VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde - Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VI

MET 13 PLATEN EN ÉÉN PORTRET

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
Augustus 1899

VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde - Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VI

MET 13 PLATEN EN ÉÉN PORTRET

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
Augustus 1899

Gedrukt bij Joh. Enschedé en Zonen. — Haarlem.

INHOUD.

1. E. MULDER. Over het peroxy-salpeterzuur zilver en een zilverbioxyde (4^e verhandeling).

2. L. HOUWINK. Onderzoek omtrent den bouw en de eigenschappen van het zoogenaamde hardglas. (Met 9 platen).

3. L. ARONSTEIN en S. H. MEIHUIZEN. Onderzoekingen over het moleculairgewicht van de zwavel, volgens de kookpuntsmethode. (Met 1 plaat).

4. I. H. ABERSON. De isomerie van 't appelzuur.

5. E. MULDER. Over peroxy-zwavelzuur zilver (5^e verhandeling).

6. N. L. W. A. GRAVELAAR. John Napier's Werken. (Met portret en 3 platen).

7. K. BES. Théorie générale de l'élimination, d'après la methode BEZOUT, suivant un nouveau procédé.

Over het peroxy-salpeterzuur zilver en een zilverbioxyde.

(Vierde Verhandeling).

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE)

DEEL VI. N°. 1.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
November 1897.

Over het peroxy-salpeterzuur zilver en een zilverbioxyde.

(Vierde Verhandeling).

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE)

DEEL VI. N°. 1.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1897.

Over het peroxy-salpeterzuur zilver en een zilverbioxyde.

DOOR

E. MULDER.

(*Vierde Verhandeling*).

In de volgende bladzijden zijn eenige uitkomsten medegedeeld der voortgezette studie met betrekking tot het peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$, het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ daarvan afgeleid; en het dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$, dat wordt geacht een deel uit te maken van het peroxy-salpeterzuur zilver, beschouwd als een moleculaire verbinding, namelijk als zijnde: $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$. En wel zal in de eerste plaats worden gehandeld over een proef, die ten doel had, 1 O te elimineeren van het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$ (en behandeling daarna van het terugblijvende met water), met het oog op een nadere kennis der structuur van het peroxy-salpeterzuur zilver.

Over het product (*zijnde* $Ag_2\,O_2$), *na uitdrijven van* 1 O *op* $N\,Ag_7\,O_{11}$ (*peroxy-salpeterzuur zilver*), *en behandeling van het terugblijvende met water* (*bij gewone temperatuur*). Men wenschte na te gaan, of de reactie:

$$N\,O_5\,Ag = N\,O_3\,Ag + O\,O,$$

is een sommaire reactie of niet, in het eerste geval dan aldus te splitsen:

$$a.\ 2\ N\,O_5\,Ag = 2\ N\,O_4\,Ag + O\,O$$
$$b.\ 2\ N\,O_4\,Ag = 2\ N\,O_3\,Ag + O\,O.$$

Tot dit doel werd aanvankelijk 1 O geëlimineerd op $N\,Ag_7\,O_{11}$ (geacht te zijn $= 3\,Ag_2\,O_2 .\,N\,O_5\,Ag$), en daarna de massa behandeld met water (bij gewone temperatuur). In geval toch de reactie verloopt in één phase, moet een deel van het $N\,O_5\,Ag$ onontleed terugblijven (aangezien slechts 1 O werd vrijgemaakt op 1 $N\,Ag_7\,O_{11}$, of $O\,O$ op 2 $N\,Ag_7\,O_{11}$), en het elimineeren van het zilvernitraat zou veel meer tijd vereischen, zeer waarschijnlijk ten minste, daar $N\,Ag_7\,O_{11}$ door water uiterst langzaam wordt ontleed (namelijk bij gewone temperatuur).

Er werd uitgegaan van het product van Bereiding N° 26 (zie deze Verhandeling pag. 31), waarvan werd genomen 2,0008 gr., gedaan in de V-buis van den toestel (zie de vorige Verhandeling). Maar dit product had ongeveer een jaar gestaan, en 6.0178 gr. had (6.0178 gr. — 5.9986 gr. =) 0.0192 gr. aan gewicht verloren (zie de Tabel pag. 31). Gezegde hoeveelheid van 2.0008 gr. beantwoordt derhalve aan 2.0072 gr. der oorspronkelijke stof, te weten van stof niet ontleed ten deele (5.9986 : 2.0008 = 6.0178 : x; zijnde $x = 2.0072$ gr.). Dus wordt verondersteld, dat de proef is gedaan met 2.0072 gr. stof, en dat deze hoeveelheid stof reeds (vóór de proef) had verloren 0.0064 gr. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (oxygène excédant), zijnde 2.0072 gr. — 2.0008 gr. = 0.0064 gr. Zal deze hoeveelheid stof, namelijk 2.0072 gr., 1 O verliezen op 1 molecuul (1 O op $N\,Ag_7\,O_{11}$), dan is daartoe noodig een verlies van 0,0339 gr. zuurstof, waarvan dan reeds 0.0064 gr. was geëlimineerd.

De volgende tabel geeft ons het overzicht van het achtereenvolgens uitgedreven worden van 1 O op het molecuul. De letters hebben dezelfde beteekenis als b. v. in de proef met eliminatie van 2 O (zie de vorige Verhandeling). Er blijkt opnieuw uit, dat de ontledings-methode zeer goed valt te regelen (als altijd binnen zekere grenzen).

Tabel der proef met Bereiding N° 26 en 2.0072 gr. stof, waarvan 1 O op het molecuul NAg_7O_{11} werd uitgedreven (zie de voorgaande Verhandeling).

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	gew. temp.	ongev. één jaar	0.0064 gr.	0.0064 gr.	
2	45°	1 uur	0.0013	0.0077	
3	46	1	0	0.0077	
4	47	1	0.0003	0.008	
5	48	1	0.0004	0.0084	
6	49	1	0.0001	0.0085	
7	50	1	0	0.0085	
8	52	1	0.0004	0.0089	
9	53	1	0.0005	0.0094	
10	54	1	0.0006	0.01	
11	55	1	0.0009	0.0109	
12	56	1	0.0011	0.012	
13	57	1	0.001	0.013	
14	59	1	0.0026	0.0156	
15	59	1	0.0023	0.0179	
16	59	1	0.0021	0.02	
17	60	1	0.0026	0.0226	
18	60	1	0.0025	0.0251	
19	60	1	0.0015	0.0266	
20	60	1	0.0014	0.028	
21	60	1	0.0017	6.0297	
22	60	1	0.0011	0.0308	
23	60	1	0.0014	0.0322	
24	60	1	0.001	0.0332	
25	60	1	0.0015	0.0347	1 *O*.

De opgave kan aanleiding geven tot eenige opmerkingen, vooral wat betreft de eerste phase der gedeeltelijke ontleding. Zooals namelijk blijkt, is de regelmatigheid in den aanvang geringer dan later, wel toe te schrijven aan het lang bewaard zijn gebleven van het product, dat betrekkelijk veel tijd vereischte, om bij verhitting een betrekkelijk evenwicht te verkrijgen. Meer kan hiervan niet gezegd worden; maar overigens is het een feit, dat zich ook in eenige vroegere proeven voordeed, alhoewel in een minder sterken graad, trouwens na een betrekkelijk korteren rusttijd.

De proef zou meer tijd vorderen dan diegene, waarin 2 O werden uitgedreven, te weten wat betreft het *eerste* atoom zuurstof. Bij vergelijking der ontledings-snelheid bij verschillende temperaturen van verschillende reeksen (zie b.v. de voorgaande verhandeling dienaangaande), ontmoet men belangrijke verschillen, die men meent te kunnen toeschrijven aan het indringen van buiten van sporen water. Maar het moet ook gezegd, dat de V-buis niet juist op dezelfde wijze is geplaatst in het bad van kopervijlsel, bij verschillende proeven tegenover thermometer en regulator; en tal van kleine verschillen kunnen zich voordoen, dat trouwens niets heeft te maken met het doel, dat men zich nu voor oogen stelt.

Het terugblijvende, na uitdrijven van 1 O op het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$, werd behandeld met *water* (bij gewone temperatuur), om er het *zilvernitraat* uit te verwijderen. Hierbij kwam *gas vrij*, en wel in een dusdanige hoeveelheid, dat het gevuld zijn van de poriën der massa (na uitdrijven van 1 O) met gas, dit niet zou kunnen verklaren.

Daar het van belang is den tijd te kennen, vereischt tot het elimineeren van het zilvernitraat, met 't oog op de al of niet afwezigheid der oorspronkelijke verbinding ($N\,Ag_7\,O_{11}$), wordt in de navolgende tabel het noodige dienaangaande medegedeeld. Maar voegen wij er bij, dat wat van de zwarte stof mechanisch werd medegevoerd, zoodat de toename in gewicht van het zilvernitraat niet wordt herleid tot nul (zie later).

Er is gegeven onder:

a. het aantal malen, dat werd uitgetrokken;

b. het aantal dagen voor iederen keer;

c. de toename in gewicht van het zilvernitraat, dat is uitgetrokken (+ een kleine hoeveelheid medegevoerde zwarte stof);

d. de totale hoeveelheid uitgetrokken;

e. deze hoeveelheid berekend op 100 gew. d. der oorspronkelijke stof.

Opgave ten doel hebbende, de snelheid der verwijdering te leeren kennen van het zilvernitraat door water, bij gewone temperatuur, na eliminatie van 1 O *op* $N Ag_7 O_{11}$. *Bereiding* $N°$ 26; 2.0072 *gr. stof.*

a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	0.2333 gr.	0.2333 gr.	11.62 p. c.
2	1	0.0432	0.2765	13.77
3	1	0.021	0.2975	14.82
4	1	0.0122	0.3097	15.42
5	2	0.0144	0.3241	16.14
6	1	0.007	0.3311	16.49
7	2	0.0102	0.3413	17
8	4	0.0131	0.3544	17.65
9	4	0.0073	0.3617	18
10	4	0.0047	0.3664	18.25
11	4	0.0034	0.3698	18.42
12	4	0.0017	0.3715	18.5
13	5	0.002	0.3735	18.6
14	4	0.001	0.3745	18.65.

De hoeveelheid van 0,3745 gr. (zilvernitraat + medegevoerde zwarte stof) werd bij gewone temperatuur behandeld met *water*, en de oplossing ingedampt. Er bleef terug 0.3648 gr. zilvernitraat, nog deeltjes medegevoerde zwarte stof bevattende. Er werd derhalve aanvankelijk medegevoerd 0.3745 gr. — 0.3648 gr. = 0.0097 gr. (waarbij dan nog zou te voegen zijn de uiterst geringe hoeveelheid zwarte stof, waarvan zoo even sprake was). De hoeveelheid van 0.3648 gr. beantwoordt aan 18.17 p. c. ($N Ag_7 O_{11}$ vordert 17.98 p. c. zilvernitraat $N O_3 Ag$). Door directe weging werd verkregen voor de hoeveelheid medegevoerde stof 0.01 gr., dus een verschil gevende van 0.01 gr. — 0.0097 gr. = 0.0003 gr.. Behandeld met abs. alcohol werd de hoeveelheid van 0.3648 gr. herleid tot 0.3605 gr., overeenkomende met 17.96 pct. zilvernitraat (terwijl de formule eischt 17.98 pct.) Bij gevolg is het besluit, *dat het zilvernitraat betrekkelijk gemakkelijk is te elimineeren met water bij gewone temperatuur, indien aanvankelijk* 1 O *is uitgedreven op het molecuul* $N Ag_7 O_{11}$ *van het peroxy-salpeterzuur zilver.*

Over het residu in de V-*buis.* Eerst werd uitgedreven 0.0347 gr. gemakkelijk vrijkomende zuurstof van 2.0072 gr. der oorspronkelijke stof (zie pag. 5), dus bleef terug:

2.0072	gr.
0.0347	
1.9725	gr.

Zooals vroeger gezegd, werd het terugblijvende behandeld met water.

Wat betreft het atoom zuurstof, dat werd geëlimineerd, zoo zal daarvoor in het vervolg worden genomen de *theoretische* hoeveelheid, zijnde deze 0.0339 gr. (dat derhalve een verschil geeft van 0.0347 gr. — 0.0339 gr. = 0.0008 gr.), zoodat men heeft:

2.0072 gr.	
0.0339 „	voor 1 O uitgedreven.
1.9733 gr.	residu.
0.3745 „	zilvernitraat + zwarte stof medegevoerd
1.5988 gr.,	

dus vertegenwoordigende de hoeveelheid residu, die zich zou moeten bevinden in de V-buis, ingeval namelijk de behandeling met water geen zuurstof had doen vrijkomen (later zal blijken, dat dit wel het geval is). Na plaatsing in een vacuum- exsiccator (met zwavelzuur) en te hebben uitgepompt, werd droge lucht toegelaten en gewogen. Deze bewerkingen driemaal herhalende, werd achtereenvolgens voor het gewicht van het residu gevonden:

eerste maal	1.5773 gr.
tweede „	1.5673 „
derde „	1.5673 „

en bijgevolg heeft men voor het gewicht van het terugblijvende na aanvankelijk uitdrijven van 1 O op het molecuul, en behandeling daarna van de massa met water bij gewone temperatuur, dat van 1.5673 gr.

Bijgevolg is het verschil:

1.5988	gr.
1.5673	„
0.0315	gr.

Het uitdrijven van 1 O op het molecuul NAg_7O_{11}, eischt 0.0339 gr. zuurstof, berekend op 2.0072 gr. stof, dus een verschil met de theorie van:

0.0339 gr.	
0.0315 „	
0.0024 gr.	gevende.

Er doet zich dus voor, een kleine overmaat in plaats van een te kort voor de geëlimineerde zuurstof, bij behandeling der massa (na aanvankelijk uitdrijven van 1 O) met water, bij gewone temperatuur. Dus zouden nagenoeg 2 O zijn uitgedreven op het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$. En aangezien het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ door het water is verwijderd (tegelijk met het tweede atoom zuurstof), kan er dus in de V-buis zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ zijn teruggebleven (zijnde $N\,Ag_7\,O_{11} = 2\,O + N\,O_3\,Ag + 3\,Ag_2\,O_2$).

De V-buis met het residu (bedragende 1.5673 gr.) werd geplaatst in den toestel en het bad met kopervijlsel, en langzamerhand verhit bij stijgende temperaturen tot het gewicht constant bleef; of anders gezegd, tot het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ (verondersteld aanwezig te zijn) is omgezet in gewoon zilveroxyde $Ag_2\,O$. De volgende Tabel kan ons daaromtrent inlichten. Onder *a, b, c, d, e* en *f* zijn achtereenvolgens gegeven het aantal dagen, de temperatuur, het aantal uren, de vermindering in gewicht telkenmale, de totale vermindering, en opmerkingen (zie de vorige Verhandeling [1]).

Vervolg van de tabel op pag. 5, betreffende de proef met Bereiding N° 26 *en* 2.0072 *gr. stof, zijnde thans* 1 O *op* $N\,Ag_7\,O_{11}$ *uitgedreven, het terugblijvende behandeld met water bij gewone temperatuur, en daarna gedroogd, terwijl in de* V-*buis terugbleef* 1.5673 *gr.*

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
26	60°	1	0	0	
27	90	1	0.0006 gr.	0.0006 gr.	
28	100	1	0.0008	0.0014	
29	110	1	0.0035	0.0049	
30	120	1	0.051	0.0559	
31	130	1	0.0265	0.0824	
32	150	2	0.0156	0.098	
33	200	1	0.0033	0.1013	
34	210	1	0.0009	0.1022	
35	215	1	0.0002	0.1024	
36	220	1	0.0003	0.1027	
37	225	1	0.0002	0.1029	
38	230	1	0.0004	0.1033	
39	235	1	—0.0002	0.1031	
40	240	1	0.0002	0.1033	

[1]) Verhand. d. Kon. Akad. v. W. t. A. Eerste Serie. Deel V. N° 5, p. 35.

Aangezien de twee laatste waarden elkander opheffen, werd de proef geeindigd.

De hoeveelheid zuurstof door verhitten vrijgekomen, is bijgevolg 0.1033 gr., zoodat in de buis terugblijft 1.464 gr. gewoon zilveroxyde, want men heeft:

1.5673	gew. residu,
0.1033	zuurstof vrijgemaakt
1.464	gr. zilveroxyde $Ag_2\,O$,

dat op 100 gewone zilver-peroxyde beantwoordt aan:

	gevonden:	$Ag_2\,O_2 = Ag_2\,O + O$ eischt:
uitgedreven zuurstof	6.59	6.46
zilveroxyde ($Ag_2\,O$)	93.41	93.54
	100.	100.

Dit lichaam is derhalve *zilverbioxyde* $Ag_2\,O_2$. Zooals vroeger werd opgemerkt (pag. 8), is er een klein „te veel" van 0.0024 gr.; en zooals nu blijkt, is de gevonden zuurstof wat hooger dan de theorische hoeveelheid. Men laat daar, in hoeverre hier is te denken aan de vorming van een weinig $Ag_2\,O_3$, of, dat er alleen sprake is van eenige onzuiverheid (onder den vorm van water, enz.). In ieder geval is het besluit, dat, bij elimineeren van 1 O in den aanvang, behandeling daarna der massa met water (bij gewone temperatuur), de terugblijvende massa (na uitdrijven van het water) is *zilverbioxyde* $Ag_2\,O_2$.

Maar zelfs vermag deze uitkomst niet toe te laten, het besluit op te maken, dat bij aanvankelijk elimineeren van 1 O, in het residu zich bevindt monoxy-salpeterzuur zilver $N\,O_4\,Ag$ (zie pag. 3). Het doel der proef was, de reactie in dezen zin te vervolgen. De vraag herleidt zich tot de wetenschap, of, na uitdrijven van 1 O op het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$, terugblijft:

$$N\,Ag_7\,O_{11} = O + 3\,Ag_2\,O_2 + N\,O_4\,Ag,$$

of, dat de reactie aldus verloopt:

$$N\,Ag_7\,O_{11} = 2\,O + 3\,Ag_2\,O_2 + N\,O_3\,Ag.$$

In het laatste geval moet dan in het residu peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ zijn teruggebleven, want 1 $N\,Ag_7\,O_{11}$ geeft

2 O, dus blijft bij uitdrijven van 1 O de helft onontleed terug. Om deze zaak ten deele te kunnen oplossen, moet b.v. bekend zijn de tijd noodig ter ontleding met water van de verbinding $N\,Ag_7\,O_{11}$, in de gegeven omstandigheden. Nu is vroeger gebleken, dat veel tijd daartoe wordt gevorderd, zelfs *maanden*, zonder nog het einde daarvan te zien. Maar er dient op gelet, dat er nog al verschil bestaat, of het lichaam onaangetast is, of in een poreuse massa is omgezet als gevolg van het uitdrijven van 1 O, zoodat het water capillair kan worden opgezogen. Daarom wil men liever den tijd vergelijken ter eliminatie met water van het zilvernitraat na uitdrijven van 1 O aanvankelijk, met het geval van het uitdrijven in den aanvang van 2 O (gegeven in de vorige Verhandeling [1]). In dit laatste geval (namelijk na uitdrijven van 2 O), heeft het water slechts het aanwezige zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ op te lossen. Maar in geval aanvankelijk slechts 1 O werd vrijgemaakt, dan moet door het water worden geelimineerd hetzij $N\,O_4\,Ag$ (zie boven), hetzij $N\,O_3\,Ag$, ontstaan door ontleding van $N\,Ag_7\,O_{11}$ (dus wel van $N\,O_5\,Ag$, zijnde dit verbonden met 3 $Ag_2\,O_2$).

Hieronder wordt het overzicht gegeven, wat betreft de snelheid van uittrekken van het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$, ingeval aanvankelijk 2 O zijn verwijderd (in de vorige Verhandeling werd alleen het verkregen resultaat medegedeeld, dat toen voldoende was). Deze opgave is bijgevolg te vergelijken met die op pag. 7, welke betrekking heeft op de snelheid van verwijderen van het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ na aanvankelijk verwijderen van 1 O.

Opgave betreffende de snelheid van uittrekken van het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$, met water bij gewone temperatuur, na aanvankelijke eliminatie van 2 O op $N\,Ag_7\,O_{11}$.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	0 2372 gr.	0.2372 gr.	17 proc.
2	1	0.0336	0.2708	19.39
3	1	0.0077	0.2786	19.9
4	1	0.0031	0.2817	20.18
5	1	0.0015	0.2832	20.29
6	2	0.0017	0.2749	20.41
7	1	0.0029	0.2878	20.62

[1]) Verhand. d. K. Akad. v. W. Eerste Sectie. Deel V. N° 5. p. 33 (1897).

Zooals blijkt [1]) is het verschil in tijd zeer duidelijk, maar dat kon wel niet anders (zie boven). Want er is tijd noodig ingeval van ontstaan van $N\,O_4\,Ag$, waarschijnlijk verbonden met 3 $Ag_2\,O_2$, om $N\,O_4\,Ag$ vrij te maken; en dan volgt de reactie 2 $N\,O_4\,Ag = O\,O + 2\,N\,O_3\,Ag$, die eveneens tijd vordert. In aanmerking genomen, dat de zwarte kristallijne verbinding $N\,Ag_7\,O_{11}$ een betrekkelijk oneindig lange tijdruimte vordert, om het zoo uit te drukken, ter verwijdering van het $N\,O_3\,Ag$; en dat er veel tijd toe wordt gevorderd, zooals weldra zal blijken, om zelfs bij ongeveer 100° dit $N\,O_3\,Ag$ met water te elimineeren (zie later), bestaat er wel kans voor de vorming van monoxy-salpeterzuur zilver $N\,O_4\,Ag$ (altijd uitgaande van de mol. formule $N\,Ag_7\,O_{11}$, en de structuurformule 3 $Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$). Maar wat betreft een aanname der vorming van $N\,O_4\,Ag$, deze zou voorbarig wezen, en bijgevolg geen beteekenis hebben.

Vorming van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, door verhitten van peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ met water.

Er werd uitgegaan van 2.0482 gr. stof van bereiding N° 26 (terwijl rekening werd gehouden met de hoeveelheid zuurstof geëlimineerd bij staan; zie later over Bereiding n° 26), zijnde deze stof gedaan in de V-buis (gewogen met de stof, als volgens gewoonte) van den toestel (zie vroeger). Er werd water bij gedaan en boven de open vlam verhit tot de kooktemperatuur (zij dit ongeveer een uur); hierbij kwam zuurstof vrij. Den volgenden dag werd de oplossing afgeschonken in een klein reservoir (vooraf gewogen) en ingedampt. Er werd opnieuw water bij gedaan, ongeveer even lang verhit, afgeschonken, enz., terwijl deze bewerkingen werden herhaald, tot de hoeveelheid zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ ongeveer constant was (een kleine hoeveelheid der zwarte stof werd medegevoerd). De volgende opgave bevat de uitkomst.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	0.2463 gr.	0.2463 gr.	12.02 proc.
2	1	0.1175	0.3638	17.76
3	1	0.0095	0.3733	18.22
4	1	0.0021	0.3754	18.32
5	1	0.0016	0.377	18.41
6	1	0.0015	0.3785	18.48
7	1	0.0033	0.3818	18.65

[1]) Er wordt altijd wat van de zwarte stof meêgevoerd (zie l. c.).

De hoeveelheid van 0.3818 gr. (zilvernitraat + medegevoerde zwarte stof) werd tweemaal behandeld met abs. alcohol (telkens één dag aan zichzelf overgelaten); er werd uitgetrokken 0.369 gr. (constant blijvende bij herhaald uittrekken), dat beantwoordt aan 18.01 pct. zilvernitraat $N\ O_3\ Ag$ (de formule $N\ Ag_7\ O_{11} = 3\ Ag_2\ O_2 \cdot N\ O_5\ Ag$ eischt 17.98 pct.). Hetgeen onopgelost terugbleef, werd direct bepaald en gevonden 0.0124 gr., zijnde 0.3818 gr. — 0.369 gr. = 0.0128 gr. (dus een verschil gevende van 0.0128 gr. — 0.0124 gr. = 0.0004 gr.).

Het in de V-buis terugblijvende, werd gedroogd in een vacuum-exsiccator, en gevonden 1.6021 gr.. Nu heeft men:

	2.0482 gr.	de oorspronkelijke stof:
	0.3818 „	zilvernitraat + medegevoerde zwarte stof;
verschil	1.6664 „	

En in de V-buis bleef terug 1.6021 gr. (zie boven), dus wordt gevonden:

1.6664 gr.	
1.6021 „	
0.0643 „	verschil,

dat betrekking heeft op de zuurstof die is uitgedreven bij het *verhitten* der stof met *water*.

Het uitdrijven van 1 O op het molecuul vordert voor 2.0482 gr. der oorspronkelijke stof een hoeveelheid van 0.0346 gr. zuurstof (uitgaande van de formule $N\ Ag_7\ O_{11}$), bijgevolg makende voor 2 O op $N\ Ag_7\ O_{11}$ een hoeveelheid zuurstof van 2 × 0.0346 gr. = 0.0692 gr.. Dus is er een verschil met de theoretische hoeveelheid zuurstof van 0.0692 gr. — 0.0643 gr. = 0.0049 gr.; of anders gezegd, het gewicht van het residu, zijnde dat van 1.6021, is wat te *hoog*. Dit residu werd overgebracht in de V-buis van den toestel, en daardoor herleid tot 1.5921 gr. De buizen met chloorcalcium werden gewogen, met 't oog op een mogelijk gehalte van het residu aan *water*, alhoewel deze bepaling bijkans overbodig zou kunnen geacht worden te zijn. Er werd langzamerhand verhit tot en bij meer en meer hoogere temperaturen, en bepaald tevens de vermindering in gewicht van de V-buis. In de volgende Tabel bevindt zich onder d, a, b, c en f achtereenvolgens: de temperatuur, de vermeerdering in gewicht van de buis met chloorcalcium links en rechts geplaatst (van de V-buis); de vermindering in gewicht van de V-buis telken male en de totale vermindering (zie in verband met deze Tabel: de Tweede Verhandeling in de Verhand. d. Kon. v. W. t. A.).

Tabel, betrekking hebbende op de ontleding van het residu, ontstaan door $NAg_7 O_{11}$, peroxy-salpeterzuur zilver, te behandelen met warm water, zijnde 1.5921 gr.

d	*a*	*b*	*c*	*f*
60°	0.0003 gr.	—0.0003 gr.	0	0
100	0.0003	—0.0004	0.0007 gr.	0.0007 gr.
110	0.0002	—0.0003	0.002	0.0027
120	0.0002	0.0004	0.003	0.0057
130	0.0001	0.0003	0.0107	0.0164
140	0.0003	0.0003	0.0726	0.089
150	—0.0004	0.0003	0.004	0.093
200	0.0002	0.0003	0.0078	0.1008
210	0.0001	0.0002	0.0015	0.1023
220	0.0002	0.0003	0.0002	0.1025
240	0.0003	0.0002	0.0006	0.1031
250	0.0002	0.0003	0.0005	0.1036
260	0.0001	0.0002	0	0.1036.

Vroeger werd in deze Verhandeling een overeenkomstige proef medegedeeld (zie pag. 9), maar toen werden de buizen met chloorcalcium niet gewogen. De kleine anomaliën in het gewicht der buizen met chloorcalcium zijn wel het gevolg van het vochtige weder (veranderd op den dag bij verhitten tot en bij 200°), maar dit belet geenszins, om te besluiten tot de *afwezigheid* van water in het residu; een resultaat van eenige waarde, daar het een contrôle uitmaakt voor de bepaling der *„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"*.

De Tabel doet zien, dat bij 150° betrekkelijk veel minder zuurstof is vrijgekomen dan den volgenden dag bij 200°. De reden hiervan is wel deze, dat den voorgaanden dag te weinig lucht was doorgegaan, om de vrijgeworden zuurstof behoorlijk te kunnen uitdrijven; de vermindering in gewicht van de V-buis moest dus te laag uitvallen. Zooals reeds vroeger werd gezegd in meer of min overeenkomstige gevallen, is het doel in *geenen deele*, om de *ontledingstemperatuur* te leeren kennen van het zilverbioxyde; de getallenwaarden toch hebben meer een betrekkelijke waarde. Toch laat zich zoo ongeveer de ontledingstemperatuur van het zilverperoxyde kennen; en ook uit deze Tabel blijkt duidelijk, dat dit lichaam betrekkelijk vrij standvastig is, zoodat het wel bij gewone temperatuur niet ontleed zal worden, een eigenschap, die zal toekomen aan den rest $N\,O_5\,Ag$ van de verbinding $N\,Ag_7\,O_{11}$ ($= 3\,Ag_2\,O_2\,.\,N\,O_5\,Ag$).

Dat het residu is zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, volgt reeds uit de Tabel met groote waarschijnlijkheid. Het gewicht bedroeg (zie pag. 14), na in de V-buis te zijn overgebracht 1.5921 gr., terwijl bij verhitting een hoeveelheid zuurstof vrijkwam van 0.1036 gr. . Dit geeft:

1.5921	gr.	residu
0.1036	„	vrijgekomen zuurstof.
1.4885	gr.	zilveroxyde $Ag_2\,O$.

of berekend op 100 gew. d. zilverbioxyde, heeft men:

	gevonden:	$Ag_2\,O_2 = Ag_2\,O + O$ eischt:
„ gemakkelijk vrijkomende zuurstof „	6.5	6.46
zilveroxyde ($Ag_2\,O$)	93.5	93.54
	100 gew. d.	100 gew. d.

De samenstelling van het residu beantwoordt dus zeer wel aan hetgeen de theorie verlangt voor de formule $Ag_2\,O_2$; alleen vertoont zich eenig gevonden surplus, zij het dan ook zeer gering (zie pag. 10). Gelukkig is men dan van nu af in 't bezit van een geschikte methode, om zich zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ in zuiveren staat te verschaffen. Dit bioxyde is wel het eerste zilverperoxyde, hetwelk zich grondig zal laten bestudeeren, dat een bepaald voordeel aanbiedt ook voor de studie van het zilveroxyde $Ag_2\,O$, tevens in verband met het zilver, met 't oog op de at.-vol. en vele andere physische eigenschappen; alsmede in verband met chemische eigenschappen dezer lichamen, enz. Daarom wenschte men een betrekkelijk eenvoudige methode te geven, die zou toelaten, dit lichaam meer in 't groot te maken en tevens zuiver, in werkelijkheid te bereiken bij het volgen van den, in de hieronder beschreven proef, gevolgden weg.

Tweede proef genomen met het doel, een praktische methode te vinden ter bereiding van het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$. Er werd uitgegaan van Bereiding N°. 29 (behandeld als naar gewoonte, zie hierover vooral de Eerste Verhandeling), versch bereid (dat trouwens geen vereischte is; alleen dient men door wegingen de hoeveelheid zuurstof te kennen, die bij staan is vrijgekomen), en wel van een hoeveelheid van 9.8693 gr., dus betrekkelijk van veel materiaal. Dit werd gedaan in een groote reageerbuis, en *water* toegevoegd. Aangezien de buis later moest gewogen worden met het zilverbioxyde, aanvankelijk vochtig, dus te drogen in een gedeeltelijk luchtledig, werd de buis vooraf onder die omstandigheden gedroogd en daarna gewogen. Thans werd opgespoord *de laagste temperatuur* waarbij de ontleding van het peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$) betrekkelijk gemakkelijk geschiedt, want het geldt hier meer een zaak van tijd (daar het lichaam onderhevig is aan zelfontleding), en er werd daartoe als geschikt bevonden de temperatuur aanvankelijk van 60°—70°, daarna die van 70°—80°, en later die van 80°, ten minste voor zooverre schijnt gebleken te zijn. De ontleding gaat dan merkwaardig regelmatig (de buis is geplaatst in een waterbad, met een thermometer in het bad). Op de buis wordt geplaatst een uitgetrokken en toegesmolten trechtertje, om een verlies te voorkomen aan zilvernitraat, als gevolg van een spatten door de ontwikkeling der zuurstof (en dit trechtertje later gewasschen). Er wordt een groot aantal uren verhit (zij dit drie dagen, en iederen dag ongeveer vijf uren), ten einde de ontleding volledig zij (en geen gas zich meer vertoont); te weten, uitgaande van genoemde hoeveelheid. Is deze bewerking afgeloopen, dan wordt de oplossing gedecanteerd, in een gewogen schaaltje ingedampt, en in de buis op nieuw water gedaan (de buis wordt voorzien van een caoutchouc-ring, waaraan een stukje papier is gehecht, ten einde aan dezelfde zijde te kunnen afschenken); en deze bewerking wordt herhaald, totdat het gewicht aan zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ genoegzaam constant is. Er werd gevonden (zie pag. 12):

a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	1	1.5139 gr.	1.5139 gr.	15.33 proc.
2	1	0.2236	1.7375	17.6
3	1	0.0445	1.782	18.05
4	1	0.0059	1.7879	18.11
5	1	0.0001	1.7988	18.11.

Men ziet met een oogopslag, dat het water niets anders heeft te doen dan het zilvernitraat, hetwelk was gevormd, te verwijderen; en dat bij gevolg de ontleding van het dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$ (zij $N\,Ag_7\,O_{11} = 3Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$) volkomen is. Ook is de waterige oplossing kleurloos (en geen waarneembare hoeveelheid van zwarte stof in surpensie werd medegevoerd), en tevens het zilvernitraat na indampen terugblijvende. Alleen wordt de oplossing, die aanvankelijk volkomen helder is, later een weinig troebel. Uit de bovenstaande opgave blijkt, dat de hoeveelheid zilvernitraat genoegzaam beantwoordt aan hetgeen de theorie verlangt, zijnde een gehalte van 17.98 pct. aan zilvernitraat. Hieruit volgt tevens in mindere of meerdere mate, dat het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ onoplosbaar is (wel te verstaan bijna onoplosbaar is) in water. Later zal blijken, dat het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, alhoewel zeer weinig, iets oplosbaar is in water (ten minste zoo schijnt het geval te zijn; er zou een weinig zilverbioxyde kunnen ontleed worden en zilveroxyde $Ag_2\,O$ gevormd). Deze oplosbaarheid zou het kleine verschil kunnen verklaren, of ten deele, met de theorie, zij dit van $18.11 - 17.98 = 0.13$ proc..

De buis met het residu (vochtig, als gevolg der behandeling met water), werd vervolgens geplaatst in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur). Na verloop van twee dagen werd droge lucht toegelaten, en de buis gewogen; daarna opnieuw geplaatst onder den exsiccator, en zoo vervolgens, tot het gewicht constant bleef (de bewerking behoefde trouwens slechts eenmaal te worden herhaald). Het gewicht van het residu was 7.7521 gr., dat zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ moet zijn, afgeleid van 9.8693 gr. peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$). Het verschil 9.8673 gr. — 7.7521 gr. = 2.1172 gr. maakt de som uit van het *zilvernitraat* en de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof'' (oxygène excédant'') van het peroxy-salpeterzuur zilver (zij $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag = 3\,Ag_2\,O_2 + N\,O_3\,Ag + 2\,O$). En door hiervan af te trekken de hoeveelheid zilvernitraat, zij deze 1.788 gr. (zie pag. 16), blijft over: 2.1172 gr. — 1.788 gr. = 0.3292 gr., vertegenwoordigende de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof'' (oxygène excédant''), van het $N\,O_5\,Ag$ (dioxy-salpeterzuur zilver), terwijl de theorie eischt 0.333 gr., dus een verschil gevende van 0.333 — 0.329 = 0.004 gr. (langs indirecten weg gevonden). Het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ was iets te hoog, en waarschijnlijk wel tengevolge van de oplosbaarheid (ten minsten ten deele), alhoewel in hooge mate beperkt, van het zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$) in water (zie later), dat in de voorgaande berekening het zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$) te laag geeft, maar niet direct van invloed is op de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, indirect bepaald. Door berekening op 100 gew. d. peroxysalpeterzuur zilver zal de uitkomst winnen in duidelijkheid. Men heeft op 100 gew. d. (zie Verhand. Kon. Akad. v. W. Deel III, n° 8, p. 21):

zilveroxyde	73.56
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	8.46
zilvernitraat	17.98
	100 gew. d.

Deze 8.46 gew. d. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” vertegenwoordigen de 5 O ($N\,Ag_7\,O_{11} = 3\ Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag = 3\ Ag_2\,O . 3\ O . N\,O_3\,Ag . 2\ O = 3\ Ag_2\,O + N\,O_3\,Ag + 5\ O$), maar in het onderhavige geval komen slechts 2 O vrij (der 5 O), zoodat van 8.46 men heeft: $\frac{8.46}{5} = 1.692$, terwijl $1.692 \times 2 = 3.384$ gew. d. zuurstof zijn (afkomstig van $N\,O_5\,Ag = N\,O_3\,Ag + 2\ O$); zij dit 3.38 gew. d. Het verschil van 8.46—3.38 = 5.08 vormt dus met 73.56 gew. d. zilveroxyde de hoeveelheid op 100 gew. d. *zilverdioxyde* ($Ag_2\,O + O = Ag_2\,O_2$), zoodat men heeft:

zilverbioxyde	78.64 (73.56 + 5.08)
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	3.38
zilvernitraat	17.98
	100 gew. d.

Nu werd gevonden 7.7521 gr. zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ of 78.54 proc., en derhalve met de theorie gevonden een verschil van 78.64—78.54 = 0.1 proc. Voor zilvernitraat daarentegen was gevonden 18,11 proc., dus een verschil gevende van 18.11—17.98 = 0.13 proc. in tegengestelden zin. Dus heeft men op 100 gew. d.:

	gevonden:	theoret. hoev.:
zilverbioxyde	78.54	78.64
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	3.35	3.38
zilvernitraat	18.11	17.98
	100 gew. d.	100 gew. d.

De 3.35 proc. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" zijn indirect bepaald (zij dit = 100—78.54—18.11). Er doet zich slechts voor een verschil van 3.38—3.35 = 0.03 proc. met de theorie. Het is dus geoorloofd te zeggen, dat de gevolgde methode toelaat, om zich het zilverbioxyde te verschaffen in zuiveren staat (zie vroeger de gedane analysen). Maar er volgt uit, en dit is van meer belang, dat in het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$, werkelijk is aan te nemen, ten minste voor 't oogenblik: $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$, de aanwezigheid van twee *endo-thermische resten* ($Ag_2\,O_2$ en $N\,O_5\,Ag$), door verhitten met water zeer duidelijk te scheiden.

Derde proef, betrekking hebbende op de bereidingswijze van zilverbioxyde Ag_2O_2, Een hoeveelheid van 8.0513 gr. peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$) werd met water verhit in een groote reageerbuis, geplaatst in een waterbad, aanvankelijk. bij 60°—70° gedurende ongeveer zes uur, vervolgens bij 70°—80° de drie volgende dagen, iederen keer ongeveer eenzelfden tijd, totdat er hoegenaamd geen gas vrijkwam, en daarna nog eenige uren verhit. Den daarop volgenden dag werd afgeschonken, op nieuw water toegevoegd, afgeschonken en zoo vervolgens (bij gewone temperatuur), totdat de afgeschonken vloeistof een zeer zwakke reactie geeft b.v. met verdund zoutzuur. De buis werd, na afschenken der vloeistof, geplaatst in een vacuum-exsiccator. Later liet men dan droge lucht intreden, en werd de buis gewogen. Na herhaling dezer bewerkingen, werd voor het constant gewicht gevonden 6.321 gr. van het terugblijvende, overeenkomende met 78.5 proc. zilverbioxyde, terwijl de formule vordert 78.64 proc., dat derhalve een verschil geeft van 0,14 proc. Alle hoeveelheden der afgeschonken vloeistof werden bij elkander gedaan, en toen zette zich zeer weinig af van het peroxyde, mechanisch medegevoerd, terwijl dit oxyde wellicht tevens een weinig oplosbaar is in water (zie pag. 17), zoodat gemeld klein verschil met de theorie, een verklaring zou kunnen vinden.

Over de structuur van peroxy-salpeterzuur zilver. In verband vooral met de laatst verkregen uitkomst, is de verdeeling der 5 atomen „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" in $5\,O = 3\,O + 2\,O$ meer een feit geworden, zijnde in overeenstemming met de vroeger verkregen uitkomst [1]) (toen werd evenwel het peroxy-salpeterzuur zilver verhit in een zeer langzamen stroom van droge lucht). Bij gevolg stemt hiermede ook overeen de structuurformule $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2\,N\,O_5\,Ag$, en door eerstgenoemd resultaat met des te meer recht, aangezien de verbinding $Ag_2\,O_2$ terugblijft. *Het water scheidt als*

[1]) Zie de vorige Verhandeling.

't ware de twee endothermische resten $Ag_2\,O_2$ en $N\,O_5\,Ag$. En men zou kunnen veronderstellen, dat er bij het verhitten met water dissociatie intreedt van de verbinding dezer resten, als gevolg waarvan een zekere hoeveelheid dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$ in oplossing treedt, en onder die omstandigheden intreedt de ontleding:

$$N\,O_5\,Ag = N\,O_3\,Ag + 2\;O.$$

Bij verhitten *zonder* water (in een zeer langzamen stroom van droge lucht) ontmoet men (bij het aanvankelijk elimineeren van 2 O, of liever bij de poging om dit te doen) waarschijnlijk een secondaire reactie [1]), zooals vroeger werd aangetoond. Dit doet zich niet voor bij verhitten met water, en de boven gegeven verklaring moge dit eenigermate toelichten.

Over eenige scheikundige eigenschappen van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$. Het peroxyde is oplosbaar in sterk salpeterzuur en tevens in zwavelzuur, met *bruine* kleur. Deze oplossing blijft vrij lang gekleurd, uitgaande van deze zuren in geconcentreerden toestand, daarentegen bevordert aanwezigheid van water de snelheid van ontleding, en te meer, naarmate de hoeveelheid hiervan grooter is, aldus:

$$2\;Ag_2\,O_2 + 4\;N\,O_2\,.\,OH = 4\,(N\,O_2\,.\,O\,Ag) + 2\;H_2\,O + O\,O$$

en

$$2\;Ag_2\,O_2 + 2\;S\,O_2.\;2\;O\,H = 2\;SO_2\,.\,2\;O\,Ag\;2\;H_2\;O + OO.$$

Peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ (zij dit: 3 $Ag_2\,O_2\,.\,N\,O_5\,Ag$) *vertoont dezelfde eigenschap*, vroeger ten onrechte beschouwd als te zijn zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, dat nog al verschilt met de waarheid, tegenover zuren als $N\,O_3\,H$ en $S\,O_4\;H_2$; en het blijkt thans duidelijk, dat dit peroxy-salpeterzuur zilver slechts een *moleculaire* verbinding is, waarin de rest 3 $Ag_2\,O_2$ zich bijkans even duidelijk vertoont als uitgaande van het peroxyde als zoodanig; van daar, ten minste ten deele, die verwarring in de chemische litteratuur, wat dit onderwerp betreft.

Azijnzuur schijnt het peroxyde niet op te lossen. In bijzijn van water wordt het alzoo ontleed:

$$2\;Ag_2\,O_2 + 4\,(C_2\,H_3\;O\,.\,OH) = 4\,(C_2\,H_3\;O\,.\,O\;Ag) + 2\;H_2\,O + OO.$$

Over eenige physische eigenschappen van zilverbioxyde $Ag_2\;O_2$, *benevens* $N\;Ag_7\;O_{11}$ *en* $N\;O_5\;Ag$. Er is reden te vermoeden, dat zilverbioxyde betrekkelijk een vrij goede geleider is voor electriciteit,

[1]) l. c. p. 57.

zooals dit het geval is met het peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ (zij dit: $3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$). In de eerste plaats toch maakt zilverbioxyde er het grootste deel van uit; en de andere rest $N\,O_5\,Ag$ zal wel een tamelijk slechte geleider zijn voor electriciteit. Aangenomen, dat dit zoo is, zou het peroxyde betrekkelijk een betere geleider zijn voor electriciteit dan het geval is met het peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}$).

De kleur van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ (gemaakt door verhitten van $N\,Ag_7\,O_{11}$ met water) is ongeveer die van *graphiet* (terwijl de kleur van peroxy-salpeterzuur zilver eerder die is met *zwart* bestempeld) met meer of minder glans, maar niet in een dusdanige mate, als dit zich voordoet bij peroxy-salpeterzuur zilver. Maar bij elimineeren, zonder gebruik te maken van water, zelfs van $2\,O$ (dus op het molecuul „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" $N\,Ag_7\,O_{11}$), handhaaft zich bijkans geheel de oorspronkelijke kleur van het product (zij dit $N\,Ag_7\,O_{11}$); zie hierover de vorige verhandeling. De behandeling der massa met *water* (ter verwijdering van het zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$) laat echter veeleer de kleur naderen tot die van graphiet. Er volgt uit met eenige waarschijnlijkheid, dat de kleur van $Ag_2\,O_2$ in den grond genoegzaam dezelfde zal zijn als die van $N\,Ag_7\,O_{11}$, dat wel zijn kleur heeft te danken aan het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$. Men besluit er daarenboven uit, dat het dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$ als zoodanig, kleurloos zal blijken te zijn.

Over het zilveroxyde $Ag_2\,O$ afgeleid van $Ag_2\,O_2$. Het mag geacht worden van belang te zijn, een zelfde physische constante van lichamen te bepalen, of een physisch-chemische constante, die groote verwantschap bevatten. In zekere gevallen kan het zijn belang hebben, dat deze stoffen van elkander zijn afgeleid. Men heeft hier bv. op het oog Ag, $Ag_2\,O$, $Ag_2\,O_2$ en $N\,Ag_7\,O_{11}$. Ook laat zich, wanneer b.v. $Ag_2\,O_2$ thermo-chemisch is nagegaan, door een studie in dien zin van $N\,Ag_7\,O_{11}$, indirect $N\,O_5\,Ag$ thermo-chemisch kennen, daar men heeft: $N\,Ag_7\,O_{11} - 3\,Ag_2\,O_2 = N\,O_5\,Ag$ (tot nog toe onbekend). Het zilveroxyde $Ag_2\,O$, afgeleid van het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, door uitdrijven van $1\,O$, schijnt op 't oog een eenigszins ander lichaam dan het gewoon zilveroxyde $Ag_2\,O$. Maar dit moet worden nagegaan. Wat de kleur betreft is *later* opgemerkt, dat deze een meer of min *bruine* tint vertoont, die doet denken aan de kleur van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ opgelost in salpeterzuur (of zwavelzuur). Niet onwaarschijnlijk zal dit oxyde een tamelijk goede geleider zijn voor electriciteit, alhoewel misschien in een mindere mate dan het geval is met genoemd peroxyde. Een vergelijking van het electrisch geleidendvermogen dezer twee oxyden in verband met het zilver daarvan afgeleid, zou zeker belangrijk kunnen zijn; en wel vooral in verband met dat van het peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}$), het dioxy-salpeterzuur zilver, enz. [1]).

Over de oplosbaarheid van zilverbioxyde in water. Laat men dit peroxyde langen tijd in aanraking met water, en ter vergelijking evenzoo gewoon zilveroxyde ($Ag_2\,O$), en wel beide onder genoegzaam dezelfde omstandigheden (b.v. hoeveelheid stof en water dezelfde zijnde), dan kan men er zich van overtuigen, dat beide ($Ag_2\,O$ is afgeleid van $Ag_2\,O_2$) een weinig oplosbaar zijn in dit oplossingsmiddel of juister uitgedrukt, dat deze twee oxyden de reactie geven van zilver met verdund zoutzuur, dat niet hetzelfde is; zie beneden. Aanvankelijk verkreeg men den indruk, dat het zilverbioxyde de reactie veel zwakker geeft dan gewoon zilveroxyde. Daarna werd het bioxyde nog langen tijd verhit met water bij ongeveer 80°, ten einde zeker te zijn, dat de stof geen sporen meer bevat van peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}$), want dat zou eenig zilvernitraat geven in oplossing, en dus de uitkomst onzeker maken. Het water werd afgeschonken en opnieuw water toegevoegd; en toen scheen de reactie op zilver sterker te zijn van het peroxyde en het verschil geringer met het gewone oxyde, bij ververschen van het water, steeds na minstens een dag te hebben gestaan bij gewone temperatuur. Op dit oogenblik laat zich niet zeggen, of het bioxyde een weinig oplosbaar is in water (te weten in een waarneembare mate), of wel, dat een geringe hoeveelheid wordt ontleed, b.v. alzoo:

$$Ag_2\,O_2 + H_2\,O = Ag_2\,O + H_2\,O_2 \text{ (zie overigens later).}$$

Dit zou een bijzondere studie vorderen, die tamelijk samengesteld kan zijn, bij vergelijking der gegevens met zilveroxyde.

Over de verschillende peroxyden van zilver in de scheikundige litteratuur, en de bestaande verwarring dienaangaande. Met 't oog vooral op deze verwarring, wenschte men in 't kort een overzicht te geven van onze tegenwoordige kennis aangaande dit onderwerp. Peroxyden van zilver laten zich vormen, of werden en zijn geacht te worden gevormd onder de volgende omstandigheden:

1° *Bij electrolyse van zilvernitraat.* Dit zou trouwens reeds tot de geschiedenis behooren, ware het niet, dat men deze dwaling nog dikwerf in de chemische litteratuur aantreft. In ieder geval is aangetoond, dat het lichaam van Ritter zich, tenminste thans, laat teruggeven door de formule $N\,Ag_7\,O_{11}$, die vrij veel verschilt van

[1]) Zie de vorige Verhandeling.

$Ag_2\,O_2$. Dit molecuul kan overigens worden teruggegeven, met 't oog op de bekende feiten, als te zijn: $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 \,.\, N\,O_5\,Ag$; b.v. heeft men slechts peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}$) te verhitten met *water*, om zuiver zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ te zien optreden als residu [1]).

2° *Bij electrolyse van zwavelzuur zilver.* In deze richting werd slechts één proef gedaan door Fischer [2]), die echter zijn verkregen product niet onderwierp aan analyse. Deze scheikundige veronderstelt, dat de samenstelling der zwarte stof (die wordt afgescheiden aan de anode, zooals in het vorige geval) overeenkomstig zal zijn met het product der electrolyse van zilvernitraat (zie hierboven), waarvoor deze scheikundige aannam de formule: $2\,Ag_2\,O_2 \,.\, N\,O_3\,Ag \,.\, H_2\,O$ (maar deze is: $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 \,.\, N\,O_5\,Ag$). Dit onderwerp zal later uitvoerig worden behandeld, en het zij voldoende, hier te doen opmerken, dat dit lichaam bij verhitten met *water* als residu geeft zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$. Het lichaam waarvan sprake is, zal waarschijnlijk wezen een peroxy-zwavelzuur zilver van analoge structuur als het peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}$, zie hierboven); het geeft dan ook bij verwarming met *water*, zuurstof (zie de volgende Verhandeling) zooals dit geschiedt met het afgeleide van zilvernitraat door electrolyse, dat tevens als residu geeft zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ (zie deze Verhandeling vroeger).

3° *Electrolyse van verdund zwavelzuur met zilver als anode.* Naar 't schijnt het eerst gedaan door Wöhler [3]), die een zwarte amorphe massa zag gevormd worden. Deze scheikundige hield zijn lichaam voor identisch met dat van Ritter, welke verbinding toen vrij algemeen werd beschouwd als een zilverperoxyde (of, wat hetzelfde is, als een zilversuperoxyde). Wöhler deed geen analyse van zijn product, maar is geneigd aan te nemen, dat dit een zilversuperoxyde is (zie boven), zooals dit, naar W. aanneemt, het geval zou zijn met het lichaam van Ritter (zie boven), en een product verkregen door Schönbein (zie onder 4°). De kans schijnt zeer groot, dat het lichaam van Wöhler als essentiëel bestanddeel bevat peroxy-zwavelzuur zilver (zie onder 2°), want er ontstaat zeker zwavelzuur zilver ($S\,O_4\,Ag_2$) aan de anode, en dit zout zal worden omgezet in peroxy-zwavelzuur zilver, zooals het geval zou zijn uitgaande van zwavelzuur zilver $S\,O_4\,Ag_2$ als zoodanig (bij welke electrolyse vrij zwavelzuur optreedt).

---

1) Zie deze Verhandeling pag. 12, 16, 19.
2) J. l. pr. Ch. Bd. 33 S. 240, 245 (1844).
3) Ann. de Ch. u. Pz. Bd. 146 S. 263 (1868).

4° *Peroxyde van zilver van Marschall* [1].) Een oplossing van perzwavelzure potasch (aan welke verbinding Guido Moeller [2]) de formule $S\ O_8\ K_2$ geeft, zie de volgende Verhandeling) zou met een oplossing van zilvernitraat $N\ O_3\ Ag$ een zwart lichaam vormen, naar gemelden onderzoeker zijnde een peroxyde van zilver (zie de volgende Verhandeling over de electrolyse van zwavelzuur zilver). Maar ook van dit product werd geen analyse gedaan. Mogelijk is (maar op dit oogenblik laat zich dit niet bepaald zeggen), dat dit neêrslag is peroxy-salpeterzuur zilver ($N\ Ag_7\ O_{11}$), of veeleer een peroxy-zwavelzuur zilver; maar waarschijnlijk is het geen zilverperoxyde als zoodanig. In ieder geval ontbreekt de analyse.

5° *Het zilverperoxyde van Malvern Iles* [3]). Door inwerking van kiezelzuur op zilvernitraat zou een rood gekleurd lichaam ontstaan, en dit een peroxyde van zilver wezen der formule $Ag_2\ O_2$. Maar, zooals men reeds deed opmerken [4]), is het bestaan dezer stof onder zulke omstandigheden bezwaarlijk aan te nemen.

6°. *Over de verbinding ontstaan door ozon en zilver.* Deze reactie schijnt het eerst te zijn verricht door Schönbein [5]), die ons medebeelt, dat op die wijze zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ (nieuwe formule) in zuiveren staat is te maken. Maar deze wel bekende scheikundige, deed geen analyse van zijn verbinding, dat des te meer te bejammeren is, omdat ook hij zilverbioxyde verwart met het lichaam van Ritter (zijnde dit $N\ Ag_7\ O_{11}$), trouwens toenmaals genoegzaam algemeen beschouwd als te zijn een zilverperoxyde (slechts een weinig *stikstof* bevattende, en wel in den vorm van zilvernitraat, maar als bijmengsel; zooals andere scheikundigen, was ook Schönbein deze meening toegedaan). Het lichaam van Schönbein is in ieder geval nog te determineeren, want, gelijk reeds gezegd, werd het door hem niet geanalyseerd, en na hem hield men er zich niet mede onledig. Deze scheikundige maakt wel melding van de eigenschap zijner verbinding van in salpeterzuur te worden opgelost met bruine kleur (een eigenschap die het zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ als zoodanig toekomt, afgeleid van het peroxy-salpeterzuur zilver of het lichaam van Ritter, en het lichaam van Ritter zelf); maar dit bewijst niets met betrekking tot de verbinding waarvan sprake is,

[1]) Journ. of the Chem. Soc. 1891. p. 771.

[2]) Z. f. Phys. Chem. XII. S. 555.

[3]) Dict. de Wurtz, Supplém. II, p. 362.

[4]) Zie Verhand. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam. (Eerste Sectie, D. V. W°. 5 p. 36 (1897).

[5]) J. f. pr. Ch. Bd. 74. S. 322 (1858).

want een ander peroxyde van zilver zou eveneens deze eigenschap kunnen bezitten.

7°. *Verbinding gemaakt door ozon en zilveroxyde $Ag_2 O$.* Deze reactie werd ten uitvoergebracht door Schiel [1]), die hiervan slechts mededeelt, dat geozonificeerde zuurstof geleid over droog zilveroxyde doet ontstaan zilversuperoxyde ($Ag_2 O_2$). Maar ook deze scheikundige analyseerde zijn product niet, zoodat iedere bespreking onnoodig is; en er behoeft alleen te worden gezegd, dat dit lichaam onderzoek vereischt.

8°. *Verbinding gevormd door inwerking van ozon op een waterige oplossing van zilvernitraat.* Er staat opgeteekend [2]), dat ozon met zilvernitraat (er wordt verondersteld, dat hier is bedoeld „in oplossing") een nêerslag geeft met blauwachtig zwarte kleur, dat zilverperoxyde zou wezen ($Ag_2 O_2$).

9°. *Over een lichaam ontstaan door waterstofbioxyde $H_2 O_2$ en zilveroxyde $Ag_2 O$.* Een zeer wetenswaardige studie werd van deze reactie verricht door Berthelot. Volgens dezen natuuronderzoeker is het scheikundig proces door de volgende vergelijking terug te geven:

$$3\, H_2 O_2 + 3\, Ag_2 O = 3\, H_2 O + 3\, O + Ag_4 O_3 + Ag_2.$$

Dit zilverperoxyde zou weinig standvastig zijn, zelfs bij gewone temperatuur (en geplaatst zijnde onder een exsiccator), en niet in watervrijen toestand kunnen optreden, maar alleen als hydraat.

In een artikel [4]) over „zilver", geredigeerd door Willm, komt voor, dat dit peroxyde zonder twijfel hetzelfde is als dat verkregen met ozon en zilver.

Wat de samenstelling betreft (de structuur wordt geheel ter zijde gelaten), kan het peroxyde van Berthelot aldus worden beschouwd:

$$Ag_4 O_3 = Ag_2 O + Ag_2 O_2.$$

Om dit lichaam beter te leeren kennen, zou een vergelijkende studie met het zilverbioxyde $Ag_2 O_2$, waarvan sprake is in deze en de vorige Verhandeling [5]), zeer gewenscht zijn.

---

[1]) Ann. Ch. u. Ph. Bd. 132. S. 322 (1864).

[2]) N. Handw. d. Ch. v. Fehling-Hell, Bd. VI. S. 1319.

[3]) Ann. Ch. et de Phys. Sér. 5. T. 21, p. 167; l. c. Sér. 7. T. 11, 217 (1897); Zie Dict. d. Ch. de Wurtz. Suppl. II, p. 362.

[4]) Dict. de Wurtz l. c. p. 262.

[5]) Zie „Verhand. d. K. Akad. v. W. te Amsterdam" (Eerste Sectie), Deel V. N° 5, p. 35; en deze Verhand. p. 1—23.

Directe bepaling der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$ (deel uitmakende van het peroxy-salpeterzuur zilver: $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$). Daarvan uitgaande, dat de ontleding van peroxy-salpeterzuur zilver bij verhitting met water geschiedt volgens de vergelijking:

$$3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag = 3\,Ag_2\,O_2 + N\,O_3\,Ag + 2\,O,$$

zou men een poging kunnen wagen, om de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof", die wordt geacht hierbij optetreden (zij deze 2 O) langs directen weg te bepalen. Voor 't oogenblik worden twee bepalingen medegedeeld, om in een volgende Verhandeling of later op dit onderwerp terug te komen, dat van betrekkelijk gewicht is, daar het hier wellicht betreft een nieuw zuur van stikstof, en in dat geval in meer dan één opzicht van beteekenis.

Toestel ter bepaling der gemakkelijk vrijkomende zuurstof van $N\,O_5\,Ag$, en bewerkingen, die zich daar aansluiten. De stof ($N\,Ag_7\,O_{11}$) bevindt zich met *water* in een *klein glazen buisje* (gemaakt van een gedeelte eener verbrandingsbuis voor elementair-analyse), *dat is uitgetrokken, terwijl het uitgetrokken gedeelte is omgebogen*, teneinde de vrijkomende zuurstof te kunnen doen gaan in een in c.c. verdeelde buis (gelijk aan die gebruikt bij een stikstof-bepaling naar Dumas), welke gevuld is met *water* en geplaatst in een klein (glazen) schaaltje, tevens met water gevuld. De bewerkingen in acht te nemen zijn de volgende. *De kleine uitgetrokken en omgebogen buis is in de eerste plaats met water te vullen*, daarna te verhitten bij de kooktemperatuur, om de opgeloste lucht te verdrijven (men begint liefst met te verhitten in een waterbad). Is de buis afgekoeld, dan wordt die aangevuld met water (zoodat de buis geheel en al met water is gevuld), en thans laat men er de stof invallen, gebruik makende van een klein (glazen) trechtertje, en een caoutchoucbuisje. Ten slotte wordt een weinig water gedaan in het trechtertje, en met een platinadraad laat men zooveel mogelijk de drijvende deeltjes vallen op den bodem van het kleine buisje. Is dit gedaan, dan wordt het trechtertje verwijderd (in het uitgetrokken en omgebogen gedeelte weder een weinig water gedaan, als dit blijkt noodig te zijn), en dan het uitgetrokken einde van het buisje geplaatst in het water van het schaaltje, zoodat het uiteinde zich bevindt onder de verdeelde buis (die water bevat, dat niet is bevrijd van lucht); terwijl de kleine buis, waarin de stof zich bevindt, wordt geplaatst in een waterbad. Het is raadzaam eerst te verhitten bij ongeveer 60°—70°, vervolgens bij 70°—80°

en bij 80° (in het waterbad bevindt zich een thermometer). De bepaling vereischt eenige uren (ten minste, als men bijkans alle zuurstof wil doen ontwijken, waarvan sprake is). Ingeval het volumen aan zuurstof niet noemenswaardig meer toeneemt, wordt het waterbad weggenomen, en daarna het buisje eenige oogenblikken verhit boven de vlam, om de zuurstof, in dit buisje zijnde, door wat stoom te brengen in de verdeelde buis (er is een thermometer geplaatst dicht bij deze buis). En zoodra het volumen niet meer merkbaar verandert, wordt dit afgelezen, zoomede het verschil in waterniveau, en tevens thermometer met barometer.

Eerste bepaling. Een hoeveelheid peroxy-salpeterzuur zilver ($NAg_7\ O_{11}$) van 1.0366 gr. gaf 24.7 c.c. zuurstof bij 24.7°, met een verschil in waterniveau van 300 mm. bij 24.7°, terwijl de barometer aanwees 764.7 (bij 24.7°).

Tweede bepaling. Er werd uitgegaan van 2.616 gr. peroxy-salpeterzuur zilver afkomstig van dezelfde bereiding. De hoeveelheid vrijkomende zuurstof bedroeg 62.2 c. c. bij 23° en 758.2 bar. (bij 22.5°); terwijl het verschil in waterniveau bedroeg 202.5 mm. bij 23°.

Berekend op 1 gr. stof, was bij staan aan zuurstof geëlimineerd 0.00056 gr. (zie Bereiding N° 27 later), dat beantwoordt aan 0.4 c. c. zuurstof (bij 0° en 768 mm.). Hierbij zij tevens opgegeven, dat uitgaande van de formule $NAg_7\ O_{11}$, het uitdrijven van $2\ O$ (van $NO_5\ Ag$) overeenkomt met 23.54 c. c. (bij 0° en 760°) voor 1 gr. peroxy-salpeterzuur zilver.

In de Tabel hieronder bevindt zich achtereenvolgens opgegeven:

a. de hoeveelheid peroxy-salpeterzuur zilver, waarvan werd uitgegaan;

b. het aantal c.c. zuurstof;

c. de temperatuur der zuurstof;

d. de waarde van $H—H'—H''$, zij dit de barometrische druk, verschil in waterniveau, en spanning van den waterdamp, alles in mm. kwik van 0°;

e. de hoeveelheid zuurstof in c. c. bij 0° en 750 mm.

f. deze berekend op 1 gr. der stof, medegerekend de kleine aan te brengen correctie (zie boven);

g. de theoretische hoeveelheid zuurstof voor 1 gr. stof;
h. de gevonden zuurstof uitgedrukt in atomen en gedeelten;
i. de theoretische hoeveelheid in atomen.

De opgave hiernevens geeft dit alles weder, voor de eerste en tweede bepaling (I en II):

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
I	1.0366	24.7	24.7	716.54	21.4	21	23.54	1.78	2
II	2.616	62.2	23	719.8	54.3	21.1	„	1.79	„

In plaats van twee atomen zuurstof ($2\ O$), is bijgevolg gevonden ongeveer $1.8\ O$, dus 0.2 minder dan vereischt wordt door de theorie ($N\ O_5\ Ag = 2\ O + N\ O_3\ Ag$). In de eerste plaats moet er de aandacht op worden gevestigd, dat de analyse van het residu getallenwaarden heeft gegeven (zie deze Verhandeling), die geheel beantwoorden aan hetgeen zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ vordert ($N\ Ag_7\ O_{11} = 3\ Ag_2\ O_2 + N\ O_3\ Ag + 2\ O$); en dat de analyse van peroxy-salpeterzuur zilver ($N\ Ag_7\ O_{11}$) bij verhitten *zonder water* heeft gegeven $5\ O$ voor het totale gehalte van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof.” Hieruit volgt derhalve, dat dit tekort van $0.2\ O$ redenen moet hebben, die onafhankelijk zijn van de reactie als zoodanig, maar te zoeken in bronnen van fouten, die zich voordoen. En, het valt niet moeielijk eenige er van te leeren kennen, die vrij duidelijk zijn; daarenboven is niet buitengesloten, dat een of meer nevenreacties optreden (onafhankelijk van het zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$, dat er wel geen deel aanneemt, en dat als residu wat zuiverheid betreft boven iedere verdenking staat; zie vroeger deze Verhandeling over de analytische gegevens).

Als bronnen van fouten kunnen b.v. de volgende worden gerekend, of zouden deze gerekend kunnen worden.

1° Wanneer de stof in aanraking komt met het water bij gewone temperatuur, dan komt een weinig gas vrij; en, naar het voorkomt meer, ingeval de stof vrij langen tijd is bewaard geworden. Dit doet zich niet voor, ten minste niet merkbaar, dadelijk na de bereiding, als de massa nog vochtig is (na wasschen met water).

2° Er drijven altijd eenige deeltjes der verbinding op het water, die den bodem van het buisje niet kunnen bereiken als gevolg van gasbelletjes die deze deeltjes dragen, zelfs als men ze tracht met een platinadraad los te krijgen (zie een weinig vroeger).

3° Een kleine hoeveelheid stof gaat drijven (door dezelfde oorzaak als opgegeven onder 2°), na zich aanvankelijk te hebben bevonden op den bodem van het buisje; en bevindt zich een voldoende hoeveelheid gas in het gebogen gedeelte, dan valt gezegde hoeveelheid stof ten deele in het schaaltje (waarin de verdeelde buis is), terwijl een ander gedeelte daar blijft, en het overige andermaal valt op den bodem van het buisje (bij het verhitten).

4° Zooals bekend, is zuurstof oplosbaarder in water dan stikstof, en het water der verdeelde buis was verzadigd met dampkringslucht. Daarin zou trouwens ook kunnen worden voorzien, en wellicht zal dit bij latere bepalingen geschieden.

5° Een kleine hoeveelheid zuurstof blijft in het residu, omdat niet al het peroxy-salpeterzuur zilver wordt ontleed, aangezien dit te veel tijd zou vorderen.

6° Ten slotte is na te gaan, of er ook soms een nevenreactie (of reacties) plaats heeft (b.v. vorming van $H_2\ O_2$).

Nog vele directe zuurstofbepalingen zullen worden verricht van het dioxy-salpeterzuur zilver $N\ O_5\ Ag$ (als deel optredende van het peroxy-salpeterzuur zilver $N\ Ag_7\ O_{11}$, zij dit: $3\ Ag_2\ O_2.\ N\ O_5\ Ag$), en wel in de eerste plaats uitgaande van een grootere hoeveelheid stof, terwijl in de methode van analyse eenige wijzigingen zullen aangebracht worden. Ook zal men trachten na te gaan, of zich ook secondaire reacties voordoen. Het onderwerp verdient wel de aandacht, want een verbinding meer met zuurstof van een element als de stikstof, dat een zoo groote rol heeft te vervullen, kan wel niet nalaten gevolgen te hebben (die thans niet te voorzien zijn), en dat wel vooral, omdat den oxyden van stikstof een uitgestrekt veld voor arbeid is toegewezen.

Het peroxy-salpeterzuur zilver in het gedeeltelijk luchtledig. Met het doel, zich zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ te verschaffen, had men in een groote reageerbuis gedaan peroxy-salpeterzuur zilver ($N\ Ag_7\ O_{11}$) versch bereid, maar droog (zijnde Bereiding N°. 29, zie pag. 16), en *water* toegevoegd. Aangezien een kleine hoeveelheid stof in zweving was (als gevolg van eenig vrijgekomen gas, zich hechtende aan eenige deeltjes der stof), wilde men trachten deze op den bodem der buis te verzamelen (met 't oog op een directe zuurstofbepaling van $N\ O_5\ Ag$, deel uitmakende van $N\ Ag_7\ O_{11} = 3\ Ag_2\ O_2.\ N\ O_5\ Ag$), door eerst een gedeeltelijk luchtledig te maken, en vervolgens lucht te doen toetreden (in een vacuum-exsiccator), maar deze bewerking gelukte niet. Daarentegen kon men er zich van overtuigen, dat een herleiding van den gewonen atmospherischen druk tot slechts eenige millimeters, zeer weinig invloed schijnt te hebben op de ontledings-snelheid van peroxy-salpeterzuur zilver (of liever van dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$, dat er deel van uitmaakt; het zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ had toch wel genoegzaam bewezen, van onder zulke omstandigheden vrij standvastig te blijven, zie vroeger). Maar het moet gezegd, de kans daartoe is niet groot, met 't oog op de beperkte ontledings-snelheid van het peroxy-salpeterzuur zilver bij gewone temperatuur, en den tijd vereischt ter ontleding van het peroxy-salpeterzuur zilver bij verhitten met water, of liever van het bioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$, daarvan deel uitmakende ($N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$); zie vroeger.

Over zelfontleding van peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ ($= 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$). Men heeft thans tot zijn beschikking de uitkomsten hierop betrekking hebbende van twee Bereidingen, namelijk die van N° 25 en N° 26, welke niet minder dan 12 maanden en zelfs nog daarenboven hadden gestaan, en wel onder een exsiccator (met zwavelzuur), terwijl de stof was vervat in een buisje (met glazen stopje, *niet* ingeslepen). De opgaven zijn verstrekt in denzelfden vorm als zulks geschiedde in de twee eerste Verhandelingen [1]). Nemen we b.v. de opgave betreffende Bereiding N° 25, De Tabel doet ons zien onder g, dat de hoeveelheid stof, die nog een weinig vochtig was (korten tijd na het wasschen) aanvankelijk bedroeg 5.7882 gr., en na drogen (op een horologieglas) 5.7857 gr. (zijnde 5.7882 gr. — 0.0025 gr.). Na overgebracht te zijn in een buisje (zie boven), was de hoeveelheid herleid tot 5.7658 gr. (er had dus dientengevolge een verlies plaats van 0.0199 gr.). Na bewaard te zijn gebleven van 28 Nov. 1895 tot 15 Dec. 1896 (in het buisje, zie boven), is er aan zuurstof vrijgekomen 0.0166 gr., dat, berekend op 1 gr. stof in 7 dagen, geeft een hoeveelheid van 0.00005 gr., dus van 0,05 milligr. De volgende Tabel geeft voor Bereiding N° 26 een aanvankelijk verlies van 0.00006 gr., later herleid tot de helft, namelijk van 0.00003 gr. op 1 gr. stof in 7 dagen (en dat, onder overeenkomstige omstandigheden als bij Bereiding N° 25).

Een eenvoudige berekening leert, dat uitgaande van het verlies van 0.00005 gr. zuurstof per week op 1 gr. stof, er voor een verlies van $2\,O$ op het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$, der $5\,O$ („gemakkelijk vrijkomende zuurstof''), zij dit 0.03384 gr. zuurstof op 1 gr. stof, niet minder dan ongeveer 13 jaren zouden vereischt worden (altijd verondersteld, dat de zelfontleding bleef plaats hebben met dezelfde snelheid, dat noodwendig niet het geval zal wezen).

De temperatuur was genoegzaam de gemiddelde jaarlijksche voor

[1]) Zie: „Verhand. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam,'' Eerste Sectie, Deel III, N° 1, p. 14.

de kamer in questie, aangezien er in den winter slechts korten tijd en zeer matig werd gestookt.

Laat hier aan worden toegevoegd, dat de producten, die zóólang hadden gestaan, niets vertoonden op 't oog van een gedeeltelijke ontleding, noch wat de kleur aangaat, noch wat betreft den glans of zelfs den kristalvorm. Integendeel gaf de massa den indruk van in 't geheel niet te zijn veranderd, zóó goed was het uiterlijk gebleven. Hetzelfde zou ook kunnen gezegd worden van Bereiding N° 27, zie de Tabel. Dit product was trouwens niet zóólang bewaard gebleven.

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 25	200 gr.	25 Nov.	25 Nov.	5.7882 gr.	—	—	
		1895	26	—	— 0.0024 gr.		
			27	—	— 0.0001	—	
			28	5.7658	0	—	
			15 Dec.	5.7492	—	— 0.0166 gr.	0.00005 gr.
			1896				
N° 26	200 gr.	27 Nov.	27 Nov.	6.9282 gr.	—	—	
		1895	28	—	— 0.0238 gr.		
			29	—	— 0.0002	—	
			30	6.0178	0	—	—
			15 Dec.	5.9986	—	— 0 0192 gr.	— 0.00006 gr.
			1896	3.9899 [1])	—	—	—
			"	3.9883	—	— 0.0016	— 0,00003
			29 Mrt.	1.941 [1])	—	—	—
			1897				
			"				
N° 27	200 gr.	23 Dec.	23 Dec.	4.2796 gr.			
		1896	24	—	— 0.0012 gr.		
			28	—	— 0.0002		
			29	—	— 0.0002		
			30	—	— 0.0002		
			31	—	0		
			4 Jan.	4.2676	0		
			1897	4.2676	—	— 0.0024 gr.	— 0.00003 gr.
			22 Mei	aangew.	—	niet waar-	
			16 Juni	voor		neembaar.	
				proeven.			

Over het aantal atomen zuurstof, die waarschijnlijk worden vrij gemaakt bij zelfontleding van $N\,Ag_7\,O_{11}$. Daarvan uitgaande, met 't oog op de gegevens die zijn medegedeeld in de voorgaande Verhandeling, dat van de 5 O „gemakkelijk vrijkomende zuurstof", 2 O betrekkelijk gemakkelijk worden gedreven uit het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$ ($= 3\,Ag_2\,O_2 .\, N\,O_3\,Ag = 3\,Ag_2\,O .\, 3\,O .\, N\,O_3\,Ag .\, 2\,O$), dat

[1]) De hoeveelheid teruggebleven na uitname voor proeven.

in volkomen overeenstemming is met de uitkomsten in deze Verhandeling vroeger blootgelegd, zou men daaruit eenig besluit kunnen trekken met betrekking tot de zuurstof, die bij spontane ontleding optreedt. De kans toch schijnt betrekkelijk nog al groot te wezen, dat de eigenschap van peroxy-salpeterzuur zilver $N Ag_7 O_{11}$, van onderhevig te zijn aan zelf-ontleding toekomt aan het bioxy-salpeterzuur zilver $N O_5 Ag$, dat daarvan een bestanddeel uitmaakt; en dat wel vooral, omdat het zilverbioxyde $Ag_2 O_2$ zich deed kennen, ten minste tot nog toe, als een vrij standvastig lichaam (zie vroeger). In dat geval zou de reactie bij gewone temperatuur (de zelfontleding) door de volgende vergelijking zijn terug te geven:

$$N O_5 Ag = N O_3 Ag + 2 O.$$

Toch is mogelijk, dat „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van zilverbioxyde ($3 Ag_2 O_2$) reageert op de zuurstof van dioxy-salpeterzuur zilver ($N O_5 Ag$), ten minste voor een deel, en wel vooral door medewerking van het zilvernitraat ($N O_3 Ag$), dat wel invloed uitoefent op de ontledingssnelheid van het peroxy-salpeterzuur zilver (zie het eerste gedeelte der voorgaande Verhandeling) bij verhitten (zonder water). Bij verhitten met water, vertoont zich deze secondaire reactie overigens niet (zie deze Verhandeling), terwijl dan het zilvernitraat in het water wordt opgelost.

Over de wijze van ontstaan der resten $N O_5 Ag$ en $Ag_2 O_2$, en de volgorde van ontstaan. Uitgaande van de structuur-formule $3 Ag_2 O_2 . N O_5 Ag$ ($= N Ag_7 O_{11}$) voor het peroxy-salpeterzuur zilver, als 't ware gegeven door de bekende feiten, wenschte men meer of min te weten, hoe deze twee resten $N O_5 Ag$ en $Ag_2 O_2$ waarschijnlijk zijn gevormd, en welk dezer resten het eerst zal ontstaan. Wat betreft de wijze van gevormd worden, daaromtrent had men zich reeds meer of min ingelaten in de Eerste Verhandeling [1]), maar toch vooral wat aangaat de vorming van het molecuul als zoodanig $N Ag_7 O_{11}$, langs electrolytischen weg [2]), en later is ook wel het een en ander gezegd over de vorming *der twee resten* en *de volgorde* waarin zij optreden; maar thans wil men trachten, wat dieper te dringen in het mechanisme der reactie. En, zooals later zal blijken, is het vrij waarschijnlijk, dat deze twee resten *niet gelijktijdig* ontstaan, maar dat de een optreedt na en door de andere, als gevolg eener secondaire reactie, om zich zoo uit te drukken. Ten slotte zijn het ionen zuurstof (zuurstof op 't oogenblik van vrijworden), die den

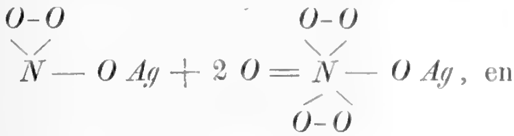
[1]) Zie Verh. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam, Eerste Sectie, deel III, No. 5 pag. 33 en 34.

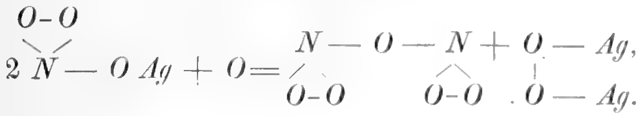
[2]) l.c. Deel V, No. 5, pag. 13 en 24.

stoot geven tot het gevormd worden der twee resten, of beter gezegd van *een* dezer twee resten. Zij:

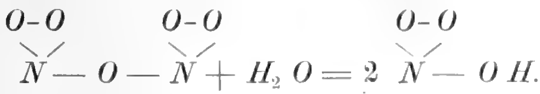
$$a.\quad N\,O_3\,Ag = Ag + NO_3.$$
$$b.\quad 2\,NO_3 + H_2\,O = 2\,N\,O_3\,H + O.$$

Deze zuurstof nu werpt zich op het zilvernitraat, en de twee endothermische resten *kunnen* onmiddellijk worden gemaakt:

1. 

2. 

De eerste reactie is terug te brengen tot een additie, de tweede reactie daarentegen is betrekkelijk samengesteld. In ieder geval zal de tweede reactie wel meer tijd vereischen dan de eerste. Ook zal reactie 2 worden gevolgd door deze:

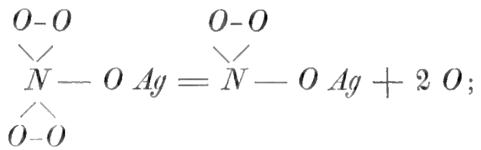


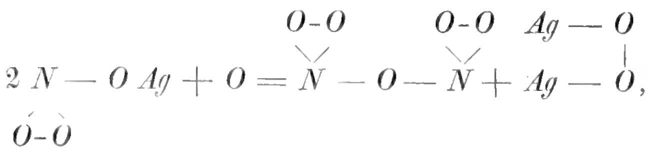
Maar deze twee resten $N\,O_5\,Ag$ en $Ag_2\,O_2$ vereenigen zich in de verhouding van $3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$ (er is namelijk verondersteld, dat men heeft te doen met een moleculaire verbinding). Dit is een factor, waarmede rekening moet worden gehouden (zie iets later).

Ter vorming van $N\,O_5\,Ag$ zijn noodig 2 atomen zuurstof ($2\,O$), en voor $3\,Ag_2\,O_2$ worden vereischt 3 atomen ($3\,O$), dus:

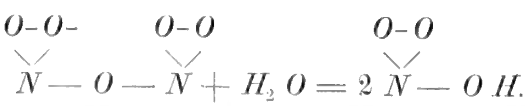
$$\left.\begin{array}{lll} N\,O_5\,Ag & \text{vordert} & 2\,O \\ 3\,Ag_2\,O_2 & \text{,,} & 3\,O \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{zie boven.}\\ 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag.\end{array}$$

Lettende op het aantal atomen zuurstof, zou men kunnen aannemen, dat van deze twee resten, die van $\check{N}\,O_5\,Ag$ de meeste kans heeft van het eerst te worden gemaakt. Maar wat hier wellicht zwaarder weegt, is wel, dat reactie 2 veel ingewikkelder is en meer tijd zal vereischen, en dat reactie 1 slechts bestaat in het verzadigen van het atoom N (zij dit $\check{N}$); terwijl de ontstane verbinding overigens zeer instabiel is. Ook volgt uit het voorgaande wel met eenige waarschijnlijkheid (zie de betrekkelijke meerdere samengesteldheid van reactie 2), dat de rest $N\,O_5\,Ag$ rijker aan *eigen energie* zal wezen dan de rest $Ag_2\,O_2$ (en wellicht bestaat er dienaangaande eenige aequivalentie tusschen $N\,O_5\,Ag$ en 3 $Ag_2\,O_2$). Daarvan uitgaande, dat deze twee resten niet gelijktijdig optreden, hetgeen mogelijk is (maar ook het tegendeel), is wel de grootste kans aan de zijde van $N\,O_5\,Ag$, om het eerst gevormd te worden, daar deze rest vermag te ontstaan eenvoudig door additie van zuurstof-ionen, met verzadiging van het atoom N; en deze rest een maximum zal bezitten aan energie. Maar men zal terecht doen opmerken, dat de stof in 't algemeen neiging vertoont naar een minimum van energie (zij dit veeleer tot „vermeerdering in entropie"). Evenwel heeft men hier op 't oog de eerste phase der reactie met de ionen zuurstof, ontstaan als gevolg der electrolyse, dus als gevolg van energie, verstrekt bij den aanvang van het proces. Beschouwt men de zaak uit een algemeen oogpunt, dan is mogelijk, dat de resten $N\,O_5\,Ag$ en $Ag_2\,O_2$ tegelijkertijd optreden (zie vroeger); of, dat b.v. de rest $Ag_2\,O_2$ ontstaat ten koste van $NO_5\,Ag$; of beide gevallen zouden tegelijk kunnen samentreffen. De omzetting van de rest $N\,O_5\,Ag$ in $Ag_2\,O_2$ laat zich teruggeven door de volgende vergelijkingen:

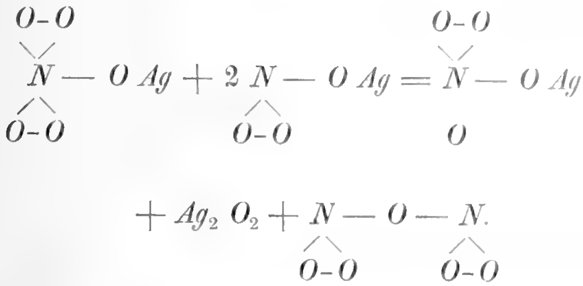
a. 

b. 

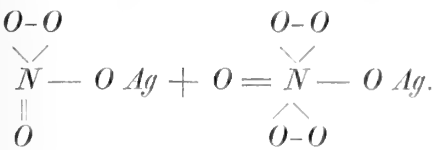
gevolgd door de reactie:



Dit wil ten slotte zeggen, dat de verbinding $NO_5\,Ag$ in bijzijn van zilvernitraat $N\,O_3\,Ag$ wellicht zal trachten te doen ontstaan $Ag_2\,O_2$, dat minder eigen energie zal bezitten dan $N\,O_5\,Ag$, ten minste is dit hoogst waarschijnlijk. Er zijn evenwel nog andere reacties, die zich kunnen voordoen, te weten de vorming van $N\,O_4\,Ag$ (onbekend):



Het laatst gezegde komt op hetzelfde neder als dat vroeger opgemerkt; alleen wordt verondersteld, dat tevens ontstaat de verbinding $N\,O_4\,Ag$ (het monoxy-salpeterzuur zilver). Deze laatste toch kan 1 O vastleggen, om opnieuw te worden dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$:



Inderdaad is de reactie, vroeger gegeven, een reactie die zich aansluit bij hetgeen in den regel geschiedt, te weten, dat een lichaam optreedt met minder eigen energie (of liever, dat er plaats heeft vermeerdering van het totale gehalte aan entropie). Men zou zich kunnen voorstellen, dat $N\,O_4\,Ag$ (hetwelk wel in water oplosbaar zal zijn, gelijk dit het geval zal wezen met $N\,O_5\,Ag$), als $N\,O_5\,Ag$ een verbinding kan vormen met $Ag_2\,O_2$, en dat aanvankelijk $N\,O_4\,Ag$ een moleculaire verbinding aangaat met 3 $Ag_2\,O_2$, dus:

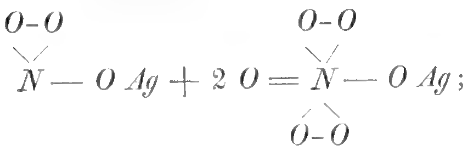
$3\ Ag_2\,O_2,\ N\,O_4\,Ag$, die dan wordt omgezet in:

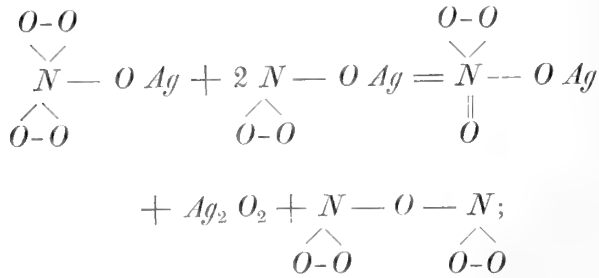
$$3\ Ag_2\,O_2,\ N\,O_4\,Ag + O = 3\ Ag_2\,O_2.\ N\,O_5\,Ag.$$

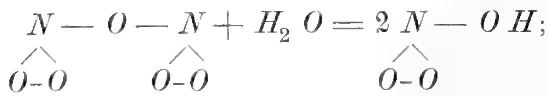
De volgorde van (genoegzaam) alle reacties zou bijgevolg wezen:

1. $$N\,O_3\,Ag = N\,O_3 + Ag;$$

2. $$2\,N\,O_3 + H_2\,O = 2\,N\,O_2.\,O\,H + O;$$

3. 

4. 

5 

6. $3\, Ag_2\, O_2 + N\, O_4\, Ag = 3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_4\, Ag;$

7. $3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_4\, Ag + O = 3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_5\, Ag.$

Daarenboven zou men het bestaan moeten aannemen van vele verbindingen van $N\, O_4\, Ag$ en $N\, O_5\, Ag$ met $Ag_2\, O_2$, maar men zal daarbij voor 't oogenblik niet blijven stilstaan (zie een weinig lager). Er zij nog opgemerkt, dat de octaëdrische kristalvorm wel zal bepaald worden door de grootste massa van het molecuul $N\, Ag_7\, O_{11}$ ($= 3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_5\, Ag$), zijnde deze $3\, Ag_2\, O_2$.

Naar hetgeen boven is gezegd, zou eerst moeten ontstaan $Ag_2\, O_2 .\, N\, O_4\, Ag$, dat zich kan omzetten in $Ag_2 O_2 .\, N\, O_5\, Ag$; en 1 O van de rest $N\, O_5\, Ag$ zou opnieuw met $N\, O_2 .\, O\, Ag$ doen ontstaan: $Ag_2\, O_2$, zoodat kan optreden: $2\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_4\, Ag$, dat wordt omgezet in $2\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_5\, Ag$, dat door 1 O een nieuw molecuul $Ag_2\, O_2$ vormt, dus kan worden gevormd $3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_4\, Ag$, omgezet wordende in $3\, Ag_2\, O_2 .\, N\, O_5\, Ag$ (in evenwicht zijnde met zijn medium op het oogenblik der electrolyse).

Alvorens optreedt $N\, O_5\, Ag$, heeft er vorming plaats van $N\, O_4\, Ag$, maar dit vermag niets vóór de omzetting in $N\, O_5\, Ag$; want alsdan doet 1 O (van $N\, O_5\, Ag$) gevormd worden $Ag_2\, O_2$, enz. Het dioxy-salpeterzuur zilver $N\, O_4 .\, O\, Ag$ zou dus dienst doen als overdrager van O ter vorming van $Ag_2\, O_2$, dat dus zou ontstaan tengevolge eener, te noemen, secondaire reactie. Om eerst de vorming aan te nemen van $Ag_2\, O_2$, dat onoplosbaar is in water, zou, zoo schijnt het, te veel bezwaren hebben als punt van uitgang; daarentegen zal $NO_5\,Ag$ wel oplosbaar wezen in water, en (zie boven) een in water onoplosbare verbinding doen ontstaan met $Ag_2\,O_2$ (aanvankelijk $Ag_2O_2 . NO_4\,Ag$). Ook verbindt $Ag_2\,O_2$ zich *niet* met $NO_3\,Ag$, anders zou men kunnen aannemen, na eerst $Ag_2\,O_2$ te laten optreden, de vorming van $3\,Ag_2\,O_2 . NO_3\,Ag$, wordende deze dan omgezet in $3\,Ag_2\,O_2 . NO_5\,Ag$ (voor een oogenblik daargelaten de argumenten, die deze aanname minder aannemelijk maken). Voegen we hieraan toe, dat de verbinding met zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ (zij deze aanvankelijk $Ag_2\,O_2 . NO_4\,Ag$; zie boven) waarschijnlijk wordt opgelost in het salpeterzuur, dat wordt vrijgemaakt [1]) door de electrolyse, zoodat het lichaam $3\,Ag_2\,O_2 . NO_5\,Ag$ in oplossing zou kunnen ontstaan, en uit de oplossing kristalliseeren door de diffusie met de eigenlijke oplossing, waardoor het onoplosbaar wordt.

Het ontstaan van $3\,Ag_2\,O_2 . NO_5\,Ag$ zou dus wellicht aldus zijn te verklaren, door aan te nemen, dat aanvankelijk wordt gevormd bioxy-salpeterzuur zilver $NO_5\,Ag$, dat reageerende op zilvernitraat $NO_3\,Ag$, eerst doet ontstaan $Ag_2\,O_2 . NO_4\,Ag$, omgezet wordende met O en $NO_3\,Ag$ achtereenvolgens, in:

$$
\begin{array}{r}
Ag_2O_2 . NO_5\,Ag \\
2\,Ag_2O_2 . NO_4\,Ag \\
2\,Ag_2O_2 . NO_5\,Ag \\
3\,Ag_2O_2 . NO_4\,Ag \\
3\,Ag_2O_2 . NO_5\,Ag,
\end{array}
$$

de laatste van welke zich afzet, naar deze wijze van opvatting, van den oplosbaren staat in kristallen, die, als zijnde een vrij goede geleider der electriciteit, in grootte kunnen toenemen, door de rol te vervullen van anode.

Eenige opmerkingen naar aanleiding van de verhouding der resten $NO_5\,Ag$ en $Ag_2\,O_2$ van het molecuul $NAg_7\,O_{11}$. Uitgaande van de verhouding $3\,Ag_2\,O_2 . NO_5\,Ag$ voor de verbinding $NAg_7\,O_{11}$, en verondersteld, dat deze een moleculaire verbinding is, heeft men bijgevolg als verhouding der resten die van 3 : 1. Men zou kunnen aannemen, en zoo ook in overeenkomstige gevallen, dat ieder dezer twee resten als 't ware een afzonderlijk lichaam uitmaakt, zooals b.v. in $H_2\,O$ het geval is met O en H; en men zou kunnen spreken van moleculaire affiniteiten (bij moleculaire verbindingen), als van atomistische affiniteiten. Aldus opgevat, zou de rest

[1]) Zie Verhand. K. Akad. v. W. te Amsterdam. Eerste Sectie Deel III, N° 8, pag. 27 en 28.

$N\,O_5\,Ag$ driewaardig zijn tegenover $Ag_2\,O_2$ als eenwaardig geheel hier genomen. De rest $NO_5\,Ag$ zou zich dan meer of min zoo verhouden als veelal het geval is met het atoom N (alhoewel meer toevalliger wijze):

$$3\,(Ag_2\,O_2)^{\mathrm{I}}.\,(N\,O_5\,Ag)^{\mathrm{III}}.$$

Zulk soort van beschouwingen bezitten voor 't oogenblik zeer weinig waarde, dit moet erkend worden, maar wellicht komt de tijd, dat men zich meer zal moeten inlaten met zoogenaamde moleculaire verbindingen, en het beginsel van affiniteiten voor atomen (en van samengestelde resten, met vrije affiniteiten), zal later wel van toepassing kunnen zijn op resten van moleculaire verbindingen. Want eigenlijk gezegd, heeft men in den grond eenig recht, om aan deze soort resten affiniteiten toe te kennen (altijd, zich plaatsende op een zuiver speculatief gebied), ingeval wordt aangenomen, dat ook de atomen verbindingen zijn. Zelfs zou men geneigd wezen nog verder te gaan, en willen aannemen, dat deze atomen van atomen op hunne beurt samengesteld zijn, en zoo tot in het *oneindige*. Er is hier noodwendig alleen sprake van een afgetrokken denkbeeld, dat namelijk de samenstelling der stof nimmer tot de uiterste grens zal te vervolgen zijn, om reden, dat de stof oneindig samengesteld is, in den zin als medegedeeld. Van welken aard de stof ook moge zijn, hetzij direct toegankelijk voor onze zintuigen of indirect, of niet toegankelijk (dus van theoretische natuur), het schijnt, dat men zich heeft voor te stellen, dat alle stof in den grond oneindig samengesteld is, of anders gezegd, dat er in zake materie geen einde is.

Over het oversalpeterzuur. Teneinde meer of min aantevullen, wat met betrekking tot dit onderwerp vroeger in een der Verhandelingen [1]) werd medegedeeld, zij opgemerkt, dat aan dit lichaam ook de volgende structuurformule is toegekend:

$$O_2\,N — O — O — N\,O_2\,,$$

zooals de formule $O_2\,N — O — N\,O_3$ (zijnde het atoom O direct gebonden aan de twee atomen stikstof). Voor 't oogenblik ten minste zal hierop niet worden ingegaan, maar in ieder geval zouden minstens twee isomeren der moleculairformule $N_2\,O_6$ kunnen bestaan.

1) Zie: Verhand. K. Akad. v. W. te Amsterdam. Eerste Reeks. Deel V, No. 5, pag. 31 N. Handb. d. Chem. v. Fehling u. Hell., Bd. VI S. 1329 (1897).

De proeven, die beschreven zijn in deze Verhandeling, en de beschouwingen, veeleer van theoretischen aard, schijnen, in 't kort medegedeeld, op het volgende neêr te komen.

Besluit 1. Bij elimineeren van één atoom zuurstof (1 O) van het molecuul van peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ (zij dit: $3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$), en behandelen van het terugblijvende met water (bij gewone temperatuur), blijft er zilverbioxyde terug [1]) $Ag_2\,O_2$, en wel $3\,Ag_2\,O_2$ op $1\,N\,O_3\,Ag$, door het water uitgetrokken. Aangezien het zilvernitraat betrekkelijk in weinig tijd wordt uitgetrokken, zou men daarin wellicht een argument kunnen vinden voor het ontstaan van een verbinding [2]) der formule $N\,O_4\,Ag$, monoxy-salpeterzuur zilver, (als gevolg van het aanvankelijk uitgedreven worden van 1 O). En omdat er $3\,Ag_2\,O_2$ terugblijft (op $N\,Ag_7\,O_{11} = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$), kan er een argument van beteekenis uit worden geput voor de structuurformule $3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$ van het peroxy-salpeterzuur zilver.

2. Met 't oog op eenige eigenschappen van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, vooral wat aangaat de betrekkelijk groote stabiliteit van dit oxyde, werd peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ (zij dit: $3\,Ag_2O_2 . N\,O_5\,Ag$) verhit met *water* [3]). Salpeterzuur zilver treedt dan in oplossing, zuurstof komt vrij, en er blijft terug zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$), en wel 3 $Ag_2\,O_2$ op het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$ (zij dit: $3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$) van peroxy-salpeterzuur zilver. Dit is wel een nog krachtiger argument voor de structuur-formule reeds vroeger voorloopig gegeven, zoodat deze thans wel kan worden beschouwd als te zijn gegrondvest op genoegzaam positieve feiten. De laatste uitkomsten vooral bieden een uitstekende contrôle aan voor diegene, verkregen betreffende de relatieve snelheid, waarmede de 5 O („gemakkelijk vrijkomende zuurstof") worden uitgedreven; uitkomsten, die het meer of minder waarschijnlijk maakten, dat deze 5 O dienaangaande in twee groepen [4]) zijn te splitsen, te weten die van $3\,O + 2\,O$ ($3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag = 3\,Ag_2\,O . 3\,O . N\,O_3\,Ag . 2\,O$).

3. Op gemelde eigenschap van peroxy-salpeterzuur zilver ($N\,Ag_7\,O_{11}, = 3\,Ag_2\,O_2 . N\,O_5\,Ag$), van te worden ontleed door verhitten met water (zie boven onder 2.), is een bereidingswijze gebaseerd van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$, die gelegenheid geeft, zich op een betrek-

---

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 3.

[2]) l. c. pag. 10.

[3]) l. c. pag. 12.

[4]) Zie Verhand. d. Kon. Akad. v. W. te Amsterdam, (Eerste Sectie), deel V, N°. 5. pag. 9—21.

kelijk eenvoudige wijze een groote hoeveelheid van dit lichaam te verschaffen [1]).

4. Dank zij gemelde eigenschap van het peroxy-salpeterzuur zilver (zie onder 2.) heeft men getracht, de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het *dioxy-salpeterzuur zilver* $N\,O_5\,Ag$ (daarvan deel uitmakende) langs *directen* weg te bepalen [2]). In plaats van 2 O, gelijk de theorie verlangt, is evenwel ongeveer 1.8 O gevonden. Latere bepalingen zullen echter wellicht dit verschil (zij dit nagenoeg 0.2 O) geringer doen zijn.

5. De studie is vervolgd van het peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ ($= 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$), b.v. met betrekking tot de eigenschap van onderhevig te zijn aan *zelfontleding* [3]), zoo ook in het *gedeeltelijk luchtledig* [4]), en wat aangaat het aantal [5]) atomen zuurstof, die worden uitgedreven bij zelfontleding.

6. Er werd ter sprake gebracht, de *wijze* van ontstaan en de *volgorde* der resten $N\,O_5\,Ag$ en $Ag_2\,O_2$ (van het molecuul $N\,Ag_7\,O_{11}$). Waarschijnlijk treedt eerst op $N\,O_5\,Ag$, en dan $Ag_2\,O_2$ (door inwerking van 1 O van $N\,O_5\,Ag$ op $N\,O_3\,Ag$), en van de twee endothermische resten wordt diegene met meer (eigen) energie ten deele omgezet in de rest met minder energie [6]). Tevens is gehandeld over de *verhouding* waarin de twee resten zich bevinden in het molecuul (zij die van 3 : 1), dat aanleiding gaf tot eenige theoretische beschouwingen *van de stof als zoodanig* [7]).

7. Eenige eigenschappen van zilverbioxyde $Ag_2\,O_2$ zijn medegedeeld [8]), van dioxy-salpeterzuur zilver $N\,O_5\,Ag$ (een theoretisch lichaam), van peroxy-salpeterzuur zilver $N\,Ag_7\,O_{11}$ ($= 3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$), en van het zilveroxyde $Ag_2\,O$, dat er van afstamt. Er is melding gemaakt van een structuurformule toegekend aan het oversalpeterzuur [9]).

8. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan verschillende *peroxyden van zilver*, en de groote verwarring aangeduid [10]) met betrekking tot dit onderwerp in de scheikundige Litteratuur.

---

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 16.
[2]) l. c. pag. 26.
[3]) l. c. pag. 30.
[4]) l. c. pag. 29.
[5]) l. c. pag. 31.
[6]) l. c. pag. 35.
[7]) l. c. pag. 37.
[8]) l. c. pag. 20.
[9]) l. c. pag. 38.
[10]) l. c. pag. 22.

In een volgende Verhandeling zal vooral het peroxy-zwavelzuur zilver een ruime plaats innemen, waarvan de studie veel meer bezwaren oplevert dan het geval is met het peroxy-salpeterzuur zilver (vooral wat de bereiding betreft, als gevolg van de betrekkelijke geringe oplosbaarheid in water van het zwavelzuur zilver). In plaats van een gedeelte te behandelen van het onderwerp, wenschte men duidelijkshalve het voornaamste te gelijk te geven; en om die reden zijn de uitkomsten dezer studie, welke thans zouden zijn opgenomen, zooals vroeger werd aangekondigd, uitgesteld tot de volgende Verhandeling.

UTRECHT, 25 September 1897.

(27 November 1897).

Onderzoek omtrent den bouw en de eigenschappen van het zoogenaamde Hardglas.

VAN

L. HOUWINK.
Stud. a. d. Pol. Sch. te Delft.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
(EERSTE SECTIE.)
Deel VI. N°. 2.
(Met 9 platen.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Maart 1898.

Onderzoek omtrent den bouw en de eigenschappen van het zoogenaamde Hardglas.

VAN

L. HOUWINK.
Stud. a. d. Pol. Sch. te Delft.

—

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VI. N°. 2.

(Met 9 platen.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1898.

INHOUD.

I.	Inleiding	Blz.	5.
II.	Harden	„	6.
III.	Optisch onderzoek	„	8.
IV.	Ontlaten	„	14.
V.	Beschouwing omtrent de vorming	„	14.
VI.	Soortelijk gewicht	„	15.
VII.	Brekingsindex	„	17.
VIII.	Buigvastheid	„	19.
IX.	Hardheid	„	21.
X.	Chemisch gedrag	„	22.
XI.	Siemens Hardglas	„	23.
XII.	Vergelijking van Hardglas en andere stoffen	„	25.
XIII.	Verklaring der afbeeldingen	„	27.

INLEIDING.

In 1874 kon men in de „Zeitung für Lothringen" en even later in de „Glashütte" in n° 44 een bericht lezen van A. de la Bastie in Richmond over eene soort glas, dat hij gemaakt had. Het was buitengewoon bestand tegen stoot, slag en snelle temperatuursveranderingen. In Bourg verrees voor het vervaardigen van dat glas eene fabriek, die later te gronde ging.

Max Pilatti [1]) bepaalde de dichtheid, welke 2,522 was en de hardheid 5, verder vond hij dat het een gewoon alkali-kalkglas was [2]).

Carl Pieper, Civiel Ingenieur in Dresden, deelde toen mede, dat ook hij een dergelijk soort glas gemaakt had. Bauer [3]) onderzocht het verder en vond overeenkomst met de reeds lang bekende glastranen.

Verder werden nu en dan door dezen en genen proeven genomen over het springen van glastranen, over het draagvermogen, over polarisatie en lichtbreking van hardglas (in het vervolg aangehaald), maar onvolledig en onsamenhangend [4]).

Bezig zijnde met een onderzoek naar de oorzaken der vatbaarheid van sommige stoffen voor harding, werd ik door den Heer Professor Behrens attent gemaakt op het zoogenaamde hardglas, omdat dit

---

[1]) Polytechn. Centralblatt 1875 blz. 515.

[2]) Glashütte 1875 n° 2.

[3]) Polytechn. Centralblatt, 1875 blz. 516.

[4]) H. J. Violle. Cours de Physique I blz. 460. Henrivaux, Verre et Verrerie blz. 32.

doorzichtig is en dus geschikt voor optisch onderzoek met behulp van polarisatie-verschijnselen.

Veel heb ik te danken gehad gedurende de maanden November, December 1895, en Januari, Februari 1896, waarin dit onderzoek aan de Polytechnische school te Delft plaats vond, aan zijne steeds verleende hulp en raadgevingen, waarom ik een woord van dank hier niet wil weglaten.

Gewoon glas: d. w. z. glas, dat langzaam bekoeld is, is amorph, en niet polariseerend. Koelt men zulk glas echter plotseling af, dan treden inwendige spanningen op en deze verraden zich door de zoogenaamde spanningspolarisatie.

Een voornaam deel van het onderzoek was gewijd aan het maken van het hardglas.

Zeer bekend zijn de glastranen (verkregen door een druppel vloeibaar glas in koud water te laten vallen). Ze springen, als men alleen de punt afbreekt, in grof gruis. Ook weet men, dat in de hardglasfabrieken het glas roodgloeiend in baden van bepaalde temperatuur gedompeld wordt, om daarin af te koelen.

De firma Siemens in Dresden bezit voorzeker eene der meest bekende hardglasfabrieken. Daar perst men het vloeibare glas in vormen en laat het hierin bekoelen.

Zoo worden er vensterglas, dakpannen, traptreden enz. gemaakt. Ook kan men volgens hunne opgaven het hardglas zeer goed boren en slijpen, maar niet met den diamant snijden.

De firma in Dresden was zoo vriendelijk op aanvrage een doosje met monsters te sturen, om de eigenschappen hiervan met hier vervaardigd hardglas te kunnen vergelijken.

II. Harden.

De wijze van het harden of beter gezegd van het afkoelen na het verhitten is van het meeste belang om goed materieel te krijgen.

Men moet òf direct koelen òf koelen en tevens in vormen persen.

Eene der eerste vragen is nu natuurlijk, welk materiaal moet men als grondstof nemen en de tweede, waarin moet gekoeld worden?

De grondstof, die gebruikt werd, was nog al uiteenloopend, want het waren:

a. glazen staven (kali-natronglas),
b. reepen gewoon vensterglas,
c. reepen spiegelglas,
d. door cobalt blauw gekleurd glas.

Verder werden er nog een paar proeven gedaan om organische, niet polariseerende stoffen, zooals hars en schellak, dubbelbrekende te maken. Dit gelukte ook.

De koelbaden bestonden uit:

a. olie (gekookte lijnolie),
b. water met 5 °/₀ zwavelzuur,
c. kwik,
d. geconcentreerde oplossing van chloorcalcium.

De geperste stukken werden verkregen met:

a. een platte smidstang,
b. een fitterstang,
c. een bak met chamottepoeder,
d. twee vuurvaste steenen,
e. twee ijzeren blokken.

Later bleek, dat ook lucht harding kan teweeg brengen.

Deze stoffen waren zoo gekozen, wegens hun hoog kookpunt of wegens hunne verschillende geleidingscoëfficiënten voor de warmte.

Met de fitterstang kreeg men prismatische stukken met gekartelden omtrek.

De smidstang gaf geen ander resultaat als grof gruis. Na iets afgekoeld te zijn vlogen de stukken met een hevigen slag uit elkaar, soms met zooveel geweld, dat de brokken 4 à 5 meter verspreid werden.

Met de andere hardingsmiddelen was de uitslag min of meer gunstig.

Van de vloeibare hardingsmiddelen gedroeg zich de chloorcalcium-oplossing even slecht als de smidstang, zelfs tot kokens toe verhit gaf zij slechte resultaten.

Kwik gaf na verwarming zeer goede stukken, welke in geen enkel opzicht voor de in olie geharden onderdeden.

Verdund (5 °/₀) zwavelzuur gaf twee goede stukken, de meeste stukken waren geknapt. Alle vloeibare middelen konden zich evenwel niet met gekookte olie vergelijken. Hierbij was de speelruimte, wat de temperatuur betreft, zoowel van de olie als van het glas het grootst.

Het maximum van harding werd bereikt met dik vloeibaar glas, bij verwarming tot donkere roodgloeihitte is de harding wel minder sterk dan wanneer men het glas tot begin van smelting verhit, maar toch duidelijk waar te nemen.

Geharde stukken. — De in vloeistoffen gekoelde stukken bevatten allen in min of meerdere mate holten, welke vermoedelijk gevuld zijn met alcalische dampen.

Daar bij de latere nauwkeurige beschrijving deze holten uitvoerig behandeld zullen worden zal ik er nu maar van afstappen.

Een groote factor bij het koelen is de wijze waarop men de staven in de vloeistof dompelt.

Brengt men ze plotseling vertikaal in het bad, dan kan men meestal een goed product verwachten.

Heeft men een helling aan de staven gegeven dan bestaat kans, om plotseling in den bak eene hevige beweging, gepaard met een knal, waar te nemen. Gebeurt dit, dan vindt men van de staaf slechts gruis.

Bewaren. — Het bewaren levert bij gewone temperatuur geen bezwaar op. Bij zeer lage temperatuur wordt de kans van springen daarentegen zeer groot. Een aantal monsters hardglas, in verschillende bakjes gesorteerd, werd in eene kamer bewaard, waar overnacht niet gestookt werd. Na eenen nacht met strenge vorst waren vele stukken gesprongen, en lag het gruis over de tafel verspreid.

III. Optisch onderzoek.

Nadat op de bovenstaande wijze een behoorlijke voorraad glas gekoeld was, werd een aanvang gemaakt met optisch onderzoek.

Het uitgangspunt was het bekende verschijnsel, dat een amorph niet gespannen lichaam niet polariseert, maar dat het polariseerende wordt, als spanningen daarin optreden. Het is immers bekend, dat men een glazen bolletje door middel van klemschroeven dubbel brekende kan maken, en dat het alsdan een fraai polarisatiekruis vertoont. De intensiteit van het verschijnsel neemt toe met den druk; of het door uitwendigen druk, of door spanningen in het materieel teweeg gebracht wordt, doet niets ter zake. Heeft men een doorschijnend materiaal, dan kan men de spanningen dus nagaan, door het materiaal tusschen gekruiste nicols te brengen. Ook zonder dit middel kan men reeds aan de wijze van breken de vermoedelijke richting der spanningen nagaan.

Bij de gebroken staven, waren enkele stukken, die nog in verband gebleven waren. Men kan zich dergelijke preparaten met zekerheid verschaffen, door de stukken hardglas in met water aangemengde gips te leggen, zoodanig, dat een hoekje buiten de gips uitsteekt, en na het verharden der gips het uitstekende puntje af te breken. Hierbij krijgt het hardglas vele scheuren, intusschen blijven alle brokken op hun plaats. Door verwijdering der gips legt men vervolgens de preparaten bloot.

Eenvoudiger in de uitvoering, maar een zorgvuldigere behandeling vereischende, is de volgende methode.

Men omwikkelt de staaf geheel nauwsluitend met filtreerpapier en slaat nu aan het einde met een korten, zwaren slag, het glas stuk. Wanneer men nu de staaf met de noodige voorzichtigheid van het papier ontdoet, kan men het uiteenvallen der brokstukken voorkomen. Heeft men dergelijke gesprongen stukken op de een of andere wijze verkregen dan zal men met eene loupe of eene zwakke vergrooting van het microskoop de scheuren zeer nauwkeurig kunnen nagaan. Dit doende bemerkt men bij ronde staven het volgende:

De breukvlakken van ronde staven hardglas zijn steeds kegelvlakken.

Aan vierkantige staven treden piramidale breukvlakken op.

Al naar de plaats der breuk zijn de kegelvormige scheuren over de geheele lengte der staaf parallel of zij hebben tegengestelde richtingen aan weerszijden der breuk.

Het geval fig. 5 Plaat I heeft steeds plaats, als de staaf gebroken wordt op een zoo grooten afstand van de uiteinden, dat deze door haar spanning geen invloed meer op de breuk uitoefenen. In dit geval is aan weerszijden der breuk evenwicht.

Oefent het uiteinde wel invloed uit, dan zal steeds de top naar dit uiteinde gekeerd zijn.

Uit dit alles blijkt dus, dat er spanning in de lengterichting heerscht en wel aan den omtrek het meest.

Bij het stukslaan schuiven de buitenste lagen over de binnenste evenwijdig met de lengteas van de staaf en doen zoo de zeer goed waar te nemen dakpanstructuur ontstaan.

Een vierkante staaf hardglas werd aan een der einden verwarmd, met het gevolg dat dit einde vergruisde. Het overblijvende stuk vertoonde een breukvlak van veelzijdigen piramidalen vorm. Wij hebben hier eenen overgang van den vierkanten vorm tot den ronden.

Stukken spiegelglas, die tusschen twee ijzeren platen afgekoeld waren, vertoonden een dakvormige breuk en bijzondere neiging tot gruis uiteen te vallen.

Uit de genoemde verschijnselen zou men de gevolgtrekking kunnen afleiden, dat de vlakken van gelijke spanning evenwijdig loopen aan de afkoelingsvlakken en dat de spanning van buiten naar binnen afneemt.

Dat dit vermoeden juist is, zal uit het volgende blijken.

Bij het vervaardigen van preparaten voor optisch onderzoek van hardglas dient de voorzorgsmaatregel in acht genomen te worden, het glas vóór het harden in den gewenschten vorm te brengen. Door zagen, slijpen en polijsten van gehard glas worden belangrijke veranderingen van spanning en polarisatie teweeggebracht, die allerhande dwalingen kunnen veroorzaken.

De afbeelding I op plaat III [1]) geeft een overzicht der polarisatieverschijnselen van een vierkant stuk hardglas, dat in dier voege tusschen gekruiste nicols geplaatst is, dat het beeldvlak te lood staat op de beide vlakken, die door stukken ijzer gekoeld waren.

In het midden vertoont zich een flauw getint veld, dat op sommige plaatsen breeder wordt en daar tevens van kleur verandert.

Bij nader toezien neemt men waar, dat op deze plaatsen het glas een bewerking ondergaan heeft, of dat daar een schilfer van den rand afgesprongen is.

Om dit middenveld loopen gekleurde lijnen, en wel verandert de kleur in de volgorde van den regenboog.

Dit gebeurt tot den rand toe, alleen is op te merken, dat de banden smaller worden en dat een daarvan, zwart van kleur, omgeven is door twee witte banden.

Hier is dus de spanning nul. De zwarte lijn zal voortaan als *nullijn* aangeduid worden.

Aan de einden ziet men pauwstaartachtige figuren (waarschijnlijk veroorzaakt door afspringen der hoeken).

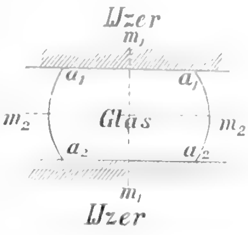
Plaat III afbeelding II geeft eene voorstelling van hetzelfde stuk, op een der afkoelingsvlakken liggende. In het middenveld vertoont zich

[1]) De afbeeldingen zijn vervaardigd met behulp van eenen Seibert'schen teekenspiegel.

weder een flauwe tint, daaromheen de nullijn, die weer elke verandering in het glas door eene afwijking uit hare richting aanwijst. Voor de einden geldt hetzelfde als bij afb. I.

Dat hier dezelfde verschijnselen, ofschoon in zeer verminderde mate optreden als boven, ligt aan de wijze van koelen.

Nemen we nevenstaande figuur, dan zal de laag a_1 a_1 het sterkst gekoeld worden en dus van m_2 naar a_1 eene vermeerdering van afkoeling plaats grijpen. Hoewel in mindere mate, zal datzelfde van m_1 naar a_2 plaats grijpen en wel omdat aan de buitenzijde van a_2 meer ijzer, dat een goede warmtegeleider is, aanwezig is, dan bij m_1.



Uit het bovenstaande volgt, dat in de standen van plaat III uitdooving moet plaats hebben, wanneer de lengteas van het preparaat met een der polarisatievlakken samenvalt.

Plaat IV. Afbeelding III geeft een afbeelding van den rand van het stuk, zoodanig genomen, dat de nullijn juist door het centrum van het veld loopt.

Om de helderste tinten te krijgen, is de optische as van het preparaat onder 45° ten opzichte der polarisatievlakken georiënteerd. Aan weerszijden der nullijn doet zich wit der eerste orde voor, en daarbuiten gekleurde banden, naar den rand smaller en helderder wordende. Om de verdeeling der spanningen te weten te komen werd een gipsplaatje (rood eerste orde) op het oculair gelegd.

Is de optische middellijn der gipsplaat evenwijdig aan de lengterichting van het glas (afbeelding VI) dan verplaatst zich de nullijn naar den buitenkant. Staan de genoemde lijnen loodrecht op elkaar (afbeelding V) Plaat V dan verplaatst de nullijn zich naar binnen en wel in beide gevallen naar de plaats waar een rood eerste orde was.

In het eene geval hebben wij subtractie en in het andere additie. Hieruit volgt dan, dat aan de buitenzijde naar binnen gerichte spanningen optreden tot aan de nullijn, verder dat het centrum der staaf op de nullijn eene spanning uitoefent die van buiten naar het centrum gericht is.

Plaat V. Afbeelding VI. Vergrootte afbeelding der scheur *a* op plaat III.

De invloed der vrij ondiepe scheur, die onder het harden ontstaan was en die hier in een vlak loodrecht op hare lengterichting afgebeeld is, kan duidelijk aan de polarisatieverschijnselen nagegaan worden. De gekleurde banden loopen naar den rand toe, evenzoo de nullijn. Op het eerste gezicht zou men zeggen, dat juist voor het diepste gedeelte der scheur in het wit der eerste orde een nieuw gedeelte der nullijn ontstaan ware.

Bij een sterkere vergrooting ziet men, dat men hier niet met eene zwarte lijn te doen heeft, maar met een bundel van nauw opeengedrongene blauwe en roode strepen.

Om te onderzoeken of deze kleurverschijnselen eenige opheldering over den invloed van scheuren op de spanning zouden kunnen geven, maakte ik op eene andere plaats van het praeparaat, met een vijl, een groefje. Afbeelding VII geeft hiervan eene afbeelding.

Hier zijn de verschijnselen niet zoo nauw opeengedrongen als in afbeelding VI, maar zij zijn allen in dezelfde volgorde aanwezig, ook het bewuste donkerkleurige plekje, dat het aanzijn te danken heeft aan het optreden van niet parallele spanningen in de omgeving van scheuren en inkeepingen.

Invloed van slijpen enz. — Bepaalt men van een stukje hardglas de polarisatiekleuren, slijpt men daarna het stukje dunner, zoo zal men zien, dat de dubbele breking door het afslijpen verminderd is. Slijpt men een stukje met nullijnen tot een wig, zoodanig dat de nullijnen evenwijdig aan de objecttafel blijven, dan zal men zien, dat de dubbelbreking naar het dunne einde afneemt. De nullijnen loopen hier te niet.

Heeft men door voorzichtig stukslaan een schilfer van den omtrek der staaf verkregen, dan ziet men dat deze slechts weinig of in het geheel niet polariseert.

Het grof gruis van een geknapte staaf polariseert bijna in het geheel niet.

Uit andere proeven bleek, dat in welke richting men ook slijpt, steeds het slijpen verplaatsing der polarisatiebanden en over het algemeen ook achteruitgang der dubbelbreking tengevolge heeft.

Sprekend wordt dit verschijnsel, zoodra men een glasbolletje van niet te grooten diameter hardt. Tusschen gekruiste vicols vertoont dit bolletje wit 1^e orde, met een polarisatiekruis.

Pas heeft men van dit bolletje een segment of een schijfje geslepen, ziet men het witte veld omgeven door eene reeks van gekleurde concentrische cirkels.

Daartusschen ziet men geen nullijn, maar dit kan ook niet, daar door den geringen diameter en door het gevaar van springen, de dikte van de schijf gewoonlijk niet zoo gering gemaakt kan worden, dat men het stukje van den bol, waarop de punten der nullijn liggen, als een cilinder kan beschouwen, wiens beschrijvende lijn loodrecht op de objecttafel staat. Nu is er steeds door den bolvorm in zulke cilindervlakken dubbelbreking.

Gelukt het eene zeer dunne schijf te slijpen, dan verdwijnen de kleuren weer, maar de nullijn treedt op.

Plaat VI afbeelding VIII geeft de afbeelding der polarisatieverschijnselen in de omgeving van eene holte. Bij het afkoelen van het glas, gebeurt het meermalen, dat in het oorspronkelijk geheel gave stuk holten ontstaan (waarschijnlijk met zeer verdunde alkalidampen gevuld).

Beziet men deze holten onder het polariseerend microscoop, tusschen gekruiste nicols, dan vertoonen zich om de dan bijna zwarte holte gekleurde randen en bij zeer nauwkeurig onderzoek, aan de in de asrichting gelegen uiteinden zwarte driehoekjes, liggende in wit eerste orde.

Er heeft dus in de lengterichting vereffening van spanning plaats gehad. De holte dankt dus haar ontstaan aan verbreking van den samenhang onder de contractie van het glas, waarvan het binnenste gedeelte nog in zachten toestand verkeerde.

Opmerkelijk is nu:

I. Dat een stuk hardglas langs de nullijn kan doorgezaagd worden zonder te breken. In elk der stukken vormen zich weer twee nullijnen, maar de kleuren zijn zwakker.

II. In de richting loodrecht op de nullijnen kan men de staaf alleen dan doorzagen, als men om den geheelen omtrek, dus symmetrisch ten opzichte der as, inkeept, en wel zeer voorzichtig, want neemt men ergens te veel weg dan springt de staaf.

III. Is een staaf vrijwel bewerkt, dan laat ze hoe langer hoe meer bewerking toe.

Dit laatste strookt met het verschijnsel, dat de polarisatie achteruit gaat.

IV. In richtingen, evenwijdig aan de nullijn kan men de staaf alleen met veelvuldige lange rusttijden doorzagen. In den rusttijd wordt de spanning waarschijnlijk vereffend.

V. In richtingen loodrecht op de nullijn kan men voorzichtig met groote rustpoozen inzagen totdat de zaagsnede even de plaats gepasseerd heeft waar zich oorspronkelijk de nullijn bevond. De afstand wordt grooter door meerdere rusttijden.

IV. Ontlaten.

Evenals men gehard staal kan ontlaten, kan men dit ook met hardglas doen. Hoewel bij alle soorten goed waar te nemen, doet het verschijnsel zich bij de in kwik geharde staven het zuiverst voor, omdat bij deze de dubbelbreking het hoogst opgevoerd is, en omdat deze staven het rijkst aan holten zijn.

Nu was:

Polarisatiekleur bij het ontlaten.

Temperatuur.	Kleur.
Gewoon.	Blauw.
100° C.	Rood I.
500° C.	Wit I.
Rood gloeihitte.	Bijna niet meer.
Wit gloeihitte (begin smelten).	Gewoon glas.

Daar de holten ontstaan zijn door spanningen zouden ze theoretisch weer moeten verdwijnen, als de spanningen opgeheven worden.

Dit is dan ook het geval, behalve dat ze als een lijntje (microscopisch fijn) zichtbaar blijven, omdat de samenhang niet geheel hersteld wordt.

Zulk een stuk, opnieuw gehard, vertoont de holten op de oorspronkelijke plaatsen, maar daar de samenhang eens verbroken was, zijn de bellen nu grooter geworden.

Bij het ontlaten moet men zeer voorzichtig zijn, daar men anders kans heeft van springen. Omgekeerd loopt de dubbele breking omhoog als men de stukken in koudmakende mengsels afkoelt, bijv. tot —20°.

Hierbij bestaat echter veel kans van springen.

V. Beschouwing omtrent de vorming van het hardglas.

Men zou met de verklaring van bovenstaande verschijnselen een eind op weg komen, als men de volgende onderstellingen maakt.

Zooals men weet, zet ieder lichaam bij verwarming uit, en krimpt bij afkoeling weder in. Brengt men nu het glas op hooge temperatuur en dompelt het plotseling in een afkoelend mengsel, dan zal de buitenste sterk afgekoelde laag plotseling willen inkrimpen.

Glas is een slechte warmtegeleider, dus koelt het middengedeelte weinig af. Door het inkrimpen van de buitenste laag oefent deze nu een drukking uit op de meer naar binnen gelegen gedeelten, maar door den grooten weerstand, dien zij hier ontmoet, komt deze buitenste laag niet op de plaats, waar ze na een gewone afkoeling zou komen te staan. Dus blijft het glas een grooter volume houden. Nu bekoelen de middelste gedeelten en daar deze door krimping de oorspronkelijke plaats niet kunnen bereiken, zullen spanningen van den omtrek naar het centrum ontstaan. Waar de zwarte lijn waargenomen wordt, gaat de compressie van den omtrek over in de naar binnen gerichte spanning van het middengedeelte. Vermoedelijk zal dus de soortelijke massa van een aan den omtrek gelegen deel kleiner zijn dan die van het centrum en zal de dichtheid aan den omtrek grooter en in het midden kleiner zijn dan van gewoon glas.

Hiermede in overeenstemming zijn de reeds genoemde en nog te vermelde verschijnselen.

Hoe warmer de staaf vóór het afkoelen en hoe beter de koelmiddelen de warmte geleiden, des te sprekender zullen de verschillende kenmerken van hardglas optreden.

VI. Soortelijk gewicht.

De voorgaande resultaten, uit het optisch onderzoek verkregen, doen een sterk vermoeden ontstaan, dat het soortelijke gewicht een ander en wel kleiner zal zijn, dan van gewoon glas.

Gaan we uit van de onderstelling, dat het glas tot $\pm$ 800° C. verhit is, dan zou het volume bij deze temperatuur zijn:

$$V_t = V_o(1 + \alpha t)$$

Nemen we nu aan:

$$t = 800$$
$$\alpha = 793 \,.\, 10^{-8}$$

dan zou dus, als na de plotselinge afkoeling het glas het volume bleef houden, dat het bij 800° had, de verhouding zijn

$$\frac{Vt}{V_0} = 1 + \alpha t$$

$$\frac{Vt}{V_0} = 1,006344.$$

Dit getal zou dan tevens de verhouding uitdrukken van het soortelijk gewicht van gewoon en het soortelijk gewicht van hardglas.

Bij de bepaling der soortelijke gewichten werd elk stuk glas vóór het harden in minstens drie stukken verdeeld. Het eene stuk werd met etiket afzonderlijk in een doosje bewaard. De andere stukken werden zooveel mogelijk op een en dezelfde wijze gehard. Vier verschillende hardglassoorten werden onderzocht, verkregen door ijzer-, chamotte-, olie- en kwikharding. Daarvoor werd van elk stuk gewoon glas het soortelijk gewicht bepaald en van de twee daarbij behoorende stukken hardglas. Dat deze soms in de laatste decimaal kleine verschillen vertoonen is vermoedelijk aan meer of minder volkomene harding toe te schrijven.

Uit vroegere waarnemingen bleek reeds, dat de te voren genoemde holten geen invloed uitoefenden, dus een reden te meer om aan te nemen, dat de buitenste laag nagenoeg op de plaats blijft, waar ze zich vóór het afkoelen bevond.

De in het begin van dit hoofdstuk uit theoretische beschouwingen afgeleide verhouding der soort. gewichten werd daarna berekend, om eene vergelijking in de tabel der verschillende soorten van hardglas te kunnen opmaken.

Koelmiddel.	Soort. gew. gewoon glas.	Soort. gew. hardglas.	Verhouding 1 :
Kwik	2,5561	2,5407	1,0061
Olie	2,5561	2,5412	1,0059
IJzerplaat	2,6092	2,6016	1,0029
Chamotte	2,6092	2,6042	1,0020
Olieglas (maar nu het grove poeder van het stuk-springen)	2,5561	2,5541	
„ fijn gewreven . . .	2,5561	2,5559	

Hieruit blijkt overeenstemming der op grond van de boven ontwikkelde hypothese berekende met de waargenomene verhoudingen.

Ook blijkt, dat men de soortelijke gewichten der verschillende lagen van een stuk hardglas niet afzonderlijk zal kunnen bepalen, daar onder het doorzagen of vergruizen vereffening der spanningen zou optreden.

Bij het onderzoek van stukken met en zonder holten, door harding derzelfde soort glas verkregen, bleek dat deze holten geen invloed op het soortelijk gewicht hadden.

Reeds Riche [1]) vond hetzelfde. Hij vond voor het soortelijk gewicht van:

	Langzaam afgekoeld.	Snel afgekoeld.	Ontlaten.
Kristalglas	3,110	3,102	3,109
Flintglas	3,610	3,602	3,605
Crownglas	2,561	2,544	2,551

VII. Brekingsindex.

Om dezen te bepalen werden van gewoon en van in chamotte gehard glas prisma's geslepen, hiervan de vlakken zoo zuiver mogelijk gepolijst.

De te gebruiken stukken hadden reeds, om groote veranderingen in de spanningen bij het slijpen te voorkomen, ten naasten bij den prismavorm.

Met den goniometer van Fuess werd daarna de hoek van het te gebruiken prisma gemeten.

Afgelezen werd:

	Nonius I.		Nonius II.	
	1e vlak.	2e vlak.	1e vlak.	2e vlak.
Gewoon	226°25′	94°47′	46°24′	274°46′
Hardglas	224°33′	83°17′	44°32′	263°15′

[1]) Zie Polyt. Journ. 214, 308.

Dus de brekende hoek van gewoon glas 48°,22′, hardglas 38°44′. Verder zijn de kijker en collimator in elkaars verlengde als:

nonius I 224°21′ nonius II 44°20′

De waarnemingen voor het minimum van deviatie waren nu:

	Ribbe rechts.		Ribbe links.	
	Nonius I.	Nonius II.	Nonius I.	Nonius II.
Hardglas . . .	202°23′	22°22′	246°19′	66°18′
Gewoon glas . .	195°30′	15°29′	253°21′	73°11′

Nu werd de brekingsindex bepaald door het minimum van deviatie bij natriumlicht met behulp der vergelijking:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + \delta)}{\sin \frac{a}{2}},$$

Na instelling op het minimum van deviatie werd, zooals uit de structuur der stukken te onderstellen was, een duidelijk beeld waargenomen en daaraan sluitende eene onafgebroken reeks van minder scherpe beelden der spleet.

Na instelling op het scherpe beeld leverden de metingen de volgende cijfers:

		Gewoon:	Hardglas:
hoek A	=	48°22′	38°44′
δ	=	28°51′	21°58′
$\frac{a+\delta}{2}$	=	38°36′30″	30°21′
$\log \sin \frac{a+\delta}{2}$	=	9,79518	9,70353
$\log \sin \frac{a}{2}$	=	9,61242	9,52063
$\log n$	=	0,18276	0,18290
n	=	1,5232	1,5237

Hieruit volgt dat het scherpe beeld door den normaal gebroken straal gevormd wordt.

VIII. Buigvastheid.

Bijgaande diagrammen zijn een copie van de met den dynamometer van Leuner verkregen diagrammen der buigvastheid van het hardglas en van het daarbij behoorende gewone glas.

Evenals bij alle in dit verslag genoemde onderzoekingen ben ik vergelijkenderwijze te werk gegaan met de bij elk stuk behoorende grondstof.

De dynamometer was eigenlijk ingericht voor trekproeven. Door eene kleine wijziging der kleminrichting werd hij voor de beoogde buigproeven geschikt gemaakt.

De afstand der steunpunten was 2 cM., terwijl de druk in het midden aangreep.

Het gebruik van dezen toestel, thuis behoorende in de afdeeling van mechanische technologie, werd mij welwillend toegestaan door den heer P. van der Burg, hoogleeraar in dat vak aan de Polyt. school.

Voor de draagkracht werden de volgende getallen gevonden:

Koelmiddel.	Gewoon.	Hardglas.
Olie	100 KG.	415 KG.
Kwik	85 „	325 „
Warme olie	290 „	520 „
IJzer	195 „	225 „
Chamotte	95 „	130 „

Wat ons dadelijk treft is de overeenkomst in volgorde met de uitkomsten der soortelijke massa's en dubbele breking.

De automatische opteekening van het diagram was niet nauwkeurig genoeg om de geringe buiging aan te geven tegenover deze kolossale drukkingen.

Daarom werden, en vooral omdat in het door F. Connert [1]) geschreven stuk, over de buigvastheid van het Siemensche hardglas wel degelijk buigingen aangegeven worden, deze proeven op andere wijze herhaald.

Connert gebruikte staven van 90 cM. lengte en ik had slechts kortere, dus moest mijne wijze van observeeren nauwkeuriger worden.

Ik maakte voor het microskoop een ijzeren voetplaat, waarop in het midden een stalen stuk bevestigd was. Van boven was dit stuk uitgewerkt, zoodat er twee wiggen op 2 cM. afstand ontstonden.

Op deze wiggen rustte de staaf.

Een derde wig werd in het midden op de staaf gelegd. Deze was van boven met een uiterst fijn merk voor microskopische instelling voorzien. Aan deze wig waren twee stangen bevestigd die door gaten in de plaat naar beneden gingen en waaraan gewichten gehangen werden. De doorbuigingen las ik nu af op de micrometerschroef van het microskoop, terwijl ik telkens met 900-voudige vergrooting scherp instelde op het bovengenoemde merk.

Nu was de uitslag:

Belasting.	Hardglas.			Gewoon glas.		
	Afmetingen.	Uitwijking. Berekend.	Uitwijking. Aflezing microm.	Afmetingen.	Uitwijking. Berekend.	Uitwijking. Aflezing microm.
0	Rond.		85	Rond.		49
		6			16	
5			91			65
		6			16	
10	$d = 6{,}21$		97	$d = 7{,}26$		81
		7			15	
15			(10)4	$m\ m$		96
		7			16	
20			(1)11			(1)12
		6			17	
25			(1)17			(1)29
		31			81	
50 KG.			(1)48			(2)10
		—			—	
	Berek. op 5 K°	± 6		Berek. op 5 K°	± 16	

[1]) Zie Civiel Ingenieur XXXIV 1e en 2e Heft.

De gang der schroef is 0.5 mM. De kop is verdeeld in 100 deelen. De doorbuiging is nagenoeg 3-maal kleiner dan van gewoon glas.

