Untersuchungen

über verschiedene

Anwendungen der Infinitesimalanalysis

auf die

ZAHLENTHEORIE

von

Peter G. Lejeune Dirichlet.

(1839—1840.)

Deutsch herausgegeben

von

R. Haussner.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1897.

Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie

von

G. Lejeune Dirichlet.

Aus dem »Journal für die reine und angewandte Mathematik«, herausgegeben von *A. L. Crelle*. Bd. 19, 1839, S. 324—369: Erster Theil (§ 1—6); Bd. 21, 1840, S. 1—12 und S. 134—155: Zweiter Theil (§ 7—11).

Erster Theil.

(*Crelle*'s Journal, Bd. 19, S. 324—369.)

[**324**] Als ich mich vor zwei Jahren*) damit beschäftigte zu beweisen, dass jede unendliche arithmetische Progression, deren Glieder nicht sämmtlich einen gemeinschaftlichen Theiler haben, unendlich viele Primzahlen enthält — was bis dahin noch nicht auf strenge Weise geschehen war —, wurde ich dazu geführt, eine grosse Anzahl zahlentheoretischer Fragen von einem ganz neuen Gesichtspunkte aus zu betrachten. Dieser bringt sie sowohl mit den Principien der Infinitesimalanalysis in Verbindung, als auch mit den merkwürdigen Eigenschaften einer Classe von unendlichen Reihen und Producten, welche grosse Aehnlichkeit mit den Ausdrücken haben, die *Euler* in dem »*De seriebus ex evolutione factorum ortis*« überschriebenen Capitel seiner »*Introductio in analysin infinitorum*« untersucht hat. In einer in *Crelle*'s Journal**)

*) Die Abhandlung, welche ich in der Berliner Akademie über diese Frage gelesen habe, ist soeben in den Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1837 (S. 45—81) abgedruckt worden. [Siehe auch *G. Lejeune Dirichlet*'s Werke, Bd. 1, S. 313—342. H.]

**) Bd. 18 (1838), S. 259—274: *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres.* [Werke, Bd. 1, S. 357—374. H.]

veröffentlichten Mittheilung habe ich mehrere Probleme, auf welche diese analytische Methode angewendet werden kann, bezeichnet. Jetzt nehme ich mir vor, meine Untersuchungen über diesen Gegenstand mit allen nöthigen Entwickelungen in einer Reihenfolge von Abhandlungen darzulegen. Die erste derselben, welche ich jetzt dem Urtheile der Mathematiker unterbreite, ist insbesondere der — bis jetzt noch nicht gegebenen — Lösung der Aufgabe gewidmet, welche die Anzahl der verschiedenen quadratischen Formen, deren Determinante D eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist oder, was dasselbe ist, die Anzahl der quadratischen Theiler, welche zu dem Ausdrucke $x^2 - Dy^2$ gehören, zu bestimmen verlangt. Die Analysis, welche uns zur vollständigen Lösung dieser wichtigen Frage führt, liefert uns [325] gleichzeitig — und sozusagen nebenbei — neue und sehr einfache Beweise für mehrere schöne von Herrn *Gauss* aufgestellte Sätze, welche dieser berühmte Mathematiker nur mit Hülfe sehr verwickelter Betrachtungen in dem zweiten Theile des fünften Abschnittes seiner »*Disquisitiones arithmeticae*« aufgestellt hatte.

Dieser Abschnitt des *Gauss*'schen Werkes, welcher der Theorie der Formen zweiten Grades gewidmet ist, setzt sich aus zwei deutlich unterschiedenen Theilen zusammen. Der erste Theil, welcher bis zu dem Artikel 223 reicht, kann als eine Auseinandersetzung der elementaren Theile dieser Theorie betrachtet werden und enthält alle von *Euler*, *Lagrange* und *Legendre* vorher gegebenen Resultate vollständig, in vieler Hinsicht erweitert und überdies aus neuen Principien abgeleitet. Der zweite Theil, welcher eigentlich mit dem Artikel 234 beginnt (da die Artikel 223—233 Definitionen und Hülfssätze, welche zur Einführung in den zweiten Theil dienen, enthalten), setzt sich beinahe ausschliesslich aus eignen Untersuchungen des berühmten Verfassers zusammen. Diese ebenso durch die Tiefe der Methoden, wie durch die Zahl und Mannigfaltigkeit der Resultate bemerkenswerthen Untersuchungen bilden unstreitig den Theil des ganzen Werkes, welcher dem Studium die meisten Schwierigkeiten darbietet. Selbst den Mathematikern sind sie sehr wenig bekannt, und es mag darüber besonders das angeführt werden, was *Legendre* in der Vorrede zur zweiten Ausgabe seiner *Théorie des Nombres* sagt. Nachdem er dort die *Gauss*'schen Entdeckungen, welche er in sein Werk aufgenommen hat, aufgezählt hat, fügt er hinzu:

»On aurait désiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellents matériaux qui composent l'ouvrage de Mr. *Gauss*: mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujetir au simple rôle de traducteur, profiter de ses autres découvertes.« *)

Ich wage mithin zu hoffen, dass meine Arbeit — abgesehen von den neuen Resultaten, welche sie bringt — auch dadurch zum Fortschritte der Wissenschaft beitragen wird, dass sie schöne und wichtige Theorien, die bis jetzt nur der kleinen Zahl von Mathematikern, welche die nöthige geistige Spannkraft besitzen, um den Faden der Gedanken in einer langen Reihe von Rechnungen und sehr verwickelten Schlussfolgerungen nicht zu verlieren, verständlich geworden waren, auf neuen Grundlagen aufbaut und auf die Elemente zurückführt.

[326] § 1.

Wir betrachten die Summe der unendlichen Reihe:

$$\frac{1}{k^{1+\varrho}} + \frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}} + \cdots, \tag{1}$$

in welcher k und ϱ zwei positive Grössen bezeichnen, deren erste constant und deren zweite variabel ist. Da diese Summe jeden endlichen Grenzwerth überschreitet, wenn die Veränderliche ϱ unendlich klein wird, so fragen wir nach der einfachsten Function von ϱ, welche als Maass für diese Zunahme dienen kann oder, mit anderen Worten, deren Verhältniss zu dem vorstehenden Ausdrucke sich dem Grenzwerthe Eins nähert, wenn ϱ der Null zustrebt. Zu dem Zwecke nehmen wir die bekannte Formel zu Hülfe:

$$\int_0^1 x^{k-1} \log^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^{1+\varrho}}.$$

---

*) Der Verfasser würde dieses Werk gern mit einer grösseren Anzahl der ausgezeichneten Untersuchungen, welche das *Gauss*'sche Werk bilden, bereichert haben; aber die Methoden dieses Autors sind ihm so eigenthümlich, dass der Verfasser ohne die grössten Umwege und ohne die Rolle eines blossen Uebersetzers zu übernehmen seine andern Entdeckungen nicht hätte wiedergeben können. H.

Ersetzen wir in derselben k nach einander durch k, $k+1$, $k+2$, ... und bilden wir dann die Summe aller dieser Gleichungen, so ergiebt sich für die Reihe (1) der folgende Ausdruck:

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1-x}\log^\varrho\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Addirt man zu diesem Ausdrucke $\frac{1}{\varrho}$ und subtrahirt man dann wieder den $\frac{1}{\varrho}$ gleichen Werth:

$$\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1+\varrho)}=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1 \log^{\varrho-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

so erhält man für den obigen Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{1-x}-\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\log^\varrho\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Da für $k>0$ der zweite Theil mit unendlich abnehmendem ϱ gegen die endliche Grenze:

$$\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{1-x}-\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)dx$$

convergirt, so folgt, dass das Verhältniss der Summe (1) zu dem Bruche $\frac{1}{\varrho}$ die Einheit zur Grenze hat, wenn die positive Veränderliche ϱ unbegrenzt abnimmt.[1])

Mit Hülfe dieses Satzes ist es leicht, den folgenden Satz, von dem wir in unseren Untersuchungen häufig Gebrauch machen werden, zu beweisen.

»Es seien

(2) $$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_n,\ \ldots$$

positive, von Null verschiedene, einander ungleiche oder theilweise einander gleiche Constanten, deren Anzahl unendlich gross sei; es sei $f(t)$ diejenige unstetige Function der positiven Veränderlichen t, welche angiebt, [327] wie viele der in der Reihe (2) enthaltenen Zahlenwerthe den Werth von t nicht übertreffen. Wenn dann die Function $f(t)$ auf die Form:

$$f(t) = ct + t^\gamma \psi(t) \tag{3}$$

gebracht werden kann, wo c und γ positive Constanten bezeichnen, deren zweite kleiner als Eins ist, und wo die neue Function $\psi(t)$, abgesehen von ihrem Vorzeichen, für beliebig grosse Werthe der Veränderlichen t immer kleiner als die positive Constante C bleibt, so behaupte ich: Die Summe:

$$\varphi(\varrho) = \frac{1}{l_1^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_2^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_3^{1+\varrho}} + \cdots, \tag{4}$$

in welcher ϱ eine positive Veränderliche bezeichnet, hat für unendlich kleine Werthe von ϱ den Grenzwerth:

$$\varphi(\varrho) = \frac{c}{\varrho}, \tag{5}$$

d. h. das Verhältniss der Summe $\varphi(\varrho)$ zu dem Bruche $\frac{c}{\varrho}$ nähert sich mit unendlich abnehmendem ϱ dem Grenzwerthe Eins.«[2])

Da die Anzahl der in der Reihe (2) enthaltenen Werthe, welche die Einheit nicht überschreiten, eine endliche ist [denn ihre Anzahl ist gleich $c + \psi(1)$] und da unter denselben sich keiner befindet, welcher gleich Null ist, so ist es durch die Natur des zu beweisenden Satzes klar, dass wir den Theil des Ausdruckes $\varphi(\varrho)$, welcher diesen Gliedern entspricht, weglassen können. Wir bezeichnen die nach dieser Verkleinerung übrig bleibende Summe noch mit $\varphi(\varrho)$ und wählen eine Constante δ, welche grösser als $\frac{1}{1-\gamma}$ ist; dann zerlegen wir die Summe $\varphi(\varrho)$ in unendlich viele Theilsummen, sodass die m^{te} dieser Theilsummen alle Zahlwerthe umfasst, welche der doppelten Bedingung:

$$m^\delta < l_n \leqq [m+1]^\delta$$

und mithin auch der Bedingung:

$$\frac{1}{m^{\delta(1+\varrho)}} > \frac{1}{l_n^{1+\varrho}} \geqq \frac{1}{[m+1]^{\delta(1+\varrho)}}$$

genügen. Die Anzahl dieser Glieder ist offenbar:

$$f([m+1]^\delta) - f(m^\delta)\,.$$

Da der numerische Werth von $t^\gamma \psi(t)$ für $t = m^\delta$ und $t = [m+1]^\delta$ kleiner als $C[m+1]^{\gamma\delta}$ ist, so bestehen die folgenden zwei Ungleichheiten:

$$f([m+1]^\delta) - f(m^\delta) < c([m+1]^\delta - m^\delta) + 2C[m+1]^{\gamma\delta},$$
$$f([m+1]^\delta) - f(m^\delta) > c([m+1]^\delta - m^\delta) - 2C[m+1]^{\gamma\delta}.$$

Verbindet man diese beiden Ungleichheiten mit den unmittelbar vorangehenden, so folgt, dass die betrachtete m^{te} Theilsumme bez. kleiner und grösser ist, [328] als die Grössen:

$$c\,\frac{[m+1]^\delta - m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}} + 2C\,\frac{[m+1]^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}}\,,$$
$$c\,\frac{[m+1]^\delta - m^\delta}{[m+1]^{\delta(1+\varrho)}} - 2C\,\frac{[m+1]^{\gamma\delta}}{[m+1]^{\delta(1+\varrho)}}\,.$$

Folglich ist:

$$\varphi(\varrho) < c\Sigma\,\frac{[m+1]^\delta - m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}} + 2C\Sigma\,\frac{[m+1]^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}}\,,$$

wo die Summenzeichen Σ sich über alle ganzen Zahlen von $m = 1$ bis $m = \infty$ erstrecken.

Da nach einem bekannten Satze:

$$[m+1]^\delta - m^\delta = \delta m^{\delta-1} + \frac{\delta(\delta-1)}{2}[m+\varepsilon_m]^{\delta-2}$$

ist, wo ε_m einen positiven echten Bruch bezeichnet, so kann man die vorstehende Ungleichheit auch auf die Form bringen:

$$\varphi(\varrho) < c\delta\Sigma\,\frac{1}{m^{1+\delta\varrho}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}c\delta(\delta-1)\Sigma\,\frac{\left[1+\frac{1}{m}\varepsilon_m\right]^\delta}{m^{\delta\varrho}[m+\varepsilon_m]^2} + 2C\Sigma\,\frac{\left[1+\frac{1}{m}\right]^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1-\gamma)+\delta\varrho}}\,.$$

Die beiden letzten Summen bleiben aber endlich, wenn ϱ unendlich klein wird, denn sie sind beständig kleiner als die Summen:

$$\Sigma\left[1+\frac{1}{m}\right]^{\delta}\frac{1}{m^2}, \quad \Sigma\left[1+\frac{1}{m}\right]^{\gamma\delta}\frac{1}{m^{\delta(1-\gamma)}};$$

diese selbst sind aber endlich, wie mit Hülfe von bekannten Sätzen leicht zu erkennen ist, wenn man sich an die über die Constante δ gemachte Voraussetzung, dass $\delta(1-\gamma)>1$ ist, erinnert. Was die erste Summe in der obigen Ungleichheit betrifft, so wird sie offenbar gleich $\frac{1}{\delta\varrho}$, wenn ϱ unendlich klein wird, da sie eine dem oben betrachteten Ausdrucke (1) analoge Form hat. Man sieht also, dass die obere Grenze von $\varphi(\varrho)$ die Form $\frac{c}{\varrho}$ annimmt, wenn die positive Grösse ϱ unendlich klein wird; da dieselbe Schlussfolge sich auf die untere Grenze anwenden lässt und zu dem gleichen Resultate führt, so ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Man kann dem soeben bewiesenen Satze zwar eine viel grössere Ausdehnung geben; da derselbe aber in der gegebenen Fassung für die vorläufig beabsichtigten Anwendungen ausreicht, so mag diese Verallgemeinerung, welche überdies keine Schwierigkeiten darbietet, übergangen werden.

Wir bedürfen noch zweier anderer Hülfssätze, welche ebenso wie der vorige der Infinitesimalanalysis angehören. Der erste dieser neuen Sätze ist so einfach, dass wir uns damit begnügen, ihn auszusprechen, ohne seinen leicht zu ergänzenden Beweis zu geben.

[329] Alle Punkte einer unendlichen Ebene seien auf zwei zu einander senkrechte Axen X und Y bezogen. In dieser Ebene sei eine geschlossene Curve construirt, welche in allen ihren Theilen entweder ein und demselben analytischen Gesetze oder mehreren solchen Gesetzen unterworfen ist; die Curve soll sich fort und fort ausdehnen und schliesslich jede Grenze überschreiten, aber in der Weise, dass die veränderliche Curve immer sich selbst ähnlich bleibt. Schliesslich bezeichne man mit σ den ebenfalls veränderlichen Inhalt des Flächenstückes, welches die Curve begrenzt.

Es seien dann a, b, α, β vier Constanten, von denen die beiden ersten positive Werthe haben, und man construire alle Punkte, deren Coordinaten x und y die Form haben:

$$(6) \qquad x = av + \alpha, \quad y = bw + \beta,$$

wo v und w alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bezeichnen. Bezeichnet ferner $F(\sigma)$ die Anzahl dieser Punkte, welche innerhalb der Curve gelegen sind, so ist augenscheinlich für unendlich grosse Werthe von σ:

$$F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma,$$

d. h. das Verhältniss der beiden Seiten dieser Gleichung wird gegen die Einheit convergiren, wenn σ über jeden positiven Grenzwerth hinauswächst. Gleichfalls leicht zu erkennen ist, dass die Differenz $F(\sigma) - \frac{\sigma}{ab}$ weniger schnell zunimmt als die Potenz σ^γ, in welcher der Exponent $\gamma > \frac{1}{2}$ vorausgesetzt ist. Wir können also setzen:

$$(7) \qquad F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma + \sigma^\gamma \psi(\sigma),$$

wobei $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ ist und die Function $\psi(\sigma)$, vom Vorzeichen abgesehen, sicherlich immer kleiner als eine gewisse endliche Constante C bleibt.[3])

Der letzte der Hülfssätze, welche wir der Infinitesimalanalysis entlehnen, bezieht sich auf die Reihentheorie. Bekanntlich giebt es zwei sehr verschiedene Arten von convergenten Reihen; die Reihen der ersten Art sind convergent unabhängig von den Vorzeichen, mit denen ihre Glieder behaftet sind, während die der zweiten Art die Eigenschaft der Convergenz nur besitzen, weil ihre Glieder sich durch ihre entgegengesetzten Vorzeichen zum Theil zerstören.

Eine Reihe der ersten Art bleibt convergent, und ihre Summe behält immer denselben Werth, in welcher Reihenfolge auch ihre Glieder genommen werden mögen. Die Reihen der zweiten Art verhalten sich [**330**] in ganz verschiedener Weise. Eine Reihe dieser Art, welche für eine gewisse Anordnung ihrer Glieder convergent ist, kann diese Eigenschaft verlieren, wenn die Reihenfolge der Glieder geändert wird. Es kann auch vorkommen, dass die Reihe nach dieser Aenderung zwar noch convergent ist, dass aber ihre Summe gleichzeitig mit der Reihenfolge der Glieder ihren Werth geändert hat. Diese — wie man weiterhin sehen wird — eng mit unserem Gegenstand verbundenen Bemerkungen sind auch für andere Untersuchungen nicht unwichtig. Aus ihnen folgt z. B. die Bemerkung: Hat man eine Reihe der zweiten Art zu summiren und erhält man für ihre Summe einen ganz bestimmten Werth, ohne dass die Reihenfolge, in welcher die Glieder auf einander folgen sollen, als wesentliches Element in der benutzten Analyse auftritt, so muss das Summationsverfahren irgend einen versteckten Fehler enthalten oder wenigstens durch irgend eine Betrachtung vervollständigt werden, welche deutlich die der erhaltenen Summe entsprechende Anordnung der Glieder anzeigt.

Es sei, um nun auf unseren Gegenstand zurückzukommen, s eine positive Veränderliche und man betrachte die Reihe, deren allgemeines Glied

$$c_n \frac{1}{n^s}$$

ist, wobei die ganze Zahl n alle Werthe von $n = 1$ bis $n = \infty$ annehmen kann. Wenn man voraussetzt, dass c_n, abgesehen von seinem Vorzeichen, für beliebige Werthe des Index n immer kleiner als die Constante C ist, so gehört die vorstehende Reihe zur ersten Art, so lange $s > 1$ ist. Setzt man also $s = 1 + \varrho$, wo ϱ eine beliebig kleine positive Veränderliche ist, so hat die Summe:

$$\psi(1 + \varrho) = \Sigma c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

einen einzigen und von der Anordnung ihrer Glieder völlig unabhängigen Werth. Denken wir uns nun, dass es sich um die Ermittelung des Grenzwerthes handelt, welchem sich die, so lange die Veränderliche ϱ positiv bleibt, offenbar stetige Function $\psi(1 + \varrho)$ nähert, wenn ϱ kleiner als jede noch so kleine positive Grösse wird, unter der Annahme, dass ein solcher Grenzwerth der Function existirt, was nicht der Fall sein kann. Nach den obigen Bemerkungen würde man nicht berechtigt sein zu sagen, dass dieser Grenzwerth durch:

$$\Sigma c_n \frac{1}{n},$$

wobei die Reihenfolge der Glieder willkürlich ist, dargestellt werde; denn offenbar gehört diese Reihe zur zweiten Art und hat mithin keine bestimmte Summe.

[331] Indem man die oben ausgesprochenen Voraussetzungen aufrecht erhält, bezeichne man mit k eine positive ganze Zahl und setze fest, dass c_n der Gleichung:

$$c_{n+k} = c_n \tag{8}$$

genüge oder, mit anderen Worten, dass die Reihe:

$$c_1, c_2, \cdots, c_k; c_{k+1}, c_{k+2}, \cdots, c_{2k}; c_{2k+1}, \cdots$$

periodisch sei, wobei die Anzahl der Glieder, welche eine Periode bilden, gleich k ist. Weiter setze man noch voraus, dass die Summe dieser Glieder gleich Null sei, d. h. dass die Gleichung bestehe:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0\,. \tag{9}$$

Dann behaupte ich, dass sich die Summe:

$$\sum c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

welche nicht von der Reihenfolge der Glieder abhängt, einem endlichen Grenzwerthe nähert, welcher durch den Ausdruck:

$$\sum c_n \frac{1}{n}$$

gegeben ist, in welchem die Glieder in der natürlichen Ordnung, d. h. so, dass die Werthe von n beständig von $n = 1$ bis $n = \infty$ wachsen, auf einander folgen sollen. Um diese Behauptung zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, dass die Reihe:

$$\sum c_n \frac{1}{n^s},$$

deren Glieder in der angegebenen Weise geordnet sind, für $s = \infty$ bis $s = 1$ einschliesslich convergent bleibt und eine stetige Function von s darstellt. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass diese doppelte Eigenschaft nicht nur zwischen den soeben angegebenen Grenzen, sondern vielmehr so lange s grösser als Null ist, bestehen bleibt. In der That, man stelle, wenn h irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, die Summe der hk ersten Glieder der vorstehenden Reihe durch ein bestimmtes Integral dar. Mit Hülfe der Formel:

$$\int_0^1 x^{n-1} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (8) findet man für diese Summe:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\Sigma c_n x^{n-1}}{1-x^k} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$-\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\Sigma c_n x^{n-1}}{1-x^k} x^{hk} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx\,,$$

wobei die Summenzeichen über alle ganzen Zahlen von $n = 1$ bis $n = k$ zu erstrecken sind. Da in Folge der Gleichung (9) das Polynom $\Sigma c_n x^{n-1}$ durch $1 - x$ theilbar ist, so bleibt der algebraische Bruch unter dem Integrationszeichen endlich. Ist K der grösste numerische Werth dieses Bruches zwischen $x = 0$ und [**332**] $x = 1$, so ist das zweite Integral kleiner als:

$$\frac{K}{\Gamma(s)}\int_0^1 x^{hk} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{K}{(hk+1)^s}$$

und verschwindet für $h = \infty$. Folglich ist die in das Unendliche fortgesetzte Reihe convergent, und man erkennt mit der gleichen Leichtigkeit, dass die durch das erste Integral dargestellte Summe eine Function von s ist, welche sich, so lange $s > 0$ bleibt, stetig mit dieser Variabeln ändert.

§ 2.

Ist p eine positive oder negative ungerade Primzahl und k eine nicht durch p theilbare ganze Zahl, welche ebenfalls positiv oder negativ sein kann, so bezeichnen wir nach *Legendre*'s Vorgange mit $\left(\frac{k}{p}\right)$ die positive oder negative Einheit, je nachdem k quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist. Der berühmte Autor definirt das Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ als den Rest, welchen die Potenz $k^{\frac{p-1}{2}}$ durch p getheilt lässt; für unsern Zweck ist die erstere Definition, obgleich im Grunde genommen mit der letzteren identisch, deshalb vorzuziehen, weil sie p nicht als positive Zahl voraussetzt. Wenn mit l eine zweite, nicht durch p theilbare ganze Zahl und mit q eine ungerade Primzahl, deren numerischer Werth von dem der Zahl p verschieden ist, bezeichnet wird, so bestehen mit Benutzung des obigen Symbols die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right) = \left(\frac{k\,l}{p}\right), \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \\ \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen, welche die ganze Theorie der quadratischen Reste in sich schliessen, setzt die zweite noch voraus, dass p positiv ist, und die vierte, dass p und q nicht gleichzeitig negativ sind.

Haben die positiven oder negativen ganzen Zahlen k und P keinen gemeinschaftlichen Theiler, und ist die zweite Zahl P, welche wir als ungerade Zahl voraussetzen, in ihre, gleichen oder ungleichen, Primzahlfactoren $p, p', p'', \ldots$ zerlegt, d. h. ist $P = p\,p'\,p''\ldots$, so haben wir oft zu unterscheiden, ob diejenigen der Primzahlen $p, p', p'', \ldots$, von welchen k quadratischer Nichtrest ist, in gerader oder ungerader Anzahl vorkommen oder, was dasselbe ist, ob das Product:

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\cdots$$

den Wert $+1$ oder -1 hat. Herr *Jacobi* hat den Vorschlag gemacht, [333] die *Legendre*'sche Bezeichnung auf derartige Producte auszudehnen und zu schreiben:

$$\left(\frac{k}{P}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\cdots$$

Da diese Verallgemeinerung der *Legendre*'schen Bezeichnung, von welcher der soeben genannte ausgezeichnete Mathematiker scharfsinnige Anwendungen*) gemacht hat, sehr geeignet ist, die Formeln zu vereinfachen und die Beweise abzukürzen, so bedienen wir uns derselben in der Folge. Gemäss dieser Bezeichnung bestehen die Gleichungen:

---

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, October 1837. [*Jacobi*'s Werke, Bd. 6, S. 254. H.]

$$(2)\begin{cases}\left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{l}{P}\right)=\left(\frac{kl}{P}\right), \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{k}{Q}\right)=\left(\frac{k}{PQ}\right), \left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}};\\ \left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}, \left(\frac{Q}{P}\right)=\left(\frac{P}{Q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}},\end{cases}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die ganzen Zahlen k und l keinen gemeinschaftlichen Theiler mit den ungeraden Zahlen P und Q haben, dass ferner in der dritten dieser Gleichungen P positiv ist, und dass schliesslich in der letzten dieser Gleichungen P und Q relative Primzahlen sind und nicht gleichzeitig das negative Vorzeichen haben. Alle diese Formeln sind entweder evident oder lassen sich leicht aus den Formeln (1) ableiten, und es wäre um so unnützer, hier bei ihrem Beweise zu verweilen, als sich die durch dieselben ausgedrückten Sätze, von der Bezeichnung abgesehen, bereits in dem *Gauss*schen Werke art. 133 aufgestellt finden. Um unnütze Unterscheidungen zu vermeiden, empfiehlt es sich, den Fall, in welchem P in dem Symbole $\left(\frac{k}{P}\right)$ den Werth ± 1 hat, nicht auszuschliessen, sondern $\left(\frac{k}{\pm 1}\right) = 1$ anzunehmen. Offenbar ist diese neue Uebereinkunft mit den vorhergehenden Gleichungen verträglich; durch diese Annahme ist die dritte dieser Gleichungen in der fünften mit enthalten und entspricht dem Falle $Q = -1$.

Wir beschliessen diesen Paragraphen mit der Aufstellung der folgenden evidenten Gleichungen, in welchen k und l ungerade Zahlen bezeichnen und δ den Wert ± 1 hat:

$$(3)\qquad \delta^{\frac{k-1}{2}}\,\delta^{\frac{l-1}{2}}=\delta^{\frac{kl-1}{2}},\quad \delta^{\frac{k^2-1}{8}}\,\delta^{\frac{l^2-1}{8}}=\delta^{\frac{(kl)^2-1}{8}}.$$

§ 3.

Wir haben nun noch an einige bekannte Resultate zu erinnern, welche sich auf die Theorie der quadratischen Formen beziehen. Bezeichnet D eine positive oder negative ganze Zahl (der Fall $D = 0$ ist ausgeschlossen), so nennen wir mit Herrn *Gauss* eine Form der Determinante D jeden Ausdruck:

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2,$$

in welchem a, b, c gegebene ganze Zahlen, die durch die Bedingung $b^2 - ac = D$ miteinander verbunden sind, 334
und x, y unbestimmte ganze Zahlen bezeichnen. Wenn die Determinante D eine negative ganze Zahl ist, so müssen die äusseren Coefficienten gleiche Vorzeichen haben. In diesem Falle betrachten wir nur die Formen, für welche dieses Zeichen $+$ ist, d. h. die Formen, welche nur positive Zahlen darstellen. Herr *Gauss* theilt die Formen, welche zu derselben Determinante gehören, dadurch in verschiedene Ordnungen ein, dass er alle diejenigen Formen, für welche der grösste gemeinschaftliche Theiler von a, b, c denselben Werth hat, in einer Ordnung vereinigt.[4]) Wir setzen immer voraus, dass ein solcher Theiler nicht existirt, oder vielmehr, dass er gleich der Einheit ist, da die anderen Fälle unmittelbar auf diesen zurückgeführt werden können. Die Formen, um die es sich also noch handelt und deren Gesammtheit die sogenannte primitive Ordnung bildet, können zwei Fälle darbieten. Entweder sind nämlich a und c gleichzeitig gerade Zahlen oder sie sind es nicht. Nach der Bezeichnungsweise von Herrn *Gauss* bilden die Formen in dem letzteren Falle die eigentlich primitive Ordnung, im ersteren Falle die uneigentlich primitive Ordnung. Wenn wir fernerhin von quadratischen Formen ohne nähere Bezeichnung sprechen, so verstehen wir darunter immer Formen, welche zur eigentlich primitiven Ordnung gehören. Bekanntlich existirt die uneigentlich primitive Ordnung nur, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist.

Zwei Formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

von denen die erste durch die Substitution:

$$x = \alpha x' + \beta y', \; y = \gamma x' + \delta y',$$

wobei

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

ist, in die zweite übergeht, heissen äquivalent, und zwar wird diese Aequivalenz eigentlich oder uneigentlich genannt, je nachdem in der letzten Gleichung das obere oder untere Zeichen gültig ist. Diese Unterscheidung, welche Herr *Gauss* in die Theorie der quadratischen Formen eingeführt hat und welche Analogie mit dem in der Geometrie gemachten Unterschiede zwischen der Gleichheit durch Superposition und der Gleichheit durch Symmetrie* besitzt, ist deshalb von grosser Wichtigkeit, weil sie der Theorie der Formen zweiten Grades eine Einfachheit verleiht, welche dieselbe sonst bei weitem nicht haben würde. Die uneigentliche Aequivalenz brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen; wenn wir also kurz sagen, dass zwei Formen äquivalent sind, so verstehen wir darunter immer, dass es sich um eigentliche Aequivalenz handelt.

[335] Die (positiven und eigentlich primitiven) Formen, deren Determinante eine gegebene Zahl D ist, und deren es immer unendlich viele giebt, können in eine endliche Anzahl von Classen vertheilt werden, indem man zwei Formen in dieselbe Classe oder in verschiedene Classen einordnet, je nachdem diese Formen äquivalent sind oder nicht. Wenn man aus jeder Classe irgend eine der sie bildenden Formen herausgreift, so erhält man ein System von Formen, welches wir das vollständige System der verschiedenen Formen oder einfacher die verschiedenen Formen der Determinante D nennen. Ist dieses System aufgestellt, so hat offenbar jede Form der Determinante D immer eine ihr äquivalente Form und nur eine solche in diesem System. Wenn man sich für die Ordnung der uneigentlich primitiven Formen ein gleiches System bildet, so ist ebenso leicht zu sehen, dass dieses neue System die gleiche Eigenschaft in Bezug auf jede Form der genannten Ordnung besitzt.

Die verschiedenen Formen, welche zu irgend einer Determinante D gehören, sind von Herrn *Gauss* in Geschlechter eingetheilt, welche den *Legendre*'schen Gruppen von quadratischen Theilern (groupes de diviseurs quadratiques) ähnlich sind. Der Unterschied, welcher in dieser Hinsicht zwischen den beiden berühmten Mathematikern besteht, kommt nur davon her, dass *Legendre* die Determinanten, welche durch Quadratzahlen theilbar sind, ausschliesst, was Herr *Gauss* nicht thut und was wir ebenfalls nicht thun, da die Betrach-

*) Man möge über diese bemerkenswerthe Analogie einen Aufsatz, welchen Herr *Gauss* in den Göttinger gelehrten Anzeigen†) veröffentlicht hat, vergleichen. Nachdem dort der berühmte Autor eine Arbeit von Herrn *Seeber* über quadratische Formen mit drei Unbestimmten besprochen hat, geht er auf sehr interessante Einzelheiten der Frage ein, in welcher Weise man geometrisch die Eigenschaften der Formen zweiten Grades mit zwei oder drei ganzzahligen Unbestimmten interpretiren kann.

†) [Werke, Bd. 2, S. 188. H.]

tung von Determinanten dieser Art bei verschiedenen Untersuchungen unerlässlich ist. Wir lassen hier noch die sehr leicht aufzustellenden Grundsätze folgen, auf denen die Eintheilung der Formen in Geschlechter beruht. (*Disq. arithm.* art. 229 und folgende. [5])

I. Wenn l eine ungerade Primzahl ist, welche D theilt, so sind die nicht durch l theilbaren ganzen Zahlen m, welche durch dieselbe Form der Determinante D dargestellt werden können, entweder alle von der Art, dass $\left(\frac{m}{l}\right) = 1$ ist, oder alle von der Art, dass $\left(\frac{m}{l}\right) = -1$ ist.

