ŒUVRES

DE

MAUPERTUIS.

ŒUVRES

DE

MAUPERTUIS.

NOUVELLE ÉDITION
corrigée & augmentée.

TOME QUATRIEME.

A LYON,

Chez JEAN-MARIE BRUYSET,
Imprimeur-Libraire, rue S. Dominique.

M. DCC. LXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSIEUR

DE LA CONDAMINE,

Des Académies de Paris, de Berlin, de Cortone, &c.

Montaigne parlant d'un Philosophe de l'antiquité qui par son testament laissa à l'un de ses amis sa mere à nourrir, & à l'autre sa fille à marier, & admirant cet exemple d'amitié, *ne trouve rien à redire dans Eudamidas, que d'avoir eu plus d'un ami. Le cas est rare, mais il n'est pas impossible : j'ai dédié les autres parties de mes Ouvrages à trois de ces amis si difficiles à trouver, je vous dédie celle-ci.*

Le Philosophe François voulant faire l'éloge de l'amitié, en fait ici une singuliere peinture : c'est une sympathie, une force inexplicable, une passion aussi aveugle que l'amour. Celle qu'il eut pour l'homme illustre qu'il regrette s'enflamma à la premiere vue : si on le presse de dire pourquoi il l'aimoit, il ne peut l'exprimer qu'en diſant, parce que c'étoit lui, parce que c'étoit moi. Je n'ai garde de me comparer à Montaigne, & je ne vous compare point à la Bœtie; j'y gagnerois trop, & vous y perdriez: mais je ne ſuis point encore ici du ſentiment de notre Philoſophe; & je me trouve dans un cas fort différent du ſien. L'amitié qui eſt entre nous ne cede certainement point à celle qu'il eut pour la Bœtie; mais je puis dire pourquoi je vous aime: c'eſt parce que je vous connois l'ame la plus vertueuſe, le cœur le plus ſenſible, & que *vous joignez à cela tous les talents de l'esprit.*

Ces talents, qu'il ne tenoit qu'à vous de tourner de tous côtés, & que ceux qui les possedent n'emploient le plus souvent que pour eux-mêmes, vous ne les avez jamais appliqués qu'à l'utilité publique. Dans tous vos Ouvrages si le citoyen n'a pu faire disparoître le savant ni le bel esprit, il a toujours eu la premiere place. Ce volume de mes Ouvrages qui contient des vérités géométriques, qui ont un rapport nécessaire avec la premiere & la plus utile des vérités; & dans lequel j'ai eu particulié-

rement en vue la perfection de l'Art du Navigateur, étoit donc celui qui vous appartenoit le plus.

Vous y trouverez une partie d'un travail qui nous a été commun. Pendant que vous déterminiez la figure de la Terre au Pérou, j'étois dans la Lapponie chargé des mêmes opérations : la conformité de nos goûts & de nos études qui nous avoit unis en France, nous avoit conduits dans ces climats opposés qui étoient les plus propres pour décider cette fameuse question. Je recevois dans la zone glacée les lettres que vous m'écriviez de la zone *brûlante : occupés des mêmes idées, animés des mêmes motifs, vous sur* Pitchincha, *moi sur* Horrilakero, *nous étions présens l'un à l'autre.*

Vous exécutâtes votre commission avec le zele & l'habileté d'un homme fort supérieur à son ouvrage. Mais vous eûtes encore un avantage que les circonstances où vous vous trouvâtes vous offrirent, & que des circonstances plus heureuses ne mirent point à ma disposition. L'interruption du commerce causée par la guerre, & quelques autres accidens privoient votre troupe des secours de l'Europe, & vous *expoſoient à manquer votre opération : des précautions ſagement priſes avant votre départ, un crédit que nos plus illuſtres Négocians s'étoient empreſſés de vous offrir, votre prudence à vous en ſervir, ſuppléerent à tout : & la partie de votre entrepriſe qui devenoit la plus difficile n'appartint plus qu'à vous ſeul.*

A votre retour, dans cette occaſion qui étoit une de celles où les amitiés qu'on croyoit les plus sûres ſe trouvent ſouvent des haines irréconciliables, j'écoutai la relation de vos travaux avec le même plaiſir que ſi c'euſſent été les *miens ; je me crus échappé à tous vos périls, vainqueur de toutes les difficultés que vous aviez surmontées ; j'admirai de tout mon cœur des succès qui éclipsoient les nôtres. Il manquoit encore à votre gloire des envieux, & vous en trouvâtes : la douceur & l'honnêteté de vos mœurs ne vous en garantirent point. En effet dans ceux qui sont dévorés de cette honteuse passion, ces qualités mêmes sont de nouveaux motifs plus capables de l'irriter que de l'éteindre.*

TABLE

DES OUVRAGES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

ASTRONOMIE NAUTIQUE,

OU

ÉLÉMENS D'ASTRONOMIE,

Tant pour un obſervatoire fixe, que pour un obſervatoire mobile.

DISCOURS
SUR
LA PARALLAXE DE LA LUNE,

Pour perfectionner la théorie de la Lune & celle de la Terre.

OPÉRATIONS

MESURE

DU DEGRÉ DU MÉRIDIEN

AU CERCLE POLAIRE.

AUTRES MESURES,

ACCORD
DE DIFFÉRENTES LOIS
DE LA NATURE

Qui avoient jusqu'ici paru incompatibles.

ACCORD

DE DIFFÉRENTES LOIS

DE LA NATURE

Qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. *

ON ne doit pas exiger que les différens moyens que nous avons pour augmenter nos connoissances, nous conduisent tous aux mêmes vérités ; mais il seroit accablant de voir que des propositions que la Philosophie nous donne comme

* *Ce Mémoire fut lu dans l'assemblée publique de l'Académie Royale des Sciences de Paris, le 15 Avril 1744, & est inséré dans le recueil de 1744.*

des vérités fondamentales, se trouvassent démenties par les raisonnemens de la Géométrie, ou par les calculs de l'Algebre.

Un exemple mémorable de cette contradiction tombe sur un sujet des plus importans de la Physique.

Depuis le renouvellement des Sciences, depuis même leur premiere origine, on n'a fait aucune découverte plus belle que celle des lois que suit la lumiere; soit qu'elle se meuve dans un milieu uniforme, soit que rencontrant des corps opaques elle soit réfléchie par leur surface, soit que des corps diaphanes l'obligent de changer son cours en les traversant. Ces lois sont les fondemens de toute la science de la lumiere & des couleurs.

Mais j'en ferai peut-être mieux sentir l'importance, si, au lieu de présenter un objet si vaste, je m'attache seulement à quelque partie, & n'offre ici que des objets plus bornés & mieux connus, si je dis que ces lois sont les principes sur lesquels est fondé cet art admirable, qui, lorſque dans le vieillard tous les organes s'affoibliſſent, ſait rendre à ſon œil ſa premiere force, lui donner même une force qu'il n'avoit pas reçue de la Nature; cet art qui étend notre vue juſques dans les derniers lieux de l'eſpace, qui la porte juſques ſur les plus petites parties de la matiere; & qui nous fait découvrir des objets dont la vue paroiſſoit interdite aux hommes.

Les lois que ſuit la lumiere, lorſqu'elle ſe meut dans un milieu uniforme, ou qu'elle rencontre des corps qu'elle ne ſauroit pénétrer, étoient connues des anciens: celle qui marque la route qu'elle ſuit, lorſqu'elle paſſe d'un milieu dans un autre, n'eſt connue que depuis le ſiecle paſſé; Snellius la découvrit; Deſcartes entreprit de l'expliquer, Fermat attaqua ſon explication. Depuis ce temps cette matiere a été l'objet des recherches des plus grands Géometres, ſans que juſqu'ici l'on ſoit parvenu à accorder cette loi avec une autre que la Nature doit ſuivre encore plus inviolablement.

Voici les lois que ſuit la lumiere.

La premiere eſt, que *dans un milieu uniforme, elle ſe meut en ligne droite.*

La ſeconde, que *lorſque la lumiere rencontre un corps qu'elle ne peut pénétrer, elle eſt réfléchie; & l'angle de ſa réflexion eſt égal à l'angle de ſon incidence:* c'eſt-à-dire, qu'après ſa réflexion elle fait avec la ſurface du corps un angle égal à celui ſous lequel elle l'avoit rencontré.

La troiſieme eſt, que *lorſque la lumiere paſſe d'un milieu diaphane dans un autre, ſa route, après la rencontre du nouveau milieu, fait un angle avec celle qu'elle tenoit dans le premier, & le ſinus de l'angle de réfraction eſt toujours dans le même rapport au ſinus de l'angle d'incidence.* Si, par exemple, un rayon de lumiere paſſant de l'air dans l'eau s'eſt briſé de maniere que le ſinus de l'angle de ſa réfraction ſoit les trois quarts du ſinus de ſon angle d'incidence; ſous quelqu'autre obliquité qu'il rencontre la ſurface de l'eau, le ſinus de ſa réfraction ſera toujours les trois quarts du ſinus de ſa nouvelle incidence.

La premiere de ces lois eſt commune à la lumiere & à tous les corps : ils ſe meuvent en ligne droite, à moins que quelque force étrangere ne les en détourne.

La ſeconde eſt encore la même que ſuit une balle élaſtique lancée contre une ſurface inébranlable. La Mécanique démontre qu'une balle qui rencontre une telle ſurface, eſt réfléchie par un angle égal à celui ſous lequel elle l'avoit rencontrée ; & c'eſt ce que fait la lumiere.

Mais il s'en faut beaucoup que la troiſieme loi s'explique auſſi heureuſement. Lorſque la lumiere paſſe d'un milieu dans un autre, les phénomenes ſont tout différens de ceux d'une balle qui traverſe différens milieux ; & de quelque maniere qu'on entreprenne d'expliquer la réfraction, on trouve des difficultés qui n'ont point encore été ſurmontées.

Je ne citerai point tous les grands

hommes qui ont travaillé ſur cette matiere ; leurs noms feroient une liſte nombreuſe qui ne ſeroit qu'un ornement inutile à ce Mémoire , & l'expoſition de leurs ſyſtêmes formeroit un ouvrage immenſe : mais je réduirai à trois claſſes toutes les explications que ces Auteurs ont données de la réflexion & de la réfraction de la lumiere.

La premiere claſſe comprend les explications de ceux qui n'ont voulu déduire la réfraction que des principes les plus ſimples & les plus ordinaires de la Mécanique.

La ſeconde comprend les explications qui, outre les principes de la Mécanique , ſuppoſent une tendance de la lumiere vers les corps , ſoit qu'on la conſidere comme une attraction de la matiere , ſoit comme l'effet de telle cauſe qu'on voudra.

La troiſieme claſſe enfin comprend les explications qu'on a voulu tirer des ſeuls principes métaphyſiques ; de ces lois auxquelles la Nature elle-même paroît avoir été aſſujettie par une Intelligence ſupérieure, qui dans la production de ſes effets, la fait toujours procéder de la maniere la plus ſimple.

Deſcartes, & ceux qui l'ont ſuivi, ſont dans la premiere claſſe : ils ont conſidéré le mouvement de la lumiere comme celui d'une balle qui rejailliroit à la rencontre d'une ſurface qui ne lui cede aucunement ; ou qui, en rencontrant une qui lui cede, continueroit d'avancer, en changeant ſeulement la direction de ſa route. Si la maniere dont ce grand Philoſophe a tenté d'expliquer ces phénomenes eſt imparfaite, il a toujours le mérite d'avoir voulu ne les déduire que de la Mécanique la plus ſimple. Pluſieurs Mathématiciens releverent quelque paralogiſme qui étoit échappé à Deſcartes, & firent voir le défaut de ſon explication.

Newton déſeſpérant de déduire les phénomenes de la réfraction de ce qui arrive à un corps qui ſe meut contre des obſtacles, ou qui eſt pouſſé dans des milieux qui lui réſiſtent différemment, eut recours à ſon attraction. Cette force répandue dans tous les corps à proportion de leur quantité de matiere, une fois admiſe, il explique de la maniere la plus exacte & la plus rigoureuſe les phénomenes de le réfraction. M. Clairaut, dans un excellent Mémoire qu'il a donné ſur cette matiere, non ſeulement a mis dans le plus grand jour l'inſuffiſance de l'explication cartéſienne, mais admettant une tendance de la lumiere vers les corps diaphanes, & la conſidérant comme cauſée par quelque athmoſphere qui produiroit les mêmes effets que l'attraction, il en a déduit les phénomenes de la réfraction avec la clarté qu'il porte dans tous les ſujets qu'il traite.

Fermat avoit ſenti le premier le défaut de l'explication de Deſcartes. Il avoit auſſi déſeſpéré apparemment de déduire les phénomenes de la réfraction de ceux d'une balle qui ſeroit pouſſée contre des obſtacles ou dans des milieux réſiſtans ; mais il n'avoit eu recours, ni à des athmoſpheres autour des corps, ni à l'attraction; quoiqu'on ſache que ce dernier principe ne lui étoit ni inconnu ni déſagréable : il avoit cherché l'explication de ces phénomenes dans un principe tout différent & purement métaphyſique.

Tout le monde ſait que lorſque la lumiere ou quelque autre corps va d'un point à un autre par une ligne droite, c'eſt par le chemin & par le temps le plus court.

On ſait auſſi, ou du moins on peut facilement ſavoir, que lorſque la lumiere eſt réfléchie, elle va encore par le chemin le plus court & par le temps le plus prompt. On démontre qu'une balle qui ne doit parvenir d'un point à un autre qu'après avoir été réfléchie par un plan, doit, pour aller par le plus court chemin & par le temps le plus court qu'il ſoit poſſible, faire ſur ce plan l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence : que ſi ces deux angles ſont égaux, la ſomme des deux lignes, par leſquelles la balle va &

revient, eſt plus courte & parcourue en moins de temps que toute autre ſomme de deux lignes qui feroient des angles inégaux.

Voilà donc le mouvement direct & le mouvement réfléchi de la lumiere, qui paroiſſent dépendre d'une loi métaphyſique, qui porte que *la Nature, dans la production de ſes effets, agit toujours par les moyens les plus ſimples.* Si un corps doit aller d'un point à un autre ſans rencontrer nul obſtacle, ou s'il n'y doit aller qu'après avoir rencontré un obſtacle invincible, la Nature l'y conduit par le chemin le plus court, & par le temps le plus prompt.

Pour appliquer ce principe à la réfraction, conſidérons deux milieux pénétrables à la lumiere, ſéparés par un plan qui ſoit leur ſurface commune : ſuppoſons que le point d'où un rayon de lumiere doit partir ſoit dans un de ces milieux, & que celui où il doit arriver ſoit dans l'autre ; mais que la ligne qui joint ces points ne ſoit pas perpendiculaire à la ſurface des milieux : poſons encore, par quelque cauſe que cela arrive, que la lumiere ſe meuve dans chaque milieu avec différentes vîteſſes. Il eſt clair que la ligne droite qui joint les deux points ſera toujours celle du plus court chemin pour aller de l'un à l'autre, mais elle ne ſera pas celle du temps le plus court : ce temps dépendant des différentes vîteſſes que la lumiere a dans les différens milieux, il faut, ſi le rayon doit employer le moins de temps qu'il eſt poſſible, qu'à la rencontre de la ſurface commune, il ſe briſe de maniere que la plus grande partie de ſa route ſe faſſe dans le milieu où il ſe meut le plus vîte, & la moindre dans le milieu où il ſe meut le plus lentement.

C'eſt ce que paroît faire la lumiere lorſqu'elle paſſe de l'air dans l'eau : le rayon ſe briſe de maniere que la plus grande partie de ſa route ſe trouve dans l'air, & la moindre dans l'eau. Si donc, comme il étoit aſſez raiſonnable de le ſuppoſer, la lumiere ſe mouvoit plus vîte dans les milieux plus rares que dans les plus denſes, ſi elle ſe mouvoit plus vîte dans l'air que dans l'eau, elle ſuivroit ici la route qu'elle doit ſuivre pour arriver le plus promptement du point d'où elle part au point où elle doit arriver.

Ce fut par ce principe que Fermat réſolut le problême ; par ce principe ſi vraiſemblable, que la lumiere, qui dans ſa propagation & dans ſa réflexion va toujours par le temps le plus court qu'il eſt poſſible, ſuivoit encore cette même loi dans ſa réfraction : & il n'héſita pas à croire que la lumiere ne ſe mût avec plus de facilité & plus vîte dans les milieux les plus rares, que dans ceux où, pour un même eſpace, elle trouvoit une plus grande quantité de matiere. En effet, pouvoit-on croire au premier aſpect que la lumiere traverſeroit plus facilement & plus vîte le criſtal & l'eau, que l'air & le vuide ?

C'eſt cependant ce qui arrive.

Descartes avoit avancé le premier que la lumiere se meut le plus vîte dans les milieux les plus denses : & quoique l'explication de la réfraction, qu'il en avoit déduite, fût insuffisante, son défaut ne venoit point de la supposition qu'il faisoit. Tous les systêmes qui donnent quelque explication plausible des phénomenes de la réfraction, supposent le paradoxe, ou le confirment. Leibnitz voulut concilier le sentiment de Descartes avec les causes finales : mais ce ne fut que par des suppositions insoutenables, & qui ne quadroient plus avec les autres phénomenes de la Nature *.

Ce fait posé, que *la lumiere se meut le plus vîte dans les milieux les plus denses*, tout l'édifice que Fermat avoit bâti est détruit : la lumiere, lorsqu'elle traverse différens milieux, ne va, ni par le chemin le plus court, ni par celui du temps le plus prompt ; le rayon qui passe de

* *Voyez la remarque de Mr. Euler à la fin de ce Mémoire.*

l'air dans l'eau faiſant la plus grande partie de ſa route dans l'air, arrive plus tard que s'il n'y faiſoit que la moindre. On peut voir dans le Mémoire que M. de Mayran a donné ſur la réflexion & la réfraction, l'hiſtoire de la diſpute entre Fermat & Deſcartes, & l'embarras & l'impuiſſance où l'on a été juſqu'ici pour accorder la loi de la réfraction avec le principe métaphyſique.

En méditant profondément ſur cette matiere, j'ai penſé que la lumiere, lorſqu'elle paſſe d'un milieu dans un autre, abandonnant déjà le chemin le plus court, qui eſt celui de la ligne droite, pouvoit bien auſſi ne pas ſuivre celui du temps le plus prompt. En effet, quelle préférence devroit-il y avoir ici du temps ſur l'eſpace ? la lumiere ne pouvant plus aller tout à la fois par le chemin le plus court, & par celui du temps le plus prompt, pourquoi iroit-elle plutôt par l'un de ces chemins que par l'autre ? Auſſi ne ſuit-elle aucun des deux ; elle

elle prend une route qui a un avantage plus réel : *le chemin qu'elle tient eſt celui par lequel la quantité d'action eſt la moindre.*

Il faut maintenant expliquer ce que j'entends par *la quantité d'action.* Lorſqu'un corps eſt porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action : cette action dépend de la vîteſſe qu'a le corps, & de l'eſpace qu'il parcourt ; mais elle n'eſt ni la vîteſſe ni l'eſpace pris ſéparément. La quantité d'action eſt d'autant plus grande que la vîteſſe du corps eſt plus grande ; & que le chemin qu'il parcourt eſt plus long ; elle eſt proportionnelle à la ſomme des eſpaces multipliés chacun par la vîteſſe avec laquelle le corps les parcourt *.

C'eſt cela, c'eſt cette quantité d'action qui eſt ici la vraie dépenſe de la Nature ; & ce qu'elle ménage le plus qu'il eſt poſſible dans le mouvement de la lumiere.

* *Comme il n'y a ici qu'un ſeul corps, on fait abſtraction de ſa maſſe.*

Soient deux milieux différens, séparés par une surface représentée par la ligne CD, tels que la vitesse de la lumiere dans le milieu qui est au dessus, soit comme m, & la vitesse dans le milieu qui est au dessous, soit comme n.

Soit un rayon de lumiere, qui partant d'un point donné A, doit parvenir au point donné B : pour trouver le point R où il doit se briser, je cherche le point où le rayon se brisant, *la quantité d'action est la moindre* : & j'ai $m.AR + n.RB$, qui doit être un *minimum*.

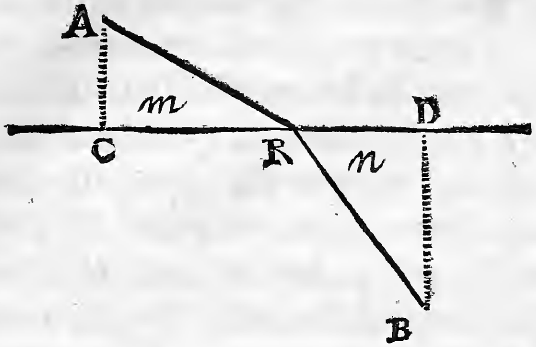
Ou, ayant tiré sur la surface commune des deux milieux, les perpendiculaires AC, BD; $m\sqrt{(AC^2 + CR^2)} + \sqrt{(BD^2 + DR^2)} = min.$ Ou, AC & BD étant constans,

$$\frac{m.CR\,dCR}{\sqrt{(AC^2+CR^2)}} + \frac{n.DR\,dDR}{\sqrt{(BD^2+DR^2)}} = o.$$

Mais, CD étant constant, on a $dCR = -dDR$. On a donc

$$\frac{m.CR}{AR} - \frac{n.DR}{BR} = o. \;\&\; \frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} :: n : m.$$

c'est-à-dire, *le sinus d'incidence, au sinus* *de réfraction, en raison renversée de la vîtesse qu'a la lumiere dans chaque milieu.*



Tous les phénomenes de la réfraction s'accordent maintenant avec le grand principe, que *la Nature, dans la production de ses effets, agit toujours par les voies les plus simples.* De ce principe suit, que *lorsque la lumiere passe d'un milieu dans un autre, le sinus de son angle de réfraction est au sinus de son angle d'incidence en raison inverse des vîtesses qu'a la lumiere dans chaque milieu.*

Mais ce fonds, cette quantité d'action, que la Nature épargne dans le mouvement de la lumiere à travers différens milieux, le ménage-t-elle également lorsqu'elle est réfléchie par des corps opaques, & dans sa simple propagation ? Oui, cette quantité eſt toujours la plus petite qu'il eſt poſſible.

Dans les deux cas de la réflexion & de la propagation, la viteſſe de la lumiere demeurant la même, la plus petite quantité d'action donne en même temps le chemin le plus court, & le temps le plus prompt. Mais ce chemin le plus court & le plutôt parcouru n'eſt qu'une conſéquence de la plus petite quantité d'action : & c'eſt cette conſéquence que Fermat avoit priſe pour le principe.

Le vrai principe une fois découvert, j'en déduis toutes les lois que ſuit la lumiere, ſoit dans ſa propagation, dans ſa réflexion, ou dans ſa réfraction.

Je connois la répugnance que pluſieurs Mathématiciens ont pour les *cauſes finales* appliquées à la Phyſique, & l'approuve même juſqu'à un certain point ; j'avoue que ce n'eſt pas ſans péril qu'on les introduit : l'erreur où ſont tombés des hommes tels que Fermat en les ſuivant, ne prouve que trop combien leur uſage eſt dangereux. On peut cependant dire que ce n'eſt pas le principe qui les a trompés, c'eſt la précipitation avec laquelle ils ont pris pour le principe ce qui n'en étoit que des conſéquences.

On ne peut douter que toutes choſes ne ſoient réglées par un Être ſuprême, qui, pendant qu'il a imprimé à la matiere des forces qui dénotent ſa puiſſance, l'a deſtinée à exécuter des effets qui marquent ſa ſageſſe: & l'harmonie de ces deux attributs eſt ſi parfaite, que ſans doute tous les effets de la Nature ſe pourroient déduire de chacun pris ſéparément. Une Mécanique aveugle & néceſſaire ſuit les deſſeins de l'Intelligence la plus éclairée & la plus libre; & ſi notre eſprit étoit aſſez vaſte, il verroit également les cauſes des effets phyſiques, ſoit en calculant les propriétés des corps, ſoit en recherchant ce qu'il y avoit de plus convenable à leur faire exécuter.

Le premier de ces moyens eſt le plus à notre portée, mais il ne nous mene pas fort loin. Le ſecond quelquefois nous égare, parce que nous ne connoiſſons point aſſez quel eſt le but de la Nature, & que nous pouvons nous méprendre ſur *la quantité*, que nous devons regarder comme *ſa dépenſe* dans la production de ſes effets.

Pour joindre l'étendue à la ſureté dans nos recherches, il faut employer l'un & l'autre de ces moyens. Calculons les mouvemens des corps, mais conſultons auſſi les deſſeins de l'Intelligence qui les fait mouvoir.

Il ſemble que les anciens Philoſophes ayent fait les premiers eſſais de cette eſpece de Mathématique : ils ont cherché des rapports métaphyſiques dans les propriétés des nombres & des corps ; & quand ils ont dit que l'occupation de Dieu étoit la Géométrie, ils ne l'ont entendu ſans doute que de cette ſcience qui compare les ouvrages de ſa puiſſance avec les vues de ſa ſageſſe.

Trop peu Géometres pour l'entrepriſe qu'ils formoient, ce qu'ils nous ont laiſſé eſt peu fondé, ou n'eſt pas intelligible. La perfection qu'a acquis l'art depuis eux nous met mieux à portée de réuſſir ; & fait peut-être plus que la compensation de l'avantage que ces grands génies avoient sur nous.

NB. *Lorsque nous lûmes le Mémoire précédent dans l'Académie Royale des Sciences de Paris, nous ne connoissions ce que Leibnitz avoit fait sur cette matiere que par ce qu'en dit M. de Mayran dans son Mémoire sur la réflexion des corps*, Mémoire de l'Académie de Paris, année 1723. *Nous avions confondu comme lui ce sentiment de Leibnitz avec celui de Fermat : voici ce sentiment développé, tiré d'un Mémoire de M. Euler, tome VII. des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin.*

L*Eibnitz* aussi a tâché de renverser l'explication de Fermat. Dans les Actes de Leipzig, 1682, il s'est proposé pour la réfraction de la lumiere, de rappeller dans la Philosophie ces causes finales qui en avoient été bannies par Descartes, & de rétablir l'explication que Descartes avoit déduite de collision des corps, à laquelle le sentiment de Fermat étoit contraire. Il commence donc par nier que la Nature affecte, soit la route la plus courte, soit celle du moindre temps; mais prétend qu'elle choisit la route la plus facile, qu'il ne faut confondre avec aucune des deux. Or pour estimer cette route la plus facile, c'est la résistance avec laquelle les rayons de la lumiere traversent les milieux diaphanes, qu'il considere ; & il suppoſe cette réſiſtance différente dans les différens milieux. Il établit même, ce qui paroît favoriſer l'opinion de Fermat, que dans les milieux les plus denſes, comme l'eau & le verre, la réſiſtance eſt plus grande que dans l'air & les autres milieux plus rares. Cela ſuppoſé, il conſidere la difficulté que trouve un rayon, lorſqu'il traverſe quelque milieu, & eſtime cette difficulté par le chemin multiplié par la réſiſtance. Il prétend que le rayon ſuit toujours cette route, dans laquelle la ſomme des difficultés ainſi évaluée eſt la plus petite : & par la méthode *de maximis & minimis*, il trouve la regle que l'expérience a fait connoître. Mais, quoique cette explication au premier coup d'œil ſemble s'accorder avec celle de Fermat, elle eſt cependant enſuite interprétée avec une ſubtilité ſi merveilleuſe, qu'elle lui eſt diamétralement oppoſée, & qu'elle s'accorde avec celle de Deſcartes. Car, quoique *Leibnitz* ait ſuppoſé la réſiſtance du verre plus grande que celle de l'air, il prétend cependant que les rayons ſe meuvent plus vîte dans le verre que dans l'air ; & pour cela même, que la réſiſtance du verre eſt la plus grande : ce qui aſſurément eſt un inſigne paradoxe. Or voici comme il s'y prend pour le ſoutenir. Il dit qu'une plus grande réſiſtance empêche la diffuſion des rayons, au lieu que les rayons ſe diſperſent davantage là où la réſiſtance eſt moindre : & que la diffuſion étant empêchée, les rayons reſſerrés dans leur paſſage, tels qu'un fleuve qui coule dans un lit plus étroit, en acquierent une plus grande vîtesse. Ainsi l'explication de *Leibnitz* s'accorde avec celle de Descartes, en ce que l'un & l'autre donnent aux rayons une plus grande vîtesse dans le milieu le plus dense : mais elle s'en écarte fort par la cause que chacun assigne pour cette plus grande vîtesse ; puisque Descartes croyoit que les rayons se mouvoient avec le plus de vîtesse dans le milieu le plus dense, parce que la résistance y étoit moindre ; & que *Leibnitz* au contraire attribue cette plus grande vîtesse à une plus grande résistance. Si ce sentiment peut être admis ou non, ce n'est pas ce que j'examine ici ; mais ce que je dois remarquer, c'est que, quoique *Leibnitz* semble vouloir regarder ce principe de la route la plus facile comme universel, cependant il ne l'a jamais appliqué à aucun autre cas, ni enseigné comment dans d'autres cas cette difficulté, qu'il falloit faire un *minimum*, devoit être estimée. S'il dit, comme ici, que c'est par le produit de la route décrite multipliée par la résistance ; dans la plupart des cas il sera absolument impossible de définir ce qu'on doit entendre par la résistance, qui est un terme très-vague ; & lorsqu'il n'y aura aucune résistance, comme dans le mouvement des corps célestes, comment cette difficulté devra-t-elle être estimée ? Sera-ce par la seule route décrite, puisque la résistance étant nulle, on pourroit la regarder comme par-tout la même ? Mais alors il s'ensuivroit que, dans ces mouvemens, la route elle-même décrite devroit être le *minimum*, & par conséquent la ligne droite : ce qui est entiérement contraire à l'expérience. Si au contraire le mouvement se fait dans un milieu résistant, dira-t-il que ce mouvement sera tel, que le produit de la route décrite multipliée par la résistance soit un *minimum* ? On tireroit de là les conclusions les plus absurdes. On voit donc clairement que le principe de la route la plus facile, tel qu'il a été proposé & expliqué par *Leibnitz*, ne sauroit s'appliquer à aucun autre phénomene qu'à celui du mouvement de la lumiere.

Il semble cependant qu'on pourroit rendre ce principe beaucoup plus étendu, par l'interprétation qu'on donneroit aux remarques qui suivent. Car *Leibnitz* supposant que les rayons se meuvent d'autant plus vîte, qu'ils trouvent une plus grande résistance ; dans ce cas, la vîtesse seroit proportionnelle à la résistance, & pourroit être prise pour sa mesure ; & l'estimation de la difficulté, selon que *Leibnitz* l'a faite, se réduiroit au produit de la route décrite multipliée par la vîtesse ; ce qui étant supposé un *minimum*, s'accorderoit avec le principe de M. *de Maupertuis*, qui estime la quantité d'action par le même produit de l'espace multiplié par la vîtesse. Comme donc ce produit, non seulement dans le mouvement des rayons, mais dans tous les mouvemens & dans toutes les opérations de la Nature, devient en effet le plus petit possible, & que c'est en cela que consiste le principe de la moindre action ; on pourroit d'abord penser que *Leibnitz* avoit en vue ce principe, qui s'accordoit avec son principe de la route la plus facile. Mais quand nous admettrions sans aucune exception le raisonnement de *Leibnitz*, par lequel il veut prouver qu'une plus grande résistance augmente la vîtesse, personne cependant ne pourra jamais croire que dans tout mouvement il arrive que la vîtesse croisse avec la résistance ; y ayant dans la Nature une infinité d'exemples où le contraire saute aux yeux, & où la résistance diminue la vîtesse. C'est donc par un pur hasard qu'il arrive ici que le principe du chemin le plus facile s'accorde avec celui de la moindre action ; ainsi qu'il arrive que le principe de *Ptolemée* du chemin le plus court dans l'Optique & dans la Catoptrique, s'accorde encore avec ce même principe : quoique ce ne soit que dans ce principe même qu'il faille chercher la raison de ces phénomenes. Ainsi, lorsque *Leibnitz* donne son principe du chemin le plus facile pour une loi universelle de la Nature, & fait la difficulté proportionnelle au produit du chemin par la résistance, il ne sauroit accorder cela avec le principe de la moindre action dans aucun autre cas que dans ceux où la vîtesse croît proportionnellement avec la résistance : cas qui sont assurément bien rares, si l'on n'ose pas dire qu'il ne s'en trouve aucun.

Dans tous les autres cas donc, le principe du chemin le plus facile différera beaucoup du principe de la moindre action ; & *Leibnitz* se seroit contredit lui-même s'il avoit jamais prétendu que, dans les opérations de la Nature, le produit du chemin décrit multiplié par la vîtesse faisoit un *minimum*, excepté les seuls cas où la vîtesse seroit proportionnelle à la résistance. D'où nous concluons avec assurance que le principe de la moindre action, non seulement a été entiérement inconnu à *Leibnitz* ; mais encore qu'il a employé un principe fort différent, qui ne s'accordoit avec celui-là que dans un très-petit nombre de cas très-singuliers ; pendant que, dans une infinité d'autres, il lui étoit manifestement contraire. Mais de plus ce principe de *Leibnitz*, quelque général qu'il paroisse, n'est d'usage que dans fort peu de cas, & ne l'est peut-être que dans les seuls dont nons avons parlé. Dans tous les autres on ne peut pas même l'appliquer, parce qu'on ne sait pas comment mesurer la résistance ; & que, de quelque maniere qu'on la mesurât, elle jetteroit toujours dans de grandes erreurs. Tant s'en faut donc que *Leibnitz* ait jamais eu le principe de la moindre quantité d'action, qu'au contraire il a eu un principe tout opposé, dont l'usage, excepté dans un seul cas, n'étoit jamais applicable, ou conduisoit à l'erreur. Et l'on ne voit pas aussi que *Leibnitz* ait voulu dans aucun autre cas faire l'application de ce principe.

Fin de l'accord des Lois de la Nature.

RECHERCHE

DES LOIS

DU MOUVEMENT.

Mens agitat molem.

Virgil. Æneid. lib. VI.

RECHERCHE
DES LOIS
DU MOUVEMENT.*

LES corps, ſoit en repos, ſoit en mouvement, ont une certaine force pour perſiſter dans l'état où ils ſont : cette force appartenant à toutes les parties de la matiere, eſt toujours proportionnelle à la quantité de matiere que ces corps contiennent, & s'appelle leur *inertie*.

L'impénétrabilité des corps, & leur inertie, rendoient néceſſaire l'établiſſement de quelques lois, pour accorder enſemble ces deux propriétés, qui ſont à tout moment oppoſées l'une à l'autre dans la Nature. Lorſque deux

* *Lu dans l'Académie Royale des Sciences de Berlin en 1746.*

corps ſe rencontrent, ne pouvant ſe pénétrer, il faut que le repos de l'un & le mouvement de l'autre, ou le mouvement de tous les deux, ſoient altérés : mais cette altération dépendant de la force avec laquelle les deux corps ſe choquent, examinons ce que c'eſt que le choc, voyons de quoi il dépend ; & ſi nous ne pouvons avoir une idée aſſez claire de la force, voyons du moins les circonſtances qui le rendent le même.

On ſuppoſe ici, comme l'ont ſuppoſé tous ceux qui ont cherché les lois du mouvement, que les corps ſoient des globes de matiere homogene ; & qu'ils ſe rencontrent directement, c'eſt-à-dire, que leurs centres de gravité ſoient dans la ligne droite qui eſt la direction de leur mouvement.

Si un corps ſe mouvant avec une certaine vîteſſe, rencontre un autre corps en repos, le choc eſt le même que ſi ce dernier corps ſe mouvant avec la vîteſſe du premier, le rencontroit en repos.

Si deux corps ſe mouvant l'un vers l'autre l'autre ſe rencontrent, le choc eſt le même que ſi l'un des deux étant en repos, l'autre le rencontroit avec une vîteſſe qui fût égale à la ſomme des vîteſſes de l'un & de l'autre.

Si deux corps ſe mouvant vers le même côté ſe rencontrent, le choc eſt le même que ſi l'un des deux étant en repos, l'autre le rencontroit avec une vîteſſe qui fût égale à la différence des vîteſſes de l'un & de l'autre.

En général donc : ſi deux corps ſe rencontrent, ſoit que l'un des deux ſoit en repos, ſoit qu'ils ſe meuvent tous les deux l'un vers l'autre, ſoit qu'ils ſe meuvent tous deux du même côté ; quelles que ſoient leurs vîteſſes, ſi la ſomme ou la différence de ces vîteſſes (ce qu'on appelle *la vîteſſe reſpective*) eſt la même, le choc eſt le même. *La grandeur du choc de deux corps donnés dépend uniquement de leur vîteſſe reſpective.*

La vérité de cette propoſition eſt facile à voir, en concevant les deux corps emportés ſur un plan mobile, dont la vîteſſe détruiſant la vîteſſe de l'un des deux, donneroit à l'autre la ſomme ou la différence des vîtesses qu'ils avoient. Le choc des deux corps sur ce plan seroit le même que sur un plan immobile, où l'un des corps étant en repos, l'autre le viendroit frapper avec la somme ou la différence des vîtesses.

Voyons maintenant la différence que la dureté ou l'élasticité des corps cause dans les effets du choc.

Les corps parfaitement durs sont ceux dont les parties sont inséparables & inflexibles, & dont par conséquent la figure est inaltérable.

Les corps parfaitement élastiques sont ceux dont les parties, après avoir été pliées, se redressent, reprennent leur premiere situation, & rendent aux corps leur premiere figure. Quant à la nature de cette élasticité, nous n'entreprenons pas de l'expliquer; il suffit ici d'en connoître l'effet.

Je ne parle point des corps mous, ni des corps fluides; ce ne sont que des amas de corps durs ou élastiques.

Lorsque deux corps durs se rencontrent; leurs parties étant inséparables & inflexibles, le choc ne sauroit altérer que leurs vîteſſes. Et comme ces corps ne peuvent ſe pénétrer, il faut que leur vîteſſe devienne la même ; il faut que *les corps durs, après le choc, aillent enſemble d'une vîteſſe commune.*

Mais lorſque deux corps élaſtiques ſe rencontrent, pendant qu'ils ſe preſſent & ſe pouſſent, le choc eſt employé auſſi à plier leurs parties ; & les deux corps ne demeurent appliqués l'un contre l'autre que juſqu'à ce que leur reſſort, bandé par le choc autant qu'il le peut être, les ſépare en ſe débandant, & les faſſe s'éloigner avec autant de vîteſſe qu'ils s'approchoient : car la vîteſſe reſpective des deux corps étant la ſeule cauſe qui avoit bandé leur reſſort, il faut que le débandement reproduiſe un effet égal à celui qui, comme cauſe, avoit produit le bandement, c'eſt-à-dire, une vîteſſe reſpective en ſens contraire égale à la premiere. *La vîteſſe reſpective des corps élaſtiques eſt donc, après le choc, la même qu'auparavant.*

Cherchons maintenant les lois ſelon leſquelles le mouvement ſe diſtribue entre deux corps qui ſe choquent, ſoit que ces corps ſoient durs, ſoit qu'ils ſoient élaſtiques.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Lorſqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action, néceſſaire pour ce changement, eſt la plus petite qu'il ſoit poſſible.

La quantité d'action eſt le produit de la maſſe des corps, par leur vîteſſe & par l'eſpace qu'ils parcourent. Lorſqu'un corps eſt tranſporté d'un lieu dans un autre, l'action eſt d'autant plus grande que la maſſe eſt plus groſſe, que la vîteſſe eſt plus rapide, que l'eſpace par lequel il eſt tranſporté eſt plus long.

PROBLÊME.

Trouver les lois du mouvement des corps.

Pour les corps durs.

Soient deux corps durs, dont les maſſes ſont *A* & *B*, qui ſe meuvent vers le même côté avec les vîteſſes *a* & *b*: mais *A* plus vîte que *B*, enſorte qu'il l'atteigne & le choque. Soit la vîteſſe commune de ces deux corps après le choc $= x < a$ & $> b$. Le changement arrivé dans l'Univers conſiſte en ce que le corps *A*, qui ſe mouvoit avec la vîteſſe *a*, & qui dans un certain temps parcouroit un eſpace $= a$, ne ſe meut plus qu'avec la vîteſſe *x*, & ne parcourt qu'un eſpace $= x$: le corps *B*, qui ne ſe mouvoit qu'avec la vîteſſe *b*, & ne parcouroit qu'un eſpace $= b$, ſe meut avec la vîteſſe *x*, & parcourt un eſpace $= x$.

Ce changement eſt donc le même qui ſeroit arrivé, ſi pendant que le corps *A* ſe mouvoit avec la vîteſſe *a*, & parcouroit l'eſpace $= a$, il eût été emporté en arriere ſur un plan immatériel qui ſe fût mu avec une vîteſſe $a - x$, par un eſpace $= a - x$: & que pendant que le corps *B* ſe mouvoit avec la vîteſſe *b*, & parcouroit l'eſpace $= b$, il eût été emporté en avant ſur un plan immatériel, qui ſe fût mu avec une vîteſſe $x - b$, par un eſpace $= x - b$.

Or, que les corps *A* & *B* ſe meuvent avec des vîteſſes propres ſur les plans mobiles, ou qu'ils y ſoient en repos, le mouvement de ces plans chargés des corps étant le même ; les quantités d'action, produites dans la Nature, feront $A\ (a - x)^2$, & $B\ (x - b)^2$; dont la somme doit être la plus petite qu'il soit possible. On a donc

$$Aaa - 2Aax + Axx$$
$$+ Bxx - 2Bbx + Bbb = min.$$

Ou

$$-2Aadx + 2Axdx + 2Bxdx - 2Bbdx$$

$= o$. D'où l'on tire pour la vitesse commune

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Dans ce cas, où les deux corps se meuvent du même côté, la quantité de mouvement détruite & la quantité produite sont égales ; & la quantité totale de mouvement demeure, après le choc, la même qu'elle étoit auparavant.

Il est facile d'appliquer le même raisonnement au cas où les corps se meuvent l'un vers l'autre : ou bien il suffit de considérer b comme négatif par rapport à a: & la viteſſe commune ſera

$$x = \frac{Aa - Bb}{A + B}.$$

Si l'un des corps étoit en repos avant le choc, $b = o$; & la viteſſe commune eſt

$$x = \frac{Aa}{A + B}.$$

Si un corps rencontre un obſtacle inébranlable, on peut conſidérer cet obſtacle comme un corps d'une maſſe infinie en repos : ſi donc B eſt infini, la viteſſe $x = o$.

Voyons maintenant ce qui doit arriver lorſque les corps ſont élaſtiques. Les corps dont je vais parler ſont ceux qui ont une parfaite élaſticité.

POUR LES CORPS ÉLASTIQUES.

Soient deux corps élaſtiques, dont les maſſes ſont A & B, qui ſe meuvent vers le même côté, avec les viteſſes a & b; mais A plus vîte que B, enſorte qu'il l'atteigne & le choque : & ſoient α & β les viteſſes des deux corps après le choc; la ſomme ou la différence de ces viteſſes, après le choc, eſt la même qu'elle étoit auparavant.

Le changement arrivé dans l'Univers consiste en ce que le corps A, qui se mouvoit avec la vitesse a, & qui dans un certain temps parcouroit un espace $= a$, ne se meut plus qu'avec la vitesse α, & ne parcourt qu'un espace $= \alpha$: le corps B, qui ne se mouvoit qu'avec la vitesse b, & ne parcouroit qu'un espace $= b$, se meut avec la vitesse β, & parcourt un espace $= \beta$.

Ce changement est donc le même qui seroit arrivé, si pendant que le corps A se mouvoit avec la vitesse a, & parcouroit l'espace $= a$, il eût été emporté en arriere sur un plan immatériel, qui se fût mu avec une vitesse $a - \alpha$, par un espace $= a - \alpha$: & que pendant que le corps B se mouvoit avec la vitesse b, & parcouroit l'espace $= b$, il eût été emporté en avant sur un plan immatériel, qui se fût mu avec une vitesse $\beta - b$, par un espace $= \beta - b$.