IX. Hardheid.

Zooals men uit den naam van hardglas zou afleiden moest dit glas harder zijn dan gewoon glas. Vat men de hardheid op in den zin der mineralogen, dan is dit evenwel in het geheel niet het geval. Men kan, als men op hunne wijze de hardheid bepaalt, zoowel het glas door het hardglas, als het hardglas door het gewone glas krassen. Dus is de hardheid ten naastenbij gelijk.

Bepaalt men evenwel de mate van afschuring van een stuk hardglas op een stuk gewoon glas of omgekeerd, dan merkt men, dat steeds het hardglas het meest afgeschuurd wordt.

Dit is zelfs zoo sterk, dat het mij gelukte een hardglazen staaf met een gewoon glazen staaf af te zagen. De gewone staaf was dof mat, dus bijna niet aangetast.

Bij andere proeven werd er voor gezorgd, dat het afgeschuurde oppervlak op het gewone glas kleiner was dan op het harde. Niettegenstaande was de uitslag dezelfde.

Dit is te verklaren uit de groote mate van brokkeligheid van het hardglas. Is er eens een splintertje afgesprongen, dan vormt het steeds weer scherpe kanten, welke door de matte oppervlakte van het gewoon glas steeds losgerukt worden en zoodoende slijt het gewone glas minder af dan het hardglas.

Het afgeschuurde poeder werd microskopisch onderzocht. Het was bij geringe vergrooting meelachtig; maar bij meerdere vergrooting werd het poeder verdeeld tot scherpe stukjes van ongeveer (bij 900-voudige vergrooting met homogene immersie) 0.7 — 16.6 micron; zie plaat VII.

Wat de hardheid aangaat, die men uit de mate van polijsten enz. kan afleiden, deze is bijna dezelfde; beide polijsten evengoed.

Hardglas en gewoon glas worden op dezelfde wijze door een veldspaatkristal aangetast, dus de hardheid is kleiner dan 6.

Door veldspaat werden ook op het dikke einde van tranen, die ingekit waren, duidelijke krassen gemaakt, zonder dat de traan sprong.

X. Chemisch gedrag.

Fluorwaterstofzuur tastte beide soorten van glas hevig aan. Waar men een traan ook liet aantasten, telkens was het springen een gevolg [1]).

Zoutzuur trekt uit gewoon glas alkaliën uit, dit is ook met hardglas het geval, maar zooals uit de onderstaande cijfers blijkt, is de tijd van inwerking verschillend. Zet men een drup geconcentreerd zoutzuur op een gewone en een dergelijken drup op een hardglazen plaat, laat beiden 24 uren staan, dan zal bij indampen van de druppels de rand bij gewoon glas dikker zijn dan bij hardglas. Toen dit opgemerkt was, werden twee stukken glas van gelijken vorm, nl. een stuk hardglas en een stuk gewoon glas in dezelfde kolf met geconcentreerd zoutzuur gebracht, na vooraf gewogen en microskopisch onderzocht te zijn.

Na eenigen tijd werd de weging en het microskopisch onderzoek herhaald.

Het gewone glas werd regelmatig aangetast, het hardglas na langeren tijd, maar het werd alsdan geheel ruw met scherpe scheurtjes en kantjes. Het gewone glas ging gewoon verder, het hardglas werd veel ruwer, zie plaat VIII en plaat IX.

De gewichten waren:

	Hard.	Gewoon.
Na 0 uren	1,8847 Gr.	2,2245 Gr.
„ 36 „	1,8832 „	2,2213 „
„ 168 „	1,8819 „	2,2206 „
„ 336 „	1,8816 „	2,2202 „
„ 650 „	1,8735 „	2,2028 „

Daaruit blijkt, dat eerst het gewone glas heviger aangetast wordt, daarna als dit aan de oppervlakte alle alcali afgestaan heeft, minder, terwijl het aantasten van het hardglas blijft doorgaan.

Tevens ondergaat dit meer verlies door het afspringen van uiterst kleine mikroskopische splinters, waarop ook het voorkomen van het aangetaste oppervlak wijst.

[1]) Dit is verschillend van de proeven door M. de Luynes beschreven. Henrivaux Verre et Verrerie pag. 34.

Behalve het grootere weerstandsvermogen tegen zuren enz. is het hardglas beter bestand tegen groote temperatuurswisselingen. Blaast men een gewoon glazen bol en laat men dien niet in de vlam, maar in de lucht afkoelen, dan kan men hem meermalen plotseling in de vlam van eenen Hugershoffschen brander houden, zonder dat hij springt. Een bol, die in de vlam gekoeld is, doet dit veel lichter. Zelfs al zijn de wanden zeer ongelijk van dikte, dan zal het hardglas het nog uithouden.

In het dagelijksch leven is het heel blijven van lampenglazen bij het aansteken en uitdoen der vlam aan luchtharding toe te schrijven. Bij in olie gekoelde voorwerpen treden deze eigenschappen nog meer op den voorgrond.

XI. Siemens glas.

Zooals reeds te voren gemeld is, was de firma Siemens in Dresden zoo vriendelijk, hardglas en gewoon glas ter beschikking te stellen. Hiermede werden de voormelde uitkomsten vergeleken en gevonden, dat het optisch gedrag geheel overeenstemde.

Verder was het ontlaten ook hetzelfde.

Het soortelijk gewicht was van:

Gewoon glas 2,5316. Hardglas 2,5274,

Verhouding der soortelijke gewichten dus 1 : 1,002 [1]).

Brekingsindex:

	Nonius I.		Nonius II.	
	1e vlak.	2e vlak.	1e vlak.	2e vlak.
Gewoon. . . .	171°32′	23°12′	351°31′	203°11′
Hardglas . . .	167°34′	25° 7′	347°33′	205° 6′

Evenals bij de eerste bepalingen werd voor het scherpe beeld de brekingsindex van gewoon spiegelglas gevonden.

[1]) Verhouding voor harding in kwik: 1,0061.

	Gewoon.	Hardglas.
hoek A	$= 31°40'$	$37°33'$
δ	$= 18°\ 4'$	$21°57'$
$\frac{a+\delta}{2}$	$= 24°52'$	$29°45'$
$\log \sin \frac{a+\delta}{2}$	$= 9{,}62377$	$9{,}69567$
$\log \sin \frac{a}{2}$	$= 9{,}43591$	$9{,}50765$
$\log\ n$	$= 0{,}18786$	$0{,}18802$
n	$= 1{,}5412$	$1{,}5419$

uit:

nonius I 224°21′ nonius II 44°20′

	Ribbe rechts.		Ribbe links.	
	Nonius I.	Nonius II.	Nonius I.	Nonius II.
Gewóon. . . .	206°17′	26°16′	242°25′	62°24′
Hardglas. . . .	202°24′	22°23′	246°18′	66°17′

Dus overeenkomende.

Buigvastheid.

Belast. in KG.	Hardglas.				Gewoon glas.			
	Afmetingen:				Afmetingen:			
	Dikte.	Breedte.	Uitwijking.		Dikte.	Breedte.	Uitwijking.	
				Afgel.				Afgel.
0	4,55 mM.	11,45 mM.		79	4,42 mM.	10,14 mM.		54
			6				9	
5	”	”		85	”	”		63
			6				9	
10	”	”		91	”	”		72
			7				9	
15	”	”		98	”	”		81
			5				10	
20	”	”		(10)3	”	”		91
			6				12	
25	”	”		(10)9	”	”		(10)3
			31				44	
50	”	”		(1)40	”	”		(1)47
		gemidd.	± 6				± 9	

De afstand der wiggen was weer 20 mM.

Daar Siemens glas weinig gehard is, springt het onder den hamer in groote brokken en niet tot gruis, dit komt met zijn gedrag bij de buigproeven overeen.

Hardheid.

Verschijnselen dezelfde als onder IX.

XII. Vergelijking van Hardglas en andere stoffen.

In de eerste plaats werd gewoon hars beproefd.

Een in warm water verhit stuk hars werd tusschen glasplaten in koud water gedompeld. Door een zorgvuldig onderzoek was vooraf uitgemaakt, dat langzaam gekoeld hars in het geheel niet dubbelbrekende was.

Na snelle afkoeling werden van de verhitte stukken zwak dubbelbrekende platen verkregen, die wel is waar geene kleuren, maar duidelijke uitdooving vertoonden. Overeenkomende resultaten werden met platen van schellak verkregen.

Om de donkere kleur moet men hier met uiterst dunne plaatjes werken, en verkrijgt dientengevolge zeer zwakke dubbelbreking, die nog verminderd wordt, door dat de temperatuurverschillen tusschen de hoogste verhitting en de koelvloeistof gering zijn.

Frappant is de overeenkomst in het gedrag van het hardglas en het door M. M. H. Moissan en G. Harpy onderzocht gedrag van Boriumstaal [1]).

Zij merkten bij het harden van dit materiaal wel een grootere mate van vastheid op, maar bijna geene vermeerdering van hardheid.

Het gewone staal heeft eene soortgelijke vermindering in soortelijke massa als het hardglas, maar het heeft buitendien de eigenschap, dat door plotseling afkoelen de hardheid toeneemt en zelfs iets boven 5,5 kan komen.

Vermoedelijk zal dit een gecombineerd verschijnsel zijn, nl. van physischen aard, zooals bij het hardglas, en van chemischen aard, in zooverre door plotselinge afkoeling harde carbides kunnen gestabiliseerd worden.

Dikwijls is op te merken, dat er verkeerde meeningen over het hardglas heerschen.

Zoo schrijft Fridolin Reiser [2]), dat Karmarsch mededeelt, dat hardglas niet met den diamant gesneden kan worden, dat het grooten weerstand tegen slag, stoot enz. biedt. Dit is goed; maar dat volgens Leger in Lyon de dichtheid van hardglas grooter zou zijn dan die van gewoon glas, omdat de soortelijke massa grooter en dus het volume kleiner is, kan op grond van het voorgaande stellig worden tegengesproken.

[1]) Zie Comptes rendus N° 3. Jan. 21 1895 pag. 133.

[2]) Zie: Das Härten des Stahles in Theorie und Praxis. Fridolin Reiser (blz. 53).

L. Houwink.

Verklaring der afbeeldingen.

Plaat I. 5-voud. vergrooting.

Afbeeldingen van gesprongen hardglas, waarvan de stukken nog op hunne oorspronkelijke plaats zijn.

Fig. 1. Traan, aan de punt gebroken.

Fig. 2. Traan, in het midden gebroken.

Fig. 3. Middengedeelte van een staaf.

Fig. 4. Staaf, nabij een der uiteinden doorgebroken.

Fig. 5. Staaf, op de halve lengte gebroken.

Fig. 6. Gesprongen prismatisch stuk.

Fig. 7. Gesprongen prismatisch stuk, maar waarvan het niet aanwezige stuk vergruisd is.

In fig. 2 en 5 ziet men aan de breuk twee tegengestelde kegels.

In fig. 3 en 4 zijn deze kegels gelijk gericht.

Plaat II.

Diagram voor de breukbelasting.

De ordinaten geven de belastingen aan, waarbij het glas doorbrak. Bij de niet-onderstreepte breukbelastingen was de gebruikte veer berekend op 400 KG., bij de onderstreepte op 600 KG.

Polarisatie-verschijnselen bij gekruiste Nicols.

Plaat III. Afbeelding I. Tweevoud. vergrooting.

stelt de polarisatiekleuren voor van een staaf wier afgekoelde vlakken loodrecht op het vlak van teekening staan.

Bij *a* is eene natuurlijke scheur in de staaf.

Bij *b* is eene inkeeping in de staaf gemaakt.

Bij *c* is een gat geboord.

Alle drie veranderingen zijn gekenmerkt door onregelmatigheden in de volgorde der kleuren.

Plaat III. Afbeelding II. Tweevoud. vergrooting.

geeft de polarisatiekleuren van dezelfde staaf, maar nu is het beeldvlak het vlak van afkoeling. De opmerkingen bij afbeelding I gelden ook hier.

Plaat IV. Afbeelding III. 40-voud. vergrooting.

stelt de kleuren van den rand van de staaf van afbeelding I, maar veel vergroot in regelmatige volgorde voor. 0 0 is de nullijn.

Plaat IV. Afbeelding IV. 40-voud. vergrooting.

is hetzelfde deel van de staaf als afbeelding III, maar nu is er onder den analysator een gipsplaatje rood I^{e} orde, wiens as evenwijdig de kleurenstrepen ligt. De nullijn (0 0) is naar den buitenkant verschoven.

Plaat V. Afbeelding V. 40-voud. vergrooting.

hetzelfde beeld als afbeelding IV, maar nu is het gipsplaatje 90° gedraaid. De nullijn is nu naar het midden verplaatst.

Plaat V. Afbeelding VI. 40-voud. vergrooting.

is een vergroot beeld der scheur *a* van afbeelding I. Aan het einde der scheur ziet men een zwarte plek, die evenwel bestaat uit vele nauw aaneengesloten donker gekleurde lijnen. Alle kleurenstrepen, ook de nullijnen, buigen zich naar den omtrek, ter weerszijden van de scheur.

Plaat VI. Afbeelding VII. 40-voud. vergrooting.

een beeld der inkeeping *b*, geeft aanleiding tot dezelfde opmerkingen als afbeelding VI.

Plaat VI. Afbeelding VIII. 40-voud. vergrooting.

geeft eene holte in een hardglazen staaf te zien. *ab* is de lengte-as, de bel is zwart en omgeven door gekleurde banden. Aan de einden der holte, in de lengte-as van de staaf ziet men een zwart driehoekje in wit van de I^{ste} orde.

Plaat VII.

Fig. 1. Afgeslepen poeder van hardglas, 40-voudige vergrooting.
Fig. 2. Afgeslepen poeder van hardglas, 900-voudige vergrooting.
Grenzen der korrels 0,7 — 16,6 micron.

Plaat VIII. 26-voud. vergrooting.

Fig. 1. Gewoon glas na 168 uren uittrekken met zoutzuur.
Fig. 2. Hardglas na 168 uren uittrekken met zoutzuur.

Plaat IX. 26-voud. vergrooting.

Fig. 1. Hardglas na 336 uren uittrekken met zoutzuur.

(15 Maart 1898).

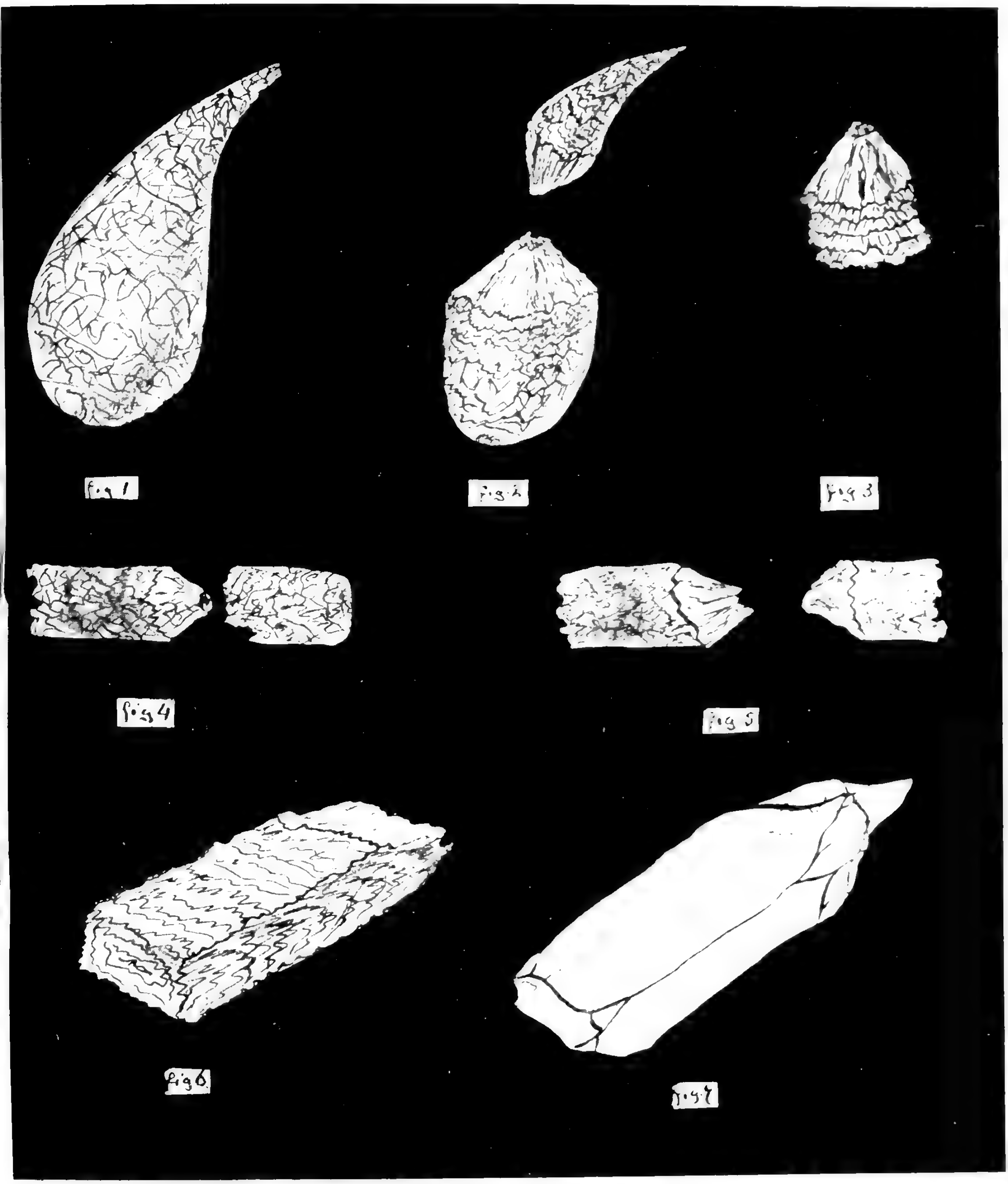
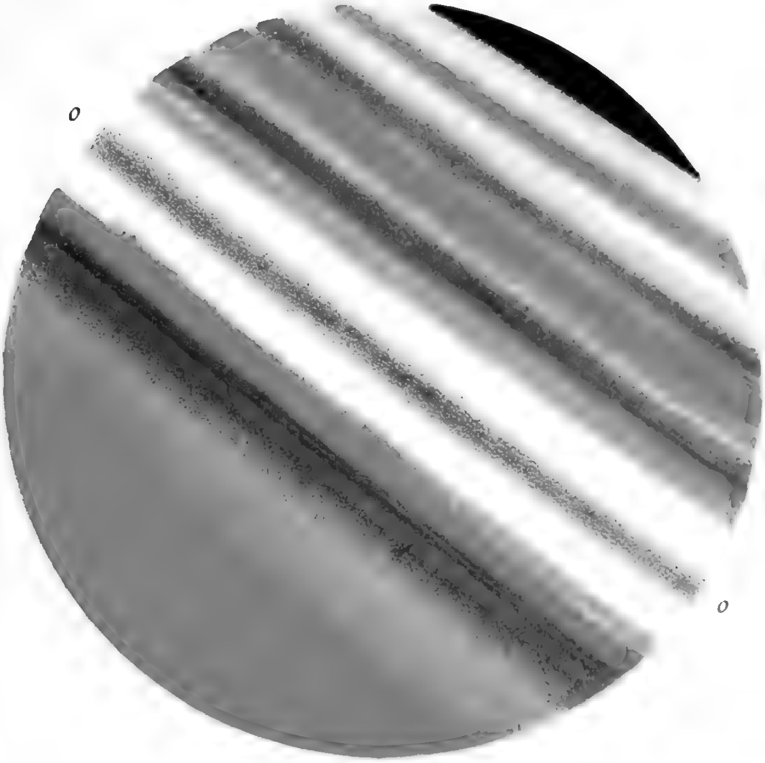


fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6
fig 7

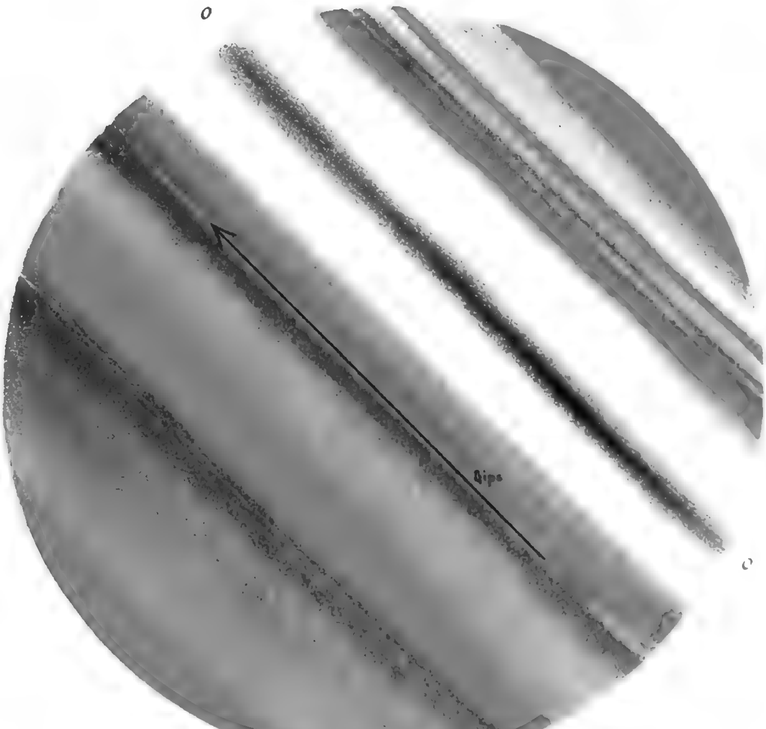
L. HOUWINK: ONDERZOEK OMTRENT HET ZOOGENAAMDE HARDGLAS.

AFB. I.

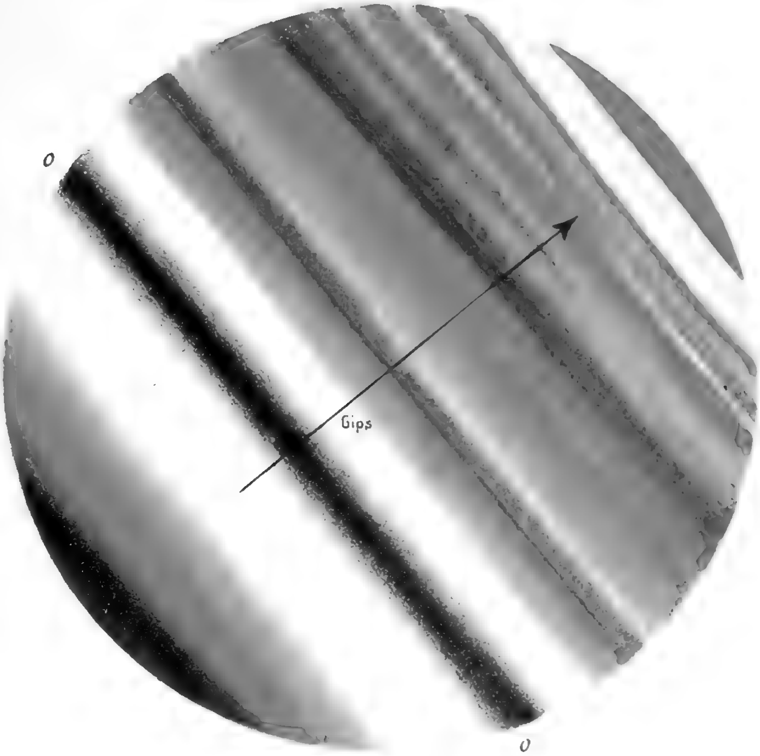
AFB. II.



AFB. III.

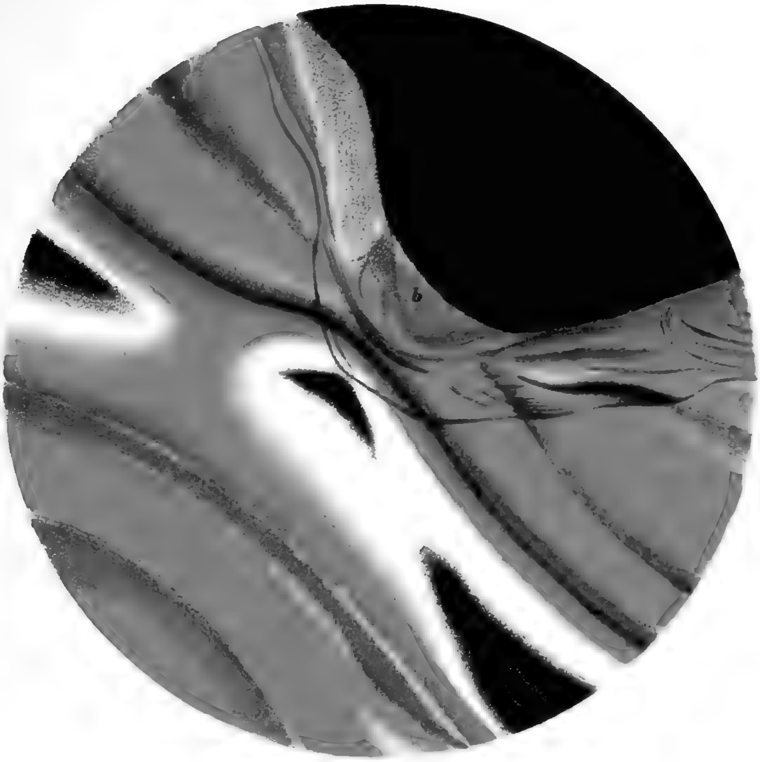


AFB. IV.

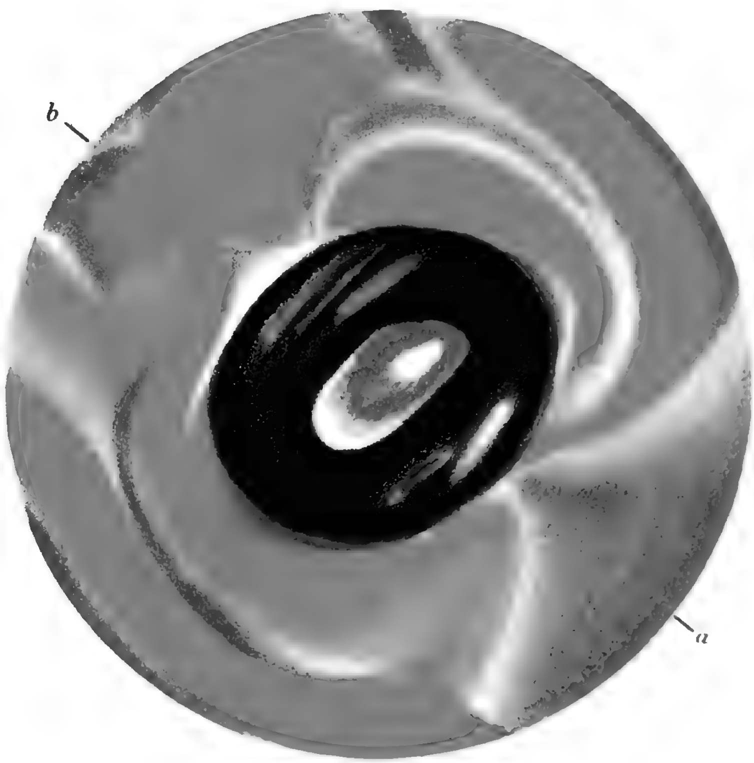


AFB. V

AFB. VI.



AFB. VII.



AFB. VIII.

L. HOUWINK: ONDERZOEK OMTRENT HET ZOOGENAAMDE HARDGLAS.

FIG. I.

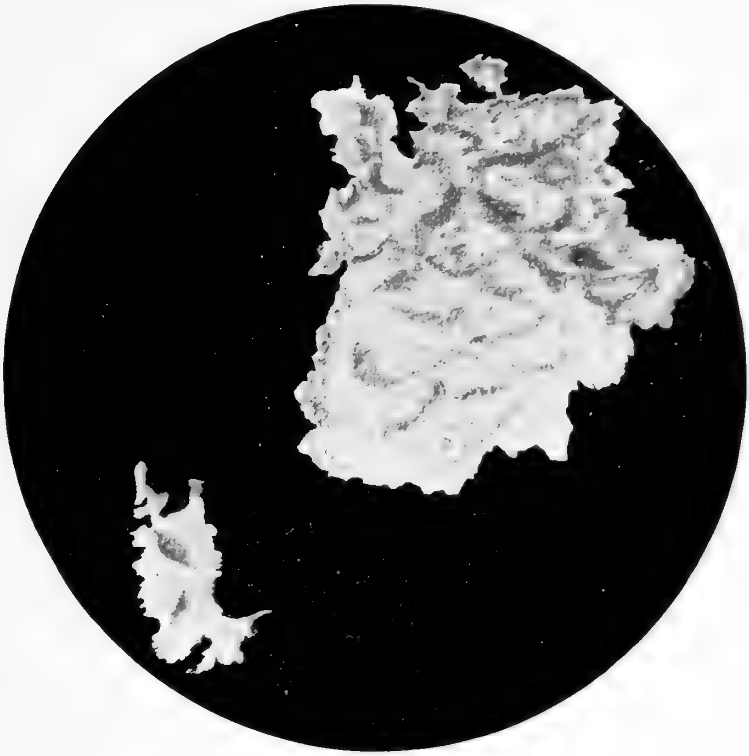


FIG. II.

L. HOUWINK: ONDERZOEK OMTRENT HET ZOOGENAAMDE HARDGLAS.

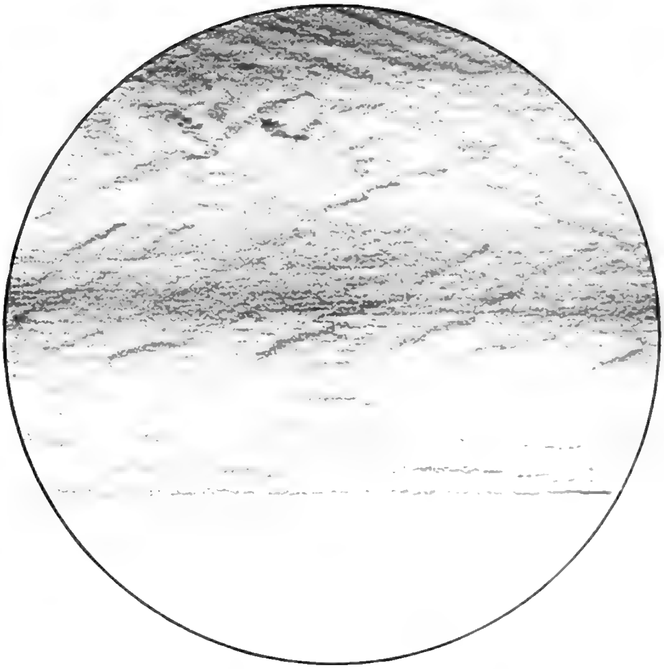


FIG. I.

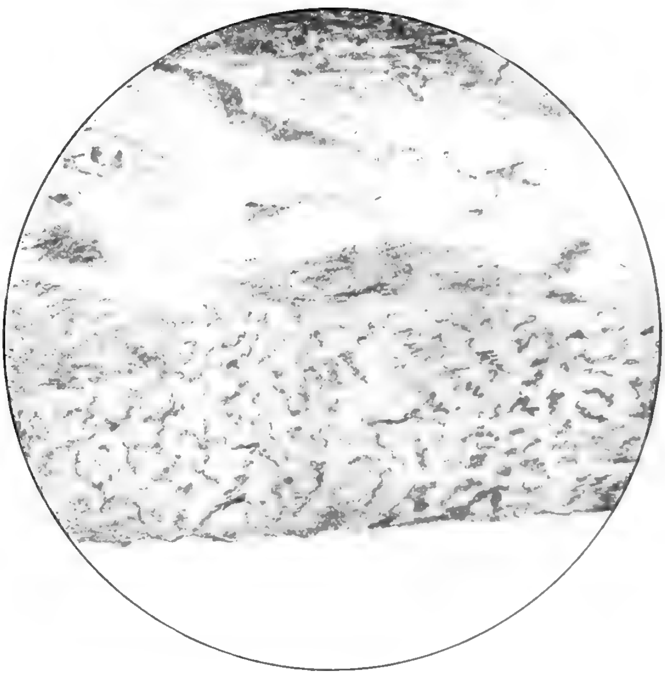


FIG. II.

Onderzoekingen over het moleculairgewicht van de zwavel volgens de kookpuntsmethode,

VAN

L. ARONSTEIN EN **S. H. MEIHUIZEN.**

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel VI. N°. 3.

(Met één plaat.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Juli 1898.

Onderzoekingen over het moleculairgewicht van de zwavel volgens de kookpuntsmethode,

VAN

L. ARONSTEIN EN S. H. MEIHUIZEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel VI. N°. 3.

(Met één plaat.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1898.

Onderzoekingen over het moleculairgewicht van de zwavel volgens de kookpuntsmethode

VAN

L. ARONSTEIN EN S. H. MEIHUIZEN.

In Maart 1896 verscheen in het American Chemical Journal Vol. 18, n° 3, eene verhandeling over het moleculairgewicht van de zwavel van W. R. ORNDORFF en G. L. TERRASSE. Door deze beide scheikundigen was een uitgebreid experimenteel onderzoek verricht met het doel om door toepassing van de kookpunts- en de vriespuntsmethode het moleculairgewicht van dit element te bepalen bij zeer uiteenloopende temperaturen en in zeer verschillende oplossingen.

Om dienzelfden tijd was de eene van ons bezig met een dergelijk onderzoek, dat echter hem resultaten gegeven had, die afweken van die door ORNDORFF en TERRASSE gepubliceerd. Wij besloten derhalve, te meer daar de resultaten van ORNDORFF en TERRASSE ook afwijken van die verkregen door BECKMANN (Zeitschr. Phys. Chem. 4, p. 266), en evenzoo van die van SAKURAI (Journ. Chem. Society 61, 989), en die van HELFF (Zeitschr. Phys. Chem. 12, 196), het onderzoek voort te zetten en de bepalingen met gebruikmaking van alle voorzorgsmaatregelen te herhalen.

De uitkomsten van dit onderzoek deelen we mede, vooral omdat zij geheel verschillen van de merkwaardigste resultaten van ORNDORFF en TERRASSE: dat nl. het moleculairgewicht van de zwavel bij temperaturen beneden haar smeltpunt door de moleculairformule S_9, en boven haar smeltpunt door de moleculairformule S_8 moet worden uitgedrukt en dat het moleculairgewicht van de zwavel, wanneer men zwavelmonochlorid als oplossingsmiddel gebruikt, zou moeten beantwoorden aan de formule S_2.

Wij meenen er ook in geslaagd te zijn om, al is het niet overal, toch in vele gevallen de oorzaken te hebben gevonden van de afwijkende uitkomsten van ORNDORFF en TERRASSE.

Het gebruikte toestel.

We waren begonnen onze bepalingen uit te voeren met het bekende toestel van BECKMANN, waar de kookende vloeistof omgeven is door een dampmantel. We maakten daarmede een reeks van bepalingen en wel met gebruikmaking van zwavelkoolstof als oplossingsmiddel. In de volgende tabellen 1 en 2 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen, waarbij de procenten zwavel als abscissen en de uit de kookpuntsverhooging berekende moleculairgewichten als ordinaten zijn aangenomen, zijn eenige uitkomsten dezer proeven weergegeven, om als voorbeeld te dienen voor hun onregelmatig verloop en om aan te toonen dat, volgens deze proeven, het moleculairgewicht voor oneindige verdunning afwisselt tusschen de grenzen 270 en 250.

1. Zwavel in zwavelkoolstof. (Kpt. 46,40—46,50 bij 764 mm.).
   Grammen oplossingsmiddel: 32,0.
   Moleculaire verhooging: 23,75.

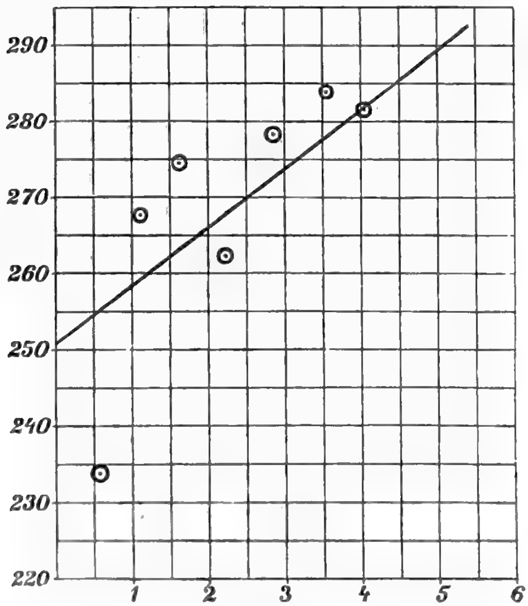


Fig. 1.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend molecul. gewicht.
0	—	—
0,5416	0,055	233,9
1,1050	0,098	267,8
1,5956	0,138	274,6
2,2100	0,200	262,4
2,8600	0,244	278,4
3,5280	0,295	284,0
4,0281	0,340	281,4

2. **Zwavel** in zwavelkoolstof (kpt. 46,40—46,50 bij 764 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 27,25.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend molecul. gewicht.
0	—	—
1,1126	0,094	281,1
2,1013	0,177	281,1
3,1305	0,273	272,3
4,2260	0,372	269,4
5,3185	0,458	276,3
6,5000	0,554	278,6
7,6267	0,646	280,4
8,6659	0,728	282,7
9,7740	0,814	285,2
10,8710	0,902	286,2

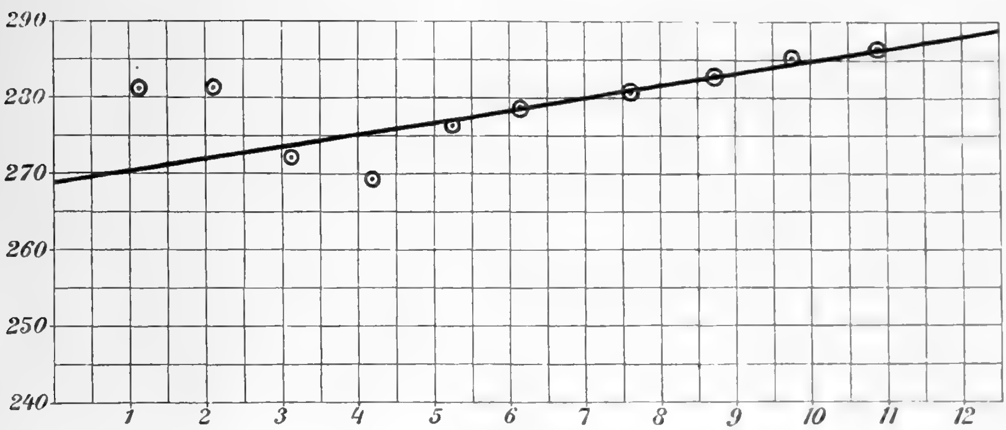


Fig. 2.

Éene oorzaak voor de onregelmatigheid was dadelijk duidelijk. Wanneer men te doen heeft met eene stof, waarvan het moleculairgewicht zoo hoog is als dat van de zwavel en waarbij dus de kookpuntsverhooging een betrekkelijk gering bedrag heeft, zijn kleine fouten van grooten invloed op het resultaat. Nu was een bron van fouten, waarvan de invloed althans in ons klimaat niet onderschat mag worden, de soms belangrijk afwisselende barometerstand.

Herhaaldelijk werden verschillen in barometerstand bij het begin en het einde van een reeks waarnemingen van 4 mm. waargenomen, terwijl dikwijls de veranderingen van den barometerstand ook niet gelijkmatig, maar bij afwisseling stijgend en vallend plaats grepen. Een verschil in barometerstand van 4 mm. kwikzilver beantwoordt echter aan een verschil in kookpunt van 0,16 graden, een bedrag dat bij de zwavel althans een grooten invloed hebben kan op het resultaat.

Wij besloten derhalve ons van een tweede Beckmann, die met het oplossingsmiddel alleen was gevuld, als een controletoestel te bedienen en telkens den stand van den thermometer in beide toestellen af te lezen en het verschil van die aflezingen als grondslag te gebruiken voor de berekeningen.

Met zwavelkoolstof werden nog twee reeksen van bepalingen op deze wijze gemaakt. Hunne resultaten zijn medegedeeld in tabel 3 en 4 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen.

3. Zwavel in zwavelkoolstof (kpt. 46,40—46,50 bij 764 mm).
Grammen oplossingsmiddel: 34,0.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend molecul. gewicht.
0	0,980	4,588	—	—
0,868	1,043	4,580	0,071	290,3
1,748	1,101	4,576	0,133	312,1
2,676	1,156	4,543	0,221	287,6
3,572	1,232	4,532	0,308	275,4
4,363	1,303	4,533	0,378	274,1
5,280	1,375	4,521	0,462	271,4
6,211	1,450	4,517	0,541	272,7
7,092	1,522	4,517	0,613	274,8
7,973	1,592	4,512	0,688	275,2
8,896	1,658	4,505	0,761	277,6
10,623	1,791	4,495	0,904	279,1
12,419	1,930	4,490	1,084	281,4
14,190	2,056	4,482	1,182	285,1
16,026	2,198	4,491	1,315	289,4
17,794	2,318	4,497	1,435	294,5
19,595	2,446	4,487	1,567	297,0
21,373	2,558	4,478	1,688	300,7

4. Zwavel in zwavelkoolstof, (kpt. 46,40—50 bij 764 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 38,28.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging-	Berekend molecul. gewicht.
0	0,950	4,513	—	—
0,806	1,018	4,508	0,073	262,1
1,600	1,064	4,488	0,139	273,4
2,411	1,130	4,479	0,214	267,5
3,140	1,195	4,478	0,280	266,3
3,957	1,270	4,480	0,353	266,2
5,605	1,407	4,470	0,500	266,2
7,183	1,558	4,478	0,643	265,3
8,780	1,689	4,484	0,768	271,5
10,430	1,823	4,483	0,903	274,4
11,860	1,947	4,497	1,013	278,1
13,470	2,069	4,492	1,140	280,7
15,830	2,238	4,490	1,311	286,8

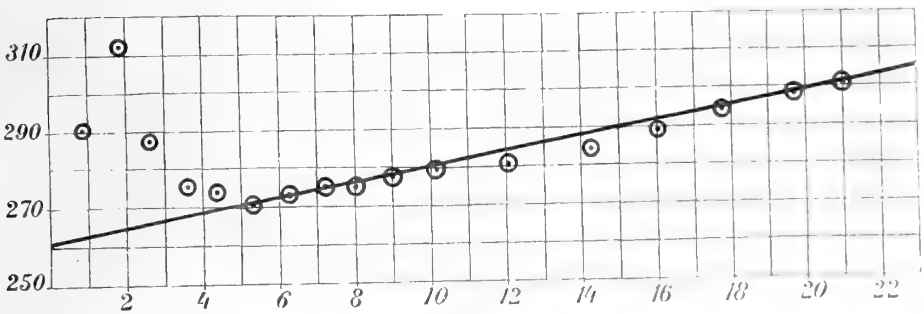


Fig. 3.

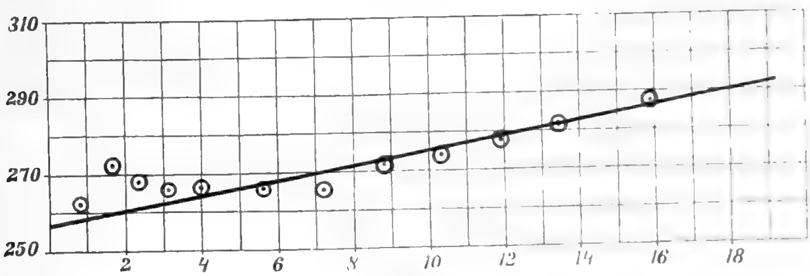


Fig. 4.

Ofschoon beide tabellen en de graphische voorstellingen tot een moleculairgewicht bij oneindige verdunning leiden, dat dicht bij 256 gelegen is, waren de afwijkingen, vooral in het begin bij zeer verdunde oplossingen, toch nog zeer belangrijk. Iets dergelijks vonden wij ook bij de moleculairgewichtsbepalingen van zwavel in benzol, waarvan wij de resultaten niet uitvoerig mededeelen.

Alleen willen wij vermelden, dat niet alleen de uitkomsten van één proef bij verschillende concentraties groote afwijkingen vertoonen, maar dat ook verschillen in het eindresultaat voor het moleculairgewicht bij oneindige verdunning voorkomen (het wisselde af tusschen 240 en 280), waardoor duidelijk werd, dat ook nu nog belangrijke fouten bij de proefnemingen storend moeten hebben gewerkt.

Wij gingen er derhalve toe over gebruik te maken van de door Beckmann in nieuweren tijd bijzonder aanbevolen methode (Zeitschr. Phys. Chem. Band 21 p. 245) om in plaats van een dampmantel een luchtmantel te gebruiken en als vulling van het kooktoestel ons te bedienen van de eveneens door hem aanbevolen platinatetraëders.

Intusschen meenden wij nog een gebrek der toestellen te kunnen verhelpen, dat daarin bestond, dat de in den koeler gecondenseerde vloeistof bij terugvloeiing den thermometer raakte en zoodoende onregelmatigheden kon veroorzaken. Van hetzelfde denkbeeld uitgaande heeft Harry C. Jones (American Chemical Journal Juli 1897) den thermometer door een platinamantel voor den invloed van het terugvloeiende oplossingsmiddel beschut. Wij meenen echter dat door onze reeds in 1896 aan het toestel gebrachte wijzigingen het doel eenvoudiger en goedkooper wordt bereikt.

Tegelijkertijd wenschten we ons toestel bruikbaar te maken voor zulke vloeistoffen, die de kurk aantasten, zooals zwavelmonochlorid, en zijne constructie zoodanig te vereenvoudigen, dat het gemakkelijk in het laboratorium zelf kon worden vervaardigd; en wij gaven verder, het voorbeeld volgende van Orndorff en Cameron (Zeitschr. Phys. Chem. 17, p. 637), aan het kooktoestel eene groote lengte, maar nog grooter dan zij, zoodat de thermometer alleen maar met zijn metalen boveneinde buiten het toestel uitstak.

Bijgevoegde teekening op de plaat geeft eene afbeelding van het door ons gebruikte toestel. Wij hebben den brander weggelaten. Als luchtmantel bedienden we ons meestal, zooals op de teekening door de letters *a* en *b* is aangegeven, van twee in elkander geschoven glazen cylinders; soms ook, vooral bij de proeven met zwavelmonochlorid, werd slechts van één cylinder gebruik gemaakt en dan de tusschenruimte tusschen cylinder en kookvat met asbestvezels gevuld.

Het kookvat *A* was 520 mm. lang; zijn cylindrisch gedeelte had eene inwendige middellijn van 32 mm. en de aangeblazen bol was 38 mm. wijd. Bij *c* was zijdelings eene buis *E* aangezet op een afstand van ongeveer 200 mm. van den bodem van het toestel. Deze zijbuis was 450 mm. lang en had eene inwendige middellijn van 15 mm. Zij werd omgeven door een glazen Liebigschen koeler *F*. In het kookvat werd eene glazen cylinder *B* gebracht en met behulp van een kurk *d*, die zoo noodig, om niet door dampen te worden aangetast, van een asbestbekleeding was voorzien, daarin bevestigd. Deze cylinder, die tot beneden het kwikvat van den thermometer in de vloeistof dompelde, was voorzien van eenige uitpuilingen, zoowel naar binnen als naar buiten. De uitpuilingen naar buiten *e* dienden om den rechten stand van den cylinder in het kookvat te verzekeren. De uitpuilingen naar binnen *f* hadden hetzelfde doel voor den thermometer *C*. Deze was met behulp van eene eveneens zoo noodig met eene asbestomhulling voorziene kurk in *B* bevestigd. Buitendien waren in den cylinder op twee plaatsen openingen *g* geblazen, zoodat gemeenschap bestond tusschen de dampruimte in cylinder en kookvat. Het geheele kooktoestel stond op een gewonen ring *h*. Op dien ring werd een koperen ring van een waterbad *i* gelegd en daarop een draadnet van nikkelgaas *k*, dat den bol van het kooktoestel van onderen bedekte. Op dat draadnet van nikkelgaas lag eene van eene ronde opening voorziene asbestplaat *l*, die den bol van het kookvat juist doorliet, terwijl die bol door een klein asbestplaatje *o* werd bedekt. Op de asbestplaat *l* lag een op gelijke wijze van eene opening voorzien stuk koperdraadnet *m* en daarop weer eene asbestplaat *n*. Deze platen dienden tot steun voor de luchtmantels; zij moesten buitendien beletten dat de verbrandingsgassen in den luchtmantel opstegen.

Het inbrengen van de stof in de vloeistof geschiedde met behulp van een platinalepeltje *p*, dat door insmelten aan eene lange glazen buis *q* was bevestigd. Door dit lepeltje in de zijbuis in te voeren kon men de stof tot *c* brengen en door omkeeren van het lepeltje in de vloeistof laten vallen. Op deze wijze kon worden tegengegaan, dat stof in de zijbuis blijft hangen en eerst na eenigen tijd door de terugvloeiende vloeistof in het kooktoestel werd gebracht. Voor het aflezen bedienden we ons van eene loupe. De ervaring heeft ons geleerd dat dit even nauwkeurig en veel sneller kan geschieden, dan wanneer men van een kijker gebruik maakt. Ook het door Orndorff en Cameron aanbevolen electrische hamertje, om op den thermometer te tikken, achten we eene onnoodige complicatie; een paar tikken met een mes op den metalen kop van den thermometer onmiddellijk vóór het aflezen doen dezelfde diensten. De thermometer was de bekende Beckmannsche.

Als vulmiddel bedienden wij ons van de door Beckmann aanbevolen platinatetraëders, waarvan we gewoonlijk 20 gram bezigden, terwijl daarbij gevoegd werden nog 20 gram platina in den vorm van onregelmatige dunne plaatjes.

Bij alle bepalingen is gebruik gemaakt van zwavel, die op het zorgvuldigst gezuiverd was. Alle oplossingsmiddelen werden eveneens aan eene zorgvuldige zuivering onderworpen en werd, wanneer niet iets anders is vermeld, alleen het constant overgaande gedeelte voor de bepalingen gebruikt.

Om de bruikbaarheid van het toestel te beproeven maakten wij eene bepaling van het moleculairgewicht van stilben met toluol als oplossingsmiddel.

De uitkomsten vermeld in tabel 5 en in de bijgevoegde graphische voorstelling zijn alleszins bevredigend.

5. Stilben in toluol, (kpt. 110,3—110.4 bij 756 mm).
Grammen oplossingsmiddel: 42,95.
Moleculaire verhooging: 35.

Totale °/₀ stilben.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	0,518	1,718	—	—
1,045	0,714	1,719	0,195	187,6
1,859	0,869	1,721	0,348	186,9
2,656	1,015	1,723	0,492	189,0
3,855	1,224	1,724	0,700	192,7
5,097	1,448	1,730	0,918	194,3
6,205	1,635	1,731	1,104	196,6
7,537	1,864	1,733	1,331	198,2

Het moleculairgewicht van stilben is = 180.

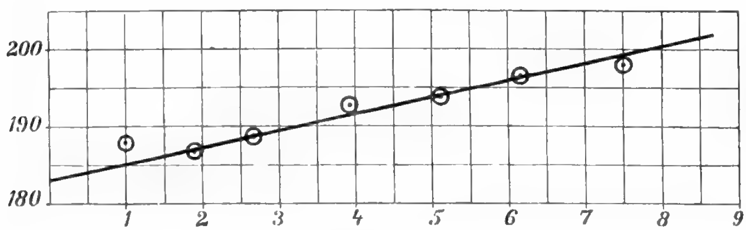


Fig. 5.

Het toestel heeft gedurende den loop van onze onderzoekingen in alle opzichten aan onze verwachtingen beantwoord; alleen willen wij vermelden, dat het langeren tijd duurt, voordat constante aflezingen worden verkregen, dan bij het oude Beckmannsche toestel.

Zwavel in zwavelkoolstof.

Met dit toestel, onder gebruik van een controletoestel, zijn nieuwe bepalingen gemaakt met eene oplossing van zwavel in zwavelkoolstof. De resultaten daarvan zijn neergelegd in de tabellen 6 en 7 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen.

De uitkomst is, dat het moleculair gewicht van de zwavel bij oneindige verdunning gelijk 254 en 256 gevonden werd; dus beantwoordende aan de moleculairformule S_8, en in overeenstemming met de oudere vroeger vermelde onderzoekingen van Beckmann en Sakurai. Alleen moeten wij de aandacht vestigen op het feit, dat de bepalingen, gemaakt bij geringe concentratie, een te hoog moleculairgewicht geven; eene opmerking, die ook bij vroegere resultaten met het Beckmannsche toestel kon worden gemaakt.

6. Zwavel in zwavelkoolstof, (kpt. 45,7—45,8 bij 750 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 63,36.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	0,990	0,530	—	—
0,681	1,050	0,530	0,060	269,4
1,359	1,103	0,527	0,116	278,2
2,011	1,167	0,528	0,179	266,9
2,977	1,260	0,530	0,270	261,8
3,962	1,350	0,530	0,360	261,4
4,968	1,450	0,540	0,450	262,2
5,881	1,523	0,533	0,530	263,5
6,842	1,610	0,534	0,616	263,8
8,181	1,720	0,533	0,727	267,3
10,250	1,884	0,530	0,894	272,2
13,670	2,150	0,530	1,160	279,9

7. Zwavel in zwavelkoolstof, (kpt. 45,7—45,8 bij 750 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 63,4.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	0,960	0,522	—	—
4,222	1,335	0,533	0,364	275,4
7,257	1,599	0.526	0,635	271,4
10,02	1,820	0,520	0,862	276,1
12,99	2,050	0,517	1,095	281,7
16,03	2,274	0,513	1,323	288,0
19,23	2,490	0,505	1,547	295,2
22,11	2,685	0,500	1,747	300,6
24,55	2,846	0,498	1,910	305,3
26,91	2,993	0,491	2,064	309,6

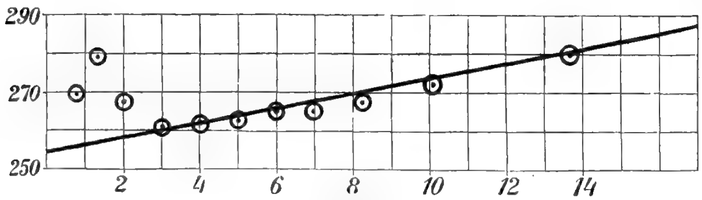


Fig. 6.

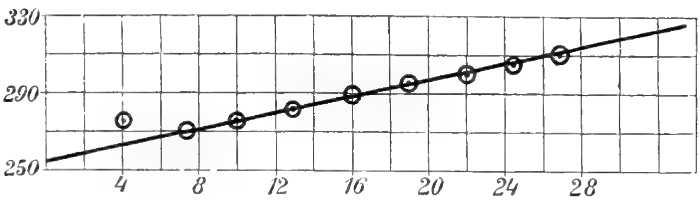


Fig. 7.

Al ligt het voor de hand dat de fouten bij de bepaling van het kookpunt, om welke oorzaak dan ook gemaakt, het zwaarst in het gewicht moeten vallen bij oplossingen van geringe concentratie, zoo was het toch opvallend, dat die afwijkingen steeds in dezelfde richting plaats hadden, dat de kookpuntsverhooging steeds te klein en dus het moleculairgewicht te groot werd gevonden. Wij vermoedden derhalve dat hier eene storing in het spel was en dat die storing misschien daarin bestond, dat niettegenstaande het kooktoestel gevuld was met 40 gram platina toch nog eene vertraging van het kooken van het zuivere oplossingsmiddel en van de weinig geconcentreerde oplossing plaats had, terwijl die vertraging ophield, zooals aan het schuimen van de kookende vloeistof zichtbaar was, wanneer deze eene genoegzame hoeveelheid zwavel opgelost bevatte. Die vertraging kon misschien te voorschijn worden geroepen door de glazen wanden van het toestel en wij stelden derhalve een poging in het werk om haar op te heffen door het aanbrengen van een roerder, die uit dikke platinadraad was vervaardigd en die langs de wanden op en neer kon worden bewogen.

8. Zwavel in zwavelkoolstof, (kpt. 46,3—46,3 bij 766 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 63,71.
Moleculaire verhooging: 23,75.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Temp. verschil.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,108	0,721	0,387		
0,742	1,180	0,725	0,455	0,068	259,2
1,458	1,238	0,724	0,514	0,127	272,7
2,456	1,331	0,726	0,605	0,218	267,5
5,731	1,630	0,729	0,901	0,514	264,8
7,325	1,770	0,728	1,042	0,655	265,6
9,805	1,978	0,728	1,250	0,863	269,8
13,510	2,267	0,732	1,535	1,148	279,6
17,140	2,542	0,741	1,801	1,414	287,8

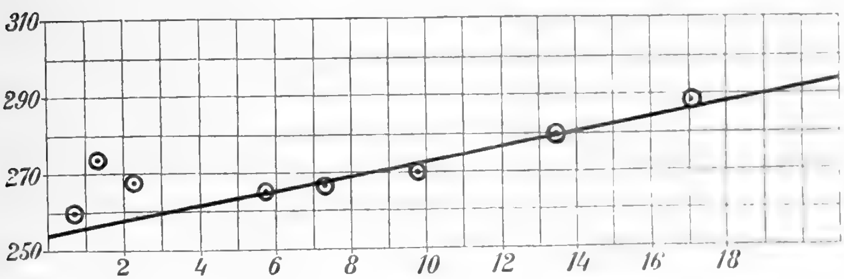


Fig. 8.

8*a*. Zwavel in zwavelkoolstof.

De in deze tabel vermelde temperaturen zoowel van het eerste als van het controle toestel zijn afgelezen direct na het roeren in het eerste toestel.

Totale $^0/_0$ zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Temp. verschil.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,100	0,725	0,375	—	—
0,742	1,172	0,725	0,447	0,072	244,8
1,458	1,232	0,720	0,510	0,135	256,5
2,456	1,331	0,726	0,605	0,230	253,5
5,731	1,629	0,728	0,901	0,526	258,8
7,325	1,770	0,729	1,041	0,666	261,2
9,805	1,978	6,728	1,250	0,875	266,1
13,510	2,267	0,732	1,535	1,160	276,7
17,140	2,542	0,741	1,801	1,426	285,4

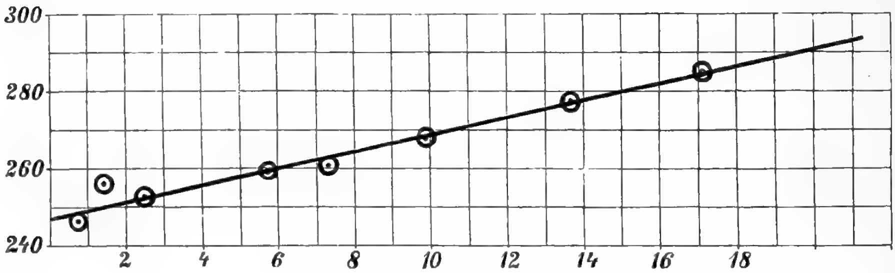


Fig. 8*a*.

Zooals uit de tabellen 8 en 8*a* en de daarbij behoorende graphische voorstellingen blijkt, had inderdaad dit roeren het gewenschte gevolg. Het kookpunt daalde bij zuivere zwavelkoolstof, wanneer men roerde, 0,012 graad, terwijl de daling na het inbrengen van de eerste portie zwavel slechts 0,008° bedroeg en in het geheel geene verandering van het kookpunt meer plaats had, zoodra de hoeveelheid zwavel meer dan $2^0/_0$ bedroeg. Deze verschijnselen zijn talrijke malen geconstateerd en telkens werd gevonden, dat gedurende het roeren van de zuivere zwavelkoolstof of de zeer verdunde zwaveloplossing het kookpunt daalde, dat daarentegen, zoodra men met roeren ophield, de thermometer langzaam zijn vroegeren stand terug verkreeg. Dat men hier niet met eene door het roeren met platina voortgebrachte afkoeling te doen had, bleek vooral daaruit dat geen temperatuursverandering werd waargenomen in eene meer geconcentreerde oplossing. Wij willen hier echter dadelijk opmerken, dat bij toluol, hetwelk niet dezelfde soort storingen toonde, door roeren eene wel is waar zeer geringe, slechts 0,002 à 0,003° bedragende kookpuntsverhooging werd voortgebracht. Waaraan deze moet worden toegeschreven kunnen wij niet gissen. Al verdwijnt, wanneer men den invloed van het roeren in rekening brengt, de onregelmatigheid niet geheel en al, zij wordt toch, zooals uit tabel 8*a* blijkt, tot een veel geringer bedrag teruggebracht.

Orndorff en Terrasse schijnen die moeielijkheden bij hunne onderzoekingen eveneens te hebben ondervonden. Zij trachtten haar uit den weg te gaan, door dadelijk met groote concentraties te beginnen en wel bij hunne eerste bepaling met eene concentratie van 3,36 $^0/_0$, bij hunne tweede van 4,71 $^0/_0$ en bij de derde van 7,50 $^0/_0$.

Bij de waarnemingen in tabel 7 neergelegd hebben wij hun voorbeeld gevolgd maar ook daar waren onze resultaten zooals ook bij de overige proeven gemiddeld 32 atoomgewichtseenheden lager. Wij vestigen de aandacht er op dat bij deze proeven eene concentratie bereikt werd van 26 $^0/_0$ zwavel en dat tot aan die concentratie toe de lijn, welke de proeven voorstelt, een regelmatig verloop heeft.

Zwavel in benzol.

Met ons toestel zijn 4 waarnemingen gedaan waarvan de resultaten zijn neergelegd in de tabellen 9, 10, 11 en 12 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen. Als moleculairgewicht bij oneindige verdunning werden achtereenvolgens verkregen 256, 266, 256 en 246.

9. Zwavel in benzol, (kpt. 78,9—79,0 bij 747 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,8.
Moleculaire verhooging: 26,7.

Totale $^0/_0$ zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	0,761	1,719	0	—
0,600	0,813	1,700	0,071	225,6
1,700	0,903	1,689	0,172	263,9
2,854	0,999	1,677	0,280	272,1
3,955	1,088	1,666	0,380	277,9
5,128	1,184	1,663	0,479	285,8
6,202	1,272	1,662	0,568	291,5
7,308	1,372	1,670	0,660	295,7
8,413	1,470	1,688	0,740	303,6
9,564	1,569	1,703	0,824	309,9
10,703	1,680	1,732	0,906	315,4
11,865	1,812	1,787	0,983	322,3
13,500	1,945	1,841	1,062	340,1
15,645	1,962	1,859	—	—

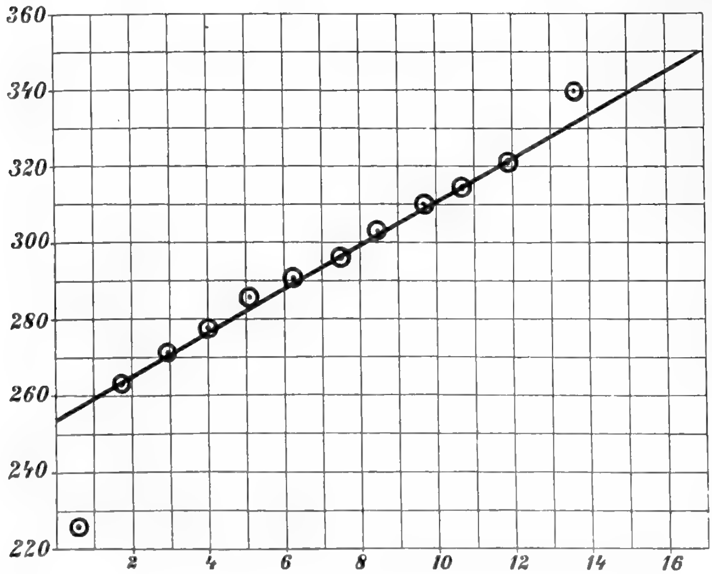


Fig. 9.

10. Zwavel in benzol, (kpt. 78,9— 79,0 bij 747 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,8.
Moleculaire verhooging: 26,7.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,260	2,240	—	—
1,156	1,360	2,239	0,101	305,6
2,282	1,485	2,248	0,217	280,7
3,408	1,591	2,252	0,319	285,2
5,104	1,746	2,257	0,469	290,6
6,696	1,885	2,262	0,603	296,5
8,571	2,031	2,264	0,747	306,3
10,270	2,153	2,265	0,868	316,0
11,880	2,270	2,272	0,978	324,3
13,530	2,360	2,281	1,059	341,0

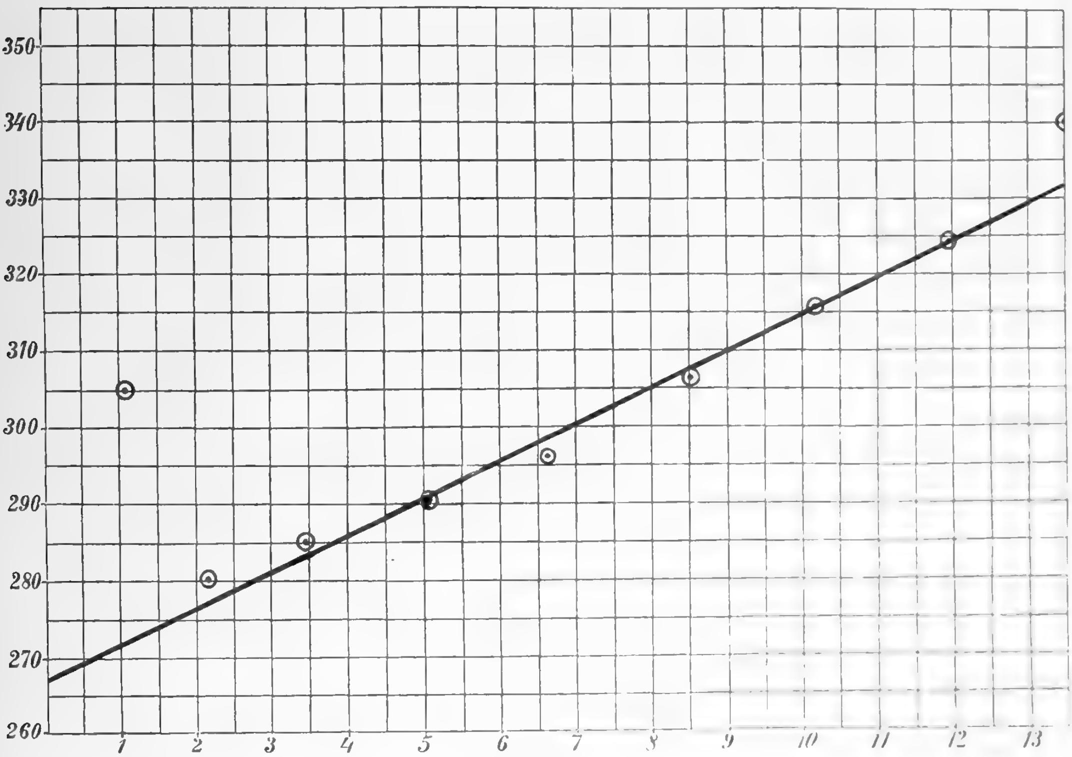


Fig. 10.

11. Zwavel in benzol, (kpt. 78,9—79,0 bij 747 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,77.
Moleculaire verhooging: 26,7,

Totale %/0 zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,603	2,582	—	—
1,187	1,722	2,586	0,115	275,7
2,343	1,841	2,587	0,233	268,5
3,509	1,957	2,593	0,343	273,2
4,814	2,076	2,599	0,456	281,9
6,571	2,231	2,600	0,610	287,6
8,311	2,377	2,607	0,749	296,3
9,921	2,512	2,613	0,878	301,7
11,695	2,600	2,615	0,964	324,0

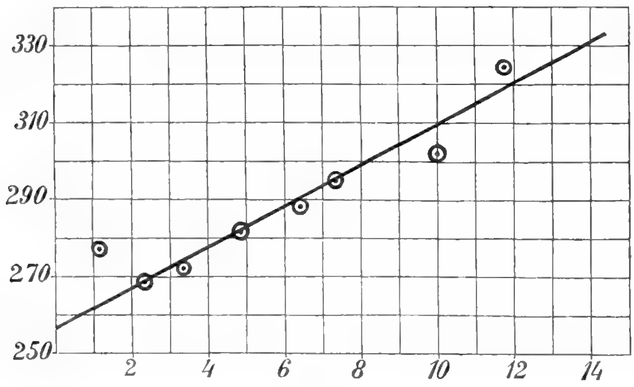


Fig. 11.

12. Zwavel in benzol, (kpt. 78,9—79,0 bij 747 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 44,01.
Moleculaire verhooging: 26,7.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,395	2,417	—	—
0,961	1,499	2,422	0,099	259,2
1,968	1,610	2,427	0,205	256,3
3,395	1,747	2,426	0,343	264,3
4,908	1,893	2,431	0,484	270,7
6,277	2,019	2,437	0,604	277,5
7,674	2,140	2,443	0,719	285,0
9,029	2,250	2,445	0,827	291,5

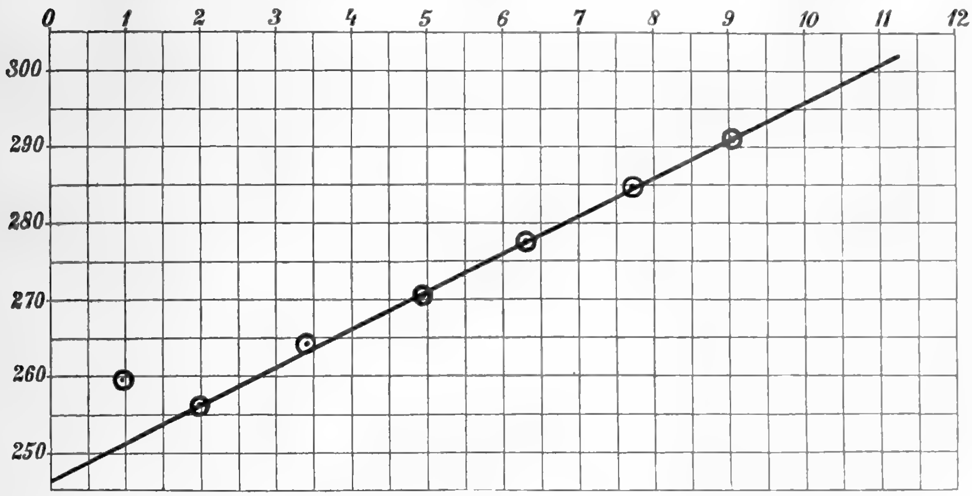


Fig. 12.

Door ORNDORFF en TERRASSE zijn 5 reeksen van waarnemingen gedaan, waarvan de uitkomsten geheel verschillend zijn van de onze. Zooals uit de bijgevoegde graphische voorstellingen I, II, III, IV en V (blz. 187 van hunne verhandeling) vooral duidelijk blijkt, wijken hunne resultaten ook onderling zeer sterk van elkander af. Dat desniettegenstaande de einduitkomst van het moleculairgewicht van de zwavel voor oneindige verdunning bij alle proeven overeenstemt met de formule S_9 is wel in hoofdzaak daaraan toe te schrijven, dat de lijnen getrokken worden op eene wijze, die zeker niet van willekeur is vrij te pleiten. Dit

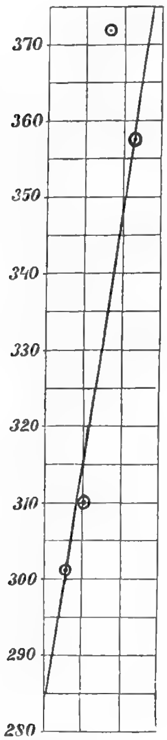


Fig. I.

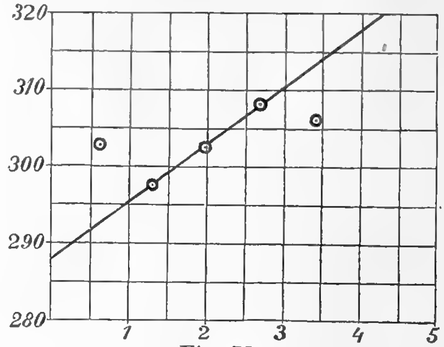


Fig. II.

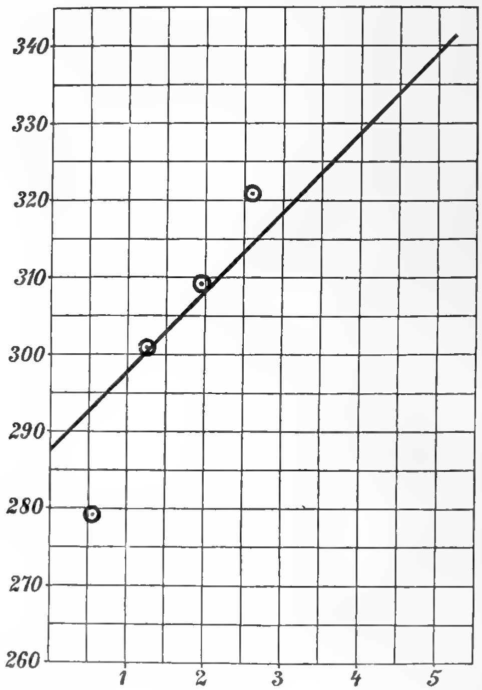


Fig. III.

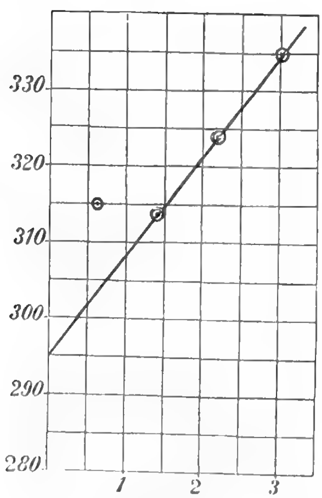


Fig. IV.

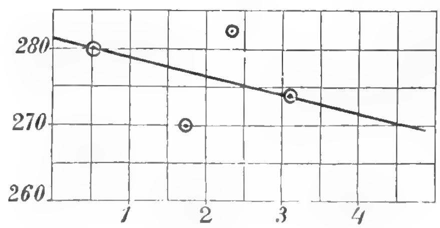


Fig. V.

komt duidelijk voor den dag, wanneer men in plaats van alle 5 waarnemingen in ééne graphische voorstelling te vereenigen, elke reeks van waarnemingen afzonderlijk graphisch voorstelt, zooals als voorbeeld in de bijgevoegde figuren is geschied.

Zwavel in toluol.

Met zwavel en toluol werden twee reeksen van waarnemingen gedaan. Zij zijn neergelegd in de tabellen 13 en 14 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen. De uitkomsten, op zichzelf aan regelmatigheid niets te wenschen overlatende, zijn in zoover bevreemdend, als voor het moleculairgewicht bij oneindige verdunning verkregen werd 218 en 228, welke moleculairgewichten eerder voor S_7 dan voor S_8 pleiten.

Ofschoon het kookpunt van toluol gelegen is boven het overgangspunt van de rhombische in monokliniscke zwavel en ofschoon, zooals straks zal blijken, met xylol overeenkomstige resultaten werden verkregen, houden wij het toch voor gewaagd, vooral in verband met de resultaten in naphtalin verkregen, hieruit het besluit te trekken, dat die overgang gepaard zou gaan met de vorming van moleculen S_7.

13. Zwavel in toluol, (kpt. 110,3—110,4 bij 756 mm.)
Grammen oplossingsmiddel: 43,16.
Moleculaire verhooging: 35.

Totale $^0/_0$ zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	— 0,046	1,141	—	—
0,394	+ 0,016	1,141	0,062	222,2
0,765	0,061	1,128	0,120	223,0
1,744	0,208	1,127	0,268	227,7
2,666	0,320	1,110	0,397	235,1
3,671	0,429	1,088	0,528	243,3
4,658	0,545	1,089	0,643	253,5
5,600	0,641	1,072	0,756	259,3
6,420	0,721	1,059	0,849	264,7
7,387	0,826	1,055	0,958	269,9
8,898	0,075	1,046	1,116	279,1
11,530	1,225	1,040	1,372	294,1

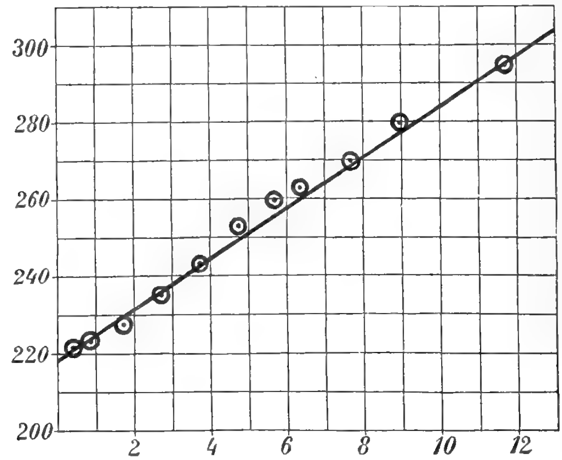

300
280
260
240
220
200
2
4
6
8
10
12

Fig. 13.

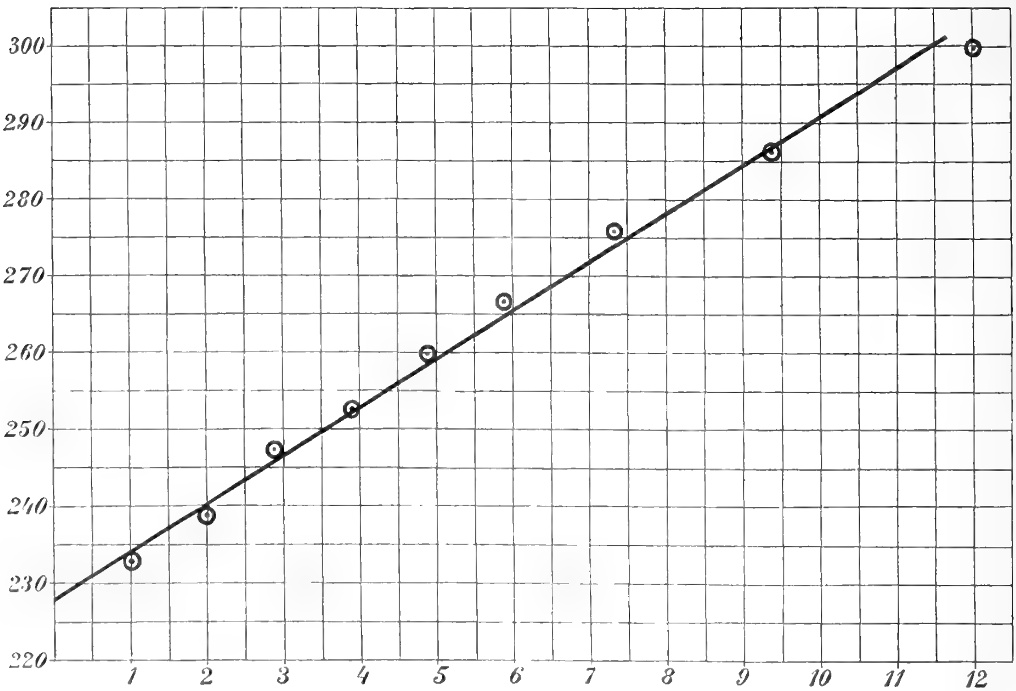

300
290
280
270
260
250
240
230
220
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Fig. 14.

14. Zwavel in toluol, (kpt. 111,0—111,2 bij 766 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,05.
Moleculaire verhooging: 35.

Totale %/0 zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	0,519	1,710	—	—
1,006	0,670	1,710	0,151	233,2
1,947	0,810	1,715	0,286	238,3
2,900	0,934	1,715	0,410	247,5
3,867	1,057	1,713	0,535	253,0
4,848	1,177	1,714	0,654	259,4
5,815	1,289	1,718	0,762	267,1
7,287	1,452	1,719	0,924	276,0
9,362	1,666	1,712	1,145	286,2
12,030	1,925	1,711	1,405	299,7

Geheel afwijkende uitkomsten verkregen Orndorff en Terrasse. Hunne uitkomsten zijn weder zeer onregelmatig en stemmen onderling volstrekt niet overeen. Door hunne lijnen vrij willekeurig te trekken komen zij tot het resultaat dat de zwavel ook bij de kooktemperatuur van toluol, die nog beneden het smeltpunt van zwavel ligt, de moleculairformule S_9 moet hebben. Uit hunne graphische voorstelling (l. c. p. 183) blijkt, vooral wanneer zij in drieën gesplitst wordt, het zeker vreemde verschijnsel, dat de toenemende concentratie bij twee van de drie proeven het omgekeerde gevolg heeft als hetgeen gewoonlijk wordt waargenomen, dat nl. met het klimmen van die concentratie het moleculairgewicht kleiner in plaats van grooter gevonden wordt en de getrokken lijnen dalen in plaats van te klimmen. Had men zooals bij de zwavelkoolstof de oplossingen van geringe concentratie niet in rekening gebracht, dan zou men althans bij twee van de drie waarnemingen een moleculairgewicht verkregen hebben, dat meer overeenkomt met de formule S_8.

Zwavel in metaxylol.

De drie reeksen van waarnemingen, uitgevoerd met eene oplossing van zwavel in metaxylol, zijn medegedeeld in de tabellen 15, 16 en 17 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen.

15. Zwavel in metaxylol, (kpt. 139—139,5 bij 762 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,03.
Moleculaire verhooging: 43,2.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	1,853	1,752	—	—
0,998	2,041	1,762	0,178	237,3
2,041	2,232	1,772	0,359	245,6
3,048	2,412	1,779	0,532	247,5
4,476	2,642	1,803	0,738	262,0
5,880	2,861	1,816	0,944	269,1
8,522	3,230	1,840	1,289	285,6

16. Zwavel in metaxylol, (kpt. 139—139,5 bij 762 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,11.
Moleculaire verhooging: 43,2.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	2,057	1,932	—	—
0,980	2,226	1,929	0,172	246,2
1,967	2,392	1,930	0,337	252,2
3,009	2,560	1,930	0,505	257,4
4,030	2,719	1,932	0,662	263,0
5,030	2,860	1,932	0,803	270,6
5,985	2,996	1,932	0,939	275,3
7,392	3,187	1,934	1,128	283,1
8,933	3,388	1,935	1,328	290,6
11,360	3,680	1,937	1,618	303,2
14,110	3,993	1,937	1,931	315,7

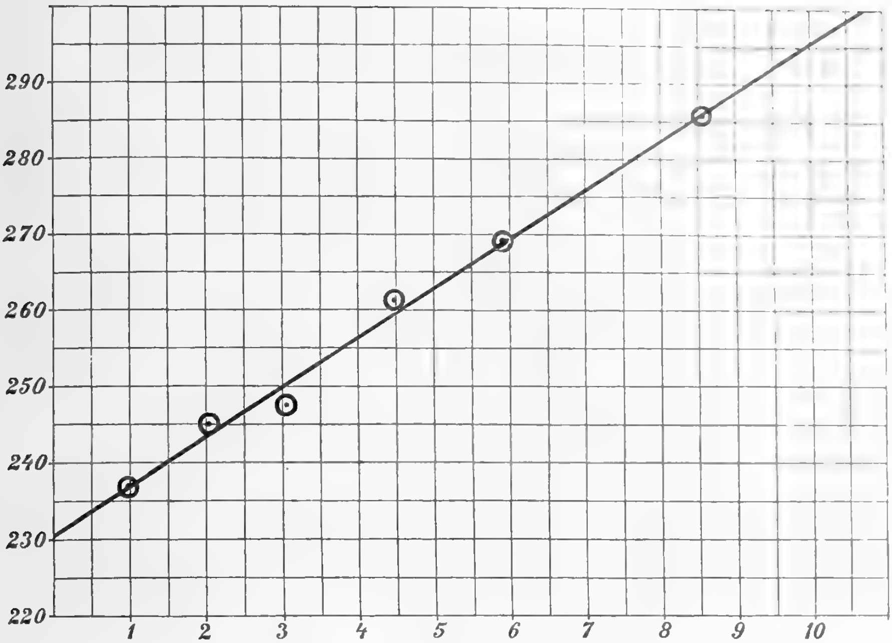


Fig. 15.

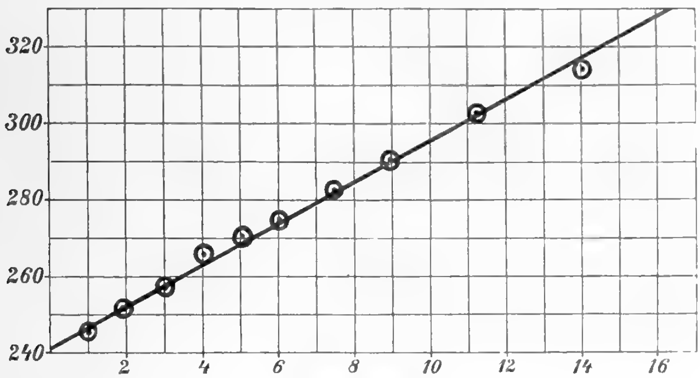


Fig. 16.

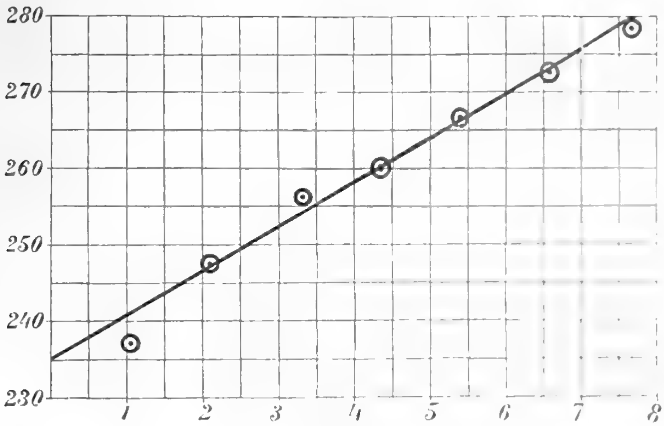


Fig. 17.

17. Zwavel in metaxylol, (kpt. 139—139,5 bij 762 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 43,35.
Moleculaire verhooging: 43,2.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	2,582	2,495	—	—
1,088	2,782	2,497	0,198	237,3
2,162	2,962	2,498	0,377	247,7
3,241	3,131	2,498	0,546	256,4
4,303	3,300	2,498	0,715	260,0
5,389	3,458	2,498	0,873	266,7
6,541	3,621	2,499	1,035	273,0
7,625	3,770	2,500	1,183	278,4

Zooals hieruit blijkt hadden de bepalingen een regelmatig verloop en waren de uitkomsten voor oneindige verdunning 231, 235 en 242, dus liggende tusschen hetgeen de formules S_7 en S_8 eischen. Het mag echter niet onvermeld blijven dat bij het kooken van zwavel in xylol eene al is het ook zeer geringe ontwikkeling van zwavelwaterstof plaats heeft. Een loodacetaatpapiertje, aan het uiteinde van den koeler gehouden, werd na eenige minuten lichtbruin gekleurd. Wij gelooven echter niet dat deze inwerking een merkbaar storenden invloed op de bepalingen heeft uitgeoefend.

De heeren Orndorff en Terrasse komen door hunne bepalingen tot het besluit dat het moleculairgewicht van de zwavel in oplossing in metaxylol bij oneindige verdunning beantwoordt aan de formule S_8.

Zij achten dit belangrijk, omdat het kookpunt van het xylol boven het smeltpunt van de zwavel is gelegen en zij meenen te mogen besluiten dat er een essentieel verschil bestaat tusschen de moleculen van vaste zwavel, waaraan de formule S_9 en de moleculen van gesmolten zwavel, waaraan de formule S_8 toekomen moet.

Vergelijkt men hunne graphische voorstellingen van deze waarnemingen (l. c. p. 194) met de vroeger vermelde, dan valt het op, dat hier in plaats van rechte lijnen kromme worden getrokken. Had men ook hier zooals bij de zwavelkoolstof slechts gelet op de uitkomsten verkregen bij hoogere concentratie, dan zou het eind-resultaat ook bij xylol de formule S_9 geweest zijn.

Zwavel in naphtalin.

Met een oplossing van zwavel in naphtalin zijn drie reeksen van waarnemingen gedaan, waarvan de resultaten zijn medegedeeld in de tabellen 18, 19 en 20 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen. Voor het moleculairgewicht van zwavel bij oneindige verdunning verkrijgt men dan de waarden 237,5; 251,5 en 252,5. Wij moeten echter opmerken dat zwavel op naphtalin sterker inwerkt dan op xylol, merkbaar aan de meer duidelijke reactie op loodacetaatpapier. De inwerking achten we echter niet zoo krachtig dat zij een grooten invloed op de resultaten heeft kunnen uitoefenen. Ook door Orndorff en Terrasse zijn drie reeksen van waarnemingen gedaan met ditzelfde oplossingsmiddel, waaruit door hen werden afgeleid de moleculairgewichten voor oneindige verdunning 262, 252 en 256,5. Dat echter ook hierbij de graphische voorstelling, nu weder met rechte lijnen, aan willekeur doet denken, leert een blik op pag. 191 van hunne verhandeling.

18. Zwavel in naphtalin, (kpt. 214—214,5 bij 772 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 47,39.
Moleculaire verhooging: 60,7.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle-toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	4,013	2,207	—	—
1,005	4,258	2,208	0,244	252,4
2,028	4,513	2,209	0,498	247,2
2,997	4,737	2,210	0,721	252,3
3,906	4,942	2,210	0,926	256,0
4,720	5,116	2,211	1,099	260,7
6,015	5,395	2,212	1,377	265,1

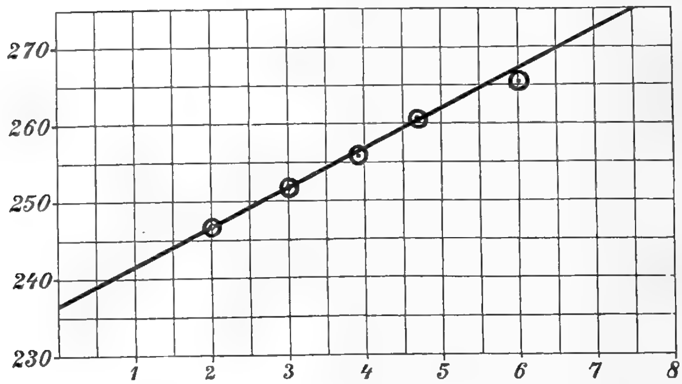


Fig. 18.

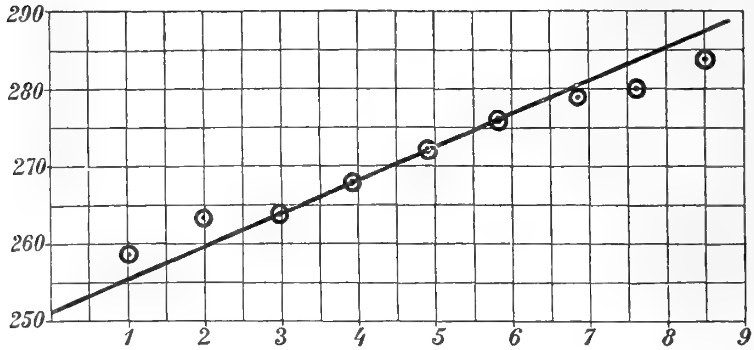


Fig. 19.

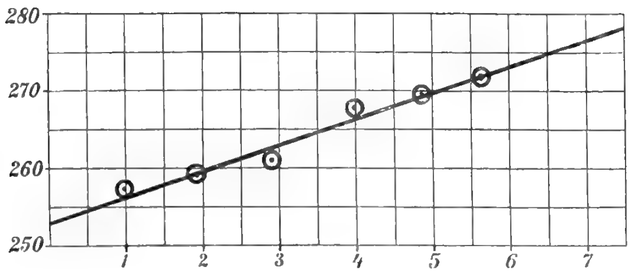


Fig. 20.

19. Zwavel in naphtalin, (kpt. 214—214,5 bij 772 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 49,67.
Moleculaire verhooging: 60,7.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle- toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	3,631	2,280	—	—
1,022	3,870	2,279	0,240	258,5
1,981	4,086	2,278	0,457	263,2
2,960	4,309	2,277	0,681	263,9
3,893	4,509	2,277	0,881	268,2
4,873	4,719	2,280	1,088	271,9
5,775	4,902	2,282	1,269	276,2
6,733	5,105	2,283	1,471	278,0
7,666	5,293	2,282	1,660	280,3
8,499	5,451	2,280	1,820	283,5

20. Zwavel in naphtalin, (kpt. 214—214,5 bij 772 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 53,47.
Moleculaire verhooging: 60,7.

Totale % zwavel.	Temp. Eerste toestel.	Temp. Controle- toestel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	3,936	3,520	—	—
0,973	4,166	2,521	0,229	257,8
1,908	4,390	2,527	0,447	259,1
2,892	4,619	2,531	0,672	260,7
3,952	4,854	2,536	0,902	265,9
4,878	5,052	2,538	1,098	269,7
5,658	5,223	2,546	1,261	272,4

Ofschoon het gemiddelde van onze waarnemingen iets beneden het gemiddelde van de waarnemingen van Orndorff en Terrasse ligt, gelooven wij echter ook uit onze proeven het besluit te mogen trekken dat het moleculairgewicht van de zwavel bij het kookpunt van naphtalin aan S_8 beantwoordt.

Zwavel in phenol.

Orndorff en Terrasse, die met dit oplossingsmiddel evenals wij twee reeksen van waarnemingen hebben gedaan, vermelden dat bij lang kooken van die oplossing slechts een kleine spoor zwavelwaterstof wordt ontwikkeld en dat dit oplossingsmiddel wegens het langzame aangroeien van het moleculairgewicht bij toenemende concentratie bijzonder geschikt is voor de bepaling van het moleculairgewicht. Onze ervaringen stemmen zooals uit de tabellen 21 en 22 en de daarbij behoorende graphische voorstellingen blijkt daarmede niet overeen. Het verloop der lijnen in beide reeksen van waarnemingen toont tusschen deze weinig overeenstemming, hetgeen ons niet verwonderde, daar gedurende het kooken eene zwavelwaterstofontwikkeling plaats had, die we in vergelijking met die, bij xylol en naphtalin opgemerkt, sterk moeten noemen. Aan de verkregen waarden voor oneindige verdunning 213 en 194 meenen wij derhalve ook geen beteekenis te mogen hechten. De verkregen eindresultaten van Orndorff en Terrasse stemmen daarentegen voortreffelijk overeen met hetgeen door de formule S_8 wordt vereischt.

21. Zwavel in phenol, (kpt. 180°—180,3 bij 781,5 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 53,12.
Moleculaire verhooging: 30,4.

Totale °/o zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,910	0,124	223,1
1,752	0,241	220,9
2,544	0,354	218,4
3,383	0,467	220,2
4,201	0,569	224,4
5,168	0,682	230,4
6,163	0,810	231,3

22. Zwavel in phenol, (kpt. 180,0—180,3 bij 781,5 mm.).
Grammen oplossingsmiddel: 51,87.
Moleculaire verhooging: 30,4.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,949	0,153	188,5
1,900	0,278	207,7
2,847	0,399	216,9
3,811	0,521	222,3
4,724	0,633	226,9
5,692	0,752	230,1
6,608	0,857	234,4
7,527	0,974	234,9

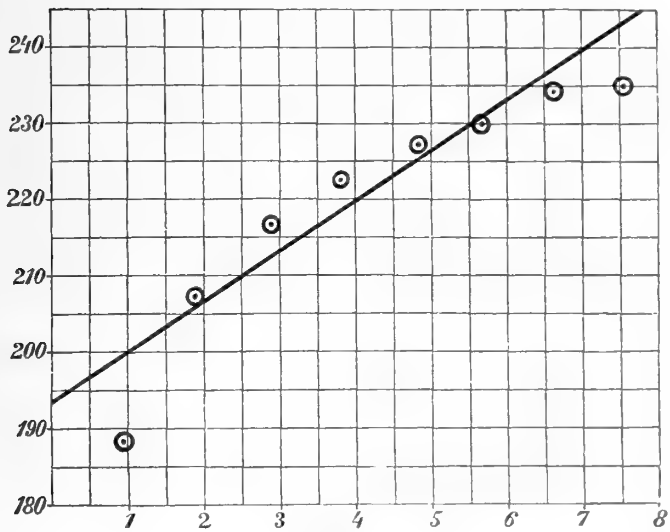


Fig. 21.

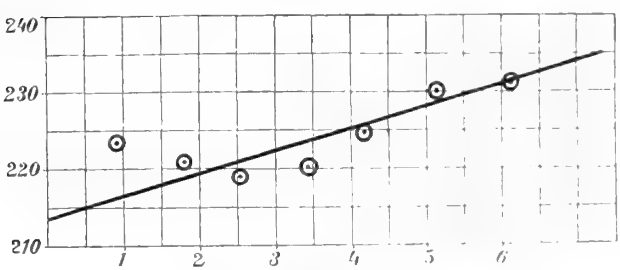


Fig. 22.

Door Orndorff en Terrasse zijn ook waarnemingen met phenetol gedaan en daarbij eveneens resultaten verkregen, die ook voor dit oplossingsmiddel met het kookpunt 168,3 aan de moleculairformule S_8 goed beantwoorden. Daar echter bij voorloopige proeven bleek dat phenetol met zwavel krachtig zwavelwaterstof ontwikkelde, hebben wij van proefnemingen met dit oplossingsmiddel afgezien. Ons zoeken naar andere oplossingsmiddelen, met een kookpunt tusschen dat van xylol en naphtalin en hooger dan naphtalin gelegen, hadden een ongunstigen uitslag. De talrijke door ons onderzochte organische verbindingen uit zeer verschillende klassen ontwikkelden alle met zwavel zooveel zwavelwaterstof, dat ze onbruikbaar bleeken.

Zwavel in zwavelmonochlorid.

Het merkwaardigste resultaat van de onderzoekingen van Orndorff en Terrasse is zeker, dat het zwavelmolecule in zwavelmonochloridoplossing bij het kookpunt van die oplossing zoodanig wordt gedissocieerd, dat zijne formule door S_2 moet worden uitgedrukt.

De beide onderzoekers vestigen de aandacht op de moeielijkheden, die het werken met dit oplossingsmiddel aanbiedt en op bronnen van fouten, daarin gelegen, dat kurk en caoutchouk evenals waterdamp door zwavelmonochlorid worden aangetast en er dus voortdurend gevaar bestaat voor de verontreiniging van het zwavelmonochlorid door die ontledingsproducten.

Wij gelooven met ons toestel deze moeielijkheden te hebben overwonnen. De kurken waren reeds door den grooten afstand van de kokende vloeistof beter beschut tegen de dampen, terwijl de asbestbekleeding die beschutting zoo volledig maakte, dat nooit door ons een aantasting van de kurk is waargenomen. Caoutchoukverbindingen werden bij ons toestel niet gebruikt en tegen de inwerking van den waterdamp der lucht was gewaakt door het einde der zijbuis te verbinden met eene chloorcalciumbuis, die slechts voor oogenblikken verwijderd werd, wanneer nieuwe stof in het toestel moest worden gebracht. De koeler werkte verder zoo krachtig, dat zelfs bij langdurig koken niet eens de reuk van zwavelmonochlorid was waar te nemen. Van het aangrijpen der slijmvliezen van oogen en neus, waarover de heeren Orndorff en Terrasse klagen, was nog minder sprake.

Gedurende het gefractioneerde distilleeren werd door ons de opmerking gemaakt, die later nader zal worden besproken, dat het ondoenlijk was een volkomen constant kookpunt te verkrijgen. Het gelukte ons echter voor onze proeven voldoende hoeveelheden te verkrijgen, die bij 760 mm. tusschen 135,8 en 136,2 overgingen en deze werden voor onze eerste onderzoekingen gebruikt.

Wij vonden het noodig om te beginnen met de beproeving van de geschiktheid van de vloeistof voor zulke bepalingen, en gebruikten hiervoor dezelfde stof, het triphenylmethan, die ook ORNDORFF en TERRASSE voor hetzelfde doel had gediend. Bij de uitvoering deed zich al dadelijk de moeielijkheid voor, dat het oplossingsmiddel in zuiveren staat niet constant kookte. Ofschoon ook afwijkingen in tegenovergestelden zin voorkwamen, was over het algemeen op te merken, dat op den duur het kookpunt des te meer steeg, hoe langer er gekookt was. Als voorbeeld voor de talrijke ervaringen in dat opzicht gemaakt, dient de volgende tabel, waarin in de eerste kolom de tijd is opgegeven van de waarneming, in de tweede kolom het kookpunt van het zwavelmonochlorid, in de derde kolom het kookpunt van toluol in een tweede toestel, dat diende om den invloed van den wisselenden barometerstand na te gaan en in de vierde kolom de verschillen tusschen die twee thermometerstanden, die bij een constant kokende vloeistof constant hadden moeten zijn. Zooals men ziet klimmen de verschillen, ofschoon volstrekt niet regelmatig, van —0,735 tot + 0,541 gedurende den $3\frac{1}{2}$ uren durenden waarnemingstijd.

12 u. 9′	0,960	1,695	— 0,735
12 u. 10′	0,960	1,697	— 0,737
12 u. 18′	0,900	1,697	— 0,797
12 u. 20′	0,972	1,697	— 0,725
1 u. 56′	1,450	1,697	— 0,247
2 u. 2′	1,600	1,697	— 0,097
2 u. 30′	1,875	1,694	+ 0,181
2 u. 40′	1,962	1,695	+ 0,267
2 u. 42′	1,990	1,693	+ 0,297
2 u. 47′	1,960	1,695	0,265
2 u. 49′	1,989	1,695	0,294
2 u. 54′	2,048	1,697	0,351
3 u. 0′	2,110	1,690	0,414
3 u. 2′	2,152	1,696	0,456
3 u. 8′	2,071	1,696	0,375
3 u. 10′	2,085	1,696	0,389
3 u. 12′	2,130	1,696	0,434
3 u. 17′	2,258	1,696	0,562

3 u. 19′	2,256	1,696	0,557
3 u. 23′	2,172	1,699	0,473
3 u. 25′	2,212	1,700	0,512
3 u. 29′	2,220	1,700	0,520
3 u. 31′	2,233	1,700	0,533
3 u. 33′	2,247	1,700	0,547
3 u. 34′	2,260	1,700	0,560
3 u. 35′	2,237	1,700	0,537
3 u. 36′	2,241	1,700	0,541

Bij eene dergelijke vloeistof kan men slechts dan eenigszins vertrouwbare cijfers verkrijgen, wanneer men den waarnemingstijd zoo kort mogelijk laat duren. Deze ook door ORNDORFF en TERRASSE aanbevolen wijze van werken hebben wij gevolgd en daarbij de de resultaten verkregen, die in tabel 23 zijn medegedeeld.

De resultaten waren nu bij triphenylmethan zoo afwijkend van die, welke het moleculairgewicht 244 deed verwachten, dat een nader onderzoek naar de oorzaken van dit verschijnsel noodig bleek. Wij vermoedden reeds dadelijk dat de oorzaak moest worden gezocht in eene inwerking van $S_2\ Cl_2$ op triphenylmethan.

23. Triphenylmethan in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 84,34.
Moleculaire verhooging: 52,8.

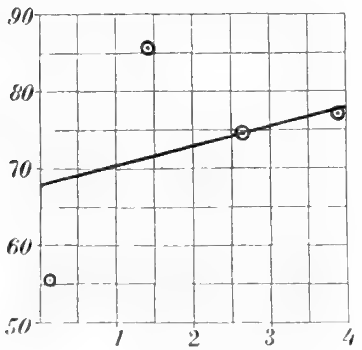


Fig. 23.

Totale $^0/_0$ Triphenylmethan.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,146	0,140	55,05
1,395	0,857	85,92
2,667	1,887	74,63
3,881	2,663	76,94

Deze inwerking moest blijken, wanneer het triphenylmethan uit de oplossing teruggewonnen werd. Voor dit doel werd het grootste gedeelte van het zwavelmonochlorid afgedistilleerd en de terugblijvende geconcentreerde oplossing gegoten in eene verdunde oplossing van soda. De zich afscheidende stof onderscheidde zich zoowel door zijn uitwendig aanzien als ook doordat zij niet meer in kokend water smolt van het triphenylmethan. Door herhaaldelijk omkristalliseeren uit alkohol konden daaruit kristallen verkregen worden, die het smeltpunt 160,5 hadden. Daar dit het smeltpunt is van triphenylcarbinol, zoo was door de inwerking van het $S_2\,Cl_2$ op triphenylmethan het triphenylmethanchlorid ontstaan, dat zooals bekend door kooken met water en ook door behandeling met verdunde sodaoplossing in triphenylcarbinol wordt omgezet. Waarom door ORNDORFF en TERRASSE juiste cijfers werden verkregen en zij blijkbaar dergelijke inwerking niet hebben opgemerkt, weten we natuurlijk niet.

Niettegenstaande deze uitkomsten niet bemoedigend waren voor het gebruik van zwavelmonochlorid als oplossingsmiddel voor de moleculairgewichtsbepaling van de zwavel, zijn wij er toch toe overgegaan deze door ORNDORFF en TERRASSE uitgevoerde onderzoekingen te herhalen, vooral daar het zoo dadelijk niet in te zien was, hoe eene scheikundige inwerking van zwavelmonochlorid op zwavel zou kunnen plaats hebben. De uitkomsten dezer bepalingen zijn neergelegd in de tabellen 24, 25, 26, 27, 28 en 29.

Het moleculairgewicht van de zwavel bij oneindige verdunning leverde ons, zooals uit de graphische voorstellingen blijkt, resultaten op, die nog merkwaardiger waren dan die van ORNDORFF en TERRASSE. In de opgegeven volgorde verkregen wij toch 22,5; 15; 8; 20; 147,7 en 14.

24. Zwavel in zwavelmonochlorid, (kpt. 135,8—136,2 bij 760 mm.)
Grammen oplossingsmiddel: 83,16.
Moleculaire verhooging: 52,8.

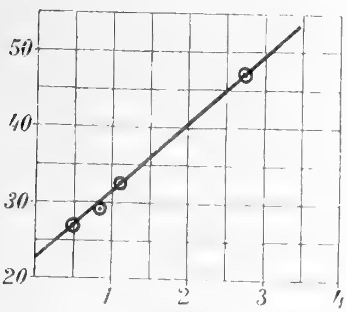


Fig. 24.

Totale %/₀ zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0		
0,527	1,058	26,31
0,818	1,462	29,55
1,104	1,786	32,63
2,755	3,093	47,03

25. Zwavel in zwavelmonochlorid, (kpt. 135,8—136,2 bij 760 mm.)
Grammen oplossingsmiddel: 83,71.
Moleculaire verhooging: 52,8.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,185	0,670	14,57
0,415	1,250	17,51
0,652	1,630	21,11
0,863	1,945	23,47
2,074	3,065	35,78
2,779	3,515	41,80

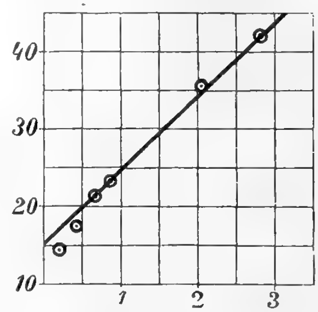


Fig. 25.

26. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 83,59.
Moleculaire verhooging: 52,8.

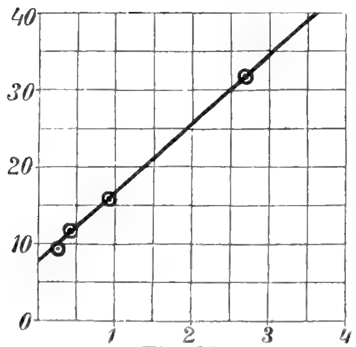


Fig. 26.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,238	1,340	9,37
0,464	2,181	11,23
0,921	3,171	15,34
3,185	5,257	31,99

27. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 83,67.
Moleculaire verhooging: 52,8.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0		
0,258	0,558	24,42
1,219	1,700	37,88

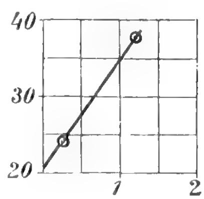


Fig. 27.

28. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 83,96.
Moleculaire verhooging: 52,8.

Toegev. % zwavel.	Temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.	Gemiddeld mol. gewicht.
4,264	—	—	
1,155	0,587	103,9	
1,208	0,540	118,2	
1,683	0,848	137,1	147,7
1,611	0,585	145,5	
1,594	0,528	159,4	
1,456	0,472	162,8	
3,313	0,955	183,1	
1,588	0,488	171,8	

Hierbij dient nog te worden opgemerkt dat bij de waarnemingen, die in tabel 28 zijn vermeld, de weg is gevolgd door Orndorff en Terrasse opgegeven, door eerst zwavel in zwavelmonochlorid op te lossen en zonder inachtneming van de reeds opgeloste zwavel hieruit het moleculairgewicht af te leiden, terwijl in tabel 29 diezelfde resultaten zijn medegedeeld onder gebruikmaking van de resultaten van tabel 25.

De kookpuntsverhooging voor de aanvankelijk toegevoegde zwavel was uit tabel 25 door extrapoleeren gevonden.

29. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 83,96.
Molculaire verhooging: 52,8.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
4,264	4,057	55,50
5,419	4,644	61,61
6,627	5,184	67,50
8,310	5,832	75,24
9,921	6,417	81,64
11,520	6,945	87,55
12,970	7,417	92,33
16,280	8,372	102,7
17,870	8,860	106,5

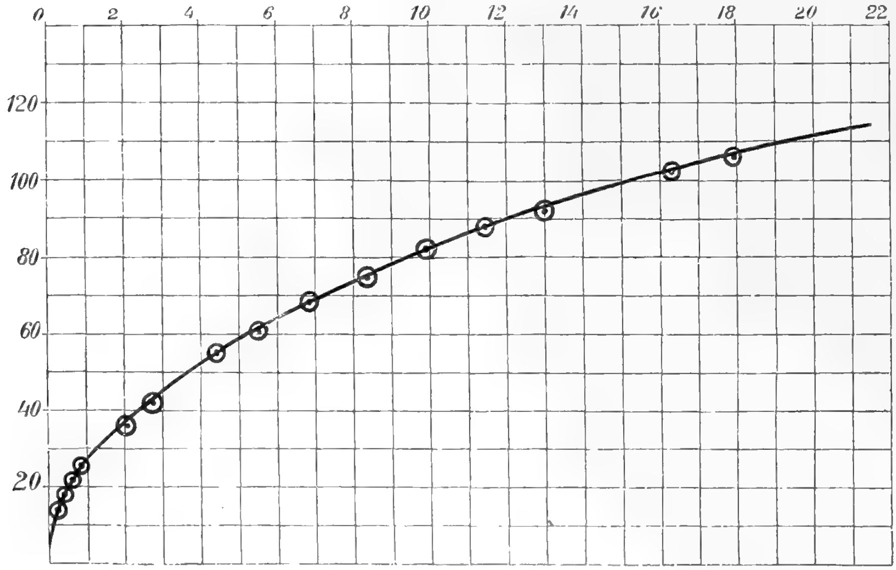


Fig. 29.

De heeren Orndorff en Terrasse berekenen hunne resultaten op geheel afwijkende wijze door telkens bij toevoeging van eene nieuwe portie zwavel aan de oplossing eene concentratie toe te kennen als ware de voorafgaande hoeveelheid zwavel er niet aan toegevoegd en de telkens verkregen kookpuntsverhooging te gebruiken voor de berekening van het moleculairgewicht van de zwavel, daarbij aannemende dat de moleculaire kookpuntsverhooging voor het zwavel opgelost bevattend zwavelmonochlorid door die opgeloste zwavel niet wordt gewijzigd. Zij nemen dan verder het gemiddelde uit al de berekende moleculairgewichten en komen zoo tot het moleculairgewicht 62.

Alleen bij die reeks van waarnemingen, waar zij vooraf 13,3588 gram zwavel in 210,37 gram $S_2\ Cl_2$ (l. c. p. 201) hebben opgelost, voordat zij hunne bepalingen van het moleculairgewicht in die vloeistof beginnen en waar zij, op dezelfde wijze berekend, tot een gemiddeld moleculairgewicht 140 komen, meenen zij, wegens het snel aangroeien van het moleculairgewicht met de toenemende concentratie, als de ware waarde te moeten beschouwen het moleculairgewicht bij oneindige verdunning, waarvoor zij het getal 55 verkrijgen. Op welke wijze zij tot dit getal komen wordt ons niet nader duidelijk gemaakt.

In de volgende tabellen 30, 31, 32, 33 en 34 zijn de resultaten van onze proefnemingen op gelijke wijze omgerekend, ofschoon wij deze wijze van moleculairgewichts-bepaling onjuist vinden.

30. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Onze resultaten van tabel 24 berekend volgens de wijze, zooals door Orndorff en Terrasse is geschied.

Toegev. $^0/_0$ zwavel.	Temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.	Gemiddeld mol. gewicht.
0	—	—	
0,527	1,058	26,31	
0,291	0,404	38,04	44,4
0,286	0,324	46,57	
1,651	1,307	66,70	

31. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Onze resultaten van tabel 25 berekend volgens de wijze, zooals door Orndorff en Terrasse is geschied.

Toegev. $^0/_0$ zwavel.	Temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.	Gemiddeld mol. gewicht.
0	—		
0,185	0,670	14,57	
0,230	0,580	20,91	
0,237	0,380	32,95	40,6
0,211	0,315	35,36	
1,211	1,120	57,10	
0,705	0,450	82,70	

32. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Onze resultaten van tabel 26 berekend volgens de wijze, zooals door ORNDORFF en TERRASSE is geschied.

Toegev. % zwavel.	Temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.	Gemiddeld mol. gewicht.
0	—	—	
0,238	1,340	9,37	
0,226	0,841	14,18	26,3
0,458	0,990	24,41	
2,264	2,086	57,30	

33. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Onze resultaten van tabel 27 berekend volgens de wijze, zooals door ORNDORFF en TERRASSE is geschied.

Toegev. % zwavel.	Temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.	Gemiddeld mol. gewicht.
0	—	—	
0,258	0,558	24,41	34,43
0,961	1,142	44,45	

Omgekeerd hebben wij de resultaten van ORNDORFF en TERRASSE in de tabellen 34, 35 en 36 berekend en graphisch voorgesteld op de naar ons inzien alleen juiste wijze; het was ons echter onmogelijk de tabel op p. 201 van hunne verhandeling op dezelfde wijze te berekenen, daar deze geen gegevens daarvoor bevatte. Dat de uitkomsten voor oneindige verdunning 59, 48 en 46 ook niet met het aangenomen moleculairgewicht 62 overeenstemmen was te voorzien.

34. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Resultaten van ORNDORFF en TERRASSE omgerekend volgens de gewone methode.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0,2248	0,200	59,35
0,7359	0,675	57,56

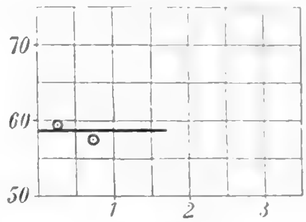


Fig. 34.

35. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Resultaten van ORNDORFF en TERRASSE omgerekend volgens de gewone methode.

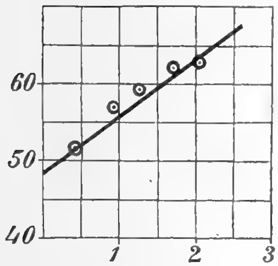


Fig. 35.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0,4433	0,455	51,44
0,8578	0,795	56,97
1,2828	1,140	59,42
1,6799	1,430	62,03
2,0140	1,681	63,26

36. Zwavel in zwavelmonochlorid.
Resultaten van ORNDORFF en TERRASSE omgerekend volgens de gewone methode.

Totale % zwavel.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0,4866	0,504	50,98
0,9007	0,881	53,98
1,3554	1,250	57,25
1,7393	1,533	59,89
2,1350	1,827	61,84

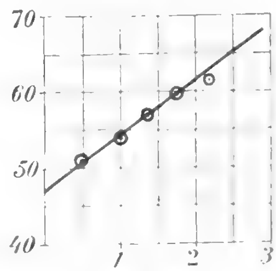


Fig. 36.

Er bleef ons nu nog over de oorzaken na te gaan, waardoor zwavelmonochlorid onbruikbaar wordt als oplossingsmiddel voor kookpuntsbepalingen.

Wanneer er een scheikundige inwerking van zwavelmonochlorid op zwavel plaats had, dan zou dit kunnen geschieden door de vorming van verbindingen $S_3\ Cl_2$, $S_4\ Cl_2$ enz. op dergelijke wijze als men aanneemt, dat de verbindingen $K_2\ S$, $K_2\ S_2$, $K_2\ S_3$, $K_2\ S_4$ en $K_2\ S_5$ bestaan.

Het was echter ook mogelijk dat $S_2\ Cl_2$ bij zijn kookpunt niet geheel bestendig maar gedeeltelijk gedissocieerd was. Deze laatste veronderstelling scheen uitgesloten door de dampdichtsheidbepalingen van $S_2\ Cl_2$ gemaakt door Marchand (Journ. für Prakt. Chem. van Erdmann en Marchand Band 22 p. 507) en Dumas (Annales de Chem. et de Phys. Tom 49 p. 205). Deze onderzoekers vonden 4,77 en 4,70; 4,72 en 4,76 en wel werd door Marchand de bepaling bij 166° en door Dumas bij eene niet opgegeven temperatuur verricht. De theoretische dampdichtheid bedraagt 4,67.

Dat de gevonden dampdichtheid, bepaald bij eene temperatuur, althans bij Marchand, zoo weinig boven het kookpunt gelegen iets grooter was dan de berekende, behoefde geen verwondering te wekken. Toen wij de oorspronkelijke verhandeling van Dumas ter hand namen, trokken echter de volgende zinsneden onze aandacht: „La densité de sa vapeur est égale à 4,70; c'est le résultat le plus faible qu'on ait observé. Deux experiences ont donné 4,72 et 4,75; mais, en général, il retient quelques traces de soufre qui tendent à élever la densité de sa vapeur et qui deviennent sensibles, obligé comme on l'est d'en évaporer d'assez grandes quantités pour expulser l'air des ballons.''

Die zwavel kon onder de veronderstelling dat men van zuivere stof was uitgegaan, hetgeen uit de medegedeelde analyse blijkt, slechts ontstaan zijn door eene ontleding, die wel is waar ook door vochtigheid kon zijn voortgebracht. Wij zullen later gelegenheid hebben op dat verschijnsel terug te komen.

Had er echter eene dissociatie plaats gehad in vrij chloor en een polysulfide van chloor, hetzij dat door de formule $S_3\ Cl_2$, $S_4\ Cl_2$ of $S_5\ Cl_2$ zou moeten worden uitgedrukt, dan ging deze niet gepaard met eene verandering van het aantal moleculen en moest zij dus voor de dampdichtheid het normale getal opleveren. Wij zochten derhalve naar middelen om de dissociatie, die ook wegens het niet constante kookpunt ons waarschijnlijk geworden was, op andere wijze aan te toonen. Nu had reeds bij het fractioneeren van het $S_2\ Cl_2$ het feit onze aandacht getrokken, dat telkens bij het hernieuwd distilleeren, van welke fractie dan ook, de eerst overgaande fracties donker gekleurd waren, terwijl de laatste in de retort gebleven aandeelen een lichtgele kleur hadden. Daar verder het feit bekend is dat zwavelmonochlorid door een overmaat van chloor donker, door een overmaat van zwavel lichtgeel gekleurd wordt, vonden wij in deze verschijnselen aanleiding, om door een onderzoek naar de samenstelling van de fracties, verkregen bij de gefractioneerde distillatie, eene plaats hebbende dissociatie te constateeren.

Wij begonnen met ongeveer 3,5 KG. chloorzwavel, die wij zelf hadden bereid, te fractioneeren.

De vloeistof begon bij 118° te koken; er werden de volgende fracties verkregen:

fractie I	kpt.	118 —135,6	680	gram.
II	„	135,6—136,5	1000	„
III	„	136,5—137,5	983	„
IV	„	137,5—138,5	450	„

Het residu, dat boven 138,5 kookte, bedroeg 305 gram. De barometerstand gedurende het fractioneeren wisselde af tusschen 762,4 en 762,8 mm.

Het residu werd bewaard en het overige opnieuw gefractioneerd. Wij verkregen:

fractie I	kpt.	tot 135,6	840	gram.
II	„	135,6—136,5	247	„
III	„	136,5—137,5	1123	„
IV	„	137,5—138,5	575	„

en een boven 138,5 kokend residu van ongeveer 300 gram. De barometerstand was 765,7 mm. De derde fractioneering zonder het het residu gaf:

fractie I	kpt.	tot 135,5	710	gram.
II	„	135,5—136,5	176	„
III	„	136,6—137,5	373	„
IV	„	137,5—138,5	244	„

Het residu boven 138,5 overgaande bedroeg 315 gram. Door een verzuim is de barometerstand gedurende deze distillatie niet opgenomen.

Bij de vierde keer fractioneeren van de voorgaande vloeistof zonder het residu verkregen wij:

fractie I	kpt.	tot 135,5	825	gram.
II	„	135,5—136,5	289	„
III	„	136,5—137,5	1010	„
IV	„	137,5—138,5	194	„

Het residu boven 138,5 kokende bedroeg 180 gram; de barometerstand was 758,8.

Bij de 5^de^ keer fractioneeren begon de vloeistof reeds bij 80 graden over te gaan. Wij verkregen:

fractie I	kpt.	80—135,5	762	gram.
II	„	135,5—136,5	225	„
III	„	136,5—137,5	829	„
IV	„	137,5—138,5	259	„

Het residu boven 138,5 overgaande bedroeg 163 gram. De verschillende fracties van deze laatste distillatie zijn geanalyseerd.

De methode door Marchand, l. c. aangegeven, om de hoeveelheid zwavel te bepalen met behulp van koud rookend salpeterzuur, gaf ons onvoldoende resultaten. Eveneens was het niet mogelijk chloorbepalingen met voldoende zekerheid te maken, wanneer men het zwavelmonochlorid met verdunde sodaoplossing samenbracht en in de verkregen vloeistof, die naast chloornatrium, zwaveligzuurnatrium en zwavelnatrium bevatte, het chloorgehalte met zilvernitraat bepaalde, daar de scheidingsmethoden te omslachtig bleken.

Wij gebruikten derhalve de methode van Carius om het zwavelmonochlorid met behulp van salpeterzuur in toegesmolten buizen te behandelen en in de verkregen vloeistof de zwavel als bariumsulfaat en het chloor als chloorzilver tot weging te brengen. Bij de eerste analyses zijn chloor en zwavel in dezelfde buis bepaald; later echter vonden wij het doelmatiger die bepalingen in twee verschillende buizen uit te voeren, omdat het dan mogelijk was, het salpeterzuur voor de zwavelzuurbepaling en ook voor de bepaling van het chloorgehalte door uitdampen te verwijderen.

	Gevonden. % Chloor.	Gevonden. % Zwavel.
fractie I.	58,48	40,96
	58,62	41,15
gemiddeld	58,55	41,06
II.	53,21	46,40
	53,30	47,03
gemiddeld	53,26	46,72
III.	53,05	46,92
	52,94	46,36
gemiddeld	53,00	46,64
IV.	52,85	47,34
	52,81	47,52
gemiddeld	52,83	47,43
residu	46,45	54,67 [1]
	46,75	52,95
gemiddeld	46,60	53,81

Daar zuiver $S_2\ Cl_2$ bevatten moet 52,59 % chloor en 47,41 % zwavel, bleek alleen de tusschen 137,5 en 138,5 overgaande vloeistof, dus de vierde fractie, zuiver zwavelmonochlorid te zijn; terwijl de fractie I een veel te groote hoeveelheid chloor en ook de fracties II en III nog meer chloor bevatten, dan aan de samenstelling $S_2\ Cl_2$ beantwoordt.

Nu werd de IV[de] fractie nog eens gefractioneerd en bij het fractioneeren de volgende resultaten verkregen:

fractie	$IV_{(1)}$	kpt.	130,0—135	(ongeveer 20 gram).
„	$IV_{(2)}$	„	135 —137,8	200 gram.
„	$IV_{(3)}$	„	138 —138,3	circa 15 gram.

Hiervan werd geanalyseerd fr. $IV_{(1)}$.

	Gevonden % Chloor.	Gevonden % Zwavel.
fractie $IV_{(1)}$	54,09	46,35
	54,48	45,65
Gemiddeld	54,24	46,00

[1]) Waarschijnlijk door niet behoorlijk verwijderen van salpeterzuur te hoog uitgevallen.

Het residu van fractie IV werd verder gedistilleerd totdat slechts eene kleine hoeveelheid vloeistof in het kolfje overbleef, waaruit bij het afkoelen vrije zwavel kristalliseerde. Hierdoor was het bewijs geleverd dat zwavelmonochlorid, volgens de analyse beantwoordende aan de formule $S_2\ Cl_2$, bij het distilleeren gescheiden werd in een product, dat meer chloor bevatte dan $S_2\ Cl_2$ en in een residu, dat vrije zwavel bij het koud worden liet uitkristalliseeren. Daar uit de voorgaande proeven gebleken was dat geen enkele van de fracties, die waren overgegaan, eene overmaat van zwavel bevatte, trachtten wij ons eene nieuwe hoeveelheid volkomen zuiver dus geen vrij chloor bevattend zwavelmonochlorid te bereiden, om met behulp daarvan opnieuw eene moleculairgewichtsbepaling van het triphenylmethan te maken, daar het mogelijk geweest was dat het reeds in de chloorzwavel opgelost vrij chloor de oorzaak van het chloreeren van het triphenylmethan was geweest. Voor dit doel werd in 500 gram chloorzwavel veel zwavel opgelost en deze oplossing opnieuw gefractioneerd. Wij vingen drie fracties op:

fractie	I	kpt.	135—139
,,	II	,,	139—140
,,	III	,,	140—142,5

In de kolf bleef eene verzadigde oplossing, die zwavel begon af te scheiden. Fractie III werd geanalyseerd; er werden alleen zwavelbepalingen van gemaakt. Zij gaven 46, 57 en 46, 50 $^0/_0$ zwavel; dus niettegenstaande de groote overmaat van zwavel in de oorspronkelijke vloeistof 1 $^0/_0$ zwavel te weinig.

Wij trachtten ons nu eene genoegzame hoeveelheid zwavelmonochlorid te bereiden door de distillatie van zwavelmonochlorid, dat veel zwavel opgelost bevatte, in het vacuum (23 mm. druk) te doen plaats hebben. Doch ook hier werden de eerste fracties bruin gekleurd en eerst de 5de en 6de fractie fraai geel. Eene analyse van deze fractie gaf een gehalte van 47,23 $^0/_0$ zwavel, dus nagenoeg de aan het zuivere $S_2\ Cl_2$ toekomende waarde.

Wij herhaalden hiermede de moleculairgewichtsbepaling van triphenylmethan; de uitslag van deze proefnemingen is vermeld in tabel 37, zooals men ziet met resultaten, die aan de vroegere analoog waren. Ook het onderzoek van het triphenylmethan, dat voor deze proeven gediend had, op dezelfde wijze als vroeger beschreven geschied, toonde aan dat het in het chloride was veranderd geweest, daar het ons gelukte daaruit het carbinol met het juiste smeltpunt te bereiden.

37. Triphenylmethan in zwavelmonochlorid.
Grammen oplossingsmiddel: 76,61.
Moleculaire verhooging: 52,8.
De analyse van het gebruikte zwavelmonochlorid gaf 47,23 % zwavel.

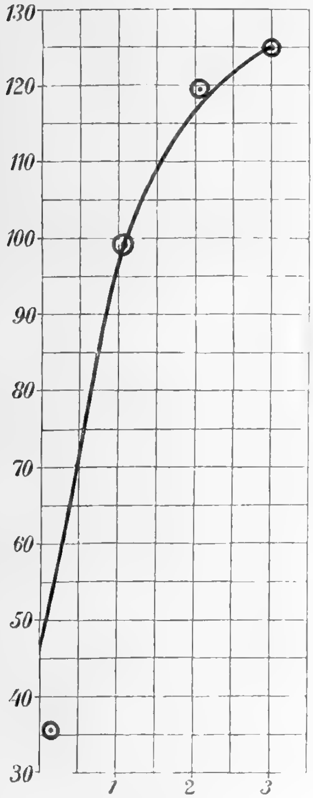


Fig. 37.

Totale % triphenylmethan.	Totale temp. verhooging.	Berekend mol. gewicht.
0	—	—
0,140	0,205	36,01
1,059	0,567	98,57
2,082	0,920	119,5
2,998	1,265	125,1

Wanneer het nu ook bewezen was dat $S_2\,Cl_2$ bij het kookpunt geen bestendig lichaam is en dat één van zijne dissociatieproducten chloor is, zoo was de aard van het andere dissociatieproduct, of dit nl. vrije zwavel was, die dan natuurlijk bij die temperatuur niet dampvormig maar vloeibaar moest zijn, of dat het bestond uit eene vluchtige en meer zwavel dan $S_2\,Cl_2$ bevattende chloorverbinding, niet uitgemaakt. Waarschijnlijk was het laatste niet, daar het nooit gelukt was in het distillaat producten te verkrijgen, die meer zwavel bevatten dan $S_2\,Cl_2$. Toch zijn er door ons pogingen in het werk gesteld om dergelijke verbindingen, wanneer ze aanwezig waren, te isoleeren.

Wij trachtten eerst eene verbinding $S_4\ Cl_2$ synthetisch te bereiden. In 135 gram zuivere chloorzwavel werden 54 gram zwavel gebracht en die zwavel door verwarming in een waterbad op ongeveer 50° opgelost. Bij het afkoelen kristalliseerde uit de *gele* oplossing direct zwavel uit en de overgebleven vloeistof gaf in een koudmakend mengsel geplaatst niets dan zwavelkristallen. Deze proef werd nu herhaald, terwijl de oplossing aan een terugvloeikoeler tot koken werd gebracht. Het was opvallend dat hierbij eene sterke kleursverandering plaats had en wel van geel tot donkerrood. Bij afkoeling werd de kleur weer lichter maar bleef toch belangrijk donkerder dan de oplossing, die bij 50 graden was bereid geworden. Toen zij de gewone temperatuur bereikt had en in tegenstelling met de bij 50 graden verkregen oplossing geen vrijwillig uitkristalliseeren van zwavel plaats had, werd zoowel rhombische als ook monoklinische zwavel in de vloeistof geworpen, maar ook hierdoor werd geen uitkristalliseeren van zwavel bewerkstelligd. Eerst na langen tijd (24 uren) staan kristalliseerde ook uit deze vloeistof gewone zwavel.

Daar het mogelijk was dat wij te doen hadden met eene scheikundige verbinding, die bestendig was bij de kooktemperatuur van het zwavelmonochlorid, echter bij lagere temperatuur onbestendig, hebben wij nog eene poging in het werk gesteld om ook deze hypothese te toetsen. Wij hadden met zwavel verzadigd zwavelmonochlorid in het vacuum gedistilleerd en van de verschillende fracties analyses gemaakt. De eerste fracties bevatten te veel chloor en later ging zwavelmonochlorid over van de juiste samenstelling en ook de laatste fractie, die overging, terwijl de thermometer in de vloeistof tot 165° gestegen was, bevatte geen overmaat van zwavel. Bij het afkoelen van de distilleerkolf werd de geheele massa vast en bestond uit zwavel nog doortrokken met wat zwavelmonochlorid. Hierdoor was aangetoond dat zwavelverbindingen van de chloor, die meer zwavel bevatten dan het $S_2\ Cl_2$, wanneer zij bestonden, in het vacuum bij eene temperatuur van 165 graden niet overdistilleerden.

Steunende op de uitkomsten van deze proef werd nog de volgende proef uitgevoerd. Wij distilleerden zuiver zwavelmonochlorid in het vacuum. Bij een druk van 24 mm. was de kooktemperatuur ongeveer 47°. De dampen werden nu geleid door eene U-buis, die in een luchtbad op 165 graden was verhit.

Had nu dissociatie plaats van $S_2\ Cl_2$ in een polysulfide van de chloor en in chloor, dan had zich dit polysulfide, als niet vluchtig bij die temperatuur, in de U-buis moeten condenseeren.

Zulke condensatie werd niet waargenomen; echter ook niet de afscheiding van zwavel. Waarschijnlijk was de snelheid, waarmede de dampen de U-buis passeerden, te groot, zoodat zij de temperatuur van het luchtbad niet hadden aangenomen.

Ten slotte hebben wij ook nog onder gewonen druk zwavelmonochlorid aan distillatie onderworpen Die distillatie werd uitgevoerd in een zwavelzuurbad, dat ten slotte de temperatuur van 180 graden had aangenomen. De verhitting werd nog een uur lang voortgezet, nadat de laatste druppel over was gegaan. In het kolfje bleef eene kleine hoeveelheid vloeistof terug, die geanalyseerd werd.

Ofschoon de analyse een zwavelgehalte van 63,88 $^0/_0$ gaf dat met het zwavelgehalte van de verbinding $S_4\ Cl_2$, die 64,3 $^0/_0$ zwavel moest bevatten, merkwaardig goed overeenstemt, gelooven wij toch niet, aan dit resultaat de beteekenis te moeten hechten dat daarmede het bestaan eener verbinding $S_4\ Cl_2$ is aangetoond, te meer niet, daar bij eene herhaling der proef, waarbij eene droge luchtstroom door de distilleerende vloeistof werd geleid, wel is waar ook eene vloeistof achter bleef, die echter bij het koud worden na eenig staan zwavel deed uitkristalliseeren in zulke hoeveelheid, dat aan eene verbinding $S_4\ Cl_2$ niet meer te denken viel.