II. Ist $D \equiv 3 \pmod{4}$, so sind die ungeraden Zahlen m, welche durch dieselbe Form dargestellt werden können, entweder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$ ist, oder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$ ist.

III. Ist $D \equiv 2 \pmod{8}$, so sind die ungeraden Zahlen m, welche durch dieselbe Form dargestellt werden können, entweder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = 1$ ist, oder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = -1$ ist.

[336] IV. Ist $D \equiv 6 \pmod{8}$, so sind die ungeraden Zahlen m, welche durch dieselbe Form dargestellt werden können, entweder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = 1$ ist, oder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1$ ist.

V. Ist $D \equiv 4 \pmod{8}$, so sind die ungeraden Zahlen m, welche durch dieselbe Form dargestellt werden können, entweder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$ ist, oder alle von der Art, dass $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$ ist.

VI. Ist $D \equiv 0 \pmod{8}$, so sind die ungeraden Zahlen m, welche durch dieselbe Form dargestellt werden können, alle ausschliesslich in einer einzigen der vier Formen $8\mu + 1$, 3, 5, 7 enthalten oder, was auf dasselbe hinauskommt, so ist zugleich $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \pm 1$, $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = \pm 1$, wo für dieselbe Form in jeder dieser Gleichungen ein bestimmtes der doppelten Zeichen unveränderlich gültig bleibt.

Jede derartige Eigenschaft, wie die in den vorstehenden Sätzen ausgesprochenen, nennen wir mit Herrn *Gauss* einen Einzelcharakter der Form, welcher diese Eigenschaft zukommt. Die Einzelcharaktere der Form $5x^2 + 4xy + 14y^2$ z. B., deren Determinante $-66 = -2 \cdot 3 \cdot 11$ ist, sind in den folgenden Gleichungen enthalten:

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{m}{11}\right) = 1, \quad (-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{8}} = -1.$$

Die Gesammtheit der Einzelcharaktere einer Form bildet ihren Gesammtcharakter. Die Eintheilung der Formen in Geschlechter besteht nun darin, dass die Formen, welche denselben Gesammtcharakter besitzen, demselben Geschlechte und diejenigen, deren Gesammtcharaktere verschieden sind, verschiedenen Geschlechtern zugetheilt werden. Die Anzahl der verschiedenen Geschlechter oder, was dasselbe ist, die Anzahl der verschiedenen Gesammtcharaktere ist im Allgemeinen kleiner als die Zahl der Combinationen, welche man aus den verschiedenen Einzelcharakteren bilden kann, da, einen singulären Fall ausgenommen, immer eine Beziehung zwischen den Einzelcharakteren, die derselben quadratischen Form zugehören, besteht; diese Beziehung leitet sich aus den Sätzen (2) des vorhergehenden Paragraphen ab. Um zu sehen, worin diese Beziehung besteht, sei mit S^2 die grösste Quadratzahl, welche in D als Factor enthalten ist, und mit P oder $2P$ der Quotient $\frac{D}{S^2}$, je nachdem derselbe ungerade oder gerade ist, bezeichnet. Diesen beiden Fällen entsprechend ist also:

$$D = PS^2, \quad \text{oder} \quad D = 2PS^2,$$

[337] wobei die Primzahlfactoren $p, p', p'', \ldots$, in welche P zerlegbar ist:

$$P = pp'p'' \ldots,$$

sämmtlich von einander verschieden sind. Wenn man nun irgend eine Form betrachtet, welche zu der eigentlich primitiven Ordnung der Determinante D gehört, so kann man den Unbestimmten x und y stets solche relativ primen Zahlwerthe beilegen, dass der ihnen entsprechende Werth m der Form positiv, ungerade und relativ prim zu D ist. Dann ist

D quadratischer Rest der Zahl m und folglich auch aller Primzahlfactoren von m. (*Disq. arithm.*, art. 151.) Es ist also $\left(\frac{D}{m}\right) = 1$ und folglich, den beiden soeben unterschiedenen Fällen entsprechend:

$$\left(\frac{P}{m}\right) = 1\,, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{2P}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{P}{m}\right) = 1\,.$$

Andererseits folgt, wenn m positiv ist, aus den Gleichungen (2) § 2:

$$\left(\frac{P}{m}\right) = \left(\frac{m}{P}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}\,.$$

Beachtet man noch, dass die Potenz $(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}$ gleich 1 oder gleich $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ ist, je nachdem $P \equiv 1$ oder $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist, und schreibt man $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots$ an Stelle von $\left(\frac{m}{P}\right)$ und $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$ an Stelle von $\left(\frac{2}{m}\right)$, so erhält man folgende Resultate:

$$D = PS^2 \begin{cases} P \equiv 1 \pmod{4}, & \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\cdots = 1, \\ P \equiv 3 \pmod{4}, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\cdots = 1, \end{cases}$$

$$D = 2PS^2 \begin{cases} P \equiv 1 \pmod{4}, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\cdots = 1, \\ P \equiv 3 \pmod{4}, & (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\cdots = 1. \end{cases}$$

Für die Einzelcharaktere, welche in diesen Relationen nicht vorkommen, besteht keine Bedingungsgleichung oder — um sich genauer auszudrücken und nicht mehr zu sagen, als bewiesen worden ist — ergiebt sich aus den soeben benutzten Sätzen (2) § 2 keine Bedingung. Mittelst dieser Resultate und der oben ausgesprochenen Sätze lässt sich leicht die folgende Tabelle aufstellen, welche dazu dienen kann, in jedem Falle die verschiedenen Geschlechter, [338] in welche die Formen der Determinante D sich vertheilen, vollständig aufzuzählen. In dieser Tabelle bezeichnen $r, r', r'', \ldots$ die von einander verschiedenen ungeraden Primzahlen, welche in D, aber nicht in P aufgehen.

Erster Fall. $D = PS^2$, $P \equiv 1 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$	$\left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 2 \pmod{4}$	$\left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 0 \pmod{4}$	$\left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$

Zweiter Fall. $D = PS^2$, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 2 \pmod{4}$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 0 \pmod{4}$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$

Dritter Fall. $D = 2PS^2$, $P \equiv 1 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 0 \pmod{2}$	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$

Vierter Fall. $D = 2PS^2$, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$
$S \equiv 0 \pmod{2}$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots$	$\left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots$

Um die verschiedenen Gesammtcharaktere oder, was dasselbe ist, die verschiedenen Geschlechter, welche für eine gegebene Determinante vorhanden sein können, aufzuzählen, muss man nacheinander alle Ausdrücke hinschreiben, welche die der gegebenen Determinante entsprechende Zeile in der obigen Tabelle bilden, nachdem jeder dieser Ausdrücke gleich ± 1 gesetzt ist; darauf sind die doppelten Zeichen auf alle möglichen Arten unter der Bedingung zu variiren, dass die rechten Seiten derjenigen Gleichungen, [339] welche dem ersten Theile der Zeile entsprechen, als Product 1 liefern müssen, da diese Bedingung mit der oben aufgestellten nothwendigen Bedingung coincidirt. Es sei z. B. $D = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Da diese Determinante in die erste Unterabtheilung des vierten Falles gehört, so erhält man die folgenden vier Gesammtcharaktere:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = 1, \quad \left(\frac{m}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{m}{5}\right) = 1;$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = 1, \quad \left(\frac{m}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{m}{5}\right) = -1;$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1, \quad \left(\frac{m}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{m}{5}\right) = 1;$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1, \quad \left(\frac{m}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{m}{5}\right) = -1.$$

In der Gauss'schen Bezeichnung würden diese Geschlechter folgendermaassen charakterisirt sein:

1 und 3, 8; $R3$; $R5$;

1 und 3, 8; $R3$; $N5$;

5 und 7, 8; $N3$; $R5$;

5 und 7, 8; $N3$; $N5$;

Es ist sehr wichtig zu bemerken, dass die vorstehenden Betrachtungen keineswegs beweisen, dass die mit der angegebenen Bedingung verträglichen Geschlechter auch wirklich existiren; man kann daraus nur schliessen, dass es nicht noch andere Geschlechter geben kann. Die Frage, 1) ob es für jede Determinante wirkliche Formen aller aufgezählten Geschlechter giebt, und 2) in welcher Weise sich die verschiedenen Formen in die wirklich vorhandenen Geschlechter vertheilen, ist eine sehr schwierige, welche einen der hauptsächlichsten Gegenstände in dem zweiten Theile des fünften Abschnittes des *Gauss*'schen Werkes bildet; wir werden weiter unten die Lösung dieser Frage ebenfalls mittelst unserer Principien geben.

Ehe wir weitergehen, machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Anzahl der auf die angegebene Art aufgezählten Geschlechter gleich $2^{\lambda-1}$ ist, wenn mit λ die Anzahl der Ausdrücke, welche in einer Zeile der vorstehend gegebenen Tabelle enthalten sind, bezeichnet wird. Die einzige Ausnahme, welche von dieser allgemeinen Regel stattfindet, tritt ein, wenn der erste Theil der Zeile — dieser ist ja einer Bedingung unterworfen, welche die Reduction der Anzahl aller Combinationen auf die Hälfte bewirkt — überhaupt nicht vorhanden ist. Wirft man einen Blick auf die Tabelle, so sieht man sofort, dass dies nur dann möglich sein kann, wenn die Determinante dem ersten Falle angehört und gleichzeitig P keinen Primzahlfactor $p, p', \ldots$ enthält. Da dann einerseits $P \equiv 1 \pmod{4}$ und andrerseits $P = \pm 1$, folglich $P = 1$ ist, so erkennt man, dass dieser Fall nur eintreten kann, wenn die Determinante eine positive Quadratzahl ist; in diesem Falle ist die Anzahl der Geschlechter gleich 2^{λ}.

[**340**] Alles bisher Erörterte bezieht sich auf eigentlich primitive Formen. Es erübrigt uns noch den Fall der zur uneigentlich primitiven Ordnung gehörenden Formen zu betrachten, durch welche offenbar nur gerade Zahlen darstellbar sind. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$ und folglich $P \equiv 1 \pmod{4}$, $S \equiv 1 \pmod{2}$ ist. Bezeichnet man mit m eine positive, ungerade und zu D relativ prime Zahl, deren Doppeltes durch eine solche Form dargestellt werden kann, so erhält man ohne Mühe die folgende Tabelle, welche in der gleichen Weise wie die früher gegebene zu benutzen ist:

$$D = P S^2, \quad P \equiv 1 \pmod{4}, \quad S \equiv 1 \pmod{2},$$

$$\left(\frac{m}{p}\right), \left(\frac{m}{p'}\right), \cdots \;\Big|\; \left(\frac{m}{r}\right), \left(\frac{m}{r'}\right), \cdots.$$

§ 4.

Wir haben nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen und auf wieviele verschiedene Arten eine Zahl m, welche wir positiv, ungerade und relativ prim zu D annehmen, oder das Doppelte dieser Zahl durch die Formen der Determinante D dargestellt werden kann, wobei wir annehmen, dass die positiven oder negativen Werthe, welche hierzu den unbestimmten Zahlen x und y beigelegt werden, relativ prim zu einander sind. Wenn eine solche Darstellung möglich sein soll, so muss D quadratischer Rest zu m oder $2m$ sein (*Disq. arithm.*, art. 154), welche beiden Bedingungen nicht von einander verschieden sind. Damit aber D quadratischer Rest zu m sei, ist nothwendig und hinreichend, dass für jeden Primzahltheiler f von m (art. 105):

$$(1)\qquad \left(\frac{D}{f}\right) = 1$$

ist. Setzt man f als positive Primzahl voraus und unterscheidet man, wie in dem vorigen Paragraphen, die folgenden vier Fälle, welche die Determinante darbieten kann:

$$D = PS^2,\quad P \equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod 4;$$
$$D = 2PS^2,\quad P \equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod 4,$$

so kann die Bedingung (1) auf Grund der Sätze (2) § 2, diesen vier Fällen entsprechend, durch eine der folgenden Bedingungen ersetzt werden:

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\frac{f}{P}\right) = 1, & (-1)^{\frac{f-1}{2}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1, \\ (-1)^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1, & (-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1. \end{cases}$$

Es sei nun:

$$(3)\qquad ax^2 + 2bxy + cy^2,\quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2, \cdots$$

das vollständige System der verschiedenen (eigentlich primitiven) Formen, deren Determinante die negative Zahl D ist; wir wollen untersuchen, wie oft die Zahl m, deren Primzahltheiler f der Bedingung (1) genügen, **[341]** auf die angegebene

Weise durch die Gesammtheit dieser Formen darstellbar ist. Bezeichnen wir mit μ die Anzahl der von einander verschiedenen Primzahlfactoren von m, so hat die Congruenz:

$$z^2 \equiv D \text{ (mod. } m)$$

ebenso viele verschiedene Wurzeln, als die Potenz 2^μ Einheiten enthält (art. 105). Diese Wurzeln seien:

$$l, l', l'', \cdots;$$

wir suchen nach den Vorschriften des Artikels 180 die Darstellungen auf, welche zu jeder dieser Wurzeln gehören. Um diejenigen Darstellungen, welche $z = l$ entsprechen, zu erhalten, muss man nachsehen, ob es unter den Formen (3) eine der Form:

$$m x^2 + 2 l x y + \frac{l^2 - D}{m} y^2$$

äquivalente giebt. Nun ist aber diese letztere Form eine eigentlich primitive, da m ungerade und relativ prim zu D ist, und mithin findet sich immer in dem Systeme (3) eine zu ihr äquivalente, durch welche m auf zwei Arten dargestellt werden kann. Da sich derselbe Schluss auf alle anderen Wurzeln $l', l'', \cdots$ anwenden lässt, so sieht man, dass die Zahl m auf $2^{\mu+1}$ verschiedene Weisen durch die Gesammtheit der Formen (3) darstellbar ist; hierbei sind zwei Darstellungen als von einander verschieden gezählt, wenn sie durch verschiedene Formen geschehen oder wenn, indem sie durch dieselbe Form stattfinden und mit x, y und x', y' die gleichzeitigen Werthe der Unbestimmten bezeichnet werden, nicht gleichzeitig $x = x'$ und $y = y'$ ist.

Man gelangt zu dem gleichen Ergebniss, wenn das vollständige System (3) das der uneigentlich primitiven Ordnung und zugleich die Zahl, welche durch diese Formen dargestellt werden soll, $2m$ ist. Es genügt zu bemerken, dass die Anzahl von Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv D$ (mod. $2m$) gleich 2^μ ist, und dass die Form:

$$2 m x^2 + 2 l x y + \frac{l^2 - D}{2m} y^2,$$

wo l eine beliebige dieser Wurzeln bezeichnet, eine uneigentlich primitive ist. Dies folgt daraus, dass die Zahl m ungerade und relativ prim zu D und der Coefficient von y^2 gerade ist, da P^2 und D von der Form $4\nu+1$ sind. Wir erhalten also folgenden Lehrsatz, welcher in seinem Wortlaute beide Fälle vereinigt:

Lehrsatz I.

»Es seien:

$$ax^2+2bxy+cy^2, \quad a'x^2+2b'xy+c'y^2 \ldots.$$

die verschiedenen eigentlich (uneigentlich) primitiven Formen, deren Determinante gleich der negativen ganzen Zahl D ist; [342] es sei ferner m eine positive, ungerade und zu D relativ prime Zahl, deren sämmtliche Primzahltheiler f derjenigen der Bedingungen (2) genügen, welche sich auf die gegebene Zahl D bezieht, und es werde mit μ die Anzahl der ungleichen Primzahlfactoren von m bezeichnet. Wenn dann noch die Unbestimmten x und y der Bedingung, keinen gemeinschaftlichen Theiler zu besitzen, unterworfen werden, so wird die ganze Zahl m ($2m$) immer durch die Gesammtheit dieser Formen auf ebenso viele verschiedene Arten, als die Potenz $2^{\mu+1}$ Einheiten hat, dargestellt.«

Anmerkung. Dieser Satz erleidet zwei Ausnahmen, deren erste für $D=-1$ und deren zweite für die Formen der uneigentlich primitiven Ordnung, welche zur Determinante $D=-3$ gehören, eintritt. Aus dem schon genannten Artikel des *Gauss*'schen Werkes ergiebt sich, dass die Anzahl der Darstellungen in diesen beiden Fällen bez. $2^{\mu+2}$ oder $3\cdot 2^{\mu+1}$ ist.

Um den analogen Lehrsatz für den Fall, in welchem (D) eine positive Zahl [aber keine Quadratzahl]*) ist, aufzustellen, hat man an den vorhergehenden Betrachtungen nichts zu ändern; nur muss man sich, statt auf den Artikel 180 der *Disq. arithm.*, jetzt auf den Artikel 205 dieses Werkes stützen. Um den Fall der eigentlich primitiven und den der uneigentlich primitiven Formen in einen Satz zusammenfassen zu können, benutzen wir den Buchstaben ω, unter welchem, den beiden Fällen entsprechend, die Zahl 1 oder 2 zu verstehen ist.

*) Die Formen, deren Determinante eine positive Quadratzahl ist, zerfallen immer in zwei lineare Factoren und sind daher nicht wirkliche quadratische Formen. Deshalb schliessen wir dieselben in der Folge stets aus.

Lehrsatz II.

»Es seien

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,\ a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,\ \ldots .$$

die verschiedenen eigentlich (uneigentlich) primitiven Formen, deren Determinante die positive ganze Zahl D ist; es sei m eine positive ungerade und zu D relativ prime Zahl, deren sämmtliche Primzahlfactoren derjenigen der Bedingungen (2) genügen, welche sich auf die gegebene Zahl D bezieht, und es werde mit μ die Anzahl der ungleichen Primzahlfactoren von m bezeichnet. Wenn dann noch die Unbestimmten x und y der Bedingung, keinen gemeinschaftlichen Theiler zu besitzen, unterworfen werden, so können die Darstellungen von ωm durch die Gesammtheit dieser Formen stets in 2^μ verschiedene Gruppen in der Weise eingetheilt werden, dass in dieselbe Gruppe zwei Darstellungen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \omega m, \quad ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = \omega m$$

[**343**] aufgenommen werden, welche durch dieselbe quadratische Form geschehen und in welchen die Werthe x, y und x', y' der Unbestimmten durch die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{\omega}\,[x't - (bx' + cy')u], \quad y = \frac{1}{\omega}\,[y't + (ax' + by')u]$$

mit einander verbunden sind; hierbei sind t und u beliebige positive oder negative ganze Zahlen, welche die Gleichung

$$(4) \qquad t^2 - Du^2 = \omega^2$$

befriedigen.«

[Wie man bemerkt, bleibt dieser Satz richtig, wenn in demselben die Bedingung, dass D positiv sein soll, unterdrückt wird, und enthält dann auch den Lehrsatz I nebst seinen beiden Ausnahmen in sich. Wenn D als negative Zahl angenommen wird, so hat in der That die Gleichung (4) im Allgemeinen nur die beiden Lösungen $t = \pm\,\omega$, $u = 0$; dies giebt zwei Darstellungen für jede Gruppe, und es wird die Gesammtzahl aller Darstellungen, welche in diesem Falle endlich ist, gleich $2^{\mu+1}$, wie in dem Lehrsatze I angegeben ist. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn entweder $D = -1$, $\omega = 1$ oder $D = -3$, $\omega = 2$ ist, in welchen Fällen die Anzahl von Lösungen der Gleichung (4) bez. 4 oder 6 ist; diese Fälle stimmen aber mit den oben angegebenen Ausnahmen überein. Trotzdem wir diese Gemeinsamkeit der Fälle eines positiven und eines negativen Werthes von D bemerkten, glaubten wir doch, da in anderer Hinsicht diese beiden Fälle sehr verschieden von einander sind und getrennt behandelt werden müssen, zwei getrennte Sätze aufstellen zu sollen, um die vorstehenden Resultate, welche wir oft zu benutzen haben, leichter anwenden zu können.]

Es ist leicht zu sehen, dass sämmtliche Darstellungen oder, was dasselbe ist, sämmtliche Lösungen der Gleichung:

$$(5)\qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \omega m,$$

welche zu derselben Gruppe gehören, immer auf irgend eine von ihnen, $x = \alpha$, $y = \gamma$, mittelst der Formeln:

$$(6)\qquad x = \frac{1}{\omega}[\alpha t - (b\alpha + c\gamma)u], \quad y = \frac{1}{\omega}[\gamma t + (a\alpha + b\gamma)u]$$

zurückgeführt werden können; hierbei sind den Grössen t und u wieder alle ganzzahligen Werthepaare, welche der Gleichung (4) genügen, beizulegen.

Wir wollen nun zeigen, dass bestimmte, sehr einfache Grenzen existiren, zwischen denen immer eine dieser unendlich vielen Lösungen und nicht mehr als eine enthalten ist. Um für unsern Zweck unnütze Unterscheidungen zu vermeiden, setzen wir in jeder der gegebenen Formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2, \ \ldots\ldots$$

[**344**] die Coefficienten von x^2 und xy positiv und den von y^2 negativ voraus. Man überzeugt sich leicht von der Zulässigkeit dieser Annahme; es mag die Bemerkung genügen, dass unter den Formen, welche eine Classe bilden und aus welchen wir, um das sogenannte vollständige System der verschiedenen Formen aufzustellen, eine ganz beliebige Form willkürlich auswählen können, es immer wenigstens eine giebt, welche den angegebenen Bedingungen genügt. In der That enthält die Periode der reducirten Formen, welche zu einer gegebenen Classe mit positiver Determinante gehören, immer wenigstens zwei Formen (*Disq. arithm.*, art. 187), und es ist klar, dass sich unter irgend zwei benachbarten Formen dieser Periode eine solche befindet, dass

$$(7)\qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0$$

ist.[6]) Man erkennt weiter, dass, wenn diese Bedingungen stattfinden, es unter den Lösungen der Gleichung (5) keine geben kann, für welche $x = 0$ ist; denn aus dieser Annahme würde

$cy^2 = \omega m$ folgen, was unmöglich ist, weil c und m entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der besondere Werth α ist mithin auch von Null verschieden, und wir bemerken, dass dieser Werth stets als positiv vorausgesetzt werden kann. Dies folgt daraus, dass die Lösung $x = \alpha$, $y = \gamma$, welche als Ausgangspunkt dient, um alle zu ein und derselben Gruppe gehörenden Lösungen zu erhalten, immer willkürlich in dieser Gruppe ausgewählt werden kann, und dass in der Gruppe, welche die Lösung $x = \alpha$, $y = \gamma$ enthält, offenbar auch die Lösung $x = -\alpha$, $y = -\gamma$ enthalten ist, da diese letztere in Bezug auf die erstere dem Werthepaare $t = -\omega$, $u = 0$ entspricht.

Die unendlich vielen Lösungen, welche eine derartige Gruppe bilden und welche sich aus den Gleichungen (6) ergeben, können in zwei Untergruppen eingetheilt werden; die erste umfasst alle Lösungen, für welche $x > 0$ ist, während die zweite alle der Bedingung $x < 0$ genügenden Lösungen enthält.

Wir zeigen jetzt ferner, dass in der ersten dieser Untergruppen für y alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ gesetzt werden können, ohne dass diese Unbestimmte denselben Werth in zwei verschiedenen Lösungen annehmen kann, und dass diejenige dieser Lösungen, für welche y den kleinsten, von Null verschiedenen, positiven Werth hat, sehr einfachen Ungleichheitsbedingungen genügt, mit deren Hülfe es leicht ist, alle anderen Lösungen abzusondern und jede Gruppe auf eine einzige Darstellung zurückzuführen; durch diesen letzteren Umstand wird der Lehrsatz II dem Lehrsatze I, welcher sich auf negative Determinanten bezieht, ganz ähnlich. Um zu diesem Ziele zu gelangen, beachten wir, dass aus der Gleichung:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = \omega m,$$

nachdem sie [**345**] auf die Form:

$$(b\alpha + c\gamma)^2 - D\alpha^2 = \omega c m$$

gebracht ist, und daraus, dass $\omega c m$ negativ ist, vom Vorzeichen abgesehen folgt:

$$\alpha\sqrt{D} > b\alpha + c\gamma;$$

da auf Grund der Gleichung (4):

$$\frac{t}{\omega} > \frac{u}{\omega}\sqrt{D}$$

ist, so folgt, immer vom Vorzeichen abgesehen, weiter, dass

$$\alpha t > (b\alpha + c\gamma)u$$

ist. In Verbindung mit der gemachten Annahme, dass $\alpha > 0$ ist, folgt hieraus, dass man nur diejenigen Lösungen der Gleichung (4), bei denen t das positive Zeichen hat, benutzen muss, wenn man alle durch die Gleichungen (6) gegebenen Darstellungen, für welche x einen positiven Werth hat, erhalten will. Aus einem bekannten Lehrsatze folgt nun aber, dass alle Lösungen, welche dieser Bedingung genügen, durch die Formeln gegeben sind:

$$t_n = \frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n + \left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

$$u_n = \frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n - \left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

in denen T und U die kleinsten positiven (von ω und 0 verschiedenen) Zahlen, welche der Gleichung (4) Genüge leisten, bezeichnen und n allmählich alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beizulegen sind. Für die Untergruppe, in welcher x positive Werthe hat, erhält man mithin:

$$x_n = \frac{1}{\omega}[\alpha t_n - (\alpha b + \gamma c)u_n], \quad y_n = \frac{1}{\omega}[\gamma t_n + (\alpha a + \gamma b)u_n],$$

wo die verschiedenen Lösungen dieser Gruppe durch den bereits in den vorigen Gleichungen benutzten Index n von einander unterschieden sind. Setzt man noch die Ausdrücke für t_n und u_n ein, so wird die zweite dieser Gleichungen:

$$y_n = \left(\frac{\gamma\sqrt{D} + \alpha a + \gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n$$
$$+ \left(\frac{\gamma\sqrt{D} - \alpha a - \gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n.$$

Von den Grössen:

$$\gamma\sqrt{D} + \alpha a + \gamma b, \quad \gamma\sqrt{D} - \alpha a - \gamma b$$

ist, wie man leicht sieht, die erste positiv, die zweite negativ. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur nachzuweisen, dass $\alpha a + \gamma b$ numerisch grösser als $\gamma\sqrt{D}$ und zugleich positiv ist. Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergiebt sich, wenn man die Gleichung:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = \omega m$$

auf die Form:

$$(\alpha a + \gamma b)^2 - D\gamma^2 = \omega a m$$

bringt und beachtet, dass die rechte Seite positiv ist. Um die zweite Behauptung zu beweisen, ist zu beachten, dass der numerische Werth von $\alpha a + \gamma b$, [346] da er den von $\gamma \sqrt{D}$ übertrifft, um so mehr grösser als der von γb sein muss, da $b < \sqrt{D}$ ist; daraus folgt aber, da αa positiv ist, dass $\alpha a + \gamma b$ ebenfalls positiv ist.

Da auf Grund des Vorstehenden von den beiden Coefficienten, welche in dem Ausdruck für y_n auftreten, der erste positiv, der zweite negativ ist, und da ferner von den positiven Grössen

$$\frac{T}{\omega} + \frac{U}{\omega}\sqrt{D}, \quad \frac{T}{\omega} - \frac{U}{\omega}\sqrt{D},$$

deren Product gleich 1 ist, die erste offenbar grösser, die zweite kleiner als 1 ist, so sieht man sofort, dass jedes der beiden Glieder, aus denen der Ausdruck für y_n zusammengesetzt ist, mit dem Index n wächst. Es ist also für beliebige Werthe dieses Index:

$$y_n > y_{n-1};$$

diese Ungleichheit beweist aber die obige Behauptung, dass die Unbestimmte y in der Untergruppe, in welcher x positiv ist, nicht zweimal denselben Werth erhalten kann. Da nun offenbar $y_{-\infty} = -\infty$, $y_\infty = \infty$ ist, so muss y von negativen Werthen zu positiven fortschreiten. Für die Lösung, welche wir im Auge haben, hat y_n den kleinsten positiven, von Null verschiedenen Werth, und wir müssen daher, um diese zu erhalten, die beiden Bedingungen stellen:

$$y_n > 0, \quad y_{n-1} \leqq 0.$$

Beachtet man, dass vermöge der oben für x_n, y_n, t_n, u_n gegebenen Ausdrücke die Beziehung:

$$y_{n-1} = \frac{1}{\omega}\left[y_n T - (a x_n + b y_n)\, U\right]$$

besteht, so nimmt die zweite dieser Bedingungen die Gestalt an:

$$(T - bU)\, y_n \leqq a U x_n.$$

Da $T > U\sqrt{D}$, $b < \sqrt{D}$ und folglich $T - bU > 0$ ist, so ist diese Ungleichheit mit der folgenden identisch:

$$y_n \leqq \frac{aU}{T - bU} x_n.$$

Aus dem Vorstehenden folgt also, dass unter den unendlich vielen Darstellungen, welche eine Gruppe bilden und welche sämmtlich durch die Gleichungen (6) gegeben sind, sich immer eine befindet, welche den drei Bedingungen:

$$(8) \qquad x > 0, \; y > 0, \; y \leqq \frac{aU}{T - bU} x$$

genügt.

Diese Ungleichheiten sind aus der Definition der speciellen Lösung, welche wir von den anderen Lösungen der gleichen Gruppe abtrennen wollten, hergeleitet worden. Nach dieser Definition sollte die Lösung, um welche es sich handelt, zur ersten der beiden Untergruppen gehören und [347] in dieser dem kleinsten positiven Werthe von y entsprechen. Umgekehrt lässt sich beweisen, dass jede Lösung, für welche die vorstehenden Ungleichheiten erfüllt sind, nothwendig sich unter allen den Lösungen befinden muss, die mit ihr dieselbe Gesammtgruppe bilden, und zwar ist es die Lösung, auf welche sich die obige Definition bezieht; es sind für diesen Nachweis die soeben entwickelten Schlüsse nur in umgekehrtem Sinne zu wiederholen. Mithin kann der Lehrsatz II durch den folgenden Satz ersetzt werden:

Lehrsatz III.

»Wenn man zu den Voraussetzungen des Lehrsatzes II, welche gültig bleiben sollen, noch die weiteren hinzufügt, dass die Coefficienten und die Unbestimmten der Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ den Bedingungen (7) und (8) genügen, und dass alle anderen Formen analogen Bedingungen unterworfen werden, so ist die Anzahl der verschiedenen Darstellungen der ganzen Zahl ωm, welche durch die gegebenen Formen möglich sind, immer gleich der Potenz 2^{μ}.«

Um die Anwendungen, welche wir von diesem Satze zu machen haben, zu erleichtern, empfiehlt es sich, das Resultat, auf welches sich dieser Satz stützt, in ein geometrisches Gewand einzukleiden. Zu diesem Zwecke seien OX und OY zwei rechtwinkelige Axen der x und y, in dem Sinne der positiven Coordinaten die erste horizontal, die zweite vertical von unten nach oben gerichtet. Betrachtet man in der Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \omega m$$

die Veränderlichen x und y als stetig, so stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar, deren beide Aeste durch die y-Axe von einander getrennt werden, wie aus den Bedingungen $a > o$, $b > o$, $c < o$ sich leicht folgern lässt. Wenn wir nun denjenigen der beiden Aeste, für welchen die Abscisse überall positiv ist, als ersten bezeichnen, so entspricht die erste der früher unterschiedenen Untergruppen diesem ersten Aste. Die geometrische Interpretation des obigen Resultates besagt, dass sich unter den unendlich vielen Lösungen, welche dieselbe Gesammtgruppe bilden und welche sämmtlich in den Gleichungen (6) enthalten sind, immer eine und nur eine befindet, welche durch einen Punkt auf dem einerseits von der Axe OX und andererseits von der Geraden mit der Gleichung:

$$y = \frac{aU}{T - bU}x$$

begrenzten Bogen des ersten Astes dargestellt wird; hierzu muss bemerkt werden, dass immer die Lösung, welche dem unteren Endpunkte dieses Bogens entspricht, auszuschliessen ist.

[348] § 5.