Or, que les corps A & B se meuvent avec des vitesses propres sur les plans mobiles, ou qu'ils y soient en repos; le mouvement de ces plans chargés des corps étant le même, les quantités d'action produites dans la Nature seront $A\ (a - \alpha)^2$, & $B\ (\beta - b)^2$; dont la somme doit être la plus petite qu'il soit possible. On a donc

$$Aaa - 2Aa\alpha + A\alpha\alpha$$
$$+ B\beta\beta - 2Bb\beta + Bbb = min.$$

Ou

$$-2Aad\alpha + 2A\alpha d\alpha + 2B\beta d\beta - 2Bbd\beta = 0.$$

Or pour les corps élastiques, la vitesse respective étant, après le choc, la même qu'elle étoit auparavant; on a $\beta - \alpha = a - b$, ou $\beta = \alpha + a - b$, & $d\beta = d\alpha$: qui, étant substitués dans l'équation précédente, donnent pour les vitesses

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A + B}; \ \& \ \beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A + B}.$$

Si les corps se meuvent l'un vers l'autre, il est facile d'appliquer le même raisonnement: ou bien il suffit de considérer b comme négatif par rapport à a, & les vitesses seront

$$\alpha = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A + B}; \ \& \ \beta = \frac{2Aa + Ab - Bb}{A + B}.$$

Si l'un des corps étoit en repos avant le choc, $b = o$, & les viteſſes ſont

$$\alpha = \frac{Aa - Ba}{A+B}; \ \& \ \beta = \frac{2\,A\,a}{A+B}.$$

Si l'un des corps eſt un obſtacle inébranlable, conſidérant cet obſtacle comme un corps *B* d'une maſſe infinie en repos; on aura la viteſſe $\alpha = -a$: c'eſt-à-dire que le corps *A* rejaillira avec la même viteſſe qu'il avoit en frappant l'obſtacle.

Si l'on prend la ſomme des forces vives, on verra qu'après le choc elle eſt la même qu'elle étoit auparavant: c'eſt-à-dire, que

$$A\alpha\alpha + B\beta\beta = Aaa + Bbb.$$

Ici la ſomme des forces vives ſe conſerve après le choc: mais cette conſervation n'a lieu que pour les corps élaſtiques, & non pour les corps durs. Le principe général, qui s'étend aux uns & aux autres, eſt que *la quantité d'action, néceſſaire pour cauſer quelque changement dans la Nature, eſt la plus petite qu'il eſt poſſible.*

LOI DU REPOS.

.................*Immota manere*

Mens jubet.

LOI DU REPOS. *

SI les Sciences ſont fondées ſur certains principes ſimples & clairs dès le premier aſpect, d'où dépendent toutes les vérités qui en ſont l'objet, elles ont encore d'autres principes, moins ſimples à la vérité, & ſouvent difficiles à découvrir; mais qui étant une fois découverts, ſont d'une très-grande utilité. Ceux-ci ſont en quelque façon les lois que la Nature ſuit dans certaines combinaiſons de circonſtances, & nous apprennent ce qu'elle fera dans de ſemblables occaſions. Les premiers principes n'ont guere beſoin de démonſtration, par l'évidence dont ils ſont dès que l'eſprit les examine; les derniers ne ſauroient avoir de démonſtration générale, parce qu'il eſt impoſſible de parcourir généralement tous les cas où ils ont lieu.

Tel eſt, par exemple, le principe ſi connu & ſi utile dans la Statique ordinaire; que *dans tous les aſſemblages de corps, leur commun centre de gravité deſcend le plus bas qu'il eſt poſſible*. Tel

* *Ce Mémoire fut lu dans l'Académie Royale des Sciences de Paris le 20 Février 1740.*

eſt celui de *la conſervation des forces vives*. Jamais on n'a donné de démonſtration générale à la rigueur de ces principes ; mais jamais perſonne, accoutumé à juger dans les Sciences, & qui connoîtra la force de l'induction, ne doutera de leur vérité. Quand on aura vu que dans mille occaſions la Nature agit d'une certaine maniere, il n'y a point d'homme de bon ſens qui croie que dans la mille-unieme elle ſuivra d'autres lois.

Quant aux démonſtrations *à priori* de ces ſortes de principes, il ne paroît pas que la Phyſique les puiſſe donner ; elles ſemblent appartenir à quelque ſcience ſupérieure. Cependant leur certitude eſt ſi grande, que pluſieurs Mathématiciens n'héſitent pas à en faire les fondemens de leurs théories, & s'en ſervent tous les jours pour réſoudre des problêmes, dont la ſolution leur coûteroit ſans eux beaucoup plus de peine. Notre eſprit étant auſſi peu étendu qu'il l'eſt, il y a ſouvent trop loin pour lui des premiers principes au point où il veut arriver, & il ſe laſſe ou s'écarte de ſa route. Ces lois dont nous parlons le diſpenſent d'une partie du chemin : il part de là avec toutes ſes forces, & ſouvent n'a plus que quelques pas à faire pour arriver là où il deſire.

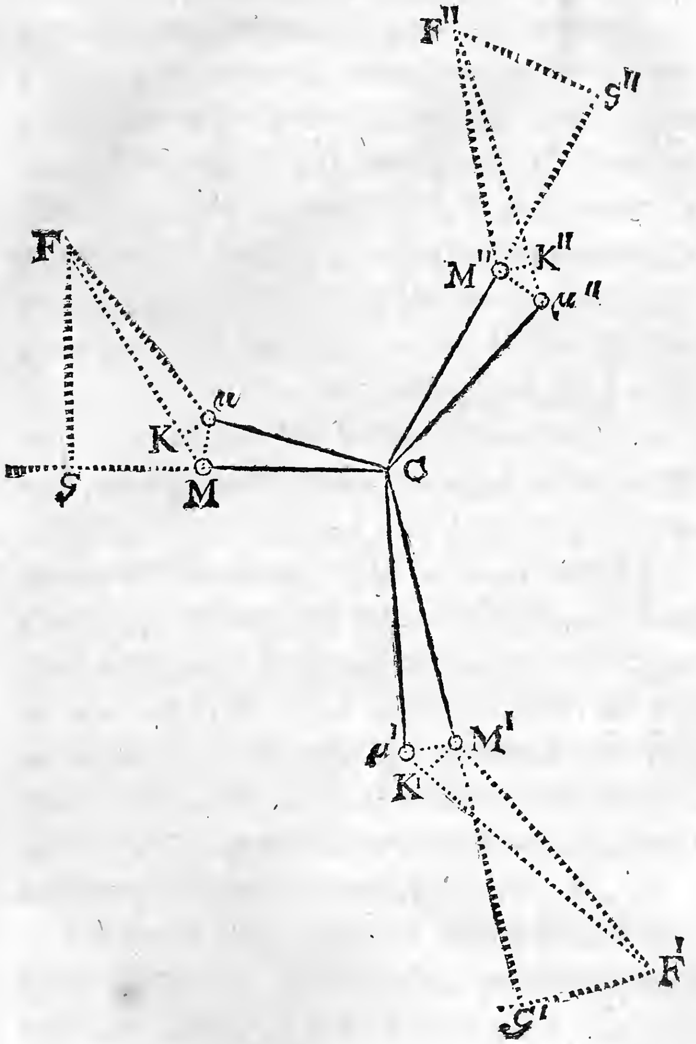
Il n'y a point de ſcience où l'on ſente plus le beſoin de ces principes, que dans la Statique & la Dynamique : la complication qui s'y trouve de la force avec la matiere, y rend plus néceſſaires que dans les ſciences ſimples, ces aſyles pour les eſprits fatigués ou égarés dans leurs recherches. Ils voient facilement s'ils ſe ſont trompés dans leurs propoſitions, en examinant ſi le principe s'y retrouve ou non.

Ce n'eſt que dans ces derniers temps qu'on a découvert une loi dont on ne ſauroit trop vanter la beauté & l'utilité, c'eſt que *dans tout ſyſtême de corps élaſtiques en mouvement, qui agiſſent les uns ſur les autres, la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa viteſſe, ce qu'on appelle la* force vive, *demeure inaltérablement la même.*

En méditant ſur la nature de l'équilibre, j'ai cherché s'il n'y auroit pas dans la Statique quelque loi de cette eſpece ; s'il n'y auroit pas pour les corps tenus en repos par des forces, une loi générale, néceſſaire pour leur repos ; & voici celle que j'ai trouvé que la Nature obſerve.

Soit un ſyſtême de corps qui peſent, ou qui ſont tirés vers des centres par des forces qui agiſſent chacune ſur chacun, comme une puiſſance N *de leurs diſtances aux centres : pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la ſomme des produits de chaque maſſe, par l'intenſité de ſa force, & par la puiſſance* N + I *de ſa diſtance au centre de ſa force* (*qu'on peut appeller la* ſomme des forces du repos) *faſſe un maximum ou un minimum.*

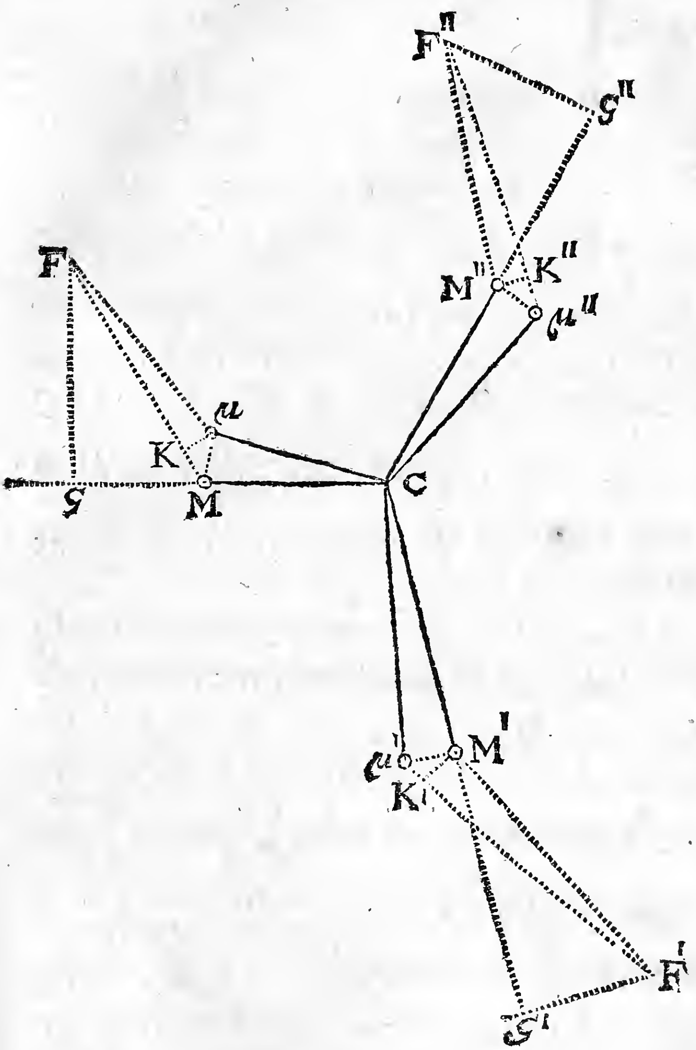
Demonſt. 1°. Soit un ſyſtême d'un nombre quelconque de points peſans, ou de corps dont les maſſes ſoient fort petites par rapport à la diſtance où ils ſont des centres vers leſquels ils peſent. Soient ces corps M, M', M'', &c. attachés à des rayons immatériels CM, CM', CM'', mobiles autour du point fixe C. Soient leurs maſſes $= m$, m', m''; & ſoient dans un nombre égal de points, F, F', F'', des forces f, f', f'', qui s'exercent ſur chacun des corps, chacune comme une puiſſance n de ſa diſtance FM,


F''
S''
M''
K''
μ''
F
μ
K
S
M
C
μ'
M'
K'
F'
S'

FM, FM', $FM'' = z, z', z''$, chaque force n'ayant de pouvoir que ſur ſon corps.

Soient prolongés les rayons CM; & tirées des points F, les perpendiculaires FG, l'on aura (par la décompoſition des forces) $mfz^n \times \frac{FG}{FM}$, pour la force motrice qui tire le rayon CM perpendiculairement; & cette force multipliée par la longueur du levier CM, ſera $mfz^n \times \frac{FG}{FM} CM$, pour celle qui tend à faire tourner ce levier, & ainſi des autres.

Conſidérant donc maintenant tout le ſyſtême dans la ſituation prochaine, & les corps en μ, μ', μ'': ayant tiré les lignes $F\mu$, & des centres F décrit les petits arcs MK, on aura $\frac{FG}{FM} = \frac{MK}{M\mu}$, qui ſubſtitué dans les forces motrices à la place de $\frac{FG}{FM}$, donne $mfz^n \times \frac{MK}{M\mu} CM$, pour chaque corps. Et la raiſon de CM à $M\mu$ étant pour tous les corps la même, & multipliant tous les pro-

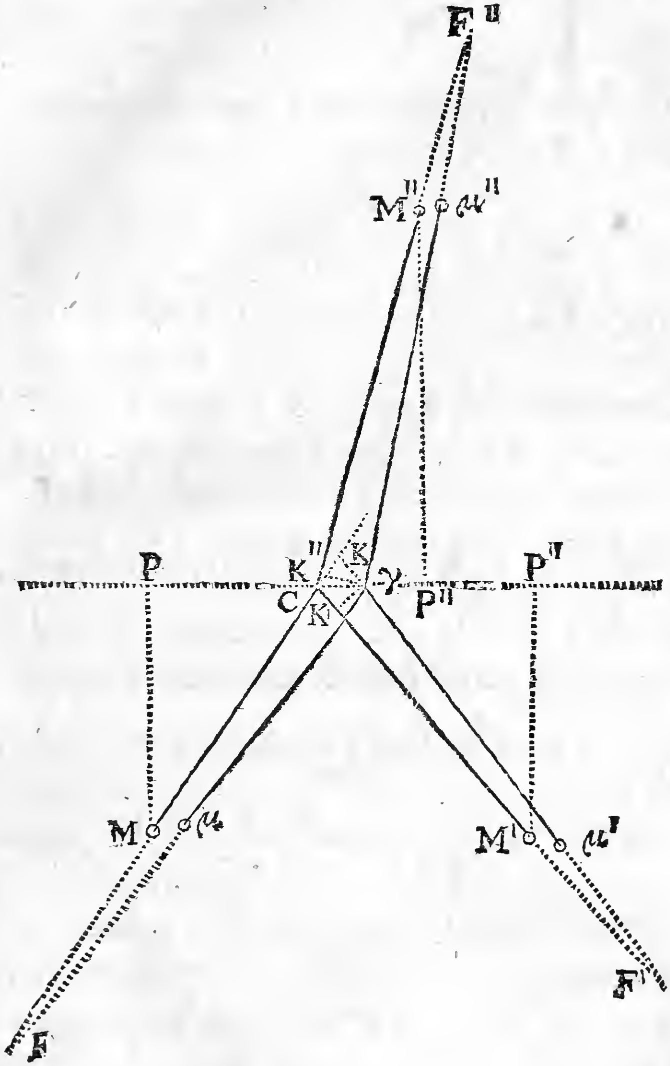

F''
g''
M''
K''
μ''
F
μ
K
C
g
M
μ'
M'
K'
F'
g'

duits ; on aura, pour que le ſyſtême ſoit en équilibre, $m f z^n dz + m' f' z'^n dz' + m'' f'' z''^n dz'' = 0$. D'où l'on voit que $m f z^{n+1} + m' f' z'^{n+1} + m'' f'' z''^{n+1}$ étoit un *maximum* ou un *minimum*. C. Q. F. D.

2°. Si les corps, au lieu d'être attachés à des rayons inflexibles, ſont attachés à des cordes unies en C : ſoit le ſyſtême prêt à parvenir dans la ſituation nouvelle $\mu\gamma\, \mu'\gamma\, \mu''\gamma$; & ſoit tirée par C & γ la droite indéfinie $C\gamma$. Rapportant à cette direction les efforts de chaque corps l'un contre les autres, & tirant des points M, les perpendiculaires MP, $M'P'$, $M''P''$, ſur cette ligne, il faut, pour qu'il y ait équilibre entre ces corps,

que $$m f z^n \times \frac{CP}{CM} =$$
$$m' f' z'^n \times \frac{CP'}{CM'} + m'' f'' z''^n \times \frac{CP''}{CM''}.$$

Décrivant maintenant des centres F & des rayons $F\gamma$, $F'\gamma$, $F''\gamma$, les petits arcs γK, $\gamma K'$, $\gamma K''$, on peut pour $\frac{CP}{CM}$, $\frac{CP'}{CM'}$, $\frac{CP''}{CM''}$, mettre $\frac{CK}{C\gamma}$, $\frac{CK'}{C\gamma}$, $\frac{CK''}{C\gamma}$,


F''
M''
μ''
P
K''
K
γ
P'
C
K'
P''
M
μ
M'
μ'
F'
F

dans l'équation précédente ; & l'on aura

$$m f z^n \times CK = m' f' z'^n \times CK' + m'' f'' z''^n \times CK''.$$

Mais les cordes étant unies en C ; CK, CK', CK'', ſont les quantités dont les corps ſe ſont approchés ou éloignés de leurs centres, c'eſt-à-dire, ſont dz, dz', dz'' ; mettant donc dans l'équation précédente ces valeurs, on a

$$m f z^n dz = m' f' z'^n dz' + m'' f'' z''^n dz''.$$

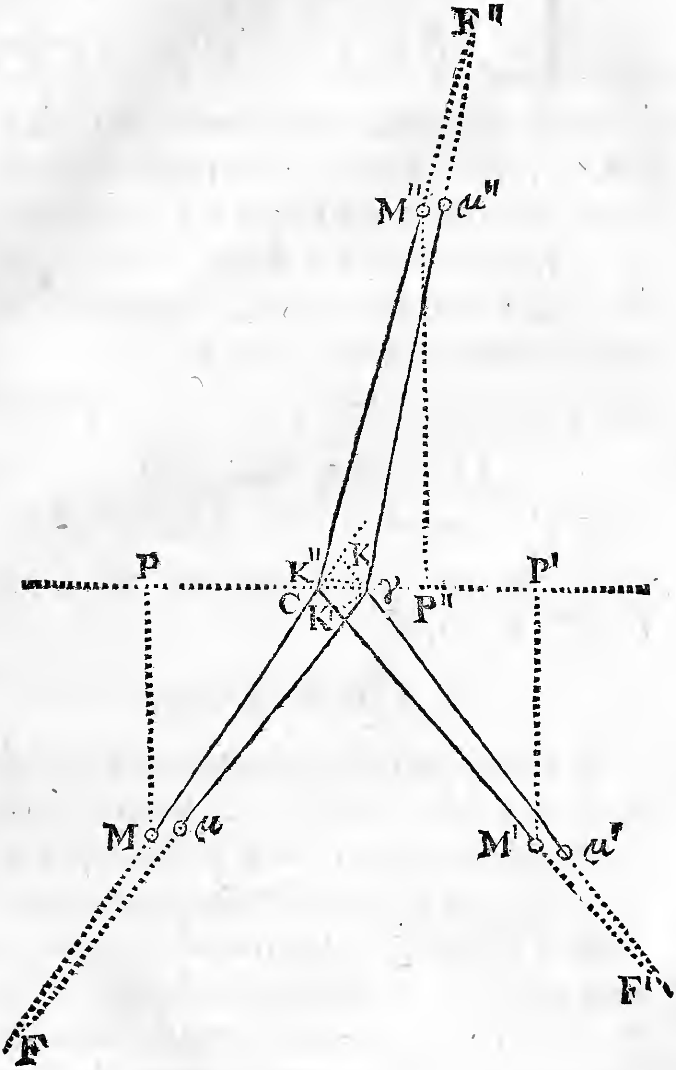
D'où l'on voit que

$$m f z^{n+1} + m' f' z'^{n+1} + m'' f'' z''^{n+1}$$

étoit un *maximum* ou un *minimum*. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Si l'on conſidere maintenant tous les lieux des forces réunis, & toutes les forces réunies dans un ſeul point, & cette force qui en eſt le réſultat comme conſtante, & agiſſant ſur tous les corps ; on voit que le ſyſtême ſera en équilibre lorſque la ſomme des corps multipliés chacun par ſa diſtance au centre de force ſera un *maximum* ou un *minimum*.


F''
M''
μ''
P
K''
K
γ
P'
C
K'
P''
M
μ
M'
μ'
F'
F

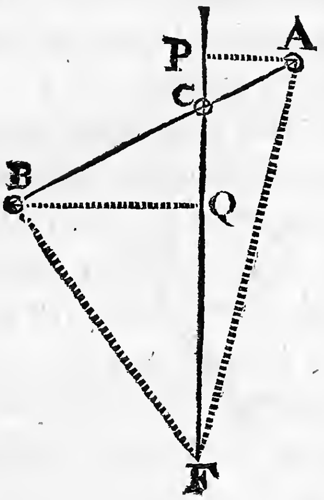
Et ſi l'on ſuppoſe ce centre de force à une diſtance infinie du ſyſtême, il eſt clair que pour que le ſyſtême ſoit en équilibre, *il faut que le centre de gravité de tous les corps ſoit le plus bas ou le plus haut qu'il ſoit poſſible, ou le plus près ou le plus loin du centre de force.* Et ce principe fondamental de la Statique ordinaire n'eſt qu'une ſuite & un cas particulier du nôtre.

On a ſur le champ par ce théorême la ſolution de pluſieurs queſtions de Méchanique qui ont autrefois arrêté d'habiles Géometres, & dont ils n'ont donné que des ſolutions particulieres, qui leur ont coûté bien de la peine & de grandes longueurs. *

Soit, par exemple, le levier droit ACB, mobile autour du point C, & chargé de deux corps A & B, dont les maſſes ſoient fort petites par rapport à leur diſtance du point F vers lequel ils peſent; & ſoit en F une force quelconque p, dont l'action ſur eux ſoit proportionnelle à une puiſſance n de leur diſtance à ce point: on demande quelle ſera la ſituation d'équilibre.

* *Voy. Fermat oper. mathem. Et la Méchan. de M. Varignon, ſect. V.*

Soient tirées par les points F & C, la droite indéfinie FP, les lignes FA, FB, & abaiſſées des points A & B ſur FP, les perpendiculaires AP, BQ; ſoient les lignes $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $CP = x$, & les maſſes des deux corps $= A$ & $= B$;



on aura $FA = \sqrt{(cc + aa + 2cx)}$ &

$FB = \sqrt{(cc + bb - \frac{2bcx}{a})}$.

Maintenant par notre théorême, pour qu'il y ait équilibre, il faut que

$$pA\,(cc + aa + 2cx)^{\frac{n+1}{2}}$$
$$+ pB\,(cc + bb - \frac{2bc}{a}x)^{\frac{n+1}{2}}$$

fasse un *maximum* ou un *minimum*.

On a donc

$$pA\,(cc + aa + 2cx)^{\frac{n-1}{2}}\,cdx =$$
$$pB\,(cc + bb - \frac{2bc}{a}x)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{bcdx}{a};$$

Ou $Aa\,(cc + aa + 2cx)^{\frac{n-1}{2}} =$

$$Bb\,(cc + bb - \frac{2bc}{a}x)^{\frac{n-1}{2}}:$$

D'où l'on tire $x =$

$$\frac{a}{2c} \times \frac{B^{\frac{2}{n-1}}\,b^{\frac{2}{n-1}}\,(cc+bb) - A^{\frac{2}{n-1}}\,a^{\frac{2}{n-1}}\,(cc+aa)}{A^{\frac{2}{n-1}}\,a^{\frac{n+1}{n-1}} + B^{\frac{2}{n-1}}\,b^{\frac{n+1}{n-1}}}.$$

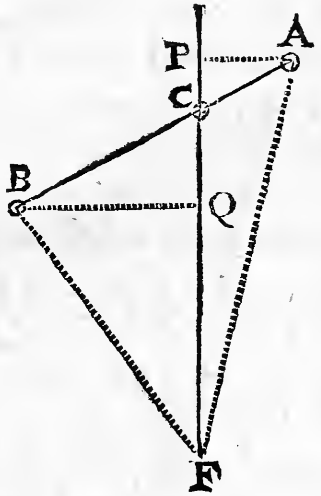
Prenant CP égale à cette valeur de x, & tirant par le point P la perpendiculaire PA, le point où le levier BA la rencontrera, donnera la situation d'équilibre.

L'équation

$$Aa(cc + aa + 2cx)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$Bb\left(cc + bb - \frac{2bc}{a}x\right)^{\frac{n-1}{2}}:$$

fait voir que :



Si le centre de la force eſt à une diſtance infinie, comme on le ſuppoſe pour tous les corps peſans qu'on examine dans la Méchanique ordinaire ; il eſt clair que quelle que ſoit la puiſſance de la diſtance ſelon laquelle cette force agit, les termes aa, bb, & ceux où eſt x, s'évanouiſſent devant cc; & il ſuffit pour qu'il y ait équilibre, que $Aa = Bb$: c'eſt-à-dire, que les maſſes des deux corps ſoient en raiſon renverſée des bras du levier; & l'équilibre ſubſiſtera dans toutes les ſituations du levier, puiſqu'il eſt indépendant de x.

Si $n = 1$, c'eſt-à-dire, ſi la force agit en raiſon directe de la diſtance au centre K; on a encore, pour la condition d'équilibre, $Aa = Bb$. D'où l'on voit que dans cette hypotheſe il y a encore un point C autour duquel le ſyſtême des deux corps eſt toujours en équilibre, s'il y a été une fois; c'eſt-à-dire, qu'il y a dans ces deux hypotheſes un centre de gravité toujours le même dans toutes les ſituations.

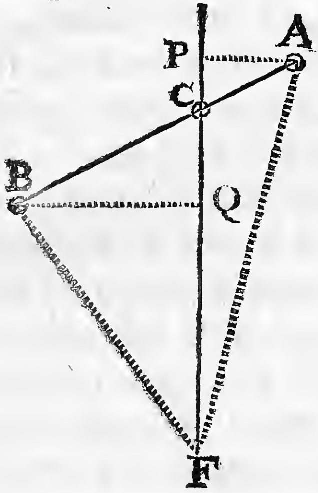
Mais hors de ces deux hypotheſes, on voit par la loi du repos, qu'il eſt impoſſible qu'il y ait de pareil centre. Et la ſimplicité de l'équation

$$Aa(cc + aa + 2cx)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$Bb\left(cc + bb - \frac{2bc}{a}x\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

ne donne pour le levier que deux ſituations d'équilibre, l'une à droite & l'autre à gauche.

Il y a cependant encore deux ſituations où les corps demeureront dans une eſpece d'équilibre ; ce ſont celles où ces deux corps



ſe trouvent dans la ligne qui paſſe par le centre de force & par le point d'appui.

Quoique l'équation précédente ne donne pas ces deux ſituations, elles ſont cependant contenues dans la loi du repos, & dans la premiere équation qui en réſulte, dans laquelle elles ſont données par $d\,x = o$.

On voit facilement que ſi la peſanteur eſt uniforme, comme on le ſuppoſe dans la Méchanique ordinaire, & ſe fait vers le centre de la Terre, il n'y a point *à la rigueur*, de centre de gravité dans les corps, c'eſt-à-dire, de point par où étant ſuſpendus, ils ſe tiennent indifféremment dans toutes les ſituations; quoiqu'il y ait dans ces corps un point qu'on peut prendre phyſiquement pour ce centre, à cauſe de la petiteſſe dont ſont les corps & les leviers qui font l'objet de la Méchanique ordinaire par rapport à la diſtance où ils ſont du centre de la Terre.

Nous donnerons dans la ſuite d'autres applications de cette loi.

ADDITION.

NOTRE loi du repos n'eſt point aſtreinte à des forces qui tirent ſuivant une même puiſſance de la diſtance, ni même ſuivant aucune puiſſance. Il ſuffit que ces forces ſoient proportionnelles à quelques fonctions des diſtances : & au lieu de les exprimer par $f z$, $f' z'$, $f'' z''$, on les peut exprimer par $f Z$, $f' Z'$, $f'' Z''$; Z, Z', Z'', marquant les fonctions quelconques des diſtances, z, z', z'', auxquelles elles répondent : la même démonſtration ſubſiſte. Pour que le ſyſtême ſoit en équilibre, on a

$$m f Z\, dz + m' f' Z'\, dz' + m'' f'' Z''\, dz'' + \&c. = o.$$

D'où l'on voit que la quantité

$$m f \int Z\, dz + m' f' \int Z'\, dz' + m'' f'' \int Z''\, dz'' + \&c.$$

étoit un *minimum*.

La loi du repos ſe peut donc énoncer ainſi :

Soit un ſyſtême de corps qui peſent ou qui ſoient attirés vers des centres par des forces qui agiſſent chacune ſur chacun comme des fonctions quelconques de leurs diſtances aux centres : pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la ſomme des produits de chaque maſſe par l'intenſité de ſa force, & par l'intégrale de chaque fonction multipliée par l'élément de la diſtance au centre (qu'on peut appeller la ſomme des forces du repos) *faſſe un* minimum.

Fin de la Loi du Repos.

ASTRONOMIE
NAUTIQUE,

OU

ÉLÉMENS D'ASTRONOMIE,

Tant pour un observatoire fixe, que pour un observatoire mobile.

Præceps, aërii speculâ de montis, in undas Deferar.

Virgil. Eclog. VIII.

IMPRIMÉ AU LOUVRE
EN M. DCC. XLIII. ET EN M. DCC. LI.

AVERTISSEMENT

MIS A LA SECONDE ÉDITION.

CETTE nouvelle Édition est différente de la premiere, quoiqu'elle ne contienne guere que les mêmes choses, & que l'ordre même n'en soit pas fort différent. J'avois bien déduit toute cette Astronomie de cinq seules formules, qui en effet donnent la solution de tous les problêmes possibles : cependant quelquefois je ne m'étois pas assez étendu sur toutes les circonstances d'une question, & quelquefois il m'étoit arrivé de traiter comme des questions différentes ce que je pouvois réduire à une même, en lui donnant un autre énoncé. Dans cette Édition j'ai diminué le nombre des problêmes, *quoique j'aie rendu l'Ouvrage plus complet ; & je crois en tout lui avoir donné une meilleure forme.*

On trouvera encore une autre différence entre les deux Éditions. Dans la premiere, toutes les ſolutions de problêmes n'étoient qu'en exemples, qui ne pouvoient avoir toute la généralité poſſible ; dans celle-ci, toutes les ſolutions ſont en préceptes généraux : & comme l'uſage de ces préceptes pouvoit reſter difficile, j'en ai toujours fait enſuite l'application à des exemples.

Enfin j'ai retranché entiérement quelques problêmes, comme trop faciles à déduire de ce que j'ai donné, ou comme inutiles, ou comme trop étrangers à ma matiere.

ASTRONOMIE NAUTIQUE.

Tout l'art du Navigateur consiste à pouvoir connoître à chaque instant le point de la surface de la mer où il est ; & l'on peut réduire sous deux genres tous les moyens qu'il a pour cela : on peut appeller moyens géographiques, *ceux qui consistent dans la direction & la longueur de la route : les autres, que j'appellerai* moyens astronomiques, *comprennent tous ceux qu'on peut tirer de l'observation des astres.*

Malgré cette division, on ne doit pas regarder ces différens moyens comme absolument indépendans les uns des autres. Ceux que l'Astronomie fournit dépendent à la vérité fort peu des moyens géographiques : mais ces derniers ne sauroient atteindre à leur perfection sans le ſecours de l'Aſtronomie. La direction de la route indiquée par la bouſſole n'eſt pas toujours la véritable direction : cette aiguille admirable qui montre le nord au Navigateur, ne le lui montre pas conſtamment ni exactement : l'obſervation des aſtres le fait appercevoir de ſes variations, & le met à portée d'y remédier. Dès qu'il a perdu de vue les terres, qu'il ne voit plus que le ciel & la mer, les aſtres ſont les ſeuls flambeaux qui puiſſent le conduire en ſûreté.

Si l'on fait l'énumération de tous les moyens qu'on a, ou qu'il ſemble qu'on ait pour trouver le point du globe où l'on eſt, & qu'on conſidere le problême ſpéculativement ; on croira qu'il y a plus de choſes données qu'il n'eſt néceſſaire pour le réſoudre, & qu'il eſt un de ces problêmes que les Géometres appellent plus que déterminés : mais ſi l'on conſidere que la plupart de ces moyens ne ſont donnés qu'aſſez imparfaitement, & que chacun a beſoin d'être corrigé ou confirmé par les autres, on verra que tous, réunis enſemble, ſuffiſent à peine.

On ne ſauroit donc trop s'appliquer à perfectionner chacun des moyens. Ce ſeroit un grand avantage ſi les uns n'étoient jamais néceſſaires que lorſque les circonſtances empêcheroient de ſe ſervir des autres ; ou ſi au lieu des corrections que ces différens moyens ſe procurent, ils ne ſervoient jamais qu'à ſe confirmer.

Dans mes Élémens de Géographie, *& dans les Mémoires de l'Académie* *, *j'ai expoſé les moyens géographiques ; ceux qui dépendent de la grandeur des degrés de la Terre, de la direction de la route, & de la longueur des arcs que le vaiſſeau trace ſur la ſurface de la mer.*

Les moyens aſtronomiques ſe réduiſent à deux principaux : l'un eſt la latitude ; *l'autre*, la longitude.

J'ai expliqué dans le Diſcours ſur la parallaxe de la Lune, *l'uſage qu'on peut faire de cet aſtre pour connoître la longitude ſur mer ; & comme cette méthode m'a paru celle qui juſqu'ici*

* Mémoires de l'Académie, année 1742.

est le plus à notre portée, je me suis attaché à la perfectionner.

Je viens maintenant à la latitude ; à ce point principal de l'art du Pilote, qui lui fait connoître à quelle distance il est de l'équateur.

Lorsque j'ai commencé cette partie de la Navigation, je n'ai pas prévu toute l'étendue qu'elle devoit avoir. En effet, si je ne destinois ce que j'ai à dire sur la latitude que pour l'usage ordinaire des gens de mer, l'ouvrage ne seroit pas long. La hauteur méridienne du Soleil, ou de quelqu'Etoile, dont la déclinaison soit connue, leur suffit pour déterminer cette latitude : & ils sont si bornés à cette méthode, que si quelque nuage les empêche de voir le Soleil ou l'Etoile au moment de leur passage par le méridien, ils ne connoissent guere d'autre moyen astronomique pour y suppléer.

Mais quand j'ai voulu parcourir toutes les ressources que le Navigateur peut tirer de l'observation des astres, j'ai trouvé tant de choses utiles ou curieuses, que j'ai vu que l'ouvrage *méritoit beaucoup plus d'étendue que je n'avois pensé : j'ai vu que quoique l'Astronomie ordinaire des gens de mer fût fort bornée, une science beaucoup plus vaste leur seroit utile ; que quoique leurs observations fussent assez simples, on pouvoit leur en enseigner de plus simples encore : enfin j'ai trouvé des méthodes qui ne supposent ni adresse, ni même presque d'instrumens.*

La recherche de tous les moyens par lesquels on peut trouver la latitude, m'a jeté dans une théorie assez étendue, & m'a conduit à un ouvrage qu'on peut appeller des Élémens d'Astronomie, tant pour un observatoire fixe, que pour un observatoire mobile.

En effet, on peut considérer le Navigateur comme un Astronome, qui ne differe de l'Astronomie ordinaire, qu'en ce que celui-ci fait ses observations dans un lieu fixe, & que celui-là fait les siennes dans un observatoire entraîné par les vents, & continuellement agité. Et si la précision qu'on exige de celui qui se trouve *dans toutes les circonſtances favorables, rend ſon art difficile ; on peut dire que le défaut de ces circonſtances rend l'art de l'autre plus difficile encore, & l'oblige d'avoir recours à des méthodes plus ſubtiles.*

*Il eſt vrai qu'on n'exige pas de l'*Aſtronome Navigateur *le même degré de préciſion qu'on exige de l'*Aſtronome ſédentaire. *Celui-ci appliqué à perfectionner l'Aſtronomie, ne doit négliger aucun des moyens qui peuvent donner ou augmenter la préciſion, quelque pénibles qu'ils puiſſent être : celui-là, content de bien diriger ſa route, doit ſouvent faire céder une préciſion ſcrupuleuſe à la facilité & à la commodité de ſes opérations. Une quantité de quelques ſecondes eſt importante pour l'Aſtronome ; le Pilote peut impunément négliger quelques minutes : c'eſt au Géometre à calculer les cas où cette préciſion eſt néceſſaire, & ceux où l'on peut uſer de cette licence. Enfin quelquefois le Navigateur ſeroit heureux de connoître ſa latitude d'une maniere encore moins exacte.*

J'ai eu tous ces cas en vue dans les problêmes qui composent l'ouvrage suivant.

Dans les uns, je suppose l'Astronome dans l'observatoire le plus stable, le plus commode, & le mieux muni d'instrumens : & je lui propose des moyens pour perfectionner l'Astronomie.

D'autres problêmes sont destinés pour un Astronome dont l'observatoire seroit bien pourvu d'instrumens, mais continuellement agité : & je lui propose les moyens que cette agitation rend nécessaires, & laisse possibles.

Enfin on trouvera des problêmes dans lesquels je ne suppose plus un Astronome, mais un Navigateur sans science, sans industrie, dénué d'instrumens, tel qu'il peut se trouver après un naufrage : & je lui offre les dernieres ressources qu'un état aussi malheureux lui permet.

Ces différentes sortes de problêmes sembloient exiger qu'on les distinguât, & qu'on en formât différentes parties de l'ouvrage : mais si les usages diffé-

rens auxquels ils ſont deſtinés, exigeoient un tel ordre, la nature de la choſe ne l'a point permis; & j'ai cru devoir ſuivre la connexion que ces problêmes avoient les uns avec les autres, plutôt que de les aſſujettir aux circonſtances où ſe peut trouver celui qui s'en ſert.

On ne doit donc pas s'attendre à trouver ici un ouvrage qui ſoit à la portée de tous les Pilotes. J'ai voulu préſenter l'art dans toute ſon étendue: propoſer ce que les Aſtronomes pourroient entreprendre dans des obſervatoires ſtables & commodes: ce que pourroient exécuter d'habiles Pilotes ſur leurs vaiſſeaux: enfin ce qui reſteroit à faire pour les Navigateurs les plus bornés, & dans les occaſions les plus fâcheuſes.

Cet ouvrage eſt, comme on voit, fort différent de tous les traités d'Aſtronomie qui ont paru juſqu'ici; plus différent encore de tous les traités de Navigation. Dans les uns on ne s'eſt attaché qu'aux méthodes qui ſuppoſent des obſervatoires fixes; & il s'en faut *bien qu'on les ait toutes épuiſées : dans les autres on s'eſt contenté de donner quelques problêmes aſtronomiques des plus ſimples. Et l'on a réduit ainſi l'Aſtronomie ordinaire à ne pouvoir guere être utile au Navigateur ; ou l'Aſtronomie du Navigateur à n'être qu'une petite partie de l'autre Aſtronomie.*

On trouvera au contraire dans notre Aſtronomie nautique *une ſcience ſupérieure à l'Aſtronomie ordinaire. En effet, l'Aſtronomie qui s'exerce dans un obſervatoire continuellement agité, & dont le lieu ſur le globe de la Terre change continuellement, eſt beaucoup plus difficile, & a beſoin d'une plus grande induſtrie que celle qui jouit du repos.*

Je ne puis mieux faire ſentir la différence de ces deux Aſtronomies, que par la conſidération de quelques-uns des problêmes qu'on trouvera dans l'ouvrage ſuivant.

De toutes les obſervations qu'on peut faire ſur mer, la plus facile & la plus exacte, c'eſt celle du lever &

du coucher du Soleil. On n'a beſoin d'aucun inſtrument. Tout le monde ſait que lorſque cet aſtre eſt dans l'horizon, l'épaiſſeur de l'athmoſphere interceptant une grande partie de ſes rayons, nous permet de voir ſon diſque ſans avoir beſoin d'armer l'œil d'aucun verre coloré, & ſans crainte d'en être éblouis. La ligne qui termine l'horizon ſenſible, eſt ſi éloignée de l'obſervateur par rapport aux petites différences que l'agitation des flots cauſe à la hauteur où il ſe trouve, qu'il peut prendre les momens où il obſerve l'émerſion & l'immerſion du Soleil dans l'horizon, pour les mêmes qu'ils ſeroient ſi le vaiſſeau reſtoit immobile.

Mais cette obſervation ſi ſimple & ſi ſûre, ſi l'on en veut faire l'uſage qui ſe préſente d'abord à l'eſprit pour trouver la latitude, ſuppoſe qu'on ſache l'heure à laquelle elle ſe fait : & l'on ne peut avoir l'heure ſur la mer, que par des obſervations qui n'ont ni la même ſimplicité, ni la même exactitude.

J'ai donc cherché une méthode pour

trouver la latitude par les obſervations du lever & du coucher du Soleil, qui fût indépendante de l'heure vraie : & dans laquelle on n'auroit à conſidérer que l'intervalle de temps écoulé entre ces obſervations : intervalle qu'on peut connoître par une ſimple montre, qui n'a pas beſoin d'être réglée ſur le Soleil, pourvu ſeulement que ſon mouvement ſoit aſſez uniforme pendant 24 heures.

J'ai penſé que réduiſant le problême à des obſervations qu'on peut faire dans un vaiſſeau avec autant de préciſion que dans un obſervatoire inébranlable, j'aurois une méthode qui donneroit la latitude ſur mer auſſi exactement qu'elle la pourroit donner ſur terre.

Mais je ne puis diſſimuler qu'en réduiſant le problême à une ſi grande ſimplicité pour l'obſervateur, il devient difficile pour le Géometre qui le veut réſoudre. Il ſemble qu'il y ait dans la ſcience que nous traitons une fatale compenſation entre la ſimplicité des opérations, & la difficulté des calculs.

Pour faire connoître cette difficulté, il faut donner une idée du problême dans toute ſon étendue.

On ſait que pour tous les peuples de la Terre, chaque jour de l'année a ſa durée particuliere : d'autant plus longue pour chacun pendant ſon été, & d'autant plus courte pendant ſon hiver, qu'il habite une région plus éloignée de l'équateur. Il y a donc pour chaque lieu un jour qui eſt le plus long de tous les jours de l'année, & un jour qui eſt le plus court. Le plus long jour eſt d'autant plus long, & le plus court eſt d'autant plus court, que le lieu eſt plus près du pôle : dès qu'on atteint le cercle polaire, le plus long jour ne finit plus ; le Soleil au ſolſtice d'été ne ſe couche plus pour les habitans des zones glacées ; il ne ſe leve plus pour eux lorſqu'il eſt au ſolſtice d'hiver.

On peut donc par la durée du plus long jour, connoître la diſtacce où l'on eſt du pôle, qui eſt le complément de la latitude.

C'eſt ainſi que les anciens Géographes

phes avoient déterminé les latitudes de plusieurs villes des trois parties du monde connues de leur temps. Et Ptolémée, qui nous a laissé ces latitudes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Plusieurs causes cependant rendoient ces déterminations peu exactes. Les anciens ne connoissoient ni la réfraction, ni la parallaxe du Soleil, ni assez exactement l'obliquité de l'écliptique; & ils n'avoient point de mesure du temps assez précise.

Ce sont là les causes des erreurs qu'on trouve dans les latitudes déterminées par les anciens. Les connoissances qu'on a aujourd'hui nous mettent à portée de les corriger: mais le problême, tel qu'ils se le sont proposé, demeure sujet à une grande limitation. C'est que dépendant de l'observation de la durée du plus long ou du plus court jour, il n'y a que deux jours dans l'année où l'on puisse le résoudre.

Voici pourquoi jusqu'ici l'on s'est astreint à cette condition.

La durée du jour dépend de deux

causes : 1°. du lieu que l'observateur occupe sur le globe de la Terre : 2°. du lieu du Soleil dans l'écliptique. Dans chaque lieu de la Terre, plus le Soleil s'approche du tropique voisin, plus le temps de son séjour sur l'horizon est long ; plus il s'éloigne du tropique, plus ce temps est court.

Mais le changement continuel de déclinaison du Soleil, qui, pendant le cours de l'année, rend dans chaque lieu les jours inégaux, altere la durée même de chaque jour, rend inégaux son soir & son matin : rend chaque jour plus long ou plus court qu'il ne seroit si le Soleil à son coucher avoit conservé la même déclinaison qu'il avoit à son lever.

Dans deux points seuls de l'écliptique, la déclinaison du Soleil demeure assez constamment la même pour ne causer à la durée du jour aucune altération sensible : ces points sont ceux où le Soleil, après s'être éloigné de l'équateur, cesse de s'en éloigner, & s'en rapproche. Et ces points, qui sont les points solsticiaux, répondent au plus long & au plus court jour de l'année.

Voilà pourquoi jusqu'ici l'on s'est fixé à ces jours, pour trouver la latitude par leur durée. Mais on voit par là combien cette restriction rend le problême peu utile pour le Navigateur, qui chaque jour a besoin de connoître sa latitude.

