. Fl. correspondirt.

Es macht keine Schwierigkeit, sich vorzustellen, daſs die R. Fl. in der erforderlichen Weise mit unendlich vielen Blättern überdeckt wird, die ein zusammenhängendes Ganze bilden.

Alles kommt nur darauf an, zu zeigen, daſs man diese neue Fläche, welche sich unendlich oft über die gegebene Fläche hinzieht, auf eine schlichte Kreisfläche abbilden kann.

In der That: Nehmen wir die Möglichkeit dieser Abbildung einmal als bewiesen an, dann behaupte ich, daſs wir mit dieser Abbildung gerade unsere $\eta$-Function construirt haben. Nämlich:

Unsere unendlichblättrige Fläche ist eine reguläre Fläche mit unendlich vielen eindeutigen Transformationen in sich, wobei der Fundamentalbereich die einzelne Überdeckung unserer ursprünglichen Riemann'schen Fläche ist.

Denn jedes Blatt ist ja mit jedem andern vollständig congruent, und hängt mit allen benachbarten Blättern in derselben Weise zusammen, wie irgend ein anderes Blatt mit den ihm benachbarten Blättern.

Ich kann daher jedes Blatt auf jedes andere Blatt conform abbilden, indem ich einfach die über einander liegenden Punkte der beiden Blätter einander zuweise; von da aus ergibt sich durch analytische Fortsetzung jedes Mal eine eindeutige Transformation der unendlich blättrigen Fläche in sich selbst.

Diese Eigenschaft muss sich auf die Kreisfläche der $\eta$-Ebene übertragen, auf welche wir unsere $\infty$ blättrige Fläche abgebildet haben. Auch sie muss durch unendlich viele eindeutige Transformationen in sich übergehen, bei welchen die verschiedenen Bereiche, die den verschiedenen Blättern unserer R. Fl. entsprechen, sich gerade permutiren.

Nun geht eine Kreisfläche durch keine andere eindeutigen Transformationen in sich über, als durch lineare Transformationen. Die unendlich vielen nebeneinanderliegenden Abbilder, welche die verschiedenen Blätter unserer unendlich blättrigen R. Fl. in der $\eta$-Ebene finden, gehen also alle durch lineare Transformationen auseinander hervor, wir haben folglich in der That die richtige $\eta$-Figur.

Alles hängt, wie man sieht, an dem Beweise, dass man die $\infty$ blättrige R. Fl. auf das Innere einer schlichten Kreisfläche conform abbilden kann.

Diesen Beweis hat nun wirklich Poincaré geliefert im Bull. de la Société Mathematique de France XI 1884 und zwar in einer sehr allgemeinen, über das hier vorliegende Bedürfniss hinausgehenden Form, die ich hier leider nicht eingehender besprechen kann.

Damit haben wir einen zweiten einwandlosen Beweis für das Fundamentaltheorem im Grenzkreisfall, abgesehen noch von der Continuitätsmethode, welche auch für die andern Fälle anwendbar ist.

Hiermit schliesse ich die heutige Stunde und damit die gegenwärtige Vorlesung überhaupt.

Sie sehen, dass gerade am Schluss sich noch die interessantesten neuen Gesichtspunkte uns darbieten, die wir leider in der kurzen Zeit auf keine Weise weiter verfolgen konnten. Wir können sagen, dass wir nur erst im Anfang eines neuen Gebietes stehen, für dessen genauere Erforschung die Überlegungen der letzten beiden Semester erst Vorbereitungen sind.