Ehe wir zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehen, haben wir noch eine letzte Vorfrage zu erledigen. Diese besteht in der Aufgabe, alle Werthepaare der Unbestimmten x und y zu bestimmen, welche, in die gegebene Form der Determinante D eingesetzt, diese gleich einer ungeraden Zahl oder gleich dem Doppelten einer solchen, je nachdem die Form eine eigentlich oder uneigentlich primitive ist, und relativ prim zu D ergeben. Wir bezeichnen den numerischen Wert von D mit D_1 und beginnen diese Untersuchung mit der Prüfung des Falles, in welchem die gegebene Form zur eigentlich primitiven Ordnung gehört. Dieser Fall theilt sich von selbst wieder in zwei Unterfälle, je nachdem D gerade oder ungerade ist. Zuerst sei D eine ungerade Zahl. Bringt man die Unbestimmten x, y auf die Form:

$$2D_1v + \alpha,\ 2D_1w + \gamma,$$

wo v, w beliebige, positive oder negative, ganze Zahlen bezeichnen und α, γ Zahlen aus der Reihe:

$$0, 1, 2, \ldots, 2D_1 - 1$$

sind, so ist offenbar:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \equiv a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \pmod{2D_1}.$$

Die vorgelegte Frage läuft also auf die andere hinaus: für welche Combinationen α, γ oder vielmehr, für wieviele dieser Combinationen — denn allein ihre Anzahl ist es, deren Bestimmung für uns von Wichtigkeit ist — wird die rechte Seite dieser Congruenz relativ prim zu $2D_1$? Ohne die Allgemeinheit der Frage zu beeinträchtigen, kann man, wie zunächst bemerkt sein mag, einen der äusseren Coefficienten, z. B. den ersten a ohne gemeinschaftlichen Theiler mit $2D_1$ voraussetzen. In der That kann die gegebene Form, wenn sie diese Bedingung nicht erfüllt, in eine andere, für welche diese Bedingung erfüllt ist, transformirt werden. Es sei $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ die neue, der ersten äquivalente Form, und es seien:

$$x = px' + qy',\ y = rx' + sy',\ ps - qr = 1$$

die Gleichungen, welche dieser Transformation entsprechen. Wenn man nun in den Congruenzen:

$$\alpha \equiv p\alpha' + q\gamma',\ \gamma \equiv r\alpha' + s\gamma' \pmod{2D_1}$$

die Zahlen α', γ', welche beide aus der Reihe:

$$0, 1, 2, \ldots, 2D_1 - 1$$

genommen sind, auf alle möglichen Arten mit einander combinirt und α, γ so bestimmt, dass sie derselben Zahlenreihe angehören, so entspricht jeder Combination α', γ' eine Combination α, γ und umgekehrt, [349] wie man sieht, wenn man die obigen Congruenzen auf die Form:

$$\alpha' \equiv s\alpha - q\gamma,\ \gamma' \equiv -r\alpha + p\gamma \pmod{2D_1}$$

bringt. Beachtet man noch, dass offenbar:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \equiv a'\alpha'^2 + 2b'\alpha'\gamma' + c'\gamma'^2 \pmod{2D_1}$$

ist, so folgt nunmehr, dass die Anzahl der Combinationen α, γ, für welche $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ relativ prim zu $2D_1$ ist, gleich der Anzahl der Combinationen α', γ' ist, für welche die rechte Seite der letzten Congruenz die gleiche

Eigenschaft besitzt. Da dieser Schluss die obige Behauptung rechtfertigt, so können wir a als relativ prim zu $2D_1$ annehmen. Damit dann aber das Trinom:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

keinen gemeinschaftlichen Teiler mit $2D_1$ hat, ist es nothwendig und hinreichend, dass das Product:

$$a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2$$

dieselbe Eigenschaft besitzt, und folglich dass $a\alpha + b\gamma$ für geradzahlige Werthe von γ relativ prim zu $2D_1$ ist oder dass $a\alpha + b\gamma$ für ungeradzahlige Werte von γ gerade und relativ prim zu D_1 ist. Nun stimmen aber die Werthe des Ausdruckes $a\alpha + b\gamma$, wenn γ einen bestimmten Werth hat und α nacheinander die Werthe:

$$0, 1, 2, \ldots, 2D_1 - 1$$

annimmt, abgesehen von Vielfachen von $2D_1$, mit den Zahlen derselben Reihe überein. Es kommt also alles darauf an, in dem Falle eines geraden γ die Anzahl der zu $2D_1$ relativ primen Zahlen in der obigen Zahlenreihe, und in dem Falle eines ungeraden γ die Anzahl der geraden und zu D_1 relativ primen Zahlen in derselben Zahlenreihe zu ermitteln. Bezeichnet man mit $\varDelta$ die Anzahl der positiven, D_1 nicht übersteigenden*) ganzen Zahlen, welche mit D keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist in beiden Fällen die Anzahl der betreffenden Zahlwerthe gleich $\varDelta$.[7]) Da γ aber $2D_1$ verschiedene Werthe annehmen kann, so folgt, dass $2D_1\varDelta$ Combinationen α, γ, welche der Form:

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

einen zu $2D_1$ relativ primen Werth geben, vorhanden sind. In dem Falle eines geraden D zeigt eine ganz gleiche Untersuchung, dass die Anzahl der Combinationen dann gleich $4D_1\varDelta$ ist.

Betrachten wir schliesslich den Fall, dass die gegebene Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

---

*) Ich sage absichtlich »nicht übersteigende«, damit der Fall $D_1 = 1$ keine Ausnahme bildet.

zu der uneigentlich primitiven Ordnung gehört. Wenn wir setzen:

$$\tfrac{1}{2}a = a', \quad \tfrac{1}{2}c = c'$$

und, wie vorhin:

$$x = 2D_1 v + \alpha, \quad y = 2D_1 w + \gamma,$$

so erhalten wir:

$$a'x^2 + bxy + c'y^2 \equiv a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2 \pmod{2D_1},$$

350 und wir haben dann zu ermitteln, für wieviele Combinationen α, γ die rechte Seite ungerade und relativ prim zu D_1 ist. Um dieses Ziel auf die einfachste Weise zu erreichen, setzen wir voraus, dass a' keinen gemeinschaftlichen Theiler mit $2D_1$ hat, was offenbar erlaubt ist. Dann muss man die beiden Fälle:

$$D \equiv 1 \text{ und } D \equiv 5 \pmod{8}$$

unterscheiden. Da b ungerade ist, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$D = b^2 - ac = b^2 - 4a'c',$$

dass in dem ersten dieser beiden Fälle c' gerade und in dem zweiten c' ungerade ist. Die Form:

$$a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$$

kann mithin nur dann gleich einer ungeraden Zahl sein, wenn in dem ersten Falle von den beiden Zahlen α, γ die erste eine ungerade, die zweite eine gerade Zahl ist, und wenn in dem zweiten Falle entweder von den beiden Zahlen die eine gerade, die andere ungerade ist oder alle beide Zahlen ungerade sind. Um noch der anderen Bedingung, welche verlangt, dass

$$a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$$

relativ prim zu $2D_1$ ist, zu genügen, ist es nothwendig und hinreichend, dass das Product:

$$4a'(a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2$$

dieselbe Eigenschaft besitzt. Ist dies der Fall und nimmt man zunächst $D \equiv 1 \pmod{8}$ an, so muss man, nachdem für γ eine bestimmte gerade Zahl gesetzt ist, α jedem Werthe der Reihe:

$$1, 3, 5, \ldots, 2D_1 - 1$$

gleichsetzen und bestimmen, wie oft $a\alpha + b\gamma$ oder, was dasselbe ist, der Rest dieses Ausdruckes in Bezug auf den Modulus D_1 relativ prim zu D_1 ist. Nun überzeugt man sich aber leicht, dass die Reste von $a\alpha + b\gamma$, wenn auch in anderer Reihenfolge, mit den Zahlen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ D_1 - 1$$

übereinstimmen; hieraus folgt, dass die Anzahl der jedem Werthe von γ entsprechenden ungeraden Werthe von α, für welche

$$a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$$

ungerade und relativ prim zu D ist, gleich $\varDelta$ ist. Da nun die Zahl γ selbst D_1 verschiedene Werthe annehmen kann, so ergiebt sich, dass die Anzahl der Combinationen, welche dem Ausdrucke:

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)$$

einen ungeraden und zu D relativ primen Werth geben, gleich $D_1 \varDelta$ ist. Betrachtet man zweitens den Fall: $D \equiv 5 \pmod{8}$, so findet man, wie in dem ersten Falle, dass für jeden geraden Werth von γ die Anzahl der zulässigen Werthe von α gleich $\varDelta$ ist, da für ein gerades γ die Zahl α ungerade sein muss; anders verhält es sich aber, wenn der γ zuertheilte bestimmte Werth ungerade ist, da dann α gerade oder ungerade sein kann. Bei dieser letzteren Annahme muss man in dem Ausdrucke $a\alpha + b\gamma$ für α jede der Zahlen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ 2D_1 - 1$$

setzen. Die diesen Zahlen entsprechenden Werthe von $a\alpha + b\gamma$, vermindert um die in ihnen enthaltenen Vielfachen von D_1, stimmen aber offenbar mit der Reihe der Zahlen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ D_1 - 1$$

überein, in welcher jede Zahl doppelt geschrieben zu denken ist. Folglich ist die Anzahl der zulässigen Werthe [351] von α, welche einem gegebenen ungeraden Werthe von γ entsprechen, immer gleich $2\varDelta$. Beachtet man noch, dass unter den Werthen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \ 2D_1 - 1,$$

welche γ annehmen kann, D_1 gerade und ebenso viele ungerade Zahlen sind, so sieht man, dass in dem Falle: $D \equiv 5 \pmod{8}$ die Anzahl der Combinationen α, γ, welche das Trinom:

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)$$

ungerade und relativ prim zu D machen, gleich $3\,D_1\,\varDelta$ ist.

Wir fassen die Resultate, welche wir in diesem Paragraphen erhalten haben, kurz zusammen. »Bezeichnet D_1 den numerischen Werth der Determinante D und $\varDelta$ die Anzahl derjenigen Zahlen in der Reihe:

$$1,\ 2,\ \ldots,\ D_1,$$

welche mit D_1 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so können die Werthepaare x, y, für welche irgend eine Form dieser Determinante oder die Hälfte dieser Form, wenn sie zur uneigentlich primitiven Ordnung gehört, ungerade und relativ prim zu D ist, immer in Systeme von der Form:

$$x = 2\,D_1 v + \alpha,\quad y = 2\,D_1 w + \gamma$$

vertheilt werden, wobei v und w unbestimmte, positive oder negative, ganze Zahlen und α, γ Zahlen aus der Reihe:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\,D_1 - 1$$

bezeichnen; die Anzahl derartiger Systeme ist für eine eigentlich primitive Form gleich $2\,D_1\,\varDelta$ oder gleich $4\,D_1\,\varDelta$, je nachdem D ungerade oder gerade ist, und für eine uneigentlich primitive Form gleich $D_1\,\varDelta$ oder gleich $3\,D_1\,\varDelta$, je nachdem $D \equiv 1$ oder $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist.«

Diese Voruntersuchungen beschliessen wir nun mit dem Beweise des folgenden Hülfssatzes.

»Es sei $K = k k' k'' \ldots$ das Product der positiven, ungeraden und ungleichen Primzahlen k, k', k'', ..., und es werde mit L irgend eine ganze Zahl, welche K theilt, bezeichnet. Ferner sei $\Theta = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, wo unabhängig von einander in jeder der beiden Gleichungen das obere oder untere Zeichen genommen werden kann. Dann behaupte ich, dass der Ausdruck:

$$\Sigma\, \Theta^{\frac{n-1}{2}}\, \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{L}\right),$$

wo die Summation über alle zu $2\,K$ relativ primen, zwischen $n = 1$ und $n = 8\,K - 1$ enthaltenen ganzen Zahlen n zu erstrecken ist, stets den Werth Null hat, mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass gleichzeitig $\Theta = 1$, $\eta = 1$, $L = 1$ ist.«

Es bezeichne a irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$, a' irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k'-1$, und so fort. b sei eine beliebige der Zahlen 1, 3, 5, 7. Dann ist leicht einzusehen, dass man alle Werthe, welche n in der vorstehenden Summe annehmen muss, erhält, wenn man für jede der Combinationen $a, a', \ldots; b$ die Zahl n bestimmt, welche kleiner als $8\,K$ ist und den simultanen Congruenzen:

[352] $n \equiv a \pmod{k}, \quad n \equiv a' \pmod{k'}, \quad \ldots; \quad n \equiv b \pmod{8}$

genügt. Aus diesen Congruenzen folgt:

$$\left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{a}{k}\right), \left(\frac{n}{k'}\right) = \left(\frac{a}{k'}\right), \ldots; \; \Theta^{\frac{n-1}{2}} = \Theta^{\frac{b-1}{2}}, \; \eta^{\frac{n^2-1}{8}} = \eta^{\frac{b^2-1}{8}}.$$

Bildet[8]) man nun das Product der beiden letzten dieser Gleichungen und derjenigen anderen, welche sich auf die in L enthaltenen Primzahlen $k, k', \ldots$ beziehen, und summirt man dann von $a=1,\ a'=1, \ldots$ bis $a=k-1,\ a'=k'-1, \ldots$ und in Bezug auf $b=1, 3, 5, 7$, so nimmt die Summe des Hülfssatzes die Gestalt eines Productes an, dessen Factoren ausser

$$\Sigma\, \Theta^{\frac{b-1}{2}}\, \eta^{\frac{b^2-1}{8}}$$

diejenigen der Summen:

$$\Sigma \left(\frac{a}{k}\right), \; \Sigma \left(\frac{a'}{k'}\right), \ldots,$$

welche sich auf die in L enthaltenen Primzahlen beziehen, und diejenigen der Ausdrücke

$$k-1, \; k'-1, \ldots,$$

welche den übrigen Primzahlen $k, k', \ldots$ entsprechen, sind. Daraus ergiebt sich, dass der Ausdruck:

$$\Sigma\, \Theta^{\frac{n-1}{2}}\, \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{L}\right)$$

immer verschwindet, ausser wenn gleichzeitig $\Theta = 1$, $\eta = 1$, $L = 1$ ist, was zu beweisen war.

§ 6.

Wir gehen nunmehr zu den in der Einleitung dieser Abhandlung angekündigten Fragen über, wobei wir die Bezeichnungen beibehalten, welche wir in den Paragraphen 3, 4 und 5 benutzt haben. Wir setzen also:

(1) $$D = PS^2 \text{ oder } D = 2PS^2;$$

hierbei ist S^2 immer die grösste Quadratzahl, durch welche D theilbar ist, und

(2) $$P = pp'p'' \ldots,$$

wo $p, p', p'', \ldots$ ungerade, positive oder negative, Primzahlen, welche sämmtlich von einander verschieden sind, bezeichnen. Ferner setzen wir:

(3) $$R = rr'r'' \ldots,$$

wo $r, r', r'', \ldots$ wie früher die ungeraden und ungleichen Primzahlfactoren bezeichnen, welche in S, aber nicht auch in P enthalten sind. Wir bezeichnen mit q eine beliebige positive, ungerade Primzahl, welche weder in P noch in R enthalten ist, und zerlegen jedes dieser Producte auf irgend eine Art in zwei Factoren — ohne dabei den Fall, dass einer dieser Factoren der Einheit gleich ist, auszuschliessen — was wir durch die beiden Gleichungen ausdrücken:

(4) $$P = P_1 P_2, \quad R = R_1 R_2.$$

Schliesslich setzen wir:

(5) $$\delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \Theta = \pm 1, \quad \eta = \pm 1,$$

[353] wo die Vorzeichen beliebig und unabhängig von einander gewählt werden können. Bezeichnet dann s eine stetige Veränderliche, welche grösser als 1 bleiben soll, so erhalten wir durch Reihenentwickelung und mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (3) des § 2:

$$\frac{1}{1 - \Theta^{\frac{q-1}{2}} \eta^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{q^s}}$$

$$= 1 + \cdots + \Theta^{\frac{q^l-1}{2}} \eta^{\frac{q^{2l}-1}{8}} \left(\frac{q^l}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{(q^l)^s} + \cdots,$$

wo zur Abkürzung auf der rechten Seite nur das allgemeine Glied geschrieben ist, in welchem man für l nacheinander alle ganzen Zahlen von $l = 0$ bis $l = \infty$ setzen muss.

Wir denken uns nun in der letzten Gleichung für q alle Werthe gesetzt, welche diese Zahl annehmen kann, d. h. alle positiven ungeraden Primzahlen, welche nicht in D als Factoren enthalten sind, und dann das Product aller so entstandenen Gleichungen gebildet. Das Product der rechten Seiten liefert eine Reihe, deren Gesetz sehr leicht zu erkennen ist, wenn man sich an den bekannten Satz erinnert, dass eine zusammengesetzte Zahl nur auf eine einzige Weise durch Multiplication von Primzahlfactoren entstehen kann, und wenn man gleichzeitig wieder auf die oben genannten Lehrsätze des § 2 Rücksicht nimmt. Auf die Weise erhält man die Gleichung:

$$(6)\quad \Pi \frac{1}{1 - \Theta^{\frac{q-1}{2}} \eta^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P_2 R_2}\right) \frac{1}{q^s}} = \Sigma\, \Theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo das Multiplicationszeichen Π sich auf alle eben definirten Werthe von q bezieht und die Summation über alle ganzen Zahlen von $n = 1$ bis $n = \infty$, welche die doppelte Bedingung erfüllen, ungerade und relativ prim zu D oder, einfacher, relativ prim zu $2D$ zu sein, zu erstrecken ist. Ehe wir weitergehen, ist die Nothwendigkeit der oben gemachten Annahme, dass $s > 1$ sein soll, nachzuweisen. Man kann sich darüber leicht Rechenschaft geben, wenn man beachtet, dass die vorstehende Reihe nur dann eine von der Reihenfolge ihrer Glieder unabhängige Summe hat, wenn die Bedingung $s > 1$ erfüllt ist, und dass ebenfalls der Werth des unendlichen Productes nur dann nicht von der Anordnung seiner Factoren abhängt, wenn $s > 1$ ist. Es erscheint mir um so mehr zwecklos, mich in ausgedehntere Erörterungen über diesen Punkt einzulassen, als ich denselben bei dem Beweise des oben angeführten Satzes über die arithmetische Reihe*) — [**354**] dieser Beweis stützt sich auf eine Gleichung derselben Art, welche aber allgemeiner als die vorstehende ist — bereits ausführlich besprochen habe.

*) A. a. O. § 1. H.

Ersetzt man in der Gleichung (6) die Grössen Θ, ι bezüglich durch $\delta\Theta$, $\varepsilon\iota$ und gleichzeitig P_2 durch P_1, so geht dieselbe in die folgende über:

$$(7)\quad \Pi\frac{1}{1-(\delta\Theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\iota)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1R_1}\right)\frac{1}{q^s}}=\Sigma(\delta\Theta)^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\iota)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_1R_1}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Setzt man in der Gleichung (6):

$$\Theta=1,\ \iota=1,\ P_2=1,\ R_1=1$$

und $2s$ an Stelle von s, so erhält man:

$$(8)\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}=\Sigma\frac{1}{n^{2s}},$$

wo sich die Multiplications- und Summationszeichen stets auf alle oben definirten Werthe von q und n beziehen. Wenn man das Product der Gleichungen (6) und (7) durch die Gleichung (8) dividirt, so ist der allgemeine Factor des links stehenden Ausdruckes:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^s}\right)}{\left[1-(\delta\Theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\iota)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right]\left[1-\Theta^{\frac{q-1}{2}}\iota^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right]}.$$

Da der Zähler dieses Bruches offenbar gleich

$$\left[1+\Theta^{\frac{q-1}{2}}\iota^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right]\left[1-\Theta^{\frac{q-1}{2}}\iota^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right]$$

ist, so kann man dem allgemeinen Factor die einfachere Form geben:

$$\frac{1+\Theta^{\frac{q-1}{2}}\iota^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2R_1}\right)\frac{1}{q^s}}{1-(\delta\Theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\iota)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1R_1}\right)\frac{1}{q^s}}.$$

Dieser Ausdruck bietet nun zwei verschiedene Fälle dar, je nachdem

$$\delta^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P_1 P_2}\right) = \delta^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P}\right) = -1 \text{ oder } +1$$

ist. In dem ersten Falle ist er gleich der Einheit und kann daher in dem Producte fortgelassen werden; in dem zweiten Falle kann man ihm die Gestalt geben:

$$\frac{1 + \Theta^{\frac{q-1}{2}} \eta^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{q^s}}{1 - \Theta^{\frac{q-1}{2}} \eta^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{q^s}}.$$

[355] Die doppelten Zeichen bei den Grössen $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, welche in der Gleichung (7) vorkommen, waren bis jetzt völlig willkürlich. Künftighin setzen wir fest, dass entsprechend den vier Fällen, welche die Determinante D darbieten kann und welche wir schon in den Paragraphen 3 und 4 unterschieden haben, nämlich

$$D = PS^2, \quad P \equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod{4};$$
$$D = 2PS^2, \quad P \equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod{4},$$

diese Zeichen bez. sind:

$$(9) \qquad \delta = 1,\ \varepsilon = 1 \quad ; \quad \delta = -1,\ \varepsilon = 1 \quad ;$$
$$\delta = 1,\ \varepsilon = -1; \quad \delta = -1,\ \varepsilon = -1.$$

Dann stimmt die Bedingung:

$$\delta^{\frac{q-1}{2}} \eta^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P}\right) = 1$$

mit derjenigen der vier Bedingungen (2) des § 1 überein, welche dem gleichen Falle entspricht. Bezeichnet man nun mit f die positiven, ungeraden Primzahlen q, welche nicht Factoren von D sind und dieser letzten Bedingung genügen, so hat dieser Buchstabe dieselbe Bedeutung wie in dem § 4, d. h. es ist

$$\delta^{\frac{f-1}{2}} \varepsilon^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1; \tag{10}$$

die linke Seite der Gleichung, deren Bildungsgesetz oben angegeben wurde, ist also:

$$\Pi \frac{1 + \Theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}}{1 - \Theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}},$$

wo sich das Zeichen Π auf alle Werthe von f erstreckt. Mit Hülfe der Gleichung:

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \cdots$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (3) des § 2 kann der allgemeine Factor des vorstehenden Products in eine Reihe entwickelt werden, deren $(l+1)^{\text{tes}}$ Glied gleich

$$2\,\Theta^{\frac{f^l-1}{2}} \eta^{\frac{f^{2l}-1}{8}} \left(\frac{f^l}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{(f^l)^s}$$

ist. Das erste Glied, welches $l = 0$ entspricht, macht eine Ausnahme von diesem Gesetze und hat den Werth 1. Daraus lässt sich, wenn man wieder die angeführten Gleichungen des § 2 zu Hülfe nimmt, leicht schliessen, dass das obige Product selbst in eine Reihe entwickelt werden kann, deren allgemeines Glied:

$$\Theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right) \frac{2^\mu}{m^s}$$

ist; hierbei bezeichnet m allgemein alle positiven, ungeraden und zu $2D$ relativ primen ganzen Zahlen, die nur solche Primzahlfactoren f haben, für welche die Bedingungsgleichung (10) erfüllt ist, [**356**] und μ, wie in § 4, die Anzahl der ungleichen Primzahlfactoren von m, die Einheit nicht mitgezählt. Das $m = 1$ entsprechende Glied macht hier keine Ausnahme von dem allgemeinen Gesetze, da sich für diesen

Werth von m der vorstehende Ausdruck auf 1 reducirt. Wir erhalten folglich die Gleichung:

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum \Theta^{\frac{m-1}{2}}\, \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right) \frac{2^\mu}{m^s} \\ \displaystyle= \sum (\delta\,\Theta)^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon\,\eta)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P_1 R_1}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \sum \Theta^{\frac{n-1}{2}}\, \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{n^s}, \end{cases}$$

in welcher man die Summationen auf alle vorher definirten ganzen Zahlen n, bez. m erstrecken und sich erinnern muss, dass die Werthe $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ durch die Bedingungen (9) fixirt sind, während die Vorzeichen in den Gleichungen $\Theta = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ willkürlich geblieben sind.

Setzt man in der Gleichung (11):

$$\Theta = 1, \quad \eta = 1, \quad P_2 = 1, \quad R_1 = 1, \quad \text{und folglich} \quad P_1 = P,$$

so nimmt dieselbe die Form an:

$$(12)\qquad \sum \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum \frac{2^\mu}{m^s} = \sum \frac{1}{n^s} \cdot \sum \delta^{\frac{n-1}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Diese specielle Gleichung dient uns dazu, die Anzahl der verschiedenen Formen, welche zu einer beliebigen positiven oder negativen Determinante gehören, zu bestimmen. Bei dieser Untersuchung muss man die Fälle eines positiven D und eines negativen D von einander getrennt behandeln und jeden dieser beiden Fälle nochmals in zwei Unterfälle eintheilen, je nachdem es sich um eigentlich oder uneigentlich primitive Formen handelt. Da jedoch ein Theil der Analyse diesen vier Fällen gemeinsam ist, so empfiehlt es sich, um nicht zweimal dieselben Betrachtungen anstellen zu müssen, dass wir uns zunächst mit dem Theile der Untersuchung beschäftigen, dessen Ziel es ist, die Gestalt der rechten Seite der Gleichung (12) zu ermitteln, wenn in derselben $s = 1 + \varrho$ gesetzt und die positive Veränderliche ϱ als unendlich klein werdend angenommen wird.

Um diese Untersuchung für den ersten Factor auf der rechten Seite zuerst durchzuführen, seien $e, e', e'', \ldots$ diejenigen Zahlen in der Reihe:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2D_1 - 1,$$

welche keinen gemeinschaftlichen Theiler mit $2D_1$ haben. Dann kann offenbar die Summe $\sum \frac{1}{n^{1+\varrho}}$, wo n nur positive und zu $2D_1$ relativ prime Werthe annehmen darf, in so viele Theilsummen von der Gestalt:

$$\frac{1}{e^{1+\varrho}} + \frac{1}{(2D_1+e)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(4D_1+e)^{1+\varrho}} + \cdots,$$

[357] als es Glieder in der Reihe $e, e', e'', \ldots$ giebt, zerlegt werden. Da man andrerseits aus dem früher für die Reihe (1) des § 1 erhaltenen Resultate leicht schliessen kann, dass jede dieser Theilsummen die Form $\frac{1}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho}$ annimmt, und da die Anzahl dieser Theilsummen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Anzahl der Glieder $e, e', e'', \ldots$, je nachdem D ungerade oder gerade ist, gleich $\varDelta$ oder $2\varDelta$ ist, wobei $\varDelta$ die gleiche Bedeutung wie in dem § 5 hat, so erhält man für diese beiden Fälle:

$$(13)\quad \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\varDelta}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\varDelta}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho};$$

die Veränderliche ϱ ist hierbei immer als unendlich kleine Grösse vorausgesetzt. Wenn wir nun den zweiten Factor auf der rechten Seite betrachten, so ist leicht zu erkennen, dass dieser einen besonderen Fall der Reihe bildet, auf welche sich der dritte Hülfssatz des § 1 bezieht; um diesen Factor zu erhalten, ist in der allgemeinen Reihe des genannten Hülfssatzes:

$$c_n = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \quad \text{oder} \quad c_n = 0$$

zu setzen, je nachdem n relativ prim zu $2D_1$ ist oder nicht. Die beiden Voraussetzungen dieses Hülfssatzes, welche darin bestehen, dass erstens c_n eine periodische Function des Index und zweitens die Summe der eine Periode bildenden Glieder gleich Null ist, sind erfüllt, wie man sich leicht überzeugt. Für die erste ist es evident, und um es für die zweite zu erkennen, genügt es, auf den Hülfssatz am Ende des § 5 zurückzugreifen und zu beachten, dass nicht gleichzeitig $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = \pm 1$ sein kann. In der That, aus den Bedingungen (9) folgt, dass diese letzten Gleichungen nur dann miteinander verträglich sind, wenn $P=1$ ist; dann aber beziehen sich diese Gleichungen auf den von uns ausgeschlossenen Fall, in welchem die Determinante eine positive Quadratzahl ist. Daraus folgt, dass die Summe:

$$\sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

wenn man in derselben die positive Veränderliche ϱ unendlich klein werden, gegen eine endliche, durch den Ausdruck:

(14) $$\sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}$$

gegebene Grenze convergirt, in welchem die Werthe von n in der natürlichen Ordnung, d. h. so, dass sie eine steigende Reihe bilden, auf einander folgen sollen.

I. Wir kehren jetzt zur Gleichung (12) zurück und behandeln zuerst den Fall, in welchem D negativ, also $D=-D_1$ ist. Es seien

[358] (15) $$ax^2+2bxy+cy^2, \quad a'x^2+2b'xy+c'y^2, \; \ldots$$

die verschiedenen eigentlich primitiven Formen dieser Determinante D, deren Anzahl ich mit h bezeichne. Dann besteht die Gleichung:

(16) $$\sum \frac{2^{\mu+1}}{m^s} = \sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \sum \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots,$$

wo auf der rechten Seite ebenso viele Glieder stehen, als es Formen (15) giebt, und wo sich die doppelte Summation in jedem Gliede auf alle ganzzahligen Werthesysteme von x und y erstreckt, welche zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen und die doppelte Bedingung erfüllen, keinen gemeinschaftlichen Theiler zu besitzen und der Form, in welche sie substituirt werden, einen zu $2D$ relativ primen Werth zu geben. Dies folgt erstens daraus, dass jede der auf der linken Seite stehenden ganzen Zahlen m, auf Grund des Satzes I des § 4, durch die Gesammtheit der Formen (15) $2^{\mu+1}$mal in der angegebenen Weise dargestellt werden kann, und zweitens daraus, dass umgekehrt jeder zu $2D$ relativ prime Werth, den irgend eine der Formen (15) annehmen kann, wenn man ihren Unbestimmten x und y

theilerfremde Werthe beilegt, nach den bekannten, im Anfange des genannten Paragraphen in die Erinnerung zurückgerufenen Resultaten mit einer der durch m bezeichneten ganzen Zahlen übereinstimmt. Setzt man nun den Ausdruck, welcher durch die letzte Gleichung für $\Sigma \frac{2^{\mu+1}}{m^s}$ gegeben ist, in die Gleichung (12) ein, so wird:

$$\begin{aligned}&\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}\\ &+ \Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots\\ &= 2\Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

Jedem Gliede auf der linken Seite kann, wie leicht zu sehen ist, eine einfachere Form gegeben werden. Das erste dieser Glieder[9] ist augenscheinlich gleich dem Ausdrucke:

$$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

wo bei der doppelten Summation die Werthepaare x, y nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, das Trinom, in welches sie eingesetzt werden, ungerade und relativ prim zu D zu machen. Legt man dem Zeichen Σ' diesen Sinn bei, so erhält man:

$$(17)\quad \begin{cases}\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots\\ \qquad = 2\Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.\end{cases}$$

[359] Nun muss man $s = 1 + \varrho$ setzen, wo die positive Veränderliche ϱ stets als unendlich klein angenommen wird, und nachsehen, was bei dieser Annahme aus den einzelnen Gliedern auf der linken Seite der Gleichung (17) wird. Da nach den im § 5 abgeleiteten Resultaten die Werthepaare, welche man in jeder dieser Doppelsummen, z. B. in der ersten x und y beilegen muss, in Systeme von der Form:

$$(18) \qquad x = 2D_1 v + \alpha, \quad y = 2D_1 w + \gamma$$

vertheilt werden können, so lässt sich diese erste Summe in ebensoviele Theilsummen zerlegen, als es derartige Systeme giebt; jede dieser Theilsummen hat die Form:

$$\sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

wo man für x und y die Werthe (18) einsetzen und dann über alle ganzen Zahlen v und w von $-\infty$ bis $+\infty$ summiren muss. Um diese Theilsumme zu berechnen, bestimmen wir, wie oft das Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ in dieser Summe einen Werth erhält, welcher eine beliebige positive Grösse σ nicht übersteigt. Diese Frage ist aber offenbar identisch mit der anderen: wieviele Punkte, deren Coordinaten x und y die Form (18) haben, liegen im Innern oder auf der Begrenzung der durch die Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma$$

gegebenen Ellipse? Da der Flächeninhalt dieser Ellipse:

$$\frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}\,\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{D_1}}\,\sigma$$

ist, wo der Buchstabe π die gewöhnliche Bedeutung hat, so folgt aus dem zweiten Hülfssatze des § 1*) unmittelbar[10], dass die zu bestimmende Zahl in die Form:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^5}}\,\sigma + \sigma^\delta \psi(\sigma)$$

gebracht werden kann, wo der constante Exponent δ einen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 gelegenen Werth hat, und wo die Function $\psi(\sigma)$ endlich bleibt, wie gross man auch die Veränderliche σ wählt. Nimmt man noch den ersten Satz desselben Para-

---

*) Aus der Natur dieses Satzes leuchtet unmittelbar ein, dass die auf der Begrenzung der Curve liegenden Punkte nach Belieben als innere oder als äussere Punkte gezählt werden können. Man kann also auch, und mit um so mehr Recht, diese Punkte theils zu den inneren und theils zu den äusseren Punkten zählen, wie wir später, wenn wir uns mit positiven Determinanten beschäftigen, thun werden.

graphen zu Hülfe, so ergiebt sich für die betrachtete Theilsumme der Werth:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho}\,.$$

Berücksichtigt man nun noch, dass gemäss dem § 5 die Anzahl der Systeme (18) und folglich die der Theilsummen, in welche die Summe:

360] $$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}$$

zerlegt worden ist, gleich $2D_1\Delta$ oder $4D_1\Delta$ ist, je nachdem D ungerade oder gerade ist, so folgt weiter, dass die vorstehende Summe, den beiden Fällen entsprechend, gleich

$$\frac{\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho} \text{ oder } \frac{\pi\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho}$$

ist. Da dieses Resultat nichts, was der Form $ax^2+2bxy+cy^2$ eigenthümlich ist, sondern nur die allen Formen (15) gemeinsame Determinante enthält, so sieht man, wenn man ϱ immer als unendlich kleine Grösse voraussetzt und den Fall eines ungeraden D von dem eines geraden D trennt, dass die linke Seite der Gleichung (17) gleich

$$\frac{h\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho} \text{ oder } \frac{h\pi\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\cdot\frac{1}{\varrho}$$

ist. Mit Hülfe dieser Ausdrücke und der oben abgeleiteten Resultate (13) und (14) geht die Gleichung (17) für einen unendlich kleinen Werth von ϱ in die folgende wichtige Gleichung[11] über, welche sowohl für den Fall eines geraden als den eines ungeraden D gilt:

(19) $$h = \frac{2}{\pi}\sqrt{D_1}\cdot\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}\,.$$

Diese Gleichung ist für $D=-1$ einer Ausnahme unterworfen, welche daher kommt, dass der Lehrsatz I des § 4 in dem gleichen Falle eine Ausnahme erleidet. Wie sich dann aus der vorstehend benutzten Analyse ergiebt und sich auch a posteriori verificiren lässt, muss man in diesem besonderen Falle die rechte Seite der Gleichung (19) verdoppeln, damit diese letztere wieder richtig ist. In der That, man hat in diesem Falle $h = 1$, $D_1 = 1$, $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, $P = -1$, und es wird also die in der soeben angegebenen Weise abgeänderte Gleichung:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots\right);$$

diese Gleichung ist aber richtig, wie aus der bekannten *Leibniz*'schen Reihe folgt.