D'autres causes encore semblent lui refuser l'usage de ce problême. Nous avons vu que l'agitation des flots ne changeoit point l'instant du lever & du coucher du Soleil : mais il n'en est pas ainsi du transport du vaisseau d'un lieu à l'autre. Selon la plage vers laquelle il navigue, il va trouver un jour plus long ou plus court que celui que le lieu du matin lui promettoit : & quoique les momens de l'émersion & de l'immersion du Soleil dans l'horizon soient les mêmes qu'ils seroient si l'observateur n'éprouvoit aucune agitation, ils ne sont pas séparés par le même intervalle qu'ils le seroient si l'observateur étoit demeuré au même lieu. Pour m'expliquer plus briévement, l'agitation n'apporte aucun trouble à l'observation du lever ni du coucher du Soleil, mais *le mouvement progressif du vaisseau éloigne ou rapproche ces deux instans, & change pour le Navigateur la durée qui les sépare.*

J'ai voulu vaincre toutes ces difficultés, & rendre praticable sur la mer, & tous les jours de l'année, une méthode qui a sur toutes les autres de si grands avantages, par le genre d'observations qu'elle demande.

Mais le problême simple & facile lorsqu'on le résout, comme les anciens l'ont résolu, dans un observatoire fixe, sans avoir égard à la réfraction, ni à la parallaxe, & qu'on l'astreint au jour du solstice, devient difficile lorsqu'on veut le résoudre pour tous les jours de l'année, & dans toutes les circonstances où le Navigateur se trouve.

Car 1°. la réfraction faisant paroître le Soleil avant qu'il se leve, & le faisant paroître encore après qu'il est couché, rend le jour plus long qu'il n'est réellement.

2°. En tout autre temps qu'aux solstices, le changement continuel de déclinaison du Soleil altere la durée du *jour, & l'alonge ou la raccourcit ſelon que le Soleil s'approche ou s'éloigne du tropique.*

3°. L'obſervatoire ſe mouvant lui-même, fait voir au Navigateur un jour plus long ou plus court, ſelon le lieu où il dirige ſa route.

Je ne parle point de l'effet de la parallaxe du Soleil, parce qu'il eſt trop peu conſidérable pour qu'on y doive faire attention dans les problêmes nautiques. Si cependant on y vouloit avoir égard, on ſait que l'effet de cette parallaxe étant de faire voir le Soleil plus bas qu'ils n'eſt par rapport au centre de la Terre, pendant que la réfraction le fait voir plus haut; il n'y a qu'à retrancher la parallaxe de la réfraction, & prendre le reſte pour la quantité dont le Soleil paroît plus élevé qu'il n'eſt.

Pour réſoudre le problême dans toutes ſes circonſtances, il faut donc apprécier ce que chacune contribue à rendre le jour plus long ou plus court, & chercher quelle ſeroit ſa durée pour un obſervateur, qui depuis le lever du

Soleil juſqu'à ſon coucher ſeroit demeuré à la même place ; qui ſeroit ſur une Terre qui n'auroit point d'athmoſphere, ou dont l'athmoſphere ne cauſeroit aux rayons de lumiere aucune réfraction ; enfin qui obſerveroit un Soleil qui depuis ſon lever juſqu'a ſon coucher conſerveroit toujours la même déclinaiſon.

Le calcul eſt compliqué : mais la peine ne ſera que pour le Géometre. Il pourra donner au Pilote des tables par le moyen deſquelles il aura ſa latitude ; en obſervant ſeulement la durée apparente du jour, & à peu près la route qu'il aura tenue du matin au ſoir.

Il n'y a plus à ce problême qu'une reſtriction ; mais une reſtriction qui eſt attachée à la nature de la choſe, & qui ne peut guere nuire dans l'uſage qu'on en veut faire. Deux ſeuls jours de l'année la méthode des anciens étoit praticable : il n'y a que deux jours dans l'année où l'on ne puiſſe pas pratiquer la nôtre ; qui ſont les jours de l'équinoxe. Lorſque le Soleil eſt à ces points, les jours étant égaux dans tous les lieux de la Terre, il eſt évident qu'on *ne ſauroit déterminer la latitude d'aucun lieu par leur durée. Hors de ces temps, notre méthode eſt univerſelle.*

Je parlerai maintenant d'un autre problême, qui ne donne qu'une exactitude fort bornée, mais qui mérite d'être connue par ſa ſingularité, & par la ſimplicité de l'obſervation qu'elle exige. Elle feroit trouver la latitude par le ſeul temps que le Soleil ou la Lune emploient à s'élever de tout leur diſque au deſſus de l'horizon, ou à ſe plonger au deſſous.

Ce temps en général dépendant de la grandeur du diametre de l'aſtre, de ſa déclinaiſon, & de la hauteur du pôle dans le lieu de l'obſervation; pour un jour de l'année donné, ne dépend donc plus que de la hauteur du pôle. Plus l'axe de la Terre eſt élevé, plus l'équateur & ſes cercles paralleles ſont coupés obliquement par l'horizon, plus le temps de l'émerſion & de l'immerſion du diſque eſt long: & ſa durée détermine la hauteur du pôle.

Quelque facile que ſoit cette méthode, que le Navigateur ne ſoit pas tenté de *s'y arrêter lorſqu'il en pourra pratiquer d'autres plus exactes. Je ne la lui offre que pour des cas malheureux où il n'auroit point d'autre reſſource.*

Après l'obſervation du lever & du coucher des aſtres, il n'y en a pas de plus ſimple ni de plus facile, que celle du moment où ils ſe trouvent dans un même vertical. Dans un obſervatoire ſtable, une lunette fixée à angles droits ſur un axe horizontal, & mobile autour de cet axe, donne ces obſervations avec une grande préciſion ; ſur la mer un fil chargé d'un plomb ſuffit : & ſi l'on ſe vouloit contenter d'une moindre exactirude, on pourroit à la vue ſimple juger aſſez juſte ſi la ligne qui joint deux Etoiles eſt verticale, ſur-tout ſi l'on choiſiſſoit deux Etoiles aſſez éloignées l'une de l'autre.

Je donne pour trouver la latitude par des obſervations de cette eſpece, une méthode qui peut être fort utile ſur terre & ſur mer.

J'ai déjà dit que l'ouvrage ſuivant n'étoit pas deſtiné uniquement pour les gens de mer : on y trouvera pluſieurs problêmes pour la perfection de l'Aſtronomie.

Tout le monde ſait, du moins tous les Aſtronomes ſavent, que lorſqu'on veut déterminer la hauteur du pôle, on ſuppoſe connue la déclinaiſon de l'aſtre qu'on emploie à cette recherche; & que lorſqu'on veut déterminer la déclinaiſon d'un aſtre, on ſuppoſe connue la hauteur du pôle. La plupart des méthodes pour trouver l'une ou l'autre de ces deux choſes, ſont dans le cas de ce cercle vicieux. On trouvera dans l'ouvrage ſuivant un problême par lequel on l'évite: on aura la hauteur du pôle indépendamment de la déclinaiſon des aſtres; la déclinaiſon des aſtres indépendamment de la hauteur du pôle: & le tout ſe fera ſans la meſure actuelle d'aucun angle.

Depuis qu'on connoît la propriété qu'a l'athmoſphere de rompre les rayons de la lumiere, & de nous faire voir les aſtres dans des lieux où ils ne ſont point, tous les Aſtronomes ſe ſont appliqués à déterminer la hauteur du pôle par des méthodes qui évitaſſent l'effet de cette illuſion; quoiqu'il paroiſſe que juſqu'ici ce n'ait pas été *avec grand ſuccès. Les unes de ces méthodes ſuppoſent qu'on connoiſſe la déclinaiſon des Etoiles qu'on emploie à cette recherche : & c'eſt cette déclinaiſon qu'il eſt difficile de trouver exempte des erreurs de la réfraction. D'autres ſuppoſent l'obſervation d'une Etoile au zénith : ce qui les limite extrêmement. On trouvera dans ce livre un problême où toutes ces ſuppoſitions ſont évitées ; & qui met la hauteur du pôle, & la déclinaiſon des Etoiles, à l'abri des effets de cette réfraction.*

Je dois maintenant parler de la méthode que j'ai ſuivie dans tout cet Ouvrage.

Pour réſoudre les problêmes aſtronomiques, on a d'ordinaire recours à une ſcience ſecondaire : on les réduit à des triangles tracés ſur la ſurface de la ſphere, que cette ſcience apprend à réſoudre. Je parle de la Trigonométrie ſphérique : elle offre d'abord de grandes facilités. On trouve ſes regles à la tête de pluſieurs livres : & ſouvent on réſout des queſtions im-

portantes de l'Aſtronomie par une application aveugle de ces regles. Par elles on eſt diſpenſé de pénétrer dans la nature de la queſtion ; & par elles l'Aſtronome ſe croiroit diſpenſé d'être Géometre, s'il pouvoit méconnoître la ſcience à laquelle elles doivent leur origine.

J'admire l'art des premiers Géometres qui nous ont donné la Trigonométrie ſphérique : mais je crois que les eſprits géométriques préféreront, pour les problêmes d'Aſtronomie, des ſolutions immédiates à celles qu'on emprunte d'une autre ſcience ; & auxquelles on ne parvient qu'en pratiquant des regles dont l'origine n'eſt guere préſente à l'eſprit, & dont l'application eſt ſouvent ambiguë.

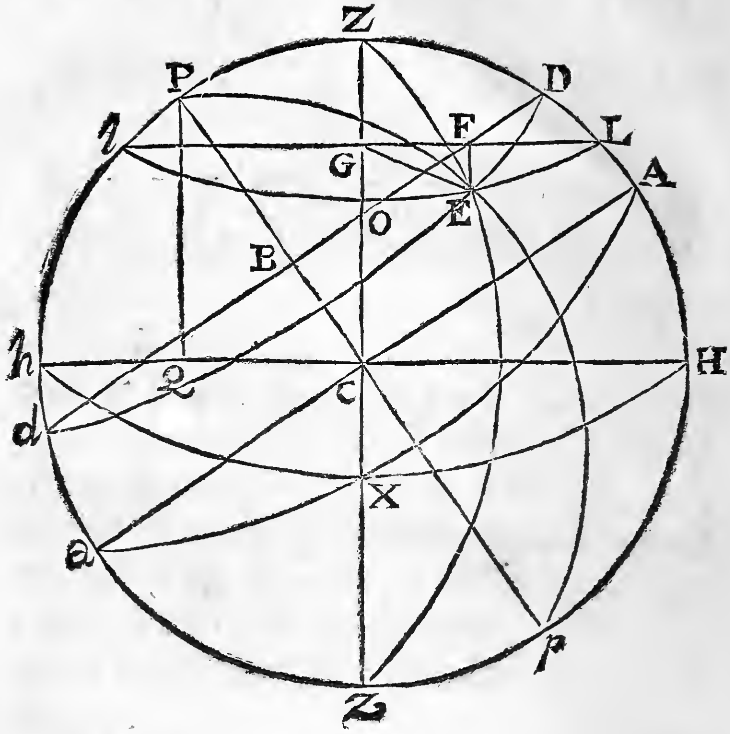
J'ai voulu délivrer l'Aſtronomie du beſoin de cette ſcience ſecondaire ; & la faire dépendre immédiatement de l'analyſe dont toutes les Sciences mathématiques dépendent.

Je dois avouer qu'on trouvera dans la méthode que j'ai ſuivie, l'inconvénient qui ſe rencontre dans toutes les *méthodes générales : c'eſt de donner pour quelques cas particuliers des ſolutions moins ſimples & moins commodes que celles auxquelles on parviendroit par des routes indirectes. Mais je ne crois pas qu'on inſiſte ſur ce reproche, lorſqu'on ſera attention à l'avantage d'avoir tous les problêmes qui compoſent l'Ouvrage ſuivant, réſolus par une même méthode & par un même calcul.*

Après le grand nombre de choſes que j'ai annoncées, je crains de dire que tout eſt contenu dans quelques lignes d'algebre. Ai-je le tort d'avoir préſenté l'Ouvrage d'une maniere trop avantageuſe ? ou l'algebre a-t-elle le mérite d'avoir en effet réduit dans un ſi petit volume une ſcience très-vaſte ? C'eſt à ceux qui examineront l'Ouvrage à en juger.

ASTRONOMIE

NAUTIQUE.


Z
P
D
F
L
l
G
A
E
O
B
h
H
Q
c
d
X
a
p
Z

PRÉPARATION

POUR TOUT LE LIVRE,

OU

Dénomination des principaux élémens de la ſphere.

SOIENT *Pp* l'axe de la ſphere céleſte : *PZAHpzahP* le méridien, & *HXh* l'horizon du lieu ; *AXa* l'équateur, *DEd* le cercle que décrit l'aſtre, *PEp* le méridien qui paſſe au point *E* où l'aſtre ſe trouve, *ZEz* ſon vertical, & *LEl* ſon almicantarath.

Toutes les lignes ſuivantes ſont dans l'hémiſphere élevé ſur le plan du papier, & dont la commune ſection avec ce plan, eſt le méridien *PZAH pzahP*.

SOIT le rayon . . $CP = r$

Le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre. . . . $CB = x$

Son co-ſinus. . . . . . $BD = y$

Le ſinus de la hauteur du pôle . . . . $PQ = s$

Son co-ſinus . . . . . . $CQ = c$

Le ſinus de la hauteur de l'aſtre. . . . . . . $CG = h$

Son co-ſinus . . . . . . $GE = k$

Le ſinus de l'angle horaire DPE . . . . . . $= t$

Son co-ſinus. . . . . $= u$

Le ſinus de l'angle azymuthal LGE . . . $= m$

Son co-ſinus. . . . . $= n$

On aura

$CO = \frac{rx}{s}$

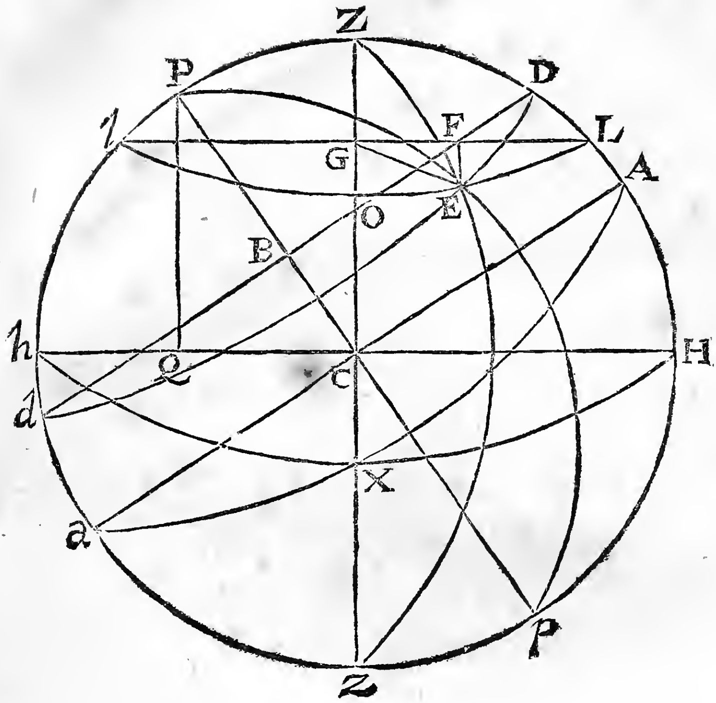
$BO = \frac{cx}{s}$

$GF = \frac{kn}{r}$

$EF = \frac{km}{r}$

$BF = \frac{uy}{r}$

$EF = \frac{ty}{r}$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
H
C
d
X
a
p
z

PROBLÊME I.

Trouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaison d'un astre, sa hauteur, & son angle horaire.

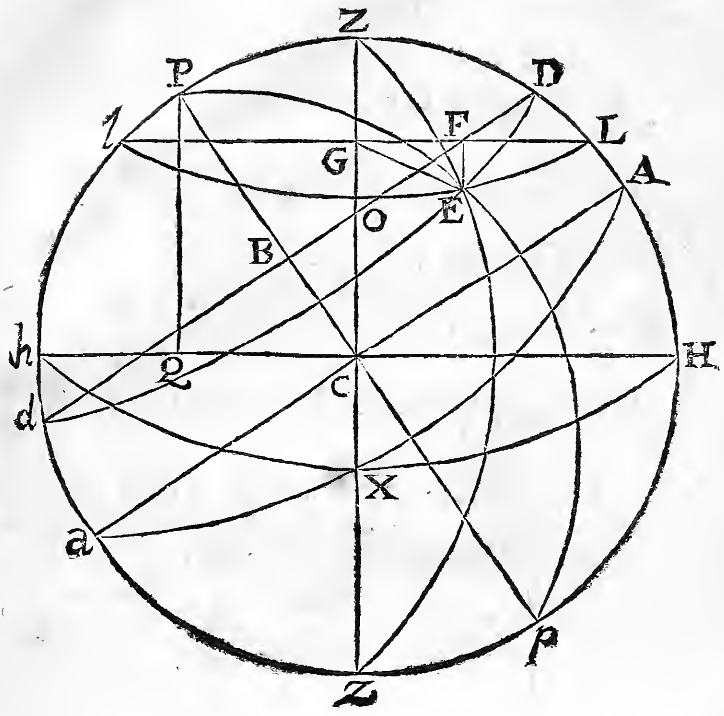
$GO = CG - CO = \frac{hs - rx}{s}$; & les triangles semblables QCP, GOF, donnant

$$c : r :: \frac{hs - rx}{s} : FO = \frac{rhs - rrx}{cs}.$$

On a (à cause de $BO + OF = BF$)

$$\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r} : \text{ou}$$

$$rrh - rsx = cyu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
Z

PROBLÊME II.

Trouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon d'un aſtre, ſa hauteur, & ſon angle azymuthal.

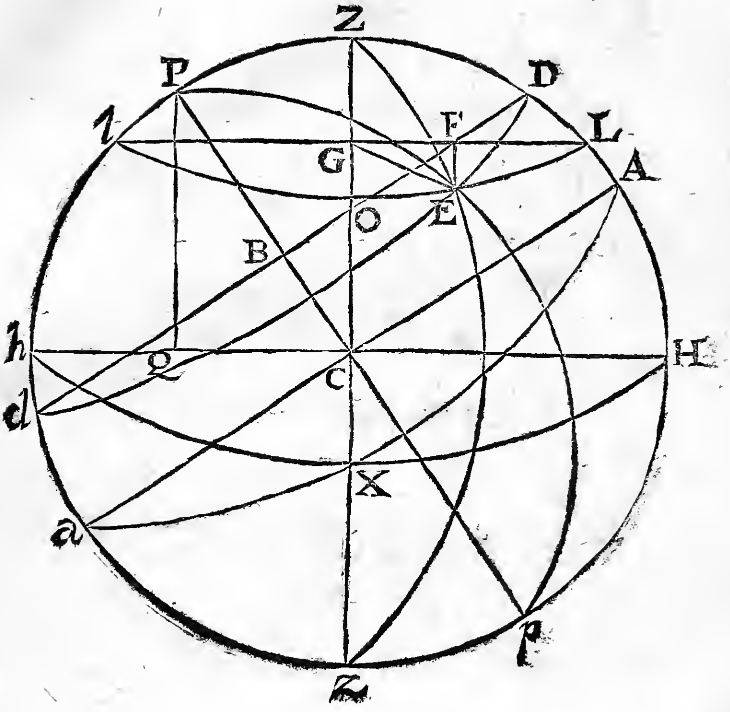
Les triangles ſemblables PQC, FGO, donnent

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs}.$$

Donc (à cauſe de $CO + OG = CG$)

$$\frac{rrx + ckn}{rs} = h, \text{ ou}$$

$$rrx + ckn = hrs.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
z

PROBLÊME III.

Trouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon d'un aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal.

On a $m : n :: \frac{ty}{r} : FG = \frac{nty}{rm}$.

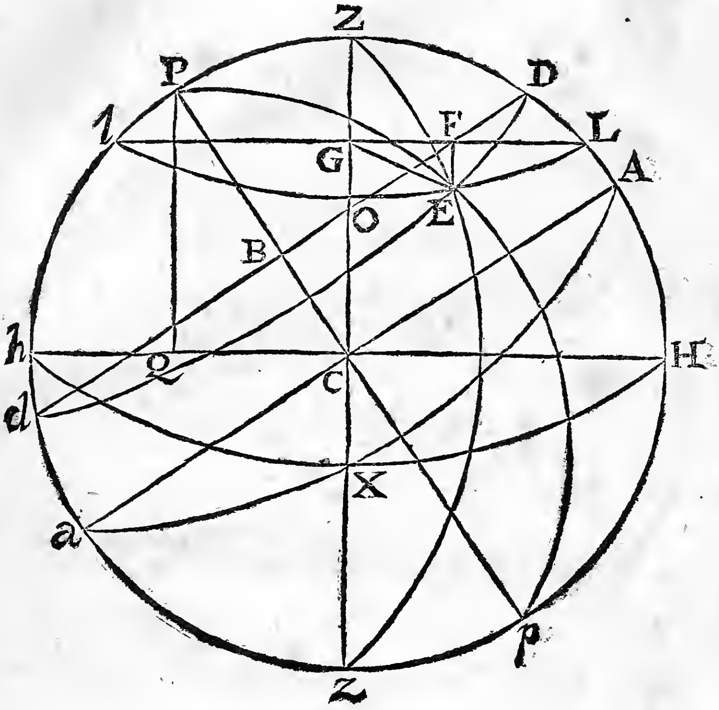
Les triangles ſemblables QPC, GFO, donnent

$$s : r :: \frac{nty}{rm} : FO = \frac{nty}{ms}.$$

Donc (à cauſe de $FO + OB = FB$)

$$\frac{nty + cmx}{ms} = \frac{uy}{r}, \text{ ou}$$

$$rnty + rcmx = msuy.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
H
C
d
X
a
p
Z

PROBLÊME IV.

TRouver la relation entre la hauteur du pôle, la hauteur d'un aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal.

Les triangles ſemblables QPC, GFO, donnent

$$s : r :: \frac{kn}{r} : FO = \frac{kn}{s},$$

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs},$$

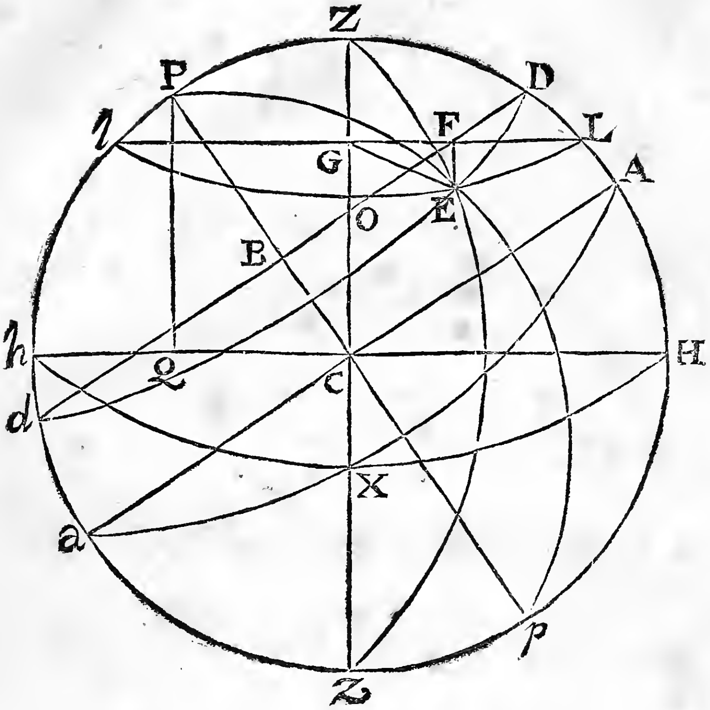
$$\& \; CO = \frac{rhs - ckn}{rs}.$$

Les triangles ſemblables PCQ, COB, donnent

$$r : c :: \frac{rhs - ckn}{rs} : OB = \frac{rchs - cckn}{rrs}.$$

Or $FO + OB : EF$, ou $\frac{rrkn + rchs - cckn}{rrs} : \frac{km}{r} :: u : t$. Donc

$$rcht + knst = rkmu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
Z

PROBLÊME V.

Trouver la relation entre la déclinaison d'un aſtre, ſa hauteur, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal.

La commune ſection de l'almicantarath, & du cercle que décrit l'aſtre, donne

$$\frac{km}{r} = \frac{ty}{r}; \text{ ou}$$

$$km = ty.$$

SCHOLIE.

Ces cinq formules donnent toutes les relations poſſibles entre les cinq élémens qui entrent dans ces problêmes. Mais dans l'hémiſphere que nous avons conſidéré, la poſition de quelques-unes de ces lignes peut varier ; & ces lignes alors changent de ſigne. Les trois qui ſont ſujettes à changer de poſition, ſont n, u & x.

La déclinaiſon étant vers le pôle élevé.

I.

L'aſtre étant vers le méridien ſupérieur ; l'azymuth tombant vers le pôle abaiſſé ; n, u & x conſervent leur poſition.

Les formules ſont

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrx + ckn = rhs.$$
$$rnty + rcmx = msuy.$$
$$rcht + knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

II.

L'aſtre étant vers le méridien ſupérieur ; l'azymuth vers le pôle élevé ; n change de poſition.

Les formules ſont

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrx - ckn = rhs.$$
$$-rnty + rcmx = msuy.$$
$$rcht - knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

III.

L'aſtre étant vers le méridien inférieur ; l'azymuth vers le pôle élevé ; n & u changent de poſition.

Les formules ſont

$$rrh - rsx = -cuy.$$
$$rrx - ckn = rhs.$$
$$-rnty + rcmx = -msuy.$$
$$rcht - knst = -rkmu.$$
$$km = ty.$$

La déclinaiſon étant vers le pôle abaiſſé.

I V.

L'aſtre étant toujours vers le méridien ſupérieur ; l'azymuth toujours vers le pôle abaiſſé ; x ſeul change de poſition.

Les formules ſont

$$rrh + rsx = cuy.$$
$$-rrx + ckn = rhs.$$
$$rnty - rcmx = msuy.$$
$$rcht + knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

Tout ceci ſe paſſe dans l'hémiſphere élevé ſur le plan du papier terminé par le méridien $PZAHpzahP$. Si dans quelques-uns des problêmes ſuivans, on emploie des lignes de l'autre hémiſphere, quelques lettres qui ſont invariables dans un ſeul hémiſphere varieront ; comme m & t, qui étant poſitives dans l'un, ſeroient négatives dans l'autre.

Ces cinq formules contiennent les vingt problêmes ſuivans.

PAR LA 1re. FORMULE:

*r r h * r s x = * c u y.*

Sans connoître l'angle azymuthal.

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſa hauteur & ſon angle horaire, on a la hauteur du pôle.

2.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la hauteur de l'aſtre, & ſon angle horaire, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſa hauteur, on a ſon angle horaire.

4.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſon angle horaire, on a ſa hauteur.

PAR LA 2de. FORMULE:

$$*rrx*ckn = rhs.$$

Sans connoître l'angle horaire.

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſa hauteur, & ſon angle azymuthal, on a la hauteur du pôle.

2.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la hauteur de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſa hauteur, on a ſon angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PAR LA 3^{me}. FORMULE:

$$rnty * rcmx = * msuy.$$

Sans connoître la hauteur de l'aſtre.

I.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, on a la hauteur du pôle.

2.

Connoiſſant la hauteur du pôle, l'angle horaire de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſon angle horaire.

4.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſon angle horaire, on a ſon angle azymuthal.

PAR

PAR LA 4^{me}. FORMULE:

$$r\,c\,h\,t * k\,n\,s\,t = * r\,k\,m\,u.$$

Sans connoître la déclinaiſon de l'aſtre.

1.

Connoiſſant la hauteur de l'aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, on a la hauteur du pôle.

2.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la hauteur de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſon angle horaire.

3.

Connoiſſant la hauteur du pôle, la hauteur de l'aſtre, & ſon angle horaire, on a ſon angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du pôle, l'angle horaire de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PAR LA 5^{me}. FORMULE:

$$k\,m = t\,y.$$

Sans connoître la hauteur du pôle.

1.

Connoiſſant la hauteur de l'aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

2.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſa hauteur, & ſon angle azymuthal, on a ſon angle horaire.

3.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſa hauteur, & ſon angle horaire, on a ſon angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PROBLÊME VI.

TRouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon d'un aſtre, & le temps qu'il emploie ſur l'horizon.

Ceci n'eſt qu'une limitation des uſages de notre 1re. formule : car y faiſant $h = 0$, puiſque l'arc qu'on cherche eſt terminé par l'horizon ; l'on a

$$rsx = cuy.$$

On calcule par là facilement les arcs que les Aſtronomes appellent *ſemi-diurnes*.

On pourroit par là déterminer la déclinaiſon des aſtres.

On pourroit auſſi trouver la hauteur du pôle.

Moyen pour trouver la réfraction horizontale.

L'équation $u = \frac{rsx}{cy}$, donnant le moment où le centre du Soleil est dans l'horizon ; si dans ce moment on observe sa hauteur apparente, cette hauteur donnera la quantité de la réfraction horizontale affectée de la parallaxe horizontale du Soleil : & l'effet de la réfraction étant d'élever l'image du Soleil pendant que l'effet de la parallaxe est de l'abaisser ; si l'on retranche de la hauteur du centre du Soleil sa parallaxe, le reste sera la quantité de la réfraction. Mais la parallaxe du Soleil étant fort peu considérable par rapport à la réfraction horizontale, elle peut être négligée dans les problêmes, qui ne demandent pas la derniere exactitude.

PROBLÊME VII.

TRouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon d'un aſtre, & ſon angle azymuthal, au moment de ſon lever ou de ſon coucher.

Ceci n'eſt qu'une limitation de la 2de. formule, qui dans le cas où l'aſtre eſt dans l'horizon & $h = 0$, donne

$$r x = c n.$$

On calcule par là facilement les amplitudes ortives ou occaſes, par où l'on trouve la déclinaiſon de l'aiguille aimantée.

On pourroit déterminer la déclinaiſon des aſtres qui ſe levent & ſe couchent.

Enfin l'on pourroit trouver la hauteur du pôle.

PROBLÊME VIII.

TRouver la relation entre la déclinaison d'un aſtre, l'angle qu'il traverſe, & le temps qu'il emploie à le traverſer.

Soit le ſinus de la moitié de l'angle $= p$ pour le rayon $= r$; & ſuppoſant qu'on obſerve l'aſtre à diſtances égales du méridien, on aura

$r : m :: k : p$; & $k\,m = r\,p$. Par la 5^{me}. formule on a $k\,m = t\,y$;
Donc $r\,p = t\,y$.

Or, à quelque diſtance du méridien qu'on obſerve un aſtre traverſer un angle donné, le temps qu'il y emploie (en négligeant l'effet de la réfraction) eſt toujours le même : on aura donc toujours

$$r\,p = t\,y.$$

Scholie. On peut par ce problême,

Déterminer la déclinaiſon d'un aſtre,

par l'angle qu'il traverſe, & par le temps qu'il emploie à le traverſer.

Déterminer le temps par l'angle traverſé, & par la déclinaiſon de l'aſtre.

Déterminer l'angle par le temps employé à le traverſer, & par la déclinaiſon de l'aſtre.

PROBLÊME IX.

LA hauteur du pôle, & la déclinaison d'un aſtre étant données, trouver l'azymuth que l'aſtre touche dans ſa révolution.

Tous les aſtres qui paſſent entre le zénith & le pôle ont deux momens, l'un avant, l'autre après leur paſſage par le méridien, où leur cours eſt perpendiculaire à l'horizon, & commun au cercle qu'ils décrivent, & au cercle azymuthal. Voici la maniere de trouver ces points :

L'angle azymuthal qui répond à chaque point du cercle que décrit l'aſtre, croît juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à cette partie commune aux deux cercles ; & décroît auſſi-tôt après. L'angle azymuthal qui convient à cette partie du cours de l'aſtre, eſt donc alors le plus grand qu'il puiſſe être.

Dans ce cas, la 2de. formule eſt

$$rrx - ckn = rhs;$$

Dans laquelle prenant la valeur de $n = \frac{rrx - rhs}{ck}$, la différenciant en faiſant c, x & s conſtans, & faiſant la différence $= 0$, l'on a pour la hauteur qui convient au point qu'on cherche, $h = \frac{rs}{x}$; &, ſubſtituant cette valeur de h dans la formule, on trouve

$$n = \frac{r\sqrt{(xx - ss)}}{c}.$$

Moyen pour trouver la réfraction.

Scholie. On tire du problême précédent un moyen pour déterminer les réfractions que les aſtres éprouvent à différentes hauteurs. Car ſi dans la 5me. formule $km = ty$, on ſubſtitue les valeurs de k & de m qui conviennent au point où l'aſtre tombe, ou s'éleve perpendiculairement à l'horizon, l'on a l'inſtant où cela arrive : l'on a auſſi la hauteur à laquelle il eſt dans cet inſtant. Comparant donc à cette hauteur la hauteur obſervée, leur différence eſt la réfraction.

PROBLÊME X.

LA hauteur du pôle, & la déclinaison d'un aſtre étant données, trouver la relation entre un petit changement dans ſa hauteur, & le temps qu'il y emploie.

La 1re. formule peut avoir ces trois formes,

$$rrh - rsx = cuy,$$
$$rrh - rsx = -cuy,$$
$$rrh + rsx = cuy.$$

Et pendant que l'aſtre s'éleve ou s'abaiſſe, comme il n'arrive de changement qu'à h & u, l'on a en différenciant

$$rrdh = cydu.$$

Pour réduire les différentielles dh & du, aux petits arcs du vertical & de l'équateur, on a $dh = \frac{k}{r} dV$; & $du = \frac{t}{r} dE$, qui, ſubſtitués dans l'équation précédente, donnent

$$rrkdV = ctydE.$$

Ou à cauſe que dans l'horizon $k = r$,

& $t = \frac{rr}{cy} \sqrt{(yy - ss)}$,

$$r\,dV = \sqrt{(yy - ss)}\,dE.$$

Scholie. Ce problême eſt utile pour corriger les hauteurs des aſtres, lorſqu'on n'a pas pu faire les obſervations dans l'inſtant où elles devoient être faites.

On peut auſſi par ce problême, *trouver la durée du lever ou du coucher du Soleil*; c'eſt-à-dire, trouver le temps que le Soleil emploie à s'élever ou à s'abaiſſer à l'horizon de tout ſon diſque.

Car ſi l'on conſidere le diametre du Soleil comme une aſſez petite quantité par rapport aux lignes qui entrent dans ce calcul, on pourra le prendre pour dV; & l'on aura la durée du lever ou du coucher du Soleil par l'équation

$$dE = \frac{r}{\sqrt{(yy - ss)}}\,dV.$$

D'où l'on voit que lorſque la hauteur du pôle ſurpaſſe la codéclinaiſon du Soleil, la durée du lever ou du coucher de cet aſtre eſt imaginaire : en effet le Soleil alors eſt toujours ſur l'horizon.

Si le diametre du Soleil eſt une quantité trop conſidérable par rapport aux autres lignes qui entrent dans ce calcul, & que cette expreſſion de la durée du lever ou du coucher du Soleil ne ſoit pas aſſez exacte pour les uſages auxquels on la deſtine ; l'on en trouvera une à laquelle il ne manque rien, dans le problême XII.

Trouver la hauteur du pôle par la durée du lever ou du coucher du Soleil.

Le calcul précédent donne

$$s = \sqrt{\left(yy - rr\frac{dV^2}{dE^2}\right)}.$$

Il eſt évident que la réfraction, quelque grande qu'elle ſoit, n'apporte ici aucune erreur, pourvu ſeulement qu'elle demeure la même pendant l'obſervation : ce qu'on peut bien prendre pour vrai, vu le peu de temps qu'elle dure ; car la réfraction ne fait ici que tranſporter l'horizon un peu plus haut qu'il n'eſt, ou le changer dans un almicantarath fort peu élevé : & le temps que le Soleil emploie à s'élever au deſſus de cet almicantarath, ou à s'abaiſſer au deſſous, ne differe pas ſenſiblement du temps qu'il emploie à s'élever de la même quantité au deſſus du véritable horizon, ou à s'abaiſſer au deſſous.

On pourroit ainſi par l'obſervation la plus ſimple, connoiſſant la grandeur apparente du diametre du Soleil, & la déclinaiſon de cet aſtre, trouver ſur mer à peu près la hauteur du pôle. Quoique je ne donne pas ceci comme une méthode à employer lorſqu'on peut en pratiquer de plus exactes, il arrive dans la navigation des accidens ſi étranges, qu'on pourroit être heureux d'y avoir recours. Et il eſt toujours utile au Navigateur de connoître toutes les reſſources de ſon art, chacune avec le degré de ſureté qu'elle comporte, afin qu'il puiſſe s'en ſervir dans le beſoin.

PROBLÊME XI.

TRouver la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon du Soleil, le temps écoulé entre deux hauteurs égales de cet aſtre, ſon changement en déclinaiſon pendant ce temps, & la différence des temps qu'il emploie, l'un à s'élever de la hauteur obſervée au méridien, l'autre à deſcendre du méridien à la même hauteur.

La 1[re]. formule peut avoir ces trois formes, ſelon la hauteur du pôle, le lieu du Soleil, & l'heure des obſervations:

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrh - rsx = -cuy.$$
$$rrh + rsx = cuy.$$

Dans ce problême, pendant que c, s & h demeurent les mêmes, u, x & y varient.

1°. La déclinaiſon du Soleil étant vers le pôle élevé, le Soleil vers le méridien ſupérieur, x croiſſant, u diminue: c'eſt le cas de la 1^re^. forme ; & différenciant, on a

$$rsdx = cudy + cydu.$$

2°. La déclinaison étant vers le pôle élevé, le Soleil vers le méridien inférieur, x croissant, u croît : c'est le cas de la 2^de^. forme ; & différenciant, on a

$$rsdx = -cudy + cydu.$$

3°. La déclinaison étant vers le pôle abaissé, le Soleil toujours vers le méridien supérieur : x croissant, u croît : c'est le cas de la 3^me^. forme ; & différenciant, on a

$$rsdx = -cudy + cydu.$$

Pour réduire les différentielles dx, dy, du aux petits arcs du méridien & de l'équateur ; nommant dD le petit arc du méridien qui est la différence en déclinaison, & dE le petit arc de l'équateur qui exprime la différence des temps ; on a $dx = \frac{y}{r} dD$, $dy = \frac{x}{r} dD$, &

du

$du = \frac{t}{r}\,dE$; qui, ſubſtitués dans les équations précédentes, donnent

$$1^{\circ}.\ dE = \left(\frac{rs}{ct} - \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

$$2^{\circ}.\ dE = \left(\frac{rs}{ct} + \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

$$3^{\circ}.\ dE = \left(\frac{rs}{ct} + \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

Ou (mettant les tangentes S, T, X à la place des ſinus)

$$1^{\circ}.\ dE = \left(\frac{S}{t} - \frac{X}{T}\right) dD.$$

$$2^{\circ}.\ dE = \left(\frac{S}{t} + \frac{X}{T}\right) dD.$$

$$3^{\circ}.\ dE = \left(\frac{S}{t} + \frac{X}{T}\right) dD.$$

On peut tirer de ce problême pluſieurs uſages utiles ou curieux, ou plutôt il contient cinq problêmes qu'indique & que réſout la ſeule inſpection de notre équation; car de cinq quantités qu'elle contient, quatre étant données, déterminent la cinquieme.

Correction du midi.

L'un des problêmes précédens eſt de grand uſage dans l'Aſtronomie. Pour régler leur horloge, les Aſtronomes obſervent quelques hauteurs du Soleil avant midi, & les inſtans de ces hauteurs; après midi ils obſervent les mêmes hauteurs, & les inſtans où le Soleil s'y trouve. Si la déclinaiſon du Soleil demeuroit toujours la même, en partageant en deux également les intervalles du temps écoulé entre chacune des hauteurs correſpondantes, le milieu ſeroit l'inſtant où le Soleil auroit paſſé au méridien; c'eſt-à-dire l'inſtant du midi : on trouve ainſi l'inſtant de la culmination des Etoiles fixes; car le changement en déclinaiſon qu'elles éprouvent dans l'intervalle des obſervations n'eſt pas ſenſible.

Il n'en eſt pas ainſi du Soleil; ſa déclinaiſon change aſſez conſidérablement dans l'intervalle des obſervations, pour que l'inſtant auquel il paſſe au méridien ne ſoit pas également éloigné des inſtans auxquels il paſſe aux mêmes hauteurs. Dès que le Soleil s'approche de notre zénith, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt dans les ſignes aſcendans, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vu le matin, plus tard qu'il n'auroit fait ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé : s'il retourne dans les ſignes deſcendans, il y arrive plutôt. Le milieu du temps écoulé entre les hauteurs correſpondantes ne répond donc pas exactement à midi ; il faut, lorſque le Soleil s'approche de notre zénith, en retrancher quelque choſe ; & lorſque le Soleil s'en éloigne, il faut y ajouter quelque choſe pour que cette moitié réponde à l'inſtant du midi : ce qu'il faut retrancher ou ajouter, que les Aſtronomes appellent *la correction du midi*, eſt le petit intervalle entre l'inſtant où le Soleil ſe trouve à la hauteur obſervée, & celui où il ſeroit à la même hauteur ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé.

Les Aſtronomes n'obſervent leurs hauteurs correſpondantes que peu d'heures avant & après midi, & jamais lorſque le Soleil eſt vers le méridien inférieur ; parce qu'alors trop peu élevé ſur l'horizon, il est exposé à l'irrégularité des réfractions horizontales. Nous avons cependant supposé ce cas, parce qu'il se trouvoit dans le problême général.

PROBLÊME XII.

Deux hauteurs d'un astre étant données, trouver la relation entre le temps qui les sépare, la déclinaison de l'astre, & la hauteur du pôle.

La 1ere. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la hauteur de l'astre, sa déclinaison, & son angle horaire, pour les momens des deux observations.

L'intervalle étant donné, ou le sinus de l'arc qui lui répond, on a une équation entre ce sinus & les sinus des deux angles horaires.

Par ces trois équations, chassant les deux angles horaires, on a une équation qui donne la relation entre le temps qui sépare les hauteurs, la déclinaison de l'astre, & la hauteur du pôle.

Exemple. Soit observé un astre dont la déclinaison est vers le pôle élevé, dans deux hauteurs vers le méridien supérieur, toutes deux après le passage au méridien, l'arc qui répond au temps écoulé entre les obſervations ne ſurpaſſant pas le quart-de-cercle.

Les deux hauteurs étant h & h'; & les co-ſinus des angles horaires étant u & u'; la 1ere. formule donne

$$u = \frac{rrh - rsx}{cy},$$
$$u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}.$$

Et le ſinus du temps écoulé entre les deux obſervations, étant p, ſon co-ſinus q, & ſon ſinus verſe o; l'on a *

$$ru = p\sqrt{(rr - u'u')} + qu'.$$

Et chaſſant de ces équations u & u'; l'on a

$$\left.\begin{array}{l} oossxx - 2rrhosx \\ + rrppss - 2rrh'osx \\ + rrppxx \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} r^4pp \\ + r^3qhh' \\ - r^4hh \\ - r^4h'h' \end{array}\right.$$

Dans cette équation, s & x ſont combinés de la même maniere.