Wij gelooven derhalve dat $S_2\ Cl_2$ dissocieert bij de kooktemperatuur in vrij chloor en vrije zwavel. Met het oog op het reeds door Dumas opgemerkte verschijnsel, dat zwavel wordt afgescheiden bij dampdichtheidsbepalingen, hebben wij van eene herhaling van deze voorloopig afgezien.

De voornaamste resultaten van bovenstaande proeven resumeeren we in het kort.

1). Er is geen verschil met zekerheid geconstateerd tusschen het moleculairgewicht beneden het overgangspunt van de rhombische in monoklinische zwavel en boven het overgangspunt.

Aan de omstandigheid dat de bepalingen van het moleculairgewicht in toluol met de formule S_7 overeenstemmen en dat die in xylol waarden hebben opgeleverd die tusschen S_7 en S_8 ingelegen zijn, wenschen wij voorshands geen te groote beteekenis te hechten, te meer niet, daar de bepalingen in naphtalin weder cijfers gegeven hebben, die beter met het moleculairgewicht S_8 overeenkomen. Wij vermoeden dat hier chemische oorzaken in het spel zijn, die wij later zullen trachten op te sporen.

2). Nog veel minder kon een verschil geconstateerd worden tusschen het moleculairgewicht van de zwavel beneden en boven haar smeltpunt, daar de bepalingen in toluol beneden dat smeltpunt met de bepalingen in xylol boven dat smeltpunt vrij goed overeenstemmen.

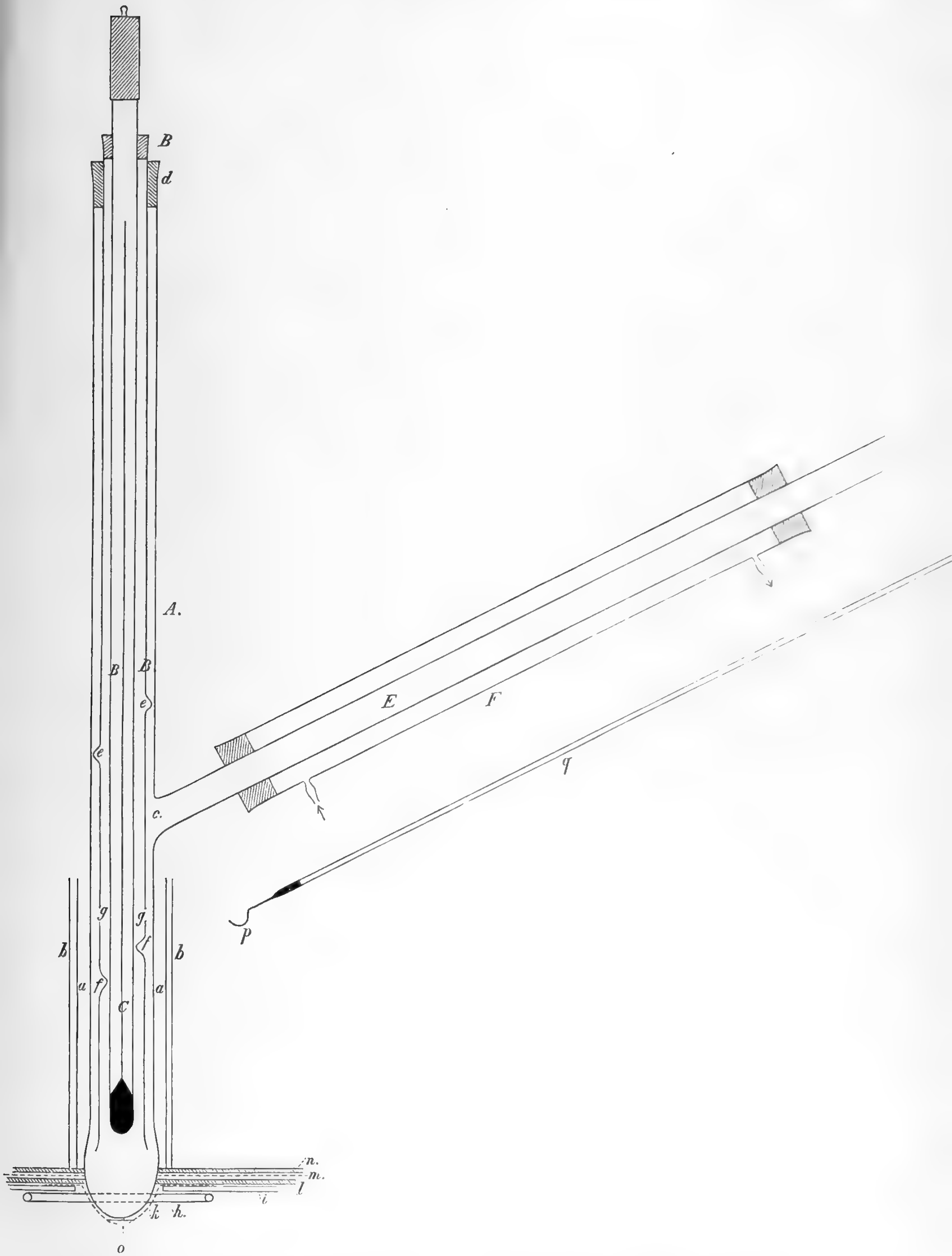
3). Het moleculairgewicht bepaald in zwavelkoolstof en benzol stemt goed overeen met dat, door de formule S_8 geëischt en beantwoordt niet zooals ORNDORFF en TERRASSE meenen gevonden te hebben aan de formule S_9.

4). Zwavelmonochlorid is eene vloeistof, die bij haar kookpunt gedeeltelijk is gedissocieerd en derhalve voor moleculairgewichtsbepalingen geheel ongeschikt is. De door ORNDORFF en TERRASSE gevonden waarde 64 voor het moleculairgewicht van de zwavel is onjuist. Met zekerheid kon als een van de dissociatieproducten chloor worden aangewezen, het andere is hoogst waarschijnlijk zwavel. Het ontstaan van polysulfiden van de chloor is niet gebleken.

Chemisch laboratorium der Polytechnische School.

Delft, Maart 1898.

(30 Juli 1898).


B
d
A.
B
B
e
e
c.
E
F
q
g
g
f
b
b
a
f
a
C
p
n.
m.
l
i
k
h.
o

DE ISOMERIE VAN 'T APPELZUUR

DOOR

J. H. ABERSON.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE).

Dl. VI. N°. 4.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Juni 1898.

DE ISOMERIE VAN 'T APPELZUUR,

DOOR

J. H. ABERSON.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(**EERSTE SECTIE**).

Dl. VI. N°. 4.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1898.

DE ISOMERIE VAN 'T APPELZUUR.

DOOR

J. H. ABERSON.

Nadat Scheele 't appelzuur ontdekt had, beschreef Braconnot [1]) een zuur, door hem uit de huislook (Sempervivum tectorium) bereid.

Hij trekt uit zijne onderzoekingen de conclusie, dat dit zuur identisch is met het lijsterbessen-appelzuur,

Hij bouwt zijn conclusie op de zouten en op het ontstaan van fumaarzuur (acide pyromalique).

A. Mayer [2]) onderzocht de assimilatie van verschillende planten, onder andere ook van de crassulaceeën. Bij deze plantenfamilie ontdekte hij een merkwaardige afwijking van de andere planten en leidt uit zijn onderzoek af, dat dit veroorzaakt wordt door het in die plantenfamilie aanwezige appelzuur. Mayer toonde eenige verschillen aan van dit zuur met 't lijsterbessenzuur, vooral in de eigenschappen der zouten en in 't draaiend vermogen.

Hij komt bij de vergelijking der verschillen van 't crassulaceën appelzuur met dat uit lijsterbessen tot de volgende resultaten:

Verschiedenheit. der Saüren.

Gewöhnliche Aepfelsaüre.	*Bryophillum Saüre.*
Das neutrale Kalksalz.	
Scheidet sich in der Siedehitze kristallinisch ab.	Giebt mehr amorphe niederschläge, die sich beim abkühlen rasch lösen.

[1]) Annales de chemie et physique [2] 8. 249.

[2]) Landwirthschaftl. Versuchstationen 1878—298.

Das saure Kalksalz.

Krystallisirt leicht.	Kein einziges Mahl Krystallinisch erhalten.

Freie Saure.

Ist in freien Zustande krystallinisch zu erhalten. Polarisirt nach links.	Krystallisirt unter gleichen Umständen nicht. Polarisirt nach rechts

Eenige jaren later onderzoekt E. SCHMIDT [1]) eveneens het zuur. Hij komt tot besluit, dat BRACONNOT zich vergist heeft in 't kristalwater van 't zure calciumzout; dat het zilverzout 5 mol. kristalwater bezit; dat het zuur links draait evenals 't lijsterbessenzuur, en dat 't geen fumaar en maleïnezuur geeft. Als opmerkelijk feit vindt hij, dat het zure calciumzout uit het zuur van planten, die die in 't licht gestaan hebben *niet*, van planten, die in het donker stonden *wel* kristalliseerde. Hij meent evenals MAYÈR dat het een isomeer van 't gewone zuur zou kunnen zijn, doch kan de isomerie niet ophelderen.

Het laatste onderzoek over dit zuur is van E. AUBERT [2]), die volgens de methode van DRAGENDORFF door een qualitatief onderzoek tot het besluit komt, dat het gewoon appelzuur is.

De groote tegenstrijdigheden, het vermoeden dat het een isomeer van appelzuur zou zijn en de belangrijkheid uit een botanisch oogpunt, deden mij besluiten nogmaals een nauwkeurig onderzoek naar dat zuur in te stellen.

Experimenteel gedeelte.

Het experimenteele gedeelte van het onderzoek laat ik voorafgaan.

Ik meende in de eerste plaats te moeten aantoonen, dat het zuur werkelijk beantwoordde aan de samenstelling van 't appelzuur. Daarvoor heb ik verschillende gekristalliseerde verbindingen trachten te verkrijgen, wat niet altijd met succes werd bekroond.

[1]) Archiev. f. Pharmacie [3] 24—535.
[2]) Revue générale de botanique 1890 pag. 369.

I.

Bereiding van 't zuur en van de zouten.

De verschillende crassulaceën, die ik voor mijn onderzoek gebruikte, waren:

I. Bryophyllum calycinum.
II. Echivera secunda glauca.
III. Cotyledon.
IV. Sempervivum tectorium.
V. Sedem purpurescens.
VI. Sedem acre.

N°. I geeft de beste resultaten, doch is alleen in een warme kas goed te kweeken.

N°. II [1]) en V heb ik het meest gebruikt, daar ze als sierplanten gekweekt worden en daardoor in voldoende hoeveelheid bij de bloemisten te verkrijgen zijn.

Alle vetplanten leveren hetzelfde zuur. Het zuur komt in de Crassulaceeën als vrij zuur en als zuur calciumzout voor.

Voor de bereiding van 't zuur worden de planten met water gekookt, na afkoeling wordt de massa in linnen zakken uitgeperst en de rest nog tweemaal op dezelfde wijze behandeld. Na dat zand en kleine zwevende plantendeeltjes bezonken zijn, wordt de vloeistof tot een klein volume ingedampt en na filtreering met loodacetaat in geringe overmaat vermengd. Het neerslag wordt op een zuigfilter van de vloeistof gescheiden en met water afgewasschen. Het loodzout wordt door $H^2 S$ ontleed, het PbS verwijderd en de vloeistof tot een dikke stroop ingedampt.

Deze stroop wordt in een kolf gebracht en eenige uren met absoluten alkohol gekookt. Het appelzuur lost op, waardoor het gemakkelijk van pectin en andere in alkohol onoplosbare verbindingen gescheiden kan worden.

Van de alkoholische oplossing wordt de alkohol verdampt, het zuur in water opgelost en met kalkwater vermengd om sporen oxaalzuur te verwijderen.

Na filtreering van 't calciumoxalaat wordt met kalkmelk geneutraliseerd; 't calciumzout met alkohol neergeslagen en gefiltreerd.

[1]) 15 KG. bladeren leverden 35 gr. zuur.

Het gevormde *Ca*-zout is gemakkelijk in water oplosbaar; deze oplossing wordt met loodacetaat neergeslagen, 't neerslag door $H_2 S$ ontleed, de oplossing zoo noodig door dierlijke kool ontkleurd, waarna het zuur meestal zuiver is; mocht het nog niet vrij zijn van vreemde bijmengsels, dan wordt nog eens dezelfde weg gevolgd.

Na indamping vormt het zuur een kleurlooze dikke stroop.

Het zuur kristalliseert niet; wanneer 't zeer lang in een vacuumexsiccator staat, vertoont het wel eenige aanduiding van kristallisatie, doch zooals later zal blijken is het dan geen appelzuur meer.

Om zeker te zijn heb ik zooveel mogelijk gelijktijdig dezelfde experimenten met het appelzuur uit lijsterbessen verricht.

Eerst heb ik eene analyse gemaakt van het vrije zuur. Het werd in een droogstoof bij 110° gedroogd tot constant gewicht.

I 0.1742 gr. zuur leverde 0.2734 gr. CO_2 en 0.059 gr. H_2O.
II 0.2030 gr. leverde 0.3096 gr. CO_2 en 0.068 gr. H_2O; waaruit volgt:

	Gevonden.		Berekend.	
	I.	II.	$C_4H_6O_5$	$C_4H_4O_4$
C	42.3	41.6	35.82	41.4
H	3.36	3.65	4.47	3.45

Het gelijktijdig behandelde lijsterbessenzuur leverde:

I 0.316 gr. zuur — 0.4121 CO_2 en 0.1312 gr. H_2O.

	Gevonden.	Berekend.
C	35.81	35.82
H	4.61	4.47

De analyse van 't crassulaceën-zuur stemde geheel met fumaar en maleïnezuur overeen; de rest van het gedroogde zuur had geen enkele eigenschap van één dier beide bovengenoemde verbindingen. Zooals later zal blijken had de waterafsplitsing op eene andere wijze plaats gehad.

Het Calciumzout.

Daar het vrije zuur geen uitkomst gaf, beproefde ik gekristalliseerde zouten te verkrijgen. Braconnot beschrijft 't zure calciumzout, dat hij bereidt door bij het uitgeperste plantensap zwavelzuur te voegen, 't gips door filtreeren te verwijderen en daarna kristalliseerde naast gips 't zure zout uit; wat door uitlezen van de kristallen gemakkelijk was te zuiveren.

Ik heb dezelfde proef herhaald, doch zonder resultaat, wat naar alle waarschijnlijkheid veroorzaakt werd door de groote onzuiverheid van 't plantensap.

Daarna heb ik de methode toegepast, die gevolgd wordt bij 't lijsterbessenzuur.

In 't eerst droogde de oplossing tot een gomachtige massa in; na het volkomen zuivere calciumzout genomen te hebben, kreeg ik bij langzame verdamping boven zwavelzuur prachtige kristallen.

Daar de hoeveelheid salpeterzuur nog al groot was, ontstond er op 't laatst NO_2 als gevolg van oxydatie van 't zuur.

Het kristallografisch onderzoek der kristallen werd door Prof. Schröder van der Kolk en Dr. Steger verricht, waarvoor ik deze heeren mijn oprechten dank betuig.

Het verslag van 't onderzoek luidt:

Optisch onderzoek:

De kristallen waren regulair.

Geometrisch onderzoek:

Octäeder:	Gemeten heek	109° 13′ 30″
		70° 25′ —
	Andere zone	71° 12′ 13″
		109° 1′ 30″

Volgens Hagen [1]) is het gewone zure calciummalaat een rhombische octaëder.

Uit 't optisch onderzoek blijkt zeker 't regulaire stelsel.

0,2460 gr. zuur-calciumzout leverde met loodchromaat verbrand:

0,2074 gr. CO_2 en 0,1241 gr. H_2O

0.2249 gr. gaf bij verbranding 0,0309 gr. $Ca\,O$.

	Gevonden. I.	II.	Berekend voor: $(C_4H_5O_5)_2\,Ca\,6\,H_2O$
C	23.0	—	23.18
H	5.6	—	5.31
Ca	—	9.8	9.66

[1]) Liebigs Annalen XXXVIII (1841).

Het Bariumzout.

Het normale *Ba*-zout verkreeg ik toevallig in prachtige gekristalliseerde naalden, doordat eene kleine hoeveelheid oplossing van het *Ba*-zout in een exsiccator was blijven staan. Door bij 110° C. te drogen verloor het niet aan gewicht: 't bevat derhalve geen kristalwater.

0.2545 gr. leverde 0.1668 gr. CO_2 en 0.039 gr. H_2O
0.2000 „ „ 0.1740 gr. $Ba\ SO_4$.

	Gevonden.		Berekend.
	I.	II.	$(C_4H_4O_5)\,Ba$.
C	17.87	—	17.84
H	1.5	—	1.35
Ba	—	50.92	50.93

Het Zilverzout.

Het zilverzout heb ik alleen in mikro-kristallijnen toestand kunnen verkrijgen.

Om het te bereiden wordt het zuur met KOH bijna geneutraliseerd, met overmaat van $Ag\ NO_3$ neergeslagen, 't neerslag op een zuigfilter gebracht, eerst met water en daarna met alkohol en aether uitgewasschen en in een exsiccator gedroogd,

E. Schmidt [1]) vindt in 't *Ag*-zout 5 mol. kristalwater; ik heb dit niet kunnen vinden; steeds was 't kristalwatervrij, ook wanneer 't niet met alkohol en aether afgewasschen en aan de lucht gedroogd werd.

0.3376 gr. *Ag*-zout gaf 0.1719 gr. CO_2 0.0340 gr. H_2O en 0.2096 gr. *Ag*.
0.4684 gr. *Ag*-zout gaf 0.2340 gr. CO_2 en 0.0498 gr. H_2O
0.2736 gr. „ 0.1796 gr. *Ag*.
0.1753 gr. *Ag*-zout gaf 0.0890 gr. CO_2, 0.0188 gr. H_2O en 0.1108 gr. *Ag*.

[1]) Archiev f. Pharmacie [3] 24—535.

	Gevonden.			Berekend.
	I.	II	III.	$(C_4H_4O_5)\ Ag_2$.
C	13.88	13 64	13.86	13.78
H	1.12	1.17	1.20	1.15
Ag	62.11	62.35	63.2	62.07

Het loodzout.

Braconnot geeft op, dat het loodzout gemakkelijk kristalliseert. Twee keer heb ik prachtige zijdeglanzende plaatjes verkregen. Ik vermengde een oplossing van ongeveer 20 gr. appelzuur in 500 M^3 water met een kleine overmaat loodacetaat.

De temperatuur van zuur en loodacetaat was ongeveer 80° C. Het gevormde neerslag van appelzuurlood werd afgezogen en het filtraat bleef eenige dagen op een rustige plaats staan.

Er vormden zich dan aan de wanden hoopjes van prachtige zijdeglanzende naalden.

0.7400 gr. loodzout gaf bij 110° C.

0.0965 gr. water, dus 13.1 %.

Voor $Pb\ (C_4H_4O_5)_2\ 3\ H_2O$ berekend, is het 13.7 %—0.2730 gr. watervrij loodzout gaf na oplossing in HNO_3 en afdamping met $H_2\ SO_4$ 0.2438 gr. $Pb\ SO_4 = 0.1665$ gr. Pb.

0.2501 gr. watervrij Pb-zout gaf 0.1359 gr. CO_2 en 0.0270 gr. H_2O.

Gevonden.			Berekend.
	I.	II.	$(C_4H_4O_5)\ Pb$.
C	14.8	—	14.16
H	1.2	—	1.18
Pb	—	61.0	61.04

Afgezien van de afwijking in de analyse van het zuur, stemmen de analyses van de zouten volkomen overeen met de procentische samenstelling voor de appelzure verbindingen berekend.

Eene enkele uitzondering doet zich voor bij 't Ba-zout, dat van gewoon appelzuur met 1 mol. water kristalliseert; 't is echter mogelijk, dat dit zout bij toeval watervrij is geworden, doordat het gevormd werd bij indamping in een zwavelzuur-exsiccator.

Van belang is zonder twijfel ook de kristallogr. afwijking, die 't zure calciumzout vertoont.

Volgens de onderzoeking van Hagen kristalliseert 't zure zout in rhombische octaëders, moest derhalve optisch actief zijn, wat volgens het onderzoek van de heeren Schröder van der Kolk en

Steger niet 't geval is met het zure zout van 't Crassulaceënzuur.

Het zure ammoniumzout is van gewoon appelzuur zeer gemakkelijk te verkrijgen, zoowel door kristallisatie in een exsiccator als door oplossing van 't zuur in alkohol en praecipitatie door een getitreerde alkoholische ammoniakoplossing. Beide methoden heb ik herhaalde malen beproefd; in den exsiccator droogt 't tot een gomachtige massa in, met alkohol ontstaat er bij gebruik van 96 $^0/_0$ spiritus een vloeibare massa, bij gebruik van absoluten alkohol ontstaat er een wit vlokkig amorf neerslag, dat niet te analyseeren is door zijn bijzonder groote hygroscopiteit.

II.

Het draaiend vermogen van het zuur en van zijn afgeleiden.

Mayer geeft als afwijking van het gewone appelzuur op, dat het crassulaceënzuur *rechts* draait. Schmidt vindt eene *links*-draaiing.

Geen van beide onderzoekers bepaalt de grootte der draaiing.

Bekend is het feit, dat lijsterbessen-appelzuur in verdunde oplossingen links draait, doch in zijn geconcentr. oplossing een rechtsche draaiing bezit.

Het was derhalve mogelijk, hoewel niet waarschijnlijk, dat Mayer een zeer geconcentreerde oplossing en Schmidt een verdunde had gebruikt. Uit persoonlijke mededeeling van Prof. Mayer, bleek mij het tegendeel. Het was nu nog mogelijk, dat ik te doen had met het rechtsdraaiende zuur van Bremer [1]); hoewel Bremer een zeer gemakkelijk kristalliseerend ammoniumzout beschrijft en ook het zuur zelf kristalliseert, waardoor 't dus geheel van 't crassulaceënzuur afwijkt.

Nadat ik een voldoende hoeveelheid zuur zuiver had verkregen, heb ik 't draaiend vermogen bepaald.

De draaiing werd zooveel mogelijk bij 15° C. in een halfschaduwapparaat van Laurent bepaald. Voor de berekening werd het gemiddelde van 10 aflezingen genomen.

Het zuurgehalte werd door titreeren met $Ba\ (OH)_2$-oplossing bepaald.

Door van een verdunde oplossing uit te gaan werd door indampen de oplossing geconcentreerd. — 7.30 gram appelzuur was in 549 gram oplossing aanwezig; 't soortelijke gewicht van de oplossing bij 15° C. was 1.0073.

[1]) Recueil des Trav. Chem. des Pays-Bas IV 180.

De draaiing was in een buis van 5 dM. 0.°63 rechts, hieruit volgt $[\alpha]_D = \frac{549 \times 0.63}{5 \times 7.3 \times 1.0073} = + 0.1.$

223.96 gr. dezer oplossing wordt ingedampt tot 47.3 gr.; na afkoeling tot 15° C. draait de oplossing in een buis van 4 dM. 4°,76 rechts; 't soortelijk gewicht is bij 15° C. 1.0723 waaruit volgt $[\alpha]_D = \frac{47.3 \times 4.75}{5 \times 7.1 \times 1.072} = + 5.9.$

Vervolgens werd de oplossing ingedampt tot een dikke stroop en daarna in water opgelost. In een 2 dM. buis draait de oplossing 2°,0 *links*. Het soortel. gewicht is 1.0735 bij 15° C., dus $[\alpha]_D = -6.1.$

Nadat de buis één dag in den polarisator gelegen had, draaide de oplossing 0°.96 links, dus dat is $[\alpha]_D = 2.9.$

Na nog vier dagen is de draaiing —0.2, dus $[\alpha]_D = -0.7.$

Hieruit blijkt, dat het zuur door staan met water wel verandert, toch was het na vier dagen nog linksdraaiend; zelfs na acht bleek het nog iets linksdraaiend te zijn.

Om de overgang in de rechtsdraaiing te bespoedigen, heb ik een hoeveelheid van de vorige oplossing overeenkomende met 5 gram zuur aan een koeler gedurende tien uur gekookt met ongeveer 100 cM³ water, daarna werd tot 100 cM³ opgevuld en gepolariseerd.

In een buis van 5 dM. draaide deze oplossing 1°,99 *rechts.*

Dus $[\alpha]_D = \frac{100 \times 1.99}{5 \times 5} = + 7.9.$

De oorspronkelijke draaiing vindt men terug door 't zuur met *KOH* te koken, met loodacetaat neer te slaan en uit het loodzout het zuur af te scheiden door H_2S.

Een andere appelzuur-oplossing, waarvan 6.450 gr. 71.07 cM³ $^1/_{10}$ n. $Ba\ (OH)_2$ neutraliseert, heeft een soortelijk gewicht van 1.0818 bij 15° C. Deze oplossing draait in een buis van 4 dM. 3°.01 rechts, dus $[\alpha]_D = \frac{3.01 \times 100}{4 \times 7.62} = + 9.8$; want 6.45 gr. neutraliseert 71.07 cM³. $^1/_{10}$ M. $Ba\ (OH)_2$ dus is er in aanwezig $71.07 \times 0,0067 = 0.4762$ gram zuur.

In 100 cM³ oplossing is aanwezig $\frac{100 \times 1.0318 \times 0.4762}{6,450}$ = 7.62 gram.

Van deze oplosssing wordt 74.370 gram bevattende 5.5 gram zuur in vacuum ingedampt tot 31.238 gram. Nadat de oplossing eenige dagen gestaan had, werd ze gepolariseerd. Het soortelijk gewicht is 1.0559 bij 15° de draaiing is in een 2 dM. buis 3°.66 rechts, dus $[\alpha]_D = \frac{31.238 \times 3.66}{2 \times 5.5 \times 1.0559} = + 9.8.$

De draaiing was derhalve constant gebleven.

30.228 gr. hiervan wordt tot ongeveer de helft ingedampt en vervolgens gedurende 14 dagen in een vacuum-exsiccator boven zwavelzuur geplaatst. Toen woog de rest 5.86 gr. de berekende hoeveelheid zuur (op appelzuur gerekend) was 5.322 gr. De rest wordt in aceton opgelost. De oplossing weegt 45.760 gr. 't S. g. bij 15 °C. was 0.8582. In een 5 dM. buis wordt het polarisatievlak 2° 1′ links gedraaid, dus aangenomen, dat het nog appelzuur was, zou de specifieke draaiing —4.2 zijn.

Na verdamping van de aceton, wordt de rest bij 100° C. gedroogd tot constant gewicht. De massa is eenigszins bruin geworden. Bij 110° is het een taaivloeibare massa, bij gewone temperatuur is het hard; het gewicht bedraagt 4 825 gram.

Bij verwarming lost het in aceton op. De aceton-oplossing weegt 38.585 gr. met een soortelijk gewicht van 0.8589 bij 15° C. In een 2 dM. buis draait deze oplossing 8°.5 links, hieruit volgt voor de specifieke draaiing $[\alpha]_D \frac{8.5 \times 38.585}{4.825 \times 2 \times 0.8589} = —39.5.$

Uit de draaiing van 't polarisatievlak volgt ten duidelijkste, dat het noch het gewone appelzuur, noch het zuur van Bremer is. Deze zuren hebben een specifieke draaiing van 5.8 volgens Landolt, Guye en Bremer. Een groote bizonderheid is de overgang van rechtdraaiend zuur in eene zéér sterk linksdraaiende verbinding. Deze laatste is zonder twijfel de verbinding, die bij de elementair-analyse een uitkomst overeenkomende met $C_4H_4O_4$ gaf, dus een anhydrid van 't appelzuur; later zal blijken, hoe dat voorgesteld moet worden.

Een overeenkomstig geval vinden we in 't klassieke onderzoek van Wislicenus over 't rechtsdraaiend melkzuur, 't welk in verdunde oplossing rechts draait. doch bij uitdamping in 't linksdraaiend anhydrid overgaat.

De kalium- en natrium-zouten van het zuur zijn zeer gemakkelijk in water oplosbaar. Ze draaien 't polarisatievlak sterk links. Doordat ik ze niet in kristallijnen toestand kon verkrijgen, heb ik de specifieke draaiing niet kunnen bepalen.

Tot een verder onderzoek van het zuur kon niet overgegaan worden voordat het moleculairgewicht der verbinding bepaald was;

ten einde te beslissen tusschen de formules $C_4H_6O_5$ of $C_8H_{10}O_{10}$, daar de laatste formule zooals later blijken zal, niet uitgesloten was. De wegen, die openstonden waren de moleculaire gewichtsbepaling van 't zuur en de bepaling der geleidbaarheid van 't *Na*-zout, om te beoordeelen of het een twee- dan wel een vierbasisch zuur is. Zooals uit 't voorgaande onderzoek gebleken is, verliest 't zuur bij indampen water en 't was dus onmogelijk om de quantiteit van 't zuur te bepalen door weging.

Ik heb de moleculaire gewichtsbepaling verricht volgens de vriespuntsverlagingsmethode in water; daarbij uitgaande van een tamelijk geconcentreerde oplossing, waarvan de sterkte door titreeren bepaald was. De bepaling werd op de volgende wijze verricht:

In het apparaat van BECKMANN werd 16.3180 gram water gewogen en 't vriespunt er van bepaald. Vervolgens werd er met een pipet 1.6952 gr. van de zuuroplossing ingebracht en weer 't vriespunt bepaald; dan werd een nieuwe hoeveelheid zuur-oplossing toegevoegd en vervolgens weer 't vriespunt bepaald; deze zelfde bewerking werd nog eenmaal herhaald.

2.7216 gr. van de zuuroplossing werd verzadigd door 82.56 cM^3 $^1/_{10}$ n. $Ba\,(OH)_2$; dit is dus $0.0067 \times 82{,}56 = 0.55315$ gr. appelzuur: derhalve in 1 gr. oplossing van 't zuur zit 0.20324 gr. appelzuur.

	Water.	Zuuroplossing = water + zuur.	Totaal water.	Proc. zuur.	Δ 't.	M.
I	16,3180 gr.	1,6952 gr. = 1,3507 gr. + 0,3445	17,6687 gr.	1,95	0,265	139
II	16,3180 gr.	3,4202 gr. = 2,725 gr. + 0,6951	19,0431 gr.	3,65	0,470	146
III	16,3180 gr.	7,3134 gr. = 5,8277 gr. + 1,4866	22,1557 gr.	6,71	0,850	148

Het gevonden moleculairgewicht is te hoog. Voor $C_4H_6O_5$ berekend is 't 134. De restant van 't zuur werd gepolariseerd; de specifieke draaiing was + 9.2, terwijl 't zuur in verdunde oplossing + 9.8 aanwijst. Er was dus reeds anhydrid gevormd, waardoor eene verhooging verklaard kon worden. Ook is 't de vraag of 't water, dat voor het maken van de oplossing gebruikt was, hetzelfde vriespunt had, als hetgeen in den toestel gebracht werd.

Met het eigenaardige gedrag van 't zuur was 't ook mogelijk, dat het neutralisatiepunt lag voor den overgang van 't phenolphtalein van kleurloos in rose, zoodat de *OH*-groep eveneens werd aangetast.

Hierdoor zou het gehalte aan zuur te groot zijn gevonden, dus 't moleculaire gewicht te klein, zoodat de mogelijkheid van het zuur $C_8H_{10}O_{10}$ nog niet uitgesloten was. Daarom werd een afgewogen hoeveelheid van 't zuur geneutraliseerd met *Na OH*, ingedampt en in een stoof gedroogd bij 110° C. tot constant gewicht.

Eene kleine hoeveelheid van 't *Na*-zout in een druppel water opgelost reageerde volkomen neutraal.

Van dit *Na*-zout werd een elementair analyse en een *Na*-bepaling gemaakt.

I 0.2901 gr. *Na*-zout gaf in een zuurstofstroom ('t schuitje gevuld met $K_2Cr_2O_7$) 0.0657 gr, H_2O en 0.2882 gr. CO_2.

II 0,2935 gr. *Na*-zout werd met iets meer dan de berekende hoeveelheid H_2SO_4 ingedampt daarna op een asbestplaat verkoold en na verbranding van de koolstof met zwavelzuur drooggedampt. Na afrooken van 't zwavelzuur woog 't Na_2SO_4 0.2346 gr.

III 0.3652 gaf op dezelfde wijze als II behandeld, doch met meer H_2SO_4 0.2887 gr. Na_2SO_4.

	Gevonden.			Berekend voor:
	I.	II.	III.	$C_4H_4O_5Na_2$
C	27.1	—	—	26.99
H	2.5	—	—	2.25
Na	—	25.9	25.6	25.85

Hieruit blijkt dus, dat de *H* van de *OH*-groep niet door *Na* was vervangen.

Voor de bepaling van de electrische geleidbaarheid van 't *Na*-zout werd dit zout op dezelfde wijze als boven beschreven bereid.

Dr. E. Cohen te Amsterdam was zoo welwillend deze bepaling voor mij te verrichten.

Voor de bereiding der oplossing $^1/_{32}$ aeq. normaal moest $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{32} \times \frac{178.14}{10}$ gr. *Na*-zout per 100 cM³ = 0.2783 gr. worden afgewogen. Daar 't zout zeer hygroscopisch is, werd uit 't weegbuisje snel een zekere hoeveelheid ad visum in een ander (gesloten) buisje gebracht en gewogen.

Weegbuisje + *Na*-zout	=	17.4622 gr.
Weegbuisje	=	17.1846 gr.
Na-zout	=	0.2876 gr.

Om dit tot $^1/_{32}$ aeq. norm. te maken moet het gebracht worden op een volume van:

$$\frac{0.2876}{0.2783} \times 100 \text{ cM}^3 = 103,34 \text{ cM}^3.$$

Het kolfje werd in een thermostaat op temp. gebracht, tot 100 cM^3 aangevuld en vervolgens uit een buret 3.34 cM^3 H_2O toegevoegd.

II. Bereiding der oplossing $\frac{1}{1024}$ aeq. normaal, 25 cM^3 der onder I bereide oplossing werd in een kolf van 800 cM^3 gebracht.

In thermostaat tot streep met water aangevuld, zoodat aldus ontstond een oplossing $\frac{25}{800} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{1024}$ aeq. norm.

Electrische meting.

De geleidbaarheidsbepaling geschiedde op de gewone wijze volgens KOHLRAUSCH met wisselstroom en telephoon.

De konstante van het toestel werd bepaald met $^1/_{50}$ n. $K\,Cl$, dat met alkohol geprecipiteerd en bij 120° gedroogd was.

Gevonden werd $K = 221.5$.

De $^1/_{32}$ aeq. normaal van het natriumzout gaf $U_{32} = 79.98$.

Voor de geleidbaarheidsbepaling van de $^1/_{1024}$ deq. norm. van 't *Na*-zout werd eerst die van 't water bepaald $= 2.18 \times 10^{-6}$.

Gevonden voor $U_{1024} = 101.02 - 2.18 = 98.84$.

De metingen geven dus:

$$U_{1024} - U_{32} = 98,84 - 79.98 = 18.86$$

dus $\dfrac{U_{1024} - U_{32}}{9.5} = \dfrac{18.86}{9.5} = 1.98.$

Voor een tweebasisch zuur is het 2, dus is het zuur *tweebasisch*.

Reductie tot barnsteenzuur.

5 gram zuur wordt met joodwaterstofzuur, jodium en roode phosphorus in een buis ingesmolten en gedurende 100 uren in een waterbad verhit. De buisinhoud wordt tot eene kleine volume in-

gedampt en gefiltreerd. Het filtraat wordt met water verdund en met kalkmelk geneutraliseerd. Na verwijdering van het calciumphosphaat wordt het filtraat tot droog toe ingedampt. Na toevoeging van zoutzuur scheidde zich weinig barnsteenzuur af; de kristallen werden afgezogen, met water afgewasschen en opgelost in kokend water om ze te kristalliseeren. Er ontstaat na indamping een kleine hoeveelheid eener witte kristalmassa. Deze wordt op filtreerpapier gebracht en onder een klok naast een schoteltje met water geplaatst. Een kleine hoeveelheid zuur vervloeide en trok in 't filtreerpapier, de rest vormde een droge kristallijne massa.

De kristallen begonnen bij 110° gedeeltelijk te vervloeien, geheel vloeibaar werden ze bij 178° C.

De kristallen werden eenige keeren met weinig aether afgewasschen, waarvan 't smeltpunt na drogen 186° is.

Een elementair analyse van deze kristallen gaf de volgende uitkomst:

0.1230 gram gaf 0.1812 gr. CO_2 en 0.0601

	Berekend voor:	Gevonden.
	$C_4H_6O_4$	—
C	40.6	40.1
H	5.1	5.5

Door deze reductie is 't bewijs geleverd, dat het zuur een rechte keten vormt. De reductie gaat moeielijker dan van gewoon appelzuur.

Verandering van 't Crassulaceënzuur in de inactieve verbinding.

10 Gram zuur wordt met 60 gram $Na\,OH$ gedurende 20 uren in een kolf gekookt. Na neutralisatie met azijnzuur, wordt het zuur door loodacetaat neergeslagen.

Na ontleding met $H_2\,S$ wordt de oplossing van 't zuur ingedampt en tot constant gewicht gedroogd. De oplossing had een sp. gew. van 0.8935 bij 15° C.; bevatte volgens titratie 0.711 gr. zuur in 9,959 gr. oplossing. Deze oplossing draaide in een buis van 5 dM. lengte 't polarisatievlak 2°.1 links; dus $[\alpha]^D = \frac{9.959 \times 2.1}{5 \times 0.711 \times 0.8935}$ $= -6.5$.

Voor de verhitting draaide eene alkoholische oplossing van 't zuur, waarvan 1.243 gr. in 20.4 cM^3 aanwezig was, in een buis van 5 dM. 't polarisatievlak 11.9° links, waaruit volgt

$$[\alpha]_D = \frac{20.4 \times 11.9}{1.24 \times 5} = -39.1.$$

Verhitting van 't zuur met *Na OH* in een blikken bus gedurende 100 uren in een waterbad verminderde het draaiend vermogen wel, doch geheele opheffing was niet te verkrijgen, evenmin als door koken met *Na OH*.

Het Amid.

Van het amid van het gewone appelzuur is weinig bekend; wat hoogst waarschijnlijk moet toegeschreven worden aan de moeilijkheid om de esters te verkrijgen. Een kleine hoeveelheid methylester van 't Crassulaceënzuur (3.3 gram) wordt in absoluten alkohol opgelost, bijv. *0° C* met NH_3 verzadigd en de buis vervolgens dichtgesmolten. Vijf dagen na 't dichtsmelten hadden zich nog geen kristallen gevormd; de buis werd toen gedurende eenige uren in een waterbad verhit en vervolgens op een koele plek gezet; den volgenden dag hadden zich kleine glinsterende kristallen aan de wanden afgezet, die langzamerhand vermeerderden. Na drie weken was er ruim 3 gram amid gevormd.

De in een exsiccator gedroogde kristallen gaven de volgende analyse: 0.1844 gr. amid leverde 0.245 gr. CO_2 en 0.1010 gr. H_2O. 0.1678 gr. amid gaf volgens KJELDAHL 25.4 cM^3 $^1/_{10}$ n NH_3 = 35.54 mgr. *N*.

	Gevonden		Berekend
	I	II	$C_4\ H_4\ O_3\ (NH_2)_2$
C	36.2	—	36.36
H	6.1	—	6.06
N	—	21.18	21.21

Het amid is gemakkelijk oplosbaar in water, moeilijk in absoluten alkohol. — 't Smeltpunt is niet scherp, 't ligt tusschen 174—178° C.

III

Esterificatie van 't Zuur. De aethylester.

Voor de esterificatie wordt de oplossing van het zuur in 't vacuum ingedampt en gedroogd bij 110° C. tot constant gewicht. Vervolgens wordt het in absoluten aethylalkohol opgelost en met zoutzuur volgens de methode van ANSCHÜTZ geëstrificeerd.

Na verdrijving van de grootste hoeveelheid zoutzuur door een drogen luchtstroom, wordt de alkoholische oplossing in ijswater uitgegoten en vervolgens herhaalde malen met sterk afgekoelde aether uitgeschud. De oplossing in aether wordt met chloorcalium gedroogd en daarna de aether verdampt.

De rest wordt in vacuum gedestilleerd. Bij 30 m/m druk destilleert bijna de geheele vloeistof over tusschen 220°—250° C. Het destillaat is een dikke iets geel gekleurde vloeistof.

Na rectificatie wordt de fractie, die bij 30 mM. druk tusschen 245° en 250° overgaat, voor het onderzoek gebruikt.

0.2882 gr. stof gaf	0.1426 gr.	$H_2\ O$	en	0.5283 gr.	CO_2
0.1616 „ „	0.0816 „	„	en	0.2970 „	„
0.2842 „ „	0.1370 „	„	en	0.5241 „	„

Hieruit volgt

Gevonden				Berekend voor	voor	voor
	I	II	III	$C_4H_5O_5C_2H_5$—	$C_4H_4O_5(C_2H_5)_2$—	$(C_4H_3O_4)_2(C_2H_5)_2$
C	50.0	50.1	50.3	44.7	50.5	50.0
H	5.5	5.6	5.3	6.2	7.4	5.5

Het waterstofcijfer stemt in de drie analysen zeer goed overeen, zoodat het de normale aethylaether $C_4\ H_4\ O_5\ (C_2\ H_5)_2$ niet kan geweest zijn. De gevonden waarde stemt overeen met de empirische samenstelling $C_3\ H_4\ O_2$. De stof voor n°. III was verkregen door de rest van den ester nog eenmaal te destilleeren; door geringe ontleding was de overgegane vloeistof geler gekleurd. Door de hooge kooktemperatuur heb ik het moleculair gewicht volgens de vriespuntsverlagingsmethode bepaald.

0.2919 gr. ester verlaagde het vriespunt in	12.15 gr.	benzol	0.419° C.
0.115 „ „ „ „ „ „	15.04 „	„	0.133° „
0.315 „ „ „ „ „ „	15.04 „	„	0.354° „
0.682 „ „ „ „ „ „	15.04 „	„	0.759° „

dus het moleculair gewicht van den ester wordt

I	II	III	IV	$(C_3\ H_4\ O_2)_4 = C_{12}\ H_{16}\ O_8$
280.	282.	290.	292.	288.

Zooals later zal blijken is het de diaethylaether van het zuur $C_8\ H_8\ O_8$, waarvoor vroeger de specifieke draaiing $[\alpha_D] = -39.1$ werd gevonden.

Dat dit zuur geen fumaar of maleïnezuur is, werd op de volgende wijze bewezen.

Ongeveer 0.8 gr. ester werd aan een opstijgenden koeler met water langdurig gekookt, daarna het gevormde zuur met $K_2\ C\ O_3$ geneutraliseerd en het koken zoolang voortgezet tot eene kleine hoeveelheid $K_2\,CO_3$ in overmaat na een kwartier koken nog een alkalische reactie veroorzaakte.

De alkohol werd toen afgedestilleerd en met de jodoform-reactie aangetoond.

De oplossing van het kaliumzout werd met een paar druppels azijnzuur zwak zuur gemaakt en met lood-acetaat in 't loodzout omgezet.

Het volumineuze neerslag woog na droging slechts 0.275 gram, het filtraat werd daarom tot een klein volume ingedampt en met alkohol neergeslagen.

Deze twee loodzouten werden afzonderlijk onderzocht.

I 0.2745 gr. loodzout van het 1e neerslag leverde bij 100° C. gedroogd 0.036 gr. $H_2\,O$ en 0.1420 gr. $C\,O_2$ en 0.1802 gr. $Pb\,O$.

II 0.2440 gr. loodzout met alkohol neergeslagen leverde 0.0301 gr. $H_2\,O$ en 0.1264 gr. $C\,O_2$.

III. 0.2500 gr. van 't zelfde loodzout geeft 0.2271 gr. $Pb\,S\,O_4$

	Gevonden			Berekend voor
	I	II	III	appelzuurlood $(C_4\,H_4\,O_5)\,Pb$.
C.	14.1	14.1	—	14.1
H.	1.4	1.3	—	1.2
Pb.	61.0	—	62.0	61.07

Uit deze analyse blijkt, dat het door verzeeping gevormde zuur appelzuur is. De verzeeping heeft zooveel mogelijk door water plaats gevonden, om een mogelijke overgang van fumaar of maleïnezuur in appelzuur door koking met een basis geheel uit te sluiten.

Dit appelzuur moet derhalve gevormd zijn uit het zuur $C_8\,H_8\,O_8$ door opneming van 2 mol water

$$C_8\,H_8\,O_8 + 2\,H_2\,O = 2\,C_4\,H_6\,O_5.$$

1.0185 gr. van den diaethylester $(C_8\,H_6\,O_8)\,(C_2\,H_5)_2$ wordt in 40.6664 gr. benzol opgelost; deze oplossing heeft een soortelijk gewicht van 0.8918 en draait in een buis van 5 d.M. 't polarisatievlak 3°.37 links, temperatuur 18° C.

$$\text{dus } [\alpha]_D = \frac{3.37 \times 41.685}{5 \times 1.018 \times 0.8918} = -30.9.$$

Een kleine hoeveelheid van den diaethylester wordt met 50 cM^3.

water gedurende 10 uur aan een koeler gekookt; de oplossing wordt tot 100 cM^3. gebracht en in een buis van 5 dM. de draaiing van 2°,01 rechts gevonden. Door titreering wordt het gehalte aan appelzuur op 5,0 gram bepaald, waaruit volgt, dat de specifieke draaiing is

$$[\alpha]_D = \frac{1.00 \times 2.01}{5 \times 5} = + 8°.04$$

Derhalve reeds bijna de vroeger voor het zuur gevonden waarde terug.

De op boven beschreven wijze verkregen aethylester is dikwijls tengevolge van slechte droging, of waterhoudende alkohol een mengsel van verschillende stoffen, die door gefractioneerde destillatie niet te scheiden zijn.

De methylester.

Daar de estrificatie met aethylalkohol eenige keeren mislukte, trachtte ik de dikwijls beter rendement gevende methylester te verkrijgen.

Een voorloopige proef met 4 gram zuur gaf een kleine hoeveelheid kristalnaalden; daarom werd de proef met meer zuur herhaald.

30 gr. zuur wordt tot constant gewicht bij 110° C. in 't luchtledige gedroogd, vervolgens in absoluten methyl-alkohol opgelost en met HCl verzadigd.

Na 24 uur staan werd de grootste hoeveelheid zoutzuur door een drogen luchtstroom verwijderd, de rest werd in zeer fijn gestooten ijs uitgegooten en vervolgens met afgekoelden aether eenige keeren geëxtraheerd. Na verwijdering van de laatste sporen zoutzuur met gegloeid $K_2\,C\,O_3$ wordt de oplossing in aether door chloorcalium gedroogd.

Door verdamping van den aether bleef er 20 gram van een geel gekleurde olie over, nadat verwijdering van den methylalkohol bij 25 $^m/_m$ druk en 80° C. had plaats gehad.

Bij $\pm$ 100° C. (paraffinebad 140°) sublimeeren in den hals van het destillatiekolfje prachtige naalden; de geheele hoeveelheid bedroeg slechts 0.141 gram.

De naalden smelten bij 102° C.; bij verzeeping met KOH en aanzuren met zoutzuur kristalliseeren de karakteristieke kristallen van fumaarzuur uit; de oplossing van deze kristallen geeft met

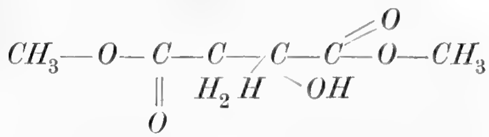
$AgNO_3$ onmiddellijk een neerslag, de kristallen smelten niet, doch bij 200° C. ongeveer worden ze bruingrijs en vervluchtigen zonder smelting; — bromium wordt door de kristallen geaddeerd. Al deze reacties wijzen zonder eenigen twijfel fumaarzuur aan; de naalden bestonden dus uit fumaarzure dimethylester, wat met het smeltpunt geheel overeenkomt.

Na verwijdering van de kristallen werd het bad sterker verhit.

Bij 161° C. (paraffinebad 190° C.) druk 24 $^m/_m$ destilleerde een gele olie (8 gram) over. Vervolgens steeg de temperatuur snel tot 200° C. Bij 210° (bad temperatuur 230°) en 25mM. druk destilleerde een dikke, taaie vloeistof over, die spoedig vast werd (in 't geheel 11 gram).

De gele bij 161° C. destilleerende olie werd nog eenmaal gefractioneerd. De vloeistof die bij 192° en 25 mM. overging werd voor een elementair analyse gebruikt. 0.1784 gr. leverde 0·1030 gr. H_2O en 0.2878 gr. CO_2.

Hieruit volgt:

Gevonden:	Berekend voor:
	
C — 44.1	44.3
H — 6,3	6.1

Dit is dus de dimethylester van het appelzuur.

De verbinding, die bij 210° destilleerde werd uit absoluten alkohol omgekristalliseerd. Bij afkoeling vormden zich prachtige lange naalden. Ze lossen zeer gemakkelijk in kokenden aethylalkohol op, zeer moeilijk in kouden alkohol, zeer weinig in aether.

Het smeltpunt ligt bij 102° C., dus hetzelfde smeltpunt als de dimethylester van fumaarzuur.

Een estrificatie met zwavelzuur gaf minder goede resultaten.

De naalden uit aethylalkohol omgekristalliseerd werden geanalyseerd. Het materiaal was van drie verschillende bereidingen afkomstig.

0.2928	gr.	ester	leverde	0.1324	gr.	H_2O	en	0.4962	gr. CO_2
0.2654	„	„	„	0.1210	„	„	„	0.4470	„ „
0.2012	„	„	„	0.090	„	„	„	0.3426	„ „
0.2472	„	„	„	0.1082	„	„	„	0.4192	„ „
0.2186	„	„	„	0.0944	„	„	„	0.3694	„ „

	Gevonden:					Berekend:
	I.	II.	III.	IV.	V.	$C_{10}\,H_{12}\,O_8$
C	46.22	46.0	46.4	46.2	46.0	46.15
H	5.03	4.8	4.97	4.85	4.8	4.62

De ester voor II, IV en V zijn bij 110° gedroogd, I en III zijn exsiccator droog.

Het moleculair gewicht werd bepaald uit de kookpuntsverhoogingen van een acetonoplossing en éénmaal uit de vriespuntverlaging van benzol.

De oplosbaarheid in benzol is echter zoo, dat deze uitkomst slecht was: 0.1584 gr. ester verlaagde van 17.625 gr. benzol 't vriespunt 0.230° C., waaruit volgt M = 202. Daarna werd nog 0.7782 gr. in de warmte opgelost, bij afkoeling kristalliseerde een groot deel reeds uit, zoodat deze methode niet te gebruiken was.

Moleculair gewichtsbepaling in aceton volgens de kookpuntsverhooging.

12.05 gr. aceton.

Gram. ester	°/₀ stof	Verhooging	Molecul. gew.
0.2012	1.68	0.111	252
0.4162	3.47	0.231	260
0.8614	7.18	0.420	264
0.9826	8.19	0.507	270

De samenstelling $C_{10}\,H_{12}\,O_8$ vereischt als moleculair gewicht 260.

Daar 't uiterlijk zeer veel en 't smeltpunt geheel met dat van den dimethylester van fumaarzuur overeenstemde, heb ik voor contrôle deze ester op dezelfde wijze als boven beschreven bereid. Na kristallisatie uit alkohol verkreeg ik

C — 49.9 in plaats van 50,0
H — 5.6 „ „ „ 5.5

Moleculairgewicht 144 en 148 in plaats van 144.

Om te onderzoeken of de methylester ook dubbelgebonden koolstofatomen bevatte, werd de volgende proef genomen:

1 Gram ester wordt na oplossing in water met 1 gr. Bromium 24 uur in 't zonlicht geplaatst.

Na dezen tijd was er nog 0.96 gr Bromium aanwezig, dus is in de verbinding $C_{10}\,H_{12}\,O_8$ geen dubbele binding aanwezig.

Voor een onderzoek naar mogelijke hydroxylgroepen werden de volgende proeven genomen:

1 Gram ester wordt met 2 gr. acetylchloride op een waterbad aan een koeler met een chloorcaliumbuis verhit; de ester lost op, doch er treedt geen zoutzuur op.

Na eenigen tijd werd het acetylchloride door destillatie verwijderd; de ester kristalliseerde bij afkoeling uit; na oplossing in kokenden alkohol ontstaan er prachtige naalden, die bij 102° C smelten. De stof was derhalve niet veranderd.

Dezelfde proef werd voor alle zekerheid herhaald met benzoylchloride. Eerst werd op een waterbad verhit, vervolgens de temperatuur tot 160° C verhoogd. Na afkoeling werden de kristallen door afwasschen met aether van benzoylchloride bevrijd; de rest uit alkohol omgekristalliseerd, leverde 0.9 gr. zuivere verbinding met een smeltpunt van 102° C. — Zonder twijfel zijn in de verbinding geen hydroxyl groepen aanwezig.

Verschillende reactie's op aldehyd- of ketongroepen, als alkalische zilveroplossing, fuchsinenoplossing, paradiazobenzolsulfonzuur en *Na*, phenylhydrazin, hydroxylamin leverden allen negatieve resultaten, zoodat de absentie van carbonylgroepen zeker is.

Verzeeping van de dimethylester leverde 't volgende resultaat:

1 Gram ester werd gedurende verscheidene uren met een overmaat van KOH gekookt. Na neutralisatie met azijnzuur werd met loodacetaat vermengd 't loodzout afgewasschen en door H_2 S ontleed.

Het gevormde zuur werd na verwijdering van 't PbS met een basis bijna verzadigd en met $Ag\ NO_3$ in 't Ag-zout omgezet. Dit zout in een exsiccator boven $H_2\ SO_4$ gedroogd, werd geanalyseerd

0.2288 gr. Ag zout leverde 0.1642 gr. CO_2 en 0.0350 gr. $H_2\ O$.
0.3686 gr. „ „ 0.2285 gr. Ag.

	Gevonden		Berekend voor
	I	II	$C_4\ H_4\ O_5\ Ag_2$
C	13.63	—	13.78
H	1.21	—	1·15
Ag	—	62.02	62.07

Door verzeeping was dus de dimethylester $C_8\ H_6\ O_8\ (CH_3)_2$ omgezet in 't appelzuur; evenals dit met de diaethylester is aangetoond. Dat het een ester was, bleek bij de verzeeping door 't optreden van alkohol in den koeler.

Wil men de ester overvoeren in appelzuur, dan is 't noodzakelijk geruimen tijd met loog te koken. Wordt dit niet gedaan, zoo ontstaat er een andere verbinding. Dit blijkt b. v. uit het volgende onderzoek:

Een gram ester wordt met water op een waterbad verwarmd met kleine hoeveelheden KOH tot de vlocistof zwak alkalisch bleef.

Door zwak aanzuren met een druppel $H\ NO_3$ en neerslaan met $Ag\ NO_3$ ontstaat een wit neerslag, waarvan na droging bij 110° C 0.3072 gr. bij verbranding 0.1751 gr. of 56.9 % Ag leverde.

Het zilverzout kristalliseert na oplossing in kokend water in fijne mikroskopische naaldjes uit. De elementair-analyse hiervan leverde de volgende uitkomst op:

0.2935 gr. Ag zout gaf 0.0485 gr. $H_2\ O$
0.1850 CO_2 in 0.1670 gr. Ag.

	Gevonden	Berekend voor $C_8\ H_7\ O_9\ Ag_3$
C	— 17.2 —	16.8
H	— 1.8 —	1.2
Ag	— 56.9 —	56.7

Wanneer 't zuur uit 't loodzout werd vrij gemaakt, vormde het na indamping een volkomen kleurlooze stroop, die na 3 maanden in een vacuum-exsicator boven $H_2\ SO_4$ gestaan te hebben voor een groot deel was overgegaan in een kristalmassa.

De kristallen waren van de aanklevende stroop door geen oplossingsmiddel te bevrijden, daar elke stof, waarin de stroop oplosbaar is, ook de kristallen oplost.

Om een denkbeeld van de samenstelling der kristallen te krijgen, heb ik ze op een poreuze plaat zooveel mogelijk van de stroop bevrijd, ze daarna geanalyseerd.

0.1546 gr. leverde 0.0610 gr. $H_2\ O$ en 0.2286 gr. CO_2 waaruit:

	Gevonden	Berekend voor $C_8\ H_8\ O_8$
C	40.4	41.4
H	4.4	3.45

De analyse wijst op 't zuur $C_8\ H_8\ O_8$, doch de koolstof is te laag, de waterstof te hoog, wat de aanwezigheid van water aanduidt.

Was dit zoo, dan moest bij een moleculaire gewichtsbepaling volgens de kookpuntsverhooging het moleculairgewicht te laag uitvallen.

Aceton	Zuur	Verhooging	Moleculair gew.
7.774	0.0820 gr.	0.090° C	195.
„	0.1854 „	0.220 „	183.

Van $C_8\ H_8\ O_8$ is 't moleculairgewicht 232. Dit is derhalve geheel in overeenstemming met de elementairanalyse.

Van de oplossing voor de moleculairgewichtsbepaling gebruikt, liet ik de aceton bij gewone temperatuur verdampen; een deel van het zuur werd in een verbrandingsschuitje in vacuum gedroogd tot constant gewicht; nu leverde dit zuur 't volgende resultaat:

0.1930 gr. stof gaf 0.066 gr. $H_2\ O$ en 0.2912 gr. CO_2

	Gevonden	Berekend $C_8\ H_8\ O_8$
C	41.1	41.4
H	3.8	3.45

Een zilverzout werd op de volgende wijze van dit zuur gemaakt. Eén gram van het strooperige zuur werd in 't luchtledige gedroogd bij 100° tot constant gewicht.

Het eenigszins bruin gekleurde zuur werd in absoluten alkohol opgelost. De oplossing werd met 2.5 gram zilvernitraat, in absoluten alkohol opgelost, vermengd. Er ontstond bijna geen neerslag, vervolgens werd zooveel ammoniak in absoluten alkohol toegevoegd, als noodig was om al 't zuur uit 't $Ag\ NO_3$ te neutraliseeren.

Het zware witte neerslag wordt op een zuigfilter gebracht, afgewasschen eerst met verdunden, later met sterken alkohol en in een vacuumexsiccator gedroogd.

De elementair analyse leverde deze uitkomsten:

0.2388	gr. Ag zout	leverde	0.1160 gr. Ag.	
0.2778	„ „	„	0.2166 gr. CO_2	en 0.0351 gr. $H_2\ O$
0.5018	„ „	„	0.3887 gr. CO_2	en 0.0656 gr. $H_2\ O$
0.2084	„ „	„	0.1002 gr. Ag	

	Gevonden				Berekend
	I	II	III	IV	$C_8\ H_6\ O_8\ Ag_2$
C	—	21.2	21.1	—	21.52
H	—	1.4	1.4	—	1.32
Ag	48.5	—	—	48.1	48.65

Lijsterbessen appelzuur werd op dezelfde wijze behandeld; 't leverde eveneens een mooi wit zilverzout.

0.5165 gr. zilverzout geeft 0.3162 gr. Ag of 61.2.

Was er een anhuvrid gevormd, zooals bij 't Crassulaceenzuur, dan zou 't zilverzout 48.65 $^0/_0$ Ag hebben moeten opleveren.

Het zilverzout van het niet geanhudvriseerde zuur bevat 62.07$^0/_0$ Ag.

Er blijkt dus uit, dat er geen anhydriedvorming bij 't lijsterbessenzuur heeft plaats gehad.

Het drogen tot constant gewicht en het oplossen in absoluten alkohol is noodzakelijk, daar anders een mengsel van verschillende verbindiugen ontstaat.

Wordt b.v. 't zuur op een waterbad ingedampt, in een droogstoof eenigen tijd gedroogd bij 100° C., daarna in weinig water (koud) opgelost met $Ag\,NO_3$ vermengd en met NH_3 geneutraliseerd, dan ontstaat er een wit neerslag.

Na filtreeren kan hieruit door omkristalliseeren uit kokend water een zilverzout verkregen worden, dat in fijne naaldjes kristalliseert, dat de volgende analyse leverde:

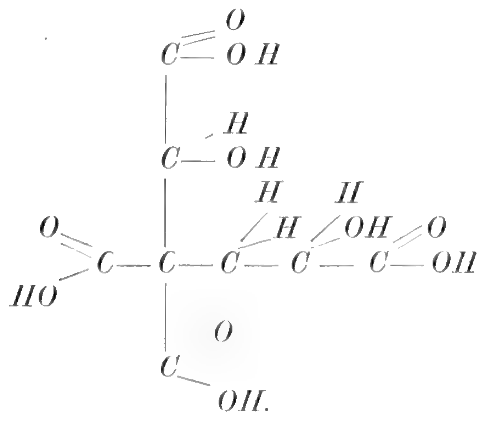
0.1870 gr. Ag-zout leverde 0.1158 gr. CO_2 en 0.0210 gr. $H_3\,O$
0.2054 „ „ „ „ 0.1166 „ Ag

	Gevonden I	Gevonden II	Berekend $C_8\,H_7\,O^9\,Ag_3$
C	16.6	—	16.81
H	1,2	—	1.22
Ag	—	56.8	56.74

Het zuur, waarvan hier een zilverzout gevonden wordt, zal in 't theoretische gedeelte nader worden behandeld

De verkregen resultaten wijzen allen op een zuur van de empirische samenstelling $C_4\,H_6\,O_5$.

Het was echter evengoed mogelijk, dat 't zuur de samenstelling $C_8\,H_{10}\,O_{10}$ had, b.v. met de volgende structuur



De waterstofatomen zijn daar wel 2 minder, doch daar 't zuur niet kristallijn te verkrijgen is, was dit niet een onoverkomelijk bezwaar, aangezien de H-bepaling toch steeds te hoog uitvalt.

De vorming van 't anhydried zou dan een laktonvorming zijn.

In de procentische samenstelling der zouten zou wel veel afwijking komen b.v. voor 't *Pb*-zout $C_8 H_6 O_{10} Pb_2$ wordt $H = 0.9\ ^\circ/_\circ$, terwijl gevonden is voor 't gekristalliseerde *Pb*-zout $1.3\ ^\circ/_\circ$ *H*. Door de moleculairgewichtsbepaling is dit zuur echter uitgesloten.

Droge destillatie van 't zuur.

Een belangrijk punt van vergelijking leverde de droge destillatie.

Van de vroegere onderzoekers zegt Schmidt 't volgende: „Durch erhitzen auf 170—180° C. wurde die Säure unter Braunfärbung zersetzt: Fumarsäure konnte unter den Zersetzungsproducten nicht nachgewiesen werden."

Bij Mayer staat niets over de ontleding door verhitting vermeld.

Braconnot baseert voor 't grootste gedeelte zijn identiteitsbewijs van 't Crassulaceën-zuur met 't lijsterbessen-appelzuur op de droge destillatie produkten. Hij beschrijft op de volgende wijze de ontleding: „Destillé dans une petite cornue de verre il a commencé par se fondre, il a passé d'abord une liquide incolore, acide, très-caustique, communiquant aux parties de la bouche, où il avait été mis en contact, une couleur blafarde et une constriction fort des-agréable. Ce liquide n'a pas tardé à cristalliser par l'evaporation spontanné à l'air. En augmentant la chaleur de la cornue prèsque tout l'acide s'est transformé dans un sublimé blanc, formé de cristaux aciculaires, moins soluble dans l'eau que l'acide non sublimé et qu' ont plus facilement cristalliser que lui en petites sphères par l'evaporation. Il n'est resté dans la cornue qu' une très-petite quantité de charbon."

Na nog eenige zouten opgenoemd te hebben zegt Braconnot:

„Il serait, je pense, d'insister d'avantage sur les propriétés de cet acide, car on voit assez clairement qu' elles ne peuvent appartenir qu' à l'acide sorbique."

Zooals bekend is gaat het gewone appelzuur bij verhitting op 140° C. geheel over in fumaarzuur. Bij plotselinge verhitting op 180° gaat ongeveer 80 $^0/_0$ over in fumaarzuur en 20 $^0/_0$ in maleïnezuur. [1])

Schmidt vindt bij de destillatieproducten wel geen fumaarzuur; of er ook geen maleïnezuur in voorkwam wordt niet medegedeeld. Verder geeft hij geen enkele aanwijzing welke stoffen er dan wel in voorkwamen.

---

[1]) H. J. van 't Hoff. Academisch proefschrift.

Om dit punt op te helderen heb ik eerst de proef van BRACONNOT herhaald, voor zoover 't uit zijn beschrijving is af te leiden. In een retort werd 5 gram Crassulaceën appelzuur gebracht en de temperatuur langzamerhand verhoogd, zorg dragende, dat de verhitting regelmatig geschiedde. De waargenomen verschijnselen stemmen in veel opzichten met die van BRACONNOT overeen.

Eerst komt er een vloeistof over, bij hoogere temperatuur kristallen, doch weinig.

De vloeistof geeft bij vrijwillige verdamping eveneens kristallen, toch vormt het grootste deel een niet kristalliseerende stroop. De kristallen, die in den hals van de retort zaten waren van fumaarzuur (te herkennen door de moeilijke oplosbaarheid in water; 't vervluchtigen zonder smelting bij 200°, 't zeer moeilijk oplosbare zilverzout). Het stroopvormige destillaat werd weer in water opgelost, met $K\,O\,H$ geneutraliseerd en met $Ag\,NO_3$ vermengd; 't amorfe neerslag was geen maleïnezuur-zilver, omdat dat zout onder dezelfde omstandigheden overgaat in een prachtig gekristalliseerd zilverzout. 't Zilvercijfer voor maleïnezuur-zilver is 65.5, voor 't amorfe neerslag was het 55.7. Door oplossen van 't neerslag in verdund $H\,NO_3$ en neerslaan met $N\,H_3$ veranderde het niet van samenstelling.

Het destillaat bestond dus zeker niet uit maleïnezuur; misschien waren de enkele kristallen in de stroopvormige massa aanwezig maleïnezuur. De hoeveelheid was zóó gering, dat een nader onderzoek onmogelijk was.

Het residu in de retort bestond bijna geheel uit koolstof en bedroeg 0.24 gram.

Om de veranderingen beter te kunnen nagaan heb ik 't zuur in een destillatiekolfje op constante temperaturen verhit. De verhitting vond eerst plaats in een luchtbad volgens VICTOR MEYER. Ten einde de zuurstof af te sluiten — daar ik meende, dat het bruin worden van 't zuur daardoor veroorzaakt werd — voerde ik een stroom van droge waterstof door den toestel. Als verhittingsvloeistof werd xylol (kp. 136° C.) gebruikt.

Er ging een kleurlooze, bijna neutraal reageerende vloeistof over, wat bij onderzoek water bleek te zijn.

Toen er niets meer overging werd de xylol vervangen door aniline (kp. 180°).

Er ontstonden in de afvoerbuis prachtige naalden en er destilleerde een gele vloeistof over. Na één dag verhitten was van 4.6 gr. zuur 3.2 gr. overgegaan, dus ongeveer 70 %.

De waterstof die uit den toestel kwam, bevatte CO_2.

Het destillaat, bij 180° verkregen, wordt met chloroform geschud, de stroopige vloeistof lost op, de kristallen niet.

Na verdrijving van de chloroform wordt het zuur in water opgelost en met een $Ag\ NO_3$ oplossing vermengd.

't Gele zilverzout leverde de volgende uitkomst:

0.3234 gr. geeft 0.1615 gr. Ag; 0.0519 gr. H_2O en 0.2503 gr. CO_2 dus 50.4 $^0/_0$ Ag; 1.7 H en 21.1 C.

Voor maleïnzuur-zilver zou 't zijn:

C 14.5, H 0.6; Ag 65.4.

De kristallen niet in chloroform oplosbaar, wogen 0,123 gram. Ze vervluchtingen onder lichte bruinkleuring tusschen 200—220°, zonder vooraf te smelten. Ze geven een zeer moeilijk oplosbaar Ag-zout. Bij een elementair analyse leverden 0.0995 gr. kristallen 0.0340 gr. H_2O en 0.1513 gr. CO_2 dus:

	Gewoon.	Berekend. $C_4\,H_4\,O_4$
C	41.37	41.38
H	3.70	3.45

De gesublimeerde kristallen bestonden derhalve uit fumaarzuur.

De rest in 't destillatiekolfje reageerde na oplossing in water nog zeer sterk zuur, doch de vloeistof was zoo sterk gekleurd, dat het niet mogelijk was, hieruit een zuivere verbinding af te zonderen.

Bij een nieuwe destillatie werden de noodige toestellen ingelast om het CO_2 te kunnen bepalen.

3.3 gram zuur werd eerst in xyloldamp verhit. Het leverde water, doch geen CO_2.

Na vervanging van de xylol door aniline destilleerde een olie vermengd met kristallen over. Na één dag verhitten was er 0.222 gr. CO_2 ontstaan of 6.7 $^0/_0$.

Na nog één dag verhitten nog 0.065 gr. in 't geheel dus 0.287 gr. of 8.7 $^0/_0$ CO_2.

Het destillaat ging door breking van den toestel verloren. Van het zuur was nog 1.4 gr. in 't destillatiekolfje over.

Bij voortgezette verhitting destilleerde nog steeds een dikke vloeistof over, tevens ontstond er nog CO_2.

Ten einde te onderzoeken, wat de rest in 't kolfje en wat de vloeibare massa van 't destillaat was, nam ik meer zuur voor een nieuwe proef.

6.33 gr. gedroogd zuur, leverde in een dag 0.405 gr. CO_2 of 6.4 %; er was toen 52 % van 't zuur overgegaan. De rest in 't kolfje werd in water opgelost en gedeeltelijk met $Ba(OH)_2$ geneutraliseerd.

Na filtreering werd de oplossing, die nog licht geel gekleurd was met $Ba(OH)_2$ gekookt en na neutralisatie met HNO_3 omgezet in een zilverzout.

Het neerslag was eenigszins geel gekleurd.

Het bij 110° C. gedroogde neerslag werd geanalyseerd.

0.1753 gr. leverde 0.0890 gr. CO_2 en 0.0188 gr. H_2O
0.2152 gr. „ 0.1345 gr. Ag.

	Gevonden.		Berekend.
	I.	II.	$C_4H_4O_5Ag_2$
C	13.86	—	13.82
H	1.2	—	1.15
Ag	—	62.5	62.07

Bij verhitting gedurende een dag op 180° C. was nog bijna de helft van het zuur als appelzuur aanwezig.

Het destillaat werd tot droog toe ingedampt, daarna de rest met chloroform uitgeschud. Na verdrijving van de chloroform was de stroop nog vermengd met kleine naaldvormige kristallen, zoodat de scheiding onvolledig had plaats gehad. De kristallen, die in chloroform niet opgelost waren, werden uit aether omgekristalliseerd. Er ontstonden mooie kristallen, die na droging bij 100° C. de volgende elementairanalyse leverden:

0.2582 gr. gaf 0.0905 gr. H_2O en 0.3031 gr. CO_2

	Gevonden.	Berekend.
		$C_4H_4O_4$
C	41.38	41.38
H	3.87	3.45

De kristallen waren zeer gemakkelijk in water oplosbaar, smolten bij 130° C., leverden een oplosbaar zilverzout en een moeilijk oplosbaar *Ba*-zout. Het was zonder twijfel maleïnezuur. (Wellicht ontstaan door omzetting van fumaarzuur in maleïnezuur anhydrid, omdat er bijna geen fumaarzeer-kristallen gevormd waren).

Bij de vorige destillaties meende ik aldehyd door den reuk herkend te hebben. Ik stelde daarom een onderzoek er naar in; daarvoor werd de waterstof door een oplossing van $Na\ H\ S\ O_3$ geleid. Na afloop der verhitting werd het $Na\ H\ S\ O_3$ met $CO_3\ Na_2$ verwarmd; het destillaat werd in water opgevangen. Een paar druppels leverden met een alkalische zilveroplossing onmiddellijk een zilverspiegel. De rest werd met $Cr\ O_3$ en $H_2\ SO_4$ aan een opstijgende koeler geoxydeerd. Het overgedestilleerde zuur werd mikroskopisch met Uranyl-magnesium nitraat als azijnzuur herkend.

Het CO_2 en 't acet-aldehyd zijn zonder twijfel door de ontleding ontstaan, b. v. doordat er eerst melkzuur gevormd werd, dat CO afsplitste en acet-aldehyd overliet.

Bij een nieuwe destillatie werden de destillatie-producten door een drogen CO_2 stroom medegevoerd, voor 't CO was een zoutzure oplossing van $Cu_2\ Cl_2$ aanwezig. Na uitkoken kon 30 cM^3. gas opgevangen worden.

Het gas was brandbaar, doch de vlam had een zwak blauwe kleur, minder dan zuiver CO. Gebrek aan materiaal verhinderde mij de proef met meer zuur te herhalen.

Ten einde in 't destillaat de stroopvormige massa nader te onderzoeken, moest ik het van het fumaar- en maleïnezuur scheiden. Ik heb daarvoor met 't beste gevolg de methode van Tanatar [1]) gebruikt. Het geheele destillaat van de vorige proef werd in weinig water opgelost met $Cu\ CO_3$ gekookt tot er geen opbruising meer plaats vond. Fumaar- en maleïnezuur vormen na afkoeling de onoplosbare koperzouten. 't Neerslag bestond voornamelijk uit de prachtig blauwe kristallen van maleïnezuur-koper. Het filtraat, dat donkergroen gekleurd was, werd in 2 deelen verdeeld. 't Eene deel werd in een exsiccator langzaam ingedampt, dit leverde lange naaldvormige groene kristallen. Het andere deel werd met $H_2\ S$ van koper bevrijd, 't filtraat van 't zwavelkoper werd ingedampt, met $K\ O\ H$ geneutraliseerd en in het Ag-zout omgezet. Dit gaf 59.6 $^0/_0$ Ag. De rest van 't Ag-zout werk in warm water opgelost en met alkohol neergeslagen.

De exsiccator-droge verbinding gaf de volgende uitkomst:
0.1448 gr. Ag-zout leverde 0.0204 gr. $H_2\ O$ en 0.0729 gr. CO_2
0.1801 gr. Ag-zout gaf 0.1115 gr. Ag.

---

[1]) B. B. 27—1365.

	Gevonden		Berekening
	I	II	$C_2\ H_4\ O_5\ Ag_2$
C	13.7	—	13.8
H	1.5	—	1.15
Ag	—	61.9	62.07

Hieruit volgt derhalve. dat het appelzuur overdestilleert.

De vervluchtiging van het appelzuur trachtte ik te vergemakkelijken door de destillatie in 't luchtledige te verrichten. Ik smolt aan een destillatiekolfje een groote U-vormige buis, deze werd in ijswater geplaatst, om 't condenseeren te vergemakkelijken.

Nadat een vacuum van 14 mM. verkregen was, werd het kolfje in 't parraffinebad van 220° C gebracht.

Onmiddellijk begon de destillatie, de producten condenseerden vrij goed in de U-buis, toch was de condensatie niet volledig. Eerst ontstonden prachtige naalden; waarschijnlijk maleïnezuur anhydried; toen een gele olie, die een taai vloeibare massa vormde, op 't eind de karakteristieke kristallen van fumaarzuur.

De druk kon gedurende de destillatie door voortdurend pompen op 18 mM. gehouden worden. De geheele destillatie van 7 gram zuur had in 15 minuten plaats. Een klein deel van het dikvloeibare gedeelte werd met KOH gekookt; geneutraliseerd met HNO_3 en als Ag-zout neergeslagen.

0.1688 gr. zout leverde 0.1037 gr. Ag of 61.7 $^0/_0$ in plaats van 62.07 voor appelzuurzilver. Dus was 't appelzuur gedestilleerd.

Het maleïnezuur werd als Cu-zout afgescheiden, dit leverde na ontleding met $H_2\ S$ ongeveer 1 gram zuur. Dit is de eenige keer geweest, dat er zooveel was ontstaan. Aangetoond door het smeltpunt van 131° C.

In 't destillatiekolfje was nog 0.2 gram kool over.

Aangezien 't. fumaar- en maleïnezuur slechts in kleine hoeveelheden optreedt, is het mogelijk, dat het ontstaat uit gewoon appelzuur, dat in de Crassulaceën naast het isomèrezuur aanwezig kan zijn; ook zou het kunnen ontstaan door omzetting van Crassulaceënzuur in 't gewone.

Het was noodzakelijk na te gaan of gewoon appelzuur, onder volkomen dezelfde omstandigheden gedestilleerd, zich gedroeg als bij verhitting onder gewonen druk. Om hierover zekerheid te verkrijgen werd 10.5 gr. lijsterbessenzuur in een kolfje bij 100° C in vacuum gedroogd.

Na soldeering aan de U-buis werd het kolfje bij 13 mM. druk in 't paraffinebad van 210° gedompeld.

De waterstraal-luchtpomp werd afgesloten, om het ontstaan van gassen te kunnen aantoonen. In 't begin steeg de manometer iets, daarop destilleerde water, vervolgens maleïnezuur anhydrid, dat vast werd.

Na 12 minuten ging er niets meer over, in 't kolfje was de rest vast en begon in den hals te sublimeeren; 't paraffinebad was 230° bij 't einde der proef. — Na volledige afkoeling was de druk van den manometer weer 13 mM. Bij deze destillatie van gewoon appelzuur ontstaan dus geen gassen.

De rest in 't kolfje woog 7 gram en bestond uit fumaarzuur.

Theoretisch zou er ontstaan moeten 9.1 gram aan fumaarzuur en maleïnezuur.

Er was gevormd 7 gr. fumaarzuur of 77 $^0/_0$ der theorie, derhalve als de rest maleïnezuur was, zou 't 23 $^0/_0$ bedragen. Dit zou geheel in overeenstemming zijn met de onderzoekingen van H. J. VAN 'T HOFF[1]).

Het destillaat wordt met $Cu\ CO_3$ gekookt, prachtige kristallen van maleïnezuur-koper. Na afkoeling was het filtraat bijna kleurloos; het koper werd verwijderd, de vloeistof ingedampt, er bleef een vaste massa over (zeer gering); onder 't mikroskoop werden weer de blauwe kristallen verkregen met $Cu\ CO_3$. Onder deze omstandigheden destilleert derhalve het gewoon appelzuur niet over.

Het crassulaceënzuur zal zonder twijfel over destilleeren in den vorm van het anhydrid $C_8\ H_8\ O_8$ 't zelfde, dat verkregen wordt door 't zuur in vacuum bij 100° C te drogen.

Daar ik geen ander scheidingsmiddel van fumaar- en maleïnezuur vinden kon als $Cu\ CO_3$, is dit punt niet nader opgehelderd kunnen worden.

Resumé.

Uit dit experimenteel onderzoek volgt zonder twijfel, dat het een zuur is, beantwoordende aan de empirische samenstelling $C_4\ H_6\ O_5$, evenals 't gewone appelzuur. Het is echter een isomeer en wel om de volgende reden: Deze vallen 't best in 't oog, wanneer het Crassulaceënzuur met het lijsterbessen appelzuur vergeleken wordt.

	Lijsterbessenzuur.	*Crassulaceënzuur.*
I.	Kan in kristallen verkregen worden.	Kristalliseert niet.

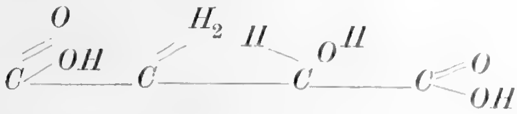
[1]) Academisch proefschrift.

II.	Geeft gemakkelijk een gekristalliseerd zuur *Ca*-zout. Kristalvorm zuur *Ca*-zout, rhombische-Octaëder.	Geeft zeer moeilijk een gekristalliseerd zuur *Ca*-zout. Kristalvorm zuur *Ca*-zout-Octaëder.
III.	Geeft een gemakkelijk kristalliseerend zuur ammoniumzout.	Geeft geen zuur ammoniumzout.
IV.	Gaat bij estrificatie zeer gemakkelijk over in fumaarzure ester (ANSCHÜTZ).	Geeft zeer gemakkelijk appelzure esters en wel twee verschillende, doch geen fumaarzure ester.
V.	Draait in verdunde oplossing 't polarisatievlak naar links.	Draait in verdunde oplossing naar rechts.
	Na indamping en oplossen in aceton behoudt het dezelfde draaiïng.	Na indamping en oplossen in aceton draait 't sterk naar links.
	De meeste zouten draaien rechts.	De zouten draaien links.
VI.	Het zuur vormt geen anhydriden.	Het zuur vormt twee anhydriden; op dezelfde wijze als melkzuur.
VII.	Bij droge destillatie ontstaat alleen fumaar- en maleïnezuur.	Bij droge destillatie ontstaat een kleine hoeveelheid fumaar- en maleïnezuur; het grootste deel destilleert onveranderd over; er wordt CO_2, aldehyd en CO gevormd.
VIII.	Het normale *Ca*-zout slaat bij koken kristallijn neer en lost bij afkoeling niet weer op.	Het normale *Ca*-zout slaat bij koken amorf neer, lost bij afkoeling gemakkelijk weer op.
IX.	Door reductie met HI wordt het in barnsteenzuur veranderd.	Door reductie met HI wordt het in barnsteenzuur veranderd.

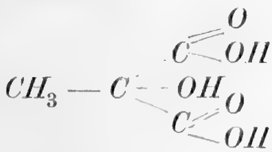
Theoretische beschouwing.

Uit het experimenteele gedeelte volgt, dat het zuur der Crassulaceën de empirische samenstelling $C_4\ H_6\ O_5$ bezit.

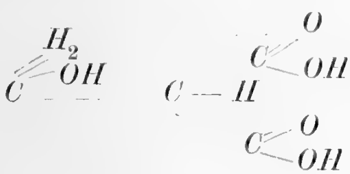
De atomen kunnen op drie verschillende wijzen worden verbonden.
1e de combinatie aangenomen voor 't gewone appelzuur



2e het α—isoappelzuur

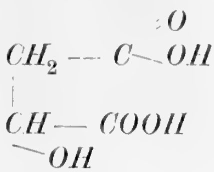


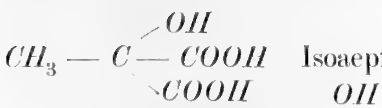
3e het β—isoappelzuur



Schmidt zegt over de structuur van 't zuur 't volgende;

„Wenn die untersuchte Säure wirklich als eine Aepfelsäure anzusprechen ist, wie man wohl veranlasst sein sollte aus der Zusammensetzung des Calciumsalzes und aus der Zusammensetzung des bezüglichen Silbersalzes zu vermuthen, so stimmt dieselbe mit keiner der bisher bekannten Aepfelsäuren der

 gew. Aepfelsäure, und

 Isoaepfelsäure überein.

Die dritte Aepfelsäure 

β — Isoaepfelsäure is bisher nicht bekannt.

Volgens de tegenwoordige beschouwing kan alleen de eerste combinatie in aanmerking komen, omdat alléén hierin een asymetrisch C-atoom voorkomt.

Van het gewone appelzuur waren drie isomeeren bekend:

nl. 't linksdraaiende lijsterbessen-appelzuur;

't daarmede correspondeerende rechtsdraaiende zuur van BREMER,

't inactieve zuur, dat in verscheiden gevallen gesplitst is in de twee voorgaande zuren.

Deze isomeeren zijn geheel in overeenstemming met de stereochemische voorstelling door v. 'T HOFF gegeven.

v. 'T HOFF en WISLICENUS nemen bij de verklaring van de isomeriën en van de verschillende veranderingen der koolstofverbindingen aan, ten eerste: dat de twee koolstofatomen bij enkelvoudige verbinding om de verbindingsas vrij roteeren kunnen; ten tweede, dat de groepen, waardoor de valentiés der C-atomen verzadigd zijn, op elkander nog een intramoleculaire werking uitoefenen.

We zouden kunnen spreken van elkander aantrekkende en afstootende groepen en elementen; hierdoor zouden de eersten zoo dicht mogelijk bij, de laatsten zoover mogelijk van elkander trachten te komen.

Het molecuul, waarin aan deze voorwaarde voldaan is, is de stabielste combinatie of zooals WISLICENUS zegt: de „bevorzugte configuration."

Door de intramoleculaire beweging sterk te vergrooten zal een draaiing om de verbindingsas van twee C-atomen verkregen kunnen worden, waardoor een minder stabiele verbinding of „ein weniger bevorzugte Lage" te voorschijn treedt. Wanneer de invloed, waardoor de draaiing ontstaan is, ophoudt, keert het molecule weer in zijn stabielen stand terug.

VICTOR MEYER meende, dat de veronderstelling van v. 'T HOFF en WISLICENUS omtrent de vrije rotatie niet altijd doorging.

Voor de verklaring der isomeere monoximen werd door hem een vaste stand van de C-atomen aangenomen [1]).

Ook A. BAYER [2]), AUWERS, V. MEYER [3]) en BETHMAN [4]) trekken de vrije rotatie om de verbindingsas der C-atomen in twijfel.

Voor de voorstanders der vrije rotatie leverde het appelzuur een mooi voorbeeld:

De meest begunstigde configuratie stelt volgens WISLICENUS fig. I

[1]) Later heeft V. MEYER een andere verklaring gegeven.

[2]) Ann. 258. 180.

[3]) Ber. 23. 2079.

[4]) Ztschr. f. Physik. Chem. 5, 408.

voor, omdat deze samenstelling bij verhitting op 150° C. uitsluitend fumaarzuur levert.

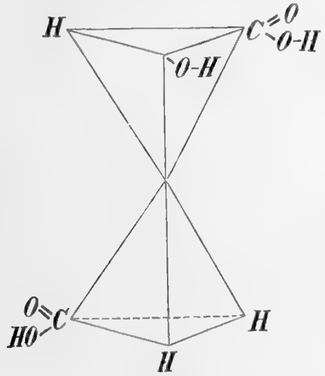


Fig. I.

Door plotselinge verhitting op 180° wordt de intramoleculaire beweging zoo groot, dat een deel der moleculen de minder begunstigde stand inneemt, waardoor naast fumaarzuur, ook maleïnezuur optreedt. Opmerkelijk is het, dat H. J. v. 'T HOFF bij lijsterbessenzuur eene rendement aan maleïnezuur van 23 °/$_0$ vindt, terwijl het inactieve appelzuur nooit meer dan ruim 2 °/$_0$ opleverde.

Behalve fig. II zou bij deze snelle verhitting evengoed de configuratie van fig. III kunnen ontstaan, waaruit geen onverzadigde verbinding kan gevormd worden. Ook fig. III is een minder begunstigde stand volgens WISLICENUS.

In de literatuur, die over de verhitting van 't appelzuur handelt, worden als ontledingsproducten alleen fumaar en maleïnezuur opgegeven. Ook bij de door mij voor dat doel opzettelijk verrichte proef kon ik alleen een mengsel van fumaar en maleïnezuur aantoonen.

Voor de verklaring van de feiten uit 't experimenteel gedeelte moet een keuze tusschen de drie configuraties gedaan worden. Fig. I en II leveren bij verhitting onverzadigde zuren, zoodat alleen fig. III overschiet.

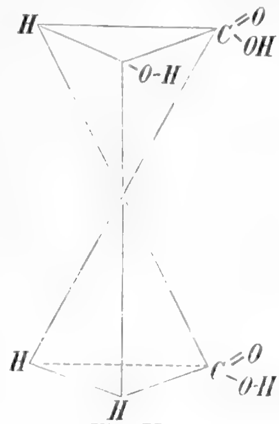


Fig. II.

Uit de beschouwingen van v. 'T HOFF en WISLICENUS volgt, dat mochten de configuraties II en III onstaan, ze door de intramoleculaire werkingen weer in den stabielsten vorm fig. I zouden overgaan, wanneer de oorzaak ophield, waardoor ze den minder gunstigen stand innamen. In alle geval in blijvenden toestand worden de fig. II en III niet voor mogelijk gehouden. Alleen onder bizondere omstandigheden, b.v. bij acetylappelzuuranhydrid werd de gespannen toestand van fig. II mogelijk geacht, omdat een draaiing niet kon plaats vinden door de verbinding van 't zuurstofatoom.

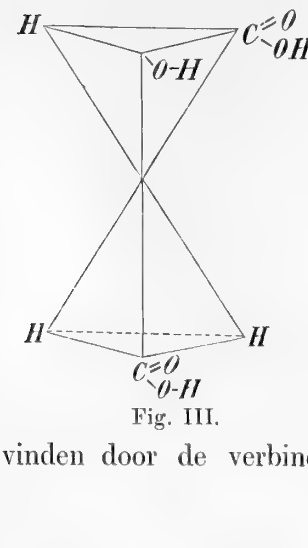


Fig. III.

Bij dezen stand kan de *OH*-groep niet als water uittreden onder vorming van een onverzadigde verbinding. Dit verklaart het feit, dat het Crassulaceënzuur destilleert en geen fumaar of maleïnezuur bij verhitting op 180° C. vormt.

Volgens deze voorstelling is er slechts één stabiele vorm. Het crassulaceën-appelzuur vertegenwoordigt een appelzuur, dat zeer stabiel is. Een verhitting op 180° en hooger gedurende verscheiden uren verandert het niet. Verhitting op 170° met water in een buis, brengt geen verandering te weeg. Een overgang van 't Crassulaceënzuur in 't gewone appelzuur heb ik niet positief kunnen aantoonen. Misschien is 't optreden van kleine hoeveelheden fumaar en maleïnezuur een aanwijzing; deze laatste zuren kunnen ook uit gewoon appelzuur ontstaan zijn.

Als noodzakelijk gevolg van deze stabiliteit volgt, dat, òf de vrije rotatie om de verbindingsas, òf de intramoleculaire werking der groepen niet bestaat, waardoor elk van de drie configuraties stabiel is, daar 't crassulaceënzuur niet voorgesteld kan worden door de als stabielste vorm beschouwde configuratie I, want dan moest het geheel in fumaarzuur overgaan.

De anhydrid-vorming bij langdurige verhitting wordt eveneens ongedwongen verklaard.

De stereochemische voorstellingen van zuur en anhydrid stellen fig. IV en V voor:

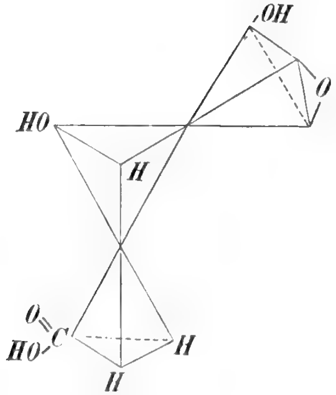


Fig. IV.

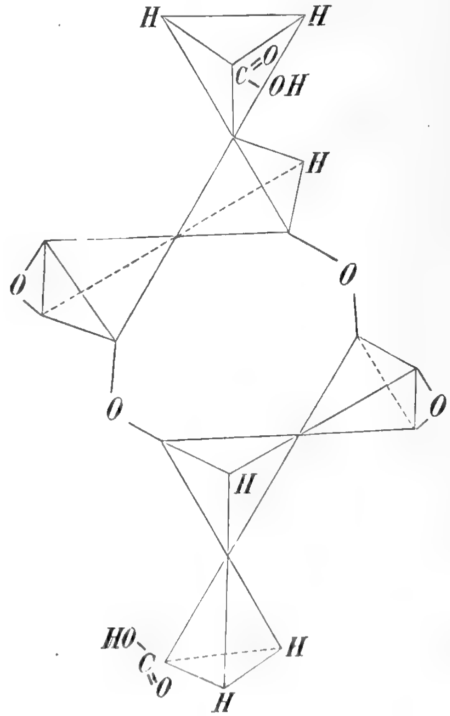


Fig. V.

Bij verhitting wordt er wel een anhidrid gevormd, doch zooals uit 't onderzoek op bladz. 6 en 25—27 blijkt, ontstaat er geen onverzadigde verbinding, er moet dus een anhydriseering tusschen de twee moleculen plaats hebben zooals fig. V voorstelt. Door wateropname gaat het anhydrid over in appelzuur, zie bladz. 24.

Het uittreden van water uit de twee hydroxylgroepen in één molecule zou een sterke spanning in 't molecule tengevolge hebben, zoodat dit niet mogelijk is. Uit twee moleculen, geplaatst als fig. V, kan zeer gemakkelijk water uittreden, zonder eenige spanning in 't molecule te doen ontstaan.

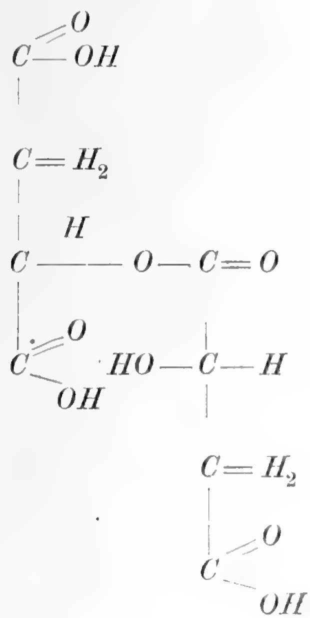
In de gevormde verbinding ontstaat een ring van vier *C*-atomen, op de helft verbonden door twee zuurstofatomen.

Dat de twee moleculen zóó verbonden zijn, dat de carboxylgroep van 't eene molecule de alkoholgroep van 't andere molecule estrificeert, blijkt ten eerste, uit de betrekkelijk gemakkelijke verzeeping.

Wanneer het een anhydriseering was tusschen de twee alkoholgroepen, zou die ether-verbinding veel moeilijker op te heffen zijn;

ten tweede zou dan bij verzeeping van de binding tusschen de twee carboxylgroepen een vierbasisch zuur ontstaan, terwijl slechts een zilverzout van een driebasisch zuur wordt verkregen.

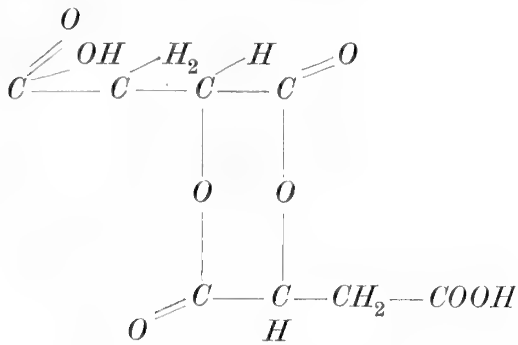
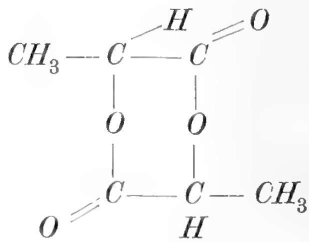
Dit zuur zal dus tot constitutie hebben:



Dat α-oxyzuren geen anhydriseering hebben in één molecule is een bekende zaak. Zoowel glycol- als melkzuur geven anhydriden door samenwerking van twee moleculen.

In veel opzichten zijn de veranderingen van 't crassulaceën appelzuur analoog aan die van het door WISLICENUS onderzochte *d*-melkzuur.

Uit de volgende tabel blijkt dit duidelijk.

Appelzuur.	*d-Melkzuur.*
Is in oplossing rechtsdraaiend.	Is in oplossing rechtsdraaiend.
Wordt bij concentreering linksdraaiend, door de vorming van een anhydrid uit twee moleculen zuur.	Wordt linksdraaiend bij concentreering door anhydrid-vorming uit twee moleculen zuur.
Bij langdurige verwarming verliest het twee moleculen water en gaat over in de verbinding $C_8\ H_8\ O_8$; 't malid	Bij verhitting gaat het over in 't laktid.
	
De zouten draaien links.	De zouten draaien links.

Bij de droge destillatie zal zonder twijfel 't malid overdestilleeren; dit kon echter niet geconstateerd worden, omdat de eenige scheiding van 't maleïne- en fumaarzuur door koken in water met $Cu\ CO_3$ kon plaats vinden. Hierdoor gaat het malid over in 't appelzuurkoper.

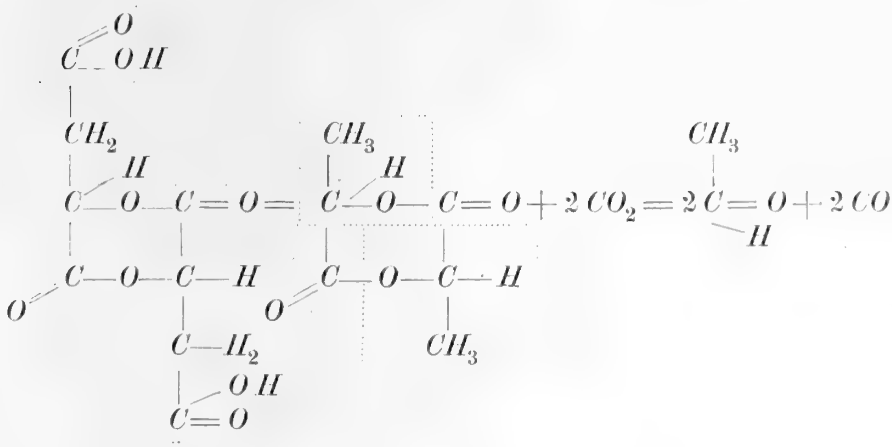
Het optreden van twee esters bij de aethyl en methylester-bereiding is gemakkelijk te verklaren door de gedeeltelijke verzeeping van het malid door het water, dat bij de estrificeering gevormd wordt.

Alle feiten in 't experimenteele gedeelte verkregen kunnen ongedwongen verklaard worden door de configuratie III voor 't Crassulaceën-zuur aan te nemen. De vrije draaiing om de verbindingsas der C-atomen moet verworpen worden, want er is geen enkele reden, waarom configuratie III dan niet onmiddellijk in I zou overgaan.

Alles blijft in 't molecule hetzelfde, alleen de relatieve stand van de groepen van 't eene C-atoom ten opzichte van die van 't andere maakt het verschil en door de vrije rotatie zouden die groepen steeds de meest begunstigde stand fig. I innemen.

De verandering in de draaiing van het polarisatievlak zou geheel in overeenstemming zijn met de theorie van GUYE; door de anhydriseering zal n.l. 't zwaartepunt van 't nieuwe molecule aan den anderen kant van 't symmetrie-vlak vallen en derhalve de draaiïng omkeeren.

Bij de droge destillatie ontstaat CO_2 en tevens een kleine hoeveelheid aldehyd en CO. Deze feiten zijn zoo te verklaren, dat een klein deel van 't gevormde malid, CO_2 afsplitst waardoor 't overgaat in 't laktid, en dat zij dit bij de hooge temperatuur uiteenvalt in CO en C_2H_4O.



Alles samennemende kom ik tot de volgende conclusie:

Het appelzuur kan voorkomen in drie stereoisomeere vormen. Hiervan zijn er twee bekend: 't lijsterbessenzuur en 't crassulaceënzuur. Het derde isomeer is nog niet verkregen, naar alle waarschijnlijkheid ontstaat het bij plotselinge verhitting van het lijsterbessenzuur. Onder deze omstandigheden verliest het onmiddellijk water en gaat over in maleïnezuur.

De appelzuren worden derhalve door de volgende configuraties voorgesteld.

Het lijsterbessenzuur door fig. I, 't onbekende zuur waaruit maleïnezuur ontstaat door fig. III, 't Crassulaceënzuur door fig. II.

Ter onderscheiding noem ik fig. I het α-zuur, fig. II 't β-zuur, fig. III 't γ-zuur. Het lijsterbessenzuur is dan l—α-appelzuur; het zuur van Bremer d—α-appelzuur en het crassuleënzuur d—β-appelzuur.

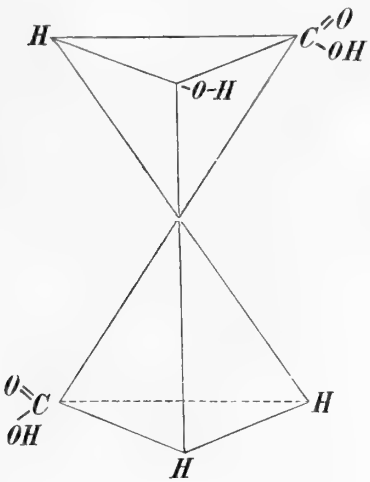


Fig. I.

α-appelzuur.

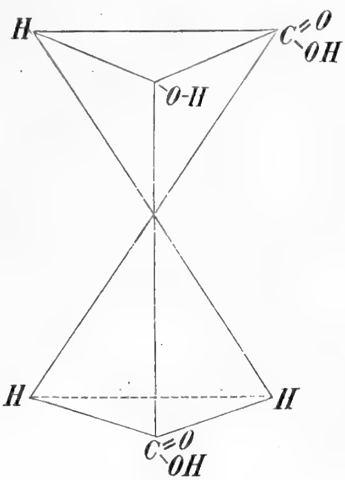


Fig. II.

β-appelzuur.

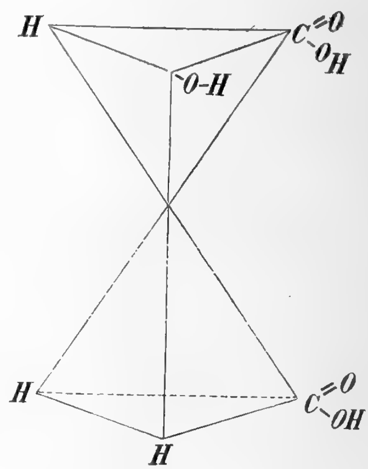


Fig. III.

γ-appelzuur.

Wageningen

Scheikundig Laboratorium der Rijkslandbouwschool

(18 Juni 1898).

Over peroxy-zwavelzuur zilver

(Vijfde Verhandeling),

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Dl. VI. N°. 5.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Augustus 1898.

Over peroxy-zwavelzuur zilver

(Vijfde Verhandeling),

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Dl. VI. N°. 5.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1898.

Over peroxy-zwavelzuur zilver.

DOOR

E. MULDER.

(*Vijfde Verhandeling*).

Zooals de studie van de verbinding verkregen door electrolyse van een waterige oplossing van salpeterzuur zilver, het bestaan waarschijnlijk maakte van een tot nog toe onbekend zuur der formule $NO_5\,H$ (dat meer of minder het bestaan insluit van een zuur $NO_4\,H$, te plaatsen tusschen $NO_5\,H$ en $NO_3\,H$), zou zeer wel de studie van het product van electrolyse van zwavelzuur zilver, een tot heden onbekend zuur kunnen doen kennen van *zwavel*. Want men kon er zich gemakkelijk van overtuigen, zelfs met eenige weinige centigr., dat de structuur dezer laatste stof analoog zal zijn met die van eerstgenoemd lichaam, dus ook zeer waarschijnlijk is een moleculaire verbinding van zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$) met een oxy-zwavelzuur zilver ($S\,O_4.\,z\,O.\,Ag_2$). Als zoodanig zou dit van belang zijn, en tevens, lettende op de voorname plaats, die de zwavel inneemt als technisch lichaam, en vooral niet te vergeten in het organische rijk (al is die rol betrekkelijk van minder ingrijpenden aard dan van de stikstof). Overigens is er sprake van een geheele *reeks* van verbindingen van zilverbioxyde met het zilverzout van oxy-zuren, dat het te behandelen onderwerp niet minder belangrijk maakt. Ook om die redenen is de studie dezer verbinding met veel zorg geschied.

Zoo zal onder anderen blijken, dat een geheel speciale inrichting is getroffen, ten einde het doel te kunnen bereiken, dat men zich voorstelde (en tevens in andere dergelijke gevallen). Maar alvorens over te gaan tot mededeeling van de uitkomsten, waartoe het onderzoek heeft geleid, wilde men aanvankelijk geven het weinige bekende omtrent dit lichaam verkregen bij een zeer voorloopige studie, welke blijkbaar niet toeliet deze te vervolgen, door de groote bezwaren, die zich voordeden bij de bereiding er van, te weten in een toestand van voldoende zuiverheid ter analyse. Deze bezwaren hebben als eerste oorzaak de betrekkelijk *geringe* oplosbaarheid van *zwavelzuur zilver* in water. Dit heeft al dadelijk ten gevolge een betrekkelijk gering geleidingsvermogen, en daardoor een mindere opbrengst van het lichaam waarvan sprake is; en nog andere zeer storende gevolgen (zie later in deze Verhandeling).

Na het geschiedkundig gedeelte te hebben behandeld, dat zeer arm is aan materie, zooals weldra zal blijken, wenschte men eerst een overzicht te geven der uitkomsten van de *voorloopige* studie, gevorderd voor de meer ernstige studie, die het voornaamste gedeelte uitmaakt dezer Verhandeling.

Geschiedkundig gedeelte der electrolyse eener waterige oplossing van zwavelzuur zilver ($S\,O_4\,Ag_2$). De electrolyse van zilvernitraat gaf als van zelf aanleiding tot die van zilversulfaat; en FISCHER [1]) was de eerste, die een proef deed in deze richting. Maar deze was in ieder opzicht een voorloopige proef, en op die wijze verricht, dat zij geen uitkomst van waarde zou kunnen opleveren (zie later). Salpeterzuur zilver ($NO_3\,Ag$) leverde reeds zóóveel bezwaar op (zie vroeger het geschiedkundig gedeelte dienaangaande), en dat, niettegenstaande zijn zeer groote oplosbaarheid in water te stade komt bij de electrolyse; en het is duidelijk, dat het zwavelzuur zilver ($S\,O_4\,Ag_2$) met zijn zeer begrensde oplosbaarheid, veel meer bezwaren aanbiedt. Gaan we maar eens na, met salpeterzuur zilver laat zich gemakkelijk vele grammen van het zwarte kristallijne lichaam bereiden door electrolyse; maar met zwavelzuur zilver is men al tevreden, bij den aanvang der studie, als men eenige centigr. van het product van electrolyse is machtig kunnen worden. Ook verkrijgt men in 't begin den indruk, dat een ernstige en doorgezette studie bijkans onuitvoerbaar zal zijn. FISCHER werd, naar 't schijnt, door deze eerste vluchtige proef dan ook afgeschrikt, omdat zij

[1]) J. f. pr. Ch. Bd. 32, S. 108 (1844); l. c. 33, S. 240, 242, 245 (1844).

weinig goeds beloofde; en dat mag tevens de oorzaak geweest zijn, dat dit onderwerp, van betrekkelijk veel gewicht, tot nog toe geen onderzoekers mocht vinden. Wat FISCHER toch met betrekking tot deze stof mededeelt, is van ondergeschikt belang, en weinig tevens, dat ons aanleiding geeft alles te zeggen, ook om hem alle recht te doen weêrvaren. Want, zooals later zal blijken, is hier sprake van een belangrijk onderwerp, daar een nieuw zuurstofhoudend zuur van zwavel een der uitkomsten kan uitmaken van het onderzoek, in ieder geval van groote waarde. FISCHER [1]) dan zegt (de uitkomst der zuiver voorbereidende proef gevende): „Sehr gering hingegen (te weten, vergelijkenderwijze met de electrolyse van zilvernitraat) war die Ausbeute beim Schwefelsauren Silberoxyd, da die gesättigte Auflösung nur $^1/_{150}$ des Salzes auflöst und das ausgeschiedene Superoxyd (zie een weinig later) sehr leicht in der freien Schwefelsaüre auflöslich ist". Blijkbaar wil FISCHER zeggen, dat het lichaam in questie ontleed wordt door verdund zwavelzuur. Gelijk later zal worden medegedeeld, moet men eên verzadigde oplossing van zwavelzuur zilver ontgaan, en zich tevreden stellen met een meer verdunde oplossing (ten minste bij een werken onder zekere omstandigheden), en hiervan is het gevolg, dat de bezwaren nog grooter worden.

Men zou, uit hetgeen door FISCHER wordt gezegd (zie boven), kunnen besluiten, dat naar hem het zwarte lichaam (aan de anode afgezet) een superoxyde is van zilver, en toch is dit zoo niet; want in dezelfde Verhandeling doet de schrijver opmerken: „Analog diesem (er was gehandeld over het zwarte product door electrolyse van zilvernitraat, volgens hem $Ag\ O.\ N\ O_5 + 4\ Ag\ O_2 + Aq_2$, of in de thans gebruikelijke waarden: $N\ O_3\ Ag + 2\ Ag_2\ O_2 + Aq$) ist wohl das Schwefelsaure Superoxyd zusammengesetzt, nämlich aus 1 Mgn. Schwefelsaurem Silberoxyd und 4 Mgn. superoxyd, was ich jedoch noch nicht untersucht habe, theils des geringen Quantität wegen, welche ich mich bis jetzt davon habe bereiten können, besonders aber der Wirkung des Wassers wegen, die es hier noch unsicherer als beim sulpetersauren macht, den Punct zu bestimmen, bis zu welchem das Aussüssen fortgesetzt werden müss".

Evenals bij de studie van het product van electrolyse met zilvernitraat, is FISCHER hier onder den invloed van een louter opgevatte meening, die niet door het experiment was gegeven. Het geldt hier de aanwezigheid van *vrij zwavelzuur*, dat het zwarte lichaam

[1]) l. c. S. 240.

(en dan nog onder zekere omstandigheden) doet ontleed worden; en water als zoodanig vervult hierbij wellicht een zeer ondergeschikte rol (zie de Verhandelingen over het electrolytisch product met zilvernitraat). Het wasschen van het product der electrolyse (met zwavelzuur zilver), levert volstrekt geen bezwaar op, naar 't schijnt; en is het lichaam gemaakt onder gunstige omstandigheden, dan blijkt niets van kleine gasbellen (zooals dit meer of minder het geval is met het product van electrolyse van zilvernitraat). Een product aldus gevormd, valt dadelijk op den bodem van het vat om daar te blijven, verondersteld altijd bij gewone temperatuur. Is verhit bijv. bij 60°—70° en daarna afgekoeld, ook dan doen zich geen gasbellen voor, wanneer het lichaam aanvankelijk ten deele was ontleed (wat betreft „de gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het oxy-zwavelzuur zilver).

Voorloopige studie.

Een voorbereidende studie werd bepaald vereischt, zoo vele waren de bezwaren, te overwinnen met betrekking tot de bereiding, vooral van een genoegzaam zuiver product. In de eerste plaats gold het de vraag, waarvan uit te gaan, namelijk wat de concentratie betreft. Een verzadigde oplossing van zwavelzuur zilver zou zeer wel hare schaduwzijde kunnen hebben; want stel, dat een deel van het (electrolytisch) gevormde lichaam wordt ontleed onder den invloed van het zwavelzuur (door electrolyse vrij gekomen), dan zou er veel kans wezen, aan het einde der bereiding te doen te hebben met een *mengsel* van het lichaam in questie en zwavelzuur zilver als zoodanig. Maar daartegenover staat, dat de oplosbaarheid van zwavelzuur zilver reeds zóó beperkt is (zie daaromtrent vroeger en ook later), dat men er zich toch eerst van wilde overtuigen, wat een verzadigde oplossing oplevert, inplaats van reeds dadelijk een stap te doen in de verkeerde richting, die misschien de bereiding er van onmogelijk zou maken in een hoeveelheid, noodig voor een nauwkeurige en uitgewerkte analyse. Daarom werd uitgegaan van een verzadigde oplossing van zwavelzuur zilver, gemaakt met koolzuur zilver en verdund zwavelzuur.

Toestel. Er werd gebruik gemaakt van dezelfde platinaschaal, en dezelfde electrische batterij, als bij de studie van het product van electrolyse met zilvernitraat. [1]) Bijgevolg werd uitgegaan van een groote hoeveelheid der oplossing van zwavelzuur zilver ter electrolyse en wel ongeveer van één liter; daarentegen was de stroom van zelf betrekkelijk zwakker (zie vroeger over de concentratie). Als *anode* werd evenzoo een platinadraad genomen (niet te dun), en geplaatst op den bodem van het kleine glazen schaaltje (ongeveer in 't midden; op zijn beurt ongeveer geplaatst in 't midden der groote platinaschaal (zie boven, eener capaciteit van ongeveer één liter), en als *kathode* diende de platinaschaal (in contact gebracht met de negatieve electrode door een stuk platinablik (betrekkelijk groot), en een platinadraad. In de voorloopige studie was 't geheel bijkans zóó ingericht als het geval was bij vorige proeven; nader evenwel zal een beschrijving worden gegeven van later aangebrachte veranderingen, gedaan om het voorgestelde doel te kunnen bereiken.

Eenige Tabellen, betrekking hebbende op de zelfontleding van peroxy-zwavelzuur zilver; voorloopige uitkomsten. Het zwarte product door electrolyse van zwavelzuur zilver verkregen, zal genoemd worden *peroxy-zwavelzuur zilver*, gelijk dat met salpeterzuur zilver werd geheeten (ook voorloopig) *peroxy-salpeterzuur zilver*. De gegevens in de volgende Tabellen, zijn in eenzelfden zin als die met betrekking tot het product van electrolyse van salpeterzuur zilver, vroeger medegedeeld. De producten evenwel, waarmede in den aanvang der studie werd gewerkt, zijn niet scheikundig zuiver.

In de Tabellen is in de eerste plaats opgegeven, of de bereiding geschiedde zonder of met neutralisatie (te weten met koolzuur zilver); tevens, of de oplossing van tijd tot tijd werd ververscht (dit wil zeggen, dat de oplossing, die werd gebruikt, uit de platinaschaal met een pipette werd verwijderd, terwijl vervolgens de oplossing uit het kleine glazen reservoir werd afgeschonken, en ten slotte het geheel met een versche oplossing gevuld). De thermo-electrische batterij bleef veelal achtereenvolgens in functie, dat wil zeggen dag en nacht. Bij een der bereidingen werd uitgegaan van een *grootere* hoeveelheid oplossing, en zulks, door het platina-reservoir te plaatsen in een porceleinen vat van grootere afmetingen, evenzoo gevuld met de oplossing van zwavelzuur zilver (met 't oog op het vrijkomen van zwavelzuur).

Aanvankelijk werd gewerkt met verzadigde oplossingen, maar later met een *halfverzadigde* oplossing van zwavelzuur zilver (dat

[1]) Zie Verh. d. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie). Deel III N° 8, pag. 5; l. c. Dl. V. N° 1, pag. 31.

wil zeggen, dat bij een oplossing, verzadigd bij gewone temperatuur, ongeveer een gelijke maat water werd gedaan). Onder *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* en *j* worden overeenkomstige gegevens medegedeeld, als het geval was b.v. in de tweede Verhandeling [1]). De stof werd eerst op een horlogeglas gedaan, en daarna in een reageerbuis, zooals dit tevens geschiedde met het peroxy-salpeterzuur zilver.

De neutralisatie, waarvan in dit geval (N° 1) sprake is, had plaats door een weinig koolzuur zilver te doen in het kleine glazen vat, en later de zwarte stof gescheiden door wasschen met water.

Product door electrolyse van zwavelzuur zilver in waterige oplossing, met neutralisatie, zonder verversching. Gemaakt in twee dagen (dag en nacht).

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 1.	verzadigde oplossing.	van 26 tot 28 Jan. 1897.	29 Jan.	0.8123 gr.			
			30 "	—	+ 0.0003 gr.		
			1 Febr.	—	— 0.0001 "		
			2 "	—	— 0.0001 "		
			3 "	—	— 0.0001 "		
			4 "	—	— 0.0003 "		
			5 "	—	+ 0.0001 "		
			8 "	—	0		
			10 "	0.8066 "	0	—	—
			24 "	—	—	— 0.0011 gr.	— 0.00066 gr.
			11 Maart	—	—	— 0.0006 "	— 0.00037 "
			25 "	—	—	— 0.0003 "	— 0 00018 "
			8 April	—	—	— 0.0003 "	— 0.00018 "

Overeenkomstig product, zonder neutralisatie, met verversching iederen dag der oplossing. Gemaakt in vier dagen (dag en nacht).

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 2.	verzadigde oplossing.	van 15—19 Febr. 1897	20 Febr.	1.0362 gr.	—		
			22 "	—	— 0.0002 gr.		
			23 "	—	— 0.0002 "		
			24 "	—	+ 0 0001 "		
			25 "	—	+ 0.0003 " (bij gevolg niet geheel constant)		
			25 "	1.024 "	—		
			11 Maart	—	—	— 0.0008 gr.	— 0.00039 gr.
			25 "	—	—	0	0
			8 April	—	—	— 0.0002 "	— 0.00009 gr.

[1]) Zie Verhand. d. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie). Dl. V, No. 1, pag. 14 (1896).

Overeenkomstig product, zonder neutralisatie, met een grootere hoeveelheid oplossing. Gemaakt in één dag (dag en nacht).

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 3.	verzadigde oplossing.	van 22—23 Febr. 1897	24 Febr.	1.273 gr.	—		
			25 „	—	+ 0.0003 gr. (bij gevolg niet geheel constant)		
			25 „	1.2636 „	—		
			11 Maart	—	—	— 0.0064 gr.	— 0.0025 gr.
			25 „	—	—	— 0.0067 „	— 0.0026 „
			8 April	—	—	— 0.0026 „	— 0.001 „

Overeenkomstig product, zonder neutralisatie, met ververscheing der oplossing. Gemaakt in vier dagen (dag en nacht).

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 4.	verzadigde oplossing.	van 15—19 Mrt. 1897	24 Maart	1.2405 gr.	—		
			22 „	—	— 0.0002 gr.		
			23 „	—	+ 0.0001 „		
			23 „	1.2341 „	—		

Overeenkomstig product, zonder neutralisatie, maar met ververscheing iederen dag van de oplossing. Gemaakt in vier dagen.

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 5.	verzadigde oplossing.	van 22—26 Maart.	27 Maart	0.8787 gr.	—		
			29 „	—	— 0.0001 gr.		
			30 „	—	0		
			30 „	0.8668 „	—		

Overeenkomstig product, zonder neutralisatie (in vier dagen).

c	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
N° 6.	verzadigde oplossing.	van 29 Mrt tot 2 April	3 April	1.1528 gr.			
			5 „	—	— 0.0002 gr.		
			6 „	—	— 0.0001 „		
			7 „	—	0		
			7 „	1.1436 „	-		
			14 „	1.1405 „	—	0.0031 gr.	0.0027 gr.

Analyse van Bereiding N°. 4 (zonder neutralisatie). Het product werd gemaakt onder ververseling der oplossing iederen dag, en gedurende vier opvolgende dagen (dag en nacht), terwijl de oplossing ongeveer was verzadigd. Na wasschen met water, werd de stof (gedaan in een reageerbuisje), gedroogd in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur) op een horlogeglas, en daarna overgebracht in een stofbuisje. Ter analyse werd uitgegaan van 1.2291 gr. stof. Hierbij werd water gevoegd, en onder verwarming van tijd tot tijd eenig salpeterzuur gedaan, tot de stof was opgelost, waarbij zuurstof vrijkwam. De oplossing werd neêrgeslagen met zoutzuur in geringe overmaat, en in het filtraat het zwavelzuur bepaald als zwavelzuur baryum. Dit gaf 1.141 gr. chloorzilver, overeenkomende met 0.8588 gr. zilver, en 0.861 gr. zwavelzuur baryum beantwoordende aan 0.1173 gr. zwavel. Dat maakt op 100 gew.-d. stof:

zilver	69.87
zwavel	9.54.

Veronderstelt men, dat het lichaam, waarvan sprake is, geen water bevat, dus geen waterstof, dan wordt voor de zuurstof gevonden: 100 — 69.87 — 9.54 = 100 — 79.41 = 20.59 gew.-d. En de samenstelling van Bereiding N°. 4 zou bijgevolg zijn op 100 gew.-d.:

zilver	69.87
zwavel	9.54
zuurstof	20.59
	100.

Maar daaraan beantwoordt bijkans de samenstelling van zwavelzuur zilver $S\,O_4\,Ag_2$ (zij $Ag = 107.66$; $S = 31.98$; $O = 14.96$),

zilver	69.2
zwavel	10.2
zuurstof	20.6
	100.

Hieruit volgt derhalve met een groote mate van waarschijnlijkheid, dat het product verre verwijderd is van zuiver te zijn, en in hoofdzaak bestaat uit zwavelzuur zilver ($S\,O_4\,Ag_2$) als zoodanig (dus niet als deel uitmakende der zwarte stof). En het is zeer wel mogelijk, dat de geringe hoeveelheid stof, die Fischer vermocht machtig te worden, grootendeels bestond uit zwavelzuur zilver, slechts, om zoo te zeggen, zwart gekleurd door de oorspronkelijke stof (zie overigens later over de wijze van ontleding).

Analyse van Bereiding N°. 6 zonder neutralisatie, door te verhitten met water. Er werd uitgegaan van 1.14 gr. stof (zie de Tabel voor N°. 6); maar daar het product had gestaan eenigen tijd en in gewicht was afgenomen, wordt dit 1.14 gr. + 0.0031 gr. = 1.1431 gr.. De electrolyse was verricht met een verzadigde oplossing van zwavelzuur zilver, en wel in vier dagen (dag en nacht). Er werd boven de open vlam verhit, terwijl de stof zich bevond met het water in een reageerbuisje; daarna werd afgeschonken, gefiltreerd door een klein filtrum (vooraf gewogen), en het filtraat ingedampt. Door deze bewerkingen te herhalen, werd achtereenvolgens gevonden:

		Te zamen.
1ste maal	0.3599 gr.	0.3599 gr.
2	0.4593	0.8192
3	0.1969	1.0161
4	0.0152	1.0313
5	0.002	1.0333
6	0.0018	1.0351
7	0.0018	1.0369
8	0.0019	1.0388
9	0.0018	1.0406.

Wat het filtrum betreft, dit werd met warm water gewasschen, de gefiltreerde vloeistof ingedampt in hetzelfde vat als boven, achtereenvolgens een vermeerdering gevende van:

		Te zamen.
1ste maal	0.0016 gr.	1.0422 gr.
2	0.0023	1.0445
3	0.001	1.0455
4	0.0009	1.0464
5	0.0015	1.0479
6	0.0011	1.049
7	0.0021	1.0511

		Te zamen.
8ste maal	0.0011 gr.	1.0522 gr.
9	0.0013	1.0535
10	0.001	1.0545

In de reageeerbuis bleef 0.0639 gr. en op het filtrum 0.0201 gr., dus te zamen: 0.0639 gr. + 0.0201 gr. = 0.084 gr., namelijk zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$). Dit maakt met 1.0545 gr. zwavelzuur zilver ($S\ O_4\ Ag_2$) de som van 1.1385 gr. bioxyde en zwavelzuur zilver, derhalve gevende een verschil in gewicht met de oorspronkelijke hoeveelheid stof van:

1.1431 gr.	stof
1.1385	zie boven
0.0046 gr.	

Dit verschil van 0.0046 gr. zou kunnen beantwoorden aan de zuurstof vrijgekomen uit $S\ O_4 .\ z\ O.\ Ag_2$, namelijk van oxy-zwavelzuur zilver. Overigens zal later blijken, dat het lichaam, waarvan sprake is, verre verwijderd is van zuiver te zijn.

Hetgeen terugbleef in het reageerbuisje werd behandeld met salpeterzuur, na aanvankelijk toevoeging van water, en verwarmd (de buis was geplaatst in een waterbad). Hierbij komt zuurstof vrij, en salpeterzuur zilver treedt in oplossing. Bij neêrslaan met verdund zoutzuur werd verkregen 0.0739 gr. chloorzilver ($Cl\ Ag$), en zulks van 0.0639 gr. superoxyde (zie boven), beantwoordende aan 0.05562 gr. zilver of 87.04 proc.. Bijgevolg is de uitkomst deze:

	gevonden:	$Ag_2\ O_2$ vordert:
zilver	87.04	87.09
zuurstof	12.96	12.91
(indirect bepaald).		
	100.	100.

Zooals blijkt, is dit lichaam zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$). Het filtraat van chloorzilver (zie boven), gaf geen neêrslag met baryumchloride, waaruit de afwezigheid volgt van zwavelzuur, of anders gezegd, heeft men hierin een contrôle voor de zuiverheid van het zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$).

Gedeeltelijke analyse van Bereiding N° 7 (gemaakt zonder neutralisatie), door verhitting in de V-buis van den toestel (zie de vorige Verhandelingen). De hoeveelheid stof bedroeg 0.6091 gr. (gedroogd in de V-buis, onder een vacuum-exsiccator), gemaakt door één dag van electrolyse (dag en nacht). In de volgende Tabel is gegeven onder:

a het aantal dagen;
b de temperatuur tot welke werd verhit;
c de vermindering in gewicht der V-buis;
d de toename in gewicht der twee buizen met calciumchloride, rechts (*d*) en links (*e*) van de V-buis geplaatst.

Een zeer langzame stroom van droge lucht ging door den toestel, zijnde van links naar rechts (zich plaatsende vóór den toestel, terwijl de gashouder links is geplaatst).

a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	100°	0.01 gr.	0.0005 gr.	0.0005 gr.
2	200	0.0094	0.0014	0.0006
3	210	0.0005	0.0005	0
4	220	0.0009	0.001	0.0006
5	230	—0.0002	0.0014	0.0003

Analyse van Bereiding N° 8, met neutralisatie. Van de oplossing nabij de *anode* werd gedurende de electrolyse van tijd tot tijd (ongeveer met dezelfde snelheid wat de hoeveelheid betreft), gebracht op een filtrum, bevattende koolzuur zilver, en de geneutraliseerde en gefiltreerde vloeistof in het reservoir gedaan bij de *kathode*, en dat twee uur achtereenvolgens. Het product van electrolyse werd gebracht in een reageerbuisje, daarin gewasschen met water, totdat geen zilverzout meer aanwezig was, en vervolgens de buis geplaatst in een vacuum-exsiccator. De hoeveelheid stof bedroeg 0.0332 gr. (er was uitgegaan van een half verzadigde oplossing). Er werd water toegevoegd, verhit boven de open vlam, men liet afzetten (ongeveer een uur); er werd gefiltreerd op een klein filtrum (vooraf gewogen), en tweemaal gewasschen met warm water (telken male). Het filtraat werd ingedampt, en het terugblijvende gewogen. Deze bewerkingen werden herhaald, totdat het gewicht nagenoeg niet meer veranderde, zijnde dit achtereenvolgens:

		te zamen
1^ste^ dag	0.0113 gr.	0.0113 gr.
2	0.0011	0.0124
3	0.0012	0.0136
4	0.0004	0.014
5	0	0.014
6	0.0002	0.0142.

De massa was gekleurd; zie later. Hetgeen op het kleine filtrum terugbleef, liet zich niet quantitief bepalen, zóó gering als dit was. In de reageerbuis bleef 0.0179 gr. terug, namelijk aan zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$). Bij het gekleurde zwavelzuur zilver (zij dit 0.0142 gr., zie boven), werd water gedaan, verhit, een weinig salpeterzuur toegevoegd en ingedampt. Aangezien de massa nog een weinig gekleurd was, werden deze bewerkingen herhaald, tot de ontkleuring volkomen was. De waterige oplossing werd neêrgeslagen met zoutzuur, en zwavelzuur bepaald in het filtraat met baryumchoride. Er werd 0.0101 gr. gevonden aan baryumsulfaat (beantwoordende aan 0.0001376 gr. zwavel), overeenkomende met 0.0134 gr. zwavelzuur zilver ($S\,O_4\ Ag_2$). Langs directen weg was voor zwavelzuur zilver gevonden 0.0142 gr. (zie boven), hetwelk dus een verschil geeft van 0.0142 gr. — 0.0134 gr. = 0.0008 gr., dat de kleine hoeveelheid zilverbioxyde wellicht zou kunnen vertegenwoordigen in oplossing getreden. De zilverbepaling leidde tot 0.0123 gr. chloorzilver, bevattende 0.00925 gr. zilver (in deze bepaling is misschien een fout gekomen; zie later). Het is overigens duidelijk, dat deze voorloopige gegevens ons den te volgen weg moeten doen kennen, en slechts ten deele ten doel hebben den weg te leeren kennen, die is gevolgd. Neemt men 0.0134 gr. zwavelzuur zilver als uitdrukkende de hoeveelheid van dit zout, dan geeft dit een verschil met de oorspronkelijke hoeveelheid stof van:

stof	0.0332 gr.
zwavelzuur zilver	0.0142
	0.019 gr..

dat dus (namelijk 0.019 gr.) gelijk moet zijn aan de som van zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$) en „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver (zij dit $S\ O_4 .\ z\ O.\ Ag_2$). In de reageerbuis bleef 0.0171 gr. zilverbioxyde, waarbij dan te voegen zou zijn 0.0008 gr. (zie vroeger), te zamen uitmakende de som van 0.0171 gr. + 0.0008 gr. = 0.0179 gr. zilverbioxyde. Hieruit zou dan volgen, dat voor „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver ($S\ O_4 .\ z\ O.\ Ag_2$) overblijft:

bioxyde + gezegde zuurstof	0.019 gr.
bioxyde	0.0179
gezegde zuurstof	0.0011 gr.

En derhalve zou de samenstelling wezen van het product van electrolyse van zwaxelzuur zilver naar deze gegevens:

zilverbioxyde	0.0179 gr.
gemakkelijk vrijkomende zuurstof	0.0011
zwavelzuur zilver	0.0142
	0.0332 gr.

Hetgeen hieronder volgt, is veeleer gegeven met 't oog op de gevolgde wijze van berekenen, om daarop later te verwijzen. B.v. wordt gevonden voor de verhouding van zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ en de $z\ O$ van $S\ O_4\ Ag_2$ (zijnde $Ag_2\ O_2 = 247.24$ en $O = 15.96$):

bioxyde		zuurstof
0.0179 : 247.24	=	0.0011 : x

alzoo $x = 15.2$, of anders gezegd, op 1 $Ag_2\ O_2$ ongeveer 1 O betrekking hebbende op de $z\ O$ van $S\ O_4 .\ z\ O.\ Ag_2$ (zij: $x\ Ag_2\ O_2 .\ y\ (S\ O_4 .\ z\ O.\ Ag_2)$. En veronderstellende, dat de verhouding van bioxyde en zwavelzuur zilver ($S\ O_4\ Ag_2 = 311.14$) die is van 2 $Ag_2\ O_2$ en $S\ O_4\ Ag_2$, wordt gevonden:

gevonden:	theorie:
$\frac{0.0179}{0.0142} = 1.2$	$\frac{494.48}{311.14} = 1.5$,

dat zou kunnen doen denken aan de formule voor het product van electrolyse, zijnde deze: $2\, Ag_2\, O_2 .\, S\, O_4 .\, 2\, O .\, Ag_2$. De zuurstof is evenwel te laag voor $2\, O$, als deze te hoog is voor $1\, O$ $(0.0142 : 311.14 = 0.0011 : x;\ x = 25.43;$ en $2\, O = 31.92)$. Maar de hoeveelheid stof laat niet toe, in gemelde uitkomsten het noodige vertrouwen te stellen. Daarbij komt, dat de kans al zeer gering is, van een zuiver product in handen te hebben (zie later). De verkregen uitkomsten zijn evenwel niet zonder beteekenis, zooals later zal blijken; het beoogde doel kan ook alleen „langzamerhand" worden bereikt. Laat nog worden opgemerkt, dat werd verondersteld aanwezig te zijn $S\, O_4\, Ag_2$ (en $Ag_2\, O_2$); dit zou b. v. kunnen zijn $S\, O_5\, Ag_2$.

Over een toestel ingericht met het doel, de oplossing te neutraliseeren (dag en nacht) gedurende de electrolyse. Zooals meer of min uit het medegedeelde volgt, is het genoegzaam onmogelijk of eenvoudig onmogelijk, om zich een voldoende zuiver product te verschaffen, tenzij de oplossing gedurende de electrolyse worde geneutraliseerd, ten minste van tijd tot tijd. Maar het is duidelijk, dat een permanent neutraliseeren is te verkiezen. En dat te meer, omdat de opbrengst zeer beperkt is, zijnde ongeveer 0.03 gr. in twee uur (met een halfverzadigde oplossing), terwijl de thermo-electrische batterij dag en nacht kan werken. Wilde men de oplossing neutraliseeren zonder een toestel tot dit doel ingericht, dan zou men b. v. een deel der oplossing moeten pipetteeren gedurende de electrolyse, vervolgens filtreeren door zilvercarbonaat ($C\, O_3\, Ag_2$), en dat bij herhaling, b. v. ieder uur. Nu heeft men minstens noodig een electrolyse van 24 uur of één dag (dag en nacht) of zelfs van vijf dagen en meer, zal men over een voldoende hoeveelheid stof kunnen beschikken, die tevens genoegzaam zuiver is. De electrolyse moet dus dag en nacht aanhouden, en zoo ook het neutraliseeren der zuur geworden oplossing. En daartoe is een toestel ingericht, beantwoordende aan het volgende, dat:

1°. de oplossing, die zuur is geworden door electrolyse, kan worden geneutraliseerd door namelijk te gaan door een filtrum met *koolzuur zilver*, om

2°. terug te keeren in de groote platinaschaal.

Maar de oplossing zou dezen kringloop niet kunnen volbrengen zonder arbeid te verrichten, en een motor brengt een kleine pomp in beweging, die voortdurend een deel der oplossing opvoert (zie hieronder alles meer uitvoerig beschreven).