II. Wir nehmen jetzt an, dass die Determinante D wieder negativ ist, dass aber ferner $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist und die Formen (15) die der uneigentlich primitiven Ordnung sind. Dann ist $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, und die Gleichung (16) muss durch die folgende ersetzt werden:

$$\sum \frac{2^{\mu+1}}{(2m)^s} = \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \sum \frac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^s} + \cdots,$$

wo in jedem Gliede der rechten Seite die doppelte Summation über alle Werthe von x und y zu erstrecken ist, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und für welche die Hälfte der in diesem Gliede auftretenden Form relativ prim zu $2D$ wird. [**361**] Die Einsetzung dieses Ausdruckes in die Gleichung (12) giebt:

$$\sum \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \sum \frac{1}{n^{2s}} \cdot \sum \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots$$
$$= 2^{1-s} \sum \frac{1}{n^s} \cdot \sum \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s},$$

von welcher Gleichung man, wie in dem vorhergehenden Falle, zu der folgenden gelangt:

$$(20)\quad \begin{cases} \sum' \dfrac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \sum' \dfrac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^s} + \cdots \\ \qquad = 2^{1-s} \sum \dfrac{1}{n^s} \cdot \sum \left(\dfrac{n}{P}\right) \dfrac{1}{n^s}, \end{cases}$$

wo das Zeichen $\sum'$ andeutet, dass bei der doppelten Summation die Werthepaare x, y nur noch der einen Bedingung, die Hälfte der betreffenden quadratischen Form relativ prim zu $2D$ zu machen, genügen müssen. Setzt man nun $s = 1 + \varrho$, wo ϱ immer eine unendlich kleine positive Veränderliche ist, so kann man die Rechnung wie in dem schon erledigten Falle zu Ende führen, wenn man sich erinnert, dass, wie in dem § 5 gezeigt ist, die Anzahl der Systeme von der Form:

$$x = 2D_1 r + \alpha, \quad y = 2D_1 w + \gamma,$$

welche für die Hälfte einer uneigentlich primitiven Form von der Determinante D eine zu $2D$ relativ prime Zahl ergeben, gleich $D_1 \Delta$ oder $3D_1 \Delta$ ist, je nachdem die erste oder zweite der Congruenzen $D \equiv 1$ und $D \equiv 5$ (mod. 8) besteht. Man findet so für die Anzahl h der uneigentlich primitiven Formen:

$$(21) \quad \begin{cases} h = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{D_1} \cdot \sum \left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D \equiv 1 \pmod{8}, \\[2ex] h = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{2}{\pi}\sqrt{D_1} \cdot \sum \left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Der zweiten Formel muss die Bemerkung hinzugefügt werden, dass sie für $D = -3$ falsch ist, was aus der Ausnahme folgt, welcher der Lehrsatz I des § 4 in dem gleichen Falle unterworfen ist; damit die Formel richtig wird, muss dann die rechte Seite verdreifacht werden[12].

III. Wir gehen jetzt zu dem Falle positiver Determinanten über, in welchem also $D = D_1$ ist, und nehmen zuerst an, dass die verschiedenen Formen (15) zu der eigentlich primitiven Ordnung gehören und sämmtlich die Bedingungen (7) des § 1 erfüllen. Dann ist nach dem Lehrsatze III des § 4:

$$\sum \frac{2^\mu}{m^s} = \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \sum \frac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^s} + \cdots,$$

wo die doppelte Summation in jedem Gliede der rechten Seite [362] über alle zu einander relativ primen Werthepaare von x und y zu erstrecken ist, welche dem zugehörigen Trinom einen zu $2D$ relativ primen Werth geben und ausserdem den Ungleichheiten (8) des angegebenen Paragraphen genügen, wenn es sich um das erste Glied handelt, und analogen Ungleichheiten, wenn es sich um die übrigen Glieder handelt.

Da sowohl positive als negative Zahlen durch eine Form von positiver Determinante darstellbar sind, so kann es zunächst scheinen, als ob man noch die Bedingung hinzufügen müsse, dass für die Unbestimmten x, y nur solche Zahlen, welche der quadratischen Form einen positiven Werth geben, gewählt werden dürfen. Man überzeugt sich aber leicht, dass diese Bedingung bereits implicite in den vorigen enthalten ist. In der That, sind a, b, x und y positiv, so zieht die Bedingung:

$$x \geqq \frac{T - bU}{aU}\, y$$

offenbar die andere nach sich:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geqq \frac{y^2}{aU^2}\left[T^2 - (b^2 - ac)U^2\right] = \frac{y^2}{aU^2}\cdot$$

Setzt man in die Gleichung (12) den obigen Ausdruck für $\sum \frac{2^\mu}{m^s}$ ein, so ist:

$$\sum\frac{1}{n^{2s}}\cdot\sum\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\sum\frac{1}{n^{2s}}\cdot\sum\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\cdots$$
$$= \sum\frac{1}{n^s}\cdot\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Man erkennt ohne Mühe, dass das Product:

$$\sum\frac{1}{n^s}\cdot\sum\frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s}$$

in e einfachere Form[9]) gebracht werden kann:

$$\sum{}'\frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s},$$

wo die doppelte Summation über alle Werthepaare x, y zu erstrecken ist, für welche das Trinom relativ prim zu $2D$ wird und die Ungleichheiten:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad y \leqq \frac{aU}{T - bU}\,x$$

erfüllt sind. Es genügt hierzu zu bemerken, dass die Bedingungen (8) des § 4 dieselbe Gestalt behalten, wenn man in ihnen x und y durch nx und ny, wo n positiv ist, ersetzt, und dass, wenn man darauf wieder x und y an Stelle von nx und ny schreibt, die neuen Unbestimmten x und y nicht mehr der Bedingung, relativ prim zu einander zu sein, unterworfen sind. Legt man also dem Zeichen Σ' den soeben erklärten Sinn bei und beachtet man, dass für die zweite Form in der letzten der Ungleichheiten (8) des § 4 die Coefficienten a und b durch a' und b' zu ersetzen sind, und entsprechend für die übrigen Formen, [**363**] so erhält man die Gleichung:

$$(22)\quad \begin{cases} \Sigma' \dfrac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \dfrac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots \\ \qquad = \Sigma \dfrac{1}{n^s} \cdot \Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\dfrac{n}{P}\right) \dfrac{1}{n^s}. \end{cases}$$

Nun ist zu ermitteln, was aus den einzelnen Gliedern dieser Gleichung wird, wenn, $s = 1 + \varrho$ gesetzt, die positive Veränderliche ϱ unendlich klein wird. Zu dem Zwecke zerlegen wir jedes Glied auf der linken Seite, z. B. das erste:

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s}$$

in ebenso viele Theilsummen, als es Systeme von der Form:

$$x = 2Dv + \alpha, \quad y = 2Dw + \gamma$$

giebt, für welche das Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ relativ prim zu $2D$ wird. Es sei

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}; \quad x > 0, \; y > 0, \; y \leqq \frac{aU}{T-bU}x,$$
$$x = 2Dv + \alpha, \quad y = 2Dw + \gamma.$$

eine dieser Theilsummen, in welcher die Summation in Bezug auf v und w über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$*) erstreckt werden muss. Um den Werth dieser Theilsumme zu erhalten, bezeichnen wir mit σ eine beliebige positive Veränderliche und bestimmen die Zahl, welche angiebt, wie oft das Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ bei der doppelten Summation einen σ nicht übersteigenden Werth annimmt. Nach der in dem § 4 angegebenen geometrischen Construction kommt aber

*) welche mit den obigen Bedingungen verträglich sind.[13]

diese Untersuchung auf die Aufgabe zurück, zu ermitteln, wieviele Punkte, deren Coordinaten x und y von der Form:

$$x = 2Dv + \alpha, \quad y = 2Dw + \gamma$$

sind, es im Innern oder auf der Begrenzung des hyperbolischen Sectors gibt, welcher einerseits von den durch die Gleichungen:

$$y = 0, \quad y = \frac{aU}{T - bU}x$$

dargestellten Geraden und andrerseits von dem zwischen ihnen liegenden Bogen des ersten Astes der Hyperbel:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma$$

begrenzt ist; um vollständig genau zu sein, fügen wir hinzu — obgleich das Endresultat nicht im geringsten dadurch beeinflusst wird —, dass von denjenigen dieser Punkte, die etwa auf dem von der x-Axe gebildeten Theile der Begrenzung liegen, abgesehen werden soll. Führt man Polarcoordinaten r und φ ein, welche mit den rechtwinkeligen Coordinaten x und y durch die Gleichungen: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ verbunden sind, so ist der Flächeninhalt des Sectors:

$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\sigma\int\frac{d\varphi}{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi},$$

[364] wo die Integrationsgrenzen Null und der spitze Winkel mit der trigonometrischen Tangente $\frac{aU}{T - bU}$ sind. Wenn man die Integration nach den bekannten Methoden[14]) ausführt, so findet man für den in Rede stehenden Flächeninhalt den sehr einfachen Ausdruck:

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{D}}\log(T + U\sqrt{D}).$$

Aus diesem Resultate folgt mittelst des zweiten Hülfssatzes[10]) des § 1, dass die Zahl, welche wir uns zu bestimmen vorgenommen haben, in der Form:

$$\frac{\sigma}{8\sqrt{D^5}}\log(T + U\sqrt{D}) + \sigma^\delta\psi(\sigma)$$

geschrieben werden kann, wo der constante Exponent δ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 enthalten ist und die Function $\psi(\sigma)$ endlich bleibt, wie gross man auch die Veränderliche σ wählen mag. Mit Hülfe des ersten Satzes im § 1 folgt hieraus, dass die betrachtete Theilsumme gleich

$$\frac{1}{8\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\cdot\frac{1}{\varrho}$$

ist. Da nach den Resultaten des § 5 die Zahl der in derselben Gesammtsumme enthaltenen Theilsumme gleich $4D\Delta$ oder $2D\Delta$ ist, je nachdem D einen geradzahligen oder ungeradzahligen Werth hat, so ergiebt sich, dass jedes Glied auf der linken Seite der Gleichung (22) für einen unendlich kleinen Werth von ϱ, diesen beiden Fällen entsprechend, gleich

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho}$$

ist. Wenn wir also mit h die Anzahl der verschiedenen Formen der Determinante D bezeichnen, so ist die linke Seite gleich:

$$\frac{h\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{h\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},$$

je nachdem D gerade oder ungerade ist.

Da andererseits auf Grund der Resultate (13) und (14) die rechte Seite in diesen beiden Fällen bez.

$$\frac{\Delta}{D}\frac{1}{\varrho}\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta}{2D}\frac{1}{\varrho}\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}$$

ist, so folgt, wenn man noch den auf beiden Seiten der Gleichung auftretenden Factor $\frac{1}{\varrho}$ fortstreicht:

$$(23) \qquad h=\frac{2\sqrt{D}}{\log(T+U\sqrt{D})}\sum\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n};$$

diese Gleichung gilt für jeden geraden oder ungeraden (nicht quadratischen), positiven Werth der Determinanten D, und es bedeuten T und U die kleinsten positiven ganzen Zahlen (1 und 0 ausgeschlossen), welche die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ befriedigen.

[365] IV. Da der Fall, in welchem die positive Determinante D von der Form $4\nu + 1$ ist und die Formen, deren Anzahl h zu bestimmen ist, zu der uneigentlich primitiven Ordnung gehören, dem soeben ausführlich behandelten Falle ganz und gar ähnlich ist, so beschränken wir uns auf die blosse Angabe des Resultates, welches diesem letzten Falle entspricht und in den folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(24) \quad \begin{cases} h = \dfrac{2\sqrt{D}}{\log \frac{1}{2}(T + U\sqrt{D})} \Sigma \left(\dfrac{n}{P}\right) \dfrac{1}{n}, & D \equiv 1 \,(\text{mod. } 8), \\[2ex] h = \frac{1}{3} \dfrac{2\sqrt{D}}{\log \frac{1}{2}(T + U\sqrt{D})} \Sigma \left(\dfrac{n}{P}\right) \dfrac{1}{n}, & D \equiv 5 \,(\text{mod. } 8); \end{cases}$$

in diesen Gleichungen bezeichnen T und U die kleinsten positiven ganzen Zahlen (2 und 0 ausgeschlossen), welche der Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$ genügen.

V. Wir wollen uns nun mit der schon in dem § 3 angekündigten Untersuchung beschäftigen und nachweisen, dass die nach den bekannten Vorschriften, welche in dem angeführten Paragraphen in Erinnerung gebracht worden sind, aufgezählten Geschlechter wirklich sämmtlich existiren und jedes dieselbe Anzahl von Formen enthält. Es seien zu diesem Zwecke:

$$(25) \qquad \varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\ \ldots \mid \psi,\ \psi',\ \psi'',\ \ldots$$

die Einzelcharaktere, welche dazu dienen, diese Aufzählung für irgend eine Determinante auszuführen, sei es, dass es sich um eigentlich primitive Formen, sei es, dass es sich um uneigentlich primitive Formen handelt, falls für die gegebene Determinante die Ordnung dieser letzteren Formen vorhanden ist. Da der Fall, dass die Determinante eine (positive) Quadratzahl ist, ausgeschlossen wurde, so enthält der erste Theil der horizontalen Reihe (25) wenigstens ein Glied, und die Besichtigung der beiden in dem § 3 gegebenen Tabellen lehrt uns, dass die Ausdrücke $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$, welche diesen ersten Theil bilden, immer die Bedingung erfüllen:

$$(26) \qquad \varphi\varphi'\varphi'' \cdots = \delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right).$$

Wir bezeichnen allgemein mit χ irgend einen der Ausdrücke (25) oder irgend eines der Producte, welche man aus diesen Ausdrücken bilden kann, indem man zwei, drei, und so weiter fort. schliesslich alle Ausdrücke mit einander multiplicirt, wobei nur das einzige Product (26) ausgeschlossen wird; mit anderen Worten wir bezeichnen mit χ irgend ein Glied des entwickelten Ausdruckes:

$$(27)\quad [(1+\varphi)(1+\varphi')(1+\varphi'' \cdots][(1+\psi)(1+\psi')(1+\psi'' \cdots] - 1 - \varphi\varphi'\varphi''\cdots.$$

Legen wir dem Buchstaben λ dieselbe Bedeutung wie in dem § 3 bei, so ist die Anzahl der Ausdrücke χ gleich $2^\lambda - 2$. [366] Theilt man nun die Gesammtanzahl h der zu einer gegebenen Determinante gehörenden Formen in zwei Gruppen. die bez. H und H' Formen enthalten, indem man in die erste Gruppe alle diejenigen Formen aufnimmt, welche der Bedingung $\chi = 1$ genügen, und in die zweite alle die, welche die entgegengesetzte Bedingung erfüllen, so wollen wir nachweisen, dass immer

$$H - H' = 0$$

ist. Um dies zu thun, genügt es, die soeben benutzte Analyse, welche von der Gleichung (12) ausging, auf die allgemeinere Gleichung (11) anzuwenden, nachdem in ihr den Grössen Θ, η, P_2 und R_1 Werthe beigelegt sind, welche den Ausdruck $\Theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right)$ mit χ coincidiren lassen. Wenn man diese Bedingung erfüllt, so kann, wie man sich leicht überzeugt, nicht gleichzeitig:

$$\Theta = 1,\; \eta = 1.\; P_2 R_1 = \pm 1$$

oder

$$\delta\Theta = 1,\; \varepsilon\eta = 1,\; P_1 R_1 = \pm 1$$

sein. Die Unmöglichkeit des ersten Werthesystems folgt daraus, dass χ wenigstens einen Factor von einer der Formen:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\; (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.\; \left(\frac{m}{p}\right),\; \left(\frac{m}{r}\right)$$

enthält. Damit das zweite Werthesystem zulässig wäre. müsste $\Theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$. $P_2 R_1 = \pm P$ sein; dadurch würde χ die Form:

$$\delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{p}\right) = \varphi\varphi'\varphi''\cdots$$

erhalten, welche wir oben ausgeschlossen haben. Daraus folgt, dass jeder der beiden Factoren auf der rechten Seite der Gleichung (11) von derselben Art ist, wie der zweite Factor auf der rechten Seite der Gleichung (12), und dass mithin jeder dieser beiden Factoren sich einem endlichen Grenzwerthe von der Form (14) unbegrenzt annähert, wenn die positive Veränderliche ϱ unendlich klein wird. Um die linke Seite der Gleichung (11) nach demselben Gesichtspunkte zu untersuchen, muss man, wenn es sich um eine negative Determinante und die eigentlich primitive Ordnung handelt, die Gleichung (16) durch die folgende ersetzen:

$$\Sigma \chi \frac{2^{\mu+1}}{m^s} =$$

$$\pm \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} \pm \Sigma \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} \pm \cdots,$$

wo man das obere oder das untere Zeichen in jedem Gliede der rechten Seite wählen muss, je nachdem die Form in dem betreffenden Gliede der Bedingung $\chi = 1$ oder $\chi = -1$ genügt; in den drei anderen Fällen muss man ähnliche Substitutionen machen. Wenn dies geschehen ist und wenn immer ϱ als unendlich klein betrachtet wird, so sieht man ohne Mühe und ohne auf irgendwelche Einzelheiten in dieser Hinsicht näher eingehen zu müssen, dass die linke Seite der Gleichung (11) — abgesehen von einem blossen Zahlenfactor, welcher für die vier Fälle verschieden ist — das Product von $(H - H')\frac{1}{\varrho}$ mit [367] einem der Ausdrücke:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\pi,\quad \frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log\left(T + U\sqrt{D}\right) \text{ oder } \frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log\tfrac{1}{2}\left(T + U\sqrt{D}\right)$$

ist. Diese letzteren Ausdrücke sind aber offenbar von Null verschieden; damit also die linke Seite endlich bleibt, wie die rechte, so muss

$$H - H' = 0$$

sein, was zu beweisen war.

Mittelst dieses Resultates gelingt es uns leicht den Nachweis zu führen, dass die Formen gleichmässig in die nach den Regeln des § 3 aufgezählten Geschlechter vertheilt sind. Es sei zur Abkürzung $2^{\lambda-1} = \varkappa$, und es mögen die Anzahl der Formen, welche die verschiedenen, in beliebiger Reihenfolge angeordneten Geschlechter enthalten, mit h_1, h_2, h_3, ..., $h_\varkappa$ bezeichnet werden, wobei die Glieder dieser Reihe, welche nicht existirenden Geschlechtern entsprechen, gleich Null zu setzen sind. Beachtet man nun, dass die Formen, welche ein Geschlecht bilden, entweder sämmtlich der Bedingung $\chi = 1$ oder sämmtlich der entgegengesetzten Bedingung $\chi = -1$ genügen, so kann offenbar jede Gleichung von der Form:

$$H - H' = 0$$

auch folgendermaassen geschrieben werden:

$$h_1 \pm h_2 \pm h_3 \pm \cdots \pm h_\varkappa = 0. \tag{28}$$

Dem ersten Gliede geben wir das Zeichen $+$ für jedes beliebige χ; jedes andere Glied erhält das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem das Geschlecht, welchem dieses Glied entspricht, der gleichen Bedingung $\chi = \pm 1$ genügt, wie das Geschlecht, auf welches sich die Zahl h_1 bezieht, oder der entgegengesetzten Bedingung. Nun müssen wir untersuchen, wie oft in dem Complexe der Gleichungen, welche der vorstehenden analog sind und deren Anzahl gleich derjenigen der Ausdrücke χ, nämlich gleich $2^\lambda - 2$ ist, irgend ein Glied $h_{(i)}$, abgesehen von dem ersten, das positive oder negative Vorzeichen hat, oder mit anderen Worten, wie oft das Vorzeichen dieses Gliedes dem des ersten gleich oder entgegengesetzt ist. Es sei:

$$\varphi = \alpha,\ \varphi' = \alpha',\ \varphi'' = \alpha'',\ \ldots \mid \psi = \beta,\ \psi' = \beta',\ \psi'' = \beta'', \ldots$$

der Gesammtcharakter des Geschlechtes, dessen Formenanzahl gleich h_1 ist; hierbei sind α, α', α'', ...; β, β', β'', ... bestimmte Werthe von der Form ± 1, deren erstere der Bedingung $\alpha\alpha'\alpha'' \cdots = 1$ genügen. Gerade so sei:

$$\varphi = a,\ \varphi' = a',\ \varphi'' = a'',\ \ldots \mid \psi = b,\ \psi' = b',\ \psi'' = b'', \ldots$$

der Gesammtcharakter des Geschlechtes, auf welches sich $h_{(i)}$ bezieht. Dann genügt es wieder auf den Ausdruck (27), dessen Entwickelung alle Ausdrücke χ liefert, zurückzugreifen, um zu sehen, dass der Ueberschuss der Anzahl der Fälle, in denen h_1 und $h_{(i)}$ gleiche Zeichen haben, über die Anzahl der Fälle, in denen sie entgegengesetzte Zeichen besitzen, [368] durch den folgenden Ausdruck[15]) gegeben ist:

$$[(1 + \alpha a)(1 + \alpha' a') \ldots][(1 + \beta b)(1 + \beta' b') \ldots]$$
$$- \alpha a \alpha' a' \ldots - 1.$$

Da nun die beiden Gesammtcharaktere von einander verschieden sind, so kann nicht gleichzeitig

$$\alpha a = 1,\ \alpha' a' = 1,\ \ldots;\ \beta b = 1,\ \beta' b' = 1,\ \ldots$$

sein; der erste Theil des obigen Ausdruckes hat mithin den Werth Null, und da offenbar

$$\alpha a \cdot \alpha' a' \cdots = 1$$

ist, so hat der Ueberschuss, um dessen Bestimmung es sich handelt, den Werth -2. Wenn man noch sämmtliche Gleichungen von der Gestalt (28), deren Anzahl gleich $2^\lambda - 2$ ist, und die evidente Gleichung:

$$2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \cdots + 2h_\varkappa = 2h$$

hinzunimmt, so ergiebt sich:

$$2^\lambda h_1 = 2h,$$

und folglich

$$h_1 = \frac{h}{2^{\lambda-1}}.$$

Dieses Resultat beweist aber, dass die Gesammtheit der Formen sich gleichmässig in die verschiedenen Geschlechter vertheilt, da das Geschlecht, auf welches sich die Zahl h_1 bezieht, ganz willkürlich gewählt war.

Auf die Weise hat man für einen der Hauptsätze aus der Theorie der quadratischen Formen, welcher bisher nur durch Zuhülfenahme einer grossen Anzahl verschiedener Betrachtungen bewiesen worden war, einen neuen und sehr einfachen Beweis erhalten. Vergl. hierzu die Artikel 252, 261 und 287, III des *Gauss*'schen Werkes.

Es erübrigt uns noch, die Sätze abzuleiten, welche die in den ersten vier Nummern dieses Paragraphen aufgestellten Gleichungen enthalten, und welche von zweierlei Art sind; die erste Art folgt aus den Ausdrücken für h, wie wir sie in dem Vorstehenden erhalten haben, die andere dagegen erfordert die vorherige Ausführung der in diesen Ausdrücken auftretenden Summen, damit sich die Zahl h in einer rein arithmetischen Form darstellt. Da die Resultate, um die es sich handelt, sehr zahlreich und der Mehrzahl nach völlig neu sind, so empfiehlt es sich, sie mit einiger Ausführlichkeit darzustellen. Aus diesem Grunde verspare ich ihre Darlegung auf die Fortsetzung dieser Untersuchungen und beendige diesen ersten Theil damit, die Verpflichtung einzulösen, welche ich in der schon genannten Abhandlung über die arithmetische Progression übernommen habe. Nach dem § 11 dieser Abhandlung bleibt zu beweisen, dass die Summe:

$$\Sigma (\pm 1)^{\alpha} (\pm 1)^{\beta} (\pm 1)^{\gamma} (\pm 1)^{\gamma'} \cdots \frac{1}{n},$$

in welcher die oberen Zeichen nicht gleichzeitig gültig sind, einen von Null verschiedenen Werth hat.

Wir theilen die Primzahlen $p, p', p'', \ldots$, auf welche sich die doppelten Werthe der Form ± 1 beziehen, von der dritten an in zwei Gruppen und fassen in der ersten Gruppe alle diejenigen [369] dieser Primzahlen zusammen, welchen das untere Zeichen entspricht. Bezeichnen wir weiterhin mit $p, p', p'', \ldots$ die Zahlen dieser ersten Gruppe, so werde:

$$\pm p p' p'' \cdots = P$$

gesetzt, wo das Zeichen auf der linken Seite noch zu fixiren ist; $r, r', r'', \cdots$ seien die Primzahlen der zweiten Gruppe und wir setzen:

$$r r' r'' \cdots = R.$$

Dann ergiebt sich aus der Bedeutung der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \cdots$, welche in dem § 7 der genannten Abhandlung auseinander gesetzt ist, dass die obige Summe auf die Form:

$$\Sigma (\pm 1)^{\frac{n-1}{2}} (\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}$$

gebracht werden kann. Wenn man nun das willkürliche Vorzeichen in der Gleichung

$$P = \pm p p' p'' \cdots$$

so wählt, dass die Zahl P von der Form $4\mu + 1$ oder von der Form $4\mu + 3$ ist, je nachdem das in dem Ausdrucke $(\pm 1)^{\frac{n-1}{2}}$ gegebene Zeichen das obere oder untere ist, so stimmt diese letzte Summe offenbar mit derjenigen überein, welche der oben gefundene Ausdruck für die Anzahl h der zur Determinante D gehörenden Formen enthält, wobei wir diese

Determinante gleich PR^2 oder gleich $2PR^2$ voraussetzen, je nachdem das in dem Ausdrucke $(\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ gegebene Zeichen das obere oder untere ist. Daraus folgt, dass die Summe, welche wir zu untersuchen hatten, in der That immer von Null verschieden ist; denn im anderen Falle würde h selbst sich auf Null reduciren, was unmöglich ist, wie man mit Hülfe der Form $x^2 - Dy^2$ erkennt, welche für jeden Werth der Determinante D vorhanden ist.

Berlin, den 4. Juli 1839.

Zweiter Theil.

Crelle's Journal. Bd. 21, S. 1—12

§ 7.

[1] Wir wollen nun die Folgerungen entwickeln, welche aus den in den ersten vier Nummern des vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen sich herleiten lassen, und beginnen mit denjenigen, welche unabhängig von der Summation der beiden in den Ausdrücken für h enthaltenen allgemeinen Reihen erhalten werden können. Dann gehen wir zu den Folgerungen über, welche sich aus dieser Summation ergeben; die Summation kann entweder durch Integration eines rationalen Bruches oder mit Hülfe von bekannten Sinus- und Cosinusreihen ausgeführt werden.

Wir greifen auf die Gleichung (17) zurück, in welcher auf der rechten Seite die beiden Summationen in Bezug auf n über alle positiven, ungeraden und zur negativen Determinante D relativ primen ganzen Zahlen erstreckt werden müssen. Setzt man in der ersten dieser beiden Summen n' an Stelle von n, so kann die Gleichung auch in der Form:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \sum' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \cdots \\ &\qquad = 2\sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{(nn')^s} \end{aligned} \right.$$

geschrieben werden, wo rechts das Zeichen Σ die doppelte Summation in Bezug auf n und n' andeutet. Dieser Reihe kann leicht dadurch die Gestalt einer einfachen Reihe gegeben werden, dass man alle Glieder, für welche das Product nn' denselben Werth hat, in ein einziges Glied zusammenfasst. Man erhält so als allgemeines Glied $\sigma_n \frac{1}{n^s}$, wo n immer die gleiche

Bedeutung wie bisher hat und σ_n den Ueberschuss der Anzahl der Theiler k von n, welche der Bedingung:

$$\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = 1$$

genügen, über die Anzahl dieser Theiler, welche die entgegengesetzte Bedingung:

$$\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = -1$$

befriedigen, bezeichnet. [2] Die linke Seite der Gleichung (1) kann ebenfalls auf eine einfache Reihe von ähnlicher Form zurückgeführt werden: das allgemeine Glied dieser Reihe hat als Coefficienten die Zahl, welche angiebt, wie oft die ganze Zahl n durch sämmtliche quadratische Formen dargestellt werden kann, wenn man in diesen Formen den Unbestimmten x und y irgendwelche positive oder negative, zu einander relativ prime oder nicht prime Werthe beilegt. Bezeichnet man diese Anzahl mit τ_n, so erhält man:

$$\Sigma \tau_n \frac{1}{n^s} = 2 \Sigma \sigma_n \frac{1}{n^s} .$$

Da diese Gleichung für jeden Werth der Unbestimmten s, welcher grösser als 1 ist, besteht, so lässt sich aus ihr leicht schliessen, dass

$$\tau_n = 2 \sigma_n$$

ist.

Dieses Resultat kann mit demjenigen, welches man auf dieselbe Weise aus der Gleichung (10) ableitet, nachdem man deren rechter Seite die Form:

$$2 \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{(2nn')^s}$$

gegeben hat, in dem nachfolgenden Satze vereinigt werden; in diesem sind die eigentlich und uneigentlich primitiven Formen, wie wir sie bisher nannten, als Formen erster und zweiter Art unterschieden*).

*) Ich glaubte, in diesem Punkte von der in den *Disq. arithm.* angenommenen Terminologie abweichen zu sollen, um in den

»Ist n eine positive ungerade und zur negativen Determinante D relativ prime ganze Zahl und bezeichnet σ den Ueberschuss der Anzahl der Theiler k von n, für welche $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = 1$ ist (wo δ, ε und P die im § 6 festgesetzte Bedeutung haben), über die Anzahl dieser Theiler, welche die entgegengesetzte Bedingung $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = -1$ erfüllen, so giebt das Doppelte der Zahl σ an, auf wieviele verschiedene Arten die ganze Zahl $n(2n)$ durch das vollständige Formensystem erster (zweiter) Art, dessen Determinante D ist, dargestellt werden kann.«

Es muss hierzu nothwendigerweise bemerkt werden, dass dieses Resultat dieselben Ausnahmefälle darbietet, wie der Lehrsatz I des § 4, und dass für diese beiden Fälle die Anzahl der Darstellungen bez. gleich 4σ oder 6σ ist.

[**3**] Legt man der Determinante D bestimmte Werthe bei, so erhält man sehr einfache Sätze, wie z. B. die folgenden[16]):

> »Die Anzahl von Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = n$ ist gleich dem vierfachen Ueberschusse der Anzahl der Theiler von n, welche die Form $4\nu + 1$ haben, über die Anzahl dieser Theiler von der Form $4\nu + 3$.«
>
> »Die Anzahl von Lösungen der Gleichung $x^2 + 2y^2 = n$ ist gleich dem doppelten Ueberschusse der Anzahl der Theiler von n, welche von einer der Formen $8\nu + 1$, 3 sind, über die Anzahl dieser Theiler, welche von einer der Formen $8\nu + 5$, 7 sind.«

Und so fort.