I. Si la déclinaiſon de l'aſtre, & le temps écoulé entre les deux obſervations, ſont connus, & qu'on cherche la

* *Voyez les théorêmes mis à la fin de cet ouvrage.*

hauteur du pôle : ordonnant cette équation par rapport à s ; l'on a

$$\left.\begin{matrix}+ooxx\\+rrpp\end{matrix}\right\}ss\left\{\begin{matrix}-2rrhox\\-2rrh'ox\end{matrix}\right\}s=\left\{\begin{matrix}+\ r^4pp\\+2r^3qhh'\\-\ r^4hh\\-\ r^4h'h'\\-\ rrppxx\end{matrix}\right.$$

Ou (faisant $ooxx+rrpp=A$; $rhox+rh'ox=B$: & $rrpp+2rqhh'-rrhh-rrh'h'-ppxx=C$) :

$$ss-2r\tfrac{B}{A}s=rr\tfrac{C}{A}. \text{ Et}$$

$$s=r\tfrac{B}{A}\pm\tfrac{r}{A}\sqrt{(BB+AC)}.$$

Corollaire. Si l'astre est dans l'équateur, $x=0$, & l'on a pour la hauteur du pôle

$$s=\tfrac{r}{p}\sqrt{(pp+\tfrac{2qhh'}{r}-hh-h'h')}.$$

II. Si la hauteur du pôle, & le temps écoulé entre les deux observations, sont connus, & qu'on cherche la déclinaison de l'astre ; l'on a

$$\left.\begin{matrix}+ooss\\+rrpp\end{matrix}\right\}xx\left\{\begin{matrix}-2rrhos\\-2rrh'os\end{matrix}\right\}x=\left\{\begin{matrix}+\ r^4pp\\+2r^3qhh'\\-\ r^4hh\\-\ r^4h'h'\\-\ rrppss.\end{matrix}\right.$$

Ou (faisant $oo ss + rrpp = A$; $rhos + rh'os = B$; & $rrpp + 2rqhh' - rrhh - rrh'h' - ppss = C$):

$$xx - 2r\frac{B}{A}x = rr\frac{C}{A}.\ \text{Et}$$

$$x = r\frac{B}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC)}.$$

Corollaire. Si l'observateur est sous l'équateur, $s = o$; & l'on a pour la déclinaison de l'astre

$$x = \frac{r}{p}\sqrt{(pp + \frac{2qhh'}{r} - hh - h'h')}.$$

III. Si la déclinaison de l'astre & la hauteur du pôle sont connues, & qu'on cherche le temps écoulé entre les deux hauteurs de l'astre; ordonnant l'équation par rapport à q, l'on a

$$ccyyqq \left.\begin{array}{l} -2rssxx \\ -2r^3hh' \\ +2rrhsx \\ +2rrh'sx \end{array}\right\} q = \left\{\begin{array}{l} -r^4yy \\ +r^4ss \\ -2r^3hsx \\ -2r^3h'sx \\ +r^4hh \\ +r^4h'h' \\ +rrssxx \end{array}\right.$$

Ou (faisant $ccyy = D$; $ssxx + rrhh' - rhsx - rh'sx = E$; & $-rryy$

$+rrss - 2rhsx - 2rh'sx + rrhh + rrh'h' + ssxx = F)$:

$$qq - 2r\frac{E}{D}q = rr\frac{F}{D}.$$ Et

$$q = \frac{rE}{D} \pm \frac{r}{D}\sqrt{(EE+DF)}.$$

Scholie. Ce problême eſt d'une grande utilité ſur la Terre, & encore plus ſur la mer, où il enſeigne à trouver la hauteur du pôle lorſqu'on n'a pas pu obſerver les aſtres au méridien. Il donne auſſi l'heure de l'obſervation, ſi l'on a l'aſcenſion droite de l'aſtre; car ſubſtituant les valeurs de s & de x dans l'une des deux équations $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, on a l'angle horaire de l'aſtre au moment de l'obſervation: & y ajoutant ou en ſouſtrayant la différence d'aſcenſion droite de cet aſtre & du Soleil, on a l'heure.

On a par ce problême le temps qu'un aſtre emploie à s'élever ou à s'abaiſſer d'une quantité donnée, & l'on peut par là déterminer exactement la durée du lever ou du coucher du Soleil;

car cette durée, telle que nous l'avons donnée (*Probl. X.*) ne seroit pas assez exacte dans les lieux où le cours du Soleil est fort oblique.

PROBLÊME XIII.

Deux hauteurs d'un aſtre étant données, trouver la relation entre l'arc azymuthal qui les ſépare, la déclinaiſon de l'aſtre, & la hauteur du pôle.

La 2de. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, & ſon angle azymuthal, pour les momens des deux obſervations.

La différence ou la ſomme des angles azymuthaux étant donnée, ou le ſinus de l'arc azymuthal qui ſépare les deux hauteurs, on a une équation entre ce ſinus & les ſinus des deux angles azymuthaux.

Par ces trois équations, chaſſant les deux angles azymuthaux, on a une équation qui donne la relation entre l'arc azymuthal qui ſépare les hauteurs, la déclinaiſon de l'aſtre, & la hauteur du pôle.

Exemple. Soit obſervé un aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le pôle élevé, dans deux hauteurs vers le méridien supérieur, toutes deux après le passage au méridien, les azymuths tombant du côté opposé au pôle élevé; la différence des angles azymuthaux ne surpassant pas le quart-de-cercle.

Les deux hauteurs étant h & h', leurs co-sinus k & k'; & les deux co-sinus des angles azymuthaux étant n & n'; la 2de. formule donne

$$n = \frac{rhs - rrx}{ck},$$

$$n' = \frac{rh's - rrx}{ck'}.$$

Et le sinus de la différence azymuthale entre les deux hauteurs, étant p, & son co-sinus q; l'on a*

$$rn = p\sqrt{(rr - n'n')} + qn.$$

Et chassant de cette équation n & n', par les deux équations de la formule, on a

$$\begin{array}{lll}
\ r^4\,kkxx & & \\
+\ r^4\,k'k'xx & -\,2r^3\,hk'k'sx & \\
-\,2r^3\,qkk'xx & +\,2rrqh\,kk'sx & -\,rrppkkk'k' = 0. \\
+\ rrhh\,k'k'ss & -\,2r^3\,h'kksx & \\
+\ ppkk\,k'k'ss & +\,2rrqh'\,kk'sx & \\
+\ rrh'h'\,kkss & & \\
-\,2rqhh'\,kk'ss & &
\end{array}$$

* *Voyez les théorêmes à la fin de cet ouvrage.*

PROBLÊME XIV.

Deux angles horaires & deux angles azymuthaux d'un aſtre étant donnés, aux momens de ſes paſſages à deux verticaux, trouver la hauteur du pôle & la déclinaiſon de l'aſtre.

La 3^me. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de l'aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, pour les momens des deux obſervations: chaſſant donc la déclinaiſon, l'on a une équation dans laquelle il n'y a plus d'inconnue que la hauteur du pôle. Et la hauteur du pôle ainſi connue, en la ſubſtituant dans l'une des deux premieres équations, on a la déclinaiſon de l'aſtre.

Exemple. Soit obſervé un aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le pôle élevé, dans deux verticaux vers le méridien ſupérieur, tous deux après le paſſage au méridien, les azymuths tombant du côté opposé au pôle élevé.

Les ſinus & co-ſinus des angles horaires étant t, u, & t', u'; & les ſinus & co-ſinus des angles azymuthaux étant m, n, & m', n': la 3^me. formule donne

$$r\,n\,t\,y + r\,c\,m\,x = m\,s\,u\,y;$$
$$r\,n'\,t'\,y + r\,c\,m'\,x = m'\,s\,u'\,y.$$

Ou (faiſant la tangente de la déclinaiſon de l'aſtre $\frac{rx}{y} = X$; & les co-tangentes des angles azymuthaux $\frac{rn}{m} = N$, $\frac{rn'}{m'} = N'$):

$$c\,X = s\,u - N\,t;\ \&\ c\,X = s\,u' - N'\,t'.$$

$$\text{Ou } s\,u - N\,t = s\,u' - N'\,t'.$$

D'où l'on tire pour la hauteur du pôle:

$$s = \frac{N\,t - N'\,t'}{u - u'}.$$

Mettant enſuite cette valeur de s dans l'une des deux premieres équations; l'on a pour la déclinaiſon de l'aſtre

$$X = \frac{N\,t\,u' - N'\,t'\,u}{\sqrt{[(r\,u - r\,u')^2 - (N\,t - N'\,t')^2]}}.$$

Cette méthode, pour trouver la hauteur du pôle & la déclinaiſon des aſtres, eſt exempte des défauts que la réfraction apporte dans toutes les autres.

PROBLÊME XV.

Deux astres dont on connoît les déclinaisons & les angles horaires, étant vus dans un même vertical, trouver la hauteur du pôle.

La 3me. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaison de chaque astre, son angle horaire, & son angle azymuthal pour le moment de l'observation : chassant par ces équations l'angle azymuthal, qui est le même dans l'une & dans l'autre, l'on a une équation dans laquelle il n'y a plus d'inconnue que la hauteur du pôle.

Exemple. Soient observés dans un même vertical deux astres dont les déclinaisons sont vers le pôle élevé, vers le méridien supérieur, tous deux après leur passage au méridien ; leurs azymuths tombant du côté opposé au pôle élevé.

Les

Les deux ſinus & co-ſinus de déclinaiſon étant x, y, & x', y'; & les ſinus & co-ſinus des angles horaires étant t, u, & t', u', la 3me. formule donne

$$rnty + rcmx = msuy,$$
$$rnt'y' + rcmx' = msu'y'.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$, les tangentes des déclinaiſons X & X'),

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}.$$

D'où l'on tire pour la tangente de la hauteur du pôle,

$$\frac{rs}{c} = \frac{rt'X - rtX'}{t'u - tu'}.$$

Corollaire. Si l'un des aſtres eſt dans l'équateur, $X' = 0$; & l'on a

$$\frac{rs}{c} = \frac{rt'X}{t'u - tu'}.$$

PROBLÊME XVI.

LA hauteur du pôle étant connue, & deux aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vus dans un même vertical, trouver l'heure de l'obſervation.

La 3[me.] formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de chaque aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal: chaſſant par ces deux équations l'angle azymuthal, qui eſt le même dans l'une & dans l'autre, on a une équation dans laquelle il n'y a plus d'inconnus que les ſinus des deux angles horaires.

L'aſcenſion droite de chaque aſtre étant donnée, l'on a une équation entre les ſinus des angles horaires, & le ſinus de leur différence ou de leur ſomme qui eſt donnée.

Chaſſant donc par ces deux dernieres équations, l'angle horaire d'un des aſtres, on parvient à une équation qui détermine l'angle horaire de l'autre;

dont l'aſcenſion droite étant donnée, l'on a l'heure de l'obſervation.

Exemple. Soient obſervés dans un même vertical deux aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le pôle élevé, vers le méridien ſupérieur, tous deux après leur paſſage au méridien; leurs azymuths tombant du côté oppoſé au pôle élevé; la différence de leurs aſcenſions droites ne ſurpaſſant pas le quart-de-cercle.

Les deux ſinus & co-ſinus de déclinaiſon étant x, y, & x', y'; & les ſinus & co-ſinus des angles horaires étant t, u, & t', u'; la 3me. formule donne

$$rnty + rcmx = msuy,$$
$$rnt'y' + rcmx' = msu'y'.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$ les tangentes des déclinaiſons X & X').
$\frac{su-cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su'-cX'}{t'}$. Ou

$$st'u - stu' = ct'X - ctX'.$$

Et le ſinus de la différence des angles horaires des deux aſtres étant p, & ſon co-ſinus étant q, l'on a *

* *Voyez les théorêmes à la fin de cet Ouvrage.*

$rt = qt' - p\sqrt{(rr - t't')}$; & $t'u - tu' = rp$.
L'on a donc

$$rps = ct'X - ctX'; \text{ ou}$$

$$t = \frac{ct'X - rps}{cX'}$$

qui, ſubſtitué dans l'équation $rt = qt' - p\sqrt{(rr - t't')}$, donne
$rct'X - rrps = cqt'X' - cpX'\sqrt{(rr - t't')}$.
Ou (faiſant $rps = A$, $rcX - cqX' = B$, $cpX' = C$)

$$rA - Bt' = C\sqrt{(rr - t't')};$$

D'où l'on tire

$$t' = \frac{rAB}{BB+CC} \pm \frac{rC}{BB+CC}\sqrt{(BB+CC-AA)}.$$

Ayant ainſi l'angle horaire d'un des aſtres, ou le temps écoulé depuis ſon paſſage au méridien; en y ajoutant ou en en retranchant la différence d'aſcenſion droite de cet aſtre & du Soleil, on a l'heure de l'obſervation.

Corollaire 1. Si l'un des aſtres eſt dans l'équateur, $X' = 0$; & l'on a d'abord

$$t' = \frac{rps}{cX}.$$

D'où l'on tire une maniere fort ſimple d'avoir l'heure.

Corollaire 2. Si l'on prend $q = \frac{rX}{X'}$; on a

$$t' = \sqrt{(rr - \frac{r^4 ss}{ccX'X'})}.$$

Maniere encore fort simple d'avoir l'heure.

Corollaire 3. Si les deux astres ont la même ascension droite, $p = 0$, $q = r$; & l'on a

$$rct'X = rct'X':$$

D'où l'on voit que $t = 0$: en effet, les deux astres sont dans le méridien au moment de l'observation.

PROBLÊME XVII.

Deux aſtres dont on connoît les déclinaiſons & les angles horaires au moment de l'obſervation, étant vus dans un même almicantarath, trouver la hauteur du pôle.

La 1re. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de chaque aſtre, ſon angle horaire & ſa hauteur : chaſſant par ces équations la hauteur, qui eſt la même dans l'une & dans l'autre, l'on a une équation qui détermine la hauteur du pôle.

Exemple. Soient obſervés dans un même almicantarath deux aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le pôle élevé, vers le méridien ſupérieur ; tous deux après leur paſſage au méridien.

Les deux ſinus & co-ſinus de déclinaiſon étant x, y, & x', y'; & les co-ſinus des angles horaires étant u, & u'; la 1re. formule donne

$$rrh - rsx = cuy,$$
$$rrh - rsx' = cu'y':$$

$$rsx + cuy = rrh = rsx' + cu'y'.$$

D'où l'on tire pour la tangente de la hauteur du pôle,

$$\frac{rs}{c} = \frac{u'y' - uy}{x - x'}.$$

Corollaire. Si l'un des aſtres eſt dans l'équateur, $x' = 0$, $y' = r$; & l'on a

$$\frac{rs}{c} = \frac{ru' - uy}{x}.$$

PROBLÊME XVIII.

LA hauteur du pôle étant connue, & deux aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vus dans un même almicantarath, trouver l'heure de l'obſervation.

La 1re. formule donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de chaque aſtre, ſon angle horaire & ſa hauteur : chaſſant par ces deux équations la hauteur, qui eſt la même dans l'une & dans l'autre, on a une équation dans laquelle il n'y a plus d'inconnus que les ſinus des deux angles horaires.

L'aſcenſion droite de chaque aſtre étant donnée, l'on a une équation entre les ſinus des angles horaires, & le ſinus de leur différence ou de leur ſomme qui eſt donnée.

Chaſſant donc par ces deux dernieres équations l'angle horaire d'un des aſtres, on parvient à une équation qui détermine l'angle horaire de l'autre ; dont l'aſcenſion droite étant donnée, l'on a l'heure de l'obſervation.

Exemple. Soient obſervés dans un même almicantarath deux aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le pôle élevé, vers le méridien ſupérieur, tous deux après leur paſſage au méridien ; la différence de leurs aſcenſions droites ne ſurpaſſant pas le quart-de-cercle.

Les deux ſinus & co-ſinus de déclinaiſon étant xy, & $x'\ y'$; & les co-ſinus des angles horaires étant u, & u'; la 1re. formule donne

$$rrh - rsx = cuy,$$

$$rrh - rsx' = cu'y':$$

$$rsx + cuy = rrh = rsx' + cu'y'; \text{ ou}$$

$$rsx - rsx' = cu'y' - cuy.$$

Et le ſinus de la différence des angles horaires des deux aſtres étant p, & ſon co-ſinus étant q; l'on a *

$$ru = p\sqrt{(rr - u'u')} + qu'; \text{ ou}$$

$$u = \frac{p}{r}\sqrt{(rr - u'u')} + \frac{qu'}{r},$$

* *Voyez les théorêmes à la fin de cet ouvrage.*

qui, ſubſtitué dans l'équation $rsx - rsx'$ $= cu'y' - cuy$, donne

$$rrsx - rrsx' = rcu'y' - cpy\sqrt{(rr - u'u')} - cqu'y;$$

ou (faiſant $rsx' - rsx = A$, $rcy' - cqy$ $= B$, $cpy = C$),

$$rA + Bu' = C\sqrt{(rr - u'u')};$$

D'où l'on tire

$$u' = -\frac{rAB}{BB+CC} \pm \frac{rC}{BB+CC}\sqrt{(BB+CC-AA)}.$$

Ayant ainſi l'angle horaire d'un des aſtres, ou le temps écoulé depuis ſon paſſage au méridien; en y ajoutant ou en en retranchant la différence d'aſcenſion droite de cet aſtre & du Soleil, on a l'heure de l'obſervation.

Corollaire 1. Si l'un des aſtres eſt dans l'équateur, $x' = 0$, & l'équation précédente eſt un peu plus ſimple.

Corollaire 2. Si l'on prend $q = \frac{ry'}{y}$, l'équation eſt auſſi plus ſimple.

Corollaire 3. Si les deux aſtres ont la même aſcenſion droite, $p = 0$, $q = r$; & l'on a

$$u' = \frac{rs}{c}\left(\frac{x - x'}{y' - y}\right).$$

PROBLÊME XIX.

Les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois Etoiles étant données, & le temps écoulé entre les momens où l'une des trois ſe trouve dans un même vertical avec chacune des deux autres, trouver l'heure de l'obſervation, & la hauteur du pôle.

La 3^{me.} formule, pour le moment de la premiere obſervation, donne deux équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de la premiere & de la ſeconde Etoile, l'angle horaire de chacune, & leur angle azymuthal, qui eſt le même: on chaſſe donc cet angle azymuthal par ces deux équations, & l'on a une équation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de la premiere & de la ſeconde Etoile, & l'angle horaire de chacune.

La même formule, pour le moment de la ſeconde obſervation, donne deux autres équations entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de la premiere & de la troiſieme Etoile, l'angle horaire de chacune, & leur angle azymuthal, qui eſt le même: on chaſſe donc pareillement cet angle azymuthal par ces deux équations; & l'on a une équation entre la hauteur du pôle, la déclinaiſon de la premiere & de la troiſieme Etoile, & l'angle horaire de chacune.

Les quatre équations ſont donc réduites à *deux, qui ne contiennent plus que la hauteur du pôle, les déclinaiſons des trois Etoiles, & leurs angles horaires, aux momens des deux obſervations.*

Et la hauteur du pôle étant la même dans chacune de ces deux équations, on les réduit à *une ſeule équation, qui ne contient plus que les déclinaiſons des trois Etoiles, les angles horaires de la premiere & de la ſeconde au moment de la premiere obſervation, & les angles horaires de la premiere & de la troiſieme au moment de la ſeconde obſervation.*

L'aſcenſion droite de chaque Etoile étant donnée, on chaſſe de cette équation les angles horaires de la ſeconde & de la troiſieme étoile aux momens des deux obſervations, & l'on a *une équation qui ne contient plus que des quantités connues avec les angles horaires de la premiere Etoile aux momens des deux obſervations.*

Le temps écoulé entre ces momens étant donné, c'eſt-à-dire, la différence ou la ſomme de ces deux angles; on chaſſe l'un des deux, & *l'on a une équation qui détermine l'angle horaire de la premiere Etoile au moment d'une des obſervations:* ce qui (l'aſcenſion droite de cette Etoile & du Soleil étant connue) donne l'heure de cette obſervation.

D'où l'on détermine l'angle horaire de la ſeconde ou de la troiſieme Etoile au moment de ſon obſervation: & mettant les angles horaires de la premiere & de la ſeconde Etoile, ou de la premiere & de la troiſieme, dans une des équations qui contiennent la hauteur du pôle, la déclinaiſon de ces Etoiles & leurs angles horaires, on a la hauteur du pôle.

Exemple. Soient trois Etoiles dont les déclinaiſons ſont vers le pôle élevé, dont les différences d'aſcenſion droite entre la premiere & la ſeconde, & entre la premiere & la troiſieme, ne ſurpaſſent pas le quart-de-cercle ; ſoient ces Etoiles obſervées vers le méridien ſupérieur, & après leur paſſage au méridien ; la premiere & la ſeconde dans un même vertical, & après un temps donné ; la premiere & la troiſieme dans un autre vertical.

Soient les tangentes de leurs déclinaiſons X, X', X'': les ſinus & co-ſinus de leurs angles horaires, t, u; t', u'; ϑ, v; ϑ', v': les ſinus & co-ſinus des angles azymuthaux dans les deux obſervations, m, n; m', n': la 3me. formule donne pour le moment de la premiere obſervation

$$\frac{rn}{m} = \frac{su - cX}{t}$$

$$\frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}:$$

& pour le moment de la ſeconde obſervation

$$\frac{r\,n'}{m'} = \frac{s\,v - c\,X}{\vartheta}$$

$$\frac{r\,n'}{m'} = \frac{s\,v' - c\,X'}{\vartheta'}.$$

Ces quatre équations ſe réduiſent donc à ces deux :

$$\frac{s}{c} = \frac{t'\,X - t\,X'}{t'\,u - t\,u'},$$

$$\frac{s}{c} = \frac{\vartheta'\,X - \vartheta\,X''}{\vartheta'\,v - \vartheta\,v'}.$$

& ces deux à celle-ci :

$$\frac{t'\,X - t\,X'}{t'\,u - t\,u'} = \frac{\vartheta'\,X - \vartheta\,X''}{\vartheta'\,v - \vartheta\,v'}.$$

Ou (le ſinus & le co-ſinus de la différence d'aſcenſion droite de la premiere & de la ſeconde Etoile étant g & d; le ſinus & le co-ſinus de la différence d'aſcenſion droite de la premiere & de la troiſieme étant γ & δ) l'on a *

$$\frac{t'\,X - t\,X'}{r\,g} = \frac{\vartheta'\,X - \vartheta\,X''}{r\,\gamma}.$$

$$\gamma\,t'\,X - \gamma\,t\,X' = g\,\vartheta'\,X - g\,\vartheta\,X''.$$

Ou (puiſque $t' = \frac{d\,t - g\,u}{r}$, & $\vartheta' = \frac{\delta\,\vartheta - \gamma\,v}{r}$) on a

$$d\,\gamma\,t\,X - g\,\gamma\,u\,X - r\,\gamma\,t\,X' = g\,\delta\,\vartheta\,X - g\,\gamma\,v\,X - r\,g\,\vartheta\,X''.$$

* *Voyez les théorêmes à la fin de cet ouvrage.*

Mais t & ϑ étant les ſinus des angles horaires de la premiere Etoile aux momens des deux obſervations; l'intervalle entre ces momens étant donné, & le ſinus & le co-ſinus de l'arc qui lui répond étant p & q, l'on a $\vartheta = \frac{qt - pu}{r}$, & $v = \frac{pt + qu}{r}$: mettant donc ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve pour la tangente de l'angle horaire de la premiere Etoile au moment de la premiere obſervation

$$\frac{rt}{u} = r\left(\frac{rg\gamma X - g\delta pX - g\gamma qX - rgpX''}{rd\gamma X - rr\gamma X' - g\delta qX + g\gamma pX + rgqX''}\right)$$

Ayant ainſi l'angle horaire de la premiere Etoile au moment de la premiere obſervation, l'on a auſſi l'angle horaire de la ſeconde Etoile au même inſtant, par l'équation $t' = \frac{dt - gu}{r}$: & la hauteur du pôle, en ſubſtituant les valeurs de t & de t' dans l'équation

$$\frac{s}{c} = \frac{t'X - tX'}{t'u - tu'}.$$

Corollaire. Si l'on prend la premiere Etoile dans l'équateur, $X = 0$, & le calcul eſt beaucoup plus ſimple; car la tangente

tangente de l'angle horaire de cette Etoile au moment de la premiere obſervation ſe réduit à

$$\frac{rt}{u} = r\left[\frac{gpX''}{r\gamma X' - gqX''}\right].$$

Ce problême peut être fort utile ſur terre & ſur mer, parce qu'il n'y a point d'obſervation plus facile ni plus ſûre que celle de deux aſtres dans un même vertical.

PROBLÈME XX.

TROIS hauteurs d'un astre étant données avec les deux intervalles de temps écoulés entre, trouver la déclinaison de l'astre, & la hauteur du pôle.

La 1re. formule donne pour les momens des trois observations, trois équations, dont chacune contient la hauteur du pôle, la déclinaison de l'astre, son angle horaire, & sa hauteur. La hauteur du pôle & la déclinaison de l'astre étant les mêmes dans chacune, en les chassant l'une & l'autre, *les trois équations sont réduites à une où il n'y a plus que les hauteurs qui sont données, & les trois angles horaires.*

Les deux intervalles de temps écoulés entre les observations étant donnés, on a deux équations entre les angles horaires & leurs différences ou leurs sommes, qui répondent aux temps écoulés. Par ces équations chassant de l'équation précédente deux des angles horaires aux momens de deux des obſervations, *l'on a une équation qui détermine l'angle horaire de l'aſtre au moment de la troiſieme obſervation.*

Ayant ainſi l'un des angles horaires connu, en le mettant dans les deux équations qu'on a entre les angles horaires & leurs différences ou leurs ſommes, on trouve les deux autres, *& l'on a les trois angles horaires.*

Deux de ces angles ſuffiſent pour achever la ſolution du problême; car reprenant deux des premieres équations que donnoit la formule, & mettant dans chacune la valeur connue de l'angle horaire qui lui convient, *on a deux équations qui ne contiennent plus d'inconnues que la hauteur du pôle & la déclinaiſon de l'aſtre;* & chaſſant par ces deux équations l'une de ces inconnues, *l'on a une équation qui donne la déclinaiſon de l'aſtre, ou la hauteur du pôle; & l'une étant donnée, l'on a auſſi-tôt l'autre.*

Exemple. Soit un aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le pôle élevé, obſervé vers le méridien ſupérieur, après ſon passage au méridien, dans trois hauteurs données; les arcs qui répondent aux temps écoulés entre les observations ne surpassant pas le quart-de-cercle.

Soient les trois hauteurs h, h', h''; les trois co-sinus des angles horaires u, u', u'': la premiere formule donne les trois équations

$$rsx = rrh - cuy$$
$$rsx = rrh' - cu'y$$
$$rsx = rrh'' - cu''y;$$

D'où chassant rsx, on a

$$rrh - cuy = rrh' - cu'y$$
$$rrh - cuy = rrh'' - cu''y;$$

D'où chassant cy, on a

$$\frac{h - h'}{u - u'} = \frac{h - h''}{u - u''}.$$

Ou (faisant $h - h' = \dot{h}$, & $h - h'' = \ddot{h}$)

$$\dot{h}u - \ddot{h}u = \dot{h}u'' - \ddot{h}u'.$$

Mais les intervalles de temps écoulés entre les observations étant donnés; & le sinus & co-sinus de l'arc qui répond au temps écoulé entre la premiere & la seconde étant p & q; & le sinus & co-sinus de l'arc qui répond au temps écoulé entre la premiere & la troisieme étant p' & q', l'on a les deux équations $u' = \frac{qu - pt}{r}$, & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$: Et substituant ces valeurs de u' & de u'' dans l'équation précédente, l'on a

$$r\dot{h}u - r\ddot{h}u = \dot{h}q'u - \ddot{h}qu + \ddot{h}pt - \dot{h}p't.$$

D'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire de l'astre au moment de la premiere observation

$$\frac{rt}{u} = r\left[\frac{r\dot{h} - r\ddot{h} + \ddot{h}q - \dot{h}q'}{\ddot{h}p - \dot{h}p'}\right].$$

Connoissant ce premier angle horaire, on a le second & le troisieme, en remontant aux équations $u' = \frac{qu - pt}{r}$ & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$. Et l'on a les trois co-sinus u, u', u'', dont deux suffisent pour le reste de la solution du problême.

Car la 1re. formule donnant

$$rsx = rrh = cuy$$
$$rsx = rrh' = cu'y.$$

On a

$$sx = \frac{rh'u - rhu'}{u - u'};\ \&$$

$$cy = \frac{rrh - rrh'}{u - u'}.$$

Ou (faiſant $\frac{rh'u - rhu'}{u - u'} = rA$; & $\frac{rrh - rrh'}{u - u'} = rB$):

$$sx = rA; \text{ \&}$$
$$cy = rB: \text{ ou}$$

$$rrxx - ccxx = rrAA; \text{ \&}$$
$$cc(rr - xx) = rrBB.$$

Et chaſſant cc de ces deux équations, on a

$$x^4 \left.\begin{matrix} -rr \\ -AA \\ +BB \end{matrix}\right\} xx + rrAA = 0.$$

Et faiſant $rr + AA - BB = rC$, l'on a

$$xx = \frac{rC}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{(CC - AA)}.$$

On a ainſi la déclinaiſon de l'aſtre.

Il eſt facile enſuite d'avoir la hauteur du pôle : car il eſt évident que dans les deux équations $sx = rA$, & $cy = rB$, les ſinus & co-ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre & de la hauteur du pôle ſe trouvent combinés de la même maniere. On trouvera pour le ſinus de la hauteur du pôle la même expreſſion qu'on vient de trouver pour le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre.

$$ss = \frac{rc - r}{2} + \frac{r}{2} \sqrt{(cc - AA)}.$$

Equivoque attachée à la nature de ce problême. Si l'on veut donc en faire uſage, il faudra choiſir quelque aſtre dont la déclinaiſon differe aſſez de la hauteur du pôle, pour que l'une ne puiſſe pas être priſe pour l'autre.

Scholie. C'eſt ce fameux problême auquel les Géometres & les Aſtronomes de l'Académie Impériale de Ruſſie ſe ſont tant appliqués, & dont ils ont donné pluſieurs belles ſolutions.

Je le crois cependant plus curieux qu'utile ; car ſur la terre on a trop d'autres moyens de trouver la déclinaiſon des étoiles & la hauteur du pôle, pour avoir recours à celui-ci : ſur la mer, dès qu'on connoît l'Etoile qu'on obſerve, on a par les catalogues d'étoiles la déclinaiſon, avec plus de préciſion qu'il n'eſt néceſſaire pour la latitude nautique ; & ſi l'on vouloit ſe ſervir d'une étoile qu'on ne connût pas, ou obſerver entre des nuages une étoile qu'on croiroit la même que celle qu'on auroit obſervée aux premieres hauteurs, il y auroit trop de péril de ſe méprendre.

PROBLÊME XXI.

Les angles horaires de deux étoiles qui paſſent par deux almicantaraths & par deux azymuths dont la poſition eſt inconnue, mais conſtante, étant donnés par les temps écoulés depuis les paſſages au méridien juſqu'aux momens où elles coupent ces cercles : trouver la déclinaiſon de ces étoiles & la hauteur du pôle.

Soient deux étoiles dont les déclinaiſons ſont vers le pôle élevé, obſervées au méridien ſupérieur, à leurs paſſages à deux almicantaraths & à deux azymuths, qui ſoient les mêmes pour l'une & pour l'autre; les temps écoulés depuis les paſſages au méridien étant donnés, & les arcs qui leur répondent ne ſurpaſſant pas le quart-de-cercle.

Soient les ſinus & co-ſinus des déclinaiſons des deux étoiles x, y; & x', y'; les co-ſinus des angles horaires lorſque elles paſſent au premier almicantarath v & v'; & les co-ſinus, lorſqu'elles paſſent au 2d. v'' & v'''.

La 1re. formule donne pour le paſſage au premier almicantarath

$$rrh = rsx + cvy$$

$$rrh = rsx' + cv'y' \text{: ou}$$

$$\frac{rs}{c} = \frac{u'y' - vy}{x - x'}.$$

On a de même pour le paſſage au ſecond almicantarath

$$\frac{Ts}{c} = \frac{v'''y' - v''y}{x - x'}.$$

On a donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{v - v''}{v' - v'''}.$$

Nommant t, t', & u, u', les ſinus & co-ſinus des angles horaires des deux étoiles lorſqu'elles paſſent au premier azymuth : & t'', t''', & u'', u''', les ſinus & co-ſinus lorſqu'elles paſſent au ſecond.

La 3me. formule donne pour le paſſage au premier azymuth

$$\frac{rn}{m} = \frac{suy - rcx}{ty}$$

$$\frac{rn}{m} = \frac{su'y' - rcx'}{t'y'} \text{: ou}$$

$$\frac{s}{rc} = \frac{t'xy' - t'xy}{t'uyy' - tu'yy'}.$$

On a de même pour le paſſage au ſecond azymuth

$$\frac{s}{rc} = \frac{t''' x y' - t'' x' y}{t''' u'' y y' - t'' u''' y y'}.$$

On a donc

$$\frac{t' x y' - t x' y}{t' u - t u'} = \frac{t''' x y' - t'' x' y}{t''' u'' - t'' u'''}.$$

Ou (nommant p le ſinus de la différence des arcs horaires qui ont pour ſinus t & t': & p' le ſinus de la différence des arcs horaires qui ont pour ſinus t'' & t''': ce qui donne * $rp = t' u - t u'$, & $rp' = t''' u'' - t'' u'''$) l'on a

$$p' t' x y' - p' t x' y = p t''' x y' - p t'' x' y:$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \times \frac{p t''' - p' t'}{p t'' - p' t}.$$

Ou (mettant pour $\frac{y'}{y}$ ſa valeur $\frac{v - v''}{v' - v'''}$ priſe dans l'équation des paſſages aux almicantaraths)

$$\frac{x'}{x} = \frac{v - v''}{v' - v'''} \times \frac{p t''' - p' t'}{p t'' - p' t}.$$

L'équation des paſſages aux almicantaraths donne

$$y' y' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 y y = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 (rr - xx):$$

* *Voyez les Théorêmes à la fin de cet Ouvrage.*

Celle des paſſages aux azymuths donne

$$x'x' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 \times \left(\frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't}\right)^2 xx:$$

On a donc

$$rr = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 rr - \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2$$
$$xx + \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 \times \left(\frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't}\right)^2 xx.$$

Ou

$$x = \frac{r(pt'' - pt')}{(v - v'')} \frac{\sqrt{[(v' - v''')^2 - (v - v'')^2]}}{\sqrt{[(pt''' - p't')^2 - (pt'' - p't)^2]}}.$$

Ayant ainſi la déclinaiſon d'une des étoiles, on trouve facilement la déclinaiſon de l'autre ; & l'on a la hauteur du pôle par l'équation

$$\frac{rs}{c} = \frac{v'y' - vy}{x - x'}.$$

Scholie. Ce problême eſt un des plus beaux & des plus utiles de l'Aſtronomie, puiſque ſans dépendre de la connoiſſance de la hauteur du pôle, il ſert à trouver la déclinaiſon des étoiles ; & que ſans connoître la déclinaiſon des étoiles, il ſert à trouver la hauteur du pôle ; & cela par les moyens les plus ſimples, & ſans avoir beſoin d'aucuns arcs-de-cercle. On doit cette méthode à M.

Mayer, à qui l'Aſtronomie doit tant d'autres excellentes choſes. On peut dire cependant qu'il l'a plutôt indiquée que donnée. Elle eſt compliquée ; mais ſa beauté & ſon utilité m'ont fait m'appliquer à la déduire de mes formules, d'où elle découle fort naturellement, & par leſquelles on parvient à un calcul aſſez ſimple.

PROBLÊME XXII.

LA déclinaiſon du Soleil étant donnée ; trouver ſur mer la hauteur du pôle par la durée du jour.

Si l'on conſidere ce problême dans ſa plus grande ſimplicité, c'eſt-à-dire, ſans faire attention au changement du Soleil en déclinaiſon, au changement de lieu de l'obſervateur, & à l'altération que la parallaxe & la réfraction cauſent dans l'apparence de la hauteur du Soleil ; la ſolution eſt très-facile, & ſuit d'abord de notre 1re. formule : car, pour l'inſtant du lever ou du coucher du Soleil, elle donne ſans peine la relation entre la hauteur du pôle & la durée du jour par l'équation

$$rsx = cuy.$$

C'eſt ainſi, ou du moins dans ces circonſtances, que les anciens déterminoient la hauteur du pôle : & Ptolémée, qui nous a laiſſé les hauteurs du pôle d'un grand nombre de villes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Ils ignoroient les effets de la réfraction & de la parallaxe, & choisissoient pour cette observation le jour du solstice, parce que dans ce jour le Soleil ne change pas sensiblement de déclinaison. Cependant cette ignorance où ils étoient sur la réfraction & la parallaxe, & le peu d'exactitude avec laquelle ils connoissoient l'obliquité de l'écliptique & la mesure du temps, rendirent toutes leurs hauteurs du pôle défectueuses.

Prenons donc maintenant le problême avec toutes ses circonstances: considérons que le Soleil, du matin au soir, change de déclinaison, que la réfraction le fait voir plus haut, & la parallaxe plus bas qu'il n'est en effet; enfin, que entre les deux observations de son lever & de son coucher, l'observateur a changé de lieu lui-même.

Notre 1re. formule $rsx = cuy$, qui exprime la relation entre la hauteur du pôle, la déclinaison du Soleil, & son angle horaire, ou la durée de sa présence sur l'horizon, nous donnera la relation de tous les changemens qui arrivent dans ces quantités. Car ſuppoſant que ces changemens ne ſont pas conſidérables, & différenciant cette équation, l'on a

$$rsdx + rxds = cudy + cydu + uydc.$$

Ou (mettant pour la différentielle des ſinus & co-ſinus de la déclinaiſon du Soleil le petit arc $dD = \frac{rdx}{y} = -\frac{rdy}{x}$: & pour la différentielle des ſinus & co-ſinus de la hauteur du pôle ou de la latitude le petit arc $dL = \frac{rds}{c} = -\frac{rdc}{s}$: & pour la différentielle du co-ſinus de l'angle horaire, le petit arc de l'équateur $dE = \frac{rdu}{t}$)

$$dE = \frac{r^3 s}{ctyy} dD \pm \frac{r^3 x}{cc t y} dL, \text{ ou}$$

$$dE = \frac{r^3 s}{y\sqrt{(cc - xx)}} dD \pm \frac{rx}{c\sqrt{(cc - xx)}} dL.$$

Le ſigne eſt + ou — ſelon que le changement de latitude de l'obſervateur conſpire ou eſt contraire au changement de déclinaiſon du Soleil.

Voilà les altérations que cauſent à la durée du jour le changement du Soleil en en déclinaiſon, & le changement de latitude de l'obſervateur : il y en a encore deux autres. L'une eſt celle que cauſe le changement en longitude de l'obſervateur ; l'autre eſt celle que cauſent la réfraction & la parallaxe.

Quant à l'altération cauſée à la durée du jour par le changement en longitude ; l'obſervateur connoiſſant la route qu'il a faite dans la journée, & à peu près la latitude où il eſt, il a la différence des longitudes du matin & du ſoir ; & le temps qui répond à cette différence eſt cette altération.

Quant à l'altération cauſée par la réfraction & par la parallaxe ; il faut remarquer que la réfraction élevant l'apparence du Soleil, & la parallaxe la baiſſant, ſi l'on retranche de ſa réfraction la parallaxe, il ne reſte plus à conſidérer que l'effet de cette différence, par lequel le Soleil paroît plus haut qu'il n'eſt ; & plutôt le matin & plus tard le ſoir qu'il ne devroit paroître. Mais la parallaxe du Soleil eſt ſi peu conſidérable, qu'on la peut négliger ici entiérement.

Il ſuffit donc de chercher de combien la réfraction horizontale alonge la durée du jour, tant le matin que le ſoir ; & pour cela, ayant la quantité de la réfraction horizontale, l'on a par les problêmes X ou XII, le temps que le Soleil emploie à s'élever ou à s'abaiſſer de cette hauteur ; & c'eſt l'altération que la réfraction cauſe à la durée du jour. Mais on a un moyen plus ſimple pour trouver cette altération par la ſeule obſervation.

Car négligeant, comme on le peut faire ici, les petites différences de la réfraction & des grandeurs apparentes du Soleil, ſon diametre apparent ſe trouve aſſez exactement égal à la quantité dont la réfraction horizontale l'éleve.

Au lever du Soleil donc, lorſqu'on voit ſon bord ſupérieur entamer l'horizon, ſon bord inférieur l'atteint actuellement, & ſon centre l'a déjà paſſé de la moitié de ſon diametre : ſi donc on retranche de l'heure que marque la montre dans ce moment, la moitié du temps que le Soleil emploie à s'élever de tout ſon diſque, on aura l'heure que marquoit la montre au moment de l'émerſion du centre. De même au coucher du Soleil, lorſqu'on voit ſon bord ſupérieur diſparoître dans l'horizon, ſon bord inférieur l'atteint actuellement, & ſon centre en eſt encore éloigné de la moitié de ſon diametre : ſi donc à l'heure que marque la montre dans ce moment, on ajoute la moitié du temps que le Soleil emploie à s'abaiſſer de tout ſon diſque, on aura l'heure que marque la montre au moment de l'immerſion du centre.

La correction totale que la réfraction rend néceſſaire à la durée du jour, déterminée par l'inſtant où le premier rayon du Soleil paroît dans l'horizon, & par l'inſtant où le dernier rayon y diſparoît, eſt donc d'ajouter à l'intervalle entre ces deux inſtans la durée entiere du lever ou du coucher du Soleil. C'eſt une choſe remarquable

& heureuſe pour le Navigateur, que la grandeur apparente du diſque du Soleil ſoit une meſure de la réfraction horizontale, & qu'elle lui ſerve à en corriger les erreurs.

Si le changement en latitude de l'obſervateur dans la journée étoit trop grand, l'expreſſion que nous avons donnée pour la correction qui en réſulte ſeroit défectueuſe, parce que nous avons ſuppoſé ce changement très-petit par rapport aux autres lignes : mais il ſeroit toujours très-facile au Navigateur qui voudroit trouver par cette méthode le lieu où il eſt, de diriger ſa route du matin au ſoir de telle ſorte qu'il ne s'approchât ni ne s'éloignât beaucoup du pôle.

Quant au changement du Soleil en déclinaiſon, il eſt évident que c'eſt une quantité auſſi petite qu'il eſt ici néceſſaire.

Et quant aux deux autres corrections, celle qu'on fait pour la réfraction, & celle pour le changement de longitude de l'obſervateur, elles ſeront toujours aſſez juſtes ſi on les fait avec les précautions que nous avons marquées.

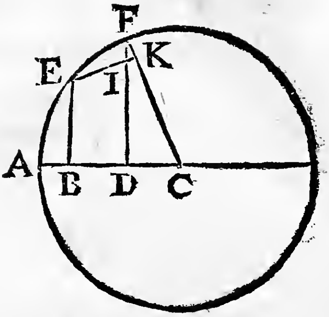
La plupart de ces corrections qu'il faut faire à la durée du jour observée, supposent qu'on ait déjà la hauteur du pôle, qui est ce qu'on cherche : on déterminera donc d'abord grossiérement la hauteur du pôle, telle que la donne la durée du jour sans les corrections ; & cette hauteur sera assez exacte pour qu'on puisse l'employer dans les corrections.

La durée du jour ainsi corrigée, l'on pourra s'en servir, comme si la déclinaison du Soleil étoit toujours la même, comme si l'observateur n'avoit pas changé de lieu, & comme s'il n'y avoit ni réfraction ni parallaxe. Et l'on aura sur la mer la hauteur du pôle avec plus d'exactitude que les anciens Astronomes ne l'avoient sur la terre au jour du solstice.

Malgré tout ce que j'ai fait pour rendre cette méthode universelle, elle a encore une restriction à laquelle la nature de la chose la borne : lorsque le

Soleil eſt dans l'équateur, la durée du jour étant la même par toute la terre, elle ne ſauroit ſervir pour déterminer la hauteur du pôle.

THÉORÊME.



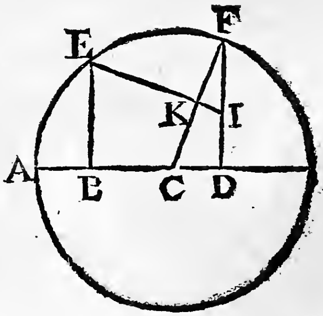
1. *Les sinus de deux arcs, dont le plus grand ne surpasse pas le quart-de-cercle, étant* EB $=$ a, FD $= \alpha$; *leurs co-sinus* CB $=$ b, CD $= \beta$; *le sinus de leur différence* EK $=$ p, *son co-sinus* CK $=$ q: *l'on a*

$$r\,a = q\alpha - p\beta$$

$$r\,b = p\alpha + q\beta$$

$$r\,p = \alpha b - a\beta$$

$$r\,q = a\alpha + b\beta.$$

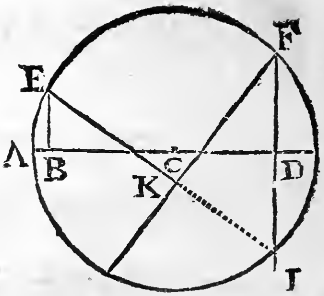


2. *Si l'un des deux arcs surpasse le quart-de-cercle, leur différence demeurant plus petite que le quart-de-cercle, le point* D *tombe de l'autre côté*

de C ; β *devient négatif, tout le reste demeurant le même : & l'on a*

$$ra = q\alpha + p\beta$$
$$rb = p\alpha - q\beta$$
$$rp = \alpha b + a\beta$$
$$rq = a\alpha - b\beta.$$

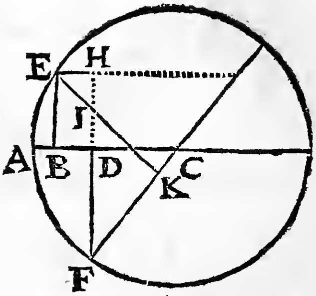
3. *Si la différence des deux arcs surpasse le quart-de-cercle, le point* D *tombe de l'autre côté de* C, *le point* K *aussi ;* β *&* q *deviennent négatifs : & l'on a*



$$ra = -q\alpha + p\beta$$
$$rb = p\alpha + q\beta$$
$$rp = ab + a\beta$$
$$rq = -a\alpha + b\beta.$$

THÉORÊME.