Beschrijving van den toestel. De twee hoofddeelen zijn: een schroef van Archimedes en een motor.

a. Schroef van Archimedes. In plaats van een gewone pomp, vond men het beter, om zich te bedienen van een kleine schroef van Archimedes, ten einde zoo weinig wrijving mogelijk te hebben, dat in het onderhavige geval een zaak is van belang. Nu moet nagenoeg alles van glas zijn, en daarom is aan de schroef de vorm gegeven van een spiraalvormig omgebogen buis (aldus ingericht door den Heer J. A. Harting, instrumentmaker te Utrecht). De schroef is zóó geplaatst, dat de hoek van helling (binnen zekere grenzen) kan worden geregeld, om den arbeid (in de tijdseenheid) tot een minimum te herleiden. De schroef bevindt zich aan het eene einde nabij de anode, dus vooral dáár, waar zich zwavelzuur ophoopt; en betrekkelijk digt bij den bodem van het kleine glazen vat (waarin de zwarte stof wordt afgezet), terwijl dit is geplaatst nagenoeg in 't midden van de groote platinaschaal (zijnde beiden gevuld met de oplossing ter electrolyse).

b. De motor. Aangezien deze motor dag en nacht moet werken, en men zooveel mogelijk eenig ongeval wenschte te vermijden, dat zich zou kunnen voordoen door zich te bedienen van een gasmotor, of een motor door water of electriciteit enz. in werking gesteld, als bronnen tot levende kracht, werd hiervoor genomen een *uurwerk*. De inrichting tot dit doeleinde was overigens niet zoo eenvoudig als men wellicht veronderstelt, en vorderde overwegingen van verschillenden aard en langen duur. De uitslag was, dat het uurwerk in beweging wordt gebracht door een gewicht van 50 Kilogr., langs een weg van ongeveer 5 Meter (bestaande uit een houten koker, gaande van de werkzaal naar den kelder van het Laboratorium). De motor kan zonder afbreking langer dan 24 uur werken, terwijl in 2 uur ongeveer 1 liter oplossing wordt opgevoerd (voor een deel overigens afhankelijk van den hoek van helling der schroef van Archimedes). Het gewicht moet dus b. v. iederen dag worden opgewonden, daar de bereiding eenige dagen vereischt, terwijl een stalen draad wordt gerold op den cylinder van het uurwerk. De snelheid is overigens te regelen met windvleugels, zóódanig, dat deze ongeveer het dubbele kan bedragen, wat betreft minimum en maximum.

c. Het filtreeren door koolzuur zilver. De vloeistof, door electrolyse zuur geworden, wordt dan, zooals gezegd, met de schroef van Archimedes opgepompt, waarna zij komt te vallen in een filtrum, bevattende koolzuur zilver, over het filtrum goed verdeeld. Ook worden aanvankelijk drie dunne glazen staafjes geplaatst op den trechter, met het doel, den weêrstand bij het filtreeren voor een deel op te heffen, daar het filtrum dan rust op die glazen staafjes, dus niet geplakt zit op den trechter. Het is duidelijk, dat de snelheid van filtreeren iets grooter moet zijn dan die, waarmede de oplossing op het filtrum wordt gebracht door de schroef van Archimedes.

Het filtraat wordt geleid door een glazen buis (gesmolten aan den trechter) in de platinaschaal, en wel nabij den wand of de kathode (zie over dit punt later).

d. De oorspronkelijke oplossing is ongeveer half verzadigd, en wel, om zooveel mogelijk te ontgaan de aanwezigheid als zoodanig van zwavelzuur zilver ($S\,O_4\,Ag_2$) in het product, waarvan sprake is.

Als *kathode* doet dienst de platinaschaal, en als *anode* een platinadraad, die betrekkelijk dun is, gelijk in de proeven der electrolyse van zilvernitraat. Ook werd van dezelfde thermo-electrische batterij gebruik gemaakt.

Analysen van Bereidingen met den neutralisatie-toestel, zoo even beschreven. Over Bereiding N°. 9 (de eerste dezer categorie). De toestel werkte ongeveer 24 uur (achtereenvolgens, als gezegd). De zwarte stof werd driemaal gewasschen in het kleine glazen schaaltje (bij de bereiding geplaatst nabij de anode), daarna met water overgebracht in een reageerbuis, en daarin verder gewasschen, tot zilvernitraat in de oplossing niet meer werd aangetroffen. De reageerbuis werd vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur). Daarna werd gewogen, en de bewerking herhaald tot het gewicht constant was, terwijl telkenmale in den exsiccator droge lucht werd toegelaten. Er was in de reageerbuis een hoeveelheid zwarte stof, bedragende 0.2342 gr. (een deel gaat, vooral bij wasschen, verloren). Er werd eenig *water* toegevoegd, daarna geplaatst in een glazen vat met water (en thermometer), terwijl de temperatuur gedurende ongeveer twee uur werd gehouden op 55°—65°. Zuurstof kwam vrij, en wel vooral het eerste uur van verwarming, om na die twee uur bijkans geheel te eindigen. Men liet vervolgens de buis afkoelen in hetzelfde bad, waarin zij was geplaatst, filtreerde den volgenden dag door een klein filtrum (vooraf gewogen), om dit daarna te wasschen, en vervolgens het filtraat in een gewogen vat op een waterbad te doen indampen. Er werd opnieuw water gedaan in de reageerbuis en aanvankelijk verhit bij 70°—80°, maar zonder dat er gas vrijkwam. Men zou er uit kunnen besluiten, dat peroxy-zwavelzuur zilver zijn „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" wat spoediger verliest dan het geval is met peroxy-salpeterzuur zilver (zie de voorgaande Verhandeling), maar dit besluit zou voorbarig zijn (zie later). Men liet de massa bekoelen, zooals de eerste maal, om daarna te filtreeren en het filtraat te doen verdampen, en zoo vervolgens, totdat de hoeveelheid zwavelzuur zilver niet noemenswaardig meer veranderde. De hoeveelheid bedroeg achtereenvolgens:

	zwavelzuur zilver.	te zamen.
1ste maal	0.0427 gr.	0.0427 gr.
2	0.0259	0.0686
3	0.01	0.0786
4	0.0015	0.0801
5	0.0011	0.0812
6	0.0008	0.082
7	0.0005	0.0825
8	0.0014	0.0839
9	0.0015	0.0854
10	0.001	0.0864
11	0.0006	0.087
12	0.0011	0.0881
13	0.001	0.0891

Het terugblijvende was de eerste dagen genoegzaam kleurloos (bij behandeling der massa met water en indamping), maar later werd de massa meer en meer gekleurd. Men veronderstelt, dat een weinig zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$) wordt opgelost (zie de vorige Verhandeling over dit onderwerp), ingeval namelijk geen dissociatie intreedt van dit oxyde en niet ontstaat zilveroxyde ($Ag_2\,O$).

In de reageerbuis bleef terug (na staan onder een vacuum-exsiccator) 0.1354 gr. zilverbioxyde ($Ag_2\,O_2$), en op het kleine filtrum bevond zich 0.0007 gr., dat te zamen maakt 0.1354 gr. + 0.0007 = 0.1361 gr. zilverbioxyde. Bij gevolg bedraagt de som aan bioxyde en zwavelzuur zilver:

zilverbioxyde	0.1361	gr.
zwavelzuur zilver	0.0891	
	0.2252	gr.

zijnde de som van $x\,Ag_2\,O_2 + y\,S\,O_4\,Ag_2$ van het product van electrolyse, dat is voor te stellen door de formule: $x\,Ag_2\,O_2$, $y\,(S\,O_4.\ z\,O.\ Ag_2)$. En door het verschil te nemen van deze hoeveelheid en die der oorspronkelijke stof:

0.2342	gr.	der stof aanvankelijk
0.2252		zilverbioxyde + zwavelzuur zilver
0.009	gr.	

moet dit naar de gegeven formule de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" voorstellen (zij dit 3.84 p.c.) van het oxyzwavelzuur zilver: $S\,O_4.\ z\,O.\ Ag_2$, verondersteld altijd, dat water geen bestanddeel uitmaakt van de oorspronkelijke stof (namelijk van het peroxy-zwavelzuur zilver); zie later.

Het is duidelijk, dat de som van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver met genoemde zuurstof zamen uitmaken de oorspronkelijke stof, namelijk: $x\,Ag_2\,O_2.\ y\,(S\,O_4.\ z\,O.\ Ag_2)$. Alleen zou de aanwezigheid van water leiden tot een ander besluit, en wel in de eerste plaats met betrekking tot de waarde van den coëfficient z, van $z\,O$. Om de ontstane produkten zooveel mogelijk te volgen, werd de hoeveelheid van 0.0891 gr. (zie vroeger) met *water* behandeld *bij gewone temperatuur*, ten einde zoo weinig mogelijk zilverbioxyde op te lossen, en dientengevolge de bepaling van zwavelzuur zilver nauwkeuriger te doen zijn. Achtereenvolgens werd thans gevonden:

	zwavelzuur zilver.	te zamen.
1ste maal	0.0854 gr.	0.0854 gr.
2	0.003	0.0884
3	0.0004	0.0888
4	0	0.0888

De massa vertoonde hier en daar zwarte stippen, maar meer niet, wel als gevolg der aanwezigheid van zilverbioxyde, in oplossing getreden, en dat vooral, toen er weinig zwavelzuur zilver in oplossing kwam; daardoor was de massa aanvankelijk om zoo te zeggen, kleurloos. Er is verondersteld, dat het zilverbioxyde niet ten deele was omgezet in monoxyde $Ag_2\ O$, dat trouwens eerst zou kunnen blijken door een bijzondere studie in dien zin. Maar, zooals men ziet, is het verschil zeer gering, namelijk bedraagt dit 0.0891 gr. — 0.0888 gr. = 0.0003 gr. en dit verschil zou ten deele een verklaring kunnen vinden in de geringe hoeveelheid aan een zwarte stof (zij deze 0.0006 gr.), die hechtte aan den wand van het vat, en door water bij gewone temperatuur niet was te verwijderen (zie een weinig vroeger).

Ten einde de ontledingsprodukten nog meer te volgen, werd gezegde massa van zwavelzuur zilver behandeld met zeer verdund salpeterzuur (aanvankelijk werd water bijgedaan, en vervolgens een weinig van dit zuur), en op een waterbad ingedampt. Er bleef thans terug 0.0897 gr., dus een verschil gevende van 0.0009 gr. en de bewerking herhalende, werd gevonden 0.0898 gr., of een verschil van slechts 0.0001 gr..

Na oxydatie van de geringe hoeveelheid zwarte stof die aan den wand hechtte, namelijk die van 0.0006 gr., met verdund salpeterzuur, bleef na verdampen terug 0.0009 gr. en de bewerking herhalende 0.001 gr., dat noodwendig salpeterzuur zilver was. Het eerste verschil boven gegeven, zij dit van 0.0009 gr. + 0.0001 gr. = 0.001 gr., heeft betrekking op de omzetting van zilver-bioxyde (mogelijk is het lichaam $Ag_2\ O$) in zilvernitraat ($2\ NO_3\ Ag$). De natuur der zwarte stof die hechtte aan den wand, namelijk in hoeveelheid bedragende 0.0006 gr., is onbekend.

Om zich eenig denkbeeld te vormen met betrekking tot de samenstelling van het zwarte product van electrolyse, namelijk van het peroxy-zwavelzuur zilver, kan men beginnen met aan te nemen, dat:

0.2342 gr.	oorspronkelijke stof
0.009	„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het $SO_4.\ zO\ Ag_2$.
0.2252 gr.	zilverbioxyde + zwavelzuur zilver (verondersteld afwezigheid van $SO_5\ Ag_2$, enz.).

Neemt men 0.0888 gr. voor het *zwavelzuur zilver* (dat, alhoewel zeer weinig, iets te hoog zal zijn), dan wordt verkregen voor *zilverbioxyde* 0.2252 gr. — 0.0888 gr. = 0.1364 gr. (dat dus een weinig te laag zal zijn). Bij berekening der verhouding van zwavelzuur zilver en de zO van $SO_4.\ zO.\ Ag_2$, wordt gevonden ($SO_4\ Ag_2$ = 311.14):

0.0888 : 311.14 = 0.009 : x; voor $x = 31.53$, terwijl 15,96 $\times$ 2 = 31.92 (O = 15.96). Of hetzelfde verrichtende met betrekking tot zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2 = 247.24$) heeft men 0.1364 : 247.24 = 0.009 : x; zijnde $x = 16.31$ (inplaats van 15.96). Dus zouden er zijn 2 O op $SO_4\ Ag_2$, en derhalve het oxy-zwavelzuur zilver zijn $SO_4 .\ 2\ O.\ Ag_2$; en er zou wezen 1 O op $Ag_2\ O_2$, namelijk gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver ($SO_4 .\ 2\ O.\ Ag_2$), zoodat de formule van peroxy-zwavelzuur zilver ($x\ Ag_2\ O_2, y\ (S\ O_4\ zO.\ Ag_2)$ zou zijn $2\ Ag_2\ O_2 .\ SO_4 .\ 2\ O.\ Ag_2$ (want 1 O op $Ag_2\ O_2$ maakt $2\ Ag_2\ O_2$ voor 2 O). Dit komt overeen met het quotient, dat ontstaat bij deeling van de hoeveelheid zilverbioxyde door die van zwavelzuur zilver zij dit:

$$\frac{0.1364}{0.0888} = 1.55, \text{ terwijl de verhouding:}$$

$$\frac{2 \times 247.24}{311.14} = 1.59 \text{ is } (SO_4\ Ag_2 = 311.14;\ Ag_2\ O_2 = 247.24).$$

Overigens zal later blijken, dat de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" grooter is dan in het geval, hetwelk ons bezighoudt.

Tevens zullen de uitkomsten worden gegeven der analyse van *Bereiding* $N°$ 10, alhoewel van minder beteekenis, en dat wel, ten einde den weg te leeren kennen, die moet worden gevolgd, zal men een meer zuiver product bekomen. En toch werd onder genoegzaam dezelfde omstandigheden gewerkt. Zoo werd uitgegaan van een half-verzadigde oplossing; de oplossing werd op dezelfde manier geneutraliseerd, enz. De duur der bereiding was die van één dag (dag en nacht), en achtereenvolgens; maar dat nam niet weg, dat de neutralisatie te wenschen overliet, zoodat men dit in een volgende bereiding trachtte te verbeteren. Het product werd overigens op dezelfde wijze gewasschen enz. De hoeveelheid bedroeg die van 0.2186 gr., zich bevindende in een reageerbuisje. Water werd toegevoegd, aanvankelijk verhit bij 45°, daarna bij 55°—65°, en eindelijk bij 70°—80°, bij welke temperatuur geen zuurstof meer vrijkwam, zijnde alles te zamen ongeveer twee uur. Er bleef terug 0.2124 gr. aan stof (mengsel), dit geeft voor de zuurstof van het $SO_4 .\ zO.\ Ag_2$: 0.2186 gr. — 0.2124 gr. = 0.0062 gr. (altijd verondersteld, dat de oorspronkelijke stof geen water bevat), dus minder dan in Bereiding N° 9.

De hoeveelheid van 0.2124 gr., te beschouwen als een mengsel van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver (zie vroeger), werd behandeld met water, verhit op een waterbad, en eenig salpeterzuur toegevoegd (de reageerbuis is, als naar gewoonte voorzien van een trechtertje aan het einde toegesmolten). Er komt zuurstof vrij, en ten slotte wordt de buis geplaatst in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en ongebluschte kalk); bleef terug 0.2666 gr., namelijk van een mengsel van *zilvernitraat* en *zwavelzuur zilver*. Het is duidelijk, dat de hoeveelheid zwavelzuur zilver dezelfde moet wezen in 0.2666 gr. als in 0.2124 gr. (zie vroeger), omdat aanvankelijk alleen zuurstof was vrij gemaakt van $SO_4 . zO . Ag_2$ (er wordt ondersteld, dat $SO_4 . zO . Ag_2$ wordt ontleed tot $SO_4 Ag_2$), dus heeft men:

0.2666 gr.	zwavelzuur zilver + salpeterzuur zilver
0.2124	zwavelzuur zilver + zilverbioxyde
0.0542 gr.	als verschil ten gevolge der omzetting van

zilverbioxyde in *salpeterzuur zilver*. Hieruit nu laat zich berekenen de hoeveelheid zilverbioxyde, want men heeft de vergelijking:

$$Ag_2\,O_2 + 2\,NO_3\,H = 2\,NO_3\,Ag + H_2\,O + O,$$

en bij gevolg:

$$2\,N\,O_3\,Ag - Ag_2\,O_2 = 2 \times 169.55 - 247.24 = 339.1 - 247.24 = 91.86$$

en in ons geval:

$$\begin{array}{c} \text{verschil} \qquad\qquad \text{zilverbioxyde} \\ 91.86 : 0.0542 = 247.24 : x, \end{array}$$

dat geeft $x = 0.1458$ gr. voor het zilverbioxyde aanwezig in het mengsel van 0.2124 gr., zoodat de hoeveelheid zwavelzuur zilver bedraagt 0.2124 gr. — 0.1458 gr. = 0.0666 gr. of:

0.1458 gr.	zilverbioxyde
0.0666	zwavelzuur zilver
0.2124 gr.	

En de samenstelling in haar geheel zou dan zijn:

0.1458 gr.	zilverbioxyde
0.0666	zwavelzuur zilver
0.0062	„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"
0.2186 gr.	der oorspronkelijke stof.

Maar het gehalte aan zilverbioxyde is tevens langs een meer directen weg bepaald, door bepaling van zilvernitraat (en van het zwavelzuur zilver) van gezegd mengsel, het behandelende met abs. alcohol, dat achtereenvolgens gaf:

	salpeterzuur zilver.	te zamen.
1ste maal	0.089 gr.	0.089 gr.
2	0.0597	0.1487
3	0.0401	0.1888
4	0.0041	0.1929
5	0.0002	0.1931
6	0.0002	0.1933

en zulks van 0.2666 gr. van het mengsel; dus blijft 0.2666 gr. — 0.1933 gr. = 0.0733 gr. in de reageerbuis (zooals bleek het geval te zijn) aan *zwavelzuur zilver.*

Berekent men uit het *gevonden* salpeterzuur zilver (zie boven) het zilverbioxyde, daarmede overeenkomende, dan wordt gevonden ($2\,N\,O_3\,Ag = 2 \times 169.55 = 339.1$; $Ag_2\,O_2 = 247.24$):

salpeterzuur zilver. zilverbioxyde.

$$339.1 : 0.1933 = 247.24 : x$$

voor $x = 0.1409$ gr. bioxyde, dat dus een verschil oplevert van 0.1458 gr. — 0.1409 gr. = 0.0049 gr. met de eerst medegedeelde berekening, uitgaande namelijk van het verschil in gewicht vóór en na behandeling met salpeterzuur (zie vroeger). Men kan niet veronderstellen, dat eenig bioxyde is herleid tot oxyde ($Ag_2\,O$), en daardoor dit verschil betrekkelijk zoo groot is, want dit zou te weinig bioxyde geven in plaats van te veel. In ieder geval kan voor 0.1409 gr. een wijziging gebracht worden in de zuurstof, die dientengevolge wordt 0.0044 gr.. En de samenstelling zou derhalve zijn:

0.1409 gr.	zilverbioxyde
0.0733	zwavelzuur zilver
0.0044	„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het $S\,O_4 . z\,O . Ag_2$
0.2186 gr..	

Men kan zich nog niet uitlaten op dit oogenblik wat betreft de scheiding met alcohol, daar tot nog toe alleen de bepaling van zilvernitraat als zoodanig met alcohol is nagegaan. De bepaling van gezegd verschil vóór en na behandeling met salpeterzuur is trouwens hoogst waarschijnlijk zeer nauwkeurig, en een gedeeltelijke ontleding van zilverbioxyde in oxyde ook in strijd met hetgeen het peroxy-salpeterzuur zilver leerde. Voor 't oogenblik ten minste heeft men meer vertrouwen in gezegd verschil in gewicht, ook omdat de hoeveelheid stof betrekkelijk te gering was, en om andere redenen, thans niet te behandelen. En in dat geval wordt gevonden voor de verhouding van $SO_4\,Ag_2$ en O van $SO_4 . zO . Ag_2$ ($SO_4\,Ag_2 = 311.14$):

$$0.0666 : 0.0062 = 311.14 : x,$$

dus $x = 28.96$. De hoeveelheid zuurstof verschilt dan van $2\,O$, zij dit 31.92 ($2\,O$) — $28.96 = 2.96$. Bijzonderheden betreffende de analyse der stof zullen overigens later uitvoerig worden behandeld. De uitkomst is bijgevolg, dat de verhouding van O en $SO_4\,Ag_2$ veeleer die is van $2\,O$ en $SO_4\,Ag_2$ dan van $1\,O$ en $SO_4\,Ag_2$, zooals dit zelfs het geval is met Bereiding N°. 8, terwijl die van N°. 9 genoegzaam daaraan beantwoordt. Overigens zal later blijken, dat daarmede nog niet het maximum is bereikt, hetwelk de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het $SO_4 . zO . Ag_2$ kan hebben.

Uit de analyse der laatste produkten volgt vrij duidelijk, dat de zuiverheid te wenschen overlaat, en de oorzaak daarvan is blijkbaar te zoeken in het feit, dat de oplossing bij electrolyse te veel vrij zuur bevat, en daarop vooral dient gelet te worden. Het groote bezwaar is gelegen, zooals reeds gezegd, in de betrekkelijke geringe oplosbaarheid van zwavelzuur zilver, en dan is men nog genoodzaakt, de verzadigde oplossing te verdunnen met een gelijke maat water, ten einde het afzetten van zwavelzuur zilver als zoodanig te voorkomen in het product van electrolyse. En in de produkten tot nog toe onderzocht, is dit desniettegenstaande toch nog wellicht het geval, en het zal bezwaarlijk gaan, dit geheel te ontgaan, aangezien een half verzadigde oplossing betrekkelijk meer vrij zuur kan doen ontstaan, dat juist aanleiding geeft tot de vorming van zwavelzuur zilver uit het product van electrolyse (om niet te gewagen van de zelfontleding, waaraan het product onderhevig is).

Meer afdoende uitkomsten.

Uit het medegedeelde blijkt met eenige waarschijnlijkheid, dat *peroxy-zwavelzuur zilver* is samengesteld uit zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$) met een oxy-zwavelzuur zilver, zij dit $SO_4.\ zO,\ Ag_2$, bijgevolg terug te geven door de formule:

$$x\ Ag_2\ O_2.\ y\ (SO_4.\ z\ O.\ Ag_2).$$

Laat men voor 't oogenblik ter zijde de waarden van x en van y (volgens de analyse van Bereiding N°. 8, maar vooral die van N°. 9, zou de verhouding van $x : y$ die zijn van $2 : 1$; naar de analyse van N°. 10 veeleer die van $5 : 2$), zoo schijnt het *oxy-zwavelzuur zilver* als waarde voor z te hebben als *minimum* 2, en in dat geval derhalve terug te geven door: $SO_4.\ 2\ O.\ Ag_2$, en dientengevolge aan te nemen het bestaan van een zuur $SO_2.\ 2\ O.\ 2\ OH$ ($= SO_4,\ 2\ O\ H$), zij dit een *dioxy-zwavelzuur.* Later zal blijken, dat de waarde 2 voor z *niet* is te beschouwen als het maximum uit te drukken, zooals reeds gezegd.

Uit het medegedeelde volgt daarenboven, dat een meer afdoende neutralisatie zeer waarschijnlijk aanleiding zou geven tot een zuiverder electrolytisch product. Ook wordt een grootere hoeveelheid stof vereischt ter analyse, dat meer tijd vordert voor iedere bereiding. En eindelijk moet gewerkt worden onder meer of min verschillende omstandigheden, vooral wat de *concentratie* der oplossing aangaat, ten einde eenige contrôle te hebben betreffende de samenstelling van het product als chemisch individu. Daarom heeft men de bereiding één dag (dag en nacht) langer laten duren dan de vorige, tot een zekere grens, dat een verschil te weegbrengt in de concentratie, hetwelk evenwel betrekkelijk niet zeer groot is (in zooverre, als de grootste hoeveelheid stof zich in de twee eerste dagen heeft afgezet).

Voegen we er nog bij, dat men zich heeft laten leiden door de gedachte, die zich als van zelve voordoet, dat een *maximum* van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver $SO_4.\ zO.\ Ag_2$ beantwoordt aan een *maximum* van zuiverheid. Het lichaam toch in questie, namelijk het peroxy-zwavelzuur zilver, is onderhevig aan *zelfontleding*; en aangezien er nog al kans is, dat het electrolytisch product een weinig zwavelzuur zilver bevat (als onzuiverheid), is er dus tweevoudige aanleiding, om de genoemde „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" tot een *minimum* te herleiden.

Over een wyziging gebracht in de bereiding van het electrolytische lichaam. Deze is van hoogst eenvoudige natuur, maar toch van betrekkelijk veel invloed op de samenstelling van het product, wat betreft de scheikundige zuiverheid (zie de analysen). Zij bestaat slechts daarin, dat *een kleine trechter* wordt geplaatst in den grooten trechter op een *glazen driehoek*, gezet op het filtrum van den grooten trechter (ten deele gevuld met koolzuur zilver). Het doel er van kan duidelijk wezen, en bestaat daarin, de oplossing (die zuur is geworden door electrolyse) te noodzaken zooveel mogelijk, in aanraking te komen met koolzuur zilver ten einde *geneutraliseerd te worden*, welk zilverzout vooral het onderste gedeelte vult van het filtrum van den grooten trechter; en de kleine trechter staat van onderen geheel in het koolzuur zilver (terwijl de zure oplossing uit de kleine schroef van Archimedes komt te vallen in den kleinen trechter). Maar in den regel is de weêrstand in 't begin te groot voor de zure oplossing (die in de groote platinaschaal moet terugvloeien), en dientengevolge zou de kleine trechter overloopen en vervolgens de groote trechter; door evenwel den kleinen trechter bij den aanvang nu en dan een weinig op te ligten, wordt dit bezwaar ontgaan (zekerheidshalve wordt onder den grooten trechter een reservoir geplaatst). Het is overigens duidelijk, dat de snelheid van het uurwerk binnen zekere grenzen is te regelen met de windvleugels (zie pag. 17).

Een tweede wijziging, die meer betrekking heeft op de methode van analyseeren, is deze, dat het product van electrolyse na wasschen (in het glazen schaaltje, waarin het was afgezet), wordt overgebracht op een *horologeglas*, om daarna geplaatst te worden onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en natrium), en ten slotte gewogen onder bekende omstandigheden (met een ander horologeglas er op, gebruik makende van een koperen klem); en eindelijk onder een gewonen exsiccator wordt gezet (met zwavelzuur en natrium). Als het gewicht onveranderd is, wordt de stof overgedaan in een reageerbuis. In 't begin werd gebruik gemaakt van een gewone reageerbuis, later van een dergelijke buis van groote afmetingen, in alle gevallen voorzien van een kleinen trechter bij den hals toegesmolten, en vóór de weging geruimen tijd te plaatsen in de gewone atmospherische omgeving (daarenboven omgeven met filtreerpapier, ten einde het geheel te vrijwaren voor stof).

Uitkomsten der analysen van de Bereidingen N° 11, N° 12, N° 13, N° 14, N° 15, N° 16, N° 17 en N° 18. Analyse van Bereiding N° 11. Nadat het gewicht der stof op het horologeglas was gebleken constant te zijn, bedroeg dit 0.8884 gr., zijnde een product van *twee* dagen electrolyse (dag en nacht), dus betrekkelijk veel meer dan dit bedraagt voor één dag (dag en nacht);

te verklaren door het feit, dat het lichaam aan de anode afgezet, zelf de rol vervult van anode, die dus in grootte toeneemt, naarmate het afzetsel vermeerdert, aangezien dit een vrij goede geleider is van electriciteit.

De stof werd overgebracht in een kleine reageerbuis, deze geplaatst in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en natrium), en gewogen, terwijl deze bewerkingen werden herhaald, tot het gewicht constant was, dat der stof bedragende 0.8398 gr.. Vervolgens werd water toegevoegd, verhit in een waterbad, eerst bij 60°—70° (en wel zoolang als nog zuurstof vrijkwam), daarna bij 70°—80°, ten einde zeker te kunnen zijn van een volkomen ontleding, te weten van het oxy-zwavelzuur zilver $SO_4 . zO . Ag_2$, dat eenige dagen vordert. Na geplaatst te zijn geweest in een vacuum-exsiccator, bedroeg het terugblijvende 0.8006 gr., bij gevolg een verlies gevende met de oorspronkelijke stof van 0.8398 gr. — 0.8006 gr. = 0.0392 gr. of 4.67 proc. (eigentlijk 4.667 p. c.). Behandeld met water en een weinig salpeterzuur (dit laatste van tijd tot tijd bijgevoegd), eerst verhit bij 60°—70°, daarna bij 70°—80° en 80°—90° (en dat gedurende vele dagen), werd de buis geplaatst in een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en kalk). Er bleef terug 0.9941 gr., bij gevolg is het verschil in gewicht vóór en na behandeling met salpeterzuur: 0.9941 gr. — 0.8006 gr. = 0.1935 gr.. Het gehalte van zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$) naar dit verschil berekend (zie pag. 23), beantwoordt aan:

$$\begin{array}{ccc} \text{verschil} & & \text{bioxyde} \\ 91.86 : 0.1955 & = & 247.24 : x, \end{array}$$

zij $x = 0.5208$ gr. zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$). Nu bestaat de hoeveelheid van 0.8006 gr. (zie boven) uit een mengsel van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver (altijd verondersteld, dat alle „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het oxy-zwavelzuur zilver $SO_4 . zO . Ag_2$ is uitgedreven), dus zou het gehalte wezen aan *zwavelzuur zilver*: 0.8006 gr. — 0.5208 gr. = 0.2798 gr.. En de samenstelling zou dan naar deze gegevens zijn:

0.0392 gr.	„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"
0.5208	zilverbioxyde
0.2798	zwavelzuur zilver
0.8398 gr.	oorspronkelijke stof.

Voor de verhouding van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver, vindt men bij gevolg:

$\frac{0.5208}{0.2798} = 1.86$, dat dus doet denken aan de verhouding:

$\frac{5\ Ag_2\ O_2}{2\ SO_4\ Ag_2} = \frac{5 \times 247.24}{2 \times 311.14} = 1.98$. Het product van electrolyse kan zeer wel een weinig vrij zwavelzuur zilver bevatten (en dat zonder vrij zilverbioxyde), in welk geval het quotient kleiner wordt dan met de theorie overeenkomt. Wat betreft de aanwezigheid van vrij zilverbioxyde, de kans daartoe is betrekkelijk gering, in aanmerking genomen, dat het zeer gemakkelijk wordt ontleed in een oplossing, die betrekkelijk arm is aan vrij zwavelzuur, daarentegen wordt het zwavelzuur zilver moeielijk geëlimineerd, als gevolg der geringe oplosbaarheid. De verhouding zou derhalve die zijn van:

$$5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ SO_4\ Ag_2.$$

En er blijft dan over, de verhouding te bepalen tusschen $SO_4\ Ag_2$ en zO van het oxy-zwavelzuur zilver: $SO_4 .\ zO.\ Ag_2$. Nu heeft men ($SO_4\ Ag_2 = 311.14$):

zwavelzuur zilver		„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"
0.2798 : 311.14	=	0.0392 : x

$x = 43.08$ zuurstof op 1 $S\ O_4\ Ag_2 = 311.14$. En men heeft $15.96 \times 2 = 31.92 = 2\ O$, en $15.96 \times 3 = 47.88 = 3\ O$, terwijl $43.58 - 31.92 = 10.66$, en $47,88 - 43.58 = 4.3$, derhalve nadert de waarde meer tot $z = 3$ dan tot $z = 2$; of anders gezegd, is de formule veel meer $SO_4 .\ 3\ O.\ Ag_2$ dan $SO_4 .\ 2\ O.\ Ag_2$. En de geheele formule zou kunnen zijn: $5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ (SO_4 .\ 3\ O.\ Ag_2)$, of wat hetzelfde is: $5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ SO_7\ Ag_2$. Maar, zooals reeds gezegd, is het gehalte aan zwavelzuur zilver waarschijnlijk wat te hoog aangeslagen, dat van invloed zal zijn op de verhouding tusschen zwavelzuur zilver en „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van $S\ O_4 .\ zO.\ Ag_2$). En om dien invloed te leeren kennen, is de waarde berekend van x in: $\frac{0.5208}{x} = 1.98$ (zie hierboven), gevende $x = 0.263$, terwijl men heeft:

zwavelzuur zilver		„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"
0.263 : 311.14	=	0.0392 : x

$x = 47.13$ zuurstof, inplaats van 47.88, gelijk de theorie verlangt voor $3\ O$. Of anders uitgedrukt, berekent men het zwavelzuur zilver op het *zilverbioxyde* voor de verhouding $5\ Ag_2\ O_2 . 2\ SO_4\ Ag_2$, dan stemt de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" genoegzaam overeen met de formule: $SO_4 . 3\ O . Ag_2$.

Mogelijk bevat het electrolytische produkt zwavelzuur zilver en zilverbioxyde, hetzij het eerste of het laatste, hetzij beiden te gelijk. En in geval van vrij zilverbioxyde, zou daarvan het gevolg geen ander kunnen zijn, dan den coëfficient x van het bioxyde grooter te maken, het zij van:

$$x\ Ag_2\ O_2 .\ y\ (SO_4 .\ zO .\ Ag_2)$$

en dan is tevens het verschil grooter in gewicht vóór en na behandeling met salpeterzuur (zie vroeger). In ieder geval is het mogelijk, dat x is bijv. 4 in plaats van 5, zoodat de formule wordt:

$$4\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ (SO_4 .\ 3\ O,\ Ag_2),$$

dat hetzelfde is als:

$$2\ Ag_2\ O_2 .\ SO_4 .\ 3\ O .\ Ag_2$$

dat zeerveel eenvoudiger zou wezen; maar de verkregen numerique waarden beantwoorden daaraan nu eenmaal niet, en daarmede is alles gezegd.

Ter contrôle der berekening zou de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het $SO_4 .\ z\ O .\ Ag_2$ kunnen bepaald worden (zij dit langs indirecten weg) met betrekking tot zilverbioxyde ($Ag_2\ O_2$); ook, om te weten, of er vrij zilverbioxyde voorhanden is (dus als verontreiniging), ten minste met meer of minder waarschijnlijkheid. Schrijven we daartoe de verhouding:

zilverbioxyde		„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"
0.5208 : 247.24	=	0.0392 : x

dat geeft $x = 18.6$ ($O = 15{,}96$), dus is er te veel zuurstof voor de formule:

$$2\ Ag_2\ O_2 .\ SO_4 .\ 2\ O .\ Ag_2$$

en te weinig zuurstof voor de formule:

$$2\ Ag_2\ O_2 .\ SO_4 .\ 3\ O .\ Ag_2 ,$$

dat leidt tot de formule (op pag. 30 is in hoofdzaak hetzelfde gezegd):

$$5\ Ag_2\ O_2\ 2\ (S\ O_4 .\ 3\ O .\ Ag_2),$$

want er is gevonden:

		theoret. samenstelling
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van $S\ O_4 .\ z\ O .\ Ag_2$)	4.67	4.90
zilverbioxyde	62.01	63.26
zwavelzuur zilver	33.32	31.84
	100	100

Voegen we er aan toe ter vergelijking de samenstelling, die overeenkomt met de formule $5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ (SO_4 .\ 2\ O .\ Ag_2)$:

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van $SO_4 .\ zO .\ Ag_2$)	3.32
zilverbioxyde	64.30
zwavelzuur zilver	32.38
	100.

Er wordt aangenomen, als overeenkomende met de werkelijkheid, dat het *maximum* aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" beantwoordt aan een *maximum van zuiverheid* van het peroxy-zwavelzuur-zilver (zij dit $x\ Ag_2\ O_2 .\ y\ (SO_4 .\ zO .\ Ag_2)$. In de eerste plaats toch, is dit lichaam onderhevig aan zelfontleding, en de aanwezigheid zoowel van zwavelzuur zilver als van zilverbioxyde, als bijkomende bestanddeelen van het electrolytische product, doet dit verminderen. En uit de numerique uitkomsten volgt meer of min (zij deze verkregen langs indirecten of directen weg), dat het product van Bereiding N° 11 een weinig zwavelzuur zilver bevat als verontreiniging, zonder zilverbioxyde (zie overigens later). Maar men wil nog andere gegevens doen kennen van Bereiding N° 11. Vooraf evenwel, wenschte men nog even te doen opmerken, dat is aangenomen, dat de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver ($SO_4 .\ z\ O .\ Ag_2$), niet reageert op de zuurstof van het zilverbioxyde, namelijk bij verhitting met *water*. Men steunt dienaangaande op de analyse [1]) van zilverbioxyde (afgeleid van paroxy-zwavelzuur zilver), en op de ervaring opgedaan met betrekking tot de zuiverheid van het zilverbioxyde afgeleid van peroxy-salpeterzuur zilver (zij dit: $3\ Ag_2\ O_2 .\ NO_5\ Ag_2$).

De analytische gegevens van Bereiding N°. 11 werden thans vermeerderd, door het mengsel van salpeterzuur en zwavelzuur zilver (zie hierboven, de hoeveelheid van 0.8006 gr.) te behandelen met abs. alcohol (bij gewone temperatuur), dat achtereenvolgens gaf:

	salpeterzuur zilver.	te zamen:
1ste maal	0.1213 gr.	0.1213 gr.
2	0.0789	0.2002
3	0.0875	0.2877
4	0.0876	0.3753
5	0.0713	0.4466
6	0.089	0.5356
7	0.084	0.6196
8	0.0566	0.6762
9	0.0365	0.7127
10	0.0035	0.7162
11	— 0.0001	0.7161

Na geplaatst te zijn geweest in een vacuum-exsiccator, werd dit herleid tot 0.7155 gr. (in plaats van 0.7161 gr.), zoodat het gehalte aan *zwavelzuur zilver* dan wordt: 0.9941 gr. — 0.7155 gr. = 0.2786 gr. zwavelzuur zilver, in plaats van 0.2798 gr. (vroeger gevonden door uit te gaan van het verschil in gewicht, voor en na behandeling met verdund salpeterzuur), dus een verschil gevende van 0.2798 gr. — 0.2786 gr. = 0.0012 gr.. Uit deze overeenstemming volgt wel met genoegzame zekerheid, dat gezegd mengsel van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver geen noemenswaardige hoeveelheid zilveroxyde ($Ag_2\ O$) zal bevatten; dit toch zou een *te laag* gehalte aan zilverbioxyde hebben opgeleverd, en bij gevolg een *te hoog* gehalte aan *zwavelzuur zilver* (zie de berekening vroeger, uitgaande van het verschil in gewicht, vóór en na behandeling met salpeterzuur).

Het terugblijvende (zie boven, na behandeling met alkohol) bedroeg 0.282 gr., zij dit *zwavelzuur zilver*, dus thans bepaald op

---

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 12.

directen weg, dat 33.57 proc. geeft in plaats van 33.22 proc. (langs indirecten weg).

Men heeft daarenboven:

	gevonden langs directen weg:
salpeterzuur zilver	0.7155 gr.
zwavelzuur zilver	0.282
som	0.9975 gr.

in plaats van 0.9941 gr. (zie boven). Het geringe surplus toont voldoende aan, dat van het een of ander moet zijn teruggehouden, aangezien de som een verschil aangeeft, dat veeleer in omgekeerden zin had moeten uitvallen (te weten, dat de som wat minder bedroeg). Het salpeterzuur zilver, namelijk de hoeveelheid van 0.7155 gr., werd, gekleurd zijnde, behandeld met verdund salpeterzuur, waarbij evenwel het gewicht onveranderd bleef (derhalve 0.7155 gr.).

De uitkomst der bepalingen, en tevens van beschouwingen van verschillenden aard, is bijgevolg in 't belang der *indirecte* methode van analyse (door de stof namelijk eerst te verhitten met water, en daarna met verdund salpeterzuur), die bij uitnemendheid eenvoudig is, en waarschijnlijk in dezelfde mate nauwkeurig.

Voegen we hieraan ten slotte toe, dat in de bepalingen gebruik werd gemaakt van vacuum-exsiccatoren (hetzij met zwavelzuur, of ook met kalk, of natrium, al naar het geval, dat zich voordeed).

Bereiding N°. 12. De hoeveelheid stof bedroeg 0.97 gr., zijnde de opbrengst van drie dagen electrolyse (dag en nacht), niet medegerekend de hoeveelheid, die bij wasschen met water verloren gaat. Dezelfde weg werd ongeveer gevolgd, als zulks het geval was met Bereiding N°. 11 (zie pag. 27). Na behandeling met *water* onder verwarming, en verwijdering van het water door verdampen, bleef terug 0.9247 gr., zij dus 0.97 gr. — 0.9247 gr. = 0.0453 gr. aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof". Vervolgens behandeld met verdund *salpeterzuur* bleef na verdampen terug 1.1495 gr., dat derhalve een vermeerdering in gewicht doet kennen van 1.1495 gr. — 0.9247 gr. = 0.2248 gr.. En hieruit berekenende het gehalte aan zilverbioxyde, leidt dit tot 0.6049 gr. zilverbioxyde, waaruit dan volgt 0.9247 gr. — 0.6049 gr. = 0.3198 gr. voor het gehalte aan *zwavelzuur zilver*. Op 100 gew.-d. der zwarte stof geeft dit derhalve:

	$5\,Ag_2\,O_2,\,2\,(SO_4.\,3\,O\,Ag_2)$	
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"	4.67	4.90
zilverbioxyde	62.36	63.26
zwavelzuur zilver	32.97	31.84
	100.	100.

Voor de verhouding van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver wordt gevonden:

$$\frac{0.6049}{0.3198} = 1.89$$ (zie Bereiding No. 11).

Het mengsel van salpeterzuur en zwavelzuur zilver werd behandeld met abs. alcohol, en achtereenvolgens gevonden:

	salpeterzuur zilver.	te zamen:
1ste maal	0.1325 gr.	0.1325 gr.
2	0.1127	0.2452
3	0.0876	0.3328
4	0.0887	0.4215
5	0.1086	0.5301
6	0.0911	0.6212
7	0.086	0.7072
8	0.0686	0.7758
9	0.0383	0.8141
10	0.012	0.8261
11	0.0012	0.8273
12	0	0.8273

Na geplaatst te zijn geweest onder een vacuum-exsiccator werd dit 0.8272 gr. (in plaats van 0.8273 gr.), dat, gekleurd zijnde, ter ontkleuring met salpeterzuur behandeld, werd herleid tot 0.8259 gr. (zijnde 0.8272 gr. — 0.8259 gr. = 0.0013 gr). Er bleef aan *zwavelzuur zilver* terug 0.3256 gr. (dus langs *directen* weg gevonden). Bij gevolg is gevonden:

	gevonden.
salpeterzuur zilver	0.8259 gr.
zwavelzuur zilver	0.3256
som	1.1515 gr.

dat een te veel oplevert (zie Bereiding N°. 11, pag. 27) van:

1.1515 gr.	(som)
1.1495	(zie vroeger)
0.002 gr..	

Genoemde hoeveelheid van 0.3256 gr. *zwavelzuur zilver* (langs directen weg bepaald) komt overeen met 33.56 p.c. (zie vroeger 32.97 p.c. langs indirecten weg, zoowel gevonden als tevens berekend).

Uitgaande van het verschil in gewicht vóór en na behandeling met salpeterzuur, en hieruit berekenende het gehalte aan *zilverbioxyde,* laat zich *zwavelzuur zilver* indirect bepalen, zij dit 0.3198 gr. (zie pag. 33), dat op zijn beurt kan geven voor het salpeterzuur zilver (zie vroeger over het mengsel): 1.1495 gr. — 0.3198 gr. = 0.8297 gr. (zij dit gevonden en tevens berekend), hetgeen bij gevolg een verschil oplevert met het langs directen weg gevondene van: 0.8297 gr. — 0.8259 gr. (langs directen weg) = 0.0038 gr..

Het meeste vertrouwen blijft men nog schenken aan de uitkomsten langs indirecten weg gevonden, gecontroleerd, als vroeger, door uitkomsten langs directen weg verkregen, ten einde genoegzaam zeker te zijn van de beginselen, waarvan werd uitgegaan.

Bereiding N° 13. Dezelfde weg werd gevolgd, alleen verschilde de duur der electrolyse, die aanvankelijk vier dagen zou bedragen, maar ten slotte ongeveer vijf dagen innam (dag en nacht). Er had namelijk een interruptie plaats van ongeveer 8—10 uur, in den nacht tusschen den tweeden en derden dag, doordien het uurwerk ditmaal in gebreke was (uit het aantal windingen aan staaldraad op den cylinder teruggebleven, laat zich ongeveer die tijd opmaken). Maar toch zou deze Bereiding, te beschouwen als te zijn mislukt, een leerzaam voorbeeld kunnen wezen, om den invloed te leeren kennen van een *on*voldoende neutralisatie op de samenstelling van het product van electrolyse (de reactie als zoodanig doet vrij zwavelzuur optreden). Daarom werd op de gewone wijze (zie analyse van N° 11 en N° 12) te werk gegaan, en de zwarte stof met water verhit, om daarna het water te laten verdampen, dat een verschil opleverde met de oorspronkelijke hoeveelheid stof, zij deze 1.2087 gr., van 0.0473 gr. of 3.91 proc. aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het oxy-zwavelzuur zilver ($SO_4 . zO . Ag_2$), dat dan verschilt met N° 11 en N° 12 : 4.67 - 3.91 = 0.76 proc. aan deze zuurstof. Maar desniettegenstaande overtreft deze hoeveelheid zuurstof nog verre diegene, welke beantwoordt aan de formule : 5 $Ag_2\ O_2$. 2 (SO_4. 2 O. Ag_2) die slechts 3.32 proc. bedraagt.

Bereiding N° 14. De wijze van bereiding was nog steeds dezelfde, terwijl de electrolyse vijf dagen achtereenvolgens (dag en nacht) aanhield. De hoeveelheid stof, na in een reageerbuisje te zijn gebracht, bedroeg 1.7048 gr.. Water werd toegevoegd, verhit,en het water verdampt (als altijd in een vacuum-exsiccator), waarna terugbleef 1.6271 gr. (van het mengsel van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver) en bijgevolg werd uitgedreven 0.0777 gr. of 4.55 proc. aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van het oxy-zwavelzuur zilver SO_4. z O. Ag_2). Deze massa nu werd met water behandeld bij gewone temperatuur, terwijl de oplossing (telkens werd ongeveer 10 c. c. water toegevoegd) werd ingedampt onder een vacuum-exsiccator, en achtereenvolgens gevonden :

	zwavelzuur zilver	te zamen
1ste maal, 2, 3	0.1173 gr.	0.1173 gr.
4, 5, 6	0.1207	0.238
7, 8, 9, 10, 11, 12	0.2093	0.4473
13, 14, 15	0.0867	0.534
16, 17, 18	0.0627	0.5967

Te vervolgen.

Bereiding N° 15. De electrolyse hield zes dagen aan (dag en nacht), en bij gevolg ook ditmaal één dag langer dan de voorgaande Bereiding (zie Bereiding N° 11, N° 12 en N° 14), en dat met opzet (zie pag. 26). Er werd een kleine wijziging aangebracht, daarin bestaande, dat de te onderzoeken stof werd gedaan in een *groote* reageerbuis (met het doel, de stof met meer water te behandelen bij het verhitten, dat invloed zou kunnen uitoefenen op de wijze van ontleding. Het gewicht der stof bedroeg 1.8807 gr.. De *concentratie* [1]) der oplossing vóór en na electrolyse werd bepaald, ten einde zich een juist denkbeeld te kunnen vormen met betrekking tot de vermindering in concentratie als gevolg der electrolyse, ook met 't oog op andere Bereidingen. Die concentratie bedroeg 3.26 gr. op één liter der oplossing vóór de electrolyse en 2.34 gr. na electrolyse, namelijk aan zwavelzuur zilver. Na toevoeging van water bij de stof (in de groote buis), verwarming en vervolgens indamping (in een vacuum-exsiccator), bleef terug 1.7997 gr. van het mengsel (zie bijv. N°. 14), dus bedraagt de vermindering in gewicht 0.081 gr. of 4.3 proc. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof". Men veronderstelt, dat de langere duur der electrolyse zich in omgekeerden zin begint te doen gelden (zie N° 11, N° 12 en N° 14).

Het terugblijvende werd met water behandeld bij gewone temperatuur (iedere maal met ongeveer 25 c. c.), terwijl na verdampen achtereenvolgens terug bleef aan zwavelzuur zilver:

	zwavelzuur zilver	te zamen
1ste maal	0.1097 gr.	0.1097 gr.
2, 3, 4, 5	0.4009	0.5106
6, 7	0.1718	0.6924
8	0.0321	0.7245
9	0.0034	0.7279
10	0.0024	0.7303
11	0.0017	0.732
12	0.0028	0.7348
13	0.002	0.7368
14	0.0017	0.7385
15	0.0024	0.7409
16	0.0027	0.7436
17	0.0021	0.7457
18	0.0031	0.7488

Te vervolgen.

[1]) Zie de „Dict. Chim., Wurtz," art. „Argent" p. 371.

Zie Bereiding N° 14 (pag. 36), N° 9 (pag. 18) en N° 6 (pag. 11).

Gaat men uit van de formule 5 $Ag_2\,O_2 . 2\,(SO_4 . 3\,O . Ag_2)$ voor 't oogenblik, dan kan berekend worden, indien is gegeven het gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (zij dit 4.3 proc. voor het $S\,O_4 . 3\,O . Ag_2$), het betrekkelijk gehalte aan zilverbioxyde en *zwavelzuur zilver*, in dit geval dan bedragende:

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"	4.3	(zie pag. 37)
zilverbioxyde	55.51	
zwavelzuur zilver	27.98	
	87.79	

Dit afgetrokken van 100 geeft 100 — 87.79 = 12.21 proc.. En veronderstellende, dat de oorspronkelijke stof *geen* vrij zilverbioxyde bevat, maar alleen vrij *zwavelzuur zilver* (zij dit 12.21 proc.), zou dit voor het totale gehalte aan zwavelzuur zilver bedragen: 27.98 + 12.21 = 40.19 proc., dat, in geval de formule juist is, dan moet beantwoorden aan het zwavelzuur zilver langs directen weg gevonden (zie pag. 37). Zooals blijkt, en trouwens duidelijk is, heeft een betrekkelijk klein verschil in gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" een betrekkelijk grooten invloed op het gehalte aan zilverbioxyde en *zwavelzuur zilver* tevens.

Over eenige wijzigingen gebracht in den toestel [1]. Aangezien het was gebleken, dat de cylinder niet volkomen loodrecht geplaatst was op het uurwerk, werd deze opnieuw geplaatst en wel op een meer correcte wijze; vandaar een meer regelmatige beweging van den toestel, zoodat deze met een minimum van snelheid kon werken (namelijk met opstaande windvleugels). Onder die omstandigheden kan in 3 uur ongeveer 1 liter aan oplossing worden opgeheven, terwijl de toestel nagenoeg drie dagen achtereen (dag en nacht) vermag te werken.

Een andere wijziging van den toestel bestond daarin, om dezen voor het grootste gedeelte te omgeven met een kast (in hoofdzaak van glas, voor een klein deel van hout), waardoor de electroden konden gebracht worden; en dat, onder anderen, om stof te ontgaan van buiten (aangezien de proef vele dagen achtereenvolgens werd voortgezet).

[1]) Zie deze Verhandeling, pag. 17.

Wijziging in de bereiding. Bij wijze van proefneming, liet men de geneutraliseerde oplossing terugvloeien dicht bij de anode (in-plaats van bij de kathode), met het doel, de grootste hoeveelheid van het zwavelzuur te neutraliseeren, vrijgemaakt (door electrolyse) bij de anode (waar het lichaam in questie wordt afgezet, en, als zijnde een goede geleider voor electriciteit de rol mede vervult van anode).

Bereiding N° 16. Deze geschiedde in den zoo even aangeduiden zin (zie boven), terwijl de electrolyse *vier* dagen werd aangehouden (dag en nacht), met een minimum van snelheid van den toestel. De bewerkingen waren overigens dezelfde (zie b. v. N° 15). De hoeveelheid stof ter analyse (gedaan in een groote reageerbuis), bedroeg 1.3153 gr.. Na verhitten met water en vervolgens verdampen van het water, bleef terug 1.2558 gr., dus een verschil gevende van 0.0595 gr., beantwoordende aan 4.52 proc. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het oxy-zwavelzure zilver ($SO_4 . zO. Ag_2$).

Bereiding N° 17. Opnieuw werd bij de electrolyse de vroegere weg ingeslagen (zie b.v. N° 11), te weten, die, waarbij de geneutraliseerde oplossing terugkomt bij de kathode (in plaats van nabij de anode als in Bereiding N° 15) en dat met een snelheid van neutralisatie als het minimum beschouwd. Het product van electrolyse (van vier dagen) werd op de gewone wijze gewasschen, alleen werd betrekkelijk meer fijne stof daarbij verwijderd, zoodat het ter analyse terugblijvende bestond uit beter gevormde kristallen, en met schooner glans.

Na te zijn gedroogd, werd de stof gedaan in een V-buis, vooraf gewogen, terwijl de hoeveelheid stof bedroeg 1.3888 gr.. Gezegde buis maakt deel uit van den toestel, waarvan in vroegere Verhandelingen uitvoerig sprake was, met betrekking tot het product van electrolyse met zilvernitraat, b.v. met 't oog op de aanwezigheid of afwezigheid van *water*. Het was volstrekt noodig, hetzelfde te doen met het product van electrolyse van zwavelzuur zilver; want zonder die kennis, zou men bijkans altijd aarzelen met eenige formule aan te nemen. De uitkomsten zijn gegeven in denzelfden vorm als zulks vroeger [1]) geschiedde.

[1]) Zie de tweede Verh. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie). Dl. V. N°. 1, pag. 4.

Opgave der getalwaarden van de proef met Bereiding N°. 17, betrekkelijk de aanwezigheid of afwezigheid van water, *en het* totale *gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (namelijk van oxyzwavelzuur zilver* $SO_4 . z\, O. Ag_2$, *en zilverbioxyde* $Ag_2\, O_2$). *Hoeveelheid stof* 1.3888 *gr.*.

	a	*b*	*c*	*d*
1ste dag	0	0.0004 gr.	0	verhit tot 42°
2	0	0.0009	0.0036 gr.	47°
3	0.0003	0.0008	0.0058	63°
4	0.0004	0.0015	0.0965	100°
				Snelle ontleding, een weinig stof medegevoerd.
5	0.0002	0.0008	0.0026	130°
6	—	—	0.0008	150°
7	—	—	0.0007	200°
8	—	—	0.0013	210°
9	—	—	0.0026	220°
10	—	—	0.0005	230°
11	—	—	0.0015	240°
12	—	—	0.0008	250°
13	—	—	0.0003	bij 250° $\frac{1}{2}$ uur
14	—	—	0.0006	bij 250° 1 uur
15	—	—	0	bij 250° 1 uur
16	—	—	0	bij 260° 1 uur
			0.1176 gr.	„gemakkelijk vrij-

komende zuurstof" (alles te zamen).

Zooals blijkt onder *b* en *a*, is de hoeveelheid *water* niet noemenswaardig (al had de toename van het buisje met chloorcalcium, vooral onder *b*, kleiner kunnen zijn). Want, zooals reeds werd opgemerkt, was de ontleding bij ongeveer 100° meer die, naderende tot een ontploffing, en werd een weinig stof medegevoerd, zij dit ongeveer 0.001 gr. (zie den 4den dag). Maar zelfs met die hoeveelheid medegerekend, is het besluit, *afwezigheid van water* als werkelijk bestanddeel van het zwarte lichaam. De formule toch: $5\, Ag_2\, O_2$, $2\, (SO_4 . 2\, O. Ag_2) + 2\, H_2\, O$ (dus $2\, O$ genomen in den vorm van water: $2\, H_2\, O$), in plaats van $5\, Ag_2\, O_2$, $2\, (SO_4, 3\, O, Ag_2)$, eischt 1.84 proc. water, of voor 1 gr. stof 0.0184 gr., dus voor 1.3888 gr. bedragende 0.025 gr.. Dit zou dus zijn voor 1 mol. water

0.0125 gr., veel meer bedragende dan de proef geeft onder *b*. Want men heeft alleen de vermeerdering onder *b* te nemen, en daarvan af te trekken de hoeveelheid medegevoerde stof, en de waarschijnlijke fout der proef, beiden evenwel onbekend; maar alles bij elkander genomen, zou dit naar 't schijnt zoo ongeveer 0.003 gr. geven op rekening van water der stof.

Het geheel aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof", namelijk der som dienaangaande van $SO_4 . zO . Ag_2$ en $Ag_2\ O_2$ is 0.1176 gr. of 8.53 proc.. De formule $5\ Ag_2\ O_2 . 2\ (SO_4 . 3\ O . Ag_2)$ eischt 8.98 proc., dus maakt dit uit een verschil van $8.98 - 8.53 = 0.45$ proc., dat te veel is; maar in aanmerking genomen de bezwaren, die te overwinnen waren, bestaat er waarlijk reden, voor het oogenblik tevreden te zijn.

Bereiding N°. 18. Wat de wijze betreft van bereiding, werd dezelfde weg gevolgd als met N°, 17, en tevens wat de methode aangaat ter analyse. In de groote reageerbuis bevond zich 1.2748 gr. stof, die, na verhitten met water in een waterbad, en indampen onder een vacuum-exsiccator, terugliet 1.2145 gr., overeenkomende met 4.73 proc. aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver $(SO_4 . z\ O . Ag_2)$.

Korte mededeeling van de methoden gevolgd ter quantitatieve bepaling, met 't oog op de samenstelling van het peroxy-zwavelzuur zilver $x\ Ag_2\ O_2 . y\ (SO_4 . z\ O . Ag_2)$, en van de verkregen uitkomsten, ook van theoretischen aard.

De leidende gedachte hierbij was deze, dat het wenschelijk voorkwam (vooral bij een lichaam, waarvan de zuiverheid waarschijnlijk wat te wenschen overlaat), zooveel mogelijk samengestelde resten te bepalen, die het geheel uitmaken; tevens, om des te beter de structuur van het te onderzoeken lichaam te leeren kennen. Een bepaling b. v. van zilverbioxyde $Ag_2\ O_2$ en zwavelzuur zilver $S\ O_4\ Ag_2$ werd in de eerste plaats als van zelve aan de hand gedaan.

Directe bepaling van zilverbioxyde $(Ag_2\ O_2)$ en van zwavelzuur zilver $(S\ O_4\ Ag_2)$. Laat de ontleding van het zwarte lichaam bij verhitten met water, aldus worden teruggegeven:

$$x\ Ag_2\ O_2 . y\ (S\ O_4 . z\ O . Ag_2) = x\ Ag_2\ O_2 + y\ S\ O_4\ Ag_2 + y . z . O.$$

Na ontleding wordt het geheel geplaatst onder een vacuum-exsiccator (zij het verschil in gewicht voor en na behandeling met water, uitgedrukt door A); er blijft dan een mengsel terug van *zilverbioxyde* en *zwavelzuur zilver*, door water bij gewone temperatuur te scheiden.

Indirecte bepaling van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver door berekening. Wordt gezegd mengsel behandeld met verdund *salpeterzuur*, en na ontleding het geheel geplaatst onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur en kalk), dan blijft een mengsel terug van *salpeterzuur zilver* en *zwavelzuur zilver*. Laat het verschil in gewicht voor en na deze reactie zijn B, dan laat zich het gehalte aan zilverbioxyde berekenen (zie b. v. pag. 28). En kennende de hoeveelheid van het mengsel van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver (namelijk van dat vóór de behandeling met salpeterzuur), zoo volgt er uit, de kennis aangaande het gehalte aan *zwavelzuur zilver*.

Directe bepaling van zwavelzuur zilver (andere methode, zie boven), en directe bepaling, door berekening, van zilverbioxyde. Bij behandeling van het laatste mengsel met abs. alcohol, blijft het zwavelzuur zilver terug, en wordt het *salpeterzuur zilver* opgelost, dat dus langs *directen* weg is te bepalen; en daaruit laat zich het *zilverbioxyde* berekenen (om die reden wordt dit genoemd, directe bepaling door berekening).

Indirecte bepaling van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver ($S\,O_4.\,z\,O.\,Ag_2$). Dit geschiedt door de hoeveelheid boven aangeduid met A. Deze zuurstof kan ook langs directen weg worden bepaald (zie de vorige Verhandeling, wat dit onderwerp aangaat, betrekking hebbende op $N\,O_3.\,2\,O.\,Ag$), maar deze methode is, zoo goed als zeker, veel minder nauwkeurig.

Directe bepaling van water. De afwezigheid van water werd bewezen door gebruik te maken van denzelfden toestel als vroeger bij een dergelijke bepaling met betrekking tot peroxy-salpeterzuur zilver (zie de vorige Verhandelingen).

Bepaling van alle „gemakkelijk vrijkomende zuurstof". Gebruik makende van denzelfden toestel.

Andere methoden ter bepaling aangewend. Zie daaromtrent bij de analysen.

Het schijnt niet gewaagd aan te nemen, dat zoowel de hoeveelheid A als die van B, met de grootste nauwkeurigheid zijn te bepalen, b. v. met 't oog daarop, dat het geheel plaats heeft in een reageerbuis (en dan nog met de noodige voorzorgen). Aangezien de hoeveelheid B leert kennen het gehalte aan *zilverbioxyde*, en dientengevolge dat aan *zwavelzuur zilver*, en de hoeveelheid A doet kennen het gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van het oxy-zwavelzuur zilver (*niet* van het zilverbioxyde), en *deze drie resten te zamen het geheel uitmaken*; zoo volgt er uit, dat vooral deze weg zal moeten worden ingeslagen, om genoegzaam zeker te zijn van zeer nauwkeurige numerique uitkomsten. Maar het is duidelijk, dat zelfs de meest nauwgezette methode niet tegemoet kan komen aan eenige onzuiverheden van het product, en dat schijnt tot nog toe waarschijnlijk zich voor te doen in het geval, dat ons bezighoudt.

Analytische gegevens (zie vroeger over nadere bijzonderheden). Er zal hier alleen sprake wezen van producten, waarvan de bereiding genoegzaam vertrouwen verdient, wat betreft den graad van zuiverheid; dit wil in de eerste plaats zeggen, dat deze zijn gemaakt onder gewone omstandigheden (namelijk verondersteld, dat in de wijze van bereiding de voornaamste verbeteringen zijn aangebracht, in deze Verhandeling beschreven). Overigens werd daarvan uitgegaan, dat een *maximum aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof"* (hetzij de totale hoeveelheid, maar vooral die van het oxy-zwavelzuur zilver $S\,O_4 . z\,O . Ag_2$) overeenstemt met *een maximum aan zuiverheid van het product*, dat trouwens eigentlijk van zelf spreekt. In dien zin uitgekozen, gaven analysen [1]) de volgende uitkomsten:

	N° 11	N° 12	N° 14	N° 16	N° 17	N° 18
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van oxy-zwavelzuur zilver)	4.67 (veeleer 4.667)	4.67	4.55	4.52	4.73	—
zilverbioxyde	62.01	62.36	—	—	—	—
zwavelzuur zilver	33.32	32.97	—	—	—	—
	100.	100.				

Totaal gehalte van „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" 8.53.

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 27, 33, 36, 39, 41.

De formule $5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ (S\ O_4 .\ 3\ O.\ Ag_2) = 5\ Ag_2\ O_2 .\ 2\ S\ O_7\ Ag_2$ vordert:

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van oxy-zwavelzuur zilver)	4.90
zilverbioxyde	63.26
zwavelzuur zilver	31.84
	100.

Totaal gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" 8.98.

Over de formule. Volgens deze gegevens en genoemde formule, die daaraan betrekkelijk voldoende beantwoordt, bevat het product van electrolyse wat te weinig aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" maar daarentegen wat te veel zwavelzuur zilver (zie iets verder over zilverbioxyde in dit opzicht). De zaak komt hierop neder, dat de electrolyse wel vrij zwavelzuur doet ontstaan, maar dat boven een zekere grens, het vrije zwavelzuur het zwarte lichaam ontleedt, en de reactie in tegengestelden zin verloopt:

$$5 \cdot Ag_2\ O_2 .\ 2\ S\ O_7\ Ag_2 + 5\ S\ O_4\ H_2 = 7\ S\ O_4\ Ag_2 + 11\ O + 5\ H_2\ O.$$

Het is duidelijk, dat de kans nog al groot is, dat het product van electrolyse meer of minder vrij zwavelzuur zilver bevat, in aanmerking genomen, dat dit zout in water betrekkelijk weinig oplosbaar is. En alleen door een voortdurend neutraliseeren, is dit bezwaar meer of minder te ontgaan.

De analysen duiden, naar 't schijnt, op een te laag gehalte aan zilverbioxyde, maar berekent men zilverbioxyde en zwavelzuur zilver volgens de (ten minste voor 't oogenblik) aangenomen formule op 4.67 proc. „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" (van het oxy-zwavelzuur zilver: $S\ O_4 .\ 3\ O.\ Ag_2$), dan vindt men de verhouding:

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof"	4.67	theoretische verhouding,
zilverbioxyde	60.29	
zwavelzuur zilver	30.34	

waaruit zou kunnen worden besloten, dat Bereiding N° 11 en N° 12 niet alleen eenig vrij zwavelzuur zilver maar tevens wat vrij zilverbioxyde bevatten. Maar men zal hierbij niet langer blijven stilstaan, vooral wat betreft de aanwezigheid van vrij zilverbioxyde, om dit punt later onder handen te nemen. Alleen zij nog opgemerkt, dat *zelfontleding* aanleiding geeft tot de aanwezigheid dezer twee stoffen, waarvan het zilverbioxyde door vrij zwavelzuur slechts ten deele zou kunnen ontleed zijn.

Door de som te nemen van $4.67 + 60.29 + 30.34 = 94.3$, en dit af te trekken van 100, geeft dit: $100 - 94.3 = 5.7$ proc. voor het zwavelzuur zilver en het zilverbioxyde. Een betrekkelijk gering verschil in gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" heeft dus grooten invloed op het gehalte van het zwarte lichaam aan zwavelzuur zilver en zilverbioxyde. In geval vrij zwavelzuur niet tusschenbeiden treedt of in geringe mate, kan de formule zeer wel worden bepaald; maar dit punt is nog nader te onderzoeken. Inderdaad bestaat er aanleiding te veronderstellen, dat de grootste hoeveelheid zwavelzuur zilver en tevens het zilverbioxyde (beiden „vrij" te nemen), ingeval aanwezig, het resultaat zijn van zelfontleding, aangezien de neutralisatie *bij voortduring geschiedde* (evenwel nog vatbaar voor verbetering), en de reactie per se toelaat de aanwezigheid van een zekere hoeveelheid vrij zwavelzuur. Dit zoo zijnde, zal de gevonden verhouding van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver wel zoo ongeveer kunnen beschouwd worden de werkelijke verhouding uit te drukken; in ieder geval kan men niet anders dan zich houden aan de gegevens der quantitatieve analysen. En die uitkomsten beantwoorden betrekkelijk voldoende aan de formule: $5\,Ag_2\,O_2.\,2\,(S\,O_4.\,3\,O.\,Ag_2)$, dat niet het geval is b.v. met de formule:

$$6\,Ag_2\,O_2.\,2\,(S\,O_4.\,O_3.\,Ag_2),$$

of wat hetzelfde is:

$$3\,Ag_2\,O_2.\,SO_4.\,O_3.\,Ag_2,$$

in welk geval de verhouding voor zilverbioxyde en zwavelzuur zilver is: $\frac{3\,Ag_2\,O_2}{S\,O_4\,Ag_2} = 2.38$, dat te veel verschilt van $\frac{5\,Ag_2\,O_2}{2\,S\,O_4\,Ag_2} = 1.98$ (gevonden werd b.v. voor N° 11 de waarde van 1.86); terwijl het quotiënt voor $4\,Ag_2\,O_2$ en $2\,S\,O_4\,Ag_2$ of $\frac{2\,Ag_2\,O_2}{S\,O_4\,Ag_2} = 1.59$, tevens van 1.98 te veel afwijkt.

Over de formule nader in bijzonderheden. Voor peroxy-salpeterzuur zilver was aangenomen de formule $3\,Ag_2\,O_2.\,N\,O_5\,Ag$ (zie de vorige Verhandelingen), en dezelfde argumenten kunnen gelden wat betreft de formule $5\,Ag_2\,O_2,\,2\,(S\,O_4.\,3\,O.\,Ag_2)$ van peroxy-zwavelzuur zilver, namelijk in zóóverre, als beide lichamen worden beschouwd te zijn *moleculaire* verbindingen van zilverbioxyde en van oxy-zwavelzuur zilver en oxy-salpeterzuur zilver. De overeenkomst dezer twee lichamen, wat betreft vorming en ontleding, is merkwaardig groot. Zoo geven deze twee lichamen bij verhitten met water zilverbioxyde, dat terug blijft, terwijl salpeterzuur zilver of zwavelzuur zilver in oplossing treden, en zuurstof vrijkomt van het oxy-salpeterzuur of oxy-zwavelzuur zilver:

$$3\,Ag_2\,O_2.\;\;N\,O_5\,Ag = 3\,Ag_2\,O_2 + \;N\,O_3\,Ag + \;\;O\,O$$
$$5\,Ag_2\,O_2.\,2\,S\,O_7\,Ag_2 = 5\,Ag_2\,O_2 + 2\,S\,O_4\,Ag_2 + 3\,O\,O.$$

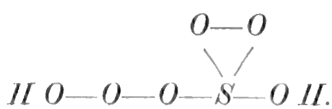
De verhouding van 5 : 2 zou bevreemding kunnen verwekken in verband met die van het andere lichaam, zijnde deze 3 : 1; maar, zooals reeds gezegd, de analytische gegevens laten geen andere verhouding toe. Om zich een meer eenvoudig denkbeeld te vormen van de structuur, zou men zich kunnen voorstellen van te doen te hebben met:

$5\,Ag_2\,O_2.\,2\,(S\,O_4.\,3\,O.\,Ag_2) = 5\,Ag_2\,O_2.\,2\,S\,O_7\,Ag_2 = 3\,Ag_2\,O_2.\,S\,O_7\,Ag_2 + 2\,Ag_2\,O_2.\,S\,O_7\,Ag_2$, een verbinding dezer twee moleculaire verbindingen. Maar deze wijze van de zaak op te vatten, bezit niet veel waarde, daar zij willekeurig is. Dan is beter aan te nemen, dat de $2\,(S\,O_4.\,3\,O.\,Ag_2) = 2\,S\,O_7\,Ag_2$ uitmaken één rest, zij deze b. v. $S_2\,O_{12}\,Ag_4 = 2\,S\,O_6\,Ag_2$, vereenigd met twee atomen zuurstof ($2\,O$), aldus:

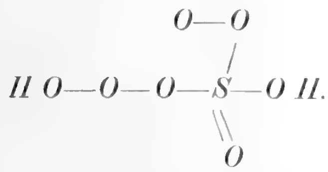
$$Ag_2\,O_6\,S - O - O - S\,O_6\,Ag_2.$$

Het is duidelijk, wanneer de formule in werkelijkheid die is van $5\,Ag_2\,O_2.\,2\,S\,O_7\,Ag_2$, de kans betrekkelijk groot is, dat de $2\,S$ met elkander zijn vereenigd.

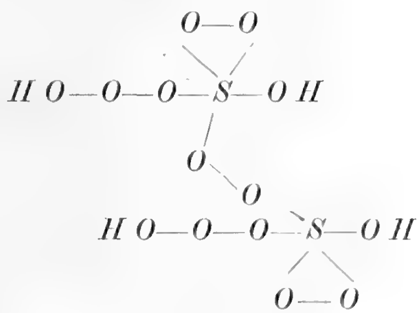
Wat de structuur betreft van den rest $S\,O_6\,H_2$ (zie $2\,S\,O_6\,Ag_2$ daaraan beantwoordende), zoo zou kunnen worden aangenomen b.v. de volgende:



De structuur van $S O_7 H_2$ (zie $S O_7 Ag_2$) als zoodanig zou dan zijn:



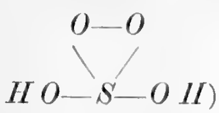
Maar uit een theoretisch oogpunt zal veel meer de structuur zijn (zie $S_2 O_{14} Ag_4$):

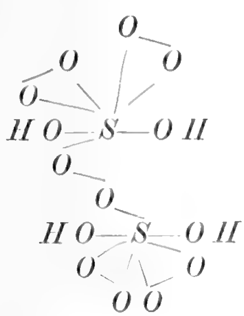


zij dit zuur:

$$S_2 O_{10} . 4 \, O H = S_2 O_{14} H_{14},$$

of zwavelzuur beschouwende als symmetrisch te zijn opgebouwd,

(b. v. als ):



De studie der electrolyse eener waterige oplossing van *zwavelzuur zilver* heeft gegevens verschaft van analytischen aard, en gaf aanleiding tot theoretische beschouwingen, dat alles schijnt te kunnen zamen gevat worden in hetgeen hieronder volgt.

1°. De electrolyse eener waterige oplossing van zwavelzuur zilver biedt vele bezwaren aan, als gevolg der geringe oplosbaarheid van dit zout. En dan meende men nog de concentratie eener verzadigde oplossing tot de helft [1]) te moeten terug brengen (ten einde de aanwezigheid van vrij zwavelzuur zilver in het product van electrolyse zooveel mogenlijk te ontgaan). Het resultaat is, dat de concentratie zoo ongeveer *honderd* maal geringer is dan die der oplossing van zilvernitraat (waarmede vroeger werd gewerkt); en men kan begrijpen, met welke bezwaren hier valt te strijden. Vooral is het vrije *zwavelzuur*, bij electrolyse ontstaan, te verwijderen, want boven zekere grens tracht dit de reactie ten deele te doen omkeeren, zóódanig, dat het zwarte product opnieuw wordt omgezet in zwavelzuur zilver.

2°. Zal men dit bezwaar meer of min ontgaan, dan moet de oplossing b.v. tijdens de electrolyse bij voortduring worden geneutraliseerd, terwijl de electrolyse eenige dagen vordert (dag en nacht) zal men een hoeveelheid stof hebben, voldoende voor een goede analyse. En daartoe werd een toestel ingericht, die toelaat de oplossing te doen filtreeren door *koolzuur zilver*, en dat door middel van een schroef van Archimedes, in beweging gebracht door een uurwerk (op zijn beurt in beweging gebracht door een gewicht van 50 kilogr.), welke schroef zich meester maakt van een deel der oplossing (door electrolyse zuur geworden), en wel nabij de *anode*, om haar te werpen op een filtrum met koolzuur zilver, en, meer of min geneutraliseerd, *terug te doen keeren* nabij de *kathode;* en zoo steeds voortgaande. Een reeks van opeenvolgende wijzigingen [2]) was noodig, ten einde het doel te bereiken, dat men nastreefde, en is nog niet afgesloten.

3°. Het lichaam in questie is *kristallijn*, als het geval is met peroxy-salpeterzuur zilver, maar de kleur van het eerste is minder zwart dan die van het andere product. De kristallen (welke oogenschijnlijk denzelfden vorm hebben als die met salpeterzuur zilver) zijn eveneens slechts met een microscoop waar te nemen en vereenigd tot een soort naalden (en deze meer of min vertakt), terwijl ook dit lichaam

[1]) Zie deze Verhandeling, pag. 18, 37.

[2]) l. c. 17, 26, 28, 37 en 38.

een vrij goede geleider is voor electriciteit (en als gevolg daarvan bij electrolyse de rol vervullende van anode).

Bij verhitten met water, blijft terug *zilverbioxyde* [1]) $Ag_2 O_2$ (gelijk dit het geval is met het peroxy-salpeterzuur zilver).

4°. De verbinding, voorloopig genoemd *peroxy-zwavelzuur zilver*, heeft veel analogie met *peroxy-salpeterzuur zilver*. Zoo is de formule van de laatste terug te geven door: $x\, Ag_2\, O_2 . y\, (N\, O_3 . z\, O. Ag)$ en die der eerste door: $x\, Ag_2\, O_2\, y\, (S\, O_4 . z O. Ag_2)$, zich vooral baseerende op het feit, dat bij verhitten met *water* zilverbioxyde terugblijft, zuurstof vrijkomt, terwijl salpeterzuur of zwavelzuur zilver in oplossing treden. Wat betreft de waarden der coëfficienten x, y en z, zoo schijnen de analysen [2]) te leiden tot de formule 5 $Ag_2\, O_2, 2\, (S\, O_4 . 3\, O. Ag_2)$, of $x = 5$, $y = 2$ en $z = 3$, dus 5 $Ag_2\, O_2$, 2 $S\, O_7\, Ag_2$. *Maar het is mogelijk, dat latere analysen er toe leiden, in deze formule eenige verandering te brengen*, daar het product van electrolyse nog niet voldoende zuiver is verkregen (wellicht kan die graad van zuiverheid niet worden bereikt). Voor 't oogenblik moet men zich in ieder geval aan deze formule houden, en dan bestaat er aanleiding het bestaan aan te nemen van een zuur [3]) $S_2\, O_{14}\, H_4 = S_2\, O_{10} . 4\, O\, H$, en dat wel eerder dan die van $S\, O_7\, H_2 = S\, O_5$, $2\, O\, H$. Het lichaam is overigens vrij van water [4]), zooals werd aangetoond met denzelfden toestel van vroeger.

Het bezwaar, waarmede men te kampen heeft, is gelegen in den aard van 't lichaam, van onderhevig te zijn aan *zelfontleding*, en tevens ontleed te kunnen worden door vrij zwavelzuur, als gevolg der electrolyse ontstaan. En het is juist de combinatie dezer twee bronnen van afwijking, gepaard met de beperkte oplosbaarheid, die iedere redeneering zou kunnen doen falen, gegrondvest op gegevens van analytischen aard. Waarschijnlijk zou het geheel ook te kort schieten, indien het product in questie niet een vrij goede geleider was voor electriciteit, als gevolg van welke eigenschap het electrolytische afzetsel de rol vervult van *anode*; en er bestaat grond voor het vermoeden, dat wat ontleed wordt zich herstelt, ten minste ten deele, aangezien met reden wordt verondersteld, dat zich overal electrolytische vrije zuurstof bevindt, waar zich bevindt genoemd afzetsel als electrolytisch product.

Overigens is aangenomen, dat een maximum aan „gemakkelijk

---

[1]) l. c. pag. 12.
[2]) l. c. pag. 43.
[3]) l. c. pag. 47.
[4]) l. c, pag. 40.

vrijkomende zuurstof" (van het oxy-zwavelzuur zilver, zij dit $SO_4 . z O . Ag_2$) beantwoordt aan een maximum van zuiverheid; terwijl analysen met betrekking weinig „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" zijn ter zijde gelaten.

Volgens genoemde formule zou 1 molecuul van het lichaam 11 O „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" geven, alles te zamen genomen. Berekend op 100 gew. d. verschilt deze hoeveelheid betrekkelijk weinig van die geleverd door peroxy-salpeterzuur zilver (8.98 en 8.46). De verhouding der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof" van oxy-zwavelzuur zilver en zilverbioxyde in het peroxy-zwavelzuur zilver en peroxy-salpeterzuur zilver, zou zijn die van 6 : 5 en 2 : 3 (of 6 : 9).

5. De wijze van analyse van het product is gegeven [1]). De in 't algemeen gevolgde weg is in hooge mate eenvoudig, en ook daardoor aangewezen, van zeer nauwkeurige analytische uitkomsten te kunnen geven, namelijk uit het oogpunt van analyse. Nadat de stof eerst is behandeld met water, en daarna met salpeterzuur, terwijl in beide gevallen wordt verwarmd (in een reageerbuis), om later het vloeibaar gedeelte te doen verdampen (in een vacuum-exsiccator), verkrijgt men twee getalwaarden, zij deze A en B, waarvan A voorstelt *„de gemakkelijk vrijkomende zuurstof"* van het oxy-zwavelzuur zilver ($SO_4 . z O . Ag_2$), terwijl door middel van B kan berekend worden het gehalte aan *zilverbioxyde*, dat op zijn beurt leert kennen het gehalte aan *zwavelzuur zilver* (want het terugblijvende, na verhitten met water en indampen, is een mengsel dezer twee stoffen), terwijl deze drie lichamen zamen de oorspronkelijke stof vormen. Directe bepalingen, vooral van zwavelzuur zilver, strekken ter contrôle van de gevolgde methode.

Terwijl men de studie van het peroxy-zwavelzuur zilver hoopt te vervolgen, is het voornemen in de eerste plaats, daarvan nog verscheiden analysen te doen; terwijl de omstandigheden, waaronder het wordt gemaakt, zooveel mogelijk zullen gewijzigd worden, en dat ter contrôle, voor zooverre betreft de samenstelling van dit product. Het bestaan toch van een zuur der formule $SO_7 H_2$ of

[1]) l. c. pag. 41.

$S_2\,O_{14}\,H_4 = 2\,S\,O_7\,H_2$ (het overzwavelzuur [1]) zou tot formule hebben $S_2\,O_8\,H_2$) verdient wel een genoegzaam strenge studie. Ook handelt het hier om een *reeks* van verbindingen van zilverbioxyde met een zilverzout van oxy-zuren (belangrijk in tweeërlei opzicht, en als zóódanig, maar vooral met 't oog op de oxy-zuren), wier gebied (namelijk van gemelde reeks) zich zonder twijfel tevens uitstrekt tot de scheikunde der koolstofverbindingen, en ook in die richting zal gearbeid worden.

Utrecht, 25 Juni 1898.

(6 Augustus 1898).

---

[1]) Zie de volgende Verhandeling.

JOHN NAPIER'S WERKEN

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VI. N°. 6.

(Met Portret en 3 Platen.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
April 1899.

JOHN NAPIER'S WERKEN

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

Deel VI. N°. 6.

(Met Portret en 3 Platen.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1899.

On doit être curieux de connaître la marche souvent indirecte et pénible des inventeurs, les différents pas, qu'ils ont faits pour parvenir au but, et combien on est redevable à ces véritables bienfaiteurs des hommes. Cette connaissance d'ailleurs n'est pas de pure curiosité: elle peut servir à guider dans des recherches semblables, et elle sert toujours à répandre une plus grande lumière sur les objets, dont on s'occupe.

Lagrange.

INLEIDING.

John Napier [1]) was de oudste zoon van den nauwelijks zestien jaar ouderen Archibald Napier en Janet Bothwell. Hij werd in 1550 te Merchiston bij Edinburgh geboren. Zijn achterbetovergrootvader en naamgenoot John Napier was gehuwd met een achterkleindochter van den in 1425 onthoofden graaf van Levenax, Duncan VIII, met wien Jacobus VI, koning van Schotland, zoon van Maria Stuart, door zijn vader Darnley in denzelfden graad verwant was.

Naar luid van een familielegende verwierf zich in de veertiende eeuw de stamvader der Napier's, Donald, tweede zoon van den graaf van Lennox, door zijn ongeëvenaarde dapperheid op het slagveld, van David II, koning der Schotten, aanzienlijke bezittingen en den eernaam van Na-Peer, den Weergalooze, dien hij als familienaam aannam.

John Napier zou zich dien eernaam waardig betoonen.

Op dertienjarigen leeftijd, twee maanden vóór den dood van zijn moeder, die den 20sten December 1563 overleed, werd „Johannes Neaper'' ingeschreven als student aan St-Salvator's College te St-Andrews, waar zijn naam evenwel onder die der baccalaurei van 1566 niet meer voorkomt.

---

[1]) Napier zelf spelt zijn naam:

1) Jhone Neper en Jhone Nepair, zeldzamer John Napeir en Jo. Nepar, in brieven, akten, enz.;

2) Joannes Neperus in zijn Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614), Rabdologia (1617) en Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (1619);

3) Joannes Naperus in een onvoltooid MS over algebra;

4) John Napeir in zijn A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John (1593, 1594 en 1611), alsmede in de Fransche uitgaven van dit werk (1602, 1603, 1605 en 1607), „reueue par lui-mesme'';

5) John Nepair in Wright's vertaling van de Descriptio (1616 en 1618), „perused and approued by the Author''.

Verder vindt men den naam gespeld als: Naipper, Napar. Napare, De Napeier, Naper, Napier, Napper, Neaper, Nepeir, Nepier en Nepper.

De oudste vorm, Neper, komt reeds in de vijftiende eeuw voor; de jongste, Napier, de tegenwoordige familienaam, o. a. in den vijfden druk van A Plaine Discovery (1645).

Vermoedelijk verliet hij St-Andrews, om zijn studiën aan de universiteit te Parijs voort te zetten: reeds in 1560 had zijn oom Adam Bothwell aan zijn vader geschreven: „I pray you, Schir, to send your sone Jhone to the schuyllis; oyer to France or Flandaris; for he can leyr na guid at hame, nor get na proffeit in this maist perullus wordle".

In 1571, toen zijn huwelijk met Elizabeth Stirling werd voorbereid, bevond Napier zich weer in Schotland [1]). Einde 1572 had de huwelijksvoltrekking plaats. In 1574 werd er voor hem een fraai slot opgetrokken aan de Endrick. Aan de overzijde van de rivier lag een vlasmolen. Men verhaalt, dat Napier, om in zijn wetenschappelijke overpeinzingen niet gestoord te worden, den molenaar meermalen liet verzoeken, den molen stil te doen staan [2]).

In 1579 overleed Napier's echtgenoote, na hem een zoon, Archibald, die in 1627 met den titel lord Napier in den adelstand werd verheven, en een dochter, Janet, geschonken te hebben. John Napier zelf was geen edelman; als landheer teekent hij zich Laird of Marchistoun en Baro Merchistonii, als leenman van zijn vader Fear of Marchistoun [3]).

Eenige jaren na den dood van zijn eerste vrouw trad Napier in het huwelijk met Agnes Chisholm, die hem overleefde. Zij schonk hem vijf zoons en vijf dochters, van wie de tweede zoon, Robert, zich door de uitgaaf van zijn vaders litteraire nalatenschap de meeste bekendheid heeft verworven.

Na den dood van zijn vader, in 1608, betrok Napier Merchiston Castle.

Op rijper leeftijd schijnt hij aan jicht geleden te hebben [4]).

Bij nagenoeg alle gebeurtenissen, waaraan de geschiedenis van Schotland in de tweede helft van de zestiende eeuw onder de regeering van Maria Stuart en Jacobus VI zoo rijk is geweest, waren aanverwanten van Napier betrokken.

In 1571/72 tijdens de „King and Queen's Wars" werd Merchiston Castle zelfs meermalen, schoon vruchteloos, door de „Queen's men" belegerd.

[1]) Het is mij niet bekend, uit welke bron Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2ter Band, Leipzig 1892, p. 643, zijn mededeeling heeft geput, „dass er [Napier] als ganz junger Mann eine Reise durch Deutschland, Frankreich und Italien machte, von der er 1571 wieder nach Schottland zurückkehrte, welches er nie wieder verliess".

[2]) Cajori, A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching, New York and London 1896, p. 155.

[3]) In den vijfden druk van A Plaine Discovery (1645) luidt de onderteekening van de opdracht abusievelijk: John Napier, „Peer" of Marchiston.

[4]) Hume, Traité de la Trigonometrie, Paris 1636, 1ste Deel, p. 116.

De mislukte aanslag van Philips II op de onafhankelijkheid van Engeland, Schotland en de Nederlanden in 1588 en diens onafgebroken pogingen, om na den ondergang van de Onoverwinnelijke Vloot met de Katholieke edelen in Schotland verbintenissen aan te knoopen, deden Napier, als vurig Calvinist, zijn rol van lijdelijk toeschouwer verwisselen met die van wakker kampvechter voor de zaak der Hervorming.

In 1588 koos de kerkeraad van Edinburgh hem tot een van zijn afgevaardigden naar de Algemeene Vergadering. In October 1593 behoorde hij tot een deputatie van zes leden, die bij Jacobus VI moest aandringen op de bestraffing der „Popish rebels", waarvan Napier's schoonvader, Sir James Chisholm of Cromlix, er een was. En de opdracht aan Jacobus VI van zijn eerstlingsarbeid, A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John, neergesteld, opdat „hereby the simple of this Iland may be instructed, the godly confirmed, and the proud and foolish expectations of the wicked beaten downe", dateert van den 29sten Januari $159\frac{3}{4}$ [1]).

„Therefore, Sir", zoo richt Napier zich vrijmoedig tot den koning, „let it be your M. continuall study (as called and charged thereunto by God) to reforme the vniuersall enormities of your country, and first (taking example of the princely Prophet Dauid) to begin at your M. owne house, familie and court, and purge the same of all suspicion of Papists, and Atheists or Newtrals, wherof this Reuelation foretelleth, that the number shall greatly increase in these latter daies. For shall any Prince be able to be one of the destroiers of that great seate, and a purger of the world from Antichristianisme, who purgeth not his owne countrie? shal he purge his whole country, who purgeth not his owne house? or shal hee purge his house, who is not purged himselfe by priuate meditations with his God? I say therefore, as God hath mercifully begunne the first degree of that great worke in your inward minde, by purging the same from all apparant spot of Antichristianisme, as that fruitfull meditation vpon the 7. 8. 9. and 10. verses of the 20. Chapter of the Reuelation, which your highnes hath both godly and learnedly set forth, doth beare plaine testimony, to your M. high praise and honour: So also wee beseeche your M. (hauing consideration of the treasonable practises in these present daies, attempted both against Gods trueth, your authoritie, and the common wealth of this countrie,) to proceede to the other degrees of that reformation, euen orderly from your M. owne persone till

[1]) 1593 OS, 1594 NS. Onder OS begon in Schotland het jaar den 25sten Maart.

your highnes familie, and from your family to your court. Til at last, your M. whol country stand reformed in the feare of God ready waiting for that great day, in the which it shall please God to call your M. or yours after you, among other reformed Princes, to that greate and vniuersall reformation, and destruction of that Antichristian seat and citie Rome, according to the wordes prophecied, Apoc. 17. saying: The ten horns are ten Kings, &c. These are they that shall hate that harlot, and shall make her desolate and naked, and shall eate vp her flesh and burne herselfe with fire."

Van den 7den Juni 1596 eindelijk dagteekenen Napier's „Secrett inuentions, proffitable & necessary in theis dayes for defence of this Iland & withstanding of strangers enemies of Gods truth & relegion" [1]), waaromtrent evenwel niets naders bekend is.

Wanneer evenwel noch zijn maatschappelijke positie noch zijn godsdienstige overtuiging hem dwongen, om zich met de publieke zaak in te laten, dan wijdde hij zich uitsluitend aan de administratie der bezittingen van zijn familie, hem door zijn vader toevertrouwd, aan de verbetering van den landbouw, die toenmaals in Schotland nog op een zeer lagen trap van ontwikkeling stond, en aan de

---

[1]) Anno Dm̃ 1596 the 7 of June
Secrett inuentions, proffitable & necessary in theis dayes for defence of this Iland & withstanding of strangers enemies of Gods truth & relegiõ.

First the inuentiõ proofe & perfect demonstratiõ geometricall & alegebricall of a burning mirrour which receuing the dispersed beames of the sonne doth reflex the same beames alltogether united & concurring priselie in one mathematicall point. In the which point most necessarelie it ingendreth fier, with an euident demonstration of their error who affirmeth this to be made a parabolik sectiõ.

The use of this inuentiõ serueth for burning of the ennemis shipps at whatsoeuer appointed distance.

Secondlie the inuentiõ & sure demonstratiõ of an other mirrour which receuing the dispersed beames of any materiall fier or flame yealdeth allsoe the former effect, & serueth for the like use.

Thirdlie the inuentiõ & visible demonstration of a peice of Artillery, which shott passeth not linallie through the armie distroying onlie those that stand on the randon thereof, & fra them furth flying idly as others doe but passeth superficially ranging abrode within the whole appointed place, & not departing furth of the place till it hath executed his whole strength by distroying those that be within the bounds of the said place.

The use hereof not onlie serueth greatlie against the Armie of the Enemy on land but allsoe by sea it serueth to destroy & cut downe & one shott the whole masts & tackling of so many shippes as be within the appointed bounds as well abried as in large so long as any strength at all remayneth.

Fourthlie the inuentiõ of a round chariot of mettle made of the proofe of dooble muskett which motiõ shall be by those that be within the same more easie more light & more spedie by much then so manie armed men would be otherways.

The use hereof as well in mouing serueth to breake the array of the enemis battle studie van zijn lievelingswetenschappen, de theologie en de mathematiek, waarbij voornamelijk de vraag naar een duidelijke verklaring van de Openbaring van Johannes en die naar hulpmiddelen ter bekorting van de omslachtige beeijferingen der spherische astronomie zijn geest bezig hielden.

Met de meeste oudere en nieuwere werken over wiskunde was Napier bekend; uitdrukkelijk vermeldt hij Euclides, Regiomontanus, Coppernicus, Reinhold, Stevin, Van Lansberge, Pitiscus en Adriaen Metius. Als wiskunstenaar had hij zich onder zijn landgenooten reeds naam gemaakt lang vóór zijn uitvinding van de logarithmen, zooals blijkt uit Skene's De Verborum Significatione, Edinburgh 1597, waar men bij de verklaring van „particata vel perticata terræ" o. a. vindt aangeteekend: „But it is necessare, that the measurers of land, called landimers, in Latin agrimensores, obserue and keep, ane just relation, betwixt the length and the bredth of the measures quhilk they vse in measuring of landes, quhairanent I finde na mention in the lawes and register of this realme, albeit ane ordinance thereanent be maid be king Edward the first, King of England, the 33. zeir of his reigne: and because the knawledge of this mater is very necessare, in measuring of lands, dayly vsed in this realme, I thought gud to propone certaine questions, to Iohn Naper, fear of Merchistoun, ane gentleman of singuler judgement and learning, specially in the Mathematicque sciences. The tenour quhairof, and his answeres maide thereto followis." [1])

& to make passage as allsoe in staying & abiding within the enemis battle, it serueth to destroy the environed enemy by cōtinuall charge & shott of harquebush through small hoalls. The Enemy in the meane time being abased & alltogether uncertaine what defence or pursuit to use against a mouing mouth of mettle.

These inuentions beside deuises of sayling under the water with diuers other deuises & strategems for harming of the enemyes by the grace of God & worke of exspert craftesmen I hope to perform.

Jo Nepar fear of Marchistoun.

[1]) Napier's antwoorden luiden:

„First, be quhat rule sall we vnderstande the length and bredth of the fall?

It is answered: There is twa sortes of falles, the ane lineall, the vther superficiall: the lineall fall, is ane met-wand, rod, or raip, of sex elnes lang, quhair be, length and bredth, are seuerally met. Ane superficiall fall of lande, is sa meikle boundis of landes, as squairly conteinis ane lineall fall of bredth, and ane lineall fall of length, quhairof followis, that be the lineall fall, lande is measured, and be the superficiall fall, lande is rekned. Nowe quhair it is inquired be quhat rule the length and bredth of ane fall sall be vnderstand.

I answer, That quhen-so-euer the elnes of bredth being multiplied be the elnes of length, do produce 36. elnes: the number product, is ane superficiall fall: and the saide bredth and length, are the just bredth and length that makis ane fall. Swa 36. elnes lang, of ane elne broad, are ane fal of land. Item, auchtene elns lang, twa elnes broad, are the like: alswa, twelue elnes lang, of three elnes broad, Or nine elnes lang of foure

Een onverwelkbaren roem evenwel verwierf Napier zich pas door zijn Wonderbaren Canon der Logarithmen: als den „King of Numbers" nam het dankbare nageslacht hem op onder de Heroën der Wetenschap.

De inspanning, aan de samenstelling van den Canon Logarithmorum verbonden, schijnt Napier's gezondheid ondermijnd te hebben. Nauwelijks drie jaren na de voltooiing, den 4^{den} April 1617, overleed hij [1]); zijn stoffelijk overschot werd in de sedert vernieuwde

elnes broad, are ane fall. Lastly, sex elnes alwayis, that is to say, sex elnes lang, and sex elnes broad, makis ane fall. To this fall the little ruid, or ruid of warke, or of buirdes, or of maisone or sklait warke, is equal, quhilk is maist properly the ruid, as after followis.

Secondly, how mony kindes of ruids are in vse? Answer. Twa, quhair-of the ane is proper, the vther improper. The ruid properly, is ane superficiall fall, and conteinis threttie sex squair elnes: Ane squair elne, being the boundes of ane elne in breadth, and ane elne in length, squarely inclused. The vther vulgare and improper ruide of lande, conteinis fourtie of thir former ruides, or superficiall fallis, and is the quarter of ane aiker of lande, because foure of thir ruides makis ane aiker as saide is.

Thridly, be quhat rule may the just measure of ane aiker in length and breadth be vnderstand? It is answered, Multiply be Arithmeticall multiplication, the number of the falles that ar in the length of the land, be the number of fallis that are in the bredth thereof: Euerie aucht-score fallis of the number produced, and resulting of the said multiplication, is ane aiker: and therefore aucht-score fallis of length, and ane fall of bredth, makis ane aiker: and foure-score fallis of length, and twa fallis of bredth, makis ane aiker. Item fourtie fallis of length, and foure fallis in bredth makis ane aiker. Alswa twentie fallis in length, and aucht fallis in bredth, makis ane aiker. Lastly, ten fallis in bredth, and sextene fallis in length makis ane aiker.

Fourtly, seing there is ane kinde of measuring of land be Rod, and raip: quhat is the forme thereof? And gif there be ony maa forms; how are they called? and quhat is the forme and maner of the samin? It is answered. There be knawin to expert Mathematiciens, mony and diuers wayes to mette land, all agreand togidder in ane, bot of the vulgar people there is bot ane forme of metting vsed and vnderstand, to wit, be rod and raip, that is to say, be ane rod or gade of sex elnes lang: Or be ane string or coard, of sex elnes lang, stented betwixt twa staues. The coarde being ane schaft length abone the pykes, or nether endes of the staues. The said rod or raip, or either of them, is called ane fall: to wit, the lineall fall foresaid. With these fallis, ilke square piece of lande, is met ouer the middis, quhat fallis and elnes it hes of length, and thereafter is met croceouer the middis, quhat fallis and elnes it hes of bredth. Thereafter the fallis and elnes of the length on the ane pairt, and the fallis and elnes of the bredth, on the vther pairt, are multiplied togidder, and the producte schawis the number of the aikers, ruides, elnes, quhilk the said piece of land conteinis. As for example, gif the piece of land be 51. fal, three elnis of length, and 10. fallis 2. elnis of bredth: multiply 51. fallis 3. elnis. or $51\frac{1}{2}$. fallis to be 10. fallis 2. elnis: Or be $10\frac{1}{3}$. fallis; The product will amount to $532\frac{1}{6}$. fallis: Or 532. fallis, 6. elnis: quhair-of euery aucht-score fallis ar ane aiker. Swa 532. fallis 6. elnis, are three aikers and ane quarter, 12. fallis, and 6. elnis of met land."

[1]) Soms vindt men 1616 en 1618 als Napier's sterfjaar opgegeven, wiens testament evenwel spreekt van „the rycht honorabill Jon Naipper of Merchinstoun... quha deceist upon the fourt day of Appryle the yeir of God im vic and sevinteine yeiris".

St-Cuthbert's kerk buiten de West Port van Edinburgh bijgezet [1]).

Voor uitvoeriger inlichtingen omtrent Napier verwijs ik den lezer naar:

Mark Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston, his Lineage, Life, and Times, with a History of the Invention of Logarithms, Edinburgh and London 1834, 4°. 534 pp.,

waaraan de medegedeelde levensbijzonderheden meerendeels ontleend zijn.

Naar tijdsorde van hun verschijnen gerangschikt, schreef Napier:

1) Een duidelijke verklaring van de gansche Openbaring van Johannes (A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John), Edinburgh 1593, waarin o. a. de aanvang van den Dag des Oordeels tusschen 1688 en 1700 n. Chr. wordt gesteld.

2) Beschrijving van den wonderbaren Canon der Logarithmen (Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio), Edinburgh 1614, met toepassing op de driehoeksmeting.

3) Roerekening (Rabdologia), Edinburgh 1617, met een aanhangsel over de Voorraadkamer der Vermenigvuldiging (Promptuarium Multiplicationis) en een over de Plaatselijke Rekenkunde (Arithmetica Localis).

4) Samenstelling van den wonderbaren Canon der Logarithmen (Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio), Edinburgh 1619, met een aanhangsel Over de berekening van een ander en beter soort van logarithmen (De aliâ eâque præstantiore Logarithmorum condenda), met Toelichtingen (Lucubrationes) van Briggs, den „Satellite of Napier'', en een over Stellingen voor de oplossing der boldriehoeken volgens een gemakkelijker methode (Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda), met Aanteekeningen (Annotationes), eveneens van Briggs.

Dit werk werd twee jaren na Napier's dood uitgegeven door diens zoon Robert.

5) Rekenkunde (Ars Logistica), een onvoltooid MS, en Algebra, eveneens een onvoltooid MS, van een Inleiding voorzien en samen uitgegeven door Mark Napier onder den titel: De Arte Logistica, Edinburgi 1839.

Van A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John verschenen in de Engelsche, Fransche, Duitsche en Nederlandsche taal onderscheiden uitgaven als zooveel bewijzen, hoezeer dit werk,

[1]) Il mourut l'an 1616. & fut enterré hors la porte Occidentale d'Edinbourg, dans l'Eglise de Sainct Cudbert.

Hume, Traité de la Trigonometrie, Paris 1636, 1ste Deel, p. 116.

waarin de Paus voor den Antichrist werd verklaard, in den smaak viel van de Protestanten dier dagen.

Van de Rabdologia zagen drie Latijnsche, een Italiaansche en een Nederlandsche editie het licht; de virgulæ numeratrices vonden als Napier's bones, speaking-rods, künstliche Rechenstäblein, Nepper's Rechenstäbchen, bâtons népériens, telroetjes en rekenstaafjes op vele rekenscholen in Schotland, Engeland, Frankrijk, Duitschland en de Nederlanden ingang.

Minder succes hebben de werken gehad, waaraan Napier zijn wetenschappelijken roem verschuldigd is, zijn Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio en Constructio. Dit verschijnsel vindt zijn verklaring in de omstandigheid, dat de logarithmen van den Canon Mirificus spoedig hebben moeten wijken voor een bruikbaarder soort, waaraan meestal, met voorbijgang van Napier's aandeel in de aangebrachte verbetering, uitsluitend de naam van Briggs, den samensteller van de Arithmetica Logarithmica, Londini 1624, wordt verbonden. Buitendien waren reeds vijf jaren vroeger verschenen Speidell's New Logarithmes, the First inuention whereof, was, by the Honourable Lo: Iohn Nepair Baron of Marchiston, and Printed at Edinburg in Scotland, Anno: 1614, [Londen] 1619, onze natuurlijke logarithmen met $e = 2{,}7182818284\ldots$ als grondtal, die niet wezenlijk van Napier's logarithmen verschillen, aangezien de Canon Mirificus, als men numeri en logarithmen door tien millioen deelt, overgaat in een tafel met $1/e = 0{,}3678794412\ldots$ als grondtal.

Misleid door deze overeenkomst, hebben zelfs historieschrijvers van naam, o. a. Montucla [1]), zonder de bronnen te raadplegen, Napier's logarithmen zonder meer met die van Speidell vereenzelvigd, „obgleich die letzteren mit jenen nicht so ganz einerley sind", zooals reeds Karsten [2]) noodig vond op te merken [3]).

---

[1]) On n'a cependant pas entièrement rejeté la forme des logarithmes de Neper pour les nombres naturels. Ils ont leur usage dans la géométrie transcendante; car ils représentent les aires de l'hyperbole équilatère entre les asymptotes, l'unité étant la valeur du carré inscrit; c'est pourquoi on les nomme hyperboliques.

Montucla, Histoire des Mathématiques, Paris 1799, p. 21 (de eerste druk verscheen in 1758).

[2]) Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2ter Theil, 1ster Abtheilung, Greifswald 1786, p. 194.

[3]) Niettemin vindt men Montucla's dwaling o. a. terug bij:

Callet, Tables portatives de Logarithmes, Paris 1795, p. IV.

De Montferrier, Dictionnaire des Sciences Mathématiques pures et appliquées, Tome II, Paris 1836, p. 186.

Duhamel, Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement, 2ième Partie, Paris 1866, p. 282.

„On devrait s'attendre", mocht Biot [1]), die over Montucla's handelwijze in scherpe woorden den staf breekt, niet zonder grond oordeelen, „à en trouver une plus juste estime dans l'Histoire de l'astronomie par Delambre [2]), à qui ne manquait ni la connaissance des méthodes logarithmiques actuelles, ni l'amour de la vérité. Mais, par un défaut de philosophie qui se fait trop remarquer dans son ouvrage, il n'emploie pas seulement la simplicité de nos formules modernes pour mettre au grand jour les idées de Napier, ce qui serait leur véritable usage, il traduit imparfaitement ces idées en formules modernes, leur donne ainsi pour base une approximation empirique qu'elles n'ont point et qui est positivement opposée à l'esprit de Napier. Puis, ainsi défiguré, il l'examine, lui demande compte d'inexactitudes qu'il n'a pas commises, de fautes qu'il lui attribue par sa propre erreur, après quoi il en porte un jugement qui, pour être bienveillant et approbatif, n'en est pas moins faux."

„Si je parviens", zoo besluit hij de inleiding van zijn Analyse et restitution de l'ouvrage original de Napier, „à le retirer ainsi du tombeau où l'ont enseveli les commentateurs..., je croirai avoir donné un sujet de satisfaction véritable aux savants éclairés qui aiment la gloire de leurs prédécesseurs comme leur héritage, et se trouvent heureux de pouvoir rendre un juste hommage à leurs travaux." [3])

Briot, Leçons d'Algèbre, 2ième Partie, Paris 1868, p. 113.
De Comberousse, Cours d'Algèbre Supériere, 1ière Partie, Paris 1887, p. 415.
Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 1ster Band, Leipzig 1868, p. 117.
Brockhaus' Konversations-Lexikon, 11ter Band, Leipzig, Berlin und Wien 1894, p. 253.
Humblin Smith, Elementary Algebra, London 1885, p. 337.
Halland Knight, Higher Algebra, London and New York 1888, p. 190.
Van Swinden, Grondbeginselen der Meetkunde, Amsterdam 1790, p. 134.
De Gelder, Wiskundige Lessen, 2de Cursus, Den Haag 1809, p. 356.
Amelse, Lessen over de Algebra of Stelkunst, Leyden 1829, p. 350.
Smaasen-Bierens de Haan, Gronden der Hoogere Algebra, Amsterdam 1855, p. 89.
Winkler Prins, Geïllustreerde Encyclopædie, 10de Deel, Rotterdam 1886, p. 308.
Bos, Leerboek der Algebra, 3de Deel, Nijmegen 1887, p. 10.
Van Laar, Leerboek der Algebra, 2de Deel, Leiden 1889, p. 32.
Landré, Algebraïsche Hoofdstukken, Utrecht 1891, p. 225.
Lobatto-Rahusen, Lessen over de Hoogere Algebra, Sneek 1892, pp. 375 en 381.
Jaeger, Aphorismen en Curiosa, Haarlem [1894], p. 67.
Van Leeuwen, Het een en ander over de logarithmen der getallen, in: Archimedes, Tijdschrift voor Lagere Wiskunde, 6de Jaargang, Zutphen [1897], pp. 65 en 98.

[1]) Biot, Memoirs of John Napier of Merchiston, etc.; Analyse et restitution de l'ouvrage original de Napier, intitulé: Mirifici logarithmorum canonis constructio, in: Journal des Savants, Année 1835, Paris 1835, p. 259.

[2]) Delambre, Histoire de l'Astronomie moderne, Tome I, Paris 1821, p. 491.

[3]) Biot, t. a. p., p 261.

Sedert hebben Bernhardt [1]), Wackerbarth [2]), Günther [3]) e. a., schoon minder welsprekend, opnieuw pogingen in het werk meenen te moeten stellen, om Napier's arbeid recht te doen wedervaren:

Die Geschichte ist in Wahrheit die Wissenschaft der Pietät.

A. Dove.

---

¹) Bernhardt, Die Neper'schen Logarithmen, Wittenberg 1842.

²) Wackerbarth, Logarithmes hyperboliques et logarithmes népériens, in: Les Mondes, Tome XXVI, Paris 1871, p. 626.

³) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876, p. 271.

ONDERWERPEN EN PUNTEN,

DIE IN NAPIER'S WISKUNDIGE WERKEN BIJZONDER DE AANDACHT VERDIENEN.

Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.

1) De verklaring van den aard en de eigenschappen der logarithmen van den Canon Mirificus.

2) De beschrijving van de inrichting van den Canon Mirificus.

3) Het opzoeken in den Canon Mirificus van de logarithmen bij de numeri, en omgekeerd.

4) De verklaring van den Regel van Napier voor de oplossing van den rechthoekigen en den rechtzijdigen boldriehoek.

5) De regels voor de berekening der hoeken van een boldriehoek uit de drie zijden:

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\{\sin (s - b) \sin (s - c)/\sin b \sin c\}}$;
$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\{\sin s \sin (s - a)/\sin b \sin c\}}$;
$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b + c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b - c) : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b' \pm c')$,
waar b' en c' de projecties van b en c op a aanduiden.

Rabdologia.

1) De instrumentale hulpmiddelen bij de uitvoering van vermenigvuldigingen, deelingen en worteltrekkingen.

2) De uitvoering van een deeling tot in drie decimalen onder vermelding van Stevin's Arithmetica Decimalis.

3) Een voorbeeld van een verkorte vermenigvuldiging.

4) Het voorkomen van de komma als decimaalteeken in de voorbeelden, onder 2) en 3) bedoeld.

Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio.

1) De verklaring van de schrijfwijze der tiendeelige breuken met de stip als decimaalteeken.

2) De bepaling van grenzen voor sommen, producten, verschillen en quotienten van tiendeelige benaderde waarden.

3) De bewijzen voor de eigenschappen, uitgedrukt door de formules:

$$10^7 - u < \text{Nap log } u < 10^7\,(10^7 - u)/u\,;$$
$$10^7\,(U - u)/U < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < 10^7\,(U - u)/u.$$

4) De wijze van samenstelling der Tabula Radicalis.

5) De wijze, waarop uit de Tabula Radicalis de logarithmen berekend worden bij de sinussen der hoeken:

a) van 90° tot 60°; b) van 60° tot 0°.

6) De methoden voor de benadering van logarithmen met 10 en met 1/10 als grondtal.

7) De regels voor de berekening bij den boldriehoek:

a) van de basis uit de beenen en den tophoek;
b) van den tophoek uit de beenen en de basis.

8) De Analogieën van Napier, die zonder bewijs op pp. 61 en 62 worden medegedeeld — een niet-overtollige bijvoeging:

Men kent en vindt haar standplaats zelfs niet meer.
Ps. 103, vs. 8.

9) De aanteekeningen van Briggs bij de Analogieën van Napier.

Ars Logistica.

1) De uiteenzetting van den aard en den samenhang der zeven rekenkundige bewerkingen.

2) De regel voor de oplossing van vraagstukken over de evenredige afhankelijkheid van grootheden.

3) De regel voor de aftrekking van tiendeelige getallen.

4) De vereenvoudigingen, in de uitvoering van vermenigvuldigingen en deelingen van tiendeelige getallen aangebracht.

5) De beschrijving van de Tabula Supplementorum, Pascal's Triangle Arithmétique.

6) De verklaring van de worteltrekking uit tiendeelige getallen voor willekeurige waarden van de wortelexponenten.

7) De regels voor de benadering van wortels.

8) Een voorbeeld van een verkorte vermenigvuldiging.

9) De invoering van een eenvoudiger notatie voor wortels.

10) De beschouwingen over de tweewaardigheid en de onbestaanbaarheid van even-machtswortels.

Algebra.

1) De worteltrekking uit veeltermen.

2) De theorie der vergelijkingen, met name de analytische oplossing der vierkantsvergelijkingen en de opmerking over het invoeren van wortels door machtsverheffing.

A PLAINE DISCOVERY OF THE WHOLE REVELATION OF ST JOHN.

A Plaine Dis- | couery of the whole Reue- | lation of Saint Iohn: set | downe in two treatises: The | one searching and prouing the | true interpretation thereof: The o- | ther applying the same paraphrasti- | cally and Historically to the text. | Set Foorth By | Iohn Napeir L. of | Marchistoun younger. | Whereunto Are | annexed certaine Oracles | of Sibylla, agreeing with | the Reuelation and other places | of Scripture. |

Edinbvrgh | Printed By Ro- | bert Walde-graue, prin- | ter to the Kings Ma- | jestie. 1593. | *Cum Priuilegio Regali.* |

4°. $18\frac{1}{2} \times 13\frac{1}{2}$ cM. A 1^1, de signatuur: A. A 1^2, wit. A 2^1, *Titel.* A 2^2, Wapens van Schotland en Denemarken (Jacobus VI van Schotland was gehuwd met Anna, tweede dochter van Frederik II van Denemarken, den vriend en weldoener van Tycho Brahe); onderaan: *In vaine are all earthlie coniunctions, vnles vve be heires together, and of one bodie, and fellovv partakers of the promises of God in Christ, by the Evangell.* A 3^1—A 5^1, 5 pp.: *To The Right Excellent, High And Mightie Prince, Iames The Sixt, King of Scottes, Grace And Peace, &c.*, onderteekend: *At Marchistoun the* 29 *daye of Ianuar,* 1593 (1593 OS, 1594 NS).... *Iohn Napeir, Fear of Marchistoun.* A 5^2—A 7^2, 5 pp.: *To the Godly and Christian Reader.* A 8^1: *The booke this bill sends to the Beast, | Crauing amendment now in heast, |* enz., 28 regels; dan: *Faults escaped.*, 16 regels. A 8^2: *A Table of the Conclusions introductiue to the Reuelation, and proued in the first Treatise.* B 1^1—F 3^1, pp. 1—69: *The First And Introdvctory Treatise, conteining a searching of the true meaning of the Reuelation, beginning the discouerie thereof at the places most easie, and most euidentlie knowne, and so proceeding from the knowne, to the prouing of the vnknowne, vntill finallie, the whole groundes thereof bee brought to light, after the manner of Propositions.*, 36 Propositions met Conclusion. F 3^2,

p. 70: *A Table Definitive And Diuisiue of the whole Revelation.* F 4^1—S 7^1, pp. 71—269: *The Second And Principal Treatis, wherein (by the former grounds) the whole Apocalyps or Reuelation of S. Iohn, is paraphrasticallie expounded, historicallie applied, and temporallie dated, with notes on euery difficultie, and arguments on each Chapter.;* elk hoofdstuk bestaat uit: 1) *The Argument.*; 2) *The Text.*, *Paraphrastical exposition.*, *Anno Christi.* en *Historical application.*, in vier kolommen naast elkander gedrukt; 3) *Notes, Reasons, and Amplifications.* S 7^2—S 8^2, 3 pp.: *To the misliking Reader whosoeuer.* T 1^1—T 4^1, 8 pp.: *Hereafter Followeth Certaine Notable Prophecies agreable to our purpose, extract out of the books of Sibylla, whose authorities neither being so authentik, that hitherto vve could cite any of them in matters of scriptures, neither so prophane that altogether we could omit them: Whe haue therefore thought very meet, seuerally and apart to insert the same here, after the end of this worke of holy scripture, because of the famous antiquitie, approued veritie, and harmonicall consentment thereof with the scriptures of God, and specially with the* 18. *chapter of this holy Revelation.* 296 pp.

Van dit werk verschenen vijf uitgaven in het Engelsch: Edinburgh 1593, 1594, 1611 en 1645, Londen 1611; — twee in het Nederlandsch: Middelburg 1600 en 1607; — zes in het Fransch: La Rochelle 1602, 1602, 1603, 1605, 1607 en 1607; — vier in het Duitsch: Gera 1611 en 1612, Frankfort a/M 1615 en 1627.

Een exemplaar bezit in ons land de bibliotheek van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden (Middelburg 1607).

Over den inhoud.

De troon Gods in den hemel (O. IV, 2), de vier en twintig ouderlingen, gezeten rondom dien troon, met gouden kronen op hun hoofden en bekleed met witte kleederen (O. IV, 4), de vier dieren, een leeuw, een kalf, een mensch en een vliegenden arend gelijk, ieder met zes vleugelen en vol oogen van voren, van achteren en van binnen (O. IV, 6, 7, 8), de twee getuigen, die zullen profeteeren duizend twee honderd en zestig dagen (O. XI, 3), de tempel Gods (O. XI, 19) en de vrouw, bekleed met de zon, de maan onder haar voeten en een kroon van twaalf sterren op haar hoofd (O. XII, 1), zijn de ware religie, de vier en twintig boeken van het oude testament, de vier evangeliën, de twee testamenten en hun belijders, Gods kerk op aarde en de ware kerk Gods.

Het beest met de twee hoornen, opgekomen uit de aarde (O. XIII, 11), verbeeldt den antichrist, den paus en diens rijk, en dat met de zeven hoofden en tien hoornen, opgekomen uit de zee, met tien koninklijke hoeden op zijn hoornen en een naam van godslastering op zijn hoofden (O. XIII, 1), beteekent het Latijnsche d. i. Romeinsche rijk, waarvan dat van den antichrist een deel uitmaakt, met Rome als hoofdstad, het groote Babylon, de hoer, die zit op vele wateren en met wie de koningen der aarde gehoereerd hebben, de vrouw, dronken van het bloed der heiligen en der getuigen van Jezus, gezeten op een scharlakenrood beest, vol van namen der godslastering, met zeven hoofden en tien hoornen (O. XVII, 1 vv). Het beeld van het beest (O. XIII, 15) vormen de onwaardige Romeinsche keizers, onder wie het rijk verviel, en de Roomsche keizers, van wie Karel de Groote de eerste geweest is; zijn merkteeken (O. XIII, 16, 17) is de eed van gehoorzaamheid der onderdanen, later onder de pausen zichtbaar door χρς en door kruisen van verschillenden vorm op voorhoofd en rechterhand uitgedrukt; zijn naam (O. XIII, 17) λατεινος, d. i. het Latijnsche rijk, en zijn getal zes honderd en zes en zestig (O. XIII, 18), de som van de waarden, door de letters van zijn naam aangeduid [1]).

Met de zeven bazuinen (O. VIII, IX, XI) wordt hetzelfde bedoeld als met de zeven fiolen (O. XVI), met de zeven donderslagen (O. X, 3, 4) hetzelfde als met de zeven engelen (O. XIV). De ster, gevallen uit den hemel op de aarde, aan welke de sleutel van den put des afgronds werd gegeven, waaruit een wolk van sprinkhanen opsteeg, die nederdaalde op de aarde (O. IX, 1 vv.), verbeeldt den vorst der Turken met zijn legerscharen, wiens heerschappij omstreeks 1051 n. Chr. begon; de vier engelen, die gebonden liggen aan den Euphraat (O. IX, 14), en de koningen, die van den opgang der zon komen zullen (O. XVI, 12), zijn de vier Mohammedaansche volkeren, de Turken, Tataren, Saracenen en Arabieren, wier rijk omstreeks 1296 n. Chr. door Osman ge-

[1]) De Grieken bedienden zich van de vier en twintig letters van hun alphabet en van de drie hulpteekens stigma (ϛ), koppa (Ϙ) en sampi (ϡ), om getallen te schrijven: met α, β, γ, δ, ε, stigma, ζ, η en ϑ duidden zij 1, 2, 3, ... 8 en 9 aan; met ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π en koppa 10, 20, 30, ... 80 en 90; met ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω en sampi 100, 200, 300, ... 800 en 900; om 1000, 2000, 3000, ... 8000 en 9000 voor te stellen, plaatsten zij een accent onder α, β, γ, δ, ε, stigma, ζ, η en ϑ; tienduizendtallen, myriaden, werden aangeduid door een M onder hun aantal te schrijven; bv.: $\overset{\alpha}{M} = 10000$, $\overset{\beta}{M} = 2000$, $\overset{\gamma}{M} = 30000$, enz.

grondvest werd. Gog en Magog (O. XX, 8) zijn de paus en de vorst der Turken; hun heirscharen, vermeld in de zesde bazuin (O. IX, 13 vv.) en de zesde fiool (O. XVI, 12 vv.), de Papisten en de Mohammedanen.

Met een profetischen dag wordt een jaar bedoeld, met een week zeven jaren, met een maand dertig jaren en met een jaar drie honderd en zestig jaren. De vijfde bazuin (O. IX, 1 vv.) en de vijfde fiool (O. XVI, 10, 11) loopen van 1051 n. Chr., toen de Turken hun heerschappij begonnen, tot de grondvesting van het rijk der Osmanen in 1296 n. Chr., waarmede de zesde bazuin en de zesde fiool een aanvang nemen. Elke bazuin en elke fiool omvat dus twee honderd en vijf en veertig jaren, zoodat de eerste bazuin (O. VIII, 7) en de eerste fiool (O. XVI, 2) in 71 n. Chr. begon. In hetzelfde jaar werd het zevende zegel (O. VIII, 1) geopend. En daar het eerste zegel (O. VI, 1) geopend werd in 29 n. Chr., toen Jezus zijn prediking begon, omvat elk zegel zeven jaren. De zevende bazuin (O. XI, 15) en de zevende fiool (O. XVI, 17) begonnen twee honderd en vijf en veertig jaren na 1296 n. Chr., dus in 1541 n. Chr., met den eersten van de zeven donderslagen (O. X, 3) en behooren twee honderd en vijf en veertig jaren later, dus in 1786 n. Chr., te eindigen. Ieder van de drie eerste donderende engelen (O. XIV) duidt een tijdperk van negen en veertig jaren aan en daar de dag des oordeels de vier laatste donderende engelen omvat, moet deze driemaal negen en veertig jaren na 1541 n. Chr. beginnen, waarschijnlijk tusschen 1688 en 1700 n. Chr.

De duizend jaren, gedurende welke satan gebonden lag (O. XX, 1, 2), beteekenen een tijdperk van vrede en begonnen omstreeks 300 n. Chr., evenals de duizend twee honderd en zestig jaren der heerschappij van den antichrist (O. XIII, 5).

Opmerkingen.

In de opdracht „To the Godly and Christian Reader" zegt Napier: „In my tender yeares, and barneage in Sanct Androis", waar hij van 1563 tot waarschijnlijk 1566 studeerde, „at the Schooles, hauing on the one parte contracted a louing familiaritie with a certaine Gentleman &c., a Papist: And on the other part, being attentiue to the Sermons of that worthie man of God, Maister Christopher Goodman, teaching vpon the Apocalyps, I was so mooued in admiration, against the blindnes of Papists, that could not most euidently see their seuen-hilled citie Rome, painted out there so liuely by Saint Iohn, as the mother of all spirituall whoredome, that not onely bursted I out in continual reasoning against my said familiar, but also from thenceforth, I determined with my selfe (by the assistance of Gods spirit) to employ my studie and diligence to search out the remanent mysteries of that holy book: as to this houre (praised be the Lorde) I haue bin doing at al such times, as conveniently I might haue occasion.... After the which, although (greatly rejoycing in the Lord) I began to write thereof in Latine: yet, I purposed not to haue set out the same suddenly, and far lesse to haue written the same also in English, til that of late, this new insolencie of Papists arising about the 1588 year of God, and dayly incresing within this Iland doth so pitie our hearts, seeing them put more trust in Iesuites and seminarie Priests, then in the true scripturs of God, and in the Pope and King of Spaine, then in the King of Kings: that, to preuent the same, I was constrained of compassion, leauing the Latine, to haste out in English this present worke, almost vnripe, that hereby, the simple of this Iland may be instructed, the godly confirmed, and the proud and foolish expectations of the wicked beaten downe, [purposing hereafter (Godwilling) to publish shortly, the other latin editiõ hereof, to the publike vtilitie of the whol church.] Whatsoeuer therfore through hast, is here rudely and in base language set downe, I doubt not to be pardoned thereof by all good men."

In de uitgaaf van 1611 zijn de woorden tusschen de vierkante haken vervangen door:

„And where as after the first edition of this booke in our English or Scottish tongue, I thought to haue published shortlie the same in Latine (as yet Godwilling I minde to doe) to the publike vtilitie of the whole Church. But vnderstanding on the one part, that this work is now imprinted, & set out diuerse times in the French & Dutch tongs, (beside these our English editions) & therby made publik to manie. As on the other part being aduertised that our papistical, adversaries wer to write larglie against the said editions that are alreadie set out. Herefore I haue as yet deferred the Latine edition, till hauing first seene the aduersaries obiections, I may insert in the Latin edition an apologie of that which is rightly done, and an amends of whatsoeuer is amisse."

Napier was dus in 1611 nog van plan, een Latijnsche uitgaaf van zijn werk te bezorgen. Waarschijnlijk heeft hij zijn voornemen moeten opgeven, omdat de samenstelling van zijn Wonderbaren Canon der Logarithmen al zijn vrijen tijd in beslag nam.

MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO.

Mirifici / Logarithmorum / Canonis descriptio, / Ejusque usus, in utraque / Trigonometria; ut etiam in / omni Logistica Mathematica, / Amplissimi, Facillimi, & / expeditissimi explicatio. / Authore ac Inventore, / Ioanne Nepero, / Barone Merchistonii, / &c. Scoto. /
Edinbvrgi, / Ex officinâ Andreæ Hart / Bibliopólæ, cIↄ. DC. XIV. /

4°. 19 × 14½ cM. A1[1], *Titel.* A1[2], wit. A2, 2 pp.: *Jllustrissimo, & optimæ spei Principi Carolo, Potentissimi, & Invictissimi, Iacobi D. G. magnæ Britanniæ, Franciæ, & Hiberniæ Regis, filio unico, Walliæ Principi, Duci Eboraci, & Rothesaiæ, magno Scotiæ Senescallo, ac Insularum Domino, &c. D. D. D.*, onderteekend: *Ioannes Nepervs.* A3[1]: *Jn Mirificvm Logarithmorum Canonem Præfatio.* A3[2] — A4[2], 3 pp., Verzen, t. w.: *Ad Lectorem Trigonometriæ studiosum.*, 12 regels, onderteekend: *Patricius Sand℥us.*; *In Logarithmos D. I. Neperi.*, 10 regels, niet onderteekend en eindigende met de woordspeling: *Nomine sic Nepar, Parili fit & omine Non Par, / Quum non hac habeat Nepar in arte Parem. /*; *Aliud.*, 6 regels, niet onderteekend; *Ad Lectorem.*, 4 regels, onderteekend: *Andreas Ivnivs Philosophiæ Professor in Academia Edinburgena.*; *In Logarithmos.*, 4 regels, niet onderteekend. B1[1] — D2[2], pp. 1—20: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, eiusque usus in utráque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio. Liber I.* D3[1] — I1[1], pp. 21—57: *Liber Secvndvs. De canonis mirifici Logarithmorum præclaro usu in Trigonometria.*; op p. 57 volgen op de *Conclvsio.* de *Errata ante lectionem emendanda.*, 7 regels, en onderaan: *Sequitur Tabula seu canon Logarithmorum.* I1[2] en a1[1]—m1[1], 90 pp., *De Tafel.* m1[2], wit, in sommige exemplaren: *Admonitio.* 156 pp.

Van dit werk verschenen zes uitgaven in het Latijn: Edinburgh

1614 en 1619 (met de Constructio als bijband), Lyon 1619, 1620 en 1658 (telkens met de Constructio als bijband), Londen 1807 (in deel VI van de Scriptores Logarithmici); — drie in het Engelsch: Londen 1616 en 1618, Edinburgh 1857.

Een exemplaar bezitten in ons land de bibliotheken der Rijksuniversiteiten te Groningen (Edinburgh 1614; Lyon 1658), Leiden (Edinburgh 1614) en Utrecht (Lyon 1620).

Over den inhoud.

a) De Canon Mirificus. [1])

Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, eiusque usus in utráque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio. Liber I. 20 pp.

Capvt. I. De Definitionibus.

1\. Def. Linea æqualiter crescere dicitur, quum punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.

Corollarium. Vnde hoc incremento quantitates æqui-differentes temporibus æqui-differentibus produci est necesse.

2\. Def. Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens æqualibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuò rationis ad lineas à quibus abscinduntur.

Cor. Vnde hoc æqualibus momentis decremento, ejusdem etiam rationis proportionales lineas relinqui est necesse.

6\. def. Logarithmus ergò cujusque sinus, est numerus quàm proximè definiens lineam, quæ æqualiter crevit intereà dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio æquiveloce.

Cor. Vnde sinus totius 10000000. nullum seu 0 est logarithmus: & per consequens, numerorum majorum sinu toto logarithmi sunt nihilo minores.

Itaque logarithmos sinuum, qui semper majores nihilo sunt, abundantes vocamus, & hoc signo +, aut nullo prænotamus. Logarithmos autem minores nihilo defectivos vocamus, prænotantes eis hoc signũ. —.

Admonitio.

Erat quidem initio liberum cuilibet sinui, aut quantitati nullum seu 0, pro logarithmo attribuisse: sed præstat id præ cæteris sinui toti accommodasse: ne unquam in posterum vel minimam molestiam parturiret nobis additio & substractio ejus logarithmi in omni calculo frequentissimi. Cæterùm etiam quia sinuum & numerorum sinu toto minorum frequentior est usus: eorum igitur logarithmos abundantes ponimus: aliorum vero defectivos, etsi contrà fecisse initio liberum erat.

Cap. II. De Logarithm. propositionibus.

Propos. 1. Proportionalium numerorum, aut quantitatum, æqui-differentes sunt Logarithmi.

[1]) Aan de bespreking van elk onderdeel gaan de verdeeling in hoofdstukken en, zoo noodig, eenige uittreksels vooraf.

Propos. 2. Ex trium proportionalium Logarithmis, duplum secundi seu medii minutum primo, æquatur tertio.

Propos. 3. Ex trium proportionalium logarithmis, duplum secundi seu medii æquatur aggregato extremorum.

Propos. 4. Ex quatuor proportionalium logarithmis, aggregatum secundi & tertii minutum primo ęquatur quarto.

Propos. 5. Ex quatuor proportionalium logarithmis aggregatum mediorum (secundi, scilicet, & tertii) æquatur aggregato extremorum, primi videlicet, & quarti.

Propos. 6. Ex quatuor continuè proportionalium logarithmis triplum alterutrius mediorum æquatur aggregato extremi remoti, & dupli vicini.

Cap. III. Descriptionem complectens tabulæ logarithmorum, & septem ejus columnarum.

Twee pp. uit Napier's Canon Mirificus.

Gr. 0

0 min	Sinus.	Logarithmi	+ | − Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

Gr. 29

29 min	Sinus	Logarithmi	+ | — Differentiæ	logarithmi	Sinus	
30	4924235	7084158	5695625	1388533	8703557	30
31	4926767	7079018	5688839	1390179	8702124	29
32	4929298	7073882	5682056	1391826	8700691	28
33	4931829	7068749	5675275	1393474	8699257	27
34	4934359	7063620	5668496	1395124	8697822	26
35	4936889	7058494	5661719	1396775	8696386	25
36	4939418	7053372	5654945	1398427	8694949	24
37	4941947	7048253	5648173	1400080	8693512	23
38	4944476	7043138	5641404	1401734	8692074	22
39	4947004	7038026	5634637	1403389	8690636	21
40	4949532	7032918	5627873	149[1])5045	8689197	20
41	4952059	7027814	5621111	1406703	8687757	19
42	4954586	7022713	5614351	1408362	8686316	18
43	4957113	7017615	5607593	1410022	8684873	17
44	4959639	7012521	5600838	1411683	8683431	16
45	4962165	7007430	5594085	1413345	8681988	15
46	4964690	7002342	5587334	1415008	8680544	14
47	4967215	6997258	5580586	1416672	8679100	13
48	4969740	6992177	5573840	1418337	8677655	12
49	4972264	6987099	5567095	1420004	8676209	11
50	4974788	6982025	5560353	1421672	8674762	10
51	4977311	65[1])76954	5553613	1423341	8673314	9
52	4979834	6971886	5546875	1425011	8671866	8
53	4982356	6966822	5540140	1426682	8670417	7
54	4984878	6961761	5533407	1428354	8668968	6
55	4987399	6956704	5526677	1430027	8667518	5
56	4989920	6951650	5519949	1431701	8666067	4
57	4992441	6946600	5513224	1433376	8664615	3
58	4994961	6941553	5506500	1435053	8663162	2
59	4997481	6936509	5499778	1436731	8661708	1
60	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254	0 min gra. 60

60

h2[2])

Cap. IV. De usu tabulæ, & numerorum eius.

Sectio. 1. Sinuum, tangentium, & secantium præcisè in tabulis suis repertorum, Logarithmos non minus præcisè dare.

2. Numerorum datorum, & in tabulis sinuum, tangentium, & secantium non repertorum, logarithmos æstimare.

13. Logarithmorum datorum, in tabula nostra non repertorum numerales valores æstimare.

[1]) Een drukfout.

[2]) De signatuur.

Admonitio.

Pro hac sectione, & secunda hujus monitum volumus, numerorum datorum logarithmos, & contra logarithmorum datorum numerales valores (ubi non reperiuntur in tabula) omnium accuratissimè exhiberi per modum ipsum quo creantur, aut resolvuntur logarithmi, qui est, ut à sinu dato per media Geometricè proportionalia descendas, donec in proximè minorem sinum tabulatum perveneris: similiter ab hujus logarithmo tabulato descendas etiam per totidem media Arithmetica congrua, & horum ultimus erit illorum primi logarithmus: & contra per resolutionem, ut à logarithmo dato per media Arithmetica in Logarithmum tabulatum proximè minorem descendas, & ab hujus valore tabulato similiter etiam descendas per totidem media Geometrica & congrua: & horum ultimus erit numeralis valor illorum Logarithmorum primi. Verùm quæ æqui-differentia Arithmetica cuique continuatæ proportioni Geometricæ conveniat & sit congrua, exquirere non est mediocris ingenii. Quare de his (Deo aspirante) ubi de Logarithmis condendis & creandis agetur, amplius aliquando differemus.