Der erste dieser speciellen Sätze war schon bekannt. Herr *Jacobi*, von welchem dieser Satz zuerst aus der Vergleichung

---

Benennungen die Analogie, welche zwischen den durch dieselben bezeichneten Gebilden besteht, bewahren zu können. Die quadratischen Formen mit complexen Coefficienten, mit denen wir uns in der Fortsetzung dieser Untersuchung zu beschäftigen haben werden, bieten in der Beziehung, um die es sich hier handelt, gegenüber den gewöhnlichen Formen eine grössere Mannigfaltigkeit dar, welcher sich die von Herrn *Gauss* gebrauchten Ausdrücke nur schwer anpassen würden. Thatsächlich kann in Formen dieser Art der grösste gemeinsame Theiler von a, $2b$, c die Einheit, die Zahl $1 + \sqrt{-1}$ oder endlich die Zahl 2 sein, wobei immer vorausgesetzt ist, dass derjenige von a, b, c gleich der Einheit ist.

zweier zur Theorie der elliptischen Functionen gehörenden Reihen abgeleitet worden war, hat seitdem einen rein arithmetischen Beweis desselben gegeben*).

Durch Betrachtungen derselben Art kann man zu dem oben ausgesprochenen allgemeinen Resultate gelangen, indem man von dem schon genannten Lehrsatze des § 4 ausgeht. Dies wollen wir in Kürze zeigen, wobei wir uns auf den Fall beschränken, in welchem die Formen zu der ersten Art gehören, da die gleiche Schlussweise sich auch auf den anderen Fall anwenden lässt. Wir setzen zunächst voraus, dass alle Primzahlfactoren von n zu der von uns mit f bezeichneten Art gehören, und es sei $n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} \ldots$, wo $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ungleiche Primzahlen bezeichnen. Um alle Darstellungen, deren n fähig ist, vollständig aufzuzählen, ordnen wir sie in Gruppen, indem wir in dieselbe Gruppe alle diejenigen Darstellungen zusammenfassen, für welche der grösste gemeinschaftliche Theiler der Unbestimmten x und y denselben Werth l hat, durch dessen Quadrat augenscheinlich n theilbar sein muss. Die Anzahl der in einer solchen Gruppe enthaltenen Darstellungen ist offenbar dieselbe, wie die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl $\frac{n}{l^2}$, bei welchen die Unbestimmten x und y der Bedingung, relative Primzahlen zu sein, unterworfen sind. Aus der über die Natur von f_1, $f_2, \ldots$ gemachten Voraussetzung und aus dem bereits citirten Satze folgt aber, dass diese letztere Anzahl gleich $2 \cdot 2^\mu$ ist, wenn μ die Anzahl der ungleichen Primzahlfactoren von $\frac{n}{l^2}$ bezeichnet. Es läuft also alles darauf hinaus, die Summe der Potenzen 2^μ, welche den ganzen Zahlen von der Form $\frac{n}{l^2}$ entsprechen, zu bestimmen. Um diese Summe zu erhalten, [4] betrachten wir das Polynom:

$$F_1 = 2f_1^{\lambda_1} + 2f_1^{\lambda_1 - 2} + 2f_1^{\lambda_1 - 4} + \cdots,$$

welches so weit fortzusetzen ist, als die Exponenten nicht negativ werden, und in welchem der Coefficient des letzten Gliedes gleich 2 oder gleich 1 zu setzen ist, je nachdem der

*) Siehe Journal f. r. u. a. M., Bd. 12, S. 167. [*Jacobi*'s Werke, Bd. 6, S. 245. H.]

Exponent dieses Gliedes den Werth 1 oder 0 hat. Da das entwickelte Product aus diesem Polynom und den analogen. auf $f_2, f_3, \ldots$ bezüglichen Polynomen offenbar von allen Gliedern der Form $2^\mu \cdot \frac{n}{l^2}$ gebildet wird, so erhält man die Summe der Potenzen 2^μ, wenn man alle Zahlen $f_1, f_2, \ldots$ durch die Einheit ersetzt. Durch diese Aenderung werden aber $F_1, F_2, \ldots$ bez. gleich $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \ldots$; hieraus folgt, dass die Anzahl der Darstellungen, welche bestimmt werden soll, gleich dem doppelten Producte $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\ldots$ ist, welches letztere bekanntlich die Anzahl der Theiler von n angiebt. In diesem ersten Falle ist also, wie man sieht, das Resultat in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze, da in diesem Falle, in welchem die Theiler sämmtlich die erste der in diesem Satze ausgesprochenen Bedingungen erfüllen, die Anzahl der Theiler genau gleich dem mit σ bezeichneten Ueberschusse ist. Wir gehen nun zu dem allgemeinen Falle über, in welchem n auch Primzahlfactoren g von der Art enthält, dass für sie

$$\delta^{\frac{g-1}{2}} \varepsilon^{\frac{g^2-1}{8}} \left(\frac{g}{P}\right) = -1$$

ist, und setzen:

$$n = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots \times g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} \cdots.$$

Aus dem bereits untersuchten Falle lässt sich leicht folgern, dass bei dieser Annahme die Anzahl der Darstellungen, deren n fähig ist, durch das Product $2(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\ldots$ gegeben wird, wenn die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots$ sämmtlich gerade Zahlen sind, und sich dagegen auf Null reducirt, wenn dies nicht der Fall ist. Wir haben also nachzuweisen, dass der Ueberschuss σ den Werth $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\ldots$ oder den Werth Null hat, je nachdem n dem ersten oder dem zweiten dieser beiden Fälle angehört. Um diesen Beweis zu führen, bilden wir das Product der Ausdrücke:

$$1 + f_1 + \cdots + f_1^{\lambda_1},\ 1 + f_2 + \cdots + f_2^{\lambda_2}, \ldots,$$
$$1 + g_1 + \cdots + g_1^{\nu_1},\ 1 + g_2 + \cdots + g_2^{\nu_2}, \ldots,$$

dessen verschiedene Glieder alle Theiler von n liefern. Wird irgend einer dieser Theiler mit k bezeichnet, so ist $\delta^{\frac{k-1}{2}} \varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}} \left(\frac{k}{P}\right) = \pm 1$, wobei das obere oder untere Zeichen gültig ist, je nachdem die Anzahl der in k enthaltenen Factoren $g_1, g_2, \ldots$ gerade oder ungerade ist. Folglich geht das obige Product [5] in σ über, wenn in ihm $1 = f_1 = f_2 = \cdots$, $-1 = g_1 = g_2 = \cdots$ gesetzt wird. Das Product wird mithin gleich:

$$(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdots \times \frac{1-(-1)^{\nu_1+1}}{2} \cdot \frac{1-(-1)^{\nu_2+1}}{2} \cdots;$$

dieser Ausdruck ist in der That aber gleich $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \ldots$, wenn $\nu_1, \nu_2, \ldots$ sämmtlich gerade Zahlen sind, und gleich Null in jedem anderen Falle.

Die vorstehenden Resultate beziehen sich auf den Fall, in welchem die Determinante D eine negative ganze Zahl ist. Aehnliche Eigenschaften existiren für die Formen, deren Determinante positiv ist. Um diese Eigenschaften zu ermitteln, kann man von den Reihen, welche wir in den Nummern III und IV des § 6 betrachtet haben, Gebrauch machen. Man kann diese Eigenschaften aber auch durch rein arithmetische Betrachtungen erhalten, welche den von uns soeben auseinandergesetzten ganz ähnlich sind, indem man den Lehrsatz III des § 4 zum Ausgangspunkte nimmt.

Es würde mithin unnütz sein, in dieser Hinsicht auf weitere Einzelheiten einzugehen, und wir beschränken uns darauf, die Resultate, welche sich auf die Formen von positiver Determinante beziehen, anzugeben. Nützlich ist es aber, diesem Satze eine Bemerkung vorauszuschicken, welche geeignet ist, ihn zu vereinfachen, und welche die Bedingungen betrifft, denen die Coefficienten der Formen von positiver Determinante in den §§ 4 und 6 unterworfen wurden. Dort wurde vorausgesetzt, dass von den Coefficienten jeder derartigen Form, wie $ax^2 + 2bxy + cy^2$, die beiden ersten positiv sind, während der dritte negativ ist. Von diesen Bedingungen sind aber nur die erste und dritte nothwendig, und alles, was in den genannten Paragraphen bewiesen worden ist, gilt ebenfalls, wenn b negativ oder Null ist. In der That haben wir nirgends auf das Vorzeichen des mittleren Gliedes Rücksicht genommen, ausser in der Nummer III des § 6, um zu beweisen, dass der Ausdruck $ax^2 + 2bxy + cy^2$ positiv ist, wenn man in demselben:

$$x > 0,\ y > 0,\ y \leqq \frac{aU}{T - bU} x$$

voraussetzt. Dieses Resultat hängt aber, wie leicht zu erkennen ist, nicht mehr von dem Vorzeichen von b ab. Um sich davon zu überzeugen, beachte man, dass die letzte dieser Ungleichheiten in die Form $(ax+by)\,U \geqq yT$ gebracht werden kann, aus welcher, da die rechte Seite positiv ist, $(ax+by)^2\,U^2 \geqq y^2\,T^2$ folgt. Andrerseits ist $T^2 > DU^2$, und mithin erhält man durch Multiplication $(ax+by)^2 > Dy^2$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, da der Coefficient a positiv ist, $ax^2+2bxy+cy^2 > 0$, was zu beweisen war.

[6] Nimmt man auf die soeben gemachte Bemerkung Rücksicht und bezeichnet man, wie früher, mit ω die Zahl 1 oder 2, je nachdem es sich um Formen der ersten oder zweiten Art handelt, so kann man die betreffenden Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen.

»Ist D eine positive ganze Zahl (aber keine Quadratzahl) und bezeichnen T und U die kleinsten positiven Werthe von t und u (ω und 0 ausgeschlossen), welche der Gleichung $t^2 - Du^2 = \omega^2$ genügen, so seien:

$$ax^2+2bxy+cy^2,\ a'x^2+2b'xy+c'y^2,\ \ldots$$

die verschiedenen Formen erster (zweiter) Art, welche die Zahl D zur Determinante haben und so gewählt sind, dass die Coefficienten von x^2 sämmtlich positiv, die von y^2 sämmtlich negativ sind; wir setzen ferner voraus, dass die Unbestimmten x und y nur positive Werthe annehmen sollen, ausserdem in der ersten Form der Bedingung $y \leqq \frac{aU}{T-bU}\,x$ und in den anderen Formen ähnlichen Bedingungen unterworfen sind. Bezeichnet dann n eine positive, ungerade und zu D relativ prime ganze Zahl, so behaupte ich, dass die Anzahl der verschiedenen Darstellungen, deren die Zahl ωn durch die gegebenen Formen fähig ist, gleich ist dem Ueberschusse der Anzahl der Theiler von k, für welche der Ausdruck $\delta^{\frac{k-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{k^2-1}{8}}\left(\frac{k}{P}\right)$ den Werth 1 hat, über die Anzahl dieser Theiler, welche demselben Ausdruck den Werth -1 geben.«

Um diesen Satz auf einen speciellen Fall anzuwenden, werde $D = 2$ gewählt. Dann ist $\omega = 1$, $T = 3$, $U = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, $P = 1$, und das vollständige Formensystem reducirt sich auf ein einziges Glied, als welches wir die Form

$x^2 - 2y^2$ wählen können. Das auf diesen Fall bezügliche Resultat lautet also:

»Wenn in der Gleichung $x^2 - 2y^2 = n$, wo n eine ungerade, positive Zahl ist, die Unbestimmten x und y nur positive Werthe, welche überdies die Bedingung $3y \leqq 2x$ erfüllen, annehmen können, so ist die Anzahl von Lösungen dieser Gleichung gleich dem Ueberschusse der Anzahl der Theiler von n, welche eine der Formen $8\nu \pm 1$ haben, über die Anzahl dieser Theiler, welche eine der Formen $8\nu \pm 5$ haben.«

Da in der oben aufgestellten Gleichung (1), ebenso wie in den drei analogen Gleichungen, welche wir der Kürze wegen hinzuschreiben unterlassen haben, die beiden Seiten in Gruppen von Gliedern einander gleich sind — in dem Sinne, dass das einzige Glied, welches aus der Vereinigung aller einzelnen [7] Glieder auf der rechten Seite, für welche das Product nn' einen bestimmten Werth hat, resultirt, identisch gleich der Summe aller derjenigen Glieder auf der linken Seite ist, für welche die quadratischen Formen den gleichen bestimmten Werth haben, gebildet wird —, so sieht man, dass die Richtigkeit dieser Gleichungen von der besonderen Gestalt der Function, welche in ihnen auftritt, unabhängig ist und dass diese Function, welche in den betreffenden Gleichungen, so wie sie sich uns zunächst dargeboten haben, eine Potenz des Exponenten $-s$ ist, durch eine ganz willkürliche Function ersetzt werden kann. Wenn immer nur die Gleichung, welche sich auf den ersten der vier allgemeinen Fälle bezieht, hingeschrieben wird, so besteht also auch die folgende Gleichung:

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma'\varphi(ax^2+2bxy+cy^2)+\Sigma'\varphi(a'x^2+2b'xy+c'y^2)+\cdots \\ \qquad = 2\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\dfrac{n}{P}\right)\varphi(nn'), \end{cases}$$

in welcher die Summenzeichen ihre frühere Bedeutung beibehalten haben. Die durch die Charakteristik φ bezeichnete Function muss nur, wie hinzuzufügen ist, so beschaffen sein, dass die obigen Reihen convergent sind und zu den Reihen gehören, welche wir Reihen erster Art nannten. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn man $\varphi(z) = q^z$ annimmt, wo q eine reelle oder imaginäre Constante, deren numerischer Werth oder deren Modul kleiner als die Einheit ist, bezeichnet. Dieser

Fall ist insofern besonders bemerkenswerth, als er die eine der Summationen auf der rechten Seite auszuführen und die auf der linken Seite stehenden doppelten Reihen in Summen von Producten einfacher Reihen umzuformen gestattet, sodass die Gleichung dann eine Beziehung zwischen gewissen einfachen Reihen darstellt, welche mit Reihen aus der Theorie der elliptischen Functionen identisch sind. Die Vereinfachung, von welcher wir sprechen, findet jedoch nur statt für die Gleichung (2) und die weitere analoge Gleichung, welche sich auf einen negativen Werth von D bezieht; sie erstreckt sich nicht auf den Fall, in welchem die Determinante positiv ist. Man kann in diesem letzteren Falle wohl noch eine der Summationen auf der rechten Seite ausführen, aber die Ungleichheitsbedingungen, denen jene in Bezug auf x und y unterworfen sind, verhindern die Umformung der Doppelreihen nach x und y in Producte von einfachen Reihen[17]).

Da die Formeln, auf welche man durch die soeben besprochene Reduction geführt wird, neu sind und einiges Interesse darzubieten scheinen, so deuten wir kurz den Weg an, auf welchem man dieselbe ausführen kann. Wenn man in der Gleichung (2) der Function φ die Form einer Exponentialfunction giebt, [8] so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma' q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \Sigma' q^{a'x^2+2b'xy+c'y^2} + \cdots \\ &\qquad = 2\,\Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) q^{nn'}. \end{aligned}\right.$$

In dem besonderen Falle, wo die sämmtlichen mittleren Coefficienten b, b', ... gleich Null sind, stellt sich die linke Seite unmittelbar als Summe einer endlichen Anzahl von Producten einfacher Reihen dar. Ist z. B. $D = -2$, so existirt dann nur die einzige Form $x^2 + 2y^2$, und die Summe $\Sigma' q^{x^2+2y^2}$, in welcher $x^2 + 2y^2$ nur ungerade Werthe annehmen darf, muss über alle ungeraden ganzen Zahlen x und über alle geraden und ungeraden ganzen Zahlen y erstreckt werden. Vereinigt man die Glieder, welche entgegengesetzten Werthen von x oder y entsprechen, so nimmt die linke Seite die Gestalt des folgenden Productes an:

$$2(q + q^{3^2} + q^{5^2} + \cdots)(1 + 2q^2 + 2q^{2\cdot 2^2} + 2q^{2\cdot 3^2} + \cdots).$$

Da in diesem Falle $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$, $P = -1$ ist, so wird die linke Seite gleich

$$2\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} q^{nn'},$$

wo das Zeichen $\sum$ sich auf alle positiven und ungeraden Werthe von n und n' erstreckt. Führt man die Summation in Bezug auf n' aus, so erhält man:

$$2\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Man erhält also in diesem besonderen Falle die Gleichung:

$$(q+q^9+q^{25}+\cdots)(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots)$$
$$= \frac{q}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^6}-\frac{q^5}{1-q^{10}}-\frac{q^7}{1-q^{14}}+\cdots,$$

welche sich mit Hülfe von bekannten Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen leicht verificiren lässt.[18]

Wir gehen nun zu einem allgemeineren Falle über, welcher genügt, um zu zeigen, auf welche Weise die fragliche Reduction für beliebige negative Werthe von D ausgeführt werden kann. Es sei $D = -p$, wo p eine Primzahl von der Form $4\nu + 3$ bezeichnet. Bei dieser Annahme ist $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = -p$ zu setzen; die rechte Seite wird also, wenn man an Stelle von $\left(\frac{n}{-p}\right)$ den gleichwerthigen Ausdruck $\left(\frac{n}{p}\right)$ setzt, gleich

$$2\sum \left(\frac{n}{p}\right) q^{nn'}.$$

Da n und n' alle positiven, ungeraden und zu p relativ primen Werthe annehmen sollen, so geht der vorstehende Ausdruck, wenn man in ihm die Summation in Bezug auf n' ausführt, über in

$$4)\qquad 2\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^n}{1-q^{2n}} - 2\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^{np}}{1-q^{2np}}.$$

[9] Betrachten wir nun eine der auf der linken Seite stehenden Doppelsummen, z. B. die erste. Gemäss den Resultaten des § 5 können die Werthepaare, welche x und y in

dieser Summe annehmen müssen, in eine bestimmte Anzahl von Systemen der Form $x = 2pu + \alpha$, $y = 2pv + \gamma$ vertheilt werden, wo α, γ bestimmte ganze Zahlen und u, v unbestimmte ganze Zahlen, für welche alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ zu setzen sind, bezeichnen. Wenn man $ax^2 + 2bxy + cy^2$ in die Form $\frac{1}{a}[(ax + by)^2 + py^2]$ setzt, so erhält man:

$$\sum q^{\frac{1}{a}[2p(au+bv)+a\alpha+b\gamma]^2}\, q^{\frac{p}{a}(2pv+\gamma)^2}.$$

Wir zerlegen nun diese Theilsumme ihrerseits in weitere Summen, indem wir allmählich av, $av + 1$, ..., $av + a - 1$ an Stelle von v setzen. Für irgend eine dieser Theilsummen, deren Anzahl gleich a ist, erhält man so den folgenden Ausdruck, welcher sich auf die Substitution von $av + \lambda$ bezieht und in welchem zur Abkürzung $2pb\lambda + a\alpha + b\gamma = k$, $2p\lambda + \gamma = l$ gesetzt ist:

$$\sum q^{\frac{1}{a}[2pa(u+bv)+k]^2}\, q^{\frac{p}{a}(2pav+l)^2}.$$

Wenn man jetzt die Summation in Bezug auf u als die zuerst auszuführende ansieht, so hindert nichts, $u + bv$ durch u zu ersetzen, und das Resultat nimmt dann die Gestalt des Productes zweier einfachen Reihen an:

$$\sum q^{\frac{1}{a}(2pau+k)^2} \sum q^{\frac{p}{a}(2pav+l)^2}. \tag{5}$$

Diese beiden Reihen können, wie ferner leicht zu sehen ist, auf die höchst wichtige Function zurückgeführt werden, welche von Herrn *Jacobi* in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführt ist und welche den Ausdruck hat:

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots.$$

Andererseits kann man auch die beiden Reihen (4) auf elliptische Functionen zurückführen, wenn man die bekannten Formeln dieser Theorie mit den schönen Ausdrücken verbindet, welche Herr *Gauss* *) für die Darstellung von $\left(\frac{n}{p}\right)$ durch eine endliche Reihe von Sinus- oder Cosinusfunctionen gegeben hat.[18]

*) *Disq. arithm.*, art 355; *Summatio quarundam serierum sing.*, Werke. Bd. 2, S. 9. H.

Die Formeln, welche man auf diese Weise erhält, erscheinen mir besonders dadurch bemerkenswerth, dass die Producte der Form (5), welche die linke Seite bilden, sowohl hinsichtlich ihrer Anzahl als auch hinsichtlich der Constanten a, k, l, welche in ihnen vorkommen, von der Anzahl und den Coefficienten der verschiedenen quadratischen Formen, welche für die entsprechende Determinante existiren, abhängen; es ist zu hoffen, dass man durch tiefere Untersuchung der soeben angedeuteten Beziehung [**10**] zu den wichtigsten Resultaten gelangt, welche neues Licht auf die Natur der quadratischen Formen von negativer Determinante zu werfen im Stande sind. Dies ist wenigstens die Erwägung, welche mich veranlasst hat, diese Bemerkung, so unvollständig sie auch ist, den Mathematikern zur Beachtung vorzulegen.

§ 8.

In diesem Paragraphen wollen wir 1) die höchst einfache Beziehung aufstellen, welche zwischen der Anzahl der zu derselben Determinante gehörenden Formen erster und zweiter Art besteht, und 2) untersuchen, wie die Formenanzahl irgend einer Determinante abhängt von der Formenanzahl, welche dieser Determinante getheilt durch die grösste in ihr enthaltene Quadratzahl entspricht.

I. Es seien bez. h und h' die Anzahl der Formen erster und zweiter Art, deren Determinante eine ganze Zahl $4\nu+1$ ist. Setzen wir zuerst D als negative Zahl voraus, so giebt die Gleichung (19) § 6, wenn man beachtet, dass hier $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$ ist:

$$h = \frac{2}{\pi} \sqrt{D_1}\, \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}\,.$$

Es genügt, diesen Ausdruck mit den Gleichungen (21) zu vergleichen, um daraus die Folgerungen zu ziehen:

$$h = h',\ D \equiv 1 \ (\text{mod. } 8);\quad h = 3h',\ D \equiv 5 \ (\text{mod. } 8).$$

Die zweite dieser Gleichungen ist, wie hinzugefügt werden muss, für $D = -3$ unrichtig; in diesem Falle ist vielmehr $h = h'$.

II. Wenn D positiv ist, so ergiebt sich die zwischen h und h' bestehende Beziehung in derselben Weise aus der Vergleichung der Formeln (23) und (24). Bezeichnet man bez. mit T, U und T', U' die kleinsten positiven Werthe, welche den Gleichungen:

$$(1)\quad t^2 - Du^2 = 1 \qquad\qquad (2)\quad t'^2 - Du'^2 = 4$$

genügen, so lautet die Beziehung, um welche es sich handelt, folgendermaassen:

$$h = h'\,\frac{\log \frac{1}{2}(T' + U'\sqrt{D})}{\log(T + U\sqrt{D})}\,, \quad D \equiv 1 \pmod{8}\,;$$

$$h = 3\,h'\,\frac{\log \frac{1}{2}(T' + U'\sqrt{D})}{\log(T + U\sqrt{D})}\,, \quad D \equiv 5 \pmod{8}\,.$$

Um diesem Resultat eine einfachere Gestalt zu geben, beachten wir, dass alle Lösungen der Gleichung (1) offenbar in denen der Gleichung (2) enthalten sind; es genügt die Lösungen der letzteren Gleichung zu betrachten, in welchen t' und u' gerade sind, und $t = \frac{1}{2}t'$, $u = \frac{1}{2}u'$ zu setzen. Folglich ist, wenn T' und U' gerade Zahlen sind, $T = \frac{1}{2}T'$, $U = \frac{1}{2}U'$, und dieser Fall tritt, wie leicht zu sehen ist, immer ein, wenn D die Form $8\nu + 1$ hat, weil bei dieser Annahme die Gleichung (2) durch ungerade Werthe von t' und u' nicht würde befriedigt werden können.

11] Es bleibt also noch der Fall zu betrachten, in welchem D die Form $8\nu + 5$ hat und T' und U' gleichzeitig ungerade sind. Da alle positiven Lösungen der Gleichung (2) durch die Formel:

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl ist, gegeben sind, so folgt aus der obigen Bemerkung, dass man die Werthe T und U erhält, indem man den kleinsten Exponenten n bestimmt, für welchen t' und u' gerade sind, und dann $T = \frac{1}{2}t'$, $U = \frac{1}{2}u'$ setzt. Nun überzeugt man sich aber leicht, dass dieser Exponent die Zahl 3 ist; denn nimmt man $n = 2$, so findet man für u' den ungeraden Werth $T'U'$, während der $n = 3$ entsprechende Werth $\frac{1}{4}U'(3T'^2 + DU'^2)$ offenbar gerade ist. Mithin ist $T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^3$. Wendet man diese Resultate auf die oben gegebenen Gleichungen an, so sieht man, dass für eine Determinante von der Form $8\nu + 1$ stets $h = h'$ ist, und dass, wenn D die Form $8\nu + 5$ hat, alles von den ganzen Zahlen T' und U' abhängt; je nachdem diese Zahlen gerade oder ungerade sind, ist $h = 3h'$ oder $h = h'$.[19]

III. Indem wir uns jetzt zur zweiten der oben aufgeworfenen Fragen wenden, bemerken wir zunächst: Nachdem in dem Vorhergehenden die Beziehung, welche zwischen den zu derselben Determinante gehörenden Formen erster und zweiter Art stattfindet, aufgestellt worden ist, können wir bei der noch zu beantwortenden Frage die Formen, deren Classenanzahl zu vergleichen ist, als zur ersten Art gehörend voraussetzen. Es seien dann D und $D' = DS^2$ die beiden Determinanten, wo D keinen quadratischen Factor[20] enthält und S positiv vorausgesetzt wird, und wir bezeichnen bez. mit h und h' die Anzahl der Formen, welche bez. diesen beiden Determinanten entsprechen. Da die Grössen δ, ε, P für diese beiden Determinanten offenbar dieselben sind, so ist, wenn zuerst D als negative Zahl vorausgesetzt wird, auf Grund der Gleichung (19) des § 6:

$$h = \frac{2\sqrt{D_1}}{\pi} \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}.$$

$$h' = \frac{2S\sqrt{D_1}}{\pi} \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}.$$

Obgleich die allgemeinen Glieder der in beiden Ausdrücken auftretenden Reihen von gleicher Gestalt sind, so haben trotzdem diese Reihen verschiedene Werthe. In der ersten Gleichung ist nämlich die Summation über alle ungeraden und zu D relativ primen ganzen Zahlen n zu erstrecken, während in der zweiten Gleichung n nur ungerade und zu D' relativ prime ganze Zahlen annehmen darf. Um die zwischen diesen beiden Summen bestehende Beziehung aufzudecken, muss man auf die Gleichung (6) des § 6 zurückgreifen. Wenn man in dieser Gleichung $\Theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$, $P_2 = P$, $R_1 = 1$ setzt, so sieht man, dass die beiden obigen Reihen [12] als der Grenzwerth betrachtet werden können, gegen welchen das Product:

$$\Pi \frac{1}{1 - \delta^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P}\right) \frac{1}{q^s}}.$$

convergirt, wenn die Veränderliche s sich unbegrenzt der Einheit annähert; es ist aber der Unterschied wohl zu beachten, dass man in diesem Producte, wenn es sich um die erste Reihe handelt, alle positiven und ungeraden Primzahlen q, welche D theilen, ausschliessen muss, während man, um die zweite Reihe zu erhalten, alle positiven und ungeraden Primzahlen, welche $D' = DS^2$ theilen, auszuschliessen hat. Bezeichnet man mit $r, r', r'', \ldots$ die ungeraden, positiven und ungleichen Primzahlen, welche in D', aber nicht in D enthalten sind, so folgt, dass das Verhältniss der ersten zu der zweiten Reihe den Werth

$$\Pi \frac{1}{1 - \delta^{\frac{r-1}{2}} \varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}} \left(\frac{r}{P}\right) \frac{1}{r}}$$

hat, wo das Zeichen Π sich auf alle soeben definirten Werthe von r erstreckt.

Mit Hülfe dieses Resultates liefert die Vergleichung der Ausdrücke für h und h' die Beziehung:

$$h' = hS \cdot \Pi \left[1 - \delta^{\frac{r-1}{2}} \varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}} \left(\frac{r}{P}\right) \frac{1}{r}\right],$$

welche die gesuchte Beziehung zwischen h und h' darstellt. Diese Gleichung ist, wie hinzugefügt werden muss, nicht auf den Fall $D = -1$ anwendbar; in diesem Falle muss ihre linke Seite verdoppelt werden.

IV. Da der Fall, in welchem D und D' positiv sind, eine ganz ähnliche analytische Behandlung zulässt, so beschränken wir uns darauf, das diesbezügliche Resultat anzugeben. Bezeichnet man mit T, U und T', U' die kleinsten positiven Werthepaare, welche den Gleichungen $t^2 - Du^2 = 1$ und $t'^2 - D'u'^2 = 1$ genügen, so lautet das Resultat, um welches es sich handelt:

$$h' = hS \frac{\log(T + U\sqrt{D})}{\log(T' + U'\sqrt{D})} \Pi \left[1 - \delta^{\frac{r-1}{2}} \varepsilon^{\frac{r^2-1}{8}} \left(\frac{r}{P}\right) \frac{1}{r}\right];$$

man kann hierzu noch bemerken, dass der logarithmische Factor offenbar gleich der Einheit dividirt durch den kleinsten positiven Exponenten λ ist, für welchen der Coefficient von

$\sqrt{D}$ in der entwickelten Potenz $(T + U\sqrt{D})^\lambda$ durch S theilbar ist[21]).

Bevor wir diesen Paragraphen beschliessen und uns mit der am Anfange des vorigen Paragraphen erwähnten Summation beschäftigen, bemerken wir noch, dass die beiden soeben behandelten Fragen bereits in dem Werke von Herrn *Gauss* (art. 253—256), aber mit anderen Hülfsmitteln gelöst worden sind. Hinsichtlich der Resultate findet man, dass die des berühmten Autors für negative Determinanten mit den unsrigen identisch sind, dass sie aber, wenn die Vergleichung zwischen Formen mit positiver Determinante vorzunehmen ist, von unsern Resultaten wesentlich verschieden sind und sich in einer complicirteren Form darstellen.

(*Crelle*'s Journal, Bd. 21, S. 134—155.)

§ 9.

[**134**] Die Summation, welche uns noch auszuführen übrig bleibt, kann nach zwei verschiedenen Methoden bewirkt werden, indem man sich dazu der wichtigen Formeln bedient, welche Herr *Gauss* in seiner schönen Arbeit mit dem Titel »Summatio quarundam serierum singularium«*) aufgestellt hat. Die erste dieser Methoden stützt sich auf gewisse bekannte Reihen, welche nach den Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen fortschreiten. Als wir diese Methode in einer früheren Mittheilung**) benutzten, bemerkten wir bereits, dass sie in derselben Weise und mit gleicher Leichtigkeit auf alle Reihen anwendbar ist, welche dazu dienen, die Anzahl der Formen für irgend eine Determinante darzustellen, das ist also auf die beiden allgemeinen Reihen (19) und (23) des § 6. Wir haben sogar noch die Bemerkung hinzugefügt, dass die Reihen von dieser Gestalt noch durch dasselbe Hülfsmittel in mehreren Fällen summirt werden können, in welchen der Exponent s der in dem allgemeinen Gliede enthaltenen Potenz $\frac{1}{n^s}$ nicht gleich der Einheit ist, was ausserdem evident ist. In der That, da die betreffende Methode darin besteht, den Factor,

*) Werke, Bd. 2, S. 9. H.

**) Siehe Journal f. r. u. a. M., Bd. 18, S. 259—274. [Werke, Bd. 1, S. 357—374. H.]

welcher in $\frac{1}{n^s}$ multiplicirt ist, mit Hülfe der *Gauss*'schen Formeln durch eine endliche Anzahl von Gliedern einer der Formen $\sin nx$, $\cos nx$ zu ersetzen, so ist die Reihe nach dieser Transformation in eine Summe von endlichen trigonometrischen Reihen umgeformt, deren jede einen Ausdruck von der Form $\frac{\sin nx}{n^s}$ oder $\frac{\cos nx}{n^s}$ als allgemeines Glied hat, und kann folglich für dieselben Werthe von s summirt werden, für welche *D. Bernoulli* die Summen dieser letzteren Reihen gegeben hat.