1. *Les sinus de deux arcs dont la somme ne surpasse pas le quart-de-cercle*, étant EB $= a$, FD $= \alpha$; *leurs co-sinus* CB $= b$, CD $= \beta$; *le sinus de leur somme* EK $= p$, *son co-sinus* CK $= q$: *l'on a*



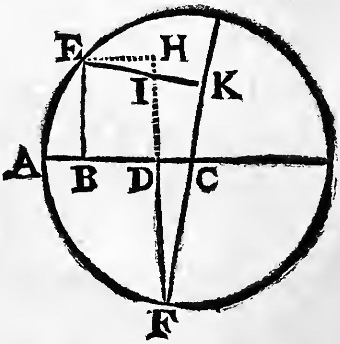
$$ra = p\beta - q\alpha$$

$$rb = p\alpha + q\beta$$

$$rp = a\beta + \alpha b$$

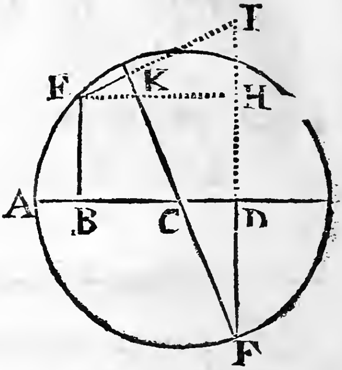
$$rq = -a\alpha + b\beta.$$

2. *Si chacun des deux arcs étant plus petit que le quart-de-cercle, leur somme surpasse le quart-de-cercle; le point* D *tombe du même côté de* C, *& le point* K *de*



l'autre ; q *devient négatif, tout le reste demeurant le même : & l'on a*

$$r a = p \beta + q \alpha$$
$$r b = p \alpha - q \beta$$
$$r p = a \beta + \alpha b$$
$$r q = a \alpha - b \beta.$$



3. *Si l'un des deux arcs surpasse le quart-de-cercle ; le point* D *tombe de l'autre côté de* C, *le point* K *aussi ;* β & q *deviennent négatifs : & l'on a*

$$r a = - p \beta + q \alpha$$
$$r b = p \alpha + q \beta$$
$$r p = - a \beta + \alpha b$$
$$r q = a \alpha + b \beta.$$

Fin de l'Astronomie nautique.

DISCOURS

SUR LA PARALLAXE

DE LA LUNE,

Pour perfectionner la théorie de la Lune & celle de la Terre.

Haud ſcio an omnium quæ in Cœlo pernoſci potuerunt magiſtra.

Plin. de Lunæ nat. lib. 2.

IMPRIMÉ POUR LA PREMIERE FOIS AU LOUVRE EN M. DCC. XLI.

SUR LA PARALLAXE
DE LA LUNE.

ON trouvera dans l'Ouvrage ſuivant des regles pour perfectionner la théorie de la Lune & celle de la Terre. On y verra la relation que ces deux planetes ont entr'elles ; combien il eſt néceſſaire, pour déterminer les lieux de la Lune, de connoître la figure de la Terre ; & comment les obſervations de la Lune pourroient déterminer cette figure, ſi elle n'étoit pas déterminée.

Je me ſuis fondé, & je crois qu'on peut ſe fonder ſur la figure de la Terre qui réſulte de la comparaiſon de notre meſure du degré du méridien au cercle polaire, & de celle que M. Picard avoit priſe de l'arc du méridien entre Paris & Amiens, corrigée par les obſervations que nous avons faites ſur ſon amplitude. Si cependant quelqu'un vouloit ſuivre d'autres me-

ſures, toutes les regles que je donne s'y appliqueroient avec la même facilité; & ces meſures, qui feroient la Terre plus alongée vers les pôles que les nôtres ne la font applatie, rendroient encore nos regles plus néceſſaires. Enfin, on trouvera dans l'Ouvrage ſuivant un moyen pour décider entre toutes les différentes meſures, quelles ſont celles qui ont fait connoître la vraie figure de la Terre.

Toutes les méthodes qu'on a ſuivies juſqu'ici pour déterminer cette figure, ſont fondées ſur la comparaiſon de deux degrés de la Terre l'un avec l'autre; & ſuppoſent dans tous les degrés intermédiaires une inégalité proportionnée à celle qu'on trouve entre les deux degrés extrêmes. Cette ſuppoſition paroît ſi légitime, que perſonne encore n'a fait difficulté de l'admettre: mais ſi quelqu'un la révoquoit en doute, il trouveroit dans l'Ouvrage ſuivant une méthode pour déterminer la figure de la Terre, qui n'y eſt point aſſujettie.

Cet Ouvrage ſe réduit à trois points

principaux. 1°. *A l'ufage des mefures de quelques arcs de la furface de la Terre pour perfectionner la Géographie & la Navigation.* 2°. *A l'ufage des expériences des pendules pour déterminer les quantités & les directions de la gravité.* 3°. *On y verra comment on doit fe fervir des dimenfions de la Terre pour perfectionner la théorie de la Lune.*

Il y a deux méthodes pour parvenir à la connoiffance des mouvemens de la Lune ; la premiere eft de remonter à leurs caufes, & de rechercher par les lois de la Mécanique, quels ils doivent être : c'eft la méthode que M. Newton & quelques autres grands Géometres ont fuivie.

La feconde eft de découvrir par les obfervations quels font les mouvemens de la Lune, & de tâcher de réduire fes irrégularités apparentes à quelque regle : c'eft aux Aftronomes à nous fournir les obfervations qui peuvent nous conduire dans cette recherche : & quelques-uns ont déjà beaucoup avancé un travail auffi utile.

Laquelle de ces deux méthodes qu'on ſuive, on ne ſauroit parvenir à la théorie de la Lune que par ſes lieux exactement déterminés dans les Cieux : ce ſont les baſes ſur leſquelles cette théorie ſera fondée ; c'eſt cette partie que j'ai entrepriſe, & pour laquelle j'eſpere donner dans l'Ouvrage ſuivant des regles plus exactes que celles dont on s'eſt juſqu'ici ſervi.

Mais cette théorie de la Lune eſt-elle une choſe de ſi grande importance, & mérite-t-elle tant de travaux & tant de recherches ? Je ſerois trop long ſi je voulois parcourir ici toutes ſes utilités pour l'Aſtronomie, & pour l'économie univerſelle des Cieux. Il ſuffira de dire que la ſcience des longitudes ſur mer en dépend ; & d'expliquer quelle eſt la connexion entre les longitudes & cette théorie.

Tout le monde ſait que la différence en longitude de deux lieux de la Terre, eſt l'angle que forment les plans des méridiens de ces lieux. La Terre tournant en 24 heures autour de ſon axe d'un mouvement uniforme, & préſentant

présentant au Soleil successivement les plans de tous les méridiens, l'angle compris entre deux de ces plans est donné par le temps qui s'écoule depuis que le Soleil semble passer d'un méridien à l'autre.

Si donc on pouvoit transporter une horloge réglée sur le midi de quelque lieu, sans que l'égalité de son mouvement fût altérée, la différence qu'on trouveroit entre l'heure marquée par cette horloge, & l'heure du lieu où elle arriveroit, donneroit de la maniere la plus simple la différence en longitude de ces lieux.

Les horloges à pendule sont des instrumens si parfaits, qu'elles peuvent pendant plusieurs mois conserver l'heure sur laquelle elles ont été réglées. Mais si elles sont capables d'une si grande justesse lorsqu'elles demeurent dans les lieux où elles sont, la cause même de cette régularité, le pendule qui les regle, les dérange continuellement si on les transporte. Jusqu'ici aucune de celles qui ont pour principe de leur exactitude le mouvement *d'un pendule, n'a pu conſerver pendant les voyages une aſſez grande égalité dans ſon mouvement, pour apporter fidélement l'heure d'un lieu à un autre. Et toutes les autres ſur qui l'agitation auroit moins d'effet, ſont par leur conſtruction expoſées à des irrégularités qui les rendent incapables de conſerver l'heure aſſez exactement, quand même elles ne ſeroient pas tranſportées.*

On peut ſuppléer au tranſport des horloges, en obſervant quelque phénomene par le moyen duquel on puiſſe comparer les heures auxquelles il eſt apperçu dans différens lieux. On a par la différence de ces heures, la différence en longitude de ces lieux.

Les éclipſes de la Lune & du Soleil ſont les premiers phénomenes de cette eſpece qui ſe préſenterent. Mais la rareté de ces éclipſes, & le peu d'exactitude avec laquelle on avoit autrefois la meſure du temps, faiſoient qu'il n'y avoit qu'un petit nombre de lieux dont la poſition fût connue, & encore l'étoit-elle aſſez imparfaitement. La

Géographie étoit dans une grande confusion, lorsqu'on découvrit de nouveaux astres capables de tout réformer ; ce furent les satellites de Jupiter, dont on fit une si heureuse application aux longitudes. Au lieu d'un très-petit nombre d'éclipses que le Soleil & la Lune présentoient à nos yeux chaque année, il n'y avoit plus de mois où ces astres n'offrissent plusieurs spectacles de cette espece. Ils font autour de Jupiter des révolutions si fréquentes, que tous les jours quelqu'un d'eux s'éclipse dans l'ombre de cette planete, pour reparoître bientôt après ; & ces immersions & émersions sont autant de phénomenes instantanés, qui déterminent les longitudes des lieux où on les observe.

Aussi dans un fort court espace de temps, on vit faire à la Géographie de plus grands progrès qu'elle n'en avoit faits pendant un grand nombre de siecles. Il ne falloit, comme on voit, que comparer les heures auxquelles une même immersion ou émersion de quelque satellite avoit été observée dans les lieux *dont on cherchoit la différence en longitude. Mais M. Caſſini rendit la choſe encore plus utile, en conſtruiſant des tables du mouvement des ſatellites, par leſquelles le calcul des immerſions & émerſions pour le méridien de quelque lieu, ſupplée à l'obſervation immédiate qui auroit été faite dans ce lieu, & diſpenſe en quelque ſorte d'une des obſervations.*

Il n'y a donc rien à deſirer aujourd'hui, ſi ce n'eſt peut-être quelque préciſion ſuperflue, lorſqu'on voudra déterminer la longitude de quelque lieu ſur la terre. Mais il n'en eſt pas ainſi ſur la mer.

Quoique le Navigateur parti de quelque port, ſût par le calcul à quelle heure le phénomene y eſt vu; pour pouvoir y comparer l'heure à laquelle ce phénomene eſt vu au lieu où il eſt, dont il ignore la ſituation, il faut une obſervation immédiate, & c'eſt ce que l'agitation du vaiſſeau ne permet point.

La longueur des lunettes juſqu'ici néceſſaire pour pouvoir obſerver les im-

merſions & les émerſions des ſatellites, & la petiteſſe du champ de leur viſion, font qu'à la moindre agitation du vaiſſeau l'on perd de vue le ſatellite, ſuppoſé qu'on l'ait pu trouver.

Juſqu'ici l'on a vu que la détermination des longitudes ſur mer ne dépendoit que de l'une ou de l'autre de ces deux choſes, ou d'une horloge dont le mouvement ne fût point troublé par l'agitation de la mer, ou d'une lunette avec laquelle on pût, malgré cette agitation, obſerver les ſatellites de Jupiter. L'un ou l'autre de ces deux moyens donneroit ſur le champ la longitude au Navigateur le moins habile. Mais il ſe trouve dans l'un & l'autre de grandes difficultés. En voici un troiſieme qui dépend de plus de circonſtances, mais par lequel je crois qu'il y a beaucoup plus d'eſpérance de réuſſir.

Il n'y a dans les Cieux aucun phénomene plus ſubit, ni plus facile à obſerver, que l'occultation des Etoiles lorſque la Lune paſſe au devant d'elles,

& leur réapparition lorsque la Lune cesse de se trouver entr'elles & nous. On peut observer ce phénomene avec une très-courte lunette, on peut l'observer à la vue simple lorsque l'Etoile est fort brillante, & que la partie éclairée du disque de la Lune n'est pas assez grande pour la ternir. Mais il n'est pas nécessaire que la Lune passe précisément au devant d'une Etoile pour marquer un instant déterminé. Le mouvement de cette planette est si rapide, que si l'on rapporte sa situation à deux Etoiles fixes, elle forme avec ces deux Etoiles un triangle qui, changeant continuellement de figure, peut être pris pour un phénomene instantané, & déterminer le moment auquel on l'observe. Il n'y a plus d'heure de la nuit, il n'y a plus d'heure où la Lune & les Etoiles soient visibles, qui n'offre à nos yeux un tel phénomene; & nous pouvons par le choix des Etoiles, par leur position & par leur splendeur, prendre entre tous les triangles celui qui sera le phénomene le plus propre pour l'observation.

Pour parvenir maintenant à la connoiſſance des longitudes, il faut deux choſes; l'une, qu'on obſerve ſur mer avec aſſez d'exactitude le triangle formé par la Lune & les deux Étoiles; l'autre, qu'on connoiſſe aſſez exactement le mouvement de la Lune pour ſavoir quelle heure marqueroit la pendule réglée dans le lieu d'où l'on eſt parti, lorſque la Lune forme avec les deux Etoiles le triangle tel qu'on l'obſerve.

Quant à ce qui regarde l'obſervation; on a ſur mer aſſez exactement l'heure du lieu où l'on eſt, & par conſéquent l'heure à laquelle elle ſe fait. Depuis quelques années, l'on a un inſtrument avec lequel on peut, malgré l'agitation du vaiſſeau, prendre les angles entre la Lune & les Etoiles, avec une juſteſſe aſſez grande pour déterminer le triangle dont nous avons parlé. M. de Fouchy s'eſt appliqué à le perfectionner; & dans l'état où il eſt, il donne une exactitude aſſez grande pour que cette partie de la méthode ſoit remplie.

La difficulté se réduit à la théorie de la Lune ; à connoître assez exactement ses distances & ses mouvemens, pour pouvoir calculer à chaque instant sa position dans le Ciel, & déterminer à quel instant pour tel ou tel lieu le triangle qu'elle forme avec deux Etoiles fixes, sera tel ou tel.

Nous ne dissimulerons point que c'est en ceci que consiste la plus grande difficulté. Cet astre qui a été donné à la Terre pour satellite, & qui semble lui promettre les plus grandes utilités, échappe aux usages que nous en voudrions faire, par les irrégularités de son cours. Aucunes tables publiées n'ont donné jusqu'ici assez exactement les lieux de la Lune, pour pouvoir déterminer la longitude avec une précision suffisante. Cependant si l'on pense aux progrès qu'a fait depuis quelque temps la théorie de la Lune, on ne sauroit s'empêcher de croire que le temps est proche où cet astre qui domine sur la mer, & qui en cause le flux & reflux, enseignera au Navigateur à s'y conduire.

Quelles que ſoient les cauſes des irrégularités de ſon mouvement, les obſervations ont appris qu'après 223 lunaiſons, c'eſt-à-dire, 223 retours de la Lune vers le Soleil, les circonſtances du mouvement de la Lune, redevenant les mêmes par rapport au Soleil & à la Terre, ramenent dans ſon cours les mêmes irrégularités qu'on y avoit obſervées 18 ans auparavant. Une ſuite d'obſervations continuées pendant une telle période avec aſſez d'aſſiduité & d'exactitude, donnera donc le mouvement de la Lune pour les périodes ſuivantes.

Ce travail ſi long & ſi pénible d'une période entiere bien remplie d'obſervations, fut entrepris par M. Halley, lorſqu'il étoit déjà dans un âge ſi avancé, qu'il ne ſe flattoit plus de le pouvoir terminer. Ce grand & courageux Aſtronome nous avertit que n'étant encore qu'à la fin d'une autre période qui ne contient que 111 lunaiſons, & qui ne donne pas ſi exactement que celle de 223, le retour des mêmes inégalités, il pouvoit déjà déterminer ſur *mer la longitude, à 20 lieues près vers l'équateur, à 15 lieues près dans nos climats, & plus exactement encore, plus près des pôles. On ſent quelle eſt l'autorité d'un homme qui a joint au plus profond ſavoir dans l'Aſtronomie, toute la pratique de la Navigation. Jaloux de ſes obſervations, ou voulant peut-être les réſerver toutes pour ſa nation, il ne les a point publiées.*

Mais on n'aura rien à deſirer, & l'on aura l'ouvrage le plus utile pour les longitudes, ſi le travail qu'a entrepris M. le Monnier s'accomplit. Depuis qu'il s'eſt attaché à la théorie de la Lune, il a fait un ſi grand nombre d'excellentes obſervations, qu'on ne ſauroit eſpérer de voir cette partie de la période mieux remplie; & le dernier ſuccès de ce travail ne dépend plus que de ſa vie & de ſa ſanté. Et comme il eſt néceſſaire que la ſituation des Etoiles fixes qui doivent former le triangle avec la Lune ſoit bien connue, il a déjà déterminé les déclinaiſons & les aſcenſions droites de pluſieurs, *avec l'exactitude qu'on ſait qu'il apporte dans l'Aſtronomie.*

Il faut avouer que la méthode que nous propoſons pour les longitudes, demandera plus de ſcience & de ſoin qu'il n'en eût fallu, ſi l'on eût pu trouver des horloges qui conſervaſſent ſur mer l'égalité de leur mouvement, ou des lunettes avec leſquelles on pût obſerver ſur mer les ſatellites. Mais ce ſera aux Mathématiciens à ſe charger de la peine des calculs : & pourvu qu'on ait les élémens ſur leſquels la méthode eſt fondée, l'on pourra par des tables ou des inſtrumens, réduire à une grande facilité la pratique d'une théorie difficile.

Cependant la prudence voudra qu'au commencement on ne faſſe qu'un uſage fort circonſpect de ces inſtrumens ou de ces tables ; & qu'en s'en ſervant on ne néglige aucune des autres pratiques par leſquelles on eſtime la longitude ſur mer. Un long uſage en fera connoître la ſureté. On ne s'eſt ſans doute ſervi qu'en tremblant des inſtrumens les plus ſimples de la Navigation, lorſqu'on *leur a confié ſa vie pour la premiere fois.*

Si la Lune étoit beaucoup plus éloignée de la Terre, ou ſi la Terre étoit beaucoup plus petite qu'elle n'eſt, dans quelque lieu que fût placé celui qui obſerve la Lune, il la verroit au même point des Cieux; & les lieux vrais, & les lieux obſervés ſeroient les mêmes. Mais la groſſeur de la Terre & la proximité de la Lune, font qu'elle eſt vue dans différens lieux du Ciel, ſelon les lieux de la Terre où eſt placé celui qui l'obſerve.

Les méthodes que je donne dans l'ouvrage ſuivant, ſerviront à réduire plus exactement qu'on ne l'a fait juſqu'ici, ces lieux les uns aux autres. Si la théorie de la Lune donne ſes lieux par rapport au centre de la Terre, nos méthodes ſerviront à déterminer pour chaque point de la ſurface de la Terre, les lieux où l'obſervateur la verra, & par conſéquent le triangle qu'elle formera avec les Etoiles. Si au contraire on a les lieux obſervés de la Lune, nos méthodes les réduiront aux lieux vrais, & ſerviront à former une théorie exacte.

On verra dans cet Ouvrage de quelle utilité il ſeroit pour la perfection de la théorie de la Lune, qu'on eût des obſervations de cet aſtre, faites en même temps dans les lieux les plus éloignés.

Je n'ai plus qu'un mot à dire ſur cet Ouvrage. L'exactitude qu'on y propoſe eſt-elle néceſſaire, ou n'eſt-elle qu'une exactitude ſuperflue ? N'y pouſſons-nous point la ſpéculation au delà des beſoins de la pratique, ou même au delà de ce que la pratique peut atteindre ? Quelqu'étrange qu'il paroiſſe de juſtifier la préciſion dans des Sciences qui ont la préciſion pour objet, j'ai vu ſi ſouvent attaquer nos recherches par de tels diſcours, que je crois devoir y répondre.

Quand il ſeroit vrai que pour les beſoins actuels, ce fût aſſez qu'il ſe trouvât entre tous les moyens dont on ſe ſert, une préciſion proportionnée, on ne doit pas borner la perfection de ces moyens à l'état préſent : on doit regarder la ſcience comme un édifice *auquel tous les Savans travaillent en commun. Chacun attaché à quelque partie, travaille à la perfection du tout : & si quelques-uns, placés peut-être aux endroits les plus difficiles, ont moins avancé leur ouvrage, cela ne doit ni arrêter, ni ralentir l'ouvrage des autres.*

Mais il y a une réponse plus directe à faire à l'objection précédente, c'est que la pratique de l'Astronomie est aujourd'hui poussée à un si haut point de perfection, qu'elle a besoin des méthodes les plus exactes ; & que loin qu'il soit à craindre que l'exactitude de notre théorie surpasse ni l'exactitude des instrumens, ni l'adresse des observateurs, la précision dans cette partie a prévenu & surpassé celle que nous proposons ; puisqu'il y a des cas où, déterminant les lieux de la Lune par les autres méthodes, les erreurs qu'on commettroit seroient huit ou dix fois plus grandes que celles des observations.

La théorie de la Lune est si importante, qu'on ne sauroit employer trop de soin pour y parvenir. Il faut penser que c'est avoir fait quelque chose *de grand, que d'avoir fait une petite partie d'une grande chose. Cet ouvrage ne s'achevera qu'avec le temps, & par des degrés insensibles. Il semble qu'il en soit des progrès de l'esprit dans nos recherches, comme du mouvement des corps dans la Méchanique : leur vîtesse est toujours d'autant moindre que leur poids est plus grand.*

Pour n'omettre rien des utilités qu'on doit retirer de notre mesure de la Terre, j'avois dessein de l'appliquer à la Navigation, & de donner des méthodes pour diviser le méridien nautique, *& pour construire* les cartes réduites ; *mais un savant Géometre Anglois m'a prévenu par un ouvrage qui va paroître dans notre langue. J'en suis dédommagé par l'honneur qu'il fait à nos mesures, & par la satisfaction que j'ai de voir qu'une Nation aussi éclairée que la sienne en fasse déjà usage pour perfectionner sa Navigation.*

DISCOURS

DISCOURS
SUR LA PARALLAXE DE LA LUNE,

Pour perfectionner la théorie de la Lune & celle de la Terre.

§. I.

Utilités dont est la connoissance de la figure de la Terre.

LA connoissance de la figure de la Terre est aussi nécessaire pour déterminer les distances & les grosseurs des autres astres, qu'elle l'est pour déterminer sur notre globe les diſtances des lieux dont on ne connoît que la latitude & la longitude. Toutes les dimenſions du ſyſtême ſolaire ne ſont fondées que ſur celles de la Terre ; c'eſt le diametre de la Terre qui leur ſert à toutes de meſure commune.

Et quand on voudroit rapporter les diſtances & les groſſeurs des différens corps céleſtes au diametre du Soleil ou de quelqu'autre planete ; pour connoître entiérement ces dimenſions, il faudroit toujours en revenir à celle de la Terre, qui eſt la ſeule planete dont nous ayions la meſure abſolue.

C'eſt ſans doute pour cela que les plus anciens Aſtronomes ont tant fait de tentatives ſur la meſure de la Terre. Dès les commencemens de l'Aſtronomie, on a vu que cette recherche étoit auſſi utile pour la connoiſſance générale de l'Univers, qu'elle l'étoit pour la connoiſſance particuliere de la planete que nous habitons.

Mais ſi des déterminations groſſieres de la figure de la Terre ſuffiſoient aux anciens Philoſophes, les connoiſſances qu'on a aujourd'hui font deſirer des meſures plus exactes : lorſqu'une partie de nos connoiſſances ſe perfectionne, les autres doivent recevoir de nouveaux degrés de perfection.

Si, par exemple, on n'avoit pas eu dans ces derniers temps, des meſures de la Terre plus exactes que celles qu'avoient les anciens, on ne ſeroit pas parvenu à comparer la peſanteur qui fait tomber les corps vers la ſurface de la Terre, avec la force qui retient la Lune dans ſon orbite ; on n'auroit pas découvert que ces deux forces n'étoient que la même.

Car pour comparer ces forces, il falloit connoître les eſpaces que chacune pouvoit, dans un même temps, faire parcourir à un corps qui ſeroit livré à elle ſeule. L'un de ces eſpaces ſe connoît par le temps qu'emploie un pendule d'une longueur donnée à faire ſes oſcillations ; car on ſait par là de quelle hauteur un corps placé vers la ſurface de la Terre, tombe dans un temps donné. L'autre eſpace eſt celui que la force qui retient la Lune dans ſon orbite, lui feroit parcourir, ſi elle perdoit tout ſon mouvement, & n'éprouvoit plus que l'action de cette force. Cet eſpace ſe connoît par l'arc que la Lune décrit pendant ce même temps; car la Lune tendant continuellement à décrire la tangente de ſon orbite, la fleche de l'arc qu'elle décrit eſt l'eſpace dont la force qui la tire la fait tomber vers la Terre. Or pour pouvoir comparer cette fleche à l'eſpace contemporain dont la peſanteur fait tomber les corps près de la ſurface de la Terre, il ne ſuffit pas d'avoir la diſtance de la Lune à la Terre, évaluée en diametres de la Terre; il faut avoir la longueur abſolue de cette diſtance, réduite aux mêmes meſures que celles de la longueur du pendule.

On voit par cet exemple, qu'il ne ſuffit pas de connoître le rapport des différentes dimenſions des corps céleſtes, mais qu'il y a des occaſions où il en faut avoir les meſures abſolues. Et plus la Phyſique céleſte ſe perfectionnera, & plus on en ſentira la néceſſité.

Tout le monde ſait combien la détermination de la figure de la Terre eſt utile pour la Géographie, & par conſéquent pour la Navigation, qui eſt une partie de la Géographie. Mais la détermination de la figure de la Terre peut avoir d'autres utilités très-grandes, & qu'on ne ſoupçonneroit pas d'abord.

L'une de ces utilités, c'eſt que par la connoiſſance de la figure de la Terre on peut déterminer les points vers leſquels tend la peſanteur, & même la gravité primitive dans les différens lieux de la Terre.

Les regles de l'Hydroſtatique apprennent que dans chaque lieu de la Terre, la peſanteur agit perpendiculairement à ſa ſurface : ainſi, pour avoir les directions de la peſanteur ſur la Terre, il n'eſt queſtion que d'avoir celles des perpendiculaires au méridien ; elles déterminent la direction de la pesanteur dans chaque lieu.

Mais la Terre ayant un mouvement de révolution autour de son axe, chaque partie dont elle est formée a acquis par ce mouvement une force centrifuge qui tend à l'écarter du centre de sa révolution : cette force se trouve donc combinée dans la pesanteur, lorsqu'on l'éprouve par des expériences sur la surface de la Terre, & en a changé la direction. On peut appeller *gravité*, la pesanteur non altérée, pour la distinguer de la pesanteur telle que nous l'éprouvons.

Or la figure de la Terre étant déterminée, le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur étant connu, & le rapport des pesanteurs en différens lieux de la Terre étant donné par les expériences des pendules, on peut déterminer pour chaque lieu la direction de la pesanteur, celle de la gravité, & la quantité de la gravité.

Cette recherche est de si grande importance, qu'elle peut conduire à la connoiſſance de la force qui meut & dirige tous les corps de l'Univers, & nous faire découvrir ſa nature & ſes lois.

Si au contraire cette force étoit aſſez connue, on pourroit peut-être par le moyen de ſes quantités & de ſes directions, parvenir à des choſes qui paroiſſent enſevelies dans de profondes ténebres, & découvrir quelque choſe de la conſtitution intérieure de la Terre.

Cette méthode de philoſopher paroît plus ſûre que celle qu'on a employée juſqu'ici, lorſqu'on a entrepris de déterminer la figure de la Terre par les lois d'une gravité qui n'eſt peut-être pas encore aſſez connue, & par la conſtitution intérieure de la Terre, qui eſt totalement ignorée.

Il paroît au contraire qu'il falloit chercher par les expériences tout ce qui pouvoit donner quelque lumiere ſur ces choſes; & ces expériences, outre celles des pendules, étoient les meſures de la Terre, ſoit par des méthodes ſemblables à celles dont nous nous ſommes ſervis en Lapponie , ſoit par la méthode que je propoſerai ici.

Enfin la derniere utilité dont eſt la détermination de la figure de la Terre , conſiſte dans le rapport qu'a cette figure avec les diſtances de la Lune à la Terre , & avec les angles ſous leſquels différens obſervateurs placés ſur la Terre voient la Lune. On peut juger par là combien la connoiſſance de la figure de la Terre eſt utile pour perfectionner la théorie de la Lune , qui eſt aujourd'hui la choſe la plus importante qui reſte à découvrir dans l'Aſtronomie , & dont dépend la connoiſſance des longitudes ſur mer.

Nous croirons donc avoir fait quelque choſe qui pourra contribuer à l'avancement de la théorie de la Lune , ſi nous donnons ici des méthodes par leſquelles on puiſſe meſurer les diſtances de la Lune à la Terre avec plus d'exactitude , & déterminer l'orbite de la Lune avec plus de préciſion qu'on ne l'a fait juſqu'ici.

On ne ſauroit ſe flatter d'avoir la

théorie de la Lune, ſans un grand nombre de lieux de la Lune déterminés dans les Cieux le plus exactement qu'il ſera poſſible : ce ſont ces points qui feront découvrir cette théorie, ou qui ſerviront à la confirmer.

Or on ne ſauroit déterminer avec exactitude les vrais lieux de la Lune, ſans la connoiſſance de la figure de la Terre.

§. II.

Ce que c'eſt que la parallaxe.

LEs Etoiles fixes ſont placées à un ſi grand éloignement, que de quelque lieu de la Terre qu'on les obſerve, chacune paroît toujours dans le même point du Ciel, ou plutôt dans la même ligne droite. Cet éloignement eſt ſi prodigieux, que quoique la Terre ſe meuve dans une ellipſe immenſe, & que par conſéquent elle ſe trouve en des lieux du Ciel fort différens en différentes ſaiſons de l'année, ſi de ces différens lieux on obſerve quelqu'Etoile fixe, on la voit toujours dans la même ligne droite, pourvu qu'on faſſe aux directions dans leſquelles on la voit deux corrections, l'une pour la préceſſion des équinoxes, par laquelle toutes les Etoiles paroiſſant ſe mouvoir autour des pôles de l'écliptique, leurs déclinaiſons & leurs aſcenſions droites ſont altérées, chacune d'une quantité connue : l'autre correction néceſſaire, eſt celle de l'*aberration de la lumiere*. Cette aberration, qui n'a été découverte que depuis peu d'années par le célebre Aſtronome M. Bradley, eſt une altération apparente dans la déclinaiſon & l'aſcenſion droite de chaque Etoile pendant le cours de l'année. M. Bradley a découvert les lois & la quantité de cette altération, & a fait voir qu'elle n'étoit produite que par la vîteſſe avec laquelle la lumiere de l'Etoile vient à nous, combinée avec la vîteſſe de la Terre dans ſon orbite. Ces deux mouvemens de la Terre & de la lumiere font que nous ne voyons pas précisément l'Etoile dans la direction d'où elle a lancé sa lumiere ; & selon que la direction du mouvement de la Terre conspire ou est contraire à la direction du mouvement de la lumiere, on voit l'Etoile en différens lieux.

Je ne parle point ici d'un autre mouvement bien moins perceptible que les deux précédens, dont M. Bradley m'a parlé dans quelques lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire. Presque aussi-tôt que M. Bradley a découvert ce mouvement, ou plutôt l'apparence de ce mouvement, il en a soupçonné la cause ; & selon ce qu'il m'a écrit, toutes les observations confirment ses premiers soupçons, & en font une théorie. Mais quel que soit ce mouvement, qu'il ne seroit pas juste que le Public connût par un autre que celui qui en a fait la découverte, il suffit de dire ici qu'il ne dépend pas plus que les deux premiers des différens lieux où se trouve la Terre pendant sa révolution autour du Soleil.

Tout cela prouve que le globe de

la Terre n'eſt qu'un point par rapport à la diſtance de la Terre aux Etoiles fixes, du moins à celles des Etoiles fixes qu'on a obſervées; & que la vaſte orbite que décrit la Terre autour du Soleil, n'eſt qu'un point elle-même par rapport à cette diſtance.

Il n'en eſt pas ainſi lorſqu'on obſerve quelqu'aſtre voiſin de la Terre: dès que ſa diſtance eſt comparable avec notre globe, on remarque des variétés dans la poſition de la ligne ſelon laquelle on le voit. Si deux obſervateurs placés dans différens lieux de la Terre obſervent la Lune en même temps, les deux lignes dans leſquelles ils la voient ſont inclinées l'une à l'autre, & vont ſe rencontrer à la Lune.

Si l'on ſuppoſe un obſervateur placé au centre de la Terre, qui obſerve la Lune dans le même moment auquel un autre placé ſur la ſurface de la Terre l'obſerve auſſi, les deux lignes dans leſquelles ils la voient vont ſe couper au centre de la Lune, & y former un angle qu'on appelle la *parallaxe de la Lune*.

Pourvu que l'obſervateur qui eſt ſur la ſurface ne ſe trouve pas placé directement dans la ligne droite qui joint les centres de la Terre & de la Lune, il y aura toujours une parallaxe & un *triangle parallactique*. Voici ce que c'eſt que ce triangle. Imaginez trois lignes, la premiere tirée du centre de la Terre à la Lune, la ſeconde de la Lune au point de la ſurface de la Terre où eſt placé l'obſervateur, la troiſieme de ce point de la ſurface au centre de la Terre : ces trois lignes forment un triangle dont le petit angle eſt la parallaxe de la Lune ; & comme le demi-diametre de la Terre ſert de baſe à cet angle, ſi tous les angles du triangle ſont connus, on aura la diſtance de la Terre à la Lune en demi-diametres de la Terre.

Mais ſi l'obſervateur voit la Lune dans l'horizon, pendant qu'on ſuppoſe l'autre placé au centre de la Terre, l'angle que forment les deux lignes dans leſquelles ils voient la Lune, eſt la *parallaxe horizontale :* alors le triangle parallactique eſt rectangle, & ſon angle droit eſt dans la ſurface de la Terre.

On peut entendre la même choſe de tous les autres aſtres qui ont une parallaxe : cette parallaxe donne leur diſtance à la Terre, & leur diſtance donne leur groſſeur, mais le tout en demi-diametres de la Terre : & pour avoir les diſtances & les groſſeurs abſolues, il faut connoître le diametre de la Terre, que nous conſidérons juſqu'ici comme un globe.

On voit par là que la parallaxe des aſtres eſt le fondement de toute l'Aſtronomie, & ce qui conduit à la connoiſſance de toute l'économie des Cieux. Mais je me borne à ce qui regarde la Lune, d'autant plus qu'on peut appliquer facilement tout ce que j'en dirai aux autres aſtres.

Juſqu'ici j'ai ſuppoſé que la Terre étoit parfaitement ſphérique. Mais ſi elle ne l'eſt pas, il eſt clair que tous ſes demi-diametres ne ſeront plus égaux, & que ſelon la latitude des lieux où ſera placé l'obſervateur, le demi-diametre de la Terre qui ſert de baſe à la parallaxe ſera différent, & qu'il faudra avoir égard à cette différence dans tout ce qui regarde le triangle parallactique.

La Terre étant un ſphéroïde applati vers les pôles, aux mêmes diſtances de la Lune à la Terre, les parallaxes horizontales vont en croiſſant du pôle à l'équateur; & ſi la Terre avoit une figure oppoſée, ſi elle étoit un ſphéroïde alongé, ces parallaxes croîtroient de l'équateur au pôle.

Je n'examine point ſi les déterminations qu'on a eues juſqu'ici de la parallaxe étoient aſſez exactes pour mériter qu'on eût égard aux différences qu'y produit l'inégalité des demi-diametres de la Terre, ou pour faire appercevoir cette inégalité.

Juſqu'ici cet élément fondamental de toute l'Aſtronomie n'a été connu ni avec l'exactitude qu'il mérite, ni avec celle qui étoit poſſible; & n'étant connu qu'imparfaitement, on n'a pu l'appliquer à tous les uſages auxquels il pouvoit être utile.

M. Newton avoit propoſé de faire

entrer l'inégalité des demi-diametres de la Terre dans la considération des parallaxes de la Lune, & dans le calcul des éclipses. D'après la figure de la Terre qu'il avoit déterminée, il nous a donné quelques-unes des parallaxes horizontales. Mais si l'on considere les erreurs auxquelles sont sujettes les parallaxes de la Lune déterminées par les méthodes ordinaires, on verra que les différences que M. Newton nous a données pour ces parallaxes ne peuvent guere nous être utiles.

M. Newton croyoit cependant qu'on pouvoit découvrir par là quelle est la figure de la Terre. Mais je doute que la chose fût possible, si l'on vouloit faire usage des parallaxes horizontales, déterminées par les méthodes ordinaires. M. Manfredi avoit entrepris aussi de se servir des parallaxes de la Lune pour découvrir la figure de la Terre * ; mais malgré toute l'estime que j'ai pour la mémoire de ce savant Astronome, la méthode qu'il propose est si embarrassée & si dépendante d'élémens suf-

* *Mém. de l'Acad. 1734.*

pects, que je doute qu'on en puisse jamais tirer grande utilité. Aussi M. Manfredi lui-même ne la croyoit-il propre à découvrir l'alongement ou l'applatissement de la Terre, qu'en cas que la Terre se fût écartée de la figure sphérique, autant que le supposoit la figure alongée vers les pôles, que lui donnoit M. Cassini.

Après tout ce qu'on a fait pour perfectionner l'Astronomie, il est étonnant qu'on n'ait pas entrepris avec plus d'ardeur ou plus de succès de déterminer exactement la parallaxe de la Lune.

La maniere la plus sure seroit d'observer de deux lieux de la Terre, situés sur le même méridien, & séparés d'un assez grand arc, la distance en déclinaison de la Lune à une même Etoile.

On peut s'assurer avec la derniere précision, que les observateurs sont placés sur le même méridien; car le mouvement de la Lune est si rapide, que sa distance en ascension droite d'une même Etoile n'est la même que pour les lieux situés précisément sur le même méridien, & que la moindre différence entre les méridiens seroit sensible par les différences qui se trouveroient dans les temps écoulés entre les passages au méridien de l'Etoile & de la Lune.

On peut s'assurer aussi d'avoir avec une très-grande précision les distances en déclinaison entre une Etoile & la Lune, ces observations se faisant avec le micrometre. *La somme ou la différence de ces distances est la parallaxe de la Lune, qui a pour base l'arc du méridien qui sépare les observateurs.*

Il est vrai que pour placer des observateurs précisément sur un même méridien, il faudroit faire d'abord quelques tentatives : la chose est assez importante pour mériter qu'on en fasse. Mais, quand il se trouveroit quelque différence en longitude entre les lieux des observateurs, & quand, entre leurs observations, la Lune auroit eu quelque mouvement en déclinaison, on pourroit, en observant ce mouvement, en tenir compte.

La parallaxe étant déterminée, on

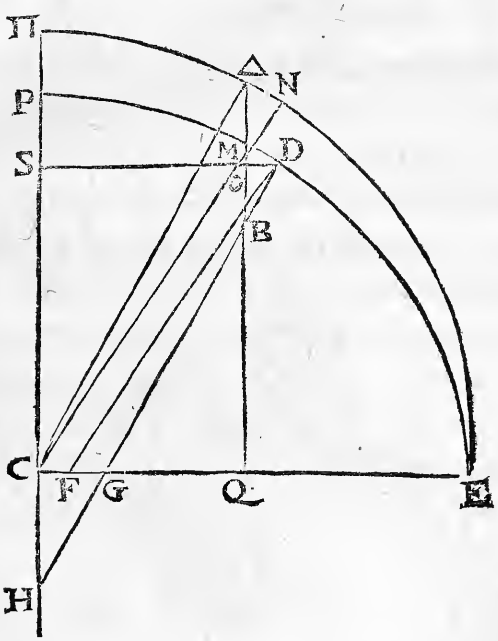
en peut déduire tout ce qui concerne la comparaiſon des dimenſions de la Terre avec les diſtances de la Lune.

---

§. III.

Dimenſions géographiques.

SOit la Terre un ſphéroïde applati,



formé par la révolution d'une ellipſe, dont *E D P* eſt le quart, autour de ſon petit axe, qui differe fort peu du grand qui est le diametre de l'équateur.

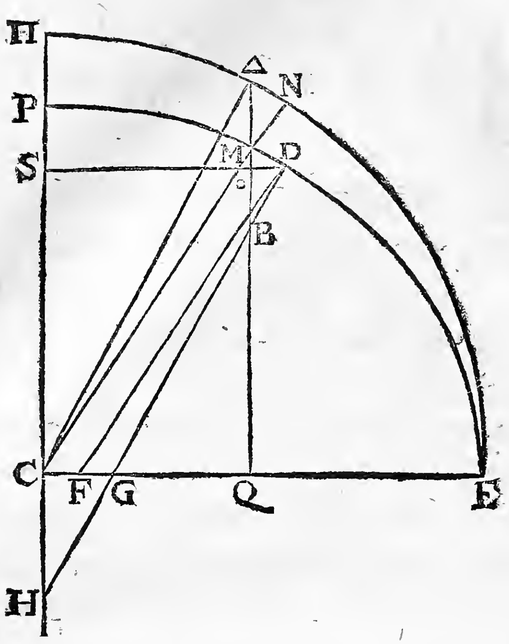
Soit décrit autour de cet ellipsoïde le globe E Δ Π, qui ait le même équateur ; on sait que si d'un point *D* de l'ellipsoïde on tire la ligne *D G*, perpendiculaire au méridien en *D*, le rayon du globe, tiré de *C* parallelement à la ligne *D G*, déterminera sur le globe le point Δ, qui a la même latitude que le point *D* sur l'ellipsoïde.

Soient tirées du point Δ la droite Δ *Q*, parallele à l'axe ; du point *D* la droite *D S*, qui lui soit perpendiculaire ; du point *C* par le point *M*, où l'ordonnée du cercle rencontre l'ellipse, la droite *C N* ; & soit prolongée la perpendiculaire à l'ellipse *D G*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe en *H*.

Soit $CE = r$

$P\Pi = \delta$

$Q\Delta = s$, sinus de latitude,



$$CQ = c,$$ co-finus de latitude.

On aura $M\Delta = \frac{s\delta}{r}$

$$MN = \frac{ss\delta}{rr}$$

$$N\Delta = \frac{cs\delta}{rr}$$

$$DO = \frac{css\delta}{r^3}$$

$$MO = \frac{ccs\delta}{r^3}$$

$$OB = \frac{s^3\delta}{r^3}.$$

Donc $MB = MO + OB = M\Delta$,

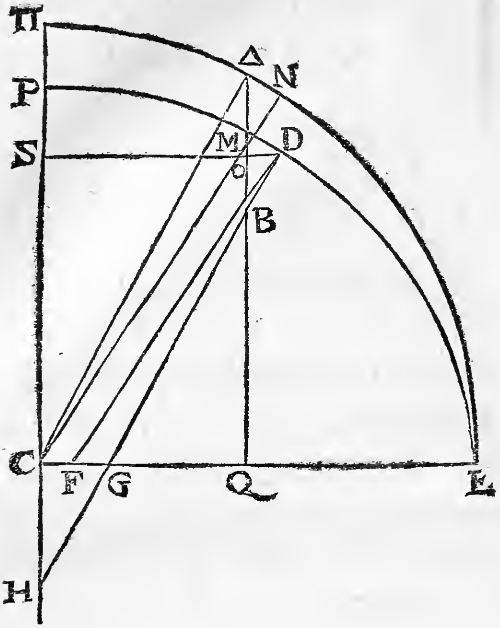
$N\Delta = MD$, & $MN = BD$,

$CG = \frac{2c\delta}{r}$

$CH = \frac{2s\delta}{r}$

$GH = 2\delta$.

On voit facilement que pour une latitude donnée, le degré du méridien ſur l'ellipſoïde eſt égal au degré décrit du rayon CM, auquel il faut ajouter le petit arc $2\Delta N$, qui répond au degré qu'on cherche, & dont il faut retrancher le petit arc $2\Delta' N'$, qui répond au degré ſuivant. Prenant donc G pour le degré du globe $E\Delta\Pi$, & le rapport de r à g pour celui du rayon au degré, l'on aura pour le degré du méridien de l'ellipſoïde, $G - \frac{g}{r} MN + 2\Delta N - 2\Delta' N'$; c'eſt-à-dire, prenant s & c pour les ſinus & co-ſinus du degré qu'on cherche, & s' & c' pour les ſinus & co-ſinus du degré ſuivant, on a



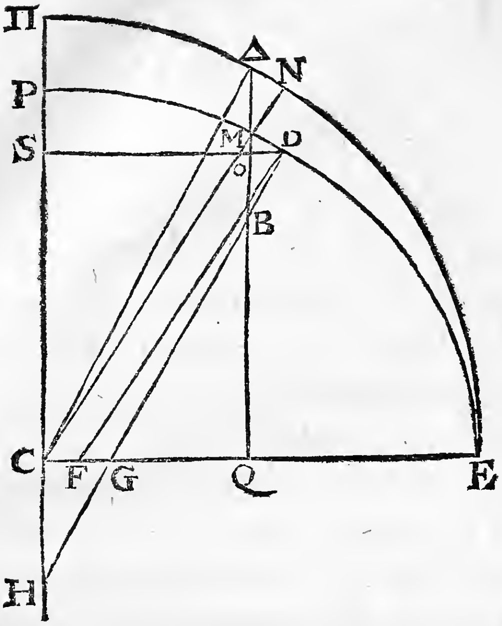
$$G - \frac{gss\delta}{r^3} + \frac{2cs\delta}{rr} - \frac{2c's'\delta}{rr}.$$

Ayant donc la meſure de deux degrés du méridien ſur la Terre à différentes latitudes, on déterminera la figure de la Terre qui en réſulte par deux équations, dont l'une étant retranchée de l'autre, on aura la valeur de δ, qui donne enſuite la grandeur du degré & du rayon du globe, la figure de l'ellipſoïde, & la longueur de tous ſes degrés.