Cap. V. De amplissimo Logarithmorum usu, & expedita per eos praxi.

Na eenige inleidende verklaringen definieert Napier in zijn Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, &c. (Beschrijving van den wonderbaren Canon der Logarithmen, enz.) zijn logarithmen aldus: „De logarithme van elken sinus is het getal, dat zoo nauwkeurig mogelijk de lengte van de lijn aangeeft, die gelijkmatig is toegenomen, terwijl de lijn van den sinus totus, d. i. de sinus van 90°, evenredig is afgenomen tot de lengte van dien sinus; beide bewegingen hebben gelijktijdig plaats, terwijl de beginsnelheid dezelfde is."

Ter toelichting van deze bepaling stelle men zich voor, dat zich langs de naar den kant van b onbegrensde rechte lijn ab (Fig. 1) een punt p met eenparige snelheid voortbeweegt en langs de begrensde rechte lijn AB in de richting van A naar B een punt P met een snelheid, evenredig met den afstand PB, en dat p en P gelijktijdig en met dezelfde beginsnelheid van a en A vertrekken.

Bevinden zich dan p en P bv. na verloop van $1/n$, $2/n$, $3/n, \ldots$ sec. in a_1 en A_1, in a_2 en A_2, in a_3 en $A_3, \ldots$, dan zijn de wegen aa_1, a_1a_2, $a_2a_3, \ldots$, die door p in de opeenvolgende tijdsverloopen van $1/n$ sec. worden afgelegd, onderling even groot, terwijl de wegen AA_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, die door P in dezelfde tijdsverloopen worden afgelegd, des te nauwkeuriger evenredig zijn met de afstanden AB, A_1B, $A_2B, \ldots$, naarmate het tijdsverloop van $1/n$ sec. kleiner wordt genomen. En in die zelfde mate verschilt de verhouding van aa_1 en AA_1 des te minder van één, daar de beginsnelheid van p en P dezelfde is.

Beschouwt men eindelijk de afstanden AB, A_1B, $A_2B, \ldots$ als de sinuslijnen van middelpuntshoeken in een cirkel beschreven met den straal AB, in het bijzonder dus AB als den sinus van 90°, den sinus totus, dan is het thans duidelijk, wat Napier bedoelt, als hij de getalwaarden van aa_1, aa_2, $aa_3, \ldots$ de logarithmen noemt van de getalwaarden der sinuslijnen A_1B, A_2B, $A_3B, \ldots$, algemeen $ap =$ Nap log PB.

Napier stelt den sinus totus $AB = 10000000$ en voegt aan zijn bepaling de opmerking toe, dat de logarithme van $10000000 = 0$ is en dat de logarithmen van de getallen grooter dan 10000000 negatief zijn.

Uit Napier's bepaling volgt onmiddellijk de hoofdeigenschap van zijn logarithmen, dat van evenredige getallen het verschil der logarithmen standvastig is, m. a. w. dat $\log a - \log b = \log c - \log d$ is, als $a : b = c : d$.

Trekt men namelijk in de evenredigheid:

$$AA_1 : AB = A_1A_2 : A_1B = A_2A_3 : A_2B = \ldots$$

ieder der redens van één af, dan komt er:

$$A_1B : AB = A_2B : A_1B = A_3B : A_2B = \ldots.$$

Hieruit blijkt, dat AB, A_1B, A_2B, $A_3B, \ldots$ termen zijn van een meetkundige reeks, zoodat bv.:

$$A_7B : A_2B = A_{15}B : A_{10}B.$$

Nu zijn aa_2, aa_7, aa_{10} en aa_{15} de logarithmen van A_2B, A_7B, $A_{10}B$ en $A_{15}B$. En daar $aa_7 - aa_2 = a_2a_7 = a_{10}a_{15} = aa_{15} - aa_{10}$ is, zal dus ook het verschil der logarithmen van A_7B en A_2B gelijk zijn aan dat der logarithmen van $A_{15}B$ en $A_{10}B$.

Ook de keuze van den naam logarithme = aantal der verhoudingen (Gr. λόγοσ = verhouding en ἀριθμόσ = aantal) laat zich verklaren uit de omstandigheid, dat de logarithmen een opklimmende rekenkundige reeks uitmaken, als de sinussen een meetkundige reeks vormen. Is $aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots =$ de lengte-eenheid, dan zijn de logarithmen van AB, A_1B, $A_2B, \ldots A_kB, \ldots = 0, 1, 2, \ldots k, \ldots$. En daar men AB n-maal na elkander in de verhouding van AB tot A_1B moet verkleinen om A_kB te krijgen, wijst de logarithme van een sinus dus aan, hoe dikwijls na elkander men den sinus totus in een zelfde verhouding moet verkleinen, om dien sinus te krijgen: de logarithme telt m. a. w. het aantal dier verhoudingen.

Zij de snelheid, waarmede de punten p en P van a en A vertrekken $= v_0$ eenheden van snelheid, de snelheid van P na verloop van t sec. $= v$ eenheden van snelheid, en de afstand van P

tot B op dit tijdstip $= u$ lengte-eenheden, dan volgt uit Napier's bepaling onmiddellijk:

$$v_o : 10^7 = v : u \text{ en Nap log } u = v_o\, t.$$

Nu is:

$$v = \mathrm{d}\,(10^7 - u) / \mathrm{d}t = - \mathrm{d}u / \mathrm{d}t.$$

Men vindt dus na elkander:

$$v_o : 10^7 = - \mathrm{d}u / \mathrm{d}t : u,$$

dus:
$$v_o\, \mathrm{d}t / 10^7 = - \mathrm{d}u / u,$$

dus:
$$v_o / 10^7 \int_0^t \mathrm{d}t = - \int_{10^7}^{u} \mathrm{d}u / u,$$

want aan $t = 0$ beantwoordt $u = 10^7$;

dus:
$$v_o\, t / 10^7 = - \overset{e}{\log}\,(u / 10^7) = \overset{1/e}{\log}\,(u / 10^7),$$

dus:
$$(\text{Nap log } u) / 10^7 = \overset{1/e}{\log}\,(u / 10^7) \dots\dots\dots\dots \quad (1),$$

waaruit blijkt, dat men een logarithmenstelsel krijgt met:

$$1/e = 0{,}3678794412\dots$$

als grondtal [1]), wanneer men bij Napier numeri en logarithmen door tien millioen deelt [2]).

---

[1]) Bij Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2ter Band, Leipzig 1892, p. 672, vindt men 9999997 als grondtal opgegeven.

Bedoelt de schrijver met „grondtal" den numerus, waarvan in Napier's stelsel, zonder er eenige verandering in aan te brengen, de logarithme $= 1$ is, zooals ik vermoed, dan moet dit antwoord luiden:

$$\mathrm{N} = 10^7 / e^{0,1^7} = 9999999{,}00000\ 00499\dots.$$

[2]) Montucla, Histoire des Mathématiques, Tome II, Paris 1799, p. 16, beschrijft Napier's logarithmen aldus:

„Imaginons avec Neper un point se mouvoir le long de la ligne indéfinie PAE (Fig. 2), avec une vîtesse tellement tempérée qu'elle soit toujours proportionnelle à sa distance au terme fixe P. Cette supposition est facile à entendre. Le mobile à une distance double de P, aura une vîtesse double; à une distance de moitié, cette vîtesse ne sera que la moitié de la première; ainsi cette vîtesse ne sera la même dans aucum point de la ligne PAE, mais toujours plus grande ou moindre à proportion que le mobile sera plus loin ou plus près de P. Oril est facile de démontrer que si PA, PB, PC, PD, sont en progression continue, leurs différences AB, BC, CD, le seront également, et conséquemment seront parcourues dans des temps égaux. Car quand les vîtesses sont comme les espaces parcourus ou à parcourir, les temps employés à le faire sont égaux.

Supposons maintenant que V soit la vîtesse du mobile quand il est en A, et qu' en vertu de cette vîtesse, conservée sans augmentation ni diminution, un autre mobile partant du point A' eût parcouru l'espace $A'B'$ sur la ligne indefinie $F'A'F'$, dans le même temps que le premier a parcouru AB. Nous aurons de cette manière deux points, dont l'un sera porté d'un mouvement accéléré ou retardé de A vers e, et l'autre d'un mouvement uniforme de A' vers E' ou e'. Ainsi, pendant que AB, BC, CD, DE, EF, etc. seront continûment proportionnelles, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, seront égales; et pen-

Men kan de gevonden formule ook aldus bewijzen: Laat het punt p in t sec. een afstand van $10^7/n$ lengte-eenheden doorloopen en de snelheid van het punt P na verloop van $0, t, 2t, 3t, \ldots$ sec. evenredig zijn met den afstand PB, maar gedurende elk tijdsverloop van t sec. onveranderd blijven. Omdat de beginsnelheid van de punten p en P dezelfde is, legt het punt P in de eerste t sec. $10^7/n$ lengte-eenheden af, evenals het punt p. Na verloop van t sec. bevindt zich het punt P dus op een afstand $P_1B = 10^7 - 10^7/n$ d. i. $10^7(1 - 1/n)$ lengte-eenheden van B. Zijn afstand tot B is dus $(1 - 1/n)$-maal zoo groot geworden; zijn snelheid zal dus eveneens $(1 - 1/n)$-maal zoo groot moeten worden: in de tweede t sec. legt P dus $(1 - 1/n).10^7/n$ d. i. $10^7(1 - 1/n)/n$ lengte-eenheden

dant que PB, PC, PD, PE, croîtront géométriquement, $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $A'E'$, etc. croîtront arithmétiquement: c'est pourquoi ces dernières seront les logarithmes des premières respectivement. Enfin le logarithme d'une quantité quelconque PS, sera la ligne $A'S'$ parcourue, d'un mouvement uniforme, depuis le terme A', tandis que AS l'a été d'un mouvement accéléré...

Après s'être formé cette idée des logarithmes, et en avoir démontré les principales propriétés, il restoit à Neper à trouver ces nombres, et cela n'étoit pas le moins difficile. Il y parvint par un moyen dont il convient de donner une esquisse, et dont voici l'esprit. Supposons qu' entre PB et PA, on ait pris une si grande quantité de moyennes proportionnelles, que la première qui excède PA, ne l'excède que d'une quantité Aa, comme infiniment petite: par exemple, $\frac{1}{10000000}$ de l'unité, ou en fractions décimales, 0,0000001. Il en résultera que l'on pourra regarder Aa comme parcouru d'un mouvement uniforme; et si l'on prend sur la ligne parcourue d'un mouvement uniforme la particule $A'a'$ égale à Aa, il y en aura autant dans $A'B'$ qu' il y a entre PA et PB de moyennes proportionnelles. Supposant donc $PA = 1$, et $PB = 2$, Neper trouvoit que pour que Aa n'exédât pas 0,0000001 ou une cent millionnième, il falloit intercaler entre 1 et 2, 6931472 moyennes proportionnelles, ce qui se trouve par une extraction successive de racines carrées entre 1 et 2; c'est-à-dire, d'abord la racine carrée de 2, ou la moyenne proportionnelle entre 1 et 2, ensuite la racine de cette racine, ou la moyenne entre 1 et la première moyenne déjà trouvée, et ainsi successivement.

Il trouvoit, par un semblable procédé, qu' entre 1 et 10, il y avoit 23025850 de ces moyennes proportionnelles; il ne restoit donc qu' à multiplier Aa ou $A'a' = 0{,}0000001$ par 6931472, et le produit devoit donner AB pour le logarithme de 2. Le produit est 0,6931472; ainsi c'est là le logarithme de 2; et si l'on multiplie la même fraction 0,0000001 par 23025850, le produit, qui est 2,3025850, donne le logarithme de 10."

De punten passeeren gelijktijdig A en A' met de snelheid V en bevinden zich na verloop van t sec. in S en S'. Stelt men $PA = 1$ en $PS = u$, dan is $A'S' = Vt$ en de snelheid in $S = Vu$, dus

$$Vt = \text{Nap log } u \text{ en } du/dt = Vu,$$

dus:
$$\int_0^t V\,dt = \int_1^u du/u \text{ en } Vt = \overset{e}{\log}\, u,$$

dus:
$$\text{Nap log } u = \overset{e}{\log}\, u.$$

Volgens Montucla zouden de logarithmen van den Canon Mirificus dus natuurlijke logarithmen wezen en berekend zijn naar een methode, die, zooals later blijken zal, met Napier's handelwijze al zeer weinig gelijkenis vertoont.

af. Na verloop van $2t$ sec. bevindt zich het punt P dus op een afstand $P_2B = 10^7(1 - 1/n) - 10^7(1 - 1/n)/n$ d. i. $10^7(1 - 1/n)^2$ lengte-eenheden van B. Zijn afstand tot B is dus weer $(1-1/n)$-maal zoo groot geworden; zijn snelheid zal dus eveneens weer $(1-1/n)$-maal zoo groot moeten worden: in de derde t sec. legt P dus $(1 - 1/n) \,.\, 10^7 (1 - 1/n) / n$ d. i. $10^7 (1 - 1/n)^2/n$ lengte-eenheden af. Na verloop van $3t$ sec. bevindt zich het punt P dus op een afstand $P_3B = 10^7 (1 - 1/n)^2 - 10^7 (1 - 1/n)^2 / n$ d. i. $10^7 (1 - 1/n)^3$ lengte-eenheden van B. Zoo voortgaande blijkt, dat het punt P zich na verloop van kt sec. op een afstand $P_kB = 10^7 (1 - 1/n)^k$ lengte-eenheden van B bevindt. En op dit tijdstip bevindt zich het punt p op een afstand $ap_k = 10^7k/n$ lengte-eenheden van a.

Stelt men:

$$10^7\, k/n = d, \text{ dus } k = nd / 10^7,$$

dan wordt:

$$10^7 (1 - 1/n)^k$$

$$= 10^7 (1 - 1/n)^{nd/10^7} = 10^7 \{(1 - 1/n)^{-n}\}^{-d/10^7}.$$

Laat men thans n onbegrensd toenemen, zonder evenwel d te veranderen, dan is:

$$\lim (1 - 1/n)^{-n} = e,$$

dus: $$\lim 10^7 \{(1 - 1/n)^{-n}\}^{-d/10^7} = 10^7\, e^{-d/10^7}.$$

Zijn de beginsnelheden van de punten p en P standvastig en laat men n onbegrensd toenemen, dan nemen dus de tijdsverloopen van t sec., waarin het punt p een afstand van $10^7/n$ lengte-eenheden doorloopt, onbegrensd af: de beweging van P nadert dus meer en meer tot een grenstoestand, waarin zijn snelheid steeds evenredig is met zijn afstand van B. Buitendien nadert de afstand, waarop P van B verwijderd is, als p zich d lengte-eenheden van a bevindt, zooals boven gebleken is, tot een grenswaarde van $10^7\, e^{-d/10^7}$ lengte-eenheden.

Volgens Napier's bepaling is dus:

$$\text{Nap log } 10^7\, e^{-d/10^7} = d.$$

Stelt men eindelijk:

$$10^7\, e^{-d/10^7} = u,$$

dan is:

$$d/10^7 = \overset{1/e}{\log} (u / 10^7),$$

dus: $$(\text{Nap log } u) / 10^7 = \overset{1/e}{\log} (u / 10^7) \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Het waren overwegingen van practischen aard, die Napier aanleiding gaven, om de logarithmen te doen toenemen, als de numeri (sinussen) kleiner worden, en omgekeerd, een eigenaardigheid van zijn stelsel, die weinig navolging gevonden heeft. „Wel is waar staat het vrij", zegt hij in een opmerking aan het slot van het eerste hoofdstuk, „nul als logarithme aan een willekeurigen sinus toe te kennen, maar aangezien de logarithme van den sinus totus zeer dikwijls moet worden opgeteld en afgetrokken, schijnt het bijzonder doelmatig, juist de logarithme van dezen sinus $= 0$ te stellen, daar zulks bij berekeningen den minsten last veroorzaakt. Buitendien worden het meest sinussen en numeri gebruikt, die kleiner zijn dan de sinus totus; om die reden heb ik de logarithmen van deze positief en die van de andere negatief genomen; men kan evenwel ook een tegengestelde keuze doen."

Het stellen van den sinus totus $= 10^7$ eindelijk had geen ander doel dan om, met vermijding van breuken, benaderde waarden voor de logarithmen te vinden, waarvan de betrekkelijke fout zeer klein was. Zelfs beveelt Napier in zijn Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio, Edinburgi 1619, de samenstelling van een nauwkeuriger tafel aan met 10^8 als sinus totus.

Uit de hoofdeigenschap van zijn logarithmen:

1) dat van evenredige getallen het verschil der logarithmen standvastig is;

leidt Napier af:

2) dat, wanneer drie getallen gedurig evenredig zijn, tweemaal de logarithme van het middelste verminderd met die van het eerste gelijk is aan die van het derde (volgens 1);

3) dat, wanneer drie getallen gedurig evenredig zijn, tweemaal de logarithme van het middelste gelijk is aan de som der logarithmen van de uiterste (volgens 2);

4) dat, wanneer vier getallen evenredig zijn, de som der logarithmen van de middelste verminderd met de logarithme van het eerste gelijk is aan die van het vierde (volgens 1);

5) dat, wanneer vier getallen evenredig zijn, de som der logarithmen van de middelste gelijk is aan die der logarithmen van de uiterste (volgens 4);

6) dat, wanneer vier getallen een meetkundige reeks uitmaken, driemaal de logarithme van een middelsten term gelijk is aan de logarithme van den afliggenden uitersten term verminderd met tweemaal die van den aanliggenden uitersten term (volgens 2 en 3).

Vervolgens gaat Napier tot de beschrijving van zijn tafel over. Om een denkbeeld te geven van haar inrichting, heb ik er een linker- en een rechterbladzijde uit overgenomen [1]), die evenwel niet op elkander volgen.

Voor de hoeken van 0 tot 45 graden loopt de tafel van voren naar achteren en van boven naar beneden; het aantal graden staat links-boven aan de bladzijde, het aantal minuten in de kolom aan de linkerhand.

Voor de hoeken van 45 tot 90 graden loopt de tafel van achteren naar voren en van beneden naar boven; het aantal graden staat rechts-beneden aan de bladzijde, het aantal minuten in de kolom aan de rechterhand.

In de tweede kolom vindt men de sinussen (cosinussen) en in de derde kolom de logarithmen der sinussen (cosinussen) van de hoeken in de eerste (zevende) kolom; in de zesde kolom de sinussen (cosinussen) en in de vijfde kolom de logarithmen der sinussen (cosinussen) van de hoeken in de zevende (eerste) kolom. De logarithmen der sinussen noemt Napier meestal kortweg „logarithmen", die der cosinussen „antilogarithmen".

De vierde kolom eindelijk bevat de verschillen tusschen de logarithmen in de derde en de vijfde kolom, dus de logarithmen der tangenten (cotangenten) van de hoeken in de eerste (zevende) kolom, als men ze positief neemt, en van de hoeken in de zevende (eerste) kolom, als men ze negatief neemt, zooals boven de kolom door de teekens $+$ en $-$ wordt aangewezen.

Uit de evenredigheid:

$$\text{tangens} : \text{straal} = \text{sinus} : \text{cosinus}$$

volgt namelijk, daar het verschil der logarithmen van evenredige getallen standvastig en de logarithme van den straal $= 0$ is:

$$\log \text{tang} - \log \text{straal} = \log \sin - \log \cos,$$

dus:

$$\log \text{tang} = \log \sin - \log \cos.$$

Evenzoo volgt uit de evenredigheid:

$$\text{secans} : \text{straal} = \text{straal} : \text{cosinus},$$

dat $\log \sec = -\log \cos$ is, zoodat de tafel ook de logarithmen der secanten (cosecanten) doet kennen.

Van cotangenten en cosecanten maakt Napier geen melding; ook den naam cosinus, hoewel omstreeks dezen tijd ontstaan, vond ik nergens gebruikt.

[1]) Zie pp. 25 en 26.

Omtrent de wijze, waarop Napier zich van zijn tafel bedient, zal ik wat meer in bijzonderheden moeten treden.

Komt het getal, waarvan de logarithme verlangd wordt, in de kolom der sinussen voor, dan vindt men zijn logarithme er onmiddellijk naast. Zoo is log 46541 = 53699843 en log 8680544 = 1415008.

Komt het getal niet in de kolom der sinussen voor, dan zoeke men in een afzonderlijke tangententafel den hoek op, waarvan dit getal de tangens is; de log tang van dezen hoek, die in de middelste kolom der tafel gevonden wordt, is dan de verlangde logarithme. Zoo is 2186448 = tang 12°20′ en log tang 12° 20′ = 15203064, dus ook log 2186448 = 15203064; evenzoo 45736291 = tang 77° 40′ en log tang 77° 40′ = — 15203064, dus ook log 45736291 = — 15203064.

Komt het getal ook niet in de tangententafel voor en is het grooter dan 10000000, dan neme men zijn toevlucht tot een afzonderlijke secantentafel. Zoo is 18118009 = sec 56° 30′ en log sec 56° 30′ = — log cos 56° 30′ = — antilog 56° 30′ = — 5943212, dus ook log 18118009 = — 5943212.

Is eindelijk het getal noch de sinus noch de tangens noch de secans van een hoek, die in de tafels voorkomt, dan neemt Napier, die geen benadering door evenredige deelen kent, er zich althans nergens van bedient, eenvoudig de logarithme van het getal, dat er in de tafel het dichtst bij komt.

Buitendien maakt hij nog van een kunstgreep gebruik, om de logarithmen zoo nauwkeurig mogelijk te vinden. Voor de logarithme van 49638 kan men bv. die van 49450 nemen, dat in de tafel voorkomt; nauwkeuriger evenwel is het, die van 4964690 te nemen, mits men zich naderhand herinnere, dat dit getal ongeveer 100-maal te groot is.

Om het geheugen te hulp te komen, bedient Napier zich van de schrijfwijze:

$$\log 49638 = 7002342 - 00,$$

waarmede hij wil uitdrukken, dat van het getal (4964690), waarvan 7002342 de logarithme is, de twee cijfers aan de rechterhand moeten worden weggelaten.

Evenzoo beteekent:

$$\log 493 = 7073882 - 0000,$$

dat van het getal (4929298), waarvan 7073882 de logarithme is, de vier cijfers aan de rechterhand moeten worden weggelaten, en:

log 232702 = 60631284 + 0,

dat achter het getal (23271), waarvan 60631284 de logarithme is, een nul geplaatst moet worden.

Vervolgens geeft Napier regels voor de optelling en de aftrekking van logarithmen; bv.:

— 73495 plus — 56312 = — 129807;
+ 5392 plus 4216 = 9608;
4360 — 000 plus 3219 — 00 = 7579 — 00000;
332 plus — 210 = + 122;
192 plus — 210 = — 18;
332 — 00 plus — 210 + 000 = 122 + 0;
192 + 00 plus — 210 — 000 = — 18 — 0;
— 73495 min 56312 =
— 73495 plus — 56312 = — 129807;
— 73495 — 000 min 56312 + 00 =
— 73495 — 000 plus — 56312 — 00 = — 129807 — 00000;
+ 5392 min — 4216 = 5392 plus 4216 = 9608;
5392 + 0 min — 4216 + 00 =
5392 + 0 plus 4216 — 00 = 9608 — 0.

En eindelijk toont hij aan, dat men een logarithme mag vermeerderen en verminderen met:

23025842 + 0,
46051684 + 00,
69077527 + 000,
92103369 + 0000,
. . . .

Om dit in te zien, merke men op, dat volgens de hoofdeigenschap van Napier's logarithmen het verschil tusschen de logarithme van eenig getal en die van zijn tienvoud standvastig is en dat dit standvastige verschil 23025842 bedraagt, daar bv.:

log 996092 = 23064998 en log 9960920 = 39156.

Een getal wordt dus met 10 vermenigvuldigd:
1) als men van zijn logarithme 23025842 aftrekt;
2) als men bij zijn logarithme + 0 optelt;
en door 10 gedeeld:
1) als men bij zijn logarithme 23025842 optelt;
2) als men van zijn logarithme + 0 aftrekt.

Telt men bij een logarithme dus 23025842 + 0 op, d. w. z. telt men er na elkander 23025842 en + 0 bij op, dan wordt het bijbehoorende getal na elkander door 10 gedeeld en met 10 vermenigvuldigd en verandert dus niet. Enz.

Men kan zich van de aangehaalde eigenschappen o. a. bedienen, om achtergevoegde nullen te verdrijven en om negatieve logarithmen tot positieve te herleiden.

Zoo verandert:

39156 — 0 door optelling van 23025842 + 0 in 23064998;
63584468 + 00 door aftrekking van 46051684 + 00 in 17532784;
— 28595270 — 0000 door optelling van 46051684 + 00 in 17456414 — 00.

Maar bovenal is de eigenschap van belang ter bepaling van het getal, dat bij een gegeven logarithme behoort, wanneer deze niet met een voldoenden graad van nauwkeurigheid in een van de drie middelste kolommen der tafel aangetroffen wordt.

Moet men bv. het getal bepalen, waarvan 23149721 + 0 de logarithme is, dan vindt men in de tafel voor de naastbijliggende logarithme 23152560, die bij het getal 987408 behoort. Voor het verlangde getal vindt men zoodoende 9874080.

Trekt men daarentegen van de gegeven logarithme 23025842 + 0 af, waardoor het bijbehoorende getal geen verandering ondergaat, dan blijft er 123879 over. En daar in de tafel de logarithme 123881 voorkomt, die bij het getal 9876883 behoort, vindt men op deze wijze voor het verlangde getal de meer nauwkeurige waarde 9876883.

Zooals men ziet, moest Napier zich, wanneer de getallen en de logarithmen niet in de tafel voorkwamen, dikwijls tevreden stellen met een vrij ruwe benadering van de logarithmen en de getallen, die er bij behooren. Wel was hij in staat nauwkeuriger waarden te vinden, maar op omslachtige en daardoor practisch onbruikbare wijze.

„Bij deze en de tweede afdeeling van dit hoofdstuk", zegt hij in een opmerking aan het slot, „willen wij er aan herinneren, dat men van gegeven getallen de logarithmen en omgekeerd van gegeven logarithmen de getallen zoo nauwkeurig kan bepalen, als men verkiest (ook wanneer de gegevens niet in de tafel voorkomen), door op dezelfde wijze te werk te gaan, als waarop de logarithmen berekend worden, d. w. z. men laat den gegeven sinus meetkundig evenredig afnemen, totdat men zoo dicht mogelijk bij den naastkleineren sinus gekomen is, die in de tafel gevonden wordt; evenzoo laat men de logarithme van dezen sinus op overeenkomstige wijze rekenkundig evenredig afnemen: de laatste term van de rekenkundige reeks is dan de logarithme van den eersten term van de meetkundige reeks; omgekeerd laat men de gegeven logarithme rekenkundig evenredig afnemen, totdat men zoo dicht mogelijk bij de naastkleinere logarithme gekomen is, die in de tafel gevonden wordt; evenzoo laat men het getal, dat bij deze logarithme behoort, op overeenkomstige wijze meetkundig evenredig afnemen: de laatste term van de meetkundige reeks is dan het getal, dat den eersten term van de rekenkundige reeks tot logarithme heeft. Er behoort evenwel geen geringe mate van scherpzinnigheid toe, om uit te vinden, welke term van de rekenkundige reeks aan elken term van de meetkundige reeks beantwoordt. Om die reden zullen wij (met Gods hulp) uitvoerig op deze quaestie terugkomen bij gelegenheid, dat over de berekening der logarithmen zal worden gehandeld."

De door Napier bedoelde handelwijze komt neer op de toepassing van de benaderingsformule:

$$\text{Nap}\ \log u - \text{Nap}\log U = 10^7\,(U - u)\,/\,U,$$

waarvan hij zich bij de samenstelling van zijn Canon bedient en die des te nauwkeuriger uitkomsten oplevert, naarmate U en u grooter zijn en minder verschillen.

Buitendien berekent Napier bij de toepassing van zijn logarithmen op de driehoeksmeting de hoeken niet zelden in seconden nauwkeurig, hoewel ze in zijn Canon met minuten opklimmen.

Zoo vindt hij:

1) $31°6'5''$ voor den hoek, waarvan de log sin $= 6605746$ is (p. 47); volgens zijn tafel heeft men:

$$\log\sin 31°6' = 6606150 \text{ en } \log\sin 31°7' = 6601329;$$

2) $34°19'21''$ voor den hoek, waarvan de log cos $= 1913082$ is (p. 37); volgens zijn tafel heeft men:

$$\log\cos 34°19' = 1912400 \text{ en } \log\cos 34°20' = 1914386;$$

3) $16°24'27''$ voor den hoek, waarvan de log tang $= 12226180$ is (p. 36); volgens zijn tafel heeft men:

$$\log\text{tang}\ 16°24' = 12231010 \text{ en } \log\text{tang}\ 16°25' = 12220275;$$

4) ja zelfs, hoewel minder nauwkeurig, $60°12'24\frac{1}{2}''$ voor den hoek, waarvan de log sin $= 1417665$ is (p. 52); volgens zijn tafel heeft men:

$$\log\sin 60°12' = 1418337 \text{ en } \log\sin 60°13' = 1416672.$$

Napier vermeldt nergens, op welke wijze hij bij deze benadering te werk is gegaan; vermoedelijk heeft hij zich van de „regula falsi" bediend, die, zooals Apianus zich uitdrukt, „nit darum falsi (heisst) dass sie falsch vnd vnrecht wehr, sunder, dass sie auss zweyen falschen vnd vnwahrhaftigen zalen, vnd zweyen lügen die wahrhaftige vnd begehrte zal finden lernt".

Volgens dezen regel vindt men namelijk, als $f(a)$, $f(b)$ en $f(c)$ de waarden zijn, die $f(x)$ voor $x = a$, $x = b$ en $x = c$ aanneemt, uit de twee „falsche zalen" a en b en de twee „lügen" $f(a) - f(c)$ en $f(b) - f(c)$ door oplossing van de evenredigheid:

$$(a - c) : (b - c) = \{f(a) - f(c)\} : \{f(b) - f(c)\}$$

voor de „wahrhaftige zal" c:

$$\frac{b\,\{f(a) - f(c)\} - a\,\{f(b) - f(c)\}}{\{f(a) - f(c)\} - \{f(b) - f(c)\}};$$

„nym", zegt Adam Riese, de Willem Bartjens onzer Oostelijke buren, „ein Lügen von der andern, was do bleybet behalt für deinen teyler, multiplicir danach ym Kreutz eine falsche zal mit der andern lügen, nym eins vom andern, vnd das do bleybet teyl ab mit fürgemachten teyler, so kommt berichtigung der frag".

Zoo vindt men voor den hoek, waarvan log sin $= 6605746$ is (p. 47), uit $a = 31°6'$, $b = 31°7'$, $f(a) = 6606150$, $f(b) = 6601329$ en $f(c) = 6605746$, evenals bij Napier, de benaderde waarde $31°6'5''$.

In den grond der zaak komt de toepassing van de „regula falsi" hier blijkbaar neer op een benadering door evenredige deelen.

Om eindelijk de voordeelen in het licht te stellen, die het gebruik van logarithmen bij de uitvoering van berekeningen oplevert, worden door Napier in het vijfde hoofdstuk een achttal vraagstukken door middel van logarithmen opgelost:

1) De derde evenredige te bepalen tot 10000000 en 7071068. Antw. 5000000.

2) De derde evenredige te bepalen tot 10562556 en 7660445. Antw. 5555702.

3) De middelevenredige te bepalen tusschen 10000000 en 5000000. Antw. 7071068.

4) De middelevenredige te bepalen tusschen 10562556 en 5555702. Antw. 7660445.

5) De vierde evenredige te bepalen tot 7660445, 9848078 en 5000000. Antw. 6427876.

6) Den hoek te bepalen, waarvan de sinus de vierde evenredige is tot tang 43°, sin 57° en tang 35°. Antw. 39°2'.

7) Twee middelevenredigen te bepalen tusschen 4029246 en 10562556. Antw. 5555702 en 7660445.

8) Twee middelevenredigen te bepalen tusschen 14142135 en 5000000. Antw. 10000000 en 7071068.

Uitgebreider toepassing vinden de logarithmen in de vlakke- en bol-driehoeksmeting, die in het Tweede Boek behandeld worden.

b) Vlakke- en Bol-driehoeksmeting.

Liber Secvndvs. De canonis mirifici Logarithmorum præclaro usu in Trigonometria. 37 pp.

Cap. I. De rectilineis.

Prop. 2. In rectangulo Logarithmus cruris ęquatur aggregato ex Logarithmo anguli ei oppositi, & Logarithmo hypotenusæ.

Prop. 3. In rectangulo Logarithmus cujusvis cruris, est æqualis aggregato ex differentiali oppositi anguli, & Logarithmo reliqui cruris.

Cap. II. De triangulis rectilineis præsertim obliquangulis.

Prop. 4. In omni triangulo, aggregatum ex Logarithmis anguli cujusvis, & lateris cum ambientis, æquatur aggregato ex Logarithmis lateris, & anguli eis oppositorum.

Prop. 5. In obliquangulis, Logarithmus aggregati crurum subductus à summa facta ex Logarithmo differentiæ crurum, & differentiali semi-aggregati suorum oppositorum angulorum, relinquit differentialem semi-differentiæ eorundem.

Prop. 6. In obliquangulis summa Logarithmorum aggregati & differentiæ crurum, est æqualis summæ Logarithmorum basium, veræ, & alternæ.

Cap. III. De Triangulis Sphæricis.

Cap. IV. De simplicibus Quadrantalibus.

8. Logarithmus intermediæ æquatur differentialibus circumpositarũ extremarũ, seu antilogarithmis oppositarũ extremarũ.

Cap. V. De non quadrantalibus mixtis.

Cap. VI. De non Quadrantalibus puris.

3. In triangulis Sphæricis primò summa ex Logarithmis crurum subducta à summa ex Logarithmis aggregati & differentię semibasis & semidifferentiæ crurum, relinquit duplum Logarithmi dimidii anguli verticalis.

4. Secundò, Summa ex Logarithmis crurum subducta à summa ex Logarithmis aggregati & differentiæ semibasis & semiaggregati crurum, relinquit duplum antilogarithmi dimidii anguli verticalis.

6. Tertiò differentialis semibasis veræ datæ, subductus ex summa differentialium semiaggregato & semidifferentiæ crurum, relinquit differentialem semibasis alternæ.

11. In omni triangulo sphęrico mutari possunt latera in angulos, & anguli in latera: assumptis tamen prius pro unico quovis angulo, & suo subtendente latere suis ad semicirculum reliquis.

In dit Tweede Boek past Napier de logarithmen toe bij de oplossing van den vlakken en den boldriehoek.

De stellingen, waarvan hij zich bedient, worden meerendeels in logarithmenvorm uitgesproken en, op twee uitzonderingen na, zonder bewijs medegedeeld, waarvoor naar de bronnen verwezen wordt [1]).

Bij de oplossing van den rechthoekigen vlakken driehoek (triangulum rectilineum rectangulum) past Napier slechts de bepalingen van sinus en tangens toe, bij die van den scheefhoekigen vlakken driehoek (triangulum rectilineum obliquangulum) maakt hij van den sinus- en den tangensregel gebruik, alsmede van de stelling, dat in een driehoek de basis staat tot de som van de opstaande zijden als het verschil van de opstaande zijden staat tot het verschil (resp. de som) van de projecties der opstaande zijden op de basis.

Zijn belangrijke beschouwingen over den boldriehoek met één element van 90° (triangulum sphæricum quadrantale simplex) knoopt Napier vast aan de driehoeken SBP en SPZ (Fig. 3), die de zon S, als deze zich in den horizon bevindt, het noordpunt (cardo borealis) B, de pool P en het toppunt Z tot hoekpunten hebben, en waarin de hoek B en de zijde ZS recht zijn.

De twee elementen, die aan dat van 90° grenzen, en de complementen, absoluut genomen, van de drie elementen, die er tegenover staan, noemt Napier de vijf circulaire deelen (quinque circulares partes) van een rechthoekigen en een rechtzijdigen boldriehoek.

Zoo zijn de vijf circulaire deelen van den rechthoekigen driehoek SBP:

$$BP,\ 90° - \angle BPS,\ 90° - PS,\ 90° - \angle PSB,\ SB,$$

en die van den rechtzijdigen driehoek SPZ:

$$\angle ZSP,\ 90° - SP,\ \angle SPZ - 90°,\ 90° - PZ,\ \angle PZS,$$

als men ze neemt in de richting, waarin de wijzers van een uurwerk draaien, met het complement van het element tegenover dat van 90° in het midden.

Nu is:

$BP = 90° - PZ \ldots$ de poolshoogte van de plaats;

$90° - \angle BPS = \angle SPZ - 90° \ldots$ het ascensionaalverschil

[1]) Quum ex Trigonometriæ principiis pateat, ... p. 22.

Quum ex vulgari doctrina triangulorum constet, ... p. 23.

(pro ut ex vulgaribus demonstrationibus Trigonometriæ patet.) p. 34.

(quod fusius à Regiomontano, Copernico, Lansbergio, Pitisco, & aliis demõstratur, quàm ut brevi hac epitome repetendum sit.) p. 34.

Quia docent Regiomontanus libro 5. cap. 2. de triangulis, & alii, ... p. 48.

Cujus rei demonstrationem exhibent Bartholomæus Pitiscus, Adrianus Metius, & alii. Eam igitur hac epitome minimè repetendam censeo. p. 56.

van de zon, d. i. het tijdsverloop tusschen zonsop- resp. zonsondergang en zes uur;

$90° - PS = 90° - SP$ . . . de declinatie van de zon;

$90° - \angle PSB = \angle ZSP$ . . . de positie- d. i. de parallactische hoek van de zon;

$SB = \angle PZS$ . . . de streek, d. i. het azimuth van de zon, van het noordpunt afgerekend.

De driehoeken SBP en SPZ hebben dus dezelfde circulaire deelen.

Uit P en S als polen beschrijft Napier groote cirkels, die de zijden BP, PS en SB van $\triangle\ SBP$ in D, F en O en in Z, C en E, en elkander in Q snijden; de punten P en Q, Q en S, S en Z, Z en O en O en P vereenigt hij door bogen van groote cirkels.

De meridiaan BD van de plaats, de horizon EB, de groote cirkel CE met de zon als pool, de meridiaan FC van de zon en de æquator FD snijden elkander dan in B, E, C, F en D onder rechte en in Z, P, S, O en Q onder scheeve hoeken; de bogen PQ, QS, SZ, ZO en OP zijn cirkelquadranten, maar de bogen PZ, ZQ, QO, OS en SP niet.

De vijf driehoeken SBP, OFS, QEO, ZDQ en PCZ zijn dus rechthoekig en de driehoeken ZQO, PZQ, SPZ, OSP en QOS rechtzijdig.

Hun circulaire deelen zijn, voor de rechthoekige van links naar rechts en voor de rechtzijdige van rechts naar links te lezen:

$\triangle\ SBP$: BP, $90°-\angle BPS$, $90°-PS$, $90°-\angle PSB$, SB: $\triangle\ ZQO$;
$\triangle\ OFS$: $90°-PS$, $90°-\angle PSB$, SB, BP, $90°-\angle BPS$: $\triangle\ PZQ$;
$\triangle\ QEO$: SB, BP, $90°-\angle BPS$, $90°-PS$, $90°-\angle PSB$: $\triangle\ SPZ$;
$\triangle\ ZDQ$: $90°-\angle BPS$, $90°-PS$, $90°-\angle PSB$, SB, BP: $\triangle\ OSP$;
$\triangle\ PCZ$: $90°-\angle PSB$, SB, BP, $90°-\angle BPS$, $90°-PS$: $\triangle\ QOS$.

Voor die van $\triangle\ OFS$ bv. vindt men:

$$FS = 90° - PS,\quad 90° - \angle FSO = 90° - \angle PSB,$$
$$90° - SO = SB,\quad 90° - \angle SOF = \angle POS = BP,$$
$$OF = \angle OPS = 90° - \angle BPS.$$

Zooals men ziet, zijn de circulaire deelen van de tien driehoeken dezelfde, nl. de poolshoogte van de plaats, het ascensionaalverschil, de declinatie, de positiehoek en de streek van de zon: die van de rechthoekige kunnen door cyclische verwisseling uit elkander worden afgeleid, mits men telkens bij het middelste deel beginne; evenzoo die van de rechtzijdige; — eindelijk kunnen die van de vijf rechtzijdige uit die van de vijf rechthoekige en die van de vijf rechthoekige uit die van de vijf rechtzijdige door omkeering van de volgorde gevonden worden.

Nu is in een rechthoekigen boldriehoek de cosinus van de schuine zijde gelijk aan het product van de cotangenten van de scherpe hoeken en aan dat van de cosinussen van de rechtshoekszijden, m. a. w. de sinus van het middelste circulaire deel (pars intermedia) is gelijk aan het product van de tangenten van de aanliggende (partes extremæ vicinæ aut circumpositæ) en aan dat van de cosinussen van de afliggende (partes extremæ remotæ aut oppositæ) circulaire deelen.

En daar ieder van de vijf circulaire deelen beurtelings als complement van het element tegenover dat van 90°, dus als middelste circulair deel in een van de vijf rechthoekige en in een van de vijf rechtzijdige driehoeken voorkomt, kan men den regel formuleeren:

Als men in een rechthoekigen en in een rechtzijdigen driehoek het element van 90° weglaat en de drie elementen, die er tegenover staan, door hun complementen vervangt, dan is de sinus van ieder van deze circulaire deelen gelijk aan het product van de tangenten van de aanliggende en aan dat van de cosinussen van de afliggende circulaire deelen;

die door Napier in logarithmenvorm aldus wordt uitgedrukt:

„Logarithmus intermediæ æquatur differentialibus circumpositarũ extremarũ, seu antilogarithmis oppositarũ extremarũ." p. 33.

Door toepassing van dezen Regel van Napier kan men van een rechthoekigen en een rechtzijdigen boldriehoek ieder van drie elementen (triplicitas) uit de twee overige berekenen; want als men de twee gegeven en het gevraagde element door de overeenkomstige circulaire deelen vervangt, dan krijgt men drie circulaire deelen, waarop Napier's regel van toepassing is, omdat steeds twee van deze drie deelen hetzij aanliggende hetzij afliggende deelen zijn ten aanzien van het derde als middelste deel.

De naam „triplicitas", waarvan Napier zich bedient, om een drietal elementen van een rechthoekigen en een rechtzijdigen boldriehoek aan te duiden, herinnert aan Torporley's Diclides Cœlometricæ seu Valvæ Astronomicæ universales, Londini 1602, waarin bij de oplossing van den rechthoekigen boldriehoek zes „triplicitates" behandeld worden, die naar de figuren, waaraan ze eenigszins doen denken, de namen dragen van: carcer (gevangenis: de drie zijden), hasta (speer: de schuine zijde en de scheeve hoeken), forfex (schaar: de schuine zijde, een rechthoekszijde en de aanliggende scheeve hoek), sipho (hevel: de schuine zijde, een rechthoekszijde en de overstaande hoek), corvus (enterhaak: de rechthoekszijden en een overstaande hoek) en funda (slingerriem: de scheeve hoeken en een overstaande zijde).

Uit twee van de zes tripliciteiten kunnen de vier overige worden afgeleid; ieder van de twee moeders heeft twee dochters: corvus bracht hasta en forfex voort, en sipho carcer en funda. Torporley vereenigt elke moeder met haar dochters tot een mitra (bisschopsmuts), waarin (Fig. 4) $FR = IR < 90°$, de hoeken bij F, I en R recht en de bogen FO, RO, RE, IE, FM en IF quadranten zijn.

Zoo beantwoorden aan de elementen RM, TR en $\angle MTR$ van $\triangle MTR$ als corvus in $\triangle TOC$ als hasta: $TO = 90° - TR$, $\angle CTO = \angle MTR$ en $\angle TOC = 90° - RM$, en in $\triangle PEM$ als forfex: $EM = 90° - RM$, $PE = 90° - \angle MTR$ en $\angle PEM = 90° - TR$; evenzoo aan de elementen MT, TR en $\angle RMT$ van $\triangle MTR$ als sipho in $\triangle TOC$ als carcer: $TO = 90° - TR$, $CT = 90° - MT$ en $OC = 90° - \angle RMT$, en in $\triangle PEM$ als funda: $\angle EMP = \angle RMT$, $MP = 90° - MT$ en $\angle PEM = 90° - TR$.

Van links naar rechts langs de vóór- en de achterzijde van de mitra rondgaande, vindt men dus: hasta, corvus en forfex; funda, sipho en carcer:

„Hasta prior proles corvi sed postera forfex,
Et sequitur carcer, siphonem, funda præibit."

„Torporley then gives rules for the reduction of either daughter to the mother, and discovers the necessity for using the complements of the data. He points out in the last chapter that the same formulæ will apply to all the cases of each triplicity, and his two formulæ resemble, of course, those of Napier in their structure. But Torporley has not accomplished the same amount either of symmetry or abbreviation which appears in the rules of Napier. The reduction of all the six cases to two, and the first exhibition of an organized mechanical mode of reducing each of the six cases to its primitive, belongs to him: Napier afterwards did the latter in a better manner, without the necessity of mnemonical verses." [1])

Hoewel Napier den naam van Torporley nergens vermeldt, wettigt de keuze van den term „triplicitas" De Morgan's vermoeden, dat Napier met de Diclides Cœlometricæ bekend is geweest en bij zijn onderzoek naar de oplossing van den rechthoekigen boldriehoek

---

[1]) De Morgan, On the Invention of the Circular Parts, in: Philosophical Magazine, London 1843, Vol. XII, p. 350.

de door Torporley aangewezen richting, maar met gunstiger uitslag heeft ingeslagen. Maar diens bewering, dat vóór Torporley niemand de noodzakelijkheid, om de complementen der elementen van een boldriehoek in te voeren, zou hebben ingezien en dat aan dezen de herleiding van de zes gevallen tot twee te danken zou zijn, kan den toets van een nauwgezet en onpartijdig onderzoek niet doorstaan. Regiomontanus, Coppernicus, Van Lansberge, Pitiscus e. a. zijn Torporley voorgegaan in het gebruik van de complementen der elementen van een boldriehoek, terwijl met name Van Lansberge en Pitiscus vóór hem de oplossing van den rechthoekigen boldriehoek tot de toepassing van twee stellingen hebben teruggebracht.

In Pitiscus' Trigonometria, Augustæ Vindelicorum 1600 [1]), wordt de bol-driehoeksmeting in vier „axiomata proportionum" samengevat, die voor den rechthoekigen boldriehoek aldus luiden:

In twee rechthoekige boldriehoeken met een even grooten scherpen grondhoek zijn:

1) de sinussen van de schuine zijden evenredig met de sinussen van de hoogten;

2) de sinussen van de grondlijnen evenredig met de tangenten van de hoogten.

Past men deze stellingen toe op Fig. 5, die aan de Trigonometria ontleend is en waarin A en B polen zijn van bg $GDEF$ en bg GHI, dan vindt men:

α) uit $\Delta\, ABC$ en $\Delta\, AEF$:
$\sin a = \sin c \sin A^*$ en $\text{tang}\, a = \sin b\, \text{tang}\, A$;

β) uit $\Delta\, BDE$ en $\Delta\, CDF$:
$\cos c = \cos a \cos b$ en $\cot c = \cot b \cos A$;

γ) uit $\Delta\, ABC$ en $\Delta\, BHI$:
$\sin b = \sin c \sin B$ en $\text{tang}\, b = \sin a\, \text{tang}\, B^{**}$;

δ) uit $\Delta\, DGH$ en EGI:
$\sin a = \sin c \sin A^*$ en $\text{tang}\, a = \text{tang}\, c \cos B$;

ε) uit $\Delta\, BDE$ en $\Delta\, BHI$:
$\cos A = \cos a \sin B$ en $\cot A = \cos c\, \text{tang}\, B$;

ζ) uit $\Delta\, DGH$ en $\Delta\, CDF$:
$\cos B = \cos b \sin A$ en $\cot B = \sin a \cot b^{**}$;

[1]) Pitiscus, Trigonometria: Sive De Solvtione Triangvlorvm Tractatus breuis & perspicuus, als aanhangsel bij Scultetus, Libri Sphæricorum, Heidelbergæ 1595.

Pitiscus, Trigonometriæ Siue De dimensione Triangulor. Libri Qvinqve, etc., waarvan de 1ste druk in 1600 te Augsburg, de 2de druk in 1608 eveneens te Augsburg en de 3de druk in 1612 te Frankfort a/M & verscheen. (Zie mijn opstel over Pitiscus' Trigonometria, in: Nieuw Archief voor Wiskunde, 2de Reeks, 3de Deel, Amsterdam 1898, p. 253.)

d. z., als men de twee gemerkte herhalingen niet medereekent, juist de bekende tien formules voor den rechthoekigen boldriehoek, die evenwel bij Pitiscus niet voorkomen.

En de behandeling der driehoeksmeting in Van Lansberge's Triangulorum Geometriæ Libri Quatuor, Lugduni Batavorum 1591, stemt in hoofdzaak met die in Pitiscus' Trigonometria overeen. Pitiscus vermeldt trouwens de Geometria Triangulorum als een van zijn bronnen. In het bijzonder vindt men de twee axioma's, waarop Pitiscus' oplossing van den rechthoekigen boldriehoek berust, als theorema's bij Van Lansberge terug, en de figuren bij dezen zijn nagenoeg dezelfde, maar vollediger en fraaier uitgevoerd, als bij genen.

Waar evenwel Van Lansberge uit zijn theorema's voor de oplossing van een rechthoekszijde zes, van de schuine zijde vier en van een scherpen hoek zes regels afleidt, die, ieder op vier manieren in woorden uitgedrukt, in den vorm van evenredigheden worden medegedeeld, daar openbaart zich Pitiscus' streven naar bekorting in de rechtstreeksche toepassing van zijn axioma's op Fig. 5, waardoor afzonderlijke regels voor de verschillende gevallen overbodig worden.

Torporley's Diclides Cœlometricæ bevat dus op eenige niet zeer gelukkig gekozen termen en overtollige neologismen, alsmede ettelijke soms vrij duistere „mnemonical verses" na, weinig nieuws; zelfs de Mitra was Torporley's eigendom niet, maar gemeengoed van alle toenmalige mathematici, zooals bij vergelijking met Fig. 5 van Pitiscus en Fig. 6 van Lansbergius onmiddellijk in het oog valt.

De „Discoverer of the whole Revelation of Saint John", Napier, vond dus bij den keurpaltsischen hofprediker Pitiscus en diens Goes'schen ambtsbroeder Van Lansberge, naar wier werken hij verwijst, voor zijn trigonometrische studiën „Anregung" genoeg, om desnoods de voorlichting te kunnen missen van den „Vicar of Salwarp" (Shropshire), Nathaniel Torporley.

Na de rechthoekige en de rechtzijdige boldriehoeken behandelt Napier den boldriehoek, waarin geen element van 90° voorkomt (triangulum sphæricum non quadrantale).

De drie gegeven elementen kunnen zijn van verschillende soort (miscellaneæ, mixtæ):

a) twee zijden en een hoek; b) twee hoeken en een zijde;

en van dezelfde soort (puræ):

a) de drie zijden; b) de drie hoeken.

Zijn de gegeven elementen van verschillende soort, dan wordt in ieder van de vier mogelijke gevallen de oplossing teruggebracht tot die van twee rechthoekige driehoeken, door uit een hoekpunt de loodlijn neer te laten op de overstaande zijde, alsmede tot die van twee rechtzijdige driehoeken, door uit een hoekpunt als middelpunt met een straal van 90° een cirkelboog te beschrijven, die de overstaande zijde ontmoet.

Om de hoeken uit de zijden te berekenen, bedient Napier zich van een der stellingen:

1) $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\{\sin (s-b) \sin (s-c) \,/\, \sin b \sin c\}}$;

2) $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\{\sin s \sin (s-a) \,/\, \sin b \sin c\}}$;

3) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \;:\; \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b+c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b-c) \;:\; \operatorname{tang} \frac{1}{2} (b' \pm c')$,

waar b' en c' de projecties van b en c op a aanduiden.

Voor de eerste stelling verwijst Napier naar Regiomontanus' De Triangulis Planis et Sphæricis Libri Quinque, unà cum Tabulis Sinuum, Basileæ [1561], p. 119, waar men ze (natuurlijk in woorden) aldus vindt uitgedrukt:

$$\text{sin vers } A = \{\text{sin vers } a - \text{sin vers } (b-c)\} \,/\, \sin b \sin c.$$

Om de stelling te bewijzen, redeneert Regiomontanus aldus: Zij $\Delta\, abc$ (Fig. 7ᵃ) een boldriehoek, a de pool van den grooten cirkel df en van den kleinen cirkel kn, die door c gaat, b die van den grooten cirkel gh en van den kleinen cirkel op, die eveneens door c gaat, enz. Laat Fig. 7ᵇ de projectie van Fig. 7ᵃ voorstellen op het vlak van den grooten cirkel ab, dan is:

$$\begin{aligned}
av &= \sin ab;\\
ky &= \sin ak\\
&= \sin ac;\\
bq &= \text{sin vers } bk\\
&= \text{sin vers } (ak-ab)\\
&= \text{sin vers } (ac-ab);\\
br &= \text{sin vers } bo\\
&= \text{sin vers } bc;\\
kt &= qr\\
&= br-bq\\
&= \text{sin vers } bc - \text{sin vers } (ac-ab);\\
dz &= \text{sin vers } dl, \text{ daar } z \text{ de projectie van } l \text{ is.}\\
&= \text{sin vers } \angle\, bac.
\end{aligned}$$

Nu volgt uit $\Delta\, kts \sim \Delta\, avx$:

$$ks : kt = ax : av.$$

Ook is: $$dz : ks = dx : ky.$$

Vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen van deze evenredigheden, dan komt er, omdat $ax = dx =$ de straal van den bol is:

$$dz : kt = \text{straal}^2 : ky \,.\, av,$$

dus:

$$\text{sin vers} \angle bac : \{\text{sin vers } bc - \text{sin vers } (ac - ab)\}$$
$$= \text{straal}^2 : \sin ac \sin ab, \text{ enz.}$$

De tweede stelling, die aldus kan worden uitgedrukt:

$$\text{cos vers } A = \{\text{sin vers } (b + c) - \text{sin vers } a\} / \sin b \sin c,$$

komt bij Regiomontanus niet voor. Zij kan door Napier, van wien zij afkomstig schijnt, maar die haar zonder bewijs mededeelt, aldus gevonden zijn: Trekt men in Fig. 7ᵇ uit n de loodlijnen nu en nw op op en bx, dan is:

$$\begin{aligned} ny &= \sin an \\ &= \sin ac; \\ lw &= \text{sin vers } bn \\ &= \text{sin vers } (an + ab) \\ &= \text{sin vers } (ac + ab); \\ nu &= wr \\ &= bw - br \\ &= \text{sin vers } (ac + ab) - \text{sin vers } bc; \\ fz &= \text{cos vers } dl \\ &= \text{cos vers } \angle bac. \end{aligned}$$

Nu volgt uit $\Delta\, nus \sim \Delta\, avx$:

$$ns : nu = ax : av.$$

Ook is: $$fz : ns = fx : ny.$$

Vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen van deze evenredigheden, dan komt er, omdat $ax = fx =$ de straal van den bol is:

$$fz : nu = \text{straal}^2 : ny.av,$$

dus:

$$\text{cos vers} \angle bac : \{\text{sin vers } (ac + ab) - \text{sin vers } bc\}$$
$$= \text{straal}^2 : \sin ac \sin ab, \text{ enz.}$$

De derde stelling eindelijk, die aan de bekende eigenschap beantwoordt, dat in een vlakken driehoek de basis staat tot de som van de opstaande zijden als het verschil van de opstaande zijden staat tot het verschil (resp. de som) van de projecties der opstaande zijden op de basis, wordt door Napier, van wien zij afkomstig is, aldus bewezen:

Op den bol $AFPG$ (Fig. 8) zijn twee groote cirkels, $A\mu P$ en $A\lambda P$, getrokken, die elkander in de tegenpunten A en P snijden. Uit een punt λ van een dier cirkels als middelpunt is een kleine cirkel beschreven, die $A\mu P$ in β en γ en $A\lambda P$ in δ en ε snijdt. Vereenigt men λ met β en γ, dan ontstaan er twee boldriehoeken, $A\beta\lambda$ en $A\gamma\lambda$, met λ als top, $A\beta$ en $A\gamma$ als bases, $A\lambda$ en $\beta\lambda = \gamma\lambda$ als opstaande zijden en $A\delta$ als verschil en $A\varepsilon$ als som dier opstaande zijden. Trekt men de hoogtelijn $\lambda\mu$, dan zijn $A\mu$, $\beta\mu$ en $\gamma\mu$ de projecties van de opstaande zijden dier driehoeken op de bases. De rechte lijnen, die men uit P door β, γ, δ en ε kan trekken, ontmoeten het vlak $HIKQ$, dat den bol in A raakt, in b, c, d en e, van welke punten zoowel b en c als d en e met A in één rechte lijn liggen. Omdat AP loodrecht op het vlak $HIKQ$ staat, zijn Ab, Ac, Ad en Ae evenredig met de tangenten van $\angle APb = \frac{1}{2}$ bg $A\beta$, $\angle APc = \frac{1}{2}$ bg $A\gamma$, $\angle APd = \frac{1}{2}$ bg $A\delta$ en $\angle APe = \frac{1}{2}$ bg $A\varepsilon$. Nu liggen b, c, d en e op den omtrek van den cirkel, die de stereographische projectie vormt van cirkel $\beta\gamma\delta\varepsilon$ uit P als centrum op $HIKQ$ als projectievlak:

„Omnis enim circuli in superficie Sphæræ descripti", zegt Napier op p. 51, „umbra à lucido in eadem superficie, quod non est in circuli peripheria procedens circulum facit perfectè rotundum in plano orthogono ad rectam, quæ à lucido per centrum Sphæræ progreditur, ut ex Opticis, & astrolabii [1]) fabrica patet."

Omdat b, c, d en e op den omtrek van een cirkel liggen, heeft men $Ab \,.\, Ac = Ad \,.\, Ae$, dus tang $\frac{1}{2}$ $A\beta$. tang $\frac{1}{2}$ $A\gamma$ = tang $\frac{1}{2}$ $A\delta$. tang $\frac{1}{2}$ $A\varepsilon$. enz. [2]).

Om de zijden uit de hoeken te berekenen, bedient Napier zich van de stelling, dat men van een boldriehoek de zijden in hoeken en de hoeken in zijden mag veranderen, mits een der zijden en de overstaande hoek door hun supplementen vervangen worden, zooals kan blijken uit Fig. 9, die aan Pitiscus' Trigonometria,

---

[1]) Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur, 3ter Halbband, Zürich 1892, p. 70.

[2]) Eenvoudiger kan men de stelling aldus bewijzen: Trekt men in $\Delta\, ABC$ de hoogtelijn CD op AB, dan is:

$$\cos AC = \cos CD \cos AD \quad \text{en} \quad \cos BC = \cos CD \cos BD,$$

dus:
$$\cos AC : \cos BC = \cos AD : \cos BD,$$

$$(\cos AC \backsim \cos BC) : (\cos AC + \cos BC) = (\cos AD \backsim \cos BD) : (\cos AD + \cos BD),$$

$$\text{tang} \tfrac{1}{2}(AC + BC) \,.\, \text{tang} \tfrac{1}{2}(AC \backsim BC) = \text{tang} \tfrac{1}{2}(AD + BD) \,.\, \text{tang} \tfrac{1}{2}(AD \backsim BD).$$

Hieruit volgt, als D tusschen A en B valt en dus $AD + BD = AB$ is:

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} AB : \text{tang} \tfrac{1}{2}(AC + BC) = \text{tang} \tfrac{1}{2}(AC \backsim BC) : \text{tang} \tfrac{1}{2}(AD \backsim BD),$$

en als D niet tusschen A en B valt en dus $AD \backsim BD = AB$ is:

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} AB : \text{tang} \tfrac{1}{2}(AC + BC) = \text{tang} \tfrac{1}{2}(AC \backsim BC) : \text{tang} \tfrac{1}{2}(AD + BD).$$

Augustæ Vindelicorum 1600, ontleend is: de driehoeken ABC en KLM zijn elkanders pooldriehoeken; maar doordien niet steeds die pool van een zijde genomen is, die hetzij aan denzelfden hetzij aan den tegengestelden kant dier zijde ligt als het overstaande hoekpunt, zijn de zijden van den een niet de supplementen der hoeken van den ander, maar is $\angle A = KL$, $\angle B = 180° - LM$, $\angle C = MK$, $AB = \angle L$, $BC = \angle M$ en $CA = 180° - \angle K$.

Regiomontanus berekent de zijden uit de hoeken door toepassing van de stelling:

In een boldriehoek zijn de sinussen van de hoeken, die twee zijden vormen met de hoogtelijn op de derde zijde, evenredig met de cosinussen van de hoeken, die zij vormen met de derde zijde; en oplossing van het vraagstuk:

Twee hoeken te bepalen, als hun som (resp. hun verschil) en de verhouding van hun sinussen gegeven zijn.

Opmerkingen.

Hoewel de Descriptio pas in 1614 verscheen, schijnt Napier's uitvinding van de logarithmen reeds van vóór 1594 te dateeren. Immers uit een schrijven van Kepler aan den Danziger wiskunstenaar Crüger, ged. Linz den 9[den] September 1624, blijkt, dat Tycho Brahe, wiens assistent Kepler van 1600 tot diens dood in 1601 te Praag was, in 1594 een brief uit Schotland ontving, waarin de verschijning van Napier's Wonderbaren Canon in uitzicht werd gesteld [1]). Vermoedelijk was de schrijver van dien brief de lijfarts van koning Jacobus VI van Schotland, Napier's vriend Craig, die reeds in 1588 briefwisseling met Tycho Brahe onderhield en dezen in 1590 persoonlijk leerde kennen bij gelegenheid van een bezoek, dat Jacobus VI aan den Deenschen astronoom bracht op diens wereldberoemde sterrenwacht Uraniborg (op Hveen in de Sont).

Kepler kreeg pas in 1617 te Praag een exemplaar van Napier's Descriptio onder de oogen, maar vond geen gelegenheid, om van den inhoud kennis te nemen. Vandaar, dat hij in een brief aan zijn vriend Schickard, ged. 11 Maart 1618, nog van Napier kon spreken als van een Schotschen Baron, wiens naam hem ontgaan was, maar die een hulpmiddel had uitgedacht, om de vermenig-

---

[1]) Nihil autem supra Neperianam rationem esse puto: etsi quidem Scotus quidam literis ad Tychonem a. CIƆIƆXCIV scriptis jam spem fecit Canonis illius mirifici.
Keppleri Aliorumque Epistolæ Mutuæ, ed. Hansch, Lipsiæ 1718, Epist. CCXCIII, p. 460.

vuldigingen en deelingen in de trigonometrie om te zetten in optellingen en aftrekkingen, onder opmerking evenwel, dat deze optellingen en aftrekkingen wegens haar verscheidenheid, menigvuldigheid en moeilijkheid soms meer arbeid vorderden dan de vermenigvuldigingen en deelingen, die ze vervingen [1]).

Hij leerde Napier's vinding pas waardeeren, nadat hem Ursinus' Cursus Mathematici Practici Volumen Primum continens Illustr. & Generosi DN. Johannis Neperi Baronis Merchistonij &c. Scoti. Trigonometriam Logarithmicam Usibus discentium accomodatam, Coloniæ [= Keulen a. d. Spree = Berlijn] 1618, in handen was gekomen, een uittreksel uit Napier's Descriptio met diens Canon n twee cijfers minder dan in de uitgaaf van 1614.

De toepassing op één voorbeeld was thans voldoende, om hem te doen inzien, welk onschatbaar hulpmiddel de logarithmen van Napier vormden bij de uitvoering van omslachtige berekeningen, hoe hij er zich met vrucht van zou kunnen bedienen bij de samenstelling van zijn Planetentafels, die trots jarenlangen volhardenden ijver niet dan uiterst langzaam vorderden.

Onmiddellijk zette hij een van zijn leerlingen aan den arbeid, om zich van de nauwkeurigheid van Ursinus' Canon te vergewissen; overeenkomstig Napier's definitie, maar eenigszins anders ingericht dan diens Canon, werd een logarithmentafel berekend, en — last not least — werden de Planetentafels, om ze voor het gebruik van logarithmen geschikt te maken, naar een nieuw plan omgewerkt.

Een en ander vindt men medegedeeld in een uitvoerig en zeer waardeerend schrijven van Kepler aan Napier, ged. Linz den 28sten Juli 1619, dat voorkomt in diens Ephemeriden voor het jaar 1620 [2]).

---

[1]) Extitit Scotus Baro, cujus nomen mihi excidit, qui præclari quid præstitit, necessitate omni multiplicationum & divisionum in meras additiones & subtractiones commutata, nec sinibus utitur: At tamen opus est ipsi Tangentium Canone: & varietas, crebritas, difficultasque additionum subtractionumque alicubi laborem multiplicandi & dividendi superat.

Keppleri Aliorumque Epistolæ Mutuæ, ed. Hansch, Lipsiæ 1718,
Epist. CCCCLI, p. 672.

[2]) Illustri et Generoso D. D. Joanni Nepero, Baroni Merchistonii, Scoto.
S. P. D.

Cœpi superioribus annis in vestibulis Ephemeridum lectores de Tabularum Rudolphinarum statu certiores reddere causasque explicare morarum, quas illi crebris et literis et publicis scriptis increpabant. Hac vice Te, Illustris Baro, compello, seorsim quidem a ceteris, quia sic postulat res ipsa et liber tuus, cui titulus „Mirificus Logarithmorum Canon"; publice tamen, quia quæ tecum confero, illa ad omnium lectorum notitiam pertinent.

Quod igitur moris meis rursum unus accessit annus, præter generales illas, quæ hactenus me impedierunt, singulares etiam in hunc annum causæ concurrerunt, quarum aliquas fama

Napier was echter reeds twee jaren te voren, den 4[den] April 1617, ten grave gedaald.

Kepler's Planetentafels, waarvoor Tycho Brahe het waarnemingsmateriaal had bijeengebracht, verschenen eindelijk in 1627, na een arbeid van vijf en twintig jaren, nauwelijks zes jaren vóór den dood van den samensteller, te Ulm onder den titel van Tabulæ Rudolphinæ,

---

publica loquitur, bella et cometas, aliquas prædixi aut tetigi in vestibulis Ephemeridum in annos 1617 et 1619, quæ anno 1618 prodierunt: scilicet editionem librorum V Harmonices Mundi, quæ sola editio (ut non adnumerem præcedentem illorum elucubrationem) me per annum solidum tenuit occupatum; absoluta tamen est favente supremo mundi totius Harmosta, nequicquam fremente et infrendente et horride admodum interstrepente Bellona cum bombardis, tubis et taratantaris suis, ut nisi nos etiamnum vel hæc diva obsederit domi forisve, vel Mercurialium tergiversationes destituerint (ut accidit in altera parte Epitomes seu doctrina theorica, in qua typi, non ultra primam paginam progressi, conquieverunt hactenus), exemplaria tam Harmonicorum quam descriptionis Cometarum (quæ jam in tertiam mensem hæret Augustæ) his autumnalibus nundinis Francofurto habere possint ii, quibus cordi est, opera manuum Dei mentis lumine collustrata penitus intueri.

Princeps vero causa, quæ progressibus meis in condendis tabulis hoc anno intercurrit, est nova plane sed fœlix calamitas tabularum partis a me jam dudum perfectæ, liber scilicet ille tuus, Illustris Baro, quem Edimburgi in Scotia impressum ante annos 5 primum vidi Pragæ ante biennium, perlegere tamen non potui, donec superiori anno, nactus libellum Benjaminis Ursini, mei dudum domestici, nunc astronomi Marchici (quo ille rei summam ex tuo libro transscriptam verbis brevissimis comprehendit), quid rei esset cognoscerem. Vix autem uno tentato exemplo deprehendi magna gratulatione, generale factum abs te exercitium illud numerorum, cujus ego particulam exiguam jam a multis annis in usu habebam tabularumque partem facere proposueram, præcipue in negotio parallaxium et scrupulorum durationis et moræ in eclipsibus, cujus methodi exemplum hæc ipsa Ephemeris exhibet. Sciebam equidem, illi meæ methodo locum non esse, nisi ubi arcus a rectis nihil sensibile differrent, at illud ignorabam, ex secantium excessibus fieri posse logarithmos, qui methodum hanc universalem faciant per omnem arcuum longitudinem. Satagebat igitur animus ante omnia videre, num etiam exquisiti essent in Ursini libello logarithmi. Usus igitur opera Jani Gringalleti Sabaudi, domestici mei, jussi millesimam sinus totius auferre a residuo rursum millesimam idque plus quam bis millies, donec de sinu toto restaret pars decima circiter; sinus vero, qui amisisset millesimam totius, logarithmum curiosissime constitui, orsus ab unitate divisionis illius, qua Pitiscus utitur numerosissima, quippe 12 ordinum; hunc sic constitutum logarithmum adnumeravi residuis omnium subtractionum ex æquo. Itaque deprehensum est, ad rei summam nihil illis deesse logarithmis, errores vero incidisse pauculos vel typi vel in distributione illa minuta logarithmorum maximorum circa principium quadrantis. Hæc te obiter scire volui, ut quibus tu methodis incesseris, quas non dubito et plurimas et ingeniosissimas tibi in promptu esse, eas publici juris fieri, mihi saltem (puto et ceteris) scires fore gratissimum eoque percepto, tua promissa folio 57 in debitum cecidisse intelligeres.

Nunc ad tabulas propius. Vix tandem enim hoc ipso Julio mense Lincium allato exemplari libri tui, ut ad folium 28 legendo perveni, considerare cœpi occasione tui consilii, num fortasse sufficiant solæ epochæ et deductiones motuum mediorum et magnitudines eccentricitatum semidiametrorumque et tui logarithmi, æquationum vero tabulæ penitus possint omitti, quippe quæ meris additionibus vel subtractionibus facilime perficiantur? Atqui res habet paulo aliter. Primum non omnis molestia cum multiplicatione et divisione sinuum sublata est: restat etiamnum attentio et cautelæ variæ,

F 4*

als een hulde aan de nagedachtenis van keizer Rudolf II en een lauwer te meer om de slapen van den grooten astronoom, den Wetgever des Hemels.

---

circa usum additionum et divisionum, quæ succedunt sublatis, ubi non tantum hebetiores, sed etiam ingeniosissimos interdum contingit hallucinari, quibus utrisque tam ad sublevandam memoriam, quam ad redimendum tempus succurrendum est per tabulas æquationum, quæ summam ejus, quod logarithmorum tractationibus elicitur, proximis numeris debitam, statim ad primum intuitum exhibeant. Sane quo consilio logarithmos ipsos in libello communicamus, cum possent illi computari ab unoquolibet modum edocto idque longe facilius quam sinus, eodem consilio et tabulas condimus æquationum. Deinde cum duæ sint classes, prior eccentri æquationum, posterior orbis magni (seu Ptolemæo epicycli) neutrobique neque eccentricitates neque semidiametri, quod tu præsupponis, constantem tuentur magnitudinem; frustra hic respectamus antiquam formam; Braheanæ nos observationes aliud docuerunt. Vera quidem itineris planetarii eccentricitas constans est, at æquantis (veteribus dicti) eccentricitas, si quis hac potius quam mea forma computandi velit uti, variabilis erit perpetuo, aut non exacta nec naturæ vestigiis insistens prodibit altera pars æquationis. Rursum, semper quidem est eadem maxima orbitæ planetariæ diameter, at non omnes diametri per omnem ambitum sunt æquales, quippe orbitæ planetarum sunt ellipticæ. Quod vero attinet classem æquationum alteram, ibi neque orbis magni neque epicycli Ptolemaici semidiameter constans usurpari potest, hoc est, ut ad formam loquar astronomiæ reformatæ, variabilis est distantia Solis a Terra, variabilis est distantia planetæ a Sole, nec potest pro Sole punctum aliquod Soli vicinum eligi, quod semper distet a Terra æqualiter, nisi motum ejus circa Terram inæquabilem velimus admittere majore incommodo. Itaque in triangulo inter Terram, Solem et planetam latera duo data sunt utraque variabilia. Qua de causa ratio talis mihi fuit ineunda hactenus, ut duæ essent pro unoquolibet planeta tabulæ, altera indicis (intellige indicem proportionis, datorum laterum summæ ad differentiam) altera anguli (elongationis a Sole), cum indice et anomalia commutationis excerpendi. Hæc illa pars est tabularum ad tuos logarithmos reformanda. Nam si meos exhibeam indices, non poterunt ii servire volenti computare per ipsa triangula, nisi is multiplicaverit indicem in tangentem dimidiæ anomaliæ commutationis. At si pro indicibus ponam logarithmos, ii tantummodo adduntur ad ejusdem dimidiæ anomaliæ medium logarithmicum. Indices igitur convertendi sunt in logarithmos, ut quod singuli sæpissime facere deberent, detrahere scilicet logarithmum summæ laterum a logarithmo differentiæ, id a me uno semel fiat. Anguli vero tabula de nova est condenda et accommodandæ areæ seu elongationes a Sole ad æquales saltus logarithmorum, quæ prius respondebant æqualibus saltibus indicum. Qua ratione et responsus utrinque æquabilior et tota tabula anguli brevior multo fieri poterit, manebitque forma cruciformis ingressus et correctio per partem proportionalem usitata hactenus, pro iis, qui ea volent esse contenti. At cum omnis cruciformis excerptio ob multiplicationem logisticam duplicem sit tædiosa et cerebrosa, logista illam effugere poterit per tractionem logarithmorum expeditissimam, quippe accuratis logarithmis opus erit minime, nihiloque minus tabula anguli, summan quæsitæ proximam ob oculos statuens, logistam in usu logarithmorum non patietur aberrare. Multo vero maxima sollicitudine circa latitudines me liberant tui logarithmi; absque his enim si fuisset, duorum alterum necessarium fuisset, aut ut logistam ad parallacticam meam remitterem, insertam meæ Astronomiæ Parti Opticæ, imperato duplici quadrato ingressu, verius duplici cruce, nec id satis accurato successu, aut certe ut duas insuper pro quolibet planeta conderem tabulas latitudinis æque prolixas prioribus, unam indicis latitudinarii, alteram latitudinis ipsius. Opus ipsum longissimi temporis et fastidiosi laboris, usus ejus intricatus fuisset. At nunc melius est: facile per data duos excerpemus logarithmos eorumque differentiam addemus medio logarithmico inclinationis locorum eccentri, quod exhibebitur ex tabula

Op de fraaie titelplaat, die Uraniborg verbeeldt, treft men onder andere allegorieën een vrouwenfiguur aan met de logarithme van den halven straal als heiligenschijn.

---

cujusque planetæ; summa confecta ut medium logarithmicum ex canone exhibebit latitudinem. Scrupulosis logarithmis opus erit rarissime. Et ne quis dubitet, hoc equidem artificio Ephemeris ista confecia est, eoque Tibi, Illustris Baro, jure inscribitur.

Ita logarithmi tui necessario pars fient Tabularum Rudolphi, prius tamen in officina mea recusi, eritque cur sibi gratulentur astronomi de moris meis. Tu si quid commodius habes, ejus me quæso participem primo quoque tempore facito, quod item et astronomiæ professores, ut dudum privatis literis aliquos, sic nunc publice universos rogatos volo.

Vale Illustris Baro et hanc compellationem ab inferioris conditionis homine ex usu communium studiorum æstima.

Lentiis ad Istrum. V. Cal. Sextiles anno 1619.

Ill. Gen. Tuæ

observantissimus,

Joannes Kepplerus.

RABDOLOGIA.

Rabdologiæ, / *Sev Nvmerationis* / *Per Virgulas* / *Libri Dvo:* / *Cum Appendice de expeditis-* / *simo Mvltiplicationis* / *Promptvario.* / *Quibus accessit* & *Arithmeticæ* / *Localis Liber Vnvs.* / *Authore* & *Inventore Ioanne* / *Nepero, Barone Mer-* / *chistonii,* &c. / *Scoto.* / *Edinbvrgi,* / *Excudebat Andreas Hart,* 1617. /

12°. $14\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{4}$ cM. ¶ 1^1, *Titel.* ¶ 1^2, wit. ¶ 2^1 — ¶ 4^1, 5 pp.: *Illustrissimo Viro Alexandro Setonio Fermelinoduni Comiti, Fyvæi,* & *Vrqvharti Domino,* &c. *Supremo Regni Scotiæ Cancellario. S.*, onderteekend: *Ioannes Neperus Merchistonii Baro.* ¶ 4^2, Verzen, t. w.: *Avthori Dignissimo.*, 4 regels, niet onderteekend; *Lectori Rabdologiæ.*, 4 regels, onderteekend: *Patricivs Sand℥vs.*; *Ad Lectorem.*, 6 regels, onderteekend: *Andreas Ivnivs.* ¶ 5^1 — ¶ 6^1, 3 pp.: *Elenchvs Capitvm, Et Vsvvm Totivs Operis.* ¶ 6^2, twee regels midden op de bladzijde. A 1^1—B 9^2, pp. 1—42: *Rabdologiæ Liber Primvs De usu Virgvlarvm numeratricium in genere.* B 10^1 — D 9^2 pp. 43—90: *Rabdologiæ Liber Secvndvs De usu Virgularum Numeratricium in Geometricis* & *Mechanicis officio Tabularum.* D 10^1 — E 8^2, pp. 91—112: *De Expeditissimo Multiplicationis Promptvario Appendix.*, waarvan de *Præfatio.* op p. 91. E 9^1—G 5^2, pp. 113—154: *Arithmeticæ Localis, quæ in Scacchiæ abaco exercetur, Liber Unus.*, waarvan de *Præfatio.* op pp. 113—114. G 6, wit. 168 pp.

Van dit werk verschenen drie uitgaven in het Latijn: Edinburgh 1617, Leiden 1626 en 1628; — één in het Italiaansch: Verona 1623; — één in het Nederlandsch: Gouda 1626 (in De Decker's Eerste Deel vande Nieuwe Telkonst).

Een exemplaar bezitten in ons land de bibliotheken der Rijksuniversiteiten te Groningen (Gouda 1626), Leiden (Edinburgh 1617) en Utrecht (Edinburgh 1617), de bibliotheek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Gouda 1626) en de Koninklijke Bibliotheek te 's-Gravenhage (Gouda 1626).

Over den inhoud.

a) De Virgulæ Numeratrices.

Rabdologiæ Liber Primvs De usu Virgvlarvm numeratricium in genere. 42 pp.

Capvt I. De Fabrica, & inscriptione Virgularum.
Capvt II. De numerorum ad Virgulas applicatione, & contra.
Capvt III. De Multiplicatione.
Capvt IV. De Divisione.

Admonitio pro Decimali Arithmetica.

Verùm si displiceant hę fractiones [1]), quibus accidunt diversi denominatores, propter difficultatem operandi per eas, & magis arrideant alię, quarum denominatores sunt semper partes decimæ, centesimę, millesimę, &c. quas doctissimus ille Mathematicus Simon Stevinus in sua Decimali Arithmetica sic notat, & nominat ① primas, ② secundas, ③ tertias: quia in his fractionibus eadem est facilitas operandi quę est integrorum numerorum, poteris post finitam vulgarem divisionem, & periodis aut commatibus terminatam, (ut hic in margine) adiicere dividendo, aut reliquiis unam cyphram pro decimis, duas pro centesimis, & tres pro millesimis, aut plures deinceps ad libitum: & cum his procedere operando ut supra, veluti in superiore exemplo hic repetito (cui cyphras adiecimus) fiet quotiens 1993, 273: qui significat 1993 integra: & 273 millesimas partes, seu $\frac{273}{1000}$, seu (ex Stevino) 1993, $\overset{'}{2}\overset{''}{7}\overset{'''}{3}$: reliquiæ autem novissimæ, 64, in hac decimali Arithmetica spernuntur, quia exigui sunt valoris, & similiter in similibus exemplis.

```
       64 [2])
     136
      316
    118,000
   141
  402
 429
 861094,000(1993,273
 432
 3888
  3888
   1296
 ———   ————
     864
     3024
      1296
```

Capvt V. De Radicum extractione per Laminam.
Capvt VI. De extractione radicis quadratæ.
Capvt VII. De radicis cubicæ extractione.
Capvt VIII. De compendio pro extractione cubica.
Capvt IX. De Regula Trium, directa & inversa.

Exemplum huius compendii.

Cum diameter circuli 100000 det peripheriam 31416 ferè, quæritur diameter 635 quantam habeat peripheriam? numeri secundi 31416 sextuplum, triplum, & quintuplum (abscissis dextimis & inutilibus figuris) sunt 18849., 0942.., & 157..., quibus ad lævam æquatis per adiectionem cyphrę, ut in Cap. de multiplicatione diximus & decussatim (ut à margine) locatis, & (præter quatuor dextimorum locorum figuras) additis, provenit numerus 1994 seu 1995 ferè, pro quarto quæsito. Verum, si quando

```
 635
 ———
 1884 9 .
  094 2 . .
   15 7 . . .
 ————
 1994,8
```

[1]) Gewone breuken; als quotient der deeling was reeds gevonden 1993 $\frac{118}{432}$.

[2]) De deeler is 432; de aftrekkers staan beneden, de resten boven het deeltal 861094.

635	
1884	96
094	248
15	7080
1994	$9' \; 1'' \; 6''' \; 0''''$

quartum hunc præcisè magis quam facilè producere velis, perfeciēda est multiplicatio integrè, ut in sequente schemate, & fiet productum 1994, $9' \; 1'' \; 6''' \; 0''''$ (per decimalem Arithmeticam) id est, $1994 \frac{9160}{10000}$ vel $1994 \frac{916}{1000}$ pro quarto quęsito: quod per vulgarem abbreviationem valet $1994 \frac{229}{250}$. Et ita in omnibus aliis.

In zijn Rabdologia (Roerekening), die aan de „multiplicatio per gelosia" [1]) der Italiaansche wiskunstenaars (en der Indiërs) herinnert, verklaart Napier het maaksel en het gebruik van zijn telroetjes (virgulæ numeratrices), die evenwel met meer recht den naam van rekenbalkjes verdienen, daar zij den vorm hebben van rechthoekige parallelepipeda. Zij zijn tien in aantal, omstreeks 5 cM. lang en tienmaal zoo lang als breed en dik. Ieder van de vier rechthoekige zijvlakken is verdeeld in negen vierkanten en twee halve vierkanten, waarvan zich aan ieder uiteinde één bevindt; de vierkanten zijn weer verdeeld in driehoeken door de diagonalen van rechts-boven naar links-beneden. In de negen vierkanten van zulk een zijvlak staan de negen eerste veelvouden van een der getallen kleiner dan tien; bij de veelvouden van twee cijfers scheidt de diagonaal het cijfer der tientallen van dat der ééntallen. Op twee overstaande zijvlakken vindt men de veelvouden van getallen, die samen negen uitmaken, en wel in tegengestelde orde, op het eene van boven naar beneden en op het andere van beneden naar boven; deze inrichting levert eenig meerder gemak op bij de uitvoering van een proef op de vermenigvuldiging, waarbij het noodig is, de balkjes om te keeren. Op de vierkante eindvlakken staan de getallen, waarvan de zijvlakken de veelvouden bevatten. Zij zijn voor de tien balkjes:

0, 1, 9 en 8; 0, 2, 9 en 7; 0, 3, 6 en 9;
0, 4, 9 en 5; 1, 2, 8 en 7; 1, 3, 8 en 6;
1, 4, 8 en 5; 2, 3, 7 en 6; 2, 4, 7 en 5;
3, 4, 6 en 5.

Het ontwikkelde zijoppervlak van het derde balkje vindt men in Fig. 10 afgebeeld.

[1]) Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart nach den Originalquellen bearbeitet, Leipzig 1888, p. 77.

Napier's rekenbalkjes dienen uitsluitend, om geheel werktuiglijk een willekeurig getal te vermenigvuldigen met een getal van één cijfer.

Moet men bv. het product 6 × 7859 berekenen, dan legt men de balkjes, waarop de veelvouden van 7, 8, 5 en 9 gevonden worden (het tweede, eerste, vierde en derde bv.) zóó naast elkander, dat de cijfers 7, 8, 5 en 9, die in de bovenste vierkanten staan, in één rij komen en het getal 7859 vormen. Uit de zesde rij vierkanten kan men dan onmiddellijk het verlangde product 47154 aflezen, door in de richting der diagonaal van rechts-boven naar links-beneden de tientallen van elk gedeeltelijk product op te tellen bij de ééntallen van het gedeeltelijk product, dat er aan de linkerhand naast staat (Fig. 11).

Napier heeft zorg gedragen, dat men met de cijfers in de bovenste vierkanten van zijn tien rekenbalkjes een zeer groot aantal getallen kan vormen, t. w. alle getallen kleiner dan 11 111, alsmede alle getallen, kleiner dan 10^{10}, die met hun overstaanden geen cijfer vijfmaal, geen twee cijfers samen achtmaal en geen drie cijfers samen tienmaal bevatten. Met twee stellen van deze rekenbalkjes kan men alle getallen kleiner dan 111 111 111 vormen, alsmede alle getallen, kleiner dan 10^{20}, die met hun overstaanden geen cijfer negenmaal, geen twee cijfers samen vijftienmaal en geen drie cijfers samen negentienmaal bevatten. Enz.

Bij de vermenigvuldiging van twee willekeurige getallen gaat men op de gewone wijze te werk; alleen worden de producten van het vermenigvuldigtal met de afzonderlijke cijfers van den vermenigvuldiger van de rekenbalkjes afgelezen. Om de proef op een vermenigvuldiging te maken, handelt Napier aldus: Is bv. het product van 1615 met 365 gevonden, dan keert hij de tafel, door de vier balkjes gevormd, om, vermenigvuldigt het getal 8384, dat in de bovenste rij vierkanten staat en waarvan de cijfers met de cijfers van dezelfde betrekkelijke waarde in 1615 telkens negen tot som geven, eveneens met 365, telt 365 bij dit product op en trekt deze som van 3650000 af, d. i. van den vermenigvuldiger, gevolgd door zooveel nullen, als er rekenbalkjes zijn; de rest, die men overhoudt, moet blijkbaar = 365 × 1615 wezen.

Bij de deeling bedient men zich van de rekenbalkjes, om de grootste veelvouden van den deeler te bepalen, die men na elkander moet aftrekken.

Bij de worteltrekking komt, behalve de rekenbalkjes, een rekenplaatje (lamina) te pas, even lang en dik als de balkjes, maar drieà viermaal zoo breed. Aan de eene zijde, die men bij de vierkantsworteltrekking gebruikt, staan de getallen kleiner dan tien, hun tweevouden en hun tweedemachten (Fig. 12[a]); aan de andere zijde, waarvan men zich bij de kubiekworteltrekking bedient, vindt men de getallen kleiner dan tien, hun tweede- en hun derdemachten (Fig. 12[b]).

De vierkantsworteltrekking uit 117716237694 en de kubiekworteltrekking uit 22022635627 worden aldus uitgevoerd:

90	
5 48 95	
67	
21	070
2	14
11.77.16.23.76.94.	22.022.635.627.
3 4 3 0 9 8	2 8 0 3
9	8
2 56	13 952
20 49	70 635 627
61 74 81	
5 48 95 04	

De wortel wordt tusschen twee horizontale strepen onmiddellijk onder het getal geschreven, waaruit hij getrokken wordt; de aftrekkers komen onder en de resten boven deze twee getallen te staan; de vakken van twee en drie cijfers worden niet bijgehaald.

Om bij de vierkantsworteltrekking in het aangehaalde voorbeeld het cijfer der ééntallen te vinden, neemt men $2 \times 34309 = 68618$ en legt, van links naar rechts voortgaande, de rekenbalkjes, waarop de veelvouden van 6, 8, 6, 1 en 8 voorkomen, en het rekenplaatje voor de vierkantsworteltrekking naast elkander. Men vindt dan, diagonaalsgewijze optellende, in de horizontale rijen, van boven afgerekend, de producten 686181×1, 686182×2, 686183×3, enz., waaronder het grootste, dat van de rest 5489594 kan worden afgetrokken, het verlangde cijfer doet kennen.

En om bij de kubiekworteltrekking in het aangehaalde voorbeeld het cijfer der honderdtallen te vinden, neemt men $3 \times 2^2 = 12$ (2 is het cijfer der duizendtallen in den wortel) en legt, van links naar rechts voortgaande, de rekenbalkjes, waarop de veelvouden van 1 en 2 voorkomen, en het rekenplaatje voor de kubiekworteltrekking naast elkander. Men vindt dan, diagonaalsgewijze optellende, in de horizontale rijen, van boven af gerekend, de sommen:

$$3 \times 20^2 \times 1 + 1^3,$$
$$3 \times 20^2 \times 2 + 2^3,$$
$$3 \times 20^2 \times 3 + 3^3, \text{ enz.,}$$

waaronder de grootste, die van de rest 14022 kan worden afgetrokken, de vermoedelijke waarde van het verlangde cijfer doet kennen; hier 9. Van 14022 moet evenwel niet $3 \times 20^2 \times 9 + 9^3$, maar $3 \times 20^2 \times 9 + 3 \times 20 \times 9^2 + 9^3$ kunnen worden afgetrokken, d. i. $3 \times 20 \times 9^2$ meer. Nu is $3 \times 20 = 60$ en $9^2 = 81$; men legt daarom het rekenbalkje, waarop de veelvouden van 6 voorkomen, rechts van het rekenplaatje, leest er de producten $1 \times 6 = 6$ en $8 \times 6 = 48$ van af, en telt 6 en 48, resp. één en twee cijfers inspringende, bij $11529 = 3 \times 20^2 \times 9 + 9^3$ op; aldus:

$$\begin{array}{r} 819 \\ \hline 11529 \\ 6 \\ 48 \\ \hline 16389 \end{array}$$

Daar 16389 niet van de rest 14022 kan worden afgetrokken, is 9 echter te groot; enz.

Het product 3×28^2, dat men vervolgens ter bepaling van het cijfer der tientallen noodig heeft, wordt aldus berekend:

192, d. i. 3×8^2.
160, d. i. 2×8 met een nul er achter.
800, d. i. de helft van 160 met een nul er achter.
1200, d. i. 3×2^2 met twee nullen er achter.

2352

Ten gerieve van den gebruiker worden de regels van bewerking telkens in verzen samengevat; bv.:

[Pro Multiplicatione.]

„Majorem tabules; & obliquè hinc mutipla scribas
Quæ minor ipse monet; quæsitum hæc addita præstant.
Aut tabulam invertas; & obliquè hinc multipla scribas
Quæ minor ipse monet, directè his adde minorem:
Hancque minori aufer summam tot inanibus aucto,
In tabula quot sunt Virgæ, & prodibit id ipsum." p. 18.

„Pro Vulgari.

Multipla quanta potes sectoris quotque secando
Tolle decussatim; quotumique dabunt quotientem." p. 22.

„Pro Decimali.
Multipla quanta potes sectoris, quotque secando
Tolle decussatim cyphris iam quotlibet aucto.
Horum tum quotumi decimalem dant quotientem." p. 22.

wat naar de vertaling van Adriaen Vlack in De Decker's Eerste Deel vande Nieuwe Telkonst, Ter Goude 1626, zeggen wil:

[Voor de vermenigvuldiging.]
„Tafleert het grootst', en schuyns al het Veelvuldigh stelt,
Dat 'tcleynste wijst: 'tbegheerd' comt, die zijnd' opghetelt:
Oft keert de Tafel om, end' de Veelvuldigh' al,
Die 'tcleynste wijst, schrijft schuyns, 'tcleynst recht men [bydoe sal,
En trect die Som van 'tcleynst, soo veel nullen ghedaen
Daer by, als Roetjes zijn, comt dan uyt als voor aen." p. 17.

„Voor de Ghemeene Deelingh.
Het Menighfout, soo groot en dicwils als mach wesen,
Des Deelers trect schuyns af van 't bovenste ghetal,
En schrijft de Werven [1]) al, dieder zijn uyt gheresen,
Die zijnde dan vergaert, de Mael [2]) uytcomen sal." p. 21.

„Voor de Thiende Deelingh.
Soo groot en dicwils als het doenelijcken zy
Des Deelers Menichfout trect van 't bovenst ghetal,
Soo veel nullen ghestelt, alsmen begheert, daer by,
De Thiende Mael dan uyt de Werven comen sal." p. 21.

Nog moet worden opgemerkt, om er later op terug te komen:

1) dat in Hoofdstuk IV bij een deeling [3]), onder vermelding van Stevin's Thiende, Leyden 1585, waarvan in 1608 een Engelsche vertaling verscheen, en in Hoofdstuk IX bij een verkorte vermenigvuldiging [4]) een komma als decimaalteeken dienst doet ter vereenvoudiging van Stevin's omslachtige notatie:

$$9\ 4\ 1\ (0)\ 3\ (1)\ 0\ (2)\ 4\ (3) = 941{,}304,$$

[1]) De cijfers van het quotient.
[2]) Het quotient.
[3]) Zie p. 55.
[4]) Zie p. 56.

éénmaal zelfs met weglating van de aanwijzers, die Romeinsche cijfers verbeelden:

$$1993{,}273 \;;\; 1993{,}\overset{\prime}{2}\,\overset{\prime\prime}{7}\,\overset{\prime\prime\prime}{3} \;;\; 1994{,}\overset{\prime}{9}\,\overset{\prime\prime}{1}\,\overset{\prime\prime\prime}{6}\,\overset{\prime\prime\prime\prime}{0}\;;$$

2) dat in Hoofdstuk IX bij de berekening van den omtrek van een cirkel, waarvan de middellijn gegeven is [1]), voor de eerste maal in een gedrukt werk een verkorte vermenigvuldiging wordt aangetroffen.

b) Tafels.

Rabdologiæ Liber Secvndvs De usu Virgularum Numeratricium in Geometricis & Mechanicis officio Tabularum. 48 pp.

Capvt I. De descriptione Tabularum sequentium.

Capvt II. De inventione laterum, & quadratricum polygonorum per primam Tabulam.

Capvt III. De inventione quadratricum & diametrorum polygonorum per Tabulam secundam.

Capvt IV. De inventione diametrorum & laterum polygonorum per tertiam Tabulam.

Capvt V. De lateribus & cubatricibus quinque corporum regularium inveniendis per quartam Tabvlam.

Capvt VI. De inventione cubatricum & diametrorum regularium corporum, & sphæræ per quintam Tabvlam.

Capvt VII. De diametris & lateribus quinque corporum regularium per sextam Tabulam inveniendis.

Capvt VIII. De ponderibus, & magnitudinibus Metallorum [& lapidū] inveniendis.

In dit Tweede Boek vindt men uiteengezet, hoe men met behulp van tafels uit elkander kan afleiden:

1) de zijden, de vierkantswortels (der oppervlakten) en de middellijnen (der omgeschreven cirkels) van de regelmatige drie-, vier-, negen- en tienhoeken;

2) de ribben, de kubiekwortels (der inhouden) en de middellijnen (der omgeschreven bollen) van de vijf regelmatige veelvlakken;

3) de volumina en de gewichten van eenige metalen en steensoorten.

De tafels zijn in $n \times n$ vierkanten verdeeld en de getallen in de vierkanten der diagonaalrijen van links-boven naar rechts-beneden $= 1000$ gesteld. Vandaar, dat de oplossing der vraagstukken door middel van den regel van drieën, behalve een deeling door 1000, slechts een vermenigvuldiging vereischt, die met behulp van de rekenbalkjes en op verkorte wijze kan worden uitgevoerd.

---

[1]) Zie p. 55.

c) Het Promptuarium Multiplicationis.

De Expeditissimo Multiplicationis Promptvario Appendix. 22 pp.

Capvt I. De lamellarum promptuarii fabrica.
Capvt II. De Pyxidis, pro continendis lamellis Structura.
Capvt III. De facili per promptuarium Multiplicatione.
Capvt IV. De divisione per promptuarium, & Tabulas.

Het Promptuarium Multiplicationis (Voorraadkamer der Vermenigvuldiging) berust op hetzelfde beginsel als de rekenbalkjes en dient, om zeer groote vermenigvuldigingen uit te voeren.

Het bestaat uit honderd dikke en honderd dunne linialen (lamellæ), ieder ongeveer lang 2 dM., breed 2 cM. en dik de dikke (Fig. 13) $\frac{1}{2}$ cM. en de dunne (Fig. 14) $\frac{1}{4}$ cM. Op elke liniaal is een der zijvlakken van 2 cM. breedte verdeeld in tien vierkanten en twee rechthoeken, één aan het boveneinde en één, half zoo breed, aan het ondereinde. De vierkanten zijn weer verdeeld in driehoeken, op de dikke linialen door de diagonalen van rechtsboven naar links-beneden en op de dunne door die van links-boven naar rechts-beneden. Op den breeden bovenrand zijn zoowel de dikke als de dunne linialen, telkens bij tienen, met de cijfers 0, 1, 2,... 8 en 9 gemerkt. Verder zijn de dikke linialen met cijfers beschreven en vertoonen de dunne driehoekige openingen. Om deze cijfers en openingen behoorlijk aan te brengen, moet men de vierkanten op de linialen, die met de cijfers 1, 2,... 8 en 9 gemerkt zijn (de linialen met de nullen vereischen geen verdere bewerking) door hulplijnen, die later weer uitgewischt worden, ieder in negen kleiner vierkanten verdeelen en elk vierkantje door de diagonaal, evenwijdig aan de reeds getrokken diagonaal, in twee driehoekjes. Vervolgens moet men zich voorstellen, dat in de achttien driehoekjes van elk groot vierkant de letters *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* en *i* zijn ingevuld op de wijze, als in Fig. 15 is aangeduid. Op de dikke linialen moet dan in de driehoekjes met de letter *a* éénmaal, in die met de letter *b* tweemaal, in die met de letter *c* driemaal,... en in die met de letter *i* negenmaal de waarde komen te staan van het cijfer, waarmede de liniaal gemerkt is; bij de veelvouden van twee cijfers wordt het cijfer der éêntallen aan de rechterhand en dat der tientallen aan de linkerhand van de diagonaal in de groote vierkanten geschreven.

En van de dunne linialen met het cijfer 1 moeten de driehoekjes worden uitgesneden, waarin de letter *a* staat, van die met het cijfer 2 de driehoekjes, waarin de letter *b* staat, van die met het cijfer 3 de driehoekjes, waarin de letter *c* staat,... en van die met het cijfer 9 de driehoekjes, waarin de letter *i* staat.

Legt men nu een dunne op een dikke liniaal, zóó dat de diagonalen van twee groote vierkanten samenvallen, dan kan men door de openingen in de dunne liniaal de cijfers aflezen, die het product vormen van de getallen, waarmede de linialen gemerkt zijn. Zoo zouden de afgebeelde linialen, behoorlijk op elkander gelegd, het product 7 $\times$ 4 $=$ 28 opleveren.

De twee honderd linialen worden geborgen in een uitsluitend voor dit doel ingericht kastje (pyxis), gerangschikt, met de beschreven zijde naar boven, in lagen van tien, die van boven naar beneden met de cijfers 0, 1, 2, ... 8 en 9 zijn gemerkt, en wel beurtelings een laag dikke met den breeden bovenrand naar achteren en, dwars er over, een laag dunne met den breeden bovenrand naar rechts.

Wil men met behulp van het promptuarium het product van 8795036412 met 3586290741 bv. berekenen, dan legt men op het bovenvlak van het kastje, dat aan de beneden- en aan de linkerzijde van een opstaanden rand voorzien is, de dikke linialen, die met de cijfers 8, 7, 9, 5, 0, 3, 6, 4, 1 en 2 gemerkt zijn, van links naar rechts naast elkander, met deze cijfers aan de bovenzijde van het bord, en dwars er over van boven naar beneden, met de cijfers aan de rechterzijde van het bord, de dunne linialen die met de cijfers 3, 5, 8, 6, 2, 9, 0, 7, 4 en 1 gemerkt zijn. Men vindt dan blijkbaar het verlangde product 31541557651113461292, als men de zichtbare cijfers op de gewone wijze, te beginnen aan den rechter-benedenhoek van het bord, kolomsgewijze optelt, waarbij de cijfers op een zelfde strook tusschen twee diagonalen een kolom uitmaken.

Wil men zich bij de deeling van het promptuarium bedienen, dan moet men de bewerking in een vermenigvuldiging veranderen, door den deeler om te keeren met behulp van een goniometrische tafel, waarin immers de straal middelevenredig is tusschen sinus en cosecans, cosinus en secans, tangens en cotangens.

d) De Arithmetica Localis.

Arithmeticæ Localis, quæ in Scacchiæ abaco exercetur, Liber Unus. 42 pp.

Capvt primvm. De descriptione Perticæ pro lineali locatione.
Capvt II. De Translatione vulgarium numerorum in locales.
Capvt III. De reductione localium numerorum ad vulgares.
Capvt IV. De abbreviatione & extensione.

Capvt V. De additione, & substractione, cum translationis ac reductionis compendio.
Capvt VI. De descriptione abaci, vel alvei, pro locatione areali.
Capvt VII. De motu areali calculorum in abaco.
Capvt VIII. De Axiomatis & consectariis utriusque motus in abaco.
Capvt IX. De multiplicatione.
Capvt X. De Divisione.
Capvt XI. De extractione quadrata.

De Arithmetica Localis (Plaatselijke Rekenkunde) bestaat in niets anders dan in de uitvoering van berekeningen in het tweetallig talstelsel, waarbij de termen van de schaal, dus de machten van twee, door rekenschijven (calculi) worden aangewezen, die men bij de optelling en de aftrekking op een rekenstaaf (pertica) (Fig. 16) en bij de vermenigvuldiging, de deeling en de vierkantsworteltrekking op een als een schaakbord in vakken verdeeld rekenbord (abacus) plaatst en verplaatst; schriftelijk worden zij door de letters van het alphabet aangeduid: $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 16$, enz. Vandaar de naam van „numeri locales seu literales" en van „Arithmetica Localis".

De herleiding der getallen van het tientallig naar het tweetallig stelsel en omgekeerd wordt op de bekende wijzen uitgevoerd. Men vindt bv.:

$$1611 = 1 + 2 + 8 + 64 + 512 + 1024 = abdgkl$$

en plaatst nu, als men van de rekenstaaf gebruik wil maken, een rekenschijf in elk der vakken, die met de letters *a*, *b*, *d*, *g*, *k* en *l* gemerkt zijn.

Bij de optelling worden alle letters, die in de verschillende termen voorkomen, in alphabetische orde naast elkander geschreven, waarna men de uitkomst zoo mogelijk gaat verkorten (abbreviare), door, te beginnen aan de linkerhand, telkens voor twee gelijke letters de volgende letter van het alphabet in de plaats te stellen. Moet men bv. *acdeh* bij *bcfgh* optellen, dan begint men met voor de som te schrijven *abccdefghh*, en deze uitkomst verkort men aldus:

$$abccdefghh = abddefghh = abeefghh$$
$$= abffghh = abgghh = abhhh = abhi.$$

Bij de aftrekking worden uit het aftrektal de letters weggelaten, die in den aftrekker voorkomen. Om dit te kunnen doen, zorgt men, dat er in het aftrektal geen letters ontbreken, die in het alphabet voorafgaan aan de letter aan de rechterhand, waartoe men zoo noodig het aftrektal gaat verlengen (extendere), door, te beginnen aan de rechterhand, telkens voor een letter tweemaal de voorafgaande letter van het alphabet in de plaats te stellen. Moet men bv. *acdeh* van *abhi* aftrekken, dan begint men met het aftrektal, waarin letters ontbreken, te verlengen; aldus:

$$abhi = abhhh = abgghh = abffghh$$
$$= abeefghh = abddefghh = abccdefghh.$$

Uit het aftrektal in dezen vorm laat men de letters *a*, *c*, *d*, *e* en *h* van den aftrekker weg en houdt dan *bcfgh* als rest over.

Met behulp van de rekenstaaf gaat men op overeenkomstige wijze te werk.

Men kan zich van de optelling en de aftrekking der „numeri locales'' bedienen, om de herleidingen van het tientallig naar het tweetallig stelsel te vereenvoudigen, door gebruik te maken van een tafel, waarin de herleiding voor de negen eerste veelvouden van de termen der schaal van het tientallig stelsel is uitgevoerd; aldus:

	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
1	*a*	*bd*	*cfg*	*dfghik*	*eiklo*	*fhklqr*	*gkprstv*
2	*b*	*ce*	*dgh*	*eghikl*	*fklmp*	*gilmrs*	
3	*ab*	*bcde*	*cdfi*	*defhikm*	*efilnop*	*fghiknqt*	
4	*c*						

Bij de bewerkingen, die thans aan de beurt zijn, komt het rekenbord (Fig. 17) te pas, dat in een aantal vakken verdeeld moet worden, groot genoeg, om er alle voorkomende berekeningen op te kunnen uitvoeren. Het bord doet dienst als een tafel van vermenigvuldiging met dubbelen ingang: een schijf, op een der vakken geplaatst, wijst het product aan van de twee factoren, die op den benedenrand in dezelfde kolom en op den rechterzijrand in dezelfde rij staan en met Latijnsche letters zijn aangeduid. De vakken in de diagonaalrij $a\psi$, die van den rechter-beneden- naar den linker-bovenhoek loopt, vertegenwoordigen de tweedemachten van de getallen *a*, *b*, *c*, *d*, enz. Twee vakken, die symmetrisch liggen ten aanzien van de diagonaalrij $a\psi$, wijzen producten van dezelfde factoren aan, genomen in omgekeerde orde. In de vakken in een schuine rij evenwijdig aan de diagonaalrij & &, die van den linker-beneden- naar den rechter-bovenhoek loopt, staan producten van dezelfde waarde, die men in de figuur aan weerskanten van de rij schuin naast den rand geschreven vindt.

Zoo staan de producten:

$$a.l, b.k, c.i, d.h, e.g, f.f, g.e, h.d, i.c, k.b, l.a$$

in de schuine rij, die van l op den benedenrand naar l op den rechterzijrand loopt; hun waarde is $l = 1024$.

Evenzoo de producten:

$$s.\&, t.z, v.y, x.x, y.v, z.t, \&. s$$

in de schuine rij, die van ρ op den linkerzijrand naar ρ op den bovenrand loopt; hun waarde is $\rho = 1099511627776$.

Moet men nu bv. $1206 = bcefhl$ vermenigvuldigen met $604 = cdegk$, dan plaatst men rekenschijven op de vakken, die de rijen b, c, e, f, h en l van het vermenigvuldigtal gemeen hebben met de kolommen c, d, e, g en k van den vermenigvuldiger, en telt de afzonderlijke producten, door de schijven aangewezen, samen. Hiertoe verschuift men de schijven in de richting van de diagonaal $\&\ \&$ naar den rand van het bord, hetzij naar den rechterzij- en den bovenrand, hetzij naar den beneden- en den linkerzijrand, en vervangt telkens twee schijven, die naast een zelfde vak staan, door een schijf, die één vak hooger wordt geplaatst, enz.

Men vindt zoodoende:

$$\begin{aligned} 604 \times 1206 &= cdegk \times bcefhl \\ &= deeffgghhhiiikklllmmmnoooopprrv \\ &= dfffgghhhiiikklllmmmnoooopprrv \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= dfgilmnrsv = 728424. \end{aligned}$$

Moet men omgekeerd $728424 = dfgilmnrsv$ deelen door $604 = cdegk$, dan plaatst men aan den rechterzij- en den bovenrand rekenschijven naast de vakken $d, f, g, i, l, m, n, r, s$ en v van het deeltal en merkt aan den benedenrand de kolommen c, d, e, g en k van den deeler. Nu zoekt men, daar v in het deeltal en k in den deeler den term van de hoogste orde aanwijst, het vak, dat de schuine rij vv met de kolom k gemeen heeft, en plaatst in de rij l, waarin dit vak gevonden wordt, rekenschijven in de kolommen c, d, e, g en k van den deeler. Het product $noprv$, door deze schijven voorgesteld, trekt men van het deeltal af, door rekenschijven van den rand van het bord weg te nemen; de rest is $dfgilmoqr$. Was het product $noprv$ grooter geweest dan het deeltal, dan zou men de rekenschijven een rij lager hebben moeten plaatsen. Vervolgens zoekt men het vak, dat de schuine rij *rr* met de kolom *k* gemeen heeft, enz. Is eindelijk de rest, die men overhoudt, kleiner dan de deeler, dan wijzen de rijen, waarin de aftrekkers staan, op den rechterzijrand de termen *b*, *c*, *e*, *f*, *h* en *l* aan, waarvan het quotient de som is.

De tweedemacht van eenig getal, bv. van *npqtv*, wordt op het rekenbord voorgesteld door een vierkant van rekenschijven, dat door de diagonaal $a\psi$ in twee symmetrische helften verdeeld wordt. Men kan zich de schijven van zulk een vierkant haaksgewijze gerangschikt denken; aldus:

1) de schijf *v.v* in den linker-bovenhoek van het vierkant, die de tweedemacht van *v* voorstelt;

2) de drie schijven *t.v*, *t.t* en *v.t*, die met de vorige een vierkant vormen, dat de tweedemacht van *t v* voorstelt;

3) de vijf schijven *q.v*, *q.t*, *q.q*, *t.q* en *v.q*, die met de vier vorige een vierkant vormen, dat de tweedemacht van *q t v* voorstelt;

4) de zeven schijven *p.v*, *p.t*, *p.q*, *p.p*, *q.p*, *t.p* en *v.p*, die met de negen vorige een vierkant vormen, dat de tweedemacht van *p q t v* voorstelt;

5) de negen schijven *n.v*, *n.t*, *n.q*, *n.p*, *n.n*, *p.n*, *q.n*, *t.n* en *v.n*, die met de zestien vorige een vierkant vormen, dat de tweedemacht van *npqtv* voorstelt.

De rekenschijven onder 2), 3), 4) en 5), die men telkens bij een tweedemacht moet voegen, om weer een tweedemacht te krijgen, vormen, wat Napier een winkelhaak (gnomon) noemt. De schijf *v.v* heet het hoofd van de winkelhaken (caput gnomonum).

Moet men nu omgekeerd uit eenig getal, bv. uit $\alpha\delta\varsigma\lambda\xi\pi$, d. i. de tweedemacht van *npqtv*, den vierkantswortel trekken, dan plaatst men rekenschijven langs den rand van het bord naast de vakken α, δ, ς, λ, ξ en π, en begint met het hoofd van de winkelhaken te bepalen, d. i. de rekenschijf van de grootste waarde in de diagonaalrij $a\psi$, die van $\alpha\delta\varsigma\lambda\xi\pi$ kan worden afgetrokken, hier *v.v*. Nadat men de schijven langs den rand van het bord met *v.v* verminderd heeft, bepaalt men den grootsten winkelhaak, die van de rest $\alpha\delta\varsigma\lambda\xi o$ kan worden afgetrokken. Napier noemt dezen grootsten winkelhaak den passenden winkelhaak (congruus gnomon) en merkt op, dat zijn uiteinden één à twee schuine rijen lager komen te vallen dan die, aangewezen door de grootste schijf aan den rand van het bord. In ons voorbeeld vormen de schijven *t.v*, *t.t* en *v.t* den eersten passenden winkelhaak. Nadat men er de schijven aan den rand van het bord mede verminderd heeft, bepaalt men den grootsten winkelhaak, die van de rest $\alpha\delta\varsigma\lambda\nu$ kan worden afgetrokken. Hier vormen de schijven *q.v*, *q.t*, *q.q*, *t.q* en *v.q* den tweeden passenden winkelhaak. Enz.

Zoo gaat men voort, totdat men minder dan elken kleinsten winkelhaak overhoudt. Van het door de rekenschijven voorgestelde grootste vierkant, dat in het getal begrepen is, waaruit de wortel getrokken moest worden, wijzen dan de rijen op den rechterzijrand van het bord de termen aan, waarvan de wortel de som is.

Opmerkingen.

Van de instrumentale hulpmiddelen in de Rabdologia beschreven en door Napier uitgedacht ten behoeve van hen, die liever niet met logarithmen werkten [1]), hebben de virgulæ numeratrices, in

---

[1]) Opdracht der Rabdologia.

Illustrissimo Viro Alexandro Setonio Fermelinoduni Comiti, Fyvæi, & Vrqvharti Domino, &c. Supremo Regni Scotiæ Cancellario. S.

Difficultatem & prolixitatem calculi (Vir Illustrissime) cujus tædium plurimos à studio Mathematum deterrere solet, ego semper pro viribus, & ingenii modulo conatus sum è medio tollere. Atque hoc mihi fine proposito, Logarithmorum canonem à me longo tempore elaboratum superioribus annis edendum curavi, qui rejectis naturalibus numeris, & operationibus quæ per eos fiunt, difficilioribus, alios substituit idem præstantes per faciles additiones, substractiones, bipartitiones, & tripartitiones. Quorum quidem Logarithmorum speciem aliam multò præstantiorem nunc etiam invenimus, & creandi methodem, unà cum eorum usu (si Deus longiorem vitæ & valetudinis usuram concesserit) evulgare statuimus: ipsam autem novi canonis supputationem, ob infirmam corporis nostri valetudinem, viris in hoc studii genere versatis relinquimus: imprimis verò doctissimo viro D. Henrico Briggio Londini publico Geometriæ Professori, & amico mihi longè charissimo.

Intereà tamen in gratiam eorum qui per ipsos numeros naturales oblatos operari maluerint, tria alia calculi compendia excogitavimus: quorum primum est per virgulas numeratrices, quod Rabdologiam vocamus: alterum verò quod omnium pro multiplicatione expeditissimum est, per lamellas in pyxide dispositas, quam ob id, Multiplicationis promptuarium non immeritò appellabimus. Tertium denique per Arithmeticam localem, quæ in Scacchiæ abaco exercetur.

Ut autem libellum de Fabrica & vsv virgularum publici juris facerem, hoc imprimis impulit, quod eas non solum viderem permultis ita placuisse, ut jam ferè sint vulgares, & in exteras etiam regiones deferantur: sed perlatum quoque sit ad aures meas humanitatem tuam mihi consuluisse ut id ipsum facerem, ne forsan illis alieno nomine editis, cum Virgilio canere cogerer,

Hos ego versiculos feci, &c..

Atque hoc tuæ amplitudinis amantissimum consilium apud me maximum pondus habere debuit: & certè sine eo vix unquam hoc de virgulis opusculum (cui reliqua duo adjunximus compendia) in lucem prodiisset.

Si quæ igitur gratiæ à Mathematum cultoribus ob hos libellos debentur, eas omnes (tu Vir Clarissime) tuo tibi jure vendicas, ad quem non modò ut patronum, sed potius ut alterum parentem liberè transvolant: præsertim quum exploratum habeam te meas illas virgulas tanti fecisse, ut non ex vulgari materia, sed ex argento fieri curaveris.

Schotland en Engeland in de wandeling Napier's bones genoemd, den meesten opgang gemaakt. Ze waren reeds algemeen in gebruik gekomen en zelfs in den vreemde bekend geworden, voordat Napier zijn Rabdologia had uitgegeven; de Grootkanselier van Schotland, aan wien Napier zijn arbeid later opdroeg, was er zoozeer mede ingenomen, dat hij zich een stel van zilver had laten vervaardigen. En hoezeer ze in den smaak vielen van de rekenmeesters dier dagen en zelfs boven de logarithmen de voorkeur genoten, kan blijken uit de woorden, waarmede Ezechiël de Decker de Nederlandsche uitgaaf van de Rabdologia in zijn Eerste Deel vande Nieuwe Telkonst, Ter Goude 1626, aankondigt. „Terwijl ick", zegt hij in de Voor-reden tot den Goetwilligen ende Konstlievenden Leser, „inde Vermaerde Stadt Gouda Professie doende vande Meetkonst ende Rekenkonst bevondt, dat vele Leerlingen grooten schrick ende afkeericheydt hadden vande Konsten, door de groote ende verdrietighe Rekeninghen die inde selfde voorkomen, alsoo dat de selfde by haer in verachtinghe zijn in plaets van die te beminnen, ende ooc bevont dat ick selfs veel tijdts moste besteden int solveren van eenighe questien die mij daghelijcx voorquamen, ben ick seer begheerich geweest om eenighe remedie daer toe te konnen vinden, ende als ic alle nieuwe werken vande Wiskonsten met vlijte ondersocht, is my onder andre ter hant gekomen een Boecxken Ioannis Neperi Heer van Merchistoun, int Latijn beschreven, ende ghenaemt Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, waer in ick sach een wonderlick gebruyc der Platte ende Clootsche Driehoecken: Doch also ick inde Latijnsche sprake onervaren was, badt ic den Konstlievenden Ionghman Adriaen Vlac, (die hem doenmael met grooten yver inde Meetkonst oeffende) dat hy 'tselfde wilde in Nederduyts overschrijven, 'twelck hy tot mijn groot contentement dede, ende hoewel my 'tselfde sonderlingh behaechde, nochtans bevindende dat het dingen waren die voor de gemeene Luyden, die haer inde Wiskonsten niet en oeffenen, ondienstigh waren, heeft het mijn wenschen t'eenemael niet konnen voldoen. Korts daer nae toonde my den voornoemden Adriaen Vlack, een ander Boecxkens des selfden Ioannis Neperi int Latijn

---

Accipe igitur æquo animo (Vir Illustrissime) hoc opusculum qualecunque: ejusque licet tanto Mæcenate indigni, ut tui tamen fœtus patrocinium suscipe: Sicut & te Iustitiæ æquitatisque patronum diu nobis & Reipublicæ incolumem servari enixè à Deo optamus.

Amplitudini tuæ
meritò addictissimus

Ioannes Neperus
Merchistonii Baro.

beschreven ende ghenaemt Rabdologia, &c. het welck hy mede in Duyts oversettede door mijn versoeck, waer in ick bevont het ghene mijn begheeren volkomen voldede, alsoo int selfde konstigh gheleert wort, alle voorvallende sware ende langhe Menighvuldigingen, Deelingen, Wttreckinghen der Vierkante ende Teerlincxse Wortels, &c. met besondere lichticheydt af veerdighen door het ghebruyck van eenighe Roetjes vanden Autheur daer toe gheordonneert, ende andre manieren als hier nae sal blijcken."

Neemt men de jaartallen, waarvan Napier zich als voorbeelden bedient, als die der samenstelling aan, dan dagteekent de Arithmetica Localis van 1611 [1]) en de Rabdologia van 1615 [2]); het Promptuarium werd door Napier, die zijn leven lang in zijn vrijen tijd naar hulpmiddelen bleef zoeken, om de uitvoering van berekeningen te vergemakkelijken [3]), na de Plaatselijke Telkunst en de Roerekening gevonden [4]).

---

[1]) Vt sit numerus anni Domini 1611. notis nostris localibus exprimendus. p. 118.

[2]) Proponatur annus Domini 1615. in tabulam debitè cum suis multiplis collocandus. p. 10.

[3]) Dvm in his calculi compendiis (quoties per otium licuerat) investigandis operam aliquando darem, & quibus modis labor & molestia calculi tolleretur, inquirerem: incidi (præter Logarithmos, Rabdologiam, Promptvarivm Multiplicationis, & alia) in tabularem quandam Arithmeticam, quæ (quum omnia graviora Arithmeticæ vulgaris opera in abaco seu area Scacchiæ perficiat) meritò ludus, non labor dicenda est: per hanc enim fit additio, substractio, multiplicatio, divisio, imo & radicum extractio, solo calculorum huc, illucque motu. p. 113.

[4]) Qvamvis omnium ultimò à nobis inventum sit hoc Multiplicationis promptuarium: non tamen postremum huius operis locum meretur. p. 91.

MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS CONSTRUCTIO.

Mirifici | Logarithmo- | rvm Canonis | Descriptio, | Ejusque usus, in utraque Trigonome- | tria; vt etiam in omni Logistica Ma- | thematica, amplissimi, facillimi, | & expeditissimi explicatio. | Accesservnt Opera Posthvma; | Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarith- | morum ad naturales ipsorum numeros habitudines. | Secundò, Appendix de alia, eáque præstantiore Loga- | rithmorum specie construenda. | Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Trian- | gula sphærica mirá facilitate resolvenda. | Autore ac Inventore Ioanne Nepero, | Barone Merchistonii, &c. Scoto. |

Edinbvrgi, | Excvdebat Andreas Hart. | Anno 1619. |

[Deze titel dient, om dien van de Descriptio te vervangen, als Descriptio en Constructio in één band worden gebonden.]

Mirifici | Logarithmorvm | Canonis Con- | strvctio; | Et eorum ad naturales ipsorum habitudines; | Vnà Cvm | Appendice, de aliá eáque præstantiore Loga- | rithmorum specie condenda. | Qvibvs Accessere | Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda: | Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici | Briggii, in eas & memoratam appendicem. | Authore & Inventore Ioanne Nepero, Barone | Merchistonii, &c. Scoto. |

Edinbvrgi, | Excudebat Andreas Hart. | Anno Domini 1619. |

4°. 19 × 14½ cM. A 1^1, *Titel.* A 1^2, wit. A 2, 2 pp.: *Lectori Matheseos Studioso S.*, onderteekend: *Robertvs Nepervs, F.* A 3^1—E 4^1, pp. 5—39: *Mirifici Logarithmorvm Canonis Constrvctio; (Qvi Et Tabvla Artificialis ab autore deinceps appellatur) eorumque ad naturales ipsorum numeros habitudines.* E 4^2—F 3^1, pp. 40—45: *Appendix*, bevattende: *De alia eaque præstantiore Logarithmorvm specie construenda; in qua scilicet, vnitatis Logarithmus est* 0.; *Alius modus facilè creandi Logarithmos numerorum compositorum, ex datis*

Logarithmis suorum primorum.; *Habitudines Logarithmorvm & suorum naturalium numerorum invicem.* F 3^2—G 3^1, pp. 46—53: *Lvcvbrationes Aliqvot Doctissimi D.Henrici Briggii In Appendicem præmissam.* G 3^2—H 3^2, pp. 54—62: *Propositiones Qvædam Eminentissimæ ad triangula sphærica, mirâ facilitate resolvenda.*, bevattende: *Triangulum sphæricum resolvere, absque eiusdem divisione in duo quadrantalia aut rectangula.*; *De semi-sinuum versorum præstantia & vsu.* H 4^1—I 2^1, pp. 63—67: *Annotationes Aliqvot Doctissimi D. Henrici Briggii In Propositiones Præmissas.* I 2^2, wit. 68 pp.

Van dit werk verschenen vijf uitgaven in het Latijn: Edinburgh 1619 (afzonderlijk en als bijband van de Descriptio), Lyon 1619, 1620 en 1658 (telkens als bijband van de Descriptio), Parijs 1895 (facsimile der Lyonsche uitgaaf van 1620; prijs 8 fr.); — één in het Engelsch: Edinburgh en Londen 1889 (prijs 15 s.).

Een exemplaar bezitten in ons land de bibliotheken der Rijksuniversiteiten te Groningen (Lyon 1658), Leiden (Edinburgh en Londen 1889) en Utrecht (Lyon 1620) en de Koninklijke Bibliotheek te 's-Gravenhage (Edinburgh en Londen 1889).

Over den inhoud.

a) Samenstelling van den Canon Mirificus.

Mirifici Logarithmorvm Canonis Constrvctio; (Qvi Et Tabvla Artificialis ab autore deinceps appellatur) eorumque ad naturales ipsorum numeros habitudines. 35 pp.

5. In numeris periodo sic in se distinctis, quicquid post periodum notatur fractio est, cujus denominator est vnitas cum tot cyphris post se, quot sunt figuræ post periodum.

Vt 10000000.04, valet idem, quod 10000000 $\frac{4}{100}$. Item 25.803. idem quod 25 $\frac{803}{1000}$. Item 9999998.0005021, idem valet quod 9999998 $\frac{5021}{10000000}$. & sic de cæteris.

8. Adduntur bini alicuius quantitatis termini ad binos terminos alterius, quum minor illius minori huius, & maior illius maiori huius additur.

9. Multiplicantur bini alicuius quantitatis termini per binos terminos alterius, quum minor illius in minorem huius, & maior illius in maiorem huius ducitur.

10. Terminorum substractio fit, terminum maiorem minoris quantitatis à minore maioris, & minorem minoris à maiore maioris auferendo.

11. Divisio fit, partiendo terminum maiorem dividendi per minorem divisoris, & minorem dividendi per maiorem divisoris.

12. Rudes terminorum fractiones delendæ sunt addita vnitate ad terminum maiorem.

23. Arithmeticè crescere, est æqualibus temporibus æquali semper quantitate augeri.

24. Geometricè decrescere, est æqualibus temporibus quantitatem primò totam, inde aliam atque aliam ejus partem superstitem, simili semper proportionali parte diminui.

25. Vnde punctus mobilis Geometricè ad fixum accedens, velocitates suas prout distantias, à fixo proportionatas habet.

26. Numerus artificialis (Logarithmus) sinus dati, est qui Arithmeticè crevit tantâ semper velocitate, quantâ sinus totus incepit Geometricè decrescere, tantoque tempore, quanto sinus totus in sinum illum datum decrevit.

27. Vnde sinus totius nihil est pro artificiali.

28. Hinc etiam sequitur, quod cujuslibet dati sinus numerus artificialis, major est differentiâ inter sinum totum, & sinum datum; & minor differentiâ quæ est inter sinum totum, & quantitatem eo majorem in eadem ratione, quæ est sinus totius ad datum. Atque hæ differentiæ dicuntur ideò termini artificialis.

30. Vnde primæ Tabulæ primum proportionale, quod est 9999999, habet suum artificialem numerum inter terminos 1.0000001 & 1.0000000.

39. Duorum artificialium differentia, est inter duos terminos, ad quorum maiorem se habet sinus totus, vt eorum artificialium minor sinus ad sinuum differentiam: & ad minorem terminum se habet sinus totus, vt artificialium sinus maior ad sinuum differentiam.

47. Radicalis Tabvlæ.

Columna prima.		Columna secunda.	
Naturales.	Artificiales.	Naturales.	Artificiales.
10000000.0000	.0	9900000.0000	100503.3
9995000.0000	5001.2	9895050.0000	105504.6
9990002.5000	10002.5	9890102.4750	110505.8
9985007.4987	15003.7	9885157.4237	115507.1
9980014.9950	20005.0	9880214.8451	120508.3
&c. usq. ad	usque ad	usque ad	usque ad
9900473.5780	100025.0	9801468.8423	200528.2

	Columna 69ª.	
	Naturales.	Artificiales.
& cæteri usque ad	5048858.8900	6834225.8
	5046334.4605	6839227.1
	5043811.2932	6844228.3
	5041289.3879	6849229.6
	5038768.7435	6854230.8
	& tandem	usque ad
	4998609.4034	6934250.8

51. Omnes sinus in proportione dupla, habent 6931469.22 pro differentia suorum artificialium.

52. Omnes sinus in proportione decupla, habent 23025842.34 pro differentia suorum artificialium.

57. Aggregatum ex artificiali dimidii sinus totius, & artificiali cuiusque arcus, æquatur aggregato artificialium dimidii ejus arcus, & complementi hujus dimidii. Vnde artificialis huius dimidii arcus haberi potest, cæterorum trium artificialibus datis.

Epitome Tabulæ artificialis aliter condendæ.

Kunstgetallen (numeri artificiales) en Kunsttafel (tabula artificialis) noemt Napier in de Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (Samenstelling van den wonderbaren Canon der Logarithmen) de Logarithmi en den Canon Logarithmorum; de naam Logarithmen, die blijkens Robert Napier's voorrede pas na de bewerking der Constructio werd uitgedacht, vindt men evenwel telkens aan den rand der bladzijde met een verwijzingsteeken naast dien van Numerus Artificialis vermeld.

Bij de berekening van zijn logarithmen bedient Napier zich uitsluitend van decimale breuken, niet met de komma, zooals eenige malen in de Rabdologia, maar met de stip als decimaalteeken en zonder aanwijzers; ontbreken de geheelen, dan wordt er geen nul vóór de stip geschreven, een gebruik, dat tot op heden met name onder Engelsche schrijvers navolging vindt:

25.803; 9999998.0005021; .49997122; .0004950.

In den Canon Mirificus komen de logarithmen voor zonder decimalen, afgerond in geheelen. Evenals in de Constructio vindt men de stip als decimaalteeken gebruikt in Wright's vertaling van de Descriptio, die van 1616 dateert en waarvan Napier de kopij heeft doorgezien [1]): in de bijbehoorende tafel zijn de logarithmen in één cijfer minder opgegeven dan in den Canon van 1614 met uitzondering van die der sinussen van 89°—90°, waarin dit cijfer door een stip van de overige cijfers gescheiden is.

Uit het voorkomen van de komma als decimaalteeken in de Rabdologia, Edinburgi 1617, en van de stip als zoodanig in de Constructio, Edinburgi 1619, waarvan de samenstelling echter van vóór 1614 dagteekent, alsmede in Wright's Engelsche bewerking van de Descriptio, London 1616, „perused and approued by the Author", meen ik te mogen besluiten, dat wij onze hedendaagsche schrijfwijze der decimale breuken aan Napier te danken hebben en

[1]) But now some of our countrymen in this Island, well affected to these studies, and the more publique good, procured a most learned mathematician to translate the same into our vulgar English tongue; who, after he had finished it, sent the coppy of it to me, to bee seene and considered on by myself. I having most willingly and gladly done the same, finde it to bee most exact and precisely conformable to my minde and the originall. Therefore it may please you, who are inclined to these studies, to receive it from me and the Translator, with as much good will as we recommend it unto you.

Uit „The Authors Preface to the Admirable Table of Logarithmes".

niet aan Bürgi, Pitiscus of Kepler, zooals van Duitsche zijde niet zelden beweerd wordt [1]).

Na de verklaring van de notatie der tiendeelige breuken leert Napier twee grenzen bepalen voor de som, het product, het verschil en het quotient van twee getallen, als van ieder dier getallen twee grenzen gegeven zijn.

Een gewone breuk wordt bij de benedenste grens weggelaten en bij de bovenste grens vervangen door een eenheid van dezelfde orde. Ligt bv. het deeltal tusschen 33.774432 en 33.757500 en de deeler tusschen 3.216 en 3.215, dan vervangt Napier de grenzen:

$$33.774432 : 3.215 = 10.505\,\frac{857}{3215}$$

$$\text{en } 33.757500 : 3.216 = 10.496\,\frac{2364}{3216},$$

waartusschen het quotient gelegen is, door 10.506 en 10.496.

De bepaling, die Napier in de Constructio van zijn logarithmen geeft, verschilt niet wezenlijk van die in de Descriptio.

Stelt men zich voor:

1) dat men de lengte van den straal meetkundig tot die van een zekeren sinus laat afnemen, m. a. w. dat men den straal met zijn n^{de}-deel vermindert, het stuk, dat er overblijft, eveneens met zijn n^{de}-deel, enz., totdat men een stuk overhoudt even lang als een zekere sinus;

2) dat men gelijktijdig een lijn van nul af rekenkundig met dezelfde snelheid laat toenemen, waarmede de straal begonnen is af te nemen, m. a. w. dat men het stuk, waarmede men den straal den eersten keer vermindert, zijn n^{de}-deel alzoo, even dikwijls verveelvoudigt, als men van den straal een stuk afsnijdt;

dan noemt Napier dit veelvoud van het n^{de}-deel van den straal de logarithme van dien sinus, mits n oneindig groot zij en de vermindering van den straal dus continu geschiede.

Uit deze bepaling leidt Napier vervolgens o. m. de twee belangrijke stellingen af, waarop de berekening van zijn logarithmen in hoofdzaak berust:

---

[1]) Wolf, Astronomische Mittheilungen XXXI, in: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 17ter Jahrgang, Zürich 1872, p. 252, en: Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur, 1ster Halbband, Zürich 1890, p. 63.

Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2ter Band, Leipzig 1892, pp. 555, 567 en 568.

Unger, Methodik der praktischen Arithmetik, Leipzig 1888, p. 104.

(Zie mijn opstel over De Notatie der Decimale Breuken, in: Nieuw Archief voor Wiskunde, 2de Reeks, 4de Deel, Amsterdam 1900, p. 54.)

1) De logarithme van een sinus is grooter dan het verschil tusschen den straal en dien sinus, en kleiner dan dat tusschen den straal en een lijn, die zich tot den straal verhoudt als deze staat tot dien sinus.

2) Het verschil der logarithmen van twee sinussen ligt tusschen twee grenzen, waarvan de grootste tot den straal staat als het verschil dier sinussen tot den kleinsten, en de kleinste zich tot den straal verhoudt als het verschil dier sinussen tot den grootsten.