Die zweite Methode beruht auf dem bekannten Integrationsverfahren rationaler Brüche. Die bereits citirten Reihen (19) und (23) § 6 stimmen mit den Reihen überein, [135] welche die zweite der drei Classen unendlicher Reihen bilden, die wir in der Abhandlung über die arithmetische Progression zu unterscheiden hatten, und wir haben schon in dem § 10 der genannten Abhandlung bemerkt, dass die Reihen zweiter und dritter Classe durch das Verfahren, welches wir in dem § 4 derselben Abhandlung ausführlich erörtert haben, summirt werden können. Beide soeben angegebenen Methoden sind von grosser Einfachheit. Da die zweite Methode diejenige ist, welche sich am natürlichsten darbietet, so wollen wir von ihr zuerst Gebrauch machen. Ehe wir aber diese Rechnung unternehmen, müssen wir an die *Gauss*'schen Formeln erinnern. Ich lasse hier eine Ableitung derselben folgen, welche sich zwar auf dieselben Principien, wie eine frühere Arbeit*), stützt, aber in mancher Hinsicht einfacher ist.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function von x, welche ich zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ als stetig voraussetze, und wird

$$\int_0^\pi f(x) \cos sx\,dx = c_s$$

gesetzt, so ist bekanntlich:

$$c_0 + 2\Sigma c_s \cos sx = \pi f(x),$$

*) *Ueber eine neue Anwendung bestimmter Integrale auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen*, Abhandl. d. Berl. Akad., 1835, S. 391—407; Werke, Bd. 1, S. 237—256. H.

wo sich das Zeichen Σ auf alle ganzen Zahlen von $s = 1$ bis $s = \infty$ erstreckt*. Da diese Entwickelung zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ einschliesslich gültig ist, so ist im Besonderen:

$$c_0 + 2\Sigma c_s = \pi f(0).$$

Man erkennt leicht, wie diese Gleichung abgeändert werden muss, wenn die Grenzen des Integrals c_s beliebige Werthe haben. Bezeichnet h eine positive ganze Zahl, so fassen wir z. B. die Grenzen 0 und $2h\pi$ ins Auge und setzen:

$$(1) \qquad \int_0^{2h\pi} f(x) \cos sx \, dx = c_s,$$

wo die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals immer stetig ist. Theilt man dieses Integral in $2h$ Theilintegrale, deren Grenzen:

$$0 \text{ und } \pi, \ \pi \text{ und } 2\pi, \ \ldots, \ (2h-1)\pi \text{ und } 2h\pi$$

sind, und führt man alle diese neuen Integrale auf solche mit den gemeinsamen Grenzen 0 und π zurück, so wird:

$$c_s = \int_0^{\pi} [f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + \cdots$$
$$+ f(2[h-1]\pi - x) + f(2[h-1]\pi + x)$$
$$+ f(2h\pi + x)] \cos sx \, dx.$$

Da dieser Ausdruck für c_s dieselbe Gestalt wie der oben gegebene hat, so ist:

$$(2) \quad c_0 + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} c_s = \pi\left[f(0) + f(2h\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=h-1} f(2s\pi)\right],$$

wo das allgemeine Glied c_s auf der linken Seite durch die Gleichung (1) gegeben ist. [136] Betrachtet man dann das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) \, dx = a,$$

* Dirichlet, Sur la convergence des séries trigon. (Journal f. r. u. a. M., Bd. 4, S. 157—169; Werke, Bd. 1, S. 117—132); Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen etc. (Repertorium der Physik von Dove u. Moser, Bd. 1, S. 152—174; Werke Bd. 1, S. 133—160.)

wo a eine numerische Grösse ist und setzt man in demselben $x = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, wo z die neue Veränderliche und n eine positive, durch 4 theilbare ganze Zahl bezeichnet, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right) dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Zerlegt man dieses Integral in unendlich viele Integrale, welche zwei aufeinanderfolgende Vielfache von π, wie z. B. $2s\pi$ und $2(s+1)\pi$ als Grenzen haben, und führt man diese neuen Integrale durch Aenderung von z in $2s\pi + z$ auf solche mit den gemeinsamen Grenzen 0 und 2π zurück, so wird:

$$\sum\int_0^{2\pi} \cos\frac{n}{8\pi}(2s\pi + z)^2\, dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle ganzen Zahlen von $s = -\infty$ bis $s = \infty$ bezieht.

Wenn man das Quadrat unter dem Cosinuszeichen entwickelt, dann das Glied $\frac{1}{2}ns^2\pi$, welches ein Vielfaches von 2π ist, unterdrückt und schliesslich je zwei Glieder der Summe, welche entgegengesetzten Werthen von s entsprechen, zu einem Gliede vereinigt, so ergiebt sich:

$$\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right)dz + 2\sum\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{n}{8\pi}z^2\right)\cos\left(s\frac{nz}{2}\right)dz = 2a\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle ganzen Zahlen von $s = 1$ bis $s = \infty$ erstreckt. Setzt man noch $nz = 2x$, so erhält man:

$$\int_0^{n\pi}\cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right)dx + 2\sum\int_0^{n\pi}\cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right)\cos sx\,dx = a\sqrt{2n\pi}.$$

Da die ganze Zahl n gerade ist, so nimmt die linke Seite die Gestalt an, welche die linke Seite der Gleichung (2) hat, wenn $f(x)$ gleich $\cos\left(\frac{x^2}{2n\pi}\right)$ ist. Auf Grund dieser Gleichung folgt also:

$$\cos 0 + \cos\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{2\pi}{n} + 2\sum_{s=1}^{s=\frac{1}{2}n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\cdot$$

Beachtet man, dass $\cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \cos (n - s)^2 \frac{2\pi}{n}$ ist, so kann man dieser Gleichung die einfachere Form geben:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = a\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Um die von n unabhängige Grösse a zu bestimmen, genügt es, n einen speciellen Werth zu geben. Setzt man z. B. $n = 4$, so findet man $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$ **[137]** Man erhält also schliesslich, welches auch der Werth der ganzen Zahl $n = 4\mu$ sein mag:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \cos s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n}\cdot$$

Behandelt man das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ in gleicher Weise, so findet man schliesslich:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \sin s^2 \frac{2\pi}{n} = \sqrt{n}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung würde man die vorstehenden Summen auch für die Fälle, in welchen n von einer der drei Formen $4\mu + 1$, $4\mu + 2$, $4\mu + 3$ ist, leicht berechnen können; es ist aber noch einfacher diese drei Fälle auf den Fall, in welchem n die Form 4μ hat, zurückzuführen.

Um dies zu erreichen, seien n und m zwei beliebige ganze Zahlen, deren erste positiv vorausgesetzt wird; wir setzen:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi i}{n}} = \varphi(m, n),$$

wo i zur Abkürzung die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ bezeichnet.

Die Function $\varphi(m, n)$ besitzt mehrere wichtige Eigenschaften. Zunächst hat man offenbar, wenn m' eine dritte ganze Zahl bezeichnet, welche der Congruenz $m' \equiv m \pmod{n}$ genügt:

$$\varphi(m, n) = \varphi(m', n). \tag{3}$$

Ferner ist, wenn man c relativ prim zu n voraussetzt:

$$\varphi(m, n) = \varphi(c^2 m, n). \tag{4}$$

Diese Gleichung folgt daraus, dass der Ausdruck cs, wenn man in demselben nacheinander $s = 0, 1, \ldots, n-1$ setzt, bei der Division durch n dieselben Zahlen als Reste lässt.

Eine dritte Eigenschaft wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\varphi(n, m) \cdot \varphi(m, n) = \varphi(1, mn), \tag{5}$$

in welcher die beiden ganzen Zahlen n und m positiv und zu einander relativ prim vorausgesetzt sind. In der That, da

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2m\pi i}{n}} = \varphi(m, n), \quad \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{t^2 \frac{2n\pi i}{m}} = \varphi(n, m)$$

ist, so erhält man durch Multiplication:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{(m^2 s^2 + n^2 t^2) \frac{2\pi i}{mn}} = \varphi(m, n)\, \varphi(n, m)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man in dem Exponenten den Ausdruck $2st\pi i$, ein Vielfaches von $2\pi i$, hinzufügt:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{(ms + nt)^2 \frac{2\pi i}{mn}} = \varphi(m, n)\, \varphi(n, m).$$

138] Das Binom $ms + nt$ kann durch seinen Rest in Bezug auf den Modul mn ersetzt werden. Da nun aber m und n zu einander relativ prim sind, so erkennt man leicht, dass die Werthe, welche dieser Rest zwischen den Grenzen der doppelten Summation erhält, mit den Gliedern der Reihe $0, 1, 2, \ldots, mn-1$, abgesehen von der Reihenfolge, übereinstimmen. Das Resultat nimmt mithin die Gestalt einer einfachen Summe an und giebt:

$$\sum_{s=0}^{s=mn-1} e^{s^2 \frac{2\pi i}{mn}} = \varphi(m, n)\,\varphi(n, m),$$

was zu beweisen war.

Mit Hülfe der soeben aufgestellten Gleichungen kann man leicht den Werth von $\varphi(1, n)$, welche Form auch die Zahl n haben mag, berechnen. Nimmt man erstens $n = 4\mu$ an, so ist auf Grund der oben ausgeführten Summationen:

$$\varphi(1, n) = (1 + i)\sqrt{n}.$$

Zweitens sei n eine ungerade ganze Zahl. Die Gleichung (5) wird für $m = 4$:

$$\varphi(4, n)\,\varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n).$$

Wegen der vorhergehenden Gleichung ist hier die rechte Seite gleich $2(1 + i)\sqrt{n}$. Die beiden Ausdrücke $\varphi(4, n)$, $\varphi(n, 4)$ können aber mit Hülfe der Gleichungen (3) und (4) durch andere ersetzt werden, und zwar der erste durch $\varphi(1, n)$, der zweite durch $\varphi(1, 4)$ oder $\varphi(3, 4)$, je nachdem n von der Form $4\mu + 1$ oder $4\mu + 3$ ist. Nun ist aber leicht zu sehen, dass

$$\varphi(1, 4) = 2(1 + i), \quad \varphi(3, 4) = 2(1 - i)$$

ist. Folglich ist:

$$\varphi(1, n) = \sqrt{n}, \quad n = 4\mu + 1; \quad \varphi(1, n) = i\sqrt{n}, \quad n = 4\mu + 3.$$

Es bleibt noch der Fall, in welchem n von der Form $4\mu + 2$ ist, zu untersuchen übrig. Da bei dieser Annahme $\frac{n}{2}$ und 2 relativ prim zu einander sind, so giebt die Gleichung (5):

$$\varphi\left(2, \frac{n}{2}\right)\varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1, n).$$

und da andrerseits

$$\varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \varphi(1, 2) = 0$$

ist, so folgt:

$$\varphi(1, n) = 0.$$

Betrachten wir im Besonderen den Fall, in welchem n eine ungerade Primzahl p ist; es seien a und b bezüglich die quadratischen Reste und Nichtreste der Zahl p, welche kleiner als diese Zahl sind. Beachtet man noch, dass der Ausdruck $i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$ sich auf 1 oder i reducirt, je nachdem p die Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ hat, so ist dann:

$$\varphi(1, p) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p};$$

[139] diese Gleichung kann dadurch, dass man s^2 durch seinen Rest ersetzt, in der folgenden Form geschrieben werden:

$$1 + 2 \sum e^{a\frac{2\pi i}{p}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle Werthe von a bezieht. Wenn m eine nicht durch p theilbare ganze Zahl bezeichnet, so erhält man ebenfalls, indem man ms^2 durch seinen Rest ersetzt:

$$\varphi(m, p) = 1 + 2 \sum e^{a\frac{2\pi i}{p}}$$

oder

$$\varphi(m, p) = 1 + 2 \sum e^{b\frac{2\pi i}{p}},$$

je nachdem

$$\left(\frac{m}{p}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{m}{p}\right) = -1$$

ist. Da andrerseits[22])

$$\sum e^{a\frac{2\pi i}{p}} + \sum e^{b\frac{2\pi i}{p}} = -1$$

ist, so können beide Resultate in die folgende Formel zusammengefasst werden:

$$\varphi(m, p) = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Setzt man an Stelle von s^2 seinen Rest, so erhält der Ausdruck $\varphi(m, p)$ die andere Gestalt:

$$\varphi(m, p) = 1 + 2 \sum e^{a\frac{2m\pi i}{p}},$$

und die Vergleichung dieser beiden letzten Formeln mit einander liefert die Beziehung:

$$1 + 2\sum e^{a\frac{2m\pi i}{p}} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}\,.$$

Wenn man nun beachtet, dass offenbar[22])

$$\sum e^{a\frac{2m\pi i}{p}} + \sum e^{b\frac{2m\pi i}{p}} = -1$$

ist, so kann die zuletzt erhaltene Gleichung auch in die folgende übergeführt werden:

$$1 + 2\sum e^{b\frac{2m\pi i}{p}} = -\left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}\,.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der zuerst erhaltenen, so wird schliesslich:

$$\sum e^{a\frac{2m\pi i}{p}} - \sum e^{b\frac{2m\pi i}{p}} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}\,.$$

Diese Gleichung gilt für jede ganze Zahl m, welche nicht durch p theilbar ist. Wenn m ein Vielfaches von p ist, so reducirt sich die linke Seite offenbar auf Null. Wir schreiben die Gleichung auf die folgende abgekürzte Art:

$$(6) \qquad \sum \left(\frac{g}{p}\right) e^{g\frac{2m\pi i}{p}} = \left(\frac{m}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}\,,$$

wo sich das Summenzeichen auf alle ganzen Zahlen von $g = 1$ bis $g = p - 1$ erstreckt.

§ 10.

[140] Die Bestimmung der Anzahl h der quadratischen Formen, welche einer beliebigen Determinante entsprechen, lässt sich, wie wir durch die im § 8 erhaltenen Resultate gezeigt haben, immer auf eine gleichartige Aufgabe zurückführen, welche sich auf den Fall bezieht, dass die Determinante durch keine Quadratzahl theilbar ist und die Formen, deren Anzahl zu bestimmen ist, zur ersten Art gehören. Wir haben uns folglich nur noch mit den vier Determinanten:

$$P,\ 2P,\ -P,\ -2P$$

zu beschäftigen, wo $P = pp'p'' \ldots$ eine ungerade und positive ganze Zahl bezeichnet, deren Primzahlfactoren $p, p', p'', \ldots$ sämmtlich von einander verschieden sind.

Es ist wichtig zu beachten, dass der Buchstabe P, so wie wir ihn eben definirt haben, dieselbe Bedeutung wie in den Paragraphen 5 und 6 hat, wenn die Determinante, welche wir stets mit D bezeichnen, positiv ist; dass aber in dem Falle eines negativen D dieser Buchstabe, so wie er in den genannten Paragraphen gebraucht worden ist, der jetzt mit $-P$ bezeichneten Grösse entspricht. Dies ändert nichts an dem Ausdruck $\left(\frac{n}{P}\right)$, welcher in der Gleichung (19) des § 6 vorkommt, und an dem durch die Gleichungen (9) desselben Paragraphen festgesetzten Werthe von ε, da dieser Werth gleich $+1$ oder -1 sein muss, je nachdem die von jedem quadratischen Theiler befreite Determinante eine ungerade oder gerade Zahl ist. Anders verhält es sich aber mit δ, da dieser Werth von dem Reste abhängt, welchen die Zahl P, mit ihrem Vorzeichen genommen, in Bezug auf den Divisor 4 lässt. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$V = \Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle positiven, ungeraden und zu P relativ primen ganzen Zahlen n erstreckt, so folgt aus dem Obigen, dass die Ausdrücke $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, welche in die Reihe V der Gleichungen (19) oder (23) — je nachdem es sich um eine negative oder positive Determinante handelt — eingesetzt werden müssen, in folgender Weise bestimmt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu + 1 \\ D = -P, & P = 4\mu + 3 \end{array}\right\} \delta = 1,\ \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = P, & P = 4\mu + 3 \\ D = -P, & P = 4\mu + 1 \end{array}\right\} \delta = -1,\ \varepsilon = 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu + 1 \\ D = -2P, & P = 4\mu + 3 \end{array}\right\} \delta = 1,\ \varepsilon = -1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} D = 2P, & P = 4\mu + 3 \\ D = -2P, & P = 4\mu + 1 \end{array}\right\} \delta = -1,\ \varepsilon = -1.$$

[141] Demnach haben wir allmählich die vier Combinationen zu berücksichtigen, welche das Gleichungenpaar $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ darbietet.

I. Wir nehmen zuerst $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$ an. Theilt man die Reihe V durch $\left[1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right]$, so wird

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle positiven, geraden und ungeraden ganzen Zahlen n, welche zu P relativ prim sind, erstreckt. [23])

Stellt man, wie in § 1, die Reihe durch ein Integral dar, so erhält man: [24])

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{x} f(x)\, dx}{x^P - 1};$$

hierbei ist zur Abkürzung $f(x) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) x^n$ gesetzt, wo das Zeichen Σ sich auf diejenigen der oben definirten ganzen Zahlen n, welche kleiner als P sind, erstreckt. Wendet man auf dieses Integral die gewöhnliche Methode der Partialbruchzerlegung an, so findet man:

$$\frac{V}{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}} = -\frac{1}{P} \Sigma f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right) \int\limits_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi i}{P}}},$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle ganzen Zahlen von $m = 0$ bis $m = P - 1$ erstreckt. Es kommt mithin alles darauf an, die Function $f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right) = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) e^{\frac{n}{P} 2m\pi i}$ zu bestimmen.

Um dies zu erreichen, bringen wir den in dem Exponenten enthaltenen Bruch $\left(\frac{n}{P}\right)$ auf die Form:

$$\frac{n}{P} = \mu + \frac{g}{p} + \frac{g'}{p'} + \cdots,$$

wo μ eine positive oder negative ganze Zahl und $g, g', \cdots$ positive ganze Zahlen, welche bez. kleiner als $p, p', \cdots$ sind, bezeichnen. Diese Zerlegung kann bekanntlich nur auf eine einzige Weise geschehen (*Disq. arithm.*, art. 311), und offenbar kann keine der ganzen Zahlen $g, g', \cdots$ gleich Null sein, da n relativ prim zu P ist. Legt man n alle Werthe bei, welche es bei der Summation annehmen muss, so überzeugt man sich leicht, dass die Zahlen $g, g', \cdots$ alle Combinationen, welche man aus den Zahlenreihen $g=1$ bis $g=p-1$, $g'=1$ bis $g'=p'-1$ u. s. w. bilden kann, darbieten. Die ganze Zahl μ kann man vernachlässigen, da sie im Exponenten mit $2m\pi i$ multiplicirt wird. Setzen wir nun für einen Augenblick $\frac{P}{p}=r$, $\frac{P}{p'}=r', \ldots$, so giebt die obige Gleichung die Congruenz:

$$[142] \qquad n \equiv gr + g'r' + \cdots \pmod{P},$$

aus welcher die Gleichungen:

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{g}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right),\ \left(\frac{n}{p'}\right)=\left(\frac{g'}{p'}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right), \ldots$$

folgen, mit deren Hülfe die Function $f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)$ in das Product von $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right)\ldots$ multiplicirt in die Summen:

$$\Sigma\left(\frac{g}{p}\right)e^{g\frac{2m\pi i}{p}},\quad \Sigma\left(\frac{g'}{p'}\right)e^{g'\frac{2m\pi i}{p'}},\ \ldots$$

übergeführt wird. Ersetzt man diese letzteren durch ihre von der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen gegebenen Werthe, so erhält man:

$$f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right)\cdots i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{p'-1}{2}\right)^2+\cdots}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P},$$

wo m relativ prim zu P vorausgesetzt ist. In dem entgegengesetzten Falle verschwindet $f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)$, weil wenigstens eine der obigen Summen sich auf Null reducirt. Was das Product $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r'}{p'}\right)\ldots$ anbetrifft, so bemerkt man, dass es sich aus ebenso vielen Theilproducten von der Form $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)$ zusammensetzt, als es Combinationen zur zweiten Classe von den Zahlen $p, p', \ldots$ giebt. Da nun aber

$$\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{p'-1}{2}} = i^{2\frac{p-1}{2}\,\frac{p'-1}{2}}$$

ist, so sieht man, dass der Ausdruck, welcher in der oben gefundenen Gleichung in $\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P}$ multiplicirt ist, die Form:

$$i^{\left(\frac{p-1}{2}+\frac{p'-1}{2}+\cdots\right)^2} = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}$$

annehmen kann. Wir erhalten also schliesslich:

$$1)\quad f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right) = 0 \text{ oder } f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right) = i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{P},$$

je nachdem m und P einen gemeinschaftlichen Theiler haben oder nicht. Setzen wir diesen Werth in die letzte Gleichung für V ein und beachten wir, dass, so lange $m < P$ bleibt, das Integral:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi i}{P}}} = \log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{P}\right)i$$

ist, so wird:

$$\frac{1}{\left[1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right]}V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\left\{\log\left(2\sin\frac{m\pi}{P}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2m}{P}\right)i\right\},$$

wo sich das Summenzeichen über alle ganzen Zahlen m erstreckt, welche kleiner als P und relativ prim zu P sind. [143] Beachtet man, dass $\Sigma\left(\frac{m}{P}\right) = 0$ ist, so kann man diese Gleichung durch die folgende einfachere ersetzen:

$$\frac{1}{\left[1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right]} V = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m}{P}\right)\left(\log \sin \frac{m\pi}{P} - \frac{m\pi}{P} i\right).$$

Da die linke Seite reell ist, so müssen sich die imaginären Glieder auf der rechten Seite zerstören, was sich auch überdies leicht verificiren lässt.[25])

Unterscheiden wir jetzt die beiden Formen, welche P darbieten kann, indem wir nach einander $P = 4\mu + 1$ und $P = 4\mu + 3$ setzen, so erhalten wir auf diese Weise:

$$\text{(a)} \begin{cases} P = 4\mu+1, \; V = -\frac{1}{\sqrt{P}}\left[1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right] \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \log \sin \frac{m\pi}{P}. \\ P = 4\mu+3, \; V = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\left[1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right] \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) m, \end{cases}$$

wo sich das Zeichen Σ immer auf alle zu P relativ primen ganzen Zahlen, welche kleiner als P sind, erstreckt.

II. Zweitens sei $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$. Da der Factor, welcher in der Reihe V mit $\frac{1}{n}$ multiplicirt ist, für Werthe von n, welche um ein Vielfaches von $4P$ differiren, der gleiche ist, so ist nach dem im § 1 Gesagten:[24])

$$V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x} F(x)\, dx}{x^{4P} - 1},$$

wenn man zur Abkürzung:

$$F(x) = \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) x^n$$

setzt, wo sich das Zeichen Σ über alle ganzen Zahlen n erstreckt, welche kleiner als $4P$ und relativ prim zu $4P$ sind.

Die bekannte Methode der Partialbruchzerlegung giebt:

$$V = -\frac{1}{4P} \Sigma F\left(e^{\frac{2m\pi i}{4P}}\right) \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi i}{4P}}}$$

wo sich das Zeichen Σ auf alle ganzen Zahlen von $m = 0$ bis $m = 4P - 1$ erstreckt.

Es kommt mithin nur noch darauf an, den Ausdruck $F\left(e^{\frac{2m\pi i}{4P}}\right)$ zu bestimmen. Man kann dies durch Betrachtungen erreichen, welche denen, die wir in der vorigen Nummer zur Bestimmung von $f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)$ gebraucht haben, analog sind, es ist aber einfacher diesen Fall auf den schon untersuchten zurückzuführen. Zu dem Zweck zerlegt man den in dem Exponenten auftretenden Bruch $\frac{n}{4P}$ in der folgenden Weise:

$$\frac{n}{4P} = \mu + \frac{\gamma}{4} + \frac{n'}{P};$$

[**144**] wenn man hierbei γ und n' positiv und kleiner bez. als 4 und P voraussetzt, so bilden, wie leicht zu sehen ist, die Werthe von γ und n' bei der in Bezug auf n auszuführenden Summation alle Combinationen der Zahlen γ, welche kleiner als 4 und relativ prim zu 4 sind, mit allen Zahlen n', welche kleiner als P und relativ prim zu P sind. Bringt man die letzte Gleichung in die Form:

$$n \equiv P\gamma + 4n' \pmod{4P},$$

so folgen aus ihr leicht die Beziehungen:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{P-1}{2}}(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{n'}{P}\right).$$

Die Function $F\left(e^{\frac{2m\pi i}{4P}}\right)$ geht durch Einsetzung dieser Werthe über in:

$$F\left(e^{\frac{2m\pi i}{4P}}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}} \Sigma(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\gamma\frac{2m\pi i}{4}} \cdot \Sigma\left(\frac{n'}{P}\right) e^{n'\frac{2m\pi i}{P}}.$$

Die zweite der auf der rechten Seite stehenden Summen ist offenbar identisch mit der Function $f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)$, da hier n' dieselbe Bedeutung wie n in der vorigen Nummer hat. Die erste Summe kann aus den im § 9 gegebenen Formeln abgeleitet werden; da sie aber nur zwei Glieder, entsprechend $\gamma = 1, 3$ hat, so sieht man ohne Mühe und ohne diese Formeln zu benutzen, dass diese Summe gleich $2i(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ für einen ungeraden Werth von m ist, und dass sie im andern Falle verschwindet. Setzt man nun für die beiden Summen ihre Werthe und an Stelle von $(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ die gleiche Grösse $i^{2\frac{P-1}{2}}$, so erhält man:

$$(2) \qquad F\left(e^{\frac{2m\pi i}{4P}}\right) = i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\sqrt{4P},$$

wenn m relativ prim zu $4P$ ist. Im entgegengesetzten Falle verschwindet die linke Seite dadurch, dass wenigstens eine der soeben betrachteten Summen sich auf Null reducirt. Mit Hülfe dieses Resultates ergiebt sich:

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}}\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left\{\log 2\sin\frac{m\pi}{4P} + \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{m}{2P}\right)i\right\},$$

wo sich das Summenzeichen über alle ganzen Zahlen m, welche kleiner als $4P$ und relativ prim zu $4P$ sind, erstreckt. Beachtet man, dass für diese Werthe:

$$\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = 0$$

ist, so nimmt die obige Gleichung die einfachere Gestalt an:

$$V = -\frac{i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}}{\sqrt{4P}}\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)\left(\log\sin\frac{m\pi}{4P} - \frac{m\pi}{4P}i\right).$$

[145] Unterscheidet man jetzt die beiden Formen, welche die Zahl P in Bezug auf den Modul 4 darbieten kann, so erhält man:

$$
\text{(b)}\begin{cases}
P = 4\mu + 3, \quad V = -\dfrac{1}{\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\dfrac{m}{P}\right) \log\sin\dfrac{m\pi}{4P}, \\
P = 4\mu + 1, \quad V = -\dfrac{\pi}{(\sqrt{4P})^3} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\dfrac{m}{P}\right) m,
\end{cases}
$$

wo sich das Summenzeichen auf alle ganzen Zahlen m, welche kleiner als $4P$ und relativ prim zu $4P$ sind, bezieht.

III. Da die Fälle, welche noch zu behandeln übrig sind, und welche $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$; $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$ entsprechen, den soeben behandelten ganz ähnlich sind, so deuten wir nur kurz die Rechnung an, welche auf sie anzuwenden ist. Behält man zunächst den Doppelwerth $\delta = \pm 1$ bei, so ist:[24]

$$
V = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x} \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) x^n}{x^{8P} - 1} \, dx,
$$

wo sich das Zeichen Σ auf alle ganzen Zahlen n, welche kleiner als $8P$ und relativ prim zu $8P$ sind, erstreckt. Daraus folgt:

$$
V = -\frac{1}{8P} \Sigma A_m \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi i}{8P}}},
$$

wo sich das Zeichen Σ auf alle ganzen Zahlen von $m = 0$ bis $m = 8P - 1$ bezieht, und A_m zur Abkürzung die Summe:

$$
\Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) e^{\frac{n}{8P} 2m\pi i},
$$

erstreckt über alle oben definirten ganzen Zahlen n, bezeichnet. Setzt man:

$$
\frac{n}{8P} = \mu + \frac{\gamma'}{8} + \frac{n'}{P},
$$

so ist leicht zu sehen, dass n alle Werthe, über welche die Summation erstreckt werden muss, annimmt, wenn man die ganzen Zahlen γ, welche kleiner als 8 und relativ prim zu

8 sind, mit den ganzen Zahlen n', welche kleiner als P und relativ prim zu P sind, combinirt. Beachtet man ferner, dass zufolge des § 2 die Congruenz $n \equiv P\gamma + 8n'$ mod. $8P$ die folgenden Gleichungen nach sich zieht:

$$\delta^{\frac{n-1}{2}} = \delta^{\frac{P-1}{2}}\delta^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{n'}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{n'}{P}\right),$$

so nimmt der Ausdruck A_m die Gestalt an:

$$A_m = \delta^{\frac{P-1}{2}} f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right) \sum \delta^{\frac{\gamma-1}{2}} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} e^{\gamma\frac{2m\pi i}{8}}.$$

[146] Es ist also nur noch der Werth der Summe in Bezug auf γ zu bestimmen. Man könnte denselben aus dem vorigen Paragraphen ableiten, da die Summe aber nur aus der kleinen Anzahl von Gliedern, welche $\gamma = 1, 3, 5, 7$ entsprechen, gebildet wird, so sieht man unmittelbar, dass für $\delta = 1$ die Summe den Werth Null oder $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\sqrt{8}$ und für $\delta = -1$ den Werth Null oder $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} i\sqrt{8}$ hat, je nachdem m gerade oder ungerade ist.[26] Folglich ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\sum (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) e^{n\frac{2m\pi i}{8}} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{8P}, \tag{3}$$

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) e^{n\frac{2m\pi i}{8}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2} \sqrt{8P}, \tag{4}$$

welche m relativ prim zu $8P$ voraussetzen, und deren rechte Seiten im entgegengesetzten Falle durch Null zu ersetzen sind. Mittelst dieser Ausdrücke wird die Rechnung wie in den schon erledigten Fällen zu Ende geführt, und man findet:

$$(c)\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\delta=1,\ \varepsilon=-1:\\[1ex]
P=4\mu+1,\ V=-\frac{1}{\sqrt{8P}}\Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P};\\[2ex]
P=4\mu+3,\ V=-\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m.\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\delta=-1,\ \varepsilon=-1:\\[1ex]
P=4\mu+3,\ V=-\frac{1}{\sqrt{8P}}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)\log\sin\frac{m\pi}{8P};\\[2ex]
P=4\mu+1,\ V=-\frac{\pi}{(\sqrt{8P})^3}\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)m.
\end{array}\right.$$

Die Summen sind über die ganzen Zahlen m, welche kleiner als $8P$ und relativ prim zu $8P$ sind, zu erstrecken.

IV. Wir wollen nun das Problem, mit welchem wir uns soeben beschäftigt haben, mit Hülfe der ersten der beiden oben angegebenen Methoden, nämlich der Methode der trigonometrischen Reihen, lösen; der Kürze wegen beschränken wir uns auf die Reihen V, welche sich auf negative Determinanten beziehen. Es sei zuerst $\delta=1$, $\varepsilon=1$, $P=4\mu+3$; dann ist:

$$V=\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

wo sich das Zeichen Σ auf alle ungeraden und zu P relativ primen ganzen Zahlen erstreckt. Aus der Gleichung (1) dieses Paragraphen folgt für eine ganze Zahl P von der Form $4\mu+3$:

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\sin n\frac{2m\pi}{P}=\left(\frac{n}{P}\right)\ \text{oder}\ =0,$$

je nachdem n relativ prim zu P ist oder nicht; hierbei erstreckt sich das Zeichen Σ auf die ganzen Zahlen m, welche kleiner als P und relativ prim zu P sind. Wenn man diesen Ausdruck an Stelle von $\left(\frac{n}{P}\right)$ in die Reihe V einführt, so kann man dann die Summation in Bezug auf n über alle ganzen Zahlen erstrecken, [147] da der obige Ausdruck für Werthe von n, welche nicht relativ prim zu P sind, verschwindet. Kehrt man noch die Reihenfolge der beiden Summen um, so erhält man auf diese Weise:

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{P}.$$

Die zuletzt geschriebene Summe kann man mit Hülfe des bekannten Satzes, dass die Reihe

$$(5) \qquad \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

den Werth $\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$ hat, je nachdem der Werth von x zwischen 0 und π oder zwischen π und 2π gelegen ist. Trennt man also die Werthe von m, welche kleiner als $\frac{P}{2}$ sind, von denen, welche $\frac{P}{2}$ übersteigen, und bezeichnet man diese Werthe bez. mit m' und m'', so wird:

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left[\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right].$$

Da man in der zweiten Summe m'' offenbar durch $P - m'$ ersetzen kann, und da ferner, weil P von der Form $4\mu + 3$ ist, die Gleichung:

$$\left(\frac{P - m'}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{m'}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$$

besteht, so erhält man schliesslich:

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m'}{P}\right),$$

welcher Ausdruck eine andere Form als der früher gefundene hat. Hätten wir vor Ausführung der Summation durch $\left[1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right]$ dividirt, so würden wir zu dem Resultate gelangt sein, welches wir durch die andere Methode erhalten haben.