On peut encore déterminer la figure de la Terre d'une autre maniere, ayant la meſure de deux degrés du méridien à différentes latitudes ; car chaque degré du méridien de l'ellipſoïde eſt le degré du cercle oſculateur de l'ellipſe pour cette latitude ; & le rayon oſculateur de l'ellipſe étant égal au cube de la normale DG de l'ellipſe diviſé par le quarré du parametre ; on a pour notre ellipſe le rayon oſculateur $= (DG)^3 : \frac{(CP)^4}{(CE)^2} = r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr}$.

On peut donc, avec les deux degrés connus, que je ſuppoſe M & m, & les ſinus S & s, faire deux équations, dont l'une étant retranchée de l'autre, on aura la valeur de $\delta = \frac{r^3(M-m)}{3M(SS-ss)}$, qui donne enſuite le rayon du globe & la figure de l'ellipſoïde.

Et ſi l'un des degrés dont on a la meſure eſt pris à l'équateur, on a $M - m = \frac{3mSS.\delta}{r^3}$. Ce qui rend la conſtruction de la table des degrés du méridien fort facile.



Si l'on fait $gss = 2rcs - 2rc's'$, ou $r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr} = r$, on trouve ſur l'ellipſoïde le lieu où le degré du méridien eſt égal à celui du globe ; & ce lieu eſt celui dont le ſinus de latitude eſt $= r\sqrt{\frac{2}{3}}$, c'eſt-à-dire, celui qui eſt placé vers le 55^me^. degré de latitude.

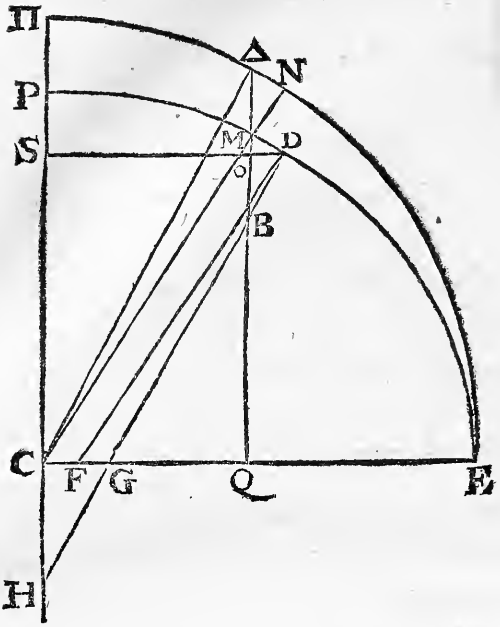
Comme la quantité $DO = \frac{css\delta}{r^3}$ eſt la différence du rayon du cercle parallele à l'équateur ſur l'ellipſoïde, au rayon du parallele à l'équateur ſur le globe à la même latitude ; ſi au lieu d'avoir deux degrés du méridien, on avoit deux degrés de longitude, on en pourroit facilement déduire à peu près comme ci-deſſus, la valeur de δ & la figure de la Terre. Et cette valeur de δ une fois déterminée, ſoit ainſi, ſoit par les moyens précédens, on a facilement la longueur de tous les degrés de longitude.

---

§. IV.

Dimenſions pour la gravité.

LES calculs précédens nous ayant donné toutes les dimenſions de la Terre, on peut s'en ſervir pour trouver les points vers leſquels tend la peſanteur dans les



différens lieux de la Terre, ou les lignes *CG*, distances du centre de la Terre aux points où les perpendiculaires *DG* rencontrent le diametre de l'équateur.

On peut facilement aussi déterminer les points vers lesquels tend la gravité, ou les lignes *CF*, & les petits angles *GDF*, que forment les directions de la pesanteur avec celles de la gravité.

Car soit la pesanteur en $D = P$, la

force centrifuge ſur l'équateur, dont on connoît le rapport avec la peſanteur, $= F$, on aura la force centrifuge en D $= \frac{DS}{CE} \times F$.

Et à cauſe que $P : \frac{DS}{CE} \times F :: DG : GF$,

on aura $GF = DS \times \frac{F}{P}$, &

$$GF = c \times \frac{F}{P},$$

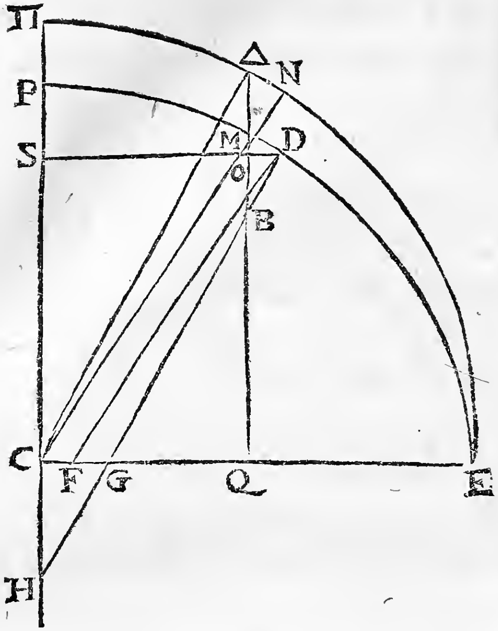
$$CF = \frac{2c\delta}{r} - c \times \frac{F}{P}.$$

Et l'angle $GDF = \frac{cs \,.\, F}{rr \,.\, P}$.

§. V.

Dimenſions pour les parallaxes.

PRenant pour la Terre l'ellipſoïde EDP, on peut eſtimer de quatre manieres la parallaxe horizontale de la Lune. 1°. Pendant qu'un obſervateur eſt placé ſur la ſurface de la Terre dans un point



D, on peut ſuppoſer l'autre placé au centre. 2°. On peut le ſuppoſer placé au centre du cercle oſculateur de la Terre au point *D*. 3°. On peut le ſuppoſer placé au point où la verticale du point *D* rencontre l'axe de la Terre. 4°. Enfin on peut le ſuppoſer placé au point où la verticale du point *D* rencontre le diametre de l'équateur. Les lignes qui ſervent de baſes aux parallaxes ſeront donc

La 1^{re}. $= r - \frac{ss\delta}{rr}$.

La 2^{de}. $= r - 2\delta + \frac{3ss\delta}{rr}$.

La 3^{me}. $= r + \frac{ss\delta}{rr}$.

La 4^{me}. $= r - 2\delta + \frac{ss\delta}{rr}$.

Il eſt facile par là de calculer toutes les différentes parallaxes ; & l'on verra quelles ſont les différences qui ſe trouvent entre les lignes qui ſervent de baſes aux parallaxes horizontales, ou quelles ſont les différences que l'inégalité de ces baſes produit dans les parallaxes. Et l'on peut juger par là combien il eſt néceſſaire d'avoir égard à ces différences lorſqu'on veut déterminer avec préciſion les diſtances de la Lune à la Terre, & toutes les autres diſtances des aſtres.

Mais pour tirer toute l'utilité de ces calculs, & pour n'avoir plus rien à deſirer ſur la parallaxe de la Lune, il faudroit avoir une de ces parallaxes bien déterminée. Et l'on ne ſauroit parvenir ni aſpirer à une plus grande exactitude, qu'en déterminant la parallaxe, comme nous avons dit §. II.

L'utilité dont peuvent être ces choſes nous a fait prendre la peine de calculer une table de toutes les lignes qui peuvent ſervir, tant pour la parallaxe de la Lune, que pour les directions de la gravité, & pour la grandeur des degrés de la Terre. Dans ce calcul, nous avons pris 1 pour le rayon de l'équateur, & $\frac{1}{178}$ pour la quantité dont le diametre de l'équateur ſurpaſſe l'axe, comme nos obſervations la donnent.

Mais comme dans les différens ellipſoïdes qui different peu de la ſphere, toutes ces lignes ſont proportionnelles à cette quantité, la table les donnera par une ſeule regle de trois, pour quelque différence qu'on voulût ſuppoſer entre l'axe & le diametre de l'équateur.

TABLE *pour la parallaxe, la gravité & la grandeur des degrés.*

Latit du Lieu.	*M N*	*N* Δ	*D O*
0°	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00004	0,00049	0,00004
10	0,00017	0,00096	0,00017
15	0,00038	0,00140	0,00036
20	0,00066	0,00181	0,00062
25	0,00103	0,00215	0,00091
30	0,00140	0,00243	0,00122
35	0,00185	0,00264	0,00151
40	0,00232	0,00277	0,00178
45	0,00281	0,00281	0,00199
50	0,00330	0,00277	0,00212
55	0,00377	0,00264	0,00216
60	0,00421	0,00243	0,00211
65	0,00461	0,00215	0,00195
70	0,00496	0,00181	0,00170
75	0,00524	0,00140	0,00136
80	0,00545	0,00096	0,00095
85	0,00557	0,00049	0,00049
90	0,00562	0,00000	0,00000

TABLE

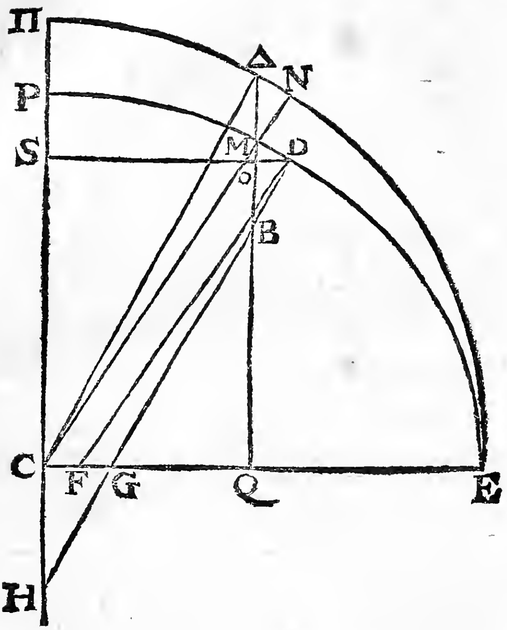
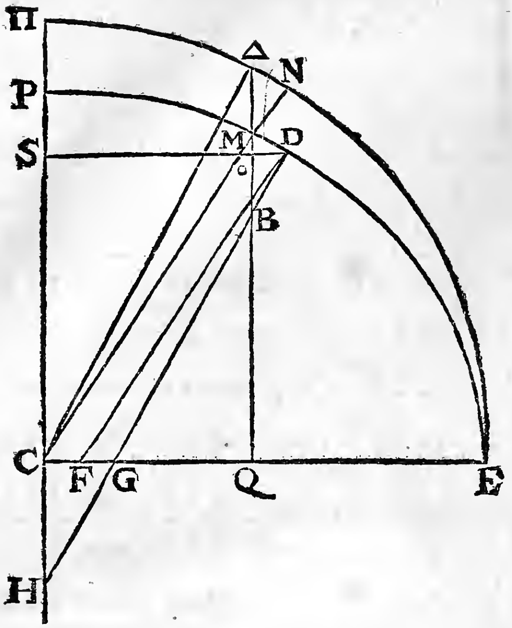

Π
Δ
N
P
M
D
S
O
B
C
F
G
Q
E
H

TABLE pour la parallaxe, la gravité & la grandeur des degrés.

Latit. du Lieu.	*C G*	*C H*	*G H*
0°	0,01124	0,00000	0,01124
5	0,01119	0,00098	0,01124
10	0,01107	0,00195	0,01124
15	0,01085	0,00291	0,01124
20	0,01056	0,00384	0,01124
25	0,01018	0,00475	0,01124
30	0,00973	0,00562	0,01124
35	0,00920	0,00645	0,01124
40	0,00861	0,00722	0,01124
45	0,00794	0,00794	0,01124
50	0,00722	0,00861	0,01124
55	0,00645	0,00920	0,01124
60	0,00562	0,00973	0,01124
65	0,00475	0,01018	0,01124
70	0,00384	0,01056	0,01124
75	0,00291	0,01085	0,01124
80	0,00195	0,01107	0,01124
85	0,00098	0,01119	0,01124
90	0,00000	0,01124	0,01124



§. VI.

Maniere de déterminer la distance de la Lune au centre de la Terre.

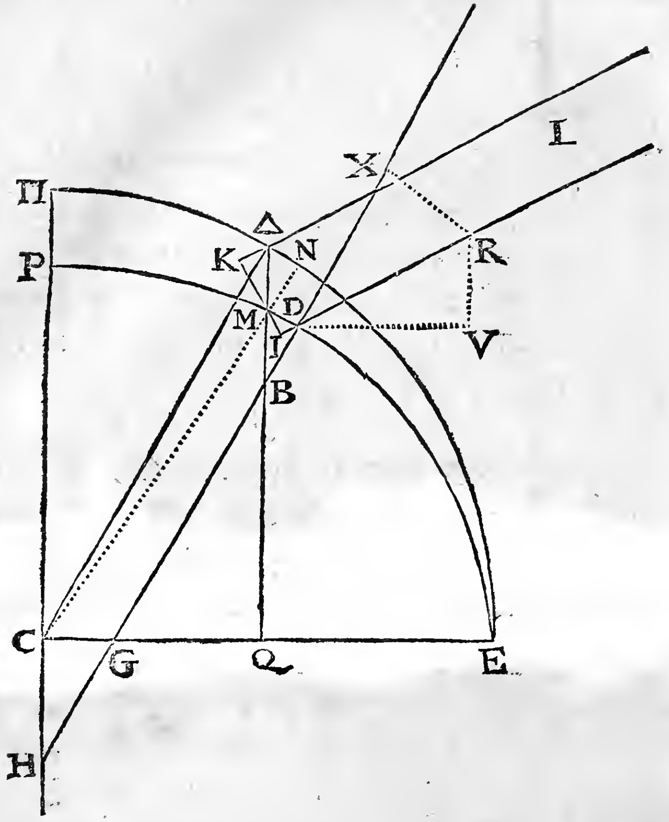
LA figure de la Terre étant donnée, les lignes tirées de chacun des observateurs à la Lune, & les verticales des lieux où ils observent, forment un quadrilatere dont les angles & deux côtés étant donnés, on peut déduire tout le reſte.

Soient deux obſervateurs, l'un placé en *E* ſur l'équateur, l'autre dans quelque lieu *D* ſur le même méridien, à une diſtance conſidérable de l'équateur : que chacun obſerve la diſtance de la Lune à une même Etoile, & la diſtance de cette Etoile à ſon zénith.

Il eſt clair que la ſomme des diſtances de l'Etoile au zénith donnera l'angle *DGE*, qui eſt l'amplitude de l'arc du méridien qui ſépare les deux obſervateurs, & que la ſomme ou la différence des diſtances de la Lune à l'Etoile, eſt la parallaxe, qui a cet arc du méridien pour baſe.

On a donc le quadrilatere *EGDLE*, donné par tous ſes angles, & par les côtés *EG* & *GD*, ce qui ſuffit pour le déterminer.

Lorſqu'on aura ainſi déterminé la diſtance de la Lune au point *G*, on peut facilement la rapporter au point *C*, cen-



tre de la Terre. Mais le calcul de la diſtance de la Lune au centre de la Terre ſe peut faire encore de la maniere ſuivante.

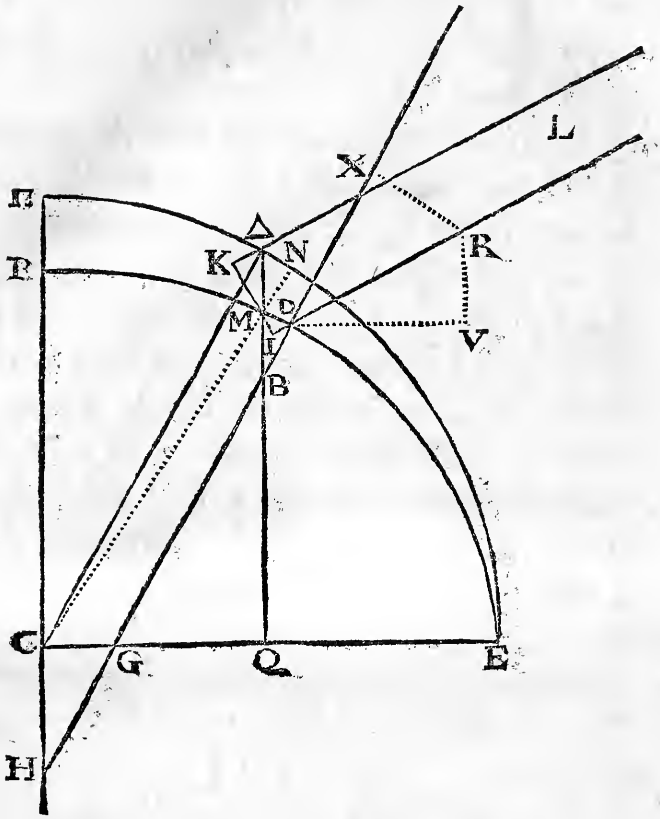
Ayant la parallaxe des deux obſervateurs en *E* & en *D*, je cherche la parallaxe qu'ils obſerveroient, ſi l'un étant toujours placé ſur l'équateur en *E*, l'autre étoit placé ſur le globe en Δ, à la même latitude où eſt celui qui obſerve réellement ſur la Terre.

Et pour cela, ayant tiré du point Δ à la Lune la droite Δ *L*, il eſt clair que la parallaxe ſur le globe ſurpaſſeroit la vraie parallaxe du petit angle Δ *L D*. Lorſqu'on aura donc cet angle, il n'y aura qu'à l'ajouter à la parallaxe obſervée, & à la diſtance de la Lune au zénith de l'obſervateur en *D*; & l'on aura le quadrilatere *C E L* Δ *C*, & ſa diagonale *L C*, qui eſt la diſtance de la Lune au centre de la Terre.

§. VII.

Recherche de la différence des parallaxes ſur la Terre & ſur le globe.

Il faut maintenant chercher le petit angle *D L* Δ, différence de la parallaxe ſur la Terre & ſur le globe.



Ayant tiré du point M ſur les deux lignes $D\,L$ & $\Delta\,L$, les deux perpendiculaires MI & MK, cet angle ſera $\frac{MI+MK}{ML}$, dans lequel la diſtance du point M ou du point C à la Lune, ſera toujours assez exacte. C'est donc MI & MK qu'il faut chercher.

Soit prolongée la verticale du point D, & soit tirée la ligne DV, parallele à CE; & d'un point quelconque R de la droite DL, soient abaissées sur ces deux lignes les perpendiculaires RX, RV; & l'on aura, à cause des triangles semblables DMI, RDX, & ΔMK, RDV, $MI = \frac{cs \cdot DX}{rr \cdot DR} \delta$, & $MK = \frac{s \cdot DV}{r \cdot DR} \delta$.

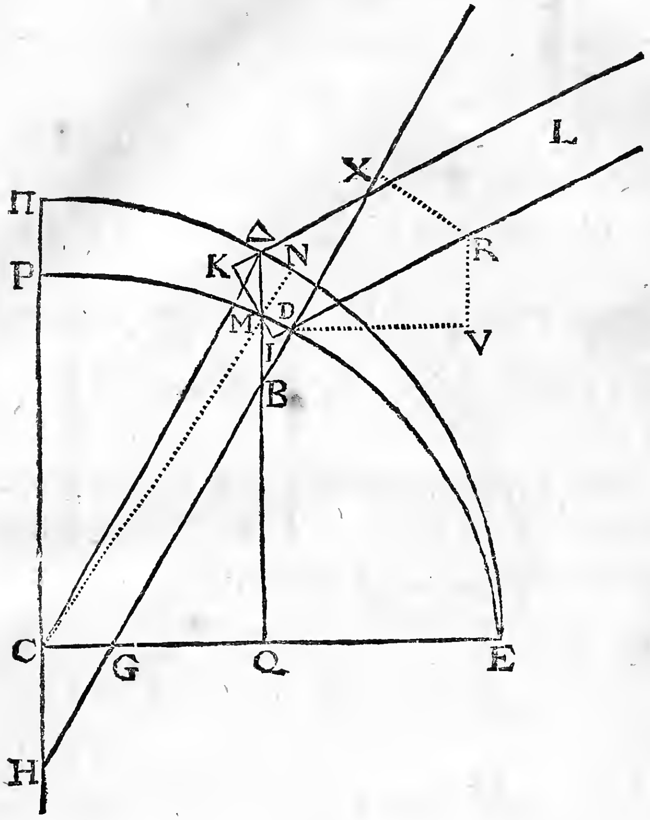
Soit maintenant le sinus de la déclinaison de la Lune $RV = x$, & son co-sinus $DV = y$ pour le rayon r, & l'on aura

$$MK = \left(\frac{sy}{rr}\right) \delta,$$

$$MI = \left(\frac{ccsy + cssx}{r^4}\right) \delta,$$

$$\& \; MI + MK = \left(\frac{rrsy + ccsy + cssx}{r^4}\right) \delta.$$

C'est cet angle $DL\Delta$ qu'il faut ajouter à toutes les parallaxes observées, pour



avoir celles qu'on auroit ſi la Terre étoit ſphérique.

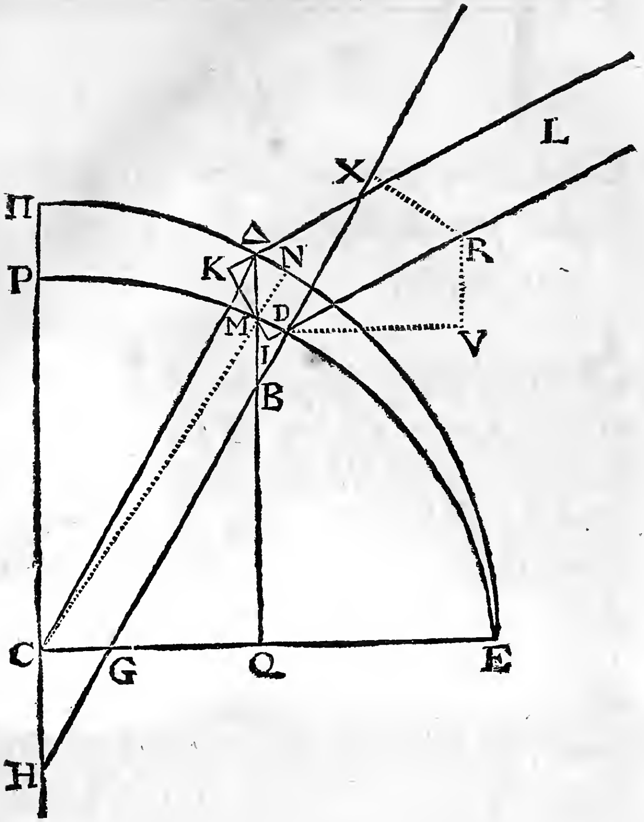
§. VIII.

Conditions qui rendent la différence des parallaxes la plus grande qu'il soit possible.

SI l'on suppose que pendant qu'un des observateurs est en E sur l'équateur, l'autre soit en D sur une latitude donnée, & qu'on cherche quelle doit être la déclinaison de la Lune pour que l'angle $DL\Delta$ soit le plus grand qu'il soit possible, il n'y a qu'à chercher le *maximum* de $MI + MK$, en faisant s & c constans; & l'on trouvera qu'il faut que le sinus de la déclinaison de la Lune soit

$$x = \frac{cs}{\sqrt{(rr + 3cc)}}.$$

C'est là le rapport qui doit être entre le sinus de la déclinaison de la Lune & le sinus de la latitude de l'observateur, pour que l'angle $DL\Delta$ soit le plus grand, pour quelque latitude donnée du point D que ce soit.



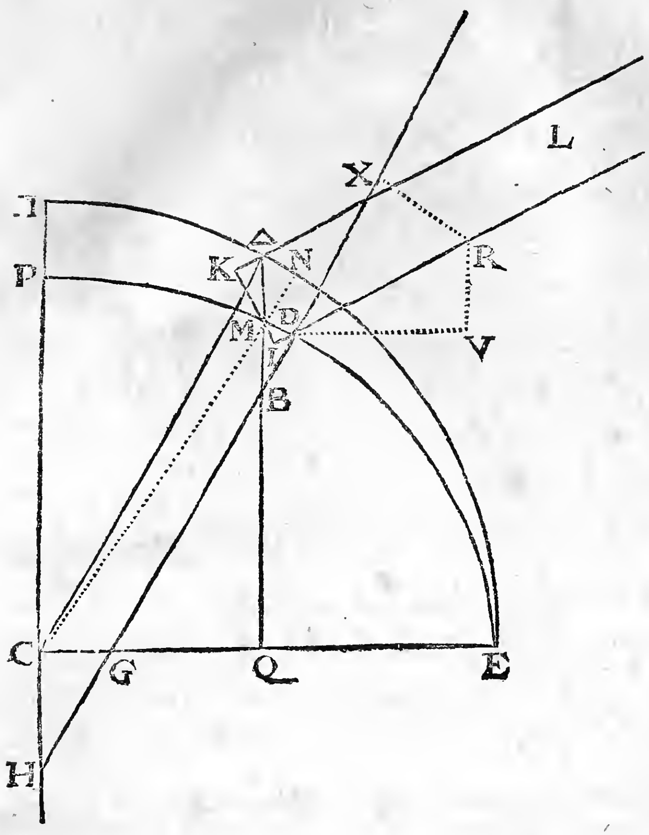
Mais si l'on veut trouver sur quel lieu de la Terre il faut placer l'observateur, pour que la différence des parallaxes sur la Terre & sur le globe soit la plus grande en général, il faut substituer dans l'expression de $MI + MK$, la valeur de

$x = \frac{cs}{\sqrt{(rr+3cc)}}$, & la valeur de $y = \frac{rr+cc}{\sqrt{(rr+3cc)}}$, qui lui répond, & chercher le *maximum* de $MI + MK$, en ſuppoſant s & c variables.

On trouvera que le lieu où il faut placer l'obſervateur en D, *afin que l'angle* D L △ *ſoit le plus grand qu'il ſoit poſſible, eſt celui dont le ſinus de latitude eſt* $S = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Mettant cette valeur de s, & celle de $c = r\sqrt{\frac{1}{3}}$ qui lui répond, dans l'expreſſion du ſinus de la déclinaiſon de la Lune, qui donne le plus grand angle *D L* △ pour une latitude donnée, c'eſt-à-dire, dans l'expreſſion $x = \frac{cs}{\sqrt{(rr+3cc)}}$, *on trouve pour le ſinus de la déclinaiſon de la Lune, qui pour la ſituation la plus avantageuſe du point* D, *eſt auſſi la plus avantageuſe, on trouve* $x = \frac{1}{3}r$.

C'eſt une choſe remarquable, que le lieu *D*, qui donne la plus grande diffé-

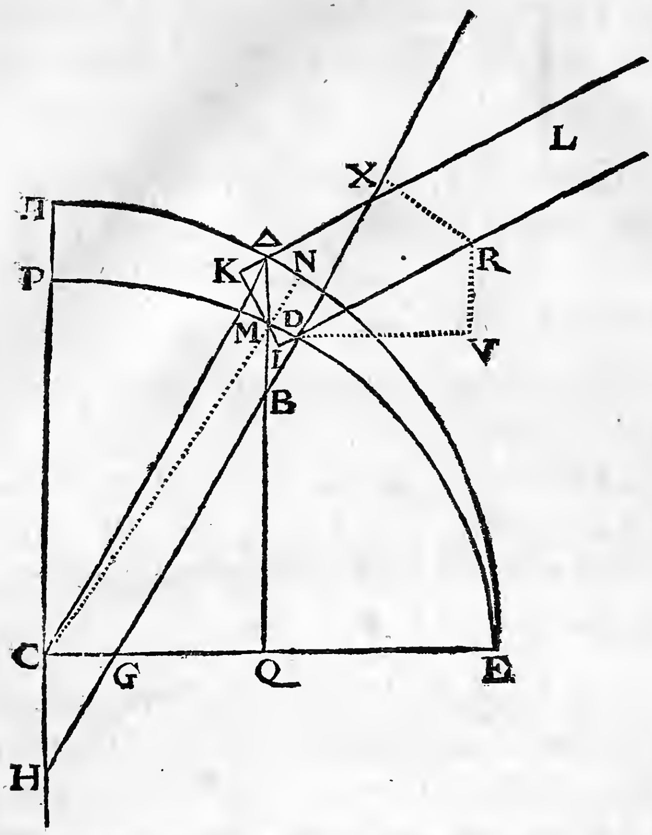


rence entre la parallaxe ſur la Terre & la parallaxe ſur le globe, eſt celui où le cercle parallele à l'équateur ſur la Terre differe le plus du parallele correſpondant ſur le globe ; & celui où le degré du méridien de la Terre eſt égal au degré du globe. Ce lieu eſt placé vers la latitude de $54^{\circ} \frac{3}{4}$.

Quant à la déclinaiſon de la Lune, qui donne alors la plus grande différence de parallaxe, c'eſt celle d'environ $19^{\circ} \frac{1}{2}$.

On voit par là qu'un des obſervateurs étant ſur l'équateur; quand on pourroit placer l'autre au pôle, la différence des parallaxes ne pourroit jamais être auſſi grande qu'elle l'eſt lorſque l'obſervateur eſt placé vers le 55^me^. degré.

Car ſuppoſant pour l'un & pour l'autre cas, les ſituations de la Lune les plus avantageuſes, c'eſt-à-dire, pour l'obſervateur placé au pôle, la Lune dans l'équateur, & pour l'obſervateur placé vers le 55^me^. degré, la déclinaiſon de la Lune d'environ $19^{\circ} \frac{1}{2}$; la différence de parallaxe, dans ce dernier cas, eſt à la différence de parallaxe dans le premier, comme 2 à $\sqrt{3}$.



§. IX.

Calcul de la différence des parallaxes.

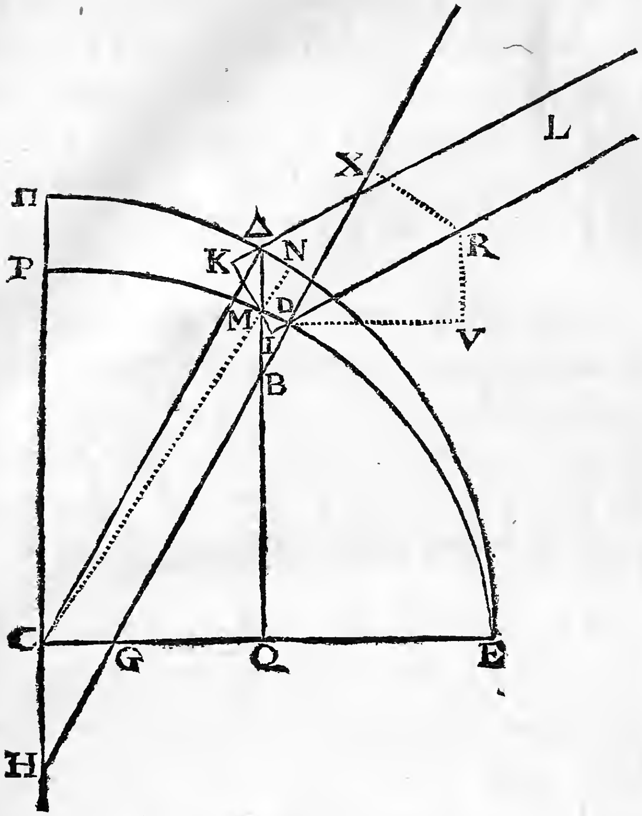
VOyons maintenant quelles ſont les différences de parallaxes, ou les différentes grandeurs de l'angle D *L* Δ.

Prenant 1 pour CE, & $\frac{1}{178}$ pour δ, & cherchant la différence de la parallaxe dans toutes les circonſtances les plus avantageuſes, c'eſt-à-dire, lorſque $s = \sqrt{\frac{2}{3}}$, & $x = \frac{1}{3}$, on trouve $MI + MK = 0,00649$.

Suppoſant maintenant, comme M. Newton, que dans les ſyzygies, lorſque la Lune eſt à ſa moyenne diſtance de la Terre, la parallaxe horizontale ſur l'équateur ſoit de 57′ 20″, on trouvera le petit angle $DL\Delta$, de 23″.

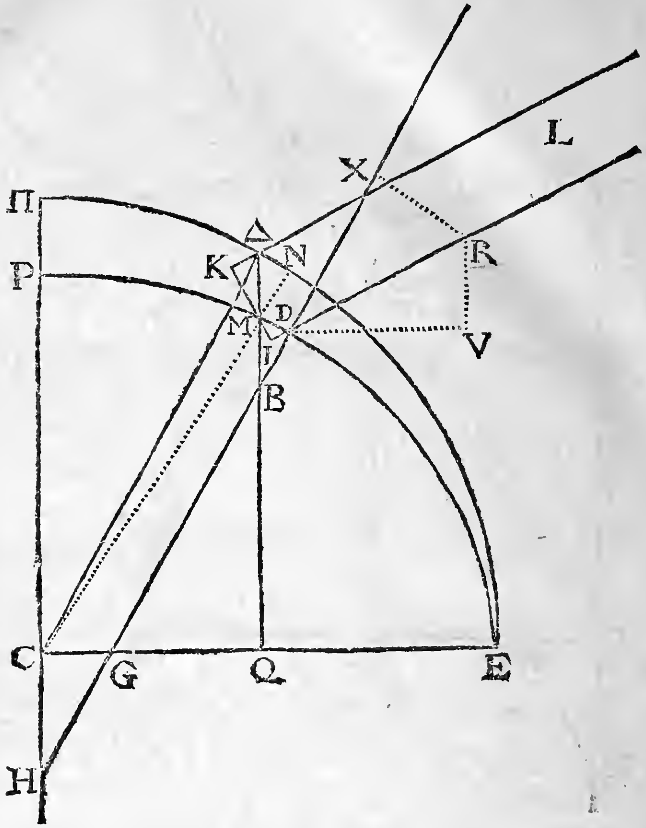
Il eſt clair qu'aux mêmes latitudes & aux mêmes déclinaiſons de la Lune, la différence des parallaxes eſt proportionnelle à la différence qui eſt entre le diametre de l'équateur & l'axe. Ainſi ayant une fois les différences de parallaxes que nous donnons ici, on aura par la regle de 3 toutes ces différences pour quelque rapport qu'on prenne entre l'axe & le diametre de l'équateur.

Remarque.



Remarque.

On verra facilement qu'entre la Terre, telle que nous l'avons déterminée, & la Terre alongée de M. Caſſini, qui faiſoit le diametre de l'équateur plus petit que l'axe d'environ $\frac{1}{100}$, il y auroit pour



chaque latitude un angle $D L \Delta$, environ trois fois plus grand que celui que nous trouvons entre la Terre & le globe; & que ſuppoſant que les obſervations ſe fiſſent dans les circonſtances qui donnent le plus grand angle, cet angle ſeroit de 64″; c'eſt-à-dire, que ſi la Terre avoit la figure que lui donnoit Mr. Caſſini, les deux obſervateurs placés en *E* & en *D*, verroient la parallaxe plus grande de plus d'une minute qu'ils ne la voient ſur la Terre applatie, telle que nous l'avons déterminée.

§. X.

Méthode pour déterminer la figure de la Terre.

SI la figure de la Terre cauſe quelque altération aux parallaxes, & les rend différentes de ce qu'elles ſeroient ſi la Terre étoit un globe, il s'enſuit que les parallaxes peuvent ſervir à connoître ſi la Terre s'écarte de cette figure. Mais c'eſt un problême qu'il me ſemble qu'il faut traiter tout autrement qu'il n'a été traité juſqu'ici, ſi l'on veut le réſoudre avec certitude. Un petit nombre de ſecondes ſur leſquelles on peut compter, & d'où dépend abſolument la queſtion, eſt préférable à des quantités plus grandes que peuvent donner d'autres méthodes, mais qui demandent qu'on faſſe uſage d'élémens ſuſpects.

Il eſt certain, par exemple, que ſi l'on avoit aſſez exactement quelqu'une des parallaxes horizontales de la Lune, ou la diſtance de la Lune au centre de la Terre, on pourroit employer des méthodes qui donneroient des angles plus grands que ceux auxquels je réduis la queſtion. Mais tout l'avantage apparent de ces plus grands angles s'évanouit, lorſqu'on conſidere que quoiqu'on puiſſe moins les méconnoître par l'obſervation, ils ne conduiroient à la détermination de la figure de la Terre, qu'autant que ces autres élémens ſeroient exactement déterminés.

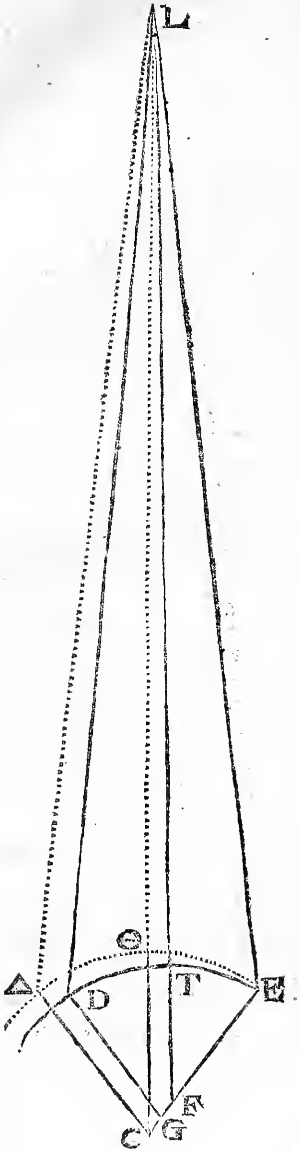
Je crois donc que dans des queſtions de cette nature, la vraie méthode pour les réſoudre, eſt de les réduire à un moyen unique, indépendant de toutes les autres circonſtances.

Pour cela il faudroit que deux obſervateurs étant placés ſur le même méridien, l'un à l'équateur, l'autre vers le 56^{me}. degré de latitude, (afin que l'un & l'autre viſſent la Lune à la même hauteur lorſque ſa déclinaiſon eſt la plus grande) il y eût un troiſieme obſervateur placé ſur le même méridien vers le 28^{me}. degré, qui alors vît la Lune à ſon zénith. On auroit par là deux parallaxes qui auroient pour baſes deux arcs du méridien, dont les amplitudes ſeroient les mêmes, mais dont les longueurs & les cordes étant différentes, ſoutiendroient à la Lune différens angles. Et quand les obſervateurs ne ſeroient pas placés exactement ſur le même méridien, la méthode ſeroit praticable, en obſervant, comme nous avons déjà dit, le mouvement de la Lune pendant le temps écoulé entre les obſervations.

Soit le point E ſur l'équateur, le point D à la latitude de 56 degrés, & le point T à la latitude de 28. Soit imaginé le globe $E \ominus \Delta$, ſur lequel les points E, $\ominus$, Δ, répondent aux points E, T, D, c'eſt-à-dire, ſoient aux mêmes latitudes. Soient tirées dans l'ellipſoïde les perpendiculaires DG, TF; & dans le globe les rayons ΔC, $\ominus C$, qui ſeront paralleles à ces lignes.

Il faut voir maintenant (la Lune étant en L) quelles ſeront les deux parallaxes obſervées. Soit appellée P, celle qui a pour baſe l'arc TD, & p celle qui a pour baſe l'arc TE. On aura $P = TL\ominus + \ominus L\Delta - \Delta LD$; & $p = EL\ominus - TL\ominus$. Donc la différence des parallaxes, $P - p = 2\,TL\ominus - DL\Delta$.

Ou, conſervant les mêmes dénominations que dans le § VII, c'eſt-à-dire, faiſant le ſinus de la déclinaiſon de la Lune, ou de la latitude du point T, $= x$, ſon co-ſinus $= y$, le ſinus de latitude du point D, $= s$, ſon co-ſinus


L
Θ
Δ
D
T
E
F
C
G

$= c$, on aura pour la différence des parallaxes, $P - p$.

$$= \left(\frac{4rrxy - rrsy - ccsy - cssx}{r^4 . CL} \right) \delta.$$

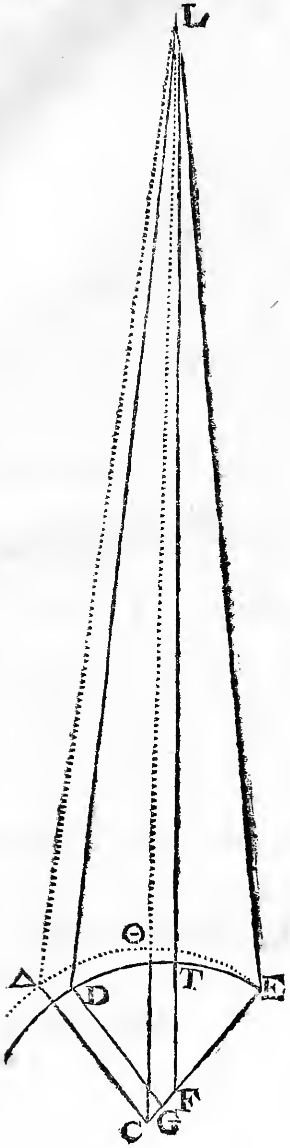
La condition que l'obſervateur placé entre E & D partage en deux également l'amplitude de l'arc du méridien, & voie la Lune à ſon zénith, fait qu'on peut chaſſer x & y de la valeur précédente de la différence des parallaxes ; car on a toujours

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{rr - rc}\,; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{rr + rc}\,;$$

qui étant ſubſtitués, donnent $P - p$

$$= \left[\frac{2s}{r} - \frac{1}{\sqrt{2} . r^4} \times \left(rrs\sqrt{rr + rc} + ccs\sqrt{rr + rc} + css\sqrt{rr - rc} \right) \right] \frac{\delta}{CL}.$$

Si maintenant on calcule cette différence des parallaxes, en ſuppoſant que l'un des obſervateurs étant ſur l'équateur, l'autre ſoit ſur la latitude de 56 degrés, on trouvera $P - p = 0,517 \frac{\delta}{CL}$.


L
Θ
Δ
D
T
E
F
C
G

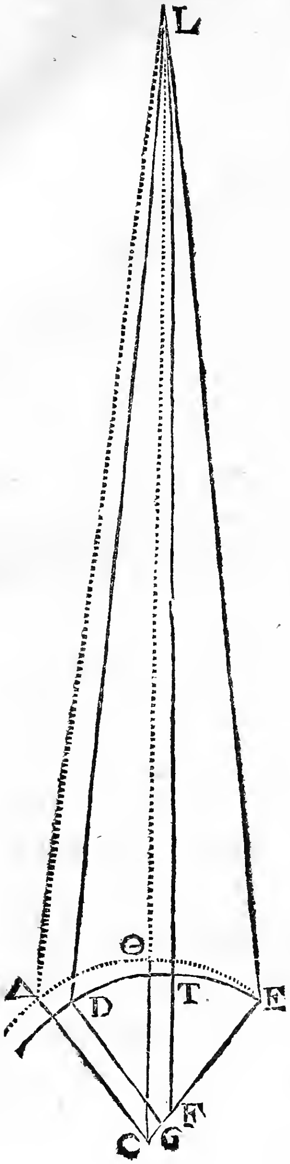
Et ſuppoſant que le rayon 1 de la Terre ſous-tend un angle de 57′ 20″ pour la parallaxe horizontale, on trouvera la différence des parallaxes = 10″.

On voit par là qu'entre la Terre applatie de la 178me. partie du diametre de l'équateur, & la Terre alongée de la 100me., comme à peu près M. Caſſini la faiſoit, il y auroit une différence de parallaxes de 28″.

Remarques ſur cette méthode.