Napier stelt den straal $= 10^7$. Duidt men den sinus, onder 1) bedoeld, met u aan, dan vindt men voor de lijn, die tot den straal staat als de straal tot dien sinus, m. a. w. voor de derde evenredige tot dien sinus en den straal, $10^{14} / u$. Nu is $u < 10^7$, dus $10^{14} / u > 10^7$. Men moet dus aantoonen:

$$10^7 - u < \text{Nap log } u < 10^{14} / u - 10^7 = 10^7 (10^7 - u) / u.$$

En duidt men de sinussen, onder 2) bedoeld, met U en $u < U$ aan, dan vindt men voor de grootste der genoemde grenzen $10^7 (U - u) / u$ en voor de kleinste $10^7 (U - u) / U$. Nu is $u < U$, dus $\text{Nap log } u > \text{Nap log } U$. Men moet dus aantoonen:

$$10^7 (U - u) / U < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < 10^7 (U - u) / u.$$

Napier's bewijzen luiden naar hun wezenlijken inhoud aldus:

De punten p en P (p. 27) bezitten in a en A even groote snelheden; de snelheid van p verandert niet, maar die van P neemt met den afstand van P tot B en in dezelfde mate af. Van het oogenblik afgerekend, waarop p en P zich in a en A bevinden, legt p dus in zeker tijdsverloop een grooter weg af dan P, m. a. w.:

$$ap > AP = AB - PB,$$

dus:
$$\text{Nap log } PB > AB - PB$$

of:
$$\text{Nap log } u > 10^7 - u.$$

En deze formule geldt zoowel vóór- als nadat p en P de punten a en A gepasseerd zijn, m. a. w. zoowel voor $u > 10^7$, als voor $u < 10^7$, mits men, als $u > 10^7$ is, Nap log u als negatief in rekening brenge.

Is $u < 10^7$ en $u' > 10^7$ de derde evenredige tot u en 10^7, dus:

$$u : 10^7 = 10^7 : u',$$

dan is:

$$(10^7 - u) : u = (u' - 10^7) : 10^7,$$

dus:
$$u' - 10^7 = 10^7 (10^7 - u) / u,$$

en: $\text{Nap log } u - \text{Nap log } 10^7 = \text{Nap log } 10^7 - \text{Nap log } u'$,
dus, daar $\text{Nap log } 10^7 = 0$ is:

$$\text{Nap log } u' = - \text{Nap log } u.$$

Uit:

$$\text{Nap log } u' > 10^7 - u'$$

volgt dan:

$$\text{Nap log } u < 10^7 (10^7 - u) / u.$$

Voor $u < 10^7$ zijn dus $10^7 - u$ en $10^7 (10^7 - u) / u$ twee grenzen, waartusschen Nap log u inligt:

$$10^7 - u < \text{Nap log } u < 10^7 (10^7 - u) / u \;\ldots\ldots \quad (2).$$

Is $u < U < 10^7$ en $u' < 10^7$ de vierde evenredige tot U, u en 10^7, dus:

$$U : u = 10^7 : u',$$

dan is:

$$(U - u) : U = (10^7 - u') : 10^7,$$

dus:

$$10^7 - u' = 10^7 (U - u) / U;$$

$$(U - u) : u = (10^7 - u') : u',$$

dus:

$$(10^7 - u') / u' = (U - u) / u,$$

en: $\text{Nap log } U - \text{Nap log } u = \text{Nap log } 10^7 - \text{Nap log } u'$,

dus: $\text{Nap log } u' = \text{Nap log } u - \text{Nap log } U \ldots\ldots\ldots \quad (3).$

Uit:

$$10^7 - u' < \text{Nap log } u' < 10^7 (10^7 - u') / u'$$

volgt dan:

$$10^7 (U - u) / U < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < 10^7 (U - u) / u \,..(4).$$

Wij kunnen thans overgaan tot de beschrijving van de wijze, waarop Napier bij de samenstelling van zijn logarithmentafel te werk is gegaan. Hij begint met te berekenen:

1) in zeven decimalen 101 termen van een meetkundige reeks, waarvan 10000000 de 1^{ste} en 9999999 de 2^{de} term is en die dus kan worden voortgezet, door elken term met 1/10000000 van zijn bedrag te verminderen:

Tafel I.

10000000.0000000
9999999.0000000
9999998.0000001
. . . .
9999900.0004950;

2) in zes decimalen 51 termen van een meetkundige reeks, waarvan 10000000 de 1ste en 9999900, d. i. nagenoeg de 101de term van de reeks onder 1), de 2de term is en die dus kan worden voortgezet, door elken term met 1/100000 van zijn bedrag te verminderen:

Tafel II.

10000000.000000
9999900.000000
9999800.001000
. . . .
9995001.222927;

3) in vijf decimalen 21 termen van een meetkundige reeks, waarvan 10000000 de 1ste en 9995000, d. i. nagenoeg de 51ste term van de reeks onder 2), de 2de term is en die dus kan worden voortgezet, door elken term met 1/2000 van zijn bedrag te verminderen:

Tafel III, kolom 1.

10000000.00000
9995000.00000
9990002.50000
. . . .
9900473.57808;

4) in vier decimalen 69 termen van een meetkundige reeks, waarvan 10000000 de 1ste en 9900000, d. i. nagenoeg de 21ste term van de reeks onder 3), de 2de term is en die dus kan worden voortgezet, door elken term met 1/100 van zijn bedrag te verminderen:

10000000.0000
9900000.0000
9801000.0000
. . . .
5048858.8900;

5) in vier decimalen telkens 21 termen van 69 meetkundige reeksen, waarvan de 69 termen van de reeks onder 4) de 1ste termen uitmaken en die, evenals de reeks onder 3) — na weglating van één decimaal de eerste van deze 69 reeksen — kunnen worden voortgezet, door elken term met 1/2000 van zijn bedrag te verminderen:

Tafel III.

Kolom 1.	Kolom 2.
10000000.0000	9900000.0000
9995000.0000	9895050.0000
9990002.5000	9890102.4750
....	....
9900473.5780	9801468.8423

Kolom 3.		Kolom 69.
9801000.0000		5048858.8900
9796099.5000		5046334.4605
9791201.4503	....	5043811.2932
....		....
9703454.1539		4998609.4034

Napier benadert vervolgens de logarithmen van de getallen in de verschillende tafels; aldus:

1) Stelt men in form. (2) $u = 9999999$, d. i. de 2[de] term van tafel I, dan vindt men:

$$1 < \text{Nap log } 9999999 < 1.00000010000001\ldots\text{[1]}.$$

---

[1]) Uit form. (1) (p. 29) volgt, daar:

$$\overset{e}{\log}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\{-1 < x \leqq +1\}$$

is:

$$\begin{aligned}\text{Nap log } 9999999 &= -10^7 \overset{e}{\log}(1 - 10^{-7}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}.10^{-7} + \frac{1}{3}.10^{-14} + \frac{1}{4}.10^{-21} + \ldots \\ &= 1.00000\;00500\;00003\;33333\;35833 \\ &33353\;33333\;50000\;00142\;85715 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

en, daar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

is:

$$\begin{aligned}\text{num Nap log } 1 &= 10^7 e^{-10^{-7}} \\ &= 10^7 - 1 + \frac{1}{2}.10^{-7} - \frac{1}{6}.10^{-14} + \ldots \\ &= 9999999.00000\;00499\;99998\;33333\;33749 \\ &99999\;16666\;66805\;55555\;35714 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Napier, die zich tot zeven decimalen bepaalt, neemt:

$$1.0000000 < \text{Nap log } 9999999 < 1.0000001$$

met de bijvoeging evenwel: „of 1.00000010000001, als gij grooter nauwkeurigheid verlangt'' [1]).

Voor de logarithmen van den 3^{den}, 4^{den}, 5^{den},...en 101^{den} term bepaalt Napier daarna twee grenzen, door die voor de logarithme van den 2^{den} term met 2, 3, 4,... en 100 te vermenigvuldigen; voor de logarithme van den 101^{den} term bv. neemt hij:

$$100.0000000 < \text{Nap log } 9999900.0004950 < 100.0000100.$$

2) Stelt men in form. (4) $U = 9999900.0004950$, d. i. de 101^{de} term van tafel I, en $u = 9999900$, d. i. de 2^{de} term van tafel II, dan vindt men:

$$\begin{gathered} 0.000495004950002499\ldots \\ < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < \\ 0.000495004950004950\ldots. \end{gathered}$$

Napier neemt:

$$\text{Nap log } u - \text{Nap log } U = 0.0004950$$

en vindt dus, daar Nap log U tusschen 100.0000000 en 100.0000100 ligt:

$$\begin{gathered} 100.0000000 + 0.0004950 = 100.0004950 \\ < \text{Nap log } 9999900 < \\ 100.0000100 + 0.0004950 = 100.0005050. \end{gathered}$$

Op dezelfde wijze kunnen twee grenzen gevonden worden voor de logarithme van elk getal, dat weinig verschilt van een der termen in tafel I.

Voor de logarithmen van den 3^{den}, 4^{den}, 5^{den},... en 51^{sten} term van tafel II bepaalt Napier daarna twee grenzen, door die voor de logarithme van den 2^{den} term met 2, 3, 4,... en 50 te vermenigvuldigen; voor de logarithme van den 51^{sten} term neemt hij:

$$5000.0247500 < \text{Nap log } 9995001.222927 < 5000.0252500.$$

Inderdaad ligt Nap log 9999999 dus tusschen de grenzen 1.0000000 en 1.0000001, zooals door Napier, maar zonder voldoenden grond, wordt aangenomen.

En één is in Napier's stelsel de logarithme van 9999999.0000000499..., zooals trouwens reeds op p. 29, noot [1]), is medegedeeld.

[1]) sive (si majorem accurationem requiris) 1.00000010000001. p. 17.

3) Voor de vierde evenredige tot $U = 9995001.222927$, d. i. de 51ste term van tafel II, $u = 9995000$, d. i. de 2de term van tafel III, kolom 1, en 10^7 vindt Napier:

$$u' = 9999998.7764614$$

en met behulp van tafel I als grenzen voor Nap log u':

$$1.2235386 \text{ en } 1.2235387.$$

Volgens form. (3) is dus:

$$1.2235386 < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < 1.2235387$$

en, daar Nap log U tusschen 5000.0247500 en 5000.0252500 ligt, neemt Napier:

$$\begin{gathered} 5000.0247500 + 1.2235386 = 5001.2482886 \\ < \text{Nap log } 9995000 < \\ 5000.0252500 + 1.2235387 = 5001.2487888 \text{ (sic).} \end{gathered}$$

Op dezelfde wijze kunnen twee grenzen gevonden worden voor de logarithme van elk getal, dat weinig verschilt van een der termen in tafel II.

Voor de logarithmen van den 3den, 4den, 5den, ... en 21sten term van tafel III, kolom 1, bepaalt Napier daarna twee grenzen, door die voor de logarithme van den 2den term met 2, 3, 4, ... en 20 te vermenigvuldigen; voor de logarithme van den 21sten term neemt hij:

$$100024.9657720 < \text{Nap log } 9900473.57808 < 100024.9757760.$$

4) Voor de vierde evenredige tot $U = 9900473.57808$, d. i. de 21ste term van tafel III, kolom 1, $u = 9900000$, d. i. de 1ste term van tafel III, kolom 2, en 10^7 vindt Napier:

$$u' = 9999521.6611850$$

en met behulp van tafel II als grenzen voor Nap log u':

$$478.3502290 \text{ en } 478.3502812.$$

Volgens form. (3) is dus:

$$478.3502290 < \text{Nap log } u - \text{Nap log } U < 478.3502812$$

en, daar Nap log U tusschen 100024.9657720 en 100024.9757760 ligt, neemt Napier:

$$\begin{gathered} 100024.9657720 + 478.3502290 = 100503.3160010 \\ < \text{Nap log } 9900000 < \\ 100024.9757760 + 478.3502812 = 100503.3260572. \end{gathered}$$

5) Napier neemt vervolgens voor de logarithme van den 2den

term in kolom 1 en voor die van den 1[sten] term in kolom 2 van tafel III de halve som van de onder 3) en 4) gevonden grenzen, t. w.:

$$\text{Nap log } 9995000 = 5001.2485387$$
$$\text{en Nap log } 9900000 = 100503.3210291,$$

berekent de logarithmen van de 1[ste] termen in de 3[de], 4[de], 5[de],... en 69[ste] kolom, door die van den 1[sten] term in de 2[de] kolom met 2, 3, 4,... en 68 te vermenigvuldigen, en bepaalt eindelijk de logarithmen van alle termen in tafel III:

a) door die van de 1[ste] termen in de 69 kolommen 20-maal na elkander met 5001.2485387 te vermeerderen;

b) door die van de 21 termen in de 1[ste] kolom 68-maal na elkander met 100503.3210291 te vermeerderen.

Al deze logarithmen worden ten slotte in één decimaal afgerond en met de getallen, waarbij ze behooren, in een zoogenaamde grondtafel (tabula radicalis) [1]) vereenigd.

Bij de afronding merkt Napier op:

a) dat wegens de vermenigvuldigingen, die men moet uitvoeren, de logarithmen in de grondtafel niet nauwkeurig genoeg zouden uitvallen, als men begon met die van de getallen in de voorafgaande tafels tot in één decimaal te benaderen;

b) dat men de tiendedeelen met één moet vermeerderen, als er meer dan vier honderdstedeelen op volgen [2]).

Na de samenstelling van zijn grondtafel gaat Napier over tot de berekening van de logarithmen der sinussen, die binnen de grenzen dier tafel vallen, t. w. de sinussen der hoeken van 90° tot 60°. Hij bedient zich voor dit doel van form. (4), maar verlicht zich den arbeid, door op te merken, dat de grenzen $10^7\,(U - u)\,/\,U$ en $10^7\,(U - u)\,/\,u$, waartusschen Nap log u — Nap log U gelegen is, zoo weinig verschillen, dat men, in plaats van door U en u te deelen, een willekeurigen deeler tusschen U en u mag nemen.

Vervolgens merkt Napier op:

1) dat, daar Nap log 10000000 = 0 en Nap log 5000000

---

[1]) Zie p. 73.

[2]) Duobus tamen (compendii, gratiâ) animadversis: Primò, quòd illis omnibus artificialibus, unam post punctum relinqui figuram satis sit, cæteris sex novissimis jam rejectis: quas tamen si initio neglexisses: error inde frequenti multiplicatione priorum tabularum, accrevisset in hac tertia intollerabilis. Secundò, si secunda post punctū figura excedat quaternarium: figura prima, quæ sola post punctum relinquitur, est unitate augēda. Vt pro 10002.48, &c. rectius est ponere 10002.5, quàm 10002.4: & pro 1000.35001, aptiùs ponimus 1000.4, quàm 1000.3. p. 29.

$= 6931469.22$ is, de logarithmen van de sinussen met 6931469.22 opklimmen, als de sinussen tweemaal zoo klein worden;

2) dat, daar Nap log 10000000 $= 0$ en Nap log 8000000 $= 2231434.68$, dus Nap log 1000000 $= 2231434.68 + 3 \times 6931469.22 = 23025842.34$ is, de logarithmen van de sinussen met 23025842.34 opklimmen, als de sinussen tienmaal zoo klein worden;

waaruit volgt, dat de logarithmen der sinussen, die buiten de grenzen der grondtafel vallen, t. w. de sinussen der hoeken van 60° tot 0°, uit die van de sinussen der hoeken van 90° tot 60° afgeleid kunnen worden door optelling van veelvouden van 6931469.22 en 23025842.34.

Buitendien kunnen door toepassing van de evenredigheid:

$$\tfrac{1}{2}\text{ straal} : \sin \tfrac{1}{2} a = \sin (90 - \tfrac{1}{2} a) : \sin a$$

de logarithmen der sinussen van 0° tot 45° uit die der sinussen van 45° tot 90° worden afgeleid [1]).

[1]) Marie, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques, Tome III, Paris 1884, p. 87, beschrijft den aard van Napier's logarithmen en de samenstelling van diens tafel aldus:

„Voici le procédé qu'employa Neper pour former la progression géométrique dont les termes devaient occuper l'une des colonnes de sa table. La raison de cette progression, qu'il faisait décroissante, étant supposé $1 - 1/n$, chaque terme devait être égal au précédent, diminué de sa $n^{\text{ième}}$ partie; le calcul n'exigeait donc que de simples soustractions. Les progressions de Neper sont:

$$0,\ \frac{1}{10^7},\ \frac{2}{10^7},\ \frac{3}{10^7},\ \ldots$$

pour la progression par différence, et

$$10^7,\ 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right),\ 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2,\ \text{etc.},$$

pour la progression par quotient, de sorte que le logarithme décroissait quand le nombre augmentait. On voit que le module du système était, à peu près, -1.

Pour former la table des logarithmes sinus, Neper démontrait que log sin A est compris entre $(1 - \sin A)$ et $(\operatorname{coséc} A - 1)$. En conséquence, pour calculer log sin A, il prenait les moyennes arithmétique et géométrique entre $(1 - \sin A)$ et $(\operatorname{coséc} A - 1)$, pour s'assurer qu'elles différaient peu l'une de l'autre, et gardait dans ce cas la moyenne géométrique pour la valeur de log sin A. Cette moyenne géométrique est

$$\frac{1 - \sin A}{\sqrt{\sin A}};$$

elle n'exigeait donc pas un calcul bien long."

Afgezien van de verandering, die Marie zich veroorlooft, waar hij Napier's logarithmen door tien millioen deelt, stemmen zijn reeksen niet overeen met die, waarvan Napier zich bedient. Inderdaad stelt Napier de logarithme van $10^7 (1 - 1/10^7) = 9999999$ niet $= 1$, maar toont aan, dat deze logarithme tusschen de grenzen 1 en 1.0000001 gelegen is, wat trouwens, voor $\sin A = 1 - 1/10^7$, onmiddellijk volgt uit Marie's formule:

In zijn artikelen over Napier in het Journal des Savants, Année 1835, wijst Biot op een fout in Napier's tafel II, waarin de 51ste term 9995001.222927 in 9995001.224804 veranderd moet worden. Als een gevolg van deze vergissing zijn Napier's logarithmen meerendeels te klein uitgevallen. Zoo moet volgens Biot de 69ste kolom van Napier's grondtafel aldus gewijzigd worden:

Numeri.	Logarithmen.
5048858.8879	6834228.4
5046334.4584	6839229.6
5043811.2912	6844230.9
5041289.3856	6849232.1
5038768.7409	6854233.4
....	....
5001109.9568	6929252.1
4998609.4019	6934253.4

Terwijl Napier in zijn logarithmentafel (p. 26) opgeeft:

$$\text{Nap log } 5000000 = 6931469,$$

vind ik door toepassing van form. (4), dus volgens Napier's methode, met behulp van:

$$\text{Nap log } 5001109.9568 = 6929252.1$$

uit de verbeterde grondtafel:

$$\text{Nap log } 5000000 = 6931472$$

tot op $\frac{1}{2}$ E nauwkeurig, daar volgens form. (1):

$$\begin{aligned}\text{Nap log } 5000000 &= 10^7 \text{ lóg } 2 \\ &= 6931471.8055994530\ldots\end{aligned}$$

is.

De mindere nauwkeurigheid van Napier's logarithmentafel moet dus niet aan diens benaderingsmethode worden geweten, maar uitsluitend aan de rekenfout(en) in tafel II.

$$1 - \sin A < \log \sin A < \operatorname{cosec} A - 1,$$

die aan onze form. (2) beantwoordt.

Ook is de modulus van Napier's stelsel niet „à peu près", maar naar de opvatting van den ontwerper, als men de sinussen en de logarithmen beide door tien millioen deelt, juist $= -1$, terwijl eindelijk de formule:

$$\log \sin A = \frac{1 - \sin A}{\sqrt{\sin A}}$$

niet nauwkeurig de wijze weergeeft, waarop Napier bij de berekening van zijn logarithmen te werk is gegaan.

Trouwens Napier zelf verwacht niet, dat zijn logarithmentafel zonder reken- en drukfouten zal zijn, en vreest buitendien, dat de benaderingen door hem niet ver genoeg zijn voortgezet, om op de cijfers aan de rechterhand in zijn logarithmen te kunnen rekenen. Hij verontschuldigt zich, door te wijzen op zijn gemis aan hulp, zijn zwakke gezondheid en zijn gewichtiger bezigheden, en tracht zich te troosten met het denkbeeld, dat niets van den beginne af volmaakt is [1]).

b) Gewone logarithmen.

Appendix De alia eaque præstantiore Logarithmorum specie construenda; in qua scilicet, vnitatis Logarithmus est 0. 6 pp.

Inter varios Logarithmorum progressus, is est præstantior, qui cyphram pro Logarithmo vnitatis statuit, & 10,000,000,000 pro Logarithmo denarii seu decupli instituit: cæterorum autem omnium Logarithmi, ex his stabilitis necessariò consequentur, & modus inveniendi eos varius est, quorum primus sic se habet.

. . . .

Hujus autem operis præcipua difficultas, est in denis proportionalibus duodecim figurarũ è sexaginta figuris supersolido more extrahendis: sed quanto major hæc difficultas, tanto exactior est hic modus in Logarithmis proportionalium, & Logarithmorum proportionalibus inveniendis.

Alius modus facilè creandi Logarithmos numerorum compositorum, ex datis Logarithmis suorum primorum.

Si duo numeri datorum Logarithmorum, invicem multiplicati componunt tertium; eorum Logarithmorum aggregatum erit tertii Logarithmus.

Item si numerus per numerum divisus producit tertium, è primi Logarithmo secundi substractus, relinquit tertii Logarithmum.

Si ex numero in se quadratè, cubicè, supersolidè, &c. ducto, producitur alter quivis; ex primi Logarithmo duplato, triplato, aut quintuplato, producitur illius alterius Logarithmus.

Item si ex dato per extractionem quadratam, cubicam, supersolidam, &c. extra-

[1]) Quia nonnunquam artificiales per 54 inuenti, differunt ab artificialibus per 58 inuentis; vt hujus sinus 378064, numerus artificialis per illam est 32752756, per hanc verò est 32752741; arguitur quibusdam in locis Tabula sinuum vitiosa esse. Qua propter consulo eruditis (quibus forsan discipulorum & computistarum copia sit) vt Tabulam sinuum extractiorem & maioris numeri edant, vtpote cuius sinus totus sit 100000000, scilicet octo cyphrarum præter vnitatis figuram, cùm prior sinus totus septem tantum constet. Constructio, p. 38.

Admonitio.

Qvum hujus Tabulę calculus, qui plurimorum Logistarum ope & diligentia perfici debuisset, unius tantùm opera & industria absolutus sit, non mirum est si plurimi errores in eam irrepserint. Hisce igitur sive a Logistæ lassitudine, sive Typographi incuria profectis ignoscant, obsecro, benevoli Lectores: me enim tum infirma valetudo, tum rerum graviorum cura præpedivit, quo minus secundam his curam adhiberem. Verùm si huius inventi usum eruditis gratum fore intellexero, dabo fortasse brevi (Deo aspirante) rationem ac methodum aut hunc canonem emendandi, aut emendatiorem de novo condendi, ut ita plurium Logistarum diligentia limatior tandem & accuratior, quam unius opera fieri potuit, in lucem prodeat.

Nihil in ortu perfectum.

In sommige exemplaren van de Descriptio onmiddellijk achter de tafel.

hatur radix; datique Logarithmus bisecetur, trisecetur, aut per quinque secetur, producetur Logarithmus ejusdem radicis.

Denique quicunque numerus vulgaris ex vulgaribus componitur per multiplicationem, divisionem, [machtsverheffing], aut extractionem [van een wortel]: ejus Logarithmus componitur respectivè per additionem, substractionem, duplationem, seu triplationem, &c. [of deeling door twee, drie, enz.] suorum Logarithmorum. Vnde sola difficultas est in numerorum primorum Logarithmis inveniendis; qui hac sequenti arte generali inveniuntur.

. . . .

Habitudines Logarithmorvm & suorum naturalium numerorum invicem.

1. Dentur duo sinus & sui Logarithmi. Si totidem numeri æquales sinui minori in se ducantur, quot sunt vnitates in majoris Logarithmo: & contrà, totidem æquales sinui majori in se ducantur, quot sunt vnitates in minoris Logarithmo; erunt duo producta æqualia, & producti sinus Logarithmus, erit numerus factus ex ambobus Logarithmis invicem multiplicatis.

2. Vt sinus major ad minorem; Ita velocitas incrementi, aut decrementi Logarithmorum apud minorem, ad velocitatem incrementi aut decrementi Logarithmorum apud majorem.

3. Duo sinus in ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. habent suos Logarithmos in ratione dupla, tripla, quadrupla, &c.

4. Et duo sinus in ratione vt ordo ad ordinem, (id est vt triplicatum ad quintuplicatum, vel cubus ad supersolidum) habent suos Logarithmos, in ratione vt eorundem ordinum indices, id est, vt 3 ad 5.

5. Si primus sinus in secundum ductus producit tertium; Logarithmus primi additus secundi Logarithmo producit tertii Logarithmum. Sic in divisione, divisoris Logarithmus ex dividendi Logarithmo subductus, relinquit quotientis Logarithmum.

6. Et si quot æquales primo, invicem ducti producunt secundum; totidem æquales primi Logarithmo, simul additi producunt Logarithmum secundi.

7. Medium quodvis Geometricum inter duos sinus, habet suum Logarithmum medium tale Arithmeticum inter sinuum Logarithmos.

8. Sinus primus dividit tertium, quoties sunt vnitates in A; numerus secundus dividit eundem tertium, quoties sunt vnitates in B: Item idem primus dividit quartum, quoties sunt vnitates in C; & idem secundus dividit eundem quartum, quoties sunt vnitates in D. Dico, quæ est ratio A ad B, eadem est C ad D, & Logarithmi secundi ad Logarithmum primi.

9. Hinc fit quod numeri oblati Logarithmus, est numerus locorum seu figurarum, quas comprehendit factum ex oblato toties in se ducto quoties sunt vnitates in 10,000,000,000.

10. Item si index ordinis sit Logarithmus denarii, numerus figurarum (vnâ demptâ) ordinis scilicet multipli, erit Logarithmus radicis.

Lvcvbrationes Aliqvot Doctissimi D. Henrici Briggii In Appendicem præmissam. 8 pp.

„Over de berekening van een ander en beter soort van logarithmen, waarbij nul de logarithme van de eenheid is", zoo luidt de titel van dit onvoltooid gebleven, maar belangrijk Aanhangsel van de Constructio, dat door Briggs van ophelderende aanteekeningen voorzien is.

Als grondtal — om mij van de thans gangbare uitdrukking te bedienen — noemt Napier in het bijzonder 1/10 en 10, waarvan hij de logarithme $= 10^{10}$ stelt. Hij bepaalt zich evenwel tot het grondtal 10, zoodat — en dit verdient uitdrukkelijke vermelding — met zijn „ander en beter soort van logarithmen" onze „gewone logarithmen" in tien decimalen bedoeld worden met weglating van de komma.

Voor de berekening van de nieuwe logarithmen worden drie methoden aangegeven, waarvan de eerste aldus luidt:

Trek uit het grondtal den vijfdemachtswortel, uit dezen wortel weer den vijfdemachtswortel, enz., tienmaal na elkander; trek uit den laatstgevonden wortel den tweedemachtswortel, uit dezen wortel weer den tweedemachtswortel, enz., eveneens tienmaal na elkander.

De logarithmen van deze wortels vindt men uit die van het grondtal, t. w. 10^{10}, door tienmaal na elkander door vijf en vervolgens tienmaal na elkander door 2 te deelen: de logarithme van den laatsten wortel is $= 1$.

Men kent zoodoende van een en twintig getallen de logarithmen. Een willekeurig getal kan door vermenigvuldiging van getallen uit deze hulptafel gevonden worden; zijn logarithme vindt men door optelling van de overeenkomstige logarithmen der factoren.

De groote moeilijkheid van deze methode, die een hoogen graad van nauwkeurigheid in de uitkomsten belooft, bestaat volgens Napier in het trekken van de vijfdemachtswortels in twaalf cijfers telkens uit zestig cijfers, een bewerking evenwel, waarmede Napier blijkens diens Ars Logistica volkomen vertrouwd was.

Napier's tweede methode, aan welker beschrijving een opsomming in woorden en zonder bewijzen van de eigenschappen der logarithmen van producten, quotienten, machten en wortels voorafgaat, bestaat in de benadering van de logarithmen der ondeelbare getallen door interpolatie van meetkundig middelevenredigen tusschen de getallen en van rekenkundig middelevenredigen tusschen hun logarithmen.

Toegepast ter bepaling van de logarithme van vijf gemakshalve met 10^7 in plaats van 10^{10} als logarithme van het grondtal tien, komt de bewerking aldus te staan:

Numeri.				Logarithmen.	
$A =$		1.000000	$a =$		0
$B =$		10.000000	$b =$		10000000
$C = \sqrt{AB}$	$=$	3.162277	$c = \frac{1}{2}(a + b) =$		5000000
$D = \sqrt{BC}$	$=$	5.623413	$d = \frac{1}{2}(b + c) =$		7500000
$E = \sqrt{CD}$	$=$	4.216965	$e = \frac{1}{2}(c + d) =$		6250000
$F = \sqrt{DE}$	$=$	4.869675	$f = \frac{1}{2}(d + e) =$		6875000
$G = \sqrt{DF}$	$=$	5.232991	$g = \frac{1}{2}(d + f) =$		7187500
$H = \sqrt{FG}$	$=$	5.048066	$h = \frac{1}{2}(f + g) =$		7031250
$I = \sqrt{FH}$	$=$	4.958068	$i = \frac{1}{2}(f + h) =$		6953125
$K = \sqrt{HI}$	$=$	5.002864	$k = \frac{1}{2}(h + i) =$		6992187
$L = \sqrt{IK}$	$=$	4.980416	$l = \frac{1}{2}(i + k) =$		6972656
$M = \sqrt{KL}$	$=$	4.991627	$m = \frac{1}{2}(k + l) =$		6982421
$N = \sqrt{KM}$	$=$	4.997243	$n = \frac{1}{2}(k + m) =$		6987304
$O = \sqrt{KN}$	$=$	5.000052	$o = \frac{1}{2}(k + n) =$		6989746
$P = \sqrt{NO}$	$=$	4.998647	$p = \frac{1}{2}(n + o) =$		6988525
$Q = \sqrt{OP}$	$=$	4.999350	$q = \frac{1}{2}(o + p) =$		6989135
$R = \sqrt{OQ}$	$=$	4.999702	$r = \frac{1}{2}(o + q) =$		6989440
$S = \sqrt{OR}$	$=$	4.999877	$s = \frac{1}{2}(o + r) =$		6989593
$T = \sqrt{OS}$	$=$	4.999965	$t = \frac{1}{2}(o + s) =$		6989669
$V = \sqrt{OT}$	$=$	5.000009	$v = \frac{1}{2}(o + t) =$		6989707
$W = \sqrt{TV}$	$=$	4,999987	$w = \frac{1}{2}(t + v) =$		6989688
$X = \sqrt{VW}$	$=$	4.999998	$x = \frac{1}{2}(v + w) =$		6989698
$Y = \sqrt{VX}$	$=$	5.000003	$y = \frac{1}{2}(v + x) =$		6989703
$Z = \sqrt{XY}$	$=$	5.000000	$z = \frac{1}{2}(x + y) =$		6989700

Bij Napier vindt men dit zelfde voorbeeld begonnen; nadat twee meetkundig middelevenredigen in elf decimalen benaderd zijn, t. w. $\frac{316227766017}{100000000000}$ en $\frac{562341325191}{100000000000}$, wordt de bewerking evenwel niet verder voortgezet.

Napier's derde methode eindelijk berust op de stelling:

Neemt men als exponent van een macht de logarithme van tien, dan vindt men de logarithme van het grondtal der macht, door het aantal der cijfers van de macht met één te verminderen.

Immers, als bv. log 10 = 10,000,000,000 is en a tot de 10,000,000,000ste-macht een (tiendeelig) getal oplevert met n cijfers in de geheelen, dan is:

$$10^{n-1} < a^{10,000,000,000} < 10^{n},$$

dus: $(n - 1) \log 10 < 10,000,000,000 \log a < n \log 10,$

dus: $n - 1 < \log a < n,$

dus: $\log a = n - 1, \ldots.$

Zoo is:

$$2^{10,000,000,000} = 43624\ldots \text{ (3010299957 cijfers)},$$

dus:

$$\log 2 = 3010299956.$$

Napier vindt abusievelijk 301029995.

Ik kan niet nalaten de „betrekkingen tusschen numeri en logarithmen onderling", door Napier bij zijn derde methode weer in woorden en zonder bewijzen vermeld, alle tien mede te deelen:

1) $a^{\log . b} = b^{\log a} = \text{num} (\log a \times \log b)$.

2) $d \log a \,/\, d\, a : d \log b \,/\, d\, b = b : a$.

3) $\log a : \log a^2 : \log a^3 : \ldots :: 1 : 2 : 3 : \ldots$

4) $\log a^p : \log a^q = p : q$.

5) $\log (a \,.\, b) = \log a + \log b$, $\log (a : b) = \log a - \log b$.

6) $\log a^p = p \log a$.

7) Is b een meetkundig middelevenredige tusschen a en c, dan is $\log b$ de overeenkomstige rekenkundig middelevenredige tusschen $\log a$ en $\log c$.

8) Is $a^A = b^B$ en $a^C = b^D$, dan is:

$$A : B = C : D = \log b : \log a.$$

9—10) Is $\log 10 = p$ en wordt a^p in het tientallig stelsel met n cijfers geschreven, dan is $\log a = n - 1$.

Het zijn de stellingen 1), 8), 9) en 10), die door Briggs in zijn Lucubrationes met voorbeelden worden toegelicht: 9) en 10), die op hetzelfde neerkomen, volgen onmiddellijk uit 8).

Nog zij opgemerkt:

1) dat Napier in dit Aanhangsel op weg schijnt te wezen, om de logarithmen als exponenten op te vatten, zooals Euler bijna twee eeuwen later het eerst heeft gedaan [1]);

2) dat hij onder snelheid van toe- of afname (velocitas incrementi aut decrementi, in St. 2) ongeveer hetzelfde verstaat, wat men tegenwoordig differentiaalquotient en afgeleide functie noemt;

3) dat Briggs zich in zijn Arithmetica Logarithmica, Londini 1624,

[1]) Quemadmodum autem, dato numero a, ex quovis valore ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim, dato valore quocunque affirmativo ipsius y, conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam Functio ipsius y spectatur, vocari solet Logarithmus ipsius y. Supponit ergo doctrina Logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocatur basis Logarithmorum; qua assumta erit Logarithmus cujusque numeri y Exponens Potestatis a^z, ita ut ipsa Potestas a^z æqualis sit numero illi y; indicari autem Logarithmus numeri y solet hoc modo ly. Quod si ergo fuerit $a^z = y$, erit $z = ly$: ex quo intelligitur, basin Logarithmorum, etiamsi ab arbitrio nostro pendeat, tamen esse debere numerum unitate majorem: hincque nonnisi numerorum affirmativorum Logarithmos realiter exhiberi posse.

Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Tomus I, Lausannæ 1798, p. 73.

van Napier's tweede stelling, dat twee sinussen omgekeerd evenredig zijn met de snelheden, waarmede hun logarithmen toe- en afnemen, bedient, waar hij bij de benadering van log u de formule:

$$\log u = (\sqrt[n]{u} - 1) / (\sqrt[n]{10} - 1)$$

toepast, die onmiddellijk volgt uit de omstandigheid, dat de snelheid, waarmede log 1 aangroeit, voor willekeurige waarden van $u =$

$$(\log \sqrt[n]{u} - \log 1) / (\sqrt[n]{u} - 1)$$

kan worden gesteld, mits n zoo groot worde genomen, dat $\sqrt[n]{u}$ weinig van één verschilt.

c) De Analogieën van Napier.

Propositiones Qvædam Eminentissimæ ad triangula sphærica, mirâ facilitate resolvenda. 9 pp.

Triangulum sphæricum resolvere, absque eiusdem divisione in duo quadrantalia aut rectangula.

De semi-sinuum versorum præstantia & vsu.

Ex quinque partibus trianguli sphærici, quarum tres mediæ dantur, duas extremas vno opere invenire. Aut aliàs, datis duobus angulis apud basin cum basi, vtrum'g; crus sic habetur.

Angulorum apud basin aggregatum, semi-aggregatum, differentiam, & semi-differentiam, unà cum suis Logarithmis nota. Inde Logarithmos semi-aggregati & differentiæ, & differentialem semi-basis adde: & hinc subducito Logarithmum aggregati, & Logarithmum semi-differentiæ; & producetur differentialis, qui est primum inventum. Deinde Logarithmum semi-differentiæ, & differentialem semi-basis adde: hinc aufer Logarithmum, semi-aggregati, & producetur differentialis, qui est inventum secundum. Inventos hos differentiales, quia veri sunt, quære inter numeros differentiales: eorum arcus adde, & habebis crus maius; similiter minorem à maiore substrahe, & habebis crus minus.

Aliter pro cruribus inveniendis.

Angulorum apud basin Logarithmum semi-aggregati, antilogarithmum semi-differentiæ, & differentialem semi-basis adde: & aufer Logarithmum aggregati & 693147, & fiet primum inventum. Deinde Logarithmum semi-differentiæ, anti-logarithmum semi-aggregati, & differentialem semi-basis adde: & hinc aufer Logarithmũ aggregati & 693147, & fiet inventum secundum. Cum inventis age ut suprà, & habebis crura.

Idem aliter.

Secantem complementi aggregati angulorum apud basin, duc per tangentem semi-basis: productum duc primò per sinum anguli maioris apud basin, & fit inventum primum. Secundò duc per sinum minoris anguli, & fit inventum secundum. Hos ergo inventos divisos per quadratum sinus totius adde, & fit tangens semi-aggregati crurum: similiter maiorem à minore substrahe, & fiet tangens semi-differentiæ crurum. Eorum ergo arcuum utrumque adde, & fiet crus maius: similiter minorem arcum à maiore aufer, & fiet crus minus.

Quinque partium proximarum Trianguli sphærici datis tribus mediis, vtramque extremam vno opere, & abs'g; casuum observatione inquirere.

Angulorum apud basin, ut sinus semi-differentiæ, ad sinum semi-aggregati: Ita sinus differentiæ, ad quartum quod est aggregatum sinuum. Et ut sinus aggregati, ad hoc aggregatum sinuum: Ita tangens semi-basis, ad tangentem semi-aggregati crurum.

Inde ut sinus semi-aggregati angulorum, ad sinum semi-differentiæ: Ita tangens semi-basis, ad tangentem semi-differentiæ crurum.

Horum inventorum tangentium arcus, è Tabula tangentium extractos adde, & prodibit crus maius: sic minorem à maiore substrahe, & prodibit crus minus.

Annotationes Aliqvot Doctissimi D. Henrici Briggii In Propositiones Præmissas. 5 pp.

Dit tweede aanhangsel van de Constructio bevat:

1) regels voor de oplossing van den scheefhoekigen boldriehoek, als gegeven zijn: a) twee zijden en een hoek; b) twee hoeken en een zijde;

2) regels, om door middel van den halven sinus versus bij een scheefhoekigen boldriehoek a) uit twee zijden en den ingesloten hoek de derde zijde, b) uit de drie zijden een hoek te berekenen;

3) twee van de vier Analogieën (= evenredigheden), die Napier's naam dragen, t. w. die, waardoor uit een zijde en de twee aanliggende hoeken de twee andere zijden bepaald kunnen worden.

Al deze regels worden in woorden en zonder bewijs medegedeeld; van die onder 2) worden er een paar naar aanleiding van een voorbeeld, met toepassing van logarithmen, verklaard. Trouwens Napier heeft, blijkens mededeeling van zijn zoon in de voorrede, geen gevolg meer kunnen geven aan zijn voornemen, om de stellingen in dit aanhangsel, dat „zijn laatsten arbeid" (ultimus ejus labor) vormt, behoorlijk te rangschikken en van bewijzen te voorzien.

De regels, onder 1) bedoeld, zijn niet eigenlijk oplossingen van den scheefhoekigen boldriehoek, zonder dezen te verdeelen in twee driehoeken met een element van 90° (absque eiusdem divisione in duo quadrantalia aut rectangula); de weg, dien Napier inslaat, is dezelfde als in de Descriptio, maar de regels worden thans niet naar aanleiding van voorbeelden verklaard, maar in woorden uitgedrukt. Om bv. $\angle A$ van ΔABD uit AD, $\angle B$ en $\angle D$ te bepalen, trekt Napier de hoogtelijn AC en zegt: „Deel cos AD door cot D, dan vindt ge cot CAD, dus $\angle CAD$; vermenigvuldig cos B met sin CAD en deel dit product door cos D, dan vindt ge sin BAC, dus $\angle BAC$; en nu is $\angle CAD \pm \angle BAC = \angle BAD$". Napier laat dus de opmerking weg, dat cos D: sin CAD = cos AC is.

De regels, onder 2) bedoeld, waarbij van den halven sinus versus gebruik wordt gemaakt, zijn zeer waarschijnlijk door Napier aldus gevonden:

Uit de formule:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \{\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} (b-c)\} \sin \{\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} (b-c)\}}{\sin b \sin c}},$$

die in de Descriptio wordt toegepast (Lib. II, Cap. VI, 3), volgt onmiddellijk, daar $\sin (p + q) \sin (p - q) = \sin^2 p - \sin^2 q$ is:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} (b-c)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

en, door oplossing van $\sin \tfrac{1}{2} a$:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\{\sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A + \sin^2 \tfrac{1}{2} (b-c)\}} \quad \ldots\ldots (2).$$

Nu is:

$$\sin \operatorname{vers} p = 1 - \cos p = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} p,$$

dus:

$$\begin{aligned} \sin p \sin q &= \tfrac{1}{2} \cos (p - q) - \tfrac{1}{2} \cos (p + q) \\ &= \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (p + q) - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (p - q) \\ &= \sin^2 \tfrac{1}{2} (p + q) - \sin^2 \tfrac{1}{2} (p - q). \end{aligned}$$

De formules (1) en (2) kunnen dus geschreven worden in den vorm:

$$\tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} A = \frac{\tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} a - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b-c)}{\tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b+c) - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b-c)} \quad \ldots (3),$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} a = &\{\tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b+c) - \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b-c)\} \\ &\times \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} A + \tfrac{1}{2} \sin \operatorname{vers} (b-c) \quad \ldots (4). \end{aligned}$$

Stelt men in form. (1):

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin x \text{ en } \sin^2 \tfrac{1}{2} (b-c) = \sin y,$$

dan vindt men:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin x - \sin y}{\sin b \sin c}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \sin \tfrac{1}{2} (x-y) \cos \tfrac{1}{2} (x+y)}{\sin b \sin c}} \quad \ldots\ldots\ldots (5). \end{aligned}$$

Stelt men in form. (2):

$$\sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \sin x \text{ en } \sin^2 \tfrac{1}{2} (b-c) = \sin y,$$

dan vindt men:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} a &= \sqrt{(\sin x + \sin y)} \\ &= \sqrt{2 \sin \tfrac{1}{2} (x+y) \cos \tfrac{1}{2} (x-y)} \quad \ldots\ldots\ldots (6) \\ &= \sqrt{\frac{\sin (x-y) \sin \tfrac{1}{2} (x+y)}{\sin \tfrac{1}{2} (x-y)}} \quad \ldots\ldots\ldots (7). \end{aligned}$$

En stelt men in form. (4):

$\frac{1}{2}$ sin vers $(b + c)$ — $\frac{1}{2}$ sin vers $(b - c)$ = sin x en $\frac{1}{2}$ sin vers A = sin y, dan vindt men:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \text{ sin vers } a &= \sin x \sin y + \tfrac{1}{2} \text{ sin vers } (b - c)\\ &= \tfrac{1}{2} \text{ sin vers } (x + y) - \tfrac{1}{2} \text{ sin vers } (x - y)\\ &\quad + \tfrac{1}{2} \text{ sin vers } (b - c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).\end{aligned}$$

Het zijn de regels, uitgedrukt door de formules (3)—(8), die Napier mededeelt, onder bijvoeging, dat aan de regels (3) en (4) soortgelijke beantwoorden voor de berekening a) van een hoek uit de overstaande zijde en de twee aanliggende hoeken, b) van een zijde uit de drie hoeken.

Briggs herleidt in zijn Aanteekeningen bij dit aanhangsel de formules (1) en (2) tot den vorm:

$$\text{sin vers } A = \frac{\text{sin vers } a - \text{sin vers } (b - c)}{\sin b \sin c} \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$\text{sin vers } a = \sin b \sin c \text{ sin vers } A + \text{sin vers } (b - c) \,. \,. \,(10).$$

De twee Analogieën eindelijk, onder 3) bedoeld, worden door Napier medegedeeld in de vier vormen:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin (A - B)}{\sin (A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \,. \,. (11^a),$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots\ldots\ldots (12^a);$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin (A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \,. \,. (11^b),$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \cos \tfrac{1}{2}(A + B)}{\sin (A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \,. \,. (12^b);$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a + b) = \begin{matrix}\sin A \text{ cosec } (A + B) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \; + \\ \sin B \text{ cosec } (A + B) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c\end{matrix} \ldots\ldots (11^c),$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \begin{matrix}\sin A \text{ cosec } (A + B) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \; - \\ \sin B \text{ cosec } (A + B) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c\end{matrix} \ldots\ldots (12^c);$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\sin A + \sin B}{\sin (A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots\ldots\ldots (11^d),$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A + B)} \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots\ldots\ldots (12^d).$$

Briggs daarentegen vermeldt in zijn Aanteekeningen de „vier" Analogieën van Napier, eveneens in woorden en zonder bewijs, in de thans gebruikelijke vormen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (13),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (14),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \tfrac{1}{2} C \ldots\ldots (15),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \tfrac{1}{2} C \ldots\ldots (16),$$

en past ze toe bij de oplossing van twee boldriehoeken, waarvan gegeven zijn:

a) een zijde $= 69^\circ$ en de twee aanliggende hoeken $= 42^\circ\, 29'\, 59''$ en $31^\circ\, 6'\, 5''$ (voor de twee andere zijden vindt Briggs 47° en 34°);

b) een hoek $= 47^\circ$ en de twee omliggende zijden $= 59^\circ\, 35'\, 11''$ en $31^\circ\, 6'\, 5''$ (voor de twee andere hoeken vindt Briggs 111° en 34^{c}).

Niet zonder eenigen grond zou men dus aan de derde en de vierde Analogie, die vermoedelijk door middel van den pooldriehoek (p. 48) uit de eerste en de tweede zijn afgeleid, den naam van Briggs kunnen verbinden.

Tot mijn bevreemding vond ik de Analogieën van Napier, die zonder eenigen twijfel aan Delambre, Mollweide en Gauss bij de afleiding der formules:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c}, \quad \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} c},$$

tot voorbeeld hebben gediend, door Hume [1]), Mark Napier [2]), Baltzer [3]) en Cantor [4]) naar Bk. II, Hfdst. VI, van de Descriptio verwezen, dat, zooals we gezien hebben, over de oplossing van den boldriehoek uit de drie zijden en de drie hoeken handelt en waar ze derhalve niet op haar plaats zouden zijn.

---

[1]) Hume, Traité de la Trigonometrie, pour resoudre tous les Triangles Rectilignes et Spheriques. Avec les Demonstrations des deux celebres Propositions du Baron de Merchiston, non encores demonstrees, Paris 1636, 2de Deel, pp. 140 en 145.

[2]) Mark Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston, Edinburgh and London 1834, p. 503.

[3]) Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 2ter Band, Leipzig 1883, p. 321.

[4]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2ter Band, Leipzig 1892, p. 644.

Hume houdt de stellingen:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \surd \{\sin (s - b) \sin (s - c) / \sin b \sin c\},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} A = \surd \{\sin s \sin (s - a) / \sin b \sin c\}$$

voor de twee „celebres propositions du Baron de Merchiston, non encores demonstrees'', hoewel Napier zelf voor het bewijs van de eerste stelling naar Regiomontanus' De Triangulus Planis et Sphæricis Libri Quinque, Basileæ [1561], Lib. V, Cap. II, verwijst.

„Voila'', zegt Hume, „des Propositions lesquelles il semble que depuis vingt ans que le Baron de Merchiston est mort, personne n'a iamais sçeu demonstrer: Car le sieur Bridges [1]), dans son grand Liure des Logarymes n'en dit mot; & dans ses Annotations sur le Liure du Baron de Merchiston, il dit qu'elles sont tres-veritables [2]), sans rien demonstrer, quoy qu'elles soient de tres-grande consequence & vtilité dans la Trigonometrie. Henrion dit que Gunter a mis ces deux Propositions dans son Liure; c'est pourquoy ie l'ay cherché par tout: mais ie n'ay trouué que les Tables sans aucun discours: il y a de l'apparence pourtant qu'il n'a rien demonstré, car si il l'eust fait, Henrion n'eust pas manqué de traduire ses demonstrations en François, selon sa coustume. Le sieur Morin monstre assez de n'en auoir pas sçeu trouuer les demonstrations non plus que les autres.''

Mark Napier daarentegen vereenzelvigt de Analogieën met de stelling:

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} a \;:\; \text{tang} \tfrac{1}{2} (b + c) = \text{tang} \tfrac{1}{2} (b - c) \;:\; \text{tang} \tfrac{1}{2} (b' \pm c'),$$

waarvan ik het bewijs op p. 48 heb medegedeeld en dat in de Memoirs wordt voorafgegaan door de woorden: „The rules alluded to, generally termed Napier's Analogies, are well known to mathematicians. One of his demonstrations is characterized by peculiar elegance and originality. In the optical illustration, we may observe an indication of those habits and acquisitions which led him to revive the lost catoptrics of Archimedes, whose history is given in the memoirs. I shall adopt here the abridgement of it by Dr Minto, referring the reader to the Canon Mirificus for the original.''

Baltzer bepaalt zich tot de opmerking:

„Die aus den Gauss'schen Gleichungen folgenden Werthe von

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta), \text{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta), \text{tang} \tfrac{1}{2} (a - b), \text{tang} \tfrac{1}{2} (a + b)$$

sind seit längerer Zeit im Gebrauch. Sie wurden von Neper, dem

[1]) Men vindt den naam van Briggs gespeld als: Bridges, Brigge, Brigges, Briggius, Briggs en Brigs.

[2]) Hæc propositio verissima est, vt & proxime antecedens. Constructio, p. 67.

Erfinder der natürlichen Logarithmen, angegeben (Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614. II, 6) und in Proportionen ausgesprochen, welche die Neper'schen Analogien heissen."

Wat eindelijk Cantor, „the prince of mathematical historians of this century" [1]), betreft, moet aan een dier onbegrijpelijke vergissingen gedacht worden, die te betreuren, maar, naar het schijnt, niet te vermijden zijn en waarvan ieder schrijver op zijn beurt het slachtoffer wordt.

Hij zegt:

„Die zweite Leistung ist von grösserer Wichtigkeit und grösserer Selbständigkeit der Erfindung. Ausgehend von dem 2. Satze im V. Buche von Regiomontans Trigonometrie, dass unter Bezeichnung der Winkel und der demselben gegenüberliegenden Bögen im sphärischen Dreiecke durch A, B, C, a, b, c die Gleichung $\sin a . \sin b = \frac{\text{sin vers. } c - \text{sin vers. } (a-b)}{\text{sin vers. } C}$ stattfinde, welche wegen $\text{sin vers. } C = 1 - \cos C$ u. s. w. überführbar ist in die Form $\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos C$, gelangt Neper zu denjenigen Gleichungen (Neper, Descriptio pag. 48 sqq.), welche man gegenwärtig die Neperschen Analogien nennt, und welche man in moderner Schreibweise

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tng}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tng}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tng}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tng}\frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tng}\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \quad \operatorname{tng}\frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tng}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

schreibt. Auf diese letzteren Formeln, deren praktischer Wichtigkeit Neper selbst den grössten Werth beilegte, kam er alsdann in seiner Constructio von 1619 zurück (Neper, Constructio, ed. Macdonald, pag. 68 sqq.)."

In Wallis, Opera Mathematica, Vol. II, Oxoniæ 1693, p. 876 sqq., geeft Caswell een synthetisch en Baker een analytisch bewijs voor de Analogieën van Napier. Oudere bewijzen zijn mij niet bekend. Cagnoli deelt in zijn Trigonometria Piana e Sferica, Pa-

[1]) Cajori, A History of Elementary Mathematics, New York and London 1896, p. 5.

rigi 1786, Baker's bewijs mede zonder vermelding van zijn bron.

Bewijs van Caswell.

Zijn A, E en G (Fig. 18) de rechterpolen van de groote-cirkelbogen DB, DC en BC, dan zijn $\Delta\ BCD$ en $\Delta\ AEG$ elkanders pooldriehoeken (p. 48):

$$\text{bg } AE = \angle D, \qquad \angle A = \text{bg } BD,$$
$$\text{bg } EG = \angle C, \qquad \angle E = 180^\circ - \text{bg } DC,$$
$$\text{bg } AG = 180^\circ - \angle B, \qquad \angle G = \text{bg } BC.$$

Neemt men bg EO = bg EG = bg EP en bepaalt men de stereographische projectie van $GAOEP$ uit het tegenpunt van A als centrum op het raakvlak in A als projectievlak (verg. Fig. 8), dan heeft men:

$$AE = \text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ bg } AE = \text{tang } \tfrac{1}{2} D,$$
$$AG = \text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ bg } AG = \cot \tfrac{1}{2} B,$$
$$AO = \text{tang } \tfrac{1}{2} (\text{bg } AE - \text{bg } EG) = \text{tang } \tfrac{1}{2} (D - C),$$
$$AP = \text{tang } \tfrac{1}{2} (\text{bg } AE + \text{bg } EG) = \text{tang } \tfrac{1}{2} (D + C).$$

Op den bol liggen O, G en P in den omtrek van een kleinen cirkel met E als pool; in de projectiefiguur liggen O, G en P dus eveneens in den omtrek van een cirkel met een punt n van OP als middelpunt.

Trekt men de middellijn λL in den kleinen cirkel met B tot pool, die door C gaat, de middellijnen $B\beta$ en $D\delta$ in den cirkel $BD\beta\delta$, $DK \,//\, B\beta \,//\, F\delta$, $\lambda\omega \perp D\delta$, enz., dan is:

$$\text{bg } B\lambda = \text{bg } BC = \text{bg } BL,$$

dus: $\quad \text{bg } D\lambda = \text{bg } BC + \text{bg } BD$ en $\text{bg } DL = \text{bg } BC - \text{bg } BD;$

$$\text{bg } BD = \text{bg } \beta\delta = \text{bg } BF,$$

dus: $\quad \text{bg } DL = \text{bg } F\lambda;$

$$DK \perp \lambda L,\ B\beta \perp \lambda L \text{ en } F\delta \perp \lambda L,$$

dus: $\quad m\lambda = mL = \sin BC,\ mH = mK = \sin BD,$

$$\lambda K = \sin BC + \sin BD,\ \lambda H = \sin BC - \sin BD,$$
$$D\lambda = 2 \sin \tfrac{1}{2} (BC + BD),\ DL = 2 \sin \tfrac{1}{2} (BC - BD),$$
$$\delta\lambda = 2 \cos \tfrac{1}{2} (BC + BD),\ \delta L = 2 \cos \tfrac{1}{2} (BC - BD).$$

Nu is $\Delta\ \lambda\delta y \sim \Delta\ DLy$ en $\Delta\ DLK \sim \Delta\ \lambda\delta\omega$, dus:

$$Ly : \delta y = (DL : \lambda\delta) = LK : \delta\omega,$$

dus: $\quad L\delta \,//\, K\omega.$

Omdat $\angle\ \delta\omega\lambda = \angle\ \delta H\lambda = 90^\circ$ is, liggen δ, ω, H en λ in den omtrek van een cirkel, zoodat men heeft:

$$\angle\ \lambda\omega H = (\angle\ \lambda\delta H = \angle\ L\delta D) = \angle\ K\omega y,$$

dus: $\quad \angle\ K\omega H = \angle\ y\omega\lambda = 90^\circ,$

dus: $\quad mH = m\omega = mK.$

Uit: $\sin BC : \sin BD = \sin D : \sin C$

volgt: $(\sin BC + \sin BD) : (\sin BC - \sin BD)$

$= \{ (\sin D + \sin C) : (\sin D - \sin C) \}$

$= \text{tang}\, \frac{1}{2} (D + C) : \text{tang}\, \frac{1}{2} (D - C)$

of: $\lambda K : \lambda H = AP : AO,$

dus: $\frac{1}{2} (\lambda K + \lambda H) : \frac{1}{2} (\lambda K - \lambda H) = \frac{1}{2} (AP + AO) : \frac{1}{2} (AP - AO)$

of: $\lambda m : m\omega = An : nG.$

Nu is B de pool zoowel van den grooten cirkel, die door A en G gaat, als van den kleinen cirkel met λL als middellijn: de vlakken dier cirkels zijn dus evenwijdig; buitendien loopt het vlak, dat den bol in A raakt, evenwijdig met dat van cirkel $BD\beta\delta$ en is dus $\lambda L \parallel AG$. Evenzoo is $\lambda\omega \parallel An$ en dus $\angle m\lambda\omega = GAn$.

Uit: $\lambda m : m\omega = An : nG,$

$\angle m\lambda\omega = \angle GAn$ en $\angle \omega m\lambda + \angle AnG$ niet $= 180°$

volgt, dat $\Delta\, \lambda m\omega \sim \Delta\, AnG$ is, zoodat men heeft:

$$\lambda m : An = m\omega : nG = \lambda\omega : AG,$$

dus: $(\lambda m + m\omega) : \lambda\omega = (An + nG) : AG$

of: $\lambda K : \lambda\omega = AP : AG$ ....(1),

en: $(\lambda m - m\omega) : \lambda\omega = (An - nG) : AG$

of: $\lambda H : \lambda\omega = AO : AG$ ....(2).

Nu is $\Delta\, \delta LH \sim \Delta\, \delta\lambda\omega$, dus:

$LH\ (= \lambda K) : \lambda\omega = \delta L : \delta\lambda$ ....(3),

en $\Delta\, DLK \sim \Delta\, D\lambda\omega$, dus:

$LK\ (= \lambda H) : \lambda\omega = DL : D\lambda$ ....(4).

Uit (1) en (3) volgt:

$$AP : AG = \tfrac{1}{2}\, \delta L : \tfrac{1}{2}\, \delta\lambda$$

of: $\text{tang}\, \frac{1}{2} (D + C) : \cot \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2} (BC - BD) : \cos \frac{1}{2} (BC + BD)$...(5),
en uit (2) en (4):

$$AO : AG = \tfrac{1}{2}\, DL : \tfrac{1}{2}\, D\lambda$$

of: $\text{tang}\, \frac{1}{2} (D - C) : \cot \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2} (BC - BD) : \sin \frac{1}{2} (BC + BD)$ .. (6),
waarmede twee van de vier Analogieën bewezen zijn.

Past men ze op den pooldriehoek AEG toe, dan vindt men de twee overige, t. w.:

$\text{tang}\, \frac{1}{2} (BC + BD) : \text{tang}\, \frac{1}{2}\, DC = \cos \frac{1}{2} (D - C) : \cos \frac{1}{2} (D + C)$ ... (7),

$\text{tang}\, \frac{1}{2} (BC - BD) : \text{tang}\, \frac{1}{2}\, DC = \sin \frac{1}{2} (D - C) : \sin \frac{1}{2} (D + C)$ ...(8).

Bewijs van Baker.

Laat in ΔBPD (Fig. 19) het voetpunt A van de hoogtelijn PA op BD tusschen B en D vallen, dan heeft men:

$\sin BP : \sin DP = \sin D : \sin B$ ....(1),

$\text{tang}\, BP : \text{tang}\, DP = \cos APD : \cos APB$ ....(2),

$$\cos D : \cos B = \sin APD : \sin APB \quad \ldots\ldots(3),$$
$$\tan D : \tan B = \sin AB : \sin AD \quad \ldots\ldots(4),$$
$$\cos BP : \cos DP = \cos AB : \cos AD \quad \ldots\ldots(5).$$

Uit (1) volgt:

$$(\sin BP + \sin DP) : (\sin BP \sim \sin DP) = (\sin D + \sin B) : (\sin D \sim \sin B),$$

dus:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BP + DP) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BP \sim DP)$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) \quad \ldots\ldots(6),$$
$$\cot \tfrac{1}{2}(BP + DP) : \cot \tfrac{1}{2}(BP \sim DP)$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B) \quad \ldots\ldots(7).$$

Uit (2) volgt:

$$(\operatorname{tang} BP + \operatorname{tang} DP) : (\operatorname{tang} BP \sim \operatorname{tang} DP)$$
$$= (\cos APD + \cos APB) : (\cos APD \sim \cos APB),$$

dus:

$$\sin(BP + DP) : \sin(BP \sim DP) = \cot \tfrac{1}{2} P : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(APD \sim APB) \ldots.(8).$$

Uit (3) volgt:

$$(\cos D \sim \cos B) : (\cos D + \cos B)$$
$$= (\sin APD \sim \sin APB) : (\sin APD + \sin APB),$$

dus:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B).\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) = \cot \tfrac{1}{2} P.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(APD \sim APB),$$

dus:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(APD \sim APB) = \cot \tfrac{1}{2} P : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) \ldots..(9),$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(APD \sim APB) = \cot \tfrac{1}{2} P : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B) \ldots(10).$$

Vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen van de evenredigheden (6), (8) en (9), dan komt er na eenige herleiding, als men opmerkt, dat $\frac{1}{2} \sin \phi \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \phi = \sin^2 \frac{1}{2} \phi$ is:

$$\sin \tfrac{1}{2}(BP + DP) : \sin \tfrac{1}{2}(BP \sim DP) = \cot \tfrac{1}{2} P : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D \sim B) \ldots(11).$$

En vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen van de evenredigheden (7), (8) en (10), dan komt er na eenige herleiding, als men opmerkt, dat $\frac{1}{2} \sin \phi \,.\, \cot \frac{1}{2} \phi = \cos^2 \frac{1}{2} \phi$ is:

$$\cos \tfrac{1}{2}(BP + DP) : \cos \tfrac{1}{2}(BP \sim DP) = \cot \tfrac{1}{2} P : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(D + B) \ldots(12),$$

waarmede twee Analogieën gevonden zijn.

De twee overige Analogieën:

$$\sin \tfrac{1}{2}(D + B) : \sin \tfrac{1}{2}(D \sim B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} BD : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BP \sim DP) \,..(13),$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(D + B) : \cos \tfrac{1}{2}(D \sim B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} BD : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(BP + DP) \,..(14)$$

kan men op dezelfde wijze uit de formules (1), (4) en (5) afleiden. Ook kan men ze bewijzen door toepassing van (11) en (12) op den pooldriehoek van ΔBPD.

Men vindt dezelfde formules (11), (12), (13) en (14), als in ΔBPD het voetpunt A van de hoogtelijn PA op BD niet tusschen B en D valt.

Opmerkingen.

In zijn Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio zegt Napier: „Tot nog toe hebben wij het ontstaan en de eigenschappen der logarithmen verklaard; wij zouden thans moeten uiteenzetten, hoe zij berekend worden. Maar omdat wij de geheele tafel zelf en al haar logarithmen met haar sinussen voor elke minuut van het quadrant mededeelen, stellen wij de theorie van haar samenstelling tot een gelegener tijdstip uit en gaan over tot haar gebruik, opdat, als eerst haar gebruik en haar nut gekend worden, het des te aangenamer zal wezen, als daarna de rest in het licht verschijnt, of het althans minder jammer zal worden gevonden, als deze aan de vergetelheid mocht worden prijsgegeven. Want ik zal het oordeel en de critiek der geleerden over dit gedeelte afwachten, voordat ik het overige zoo maar aan de geringschatting van benijders ga blootstellen." [1])

Elders: „Zoo zijt gij volgens belofte in het bezit van den wonderbaren canon der logarithmen met zijn veelzijdig gebruik, en mocht mij uit uw mededeelingen blijken, dat zulks aan de meer geleerden onder u aangenaam zou wezen, dan zal mij dit moed geven, om ook de methode der samenstelling van de tafel bekend te maken." [2])

[1]) Admonitio.

Hvc usque logarithmorum genesin & symptomata explicavimus: quo verò calculo, quave logisticæ methodo habeantur, hoc loco explicandum foret. Sed quia ipsum canonem integrum, ejusque logarithmos omnes cum suis sinibus ad singulas quadrantis minutias primas exhibemus, ideo in tempus magis idoneum doctrinam constructionis logarithmorum transilientes, ad eorum usum properamus, ut prælibatis prius usu, & rei utilitate, cętera aut magis placeant posthac edenda, aut minus saltem displiceant silentio sepulta. Præstolor enim eruditorum de his judicium & censuram, priusquam cætera in lucem temerè prolata lividorum detrectationi exponantur. p. 7.

[2]) Conclvsio.

Satis ergo jam ostensum est quod sint, quid sint, & cuius usus sint Logarithmi: Eorum enim beneficio absque multiplicationis, divisionis, aut radicum extractionis molestia, omnis Geometricæ quæstionis solutionem logisticam promptissimè exhiberi, tum apodeicticè demonstravimus, tum exemplis utriusque Trigonometriæ docuimus. Promissum itaque mirificum Logarithmorum canonem habetis, eiusque amplissimum usum: quæ si vobis eruditioribus grata fore ex rescriptis vestris intellexero, animus mihi addetur, ad tabulæ condendæ methodum in lucem etiam proferendam. Interim hoc brevi opusculo fruamini, Deoque opifici summo, omniumque operum bonorum opitulatori laudem summam & gloriam tribuite. p. 57.

En: „Maar als ik merk, dat deze uitvinding in den smaak van de geleerden valt, dan zal ik (met Gods hulp) misschien binnenkort theorie en methode doen kennen, om dezen canon te verbeteren of een beteren opnieuw te berekenen." [1])

Eindelijk in 1619, twee jaren na Napier's dood, werd de Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio door zijn zoon Robert [2]) onder medewerking van Briggs in het licht gegeven.

„Voor eenige jaren, Lezer, Liefhebber der Wiskunde", schrijft Robert Napier in de voorrede, „maakte mijn vader — eere zij

[1]) Zie de noot op p. 85, alsmede het slot van de Admonitio op p. 27.

[2]) Lectori Matheseos Stvdioso.

S.

Ante aliquot annos (Lector Philomathes) Mirifici Logarithmorum Canonis vsum, memoriæ semper colendæ parens publici Iuris fecerat; ejus verò syntaxin ac creandi methodum, vt ipse monuit. Pag. 7ª. & vltimâ Logarithmorum, certo consilio Typis committere noluit; donec quodnam esset eorum, qui in hoc doctrinæ genere versati sunt, de hoc Canone Iudicium ac censura exploratum habuisset. Mihi verò, post ipsius ex hâc vitâ commigrationem certis tecmeriis constat, Mathematicarum disciplinarum peritissimos novum hoc Inventum plurimi facere; & nihil iis gratius accidere posse, quàm si Mirifici hujus Canonis constructio, aut ea saltem, quæ ipsi aliquid lucis afferre possint, publicæ vtilitatis gratiâ in lucem prodeant. Quamvis igitur mihi probè perspectum sit, ipsum authorem huic opusculo extremam manum non imposuisse; feci tamen quantum in me fuit, vt horum honestissimo desiderio satisfieret, eorumque studiis præsertim qui imbecilliores sunt, & in ipso limine hærere solent, hac in parte consuleretur. Nec dubito, quin hoc opus posthumum multò perfectius ac elimatius in lucem prodiisset, si ipsi authori patri charissimo (in quo, ex optimorum hominum sententiâ, inter alia præclara hoc eximii eminebat, res difficillimas methodo certâ & facili, quàm paucissimis expedire) Deus longiorem vitæ vsuram concessisset. Habes igitur (Lector benevole) in hoc libello, doctrinam constructionis Logarithmorum (quos hîc numeros artificiales appellat; hunc enim tractatũ, ante inventam Logarithmorum vocem, apud se per aliquot annos conscriptum habuerat) copiosissimè explicatam; in qua eorum natura, symptomata, ac variæ ad naturales eorum numeros habitudines perspicuè demonstrantur. Visum est etiam ipsi syntaxi subnectere Appendicem quandam, de alia Logarithmorum specie multò præstantiore condenda, (cujus, ipse Inventor in Epistola Rabdologiæ suæ præfixa meminit) & in qua Logarithmus vnitatis est 0. Hanc loco vltimo vltimus ejus labor excipit, ad vlteriorem Trigonometriæ suæ Logarithmicæ perfectionem spectans; nempe propositiones quædam eminentissimæ, in Triangulis sphæricis non quadrantalibus resolvendis, absque eorum in quadrantalia aut rectangula divisione, & absque casuum observatione: quas quidem Propositiones in ordinem redigere, & ordine demonstrare statuerat, nisi nobis morte præproperâ præreptus fuisset. Lucubrationes etiam aliquot, Mathematici excellentissimi D. Henrici Briggii publici apud Londinenses Professoris, in memoratas Propositiones, & novam hanc Logarithmorum speciem, Typis mandari curavimus; qui novi hujus Canonis supputandi laborem gravissimum, pro singulari amicitiâ quæ illi cum Patre meo L. M. intercessit, animo libentissimo in se suscepit; creandi methodo, & vsuum explanatione Inventori relictis. Nunc autem ipso ex hâc vitâ evocato, totius negotii onus doctissimi Briggii humeris incumbere, & Sparta hæc ornanda illi sorte quadam obtigisse videtur. Hisce interim (Lector) laboribus quibuscunque fruere, & pro humanitate tuâ boni consulito. Vale.

Robertvs Nepervs, F.

immer zijner nagedachtenis — het gebruik bekend van den Wonderbaren Canon der Logarithmen; maar het was, zooals hij op de zevende en op de laatste bladzijde der Logarithmen mededeelt, zijn vast voornemen, de samenstelling en de wijze van berekening niet aan den druk toe te vertrouwen, voordat hij het oordeel en de critiek van hen, die in dit vak van wetenschap bedreven zijn, over dezen Canon had uitgevorscht.

Maar na zijn heengaan uit dit leven staat het voor mij vast op grond van betrouwbare getuigenissen, dat de kenners der wiskundige wetenschappen deze nieuwe uitvinding zeer hoog schatten en niets hun liever zal zijn, dan dat de samenstelling van dezen Wonderbaren Canon of althans zooveel, als ter opheldering kan dienen, ten algemeenen nutte in het licht verschijnt.

Om die reden echter heb ik, hoewel het mij bekend is, dat de schrijver van dit werkje er niet de laatste hand aan gelegd heeft, gedaan wat ik kon, om aan dit zeer vereerend verlangen te voldoen en voornamelijk aan hen eenige hulp te verleenen, die minder ver zijn gevorderd in zulk soort van studiën en niet gewoon er diep in door te dringen.

Ook ben ik overtuigd, dat dit nagelaten werk veel volmaakter en beter afgewerkt het licht zou hebben gezien, als God een langer gebruik van het leven had vergund aan mijn dierbaren vader, die naar de meening van de voortreffelijkste mannen, behalve door andere heerlijke gaven, in het bijzonder uitmuntte door de zekerheid en de gemakkelijkheid, waarmede hij in weinig woorden de moeielijkste quaestiën wist uiteen te zetten."

Buitendien vernemen we uit de voorrede, dat Napier de Constructio, waarin, zooals we reeds hebben opgemerkt, de logarithmen „kunstgetallen" (numeri artificiales) heeten, schreef, vóórdat de naam „logarithmen", die in de Descriptio uitsluitend gebruikt wordt, nog was uitgedacht.

„Ook heb ik gemeend", vervolgt Robert Napier, „aan de theorie der samenstelling van den canon een aanhangsel toe te moeten voegen over een ander en veel beter soort van logarithmen, waarbij de logarithme van de eenheid nul is en waarvan de uitvinder melding heeft gemaakt in de opdracht vóór zijn Rabdologia."

Omtrent de vraag, in hoeverre Napier als uitvinder mag gelden van de logarithmen, die hier bedoeld worden en waaraan wij gewoon zijn uitsluitend den naam van Briggs te verbinden, meenen wij in eenige bijzonderheden te moeten treden.

Toen in 1614 Napier's Descriptio verscheen, was Henry Briggs (1556—1630) professor in de meetkunde aan de Gresham Stichting te Londen. Napier's werk bracht hem zoozeer in verrukking, dat hij besloot den schrijver te bezoeken. „Naper, lord of Markinston, hath set my head and hands at work with his new and admirable logarithms", zegt hij in een brief aan den lateren aartsbisschop Usher. „I hope to see him this summer, if it please God; for I never saw a book which pleased me better, and made me more wonder." [1])

Briggs wensch werd vervuld: hij bezocht Napier in den zomer van 1615 op Merchiston Castle, waar hij een maand lang diens gast was; een tweede bezoek had plaats in 1616, een derde zou in 1617 gevolgd zijn, ware Napier niet den 4[den] April van dat jaar overleden.

Omtrent deze bezoeken deelt Briggs een en ander mede in de voorrede van zijn Arithmetica Logarithmica, die in 1624, zeven jaren na Napier's dood, verscheen en waarin de logarithmen der getallen van 1 tot 20000 en van 90000 tot 100000 (in sommige exemplaren tot 101000) in veertien decimalen met de wijzers en tusschengevoegde verschillen worden aangetroffen. „Het bevreemde u niet", zegt hij o.a. „dat deze logarithmen verschillen van die, welke de beroemde Baron van Merchiston in zijn Wonderbaren Canon bekend gemaakt heeft. Want toen ik in het openbaar de theorie van deze logarithmen aan mijn toehoorders in Gresham College te Londen verklaarde, heb ik de opmerking gemaakt, dat het veel doelmatiger zou zijn, als voor de logarithme van den straal nul werd behouden (evenals in den Canon Mirificus), maar dat de logarithme van het tiendedeel van dien zelfden straal, d. i. de sinus van $5^\circ 44' 21''$, 10000000000 ware. Ik heb hierover terstond aan den samensteller geschreven en ben, zoodra het jaargetijde en mijn ambtsplichten zulks toelieten, naar Edinburgh getrokken, waar ik vriendelijk door hem ontvangen en een geheele maand gebleven ben. Toen echter door ons over een wijziging van zijn logarithmen gesproken werd, zeide hij, dat hij dit zelf reeds voor lang ingezien en gewenscht had, maar toch de verschenene, die reeds berekend waren, had uitgegeven, tot hij, als zijn bezigheden en de staat van zijn gezondheid zulks toelieten, andere en doelmatiger bewerkt zou hebben. Maar hij was van meening, dat die wijziging zóó aangebracht moest worden, dat nul de logarithme van de eenheid en 10000000000 die van den straal werd, wat ik niet kon ontkennen, dat verreweg het doelmatigste was.

Zoo begon ik op zijn aanraden, met terzijdestelling van wat ik

[1]) Usher's Letters, p. 38.

al gereed had, ernstig over de berekening van deze te denken, en toen ik den volgenden zomer weer naar Edinburgh was gegaan, liet ik de voornaamste zien van die, welke ik hier laat verschijnen, en had den derden zomer hetzelfde willen doen, als het Gode behaagd had, hem zoolang voor ons te sparen." [1])

Onafhankelijk van elkander schijnen Napier en Briggs dus te hebben ingezien, dat een wijziging in de logarithmen van den Canon Mirificus wenschelijk was; maar terwijl de verandering, die Briggs op het oog had, neerkwam op de keuze van 1/10 als grondtal, meende Napier als zoodanig aan 10 de voorkeur te moeten geven, omdat aan een stelsel met 10 als grondtal niet alleen dezelfde voordeelen verbonden zijn, die 1/10 als zoodanig aanbiedt, maar in dat stelsel buitendien aan een grooter numerus een grooter logarithme beantwoordt en niet als voor 1/10 de logarithmen toenemen, als de numeri kleiner worden.

Napier zelf vermeldt nergens de bijzonderheden, die Briggs in zijn Arithmetica Logarithmica mededeelt, evenmin als zijn zoon Robert. Trouwens Napier had reeds voor lang de wenschelijkheid ingezien van de verandering, waarop Briggs zijn aandacht gevestigd had, zooals hij dezen tijdens hun samenzijn in 1615 mededeelde, een mededeeling, die bevestigd wordt door de opmerking onmiddellijk achter de tafel in sommige exemplaren van de Descriptio [2]), waarin Napier bij gebleken belangstelling in zijn werk belooft, „misschien binnenkort theorie en methode te doen kennen, om den uitgegeven canon te verbeteren of een beteren opnieuw te berekenen", verondersteld, dat deze noot niet na ontvangst van Briggs' schrifte-

[1]) Quod Logarithmi isti diuersi sunt ab iis, quos Clarissimus vir Baro Merchistonii in suo edidit Canone mirifico, non est quod mireris. Ego enim cum meis auditoribus Londini, publice in Collegio Greshamensi, horum doctrinam explicarem; animaduerti multo futurum commodius, si Logarithmus Sinus totius seruaretur 0 (vt in Canone mirifico) Logarithmus autem partis decimæ eiusdem sinus totius, nempe sinus 5 graduum, 44, m. 21, s. esset 10000000000. atque ea de re scripsi statim ad ipsum authorem, et quamprimum per anni tempus, et vacationem a publico docendi munere licuit, profectus sum Edinburgum; vbi humanissime ab eo acceptus hæsi per integrum mensem. Cum autem inter nos de horum mutatione sermo haberetur; ille se idem dudum sensisse, et cupivisse dicebat: veruntamen istos, quos iam parauerat edendos curasse, donec alios, si per negotia et valetudinem liceret, magis commodos confecisset. Istam autē mutationē ita faciendā censebat, vt 0 esset Logarithmus vnitatis, et 10000000000 sinus totius: quod ego longe commodissimum esse non potui non agnoscere.

Cœpi igitur eius hortatu, reiectis illis quos anteà paraueram, de horum calculo serio cogitare: et sequenti æstate profectus Edinburgum, horum quos hic exhibeo præcipuos, illi ostendi. idem etiam tertia æstate libentissime facturus, si Devs illum nobis tamdiu superstitem esse voluisset.

Briggs, Arithmetica Logarithmica, Londini 1624, Præfatio ad Lectorem.

[2]) Zie de noot op p. 85.

lijke mededeeling is aangebracht. Want onwillekeurig vraagt men zich af, waarom Napier, wanneer hij inderdaad, zooals hij aan Briggs te kennen gaf, zijn tafel heeft uitgegeven in den vorm, waarin zij verschenen is, omdat zijn bezigheden en de staat van zijn gezondheid niet toelieten ze om te werken en hij zich niettemin de eer der uitvinding van de logarithmen wilde verzekeren, waarom Napier niet reeds in de voorrede van de Descriptio van deze omstandigheid melding maakt.

Nadere mededeelingen van Napier en diens zoon Robert over de nieuwe logarithmen, alle evenwel van later dagteekening dan zijn kennismaking met Briggs, vindt men:

1) in Wright's vertaling van de Descriptio:

A / Description / Of The Admirable / Table Of Loga- / rithmes: / With / A Declaration Of / The Most Plentifvl, Easy, / and speedy vse thereof in both kindes / of Trigonometrie, as also in all / Mathematicall calculations. / Invented And Pvbli- / shed In Latin By That / Honorable L Iohn Nepair, Ba- / ron of Marchiston, and translated into / English by the late learned and / famous Mathematician / Edward Wright. / With an Addition of an Instrumentall Table / to finde the part proportionall, inuented by / the Translator, and described in the end / of the Booke by Henry Brigs / Geometry-reader at Gresham- / house in London. / All perused and approued by the Author, & pub- / lished since the death of the Translator. /

London, / Printed by Nicholas Okes. / 1616. / 12°. 210 pp.

Aan Hoofdstuk IV van Boek I voegt Napier, die de vertaling „doorgezien en goedgekeurd" had [1]), de opmerking toe, dat hij bij een herdruk van zijn Descriptio voornemens is, zich van zoodanige logarithmen te bedienen, dat de getallen 23025842, 46051684, enz. [2]) door tiendeelige, zooals 100000000, 200000000, enz., vervangen worden, wat neerkomt op de keuze van 1/10, misschien van 10, als grondtal [3]); —

2) in de Opdracht van Napier's Rabdologia, waar hij zegt: „Van welke logarithmen wij nu ook een ander en veel beter soort uitgevonden hebben, waarvan wij voornemens zijn, als God ons een

[1]) Zie de noot op p. 74.

[2]) Zie p. 35.

[3]) An Admonition.

Bvt because the addition and subtraction of these former numbers may seeme somewhat painfull, I intend (if it shall please God) in a second Edition, to set out such Logarithmes as shal make those numbers aboue written to fall upon decimal numbers, such as 100,000,000, 200,000,000, 300,000,000, &c., which are easie to bee added or abated to or from any other number. p. 19.

langer gebruik van leven en gezondheid toestaat, de wijze van samenstelling en het gebruik bekend te maken; maar wij laten de berekening van den nieuwen canon zelf wegens onze lichaamszwakte over aan hen, die in deze soort van arbeid bedreven zijn, met name aan mijn dierbaarsten vriend, den zeer geleerden Henry Briggs, openbaar professor in de meetkunde te Londen" [1]); —

3) in het Aanhangsel van de Constructio „Over de berekening van een ander en beter soort van logarithmen, waarbij nul de logarithme van de eenheid is", en waarin Napier onder de verschillende verbeteringen van de logarithmen die de belangrijkste acht, waarbij nul als de logarithme van de eenheid en 10 000 000 000 als die van 1/10 of van 10 aangenomen wordt [2]); —

4) in de voorrede van dit zelfde werk, waar Robert Napier zegt: „Ook hebben wij zorg gedragen bij bovengenoemde stellingen en bij deze nieuwe soort van logarithmen eenige Toelichtingen te doen drukken van den zeer uitstekenden wiskunstenaar Henry Briggs, openbaar professor te Londen, die, wegens de bijzondere vriendschap, die tusschen hem en mijn vader, roemrijker gedachtenis, bestond, met de meeste bereidwilligheid de zware taak op zich heeft genomen, om dezen nieuwen canon te berekenen; de wijze der samenstelling en de verklaring van het gebruik zou aan den uitvinder verblijven. Nu deze evenwel uit dit leven is weggeroepen, schijnt de last der geheele onderneming neer te komen op de schouders van den zeer geleerden Briggs en dien door het lot de taak ten deel gevallen te zijn, dit Sparta te versieren" [3]).

Nergens vindt men in Napier's werken Briggs' bewering omtrent zijn aandeel in de verbetering van de logarithmen bevestigd. Briggs uitvoerder van Napier's denkbeelden, zoo wordt ons beider verhouding geschetst; Briggs de samensteller van de tafel, Napier de bewerker van de theorie der nieuwe logarithmen in een gemeenschappelijk uit te geven werk. Napier's dood verijdelde dit plan; Briggs zette den aangevangen arbeid alleen voort, gaf in 1617 zijn Logarithmorum Chilias Prima [4]) en in 1624 zijn Arithmetica Lo-

[1]) Zie de noot op p. 68.

[2]) Zie p. 85.

[3]) Zie noot [2]) op p. 101.

[4]) Logarithmorvm / Chilias Prima. / 8°. 16 pp.

Bevat de gewone logarithmen der getallen van 1 tot 1000 in veertien decimalen en verscheen in 1617 te Londen zonder naam van den schrijver, van de plaats van herkomst en datum van uitgaaf.

Wegens de aan onvindbaarheid grenzende zeldzaamheid van deze oudste gewone logarithmentafel moge de korte voorrede hier een plaats vinden:

„Quam autor typis excudendam curauit, non eo concilio, vt publici iuris fieret; sed garithmica sive Logarithmorum Chiliades Triginta, pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20,000: et a 90,000 ad 100,000 [1]) uit, en was met de berekening van de logarithmen der ontbrekende getallen van 20000 tot 90000 bijna gereed [2]), toen in 1628 bij Pieter Rammaseyn, „Boekverkooper in de corte Groenendal, int Vergult ABC" te Gouda, als tweede vermeerderde druk van zijn Arithmetica Logarithmica, bewerkt door den „konstlievenden" chef dier uitgeversfirma, Adriaen Vlack, de eerste volledige tafel van de gewone logarithmen der getallen van 1 tot 100000 [3]) in tien decimalen verscheen.

---

partim, vt quorundam suorum necessariorum desiderio priuatim satisfaceret partim, vt eius adiumento, non solum Chiliadas aliquot insequentes; sed etiam integrum Logarithmorum Canonem, omnium Triangulorum calculo inseruientem commodius absolueret. Habet enim Canonem Sinuum, à seipso, ante Decennium, per æquationes Algebraicas, & differentias, ipsis Sinubus proportionales, pro singulis Gradibus & graduū centesimis, à primis fundamentis accurate extructū: quem vna cum Logarithmis adjvnctis, volente Deo, in lucem sedaturum sperat, quam primum commode licuerit.

Quod autem hi Logarithmi, diversi sint ab ijs, quos Clarissimus inuentor, memoriæ semper colendæ, in suo edidit Canone Mirifico; sperandum, eius librū posthumum, abunde nobis propediem satisfacturum. Qui autori (cum eum domi suæ, Edinburgi, bis inuiseret, & apud eum humanissime exceptus, per aliquot septimanas libentissime mansisset; eique horum partem præcipuam quam tum absoluerat ostendisset) suadere non destitit, vt hunc in se laborem susciperet. Cui ille non inuitus morem gessit.

In tenui; sed non tenuis fructusve laborve."

[1]) Arithmetica / Logarithmica / Sive / Logarithmorvm / Chiliades Triginta, Pro / numeris naturali serie crescentibus ab vnitate ad / 20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa / perficiuntur Arithmetica problemata / et Geometrica. / Hos Nvmeros Primvs / Invenit Clarissimvs Vir Iohannes / Nepervs Baro Merchistonij: eos autem ex eiusdèm sententia / mutavit, eorumque ortum et vsum illustravit Henricvs Briggivs, / in celeberrima Academia Oxoniensi Geometriæ / professor Savilianvs. / Devs Nobis Vsvram Vitæ Dedit / Et Ingenii, Tanqvam Pecvniæ, / Nvlla Præstitvta Die.

Londini, / Excudebat Gvlielmvs / Iones. 1624. / 2°. 394 pp.

[2]) In een brief van den 25sten October 1628 aan zijn vriend Pell zegt Briggs: „My desire was to have those Chiliades that are wantinge betwixt 20 and 90 calculated and printed, and I had done them all almost by my selfe, and by some frendes whom my rules had sufficiently informed, and by agreement the busines was conveniently parted amongst us; but I am eased of that charge and care by one Adrian Vlacque, an Hollander, who hathe done all the whole hundred chiliades and printed them in Latin, Dutche, and Frenche, 1000 bookes in these 3 languages, and hathe sould them almost all. But he hathe cutt of 4 of my figures throughout; and hathe left out my Dedication, and to the reader, and two chapters the 12 and 13, in the rest he hathe not varied from me at all."

Glaisher, On Early Logarithmic Tables, and their Calculators, in: Philosophical Magazine, London 1873, Vol. XLV, p. 380.

[3]) Arithmetica / Logarithmica, / Sive / Logarithmorvm / Chiliades Centvm, Pro / Numeris naturali serie crescentibus / ab Vnitate ad 100000. / Vna Cvm / Canone Triangvlorvm / Sev Tabvla Artificialivm / Sinuum, Tangentium & Secantium, / Ad Radium 10,00000,00000. & ad singula / Scrupula Prima Quadrantis. / Qvibvs Novvm Traditvr Compendivm Qvo Nvl- / lum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraque Proble- / mata Arithmetica & Geometrica. / Hos Nvmeros Primvs Invenit / Clarissimus Vir

Wat mag wel de reden geweest zijn, dat Briggs zich niet reeds tijdens Napier's leven zijn aandeel in de eer der verbetering van de logarithmen heeft verzekerd? Waarom gewacht tot zeven jaren na Napier's dood, hoewel zich reeds tweemaal eerder ongezocht de gelegenheid er voor had aangeboden? Wel is waar beweert Hutton, de lofredenaar van Briggs, die zich niet ontziet een smet te werpen op Napier's karakter, waar hij voor de aanspraken van zijn Engelschen stamgenoot in de bres springt, — wel beweert Hutton, dat Briggs zich reeds in de voorrede van diens Logarithmorum Chilias Prima, die in 1617 blijkens de uitdrukking „ejus librum posthumum" [1]) na Napier's dood verscheen, een bescheiden toespeling veroorlooft op zijn aandeel in de wijziging van Napier's logarithmen, als hij zegt: „Why these logarithms differ from those set forth by their most illustrious inventor, of ever respectful memory, in his Canon Mirificus, it is to be hoped his posthumous work will shortly make appear" [2]), maar o. i. drukken de woorden: „sperandum, ejus librum posthumum, abunde nobis propediem satisfacturum" [1]) alleen maar de verwachting uit, dat Napier's nagelaten Constructio binnenkort wel uitvoerig zou verklaren, waarom de logarithmen in de Logarithmorum Chilias Prima verschillen van die in den Canon Mirificus, zonder meer. Hoe diep de vereering, die Briggs voor Napier koesterde, geweest moge zijn, en hoe warm de vriendschap, die hem aan diens zoon Robert verbond, [3]) had hij

Iohannes Nepervs Baro / Merchistonij: eos autem ex ejusdem sententiâ mutavit, eorum- / que ortum & usum illustravit Henricvs Briggivs, / in celeberrimâ Academiâ Oxoniensi Geome- / triæ Professor Savilianus. / Editio Secunda aucta per Adrianvm Vlacq Goudanum. / Devs Nobis Vsvram Vitae Dedit Et Ingenii, / Tanqvam Pecvniae, Nvlla / Praestitvta Die. /

Govdae, / Excudebat Petrus Rammasenius. / M. DC. XXVIII. / Cum Privilegio Illust. Ord. Generalium. / 2°. 838 pp.

[1]) Zie noot [4]) op p. 106.

[2]) Hutton, Mathematical Tables, London 1785, Introduction p. 35.

[3]) There is very interesting evidence still extant that the most perfect cordiality prevailed betwixt Robert Napier and Briggs long after our philosopher's death; and that the Savilian professor, in the progress of his great work, continued to call to his aid as much of the genius of the master he had lost as he could command. Napier left a mass of papers, including his mathematical treatises and notes, all of which came into the possession of Robert as his father's literary executor. When the house of Napier of Culcreugh was burnt [omstreeks 1800], these papers perished, with only two exceptions that I have been able to discover. The one is the manuscript treatise on Alchemy by Robert Napier himself; but the other is a far more valuable manuscript, being entitled, „The Baron of Merchiston, his booke of Arithmeticke, and Algebra; for Mr Henrie Briggs, Professor of Geometrie at Oxforde". This very curious work was presented to Francis V. Lord Napier, by the then Napier of Culcreugh, probably at the time his Lordship contemplated writing a life of his great ancestor [vóór 1780], and it has lain in the Merchiston charter-chest ever since unknown to the world.....

zich werkelijk miskend gevoeld, hij zou in de Constructio Napier's artikel over de nieuwe logarithmen, waarin men den naam van Briggs te vergeefs zal zoeken, niet van toelichtingen hebben voorzien, zonder ook maar te zinspelen op zijn eigen aandeel in de volmaking van Napier's vinding [1]).

Moeten wij dus na vermelding van alle feiten, die op de onderhavige quaestie betrekking hebben, de vraag onbeantwoord laten, van wien het denkbeeld, om de logarithmen van den Canon Mirificus door gewone logarithmen te vervangen, is uitgegaan, en deze niet onbelangrijke verbetering waarschijnlijk beschouwen als een uitvloeisel der gedachtenwisseling tusschen Napier en Briggs, beiden hebben zich door hun arbeid een welverdienden roem bij tijdgenoot en nageslacht verworven en een blijvende plaats verzekerd in de geschiedboeken der wetenschap; want Napier's genie en Briggs' taaie volharding hebben voor de toepassing der wiskundige wetenschappen een hulpmiddel geschapen, nauwelijks van minder beteekenis dan de tiendeelige schrijfwijze der getallen, die wij aan de Indiërs en Arabieren hebben dank te weten.

---

it is of great length, beautifully written in the hand of his son, who mentions the fact, that it is copied from such of his father's notes as the transcriber considered „orderlie sett doun". It is material to observe in reference to what we have been considering, that it bears expressly to have been written out by Robert Napier for Henry Briggs, and after the latter had been appointed to the Savilian chair, which appointment took place in the year 1619. It seems not unlikely that it had been sent to Briggs while he was in the progress of his great work,.... But we have thus unquestionable evidence, that from the time when Briggs first expounded the Canon Mirificus to his scholars at Gresham House, to the period when he published the Arithmetica Logarithmica, he continued to regard our philosopher as his guide, and no cloud but that of death ever past betwixt them.

Mark Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston, Edinburgh and London 1834, p. 419.

[1]) Bij Hume, Traité de la Trigonometrie, Paris 1636, 1ste Deel, p. 116, leest men:

„L'inuenteur estoit vn Seigneur de grande condition, & duquel la posterité est auiourd'huy en possession de grandes dignitez dans le Royaume, qui estant sur l'aage, & grandement trauaillé des gouttes ne pouuoit faire autre chose que de s'adonner aux sciences, & principalement aux Mathematiques & à la Logistique, à quoy il se plaisoit infiniment, & auec estrange peine, a construict ses Tables des Logarymes imprimees à Edimbourg en l'an 1614. qui tout aussitost donnerent vn estonnement à tous les Mathematiciens de l'Europe, & emporterẽt le sieur Bigges Professeur à Oxford, d'Angleterre en Escosse, pour apprendre de luy cette admirable inuention, de construire les logarymes, & l'ayant enseigné à construire vne nouuelle espece de logaryme, luy laissa ceste charge pour les faire apres sa mort, ce qu' il fit comme on les voit auiourd'huy par toutes les boutiques de Libraires: Il mourut l'an 1616. & fut enterré hors la porte Occidentale d'Edinbourg, dans l'Eglise de Sainct Cudbert."

Aan de bewering van Hume, dat Napier Briggs „vne nouuelle espece de logaryme" zou hebben leeren berekenen, mag m. i. evenwel niet meer waarde worden gehecht dan aan Hutton's partij kiezen voor Briggs.

DE ARTE LOGISTICA.

De Arte Logistica /Joannis Naperi/ Merchistonii Baronis/ Libri Qui Supersunt. /
Impressum Edinburgi /M.DCCC.XXXIX./

4°. $28\frac{1}{2} \times 22\frac{1}{2}$ cM. 8 pp. zonder signatuur en niet gepagineerd: pp. 1—2, wit; p. 3, de regel: *De Arte Logistica.*; p. 4, wit; p. 5, *Titel*; p. 6, wit; p. 7, de opdracht: *To The Right Honourable Francis Lord Napier of Merchiston, Etc. Etc. Etc.*, onderteekend: *Mark Napier*, gedateerd: *Edinburgh, November* 1, 1839. p. 8, wit.

a 1^1, het woord: *Introduction.* a 1^2, wit. a 2^1 — m 3^2, pp. iii — xciv, *Introduction.*, onderteekend: *Mark Napier*, *November* 1, 1839.

m 4^1, de regel: *De Arte Logistica.* m 4^2, wit. A 1^1, de titel: *The / Baron Of Merchiston / His Booke Of Arithmeticke / And Algebra. / For Mr Henrie Briggs / Professor Of Geometrie / At Oxforde. /* A1^2, wit. A2^1 — D1^2, pp. 3—26: *Liber Primus. De Computationibus Quantitatum Omnibus Logisticæ Speciebus Communium.* D2^1 — L1^1, pp. 27—81: *Liber Secundus. De Logistica Arithmetica.* L1^2, wit. L2^1 — L4^2, pp. 83—88: *Liber Tertius. De Logistica Geometrica.* M1^1, de titel: *Algebra Joannis Naperi / Merchistonii Baronis. /* M1^2, wit. M2^1 — P2^1, pp. 91—115: *Liber Primus. De Nominata Algebræ Parte.* P2^2, wit. P3^1—X1^2, pp. 117—162: *Liber Secundus. De Positiva Sive Cossica Algebræ Parte.* X2, wit. 268 pp.

Twee kopergravuren: Napier op zes-en-zestigjarigen leeftijd en Merchiston Castle.

In ons land bezit de bibliotheek der Rijksuniversiteit te Leiden een exemplaar van dit werk, dat Napier's onvoltooid gebleven „booke of Arithmeticke and Algebra" bevat, zijn Ars Logistica en zijn Algebra, waarvan in noot [3]) op p. 108 melding wordt gemaakt, van een inleiding voorzien en uitgegeven door Mark Napier in 1839.

De Algebra, blijkens den inhoud van ouder dagteekening dan de Ars Logistica, bestaat uit twee boeken, die handelen:

1) over de herleiding van wortelvormen (De Nominata Algebræ Parte);

2) over de algemeene rekenkunde en de oplossing van vergelijkingen (De Positiva Sive Cossica Algebræ Parte); de vergelijkingen ontbreken evenwel op eenige inleidende beschouwingen na.

De Ars Logistica, d. i. de kunst, om wel te rekenen, zou waarschijnlijk de rekenkunde en de algebra tot en met de oplossing der vergelijkingen van den vierden graad omvatten en uit vier boeken bestaan:

1) over de bepalingen van de zeven bewerkingen der rekenkunde, de evenredigheid van grootheden, de positieve en negatieve getallen en de gewone breuken (De Computationibus Quantitatum Omnibus Logisticæ Speciebus Communium);

2) over de tiendeelige schrijfwijze der getallen en de zeven bewerkingen der rekenkunde met geheele getallen, geschreven in het tientallig stelsel, en met gewone breuken (De Logistica Arithmetica);

3) over de wortelvormen (De Logistica Geometrica);

4) over de algemeene rekenkunde en, vermoedelijk, over de oplossing van vergelijkingen.

Het vierde boek ontbreekt; van het derde boek zijn niet meer dan eenige bladzijden gereed gekomen.

Over den inhoud der Ars Logistica.

a) Overzicht der Rekenkunde.

Liber Primus. De Computationibus Quantitatum Omnibus Logisticæ Speciebus Communium. 24 pp.

Caput I. De Computationibus Primis.

Logistica est ars bene computandi.

Computatio est actio seu operatio quæ ex pluribus quantitatibus, et quantitatum proprietatibus datis, quæsita invenit.

Dantur autem aut vocali nominatione, aut graphicâ notatione.

Unde in omni Logisticâ primò procedunt nominatio et notatio; mox cum eis succedit computatio.

Computatio autem est simplex vel composita.

Simplex est computatio, quæ ex duabus datis tertiam unicâ aut unimodâ operatione invenit.

Simplex computatio vel est prima vel orta.

Prima est computatio, quæ quantitatem cum quantitate semel tantum computat. Hæc autem vel est additio vel substractio.

Additio est computatio prima quâ plures quantitates adduntur, et producitur tota.

Substractio est computatio prima quâ substrahendum à minuendo aufertur, et producitur residuum.

Substractio aut est æqualium, et nihil remanet, aut inæqualium.

Inæqualium verò est aut quantitatis minoris à majore, et remanet quantitas major nihilo, aut quantitatis majoris à minore, et residuum erit minus nihilo.

Ex his ergo constat defectivas quantitates hinc originem trahere, ex substractione nimirum majoris à minore: De quibus suo loco agetur.

Ex præmissis clarum est additionem et substractionem relata esse; atque ideo alteram alterius examen.

Examina enim definimus ea tantummodo quæ tum omnibus tum solis recte computatis conveniunt.

Est et præter hæc aliud examen substractionis in se, substrahendo nimirum residuum ex minuendo ut relinquatur prius substrahendum.

Habes itaque ex totius, partis, et residuæ, duabus quibuscunque datis, tertiam, per additionem et substractionem.

Caput II. De Computationibus Ortis Ex Ipsis Primis.

Ortæ sunt quæ quantitatem cum quantitate pluries computant. Atque hæ ex prioribus aliquoties continuatis naturalem originem ducunt.

Ortæ item vel ex primis, vel ex primò ortis continuatione oriuntur.

Ortæ ex primis sunt, quæ ex totius, partis, et partem cognominantis, duabus quibuscunque datis, tertiam inveniunt. Exemplis mox patebunt hæc.

Ortæ autem ex primis sunt multiplicatio ex continuatâ additione, et partitio ex continuatâ substractione.

Est ergo Multiplicatio, alterutrius datarum toties continuata additio quoties est in alterâ unitas; et quod producitur multiplum dicitur.

In his se habet unitas ad multiplicantis et multiplicandi alterutrum, ut alterum ad multiplum.

Partitio est partientis à partiendo substractio in nihilum usque continuata; et numerus substractionum est quotus quæsitus.

In his se habet unitas ad quoti et partientis alterutrum, ut alterum ad partiendum.

Partitio aut est æqualium, et producitur unitas, aut inæqualium.

Inæqualium verò aut est minoris per majorem, et quotus est fractio, seu fracta quantitas unitate minor; aut majoris per minorem, et fit quotus unitate major.

Partitio rursus majoris per minorem, aut est perfecta aut imperfecta.

Perfecta, ubi nullæ sunt reliquiæ. In his quotus est integrorum.

Imperfecta, verò, quæ reliquias impartitas relinquit.

Ex his ergo constat tam ex partitione minoris per majorem, quàm ex imperfectâ partitione majoris per minorem, fractiones originem trahere: De quibus suo loco.

Ex præmissis constat multiplicationem et perfectam partitionem relata esse; atque alteram alterius examen.

Est et præter hæc aliud partitionis examen in se, nimirum partiendo partiendum per quotum, ut pristinus inde redeat partitor.

Habes itaque ex totius, partis, et partem cognominantis, duabus quibuscunque datis, tertiam per multiplicationem et partitionem.

Caput III. De Computationibus Ortis Ex Primo Ortis: Radicalis Multiplicatio Et Partitio.

Ortæ ex primò ortis sunt computationes, quæ ex radicati, indicis, et radicis, duabus quibuscunque datis, tertiam inveniunt.

Radicatum est quod aliquoties partitum per quantitatem aliquam in unitatem redit; et quotus ille partitionum index dicitur; quantitas autem partiens est ipsa radix.

Ortæ autem ex primò ortis aut sunt radicalis multiplicatio ex continuatâ multiplicatione; aut radicalis partitio, et radicis extractio, ex continuatâ partitione.

Radicalis Multiplicatio est radicis oblatæ toties continuata multiplicatio quoties est in indice unitas; et producitur radicatum quæsitum.

Radicalis Partitio est radicati per radicem partitio in unitatem usque continuata, et numerus partitionum est index quæsitus.

Caput IV. De Radicali Extractione.

Radicis Extractio, dato indice, est inventio quantitatis quæ datum radicatum radicali multiplicatione restituit; idemque radicali partitione dividit.

Radicis extractio aut est perfecta aut imperfecta.

Perfecta, ubi nullæ supersunt reliquiæ.

Inperfecta verò, ubi aliquæ supersunt reliquiæ irresolubiles.

Quod ex imperfectâ extractione provenit est minor terminus, cui si unitatem adjeceris erit major terminus, inter quos vera et perfecta continetur et latet radix.

Verùm Geometræ, majoris accurationis studiosi, ipsum radicatum signo indicis prænotare malunt, quam radicem inter terminos includere.

Hîc numeri Geometrici seu concreti, quos irrationales et surdos vocant, ortum habent.

Ex præmissis colligitur radicalis multiplicationis, partitionis, et extractionis singulas, duo habere examina; nimirum multiplicatio probatur vel partitione vel extractione; partitio probatur vel multiplicatione vel extractione; extractio, vel multiplicatione vel partitione.

Habes itaque ex radicati, indicis, et radicis, duabus quibuscunque datis, tertiam per radicales multiplicationem, partitionem, et extractionem.

Caput V. De Computationibus Compositis.

Composita est computatio quæ ex pluribus quantitatibus datis, atque pluribus et diversimodis operationibus, quæsitam producit.

Compositæ computationes, seu regulæ, vel sunt proportionalium, vel disproportionalium.

Regulæ proportionalium sunt, quæ per solas computationes simplices proportionatas, scilicet multiplicationes et partitiones, quantitatem quæsitam ex pluribus datis inveniunt.

In his spectantur situs et operatio.

Situs quatuor præcepta sunt.

Primum, ut ductâ lineâ, quantitati quæsitæ cum suis collateralibus præparetur sub lineâ locus.

Secundum, ut duæ quantitates, quarum alterâ crescente altera decrescit, ex eodem latere lineæ collaterales statuantur.

Tertium, ut duæ quantitates, simul crescentes vel simul decrescentes, ex adversis lineæ lateribus statuantur.

Quartum, ut binæ quantitates cognomines lineâ illâ semper sejungantur.

His observatis, ad omnium ejusmodi quæstionum solutionem unicum inserviet generale hoc operationis præceptum:

Multiplica quantitates superiores invicem, item et inferiores invicem, deinde multiplum superiorum partire per multiplum inferiorum, et quotus erit quæsitum quæstioni satisfaciens.

> Bv.: Si sex boves nutriantur tribus mensuris fœni quatuor diebus, quæraturque quot boves nutriri possunt quinque mensuris fœni duobus diebus?

$$\frac{6 \text{ bo.} \quad 5 \text{ mens.} \quad 4 \text{ dieb.}}{\text{quot bo.} \quad 3 \text{ mens.} \quad 2 \text{ dieb.}}$$

> Multiplica superiores 6, 5, et 4 invicem, et fient 120; inde multiplica 3 per 2, fient 6; per quæ partire 120, producentur 20, numerus boum satisfaciens quæstioni.

Itaque omnes species regularum proportionalium unicâ generali methodo, et operatione, comprehendimus.

> De hâc doctrinâ infinitas, — ut regulæ trium seu aureæ, simplicis, duplicis, quinque quantitatum, sex quantitatum, directæ, inversæ, &c., — species

et formas tradunt authores; nec tamen triplices, aut alias ejus multiplices formas attigerunt, quas omnes hîc breviter habes.

Atque hæ sunt proportionalium; sequerentur disproportionalium regulæ: Sed quia hæ, præter computationes proportionatas, additiones etiam et substractiones, et alias computationes proportionem disturbantes immistas habent, has ideo omnes missas facimus, quod unica pro eis omnibus inserviet nobis Algebra.

Ut sunt potissima pars omnium arithmeticarum regularum, alligationis, societatis, falsi, simpli, dupli, et aliarum plurimarum, itemque Geometricarum propositionum, problematum, theorematum, &c. quæ, confusa tum varietate tum multitudine, memoriam disturbant; — has ergo relinquimus, Algebram tractaturi.

Caput VI. De Quantitatibus Abundantibus Et Defectivis.

Abundantes sunt quantitates majores nihilo, et augmentum præ se ferunt.

Hæ, aut nullo, aut hoc signo +, quod copula augmenti dicitur, prænotantur.

Defectivæ sunt quantitates minores nihilo, et minutionem præ se ferunt.

Hæ, semper hoc signo —, quod minutionis copula dicitur, prænotantur.

Defectivarum ortum et originem superius ex substractione majoris à minore provenire ostendimus.

Adduntur abundantes et defectivæ, si copulæ sunt similes, aggregato eorum præponendo communem copulam.

Adduntur verò, si copulæ sunt dissimiles, eorum differentiæ præponendo copulam majoris quantitatis.

Substrahuntur autem, si substrahendi copulam mutaveris, eamque ad alteram datarum addideris per præcedentes regulas.

Abundantes et defectivæ multiplicantur et partiuntur, si copulæ sint similes, præponendo multiplo vel quoto copulam pluris; et si copulæ sint dissimiles, prænotando copulam minutionis.

Radices, tam abundantes quàm defectivæ, pari indice multiplicatæ, producunt radicatum abundans.

Hinc sequitur, radicati abundantis indice pari duas esse radices, alteram abundantem, alteram defectivam; deficientis verò radicati, nullam.

Radices abundantes indice impari reddunt (multiplicatione radicali) radicata abundantia, et defectivæ, defectiva.

Simili modo hinc sequitur, quod radicatum impari indice radicem habeat unicam tantum; abundans, abundantem; et defectivum, defectivam.

Caput VII. De Quantitatibus Fractis.

Caput VIII. De Computationibus Quantitatum Fractarum.

Napier verdeelt de bewerkingen der rekenkunde in eenvoudige (computationes simplices) en samengestelde (computationes compositæ).

De eenvoudige bewerkingen zijn: de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging, de deeling, de wortelvermenigvuldiging (= machtsverheffing), de worteldeeling (= logarithmeneming) en de worteltrekking.

De optelling (additio) is de bewerking, waardoor eenige hoeveelheden (partes) bijeengevoegd en het geheel (tota) verkregen wordt.

De aftrekking (substractio) is de bewerking, waardoor de aftrekker (substrahendum) van het aftrektal (minuendum) afgenomen en de rest (residuum) verkregen wordt.

De vermenigvuldiging (multiplicatio) is de optelling, na elkander, van de eene van twee gegeven hoeveelheden (multiplicandum), zoo dikwijls als er eenheden zijn in de andere (multiplicans); de uitkomst wordt veelvoud (multiplum) genoemd.

De deeling (partitio) is de aftrekking van den deeler (partiens) van het deeltal (partiendum), voortgezet tot er niets overblijft; het aantal der aftrekkingen is het gezochte quotient (quotus).

De wortelvermenigvuldiging (radicalis multiplicatio) is de vermenigvuldiging, na elkander, van den gegeven wortel (radix, = grondtal), zoo dikwijls als er eenheden zijn in den aanwijzer (index, = exponent [1]); de uitkomst is het gezochte worteltal (radicatum, = macht).

De worteldeeling (radicalis partitio) is de deeling van het worteltal (radicatum) door den wortel (radix), voortgezet tot er de eenheid

[1]) Den naam exponent vindt men voor de eerste maal in Stifel's Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, gebruikt:

„De inuentione denominationum cossicarum.

Notum est ex ijs quæ libro primo dixi, circa progressionū Geometricarum expositiones, ut progressio numerorum naturaliter progredientium, exponat terminos progressionum Geometricarum. Quemadmodum igitur series numerorum naturalis, exponit singulas progressiōes geometricas, ita etiam cossicam progressionem exponit. Eam uero expositionē sufficit subindicare sequenti dispositione.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1 ℞.	1 ʒ.	1 ℭ.	1 ʒʒ.	1 ß.	1 ʒ ℭ.	1 b ß.

Et sic deinceps in infinitum.

Quemadmodum autem hic uides, quemlibet terminū progressionis cossicæ, suum habere exponentem in suo ordine (ut 1 ℞ habet 1. 1 ʒ habet 2 &c.) sic quilibet numerus cossicus, seruat exponentem suæ denominationis implicite, qui ei seruiat & utilis sit, potissimū in multiplicatione & diuisione, ut paulo inferius dicam."

fol. 235 verso.

„Regula multiplicationis & diuisionis signorum Cossicorum.

Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in diuisione subtrahe, tunc fit exponens signi fiendi."

fol. 236. verso.

„Qualiacunq; facit progressio Geometrica multiplicādo & diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & subtrahendo.

Exemplum.

— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8. Sic — 3 additum ad 6, facit 3. Est autem — 3 exponens ipsius $\frac{1}{8}$, sicut 6 est exponens numeri 64, & 3 est exponens numeri 8.

Item sicut $\frac{1}{8}$ diuidens 64, facit 512: sic — 3 subtractum de 6 facit 9. Est autem 9 exponens numeri huius 512.

Item sicut 64 diuidens $\frac{1}{8}$ facit $\frac{1}{512}$. sic 6 subtracta de — 3 relinquit — 9. Est autem — 9 exponens fractionis huius $\frac{1}{512}$."

fol. 249 verso.

Stevin bedient zich in zijn Arithmétique, Leyde 1585, van den naam „(dé-) nominateur ou dignité de quantité":

komt; het aantal der deelingen is de gezochte aanwijzer (index).

De worteltrekking (radicis extractio) is de bepaling van de hoeveelheid (radix), die, bij gegeven aanwijzer (index), door wortelvermenigvuldiging het gegeven worteltal (radicatum) oplevert, waarop ze bij worteldeeling deelbaar is.

De zeven eenvoudige bewerkingen vormen drie groepen: De optelling en de aftrekking zijn de oorspronkelijke bewerkingen (computationes primæ); door herhaling zijn uit de optelling de vermenigvuldiging en uit de aftrekking de deeling ontstaan (computationes ortæ ex primis); evenzoo door herhaling uit de vermenigvuldiging de wortelvermenigvuldiging en uit de deeling de worteldeeling en de worteltrekking (computationes ortæ ex primis ortis).

De bewerkingen, die tot een zelfde groep behooren, zijn elkanders omkeeringen, zoodat de eene als proef (examen) op de andere kan dienen; van de drie hoeveelheden, die er bij te pas komen, zijn telkens twee gegeven en moet de derde bepaald worden, bij de derde groep bv. het worteltal door wortelvermenigvuldiging uit wortel en aanwijzer, de aanwijzer door worteldeeling uit worteltal en wortel, en de wortel door worteltrekking uit worteltal en aanwijzer.

Houdt een omgekeerde bewerking op uitvoerbaar te zijn, dan ontstaan nieuwe soorten van getallen: bij de aftrekking de negatieve (quantitates defectivæ), die kleiner dan nul (minores nihilo) zijn, in tegenstelling met de positieve (quantitates abundantes), die grooter dan nul (majores nihilo) zijn; bij de deeling de gebroken (quantitates fractæ) en bij de worteltrekking de onmeetbare (quantitates concretæ) en de imaginaire (quantitates nugaces).

Napier overtreft in zijn overzicht van de zeven bewerkingen der rekenkunde niet alleen zeer verre zijn voorgangers en tijdgenooten, maar zelfs de meeste schrijvers van den tegenwoordigen tijd. In

„Le nombre Arithmetique devant la marque de quantité, s'appelle nombre de multitude des quantitez; & dedans la marque, denominateur, ou dignité de quantité: mais derriere la marque, valeur de quantité.

Par exemple, 3 (2) 12 [$= 3 \times 12^2$], c'est à dire trois secondes quantitez vallans douze, de sorte que le 3 est nombre de multitude des quantitez, & 2 denominateur de quantité, mais 12 valeur des quantitez."

p. 10.

„Quantité algebraique multipliée par quantité algebraique, donner produict quantité, de laquelle le nominateur est egal, à la somme des nominateurs de la quantité à multiplier, & du multiplicateur." p. 53.

Girard, Oeuvres Mathématiques de Stevin, Leyde 1634, Vol. I.

In het voorbijgaan zij opgemerkt, wat minder bekend schijnt te wezen, dat Stevin de eerste geweest is, die zich van den naam macht in zijn tegenwoordige algemeene beteekenis bedient:

„Toute quantité s'appelle la potence de sa racine."

Girard, t. a. p., p. 11.

de keuze van de namen radix, index en radicatum, radicalis multiplicatio, radicalis partitio en radicis extractio is hij bijzonder gelukkig geweest. De identiteit van indices en logarithmen, van radicalis partitio en logarithmeneming schijnt evenwel niet door hem opgemerkt te zijn.

De samengestelde bewerkingen worden onderscheiden in regels voor evenredige grootheden (regulæ proportionalium), waarbij alleen vermenigvuldigingen en deelingen te pas komen, en regels voor niet-evenredige grootheden (regulæ disproportionalium).

Bij de oplossing van vraagstukken over evenredige grootheden schrijft Napier de bekenden en de onbekende aan weerskanten van een zelfde horizontale streep: 1) twee grootheden, die recht evenredig zijn, aan verschillende zijden; 2) twee grootheden, die omgekeerd evenredig zijn, aan dezelfde zijde; 3) twee gelijknamige grootheden onder elkander aan verschillende zijden. De uitkomst wordt gevonden, door het product van de getallen, die met de onbekende aan denzelfden kant van de streep staan (aan den benedenkant bij Napier), te deelen op dat van de getallen, die aan den anderen kant staan.

Napier verwijst de regulæ disproportionalium naar de Algebra in een opmerking, die aan Stifel's Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, herinnert, waar (fol. 227) de regulæ æqualitatis, separationis, transversionis, commixtionis, positionis, legis, augmenti, pluris, residui, collectionis en m. d. met even belachelijke namen (ridicula nomina) als menschenplagerij (vexationes populi) gequalificeerd en door dien beroemden regel der Algebra (famosa illa regula Algebræ) vervangen worden, die in de oplossing van vraagstukken door middel van vergelijkingen bestaat.

Een opgaaf van de verschillende technische uitdrukkingen, waarvan Napier zich in zijn werken bij de optelling, aftrekking, enz. bedient, moge dit overzicht der Computationes Omnibus Logisticæ Speciebus Communium besluiten.

1) Optellen: addere, augere. — Optelling: additio. — Som: aggregatum, summa, tota. — Termen: partes.

2) Aftrekken: auferre, minuere, subducere, sub(s)trahere. — Overblijven: relinquere, remanere, restare. — Aftrekking: substractio. — Verschil: differentia. — Aftrektal: minuendum. — Aftrekker: auferendum.

3) Vermenigvuldigen: ducere, multiplicare; i. h. b. duplare, triplare, quadruplare, quintuplare, etc. — Vermenigvuldiging: multiplicatio; i. h. b. duplatio, etc. — Product: multiplum; i. h. b. duplum, etc. (Productum heet de uitkomst van elke bewerking).

Vermenigvuldigtal: multiplicandum; i. h. b. duplandum, etc. — Vermenigvuldiger: multiplicans.

4) Deelen: dividere, partire, secare; i. h. b. bipartire, tripartire, quadripartire, quintupartire, etc.; bisecare, etc. — Deeling: divisio, partitio; i. h. b. bipartitio, etc. — Quotient: quoties, quotiens, quotus; i. h. b. pars dimidia, tertia, quarta, quinta, etc. — Deeltal: dividendum, partiendum, secandum; i. h. b. bipartiendum, etc. — Deeler: divisor, partiens, partitor, sector.

5) Machtsverheffen: radicaliter multiplicare; i. h. b. radicaliter multiplicare bis, ter, quater, quinquies, . . . ad aliquem indicem; duplicare, triplicare, quadruplicare, quintuplicare, etc.; in se (quadratè), cubicè, quadrati quadratè, supersolidè, . . . ad aliquem ordinem ducere, multiplicare. — Machtsverheffing: radicalis multiplicatio; i. h. b. duplicatio, etc. — Macht: radicatum; i. h. b. duplicatum, etc.; quadratum, cubus, quadrati quadratum, supersolidus, etc.

6) Logarithmenemen: radicatum per radicem partire. — Logarithmeneming: radicalis partitio. — Exponent: index, numerus indicis, qualitas radicis. (Logarithme in den zin van Napier: numerus artificialis, logarithmus).

7) Worteltrekken: radicem extrahere; i. h. b. radicem bipartientem, tripartientem, quadripartientem, quintupartientem, etc. extrahere; radicem quadratam, cubicam, quadrati quadratam, supersolidam, etc. extrahere. — Worteltrekking: radic(al)is extractio; i. h. b. extractio radicis bipartientis, etc.; extractio radicis quadratæ, etc. — Wortel: radix; i. h. b. radix bipartiens, etc.; radix quadrata, cubica, quadrati quadrata, supersolida, etc.

Behalve de wortelteekens in zijn Ars Logistica en de macht- en wortelteekens in zijn Algebra treft men bij Napier geen andere teekens van bewerking aan dan plus- en minteekens.

b) Cijferkunde.

Liber Secundus. De Logistica Arithmetica. 55 pp.

Caput I. De Integrorum Nominatione Et Notatione.

Tertiò, itaque, computationes vel sunt verinomiarum, vel fictinomiarum seu hypotheticarum quantitatum. Unde Logistica vel est verinomiarum, de quibus Lib. II. et III.; vel fictinomiarum seu algebraicarum, de quibus Lib. IV. agetur.

Verinomiæ sunt quantitates veris nominibus definitæ, quibus, quotæ sint multitudine, vel quantæ sint magnitudine, explicatur.

Verinomiæ aut sunt discretæ numero discreto, aut concretæ numero concreto nominatæ.

Unde, Logistica verinomiarum vel est discretarum quantitatum, quæ Arithmetica dicitur, de quâ hoc Lib. II.; vel concretarum, quæ Geometrica, de quâ Lib. III. agetur.

Arithmetica, ergo, est Logistica quantitatum discretarum per numeros discretos.

Numerus discretus est, quem suum unicum individuum numeratum metitur.

Numerus discretus aut est integer, aut fractus; unde Arithmetica est integrorum et fractorum.

Integri sunt, quos individua unitas numerata metitur.

Caput II. De Additione Et Substractione Integrorum.

Caput III. De Multiplicatione Integrorum.

Caput IV. De Partitione Integrorum.

Caput V. De Multiplicationis Et Partitionis Compendiis Miscellaneis.

Caput VI. De Radicali Multiplicatione Et Partitione Integrorum.

Caput VII. De Inveniendis Regulis Extractionum Radicalium.

Regula quæque extractionis consistit in resolutione radicati in sua supplementa.

Supplementum est, differentia duorum radicatorum ejusdem speciei.

Regulas, autem, inveniendi omnium radicatorum et radicum supplementa, docet Tabella nostra triangularis [Fig. 20], areolis hexagonis referta, dextrorsum inscriptis unitate solâ, sinistrorsum verò numeris ab unitate unitatis incremento crescentibus, et à vertice descendentibus; et quæ introrsum habet singularum areolarum numerum, quemque æqualem duobus numeris proxime superpositis.

> Sit triangulum *ABC*, angulos, *A* sinistrum, *B* verticalem, et *C* dextrum, habens. Quot autem radicum species desideras tabellam comprehendere, per bis tot partes, plus unâ, dividatur quodque latus; v. g., ad duodecim extractionum species continendum, dividatur quodque latus in 25 æquales partes; et, incipiendo à basi *AC*, per singula alterna puncta laterum ducantur, intra triangulum, lineæ duodecim basi parallelæ; simili modo incipies à latere *AB*, et ei duodecim parallelas, à singulis alternis punctis basis, per singula alterna puncta lateris *BC*, tam intra triangulum quàm ultra lineam *BC*, digiti spatio extendes; eodem prorsus modo, lateri *BC*, duodecim parallelas à singulis alternis punctis basis, et per singula alterna puncta lateris *BA*, ultra triangulum digiti spatio extendes. Hinc habes triangulum areolis hexagonis refertum, quarum 12 dextimæ, et lineæ *BC* proximæ, 12 unitatibus sigillatum inscribuntur; sinistimæ verò numeris 1, 2, 3, 4, 5, etc., usque ad 13, ordine, à vertice *B* ad angulum sinistrum *A* descendentibus, inscribuntur; deinde hexagonum quodque interius vacuum inscribatur aggregato duorum numerorum ei proxime superpositorum; ut sub 2 et 1 scribantur 3; sub 3 et 3, 6; sub 3 et 1, 4; et ita in calcem usque tabulæ. Tandem, ascribantur tituli sinistrorsum, 'præcedentis', supra secundum hexagonum 2; supra tertium 3 scribe, 'duplicatum præcedentis'; supra quartum scribe, 'triplicatum præcedentis'; et sic de cæteris radicatis præcedentis usque ad duodecuplicatum: dextrorsum verò scribe supra primum hexagonum 'succedens'; supra secundum, 'duplicatum succedentis'; supra tertium, 'triplicatum succedentis'; et sic de reliquis radicatis succedentis, usque ad tredecuplicatum, prout in tabellæ ipsius diagrammate subscripto habes.

Cuique supplemento respondent duæ partes radicis: alterâ constante unâ vel pluribus figuris sinistimis jam inventis, quæ præcedens dicitur; alterâ constante unicâ dextrâ figurâ jam proxime inveniendâ, quæ succedens nuncupatur . . . .

> Quæritur, è tabulâ, regula inveniendi supplementum quintuplicationis, vel extractionis radicis quinquepartientis: In quintâ lineâ reperies quinque numeros hos, 5, 10, 10, 5, 1, qui, cum suis titulis, indicant supplementum quintuplicationis, aut quintupartientis radicis, quinque constare partibus; quarum prima est quadruplicati præcedentis quintuplum ductum per succedens; secunda est, triplicati præcedentis decuplum ductum per duplicatum succedentis; tertia est, duplicati præcedentis decuplum ductum per triplicatum succedentis; quarta est, præcedentis quintuplum ductum in quadruplicatum succedentis; quinta est, ipsum quintuplicatum succedentis.

Caput VIII. De Radicum Extractione.

Exemplum extractionis tripartientis radicis.

Sit extrahenda radix tripartiens è 12977875: punctis et situ collocentur ut à margine; inde, maximum triplicatum tabulare[1]) non excedens 12, scilicet 8, ex 12 aufer, et supersunt 4, superscribenda, deletis 12; octonarii autem radix tripartiens, scilicet 2, primæ periodi loco statuatur, et 20 sunt jam præcedens; cujus succedens, cum suo supplemento, sic quæratur: supplementum tripartientis radicis (ex primâ tabulâ[2])) constat tribus partibus, quarum prima fit ex triplo duplicati præcedentis multiplicato per succedentem; unde sequitur, si 4977, suprascripta, dividerentur per triplum duplicati præcedentis, scilicet per triplum 400, quod est 1200, de succedente dabit quotus conjecturam; succedens enim plerumque est aut huic quoto æqualis, aut unitate eo minor; si itaque 4977 per 1200 partirentur, 4 foret quotus et succedens; at quaternarii supplementum est 5824, quæ excedunt 4977; rejecto ergo 4, eligamus 3, quorum supplementum est 4167 (nam 1200 ducta per 3, et ter 3 ducta per ter 20, et triplicatum 3, aggregata faciunt 4167); his ex 4977 ablatis, supersunt hic 810, et in periodum tertiam 810875, et 230 jam sunt figuræ præcedentis.

4 12977875 . . . 2 8

20 20 400 3 1200 3 3600. Prima pars prioris supplementi.	20 3 60 9 540. Secunda pars prioris supplementi.	3 3 9	3 3 9 3 27. Tertia pars prioris supplementi.	3600 540 27 4167. Totum prius supplementum.	4810 12977875 . . . 2 3 8 4167

Quærenda restat succedens in dextimum punctum locanda: ea, simili modo quo præmissa, invenietur; estque 5, cujus supplementum est 810875 (nam triplum duplicati 230 ductum per 5, scilicet 793500, et triplum 230 ductum in 25, videlicet 17250, et triplicatum 5, quod est 125, fiunt 810875); his ergo ex superpositis eis æqualibus ablatis, nihil superest; et radix tripartiens quæsita, 235, perfecta et integra, oblati triplicati 12977875, producitur.

230 230 69 46 52900 3 158700 5 793500. Prima pars posterioris supplementi.	230 3 690 25 345 138 17250. Secunda pars posterioris supplementi.	5 5 25	5 5 25 5 125. Tertia pars posterioris supplementi.	793500 17250 125 810875. Totum posterius supplementum.	4810 12977875 . . . 2 3 5 8 4167 810875

Atque ita in omnibus extractionibus radicum, ubi indices sunt primi et incompositi, ut quintupartientis, et sextupartientis [lees: septupartientis], &c., operaberis.

[1]) Tabula Radicatorum et Radicum, waarin de 2de-, 3de-, ... 11de- en 12de- machten van 2, 3, ... 8 en 9 vereenigd zijn.

[2]) Tabula Supplementorum (Fig. 20).

Caput IX. De Ratione Emendandi Extractiones Imperfectas.

Prior est, post radicem imperfectam ducendo lineam, supra quam scribantur reliquiæ, infra verò supplementum unitatis, integer pro minore termino, et unitate minutus pro majore; inter hos enim terminos latet vera quantitas radicis, quæ numero nulli definiri possit.

Posterior modus est, ut totum radicatum propositæ speciei oblatum per cujusvis electi numeri radicatum ejusdem speciei multiplicetur; producti autem radix ejusdem speciei (spretis reliquiis) per numerum illum electum partiatur. Nam quotus, cum suis fragmentis lineâ distinctis, erit minor terminus; et si ad eorundem fragmentorum numeratorem addideris unitatem, erit major terminus, inter quos continetur vera radix.

Caput X. De Regulis Proportionis Integrorum.

Particularia tamen numerorum exempla specialia habent compendia, quibus expediantur: Si enim in majusculis numeris, partitor aliquot habeat versus dextram circulos, poteris, compendii gratiâ, tot fere multipli loca dextrorsum à figuris vacua, aut circulis referta relinquere, multiplicationem à sinistris ordiendo.

Ut (exemplo è sinibus) si 10000000 dederint 9925461, quantum dabunt 7986354? At quia hæc omnes fere figuras complectitur, ideo, per cap. 5 Lib. II. compendiose multiplicentur 9925461 per singulas novem figuras, ut in tabulâ à margine factum est; deinde sub singulâ figurâ multiplicantis 7986354 incipiat, et inde procedat numerus tabulæ figuræ illi respondens, neglectis tamen et omissis sex dextimorum locorum figuris omnibus, propterea quòd septem circuli partitoris 10000000 eas abscinderent, si exprimerentur et non omissæ fuissent: Hæc igitur particularia multipla, præter sua sex loca dextima vacua, in unum addita fiunt 79268241 . . . . . . à quibus, tam locis quàm figuris dextimis, si abscindantur septem circulorum partitoris otiosa loca (ut partitionis compendium exigit), restabunt 7926824, responsum quæsitum. Ubi ergo 10000000 dant 9925461, sequetur, quòd 7986354 dabunt 7926824.

09925461	1
19850922	2
29776383	3
39701844	4
49627305	5
59552766	6
69478227	7
79403688	8
89329149	9
99254610	Decupl.

```
7986354
────────
69478227
 8932914 .
  794036 . .
   59552 . . .
    2977 . . . .
     496 . . . . .
      39 . . . . . .
────────
79268241 . . . . . .
       10000000
```

Quæ autem, in hujus compendii multiplis, omittuntur figuræ versus dextram, etiamsi omnes novenariæ essent, non vel unicâ unitate augerent responsum. Meritò igitur eæ omnes negligi possunt in his majusculis numeris in quibus ne unitatis quidem, totius et integri, error est sensibilis.

Esto enim quòd vacua illa puncta, à margine posita, novenariæ essent (quod supra possibilitatem est), nihilominus ad 5888889 tantum accrescerent, quæ ad 79268241 . . . . . . addita facerent 79268246888889, quibus per 10000000 partitis proveniunt ad summum 7926824 $\frac{6888889}{10000000}$, quæ non extenduntur ad 7926825, nec superius productum unitate exuperant. In maximis itaque numeris, maximâ laude dignum est hoc compendium regulæ trium.

```
      .
     . .
    . . .
   . . . .
  . . . . .
 . . . . . .
───────
5888889
```

Caput XI. De Fractionibus, Seu Numeris Fractis.

Fractio, seu numerus fractus, est quem minima et individua pars, unica scilicet unitatis numerata, metitur.

Caput XII. De Multiplicationibus Et Partitionibus Simplicibus Et Radicalibus Fractorum Numerorum.

Caput XIII. De Extractione Radicum E Numerorum Fractionibus.

Caput XIV. De Regulis Proportionis Fractionum.

Caput XV. De Fractionibus Physicis.

Physicas vocant partem aut partes integri partiti per statutum et vulgò receptum partitorem, denominatoris loco, à suis authoribus impositum.

Ut monetariis nostratibus placuit monetæ libram non in quotvis sed in 20 partes dividere, eisque denominationem solidi imponere; et solidum in 12 partes subdividere, quas denarios denominant. Sic medici, ponderis libram in partes 12, quas uncias nominant, et unciam in 8 drachmas, et drachmam in 3 scrupulos, etc., partiuntur. Chronologi, annum in 12 menses, mensem in 30 (aut id circa) dies, diem in 24 horas, &c., distribuunt. Astronomi, gradum in 60 scrupula prima, seu minutias primas, primam in 60 secundas, secundam in 60 tertias, et ita deinceps, partiuntur.

In fractionibus physicis, hoc cum vulgaribus commune est, quòd quoties ultra suum denominatorem accreverint, superiorem locum unitate augent; et quoties major fractio à minore subducenda sit, præstanda est ei superioris loci unitas ad defectum supplendum.

[Volgen voorbeelden van optellingen en aftrekkingen van physische breuken.]

Est enim omnium, tam fractorum quàm integrorum, par ratio et respectus ad suas denominationes, tam ascendendo quàm descendendo.

Ut integrorum unitatum ad suas denas, centenas, et millenas superiores; et ad suas decimas, centesimas, et millesimas inferiores. Sic, scupulorum primorum ad suos sexagenos (qui gradus sunt), et sexagenos gradus (qui duo signa sunt), ascendendo; et ad suas sexagesimas partes (quæ scrupula secunda sunt), et scrupulorum secundorum sexagesimas descendendo (quæ scrupula tertia sunt). Item, solidi ad sua vigecupla ascendendo (quæ libræ dicuntur), et ad suas duodecimas descendendo (quæ denarii dicuntur). Par est respectus, et computationis similitudo, in omnibus.

Hinc fit quod otiosum et superfluum foret, hisce particularem calculum texere, cum harum computatio facilius expediatur per vulgares integros et fractos numeros, quàm per suas particulares formas calculi, præsertim astronomici, ad quem etiam tabula prolixa sexagenaria requiritur, una cum molestiâ duplicium figurarum unicuique denominationi subjectarum, ubi arithmetica vulgaris requirit tantum unicam figuram unicuique loco.

Ut patet expertis: Nam facilius et citius astronomicum thema vulgato more arithmetico computatur, et resolvitur, quàm ipso astronomico calculo; præter etiam tabulæ præfatæ, et duplicium figurarum, sub quâque denominatione, tædium. Namque vulgaris arithmetica loco primo unitatum, et loco secundo denorum, et loco tertio centenorum, et reliquorum singulorum unicam tantum figuram in singulis locis constituit. Astronomicus autem calculus in singulis suis locis, tam ascendendo quàm descendendo, sic notatis, ′ ″ ‴ ⁗, etc. binas plerumque figuras subjectas complectitur, quæ omnia confusionem pariunt.

Unde, omnibus fractionibus præter jam expositas vulgares omissis, huic Arithmeticæ Logisticæ finem imponimus.