Zweitens sei $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$, $P = 4\mu + 1$. Dann ist:

$$V = \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

wo n nur Werthe, welche zu $4P$ relativ prim sind, annehmen darf. Die Gleichung (2) giebt für diesen Fall:

$$\frac{1}{\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) \sin n \frac{2m\pi}{4P} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \text{ oder } = 0,$$

je nachdem n relativ prim zu $4P$ ist oder nicht; das Zeichen Σ erstreckt sich hierbei auf die ganzen Zahlen m, welche kleiner als $4P$ und relativ prim zu $4P$ sind. Führt man diesen Ausdruck in die Reihe V ein, so wird:

$$V = \frac{1}{\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) \Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P}.$$

Da der Ausdruck, welchen man in die Reihe V eingesetzt hat, verschwindet, wenn n nicht relativ prim zu $4P$ ist, [148] so kann man nach Belieben annehmen, dass n in der Summe:

$$\Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P}$$

alle ganzzahligen Werthe oder nur die ungeraden durchläuft.

Bei der ersten Annahme hat man auf Grund der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots,$$

welche für die Werthe $x = 0$ bis $x = 2\pi$ gültig ist:

$$\Sigma \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{4P} = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \frac{m\pi}{2P}\right),$$

und folglich:

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) - \frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3} \Sigma (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) m$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, da die erste Summe offenbar gleich Null ist:

$$V = -\frac{\pi}{(\sqrt{4P})^3}\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)m;$$

dieser Werth stimmt mit dem durch die andere Methode erhaltenen überein.

Nimmt man zweitens an, dass n nur ungerade Werthe durchläuft, so findet man mit Hülfe der Gleichung (5):

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{4P}}\left\{\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right) - \sum(-1)^{\frac{m''-1}{2}}\left(\frac{m''}{P}\right)\right\},$$

wobei m' und m'' die Werthe von m, je nachdem sie kleiner oder grösser als $2P$ sind, bezeichnen. Ersetzt man m'' durch $4P-m'$ und beachtet man, dass:

$$(-1)^{\frac{4P-m'-1}{2}}\left(\frac{4P-m'}{P}\right) = -(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right)$$

ist, so erhält man für V den neuen Ausdruck:

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right).$$

Wenn man die beiden anderen Fälle in gleicher Weise behandelt, so findet man ausser den bereits durch die andere Methode erhaltenen Resultaten zwei neue, welche wir mit den beiden vorhergehenden hier zusammenstellen wollen:

$$(\mathrm{d}) \quad \left\{\begin{aligned}
&\delta = 1,\ \varepsilon = 1,\ P = 4\mu+3,\ V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}}\sum\left(\frac{m'}{P}\right),\\
&\delta = -1,\ \varepsilon = 1,\ P = 4\mu+1,\ V = \frac{\pi}{2\sqrt{4P}}\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\left(\frac{m'}{P}\right),\\
&\delta = 1,\ \varepsilon = -1,\ P = 4\mu+3,\ V = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}}\sum(-1)^{\frac{m'^2-1}{8}}\left(\frac{m'}{P}\right),\\
&\delta = -1,\ \varepsilon = -1,\ P = 4\mu+1,\ V = \frac{\pi}{2\sqrt{8P}}\sum(-1)^{\frac{m'-1}{2}+\frac{m'^2-1}{8}}\left(\frac{m'}{P}\right).
\end{aligned}\right.$$

[149] Die Werthe von m' sind relativ prim zu P und in den drei letzten Gleichungen ausserdem ungerade. Bezüglich der Summationsgrenzen ist hinzuzufügen, dass die Werthe von m' bez. kleiner als $\frac{1}{2}P$, $2P$, $4P$, $4P$ sein müssen.

Die Ausdrücke für V können noch viele andere Formen annehmen. Man erhält z. B. von den vorigen verschiedene, einfachere Ausdrücke, wenn man in dem Falle, in welchem das allgemeine Glied einen der Factoren

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

oder beide enthält, dieselben in der Reihe beibehält und die *Gauss*'schen Formeln nur benutzt, um die Ausdrücke $\left(\frac{n}{P}\right)$ zu ersetzen. Dies wollen wir noch für die drei letzten Fälle der vorstehenden Tabelle (d) ausführen.

In dem ersten dieser drei Fälle hat man:

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}, \quad P = 4\mu + 1,$$

und die Gleichung (1) giebt dann, je nachdem n relativ prim zu P ist oder nicht:

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \cos n \frac{2m\pi}{P} = \left(\frac{n}{P}\right) \sqrt{P} \text{ oder } = 0,$$

wobei m alle Zahlen kleiner als P und relativ prim zu P annehmen muss. Setzt man diesen Ausdruck für $\left(\frac{n}{P}\right)$ ein, so erhält man:

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \Sigma (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \cos n \frac{2m\pi}{P},$$

wo jetzt die Summation in Bezug auf n über alle ungeraden ganzen Zahlen erstreckt werden kann. Nun hat aber bekanntlich die Reihe:

$$\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots$$

den Werth:

$$\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4},$$

je nachdem der Werth von x in den drei Intervallen:

$$0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \text{ bis } 2\pi$$

gelegen ist. Bezeichnet man nun bez. mit m', m'', m''' die Werthe von m, welche bez. in den drei Intervallen:

$$0 \text{ bis } \tfrac{1}{4}P, \quad \tfrac{1}{4}P \text{ bis } \tfrac{3}{4}P, \quad \tfrac{3}{4}P \text{ bis } P$$

liegen, so wird:

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left\{\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right)\right\}.$$

Da nun offenbar:

$$\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) = \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) \text{ und } \Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right) + \Sigma\left(\frac{m'''}{P}\right) = 0,$$

[150] ist, so erhält man schliesslich:

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right), \tag{c}$$

wo m' die zu P relativ primen Werthe, welche zwischen 0 und $\frac{1}{4}P$ enthalten sind, bezeichnet.

In dem zweiten Falle ist:

$$V = \Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}, \quad P = 4\mu + 3.$$

Setzt man hierin den durch die Gleichung (1) für $\left(\frac{n}{P}\right)$ gegebenen Werth ein, so wird:

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\Sigma(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{P},$$

wo n jetzt alle ungeraden Werthe annehmen kann, gleichgültig ob sie zu P relativ prim sind oder nicht. Wird nun die Reihe:

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots$$

durch die bekannten Hülfsmittel summirt, so findet man ihren Werth bez. gleich

$$0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, 0,$$

je nachdem x in den fünf Intervallen:

$$0 \text{ bis } \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ bis } \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ bis } \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ bis } 2\pi$$

gelegen ist. Bezeichnet man also mit m' die Werthe von m, welche zwischen $\frac{1}{8}P$ und $\frac{3}{8}P$ liegen, und mit m'' diejenigen, welche zwischen $\frac{5}{8}P$ und $\frac{7}{8}P$ liegen, so resultirt:

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{2}P}\left\{\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right\}$$

oder einfacher, wenn man beachtet, dass m'' durch $P - m'$ ersetzt werden kann und dass $\left(\frac{P-m'}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$ ist:

$$\text{(f)} \qquad V = \frac{\pi}{\sqrt{2}P}\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right).$$

Auf ganz ähnliche Weise[27]) findet man, wenn P von der Form $4\mu + 1$ ist:

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} V = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} \\ \quad = \frac{\pi}{\sqrt{2}P}\left\{\Sigma\left(\frac{m'}{P}\right) - \Sigma\left(\frac{m''}{P}\right)\right\}, \end{cases}$$

wo m' und m'' die zu P relativ primen Werthe bezeichnen, welche bez. in den beiden Intervallen 0 bis $\frac{1}{8}P$, $\frac{3}{8}P$ bis $\frac{1}{2}P$ enthalten sind. Zu den Gleichungen (e) und (g) ist zu bemerken, dass sie nicht anwendbar sind, wenn $P = 1$ ist.

§ 11.

[**151**] Man könnte dem Ausdrucke für die Reihe V noch viele andere Formen geben, sowohl wenn sich diese Reihe auf eine negative, als wenn sie sich auf eine positive Determinante bezieht. Da aber diese Einzelheiten keine Schwierigkeiten darbieten, so halten wir uns nicht bei ihnen auf und gehen vielmehr zur Aufzählung der Sätze über, welche sich

aus den Gleichungen (19) und (23) des § 6 ergeben, wenn man die soeben erhaltenen Ausdrücke in dieselben einführt[28].

Positive Determinanten.

$$\text{I. } D=P,\ P=4\mu+1;\ h=\frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}.$$

Hierbei sind die ganzen Zahlen m, welche kleiner als P und relativ prim zu P sind, mit a oder b bezeichnet, je nachdem die Gleichung $\left(\frac{m}{P}\right)=1$ oder $\left(\frac{m}{P}\right)=-1$ stattfindet.

$$\text{II. } D=P,\ P=4\mu+3;\ h=\frac{1}{\log(T+U\sqrt{P})}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{4P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{4P}}.$$

Hierbei sind die ganzen Zahlen m, welche kleiner als $4P$ und relativ prim zu $4P$ sind, mit a oder b bezeichnet, je nachdem die Gleichung $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)=1$ oder $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)=-1$ stattfindet.

$$\text{III. } D=2P,\ P=4\mu+1;\ h=\frac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{8P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{8P}}.$$

Hierbei sind die ganzen Zahlen m, welche kleiner als $8P$ und relativ prim zu $8P$ sind, mit a oder b bezeichnet, je nachdem die Gleichung $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)=1$ oder $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)=-1$ stattfindet.

$$\text{IV. } D=2P,\ P=4\mu+3;\ h=\frac{1}{\log(T+U\sqrt{2P})}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{8P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{8P}}.$$

Hierbei sind die ganzen Zahlen m, welche kleiner als $8P$ und relativ prim zu $8P$ sind, mit a oder b bezeichnet, je nachdem die Gleichung $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)=1$ oder $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)=-1$ stattfindet.

[152] **Negative Determinanten.**

V. $D=-P$, $P=4\mu+3$; $h=\left[2-\left(\frac{2}{P}\right)\right]\frac{\Sigma b-\Sigma a}{P}=A-B$.

In dieser Gleichung haben a und b dieselbe Bedeutung, wie in dem ersten Falle, und A und B geben an, bez. wieviele Werthe a und b unterhalb $\frac{1}{2}P$ vorhanden sind.

VI. $D=-P$, $P=4\mu+1$; $h=\frac{\Sigma b-\Sigma a}{4P}=\frac{A-B}{2}$.

Die Buchstaben a und b haben dieselbe Bedeutung, wie in dem zweiten Falle, und A und B bezeichnen bez. die Anzahl der Werthe a und b, welche kleiner als $2P$ sind. Bezeichnen A' und B' die Anzahl der unterhalb $\frac{1}{4}P$ gelegenen Werthe a und b, wobei jetzt a und b die gleiche Bedeutung wie in dem ersten Falle haben, so hat man in diesem sechsten Falle auch:

$$h=2(A'-B').$$

VII. $D=-2P$, $P=4\mu+3$; $h=\frac{\Sigma b-\Sigma a}{8P}=\frac{A-B}{2}$.

Die Buchstaben a und b haben dieselbe Bedeutung, wie in dem dritten Falle, und A und B bezeichnen bez. die Anzahl der Werthe a und b, welche kleiner als $4P$ sind. Bezeichnen A' und B' die Anzahl der zwischen $\frac{1}{8}P$ und $\frac{3}{8}P$ enthaltenen Werthe a und b, wobei jetzt a und b die gleiche Bedeutung wie in dem ersten Falle haben, so hat man in diesem siebenten Falle auch:

$$h=2(A'-B').$$

VIII. $D=-2P$, $P=4\mu+1$; $h=\frac{\Sigma b-\Sigma a}{8P}=\frac{A-B}{2}$.

Die Buchstaben a und b haben dieselbe Bedeutung, wie in dem vierten Falle, und A und B bezeichnen bez. die Anzahl der Werthe a und b, welche kleiner als $4P$ sind. Bezeichnen A' und B', bez. A'' und B'' die Werthe a und b, welche zwischen 0 und $\frac{1}{8}P$, bez. $\frac{3}{8}P$ und $\frac{1}{2}P$ gelegen sind, wobei jetzt a und b die gleiche Bedeutung wie in dem ersten Falle haben, so hat man in diesem achten Falle auch:

$$h = 2(A' - B' - A'' + B'').$$

Es bleibt uns noch übrig, einige Bemerkungen über die soeben ausgesprochenen Resultate hier anzufügen. Die Ausdrücke, welche sich auf die vier ersten Fälle — um zunächst von diesen zu reden — beziehen, sind zwar sehr einfach, haben aber nicht die Form, welche ihre wirkliche Bedeutung erkennen lässt. [**153**] Um ihnen diese Form zu geben, beschäftigen wir uns insbesondere mit dem ersten dieser Fälle. Die drei andern geben zu ganz ähnlichen Bemerkungen Anlass. Es sei x eine unbestimmte Grösse, und wir betrachten die beiden Producte

$$\Pi\left(x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right), \quad \Pi\left(x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right).$$

Offenbar ist, wenn man

$$X = \Pi\left(x - e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right) \cdot \Pi\left(x - e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)$$

setzt, das Polynom X nichts anderes als die linke Seite der Gleichung, welche man erhält, wenn man die binomische Gleichung $x^P - 1 = 0$ von ihren nicht primitiven Wurzeln befreit. Daraus kann man leicht schliessen[29]), dass für $x = 1$:

$$X = 1 \text{ oder } X = P$$

ist, je nachdem die Anzahl der Primfactoren $p, p', p'', \ldots$ von P grösser oder gleich 1 ist. (Der Fall, in welchem P den Werth hat, ist ausgeschlossen, da in diesem Falle die Determinante eine Quadratzahl ist.)

Den beiden soeben unterschiedenen Fällen entsprechend ist also:

$$\Pi\left(1 - e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right) \cdot \Pi\left(1 - e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right) = 1 \text{ oder } = P.$$

Ferner ist:

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{a\pi}{P}\right)\cdot e^{\frac{\pi i}{P}\Sigma a},$$

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)=\Pi\left(-2i\sin\frac{b\pi}{P}\right)\cdot e^{\frac{\pi i}{P}\Sigma b};$$

beachtet man nun, dass die Werthe a und b in gleicher Anzahl vorhanden sind, dass die Summe über die Werthe a zu jeder Zahl a stets auch ihr Complement $P-a$ enthält, und dass die Summe über die Werthe b die gleiche Eigenschaft hat, so folgt:

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\frac{\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)}{\Pi\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{P}}\right)},$$

und mit Rücksicht auf eine frühere Gleichung auch:

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}}=\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)^2 \text{ oder} =\frac{1}{P}\,\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)^2,$$

entsprechend den beiden oben unterschiedenen Fällen. Die Bestimmung von h hängt also von dem Producte:

$$\Pi\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)$$

ab. Nun aber ergiebt sich aus einem bekannten Satze, welcher Herrn *Gauss**) zu verdanken ist, und welcher sich leicht auf eine zusammengesetzte Zahl P erweitern lässt, [154] dass das Polynom:

$$\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi i}{P}}\right)$$

immer die Form:

$$\tfrac{1}{2}\,(Y+Z\sqrt{P})$$

*) *Disq. arithm.*, art. 357. II.

hat, wo Y und Z Polynome mit ganzzahligen Coefficienten sind. Bezeichnet man nun mit Y_1 und Z_1 die Werthe, welche Y und Z für $x = 1$ annehmen, und geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so wird die Gleichung, welche h bestimmt:

$$(T + U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2}\right)^{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)}$$

oder

$$(T + U\sqrt{P})^h = \left(\frac{Y_1 + Z_1\sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)},$$

je nachdem die Anzahl der Primfactoren von P grösser oder gleich 1 ist. In dieser Gestalt erscheinen die Resultate sehr bemerkenswerth, wenn es wahr ist, dass — wie ein berühmter Mathematiker behauptet hat — das Interesse, welches die arithmetischen Untersuchungen darbieten, nicht nur in der Schwierigkeit des Stoffes seine Quelle hat, sondern vor allem in den engen Beziehungen, welche derartige Untersuchungen zwischen Theorien enthüllen, zwischen denen man keinen Zusammenhang vermuthet haben würde.

Die Berechnung der Polynome Y und Z kann entweder nach der Methode von Herrn *Gauss* oder mittelst eines von *Legendre* benutzten Verfahrens geschehen; dieses letztere stützt sich auf die bekannten Beziehungen, die zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den Summen gleichhoher Potenzen ihrer Wurzeln bestehen. Mittelst dieser Relationen können leicht allmählich alle Coefficienten einer Gleichung berechnet werden, wenn die Summen ihrer Wurzelpotenzen bekannt sind; dies ist hier der Fall, da sich die Summe der $m$ten Potenzen von den Wurzeln der Gleichung:

$$\Pi \left(x - e^{\left(\frac{2h\pi i}{P}\right)}\right) = 0$$

ohne Schwierigkeit aus der Formel (1) des vorigen Paragraphen ergiebt.

Man findet so z. B. für $P = 3 \cdot 11$:

$$Y = 2x^{10} - x^9 + 8x^8 + 5x^7 + 2x^6 + 14x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - x + 2,$$

$$Z = x^9 + x^7 + 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x,$$

folglich:

$$Y_1 = 46, \quad Z_1 = 8.$$

Da noch $\left(\frac{2}{P}\right) = 1$ ist, so wird:

$$\left(\frac{Y_1 + Z_1 \sqrt{P}}{2}\right)^{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)} = (23 + 4\sqrt{33})^2.$$

Andrerseits ist:

$$T + U\sqrt{P} = 23 + 4\sqrt{33},$$

woraus $h = 2$ folgt; dies ist auch richtig, da die Formen, welche der Determinante 33 entsprechen, $x^2 - 33y^2$, $33x^2 - y^2$ sind.

Um ein Beispiel für den Fall, in welchem sich P auf eine Primzahl reducirt, [**155**] zu geben, sei $P = 17$; man findet dann $Y_1 = 34$, $Z_1 = 8$ und der Ausdruck:

$$\left(\frac{Y_1 + Z_1 \sqrt{P}}{2\sqrt{P}}\right)^{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)}$$

wird

$$(4 + \sqrt{17})^2 = 33 + 8\sqrt{17};$$

Dieser Ausdruck ist aber die erste Potenz von $T + U\sqrt{P} = 33 + 8\sqrt{17}$, wie es der Fall sein muss, da für die Determinante 17 nur die einzige Form $x^2 - 17y^2$ existirt.

Die Ausdrücke für h, welche sich auf negative Determinanten beziehen, bedürfen keiner Erklärung. Wir fügen nur hinzu, dass für einen besonderen Fall, welcher sich auf Nr. V bezieht, das Resultat bereits von Herrn *Jacobi* gegeben worden ist. [Siehe *Crelle*'s Journal, Bd. 9, S. 189.*)]

Wir beschliessen diese Abhandlung mit der Andeutung einer Anwendung, welche man in dem Falle negativer Determinanten von den Ausdrücken für h machen kann. Wenn eine ganze Zahl k in drei Quadrate zerlegbar ist oder, mit andern Worten, wenn die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = k$ möglich ist, so hängt, wie man weiss, die Anzahl ihrer Lösungen von der Anzahl der Formen ab, deren Determinante $-k$ ist.

---

*) *Observatio arithmetica*, Werke, Bd. 6, S. 240. *Jacobi* hat sein Resultat durch Induction erhalten. H.

Die Sätze, welche diese Abhängigkeit feststellen, sind zuerst von *Legendre* für die einfachsten Fälle auf inductivem Wege entdeckt worden. Herr *Gauss* hat sie dann auf allgemeine und sehr scharfsinnige Weise in dem fünften Abschnitte seines Werkes bewiesen. Offenbar genügt es, die fraglichen Sätze mit den Resultaten zu vergleichen, zu denen wir in diesem Paragraphen und in dem § 8 gelangt sind, um durch die einfache Elimination der Anzahl der quadratischen Formen, welche beide Male vorkommt, neue Ausdrücke, welche nichts auf die quadratischen Formen Bezügliches mehr enthalten, für die Anzahl von Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = k$ abzuleiten. Ich beschränke mich hier auf diese einfache Bemerkung und unterlasse gegenwärtig die Aufzählung dieser neuen Sätze; diese Einzelheiten finden besser ihren Platz in einer besonderen Abhandlung[30]), in welcher ich die betreffenden Resultate auf directem Wege und ohne Zuhülfenahme der beiden soeben erwähnten Theorien abzuleiten versuchen werde.

Anmerkungen.

Gustav Peter Lejeune Dirichlet *) wurde am 13. Februar 1805 in Düren in der Rheinprovinz geboren. Im Jahre 1817 kam er auf das Gymnasium in Bonn und im Jahre 1819 auf das Jesuiter-Gymnasium in Cöln, wo der nachher als Physiker berühmt gewordene *Ohm* sein Lehrer in der Mathematik war. Nachdem er hier das Abgangszeugniss für die Universität erhalten hatte, ging er im Mai 1822 nach Paris, wo er am Collège de France und an der Faculté des sciences die Vorlesungen von *Lacroix*, *Biot*, *Hachette*, *Francoeur* hörte. Ferner nützte ihm der Aufenthalt in dem Hause des Generals *Foy*, in welches er im Jahre 1823 als Hauslehrer kam. Bedeutungsvoll wurde für *Dirichlet* das Studium von *Gauss*' berühmten *Disquisitiones arithmeticae*. Seinen wissenschaftlichen Ruf begründete er durch sein »Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré«, durch welches er mit *Fourier* und *Alexander v. Humboldt* bekannt wurde; der erstere hat auf die Richtung seiner wissenschaftlichen Forschung, der letztere auf die Gestaltung seiner äusseren Lebensverhältnisse grossen Einfluss ausgeübt.

Im Jahre 1826 kehrte *Dirichlet* nach Deutschland zurück und habilitirte sich im Jahre 1827 als Privatdocent an der Universität in Breslau und 1829 an der Universität in Berlin, nachdem er daselbst Lehrer der Mathematik an der allgemeinen Kriegsschule geworden war. Im Jahre 1831 wurde *Dirichlet* ausserordentlicher Professor und ordentliches Mitglied der

---

*) Da man den Namen *Lejeune Dirichlet* bald mit, bald ohne Bindestrich geschrieben findet, so möchte ich, im Interesse einer einheitlichen Schreibweise, hier betonen, dass *Dirichlet* selbst seinen Namen immer ohne Bindestrich geschrieben hat, wie Herr *Dedekind* die Freundlichkeit hatte mir mitzutheilen. In *Dirichlet*'s eignen Veröffentlichungen findet sich oft der Bindestrich.

Akademie der Wissenschaften in Berlin und im Jahre 1839 ordentlicher Professor. Im Herbst 1855 wurde er als Nachfolger von *Gauss* nach Göttingen berufen, wo er leider schon am 5. Mai 1859 starb.

Da der beschränkte Raum, welcher mir hier zur Verfügung steht, eine eingehendere Würdigung von *Dirichlet*'s wissenschaftlichen Verdiensten nicht gestattet, so verweise ich auf die schöne Gedächtnissrede, welche *Kummer* in der Berliner Akademie (Abhandlungen der Akad. zu Berlin, 1860) auf *Dirichlet* gehalten hat und der auch die vorstehenden biographischen Notizen entnommen sind. Es sei mir nur erlaubt, hier *Borchardt*'s Worte (Journal f. r. u. a. M., 1859, Bd. 5) anzuführen: »Seine (*Dirichlet*'s) Werke sind nicht bedeutend nach ihrer Zahl, aber sie bilden eine Reihe von Meisterwerken. Schon in seinen ersten Veröffentlichungen zeigt sich eine gleichzeitige Beschäftigung mit den höchsten Theilen der Infinitesimalrechnung und mit der Zahlentheorie. Jede dieser Disciplinen, besonders die erstere, hatte ihm bereits Bereicherungen von hervorragender Wichtigkeit zu verdanken, als er zu der Verwirklichung des tiefen Gedankens geführt wurde, beide bis dahin getrennte Zweige der mathematischen Forschung durch Einführung der Methoden der Infinitesimalrechnung in die Zahlentheorie zu vereinigen.«

Einzelne zahlentheoretische Resultate waren zwar schon früher aus analytischen Untersuchungen nebenher abgeleitet worden. So hatte z. B. *Euler* aus der von ihm aufgestellten Formel:

$$\Pi_q \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s},$$

wo das Product über alle Primzahlen q zu erstrecken und $s > 1$ ist, gefolgert, dass unendlich viele Primzahlen existiren müssen. Derartige Resultate hatten sich aber immer nur zufällig aus analytischen Untersuchungen ergeben. *Dirichlet* erst gebührt das Verdienst, wirkliche analytische Methoden in die Zahlentheorie eingeführt zu haben. Seinen Methoden verdankt die Zahlentheorie viele neue Resultate und die Erkenntniss von manchem überraschenden Zusammenhange derselben mit anderen mathematischen Disciplinen, sowie von zahlentheoretischen Gebieten unter einander. »Die *Dirichlet*'schen Methoden«, sagt *Kummer*, »sind für die Zahlentheorie in ähnlicher Weise epochemachend, wie die *Descartes*'schen Anwendungen der Analysis für die Geometrie; sie würden auch, ebenso wie die analytische Geometrie, als Schöpfung einer neuen mathematischen Disciplin anerkannt werden müssen, wenn sie sich nicht bloss auf gewisse Gattungen, sondern auf alle Probleme der Zahlentheorie gleichmässig erstreckten.«

Dirichlet wurde durch seine Versuche, den in der Einleitung zur vorstehenden Abhandlung erwähnten Satz über die arithmetische Progression in voller Strenge zu beweisen, auf seine analytischen Methoden geführt, und gerade der oben erwähnte *Euler*'sche Nachweis der Existenz von unendlich vielen Primzahlen veranlasste ihn, unendliche Reihen und Producte von ähnlicher Gestalt für seine Zwecke zu verwenden. Es gelang *Dirichlet* auch auf diese Weise den gesuchten Beweis zu führen, doch konnte er eine sich hierbei darbietende Schwierigkeit nur durch sehr umständliche Betrachtungen überwinden. Das Bestreben, diese letzteren durch einfachere Schlussfolgen zu ersetzen, führten ihn zu einer weiteren Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie, deren glänzendes Resultat die Bestimmung der Classenanzahl quadratischer Formen für beliebige Werthe ihrer Determinante war. Diese Arbeit, welche zu seinen schönsten und hervorragendsten Arbeiten zählt, veröffentlichte *Dirichlet* in den Jahren 1839 und 1840 in dem Journal f. r. u. a. Math. unter dem Titel: *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*; dieselbe wurde wieder abgedruckt in *Dirichlet*'s Werken, herausgegeben von *L. Kronecker*, 1889, Bd. 1, S. 411—496. In der vorliegenden Ausgabe erscheint diese klassische Abhandlung zum ersten Male in deutscher Sprache; der Uebersetzung ist die Originalausgabe zu Grunde gelegt, deren Seitenzahlen dem Texte in eckigen Klammern eingefügt sind. Eine in manchen Punkten vereinfachte Darstellung dieser Untersuchungen hat *Dirichlet* selbst in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie, welche von Herrn *Dedekind* veröffentlicht sind, gegeben (Vorlesungen über Zahlentheorie. 4. Auflage. Braunschweig, 1894). Neuerdings hat Herr *Bachmann* versucht, die *Dirichlet*'schen Untersuchungen mit den sogleich zu erwähnenden von *Gauss* und *Kronecker* über dasselbe Problem zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten. (*Bachmann*, Zahlentheorie, II. Theil: Die analytische Zahlentheorie. Leipzig, 1894.)

Der Kernpunkt dieser *Dirichlet*'schen Untersuchung liegt in der Gleichheit zweier Summen, von denen die eine über alle Zahlen, welche durch die eigentlich, bez. uneigentlich primitiven Formen einer gegebenen Determinante darstellbar sind, und deren andere über alle relativ primen Werthe, welche die Unbestimmten x, y in diesen Formen erhalten, zu erstrecken ist. Als Grundformel, aus welcher sich diese Gleichheit ergiebt, ist die Formel (11) § 6 der vorstehenden Abhandlung oder die aus ihr abgeleitete specielle Formel (12) § 6 anzusehen. Ausser der Bestimmung der Classenanzahl löst *Dirichlet* zugleich noch die Frage nach der Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter der quadratischen Formen und nach der Vertheilung dieser letzteren in die einzelnen Geschlechter, wodurch er zugleich einen der schwierigsten Abschnitte der *Disquisitiones arithmeticae* dem Verständnisse besser zugänglich gemacht hat. Die Endformeln für die Classenanzahl sind von so überraschender Einfachheit, dass sie das Vorhandensein eines einfacheren arithmetischen Weges zu ihrer Auffindung unwillkürlich vermuthen lassen; leider ist bis jetzt aber noch kein Versuch in dieser Richtung von Erfolg gekrönt gewesen. Die Resultate sind für positive und negative Determinanten wesentlich von einander verschieden und zeigen den engen Zusammenhang der Classenanzahl mit der zugehörigen *Pell*'schen Gleichung im ersteren Falle und mit den quadratischen Resten und Nichtresten im letzteren Falle.

Gauss war zwar schon vor *Dirichlet* im Besitze der Lösung des in Rede stehenden Problems gewesen; er selbst hat aber nie etwas darüber veröffentlicht. Was sich in seinen nachgelassenen Untersuchungen über diese Frage vorgefunden hat, ist im zweiten Bande seiner Werke (S. 269—291) unter dem Titel: »De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem« veröffentlicht. Es sind dies meist nur kurze Notizen, welche aber die vollständige Formel für die Classenanzahl enthalten. *Gauss* hat sich sogar ähnlicher analytischer Hülfsmittel wie *Dirichlet* bedient. In den *Disquisitiones arithmeticae* (art. 304—306) giebt *Gauss* über die Classenanzahl nur einige höchst interessante Bemerkungen, zu welchen er auf empirischem Wege gelangt war, und eine angenäherte Formel für die mittlere Classenanzahl von Formen mit negativer Determinante.

Im Anschlusse an die *Dirichlet*'sche Abhandlung seien noch die Arbeiten von *Hermite* (Comptes rendus, Nov. 1862) und *Pepin* (Ann. de l'École Norm., T. XIII) erwähnt.

Auf einem ganz anderen Wege wie *Dirichlet*, nämlich mit

Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen hat *Kronecker* die Classenanzahl bestimmt und zum Theil neue Formeln für dieselbe aufgestellt. Vergleiche *Kronecker*'s diesbezügliche Mittheilungen in dem Journal f. r. u. a. M., Bd. 57, S. 248 und in den Monatsberichten der Berl. Akad. vom Jahre 1875, S. 223, sowie seine Abhandlungen: »Zur Theorie der elliptischen Functionen« in den Sitzungsber. der Berl. Akad., 1883—1890. In den beiden erstgenannten Arbeiten hat *Kronecker* zum ersten Male Classenanzahlrelationen für Formen negativer Determinante aufgestellt. Um ein Beispiel für diese Relationen, welche nur für Formen negativer Determinante vorhanden zu sein scheinen, zu geben, führe ich hier die folgende Formel an, welche *Kronecker* brieflich *Dirichlet* mitgetheilt hat. Für $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist:

$$h(n) + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=[\sqrt{n}]} h(n - \nu^2) = \Phi(n);$$

in dieser Formel bezeichnet $h(m)$ die Anzahl der eigentlich primitiven Classen von der Determinante $-m$, $\Phi(n)$ die Summe der Divisoren von n, welche grösser als $\sqrt{n}$ sind (n mitgerechnet) und $[\sqrt{n}]$ die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl. Diese Formeln sind für die wirkliche Berechnung von Classenanzahlen negativer Determinante zum Theil sehr gut geeignet.

Dieser Zusammenhang der Zahlentheorie mit der Theorie der elliptischen Functionen ist oft Gegenstand der Untersuchung gewesen; von Autoren auf diesem Gebiete nenne ich die Herren *Dedekind*, *Gierster*, *Hermite*, *Hurwitz*, *Klein*, *Pick*, *Seguier*, *H. Weber*. Vergleiche ferner hierüber die Werke von *H. Weber* (Elliptische Functionen und algebraische Zahlen (Braunschweig, 1891) und *J. de Seguier* (Formes quadratiques et multiplication complexe. Berlin, 1894.)