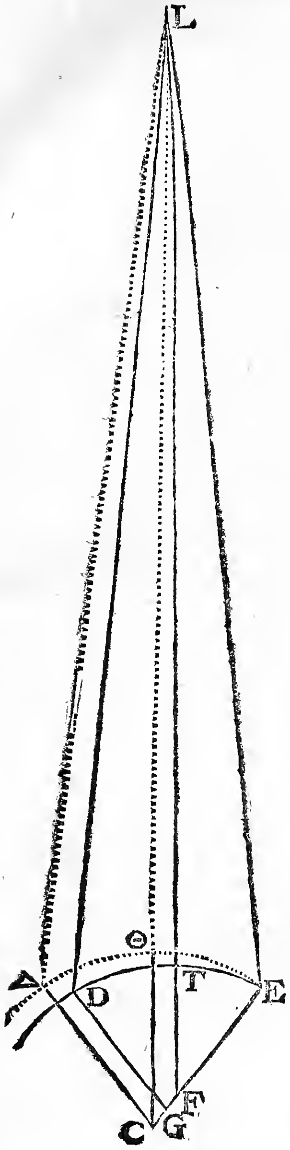
Quoique ces quantités ſoient moins grandes que celles que pourroient donner les autres méthodes dont j'ai parlé, elles ſont ſuffiſantes pour décider la queſtion de la figure de la Terre, ſuppoſé que quelqu'un voulût la regarder encore comme n'étant pas décidée.

Car il eſt clair que la ſolution précédente du problême eſt à l'abri de toutes les erreurs que pourroit cauſer l'incertitude ſur la latitude & ſur la réfraction.


L
Θ
T
D
E
F
C
G

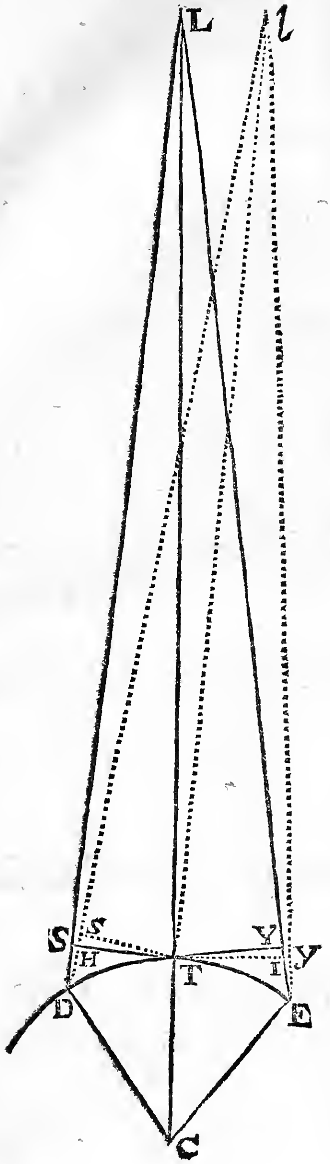
Que les obſervateurs placés en *E* & en *D*, ſoient préciſément ſur l'équateur & ſur la latitude du 56^{me}. degré, ou à peu près à ces latitudes, il eſt clair que cela n'apporte aucun changement ſenſible dans la différence des parallaxes, pourvu que les deux arcs qui les ſéparent de l'obſervateur placé en *T*, ayent la même amplitude. Or cela eſt fort facile à déterminer avec plus de préciſion qu'il n'eſt néceſſaire, ſans qu'il ſoit beſoin de connoître les latitudes abſolues. Il ſuffit ſeulement que l'un & l'autre des obſervateurs voient à la même diſtance de leur zénith, la même Etoile qui paſſe au zénith de l'obſervateur en *T*.

Et quelque petite erreur commiſe dans les diſtances de cette Etoile aux zéniths des obſervateurs, ou cauſée parce que la réfraction ne feroit pas préciſément la même à la même hauteur en différens lieux, quelqu'erreur ſur ces choſes ne cauſeroit aucune altération ſenſible dans la différence des


L
D
T
E
F
C
G

parallaxes. Il n'eſt pas néceſſaire non plus que la Lune paſſe préciſément au zénith de l'obſervateur en *T*; elle peut en être éloignée de quelques minutes, ſans que cela change rien à la différence des parallaxes.

Mais ſi la Lune paſſe à une diſtance aſſez grande du zénith de l'obſervateur placé en *T*, pour qu'il en faille tenir compte, il faut faire une correction aux deux parallaxes *P* & *p*. Car ſi la Lune tombe vers l'équateur, comme lorſqu'elle eſt en *l*, ayant tiré du point *T* ſur les lignes *EL*, *El*, & *DL*, *Dl*, les perpendiculaires *TY*, *Ty*, & *TS*, *Ts*, le ſinus de la parallaxe *P* ſera diminué de *SH*, & celui de la parallaxe *p* ſera augmenté de la même quantité. Or à cauſe des angles égaux *LDl*, *STs*, *LEl*, *YTy*, nommant *A* l'angle de la diſtance de la Lune au zénith de l'obſervateur en *T*, l'on aura *HS*, ou $yi = A \times DS$, qui eſt la quantité qu'il faut retrancher du ſinus de la parallaxe *P*, & ajouter au ſinus de la


L
l
S
s
Y
y
H
T
I
D
E
C

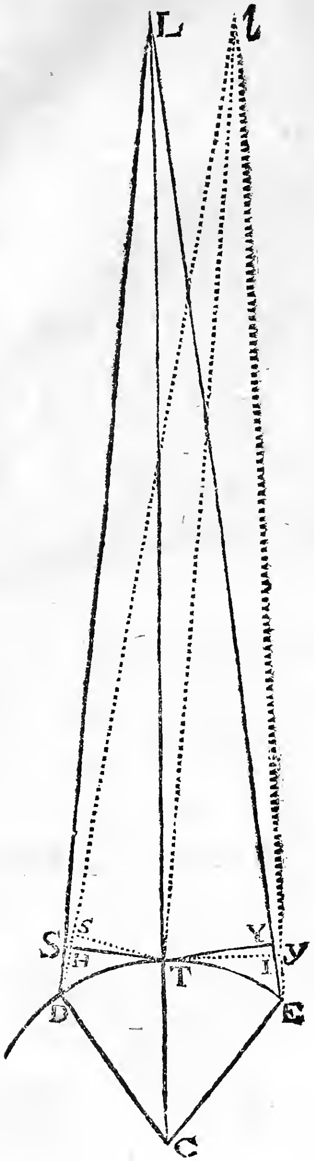
parallaxe p ; ou qu'il faut retrancher du ſinus de la parallaxe p, & ajouter au ſinus de la parallaxe P, ſi la Lune tombe au nord.

Tout ſe réduit donc à meſurer avec le micrometre les diſtances de la Lune à quelqu'Etoile. Et tous ceux qui connoiſſent la juſteſſe avec laquelle on peut faire cette opération, verront que ce ſeroit ici une maniere indubitable de déterminer la figure de la Terre, ſi elle n'étoit pas déjà déterminée.

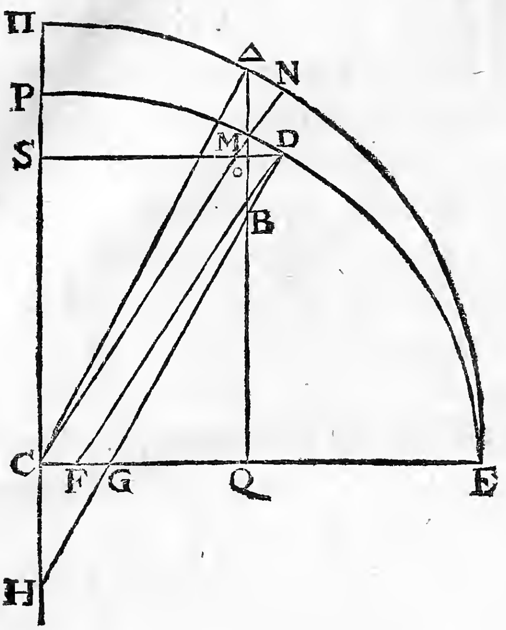
§. XI.

Autre eſpece de Parallaxes.

JE ne parle point d'une autre eſpece de parallaxes qui auroient pour baſes les arcs des cercles paralleles à l'équateur. Il eſt évident que ſuppoſant l'amplitude


L
l
s
S
H
Y
y
I
T
D
E
C

l'amplitude de l'arc qui ſépareroit les deux obſervateurs, la même ſur le globe que ſur la Terre, l'angle qu'ils formeroient à la Lune ſeroit plus grand ſur la Terre que ſur le globe ; & il ſemble qu'on pourroit par là déterminer la figure de la Terre. Mais quand on ſuppoſeroit que deux obſervateurs placés ſur l'équateur, ayant déterminé la parallaxe qui auroit pour baſe l'arc qui les ſépare, les deux autres fuſſent placés ſur le parallele où la valeur de DO eſt la plus grande, c'eſt-à-dire, vers le 55^{me}. degré de latitude ; la différence de la parallaxe qu'ils obſerveroient, à la parallaxe correſpondante ſur le globe, ne ſeroit jamais plus grande que l'angle dont le rayon étant la diſtance de la Lune à la Terre, le ſinus ſeroit $2DO$, c'eſt-à-dire, ne pourroit jamais être plus grande que 15″. Et il faudroit, pour qu'elle atteignît cette grandeur, que les obſervateurs, tant ceux qui ſeroient ſur l'équateur, que ceux qui ſeroient ſur le parallele, fuſſent



ſéparés de toute la démi-circonférence de leurs cercles.

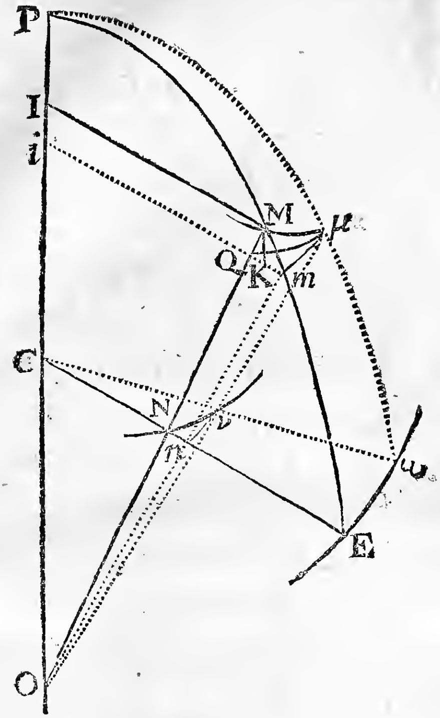
Cette conſidération fait que je ne m'arrête pas ici à détailler cette méthode, qui ne dépend que des valeurs de DO, que j'ai déterminées §. V.

§. XII.

Loxodromiques.

J'Omettrois une des principales utilités qu'on peut retirer de la détermination de la figure de la Terre, si je ne donnois ici pour la Terre applatie la description de la ligne loxodromique, qui est, comme on sait, la ligne qui coupe sous le même angle tous les méridiens de la Terre, & celle que décrit un vaisseau pendant qu'il suit un même rumb. Comme c'est sur cette ligne qu'est fondée toute l'exactitude de la Navigation, la détermination de la figure de la Terre est encore utile ici pour le Navigateur.

Soit $PME\epsilon\mu P$ une partie du sphéroïde qui représente la Terre, dont P est le pôle, CP le demi-axe, $E\epsilon$ l'équateur, $m\mu$ un cercle parallele à l'équateur, PME & $P\mu\epsilon$ deux méridiens



infiniment proches. Soit $M\mu$ une petite partie de la loxodromique comprise entre ces deux méridiens ; & qu'on cherche la projection de cette ligne sur le plan de l'équateur CE pour un œil placé dans l'axe en O.

Ayant tiré des points C, I, & i, infiniment proche du point I, les rayons

CE, $C\varepsilon$, IM, & im; du point M sur le rayon im, ayant abaissé la petite perpendiculaire MK, & tiré du point O les lignes OM, Om, $O\mu$, il est clair que les points N, n, ν, où ces lignes coupent les rayons CE, $C\varepsilon$, seront la projection du triangle loxodromique $Mm\mu$, formé sur la surface du sphéroïde, par les petits arcs de la loxodromique, du méridien, & du parallele à l'équateur.

Faisant donc $CE = r$,

$OI = x$,

$Im = y$,

$CN = z$,

$Nn = dz$,

$E\varepsilon = du$,

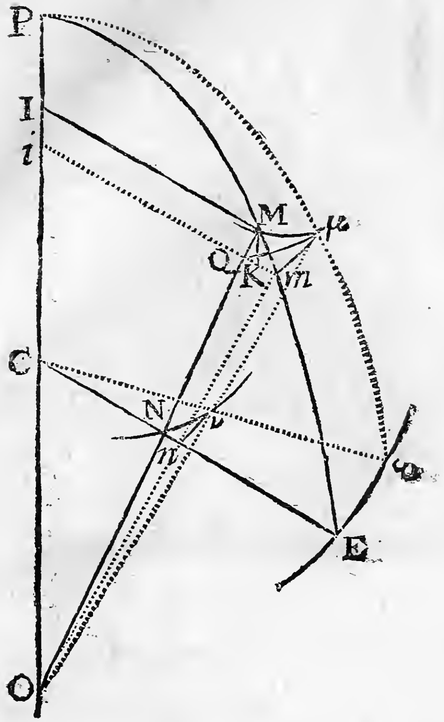
$Mm = ds$;

On aura $Km = dy$,

$MK = -dx$,

$KQ = -\frac{y\,dx}{x}$.

$Qm = \frac{x\,dy - y\,dx}{x}$.

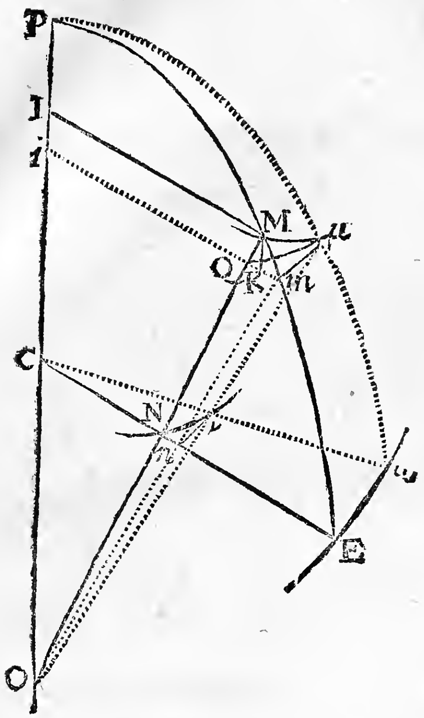


Puisque la loxodromique coupe tous les méridiens sous le même angle, soit le rapport de 1 à m, celui du rayon à la tangente de cet angle, & l'on aura $m\mu = m\,ds$. Les pyramides semblables $OQ\mu m$, $ON\nu n$, donnent $Qm : m\mu :: Nn : n\nu$, c'est-à-dire, $n\nu = m\,ds\,dz$

$: \frac{x\,dy - y\,dx}{x}$. Pour comparer cette quantité aux petits arcs $E\,\varepsilon$ de l'équateur, on a $n\,\nu\ \frac{z\,du}{r}$; & mettant cette valeur de $n\,\nu$ dans l'équation précédente, on a $du = \frac{m\,r\,dz}{z}\left(\frac{x\,ds}{x\,dy - y\,dx}\right)$.

On a de plus (faisant $OC = a$) $xz = ay$, & par cette équation & celle qui exprime la nature de la courbe du méridien, on chassera x, y, dx, dy, & ds ; & l'on aura l'équation qui exprime la nature de la projection de la loxodromique.

Si l'on suppose l'œil placé à une distance infinie, il est clair que l'équation générale $du = \frac{m\,r\,dy}{z}\left(\frac{x\,ds}{x\,dy - y\,dx}\right)$ devient $du = \frac{m\,r\,dz\,ds}{z\,dy}$; ou (à cause de $dy = dz$) $du = \frac{m\,r\,ds}{z}$ pour la projection orthographique de la loxodromique ;

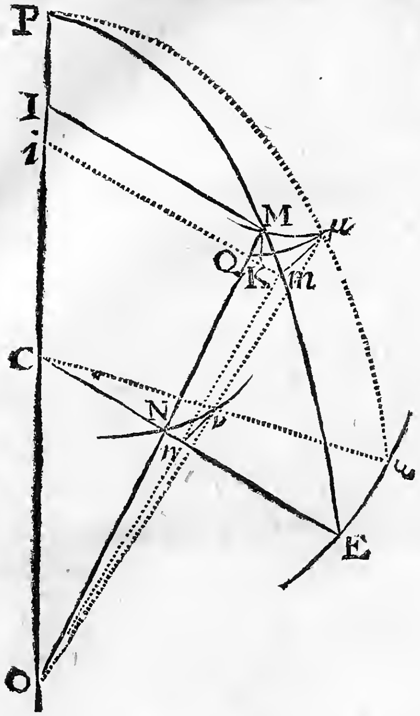


c'eſt-à-dire, celle qui eſt formée par des lignes tirées des points de la loxodromique, perpendiculairement au plan de l'équateur.

§. XIII.

Projection stéréographique de la loxodromique.

SI l'on cherche ainsi la loxodromique tracée sur la surface de la mer, & projettée sur le plan de l'équateur, en supposant l'œil placé au pôle de l'hémisphere opposé; prenant toujours δ pour l'excès dont le rayon de l'équateur CE surpasse le demi-axe CP, l'on aura pour exprimer la nature de la courbe Nv, l'équation $du = \frac{mrdz}{z} - \frac{4mr^3}{(rr+zz)}\frac{\delta z dz}{}$; qui, si la Terre étoit un globe, donneroit la logarithmique spirale pour la projection stéréographique de la loxodromique.



§. XIV.

Projection orthographique de la loxodromique.

On trouvera de même pour la courbe qui est la projection orthographique de la loxodromique, $du = \frac{mrr\,dz}{z\sqrt{(rr - zz)}} - \frac{m\delta z\,dz}{r\sqrt{(rr - zz)}}$.

Par le calcul de ces loxodromiques, on peut construire des tables & des cartes plus exactes que celles dont se servent les Navigateurs.

Fin du Discours sur la Parallaxe de la Lune.

OPÉRATIONS

POUR DÉTERMINER

LA FIGURE DE LA TERRE

ET LES

VARIATIONS DE LA PESANTEUR.

OPÉRATIONS POUR LA MESURE DE LA TERRE.

APRÈS avoir expliqué les utilités qu'on retire de la connoiſſance de la figure de la Terre, & comment on doit ſe ſervir de ſes dimenſions, tant pour déterminer les vrais lieux de la Lune, que pour connoître la grandeur des degrés de latitude & de longitude, & les points vers leſquels tend la gravité, j'ai cru devoir donner ici l'extrait des opérations que nous avons faites pour la meſure des degrés du méridien, & des différentes quantités de la peſanteur; & y joindre les réſultats des autres opérations de la même eſpece, qui ont été faites avec le plus d'exactitude, afin que chacun ſoit à portée d'en faire l'uſage qu'il jugera dans l'application des regles qui ſe trouvent dans l'Ouvrage précédent.

Dans l'année 1736, je fus envoyé par le Roi vers le pôle arctique, avec MM. Clairaut, Camus, le Monnier, & M. l'Abbé Outhier, auxquels ſe joignit M. Celſius Profeſſeur d'Aſtronomie à Upſal.

Les obſervations que nous devions faire avoient deux objets, l'un étoit la meſure d'un arc du méridien, l'autre. la meſure de la quantité de la peſanteur. La longueur des degrés vers le pôle, comparée à celle des degrés meſurés dans d'autres climats, déterminoit la figure de la Terre; & la quantité de la peſanteur vers le pôle, comparée à celle des autres régions, ſervoit à faire connoître la gravité primitive.

Nous commençâmes notre meſure de l'arc du méridien à la ville de *Torneå*, qui eſt ſituée au fond du golfe de Bottnie, à la latitude de 65° 50′ 50″, & plus orientale que Paris, d'environ d'environ 1^h 23′, & nous prolongeâmes cette meſure par les déſerts de la Lapponie, au delà du cercle polaire, juſqu'à une montagne appelée *Kittis*, à la latitude de 66° 48′ 20″.

Nos obſervations ſur la peſanteur furent faites à Pello, au pied du mont Kittis.

Nous trouvâmes dans ces régions la peſanteur plus grande qu'elle n'eſt dans tous les lieux où on l'a juſqu'ici obſervée, qui ſont tous auſſi plus éloignés du pôle: elle ſurpaſſoit à Pello de 0,00137, la peſanteur qu'on éprouve à Paris. Et nous trouvâmes le degré du méridien qui coupe le cercle polaire, de 57438 toiſes, plus grand de 378 que celui qu'on avoit pris pour le degré moyen de la France.

Après notre retour de Lapponie, nous voulûmes vérifier l'amplitude du degré qu'on avoit autrefois meſuré entre Paris & Amiens : nos obſervations nous donnerent l'amplitude de l'arc compris entre ces deux villes, plus petite que M. Picard ne l'avoit trouvée; & ce degré, de 57183 toiſes, plus petit de 255, que celui que nous avions meſuré en Lapponie. Nous conclûmes de tout cela que la Terre étoit un ſphéroïde applati vers les pôles.

Nous rendîmes compte à l'Académie de ces opérations ; & voici ces opérations mêmes.

MESURE
DU DEGRÉ DU MÉRIDIEN
AU CERCLE POLAIRE.

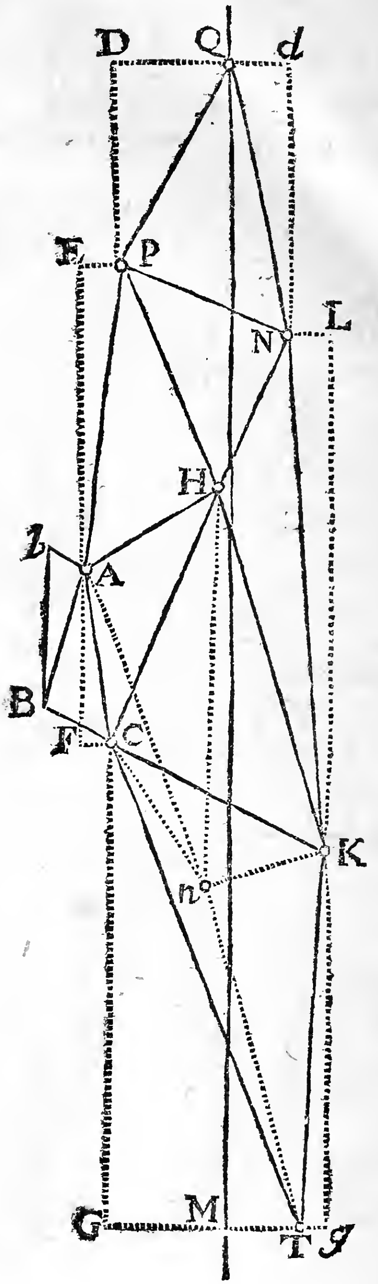
I.

Angles obſervés.

TOUS les angles ſuivans ont été obſervés du centre des ſignaux que nous avions élevés ſur le ſommet des montagnes avec un quart-de-cercle de deux pieds de rayon, muni d'un micrometre ; & cet inſtrument vérifié pluſieurs fois autour de l'horizon, donnoit toujours la ſomme des angles fort près de 360°.

Les dixiemes de ſecondes qu'on trouvera ici, viennent de ce que dans la réduction des parties du micrometre en ſecondes, on a voulu faire le calcul à la rigueur, & non pas d'une exactitude imaginaire, à laquelle on croiroit être parvenu.

Voici ces angles tels qu'ils ont été obſervés, avec les hauteurs apparentes des objets obſervés, où le ſigne + marque des élévations, & le ſigne — des abaiſſemens au-deſſous de l'horizon.



D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

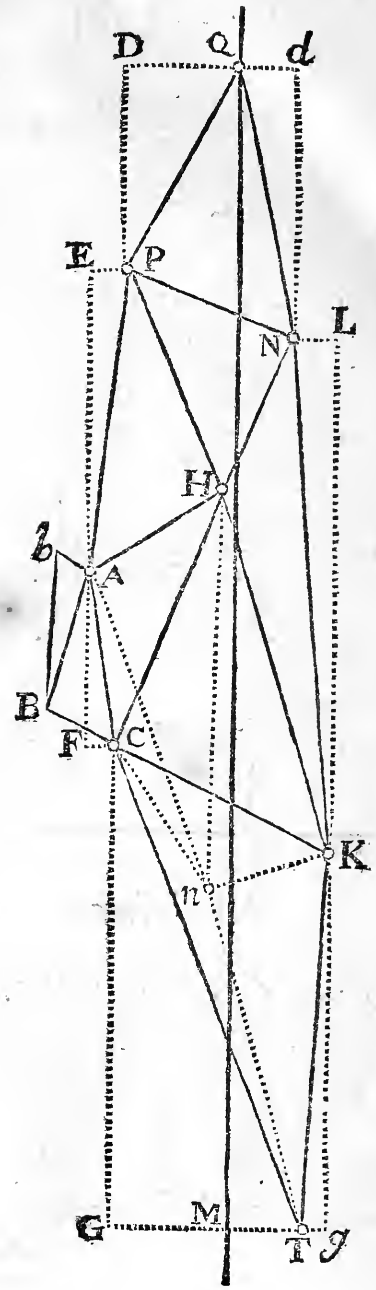
Angles observés.	*Angles réduits à l'horizon.*	*Hauteurs.*

Dans la fleche de l'église de Torneå.

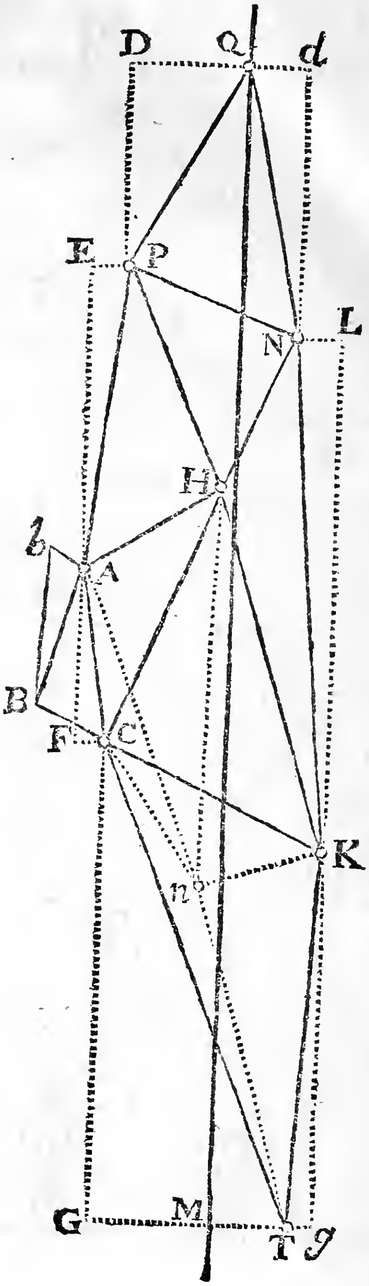
CTK... 24° 23′ 0″, 2	24° 22′ 58,″ 8	*C* . . . . . 0′ 0″
Et par la réduction, pour ce que le centre de l'instrument étoit à 5 pieds du centre de la fleche, dans la direction de Cuitaperi, *CTK*	24 22 54, 5	
KTn... 19 38 20, 9	19 38 20, 1	*n* . . . . + 3 0
Et par la réduction pour le lieu du centre, l'instrument placé dans le même endroit, *KTn*	19 38 17, 8	*K* . . . + 8 40 l'horiz. de la mer — 11 0

Sur Niwa.

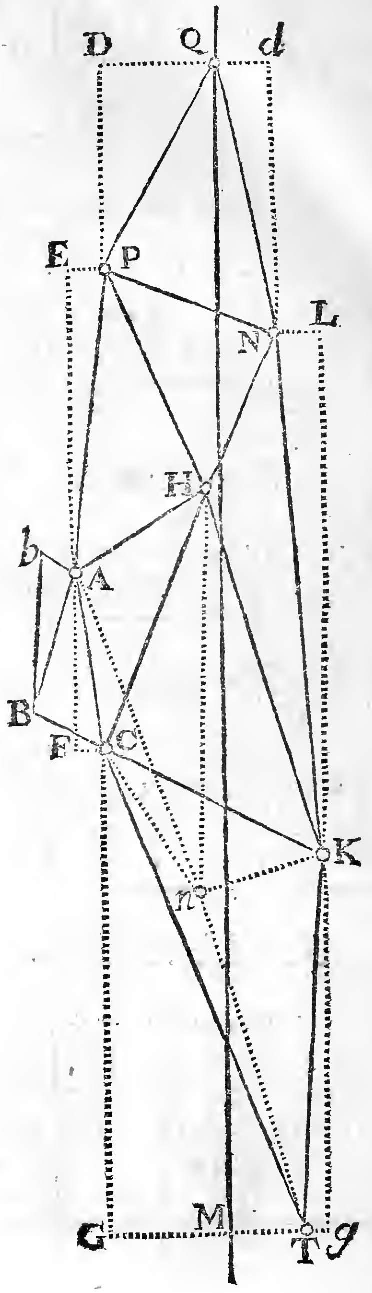
TnK.. 87° 44′ 24″, 8	87° 44′ 19″, 4	*T*..... − 17′ 40″
HnK.. 73 58 6, 5	73 58 5, 7	*K*...... + 16 50
AnK.. 95 29 52, 8	95 29 54, 4	*A*...... + 4 40
AnH = *AnK* − *HnK*	21 31 48, 7	*H*...... − 0 30
AnH = 21 32 16, 9	21 32 16, 3	
AnH est donc.....	21 32 2, 5	
CnH.. 31 57 5, 2	31 57 3, 6	*C*....... + 10 0


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

ANGLES observés.	ANGLES réduits à l'horizon.	HAUTEURS.
	Sur Kakama.	
TKn.. 72° 37′ 20″, 8	72° 37′ 27″, 8	n..... − 22′ 50″
CKn.. 45 50 46, 2	45 50 44, 2	C..... − 4 45
HKn.. 89 36 0, 4	89 36 2, 4	H..... − 5 10
HKC = nKH − CKn	43 45 18, 2	
HKC.. 43 45 46, 8	43 45 47, 0	
HKC.. 43 45 41, 5	43 45 41, 7	
HKC est donc....	43 45 35, 6	
CKT = CKn + nKT	118 28 12, 0	T..... − 24 10
HKN.. 9 41 48, 1	9 41 47, 7	N.... − 8 10
	Sur Cuitaperi.	
		K..... − 6′ 10″
KCn... 28° 14′ 56″, 9	28° 14′ 54″, 7	n...... − 19 0
TCK... 37 9 15, 0	37 9 12, 0	T...... − 24 10
HCK 100 9 56, 4	100 9 56, 8	H..... − 2 40
ACH 30 56 54, 4	30 56 53, 4	A..... + 5 0
	Sur Avasaxa.	
HAP.. 53° 45′ 58″, 1	53° 45′ 56″, 7	P.... + 4′ 50″
HAx.. 24 19 34, 8	24 19 35, 0	H.... − 8 0
xAn... 77 47 46, 7	77 47 49, 5	x.... − 10 40
xAC... 88 2 11, 0	88 2 13, 6	C.... − 14 15
HAn = HAx + xAn	102 17 24, 5	n.... − 20 20
HAC = CAx + xAH	112 21 48, 6	
CAn... 10 13 54, 2	10 13 52, 8	


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

ANGLES observés.	ANGLES réduits à l'horizon.	HAUTEURS.
Sur Pullingi.		
		H..... − 22′ 0″
APH..31° 19′ 53″, 7	31° 19′ 55″, 5	*A*..... − 18 10
QPN..87 52 9, 7	87 52 24, 3	*Q*..... − 32 40
NPH..37 21 58, 9	37 22 2, 1	*N*..... − 26 50
Sur Kittis.		
NQP..40° 14′ 57″, 3	40° 14′ 52″, 7	*P*...... + 22′ 30″
		N...... + 1 0
Sur Niemi.		
		P...... + 18′ 30″
PNQ..51° 53′ 13″, 7	51° 53′ 4″, 3	*Q*...... − 14 0
PNH..93 25 8, 1	93 25 7, 5	*H*...... − 2 40
HNK..27 11 55, 3	27 11 53, 3	*K*...... − 14 0
Sur Horrilakero.		
CHn.. 19° 38′ 21″, 8	19° 38′ 21″, 0	*n*....... − 18′ 15″
CHA..36 42 4, 3	36 42 3, 1	*A*...... 0 0
AHP..94 53 49, 7	94 53 49, 7	*P*...... + 11 50
PHN..49 13 11, 9	49 13 9, 3	*N*...... − 5 0
KHn..16 26 6, 7	16 26 6, 3	*K*..... − 12 30
CHK..36 4 54, 1	36 4 54, 7	*C*...... − 10 40


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

ANGLES pour lier la base Bb *avec les sommets d'Avasaxa & de Cuitaperi.*

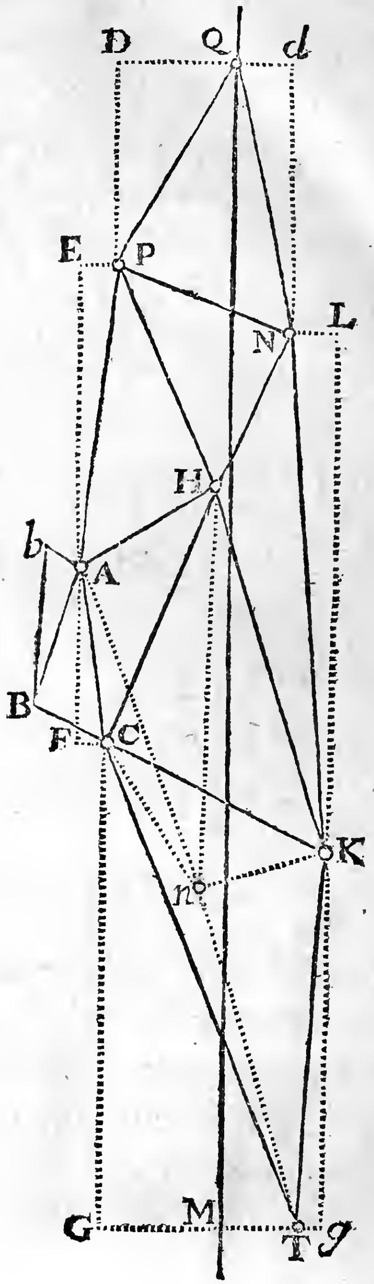
Angles observés.	*Angles réduits au même plan.*	*Hauteurs des objets vus du point* B.
ABb.. 9° 21′ 58″, 0	Réduisant *ABy*,	
AbB..77 31 48, 1	*yBC*, & *ABz*, *zBC*	
BAb..93 6 7, 2	au même plan *ABC*,	*A*+0° 40′ 30″
	& prenant un milieu entre les deux	
ABy..61 30 5, 4	valeurs de *ABC*,	
yBC...41 12 3, 4	qu'on a par là.	*y* +1 23 30
ABz...46 7 57, 5		*C* +1 4 5
zBC...56 34 22, 2	*ABC* 102° 42′ 13″, 5	*z* +1 11 0
ACB..54 40 28, 8		
BAC..22 37 20, 6		

Les lettres *x*, *y*, *z*, désignent des objets intermédiaires qui ont servi à prendre en deux fois l'angle *ABC*, qui étoit plus grand que l'amplitude du quart-de-cercle.

II.

POSITION des triangles par rapport au méridien.

Pour déterminer la position des triangles avec le méridien, on observa sur Kittis pendant plusieurs jours le passage du Soleil par les verticaux de Pullingi


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

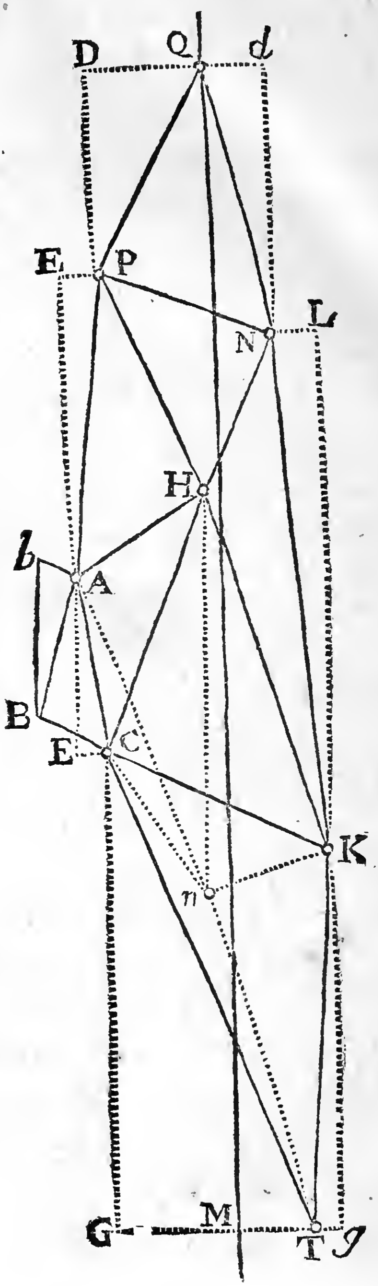
& de Niemi. On ſe ſervoit pour ces obſervations, d'une lunette de quinze pouces, mobile autour d'un axe horizontal auquel eſt perpendiculaire, & d'une pendule qu'on régloit tous les jours par des hauteurs correſpondantes du Soleil.

Ces obſervations donnerent l'angle que la ligne tirée de Kittis à Pullingi formoit avec le méridien qui paſſe par Kittis, c'eſt-à-dire, l'angle $PQM = 28^{\circ}\ 51'\ 52''$, & cette poſition fut confirmée par d'autres obſervations ſemblables faites à *Torneå*.

III.

Baſe meſurée.

La baſe Bb, qui détermine la grandeur de tous les triangles, fut meſurée deux fois à la perche ſur la glace du fleuve; & par un milieu pris entre les deux meſures qui ne différoient l'une de l'autre que de 4^{pouces}, on trouva $Bb = 7406{,}86^{\text{toiſes}}$.


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
E
C
K
n
G
M
T
g

I V.

Calcul des deux triangles par lesquels commencent toutes les suites.

A B b.

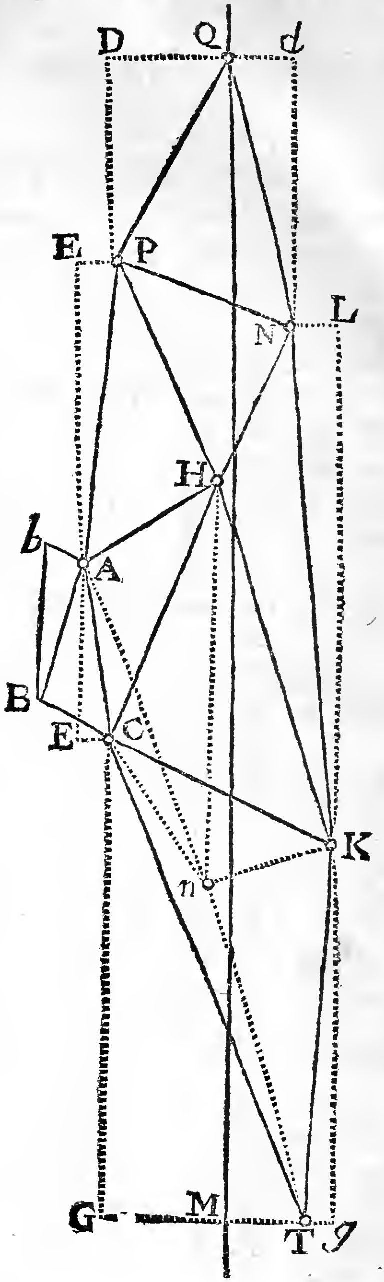
	Angles observés.				Angles corrigés pour le calcul.		
A B b...	9°	21′	58″,0	....	9°	22′	0″
A b B...	77	31	48, 1	....	77	31	50
B A b...	93	6	7, 2	....	93	6	10
	179	59	53, 3		180	0	0

A B C.

A B C...	102	42	13, 5	....	102	42	12
B A C...	22	37	20, 6	....	22	37	20
A C B...	54	40	28, 8	....	54	40	28
	180	0	2, 9		180	0	0

En calculant ces deux triangles d'après la base *B b*, de 7406,86 toises, on trouve la distance *AC*, entre Avasaxa & Cuitaperi, de 8659,94 toises.

Et comme ces deux triangles sont d'une grande justesse, & que leur disposition est très-favorable pour conclure exactement cette distance, on peut regarder *A C* comme la base.



V.

V.

Calcul des triangles de la premiere ſuite.

A C H.

Angles obſervés, réduits à l'horizon.				*Angles corrigés pour le calcul.*		
CAH.....	112°	21′	32″, 9	112°	21′	17″
ACH.....	30	56	53, 4	30	56	47
AHC.....	36	42	3, 1	36	41	56
	180	0	29, 4	180	0	0

C H K.

CHK.....	36	4	54, 7	36	4	46
CKH.....	43	45	35, 6	43	45	26
KCH.....	100	9	56, 8	100	9	48
	180	0	27, 1	180	0	0

C K T.

KCT.....	37	9	12, 0	37	9	7
CKT.....	118	28	12, 0	118	28	3
CTK.....	24	22	54, 3	24	22	50
	180	0	18, 3	180	0	0

A H P.

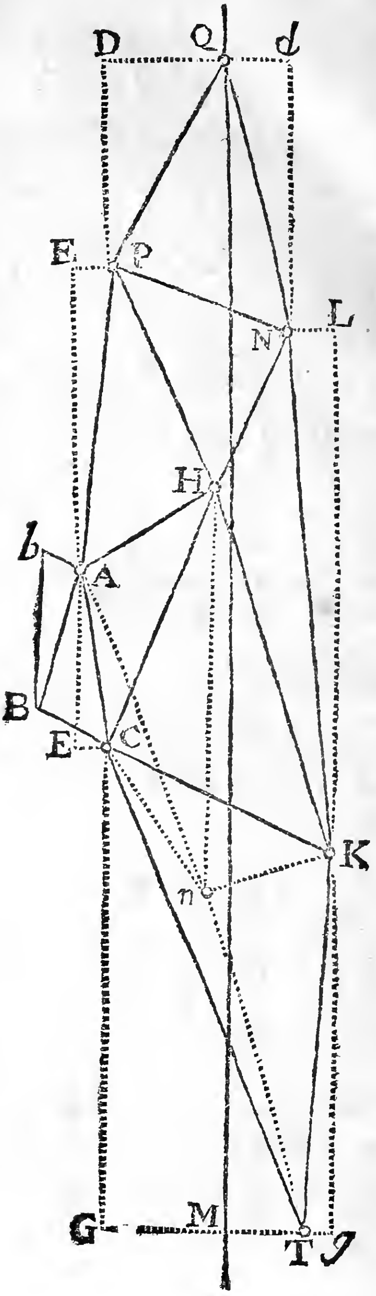
AHP.....	94	53	49, 7	94	53	56
HAP.....	53	45	56, 7	53	46	3
APH.....	31	19	55, 5	31	20	1
	179	59	41, 9	180	0	0

H N P.

HNP.....	93	25	7, 5	93	25	1
NHP.....	49	13	9, 3	49	13	3
HPN.....	37	22	2, 1	37	21	56
	180	0	18, 9	180	0	0

N P Q.

NPQ.....	87	52	24, 3	87	52	17
NQP.....	40	14	52, 7	40	14	46
PNQ.....	51	53	4, 3	51	52	57
	180	0	21, 3	180	0	0


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
E
C
K
n
G
M
T
g

Prenant $AC = 8659{,}94^{\text{toises}}$, tel qu'on l'a trouvé par les deux triangles ABb, ABC, on trouve par la résolution des triangles précédens,

$$\begin{aligned} AP &= 14277{,}43^{\text{ toises.}} \\ PQ &= 10676{,}\ 9 \\ CT &= 24302{,}64 \end{aligned}$$

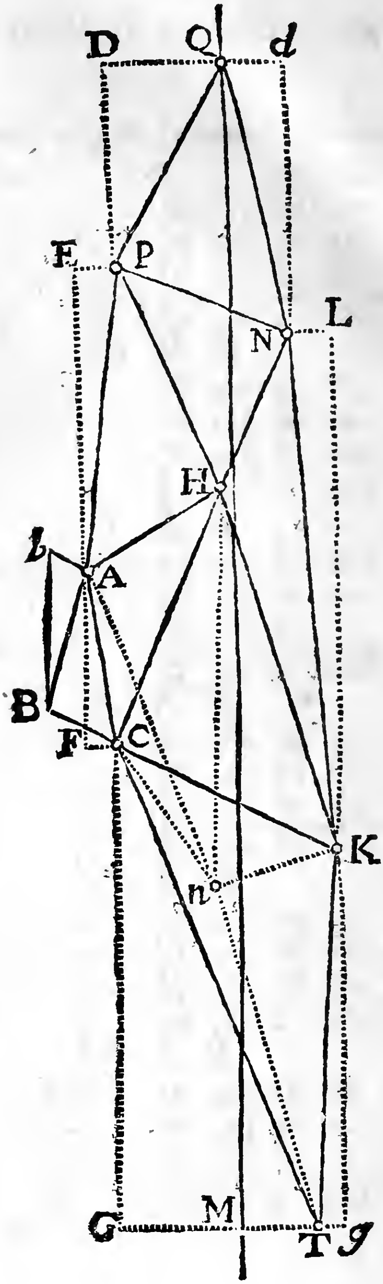
Ces lignes forment avec la méridienne les angles suivans,

$$\begin{aligned} PQD &= 61^\circ\ 8'\ 8'' \\ APE &= 84\ 33\ 54 \\ ACF &= 81\ 33\ 26 \\ CTG &= 69\ 49\ \ 8 \end{aligned}$$

Et la résolution des triangles rectangles DQP, APE, ACF, CTG, donne pour les parties de la méridienne,

$$\begin{aligned} PD &= 9350{,}45^{\text{ toises.}} \\ AE &= 14213{,}24 \\ AF &= 8566{,}08 \\ CG &= 22810{,}62 \\ \hline QM &= 54940{,}39 \end{aligned}$$

pour l'arc du méridien qui passe par Kittis, & qui est terminé par la perpendiculaire tirée de *Torneå*.