De bewerkingen kunnen met bepaalde grootheden (quantitates verinomiæ) en met onbepaalde (quantitates fictinomiæ, hypotheticæ, algebraicæ) worden uitgevoerd; de bepaalde onderscheidt Napier in discrete, aangeduid door meetbare, en concrete, aangeduid door onmeetbare getallen, in het bijzonder door wortelvormen. Over de discrete grootheden handelt de Logistica Arithmetica (Bk. II), over de concrete de Logistica Geometrica (Bk. III) en over de onbepaalde de Algebra (Bk. IV).

Wat de telling betreft, zij opgemerkt, dat Napier de cijfers figuræ (Eng. figures) en de nul circulus noemt; in zijn andere werken heet de nul soms nullum, maar meestal cyphra (Eng. cipher).

Groote getallen verdeelt hij door stippen in vakken van drie cijfers en spreekt bv. 4.734.986.205.048.205 aldus uit: „quatuor millies mille millena millia millium, septingenta triginta quatuor millies millena millia millium, nongenta octoginta sex millena millia millium, ducenta quinque millia millium, quadraginta octo millia, ducenta et quinque". p. 29.

Bij de optelling vindt Napier, dat er volgens Genesis V van de Schepping der Wereld tot den Zondvloed 1656 jaren verliepen. De gegevens worden evenals tegenwoordig opgeschreven met de uitkomst er onder. Bij de aftrekking daarentegen komt de rest boven het aftrektal te staan. Buitendien past Napier bij deze bewerking een regel toe, dien ik nergens elders heb aangetroffen. Hij bepaalt de cijfers van de rest, door die van den aftrekker af te trekken van die van het aftrektal, na deze, als ze kleiner zijn, met tien vermeerderd te hebben; vertegenwoordigen evenwel de cijfers aan den rechterkant van de twee, die worden afgetrokken, in den aftrekker een grooter bedrag dan in het aftrektal, dan vermindert hij het cijfer, dat er overblijft, zoo dit geen nul is, met één, maar verandert de nul in een negen. Zoo levert in Napier's voorbeeld:

$$\begin{array}{r} 2690997393 \\ \hline 2738154098 \\ 47156705 \end{array}$$

de 6 in den aftrekker, van de $4 + 10 = 14$ in het aftrektal afgetrokken, een 8 op; maar omdat 705, rechts van de 6, meer is dan 098, rechts van de 4, moet in de rest niet 8, maar $8 - 1 = 7$ worden genomen. Bij toepassing van dezen regel, zegt Napier, kan men de bewerking even goed aan den linker- als aan den rechterkant beginnen.

De tafel van vermenigvuldiging komt bij Napier, evenals bij Chuquet [1]), Widmann [2]) en Recorde [3]), voor in den vorm van een driehoek (Fig. 21), dien Beutel [4]) later in een dubbele trap

[1]) Chuquet, Le Triparty en la Science des Nombres, 1484, in: Boncompagni, Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Tomo XIII, Roma 1880, p. 555.

[2]) Widmann, Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft, Leipzig 1489.

[3]) Recorde, The Ground of Arts, teaching the perfect Work and Practice of Arithmeticke, etc., London 1549.

[4]) Beutel, Arithmetica, 1658.

zou veranderen, met dit bijschrift: „Gleichwie man einen Thurm durch Staffeln muss ersteigen, so muss das Einmaleins den Weg im Rechnen zeigen”.

Bij de vermenigvuldiging van twee getallen tusschen vijf en tien wordt de complementaire vermenigvuldiging toegepast, waarbij men het cijfer der ééntallen in het product bepaalt, door de complementen der factoren, d. z. de resten, die er overblijven, als men de factoren van tien aftrekt, te vermenigvuldigen, en dat der tientallen, door van den eenen factor het complement van den anderen af te trekken. Voor 7×8 komt de bewerking aldus te staan:

$$\begin{array}{ccc} 8 & & 2 \\ & \times & \\ 7 & & 3 \\ \hline 5 & & 6 \end{array}$$

2 en 3 zijn de complementen van 8 en 7; hun product 6 levert het cijfer der ééntallen en een der verschillen $8 - 3 = 7 - 2 = 5$ dat der tientallen in de uitkomst op.

Le Paige [1]) vermoedt, dat de schrijfwijze der complementaire vermenigvuldiging Oughtred [2]) aanleiding gegeven heeft tot de keuze van ons tegenwoordig maalteeken, een onderstelling, die m. i. aan waarschijnlijkheid wint, als men niet uitsluitend let op de vrij zeldzame complementaire vermenigvuldiging, maar op alle gevallen, waarin men „ins Creutz multiplicirte”, bij optellingen, aftrekkingen en deelingen van breuken, de veelvuldig toegepaste regula falsi met haar telkens terugkeerend imperatief: „multiplica per crucem sive alternatim, positionem primam per falsitatem secundam, & positionem secundam per falsitatem primam, etc.” [3]), niet te vergeten [4]).

---

[1]) Le Paige, Sur l'Origine de certains Signes d'Opération. (Mémoire lu à la Séance de la Première Section de la Société Scientifique de Bruxelles le 28 janvier 1892.)

[2]) Oughtred zelf laat zich over den oorsprong van zijn maalteeken nïet uit, maar bepaalt zich in zijn Clavis Mathematicæ, Editio tertia anctior & emendatior, Oxoniæ 1652, p. 10, waarvan de 1ste druk in 1631 verscheen, tot de mededeeling: „Multiplicatio speciosa connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ in vel $\times$: vel plerumque absque notâ, si magnitudines denotentur unicâ litera”.

[3]) Pitiscus, Trigonometria, Francofurti 1612, p. 178. In de uitgaven van 1600 en 1608 wordt de regula falsi niet behandeld en evenmin toegepast.

[4]) Voorbeelden van bewerkingen met breuken, ontleend aan:

a. Stifel, Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544:

„Vt.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. facit $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$.

Vnde $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{17}{12}$. id est $1\frac{5}{12}$.

De vermenigvuldiging van 865091372 met 92105 als vermenigvuldiger wordt in tweeërlei vorm uitgevoerd:

$$
\begin{array}{r}
865091372 \\
\underline{92105} \\
4325456860 \\
865091372 \\
1730182744 \\
\underline{7785822348} \\
79679240818060
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\underline{865091372(92105} \\
7785822348 \\
1730182744 \\
865091372 \\
\underline{4325456860} \\
79679240818060
\end{array}
$$

de tweede manier als voorbereiding voor de verkorte vermenigvuldiging.

Subtractæ autem $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$. relinquunt $\frac{1}{12}$."

fol. 5 verso.

„Vt $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Facit $\frac{6}{12}$. seu $\frac{1}{2}$, ut infra dicam."

fol. 6 recto.

„Vt uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$. Sic stabit exemplum ad regulam. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$. facit $\frac{3}{4}$ quotientem."

fol. 6 recto.

b. Girard, Invention nouvelle en l'Algebre, Amsterdam 1629:

„Soyent proposez $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$

Addition		Soubstraction
10 22 12 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ 15	Somme $\frac{22}{15}$ ou 1 $\frac{7}{15}$	Difference $\frac{2}{15}$ car 10 de 12 reste 2"

fol. A 4 recto.

„Notez qu'en la multiplication & division, on abrege bien deux nombres qui ne sont pas en mesme ligne (ces lignes sont les paralleles de la multiplication, ou la croix de bourgoigne en la division:) la division se fait donc par la croix aussi bien que l'addition & soubstractiõ; posant les nombres de solution sur le dividende, & non pas sur le diviseur.... Ces lignes dont il a esté dit, sont croiseés és trois conjugaisons, & sont paralleles en la multiplication; elles servent à monstrer quels nombres il faut multiplier ensemble."

fol. A 4 recto.

Zooals men ziet, bedient Stifel zich bij de deeling niet van het „kruis van Bourgondië", maar keert den deeler om en „fait des paralleles". [Bourgondië voert het St-Andrieskruis, dat den vorm van een X heeft, in zijn wapen.]

Voorbeeld van de oplossing van een vraagstuk door middel van de regula falsi, ontleend aan Stifel, Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, fol. 96 recto:

„Quæratur numerus, à cuius dimidio, subtractæ partes tertia & quarta, relinquant 300. Recipio primo 24, qui numerus ideo mihi hoc loco placet, quòd dimidium eius habet partes in pronunciatione nominatas, id est, tertiam & quartam partes, sine fractione

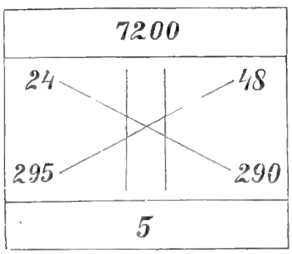
Bij de verklaring van den regel voor de deeling bedient Napier zich o. a. van hetzelfde voorbeeld, dat met een onbeduidende verandering in den vorm voorkomt in zijn Rabdologia, Edinburgi 1617:

Ars Logistica, p. 38:	Rabdologia, p. 20;
118	118
141	141
402	402
429	429
861094	861094(1993$\frac{118}{432}$
432(1993$\frac{118}{432}$	432
432	3888
3888	3888
3888	1296
1296	

aliqua. Laboriosior atqꝫ magis tædiosa est operatio per fracta, quàm per integra, ideo fracta deuito ubi deuitari possunt.

Secundo recipio duplum prioris numeri, id est 48, sic enim expeditius operor: unde figura exempli huius sic stabit.

Minus.



Minus.

Primo examino primum numerum receptum, id est, 24. cuius dimidiũ est 12, de quo pars tertia est 4, & pars quarta est 3. Eas partes aggregatas (id est, 7) subtraho de 12, remanent 5, quæ deberent esse (iuxta pronunciationem exempli) 300. Fallit ergo numerus receptus per 295, & est minus.

Secundo examino alterum receptum numerum, id est, 48. Huius dimidium est 24. Dimidij illius partes tertia & quarta, faciunt 14, quæ subtractæ de 24, relinquunt 10, quæ deberent esse 300. Itaqꝫ numerus ille receptus, fallit per 290, & est etiam minus. Quare subtraho 290 de 295, relinquuntur 5. i. diuisor. Deinde multiplico in cruce, uidelicet 290 in 24, & fiunt 6960: & 295 multiplico in 48, fiunt'qꝫ 14160. Subtraho igitur 6960 de 14160, & remanent 7200 diuidenda per 5. Itaqꝫ 1440 est numerus uerus quem quærebam. Nam eius dimidium facit 720, cuius partes tertia & quarta simul faciunt 420, quæ ambæ de 720 subtractæ, relinquunt 300. Et sic ueritas prouenit, & nulla falsitas, hoc loco."

Pitiscus bedient zich bij de toepassing van de regula falsi noch van een kruis noch van eenig ander teeken.

Voorbeeld van een kruis bij vermenigvuldigingen, die dienen om twee meetkundig middelevenredigen tusschen twee derdemachten te vinden, ontleend aan Chuquet, Le Triparty en la Science des Nombres, 1484, fol. 54 verso:

Napier voert de bewerking eenigszins anders uit, dan men in zijn tijd en zelfs tot in de achttiende eeuw gewoon was. Evenals in nevensstaand voorbeeld, dat aan Clavius' Opera Mathematica, Tomus II, Moguntiæ 1611, ontleend is, ging men algemeen aldus te werk: Men schreef den deeler 469 onder dat deel aan de linkerhand van het deeltal 1832487, waarop hij minstens één-, maar geen tienmaal begrepen is, onder 1832 dus, en bepaalde het cijfer aan de linkerhand in het quotient, hier 3. In plaats van 469 op de gewone wijze met 3 te vermenigvuldigen en dit product van 1832 af te trekken, begon men de vermenigvuldiging aan de linkerhand en zei: $3 \times 4 = 12$, $18 - 12 = 6$, schrijf de 6 boven de 8 en schrap de 4 in den deeler en de 1 en de 8 in het deeltal; $3 \times 6 = 18$, $63 - 18 = 45$, schrijf de 4 boven de 6 en de 5 boven de 3 en schrap de 6 in den deeler en de 6 en de 3 in het deeltal; $3 \times 9 = 27$, $452 - 27 = 425$, schrijf de 2 boven de 5 en de 5 boven de 2 en schrap de 9 in den deeler en de 5 en de 2 in het deeltal; — schrijf den deeler 469 opnieuw op, de 4 onder de 6, de 6 onder de 9 en de 9 rechts van de 9 en deel 4254 door 469, enz. Achtereenvolgens kreeg men dus:

```
    1
   631
  42150
  655364
1832487(3907.104/469.
  469999
   4666
    44
```

a)
```
 6
1832487(3
 469
```

b)
```
  4
 65
1832487(3
 469
```

c)
```
 42
 655
1832487(3
 469
```

d)
```
 6
 42
 655
1832487(39
 4699
  46
```

enz. Men schreef den deeler dus onder het deeltal en schoof dien, telkens als weer een cijfer in het quotient bepaald moest worden, één plaats naar rechts; bij de vermenigvuldiging van den deeler

„Aussi entre deux cubicz prochains ou non prochains Il y a deux moyens proporcionalz cestassauoir le maieur moyen et le mineur moyen. le maieur moyen vient de la multiplicacion de la racine du moindre cubic par le quarre du maieur. Le moindre moyen vient de la multiplicacion de la racine du maieur cubic par le quarre du moindre ainsi comme Il appert en marge de .8. et de .27. dont le mineur moyen proporcional est .12. et le maieur est .18."

```
8     27
2      3
4      9
12.   18.
```

met een cijfer van het quotient begon men aan de linkerhand en trok de afzonderlijke producten na elkander uit het hoofd van de overeenkomstige deelen van het deeltal af, waar men de cijfers van de resten boven schreef; de cijfers eindelijk, die niet meer gebruikt werden, schrapte men.

„Es wäre dem thatsächlichen Hergange nicht entsprechend, wollte man behaupten, jene Methode sei in ihrer wunderlichen Missgestalt erfunden worden; sie ist vielmehr die treue graphische Wiedergabe der indischen Rechnungsweise auf der Sandtafel. Auf dieser wurde mit einem Griffel in Sand geschrieben, alle Ziffern der Zwischenrechnungen beseitigte man durch Einebnung des Sandes, sobald man ihrer nicht mehr bedurfte, sodass das Schema sich in grosser Einfachheit darstellt. Man sieht in jedem Stadium der Ausrechnung nur die nothwendigen Zahlen: den Dividend in der Mitte, darunter den Divisor, darüber den Partialdividend resp. Rest, rechts den Quotient.... Mit der Verwendung von Tinte und Papier wurde die spurlose Tilgung der Ziffern unmöglich, ihre Häufung war die natürliche Folge; zur Erleichterung der Ubersicht nahm man seine Zuflucht zur Durchstreichung der verbrauchten Ziffern." [1])

Onder de vele wijzigingen, door verschillende schrijvers in de uitvoering der deeling aangebracht, behoort die van Napier, waarbij de aftrekkers onder en de resten boven het deeltal kwamen te staan, tot de meest bruikbare. Geen dier veranderingen vond voorloopig evenwel ingang, zelfs niet onze tegenwoordige handelwijze, die men naast de toenmaals meest gangbare reeds in Paciuolo's Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, Venetia 1494, vermeld vindt.

Napier behandelt afzonderlijk:

1) de vermenigvuldiging met en de deeling door 10, 100, 1000, enz.;

2) de vermenigvuldiging met en de deeling door een veelvoud van 10, 100, 1000, enz.;

3) de deeling door 2;

4) de vermenigvuldiging met en de deeling door $5 = 10 : 2$;

5) de vermenigvuldiging met $9 = 10 - 1$, $4 = 5 - 1$, $6 = 5 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ bv., $7 = 9 - 2$ bv. en $8 = 6 + 2$ bv.

Bij vermenigvuldigingen en deelingen met een groot aantal cijfers in vermenigvuldiger en quotient berekent Napier vooraf de

[1]) Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik, Leipzig 1888, p. 79.

producten van vermenigvuldigtal en deeler met 1, 2, 3,... 8 en 9, „sive per præmissa compendia [onder 4) en 5) vermeld], sive per additionem continuatam, sive, omnium facillime, per ossa Rhabdologiæ nostræ". p. 42.

Zoo komen op p. 43 de vermenigvuldiging van 92105 met 865091372 als vermenigvuldiger en de deeling van het product door 92105 aldus te staan:

092105	Simplum
184210	Duplum
276315	Triplum
368420	4^m
460525	5^m
552630	6^m
644735	7^m
736840	8^m
828945	9^m
921050	Decuplum, examinis gratiâ.

```
   865091372
 ─────────────────────
   736840|276315
    552630|644735
     460525|184210
       828945
         092105
 ─────────────────────
   79679240818060
```

```
          66315
         34263
        12636
       84158
      46894      0
     59952   18421
    79679240818060
    92105)865091372
    ───────────────
    736840  644735
     552630  184210
      460525
        828945
         092105
          276315
```

De worteltrekking wordt door Napier uitvoerig behandeld. Hij begint met de opmerking, dat de bewerking berust op de verdeeling van een macht in haar supplementen, d. w. z. in verschillen van gelijknamige machten. De bedoeling is, dat de worteltrekking wordt uitgevoerd volgens de formule:

$$(a+b+c+d+\ldots)^n =$$
$$\begin{array}{lll} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b & + \binom{n}{1} (a+b)^{n-1} c & + \binom{n}{1} (a+b+c)^{n-1} d + \ldots \\ \quad + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 & + \binom{n}{2} (a+b)^{n-2} c^2 & + \binom{n}{2} (a+b+c)^{n-2} d^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \quad + b^n & + c^n & + d^n \ldots\ldots \\ \quad \text{I} & \text{II} & \text{III} \ldots\ldots \end{array}$$

waar a, b, c, d, ... de ... duizendtallen, honderdtallen, tientallen en ééntallen van den wortel voorstellen en de kolommen I, II, III, ... de supplementen $(a+b)^n - a^n$, $(a+b+c)^n - (a+b)^n$, $(a+b+c+d)^n - (a+b+c)^n$, ... vormen, die Napier bedoelt.

Om deze supplementen te berekenen, bedient Napier zich van zijn Tabula Supplementorum (Fig. 20), die de binomiaalcoëfficienten tot en met die van de twaalfdemacht bevat. In minder fraaien vorm treft men zulk een driehoek, waarvan de geheimen door Pascal in zijn Traité du Triangle Arithmétique, Paris 1665, zijn ontsluierd, reeds bij Stifel [1]), Tartaglia [2]) en Stevin [3]) aan.

Men vindt in Napier's driehoek in ieder van de cellen langs BC den coëfficient 1 geschreven, in die langs BA de coëfficienten 1, 2, 3, ... 11 en 12, en in de overige telkens de som van de twee coëfficienten, die er onmiddellijk boven staan. De rijen evenwijdig aan BC, te beginnen bij de tweede, dragen de opschriften: voorgaande term, tweedemacht van den voorgaanden term, enz., en die evenwijdig aan BA de opschriften: volgende term, tweedemacht van den volgenden term, enz., waar onder den voorgaanden term (præcedens) het deel aan de linkerhand van den wortel moet worden verstaan, dat reeds gevonden is, en onder den volgenden term (succedens) het cijfer, dat onmiddellijk aan de rechterhand van dit deel staat. Om bv. bij een vijfdemachtsworteltrekking de supplementen te berekenen, moet men de som nemen der producten van elken coëfficient in de vijfde horizontale rij met de twee factoren, die worden aangeduid door de opschriften van de rijen evenwijdig aan BC en BA, waarin de cel met dien coëfficient voorkomt.

Voor de wijze van uitvoering der worteltrekking vergelijke men de aangehaalde kubiekworteltrekking uit 12977875 (p. 120), waarbij Napier opmerkt, dat alle worteltrekkingen met ondeelbare wortel-

1) Stifel, Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544.
2) Tartaglia, General Trattato dé Numeri e Misure, Venetia 1556—1560.
3) Stevin, Arithmétique, Leyde 1585.

exponenten evenzoo kunnen worden uitgevoerd als vierkants- en kubiekworteltrekkingen, en dat de worteltrekkingen met deelbare wortelexponenten tot die met ondeelbare wortelexponenten teruggebracht kunnen worden. Voorbeelden van vijfdemachtsworteltrekkingen, zooals men die in Stevin's Arithmétique, Leyde 1585, aantreft, behandelt Napier niet.

Van onmeetbare wortels bepaalt Napier op twee manieren benaderde waarden:

1) door de geheelen van den wortel te vermeerderen met een breuk, waarvan de rest der worteltrekking de teller is en de noemer: a) het supplement, dat aan een vermeerdering van de geheelen van den wortel met één beantwoordt; b) dit supplement verminderd met één;

2) door den wortel met een willekeurigen factor te vermenigvuldigen en van dit product: a) de geheelen; b) de geheelen, vermeerderd met één, door dien factor te deelen.

Volgens 1) vindt Napier $9\frac{269}{271}$ en $9\frac{269}{270}$ als benaderde waarden van $\sqrt[3]{998}$, daar $\sqrt[3]{998} = 9, \ldots$, de rest der worteltrekking $=$ 269 en het supplement, dat aan een vermeerdering van 9 met één beantwoordt $= 3.\,9^2 + 3.\,9 + 1 = 271$ is. En volgens 2) vindt hij $9\frac{99}{100}$ en 10 als benaderde waarden van denzelfden wortel, daar $100\sqrt[3]{998} = \sqrt[3]{998000000} = 999, \ldots$ is; eveneens volgens 2) vindt hij bij de worteltrekking uit breuken $\frac{538}{200}$ en $\frac{539}{200}$ als benaderde waarden van $\sqrt{\frac{29}{4}}$.

De benaderingsformules:

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A - a^n}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1} a + 1},$$

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A - a^n}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1} a},$$

onder 1) bedoeld, zijn van Arabischen oorsprong; in Fibonaci's Liber Abaci, 1202, en in De Ortega's Conpusicion de la Arte de la Arismetica y Juntamente de Geometria, Barcelona 1512, vindt men ze reeds bij de vierkants- en de kubiekworteltrekking toegepast. Overigens vergist Napier zich, waar hij meent, dat de tweede van deze formules steeds een benaderde waarde oplevert, die te groot is. [1])

Onder den naam van „compendium regulæ trium" bedient Napier zich van een verkorte vermenigvuldiging bij de oplossing van vraag-

[1]) inter hos enim terminos latet vera quantitas radicis, quæ numero nulli definiri possit. p. 59.

stukken met groote getallen door middel van den regel van drieën, in zijn Rabdologia [1]) bij de berekening van den omtrek van een cirkel met een middellijn van 635, als de omtrek van een cirkel met een straal van 10000 op 31416 wordt gesteld, en in zijn Ars Logistica [2]) bij de berekening van den sinus der zijde, die in een rechthoekigen boldriehoek met een hypotenusa van 83° [sin 83° = 9925461, als de straal = 10000000 is] staat tegenover een hoek van 53° [sin 53° = 7986354]. Omdat er in den vermenigvuldiger 7986354 zeven verschillende cijfers voorkomen, bepaalt Napier de producten van het vermenigvuldigtal 9925461 met 1, 2, 3, ... 8, 9 en 10 afzonderlijk. Vervolgens begint hij de verkorte vermenigvuldiging, evenals tegenwoordig gebruikelijk is, bij het cijfer aan de linkerhand van den vermenigvuldiger en schrijft de gedeeltelijke producten in één cijfer meer op dan er in de uitkomst verlangd worden. Na weglating van het cijfer aan de rechterhand in de som dier producten vindt hij dan een benaderde waarde 7926824 van dien sinus, die, zooals wordt aangetoond, zelfs dan nog minder dan een ééntal te klein zou zijn, als alle verwaarloosde cijfers negens waren geweest. „In maximis numeris", meent Napier, „hoc compendium regulæ trium maximâ laude dignum est." p. 65.

Een waarschijnlijk [3]) ouder voorbeeld van een verkorte vermenigvuldiging wordt gevonden in een door Rudolf Wolf beschreven MS, de Arithmetica Byrgii [4]), dat zich in de bibliotheek der sterrenwacht te Pulkowa bij St-Petersburg bevindt en door den genialen Zwitserschen uurwerkmaker Joost Bürgi (1552—1632) vermoedelijk in 1592/93 is samengesteld.

Afzonderlijk behandeld vindt men verkorte vermenigvuldigingen en deelingen voor de eerste maal in Oughtred, Clavis Mathematicæ, Editio tertia auctior & emendatior, Oxoniæ 1652, pp. 8 en 14, waarvan de eerste druk, dien ik evenwel niet heb kunnen raadplegen, in 1631 verscheen.

Bürgi en Napier schijnen ieder voor zich de verkorte vermenigvuldiging zelfstandig te hebben uitgedacht en toegepast. Het verhaal, op gezag van Frisch [5]) in vele leerboeken vermeld, dat Kepler in 1623 de verkorte bewerkingen van Prætorius te Altorf geleerd

[1]) Zie p. 55.

[2]) Zie p. 121.

[3]) Waarschijnlijk; want de Ars Logistica dagteekent wellicht van vóór 1594.

[4]) Wolf, Astronomische Mittheilungen XXXI, in: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 17ter Jahrgang, Zürich 1872, p. 244.

[5]) Frisch, Ueber Kepler's Logarithmen und einige Briefe von Kepler, in: Archiv der Mathematik und Physik, 24ter Theil, Leipzig 1859, p. 296.

zou hebben, wordt genoegzaam door de opmerking van Wolf [1]) weerlegd, dat Prætorius reeds in 1616 overleed.

Evenals zijn voorgangers en tijdgenooten onderscheidt Napier de breuken in gewone, die willekeurige noemers kunnen hebben, bv.: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{11}$, enz., en physische, waarbij zekere algemeen aangenomen deelers de noemers vervangen: zoo wordt het jaar verdeeld in 12 maanden, de maand in omstreeks 30 dagen en de dag in 24 uren; de graad in 60 minuten, de minuut in 60 seconden, de seconde in 60 tertiën, enz.

Tot de physische breuken behooren ook de decimale, waarvan men evenwel in de Ars Logistica geen melding vindt gemaakt, al komen ze in den vorm van gewone met een macht van tien tot noemer bij de deeling en de worteltrekking voor:
$8650913\frac{72}{100}$ en $865091372\frac{89}{10000000}$ resp. bij de deeling van 865091372 door 100 en van 8650913720000089 door 10000000;
$7\frac{71}{1000}$ en $7\frac{72}{1000}$ als benaderde waarden van $\sqrt{50}$;
$9\frac{99}{100}$ en $9\frac{100}{100} = 10$ als benaderde waarden van $\sqrt[3]{998}$;
$\frac{873}{1000}$ en $\frac{874}{1000}$ als benaderde waarden van $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Ook merkt Napier op, dat bij de physische breuken de eenheden meestal in een zelfde verhouding opklimmen en afdalen, zooals de ééntallen, tientallen, honderdtallen en duizendtallen, de ééntallen, tiendedeelen, honderdstedeelen en duizendstedeelen [2]), uit welk voorbeeld blijkt, dat de decimale breuken hem niet vreemd zijn, al ontbreekt een afzonderlijke notatie.

Trouwens alle andere dan de gewone breuken worden door Napier met stilzwijgen voorbijgegaan [3]), omdat men ze door geheele getallen en gewone breuken kan vervangen, waarmede de bewerkingen zich gemakkelijker laten uitvoeren, en een afzonderlijke behandeling dus overtollig mag heeten [4]).

Napier definieert de vermenigvuldiging van breuken als de herleiding van „breuken van breuken," zooals $\frac{2}{5}$ van $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ van $\frac{2}{3}$ van $\frac{1}{2}$, enz., tot breuken [5]).

Om „breuken van breuken" aan te duiden, bedient hij zich van

[1]) Wolf, t. a. p., p. 252.

[2]) Ut integrorum unitatum ad suas denas, centenas, et millenas superiores; et ad suas decimas, centesimas, et millesimas inferiores. p. 80.

[3]) Unde, omnibus fractionibus præter jam expositas vulgares omissis, huic Arithmeticæ Logisticæ finem imponimus. p. 81.

[4]) Hinc fit quod otiosum et superfluum foret, hisce particularem calculum texere, cum harum computatio facilius expediatur per vulgares integros et fractos numeros, quàm per suas particulares formas calculi. p. 81.

[5]) Hâc multiplicatione fractiones fractionum, imo, et fractiones fractionum iterum atque iterum fractarum, ad simplices fractiones reducuntur. p. 24.

de notatie: $\frac{2}{5}$ ex $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ ex $\frac{2}{3}$ ex $\frac{1}{2}$, enz., onder opmerking evenwel, dat door anderen [1]) de breuken zonder meer naast elkander worden geschreven met weglating van de breukstrepen op die in de breuk aan de linkerhand na [2]); aldus: $\frac{2}{5}\,\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}$, $\frac{3}{4}\,\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}\,\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$, enz.

c) Wortelvormen.

Liber Tertius. De Logistica Geometrica. 6 pp.

Caput I. De Notatione Et Nominatione Concretorum.

Geometrica ergo dicitur Logistica quantitatum concretarum per numeros concretos.

Concretus dicitur omnis numerus quatenus quantitatem concretam et continuam referat.

Ut 3 *a*, si tres lineas digitales referat sic ——— ——— ———, est numerus discretus: Quum autem tridigitalem lineam concretam et continuam refert, hoc modo ———+———+———, dicitur numerus concretus, sed hoc improprie et ratione subjecti.

Proprie autem, et per se, concretos numeros dicimus radices numerorum quæ nullo numero (sive integro sive fracto) mensurari possunt.

Ut radix bipartiens, seu quadrata, septenarii major est binario, minor ternario, et nulli fracto, in universâ fractorum numerorum essentiâ, æqualis aut commensurabilis reperietur; dicitur ergo concretus numerus proprie. Sic radix tripartiens, seu cubica, denarii numeri, non est numerus discretus, nec numero commensurabilis, sed concretus; et aliæ infinitæ numerorum radices, quas vulgò surdos et irrationales vocant.

Horum concretorum ortus habetur extrahendo è numeris radices eis non insitas.

Ut cap. 4 Lib. I. et cap. 9 Lib. II. monuimus.

Geometrici numeri eò quod quantitatem potius nominent quàm numerent, ideo vulgò nomina dicuntur.

Nominum alia sunt unius nominis, ut uninomia; alia plurium.

Uninomium est idem quod concretus numerus unicus, sive proprie, sive improprie dictus.

Unde sequitur quod uninomium vel est numerus unicus simplex, vel unici numeri simplicis radix aliquæ.

Cumque ita radicatum uninomium sit vel abundantis vel defectivi numeri radix, ejusque index vel par vel impar, — quadrifario hoc casu sequetur, quædam uninomia esse abundantia, quædam defectiva, quædam et abundantia et defectiva, quæ gemina dicimus; quædam tandem nec sunt abundantia nec defectiva, quæ nugacia vocamus.

Hujus arcani magni algebraici fundamentum superius Lib. I. cap. 6, jecimus: quod (quamvis à nemine quod sciam revelatum sit) quantum tamen emolumenti adferat huic arti, et cæteris mathematicis, postea patebit.

In uninomiis abundantibus et defectivis, non multum refert an debita copula præponatur an interponatur; præstat tamen eam præponere. In uninomiis autem geminis et nugacibus, copula debita est semper interponenda.

Primi casus exemplum est $\llcorner$ 10, seu (quod per cap. 6 Lib. I. idem est) $\llcorner + 10$, est (per cap. 6 Lib. I.) uninomium abundans. Secundi casus

[1]) Tonstall, De Arte Supputandi Libri Quatuor, Londini 1522.

[2]) Sunt et quædam improprie fractiones, quæ non sunt unitatis pars, aut partes, expresse, sed sunt partes fractionum; et hæ fractiones fractionum nominantur; quas nos notamus interpositâ particulâ 'ex', alii notant per omissionem posterioris lineæ, aut linearum. p. 68.

exemplum, $\llcorner - 10$, est uninomium defectivum (cap. eodem). Tertii casus exemplum est $\sqcup\, 10$, seu $\sqcup + 10$ (quæ, ut supra, eadem sunt), significat tam quantitatem abundantem, quæ in se ducta facit $+ 10$, quàm defectivam quæ in se ducta facit etiam $+ 10$: Veluti, lucidioris exempli gratiâ, $\sqcup\, 9$, seu $\sqcup + 9$, est tam $+ 3$ quàm $- 3$; ut superius Lib. I. cap. 6 demonstravimus. Ultimi casus exemplum est $\sqcup - 9$, quod ex meris nugacibus est, nec quicquam significat quod vel abundet vel deficiat; nam novenarius defectivus nullam habet radicem bipartientem, ut Lib. I. cap. 6 patet.

In nugacibus summopere cavendum est ne copula — minutionis, interponenda, præponatur.

Ut si, pro $\sqcup - 9$ (quæ est radix bipartiens minuti novenarii, et absurdum atque impossibile infert), sumpseris $- \sqcup\, 9$, quæ quantitatem minutam radice bipartiente novenarii significat, longe aberrabis: Radix enim bipartiens novenarii hîc abundantis (scilicet $\sqcup\, 9$) gemina est, scilicet $+ 3$ et $- 3$, id est, ternarius abundans et ternarius defectivus; et ita quantitas his geminis $+ 3$ et $- 3$, minuta gemina erit; qui itaque pro $\sqcup - 9$ ponit $- \sqcup\, 9$, pro absurdo et impossibili, et quantitate nugaci et nihil significante, profert quantitatem geminæ seu duplicis significationis; ab hoc ergo, in quo plurimi errarunt, cavendum.

In cæteris uninomiis (significativis scilicet) idem est copulam inter signum radis cale et numerum interponere, sive utrique præponere: Nec in uninomiis illis valorem mutat, primo vel medio etiam loco vacuo (per cap. 6 Lib. I.) copulam + inserere.

Ut $\sqcup\, 9$, et $\sqcup + 9$, et $+ \sqcup\, 9$, et $+ \sqcup + 9$, idem prorsus significat, videlicet tam $+ 3$ quàm $- 3$; item $\llcorner\, 27$, seu $\llcorner + 27$, seu $+ \llcorner\, 27$, seu $+ \llcorner + 27$, idem valent quod $+ 3$ tantummodo; item $\llcorner - 27$, seu $+ \llcorner - 27$, seu $- \llcorner\, 27$, seu $- \llcorner + 27$, idem valent quod $- 3$ tantummodo; item in nugantibus idem est $\sqcup - 9$, et $+ \sqcup - 9$, scilicet eandem impossibilitatem implicant; sed cave ne pro ipsis posueris $- \sqcup\, 9$, seu $- \sqcup + 9$, ut præcedente sectione monuimus.

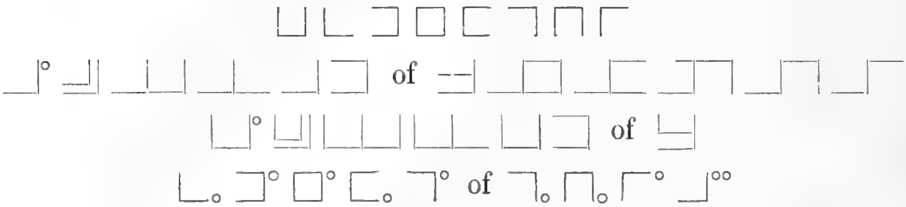
Atque hæ sunt affectiones uninomiorum in se; sequuntur uninomiorum ad invicem affectiones.

Sunt itaque uninomia bina, aut invicem commensurabilia aut incommensurabilia. Commensurabilia sunt, quæ se habent ad invicem ut numeri discreti, seu absoluti. Cætera omnia uninomia ad hæc irreducibilia, incommensurabilia esse constat.

Napier behandelt in dit Derde Boek de onmeetbare wortels, toenmaals meestal numeri irrationales, surdi en mediales (middelevenredigen) genoemd, maar door hem numeri geometrici en concreti geheeten wegens hun veelvuldig optreden in de meetkunde, waarbij hij aanteekent, dat drie een numerus discretus is, wanneer er drie lijnen van één vinger breed door worden aangeduid, en een numerus concretus, maar in oneigenlijken zin, wanneer er één lijn van drie vingers breed mede bedoeld wordt. Eigenlijke numeri concreti zijn uitsluitend de onmeetbare wortels, die zoo min door een geheel als door een gebroken getal uitgedrukt kunnen worden.

Napier begint de behandeling van zijn onderwerp met de invoering van een nieuwe schrijfwijze voor de wortels. Hij kiest de negen gemakkelijk te onthouden teekens van Fig. 22, om er de cijfers 1, 2, 3, ... 8 en 9 mede aan te duiden, en plaatst de wortelexponenten, op de gewone wijze, maar met de nieuwe cijfers en de nul, die hij behoudt, als tiendeelige getallen geschreven, nu en dan evenwel met een kleine wijziging in den vorm, onmiddellijk vóór de radicandi.

Zoo zijn:



de wortelteekens, die aan de exponenten 2, 3, 4, ... 23, 24, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 en 100 beantwoorden.

Ook de namen der wortels (en machten) in Napier's Ars Logistica verschillen aanmerkelijk van de in zijn tijd meest gebruikelijke, zooals men die bv. in zijn overige werken, zijn Algebra er onder begrepen, en in Stifel's Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, aantreft:

Stifel, Arithmetica Integra, Lib. II, Cap. IV:

√ʒ	(numerus)	medialis	quadrate
√ce	,,	,,	cubice
√ʒʒ	,,	,,	zensizensice
√ß	,,	,,	surdesolide
√ʒce	,,	,,	zensicubice
√bß	,,	,,	bsurdesolide
√ʒʒʒ	,,	,,	zensizenzensice
√cce	,,	,,	cubicubici

. . . .

Ook bedient Stifel zich, maar minder vaak, van de uitdrukkingen: radix quadrata, cubica, zensizensica, etc.

Napier, Algebra, Lib. I, Cap. I:

√q	radix	quadrata
√c	,,	cubica
√qq	,,	quadrati quadrata
√ß	,,	supersolida
√qc	,,	quadrati cubica
√ſß	,,	secunda supersolida
√qqq	,,	quadrati quadrati quadrata
√ccc	,,	cubi cubica

. . . .

Napier, Ars Logistica, Lib. III, Cap. I:

⊔	radix	bipartiens
∟	„	tripartiens
⊐	„	quadrupartiens
□	„	quintupartiens
⊏	„	sextupartiens
┐	„	septupartiens
⊓	„	octupartiens
┌	„	noncupartiens

. . . .

Omdat de numeri concreti de grootheden meer noemen dan tellen, worden ze door Napier nomina geheeten en in uninomia (ééntermen), bv.: 10, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[4]{26}$, enz., en plurinomia (veeltermen) onderscheiden.

Van de uninomia zijn sommige positief (abundantia), bv. $\sqrt[3]{+10}$, sommige negatief (defectiva), bv. $\sqrt[3]{-10}$, sommige positief en negatief (gemina), bv. $\sqrt{+10}$, en sommige positief noch negatief (nugacia), bv. $\sqrt{-10}$, al naarmate de radicandi positief of negatief en de exponenten even of oneven zijn.

Bij de imaginaire wortels (uninomia nugacia) mag men het teeken —, dat onder het wortelteeken staat, er niet vóór plaatsen en dus bv. $\sqrt{-9}$ niet door $-\sqrt{9}$ vervangen; want, daar $\sqrt{9} = \pm 3$, dus $-\sqrt{9} = \mp 3$ is, zou men zoodoende voor een onbestaanbare grootheid een tweewaardige (pro absurdo et impossibili, et quantitate nugaci et nihil significante quantitatem geminæ seu duplicis significationis) in de plaats stellen.

Bij de reëele wortels (uninomia significativa) daarentegen mag men de teekens + en — zoowel vóór als onder het wortelteeken plaatsen; buitendien mag men bij alle wortels desverkiezende vóór en onder het wortelteeken + schrijven, als er nog geen voorteeken staat; bv.:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{9} &= \sqrt{+9} = +\sqrt{9} = +\sqrt{+9} = \pm 3,\\
\sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{+27} = +\sqrt[3]{27} = +\sqrt[3]{+27} = +3,\\
\sqrt[3]{-27} &= +\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{+27} = -3,\\
\sqrt{-9} &= +\sqrt{-9}, \text{ maar niet } = -\sqrt{9} = -\sqrt{+9}.
\end{aligned}
$$

Van het gewicht dezer opmerkingen was Napier zich ten volle bewust. „Wij hebben”, zegt hij, „in Bk. I, Hfdst. 6, den grondslag gelegd van dit groot algebraïsch geheim (magnum arcanum algebraicum), waarvan, hoewel door niemand, zoover ik weet, onthuld (quamvis à nemine quod sciam revelatum sit), nochtans later zal blijken, hoezeer het aan deze kunst en de overige deelen der wiskunde ten voordeele strekt (quantum emolumenti adferat huic arti et cæteris mathematicis)."

Welk geheim bedoelt Napier? Welk voordeel verwacht hij van zijn ontdekking voor de wiskundige wetenschappen?

Wij moeten ons bij de beantwoording van deze vragen tot gissingen bepalen; want het MS van de Ars Logistica breekt na een paar opmerkingen over onderling meetbare en onderling onmeetbare wortels af met een „Et cætera" en de mededeeling van Robert Napier aan Briggs, die het ter inzage ontving, dat er van dit Derde Boek niet meer was te vinden:

> „I could find no more of this Geome
> tricall pairt amongst all his fragments." p. 88.

Na lezing en herlezing van Napier's woorden in verband met wat hij omtrent de oplossing van vergelijkingen door worteltrekking in zijn Algebra, Lib. II, Cap. X, Prop. 20, vermeldt, acht ik dit de meest waarschijnlijke conjectuur, dat Napier de tweewaardigheid der evenmachtswortels en haar toepassing bij de analytische behandeling der vierkantsvergelijkingen op het oog heeft gehad.

De leer der vergelijkingen berustte in Napier's dagen uitsluitend op meetkundigen grondslag, zoowel de oplossing der vierkantsvergelijkingen, die toen reeds bijna acht eeuwen, zooals ze door Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, een Arabisch wiskundige uit de eerste helft der negende eeuw, was overgeleverd, als voorbeeld had gediend, waarvan niet werd afgeweken, als de nauwelijks een halve eeuw oude oplossing der derde- en vierdemachtsvergelijkingen door Del Ferro, Tartaglia, Cardano en Ferrari.

Om de beteekenis van Napier's ontdekking, zooals ik die begrijp, te kunnen waardeeren, moet men de toenmalige verklaring van de oplossing der vierkantsvergelijkingen kennen.

Men onderscheidde drie hoofdvormen, naar onze tegenwoordige notatie:

$$1)\ x^2 + p\,x = q, \quad 2)\ x^2 + q = p\,x, \quad 3)\ x^2 = p\,x + q,$$

die ieder een afzonderlijke behandeling vereischten.

Daar voor p en q uitsluitend volstrekte waarden genomen werden en negatieve en onbestaanbare wortels niet in aanmerking kwamen, waren vergelijkingen van den vorm $x^2 + p\,x + q = 0$ uitgesloten. De vergelijking 1) bezit één wortel, waaromtrent niets te zeggen valt; — de vergelijking 2) bezit geen enkelen wortel, als

$\frac{1}{4}p^2 < q$ is, één wortel, nl. $\frac{1}{2}p$, als $\frac{1}{4}p^2 = q$ is, en twee wortels, als $\frac{1}{4}p^2 > q$ is; van deze twee wortels is de eene blijkbaar kleiner en de andere grooter dan $\frac{1}{2}p$, zoodat er voor de verklaring van de oplossing twee figuren noodig waren; men bepaalde zich evenwel meestal tot het bewijs van den regel voor den kleinsten wortel: in Stifel's Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, en in Cardano's Ars Magna, Norimbergæ 1545, vindt men den regel voor de bepaling van beide wortels toegelicht; — de vergelijking 3) eindelijk bezit één wortel, die grooter dan p is.

We laten thans de bedoelde synthetische oplossingen van de drie vergelijkingen zoo beknopt mogelijk volgen:

1) Zij (Fig. 23) $AB = BC = x$ en $AI = CG = \frac{1}{2}p$, dan is vk. $ABCD = x^2$, rh. $ADLI =$ rh. $CGKD = \frac{1}{2}px$ en vk. $DKHL = \frac{1}{4}p^2$, dus vk. $BGHI =$ vk. $ABCD +$ rh. $ADLI +$ rh. $CGKD +$ vk. $DKHL = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, daar $x^2 + px = q$ is.

Voor BG vindt men dus $\sqrt{}(q + \frac{1}{4}p^2)$, zoodat $x = BC = BG - CG = \sqrt{}(q + \frac{1}{4}p^2) - \frac{1}{2}p$ is.

2) Zij (Fig. 24) $AB = BC = x$, $BE = p$ en $BI = BG = \frac{1}{2}p$, dan is vk. $ABCD = x^2$, rh. $BEFA = px$, rh. $ABGK =$ rh. $BCLI = \frac{1}{2}px$ en vk. $BGHI = \frac{1}{4}p^2$, dus rh. $CEFD =$ rh. $ABEF -$ rh. $ABCD = px - x^2$ en dus $= q$.

Nu is rh. $CEFD =$ rh. $GEFK \pm$ rh. $CGKD$, $+$ in Fig. 24[a] en $-$ in Fig. 24[b] $=$ rh. $ABGK \pm$ rh. $ADLI =$ vk. $BGHI -$ vk. $DKHL$, dus vk. $DKHL =$ vk. $BGHI -$ rh. $CEFD = \frac{1}{4}p^2 - q$.

Voor $DK = CG$ vindt men dus $\sqrt{}(\frac{1}{4}p^2 - q)$, zoodat $x = BC = BG \mp CG = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{}(\frac{1}{4}p^2 - q)$ is.

3) Zij (Fig. 25) $AB = BC = x$, $BE = p$, $GE = GH = \frac{1}{2}p$ en $GK = GC$, dan is vk. $ABCD = x^2$, rh. $ABEF = px$ en vk. $EGHI = \frac{1}{4}p^2$, dus rh. $CEFD = x^2 - px$ en dus $= q$.

Nu is vk. $CGKL =$ vk. $EGHI +$ rh. $CEML +$ rh. $IHKM =$ vk. $EGHI +$ rh. $CEML +$ rh. $LMFD =$ vk. $EGHI +$ rh. $CEFD = \frac{1}{4}p^2 + q$.

Voor CG vindt men dus $\sqrt{}(\frac{1}{4}p^2 + q)$, zoodat $x = BC = BG + CG = \frac{1}{2}p + \sqrt{}(\frac{1}{4}p^2 + q)$ is.

Napier verving deze drie afzonderlijke synthetische oplossingen door één enkele analytische, die een bijzonder geval uitmaakt van een eveneens op sommige vergelijkingen van hoogeren graad en met meer onbekenden toepasselijke handelwijze, die hij aan het einde van zijn onvoltooid gebleven Algebra mededeelt. Hoewel Napier zijn methode niet met een voorbeeld toelicht, is zijn bedoeling niettemin volkomen duidelijk, zoowals bij de bespreking dier

Algebra nader zal blijken: Nadat de vierkantsvergelijking tot den vorm $x^2 + p\,x + q = 0$ herleid is, trekt Napier den vierkantswortel uit haar eerste lid, waarvoor hij $x + \frac{1}{2}\,p$ vindt, terwijl er $q - \frac{1}{4}\,p^2$ als rest overblijft. Uit deze rest met omgekeerd teeken trekt hij den vierkantswortel, waaraan hij — en dit is zijn „arcanum algebræ", zooals zijn logarithmen zijn „arcanum arithmeticæ" uitmaken — een positieve en een negatieve waarde toekent; eindelijk vermindert hij $x + \frac{1}{2}\,p$ met ieder van deze waarden en krijgt zoodoende twee vergelijkingen van den eersten graad, waarvan de wortels die der oorspronkelijke vierkantsvergelijking vormen.

Nu werden door Napier, voor zoover dit uit zijn onvolledig MS valt op te maken, de negatieve waarden, die aan een vergelijking voldoen, als wortels medegeteld; zoo geeft hij -7 op als wortel van de vergelijking $x = -7$ en spreekt de eigenschap uit, dat elke vergelijking, die niet valsch is, minstens één positieven of negatieven wortel bezit; maar onbestaanbare waarden werden door hem niet als wortels medegerekend, evenmin als nul: de vergelijkingen $x^2 = 4\,x - 5$ en $x = 3\,x$ noemt hij valsch; eveneens was het begrip veelvoudige wortel hem vreemd: hij vervangt zonder meer de vergelijking $x - \sqrt{36\,x} + 9 = 0$ door $\sqrt{x} - 3 = 0$.

Napier vond dus voor de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ twee wortels, als $\frac{1}{4}\,p^2 - q > 0$, één, als $\frac{1}{4}\,p^2 - q = 0$, en geen, als $\frac{1}{4}\,p^2 - q < 0$ is: in dit geval noemt hij de vergelijking valsch. Zijn inzicht in de tweewaardigheid van evenmachtswortels stelde hem dus in staat, een analytische oplossing te ontdekken, die op vierkantsvergelijkingen van willekeurigen vorm kon worden toegepast en waardoor over den aard der wortels een helder licht werd verspreid.

Niet zonder reden dus mocht Napier dit „arcanum algebræ" een belangrijke vondst achten. Het kon hem niet bekend zijn, dat een Indisch astronoom, Bhâskara, de Geleerde (Âcârya) geheeten, reeds omstreeks het midden van de twaalfde eeuw de tweewaardigheid en de onbestaanbaarheid der quadraatwortels geleeraard en bij de oplossing der vierkantsvergelijkingen toegepast had. Ook hebben van zijn tijdgenooten Vieta en Stevin denkbeelden uitgesproken, die in hoofdzaak met de zijne overeenstemmen, maar Vieta's De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo, hoewel misschien reeds in 1591 persklaar, verscheen pas in 1615, twaalf jaren na den dood van den schrijver, in druk, en met Stevin's Arithmétique, waarin o. a. de oplossing der vergelijkingen uitvoerig behandeld wordt [1]), en diens Pratique d'Arithmétique, die in 1585 te Leiden in één band het licht zagen, schijnt Napier tijdens de bewerking der Ars Logistica niet bekend te zijn geweest, anders zou hij de tiendeelige breuken wel niet onvermeld hebben gelaten, waarover Stevin's Disme handelt, een vertaling van diens Thiende, Leyden 1585, opgenomen in de Pratique d'Arithmétique.

---

[1]) Ik kan niet nalaten, Stevin's oplossing der vierkantsvergelijkingen, waarvan de eer meestal aan Vieta wordt toegekend, aan te halen als proeve van diens betoogtrant en stijl:

„Nous avons amplement faict aux constructions precedentes leurs demonstrations, tant Geometriques, qu' Arithmetiques; Mais encore n'est pas notoire par icelles l'occasion qui a faict inventer à Mahomet [Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî] telle reigle. A fin doncques que la chose soit entendue parfaictement, nous la declarerons par ses causes comme s'ensuit.

Quand ② est egale à ① ⓪ [d. w. z. $x^2 = px + q$], nous la pouvons reduire en ①, egale à ⓪, & alors est la valeur de 1 ① notoire par le precedent 67 probleme, & de telle reduction est colligée la maniere de ladicte construction, comme apparoistra. Soit par exemple:

1 ② egale a — 6 ① + 16.

Qui sont le premier & second terme, de la premiere construction, de la seconde difference; Et ajoustons à chasque partie 6 ①, & seront

1 ② + 6 ① egales à 16.

Reste maintenant de trouver quelque ⓪, qui ajousté à ② + 6 ①, tel trinomie aie racine, qui soit 1 ① + quelque ⓪. Or pour trouver tel nombre, il ne faut que multiplier la moitie de 6 (des 6 ①) qui est 3, en soy, faict 9, & on l'aura (la raison pourquoy le quarré de la moitie du nombre de ①, est tousiours le ⓪, qu'il faut ajouster à tel binomie, & par cela manifeste, que le produict du nombre de ②, qui est icy unité, multiplié par le ⓪, est tousiours egal au quarré de la moitie du nombre ①; Et qui encore veut sçavoir pourquoy tel produict est tousiours egal au quarré, de la moitie du nombre de ①; Qu'il multiplie 1 ① + quelque ⓪, en soy, & facilement verra la cause, es nombres procedens de l'operation de telle multiplication). Ajoustons doncques 9, à chascune des egales parties, & seront

1 ② + 6 ① + 9, egales à 25.

Puis extrayons de chasque partie racine quarrée, & seront:

1 ① + 3, egales à 5.

Puis soubstrayons de chascune partie 3, & sera

1 ① egale, ou vaudra pour solution 2.

Et par ceste maniere, nous pourrions solver tous semblables exemples; Mais à fin que telle invention de valeur de 1 ①, soit plus commode, on l'a redigé en ordre, & on en a faict une reigle; considerant d'ou nous procede tel 2, valeur de 1 ①, & nous voyons apertement, qu' on ajouste tousiours le quarré du nombre de ①, au ⓪, & que nous extrayons de la somme racine quarrée, & que de telle racine on soubstraict encore la moitie du nombre de ①; & pourtant est-ce, qu'on applique ces choses ainsi en reigle de ladicte construction.

. . . .

Et par les choses dessus dictes est assés notoire l'origine des autres deux differences, toutesfois parce que nous avons dict, qu'en l'origine appert pourquoy la troisiesme

Met Stevin's Arithmetica Decimalis, die Napier in zijn Rabdologia aanhaalt [1]), zal toch de Engelsche uitgaaf van De Thiende wel bedoeld zijn, door Norton in 1608 bezorgd.

Buitendien hebben wij geen reden, om Napier te wantrouwen, waar hij ons verzekert, dat dit „magnum arcanum algebræ", voor zoover hij wist, nog door niemand was onthuld.

Ik heb de veronderstelling uitgesproken en aannemelijk trachten te maken, dat Napier de tweewaardigheid der evenmachtswortels en haar toepassing bij de oplossing der vierkantsvergelijkingen bedoelt, waar hij van een „geheim der algebra" gewaagt.

Mark Napier, Napier's biograaf, is een andere meening toegedaan en vermoedt, dat zijn groote voorzaat de invoering der imaginaire getallen in de algebra op het oog heeft gehad [2]).

Mij komt deze veronderstelling onhoudbaar voor; want Napier verklaart de uninomia nugacia uitdrukkelijk voor ongerijmd, onmogelijk, onnut en niets beduidend (absurda, impossibilia, nugacia et nihil significantia), noemt een vierkantsvergelijking met onbestaanbare wortels valsch (illusiva) en kan niet onbekend zijn gebleven met Cardano's en Bombelli's werken, waarin met imaginaire vormen herleidingen worden uitgevoerd, wat met zijn „quamvis à nemine quod sciam revelatum sit" in strijd zou wezen. Buitendien kon er

---

difference a deux solutions, nous la declarerons. Soit 1 ②, egale à 6 ① — 5, qui sont le premier & second terme de l'exemple de la troisiesme difference, & soubstrayons de chascune partie 6 ①, & sera

1 ② — 6 ①, egale à — 5.

Reste maintenant de trouver quelque ⓪, qui ajousté à 1 ② — 6 ①, le trinomie aie racine, qui soit 1 ① & quelque ⓪, le mesme pour les raisons que dessus sera 9 (à sçavoir le quarré de — 3 moitie de — 6 des — 6 ①.) Aioustons doncques à chascune partie 9, & seront

1 ② — 6 ① + 9, egales à 4.

Puis extrayons de chascune partie racine quarrée, & sera

1 ① — 3, egale à 2.

ou autrement

— 1 ① + 3, egale à 2.

Car autant 1 ① — 3, comme — 1 ① + 3, est racine de 1 ② — 6 ① + 9; quand doncques nous posons pour racine 1 ① — 3 egale à 2, il faut ajouster à chascune partie 3, & 1 ① sera egale, ou vaudra 5. Mais si nous posons pour racine — 1 ① + 3, egale à 2, il faudra soubstraire de chasque partie 2, & restera — 1 ① + 1, egale à 0; Et ajoustant à chascune partie 1 ①, alors sera 1 ① egale ou vallant 1. Et est la cause de la double solution à ladicte troisiesme difference si manifeste, qu' il n'est mestier d'en sonner plus mot."

Girard, Oeuvres Mathématiques de Stevin, Leyde 1634, Vol. I, p. 69.

[1]) Zie p. 55.

[2]) Introduction, p. lxxxii.

in een tijd, toen de algebra nog aan den leiband van de meetkunde liep, zelfs voor een Napier bezwaarlijk sprake zijn van een helder inzicht in den aard van een symbool als $\sqrt{-a}$, waarvan de zin pas kan worden vastgesteld, nadat zijn nut als hulpmiddel in de zuivere analysis onmiskenbaar gebleken is, — in een tijd, toen een man als Cardano nog tot het besluit kon komen, dat plus maal plus plus, maar min maal min, min maal plus en plus maal min steeds min zou opleveren [1]), en onze Stevin, helderziend als immer, omtrent de behandeling van den casus irreductibilis door Bombelli, die dit onherleidbare geval „solve par diction de plus de moins & moins de moins" — Bombelli leest $4 + \sqrt{-11}$ en $4 - \sqrt{-11}$ aldus: 4 plus di minus 11 en 4 minus di minus 11 — dit getuigenis moest afleggen: „Quant à moy, j'estime inutile d'en escripre icy de semblables; La raison est, que ce qui ne se peut trouver par certaine reigle, semble indigne d'avoir lieu entre les propositions legitimes. D'autre part, que de ce qui se solve en telle maniere, la Fortune en merite autant d'honneur, comme l'efficient. Au tiers, qu' il y a assez de matiere legitime, voire en infini, pour s'en exercer, sans s'occuper, & perdre le temps, en les incertaines: pourtant nous les passerons oultre. Ceux ausquels plairont tels exemples, ils en pourront faire à leur plaisir". [2])

Over den inhoud der Algebra.

a) Wortelvormen.

Liber Primus. De Nominata Algebræ Parte. 25 pp.

Caput I. De Definitionibus Et Divisionibus Partium, Et De Vocabulis Artis.

1. Algebra Scientia est de quæstionibus quanti, et quoti, solvendis tractans.
2. Estque ea duplex, — altera nominatorum, altera positivorum.
3. Nominata sunt, quæ à numeris rationalibus, aut irrationalibus, nomen habent.
4. Rationales sunt numeri absoluti, aut numeri partes; de quibus tractat etiam Arithmetica.
5. Irrationales sunt radices numerorum rationalium non habentes radices inter numeros.
6. Atque hæ (quòd quantitates sunt) in Geometriam etiam spectant.
7. Positiva Algebræ pars est, quæ quantitates et numeros latentes per suppositiones fictitias prodit; de quâ Libro II. tractabimus.

---

[1]) In Cap. XXII. De contemplatione p : & m : & quod m : in m : facit m : & de causis horum iuxta veritatem, van zijn Regula Aliza, Basileæ 1570, zegt Cardano o. a.: „igitur m : in m : seu alienum in alienum, & m : in p : seu p : in m : seu quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt m : solum, seu alienum quod erat demonstrandum". p. 45.

[2]) Girard, Oeuvres Mathématiques de Stevin, Leyde 1634, Vol. I, p. 72.

8. Priorem autem Algebræ partem, de numeris et quantitatibus nominatis, hoc Libro I. docebimus.

9. Suntque nominatorum tres species: Uninomia, plurinomia, et universalia; de quibus ordine agetur.

10. Uninomia sunt, numerus unicus simplex, aut numeri simplicis radix aliqua.

Caput II. De Uninomiorum Additione.

Caput III. De Uninomiorum Substractione.

Caput IV. De Extractione Radicum Ex Uninomiis.

Caput V. De Reductione Ad Idem Radicale.

Caput VI. De Multiplicatione Et Divisione Uninomiorum.

Caput VII. De Plurinomiis.

1. Plurinomia sunt, quæ pluribus uninomiis copulatis constant.

3. Plurinomia infima sunt ea, quorum uninomia omnia sunt quadratæ numerorum radices, cum numero vel sine numero.

4. Cætera omnia plurinomia dicuntur superiora.

Caput VIII. De Additione Plurinomiorum.

Caput IX. De Substractione Plurinomiorum.

Caput X. De Multiplicatione Plurinomiorum.

Caput XI. De Divisione Plurinomiorum.

Caput XII. De Extractione Radicum Ex Plurinomiis.

1. Plurinomiorum quædam radices perspicuæ sunt, quædam obscuræ. Perspicuas dicimus, quæ non sunt magis plurinomia quàm ea quorum sunt radices.

2. Obscuras autem radices appellamus, quæ plurimis uninomiis et radicibus plurinomiorum confuse plerumque scatent.

5. Radices autem obscuræ non aliter extrahuntur quàm præponendo signum radicale radicis cum periodo ante plurinomium oblatum, idque radicale, cum periodo sequente, universalis radicis signum dicitur; indicat enim universi plurinomii sequentis radicem.

Caput XIII. De Fractionibus Irrationalibus.

Caput XIV. De Universalium Radicum Additione Et Substractione.

Caput XV. De Universalium Diversorum Ad Idem Signum Reductione.

Caput XVI. De Multiplicatione Et Divisione Universalium.

Caput XVII. De Radicum Universalium Extractione.

2. Si ex pluribus universalibus copulatis, aut ex universalibus copulatis cum uninomiis radicem extraxeris, ea dicetur universalium universale; totique debet signum universale radicis extrahendæ præponi, lineaque per totum duci.

3. Hinc sequitur in universalibus effectum universalis signi tantum extendi quantum linea protracta; et si nulla ducatur linea effectus universalis signi in sequens universale signum desinit ab eâque intercipitur.

Hæc de irrationalibus dicta sufficiunt, licet et aliæ sint irrationalium species: Ut enim per extractionem radicum ex numeris non habentibus radices oriuntur uninomia (quæ primâ parte hujus docuimus), et ex additione et substractione uninomiorum incommensurabilium oriuntur plurinomia (de quibus secundâ parte hujus tractavimus), et per extractionem radicum obscurarum ex plurinomiis oriuntur universalia (de quibus hâc tertiâ et ultimâ parte hujus tractavimus). Sic etiam ex universalibus oriuntur universalium universalia, et ex his rursus alia ad infinitum universalissima: Quorum artem si aliquando in usum cadat, quod rarissime accidit, facillime ex præcedentibus colliges.

De Algebra behandelt de oplossing van vraagstukken over grootheden en hoeveelheden en omvat de leer der wortelgrootheden (nominata pars algebræ) en de algemeene rekenkunde, de oplossing van vergelijkingen er onder begrepen (positiva pars algebræ).

Van de bepaalde getallen (nominata) behooren de meetbare (numeri rationales) in de rekenkunde te huis, maar de onmeetbare (numeri irrationales), met name de wortelgrootheden, in de algebra, hoewel men ze, daar ze grootheden zijn, ook in de meetkunde ontmoet.

Napier verdeelt de nominata in engeren zin, d. w. z. de wortelvormen, waarin evenwel uitsluitend bepaalde getallen voorkomen, in uninomia, plurinomia en universalia.

Uninomia zijn bepaalde enkelvoudige getallen en wortels uit zoodanige getallen (de notatie, waarvan Napier zich in zijn Algebra bij de wortels bedient, hebben wij reeds leeren kennen); plurinomia zijn sommen en verschillen van uninomia en worden verdeeld in plurinomia infima, waarin alleen vierkantswortels voorkomen, en plurinomia superiora; universalia eindelijk zijn de niet tot plurinomia te herleiden wortels (radices obscuræ, in tegenstelling met radices perspicuæ) uit plurinomia. Om zulk een radix universalis aan te duiden, wordt het wortelteeken eenvoudig vóór den radicandus geschreven met een stip er tusschen; bv.:

$$\surd\ \mathrm{q}.\ \surd\ \mathrm{q}\ 48 + \surd\ \mathrm{q}\ 28 = \surd\ (\surd\ 48 + \surd\ 28);$$
$$\surd\ \mathrm{c}.\ \surd\ \mathrm{c}\ 3 + \surd\ \mathrm{q}\ 2 - 1 = \surd^3\ (\surd^3\ 3 + \surd\ 2 - 1).$$

Elk signum radicis universalis reikt tot aan het onmiddellijk volgende, tenzij door onderstreping zijn bereik vergroot wordt, zooals bij de universalia universalium; bv.:

$$\surd\ \mathrm{q}.\ 10 + \surd\ \mathrm{q}\ 2 - \surd\ \mathrm{q}.\ 8 - \surd\ \mathrm{q}\ 3 = \surd\ (10 + \surd\ 2) - \surd\ (8 - \surd\ 3);$$
$$\surd\ \mathrm{q}.\ 5 + \surd\ \mathrm{c}\ 2 - \surd\ \mathrm{q}.\ \underline{3} - \surd\ \mathrm{q}\ 2 = \surd\ (5 + \surd^3\ 2 - \surd\ (3 - \surd\ 2)).$$

Bij de vergelijkingen in Bk. II vindt men voorzichtigheidshalve soms twee wortelstrepen gebruikt; bv.:

$$\surd\ \mathrm{qss}.\ 3 + \surd\ \mathrm{q}.\ 2\,R - 1 = \surd^{10}\ (3 + \surd\ (2\,x - 1)).$$

Overigens stemt Napier's behandeling van de wortelvormen vrijwel met die van den tegenwoordigen tijd overeen.

Paciuolo en Cardano bedienen zich van den naam „radix universalis'', evenals Napier, maar van de notatie ℞V; Bombelli verkiest de uitdrukking „radix legata'' boven die van radix universalis en plaatst den radicandus tusschen een L en haar spiegelbeeld; Chuquet spreekt van „racine lyee'' en onderstreept den radicandus, evenals Napier; Stevin maakt van de benamingen „racine d'un binomie, trinomie, quadrinomie, . . . multinomie'' gebruik; van Girard eindelijk zijn de haken afkomstig.

Chuquet.

℞.^{3} 13 . p . ℞.^{2} 10 . m̃. ℞.^{4} ℞.^{2} 6 . m̃ . 2 .
$= \sqrt[3]{(13+\sqrt{10})} - \sqrt[4]{(\sqrt{6}-2)}$;
℞.^{2} ℞.^{2} 192 . p̄ . ℞.^{2} 2352 . m̃ . 62 .
$= \sqrt{(\sqrt{192}+\sqrt{2352}-62)}$.

Paciuolo.

℞V 40 m̃ ℞ 320 $= \sqrt{(40-\sqrt{320})}$.

Cardano.

℞V : cu. ℞ 108 p : 10 m : ℞V : cu. ℞ 108 m : 10
$= \sqrt[3]{(\sqrt{108}+10)} - \sqrt[3]{(\sqrt{108}-10)}$.

Bombelli.

℞ c L 4 p di m ℞ q 11 ⅃ p ℞ c L 4 m di m ℞ q 11 ⅃
$= \sqrt[3]{(4+\sqrt{-11})} + \sqrt[3]{(4-\sqrt{-11})}$;
℞ q L ℞ c L ℞ q 68 p 2 ⅃ m ℞ c L ℞ q 68 m 2 ⅃ ⅃
$= \sqrt{(\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)} - \sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)})}$.

Stifel.

√ß . 8 + √ cе 10 — √ 𝔷 200 . $= \sqrt[5]{(8+\sqrt[3]{10}-\sqrt{200})}$;
√𝔷 . 6 + √𝔷 8 . + . √ cе . √𝔷 20 — 2 .
$= \sqrt{(6+\sqrt{8})} + \sqrt[3]{(\sqrt{20}-2)}$.

Stevin.

2 — √5 + √bino. 7 — √$51\frac{1}{5}$ $= 2-\sqrt{5}+\sqrt{(7-\sqrt{51\frac{1}{5}})}$;
√ trino. √3 + √2 — √5 $= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}$;
√ ③ bino. √108 + 10 — √ ③ bino. √108 — 10
$= \sqrt[3]{(\sqrt{108}+10)} - \sqrt[3]{(\sqrt{108}-10)}$.

Girard.

Œ (72 + √5120) $= \sqrt[3]{(72+\sqrt{5120})}$;
$\sqrt{(2\frac{1}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}})} - \sqrt{(2\frac{1}{2}-\sqrt{3\frac{1}{4}})}$.

b) Algemeene Rekenkunde. Vergelijkingen.

Liber Secundus. De Positiva Sive Cossica Algebræ Parte. 46 pp.

Caput I. De Definitionibus Et Divisionibus Partium, Et De Vocabulis Artis.

1. Positivam Algebræ partem, per suppositiones fictas, veram quantitatem verumque numerum quæsitum patefacere diximus, Lib. I. cap. 1, sect. 7.

2. Positiones etiam, sive suppositiones, sunt notulæ quædam fictæ unitate notatæ, quas loco ac vice quantitatum ac numerorum ignotorum addimus, substrahimus, multiplicamus aut dividimus.

3. Positiones autem, et positionum notulæ, tot sunt diversæ et dissimiles quot diversos, dissimiles, ignotosque numeros aut quantitates complectitur quæstio.

Quarum, exempli gratiâ, figuræ et nomina sunt 1 ℞, quæ una prima positio dicitur, 1 *a*, quæ unum *a*, sive una secunda positio dicitur; 1 *b*, unum *b*, sive una tertia positio; 1 *c*, unum *c*, sive una quarta positio; et sic per alphabetum.

4. Hæ positionum notulæ (eo quod pro omnis rei numero et mensurâ incognito ponuntur) vulgari nomine Res dicuntur, suntque primæ ordine.

5. Quadratum est productum ortum ex harum rerum aliquâ in se ductâ, estque secundum ordine.

Ut 1 ℞ in se ducta facit unum primum quadratum, quod sic scribitur 1 q. Item, 1 *b* in se ductum facit 1 *b* q, quod unum *b* quadratum dicitur. Item, 1 *a* per 1 *a* ductum facit 1 *a* q, quod unum *a* quadratum dicitur; et sic de cæteris.

6. Cubus est qui est ductu rei cujusvis in suum quadratum oritur; estque ordine tertius.

Ut 1 ℞ ducta in 1 q facit unum cubum, qui sic scribitur 1 c. Item, 1 *a* per 1 *a* q ductum facit 1 *a* c, qui pronuntiatur sic, unus *a* cubus. Item, 1 *b* per 1 *b* q ductum facit 1 *b* c, etc.

10. Positivi dicuntur numeri quicunque rationales, vel irrationales, signis positivorum ordinum notantur.

Ut 6 ℞, vel 5 *a*, vel 7 *b* c, vel $\surd$ q 6 *b*, vel $\surd$ c 7 *a* q, positivi numeri dicuntur. Interdum etiam nomen positivi pro numero quovis capitur.

11. Simplex dicitur quivis numerus positivus unicus solus, aut solitarie sumptus.

12. Compositus dicitur qui ex pluribus simplicibus qui signis pluris vel minoris copulantur constat.

13. Purus dicitur simplex qui, post unicum uninomium habet unius tantum positionis signum conscriptum.

14. Mistus dicitur simplex qui post unicum uninomium, habet diversarum positionum signa conscripta.

Caput II. De Additione Et Substractione Positivorum.

Caput III. De Radicum Ex Simplicibus Extractione.

Caput IV. De Simplicium In Se Multiplicatione, Et De Reductione.

Caput V. De Positivorum Multiplicatione Generali.

Caput VI. De Situ Et Collocatione Simplicium Compositi.

Caput VII. De Divisione.

Caput VIII. De Radicum Ex Compositis Extractione.

5. Patet itaque ex præmissis quod aliquæ extractionum reliquiæ nulla habent signa positiva, et hæ reliquiæ totæ formales dicuntur; aliæ reliquiæ habent, et hæ totæ informales dicuntur.

Informalium reliquiarum quædam sunt formabiles, quædam reformabiles, quædam prorsus deformes et irreformabiles.

6. Formabiles sunt reliquiæ cum quibus secunda pars regulæ extractionis exerceri possit, reliquias inde nullas, aut prioribus minus informales reddentes. Ipsumque opus secundæ partis regulæ extractionis Conformatio dicitur.

7. Reformabiles sunt reliquiæ quas si diviseris per compositum aliquod æquale nihilo (seu per æquationem ad 0), et hinc extantes recentiores reliquias per aliam atque aliam ad 0 æquationem, si opus sit, diviseris; extabunt tandem reliquiæ aut nullæ, aut formales, aut formabiles, illæque æquationes Reformatrices vocabuntur, et ipsum opus dividendi Reformatio dicetur.

8. Ut igitur reliquiæ informales fiant formales, conformabiles conformabis (per 6 prop. hujus); et reformabiles (per 7,) reformabis, et reliquias omnium novissimas notabis, quæ si aut nullæ aut formales fuerint, bene est, tunc enim quotientes omnes conformationum copulandæ et abbreviandæ sunt, et erunt radix proxima reformata; quotientes verò reformationum inutiles semper, et spernendæ sunt.

9. At si defectu reformatricium post ultimam conformationem exstent reliquiæ informales, hæ deformes aut irreformabiles appellantur.

10. Deformium reliquiarum et suarum radicum duæ sunt species, singulares et plurales, quarum singulares sunt eæ deformes quæ habent unum aliquod simplex et purum positivum, aut mixti positivi particulam unam in radice, seu quotiente cui non fuerit aliud simile vel ejusdem positionis, nec in quotiente seu radice nec inter reliquias.

11. Plurales dicuntur radices suæque reliquiæ, quum uniuscujusque positionis plures simplices in radice vel inter reliquias reperiuntur.

12. Sunt itaque radicum quatuor formæ. Prima est verarum radicum, secunda est formalium, tertia singularium, quarta pluralium; quarum extrahendarum usum inferius docebimus.

Caput IX. De Æquationibus Et Suis Exponentibus.

1. Æquatio est positivorum incertorum valorum cum aliis sibi æqualibus collatio, ex quâ positionis valor quæritur.

> Ut si quis pro numero quæsito aut quantitate quæsitâ ponens 1 ℞, ejus valorem ignorans, postea per hypothesin quæstionis deprehendens 3 ℞ æquari ad 21, conserat tres res cum suis æqualibus 21, ea æqualitatis collatio dicitur æquatio; et hinc infertur rem unam seu unam positionem valere 7.

2. Inter æquationis partes invicem æquales interjicitur linea duplex, quæ signum æquationis dicitur.

> Ut 3 ℞ $=$ 21, quæ sic pronuntiantur, tres res æquales viginti uni. Item 1 ℞ $=$ 7, quæ pronuntiantur, una res æqualis ad septem.

3. Æquationum aliæ unius tantum sunt positionis, aliæ plurium positionum.

4. Item æquationum aliæ rudes, quæ ad minores terminos, magisque perspicuos et succinctos reduci possunt, aliæ perfectissimæ dicuntur, quæ è contra sunt maxime perspicuæ et succinctæ.

5. Item æquationum aliæ simplices, aliæ quadratæ, aliæ cubicæ, aliæ superiores: quarum simplices sunt quæ duobus ordinibus tantum constant.

6. Simplicium æquationum aliæ sunt reales, quæ sunt rerum æqualium ad numerum; aliæ radicales, quæ sunt quorundam quadratorum, cuborum, vel aliorum superiorum ad numerum æquationes.

7. Æquatio quadrata est quæ tribus proportionalibus ordinibus constat.

8. Æquatio cubica est quæ quatuor proportionalibus ordinibus constat.

9. Æquatio quadrati quadrata est quæ quinque; supersolida, quæ sex; quadrati cubica, quæ septem, proportionalibus ordinibus constant: Et sic de reliquis superioribus in infinitum.

10. Æquatio illusiva est ea quæ impossibile asserit, et siquis impossibile quærit in æquationem illusivam cadet ejus responsum.

> Ut 1 ℞ $=$ 3 ℞ est æquatio illudens, siquidem impossibile est quicquam suo triplo æquari. Item 1 q $=$ 4 ℞ — 5 est æquatio illudens, siquidem nullum quadratum possit æquari quatuor rebus seu radicibus suis, ablatis quinque; ut inferius patebit.

11. Expositio est reductio rudis æquationis ad perfectissimam et realem æquationem, et pars æquationis realis quæ uni rei æquatur dicitur Exponens, eaque quæstionem solvit.

12. Omnis æquatio præter illusivam habet saltem unicum exponens, validum sive invalidum.

> Hoc postea docebimus, hîc præmonuisse sufficit.

13. Exponentia valida sunt ea quæ per se posita copulâ $+$ notantur, et semper sunt majora nihilo. Exponentia verò invalida sunt quæ per se posita copulâ — notantur, et hæc minora sunt nihilo.

> Ut in hâc æquatione 1 ℞ $=$ 7, septem sint exponens validum, quia (per prop. 1 cap. 6 Lib. I.) copulâ $+$ notari subintelligitur. At in hâc reali

æquatione 1 ℞ = — 7, exponens contrariâ ratione invalidum dicitur, quia copulâ — notatur sic, — 7, estque nihilo minus.

14. Exponentium alia et numero solo et quantitate solâ, alia tantum numero solo, alia tantum quantitate solâ, alia partim hâc partim illo, alia neutro, exprimi possunt.

De his, suisque exemplis, latius per ordinem, capitibus 11, 12, 13, dicetur.

Caput X. De Generali Æquationum Præparatione.

1. Præparatio est reductio æquationum rudium ad perfectiores, quas postea ad perfectissimas reales reducit expositio.

2. Præparantur et perspicuæ redduntur æquationes rudes quinque modis; transpositione, abbreviatione, divisione, multiplicatione, et extractione.

17. Eisdem propositionibus quibus universales deleri dictum est, possunt et simplices irrationales inter rationales transponi, multiplicari, et tandem deleri.

Ut sit æquatio 12 — √ q 1 ℞ = 1 ℞, per prop. 9 separentur, sic, 12 — 1 ℞ = √ q 1 ℞, et multiplicentur quadrate latera, fientque 1 q — 24 ℞ + 144 = 1 ℞, sive 1 q — 25 ℞ + 144 = 0, quæ prorsus rationales sunt. Quæ itaque, propositionibus 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15, dicuntur de universalibus, eadem de simplicibus radicatis etiam dici intelligantur.

18. Quæ aliter præparari possunt æquationes, per propositionem ne præparentur præmissam; multiplicatio enim irrationalium simplicium plerumque plura exponentia debito exhibet.

Ut præcedens exemplum 12 — √ q 1 ℞ = 1 ℞, per præmissam multiplicatum, reddit æquationem 1 q — 25 ℞ + 144 = 0, quæ duo habet valida exponentia, viz. 16 et 9, cum revera ipsa principalis æquatio, 12 — √ q ℞ = 1 ℞, habeat unicum exponens tantum, viz. 9, ut postea patebit. Illa igitur æquatio principalis per prop. 17 ne præparetur, dummodo eadem per prop. 20 subsequentem melius et simplicius præparari possit, ut ibidem dicetur.

19. Si æquationis ad 0 extrahatur radix aliqua vera (viz. relicto nihilo), radix illa erit magis succincta, et ad 0 æquatio.

Ut ex æquatione 1 c — 6 q + 12 ℞ — 8 = 0 extrahe radicem cubicam veram, viz. 1 ℞ — 2 = 0, quæ erit abbreviata et succincta æquatio.

Item æquationis 1 ℞ — √ q 36 ℞ + 9 = 0 radicem quadratam extrahe, eaque erit vera (per cap. 8). viz. √ q 1 ℞ — 3 = 0, quæ est magis succincta æquatio.

20. Si æquationis ad 0 extracta radix aliqua sit, aut formalis aut (per prop. 8 cap. 8 hujus) reformata; reliquiarum copulam converte, et earundem radices quadratas vel cubicas, etc. quales ex reliquo extrahe; has radices (conversis copulis) cum radice proximâ et formali copulato, fient æquationes, et unica, non quadratinomia vel duæ quadratinomiæ, ad 0 magis succinctæ, priorisque æquationis exponentia complectentes.

Et cætera.

De naam Algebra is ontstaan uit Aldschebr Walmuḳâbala, den titel van een werk, waarin o. a. de zes soorten van vergelijkingen worden opgelost, die wij thans schrijven in den vorm:

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c,\ x^2 + bx = c,\ x^2 + c = bx,\ x^2 = bx + c,$$

en dat van Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî (Muḥammed, de zoon van Mûsâ, uit de Perzische provincie Chwarizm) afkomstig is, een Arabisch wiskunstenaar uit de eerste helft der negende eeuw, naar wien een regel van bewerking nog steeds een algorithmus wordt geheeten [1]). Alchwarizmî noemt de onbekende, die in de vergelijking voorkomt, schai (= zaak) en dschidr (= wortel), haar quadraat mâl (= vermogen) en den bekenden term dirham (= getal); onder dschebr (= herstelling) verstaat hij een zoodanige rangschikking van de termen der vergelijking, dat er in de twee leden slechts positieve termen voorkomen, en onder mukâbala (= tegenstelling) de herleiding, die ten doel heeft, de gelijksoortige termen zooveel mogelijk tegen elkander te laten wegvallen.

Muhammed ibn Mûsâ's Aldschebr Walmukâbala is o. a. de voornaamste bron geweest, waaruit Leonardo van Pisa, meer bekend onder den naam van Fibonaci (Filius Bonacii, de zoon van den Goedige), zijn Algebra et Almuchabala heeft geput, dat een onderdeel uitmaakt van diens Liber Abaci, 1202, een werk, waaraan meer dan aan eenig ander de snelle vorderingen zijn te danken, die de nieuwe wetenschap met name in Italië maakte.

De benamingen res en radix voor de onbekende, die in de vergelijking voorkomt, census voor haar quadraat en numerus voor den bekenden term, waarvan Fibonaci en zijn onmiddellijke navolgers zich bedienen, zijn niets anders dan vertalingen van de overeenkomstige Arabische termen schai, dschidr, mâl en dirham. Later kwamen buitendien voor de onbekende de namen positio, latus en numerus, in Italië cosa (= zaak), quantita en tanto, in Frankrijk chose en premier, in Duitschland coss (van cosa), sum, dingk en facit in gebruik, en voor haar vierkant quadratum, in Italië censo, quadrato, quadrato censo en potenza, in Frankrijk champ en second, in Duitschland zensus.

De naam Algebra et Almuchabala, die de leer der vergelijkingen aanvankelijk droeg, ging langzamerhand in Algebra en Regula Algebræ (Ital. Regola en Arte della cosa; Fr. Regle de la chose; Duitsch Regel Cosse en Coss zonder meer; Eng. Cossic art; Lat. Regula cosæ en Ars cossica) over; ook sprak men van Ars rei et censi en, in tegenstelling met de rekenkunde, van Ars magna (Ital. Arte maggiore). Bij Chuquet heet de algebra Rigle des premiers, en Stevin eindelijk noemt de oplossing der vergelijkingen Reigle de trois algebraique en Invention du quatriesme proportionel des

[1]) Alchwarizmî schijnt zijn landgenooten met de rekenwijzen der Indiërs bekend te hebben gemaakt in een werk van jonger datum dan zijn Aldschebr Walmukâbala, waarvan alleen een Latijnsche vertaling onder den titel: Alchwarizmî, Over het Getal der Indiërs (Algoritmi de Numero Indorum) tot ons is gekomen, die waarschijnlijk uit de eerste helft der twaalfde eeuw dagteekent, en waarin worden behandeld: de schrijfwijze der getallen, de vier hoofdbewerkingen en de zestigdeelige breuken.

quantitez, daar hij de wortels beschouwt als vierde evenredigen tot de twee leden en de onbekende:

1ste lid v/d. verg. : 2de lid v/d. verg. = onbekende : wortel.

Als voorbeelden van notatie vermeld ik:

Alkalsâdî,
een Moorsch wiskunstenaar uit de vijftiende eeuw.

63 شيء$_{12}$ ص$_{3}$, d. w. z.: $3x^2 = 12x + 63$,

waar شيء x, ص x^2 en ل = verbeeldt.

Chuquet.

.8². p̄. 16⁵. egaulx a. 2⁸. $\frac{1}{8}$., d. w. z.: $8x^2 + 16x^5 = 2\frac{1}{8}x^8$;
.28°. p̄.2¹. egaulx a. 480. ¹·m̄., d. w. z.: $28 + 2x = 480x^{-1}$.

Regiomontanus.

16 census et 2000 æquales 680 rebus,
d. w. z.: $16x^2 + 2000 = 680x$.

Cardano.

cub⁹ p: 6 reb⁹ æq̃lis 20, d. w. z.: $x^3 + 6x = 20$;
1 q̃d'quad. p : 6 quad. p : 36 æqualia 60 pos.,
d. w. z.: $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$.

Stifel.

1 ℨ æquatus 72 — 6 ℞, d. w. z.: $x^2 = 72 - 6x$.

Stevin.

1 ④ egale a — 2 ② + 8 ① — 5, d.w.z.: $x^4 = -2x^2 + 8x - 5$;
1 ② egale à 3 ① *M* sec. ① + 2 sec. ①, d. w. z.: $x^2 = 3xy + 2y$.

Napier.

2 ƺƺ — 28 ɛ + 142 ƺ = 308 ℞ — 240,
d. w. z.: $2x^4 - 28x^3 + 142x^2 = 308x - 240$;
1 *a* ƺɛ — 3 *a* ß + 2 *a* ƺƺ — 6 *a* ɛ + 1 *a* ƺ = 1 *a* + 6,
d. w. z.: $y^6 - 3y^5 + 2y^4 - 6y^3 - y^2 = y + 6$.

Vieta.

1 *C* — 8 *Q* + 16 *N* æqu. 40, d. w. z.: $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$;
A cubus + *B* plano 3 in *A*, æquari *Z* solido 2,
d. w. z.: $A^3 + 3B^2A = 2Z^3$;

klinkers stellen onbekenden, medeklinkers bekenden voor.

Harriot.

aaa — 3 *bba* = 2 *ccc*, d. w. z.: $a^3 - 3b^2a = 2c^3$.

Descartes.

$$x^3 * + p\,x + q \infty 0, \text{ d. w. z.: } x^3 + p\,x + q = 0;$$
$$y^4 - 8\,y^3 - 1\,yy + 8\,y^* \infty 0, \text{ d. w. z.: } y^4 - 8\,y^3 - y^2 + 8\,y = 0;$$

de coëfficient 1 staat nooit voor den eersten term; tweedemachten worden steeds als producten geschreven; sterretjes duiden ontbrekende termen aan; het gelijkteeken is door vervorming en omkeering uit „æ'' ontstaan.

Napier, die in afwijking van zijn voorgangers onder den naam Algebra ook de behandeling der wortelvormen als „pars nominata'' begrijpt, omschrijft de „pars positiva sive cossica'' als dat deel der algebra, dat onbekende grootheden en getallen (quantitates et numeri latentes) leert bepalen door verdichte veronderstellingen (suppositiones fictas).

De onbekenden (positiones, suppositiones) duidt Napier aan met 1 *R* (una prima positio), 1 *a* (unum *a*, una secunda positio), 1 *b* (unum *b*, una tertia positio), et sic per alphabetum. Deze positiones, meestal Res geheeten, zijn de eerste in de rij (primæ ordine); dan komen de tweedemachten (secundæ ordine): 1 q (unum primum quadratum), 1 *a* q (unum *a* quadratum), enz.; daarna de derdemachten (tertiæ ordine): 1 c (unus cubus), 1 *a* c (unus *a* cubus), enz. De teekens voor de verschillende machten van de onbekenden worden eindelijk met voorbeelden er naast in een tafel vereenigd (Fig. 26).

Stifel bedient zich in zijn Arithmetica Integra, Norimbergæ 1544, van de „signa cossica'':

𝔯, 𝔷, 𝔠𝔢, 𝔷𝔷, ß, 𝔷𝔠𝔢, etc.,

waaronder 𝔯 een vervorming van den naam res schijnt te wezen; 1 𝔯 heet 1 cossa, 1 radix, 1 summa unitatum. Bij meer onbekenden duidt Stifel de „secundæ, tertiæ, etc. radices'', evenals Napier, door bijvoeging van de letters van het alphabet aan, waarvoor hij evenwel hoofdletters neemt: 1 *A* (id est, 1 *A*𝔯), 1 *A*𝔷, . . .; 1 *B* (id est, 1 *B*𝔯), 1 *B*𝔷, . . .; etc.

En in Stevin's Arithmétique, Leyde 1585, vindt men een bepaald getal met ⓪ en de machten van de onbekende met ①, ②, ③, enz. aangeduid. Bij meer onbekenden onderscheidt Stevin „quantitez premierement posées ou positives'' en „quantitez postposées'' met name „secondement, tiercement, etc. posées'' (onze *y*, *z*, enz.) en duidt deze met de voorvoegsels „sec, ter, etc.'' aan. Zoo schrijft hij voor *a*, x^4, *y*, $4z^2$, *xy* en 5 $x^4 z^2$ resp.:

⓪, ④, 1 sec ①, 4 ter ②, 1 ① sec ① en 5 ④ ter ②.

Positivi noemt Napier alle meetbare en onmeetbare getallen, die door middel van de teekens der gestelde orden (signa positivorum ordinum) worden aangeduid, bv.: 6 *R*, 5 *a*, 7 *b* c, √ q 6 *b*, √ c 7 *a* q; zij worden onderscheiden in éénternen (simplices), bv.: 6 *a*, √ q 3 c, √ p 1 *ab*, en veeltermen (compositi), bv.: 6 *a* + √ q 3 c, 5 *R* — 2 q, √ q 30 c + 3 *a* — 4 *Rb*, de ééntermen o. a. in zuivere (simplices puri), waarin één onbekende voorkomt, bv.: 5 *a* q, 3 c, √ q 2 *c* c, en gemengde (simplices misti), met meer onbekenden er in, bv.: 5 q *ac*, 2 *R ac*, √ q 1 *ab*, √ c 1 *a* q *b* ss *c*.

De herleidingen worden door Napier nagenoeg op dezelfde wijze als tegenwoordig uitgevoerd. De deeling van 1 qq + 71 q + 120 — 154 *R* — 14 c door 6 + 1 q — 5 *R* bv. komt na rangschikking der veeltermen (collocatio simplicium compositorum) aldus te staan:

$$\begin{array}{llllll}
 & & +\,\underline{20\,q} & & & \\
 & -\ \underline{9\,c} & +\,\underline{65\,q} & -\,100\,R & & \\
\underline{1\,qq} & -\,\underline{14\,c} & +\,\underline{71\,q} & -\,\underline{154\,R} & +\,\underline{120} & (1\,q - 9\,R + 20 \\
\underline{1\,q} & -\,\underline{5\,R} & +\,\underline{6} & +\,6 & +\,\underline{6} & \\
 & \underline{1\,q} & -\,5\,R & -\,\underline{5\,R} & & \\
 & & \underline{1\,q} & & &
\end{array}$$

De deeler wordt onder het deeltal geschreven en telkens, als weer een term in het quotient bepaald moet worden, naar rechts verschoven; de resten komen boven het deeltal te staan; de termen van deeltal, resten en deeler, die gebruikt zijn, worden niet, zooals de cijfers bij de deeling in de rekenkunde, doorgehaald, maar onderstreept.

De vierkantsworteltrekking uit √ q 4 c + 1 q — √ q 576 *R* + 144—23 *R* wordt aldus uitgevoerd:

a) Men rangschikt den veelterm, trekt den vierkantswortel uit den eersten term, d. i. 1 q, vindt als eersten term van den wortel 1 *R* en houdt + √ q 4 c — 23 *R* — √ q 576 *R* + 144 als rest over:

$$\underline{1\,q} + \sqrt{}\,q\,4\,c - 23\,R - \sqrt{}\,q\,576\,R + 144\ (1\,R$$

b) Men deelt 2-maal den eersten term van den wortel op den eersten term van de rest, d.i. 2 *R* = √ q 4 q op √ q 4 c, vindt √ q 1 *R* als tweeden term van den wortel en houdt — 23 *R* √ q 576 *R* als rest over, waarvan na aftrek van de tweedemacht van √ q 1 *R* als rest — 24 *R* — √ q 576 *R* + 144 overblijft:

$$\begin{array}{llll}
 & & -\ 24\,R & \\
\underline{1\,q} & \underline{+\sqrt{}\,q\ 4\ c} & -\ \underline{23\,R} & -\sqrt{}\,q\,576\,R + 144\ (1\,R + \sqrt{}\,q\,1\,R \\
\underline{+\sqrt{}\,q\ 4\ q} & & &
\end{array}$$

c) Men deelt 2-maal de som van den eersten en den tweeden term van den wortel op de som van den eersten en den tweeden term van de rest, d. i. 2 R + $\surd$ q 4 R op — 24 R — $\surd$ q 576 R, vindt — 12 als derden term van den wortel en houdt + 144 als rest over, waarvan na aftrek van de tweedemacht van — 12 nul als rest overblijft:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad -\,\underline{24\;R} \\ \underline{1\,q} + \underline{\surd\,q\;4\,c} - \underline{23\;R} - \underline{\surd\,q\;576\;R} + \underline{144}\;(1\,R + \surd\,q\,1\,R - 12 \\ \qquad + \underline{\surd\,q\;4\,q} + \underline{2\;R} + \underline{\surd\,q}\;4\;\underline{R} \end{array}$$

De gezochte wortel is dus 1 R + $\surd$ q 1 R — 12.

Om een willekeurigen coëfficient aan te duiden, bedient Napier zich van een nul. Bv.:

„Sic 0 b ductum per 0 b c, facit 0 b qq." p. 129, d. w. z.: zooveel z $\times$ zooveel z^3 = zooveel z^4.

„Item 0 q per 0 ss fiet 0 sss." p. 129.

„Item, 0 a q per 0 c non producit 0 a q c sed 0 c a q, præposito signo primæ positionis; quod quidem 0 c a q sic pronunciatur, tot seu nulli cubi primæ positionis ducti in unum quadratum secundæ." p. 129.

„Item 0 ss per 0 c fit quotiens 0 q, vel $\frac{0\,q}{0}$." p. 135, d. w. z.: zooveel x^5: zooveel x^3 = zooveel x^2 of $\frac{\text{zooveel } x^2}{\text{zooveel}}$.

„Item 0 c per 0 ss divisum facit quotientem $\frac{0}{0\,q}$." p. 135.

„Ut sit 0 a c per 0 q dividendum, fit quotiens $\frac{0\,a\,c}{0\,q}$." p. 135.

De oplossing van de vierkantsvergelijkingen met één onbekende schijnt bij Napier groote verwachtingen te hebben opgewekt omtrent de vruchtbaarheid der toepassing van de vierkantsworteltrekking bij de oplossing van vergelijkingen van den tweeden graad met meer onbekenden en van de worteltrekking in het algemeen bij de oplossing van willekeurige vergelijkingen. Vandaar, dat hij uitvoerig bij de worteltrekking uit veeltermen stilstaat en uit de rest, die er overblijft, steeds de letters (signa positivorum ordinum) zoekt te verdrijven, waartoe hij aldus te werk gaat: De vierkantsworteltrekking uit $x^2 + y^2 - x + y - 18$, om ons van de tegenwoordige notatie te bedienen, levert (Napier) $x - y - \frac{1}{2}$ als wortel en $2\,xy - 18\frac{1}{4}$ als rest op. Was nu bv. $xy + x - y - 10 = 0$ gegeven, dan zou men de rest $2\,xy - 18\frac{1}{4}$ door $xy + x - y - 10$ kunnen deelen, waarna er $-\,2\,x + 2\,y + 1\frac{3}{4}$ zou overblijven. Daar de waarde van de rest niet veranderd is, kan de worteltrekking met $-\,2\,x + 2\,y + 1\frac{3}{4}$ worden voortgezet; men vindt — 1 als vierden term in den wortel en $-\frac{1}{4}$ als rest. In de onderstelling, dat $xy + x - y - 10 = 0$ is, kan men dus $x - y - 1\frac{1}{2}$ als benaderden vierkantswortel (radix quadrata proxima) uit $x^2 + y^2 - x + y - 18$ aannemen, en houdt dan een rest $- \frac{1}{4}$ over, waarin geen letters meer voorkomen.

Moet men, zoo zal Napier's gedachtengang geweest zijn, de waarden van x en y oplossen uit de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - x + y - 18 = 0 \text{ en } xy + x - y - 10 = 0,$$

dan kan men de eerste vergelijking met behulp van de tweede herleiden tot den vorm $(x - y - 1\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$, waaruit $x - y - 1\frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$ gevonden wordt: de oplossing van de twee vergelijkingen van den tweeden graad met twee onbekenden wordt op deze wijze teruggebracht tot die van een vergelijking van den tweeden en een van den eersten graad, t.w.:

$$xy + x - y - 10 = 0 \text{ en } x - y - 1\tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Evenzoo levert de vierkantsworteltrekking uit $x^2 + 4xy + y^2 - 4xz - 4yz + 4z^2 + 4x + 4y - 8z - 61$ als wortel $x + y - 2z + 2$ en als rest $2xy - 65$ op. Was nu bv. $xy - yz - z - 5 = 0$ gegeven, dan zou men de rest $2xy - 65$ door $xy - yz - z - 5$ kunnen deelen, waarna er $2yz + 2z - 55$ zou overblijven. Met deze rest kan de worteltrekking evenwel niet worden voortgezet. Maar was bv. ook nog $2yz - 3x - 3y + 8z - 21 = 0$ gegeven, dan zou de deeling van $2yz + 2z - 55$ door $2yz - 3x - 3y + 8z - 21$ de rest $3x + 3y - 6z - 34$ overlaten, die $1\frac{1}{2}$ als vijfden term in den wortel en $- 42\frac{1}{4}$ als rest zou opleveren.

De vergelijkingen, die de herleiding (reformatio) der rest van een worteltrekking, waarin letters voorkomen (reliquiæ informales) tot een rest zonder letters (reliquiæ formales) mogelijk maken, worden door Napier „reformatrices" genoemd.

Opnieuw hebben we dus misschien reden, om het te betreuren, dat Napier zijn theorie der vergelijkingen onvoltooid heeft gelaten, waartoe de aanleiding evenwel ook in de omstandigheid kan hebben bestaan, dat de verwachtingen omtrent de vruchtbaarheid van zijn denkbeeld ijdel bleken te wezen.

Van enkele bijzonderheden uit deze theorie moeten wij nochtans melding maken.

Onder een vergelijking (æquatio) verstaat Napier twee stelkundige vormen, die aan elkander gelijk zijn en ter bepaling van de waarde der onbekende bijeen worden gebracht. Uitsluitend bij de vergelijkingen bedient hij zich van ons tegenwoordig gelijkteeken, dat door Recorde in de algebra werd ingevoerd, om de uitdrukking „is equal to" te vervangen en door dezen gekozen werd, „omdat geen twee dingen elkander in meer opzichten kunnen gelijken dan een paar evenwijdige lijnen van dezelfde lengte". [1])

Zuivere vergelijkingen heeten „æquationes simplices", bv.: 3 *R* = 27, 5 *b* q = 20; zijn ze van den eersten graad, dan worden ze „æquationes reales" genoemd, bv.: 1 *a* = 3, 2 *R* = $\surd$ q 3 — 1; anders „æquationes radicales", bv.: 2 q = 8, 3 c = 24, 1 *a* ss = $\surd$ c 9.

Vergelijkingen, die uit drie, vier, vijf, enz. termen bestaan, waarin de exponenten der onbekenden met een zelfde bedrag opklimmen, heeten „æquationes quadratæ, cubicæ, quadrati quadratæ, etc.", bv.: 2 q + 3 *R* = 4, 1 *a* q c + 0 *a* qq — 2 *a* q = 4, enz.

„Æquationes illusivæ" eindelijk zijn valsche vergelijkingen, zooals 1 *R* = 3 *R*, 1 q = 4 *R* — 5.

De herleiding van een ruwe vergelijking (æquatio rudis) tot een vergelijking van den vorm: onbekende = bepaalde waarde (æquatio realis), wordt „expositio" genoemd; de bepaalde waarde, waaraan de onbekende gelijk is, heet de wortel (exponens) van de vergelijking en kan positief (exponens validum) en negatief (exponens invalidum) zijn.

Onder den naam van „præparatio" behandelt Napier vervolgens uitvoerig de herleiding der vergelijkingen door „transpositio", „abbreviatio", „divisio", „multiplicatio" en „extractio", waaronder men de overbrenging van termen van het eene naar het andere lid, met name de herleiding op nul, de vereeniging van gelijksoortige termen, de deeling door den coëfficient van de hoogste macht der onbekende en, zoo mogelijk, door de onbekende zelf, de verdrijving van breuken en wortels door vermenigvuldiging en machtsverheffing, en de toepassing der worteltrekking bij de oplossing van vergelijkingen moet verstaan.

Bij de verdrijving van wortels door machtsverheffing komt Napier tot een ontdekking, die voor zijn tijd alleszins merkwaardig mag heeten: die der invoering van wortels (multiplicatio irrationalium simplicium plerumque plura exponentia debito exhibet). Zoo gaat de vergelijking 12 — $\surd$ q 1 *R* = 1 *R* in 1 q — 25 *R* + 144 = 0 over, die twee positieve wortels, 16 en 9, bezit, waarvan 16 evenwel niet aan de vergelijking 12 — $\surd$ q 1 *R* = 1 *R* voldoet. Om die reden geeft Napier aan de herleiding van de vergelijking 12 —

[1]) ... and to avoid the tediouse repetition of these woordes, is equal to, I will sette, as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or gemowe lines of one lengthe, thus =, bicause noe 2 thynges can be moare equalle.

Recorde, The Whetstone of Witte, which is the Second Part of Arithmeticke, containing Extraction of Roods, etc., London 1557.

$\surd$ q 1 R = 1 R door worteltrekking de voorkeur, waaronder de oplossing als vierkantsvergelijking met $\surd$ q 1 R als onbekende moet worden verstaan.

Door worteltrekking kan men een vergelijking, waarvan het tweede lid nul is (æquatio ad nihil) tot eenvoudiger vorm herleiden:

1) als het eerste lid een volkomen macht is. Zoo gaat de vergelijking 1 c — 6 q + 12 R — 8 = 0 door kubiekworteltrekking in 1 R — 2 = 0 en de vergelijking 1 R — $\surd$ q 36 R + 9 = 0 door vierkantsworteltrekking in $\surd$ q 1 R — 3 = 0 over;

2) als het eerste lid wel is waar geen volkomen macht is, maar er bij worteltrekking, zoo noodig met behulp van andere gegeven vergelijkingen (reformatrices), een rest overblijft, waarin geen onbekende voorkomt. Uit deze rest met omgekeerd voorteeken trekke men, zegt Napier, den gelijknamigen wortel en telle dien, na omkeering van zijn voorteeken, bij den benaderden wortel uit het eerste lid van de vergelijking op; men krijgt dan, als de wortelexponent oneven is, één en anders twee vergelijkingen, die dezelfde wortels bezitten als de oorspronkelijke. Trekt men bv. uit het eerste lid van de vergelijking $x^2 - 6x + 7 = 0$ den vierkantswortel, dan komt er $x - 3$ en er blijft -2 als rest over; men kan de vergelijking daarom vervangen door de twee vergelijkingen $x - 3 - \sqrt{2} = 0$ en $x - 3 + \sqrt{2} = 0$. Evenzoo vindt men, den vierkantswortel uit het eerste lid van de vergelijking $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ trekkende, $x^2 - 5x + 5$ als wortel en -1 als rest, zoodat men deze vergelijking kan vervangen door de twee vergelijkingen $x^2 - 5x + 5 - 1 = 0$ en $x^2 - 5x + 5 + 1 = 0$. En trekt men den kubiekwortel uit het eerste lid van de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 5 = 0$, dan blijkt, dat ze tot den vorm $x + 1 + \sqrt[3]{4} = 0$ kan worden teruggebracht.

Napier zelf licht zijn regel, waarnaar wij reeds bij de bespreking van zijn „arcanum algebræ" verwezen hebben, niet met voorbeelden toe; zijn MS eindigt hier met de mededeeling van Robert Napier aan Briggs, dat er van deze Algebra niet meer ordelijk was nedergesteld:

„There is no more of this Algebra orderlie sett doun." p. 162.

Opmerkingen.

Wanneer zijn de Ars Logistica en de Algebra opgesteld?

Napier's uitvinding van de logarithmen dateert van vóór 1594 [1]). De samenstelling van den Canon Mirificus en van de Descriptio en

[1]) Zie p. 49.

de Constructio — deze vóór gene [1]) — moet gedurende vele jaren Napier's beschikbaren tijd in beslag hebben genomen (à me longo tempore elaboratum [2])).

Op de uitgaaf van de Descriptio in 1614 volgt die van de Rabdologia in 1617, kort voor Napier's dood (4 April 1617). De Arithmetica Localis werd misschien reeds in 1611 neergeschreven en de Rabdologia in 1615; het Promptuarium Multiplicationis werd later uitgedacht [3]).

Tusschen 1614 en 1617 valt Napier's kennismaking met Briggs [4]) en werd het plan gevormd voor de uitgaaf van de Arithmetica Logarithmica, waarvoor Napier het theoretische deel zou bewerken: de berekening van de tafel zou wegens Napier's zwakke gezondheid aan Briggs worden overgelaten [1]). Misschien moet het onvoltooid gebleven aanhangsel bij de Constructio, De alia eaque præstantiore Logarithmorum construenda, als een voorloopig ontwerp van de theorie der nieuwe logarithmen en Briggs' Logarithmorum Chilias Prima, [Londen 1617], als een proeve van bewerking der tafel worden aangemerkt. Het aanhangsel van de Constructio, Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda, vormt Napier's laatsten arbeid [1]).

Dit alles in aanmerking genomen, valt de samenstelling van de Ars Logistica en de Algebra waarschijnlijk vóór 1594, verscheiden jaren vroeger wellicht, daar de bewerking van A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John, die in $159\frac{3}{4}$ het licht zag, Napier geruimen tijd moet hebben beziggehouden.

En dit vermoeden wordt versterkt door de omstandigheid, dat Napier in zijn Ars Logistica nergens zijn logarithmen vermeldt, zelfs niet, waar hij de bekortingen bij de uitvoering van vermenigvuldigingen en deelingen behandelt [5]), en evenmin van de notatie der decimale breuken rept, waarvan hij zich, onder verwijzing naar Stevin's Arithmetica Decimalis, in zijn Rabdologia bedient [6]).

Tegen deze gevolgtrekking zou de uitdrukking „sive, omnium facillime, per ossa Rhabdologiæ nostræ'' op p. 42 van de Ars Logistica [7]) pleiten, als ze niet, blijkens mededeeling van Mark Napier [8]), in het MS met een verwijzingsteeken op den rand der

[1]) Voorbericht der Constructio. Zie noot [2]) op p. 101.
[2]) Voorbericht der Rabdologia. Zie de noot op p. 68.
[3]) Zie noot [4]) op p. 70.
[4]) Voorbericht der Arithmetica Logarithmica. Zie noot [1]) op p. 104.
[5]) Zie p. 128.
[6]) Zie p. 55.
[7]) Zie p. 129.
[8]) Introduction, p. xvii.

bladzijde voorkwam en dus waarschijnlijk misschien door Napier zelf, misschien door zijn zoon Robert later was bijgevoegd.

Evenwel meen ik niet te mogen verhelen, dat de Ars Logistica, naar inhoud en vorm een meesterwerk, niet den indruk maakt van door een pasbeginnend schrijver te zijn opgesteld.

Napier's Algebra eindelijk is zonder eenigen twijfel van ouder datum dan zijn Ars Logistica.

Dat dit MS niet mag worden aangemerkt als het vierde boek van de Ars Logistica, waarvan Napier in het tweede boek melding maakt, blijkt:

1) uit den titel: Algebra Joannis Naperi Merchistonii Baronis, die anders bv. Liber Quartus. De Logistica Algebraica Sive Cossica had moeten luiden;

2) uit de verdeeling in twee boeken;

3) uit de verdeeling der hoofdstukken in „sectiones", die in de Ars Logistica ontbreekt;

4) uit de aanduiding van de deeling met „divisio", waar in de Ars Logistica steeds van „partitio" gesproken wordt.

Dat het vóór de Ars Logistica moet zijn opgesteld, laat zich afleiden uit twee omstandigheden:

1) beroept Napier zich in zijn Algebra eenige malen op de rekenkunde, zonder zijn Ars Logistica aan te halen, hoewel overigens zeer dikwijls naar voren en zelfs naar Euclides wordt verwezen;

2) wordt in de Algebra de in Napier's tijd meest gangbare wortelnotatie toegepast en niet de eenvoudiger schrijfwijze, die men in de Ars Logistica verklaard vindt.

Misschien is Napier bij de bewerking van zijn Algebra tot het inzicht gekomen, dat de uitgaaf van een volledige Ars Logistica een dankbaarder taak zou wezen, om ten slotte de voltooiing van dit werk voor een nog verdienstelijker arbeid te laten varen, de samenstelling van den Canon Mirificus.

(21 April 1899).

INHOUD.

	Bladz.
Inleiding	5—14
Onderwerpen en Punten, die in Napier's wiskundige werken bijzonder de aandacht verdienen	15—17
A Plaine Discovery of the whole Revelation of St John	18—22
Over den inhoud	19—21
Opmerkingen	21—22
Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio	23—53
Over den inhoud	24—49
a) De Canon Mirificus	24—39
b) Vlakke- en Bol-driehoeksmeting	39—49
Opmerkingen	49—53
Rabdologia	54—70
Over den inhoud	55—68
a) De Virgulæ Numeratrices	55—61
b) Tafels	61—61
c) Het Promptuarium Multiplicationis	62—63
d) De Arithmetica Localis	63—68
Opmerkingen	68—70
Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio	71—109
Over den inhoud	72—100
a) Samenstelling van den Canon Mirificus	72—85
b) Gewone logarithmen	85—90
c) De Analogieën van Napier	90—100
Opmerkingen	100—109
De Arte Logistica	110—159
Over den inhoud der Ars Logistica	111—143
a) Overzicht der Rekenkunde	111—118
b) Cijferkunde	118—134
c) Wortelvormen	134—143
Over den inhoud der Algebra	143—157
a) Wortelvormen	143—146
b) Algemeene Rekenkunde. Vergelijkingen	146—157
Opmerkingen	157—159
Inhoud	160—160

N. L. W. A. Gravelaar. John Napier's werken.

VERBETERINGEN.

Bladz. 28, regel 14 v. o. staat: λόγοσ en ἀριδμόσ,
lees: λόγος en ἀριθμός.

Bladz. 124, regel 11 v. o. staat: anctior, lees: auctior.

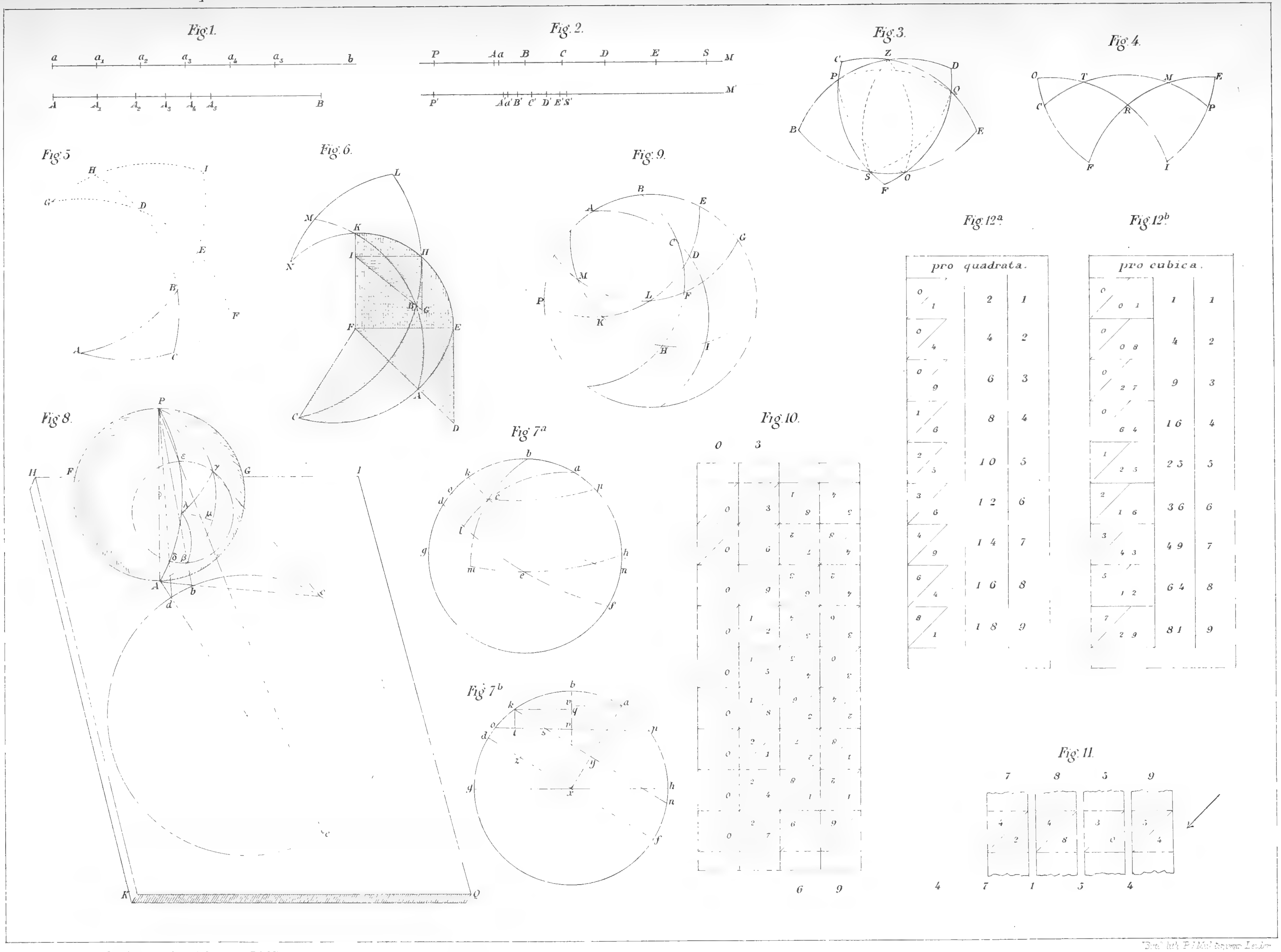


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 12a
pro quadrata.
Fig. 12b
pro cubica.
Fig. 8.
Fig. 7a
Fig. 10.
Fig. 7b
Fig. 11.

Fig. 13.

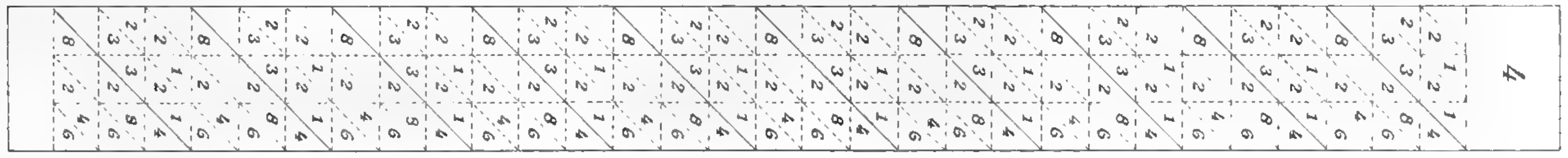


Fig. 14.

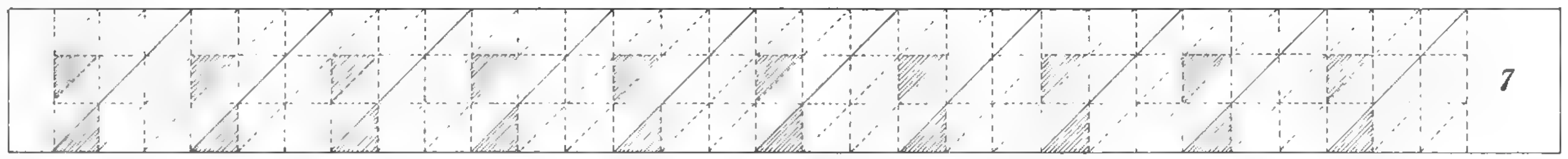


Fig. 22.

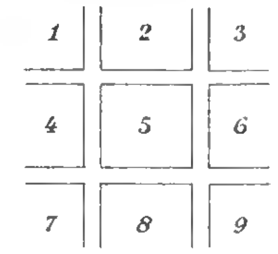


Fig. 18.

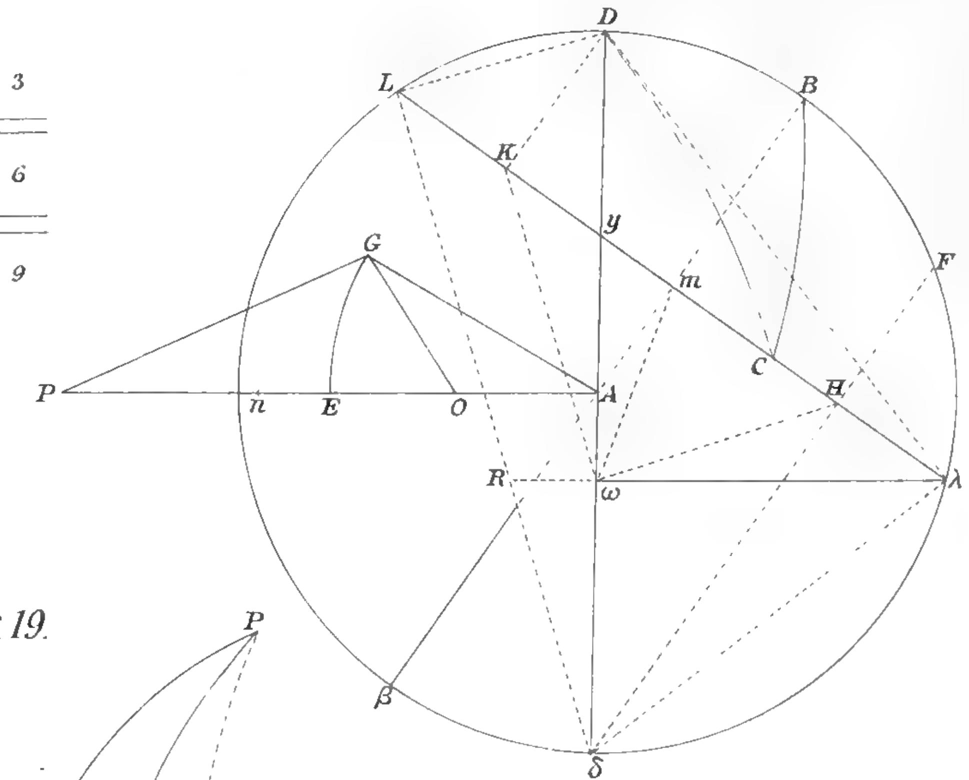


Fig. 15.

Fig. 19.

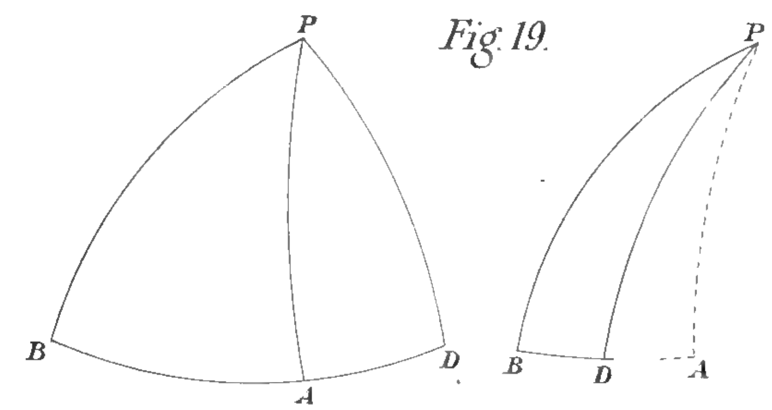


Fig. 17.

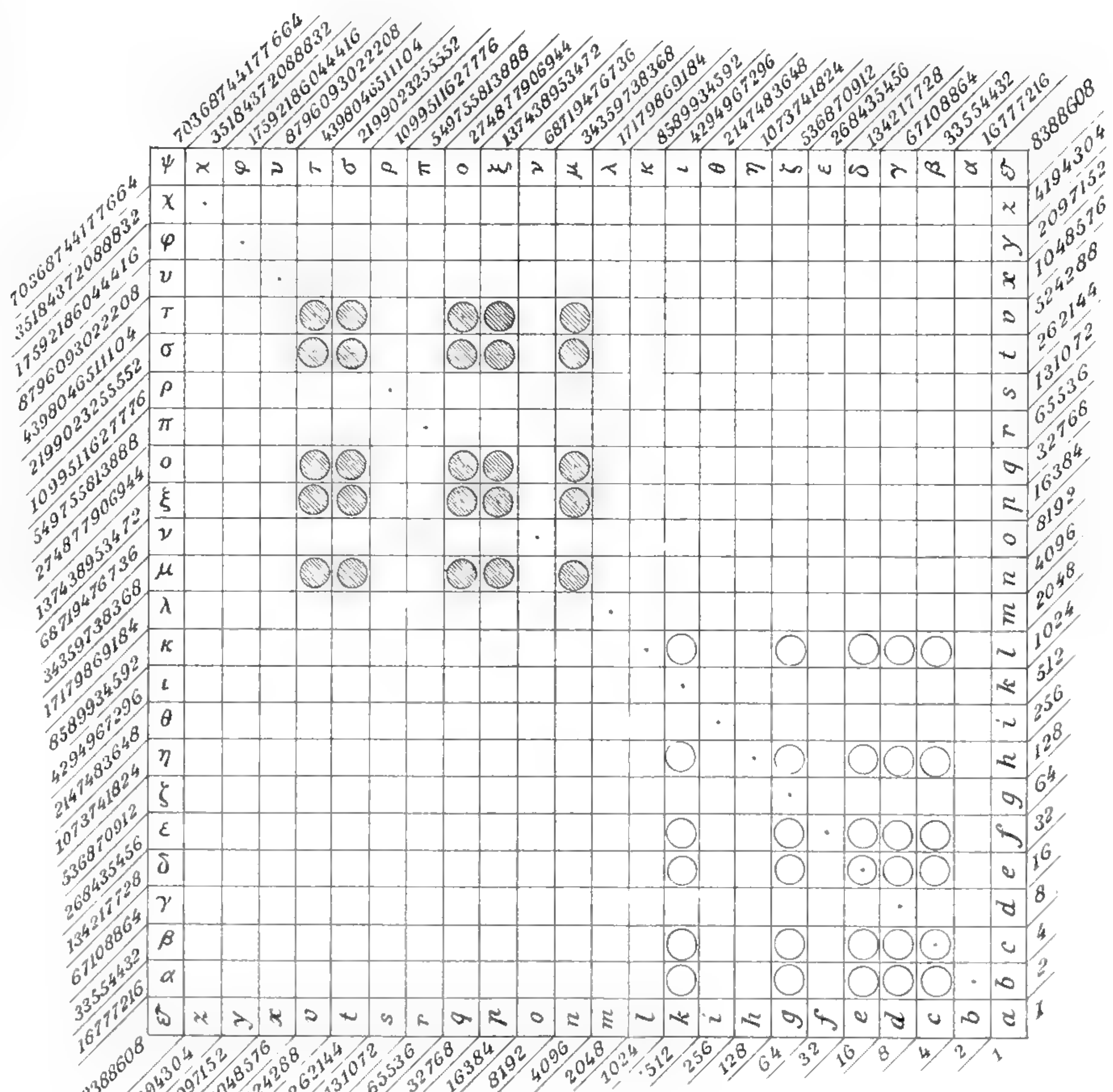


Fig. 16.

&c.

q.	32768
p.	16384
o.	8192
n.	4096
m.	2048
l.	1024
k.	512
i.	256
h.	128
g.	64
f.	32
e.	16
d.	8
c.	4
b.	2
a.	1

Fig. 21.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	18	16	14	12	10	8	6	4	
3	27	24	21	18	15	12	9		
4	36	32	28	24	20	16			
5	45	40	35	30	25				
6	54	48	42	36					
7	63	56	49						
8	72	64							
9	81								

Fig. 20.

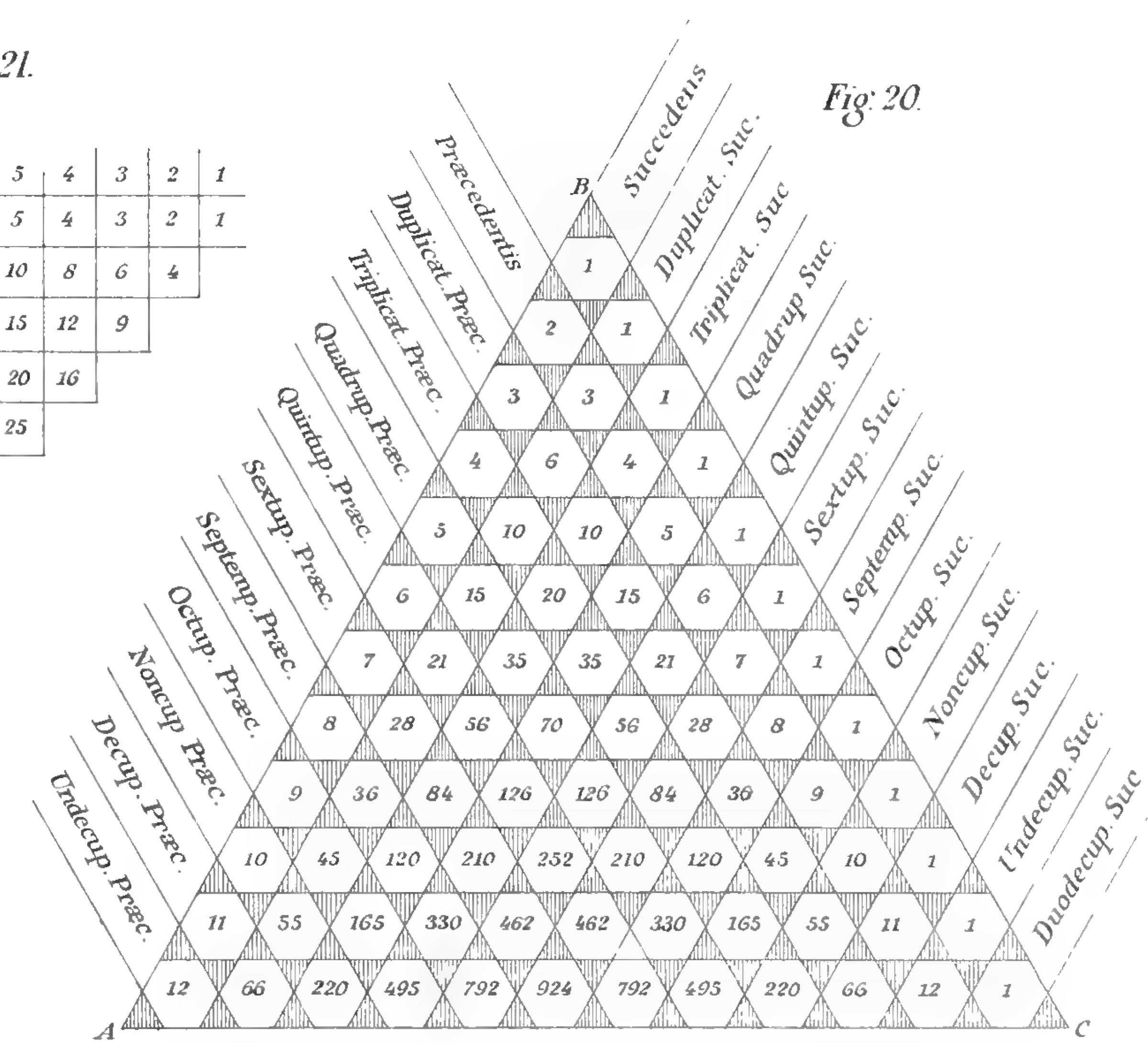


Fig. 23.

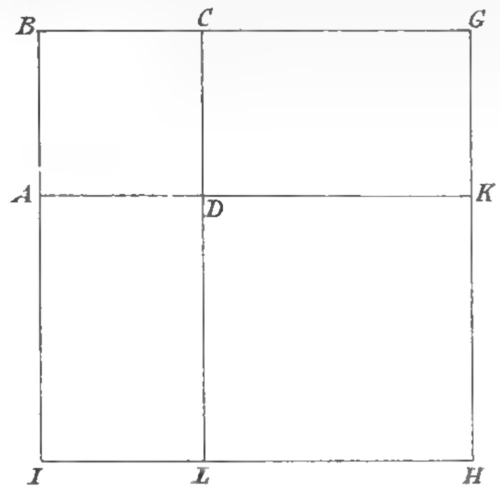


Fig. 24^b.

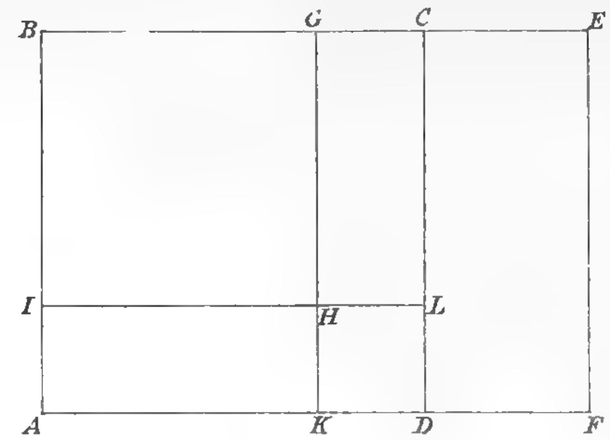


Fig. 24^a.

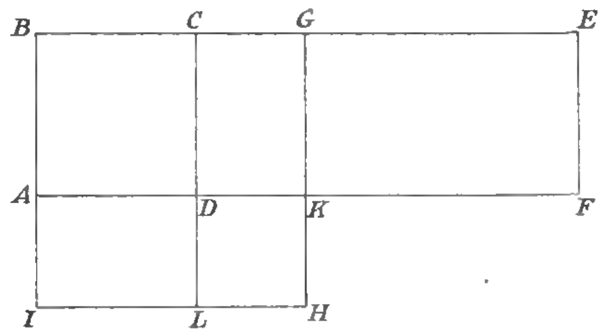


Fig. 25.

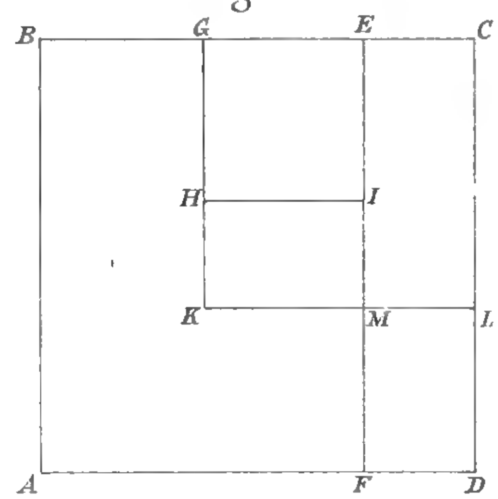


Fig. 26.

Numeri ordinum 0	Characteres et exempla ordinum primæ positionis.	Characteres et exempla ordinum secundæ positionis.	Characteres et exempla ordinum tertiæ positionis.	&c.
1	1℞ 3	1a 2	1b 4	
2	1ƺ 9	1aƺ 4	1bƺ 16	
3	1ℭ 27	1aℭ 8	1bℭ 64	
4	1ƺƺ 81	1aƺƺ 16	1bƺƺ 256	
5	1ß 243	1aß 32	1bß 1024	
6	1ƺℭ 729	1aƺℭ 64	1bƺℭ 4096	
7	1ſß 2187	1aſß 128	1bſß 16384	&c.
8	1ƺƺƺ 6561	1aƺƺƺ 256	1bƺƺƺ 65536	
9	1ℭℭ 19683	1aℭℭ 512	1bℭℭ 262144	
10	1ƺß 59049	1aƺß 1024	1bƺß 1048576	
11	1ſſß 177147	1aſſß 2048	1bſſß 4194304	
12	1ƺƺℭ 531441	1aƺƺℭ 4096	1bƺƺℭ 16777216	
13	1ſſſß 1594323	1aſſſß 8192	1bſſſß 67108864	
	&c.	&c.	&c.	

J. Bytel, lith. P.J. Mulder, impr. Leiden.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLIMINATION,

d'après la méthode Bezout,

suivant un nouveau procédé,

PAR

K. BES,

Professeur à l'école moyenne de l'Etat „Willem II" à Tilbourg.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel VI. N° 7.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

Septembre 1899.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLIMINATION,

d'après la méthode Bezout,

suivant un nouveau procédé,

PAR

K. BES,

Professeur à l'école moyenne de l'Etat „Willem II" à Tilbourg.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel VI. N° 7.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

Septembre 1899.

TABLE DES MATIÈRES.

Supplément du Premier Chapitre IX
Errata V
Avertissement VII
Chapitre I. Théorie des assemblants appliquée à un système d'équations linéaires homogènes 1
Chapitre II. Elimination entre deux équations homogènes à deux variables 34
Evaluation du résultant 34
Evaluation de la solution commune 45
Conditions pour l'existence de deux solutions communes . . 48
Conditions pour l'existence de trois solutions communes . . . 48
Evaluation de deux solutions communes 50
Evaluation de trois, quatre, etc. solutions communes 53
Chapitre III. Elimination entre trois équations homogènes à trois variables 58
Evaluation du résultant 58
Evaluation de la solution commune 80
Evaluation de deux solutions communes 86
Evaluation de trois, quatre, etc. solutions communes 88
Chapitre IV. Elimination entre n équations homogènes à n variables 98
Le résultant 98
Les solutions communes 104
Notes 111
Note 1 111
Note 2 114
Note 3 119

SUPPLÉMENT DU PREMIER CHAPITRE.

§ 56*. Nous terminerons ce chapitre en mentionnant encore les deux théorèmes suivants, qui découlent immédiatement du théorème du § 53:

Quand il existe pour un système de m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, $n - m$, mais pas plus de $n - m$ systèmes de racines indépendants entre eux, les équations de ce système sont indépendantes entre elles.