Hinsichtlich der weiteren Anwendungen, welche die *Dirichlet*'schen Methoden gefunden haben, muss ich mich hier kurz fassen. *Dirichlet* selbst hat mit ihrer Hülfe den Satz bewiesen, dass durch jede quadratische Form, deren drei Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, unendlich viele Primzahlen darstellbar sind; *Dirichlet*'s diesbezügliche Mittheilung ist von den Herren *H. Weber* und *A. Meyer* ergänzt. Ferner hat *Dirichlet* seine Methoden auf die Bestimmung asymptotischer Gesetze der Zahlentheorie und auf Formen mit complexen Coefficienten und Unbestimmten angewendet. Später sind seine Methoden in den Gebieten der allgemeinen complexen Zahlen (hier ist in erster Linie *Kummer* zu nennen) und auch auf Formen höherer Grade oder mit mehr als zwei Variabeln angewendet worden. Schliesslich sei noch erwähnt, dass *Kronecker* in der Abhandlung: Ueber den Gebrauch der *Dirichlet*'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen (Monatsberichte der Berl. Akad., 1864) gezeigt hat, wie man mit Hülfe dieser analytischen Methoden die ganze Theorie der gewöhnlichen binären quadratischen Formen entwickeln kann, nachdem zuvor nur die einfachsten arithmetischen Grundbegriffe festgestellt sind.

---

1) *Zu S. 6.* Diesen Satz hat *Dirichlet* schon in seiner Abhandlung über die arithmetische Progression (Werke, Bd. 1, S. 320) in derselben Weise bewiesen. Für den Beweis sind der Theorie der Γ-Function nur die beiden Formeln: $\Gamma(\varrho)=\int\limits_0^1\left(\log\frac{1}{y}\right)^{\varrho-1}dy$ und $\Gamma(\varrho+1)=\varrho\,\Gamma(\varrho)$ zu entnehmen; aus diesen lassen sich alle übrigen nöthigen Formeln leicht ableiten. Später hat *Dirichlet* für diesen Satz einen einfachen Beweis gegeben, welcher die Benutzung der Γ-Function vermeidet (Journal f. r. u. a. M., Bd. 53, S. 130: Sur un théorème relatif aux séries). Es ist:

$$\frac{1}{\varrho k^\varrho}=\int\limits_k^\infty\frac{dx}{x^{1+\varrho}}=\sum_{\nu=k}^{\nu=\infty}\int\limits_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Da $\frac{1}{x^{1+\varrho}}$ von ν bis $\nu+1$ fortwährend abnimmt, so ist

$$\frac{1}{\nu^{1+\varrho}}>\int\limits_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{1+\varrho}}>\frac{1}{(\nu+1)^{1+\varrho}}.$$

Summirt man jetzt über alle Werthe von $\nu=k$ bis $\nu=\infty$, so ist, wenn man $\sum\limits_{\nu=k}^{\nu=\infty}\frac{1}{\nu^{1+\varrho}}=S$ setzt:

$$S>\frac{1}{\varrho k^\varrho}>S-\frac{1}{k^{1+\varrho}},$$

woraus leicht $\lim\limits_{\varrho=0}\varrho S=1$ folgt. *Dirichlet* betrachtet (a. a. O.) die etwas allgemeinere Reihe $S=\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1}{(b+\nu a)^{1+\varrho}}$, für welche

$\lim\limits_{\varrho=0} \varrho S = \frac{1}{a}$ ist; dieses Resultat folgt aus dem früheren, wenn man dort $k = \frac{b}{a}$ setzt.

2) *Zu S. 7.* Dieser Satz ist als Fundamentalsatz der *Dirichlet*'schen Methoden anzusehen. *Dirichlet* selbst hat in dem in der vorigen Anmerkung genannten Aufsatze die für den Beweis dieses Satzes gar nicht erforderliche Voraussetzung, dass $f(t)$ die Form (3) habe, durch die allgemeinere ersetzt, dass sich $f(t):t$ mit unendlich wachsendem t einem bestimmten endlichen Grenzwerthe nähert. Auf den a. a. O. gegebenen Beweis dieses allgemeinen Satzes hat *Dirichlet* selbst Werth gelegt, wie mir Herr *Dedekind* mitzutheilen die Güte hatte.

Die in den vorstehenden Sätzen auftretenden Reihen gehören zu den jetzt als *Dirichlet*'sche Reihen bezeichneten. Die allgemeine Form derselben ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{k_\nu^s}$, wo $k_\nu \leqq k_{\nu+1}$ ist und die k_ν positive, mit dem Index ν unendlich wachsende Grössen bezeichnen; die Constanten a_ν sind beliebige reelle oder complexe Grössen und die Variabele s kann ebenfalls reelle oder complexe Werthe annehmen. Siehe ferner: *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen, Supplement II u. IX; *Bachmann*, a. a. O., 3. Abschnitt; *Hurwitz*, Zeitschrift f. Math. u. Phys., Jahrgang 27, 1882; *Pringsheim*, Math. Annalen, Bd. 37, 1890.

3) *Zu S. 10.* Man kann, ohne die Allgemeinheit dadurch zu beeinträchtigen, annehmen, dass die verschiedenen Functionen, welche die begrenzenden Curvenstücke analytisch darstellen, homogene Functionen von x, y und einem Parameter δ sind. Dann entsprechen verschiedenen Werthen von δ ähnliche und in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt ähnlich gelegene Figuren; analoge lineare Dimensionen wachsen proportional mit δ und analoge Flächeninhalte proportional mit δ^2.

Hält man die ursprüngliche Figur fest und lässt man jetzt die Parallelen des Gitters proportional $\frac{1}{\delta}$, $\delta > 1$, einander näher rücken, so ist, wenn σ den Flächeninhalt der festen Figur und $F(\sigma)$ die mit δ veränderliche Anzahl von Gitterpunkten im Innern der Figur bezeichnet: $\lim\limits_{\delta=\infty} \frac{F(\sigma)}{\delta^2 \sigma} = \frac{1}{ab}$.

Dieser Satz ist aber, wie leicht zu sehen ist, mit dem in der *Dirichlet*'schen Abhandlung aufgestellten Satze identisch. Vergrössert man nämlich die ursprüngliche Figur (wobei das Gitter aber ungeändert bleibt) in der Weise, dass δ von dem Werthe 1 auf einen bestimmten Werth $\delta_1 > 1$ steigt, und verkleinert man dann die ganze Figur (einschliesslich des Gitters) wieder auf $\delta = 1$, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn man die ursprüngliche Figur ungeändert lässt und nur die Abstände a, b der Parallelen des Gitters auf $\frac{a}{\delta_1}$, $\frac{b}{\delta_1}$ verkleinert; für beide Figuren aber hat $\frac{F(\sigma)}{\sigma}$ denselben Werth.

Setzt man in dem so umgeänderten Satze $a = b = 1$, so erhält man die Form, in welcher *Dirichlet* selbst den Satz später benutzt hat. Der leicht zu führende Beweis dieses Satzes findet sich bei *Dirichlet-Dedekind*, a. a. O., Supplement III und lässt sich leicht auf den etwas allgemeineren Satz ausdehnen, dass die Seitenlängen der Rechtecke $\frac{a}{\delta}$ und $\frac{b}{\delta}$ sind.

Höchst bemerkenswerth ist, dass *Gauss* sich bei seinen Untersuchungen auf denselben Satz gestützt hat, und zwar findet sich der Satz auch in beiden Fassungen in seinen nachgelassenen Aufzeichnungen vor (Werke, Bd. 2, S. 269 u. ff.).

4) *Zu S. 16.* Vergl. *Gauss, Disq. arithm.*, art. 157—160 und art. 223—227.

5) *Zu S. 18.* Sind m und m' zwei zu $2D$ relativ prime Zahlen und wird m für $x = \alpha$, $y = \gamma$ und m' für $x = \alpha'$, $y = \gamma'$ durch die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit der Determinante D dargestellt, so folgt

$$(1) \qquad mm' = \xi^2 - D\eta^2,$$

wo $\xi = a\alpha\alpha' + b(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + c\gamma\gamma'$, $\eta = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$ gesetzt ist. Aus der Gleichung (1) folgt aber sofort $mm' \equiv \xi^2$ (mod. l), also ist $\left(\frac{mm'}{l}\right) = 1$ und folglich $\left(\frac{m}{l}\right) = \left(\frac{m'}{l}\right)$. Ist nun $D \equiv 3$ (mod. 4), so geht die Gleichung (1) über in die Congruenz: $\xi^2 + \eta^2 \equiv mm'$ (mod. 4). Da m und m' ungerade Zahlen sind, so muss eine der beiden Zahlen ξ und η gerade, die andere ungerade sein; folglich ist $mm' \equiv 1$ (mod. 4) und mithin $(-1)^{\frac{mm'-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{m'-1}{2}} = 1$. Setzt man in der Gleichung (1) $D \equiv 2, 6, 4, 0$ (mod. 8), so ergeben sich in ähnlicher Weise die Sätze III bis VI.

6) *Zu S. 28.* Zwei Formen von derselben Determinante heissen bekanntlich benachbart, wenn sie die folgende Gestalt haben: $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $cx^2 + 2b'xy + c'y^2$, wobei $b + b'$ durch c theilbar sein muss, die zweite heisst der ersten nach rechts, die erste der zweiten nach links benachbart. Zwei benachbarte Formen sind äquivalent. — Eine Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ von der positiven Determinante D heisst reducirt, wenn der absolute Werth von a zwischen $\sqrt{D} - b$ und $\sqrt{D} + b$ liegt und $0 < b < \sqrt{D}$ ist; die äusseren Coefficienten einer solchen Form haben immer entgegengesetzte Zeichen. Jede Form von positiver Determinante ist einer reducirten Form äquivalent; jede reducirte Form besitzt eine und nur eine ihr nach rechts benachbarte reducirte Form. Bestimmt man zu der reducirten Form φ_1 die rechts benachbarte reducirte Form φ_2, zu dieser wieder die rechts benachbarte φ_3 und so fort, so kommt man schliesslich zu einer Form φ_{n+1}, welche mit φ_1 identisch ist; diese n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bilden die Periode der betreffenden Classe der Determinante D. Ueber die Beweise dieser Sätze vergl. *Gauss*, *Disq. arith.*, art. 160, 183—187.

7) *Zu S. 35.* Bezeichnet man mit $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen in der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$, so ist, da hier D_1 ungerade ist: $\varphi(2D_1) = \varphi(D_1) = \Delta$, und da unter den Zahlen $0, 1, \ldots, D_1 - 1$ ebensoviel gerade als ungerade Zahlen sind, welche zu D_1 relativ prim sind, so ist die Anzahl der zu D_1 relativ primen und geraden Zahlen in der Reihe $0, 1, \ldots, 2D_1 - 1$ gleich $2\dfrac{\varphi(D_1)}{2} = \Delta$.

8) *Zu S. 39.* *Kronecker* hat in dem ersten Bande von *Dirichlet*'s Werken den Originaltext von dieser Stelle an durch den folgenden leichter verständlichen ersetzt:

Bezeichnet man nun mit $k_0, k_0', \ldots$ diejenigen der Primzahlen $k, k', \ldots$, welche in L als Factoren enthalten sind, und mit $k_1, k_1', \ldots$ die übrigen, so wird die Summe des Hülfssatzes:

$$\Sigma\,\Theta^{\frac{n-1}{2}}\,\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{L}\right) \text{ oder } \Sigma\,\Theta^{\frac{n-1}{2}}\,\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{k_0}\right)\left(\frac{n}{k_0'}\right)\cdots$$

durch das Product:

$$k_1-1\,|\,k_1'-1\cdots\sum_a\left(\frac{a}{k_0}\right)\cdot\sum_{a'}\left(\frac{a'}{k_0'}\right)\cdots\Sigma\,\Theta^{\frac{b-1}{2}}\,\iota^{\frac{b^2-1}{8}},$$

$(a=1,2,\ldots,k_0-1;\ a'=1,2,\ldots,k_0'-1;\ldots;\ b=1,3,5,7)$
dessen Factoren:

$$\sum_a\left(\frac{a}{k_0}\right),\ \sum_{a'}\left(\frac{a'}{k_0'}\right),\ldots$$

offenbar verschwinden, ausgedrückt. Da ferner:

$$\sum_b\Theta^{\frac{b-1}{2}}\,\iota^{\frac{b^2-1}{8}}=0$$

für die drei Fälle: $\Theta=1$, $\iota=-1$; $\Theta=-1$, $\iota=1$; $\Theta=-1$, $\iota=-1$ ist, so folgt, dass der Ausdruck:

$$\Sigma\,\Theta^{\frac{n-1}{2}}\,\iota^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{L}\right)$$

immer verschwindet, ausser wenn gleichzeitig $\Theta=1$, $\iota=1$, $L=1$ ist, w. z. b. w.

9) *Zu S. 48.* $\displaystyle\sum_n\frac{1}{n^{2s}}\cdot\sum_{x,y}\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}$

$$=\sum_{n,x,y}\frac{1}{(an^2x^2+2bn^2xy+cn^2y^2)^s}$$

Ersetzt man hier nx durch x', ny durch y', so sind x', y' nicht mehr relativ prim zu einander, und man erhält somit Σ'.

10) *Zu den S. 49 u. 55.* Von dieser Stelle an gestaltet sich die Bestimmung von h ein wenig anders, wenn die beiden ersten Hülfssätze des § 1 in der später von *Dirichlet* ihnen gegebenen Fassung benutzt werden; die gleiche Bemerkung gilt für die Fälle II, III, IV. Vergleiche über diese Aenderung *Dirichlet-Dedekind*, a. a. O., §§ 95 u. 98.

11) *Zu S. 50.* In dieser Gleichung steht in dem Originaltexte, sowie in Bd. 1 der Werke: $\sqrt{D}$ statt $\sqrt{D_1}$.

12) *Zu S. 52.* Auch hier kann man den Ausnahmefall leicht verificiren; es ist hier $h=1$, $D_1=3$, $P=-3$ und

$$h=\frac{2}{\pi}\sqrt{3}\left\{1-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{11}\pm\cdots\right\}.$$

Aus
$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi$$
folgt für $x = \frac{\pi}{3}$:
$$1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{11} \pm \cdots = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \text{ also } h = 1.$$

13) *Zu S. 54, Anmerkung.* In *Crelle*'s Journal fehlt diese Anmerkung; *Dirichlet* selbst hat, wie *Kronecker* berichtet, in dem an *Gauss* geschickten Exemplare hier die Worte: »Compatibles avec les conditions précédentes« hinzugefügt.

14) *Zu S. 55.* Man substituire $\operatorname{ctg} \varphi = z$; dann erhält man durch Partialbruchzerlegung schliesslich für das unbestimmte Integral:
$$\frac{1}{2\sqrt{D}} \log \frac{a \operatorname{ctg} \varphi + b + \sqrt{D}}{a \operatorname{ctg} \varphi + b - \sqrt{D}}.$$

15) *Zu S. 60.* Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man $2^\lambda - 2$ Glieder; jedes dieser Glieder entspricht einem bestimmten speciellen Werthe von χ. Je nachdem nun ein solches bestimmtes χ in den beiden Geschlechtern, zu denen h_1 und h_ω gehören, gleiche oder entgegengesetzte Werthe hat, ist der Werth des betreffenden Gliedes $+1$ oder -1. Die algebraische Summe aller Glieder ist also gleich dem Ueberschusse der Anzahl der Fälle, in denen h_1 und h_ω gleiche Zeichen haben, über die Anzahl der Fälle, in denen sie entgegengesetzte Zeichen haben. Addirt man also die $2^\lambda - 2 = 2\varkappa - 2$ Gleichungen (28) zu einander, so erhält man, da der Ueberschuss gleich -2 ist: $(2\varkappa - 2) h_1 - 2(h_2 + h_3 + \cdots + h_\varkappa) = 0$. Siehe ferner: *Dirichlet-Dedekind*, a. a. O., Supplement IV und *Bachmann*, a. a. O., 9. Abschnitt.

16) *Zu S. 66.* Für $D = -1$, $D = -2$ und $D = 2$ existirt nur je eine Formenclasse.

17) *Zu S. 72.* Als Beispiel für solche Beziehungen im Falle positiver Determinanten diene das Beispiel aus *Dirichlet*'s Vorlesungen (a. a. O., S. 232), in welchem $D = 2$ gewählt ist. Man erhält:
$$\sum_{x,y} q^{x^2 - 2y^2} = \sum_{n,n'} \left(\frac{2}{n}\right) q^{nn'}$$
$$= \sum_n (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{q^n}{1-q^{2n}} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} + \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots,$$

wo die Doppelsumme auf der linken Seite über alle Werthepaare x, y zu erstrecken ist, für welche $y \geqq 0$, $2x > 3y$ und $x^2 - 2y^2$ ungerade ist. Diese Gleichung lässt sich nicht mit Hülfe der elliptischen Functionen bestätigen.

18. *Zu S. 74.* Mit Hülfe der unten angegebenen Formeln von *Jacobi* (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg 1829; Werke, Bd. 1, S. 49—239) lässt sich diese Formel folgendermaassen verificiren. Aus den Formeln 6 und 7 im § 65 findet man mit Benutzung des Theorem II im § 37:

$$1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \cdots = \sqrt{\frac{1+k'}{\pi} K},$$

$q + q^9 + q^{25} + \cdots = \frac{1-\sqrt{k'}}{2}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\cdot$ Die Formel 13, § 39 liefert für $x = \frac{\pi}{8}$: $\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} \cdots$ $= \frac{2(1-k^2)K}{\pi}\sin am\frac{K}{4}\sin am\frac{3K}{4}\cdot$ Hierauf wendet man noch die Formel an, welche man erhält, wenn man die Formel 5 durch die Formel 3 (§ 18) dividirt: $2\sin am\, u \cdot \sin am\, v$ $= \frac{\cos am(u-v) - \cos am(u+v)}{\Delta am(u-v) + \Delta am(u+v)}\cdot$ In dieser ist $u = \frac{3K}{4}$, $v = \frac{K}{4}$ zu setzen und zu beachten, dass $\cos am\, K = 0$, $\cos am\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$, $\Delta am\, K = k'$, $\Delta am\frac{K}{2} = \sqrt{k'}$ ist.

Wie sich *Dirichlet* selbst die weitere Ausführung dieser Gedanken vorgestellt hat, geht aus einem seiner Briefe an *Kronecker* [Briefwechsel zwischen *D.* und *K.*, herausgegeben von *E. Schering.* Göttinger Nachrichten 1885. Brief vom 23. Juli 1857] hervor, in welchem er die weitere Behandlung des zweiten Beispieles $D = -p$ für den Fall, dass p von der Form $4n + 3$ ist, skizzirt. Nachdem *Dirichlet* hier zuerst die Bedingung, dass die Zahlen, welche mit D einen gemeinschaftlichen Theiler haben, bei der Darstellung ausgeschlossen werden, aufgehoben hat, da sie nur Complicationen verursacht, giebt er, mit Benutzung der *Jacobi*'schen Bezeichnung, die Gleichung:

$$\frac{k}{\sqrt{p}}\frac{K}{\pi}\sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right)\sin am\frac{4Ks}{\pi} = \sum_{x,y} q^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} + \cdots,$$

wo für x, y alle Werthepaare zu setzen sind, für welche die jedesmalige quadratische Form (der 1. Art) ungerade ist. Jede der rechts stehenden Doppelsummen lässt sich in eine endliche Anzahl von Producten je zweier einfachen Summen von der Form $\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} q^{(\delta x + \varepsilon)^2}$, wo δ und ε rationale Zahlen sind, zerlegen. Jede dieser einfachen Summen kann mit Hülfe der Eigenschaften der Θ-Function in die Form $\sqrt{\frac{K}{a}}\,\varphi(k)$, wo $\varphi(k)$ eine algebraische Function des zu q gehörenden Moduls ist, gebracht werden. Jede Function $\sin am$ auf der linken Seite ist aber auch eine algebraische Function von z, folglich drückt die obige Gleichung eine Relation zwischen den algebraischen Functionen des flüssig bleibenden k aus. »Man kann daher sagen, dass die ganze Theorie der Formen von negativer Determinante und der durch sie darstellbaren Zahlen auf Beziehungen zwischen den Wurzeln algebraischer Gleichungen zurückkommt und sich aus diesen Beziehungen muss ableiten lassen.«

In *Dirichlet*'s Sinne hat *Kronecker* diese Untersuchungen weitergeführt. (Vergl. hier speciell Sitz.-Ber. d. Berl. Akad., 1885, S. 761, wo *Kronecker* eine Gleichung aufstellt, von welcher die oben von *Dirichlet* ihm mitgetheilte nur ein besonderer Fall ist).

19) *Zu S. 77. Gauss* hat die gleichen Resultate für negative und positive Determinanten aus der Lehre von der Composition der quadratischen Formen erhalten. Nur für den Fall eines positiven D von der Form $8\nu + 5$ giebt *Gauss* das Resultat in andrer Form: »Es ist $h' = \frac{1}{3}h$ oder $h' = h$, je nachdem die drei Formen $(1, 0, -D)$, $\left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right)$, $\left(4, 3, \frac{9-D}{4}\right)$ einer einzigen Classe oder drei verschiedenen Classen angehören.« Unterhalb 1000 giebt es 125 Zahlen von der Form $8\nu + 5$, von denen nur bei 31 Determinanten der erste Fall stattfindet (*Disq. arithm.*, art. 256). Für die übrigen 94 dieser Zahlen hat *Cayley* die kleinsten (ungeraden) Werthepaare, welche die Gleichung $t'^2 - Du'^2 = \pm 4$ lösen, angegeben (Journal f. r. u. a. M., Bd. 53, S. 369).

20) *Zu S. 77.* Die Voraussetzung, dass D keinen quadratischen Factor mehr enthält, ist für das Folgende unwesentlich.

21) *Zu S. 79.* Jede Lösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, bei welcher der Werth von u durch S theilbar ist, giebt eine Lösung der Gleichung $t'^2 - DS^2u'^2 = 1$ und umgekehrt. Folglich ist das kleinste positive Werthepaar t, u, welches die erste Gleichung befriedigt und bei welchem u durch S theilbar ist: T', SU'. Mithin muss $T' + SU'\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^\lambda$ sein, wobei λ die kleinste positive ganze Zahl bezeichnet, für welche der Coefficient von $\sqrt{D}$ in der entwickelten Potenz durch S theilbar ist. *Dirichlet* hat in einer späteren Arbeit (Ueber eine Eigenschaft der quadr. F. von pos. Det. Journal f. r. u. a. M. Bd. 53, S. 127) angegeben, wie sich λ aus der Zerlegung von S in seine Primfactoren berechnen lässt. Dort hat er auch gezeigt, dass sich aus einer positiven Determinante D unendlich viele andere von der Form DS^2 ableiten lassen, welche mit D die gleiche Classenanzahl haben. Daraus ergiebt sich weiter die Richtigkeit der *Gauss*'schen Vermuthung, dass es unendlich viele positive Determinanten giebt, bei denen jedes Geschlecht nur je eine Classe enthält. Negative Determinanten dieser Art scheinen nur in endlicher Anzahl (65) vorhanden und $D = -1848$ die letzte zu sein (*Disq. arithm.*, art. 303 u. 304).

Ueber die Formeln unter III u. IV vergl. auch *Lipschitz*, Journal f. r. u. a. M., Bd. 53, S. 238. *Dedekind*, Ueber die Anzahl der Idealclassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers (Braunschweig, 1877). *Dirichlet-Dedekind*, a. a. O., Supplement X.

22) *Zu S. 86.* Unter den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ sind eben so viele Reste a als Nichtreste b (mod. p); folglich ist

$$1 + \sum e^{a\frac{2m\pi i}{p}} + \sum e^{b\frac{2m\pi i}{p}} = \sum_{\nu=0}^{p-1} e^{\nu\frac{2m\pi i}{p}} = \frac{e^{2m\pi i} - 1}{e^{\frac{2m\pi i}{p}} - 1} = 0,$$

wenn m nicht $\equiv 0$ (mod. p) ist.

Von weiteren Arbeiten über die *Gauss*'schen Summen nenne ich hier die Abhandlungen von *Cauchy* (*Liouville*'s Journal 1840, t. 5, S. 154), *Kronecker* (*Liouville*'s Journal 1856 sér. t. 1, S. 392; Sitz.-Ber. der Berl. Akad. 1880, S. 686 u. 854 und Journal f. r. u. a. M., Bd. 105, S. 267), *Landsberg* Journal f. r. u. a. M. Bd. 111, S. 234). Vergl. auch den siebenten Abschnitt in dem schon öfter genannten Werke von

Bachmann, wo eine ausführlichere Behandlung der *Gauss*schen Summen gegeben ist.

23) *Zu S. 89.* Die Reihe rechts ist ebenfalls convergent (nach § 1, dritter Hülfssatz), da $\Sigma\left(\frac{n}{P}\right) = 0$ ist (nach § 5, Hülfssatz), wenn n ein vollständiges Restesystem (mod. P) durchläuft. Hier ist (mit Aenderung des Summationsbuchstabens):
$V = \Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$, wo m alle positiven ungeraden Zahlen, welche relativ prim zu P sind, durchläuft. Die Zahlen n, welche kleiner als $2hP$ (wo h eine beliebige positive ganze Zahl ist) sind, theilen sich in ungerade Zahlen, welche mit den Zahlen $m < 2hP$ identisch sind, und in gerade Zahlen von der Form $2n'$, wobei n' alle Zahlen $n < hP$ durchläuft. Folglich ist:

$$\sum_{n<2hP}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = \sum_{m<2hP}\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} + \sum_{n<hP}\left(\frac{2n}{P}\right)\frac{1}{2n};$$

und für $h = \infty$: $\sum\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = V + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\sum\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}$,

$$V = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right]\sum\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}.$$

24) *Zu den S. 89. 92 u. 95.* Es ist $\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, folglich

$$\sum_{n<hP}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 \sum\left(\frac{n}{P}\right)x^{n-1}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}\left\{\lim_{h=\infty}\sum_{n<hP}\left(\frac{n}{P}\right)x^n\right\}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x}\sum_{n<P}\left(\frac{n}{P}\right)\left[x^n + x^{n+P} + \cdots + x^{n+(h-1)P}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x}\sum_{n<P}\left(\frac{n}{P}\right)x^n\,\frac{1-x^{hP}}{1-x^P}$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{x(1-x^P)}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{hP}f(x)}{x(1-x^P)}\,dx,\quad f(x) = \sum_{n<P}\left(\frac{n}{P}\right)x^n.$$

Nun ist $f(x)$ durch $x(x-1)$ ohne Rest theilbar, da $f(0)=0$ und $f(1)=\sum_{n<P}\left(\frac{n}{P}\right)=0$ ist; der Bruch $\frac{f(x)}{x(1-x^P)}$ bleibt also im ganzen Integrationsintervall endlich; mithin wird für $\lim h=\infty$ das zweite Integral unendlich klein und

$$\sum\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{f(x)}{x(1-x^P)}\,dx=-\sum_{m=0}^{P-1}A_m\int_0^1\frac{dx}{x-e^{\frac{2m\pi i}{P}}},$$

wo A_m den leicht zu berechnenden Werth $\frac{1}{P}f\left(e^{\frac{2m\pi i}{P}}\right)$ hat.

In ganz analoger Weise lässt sich die Rechnung in den Fällen II und III durchführen; nur muss man im Falle II von der Summe $\sum_{n<4hP}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}$ und im Falle III von der Summe $\sum_{n<8hP}\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}$ ausgehen, wo n alle positiven ungeraden Zahlen, welche relativ prim zu P und kleiner als $4hP$, bez. $8hP$ sind, durchläuft. Dabei ist zu beachten, dass $F(x)=0$ ist für $x=0$ und $x=1$, wo $F(x)$ im Falle II für $\sum_{n<4P}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n$ und im Falle III für $\sum_{n<8P}\delta^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)x^n$ gesetzt ist.

25) *Zu S. 92.* Es ist nur zu beachten, dass im Falle (I) m und $P-m$, im Falle (II) m und $4P-m$, im Falle (III) m und $8P-m$ dieselben Zahlen durchlaufen.

26) *Zu S. 96.*

$$\sum\delta^{\frac{\nu-1}{2}}(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}e^{\nu\frac{2m\pi i}{8}}=e^{\frac{m\pi i}{4}}(1-\delta i^m)(1-[-1]^m).$$

Ist $m=8k+\nu$ ($\nu=1,3,5,7$), so wird die rechte Seite gleich $2e^{\frac{\nu\pi i}{4}}(1-\delta i^\nu)$, wo jetzt für $\delta=+1$ und $\delta=-1$ die vier Fälle von ν zu untersuchen sind.

27) *Zu S. 103.* Nur ist hier die Reihe: $\cos x + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots$ zu benutzen, deren Werthe man aus denen der Reihe: $\sin x - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots$ mittelst der Substitution $x = \frac{\pi}{2} - x'$ ableiten kann.

28) *Zu den S. 104 u. 105.* Zunächst sei hier daran erinnert, dass die beiden ersten Formeln für h unter Nr. VI nicht für $P = 1$ gelten, dass vielmehr $\frac{h}{2}$ an Stelle von h zu setzen ist. Die Formel $h = 2(A' - B')$ ist in diesem Falle überhaupt unbrauchbar. Unter Nr. VIII versagt für $P = 1$ die Formel $h = 2(A' - B' - A'' + B'')$ den Dienst, während jedoch die andern Formeln für h gültig bleiben.

Statt der 8 Formeln für die Classenanzahl braucht man, wie *Kronecker* (Sitz.-Ber. der Berl. Akad. 1885, S. 768) gezeigt hat, nur 2 Formeln, eine für positive und eine für negative Determinanten, wenn man die von *Gauss* eingeführte Schreibweise der quadratischen Form mit dem Binomialcoefficienten verlässt und dafür $ax^2 + bxy + cy^2$ schreibt. Dann ist für jede Form die Discriminante $b^2 - 4ac$ charakteristisch.

Gauss hat mit Hülfe der Classenanzahl negativer Formen die Vertheilung der Reste a und Nichtreste b in Octanten für die ungeraden Primzahlen und in Zwölftel für die Primzahlen von der Form $24n + 1, 5, 13, 17$ bestimmt (Werke, Bd. 2., S. 269.)

An die *Dirichlet*'schen Formeln für negative Determinanten knüpft eine Arbeit von Herrn *Hurwitz* an (Acta mathematica, Bd. 19, S. 351), welcher merkwürdige Congruenzen zwischen der Classenzahl dieser Determinanten und den *Bernoulli*'schen, *Euler*'schen und verwandten Zahlen aufstellt; bezeichnet B_m die m^{te} *Bernoulli*'sche Zahl, σ_m den m^{ten} Secantencoefficienten (*Euler*'sche Zahl) und ist $\beta_m = \frac{2^{2m}(2^{2m} - 1)}{2m} B_m$, so ist z. B. $h \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \frac{1}{2} \beta_{\frac{p+1}{4}}$ oder $h \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \frac{1}{2} \sigma_{\frac{p-1}{4}}$, je nachdem p eine Primzahl von der Form $4n + 3$ oder $4n + 1$ ist.

Aus dem Umstande, dass die Differenzen in den Ausdrücken für die Classenanzahl negativer Determinanten positiv sein müssen, da ja $h \geqq 1$ ist, lassen sich verschiedene bemerkenswerthe Sätze über Σa und Σb, bez. über A und B ableiten.

Die Gleichheit der verschiedenen Ausdrücke für dieselbe negative Determinante lässt sich leicht verificiren; im Falle (V) ist z. B. die Gleichheit: $\left[2-\left(\frac{2}{P}\right)\right]\frac{\Sigma b - \Sigma a}{P} = A - B$ direct nachgewiesen bei *Bachmann* a. a. O., S. 215.

29) *Zu S. 106.* In der Theorie der Kreistheilung wird gezeigt, dass die Gleichung, welcher alle primitiven P^{ten} Einheitswurzeln genügen und welche mit der Gleichung $X = 0$ identisch ist, in der Form $\dfrac{\prod\limits_{\mu_1}(x^{\mu_1}-1)}{\prod\limits_{\mu_2}(x^{\mu_2}-1)} = 0$ geschrieben werden kann, wo μ_1 und μ_2 bez. die sämmtlichen positiven und negativen Glieder in dem entwickelten Producte:

$$P\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p'}\right)\left(1-\frac{1}{p''}\right)\cdots$$

bezeichnen. Folglich ist $X(1) = \dfrac{\Pi \mu_1}{\Pi \mu_2}$. Nun gilt der Satz: »Bezeichnet μ einen beliebigen Theiler von P, aber P selbst ausgeschlossen, so theilt μ ebensoviele Zahlen μ_1 als Zahlen μ_2.« Der obige Quotient hat folglich den Werth P oder 1, je nachdem die Anzahl der Primfactoren gleich 1 oder grösser als 1 ist. Siehe ferner *Dirichlet*, Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires (Journal f. r. u. a. M., Bd. 17, S. 286; Werke, Bd. 1, S. 13 und *Dirichlet-Dedekind*, Vorlesungen, §§ 107—110.

30) *Zu S. 110.* »Ueber die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate.« (Journal f. r. u. a. M., Bd. 40, S. 228.)

Würzburg, 1897 April 27.

R. Haussner.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. ...

» 47. — ...

» 60. ...

» 64. ...

» 65. ...

» 67. ...

» 71. ...

» 73. ...

» 77. ...

» 78. ...

» 82. ...

» 83. ...

» 90. ...

» 91. ...