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
M
G
T
g

VI.

Calcul des triangles de la seconde suite.

A C H.

Angles observés, réduits à l'horizon.		*Angles corrigés pour le calcul.*
ACH.....	30° 56′ 53″, 4	.... 30° 56′ 47″.
CAH.....	112 21 32, 9	.... 112 21 17
AHC.....	36 42 3, 1	.... 36 41 56
	180 0 29, 4	180 0 0

C H K.

CHK.....	36 4 54, 7	.... 36 4 46
CKH.....	43 45 35, 6	.... 43 45 26
KCH.....	100 9 56, 8	.... 100 9 48
	180 0 27, 1	180 0 0

C K T.

CKT.....	118 28 12, 0	.... 118 28 3
CTK.....	24 22 54, 3	.... 24 22 50
KCT.....	37 9 12, 0	.... 37 9 7
	180 0 18, 3	180 0 0

H K N.

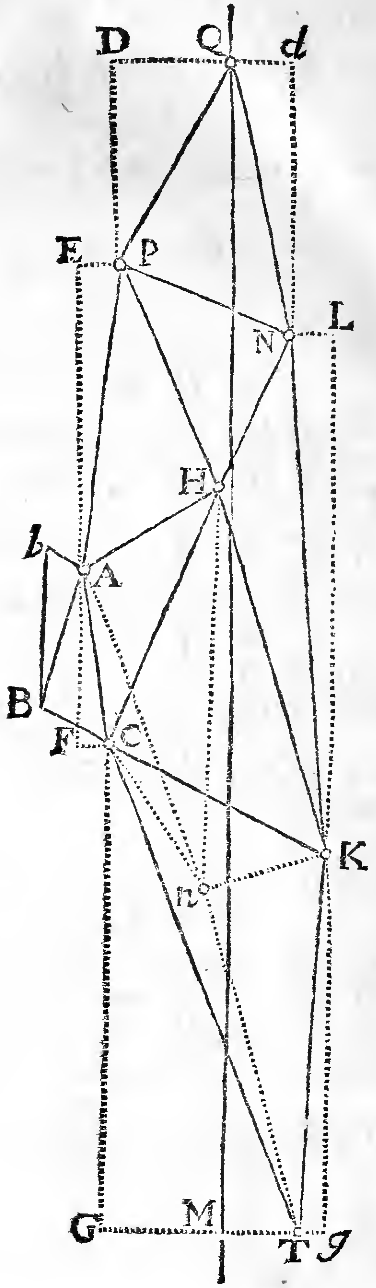
HKN.....	9 41 47, 7	.... 9 41 50
HNK.....	27 11 53, 3	.... 27 11 56
KHN.....	143 6 3, 2	.... 143 6 14
	179 59 44, 2	180 0 0

H N P.

HNP.....	93 25 7, 5	.... 93 25 1
HPN.....	37 22 2, 1	.... 37 21 56
NHP.....	49 13 9, 3	.... 49 13 3
	180 0 18, 9	180 0 0

N P Q.

NPQ.....	87 52 24, 3	.... 87 52 17
NQP.....	40 14 52, 7	.... 40 14 46
PNQ.....	51 53 4, 3	.... 51 52 57
	180 0 21, 3	180 0 0


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

Se ſervant toujours de

$$AC = 8659{,}94^{\text{toiſes.}}$$

on a par la réſolution des triangles précédens,

$$QN = 13564{,}64^{\text{toiſes.}}$$
$$NK = 25053{,}25$$
$$KT = 16695{,}84$$

Ces lignes forment avec la méridienne, les angles ſuivans,

$$NQd = 78^\circ\ 37'\ 6''.$$
$$KNL = 86\quad 7\quad 12.$$
$$KTg = 85\quad 48\quad 7.$$

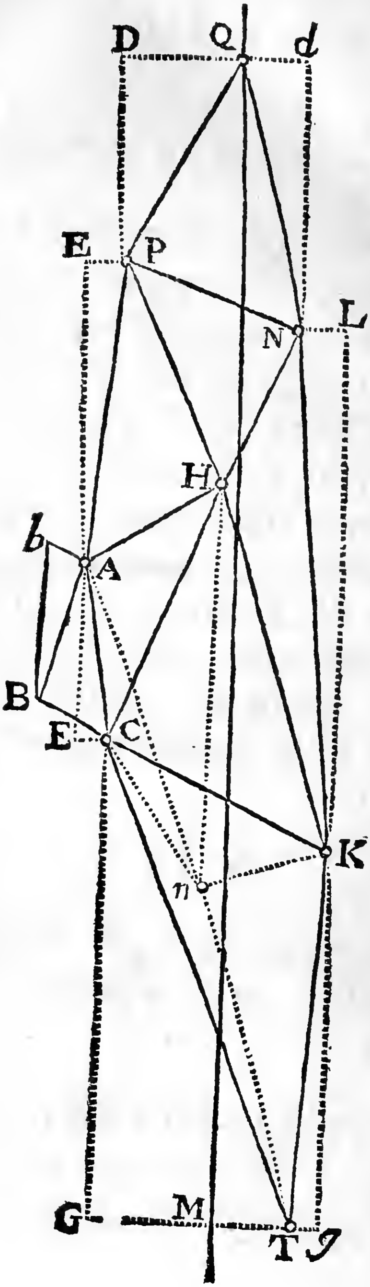
La réſolution des triangles QNd, KNL, KTg, donne pour les parties de la méridienne,

$$Nd = 13297{,}88^{\text{toiſes.}}$$
$$KL = 24995{,}83$$
$$Kg = 16651{,}05$$

$$QM = 54944{,}76$$

L'autre ſuite donnoit $QM = 54940{,}39$

On a donc pris . . $QM = 54942{,}57.$


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
E
C
K
n
G
M
T
J

VII.

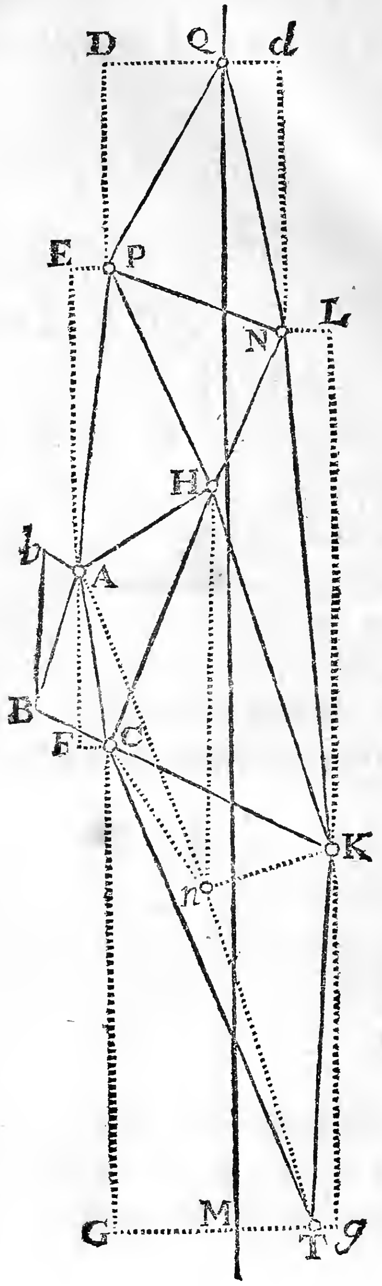
EXAMEN de la poſition des triangles par rapport au méridien.

A *Torneå* l'on chercha de nouveau la poſition des triangles avec le méridien. Ce fut en obſervant l'angle que formoit avec le ſignal de Niwa, le Soleil dans l'horizon, & l'heure à laquelle cela arrivoit ; & comme on trouva par pluſieurs obſervations, que l'angle que formoit la ligne *TK*, avec le méridien de *Torneå*, ne différoit que de 34″ de celui qui réſultoit de la ſuite des triangles depuis Kittis, on s'en tint à la poſition déterminée ſur Kittis.

VIII.

EXAMEN de l'arc du méridien qu'on trouveroit par d'autres ſuites de triangles.

Comme dans la figure *TCAPQNK*, il y a plus de triangles qu'il n'eſt néceſſaire pour déterminer la diſtance



D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

de M à Q, nous allons voir quelles différences produiroient ſur cette diſtance, différentes ſuites de triangles, même en y employant des ſuites vicieuſes par la petiteſſe de quelques-uns de leurs angles ; d'où l'on peut conclure les limites des erreurs de notre meſure. Voici donc le calcul de dix ſuites nouvelles.

I.

Par les triangles TnK, nKC, CKH, HCA; AHP, PHN, NPQ.

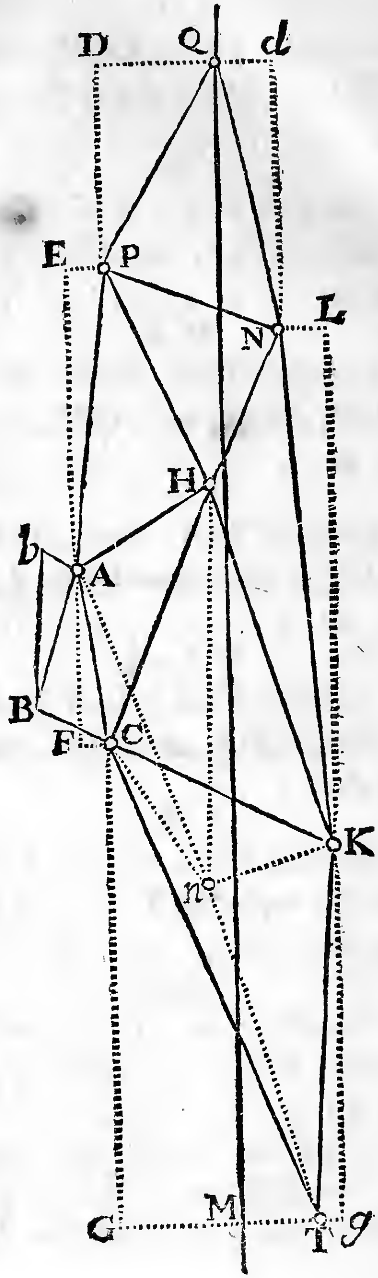
Partant toujours du côté AC, la réſolution de ces triangles donne pour la diſtance QM . . . . 54941 toiſes.
qui differe de la diſtance concluë
par nos deux premieres ſuites, de . . . $1\frac{1}{2}$.

I I.

Par les triangles TnK, KHn, nCH, HCA; APH, HNP, PNQ, on a QM.... 54936
qui differe de . . . . $6\frac{1}{2}$.

I I I.

Par les triangles TnK, KnH, HnA, ACH, HAP, PHN, NPQ, on a QM.... $54942\frac{1}{2}$.
qui ne differe pas ſenſiblement.


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

I V.

Par les triangles *TnK*, *KCH*, *HnC*, *CHA*, *AHP*, *PHN*, *NPQ*, on a *QM*.. 54943 $\frac{1}{2}$ toises.
qui differe de 1

V.

Par les triangles *TnK*, *KnC*, *CnA*, *ACH*, *HAP*, *PHN*, *NPQ*, on a *QM*.. 54925
qui differe de . . . . 17 $\frac{1}{2}$.

V I.

Par les triangles *TnK*, *KnH*, *HAn*, *nCA*, *AHP*, *PHN*, *NPQ*, on a *QM*... 54915 $\frac{1}{2}$.
qui differe de 27

V I I.

Par les triangles *TnK*, *KnC*, *CAn*, *nHK*, *KHN*, *NHP*, *PNQ*, on a *QM*.. 54912
qui differe de . . . . 30 $\frac{1}{2}$.

V I I I.

Par les triangles *TnK*, *KCN*, *nAC*, *CKH*, *HKN*, *NHP*, *PNQ*, on a *QM*.. 54906 $\frac{1}{2}$
qui differe de . . . . 36.

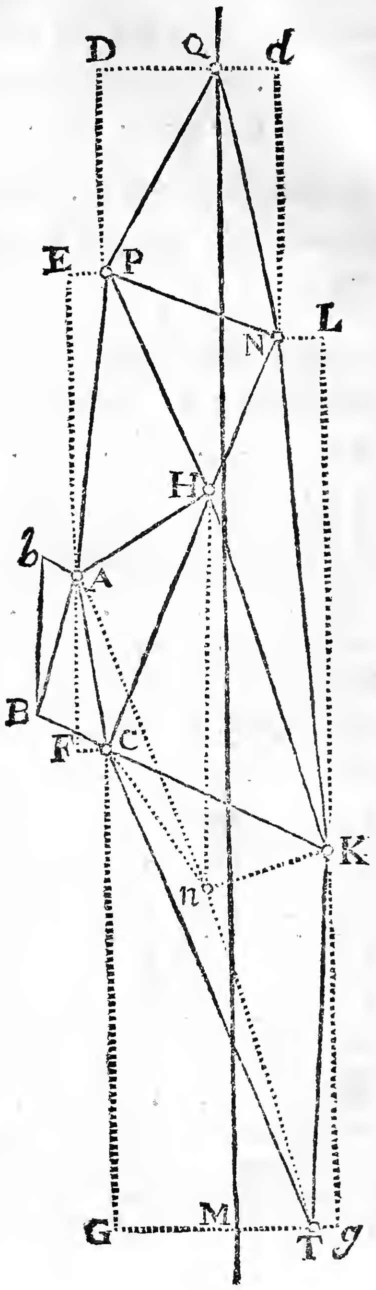
I X.

Par les triangles *TnC*, *CnA*, *AnH*, *HAP*, *PHN*, *NPQ*, on a *QM* . . 54910
qui differe de . . . . 32 $\frac{1}{2}$.

X.

Par les triangles *TnC*, *CAn*, *nCK*, *KnH*, *HKN*, *NHP*, *PNQ*, on a *QM*.. 54891
qui differe de . . . . 51 $\frac{1}{2}$.

Quoiqu'il ne ſe trouve pas entre toutes ces ſuites des différences bien conſidérables, nous n'avons pas cru les devoir faire entrer


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

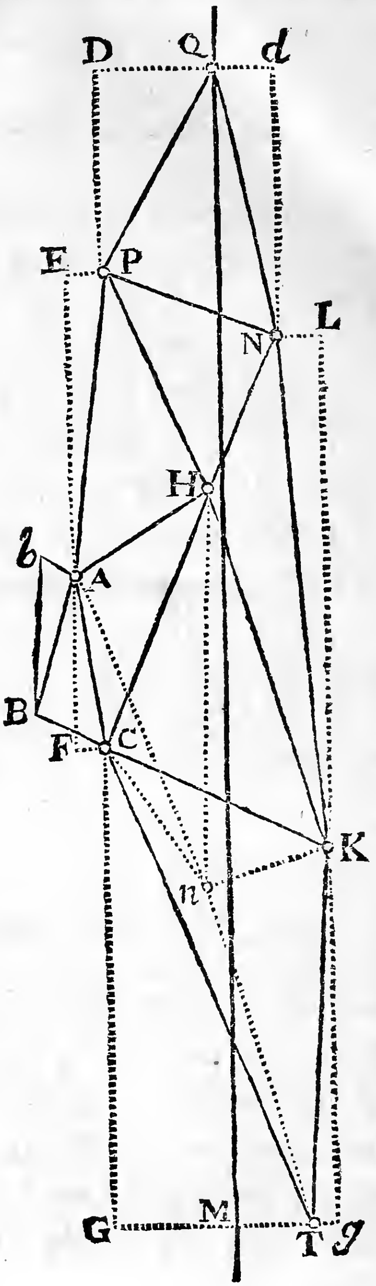
dans la détermination de la longueur de notre arc, que nous avons faite ſur deux ſuites qui nous ont paru préférables aux autres.

I X.

EXAMEN des angles horizontaux par leur ſomme dans le contour de l'heptagone.

CTK . . .	24°	22′	54″,	5
KCT . . .	37	9	12,	0
KCH . . .	100	9	56,	8
HCA . . .	30	56	53,	4
CAH . . .	112	21	48,	6
HAP . . .	53	45	56,	7
APH . . .	31	19	55,	5
HPN . . .	37	22	2,	1
NPQ . . .	87	52	24,	3
PQN . . .	40	14	52,	7
QNP . . .	51	53	4,	3
PNH . . .	93	25	7,	5
HNK . . .	27	11	53,	3
NKH . . .	9	41	47,	7
HKC . . .	43	45	35,	6
CKT . . .	118	28	12,	0

SOMME. . . . . . 900° 1′ 37″, qui differe de 1′ 37″ de ce qu'elle devroit être ſi la ſurface étoit plate, & s'il n'y avoit aucune erreur dans les obſervations; mais qui doit être réellement un peu plus grande que 900 degrés, à cauſe de la courbure de la Terre,


D
Q
d
E
P
L
N
H
b
A
B
F
C
K
n
G
M
T
g

X.

Longueur de l'arc du méridien.

Les lieux où nous obſervâmes les Etoiles qui devoient ſervir à déterminer l'amplitude de l'arc du méridien compris entre Kittis & *Torneå*, étoient, l'un plus ſeptentrional que le point *Q*, de 3$^{\text{toiſes}}$ 4$^{\text{pieds}}$ 8$^{\text{pouces}}$, l'autre plus méridional que le point *T*, de 73$^{\text{toiſes}}$ 4$^{\text{pieds}}$ $5\frac{1}{2}$$^{\text{pouces}}$; ajoutant donc 77, 52$^{\text{toiſes}}$ à $QM = 54942, 57^{\text{toiſes}}$, & encore 3, 38$^{\text{toiſes}}$, parce que les points *T* & *Q* ne ſont pas dans la même ligne méridienne, on a l'arc dont nous avons déterminé l'amplitude, = 55023, 47$^{\text{toiſes}}$.

X I.

Amplitude de l'arc du méridien.

Pour déterminer l'amplitude de l'arc dont nous avions meſuré la longueur, nous nous ſervîmes d'un inſtrument ſingulier par ſa conſtruction & par ſon excellence : il avoit été fait à Londres ſous les yeux du fameux M. Graham, qui en avoit lui-même divisé le limbe, qui n'est que de $5\frac{1}{2}$ degrés : le rayon de ce limbe est une lunette de 9 pieds, suspendue comme un pendule, & que la pointe d'un micrometre excellent, fixé contre un limbe immobile, fait mouvoir autour de son centre, pendant qu'une aiguille marque sur un cadran la quantité de ce mouvement. Nous vérifiâmes la division de cet instrument au microscope qui y est adapté, & nous la trouvâmes d'une exactitude qu'on auroit eu de la peine à croire. Enfin l'instrument est tel, que rarement la différence qui se trouve entre une observation & l'autre montre à 2 ou 3".

Avec cet instrument nous déterminâmes l'amplitude de l'arc du méridien deux fois ; sur deux arcs différens du limbe ; par deux différentes Etoiles ; & dans deux différentes saisons.

La premiere amplitude fut déterminée par l'Etoile δ du *Dragon*, observée au nord sur Kittis, les 4, 5, 6, 8 & 10 Octobre 1736, & à *Torneå* les 1, 2, 3, 4 & 5 Nov. de la même année. Elle fut trouvée de 57′ 25″, 55 : & corrigée pour la préceſſion des équinoxes, & pour l'aberration de la lumiere, elle ſe réduiſit à 57′ 26″, 9.

La ſeconde amplitude fut déterminée par l'Etoile α du *Dragon* obſervée au midi à *Torneå* les 17, 18, 19 Mars 1737, & ſur Kittis les 4, 5, 6 Avril de la même année. Elle ſe trouva de 57′ 25″, 85 : & corrigée comme l'autre, elle ſe réduiſit à 57′ 30″, 4.

Quoique ces deux amplitudes approchaſſent extrêmement l'une de l'autre, par l'examen que nous fîmes des deux arcs du ſecteur ſur leſquels on les avoit déterminées, nous connûmes qu'elles approchoient encore davantage, & au delà de ce que nous pouvions eſpérer. Car nous trouvâmes le premier de ces arcs plus grand que le ſecond de 0, 95″. Nous conclûmes donc par un milieu l'amplitude de l'arc du méridien intercepté entre les paralleles qui paſſent par Kittis & *Torneå* de 57′ 28″, 7.

XII.

Degré du méridien.

Comparant cette amplitude à la longueur de l'arc de 55023, 47 toiſes, *le degré du méridien qui coupe le cercle polaire, eſt de 57438 toiſes.*

Voilà quelles ſont les opérations que nous avons faites au cercle polaire. Il faut maintenant faire connoître les autres opérations de même genre qui ont été faites dans les autres climats.

AUTRES MESURES.

ON avoit fait en différens temps, & dès les temps les plus reculés, des opérations pour déterminer la grandeur de la Terre, par la meſure de quelque degré du méridien; (car dans ces temps-là on n'imaginoit pas que la Terre pût avoir une autre figure que celle d'une ſphere) & la meſure d'un ſeul de ſes degrés déterminoit ſa circonférence & ſon diametre. Mais ſans nous arrêter à ces premieres meſures, toutes défectueuſes par les inſtrumens ou les méthodes dont on s'étoit ſervi, ou du moins fort douteuſes par l'incertitude ſur la grandeur des meſures par leſquelles les Auteurs les ont évaluées, je ne citerai ici de ces opérations que celles dans leſquelles il paroît quelqu'exactitude.

Meſure de M. Norvood.

En 1633 & 1635, M. Norvood, détermina l'amplitude de l'arc du méridien intercepté entre *Londres* & *York*, en obſervant les hauteurs du Soleil au ſolſtice d'été, & trouva cette amplitude de 2° 28′.

Il meſura enſuite avec des chaînes la diſtance entre ces deux villes, obſervant les angles de détours, les hauteurs des collines, & les deſcentes; & réduiſant le tout à l'arc du méridien, il trouva 9149 chaînes pour la longueur de cet arc, qui, comparée à l'amplitude, donnoit le degré de 3709 chaînes 5 pieds, ou de 367196 pieds anglois, qui font 57300 de nos toises *.

Mesure de M. Picard.

En 1670, M. Picard mesura par des triangles l'arc du méridien compris entre les paralleles de *Malvoisine* & d'*Amiens*, & déterminant la longueur de cet arc par deux bases mesurées à la perche vers les deux extrémités, il le trouva de 78850 toises. Il détermina ensuite l'amplitude de cet arc par les observations de l'Etoile du *genou de Cassiopée* : & ayant trouvé cette amplitude de 1° 22′ 55″, il en conclut le degré de 57060 toises. †

Mesure de M. Cassini.

En 1718, M. Cassini donna le résultat de toutes les opérations que, tant lui, que M. Dominique Cassini son pere, avoient faites pour déterminer la longueur des degrés.

* *The Seaman's practice by Richard Norvood.*

† *Mesure de la Terre, par M. l'Abbé Picard.*

Ils avoient partagé le méridien de la France en deux arcs qu'ils avoient mesurés séparément ; l'un de *Paris* à *Collioure*, dont la longueur étoit de 360614 toises ; & l'amplitude, de 6° 18′ 57″, déterminée par l'Etoile de *la Chevre*, leur avoit donné le degré de 57097 toises.

L'autre de *Paris* à *Dunkerque*, dont la longueur étoit de 125454 toises, & l'amplitude de 2° 12′ 9″ 30‴, déterminée par l'Etoile γ du *Dragon*, leur avoit donné le degré de 56960 toises.

Enfin la mesure de l'arc entier terminé par les paralleles qui passent par *Collioure* & *Dunkerque*, dont la longueur étoit de 486156 toises, & l'amplitude de 8° 31′ 11″ $\frac{5}{6}$, leur donnoit le degré moyen de cet arc, de 57061 toises, presque égal à celui de M. Picard.

C'étoit cette différence entre les degrés mesurés vers le nord, qu'ils trouverent plus petits que ceux qu'ils avoient mesurés vers le midi, qui leur fit conclure que la Terre avoit une figure toute opposée à celle que nos obſervations lui donnent, & étoit un ellipſoïde alongé vers les pôles, dont l'axe ſurpaſſoit le diametre de l'équateur, d'environ $\frac{1}{100}$. *

Meſure de M. Muſſchenbroek.

Snellius avoit autrefois donné une meſure du degré fort défectueuſe : M. Muſſchenbroek ayant corrigé cette meſure, tant par ſes propres obſervations, que par celles de Snellius même, a trouvé le degré entre *Alcmaar* & *Berg-op-Zoom*, de 57033 de nos toiſes. †

CORRECTION DE LA MESURE de M. Picard.

APrès notre retour de Lapponie, nous flattant d'avoir un inſtrument fort ſupérieur à celui avec lequel M. Picard avoit déterminé l'amplitude de

* *Traité de la grandeur & figure de la Terre, de M. Caſſini.*

† *Muſſchenbroek, Diſſert. de magnit. Terræ.*

ſon arc ; nous fiant d'ailleurs à ſes triangles, & penſant que pour la comparaiſon des degrés du méridien meſurés en différens lieux, il étoit fort important que l'amplitude de ces degrés fût determinée avec un même inſtrument, nous voulûmes déterminer l'amplitude du degré entre *Paris* & *Amiens*, avec le même ſecteur dont nous nous étions ſervis au cercle polaire.

Pour cela, nous prîmes ſur l'arc meſuré par M. Picard, la partie terminée par les deux égliſes de Notre-Dame d'*Amiens* & de Notre-Dame de *Paris*.

Il ſeroit difficile dans toute l'Europe de trouver un arc du méridien terminé par deux monumens plus beaux & plus durables que les deux égliſes qui terminent celui-ci : & ces deux monumens, que le haſard a placés ſi exactement ſur le même méridien, qu'ils ne different en longitude que d'un arc de 3′, dont l'égliſe de *Paris* eſt plus orientale que celle d'*Amiens*, paroiſſoient deſtinés à être les termes d'une telle mesure. Nous prîmes la distance entre ces deux églises, telle que M. Picard l'a donnée, de 59530 toises.

Nous cherchâmes ensuite par deux Etoiles différentes, quelle étoit l'amplitude qui répondoit à l'arc terminé par ces deux monumens. L'une de ces Etoiles étoit α de *Persée*; l'autre fut γ du *Dragon*: & après plusieurs observations de ces deux Etoiles, qui s'accordoient fort entr'elles, & auxquelles nous fîmes les corrections nécessaires pour la précession des équinoxes & pour l'aberration, nous trouvâmes pour l'amplitude de l'arc, $1^{\circ}\ 2'\ 28''$; d'où nous conclûmes, en conservant la mesure géodésique de M. Picard, que le degré du méridien entre *Paris* & *Amiens* étoit de 57183 toises. *

* *Degré du méridien entre Paris & Amiens.*

FIGURE DE LA TERRE.

PRenant la figure de la Terre pour celle d'un ellipsoïde, ce degré de 57183 toises, dont le milieu répond à la latitude de 49° 22′, comparé à celui de 57438, que nous avons mesuré à la latitude de 66° 20′, donne à la Terre la figure d'un sphéroïde applati, dont le diametre de l'équateur surpasse l'axe d'environ $\frac{1}{178}$.

ADDITION.

DEpuis la premiere Édition de cet Ouvrage, nous avons eu la ſatisfaction de voir revenir du Pérou les Académiciens qui y avoient été envoyés ; & de les voir en rapporter une meſure très-exacte du premier degré de latitude, du degré du méridien coupé par l'équateur. Ce degré tiré de l'arc entre *Quito* & *Cuenca*, dont la longueur eſt de 176950 toiſes, & l'amplitude de 3° 7′ 1″, étant réduit au niveau de la mer, ſe trouve de 56750 toiſes. *

La France, dont la magnificence pour le progrès des Sciences eſt ſans bornes, ayant envoyé M. l'Abbé de la Caille au cap de Bonne-Eſpérance pour faire des obſervations aſtronomiques, cet illuſtre Académicien nous en a rapporté une nouvelle meſure du degré, qui ne doit céder à aucune. Elle eſt

* Voyez *Meſure des trois premiers degrés du méridien, art. XXIV. II. partie, par M. de la Condamine.*

tirée de l'arc du méridien entre le cap & Klipfonteyn, dont la longueur eſt de 69669 toiſes, & l'amplitude de 1° 13′ 17″: & le degré du méridien à la latitude de 33° 18′ dans l'hémiſphere auſtral de 57037 toiſes. *

Les figures de la Terre qui réſultent de ces nouvelles opérations s'éloignent ſi peu de celle que nous avions ci-deſſus déterminée, qu'on pourroit plutôt s'étonner de leur accord qu'en exiger un plus grand.

Nous avions conclu le rapport de l'axe de la Terre au diametre de l'équateur de 177 à 178.

Le degré du *Pérou* comparé au nôtre donne pour ce rapport 215 à 216.

Le degré du *cap de Bonne-Eſpérance* donneroit 240 à 241.

Ces deux derniers degrés, celui du Pérou & celui du cap de Bonne-Eſpérance, comparés enſemble, donnent 181 à 182.

De petites erreurs telles que celles qui ſont néceſſairement commiſſibles

* *Extrait d'une lettre que M. l'Abbé de la Caille m'a écrite.*

dans ces opérations, étant admiſes, toutes ces meſures, excepté celle qui a été faite en France, donneroient à la Terre une même figure.

Mais il faut obſerver que dans l'évaluation du degré de Lapponie, quoique nous ayions regardé la réfraction comme nulle pour des Etoiles ſi proches du zénith, les autres Aſtronomes dans l'évaluation de leur degré en ayant tenu compte, il faut en tenir compte auſſi dans l'évaluation du nôtre, qui par là ſera diminué de 16 toiſes, pour le comparer avec les autres.

M. Euler ayant fait de toutes les meſures un examen équitable, & ſuppoſant ſur chacune les moindres erreurs néceſſaires pour les concilier, a trouvé :

Que ſur le degré au cercle polaire, il ſuffiſoit de ſuppoſer une erreur de 27 toiſes.

Sur le degré du cap de Bonne-Eſpérance une erreur de 43.

Sur le degré du Pérou une de 15.

Mais que ſur celle de la France, telle

qu'elle eſt donnée dans la derniere meſure du méridien, il faudroit admettre une erreur de 125 toiſes.

La juſte longueur des degrés ſeroit alors,

Au *Pérou* à la latitude . . . . . . 0° 30′
. . . . . . de 56768 toiſes.
Au *cap de Bon. Eſpérance* à la lat. 33° 18′
. . . . . . de 56994 toiſes.
En *France* à la latitude . . . . . 49° 23′
. . . . . . de 57199 toiſes.
En *Lapponie* à la latitude . . . . 66° 20′
. . . . . . de 57395 toiſes. *

Le rapport de l'axe au diametre de l'équateur ſeroit celui de 229 à 230: & la Terre ſe trouveroit avoir préciſément la figure que Newton lui avoit donnée; quoiqu'il fit ſa Terre un peu plus petite, étant parti d'un degré plus petit. Et il ne paroît pas que la Terre puiſſe de beaucoup s'écarter de cette figure.

* *Mém. de l'Acad. R. des Sciences de Berlin, tome IX.*

EXPÉRIENCES
POUR LES VARIATIONS
DE LA PESANTEUR.

MESURE DE LA PESANTEUR dans la Zone glacée.

L'INSTRUMENT dont nous nous servîmes pour connoître le rapport de la pesanteur à *Paris*, à la pesanteur à *Pello*, est une pendule d'une construction particuliere, de l'invention de M. Graham, qui est destinée pour ces sortes d'expériences.

Le pendule est une pesante lentille qui tient à une verge plate de cuivre : cette verge est terminée en enhaut par une piece d'acier qui lui est perpendiculaire, & dont les extrémités sont deux couteaux qui portent sur deux tablettes planes d'acier, situées toutes

toutes deux dans le même plan horizontal. On est assuré de la situation de ce plan, lorsqu'une pointe qui fait l'extrémité de la verge du pendule, répond au milieu d'un limbe dans le plan duquel elle doit se trouver ; & ce limbe sert à mesurer les arcs que décrit le pendule.

Tout l'instrument est renfermé dans une boîte très-solide ; & lorsqu'on le transporte, on éleve le pendule avec une vis, par le moyen d'un chassis mobile, de maniere que le tranchant des couteaux ne porte plus sur rien, & est tout en l'air, quoique la piece d'acier qui forme les couteaux se trouve alors appuyée au défaut de leur tranchant. On a attaché au dedans de la boîte une piece de bois creusée pour recevoir la lentille ; & cette piece, après que la lentille y a été mise, est recouverte d'une autre qui s'y applique avec des vis, de maniere que ni la lentille ni la verge ne peuvent avoir aucun mouvement ; la seule liberté qu'ait la verge du pendule, c'est de s'alonger ou de s'accourcir selon le chaud ou le froid, rien ne la gêne à cet égard. Enfin on a attaché au dedans de la boîte un thermometre par le moyen duquel on peut connoître quel retardement tel & tel degré de chaleur cause au pendule, & en tenir compte dans les obſervations; ou bien par lequel on peut (comme nous avons fait) s'aſſurer que l'inſtrument eſt expoſé à la même température dans les différens lieux où ſe font les obſervations.

Avec le poids ordinaire, le pendule décrivoit des arcs de 4° 20′; avec la moitié de ce poids, il décrivoit des arcs de 3° 0′: & ces grandes différences dans les poids & dans les arcs, ne cauſoient dans la marche du pendule qu'une différence de 3″ ou 4″ par jour, dont il alloit plus vîte en décrivant les petits arcs.

On voit par là combien cet inſtrument eſt peu ſenſible aux différences dans les poids & dans les arcs: & combien on peut compter que ſon accélération d'un lieu dans un autre ne vient que de l'augmentation de la pesanteur, ou du froid qui raccourcit la verge du pendule.

Ayant tenu cet instrument à *Pello*, & ensuite à *Paris*, précisément au même degré de chaleur ; & les oscillations ayant été à fort peu près les mêmes, nous observâmes à *Pello* par les passages de l'Etoile *Regulus* au fil vertical d'une lunette fixe, & à *Paris* par les passages de l'Etoile *Sirius*, que le pendule retardoit de *Pello* à *Paris* de 59″ pendant chaque révolution des Etoiles fixes.

Nous conclûmes de là que la pesanteur à *Paris* est à la pesanteur à *Pello*, comme 100000 à 100137.

Le même instrument avoit été éprouvé par M. Graham à *Londres*, avant que de nous être envoyé ; & ayant été tenu à *Londres* & à *Paris* à une même température, & y ayant fait les mêmes oscillations, il avoit retardé de *Londres* à *Paris* de 7″, 7 pendant chaque révolution des Etoiles fixes ; d'où nous conclûmes que la pesanteur à *Paris* est à la pesanteur à *Londres*, comme 100000 à 100018.

AUTRES EXPÉRIENCES
pour la mesure de la pesanteur.

M. Richer est celui à qui l'on doit cette fameuse découverte de la diminution de la pesanteur vers l'équateur. Ayant remarqué ce phénomene à *Cayenne* en 1672, par le retardement de son horloge, il trouva que la longueur du pendule à secondes dans cette isle, étoit plus courte de 1 ligne $\frac{1}{4}$ qu'à *Paris*, où elle est selon sa mesure, de 36 pouces 8 lignes $\frac{3}{5}$, ou de . . . . . . Lignes. 440 $\frac{3}{5}$. [a]

A *Paris*, Mrs. Varin, Deshayes, & de Glos, ont trouvé la longueur du pendule à secondes, de . . . 440 $\frac{5}{9}$. [b]

M. Godin, de . . . . . . 440 $\frac{5}{9}$. [c]

M. de Mairan, par un grand nombre d'expériences faites avec grand soin, la trouva de . . . . . . 440 $\frac{17}{30}$. [d]

M. Picard la trouva de . . . 440 $\frac{1}{2}$. [e]
& la trouva la même dans l'*isle de Huene*, à *Lyon*, à *Bayonne* & à *Sete*.

a *Anciens Mém. de l'Acad. tome VII.*
b Ibidem.
c *Mém. de l'Acad. 1735.*
d Ibidem.
e *Anciens Mém. de l'Acad. tome VII.*

Toutes ces meſures du pendule à ſecondes à *Paris*, different ſi peu les unes des autres, qu'on peut plutôt s'étonner de cette exactitude, qu'eſpérer de parvenir à une exactitude plus grande.

A *Archangel*, à la latitude de 64° 34′, M. de la Croyere a trouvé la longueur du pendule, de . . . . *Lignes.* $440 \frac{13}{20}$. [a] en la ſuppoſant à *Paris* de $440 \frac{1}{2}$.

Au *Caire* en Egypte, à 30° 2′ de lat. M. de Chazelles l'a trouvée de . . $440 \frac{1}{4}$. [b]

Au *Cap* dans l'iſle de St. Domingue, à 19° 48′ de latitude, M. Deshayes l'a trouvée de . . . . 439. [c]

Au *Petit-Goave* dans l'iſle de Saint-Domingue, à 18° 27′ de latitude, M. Godin l'a trouvée de . . . $439 \frac{3}{8}$. [d]

M. Bouguer, de . . . . $439 \frac{1}{3}$.

M. de la Condamine, de . . . $439 \frac{7}{30}$.

A *Blackriver* dans la Jamaïque, à 18° de latitude, M. Campbell, avec un inſtrument ſemblable au nôtre, a trouvé que le pendule

a *Acad. Petrop. Comment. tome IV.*
b *Tranſact. philoſ. traduites par M. de Bremond.*
c *Mém. de l'Acad. 1701.*
d *Mém. de l'Acad. 1735.*

transporté de *Londres* retardoit de $1' 58''$ pendant chaque révolution des Etoiles fixes. [a]

Lignes.

Dans l'isle de *St. Christophe*, à 17° $19'$ de latitude, M. Deshayes l'a trouvée de . . . . $438 \frac{3}{4}$. [b]

A *la Guadeloupe*, à 16° de latitude, Mrs. Varin, Deshayes & de Glos, de $438 \frac{1}{2}$. [c]

A *St. Pierre* dans la Martinique, à 14° $44'$ de latitude, M. Deshayes la trouva de . . . . $438 \frac{1}{2}$. [d]

A *Gorée*, à 14° $40'$ de latitude, Mrs. Varin, Deshayes & de Glos, de $438 \frac{5}{9}$. [e]

A *Porto-Belo*, à 9° $33'$ de latitude, M. Godin, de . . . . $439 \frac{7}{89}$. [f]

M. Bouguer, de . . . . $439 \frac{7}{90}$.

A *Panama*, à 8° $35'$ de latitude, Mrs. Godin, Bouguer & de la Condamine, de . . . . $439 \frac{1}{5}$. [g]

A *Cayenne*, à 4° $56'$ de latitude, M. Deshayes l'a trouvée d'un peu moins que . . . . $438 \frac{1}{2}$. [h]

a *Transact. philos. traduites par M. de Bremond.*
b *Mém. de l'Acad. 1701.*
c *Anciens Mém. de l'Acad. tome VII.*
d *Mém. de l'Acad. 1701.*
e *Anciens Mém. de l'Acad. tome VII.*
f *Transact. philos. traduites par M. de Bremond.*
g Ibidem.
h *Mém. de l'Acad. 1701.*

	Lignes.
A *Punta-Palmar*, à 2′ de latitude méridionale, M. de la Condamine, de	438,96.[a]
A *Riojama*, à 9′ de latitude mérid.	
M. Bouguer, de	438,82.[b]
M. de la Condamine, de	438,93.
A *Quito*, à 25′ de latitude mérid.	
M. Bouguer, de	438,82.[c]
M. de la Condamine, de	438,84.
Au *Cap de Bon. Espérance*, à 33° 18′ de latitude méridionale, M. l'Abbé de la Caille, de	440,07.

Comme ces expériences ont été faites par différentes méthodes, les uns ayant cherché les rapports de la pesanteur par les longueurs du pendule isochrone dans les différens lieux, les autres par l'accélération ou le retardement d'un pendule invariable, transporté dans des lieux différens ; pour réduire ces expériences à leur objet, j'ai formé la table suivante des différens poids d'une même quantité de matiere, dans les lieux où les expériences ont été faites ; observant dans

a *Transact. philos. traduites par M. de Bremond.*
b Ibidem.
c Ibidem.

la construction de cette table, de ne déterminer ces poids que par les expériences qui ont été faites en différens lieux par les mêmes observateurs, ou avec les mêmes instrumens ; parce que les mêmes instrumens & la même maniere de s'en servir rendent plus sûre la comparaison des expériences. Enfin j'ai négligé totalement quelques expériences qu'on trouve dans la carte que M. de Bremond a insérée dans sa traduction des Transactions philosophiques de l'année 1734, parce que ces expériences s'écartoient tant des autres, ou étoient si indécises dans les Auteurs qui les ont rapportées, qu'elles m'ont paru justement suspectes.

TABLE des différens poids d'une même quantité de matiere dans différens lieux de la Terre.

NOMS DES LIEUX.	LATITUDE.	POIDS.	OBSERVATEURS.
A Pello.......	66° 48′	100137	Mrs. Clairaut, Camus, le Monnier, & moi.
A Londres...	51 31	100018	M. Graham.
A Paris.......	48 50	100000	Tous les Observateurs.
A saint Domingue.	19 48	99647	M. Deshayes.
A saint Domingue.	18 27	99732	M. Godin.
A la Jamaïque.	18 0	99744	M. Campbell.
A saint Christophe.	17 19	99590	M. Deshayes.
A la Guadeloupe.	16 0	99533	Mrs. Varin, Deshayes, & de Glos.
A la Martinique.	14 44	99533	M. Deshayes.
A Gorée......	14 40	99546	Mrs. Varin, Deshayes, & de Glos.
A Porto-Belo	9 33	99665	M. Godin.
A Cayenne...	4 56	99716	M. Richer.
	moins que	99533	M. Deshayes.

DÉCLINAISON

De l'aiguille aimantée à Torneå.

NOus avons obſervé la déclinaiſon de l'aiguille aimantée avec une bouſſole de cuivre d'environ 10 pouces de diametre, en regardant à travers les pinnules de ſon alidade un objet placé dans la méridienne d'un petit obſervatoire bâti ſur le fleuve; & prenant le milieu de ce que donnoient les obſervations faites avec quatre aiguilles différentes, nous avons trouvé que la déclinaiſon de l'aiguille aimantée étoit à *Torneå* en 1737, de 5° 5′ du nord à l'oueſt.

Bilberg l'avoit trouvée en 1695 de 7° du même côté: mais ne la donne qu'avec peu de confiance. *

* *Refractio Solis inoccidui in ſeptentrion. oris.*

Fin du quatrieme & dernier Tome.

APPROBATION.

J'ai lu par ordre de Monseigneur le Vice-Chancelier cette nouvelle édition des ŒUVRES DE M. DE MAUPERTUIS, *& je n'y ai rien trouvé qui doive en empêcher l'impression. A Paris, le 26 Septembre 1764.*

TRUBLET.

PRIVILEGE GÉNÉRAL.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre bien amé JEAN-MARIE BRUYSET, Libraire à Lyon, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire réimprimer & donner au Public un livre qui a pour titre: *Œuvres de Maupertuis*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire réimprimer ledit Livre autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de *neuf années consécutives*, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire de réimpression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance: comme aussi de réimprimer, faire réimprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Livre, ni d'en faire aucun Extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enrégîtrées tout au long sur le Regître de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris dans trois mois de la date d'icelles; que la réimpression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de l'exposer en vente, l'Imprimé qui aura servi de copie à la réimpression dudit Livre sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sr. DELAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre château du Louvre, un dans celle dudit Sieur DELAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Vice-Chancelier Garde des Sceaux de France, le Sr. DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingt-sixieme jour du mois de Septembre l'an de grace mil sept cent soixante-quatre, & de notre Regne le cinquantieme. Par le Roi en son Conseil.

LEBEGUE.

Regîtré sur le Regître seize de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 377. F°. 169, conformément au Réglement de 1723. A Paris, ce 5 Octobre 1764.

LE CLERC, *Adjoint.*

Cleaned & Oiled