Quand il existe pour un système de m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, en tout $n - m + k$ systèmes de racines indépendants entre eux, les équations de ce système sont liées par k relations linéaires indépendantes entre elles.

Supposant qu'on puisse satisfaire à un système de m équations linéaires homogènes à n variables en tout par k_1 systèmes de racines indépendants entre eux, et que ces équations soient liées par k relations linéaires indépendantes entre elles, on déduit du théorème précédent la relation suivante:

$$k_1 - k = n - m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74),$$

d'où l'on peut tirer quelques conclusions qui serviront dans la suite de ce mémoire.

ERRATA.

Page 26, ligne 6, au lieu de : est, lisez : a été.
„ 36, „ 18, „ „ „ : ≣, „ : ≡.
„ 42, „ 14, „ „ „ : deduit, „ : déduit.
„ 50, „ 20, „ „ „ : fonctiens, „ : fonctions.
„ 55, „ 18, „ „ „ : y_3, „ : y.
„ 55, „ 18, „ „ „ : b, „ : b_3.
„ 56, „ 12, „ „ „ : (62), „ : (69).
„ 59, „ 37, „ „ „ : (ou des colonnes) supérieur à celui des colonnes (ou des lignes), lisez: inférieur à celui des colonnes.
„ 64, „ 30, „ „ „ : $v - v_1 + v_2 - v_3 =$ etc.,
lisez : $v - v_1 + v_2 - v_3 = -$ etc.
„ 65, „ 16, au lieu de: une seule, lisez: une.
„ 66, „ 4, „ „ „ : $-(v_2 - v_3) + v_3 =$ etc.,
lisez: $v - (v_2 - v_3) + v_3 =$ etc.
„ 67, „ 13, au lieu de: $v_2 = \frac{l(l+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$,
lisez: $v_2 = \frac{(l-1)\,l}{2} + \frac{(m-1)\,m}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2}$.
„ 74, „ 11, au lieu de: $\beta_3 = \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} = 1$,
lisez: $\beta_3 = \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} = 1$.
„ 74, „ 19, au lieu de: ⅄, lisez: Ψ.
„ 80, „ 26, „ „ „ : $v_3 = (k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2) = 1$,
lisez: $v_3 = \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2} = \frac{-2.-1}{2} = 1$.
„ 86, „ 19, au lieu de: à une près, lisez:
à une ligne quelconque près.
„ 90, „ 3, „ „ „ : p_{12}, lisez: p_{125}.
„ 100, „ 24, „ „ „ : $j - n + 1$, „ : $j + n - 1$.
„ 117, „ 4, „ „ „ : $\Sigma g_1{}^n$, „ : $\Sigma g_1{}^m$.
„ 117, „ 8, „ „ „ : $(-1)^{n-2}$, „ : $(-1)^{n-3}$.
„ 117, „ 16, „ „ „ ; $\Sigma g_1{}^n$, „ : $\Sigma g_1{}^m$.
„ 118, „ 7, „ „ „ : $\binom{n-m}{o}$, „ : $m\binom{n-m}{o}$.

AVERTISSEMENT.

L'auteur de ce traité tient à rappeler au lecteur que le théorème du § 24, lequel est d'une si haute importance dans cette dissertation, se trouve déjà dans l'ouvrage de Paul Gordan, intitulé *Vorlesungen über Invariantentheorie.*

C'est aussi le cas de quelques autres théorèmes, qui, du reste, sont d'une notoriété plus grande encore.

Au lieu de renvoyer à ces ouvrages, il a préféré démontrer ces théorèmes d'une manière conforme aux autres démonstrations.

Le nom de „assemblant'' qu'il a donné à une quantité de déterminants comme (1) du § 1, remplace le terme de „Matrix'' dont M. Paul Gordan s'est servi. Il ne croit que l'emploi de ce mot nouveau donne lieu à confusion.

I. Théorie des assemblants appliquée à un système d'équations linéaires homogènes.

§ 1. On appelle **assemblant** m lignes de n éléments, écrits en forme de rectangle.

Comme dans un déterminant, on peut désigner dans un assemblant la place des éléments par des indices doubles, p. ex.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots\dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1).$$

§ 2. Pour $m = n$, l'assemblant se change en un déterminant du degré n.

Pour $m < n$, le nombre des déterminants du degré m contenus dans l'assemblant, est égal au nombre des combinaisons, m à m, de n éléments, ou à $\binom{n}{m}$.

Pour $m > n$, le nombre des déterminants du degré n contenus dans l'assemblant, est égal au nombre des combinaisons, n à n, de m éléments, ou à $\binom{m}{n}$.

Les déterminants ainsi obtenus sont nommés **déterminants de l'assemblant.**

On peut les représenter par une lettre, accompagnée des indices qui désignent les colonnes ou les lignes qu'il faut supprimer de l'assemblant pour obtenir le déterminant proposé. Leur degré est égal au plus petit des deux nombres m ou n.

En supprimant d'un assemblant $m-k$ lignes et $n-k$ colonnes quelconques, on obtient un déterminant du degré k, nommé **déterminant mineur,** qu'on peut représenter d'une manière analogue.

§ 3. Les déterminants d'un assemblant conservent leurs valeurs, quand leurs lignes deviennent colonnes et que leurs colonnes deviennent lignes; leur nombre aussi ne varie pas.

Il résulte de là:

Un assemblant ne varie pas, quand ses lignes deviennent colonnes et que ses colonnes deviennent lignes.

§ 4. Multipliant les éléments de chaque ligne respectivement par les n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$, et ajoutant les produits, on obtient le système de m fonctions linéaires homogènes:

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 \equiv a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots. + a_{1n}\, x_n, \\ \theta_2 \equiv a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ldots. + a_{2n}\, x_n, \\ \theta_3 \equiv a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ldots. + a_{3n}\, x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_m \equiv a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots. + a_{mn} x_n, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2).$$

De même, les colonnes donnent, en introduisant les arbitraires $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_m$, le système de n fonctions linéaires homogènes:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_1 \equiv a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + a_{31}\, p_3 + \ldots. + a_{m1}\, p_m, \\ \zeta_2 \equiv a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + a_{32}\, p_3 + \ldots. + a_{m2}\, p_m, \\ \zeta_3 \equiv a_{13}\, p_1 + a_{23}\, p_2 + a_{33}\, p_3 + \ldots. + a_{m3}\, p_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_n \equiv a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + a_{3n}\, p_3 + \ldots. + a_{mn} p_m, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Pour simplifier la notation, on peut représenter les deux systèmes de fonctions linéaires homogènes θ et ζ avec l'assemblant de la manière suivante:

$$\begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_n \\ \hline p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} \\ & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ p_m & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots & a_{mn} \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Il est clair que les deux systèmes de fonctions θ et ζ se changent l'un en l'autre, quand les lignes de l'assemblant deviennent colonnes et que les colonnes deviennent lignes.

§ 5. Les deux systèmes de fonctions θ et ζ qui se rapportent à un assemblant, sont liés par l'identité suivante:

$$p_1\,\theta_1 + p_2\,\theta_2 + p_3\,\theta_3 + \ldots\ldots + p_m\,\theta_m = x_1\,\zeta_1 + x_2\,\zeta_2 + x_3\,\zeta_3 + \ldots\ldots + x_n\,\zeta_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

En effet, le développement des deux membres conduit à des résultats identiques. En désignant ce résultat par F, l'équation $F = o$ exprime que les deux membres de la formule (5) s'évanouissent simultanément.

§ 6. Remarquons, avant de tirer des conclusions de la formule (5), que chaque fonction homogène s'évanouit, si l'on prend des zéros pour toutes les variables.

De cette manière on peut donc toujours satisfaire à un système d'équations homogènes, mais il y a souvent pour les variables d'autres valeurs qui satisfont à ces équations. Ces valeurs forment un système de racines ou une solution des équations homogènes proposées.

Il est évident que les valeurs zéro ne peuvent être considérées comme un système de racines. Dans le cas particulier où les équations sont linéaires, on a donc:

Un système de racines d'un système d'équations linéaires homogènes ne peut se composer de zéros seuls.

§ 7. Quand on égale à zéro les deux systèmes de fonctions θ et ζ qui se rapportent à un assemblant, on obtient deux systèmes d'équations linéaires homogènes.

Si $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ forment un système de racines des équations ζ, le second membre de la formule (5) s'annulera pour toutes les valeurs des variables x. En ce cas l'équation (5) devient

$$p_1\,\theta_1 + p_2\,\theta_2 + p_3\,\theta_3 + \ldots\ldots + p_m\,\theta_m = o \quad \ldots\ldots (6),$$

formule qui fait connaître une relation linéaire de dépendance entre les fonctions θ.

Réciproquement, si l'identité (6) est remplie pour toutes les valeurs des variables x, il résulte du second membre de l'équation (5) que toutes les fonctions ζ sont nulles. Donc les arbitraires p constituent en ce cas un système de racines des équations ζ.

Les considérations précédentes conduisent aux théorèmes suivants:

Chaque système de racines pour l'un des deux systèmes d'équations linéaires homogènes qui se rapportent à un assemblant, forme un système de coefficients d'une relation linéaire entre les équations de l'autre système; et réciproquement, les coefficients d'une relation linéaire entre les équations de l'un forment un système de racines pour l'autre système.

S'il n'existe aucun système de racines pour l'un des deux systèmes d'équations linéaires homogènes qui se rapportent à un assemblant, les équations de l'autre sont indépendantes entre elles; et réciproquement, si les équations de l'un des deux systèmes sont indépendantes entre elles, il n'existe pas de système de racines pour l'autre.

§ 8. Si les fonctions linéaires homogènes qu'on peut former des lignes ou des colonnes d'un assemblant sont indépendantes entre elles, on dit que les lignes ou les colonnes de l'assemblant sont elles-mêmes indépendantes entre elles.

Cela conduit au théorème suivant:

Les lignes (ou les colonnes) d'un assemblant sont indépendantes entre elles, s'il n'existe aucun système de racines pour le système d'équations linéaires homogènes, formées par les colonnes (ou les lignes).

§ 9. Relativement aux deux systèmes d'équations linéaires homogènes θ et ζ qui se rapportent à un assemblant, les trois cas suivants peuvent se présenter:

1. on ne peut satisfaire ni à l'un ni à l'autre des deux systèmes d'équations;

2. on peut satisfaire à l'un, mais non à l'autre des deux systèmes d'équations;

3. on peut satisfaire à l'un et à l'autre des deux systèmes d'équations.

PREMIER CAS.

§ 10, Ce cas ne se présente que, si $m = n$.
L'assemblant (1) devient le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

les équations θ se changent dans les n équations:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots + a_{3n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (8),$$

et les équations ζ dans les n équations:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + a_{31} p_3 + \ldots\ldots + a_{n1} p_n = 0, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + a_{32} p_3 + \ldots\ldots + a_{n2} p_n = 0, \\ a_{13} p_1 + a_{23} p_2 + a_{33} p_3 + \ldots\ldots + a_{n3} p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + a_{3n} p_3 + \ldots\ldots + a_{nn} p_n = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (9).$$

En multipliant successivement les équations (8) par les déterminants mineurs $A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}, \ldots\ldots A_{nj}$ des éléments d'une colonne quelconque du déterminant (7), et en ajoutant les résultats, on obtient l'équation

$$D.\, x_j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

dans laquelle D représente la valeur du déterminant (7).

En donnant à j toutes les valeurs de 1 à n, on trouve les équations

$$\left.\begin{array}{l} D.\, x_1 = 0\ , \\ D.\, x_2 = 0\ , \\ D.\, x_3 = 0\ , \\ \ldots\ldots\ldots \\ D.\, x_n = 0\ , \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Un système de racines des équations (8) doit aussi satisfaire aux équations (11).

Il est impossible de satisfaire aux équations (11) par des valeurs de $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ qui ne sont pas toutes nulles, si l'on n'a pas $D = 0$.

Cette équation exprime la condition pour qu'on puisse satisfaire aux équations (8).

Elle exprime aussi la condition pour qu'on puisse satisfaire aux équations (9), ce qu'on peut trouver d'une manière analogue.

Les considérations précédentes mènent aux deux théorèmes suivants, dont les réciproques sont aussi vraies :

Si le déterminant des coefficients n'est pas nul, il n'existe aucun système de racines pour le système de n équations linéaires homogènes à n variables, et ces équations sont indépendantes entre elles.

Au contraire, si le déterminant des coefficients est nul, il existe un système de racines pour le système de n équations linéaires homogènes à n variables, et ces équations sont liées entre elles par une relation linéaire.

§ 11. Si le déterminant (7) est nul, tandis que les déterminants mineurs du premier ordre de ce déterminant ne sont pas tous nuls, on peut évaluer le système de racines des équations (8).

Pour cela, supprimons l'une quelconque des équations (8), par exemple la $k^{\text{ième}}$, et multiplions les autres successivement par les déterminants mineurs des éléments d'une colonne quelconque, par exemple, de la $j^{\text{ième}}$ du déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \ldots\ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2,l-1} & a_{2,l+1} & \ldots\ldots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3,l-1} & a_{3,l+1} & \ldots\ldots & a_{3n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \ldots\ldots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \ldots\ldots & a_{k-1,n} \\
a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \ldots\ldots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \ldots\ldots & a_{k+1,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \ldots\ldots & a_{nn}
\end{vmatrix} \quad \ldots \quad (12),$$

qui est le déterminant mineur de l'élément a_{kl} du déterminant (7). En ajoutant ces produits, on trouve l'équation

$$x_j\, A_{kl} - x_l\, A_{kj} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$\text{ou } \frac{x_j}{A_{kj}} = \frac{x_l}{A_{kl}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

dans laquelle A_{kj} et A_{kl} représentent les déterminants mineurs des éléments a_{kj} et a_{kl} du déterminant (7).

Pour les valeurs de j, de 1 à n, l'équation (14) donne le système de racines des équations (8), si l'on a $D = o$:

$$\frac{x_1}{A_{k1}} = \frac{x_2}{A_{k2}} = \frac{x_3}{A_{k3}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{x_n}{A_{kn}} \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Ces racines sont proportionnelles aux déterminants mineurs des éléments d'une ligne quelconque du déterminant (7).

§ 12. De la même manière on arrive à l'égalité:

$$\frac{p_1}{A_{1k}} = \frac{p_2}{A_{2k}} = \frac{p_3}{A_{3k}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{p_n}{A_{nk}} \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

qui représente les coefficients de la relation linéaire existant entre les équations (8), si l'on a $D = o$.

Ces coefficients sont proportionnels aux déterminants mineurs des éléments d'une colonne quelconque du déterminant (7).

Si tous les déterminants mineurs du premier ordre du déterminant (7) sont nuls, on peut satisfaire aux équations (8), comme aux équations (9), par deux systèmes de racines.

L'explication de ce fait ressort du troisième cas.

DEUXIÈME CAS.

§ 13. Le deuxième cas, mentionné au § 9, savoir, qu'on peut satisfaire à l'un des deux systèmes d'équations θ et ζ qui se rapportent à un assemblant, et non à l'autre, se présente, si les déterminants de l'assemblant ne sont pas tous nuls.

En supposant $m < n$, on ne peut satisfaire dans ce cas aux équations ζ, tandis que les équations θ sont indépendantes entre elles. Dans cette condition il existe pour les équations θ en tout

$n-m$ systèmes de racines, indépendants entre eux, comme il sera démontré ci-dessous.

§ 14. Si les k systèmes de racines, contenus dans les lignes de l'assemblant

$$\left|\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \dots\dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \dots\dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \dots\dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & x_{k3} \dots\dots & x_{kn} \end{matrix}\right| \dots\dots\dots\dots (17),$$

satisfont aux équations θ, et que l'on prenne

$$\left.\begin{array}{llll} \text{pour } x_1 & \text{la valeur} & q_1 x_{11} + q_2 x_{21} + q_3 x_{31} + \dots + q_k x_{k1}, \\ \quad ,, \ x_2 & ,, \quad ,, & q_1 x_{12} + q_2 x_{22} + q_3 x_{32} + \dots + q_k x_{k2}, \\ \quad ,, \ x_3 & ,, \quad ,, & q_1 x_{13} + q_2 x_{23} + q_3 x_{33} + \dots + q_k x_{k3}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \quad ,, \ x_n & ,, \quad ,, & q_1 x_{1n} + q_2 x_{2n} + q_3 x_{3n} + \dots + q_k x_{kn}, \end{array}\right\} \dots (18),$$

dans lesquelles $q_1, q_2, q_3, \dots q_k$ sont des coefficients indéterminés, le système de valeurs (18) satisfait aussi aux équations θ.

Le système de racines (18) est lié aux systèmes de racines (17) par une relation linéaire.

§ 15. S'il existe pour les indéterminées q des valeurs qui satisfont aux équations

$$\left.\begin{array}{l} q_1 x_{11} + q_2 x_{21} + q_3 x_{31} + \dots + q_k x_{k1} = o, \\ q_1 x_{12} + q_2 x_{22} + q_3 x_{32} + \dots + q_k x_{k2} = o, \\ q_1 x_{13} + q_2 x_{23} + q_3 x_{33} + \dots + q_k x_{k3} = o, \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_1 x_{1n} + q_2 x_{2n} + q_3 x_{3n} + \dots + q_k x_{kn} = o, \end{array}\right\} \dots\dots\dots (19),$$

les systèmes de racines (17) sont liés entre eux par une relation linéaire.

S'il est impossible de satisfaire aux équations (19) par d'autres valeurs que des zéros seuls, les systèmes de racines (17) sont indépendants entre eux.

Adoptant $k < n$, la condition pour que ces systèmes de racines soient indépendants entre eux, est (§ 10) que les déterminants de l'assemblant (17) ne soient pas tous nuls.

De là on déduit le théorème suivant :

Si les déterminants de l'assemblant de k systèmes de racines d'un système d'équations linéaires homogènes à n variables, où $k < n$, ne sont pas tous nuls, les k systèmes de racines sont indépendants entre eux.

§ 16. Posons que les k systèmes de racines (17) soient indépendants entre eux, on peut trouver k quantités q satisfaisant aux k—1 équations linéaires homogènes :

$$\left.\begin{array}{l} q_1x_{11} + q_2x_{21} + q_3x_{31} + \dots + q_kx_{k1} = 0\,, \\ q_1x_{12} + q_2x_{22} + q_3x_{32} + \dots + q_kx_{k2} = 0\,, \\ q_1x_{13} + q_2x_{23} + q_3x_{33} + \dots + q_kx_{k3} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1x_{1,k-1} + q_2x_{2,k-1} + q_3x_{3,k-1} + \dots + q_kx_{k,k-1} = 0\,, \end{array}\right\} \dots (20).$$

Ces k quantités q sont proportionnellement déterminées (§ 11) par les équations (20).

De là le théorème suivant :

On peut déduire de k systèmes de racines, indépendants entre eux, d'un système d'équations linéaires homogènes un autre système de racines dont k—1 éléments déterminés sont nuls.

§ 17. En général, il est impossible de déterminer k quantités q qui, sans être nuls, satisfont aux k équations linéaires homogènes :

$$\left.\begin{array}{l} q_1\,x_{11} + q_2\,x_{21} + q_3\,x_{31} + \dots\dots + q_k\,x_{k1} = 0\,, \\ q_1\,x_{12} + q_2\,x_{22} + q_3\,x_{32} + \dots\dots + q_k\,x_{k2} = 0\,, \\ q_1\,x_{13} + q_2\,x_{23} + q_3\,x_{33} + \dots\dots + q_k\,x_{k3} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1\,x_{1k} + q_2\,x_{2k} + q_3\,x_{3k} + \dots\dots + q_k\,x_{kk} = 0\,, \end{array}\right\} \dots (21).$$

Pour que ce soit possible (§ 10), il faut que

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \dots\dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \dots\dots & x_{k2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \dots\dots & x_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \dots\dots & x_{kk} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots\dots (22).$$

On obtient donc le théorème suivant:

On ne peut déduire en général de k systèmes de racines, indépendants entre eux, d'un système d'équations linéaires homogènes, un autre système de racines qui renferme k zéros; à cet effet, il faudrait que l'assemblant de ces k systèmes de racines renfermât un déterminant qui fût nul.

§ 18. Ce qui précède suffit pour expliquer le théorème:

Quand il existe pour un système d'équations linéaires homogènes k systèmes de racines, indépendants entre eux, et de plus un système de racines qui renferme k zéros, ce système-ci est indépendant des premiers, pourvu que le déterminant, formé par les k^2 éléments qui correspondent à ces k zéros ne soit pas nul.

§ 19. Les k systèmes de racines (17), indépendants entre eux, des équations θ peuvent être remplacés par k autres systèmes de racines, indépendants entre eux. Pour cela, on peut prendre différents systèmes de valeurs pour les quantités q dans les expressions (18), p. ex.:

1. q_1 arbitraire, différent de zéro, $q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = q_k = 0$,
2. q_1 et q_2 arbitraires, différents de zero, $q_3 = q_4 = \ldots = q_k = 0$,
3. q_1, q_2 et q_3 „ „ „ „ , $q_4 = \ldots = q_k = 0$,

. . . .

k—1. $q_1, q_2, \ldots\ldots q_{k-1}$ arbitraires, différents de zéro, $q_k = 0$,
k. $q_1, q_2, \ldots\ldots q_{k-1}, q_k$ arbitraires, différents de zéro.

Ces systèmes de valeurs q sont renfermés dans les lignes de l'assemblant:

$$\left|\begin{array}{cccccc} q_{11} & o & o & \ldots\ldots & o & o \\ q_{21} & q_{22} & o & \ldots\ldots & o & o \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \ldots\ldots & o & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k-1,1} & q_{k-1,2} & q_{k-1,3} & \ldots\ldots & q_{k-1,k-1} & o \\ q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \ldots\ldots & q_{k,k-1} & q_{kk} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23),$$

et les systèmes de racines qui remplacent les k systèmes de racines (17), dans les lignes de l'assemblant:

$$\left|\begin{array}{lllll} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots\cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots\cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots\cdots & y_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ y_{k1} & y_{k2} & y_{k3} & \cdots\cdots & y_{kn} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Les éléments des assemblants (17), (23) et (24) se trouvent être réunis par l'équation

$$y_{jl} = q_{j1}\, x_{1l} + q_{j2}\, x_{2l} + q_{j3}\, x_{3l} + \ldots\ldots\ldots + q_{jl}\, x_{jl} \ldots\ldots\ldots (25).$$

Prenant pour j les valeurs de 1 à k et pour l des valeurs de 1 à n, on peut déterminer les kn symboles y_{jl} par l'équation (25).

Les systèmes de racines (24) sont indépendants entre eux et peuvent donc remplacer les systèmes de racines (17). Du reste, il est aisé de voir, comment les systèmes de racines (17) se déduisent des systèmes de racines (24).

§ 20. Il est possible de remplacer un assemblant de k systèmes de racines, indépendants entre eux, par un assemblant de k systèmes de racines qui contient un déterminant, dont tous les éléments sont nuls, excepté ceux de la diagonale.

Pour cela, on prend de l'assemblant (17) un déterminant qui ne soit pas nul. Par le théorème du § 16 on peut déduire des k systèmes de racines (17) un autre système de racines dont $k-1$ éléments qui correspondent à $k-1$ colonnes du déterminant susdit, sont nuls. Cela peut se faire de k manières, c'est-à-dire d'autant de manières qu'il y a de combinaisons, $k-1$ à $k-1$, de k éléments. Les k nouveaux systèmes de racines qui en procèdent, forment un assemblant qui contient un déterminant, qui a la propriété susdite. Les systèmes de racines, contenus dans les lignes de cet assemblant sont indépendants entre eux, puisque cet assemblant contient un déterminant qui n'est pas nul.

§ 21. Soient, pour fixer les idées, $m = 4$ et $n = 7$; les équations θ deviennent dans ce cas les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 + a_{15}\,x_5 + a_{16}\,x_6 + a_{17}\,x_7 = o,\\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 + a_{25}\,x_5 + a_{26}\,x_6 + a_{27}\,x_7 = o,\\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4 + a_{35}\,x_5 + a_{36}\,x_6 + a_{37}\,x_7 = o,\\
a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4 + a_{45}\,x_5 + a_{46}\,x_6 + a_{47}\,x_7 = o,
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (26).$$

Les $n—m = 3$ systèmes de racines des équations (26) qui sont contenus dans les lignes de l'assemblant

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17}\\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27}\\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37}
\end{array}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots (27),$$

peuvent être indépendants entre eux. Pour le démontrer, on peut substituer aux variables les systèmes de racines (27) dans les équations (26), et on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\,x_{11} + a_{12}\,x_{12} + a_{13}\,x_{13} + a_{14}\,x_{14} + a_{15}\,x_{15} + a_{16}\,x_{16} + a_{17}\,x_{17} = o,\\
a_{11}\,x_{21} + a_{12}\,x_{22} + a_{13}\,x_{23} + a_{14}\,x_{24} + a_{15}\,x_{25} + a_{16}\,x_{26} + a_{17}\,x_{27} = o,\\
a_{11}\,x_{31} + a_{12}\,x_{32} + a_{13}\,x_{33} + a_{14}\,x_{34} + a_{15}\,x_{35} + a_{16}\,x_{36} + a_{17}\,x_{37} = o,\\[1ex]
a_{21}\,x_{11} + a_{22}\,x_{12} + a_{23}\,x_{13} + a_{24}\,x_{14} + a_{25}\,x_{15} + a_{26}\,x_{16} + a_{27}\,x_{17} = o,\\
a_{21}\,x_{21} + a_{22}\,x_{22} + a_{23}\,x_{23} + a_{24}\,x_{24} + a_{25}\,x_{25} + a_{26}\,x_{26} + a_{27}\,x_{27} = o,\\
a_{21}\,x_{31} + a_{22}\,x_{32} + a_{23}\,x_{33} + a_{24}\,x_{34} + a_{25}\,x_{35} + a_{26}\,x_{36} + a_{27}\,x_{37} = o,\\[1ex]
a_{31}\,x_{11} + a_{32}\,x_{12} + a_{33}\,x_{13} + a_{34}\,x_{14} + a_{35}\,x_{15} + a_{36}\,x_{16} + a_{37}\,x_{17} = o,\\
a_{31}\,x_{21} + a_{32}\,x_{22} + a_{33}\,x_{23} + a_{34}\,x_{24} + a_{35}\,x_{25} + a_{36}\,x_{26} + a_{37}\,x_{27} = o,\\
a_{31}\,x_{31} + a_{32}\,x_{32} + a_{33}\,x_{33} + a_{34}\,x_{34} + a_{35}\,x_{35} + a_{36}\,x_{36} + a_{37}\,x_{37} = o,\\[1ex]
a_{41}\,x_{11} + a_{42}\,x_{12} + a_{43}\,x_{13} + a_{44}\,x_{14} + a_{45}\,x_{15} + a_{46}\,x_{16} + a_{47}\,x_{17} = o,\\
a_{41}\,x_{21} + a_{42}\,x_{22} + a_{43}\,x_{23} + a_{44}\,x_{24} + a_{45}\,x_{25} + a_{46}\,x_{26} + a_{47}\,x_{27} = o,\\
a_{41}\,x_{31} + a_{42}\,x_{32} + a_{43}\,x_{33} + a_{44}\,x_{34} + a_{45}\,x_{35} + a_{46}\,x_{36} + a_{47}\,x_{37} = o,
\end{array}\right\} \ldots (28),$$

où les équations sont rangées en groupes de trois. Puis, on peut éliminer entre les équations (28) les éléments de $n—m—1 = 2$ colonnes quelconques de l'assemblant

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (29),$$

par exemple, les éléments $a_{17}, a_{27}, a_{37}, a_{47}$ et $a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{46}$.

Pour atteindre ce but, multiplions les équations de chaque groupe respectivement par les déterminants

$$\left|\begin{matrix} x_{26} & x_{27} \\ x_{36} & x_{37} \end{matrix}\right|, \; - \left|\begin{matrix} x_{16} & x_{17} \\ x_{36} & x_{37} \end{matrix}\right| \text{ et } \left|\begin{matrix} x_{16} & x_{17} \\ x_{26} & x_{27} \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (30),$$

et ajoutons; ainsi on obtient les équations [1]):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\, X_{2345} + a_{12}\, X_{1345} + a_{13}\, X_{1245} + a_{14}\, X_{1235} + a_{15}\, X_{1234} &= o, \\ a_{21}\, X_{2345} + a_{22}\, X_{1345} + a_{23}\, X_{1245} + a_{24}\, X_{1235} + a_{25}\, X_{1234} &= o, \\ a_{31}\, X_{2345} + a_{32}\, X_{1345} + a_{33}\, X_{1245} + a_{34}\, X_{1235} + a_{35}\, X_{1234} &= o, \\ a_{41}\, X_{2345} + a_{42}\, X_{1345} + a_{43}\, X_{1245} + a_{44}\, X_{1235} + a_{45}\, X_{1234} &= o, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \; (31),$$

dans lesquelles les variables sont des déterminants de l'assemblant (27).

A ces $m = 4$ équations linéaires homogènes à $m + 1 = 5$ variables on peut satisfaire (§ 10) par un système de racines. Il s'ensuit que les $n - m = 3$ systèmes de racines (27) peuvent être indépendants entre eux.

S'il y avait outre les systèmes de racines (27) encore un système de racines

$$\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (32)$$

pour les équations (26), ce système-ci serait lié aux autres par une relation linéaire.

Pour le démontrer, éliminons entre les équations (26) et (28) les éléments de $n - m = 3$ colonnes quelconques de l'assemblant (29), par exemple, $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}$; $a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}$; $a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{46}$.

[1]) Les indices ont la signification, mentionnée au § 2.

Pour cela, rangeons les équations (26) et (28) en groupes de quatre de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 + a_{17}x_7 = o\,,\\
a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + a_{14}x_{14} + a_{15}x_{15} + a_{16}x_{16} + a_{17}x_{17} = o\,,\\
a_{11}x_{21} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{23} + a_{14}x_{24} + a_{15}x_{25} + a_{16}x_{26} + a_{17}x_{27} = o\,,\\
a_{11}x_{31} + a_{12}x_{32} + a_{13}x_{33} + a_{14}x_{34} + a_{15}x_{35} + a_{16}x_{36} + a_{17}x_{37} = o\,,\\[1ex]
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 + a_{27}x_7 = o\,,\\
a_{21}x_{11} + a_{22}x_{12} + a_{23}x_{13} + a_{24}x_{14} + a_{25}x_{15} + a_{26}x_{16} + a_{27}x_{17} = o\,,\\
a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + a_{24}x_{24} + a_{25}x_{25} + a_{26}x_{26} + a_{27}x_{27} = o\,,\\
a_{21}x_{31} + a_{22}x_{32} + a_{23}x_{33} + a_{24}x_{34} + a_{25}x_{35} + a_{26}x_{36} + a_{27}x_{37} = o\,,\\[1ex]
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 + a_{37}x_7 = o\,,\\
a_{31}x_{11} + a_{32}x_{12} + a_{33}x_{13} + a_{34}x_{14} + a_{35}x_{15} + a_{36}x_{16} + a_{37}x_{17} = o\,,\\
a_{31}x_{21} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{23} + a_{34}x_{24} + a_{35}x_{25} + a_{36}x_{26} + a_{37}x_{27} = o\,,\\
a_{31}x_{31} + a_{32}x_{32} + a_{33}x_{33} + a_{34}x_{34} + a_{35}x_{35} + a_{36}x_{36} + a_{37}x_{37} = o\,,\\[1ex]
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 + a_{47}x_7 = o\,,\\
a_{41}x_{11} + a_{42}x_{12} + a_{43}x_{13} + a_{44}x_{14} + a_{45}x_{15} + a_{46}x_{16} + a_{47}x_{17} = o\,,\\
a_{41}x_{21} + a_{42}x_{22} + a_{43}x_{23} + a_{44}x_{24} + a_{45}x_{25} + a_{46}x_{26} + a_{47}x_{27} = o\,,\\
a_{41}x_{31} + a_{42}x_{32} + a_{43}x_{33} + a_{44}x_{34} + a_{45}x_{35} + a_{46}x_{36} + a_{47}x_{37} = o\,,
\end{array}\right\} \quad \ldots (33).$$

Multipliant les équations de chaque groupe successivement par les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{13} & x_{15} & x_{16} \\ x_{23} & x_{25} & x_{26} \\ x_{33} & x_{35} & x_{36} \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} x_3 & x_5 & x_6 \\ x_{23} & x_{25} & x_{26} \\ x_{33} & x_{35} & x_{36} \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} x_3 & x_5 & x_6 \\ x_{13} & x_{15} & x_{16} \\ x_{33} & x_{35} & x_{36} \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} x_3 & x_5 & x_6 \\ x_{13} & x_{15} & x_{16} \\ x_{23} & x_{25} & x_{26} \end{vmatrix} \quad .(34),$$

et ajoutant, on obtient les équations [1]):

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\,X_{247} + a_{12}\,X_{147} - a_{14}\,X_{127} - a_{17}\,X_{124} = 0\,,\\
a_{21}\,X_{247} + a_{22}\,X_{147} - a_{24}\,X_{127} - a_{27}\,X_{124} = 0\,,\\
a_{31}\,X_{247} + a_{32}\,X_{147} - a_{34}\,X_{127} - a_{37}\,X_{124} = 0\,,\\
a_{41}\,X_{247} + a_{42}\,X_{147} - a_{44}\,X_{127} - a_{47}\,X_{124} = 0\,,
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

dans lesquelles les variables sont des déterminants de l'assemblant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36).$$

[1]) Les indices ont la signification, mentionnée au § 2.

Comme on peut choisir arbitrairement les $n-m=3$ colonnes d'éléments de l'assemblant qui doivent être éliminés entre les équations (26) et (28) pour trouver les équations (35), le déterminant des coefficients des équations (35) est un quelconque des déterminants de l'assemblant (29). D'après la supposition, ces déterminants ne sont pas tous nuls; ainsi, on ne peut satisfaire en général aux équations (35) qu'en prenant des zéros pour tous les variables. Les déterminants de l'assemblant (36) sont donc tous nuls, d'où l'on conclut que les systèmes de racines (27) et (32) sont liés entre eux par une relation linéaire.

De ce qui précède on obtient les deux théorèmes suivants:

Si $m < n$, il existe $n-m$, mais pas plus de $n-m$ systèmes de racines, indépendants entre eux, qui satisfont à un système de m équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles à n variables.

S'il existe plus de $n-m$ systèmes de racines, indépendants entre eux, qui satisfont à un système de m équations linéaires homogènes à n variables, en supposant $m < n$, les équations de ce système ne peuvent être indépendantes entre elles.

§ 22. Examinons de plus près les deux assemblants qui découlent d'un système d'équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles. Le premier, qui contient m lignes de n éléments, se forme par les coefficients de ces équations, le second par les $n-m$ systèmes de racines, indépendants entre eux, qui satisfont à ces équations.

Il existe entre ces deux assemblants une relation de réciprocité. En effet, on peut regarder l'assemblant (27) comme l'assemblant des coefficients des équations linéaires homogènes

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + a_3 x_{13} + a_4 x_{14} + a_5 x_{15} + a_6 x_{16} + a_7 x_{17} = o, \\ a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + a_3 x_{23} + a_4 x_{24} + a_5 x_{25} + a_6 x_{26} + a_7 x_{27} = o, \\ a_1 x_{31} + a_2 x_{32} + a_3 x_{33} + a_4 x_{34} + a_5 x_{35} + a_6 x_{36} + a_7 x_{37} = o, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (37),$$

dans lesquelles $a_1, a_2, a_3, \ldots a_7$ sont les variables, et l'assemblant (29) comme l'assemblant des systèmes de racines, indépendants entre eux, des équations (37).

En substituant ces racines dans les équations (37), on retrouve les équations (28).

Les deux assemblants qui se rapportent à un système d'équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles, ont encore la propriété que ni l'un ni l'autre ne peuvent contenir une colonne d'éléments qui soient tous nuls.

Si cela se produisait dans l'assemblant des coefficients, le système d'équations ne renfermerait pas n, mais seulement $n-1$ inconnues.

Si cela avait lieu dans l'assemblant de $n-m$ systèmes de racines, ces systèmes de racines ne seraient pas indépendants entre eux, car il n'existe pas plus de $n-m-1$ systèmes de racines, indépendants entre eux, pour un système de m équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles, à $n-1$ variables.

Les deux assemblants proposés s'appelleront **assemblants supplémentaires.**

§ 23. Les deux assemblants supplémentaires (27) et (29) sont composés d'un nombre égal de colonnes.

Ils contiennent aussi un nombre égal de déterminants, car le nombre des combinaisons, $n-m$ à $n-m$, de n éléments est égal au nombre des combinaisons, m à m, de n éléments.

Quand on prend un déterminant, formé par $n-m=3$ colonnes quelconques de l'assemblant (27) et qu'on supprime les mêmes colonnes dans l'assemblant (29), les colonnes restantes de cet assemblant-ci forment aussi un déterminant.

Ces deux déterminants sont dits **déterminants supplémentaires.** [1])

On donne à deux déterminants supplémentaires le même signe ou des signes contraires, d'après le nombre pair ou impair de permutations qu'on doit faire, pour que les colonnes du premier déterminant deviennent les premières colonnes de l'assemblant, sans varier l'ordre de succession ni des colonnes du déterminant, ni des autres colonnes.

Il est clair qu'on doit faire un nombre égal de permutations, pour que les colonnes du second déterminant deviennent les dernières colonnes de l'assemblant auquel il se rapporte, sans varier l'ordre de succession ni des colonnes du déterminant, ni des autres colonnes.

En tenant compte de la règle pour le signe $+$ ou $-$, les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{12} & x_{14} & x_{17} \\ x_{22} & x_{24} & x_{27} \\ x_{32} & x_{34} & x_{37} \end{vmatrix} \text{ et } - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

[1]) Ce terme a été employé par Cayley dans le mémoire „on the theory of elimination" dans „The Cambridge and Dublin Mathematical Journal" Vol. III (1848).

sont donc des déterminants supplémentaires des assemblants (27) et (29).

§ 24. La résolution des équations (31) donne l'égalité suivante:

$$\frac{X_{2345}}{A_{167}} = \frac{X_{1345}}{-A_{267}} = \frac{X_{1245}}{A_{367}} = \frac{X_{1235}}{-A_{467}} = \frac{X_{1234}}{A_{567}} \quad \ldots\ldots (39),$$

où les indices et les symboles ont la signification du § 2.

Comme on peut choisir à volonté les $n - m - 1 = 2$ colonnes d'éléments de l'assemblant (29) qu'on élimine entre les équations (28) pour trouver les équations (31), l'équation (39) énonce le théorème:

Il existe un rapport constant entre deux déterminants supplémentaires de deux assemblants supplémentaires,

ou en d'autres termes:

Les déterminants de l'assemblant des $n-m$ systèmes de racines, indépendants entre eux, d'un système de m équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles, à n variables, sont proportionels aux déterminants supplémentaires de l'assemblant des coefficients de ces équations.

Remarque. Un cas particulier de ce théorème est la solution de $n - 1$ équations linéaires homogènes à n variables, exprimée par l'équation (15).

§ 25. Soit P le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant (27) et R le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant (29), tous les membres de l'égalité (39) sont égaux à $P : R$, d'où l'on conclut:

$$R = \frac{A_{567}}{X_{1234} : P} = \frac{-A_{467}}{X_{1235} : P} = \frac{-A_{247}}{X_{1356} : P} \quad \ldots\ldots (40).$$

§ 26. Pour $P = 1$, chaque déterminant de l'assemblant (29) est divisible par son déterminant supplémentaire de l'assemblant (27).

Cela donne le théorème:

Quand les déterminants de l'un de deux assemblants supplémentaires sont premiers entre eux, les déterminants de l'autre sont divisibles respectivement par les déterminants supplémentaires du premier.

Or, P n'est pas toujours égal à 1. Cela se voit quelquefois par l'existence de systèmes de racines pour les équations (26), liés aux systèmes de racines (27) par des relations linéaires.

En effet, quand les systèmes de valeurs (27) indépendants entre eux, satisfont aux équations (26), et qu'il arrive que le système de racines

$$\left| x_{41} \quad x_{42} \quad x_{43} \quad x_{44} \quad x_{45} \quad x_{46} \quad x_{47} \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

est lié aux systèmes de racines (27) par la relation linéaire

$$q_1\, x_{1k} + q_2\, x_{2k} + q_3\, x_{3k} + q_4\, x_{4k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(42),$$

dans laquelle q_1, q_2, q_3, q_4 sont premiers entre eux, on trouve par le théorème du § 24:

$$-\frac{\begin{vmatrix} x_{2k} & x_{3k} & x_{4k} \\ x_{2l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{2i} & x_{3i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{q_1} = \frac{\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{3k} & x_{4k} \\ x_{1l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{1i} & x_{3i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{q_2} = \frac{-\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{4k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{4l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{q_3} = \frac{\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix}}{q_4} \quad \ldots\ldots(43),$$

d'où l'on conclut que

$$\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix} \text{ est divisible par } q_4.$$

Pour les différentes valeurs de k, l, i de 1 à $n = 7$ on retrouve tous les déterminants de l'assemblant (27).

Tous les déterminants de cet assemblant sont donc divisibles par q_4 et de même leur plus grand commun diviseur P.

Si les déterminants de l'assemblant (27) n'ont d'autre commun diviseur que q_4, on a $P = q_4$.

§ 27. Quand on peut satisfaire aux équations (26), outre par les trois systèmes de racines (27), par plus de systèmes de racines liés aux systèmes (27) par des relations linéaires, on peut toujours trouver un commun diviseur des déterminants de l'assemblant (27).

Pour le démontrer, supposons que les trois systèmes de racines (27), et de même les deux systèmes

$$\begin{vmatrix} x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

satisfassent aux équations (26), et que les systèmes (44) soient liés aux systèmes (27) par les deux relations linéaires

$$\left.\begin{aligned} q_{11}\, x_{1k} + q_{12}\, x_{2k} + q_{13}\, x_{3k} + q_{14}\, x_{4k} + q_{15}\, x_{5k} = 0, \\ q_{21}\, x_{1k} + q_{22}\, x_{2k} + q_{23}\, x_{3k} + q_{24}\, x_{4k} + q_{25}\, x_{5k} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(45).$$

On peut satisfaire à ces deux équations linéaires homogènes par les systèmes de racines, contenus dans les lignes de l'assemblant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{51} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{52} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} & x_{53} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & x_{54} \\ x_{15} & x_{25} & x_{35} & x_{45} & x_{55} \\ x_{16} & x_{26} & x_{36} & x_{46} & x_{56} \\ x_{17} & x_{27} & x_{37} & x_{47} & x_{57} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46),$$

qui est constitué par la combinaison des assemblants (27) et (44) en intervertissant les lignes et les colonnes.

Trois lignes quelconques de l'assemblant (46) forment un assemblant supplémentaire de

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47).$$

D'après le théorème du § 24, on a donc l'égalité:

$$\frac{-\begin{vmatrix} x_{2k} & x_{3k} & x_{4k} \\ x_{2l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{2i} & x_{3i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{11} & q_{15} \\ q_{21} & q_{25} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{3k} & x_{4k} \\ x_{1l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{1i} & x_{3i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{12} & q_{15} \\ q_{22} & q_{25} \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{4k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{4l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{4i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{13} & q_{15} \\ q_{23} & q_{25} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix}} = \text{etc.} \ldots (48).$$

Soit Q le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant (47), on voit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix} \text{ est divisible par } \begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} : Q.$$

En donnant à k, l, i les différentes valeurs de 1 à $n = 7$, on conclut que chaque déterminant de l'assemblant (27) est divisible par $\begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} : Q$.

Si ces déterminants n'ont d'autre commun diviseur que $\begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} : Q$, on a

$$P = \begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} : Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Cette valeur de P doit être substituée dans la formule (40) pour évaluer la valeur de R.

Le même raisonnement s'applique à plusieurs systèmes de racines liés entre eux par des relations linéaires, satisfaisant au système d'équations (26).

§ 28. Il se peut qu'il existe pour les équations (26) plusieurs systèmes de racines liés entre eux par des relations linéaires, qui sont à leur tour dépendantes entre elles.

En effet, posons qu'on puisse satisfaire au système d'équations (26) par les systèmes de racines (27) et (44) liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} q_{11}\, x_{1k} + q_{12}\, x_{2k} + q_{13}\, x_{3k} + q_{14}\, x_{4k} + q_{15}\, x_{5k} = o, \\ q_{21}\, x_{1k} + q_{22}\, x_{2k} + q_{23}\, x_{3k} + q_{24}\, x_{4k} + q_{25}\, x_{5k} = o, \\ q_{31}\, x_{1k} + q_{32}\, x_{2k} + q_{33}\, x_{3k} + q_{34}\, x_{4k} + q_{35}\, x_{5k} = o, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (50),$$

qui sont de nouveau liées par l'équation linéaire

$$r_1\, q_{1k} + r_2\, q_{2k} + r_3\, q_{3k} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51),$$

où r_1, r_2, r_3 sont premiers entre eux.

Dans ce cas les déterminants de l'assemblant (47) sont divisibles par r_3. Si ces déterminants n'ont d'autre commun diviseur que r_3, on a $Q = r_3$. Pour l'évaluation de R d'après la formule (40), on a donc

$$P = \begin{vmatrix} q_{14} & q_{15} \\ q_{24} & q_{25} \end{vmatrix} : r_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52).$$

§ 29. S'il arrive qu'on puisse satisfaire à un système de m équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles, à n variables, par plus de $n-m$ systèmes de racines, liés entre eux par des relations linéaires qui sont à leur tour liées entre elles par des relations linéaires (particularité qui peut se répéter), il existe entre les nombres de ces systèmes d'équations une relation remarquable.

Posons, pour fixer les idées, qu'on puisse satisfaire aux m équations θ indépendantes entre elles, à n variables, par n_1 systèmes de racines, liés entre eux par n_2 relations linéaires qui sont de nouveau liées par n_3 et celles-ci par n_4 relations linéaires, on en conclut que ces n_1 systèmes de racines sont équivalents à $n_1 - n_2 + n_3 - n_4$ systèmes de racines indépendants entre eux.

Comme le plus grand nombre pour cela est en même temps $n - m$, on obtient l'équation

$$m - n + n_1 - n_2 + n_3 - n_4 = o \qquad (53).$$

Si la condition (53) est remplie, on peut conclure que les n_1 systèmes de racines avec leurs relations de dépendance représentent précisément tous les $n-m$ systèmes de racines indépendants entre eux, qui sont possibles.

§ 30. Reste encore à résoudre la question comment on peut déterminer pour les équations θ $n - m$ systèmes de racines, indépendants entre eux.

Un tel système de racines peut renfermer en général (§ 16 et § 17) $n - m - 1$ zéros. Cette remarque conduit à la solution de la question.

Prenant des zéros pour $n - m - 1$ des variables, les équations θ se changent en un système de m équations linéaires homogènes á $m + 1$ variables, d'où l'on peut évaluer les autres termes du système cherché. Ce système de racines se compose de $m + 1$ déterminants de l'assemblant (1) et de $n - m - 1$ zéros.

De cette manière on peut obtenir en tout $\binom{n}{m+1}$ systèmes de racines des équations θ. Comme ce nombre, étant le nombre des combinaisons, $m + 1$ à $m + 1$, de n éléments, est supérieur à $n - m$, les systèmes de racines ainsi obtenus ne peuvent donc être indépendants entre eux. On peut choisir, comme au § 20, $n - m$ systèmes de racines indépendants entre eux. Prenant alternativement des zéros pour $n - m - 1$ des variables x qui correspondent à $n - m - 1$ des $n - m$ colonnes d'un déterminant qui n'est pas nul, on trouve ainsi $n - m$ systèmes de racines indépendants entre eux, puisque leur assemblant contient un déterminant dont tous les éléments sont nuls, excepté ceux de la diagonale.

§ 31. Pour éclaircir ce qui a été dit au paragraphe précédent, prenons les équations (26), où $m = 4$ et $n = 7$. Nous représenterons comme il a été dit au § 2, les déterminants de l'assemblant (29) par la lettre A, accompagnée des indices.

Supposant que A_{123} ne soit pas zéro, les $n-m = 3$ systèmes de racines, indépendants entre eux, contenus dans les lignes de l'assemblant

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & A_{123}, & -A_{124}, & A_{125}, & -A_{126}, & A_{127} \\ 0, & -A_{123}, & 0, & A_{134}, & -A_{135}, & A_{136}, & -A_{137} \\ A_{123}, & 0, & 0, & -A_{234}, & A_{235}, & -A_{236}, & A_{237} \end{vmatrix} \qquad (54),$$

satisfont aux équations (26).

On peut déduire (§ 19) de ces systèmes de racines d'autres systèmes qui sont indépendants entre eux, et qui ne renferment pas de zéros.

§ 32. Supposant les déterminants de l'assemblant (29) différents de zéro, on peut trouver comme au paragraphe précédent pour les équations (26) en tout $\binom{n}{m+1} = \binom{7}{5} = 21$ systèmes de racines dont chacun renferme $n-m-1 = 2$ zéros.

Sauf les trois systèmes de racines (54), on trouve dans ce cas encore les dix-huit suivants:

$$\begin{array}{r|ccccccc|}
1. & 0, & -A_{124}, & A_{134}, & 0, & -A_{145}, & A_{146}, & -A_{147} \\
2. & A_{124}, & 0, & -A_{234}, & 0, & A_{245}, & -A_{246}, & A_{247} \\
3. & -A_{134}, & A_{234}, & 0, & 0, & -A_{345}, & A_{346}, & -A_{347} \\
4. & 0, & A_{125}, & -A_{135}, & A_{145}, & 0, & -A_{156}, & A_{157} \\
5. & -A_{125}, & 0, & A_{235}, & -A_{245}, & 0, & A_{256}, & -A_{257} \\
6. & A_{135}, & -A_{235}, & 0, & A_{345}, & 0, & -A_{356}, & A_{357} \\
7. & -A_{145}, & A_{245}, & -A_{345}, & 0, & 0, & A_{456}, & -A_{457} \\
8. & 0, & A_{126}, & -A_{136}, & A_{146}, & -A_{156}, & 0, & A_{167} \\
9. & -A_{126}, & 0, & A_{236}, & -A_{246}, & A_{256}, & 0, & -A_{267} \\
10. & A_{136}, & -A_{236}, & 0, & A_{346}, & -A_{356}, & 0, & A_{367} \\
11. & -A_{146}, & A_{246}, & -A_{346}, & 0, & A_{456}, & 0, & -A_{467} \\
12. & A_{156}, & -A_{256}, & A_{356}, & -A_{456}, & 0, & 0, & A_{567} \\
13. & 0, & -A_{127}, & A_{137}, & -A_{147}, & A_{157}, & -A_{167}, & 0 \\
14. & A_{127}, & 0, & -A_{237}, & A_{247}, & -A_{257}, & A_{267}, & 0 \\
15. & -A_{137}, & A_{237}, & 0, & -A_{347}, & A_{357}, & -A_{367}, & 0 \\
16. & A_{147}, & -A_{247}, & A_{347}, & 0, & -A_{457}, & A_{467}, & 0 \\
17. & -A_{157}, & A_{257}, & -A_{357}, & A_{457}, & 0, & -A_{567}, & 0 \\
18. & A_{167}, & -A_{267}, & A_{367}, & -A_{467}, & A_{567}, & 0, & 0
\end{array} \quad .(55).$$

§ 33. Chacun des systèmes de racines (55) est lié aux systèmes de racines (54) par une relation linéaire, dont il est facile d'indiquer les coefficients.

De cette manière on obtient les relations importantes qui existent entre les déterminants d'un assemblant [1]).

Prenons en premier lieu les systèmes de racines (54) et le premier des systèmes (55). Il existe entre ces systèmes de racines la relation linéaire dont les coefficients sont

$$|A_{134}\ ,\ A_{124}\ ,\ o\ ,\ -A_{123}| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56).$$

Appliquant cette relation aux systèmes cités, on obtient les équations:

[1]) Comparer: G. Salmon, Leçons d'Algèbre Supérieure, n° 28.

$$\left.\begin{array}{r} A_{134}\,A_{125} - A_{124}\,A_{135} + A_{123}\,A_{145} = 0, \\ -A_{134}\,A_{126} + A_{124}\,A_{136} - A_{123}\,A_{146} = 0, \\ A_{134}\,A_{127} - A_{124}\,A_{137} + A_{123}\,A_{147} = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots(57).$$

En deuxième lieu, prenons les systèmes de racines (54) et le septième des systèmes (55).

Il existe entre ces systèmes de racines la relation linéaire dont les coefficients sont

$$|A_{345},\ A_{245},\ A_{145},\ A_{123}| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(58).$$

En appliquant cette relation aux systèmes cités, on trouve les équations:

$$\left.\begin{array}{rr} -A_{345}\,A_{124} + A_{245}\,A_{134} - A_{145}\,A_{234} & = 0, \\ A_{345}\,A_{125} - A_{245}\,A_{135} + A_{145}\,A_{235} & = 0, \\ -A_{345}\,A_{126} + A_{245}\,A_{136} - A_{145}\,A_{236} + A_{123}\,A_{456} & = 0, \\ A_{345}\,A_{127} - A_{245}\,A_{137} + A_{145}\,A_{237} - A_{123}\,A_{457} & = 0, \end{array}\right\} \ldots(59).$$

En continuant de la même manière, nous trouverons plusieurs relations entre les déterminants de l'assemblant (29). Elles se réduisent à deux espèces: celles qui renferment trois, et celles qui renferment quatre termes.

Les équations de la première espèce expriment des relations entre les déterminants contenus dans $m + 2 = 6$ colonnes déterminées de l'assemblant (29); les équations de la deuxième espèce, de même entre les déterminants contenus dans $m + 3 = 7$ colonnes déterminées de l'assemblant (29).

La première espèce de ces relations a été déjà remarquée par Jacobi dans son mémoire „De formatione et proprietatibus determinantium'' (Journal de Crelle, t. 22), et était déjà connue à Bezout.

Les formules (57) et (59) ne représentent qu'un petit échantillon des exemples, que l'on peut augmenter à volonté.

Dans le cas où l'on a $m = 4$ et $n = 7$, il n'y a que les deux espèces de relations susdites, mais pour d'autres valeurs de m et n il est possible qu'il existe des relations entre $m + 4$, $m + 5$, etc. colonnes déterminées de l'assemblant (1).

Ces relations renferment alors cinq, six, etc. termes. La suite de ce mémoire ne demande pas plus de détails. Nous croyons avoir suffisamment indiqué les moyens d'obtenir ces relations. Du reste, il est clair qu'on peut déduire plusieurs autres relations d'un caractère plus compliqué, quand on élimine une ou plusieurs des grandeurs A entre les équations (57) et (59).

§ 34. Il est remarquable que les relations (57) et (59) peuvent être déduites du théorème du § 24, exprimé par l'équation (39).

Appliquant ce théorème aux systèmes de racines (54), on trouve, par exemple:

$$\frac{\begin{vmatrix} o, & -A_{124}, & A_{125} \\ o, & A_{134}, & -A_{135} \\ A_{123}, & -A_{234}, & A_{235} \end{vmatrix}}{A_{145}} = \frac{\begin{vmatrix} o, & o, & A_{123} \\ o, & -A_{123}, & o \\ A_{123}, & o, & o \end{vmatrix}}{A_{123}} \quad \ldots\ldots\ldots (60),$$

ou $A_{134} A_{125} - A_{124} A_{135} + A_{123} A_{145} = o$ .... (61),

ce qui est précisément la première des équations (57).

En prenant le premier des systèmes (54), le septième et le dixième des systèmes (55), on a trois systèmes de racines, indépendants entre eux. Le théorème du § 24 donne entre autres:

$$\frac{\begin{vmatrix} A_{123}, & -A_{126}, & A_{127} \\ -A_{345}, & A_{456}, & -A_{457} \\ o, & o, & A_{367} \end{vmatrix}}{A_{367}} = \frac{\begin{vmatrix} o, & o, & A_{123} \\ -A_{145}, & A_{245}, & -A_{345} \\ A_{136}, & -A_{236}, & o \end{vmatrix}}{A_{123}} \quad \ldots (62),$$

ou $-A_{345} A_{126} + A_{245} A_{136} - A_{145} A_{236} + A_{123} A_{456} = o$ ...... (63),

ce qui est précisément la troisième des équations (59).

TROISIÈME CAS.

§ 35. Le troisième cas du § 9, savoir, qu'on peut satisfaire à l'un et à l'autre des deux systèmes d'équations linéaires homogènes θ et ζ qui se rapportent à un assemblant, ne se présente que, si les déterminants de l'assemblant sont tous nuls.

Supposons de nouveau $m < n$. Comme il existe un système de racines pour les équations ζ, il est nécessaire (§ 10) que les déterminants de l'assemblant (1) soient tous nuls. Réciproquement, si tous les déterminants de l'assemblant (1) sont nuls, on peut satisfaire aux équations ζ au moins par un système de racines.

§ 36. Ayant pour un système de m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, $n - m$ systèmes de racines indépendants entre eux, il existe un rapport constant entre les déterminants supplémentaires des deux assemblants qui se rapportent à ce système d'équations.

En démontrant ce théorème, comme au § 24, nous avons supposé que les déterminants de l'assemblant des coefficients ne soient pas tous nuls.

Il s'agit de savoir ce que devient ce théorème, si tous les déterminants de cet assemblant sont nuls. Pour résoudre cette question, on écrit l'équation (40) de la manière suivante :

$$\frac{R}{P} = \frac{A_{567}}{X_{1234}} = \frac{-A_{467}}{X_{1235}} = \text{etc.} \qquad (64).$$

Elle conduit aux remarques suivantes.

Quand l'un des déterminants de l'assemblant (29) est divisible par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (27), tous les déterminants de l'assemblant (29) sont divisibles par leurs déterminants supplémentaires de l'assemblant (27). P est donc un facteur de R.

Si deux déterminants de l'assemblant (27) sont premiers entre eux, on a $P = 1$. Dans ce cas le plus grand commun diviseur R des déterminants de l'assemblant (29) s'obtient en divisant l'un de ces déterminants par son déterminant supplémentaire de l'assemblant (27).

Si P n'est pas égal à l'unité, on trouve R par la formule (40).

P ne peut pas être nul, car pour $P = o$ les systèmes de racines (27) ne seraient pas indépendants entre eux.

Si l'un des déterminants de l'assemblant (27) est nul, le déterminant supplémentaire de l'assemblant (29) est aussi nul.

Si l'un des déterminants de l'assemblaut (29) est nul, tandis que le déterminant supplémentaire de l'assemblant (27) n'est pas nul, on a $R = o$.

Pour $R = o$, tous les déterminants de l'assemblant (29) sont nuls, et l'égalité (64) se trouve affermie.

§ 37. Les remarques du paragraphe précédent donnent le moyen d'énoncer ce qui est traité au § 35, de la manière suivante :

Pour qu'il existe une relation linéaire entre m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant des coefficients soit nul.

§ 38. Supposons d'abord qu'il n'existe qu'une seule relation linéaire entre les équations θ. Pour déterminer les coefficients de cette relation, on peut prendre $m - 1$ des équations ζ indépendantes entre elles. Elles forment un système de $m - 1$ équations linéaires homogènes, independantes entre elles, à m variables, dont la résolution est donnée au § 11.

Il est possible qu'un ou plusieurs des coefficients de la relation linéaire entre les équations θ soient nuls. Dans ce cas il existe une relation linéaire entre celles des équations θ dont les coefficients dans la relation ne sont pas nuls. De là le théorème:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par une relation linéaire dont quelques-uns des coefficients sont nuls, et qu'on prend de ces équations celles qui se rapportent aux coefficients qui ne sont pas nuls, le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant des coefficients de ces équations est nul.

§ 39. Pour l'évaluation des coefficients de la seule relation linéaire entre les équations θ le choix des $m - 1$ équations ζ indépendantes entre elles, n'a aucune influence; on trouve toujours le même résultat.

De là le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire, les déterminants contenus dans $m - 1$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont proportionnels aux coefficients de la relation linéaire.

§ 40. Pour démontrer les propriétés suivantes, nous prenons les équations (26), où l'on a $m = 4$, et $n = 7$, et nous supposons qu'il n'existe qu'une seule relation linéaire entre ces équations. Les coefficients, premiers entre eux, de cette relation sont les suivants:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65).$$

On les calcule en résolvant trois quelconques des équations

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + a_{31}\, p_3 + a_{41}\, p_4 &= o,\\
a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + a_{32}\, p_3 + a_{42}\, p_4 &= o,\\
a_{13}\, p_1 + a_{23}\, p_2 + a_{33}\, p_3 + a_{43}\, p_4 &= o,\\
a_{14}\, p_1 + a_{24}\, p_2 + a_{34}\, p_3 + a_{44}\, p_4 &= o,\\
a_{15}\, p_1 + a_{25}\, p_2 + a_{35}\, p_3 + a_{45}\, p_4 &= o,\\
a_{16}\, p_1 + a_{26}\, p_2 + a_{36}\, p_3 + a_{46}\, p_4 &= o,\\
a_{17}\, p_1 + a_{27}\, p_2 + a_{37}\, p_3 + a_{47}\, p_4 &= o,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66).$$

Prenant dans ce but les $i^{ième}$, $j^{ième}$ et $k^{ième}$, on trouve:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} \\ a_{2j} & a_{3j} & a_{4j} \\ a_{2k} & a_{3k} & a_{4k} \end{vmatrix}}{p_{11}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{3i} & a_{4i} \\ a_{1j} & a_{3j} & a_{4j} \\ a_{1k} & a_{3k} & a_{4k} \end{vmatrix}}{p_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{4i} \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{4j} \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{4k} \end{vmatrix}}{p_{13}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \end{vmatrix}}{p_{14}} \quad \ldots\ldots\ldots(67).$$

Les numérateurs de ces fractions sont tous divisibles par les dénominateurs. En prenant pour i, j et k les valeurs de 1 à $n = 7$, on trouve le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire dont les coefficients sont premiers entre eux, les déterminants contenus dans $m - 1$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont tous divisibles par le coefficient de la relation qui se rapporte à la ligne supprimée.

§ 41. Quand il existe une relation linéaire entre les équations linéaires homogènes (26), on peut satisfaire à ce système d'équations sauf par les $n - m = 3$ systèmes de racines (27), indépendants entre eux, par un système de racines (32), indépendant des systèmes (27).

Cela découle des équations (35).

Comme dans ce cas tous les déterminants de l'assemblant (29) sont nuls, on peut satisfaire aux équations (35) par un système de racines qui ne se compose pas de zéros seuls.

La réciproque encore est vraie.

Si l'on peut satisfaire aux équations (26), sauf par les $n - m = 3$ systèmes de racines (27), indépendants entre eux, encore par un système de racines (32) qui est indépendant des systèmes (27), il faut qu'on puisse satisfaire aux équations (35) par un système de racines, ne se composant pas de zéros seuls. Pour cela la condition est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{47} \end{vmatrix} = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68).$$

Comme on peut choisir à volonté les $n - m = 3$ colonnes d'éléments de l'assemblant (29) à éliminer entre les équations (26) et

(28) pour obtenir les équations (35), l'équation (68) doit exprimer le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par une relation linéaire, on peut satisfaire à ce système d'équations par $n - m + 1$ systèmes de racines indépendants entre eux.

§ 42. Quand on a m équations linéaires homogènes θ qui ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire et qu'on supprime une de ces équations dont le coefficient dans la relation est différent de zéro, les $m—1$ équations restantes à n variables sont indépendantes entre elles. A ce système d'équations on peut satisfaire tout au plus par $n—m+1$ systèmes de racines indépendants entre eux.

Ce nombre est égal à celui des systèmes de racines indépendants entre eux, qui, d'après le paragraphe précédent, existent réellement.

Donc, on a le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire, le nombre des systèmes de racines, indépendants entre eux, ne peut être plus élevé que $n - m + 1$.

§ 43. Dans le cas où les équations (26) sont liées par une seule relation linéaire on peut trouver pour ces équations un système de racines, indépendant des systèmes (27), en égalant à zéro $n—m = 3$ variables.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{35} & x_{36} & x_{37} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

n'est pas nul, on peut prendre $x_5 = o$, $x_6 = o$, $x_7 = o$; les autres éléments de ce système de racines se trouvent en résolvant les équations:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 = o\,, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4 = o\,, \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 = o\,, \\ a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4 = o\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (70).$$

Comme le déterminant des coefficients de ces équations est nul, on trouve le résultat:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}} = \frac{x_4}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{x_5}{0} = \frac{x_6}{0} = \frac{x_7}{0} \quad (71),$$

c'est-à-dire un systéme de racines renfermant $n-m = 3$ zéros, et par conséquent indépendant des systèmes de racines (27).

§ 44. En vertu du théorème du § 24 on a le théorème suivant:

Quand il n'existe qu'une seule relation linéaire entre m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, et qu'on forme un assemblant des $n - m + 1$ systèmes de racines de ces équations, les déterminants, contenus dans $m - 1$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, et les déterminants supplémentaires de l'assemblant des systèmes de racines sont proportionnels entre eux.

§ 45. Du théorème du paragraphe précédent on déduit le suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$ ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire, tous les déterminants contenus dans $m - 1$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par un même facteur. Ce facteur s'obtient en divisant le déterminant supplémentaire de l'assemblant des $n - m + 1$ systèmes de racines indépendants entre eux, par le plus grand commun diviseur des déterminants de cet assemblant.

§ 46. Les théorèmes des deux paragraphes précédents conduisent au théorème suivant:

Quand il n'existe qu'une seule relation linéaire entre m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, et qu'il arrive que les déterminants de l'assemblant des $n - m + 1$ systèmes de racines de ces équations sont premiers entre eux, on a:

1. les déterminants contenus dans $m - 1$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont respectivement divisibles par leurs déterminants supplémentaires de l'assemblant des systèmes de racines;

2. tous les déterminants contenus dans $m - 1$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par le même déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines.

Remarque. Il peut arriver que la relation linéaire par laquelle les équations θ sont liées, ne se rapporte pas à toutes ces équations, mais seulement à quelques-unes: les théorèmes des § 39—46 restent les mêmes. Dans ce cas on peut laisser de côté les équations qui n'entrent pas dans la relation: les équations restantes forment un système d'équations pour lequel les mêmes théorèmes subsistent.

§ 47. Quant à ce qui a été dit au § 22 par rapport à la relation de réciprocité qui existe entre les assemblants (27) et (29), nous considérons maintenant l'assemblant (27) comme l'assemblant des coefficients des équations linéaires homogènes (37), indépendantes entre elles, et l'assemblant (29) comme l'assemblant des systèmes de racines de ces équations. Les déterminants de l'assemblant (27) et les déterminants supplémentaires de l'assemblant (29) sont proportionnels entre eux.

Si le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant (29) est nul, les systèmes de racines contenus dans les lignes de cet assemblant, sont liés entre eux au moins par une relation linéaire. Quand il n'existe qu'une seule relation linéaire entre les systèmes de racines (29), les coefficients de cette relation se trouvent par la résolution de trois des équations (66), comme il a été démontré au § 40.

Dans ce cas les systèmes de racines (29) satisfont, à part les équations linéaires homogènes (37), encore à une autre équation linéaire homogène:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + a_7 x_7 = o \,. \,. (72),$$

qui est indépendante des équations (37).

Les équations (35) résultent dans ce cas des équations (28), (37) et (72).

Comme tous les déterminants de l'assemblant (29) sont nuls, on peut satisfaire au système d'équations (35) par un système de racines.

L'égalité (71) donne un système de valeurs pour les coefficients x de l'équation (72). De ce système et des systèmes (27) on peut déduire (§ 19) un autre système de valeurs pour ces coefficients, ne renfermant pas de zéros.

§ 48. Passons au cas où les équations θ sont liées entre elles par plus d'une relation linéaire. Soit k le nombre de ces relations indépendantes entre elles. Les éléments des lignes de l'assemblant

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \cdots\cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \cdots\cdots & p_{2m} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \cdots\cdots & p_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{k3} \cdots\cdots & p_{km} \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (73)$$

représentent les coefficients des k relations linéaires qui existent entre les équations θ.

Des k systèmes (73) on peut déduire un autre système de valeurs renfermant $k-1$ zéros, et cela de $\binom{m}{k-1}$ manières (§ 16). Ces systèmes de valeurs représentent des relations linéaires entre $m-k+1$ des équations θ. Puisqu'on peut choisir à volonté les $k-1$ éléments qu'on veut convertir en zéros, il existe une relation linéaire entre toutes $m-k+1$ des équations θ, ce qui nous donne le théorème :

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, le plus grand commun diviseur des déterminants contenus dans $m-k+1$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, est nul.

§ 49. Le théorème précédent contient le suivant :

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, tous les déterminants contenus dans $m-k+1$ lignes ou dans $m-k+1$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont nuls.

§ 50. Parmi les n équations ζ on peut en choisir $m-k$ qu'on peut regarder comme indépendantes entre elles; elles constituent un système de $m-k$ équations linéaires homogènes à m variables, auxquelles on peut satisfaire par les k systèmes de racines, indépendantes entre eux, contenus dans les lignes de l'assemblant (73).

Il existe un rapport constant (§ 24) entre les déterminants de l'assemblant des coefficients de ces $m-k$ équations et leurs déterminants supplémentaires de l'assemblant (73).

Comme on peut choisir à volonté les $m-k$ équations indépendantes entre elles parmi les équations ζ pour le calcul des systèmes de racines (73), on est conduit au théorème suivant :

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, les déterminants, contenus dans $m-k$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont proportionnels aux déterminants supplémentaires de l'assemblant des coefficients des k relations linéaires.

§ 51. Soit P le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant (73); les déterminants contenus dans $m-k$ colonnes quelconques de l'assemblant (1), sont divisibles par le quotient qu'on obtient, si l'on divise par P leur déterminant supplémentaire de l'assemblant (73).

En appliquant ce principe à chaque système de $m-k$ colonnes contenues dans l'assemblant (1), on obtient le théorème:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, tous les déterminants contenus dans $m-k$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par un même facteur. Ce facteur s'obtient en divisant le déterminant supplémentaire de l'assemblant des coefficients des k relations linéaires par le plus grand commun diviseur des déterminants de cet assemblant.

§ 52. Les théorèmes des deux paragraphes précédents mènent au suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, et qu'il arrive que les déterminants de l'assemblant des coefficients de ces relations sont premiers entre eux, on a:

1. les déterminants contenus dans $m-k$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont respectivement divisibles par les déterminants supplémentaires de l'assemblant des coefficients des k relations linéaires;
2. tous les déterminants contenus dans $m-k$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par le même déterminant supplémentaire de l'assemblant des coefficients des k relations linéaires.

§ 53. Quand les m équations θ sont liées entre elles par k relations linéaires indépendantes entre elles, il existe (§ 48) une relation linéaire entre toutes $m-k+1$ de ces équations. Supprimons une de ces $m-k+1$ équations dont le coefficient dans la relation linéaire ne soit pas nul, les équations restantes forment un système de $m-k$ équations linéaires homogènes, indépendantes entre elles, à n variables. A ces équations on peut satisfaire en tout par $n-m+k$ systèmes de racines, indépendants entre eux.

De là résulte le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, on peut satisfaire à ces équations par $n-m+k$, mais non par plus de $n-m+k$ systèmes de racines, indépendants entre eux.

§ 54. Comment on trouve ces $n-m+k$ systèmes de racines indépendants entre eux, a été développé au § 30.

Elles conduisent au théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, les déterminants contenus dans $m-k$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont proportionnels aux déterminants supplémentaires de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines, indépendants entre eux, de ces équations.

§ 55. Comme au § 51, on trouve le théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, tous les déterminants contenus dans $m - k$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par un commun facteur. Ce facteur s'obtient en divisant le déterminant supplémentaire de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines, indépendants entre eux, par le plus grand commun diviseur des déterminants de cet assemblant.

§ 56. Les théorèmes des deux paragraphes précédents se réduisent dans le cas où les déterminants de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines sont premiers entre eux, au théorème suivant:

Quand m équations linéaires homogènes à n variables, où $m < n$, sont liées entre elles par k relations linéaires, indépendantes entre elles, et qu'il arrive que les déterminants de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines, indépendants entre eux, de ces équations sont premiers entre eux, on a:

1. les déterminants contenus dans $m - k$ lignes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont successivement divisibles par leurs déterminants supplémentaires de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines;
2. tous les déterminants contenus dans $m - k$ colonnes quelconques de l'assemblant des coefficients, sont divisibles par le même déterminant supplémentaire de l'assemblant des $n - m + k$ systèmes de racines.

Remarque. Il est possible que les k relations linéaires qui lient les équations θ, ne se rapportent pas à toutes ces équations, mais seulement à quelques-unes: alors les théorèmes des §§ 48—56 restent les mêmes. Dans ce cas on peut laisser de côté les équations qui n'entrent pas dans les relations: les équations restantes forment un système d'équations pour lequel les mêmes théorèmes subsistent.

II. Elimination entre deux équations homogènes à deux variables.

ÉVALUATION DU RÉSULTANT.

§ 57. Quand on a les deux équations homogènes des degrés m et n à deux variables:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y) &= a_1 x^m + a_2 x^{m-1} y + a_3 x^{m-2} y^2 + \ldots + a_{m+1} y^m = o,\\ \chi(x,y) &= b_1 x^n + b_2 x^{n-1} y + b_3 x^{n-2} y^2 + \ldots + b_{n+1} y^n = o,\end{aligned}\right\} \ldots (1),$$

on entend par **résultant** la fonction des coefficients qui, égalée à zéro, exprime la condition pour que ces équations aient une solution commune.

§ 58. Pour déterminer le résultant, on peut former à l'instar de Bezout la fonction

$$F = \Phi\,\varphi + X\,\chi \ldots\ldots (2),$$

dans laquelle Φ et X sont des fonctions homogènes de x et y avec des coefficients indéterminés s.

Le degré de la fonction F est arbitraire. Si F est du degré k, Φ est du degré $k-m$ et X du degré $k-n$. Les fonctions Φ et X contiennent donc respectivement $\alpha_1 = k-m+1$ et $\alpha_2 = k-n+1$ termes, tandis que F renferme $k+1$ termes.

La fonction F peut être développée de deux manières:

1. suivant les arguments consécutifs d'une fonction homogène des variables x et y;

2. suivant les indéterminées s_1, s_2, s_3, etc.

De là on déduit l'identité:

$$\begin{aligned}&x^k\,\theta_1 + x^{k-1} y\,\theta_2 + x^{k-2} y^2\,\theta_3 + \ldots + x\,y^{k-1}\,\theta_k + y^k\,\theta_{k+1} = \\ &s_1 x^{k-m}\varphi + s_2 x^{k-m-1} y\varphi + s_3 x^{k-m-2} y^2\varphi + \ldots + s_{\alpha_1} y^{k-m}\varphi + \\ &s_{\alpha_1+1} x^{k-n}\chi + s_{\alpha_1+2} x^{k-n-1} y\chi + \ldots + s_{\alpha_1+\alpha_2} y^{k-n}\chi \ldots (3).\end{aligned}$$

Les grandeurs θ du premier membre de cette identité sont des fonctions linéaires homogènes des indéterminées s dont l'assemblant des coefficients se compose de $v = k + 1$ lignes de $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ éléments, représentés en partie par des coefficients des équations (1), en partie par des zéros.

L'identité (3) joue le même rôle par rapport à cet assemblant que la formule (5) du § 5 par rapport à l'assemblant (1) du § 1. Pour l'éclaircir, donnons à l'identité (3) la forme

$$p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_3 + \ldots + p_{k+1} \theta_{k+1} = s_1 \zeta_1 + s_2 \zeta_2 + \ldots + s_{\alpha_1} \zeta_{\alpha_1} + \ldots + s_{\alpha_1 + \alpha_2} \zeta_{\alpha_1 + \alpha_2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

dans laquelle les grandeurs ζ sont des fonctions linéaires homogènes des arbitraires p. Quand on compare les équations (3) et (4), la signification des symboles p et ζ est évidente.

La fonction F permet ainsi de former pour toute valeur du degré k un assemblant qu'on peut appeler **l'assemblant de la fonction** F.

Cet assemblant contient $v = k + 1$ lignes et $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ colonnes. Les α_1 premières colonnes renferment seulement des coefficients de la fonction φ et des zéros, les α_2 suivantes seulement des coefficients de la fonction χ et des zéros. Pour les différentes valeurs de k, la nature de cet assemblant reste la même, quoique le nombre des lignes et celui des colonnes varient.

Pour $k = m + n - 1$, l'assemblant de la fonction F se change en un déterminant du degré $m + n$.

Pour $k > m + n - 1$, le nombre des lignes est inférieur au nombre des colonnes, ou $v < v_1$.

Pour $k < m + n - 1$, le nombre des lignes est supérieur au nombre des colonnes, ou $v > v_1$.

§ 59. Si l'on a

$$F = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

les deux membres de l'identité (3) deviennent nuls.

Puisque tous les coefficients des fonctions Φ et X ne peuvent s'évanouir, on ne peut satisfaire à l'équation (5) que des deux manières suivantes:

1. par $\dfrac{-\Phi}{\chi} = \dfrac{X}{\varphi}$;

2. par $\varphi = o$ et $\chi = o$.

De la première manière on satisfait à l'équation (5) indépendamment des valeurs des variables x et y; de la seconde manière, indépendamment des valeurs des indéterminées s.

§ 60. Indépendamment des valeurs des variables x et y on peut satisfaire à l'équation (5), s'il existe un système de racines s' pour les équations θ.

Sans qu'une relation entre les coefficients des équations (1) soit nécessaire, il existe au moins un système de racines pour les équations θ, si l'on a $v < v_1$ ou $k > m + n - 1$. Comme k est arbitraire, il est aisé de remplir cette condition.

Si les déterminants de l'assemblant de la fonction F ne sont pas tous nuls, il existe pour les équations θ en tout $v_1 - v$ systèmes de racines, indépendants entre eux (§ 21).

§ 61. La forme de la fonction F donne le moyen de trouver, sans résolution directe des équations θ, les $v_1 - v$ systèmes de racines de ces équations.

Ecrivant l'équation (5) dans la forme

$$\frac{-\Phi}{\chi} = \frac{X}{\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

les deux membres qui sont du degré $k-m-n$, deviennent égaux pour toutes les valeurs des variables x et y, si l'on pose

$$\Phi = -\chi f \text{ et } X = \varphi f \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

où f est une fonction homogène du degré $k - m - n$ des variables x et y. A ces équations on peut satisfaire de $v_2 = k - m - n + 1$ manières, c'est-à-dire d'autant de manières que la fonction f a de termes. Pour l'éclaircir, on peut écrire les fonctions Φ et X des v_2 manières suivantes:

$$\left.\begin{array}{llll}
\Phi = x^{v_2-1}\chi_1 + \Phi_1 & , & X = x^{v_2-1}\varphi_1 + X_1 & , \\
\Phi = x^{v_2-2}y\,\chi_2 + \Phi_2 & , & X = x^{v_2-2}y\,\varphi_2 + X_2 & , \\
\Phi = x^{v_2-3}y^2\chi_3 + \Phi_3 & , & X = x^{v_2-3}y^2\varphi_3 + X_3 & , \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\
\Phi = y^{v_2-1}\chi_{v_2} + \Phi_{v_2} & , & X = y^{v_2-1}\varphi_{v_2} + X_{v_2} & ,
\end{array}\right\} \ldots\ldots (8),$$

dans lesquelles

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{v_2}$ représentent des fonctions homogènes du degré m par rapport aux variables x et y,

$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_{v_2}$ de même, des fonctions homogènes du degré n par rapport aux mêmes variables, tandis que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{v_2}, X_1, X_2, \ldots X_{v_2}$ représentent les termes restants des fonctions Φ et X.

En posant successivement

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1 = -\chi\ ,\ \varphi_1 = \varphi\ ,\ \Phi_1 = o\ ,\ X_1 = o\ , \\ \chi_2 = -\chi\ ,\ \varphi_2 = \varphi\ ,\ \Phi_2 = o\ ,\ X_2 = o\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{v_2} = -\chi\ ,\ \varphi_{v_2} = \varphi\ ,\ \Phi_{v_2} = o\ ,\ X_{v_2} = o\ , \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9);$$

on trouve v_2 systèmes de valeurs s' qui satisfont, indépendamment des valeurs des variables x et y, à l'équation (5) et qui fournissent ainsi v_2 systèmes de racines s' des équations θ.

§ 62. Ces v_2 systèmes de racines s' sont indépendants entre eux. Pour le démontrer, multiplions-les respectivement par les arbitraires $t_1, t_2, t_3, \ldots t_{v_2}$ et ajoutons-les; les fonctions linéaires homogènes ainsi obtenues, égalées à zéro, forment v_1 équations linéaires homogènes t, auxquelles on devrait pouvoir satisfaire par un système de racines t', si les systèmes de racines s' n'étaient pas indépendants entre eux.

§ 63. Les v_1 équations t peuvent se réduire à deux groupes, savoir:

Groupe I, se composant de α_1 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments a;

Groupe II, se composant de α_2 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments b.

Nous multiplions les équations de chaque groupe successivement par les arguments d'une fonction homogène, respectivement des degrés $k - m$ et $k - n$ des deux variables x et y, où x et y sont des grandeurs arbitraires, et nous ajoutons les résultats de chaque groupe; ainsi on trouve les deux équations:

$$T\chi = o \quad \text{et} \quad T\varphi = o \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

dans lesquelles la grandeur T représente une fontion homogène du degré $k - m - n$ des deux variables x et y, ayant pour coefficients les v_2 arbitraires t.

§ 64. Si l'on peut satisfaire aux équations linéaires homogènes t par un système de racines t', celui-ci satisfait aussi aux équations (10) indépendamment des valeurs des variables x et y.

Comme on ne peut satisfaire aux équations (10) indépendamment des valeurs des variables x et y, qu'en prenant pour les arbitraires t des zéros, il n'existe pas de système de racines pour les équations t. Par conséquent, les v_2 systèmes de racines s' sont indépendants entre eux.

§ 65. Les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s' sont proportionnels (§ 24) aux déterminants supplémentaires de l'assemblant de la fonction F.

Les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s' sont premiers entre eux.

En effet, s'ils avaient un commun diviseur qui fût une fonction des coefficients des fonctions φ et χ, il existerait dans le cas où les coefficients avaient des valeurs qui réduisent ce commun diviseur à zéro, au moins un système de racines t' pour les équations t.

C'est impossible, comme il a été démontré au paragraphe précédent, donc il est aussi impossible que les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s' aient un commun diviseur qui est une fonction des coefficients des fonctions φ et χ.

§ 66. En substituant les valeurs

$$\left.\begin{array}{l} v = k + 1 \quad , \\ v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\,k - m - n + 2 \;, \\ v_2 = k - m - n + 1, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

dans la forme $v - v_1 + v_2$, on vérifie aisément la relation

$$v - v_1 + v_2 = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

qui doit être remplie d'après § 29.

§ 67. Le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant de la fonction F s'obtient (§ 26) en divisant l'un de ces déterminants par le déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines s'. On peut l'exprimer par l'équation [1]):

$$R = \frac{D_v}{D_{v_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

[1]) Les indices v et v_2 n'ont pas ici la signification du § 2, mais indiquent seulement le degré des déterminants, représentés par les symboles D_v et D_{v_2}.

§ 68. S'il existe pour les équations (1) une solution commune (x_1, y_1), on peut satisfaire à l'équation (5) indépendamment des indéterminées s. Substituant à x et y les valeurs x_1 et y_1 toutes les fonctions ζ s'évanouissent, et l'équation (3) se transforme en

$$x_1^k\,\theta_1 + x_1^{k-1}y_1\,\theta_2 + x_1^{k-2}y_1^2\,\theta_3 + \ldots + y_1^k\,\theta_{k+1} = o \ldots (14).$$

Cette équation indique que les fonctions θ sont liées entre elles par une relation linéaire dont les coefficients sont:

$$| x_1^k,\ x_1^{k-1}y_1\ ,\ x_1^{k-2}y_1^2, \ldots\ldots y_1^k | \ldots\ldots (15).$$

Chaque solution commune des équations (1) conduit à une relation linéaire entre les fonctions θ.

Pour obtenir le résultant, il suffit de supposer qu'il n'existe qu'une seule solution commune des équations (1). Les fonctions θ sont en ce cas liées entre elles par une seule relation linéaire.

§ 69. Quand on pose le degré k de la fonction F tel que le nombre des fonctions θ ne soit pas supérieur à celui des indéterminées s, l'existence d'une relation linéaire entre ces fonctions exige que le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant de la fonction F soit nul.

Ce plus grand commun diviseur est donc le résultant des équations (1). L'équation (13) en est l'expression.

§ 70. En considérant l'équation (13), on trouve que le résultant est une fonction homogène des coefficients des fonctions φ et χ du degré

$$v - v_2 = v_1 - 2v_2 = m + n \ldots\ldots (16).$$

Par rapport aux coefficients a de la fonction φ il est du degré

$$\alpha_1 - v_2 = k - m + 1 - (k - m - n + 1) = n \ldots (17),$$

et par rapport aux coefficients b de la fonction χ du degré

$$\alpha_2 - v_2 = k - n + 1 - (k - m - n + 1) = m \ldots (18).$$

On démontre les formules (17) et (18) en prenant pour D_{v_2} un déterminant qui renferme seulement des éléments a, ou un déterminant qui contient seulement des éléments b.

§ 71. Bezout, au lieu de donner au degré de la fonction F une valeur arbitraire, posa:

$$k = m + n - 1 \ldots\ldots (19).$$

On a pour cette valeur de k les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned} v &= m+n\,, \\ v_1 &= m+n\,, \\ v_2 &= o\,, \end{aligned}\right\} \qquad (20),$$

et le résultant

$$R = D_v \qquad (21).$$

§ 72. Quand on augmente la valeur adoptée par Bezout de λ unités, on obtient les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned} k &= m+n-1+\lambda\,, \\ \alpha_1 &= k-m+1 = n+\lambda\,, \\ \alpha_2 &= k-n+1 = m+\lambda\,, \\ v &= k+1 = m+n+\lambda\,, \\ v_1 &= \alpha_1+\alpha_2 = m+n+2\lambda\,, \\ v_2 &= k-m-n+1 = \lambda\,, \end{aligned}\right\} \qquad (22).$$

Pour $\lambda = o$, on a $v_2 = o$ et $v = v_1$; dans ce cas, il n'existe pas de système de racines s'. L'expression du résultant devient pour cette valeur de λ la plus simple, mais toute autre valeur positive de λ conduit aussi au résultant.

Il reste encore à démontrer que les valeurs négatives de λ ne conduisent pas au résultant.

Le raisonnement qui nous révéla l'existence de v_2 systèmes de racines s' indépendants entre eux, nous fait voir en même temps que ces systèmes de racines existent seulement, si k n'est pas inférieur à $m+n$. Pour $k < m+n$ ou $\lambda < 1$, il n'y a pas de tels systèmes de racines. Pour $\lambda = o$, on a $v_2 = o$ et $v = v_1$; l'existence d'une relation linéaire entre les fonctions θ exige dans ce cas que le déterminant des coefficients soit nul. Pour $\lambda < o$, v_2 est négatif; de l'équation (12) il s'ensuit $v - v_1 = -v_2$. Le nombre v des équations θ est de $-v_2$ unités supérieur au nombre v_1 des indéterminées s: les équations θ sont alors liées entre elles par $-v_2$ relations linéaires, sans qu'une condition entre les coefficients soit de rigueur. Donc, les valeurs négatives de λ ne conduisent pas au résultant.

La plus petite valeur de λ qui conduit au résultant est donc $\lambda = o$, et la plus petite valeur pour k est la valeur choisie par Bezout.

§ 73. Pour éclaircir la théorie générale qui précède, nous déterminerons le résultant des équations:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y) &\equiv a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 xy^3 + a_5 y^4 = o,\\ \chi(x,y) &\equiv b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3 = o,\end{aligned}\right\} \quad (23),$$

où l'on a $m = 4$ et $n = 3$.

Pour $k = 11$, on obtient les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= k - m + 1 &&= 8,\\ \alpha_2 &= k - n + 1 &&= 9,\\ v &= k + 1 &&= 12,\\ v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 &&= 17,\\ v_2 &= k - m - n + 1 &&= 5,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

On a ensuite:

$$\left.\begin{aligned}\Phi &\equiv s_1 x^7 + s_2 x^6 y + s_3 x^5 y^2 + s_4 x^4 y^3 + s_5 x^3 y^4 + s_6 x^2 y^5 + s_7 x y^6 + s_8 y^7,\\ \mathrm{X} &\equiv s_9 x^8 + s_{10} x^7 y + s_{11} x^6 y^2 + s_{12} x^5 y^3 + s_{13} x^4 y^4 + s_{14} x^3 y^5 + s_{15} x^2 y^6\\ &\quad + s_{16} x y^7 + s_{17} y^8,\\ F &= \Phi\varphi + \mathrm{X}\chi,\end{aligned}\right\} \quad \ldots (25),$$

d'où l'on déduit l'assemblant [1]):

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}
$p_1 = x^{11}$	a_1								b_1								
$p_2 = x^{10}y$	a_2	a_1							b_2	b_1							
$p_3 = x^9y^2$	a_3	a_2	a_1						b_3	b_2	b_1						
$p_4 = x^8y^3$	a_4	a_3	a_2	a_1					b_4	b_3	b_2	b_1					
$p_5 = x^7y^4$	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1					b_4	b_3	b_2	b_1				
$p_6 = x^6y^5$		a_5	a_4	a_3	a_2	a_1					b_4	b_3	b_2	b_1			
$p_7 = x^5y^6$			a_5	a_4	a_3	a_2	a_1					b_4	b_3	b_2	b_1		
$p_8 = x^4y^7$				a_5	a_4	a_3	a_2	a_1					b_4	b_3	b_2	b_1	
$p_9 = x^3y^8$					a_5	a_4	a_3	a_2						b_4	b_3	b_2	b_1
$p_{10} = x^2y^9$						a_5	a_4	a_3							b_4	b_3	b_2
$p_{11} = xy^{10}$							a_5	a_4								b_4	b_3
$p_{12} = y^{11}$								a_5									b_4

. . . (26).

[1]) Ici et dans la suite, le lecteur est prié d'ajouter mentalement des zéros aux vides des assemblants.

On peut écrire les fonctions Φ et X de $v_2 = 5$ manières:

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi: \\
x^4(s_1x^3+s_2x^2y+s_3xy^2+s_4y^3)+s_5x^3y^4+s_6x^2y^5+s_7xy^6+s_8y^7\,, \\
x^3y(s_2x^3+s_3x^2y+s_4xy^2+s_5y^3)+s_1x^7+s_6x^2y^5+s_7xy^6+s_8y^7\,, \\
x^2y^2(s_3x^3+s_4x^2y+s_5xy^2+s_6y^3)+s_1x^7+s_2x^6y+s_7xy^6+s_8y^7\,, \\
xy^3(s_4x^3+s_5x^2y+s_6xy^2+s_7y^3)+s_1x^7+s_2x^6y+s_3x^5y^2+s_8y^7\,, \\
y^4(s_5x^3+s_6x^2y+s_7xy^2+s_8y^3)+s_1x^7+s_2x^6y+s_3x^5y^2+s_4x^4y^3, \\
\mathrm{X}: \\
x^4(s_9x^4+s_{10}x^3y+s_{11}x^2y^2+s_{12}xy^3+s_{13}y^4)+s_{14}x^3y^5+s_{15}x^2y^6+s_{16}xy^7+s_{17}y^8\,, \\
x^3y(s_{10}x^4+s_{11}x^3y+s_{12}x^2y^2+s_{13}xy^3+s_{14}y^4)+s_9x^8+s_{15}x^2y^6+s_{16}xy^7+s_{17}y^8\,, \\
x^2y^2(s_{11}x^4+s_{12}x^3y+s_{13}x^2y^2+s_{14}xy^3+s_{15}y^4)+s_9x^8+s_{10}x^7y+s_{16}xy^7+s_{17}y^8\,, \\
xy^3(s_{12}x^4+s_{13}x^3y+s_{14}x^2y^2+s_{15}xy^3+s_{16}y^4)+s_9x^8+s_{10}x^7y+s_{11}x^6y^2+s_{17}y^8\,, \\
y^4(s_{13}x^4+s_{14}x^3y+s_{15}x^2y^2+s_{16}xy^3+s_{17}y^4)+s_9x^8+s_{10}x^7y+s_{11}x^6y^2+s_{12}x^5y^3,
\end{array}\right\} \ldots (27).$$

De là on deduit les $v_2 = 5$ systèmes de racines s', contenus dans les lignes de l'assemblant:

$$\begin{array}{c|cccccccc:ccccccccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & s_{10} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} & s_{17} \\
\hline
t_1 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & & & & \\
t_2 & & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & & & \\
t_3 & & & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & & \\
t_4 & & & & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \\
t_5 & & & & & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5
\end{array} \quad (28),$$

dont les colonnes contiennent les coefficients des fonctions linéaires t.

Les deux groupes formés par les équations t, se distinguent nettement dans le tableau (28). Dans les 8 premières équations on ne trouve pas les coefficients a, ni dans les 9 suivantes les coefficients b.

La fonction homogène indiquée au § 63 par T, est dans ce cas

$$\mathrm{T} = t_1 x^4 + t_2 x^3 y + t_3 x^2 y^2 + t_4 x y^3 + t_5 y^4 \ldots\ldots\ldots (29).$$

L'équation (13) nous fait trouver le résultant des équations (23) en divisant l'un des déterminants de l'assemblant (26) par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (28):

$$R = \begin{vmatrix}
a_1 & & & & & & & b_1 & & & \\
a_2 & a_1 & & & & & & b_2 & b_1 & & \\
a_3 & a_2 & a_1 & & & & & b_3 & b_2 & b_1 & \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & b_4 & b_3 & b_2 \\
 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & b_4 & b_3 \\
 & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & b_4 \\
 & & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & & & \\
 & & & & a_5 & a_4 & a_3 & & & & \\
 & & & & & a_5 & a_4 & & & & \\
 & & & & & & a_5 & & & &
\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\
 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\
 & & a_5 & a_4 & a_3 \\
 & & & a_5 & a_4 \\
 & & & & a_5
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (30).$$

§ 74. Quand on prend dans l'exemple précédent pour k la valeur adoptée par Bezout, on trouve:

$$\left.\begin{array}{lll}
k & = m + n - 1 & = 6\,, \\
\alpha_1 & = k - m + 1 & = 3\,, \\
\alpha_2 & = k - n + 1 & = 4\,, \\
v & = k + 1 & = 7\,, \\
v_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 & = 7\,, \\
v_2 & = k - m - n + 1 & = 0\,,
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31).$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} F = {} & (s_1 x^2 + s_2 x y + s_3 y^2)(a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 x y^3 + a_5 y^4) + \\ & (s_4 x^3 + s_5 x^2 y + s_6 x y^2 + s_7 y^3)(b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3) \ldots . (32), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'assemblant

$$\begin{array}{l|ccc:cccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\
\hline
p_1 = x^6 & a_1 & & & b_1 & & & \\
p_2 = x^5 y & a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & & \\
p_3 = x^4 y^2 & a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & \\
p_4 = x^3 y^3 & a_4 & a_3 & a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
p_5 = x^2 y^4 & a_5 & a_4 & a_3 & & b_4 & b_3 & b_2 \\
p_6 = x\; y^5 & & a_5 & a_4 & & & b_4 & b_3 \\
p_7 = \;\; y^6 & & & a_5 & & & & b_4
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33),$$

et le résultant

$$D_v = \begin{vmatrix} a_1 & & & b_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & \\ a_4 & a_3 & a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & & b_4 & b_3 & b_2 \\ & a_4 & a_4 & & & b_4 & b_3 \\ & & a_5 & & & & b_4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

§ 75. Dans l'équation (30) nous avons choisi à dessein un déterminant de l'assemblant (26) qui, divisé par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (28), fournit immédiatement le déterminant (34). Si l'on avait pris un autre déterminant de l'assemblant (26), il n'aurait pas été si évident que les expressions (30) et (34) sont identiques.

On peut déduire de l'équation (3) que toute valeur de k qui n'est pas inférieure à $m + n - 1$, conduit au même résultant. Remarquons, pour le démontrer, que des $\alpha_1 + \alpha_2$ indéterminées s qui se trouvent dans les équations θ, les premières α_1 sont les coefficients de la fonction Φ et les suivantes α_2 les coefficients de la fonction X, et appliquons le théorème suivant :

Quand un système de racines s' dont les éléments correspondant aux i derniers coefficients de la fonction X sont nuls, satisfait aux équations θ, les éléments qui correspondent aux i derniers coefficients de la fonction Φ sont aussi nuls.

En même temps les i dernières équations θ disparaissent.

Pour démontrer ce théorème, observons que les deux membres de l'identité (3) deviennent nuls pour les valeurs des indéterminées s qui satisfont aux équations θ. Pour $x = o$, le premier membre de l'équation (3) se réduit à $y^k \theta_{k+1}$, et le second membre à $y^k (a_{m+1} s_{\alpha_1} + b_{m+1} s_{\alpha_1 + \alpha_2})$.

De là on conclut que, si $s_{\alpha_1 + \alpha_2} = o$, on a aussi $s_{\alpha_1} = o$ et $\theta_{k+1} = o$. En introduisant ces valeurs dans l'équation (3), et en divisant les deux membres par x, on trouve que, si $s_{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} = o$, on aura aussi $s_{\alpha_1 - 1} = o$ et $\theta_k = o$, et ainsi de suite.

Quand il existe pour les équations θ un système de racines s' dont les i derniers éléments sont nuls, il existe aussi un système de racines pour les $v-i$ équations linéaires homogènes restantes, quand on supprime les i dernières équations θ, ainsi que les $2i$ indéterminées s qui forment les i derniers coefficients des fonctions Φ et X. Introduisant un tel système de racines s' dans l'équation (3), et divisant les deux membres par x^i, l'équation qu'on obtient est précisément la même que celle qui s'ensuit de la fonction F, quand on diminue le degré k de i unités. Pour les $v-i$ équations θ restantes il existe encore un système de racines.

Dans le cas où les fonctions θ sont indépendantes entre elles, cela se démontre en prenant pour i la plus grande valeur possible. Les équations θ ont en ce cas tout au plus $v_2 = v_1 - v$ systèmes de racines, indépendants entre eux. La plus grande valeur de i est donc $v_2 - 1$, le nombre des équations θ restantes est $v - i = v - (v_2 - 1) = m + n + \lambda - \lambda + 1 = m + n + 1$, tandis que le nombre des indéterminées restantes est $v_1 - 2i = v_1 - 2(v_2 - 1) = m + n + 2\lambda - 2\lambda + 2 = m + n + 2$.

Nous avons vu qu'on peut satisfaire à ces équations par un seul système de racines.

§ 76. Passons maintenant au cas d'une seule relation linéaire entre les fonctions θ; ce cas se présente lorsqu'il n'existe qu'une seule solution commune des équations (1). On peut alors satisfaire aux équations θ en tout par $v_2 + 1$ systèmes de racines, indépendants entre eux, d'où s'ensuit que v_2 est la plus grande valeur pour i. Pour cette valeur de i les équations θ se réduisent à $v - v_2 = m + n$ équations linéaires homogènes avec $v_1 - 2\,v_2 = m + n$ indéterminées, savoir: les n premiers coefficients de la fonction Φ et les m premiers coefficients de la fonction X. Un autre système de valeurs pourra encore satisfaire à ces équations, d'où l'on déduit que le déterminant des coefficients est nul. Il en résulte donc que la forme générale (13) du résultant se réduit à la forme particulière (21), comme dans l'exemple du § 73.

ÉVALUATION DE LA SOLUTION COMMUNE [1]).

§ 77. La théorie précédente donne le moyen de trouver le système de racines des équations (1), si le résultant est nul.

Evaluant (§ 38) la relation linéaire qui existe dans ce cas entre les équations θ, et la confrontant avec la relation linéaire (15) qui doit exister (§ 68) entre ces fonctions, on voit que deux coefficients successifs de cette relation forment un système de racines pour les équations (1).

[1]) Abel a donné une autre méthode pour déterminer la solution commune de deux équations dont le résultant est nul, dans les Annales de Mathématiques de Gergonne, tome XVII. Voir: J. A. Serret, Cours d'Algèbre Supérieure.

Les coefficients de cette relation se déterminent par la résolution de $v-1$ équations ζ, indépendantes entre elles. Ils sont proportionnels aux déterminants contenus dans $v-1$ colonnes indépendantes entre elles de l'assemblant de la fonction F. La solution commune des équations (1) s'exprime donc par un système de deux déterminants du degré k, se réduisant au degré $m+n-1$ pour la valeur de k qui est fixée par Bezout pour trouver le résultant.

§ 78. Au moyen de l'identité (3) on peut diminuer encore le degré de ces déterminants d'une unité.

Quand il n'existe qu'un seul système de racines pour les équations (1), il ne peut exister entre les équations θ qu'une seule relation linéaire, quelle que soit la valeur de k. La plus petite valeur de k s'obtient dans ce cas en posant $v_2 = -1$, exprimant (§ 72) qu'il existe entre les équations θ au moins une relation linéaire. On a dans ce cas $\lambda = -1$, tandis que les équations (22) donnent les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} k & = m+n-2\,, \\ \alpha_1 & = n-1\,, \\ \alpha_2 & = m-1\,, \\ v & = m+n-1\,, \\ v_1 & = \alpha_1+\alpha_2 = m+n-2\,, \\ v_2 & = k-m-n+1 = -1\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

En résolvant $v-1$ [1]) des équations ζ, indépendantes entre elles, on trouve les valeurs de x et de y sous la forme de déterminants du degré $v-1 = m+n-2$, lequel est de deux unités inférieur au degré du résultant.

§ 79. Appliquons la théorie précédente aux équations (23), en supposant le résultant de ces équations nul, on aura $m=4$ et $n=3$, et les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{llr} k & = m+n-2 & = 5\,, \\ \alpha_1 & = k-m+1 & = 2\,, \\ \alpha_2 & = k-n+1 & = 3\,, \\ v & = k+1 & = 6\,, \\ v_1 & = \alpha_1+\alpha_2 & = 5\,, \\ v_2 & = k-m-n+1 & = -1\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

tandis que la fonction

[1]) Dans ce cas particulier toutes les équations ζ, car on a $v-1=v_1$.

$$F \equiv (s_1 x + s_2 y)(a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 x y^3 + a_5 y^4) + (s_3 x^2 + s_4 x y + s_5 y^2)(b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3) \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

conduit à l'assemblant

$$\begin{array}{l|ccccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\
\hline
p_1 = x^5 & a_1 & & b_1 & & \\
p_2 = x^4 y & a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\
p_3 = x^3 y^2 & a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\
p_4 = x^2 y^3 & a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\
p_5 = x\ y^4 & a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\
p_6 = \quad y^5 & & a_5 & & & b_4
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38).$$

De là résulte que la relation linéaire qui existe entre les fonctions θ, est exprimée par

$$\frac{p_1}{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{p_2}{-\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{p_3}{\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{p_4}{-\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} = \text{etc.} \; (39).$$

Des deux premiers membres de l'égalité (39) on obtient pour la solution commune des équations (23):

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} = \frac{y_1}{-\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots (40).$$

On trouve par la théorie des polynômes entiers que les fonctions φ et χ sont divisibles, à un facteur constant près, par $xy_1 - x_1 y$, ou dans le cas en question par

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & a_4 & & b_4 & b_3 \\ & a_5 & & & b_4 \end{vmatrix} y \quad \ldots\ldots\ldots (41).$$

ÉVALUATION DE DEUX SOLUTIONS COMMUNES.

§ 83. Après ce qui précède nous ne nous arrêterons pas aux conditions nécessaires et suffisantes, pour que les équations (1) aient plus de trois solutions communes, indépendantes entre elles, pas plus qu'à la recherche de ces conditions. Il est plus important de faire voir de quelle manière la théorie précédente donne le moyen d'évaluer ces solutions communes.

Pour y arriver, supposons d'abord le cas où il y a en tout deux systèmes de racines indépendants entre eux pour les équations (1). Dans ce cas tous les déterminants de l'assemblant de la fonction F doivent être nuls en prenant $k = m + n - 2$.

Pour évaluer les deux systèmes de racines on prendra $k = m + n - 3$, alors on obtiendra les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} k & = m + n - 3 & , \\ \alpha_1 & = n - 2 & , \\ \alpha_2 & = m - 2 & , \\ v & = k + 1 & = m + n - 2\,, \\ v_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 & = m + n - 4\,, \\ v_2 & = k - m - n + 1 = -2 & , \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

Comme $v_2 = -2$, les fonctiens θ sont dans ce cas liées entre elles précisément par deux relations linéaires. L'assemblant de la fonction F contient $v = m + n - 2$ lignes et $v_1 = m + n - 4$ colonnes, de sorte que les coefficients de ces deux relations linéaires peuvent être trouvés en résolvant $v_1 = m + n - 4$ équations linéaires homogènes ζ avec $v = m + n - 2$ arbitraires p.

On trouve deux systèmes de racines p', indépendants entre eux, en posant alternativement l'une de deux arbitraires successives égale à zéro.

Les autres éléments de ces deux systèmes de racines ont la forme de déterminants du degré $m + n - 4$.

Pour fixer les idées, supposons que ces deux systèmes de racines soient contenus dans les lignes de l'assemblant:

$$\begin{array}{c|cccccc|} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5\,, \ldots\ldots & p_v \\ \\ q_1 & o\,, & p_{12}\,, & -p_{13}\,, & p_{14}\,, & -p_{15}\,, \ldots & \pm p_{1v} \\ q_2 & -p_{12}\,, & o\,, & p_{23}\,, & -p_{24}\,, & p_{25}\,, \ldots & \mp p_{2v} \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (46),$$

où les indices ont la signification du § 2, indiquant les lignes de l'assemblant des coefficients qui doivent être supprimées pour obtenir le déterminant représenté par le symbole.

Ni l'un ni l'autre des deux systèmes de racines (46) n'est conforme au système de valeurs (15), indiquant les coefficients d'une relation linéaire qui doit exister entre les fonctions θ. Pour trouver un tel système, on peut déduire des systèmes (46), comme au § 14, un autre système de racines dont aucun élément n'est égal à zéro.

En multipliant, à cet effet, les lignes de l'assemblant (46) successivement par q_1 et q_2, et en ajoutant les produits, on trouve un système de valeurs qui peut être conforme au système (15). Ainsi on obtient l'égalité suivante, en supprimant les indices de x et y:

$$\frac{x^k}{-q_2 p_{12}} = \frac{x^{k-1} y}{q_1 p_{12}} = \frac{x^{k-2} y^2}{-q_1 p_{13} + q_2 p_{23}} = \frac{x^{k-3} y^3}{q_1 p_{14} - q_2 p_{24}} \ldots = \frac{\pm y^k}{q_1 p_{1v} - q_2 p_{2v}} \;. \quad (47).$$

Des deux premiers membres de cette égalité on déduit:

$$\frac{x}{-q_2} = \frac{y}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

par laquelle l'égalité (47) se réduit à

$$\frac{x^{k-1}}{p_{12}} = \frac{x^{k-2} y^2}{-p_{13}\, y - p_{23}\, x} = \frac{x^{k-3} y^3}{p_{14}\, y + p_{24}\, x} = \ldots\ldots = \frac{\pm y^k}{p_{1v}\, y + p_{2v}\, x} \;\ldots\ldots \quad (49).$$

Les deux premiers membres de l'égalité (49) fournissent l'équation du second degré:

$$p_{23}\, x^2 + p_{13}\, x y + p_{12}\, y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50),$$

dont les racines représentent les deux solutions communes des équations (1).

Au moyen de la théorie des polynômes entiers on trouve que les fonctions φ et χ sont divisibles, à un facteur constant près, par

$$p_{23}\, x^2 + p_{13}\, x y + p_{12}\, y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51).$$

Remarque. Si l'on avait pris deux autres membres de l'égalité (49), par exemple le deuxième et le troisième, on aurait obtenu, au lieu de l'équation (50), la suivante:

$$p_{24}\, x^2 + (p_{14} + p_{23})\, x y + p_{13}\, y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

Les coefficients des équations (50) et (52) sont proportionnels, donc

$$\frac{p_{24}}{p_{23}} = \frac{p_{14} + p_{23}}{p_{13}} = \frac{p_{13}}{p_{12}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53),$$

d'où l'on peut déduire les équations:

$$\left.\begin{aligned} p_{12}p_{14} - p_{13}p_{23} &= 0\,, \\ -p_{13}^2 + p_{12}p_{23} + p_{12}p_{14} &= 0\,, \\ p_{23}^2 + p_{23}p_{14} - p_{13}p_{24} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54),$$

auxquelles on en pourrait ajouter d'autres obtenues de la même manière; elles expriment des propriétés particulières de l'assemblant, dont elles dérivent. L'étendue de ce mémoire ne permet pas d'entrer dans des détails sur cette question.

§ 84. Appliquons ce qui précède aux équations (23). On satisfera à ces équations par deux systèmes de racines indépendants entre eux, si tous les déterminants de l'assemblant (38) sont nuls. Si cette condition est remplie, l'assemblant (44) donne les coefficients de l'équation (50) du second degré, dont les racines représentent les valeurs du rapport de x par y.

On trouve pour ces coefficients:

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & b_2 \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix}\,, \\ p_{13} &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & b_1 \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix}\,, \\ p_{23} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55),$$

de sorte que dans ce cas les premiers membres des équations (23) sont divisibles, à un facteur constant près, par

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & b_1 \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & b_2 \\ a_4 & b_4 & b_3 \\ a_5 & & b_4 \end{vmatrix} y^2 \, . \, . \, (56).$$

Les deux solutions communes des équations (23) s'obtiennent donc par la résolution de l'équation du second degré que l'on obtient, quand on égale la forme (56) à zéro.

ÉVALUATION DE TROIS, QUATRE, ETC. SOLUTIONS COMMUNES.

§ 85. Quand il existe en tout trois systèmes de racines indépendants entre eux pour les équations (1), tous les déterminants de l'assemblant de la fonction F, en prenant $k = m + n - 3$, sont nuls.

Pour déterminer ces trois solutions communes, donnons à k une valeur telle que les fonctions θ soient liées entre elles en tout par trois relations linéaires.

Cela exige que l'on ait $v_2 = -3$ ou $\lambda = -3$, de sorte qu'on obtient les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{llll} k = m + n - 4 & & & , \\ \alpha_1 = k - m + 1 & = n - 3 & & , \\ \alpha_2 = k - n + 1 & = m - 3 & & , \\ v = k + 1 & = m + n - 3 & & , \\ v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 & = m + n - 6 & & , \\ v_2 = k - m - n + 1 & = -3 & & , \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (57).$$

Pour cette valeur de k l'assemblant de la fonction F se compose de $v = m + n - 3$ lignes et de $v_1 = m + n - 6$ colonnes. On peut donc trouver les coefficients de trois relations linéaires entre les équations θ par la résolution de $v_1 = m + n - 6$ équations linéaires homogènes ζ avec $v = m + n - 3$ arbitraires p. Pour cela, égalons alternativement à zéro deux des trois arbitraires successives, et calculons les autres éléments de ces trois systèmes de racines par la résolution des équations ζ.

Posons, pour fixer les idées, que ces trois systèmes de racines p' soient contenus dans les lignes de l'assemblant :

$$\begin{array}{c|cccccc|} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \ldots\ldots\ldots & p_v \\ \hline q_1 & o, & o, & p_{123}, & -p_{124}, & p_{125}, \ldots & \pm p_{12v} \\ q_2 & o, & -p_{123}, & o, & p_{134}, & -p_{135}, \ldots & \mp p_{13v} \\ q_3 & p_{123}, & o, & o, & -p_{234}, & p_{235}, \ldots & \pm p_{23v} \end{array} \quad \ldots\ldots (58),$$

où les indices ont la signification du § 2.

On peut déduire des trois systèmes de racines (58) un système de coefficients d'une relation linéaire entre les fonctions θ qui est conforme au système (15). A cet effet, multiplions les lignes de l'assemblant (58) successivement par les indéterminées q_1, q_2, q_3, et ajoutons-les. En confrontant ce nouveau système avec le système (15), on trouve, en supprimant les indices de x et y, l'égalité :

$$\frac{x^k}{q_3 p_{123}} = \frac{x^{k-1} y}{-q_2 p_{123}} = \frac{x^{k-2} y^2}{q_1 p_{123}} = \frac{x^{k-3} y^3}{-q_1 p_{124} + q_2 p_{134} - q_3 p_{234}} =$$
$$= \frac{x^{k-4} y^4}{q_1 p_{125} - q_2 p_{135} + q_3 p_{235}} = \ldots\ldots = \frac{\pm y^k}{q_1 p_{12v} - q_2 p_{13v} + q_3 p_{23v}} \ldots (59).$$

Des trois premiers membres de cette égalité on déduit :

$$\frac{x^2}{q_3} = \frac{x\,y}{-q_2} = \frac{y^2}{q_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60),$$

et par là on trouve l'égalité :

$$\frac{x^{k-2}}{p_{123}} = \frac{x^{k-3} y^3}{-p_{124} y^2 - p_{134} x y - p_{234} x^2} = \frac{x^{k-4} y^4}{p_{125} y^2 + p_{135} x y + p_{235} x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pm y^k}{p_{12v} y^2 + p_{13v} x y + p_{23v} x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61).$$

Les deux premiers membres de l'égalité (61) fournissent l'équation du troisième degré :

$$p_{234} x^3 + p_{134} x^2 y + p_{124} x y^2 + p_{123} y^3 = o \ldots\ldots\ldots\ldots (62),$$

dont les racines représentent les trois solutions communes des équations (1).

D'après la théorie des polynômes entiers on conclut que les fonctions φ et χ sont divisibles, à un facteur constant près, par

$$p_{234} x^3 + p_{134} x^2 y + p_{124} x y^2 + p_{123} y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63).$$

Remarque. En prenant deux autres membres de l'équation (61), on obtient pour l'équation (62) une autre forme. De cette manière on trouve, comme dans la remarque du § 83, des propriétés particulières des déterminants de l'assemblant de la fonction F.

§ 86. Appliquons ce qui précède aux équations (23). Si l'on peut satisfaire à ces équations par trois systèmes de racines, indépendants entre eux, tous les déterminants de l'assemblant (44) sont nuls.

Pour déterminer ces solutions communes, on prend $\lambda = -3$. Nous obtiendrons les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned} k &= m + n - 4 &&= 3\,, \\ \alpha_1 &= k - m + 1 &&= 0\,, \\ \alpha_2 &= k - n + 1 &&= 1\,, \\ v &= k - 1 &&= 4\,, \\ v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 &&= 1\,, \\ v_2 &= k - m - n + 1 &&= -3\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64),$$

tandis que la fonction F devient

$$F = s_1\,(b_1\,x^3 + b_2\,x^2\,y_3 + b\,x\,y^2 + b_4\,y^3) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65),$$

d'où l'on déduit l'assemblant:

	s_1
$p_1 = x^3$	b_1
$p_2 = x^2y$	b_2
$p_3 = xy^2$	b_3
$p_4 = y^3$	b_4

. . . . (66).

Nous empruntons à cet assemblant les valeurs:

$$\left.\begin{aligned} p_{123} &= b_4\,, \\ p_{124} &= b_3\,, \\ p_{134} &= b_2\,, \\ p_{234} &= b_1\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67),$$

par lesquelles la forme (63) se réduit à

$$b_1\, x^3 + b_2\, x^2\, y + b_3\, x\, y^2 + b_4\, y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68),$$

la fonction χ même.

Donc, dans ce cas les premiers membres des équations (23) sont divisibles, à un facteur constant près, par la fonction χ, comme il était facile à prévoir.

§ 87. La théorie précédente permet de trouver pour les équations (1) les solutions communes, s'il y en a plus de trois. Ce qui précède nous dispense d'une plus ample digression sur cette question. Eclaircissons seulement la théorie d'élimination entre deux équations homogènes à deux variables, en choisissant encore comme exemple les équations:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &\equiv a_1\, x^6 + a_2\, x^5\, y + a_3\, x^4\, y^2 + a_4\, x^3\, y^3 + a_5\, x^2\, y^4 + a_6\, x\, y^5 + a_7\, y^6 = o\,,\\ \chi &\equiv b_1\, x^4 + b_2\, x^3\, y + b_3\, x^2\, y^2 + b_4\, x\, y^3 + b_5\, y^4 = o\,,\end{aligned}\right\} \quad (62),$$

où $m = 6$ et $n = 4$.

Formons les assemblants suivants:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
a_1 & & & & b_1 & & & & & \\
a_2 & a_1 & & & b_2 & b_1 & & & & \\
a_3 & a_2 & a_1 & & b_3 & b_2 & b_1 & & & \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & & \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \\
a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\
 & a_7 & a_6 & a_5 & & & & b_5 & b_4 & b_3 \\
 & & a_7 & a_6 & & & & & b_5 & b_4 \\
 & & & a_7 & & & & & & b_5
\end{array}\right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a),$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
a_1 & & & b_1 & & & & \\
a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & & & \\
a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & & \\
a_4 & a_3 & a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \\
a_5 & a_4 & a_3 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
a_6 & a_5 & a_4 & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\
a_7 & a_6 & a_5 & & & b_5 & b_4 & b_3 \\
 & a_7 & a_6 & & & & b_5 & b_4 \\
 & & a_7 & & & & & b_5
\end{array}\right| \ldots\ldots \quad (b), \qquad
\left|\begin{array}{cccccc}
a_1 & & b_1 & & & \\
a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & & \\
a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & b_1 & \\
a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\
a_5 & a_4 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\
a_6 & a_5 & & b_5 & b_4 & b_3 \\
a_7 & a_6 & & & b_5 & b_4 \\
 & a_7 & & & & b_5
\end{array}\right| \ldots\ldots \quad (c),$$

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & & \\ a_2 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & b_4 & b_3 & b_2 \\ a_5 & b_5 & b_4 & b_3 \\ a_6 & & b_5 & b_4 \\ a_7 & & & b_5 \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d), \qquad \left|\begin{matrix} b_1 & \\ b_2 & b_1 \\ b_3 & b_2 \\ b_4 & b_3 \\ b_5 & b_4 \\ & b_5 \end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e),$$

dont le premier est un déterminant du degré $m + n = 10$, tandis que chaque assemblant suivant compte deux colonnes déterminées de moins que le précédent.

S'il n'y a qu'un seul système de racines pour les équations (69), le déterminant (a) est nul, et la solution commune se déduit de l'équation :

$$B_2\,x + B_1\,y = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (70),$$

dans laquelle les coefficients sont des déterminants, empruntés à l'assemblant (b).

S'il y a deux systèmes de racines indépendants entre eux pour les équations (69), tous les déterminants de l'assemblant (b) sont nuls, et les solutions communes se trouvent en résolvant l'équation du second degré :

$$C_{23}\,x^2 + C_{13}\,xy + C_{12}\,y^2 = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71),$$

dont les coefficients sont empruntés aux déterminants de l'assemblant (c).

S'il y a trois systèmes de racines indépendants entre eux pour les équations (69), tous les déterminants de l'assemblant (c) sont nuls, et les solutions communes se trouvent par la résolution de l'équation du troisième degré :

$$D_{234}\,x^3 + D_{134}\,x^2y + D_{124}\,xy^2 + D_{123}\,y^3 = o \ldots\ldots\ldots (72),$$

dont les coefficients sont empruntés aux déterminants de l'assemblant (d).

Si les équations (69) admettent quatre systèmes de racines indépendants entre eux, tous les déterminants de l'assemblant (d) sont nuls, et les solutions communes s'obtiennent en résolvant l'équation du quatrième degré :

$$E_{2345}\,x^4 + E_{1345}\,x^3y + E_{1245}\,x^2y^2 + E_{1235}\,xy^3 + E_{1234}\,y^4 = 0 \ldots\ldots\ldots (73),$$

dont les coefficients sont empruntés aux déterminants de l'assemblant (e).

L'équation (73) se réduit, après division par b_5, à

$$b_1\, x^4 + b_2\, x^3 y + b_3\, x^2 y^2 + b_4\, x y^3 + b_5\, y^4 = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74),$$

comme il était à prévoir.

III. Elimination entre trois équations homogènes à trois variables.

ÉVALUATION DU RÉSULTANT.

§ 88. Pour déterminer le résultant des trois équations homogènes des degrés l, m et n à trois variables:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, z) \equiv a_1\, x^l + a_2\, x^{l-1}\, y + a_3\, x^{l-1}\, z + a_4\, x^{l-2}\, y^2 + a_5\, x^{l-2}\, y\, z + \\ \quad + a_6\, x^{l-2}\, z^2 + a_7\, x^{l-3}\, y^3 + a_8\, x^{l-3}\, y^2\, z + \ldots + a_{\frac{(l+1)(l+2)}{2}}\, z^l = o, \\ \\ \chi(x, y, z) \equiv b_1\, x^m + b_2\, x^{m-1}\, y + b_3\, x^{m-1}\, z + b_4\, x^{m-2}\, y^2 + b_5\, x^{m-2}\, yz + \\ \quad + b_6\, x^{m-2}\, z^2 + b_7\, x^{m-3}\, y^3 + b_8\, x^{m-3}\, y^2\, z + \ldots + b_{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}\, z^m = o, \\ \\ \psi(x, y, z) \equiv c_1\, x^n + c_2\, x^{n-1}\, y + c_3\, x^{n-1}\, z + c_4\, x^{n-2}\, y^2 + c_5\, x^{n-2}\, y\, z + \\ \quad + c_6\, x^{n-2}\, z^2 + c_7\, x^{n-3}\, y^3 + c_8\, x^{n-3}\, y^2\, z + \ldots + c_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\, z^n = o, \end{array}\right\} \ldots (1),$$

Bezout a pris une fonction exprimée par

$$F = \Phi\, \varphi + \mathrm{X}\, \chi + \Psi\, \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

où Φ, X, Ψ sont des fonctions homogènes à coefficients indéterminés s.

Le degré de la fonction F est arbitraire. Si F est du degré k, les fonctions Φ, X et Ψ sont respectivement des degrés $k-l$, $k-m$ et $k-n$.

Le nombre des termes d'une fonction homogène du degré k à trois variables est égal à la somme de la progression arithmétique $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots k+1$, c'est-à-dire, à $v = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Les fonctions Φ, X, Ψ contiennent donc respectivement $\alpha_1 = \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2}$, $\alpha_2 = \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2}$, $\alpha_3 = \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2}$ termes aux coefficients indéterminés $s_1, s_2, s_3, \ldots s_{v_1}$.

La fonction F peut être développée de deux manières:

1. suivant les arguments consécutifs d'une fonction homogène des variables x, y et z;

2. suivant les indéterminées s_1, s_2, s_3, etc.

De là on déduit l'identité:

$$x^k \theta_1 + x^{k-1} y\, \theta_2 + x^{k-1} z\, \theta_3 + x^{k-2} y^2\, \theta_4 + x^{k-2} y\, z\, \theta_5 + \ldots + z^k\, \theta_v$$
$$s_1\, x^{k-l}.\varphi + s_2\, x^{k-l-1}\, y.\varphi + s_3\, x^{k-l-1}\, z.\varphi + \ldots + s_{\alpha_1} z^{k-l}.\varphi + s_{\alpha_1+1} x^{k-m}.\chi$$
$$s_{\alpha_1+2} x^{k-m-1} y.\chi + s_{\alpha_1+3} x^{k-m-1} z.\chi + \ldots + s_{\alpha_1+\alpha_2} z^{k-m}.\chi + s_{\alpha_1+\alpha_2+1} x^{k-n}.\psi$$
$$+ s_{\alpha_1+\alpha_2+2}\, x^{k-n-1} y.\psi + s_{\alpha_1+\alpha_2+3} x^{k-n-1} z.\psi + \ldots + s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} z^{k-n}.\psi \quad \ldots \quad (3).$$

Les grandeurs θ du premier membre de cette identité sont des fonctions linéaires homogènes des indéterminées s, dont l'assemblant des coefficients contient $v = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ lignes de $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ éléments, représentés en partie par des coefficients des équations (1), en partie par des zéros.

Quand on donne à l'équation (3) la forme:

$$p_1\, \theta_1 + p_2\, \theta_2 + p_3\, \theta_3 + \ldots + p_v\, \theta_v \equiv s_1\, \zeta_1 + s_2\, \zeta_2 + s_3\, \zeta_3 + \ldots + s_{\alpha_1}\, \zeta_{\alpha_1}$$
$$+ s_{\alpha_1+1}\, \zeta_{\alpha_1+1} + \ldots\ldots + s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\, \zeta_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

il est évident qu'il existe entre l'identité (3) et cet assemblant le même rapport qu'entre la formule (5) du § 5 et l'assemblant (1) du § 1.

Par conséquent, la fonction F donne lieu à former pour toute valeur du degré k un assemblant qui contient v lignes et $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ colonnes.

Les α_1 premières colonnes renferment seulement des coefficients de la fonction φ et des zéros, les α_2 suivantes seulement des coefficients de la fonction χ et des zéros, les α_3 dernières seulement des coefficients de la fonction ψ et des zéros.

Quand on donne différentes valeurs à k, la nature de cet assemblant reste la même, quoique le nombre des lignes ainsi que celui des colonnes varie.

En général, k n'admet pas de valeur pour laquelle l'assemblant se change en déterminant; k n'admet pas non plus de valeur, fonction de l, m et n, dont on peut être assuré qu'elle rend le nombre des lignes (ou des colonnes) supérieur à celui des colonnes (ou des lignes).

La différence entre le nombre des colonnes et celui des lignes s'exprime par l'égalité

$$v_1 - v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - v \ldots\ldots (5),$$

qui devient par la substitution des valeurs de α_1, α_2, α_3 et v, réduction faite,

$$v_1 - v = (k+1)[k-(l+m+n-2)] + \frac{l(l-1)+m(m-1)+n(n-1)}{2} \quad (6).$$

De cette équation on peut tirer les conclusions suivantes:

1. quand $k > l+m+n-2$, le nombre des colonnes est toujours supérieur au nombre des lignes, car la plus petite valeur de l, m et n est l'unité;

2. quand $k = l+m+n-2$, on a $v_1 - v = \frac{l(l-1)+m(m-1)+n(n-1)}{2}$, cette valeur étant supérieure ou au moins égale à zéro;

3. quand $k < l+m+n-2$, par exemple pour $k = l + m + n - 2 - \lambda$, on trouve, après réduction: $v_1 - v = \frac{l[l-(2\lambda+1)]+m[m-(2\lambda+1)]+n[n-(2\lambda+1)]+2\lambda(\lambda+1)}{2}$, cette valeur pouvant être supérieure, égale ou inférieure à zéro.

§ 89. Si l'on peut satisfaire d'une manière quelconque à l'équation

$$F = o \ldots\ldots (7),$$

les deux membres de l'équation (3) s'évanouissent. Cela est possible de deux manières:

1. indépendamment des valeurs des variables x, y et z;
2. indépendamment des valeurs des indéterminées s.

§ 90. Indépendamment des valeurs des variables x, y et z on peut satisfaire à l'équation (7), s'il existe un système de racines s' pour les équations θ.

Sans qu'une relation entre les coefficients des équations (1) soit nécessaire, ce cas se produit, si l'on a $v_1 > v$.

Il est facile de remplir cette condition, car k est arbitraire.

On peut dans ce cas supposer que les déterminants de l'assemblant de la fonction F ne soient pas tous nuls. Les équations θ ont donc en tout $v_1 - v$ systèmes de racines s' indépendants entre eux.

La forme de la fonction F fait trouver, sans résolution directe des équations θ, au moins $v_1 - v$ systèmes de racines de ces équations.

On voit aisément qu'on peut satisfaire à l'équation (7), indépendamment des valeurs des variables x, y et z, des trois manières suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \Phi = o\,,\ \dfrac{X}{\psi} = \dfrac{-\Psi}{\chi}\,, \\[2ex] 2.\ X = o\,,\ \dfrac{\Psi}{\varphi} = \dfrac{-\Phi}{\psi}\,, \\[2ex] 3.\ \Psi = o\,,\ \dfrac{\Phi}{\chi} = \dfrac{-X}{\varphi}\,, \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Comme les identités de la seconde rangée sont respectivement du degré $k - m - n$, $k - l - n$ et $k - l - m$, on peut conclure que les trois manières susdites fournissent respectivement :

$$\text{la première } \beta_1 = \frac{(k - m - n + 1)(k - m - n + 2)}{2},$$

$$\text{la deuxième } \beta_2 = \frac{(k - l - n + 1)(k - l - n + 2)}{2},$$

$$\text{la troisième } \beta_3 = \frac{(k - l - m + 1)(k - l - m + 2)}{2},$$

c'est un total de $v_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ systèmes de racines s' pour les équations θ.

§ 91. Ces v_2 systèmes de racines ne sont pas en général indépendants entre eux, mais liés par $v_3 = \dfrac{(k-l-m-n+1)\ (k-l-m-n+2)}{2}$ relations linéaires.

Pour le démontrer, multiplions ces v_2 systèmes de racines s' respectivement par les indéterminées t_1, t_2, t_3, ... t_{v_2}, et ajoutons les produits ; les polynômes ainsi obtenus, égalés à zéro, forment v_1 équations linéaires homogènes t, auxquelles on devra pouvoir satisfaire par des systèmes de racines t' qui ne se composent pas de zéros seuls.

§ 92. Ces équations se subdivisent dans les trois groupes suivants :

groupe I, se composant de α_1 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments a,

groupe II, se composant de α_2 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments b,

groupe III, se composant de α_3 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments c.

Multiplions les équations du groupe I respectivement par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-l$ des trois variables x, y et z; les équations du groupe II de même, par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-m$ des mêmes variables; les équations du groupe III de même, par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-n$ des mêmes variables, x, y et z étant des grandeurs arbitraires, et ajoutons les résultats de chaque groupe; on obtiendra les trois équations:

$$\left.\begin{aligned} T_3\chi - T_2\psi &= o, \\ -T_3\varphi + T_1\psi &= o, \\ T_2\varphi - T_1\chi &= o, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

dans lesquelles les grandeurs T représentent des fonctions homogènes des trois variables x, y et z:

T_1 du degré $k-m-n$, ayant pour coefficients les β_1 premières indéterminées t,

T_2 du degré $k-l-n$, ayant pour coefficients les β_2 indéterminées t qui viennent ensuite,

T_3 du degré $k-l-m$, ayant pour coefficients les β_3 dernières indéterminées t.

Si les systèmes de racines s' sont liés entre eux par une ou plusieurs relations linéaires, on peut satisfaire aux équations (9), indépendamment des valeurs des variables x, y et z, par les systèmes de racines t' des équations t.

Réciproquement, si l'on peut satisfaire aux équations (9), x, y et z ayant des valeurs arbitraires, par un système de valeurs t', celui-ci satisfait aussi aux équations t: les systèmes de racines s' sont donc liés entre eux par des relations linéaires.

§ 93. Aux équations (9) on peut satisfaire en posant

$$\frac{T_1}{\varphi} \quad \frac{T_2}{\chi} \quad \frac{T_3}{\psi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

On peut remplir cette condition d'autant de manières qu'il y a de termes dans une fonction homogène du degré $k-l-m-n$ à trois variables, savoir de $v_3 = \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2}$ manières. Les systèmes de racines s' sont donc liés entre eux par v_3 relations linéaires.

§ 94. Les v_3 systèmes de racines t' sont indépendants entre eux. Pour le démontrer, ajoutons-les après les avoir multipliés par les indéterminées u_1, u_2, $u_3 \ldots u_{v_3}$; les résultats, égalés à zéro, forment v_2 équations linéaires homogènes, qui devraient être vérifiées par un système de racines u', ne se composant pas de zéros seuls, si les systèmes de racines t' étaient liés par des relations linéaires.

Ces équations u peuvent se réduire aux trois groupes suivants:

groupe I, se composant de β_1 équations dont les coefficients sont seulement des éléments a;

groupe II, se composant de β_2 équations dont les coefficients sont seulement des éléments b;

groupe III, se composant de β_3 équations dont les coefficients sont seulement des éléments c.

Multiplions les équations du groupe I respectivement par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-m-n$ des trois variables x, y et z; les équations du groupe II par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-l-n$ des mêmes variables; les équations du groupe III par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré $k-l-m$ des mêmes variables x, y et z, ces grandeurs étant arbitraires, et ajoutons les résultats de chaque groupe; on obtient les trois équations:

$$\mathrm{U}\varphi = o\,,\ \mathrm{U}\chi = o\,,\ \mathrm{U}\psi = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Dans ces équations U représente une fonction homogène des variables x, y et z, du degré $k-l-m-n$, ayant pour coefficients les v_3 indéterminées u.

Si les systèmes de racines t' n'étaient pas indépendants entre eux, il faudrait pouvoir satisfaire aux équations (11), x, y et z ayant des valeurs arbitraires, par un système de valeurs u', ne se composant pas de zéros seuls. Comme c'est impossible, les systèmes de racines t' sont indépendants entre eux.

§ 95. Les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines t' sont premiers entre eux.

Et de fait, s'ils avaient un commun diviseur, fonction des coefficients des fonctions φ, χ et ψ, il existerait, en donnant aux coefficients des valeurs qui réduisent ce commun diviseur à zéro, au moins un système de racines u' pour les équations u. C'est impossible, comme nous l'avons démontré au paragraphe précédent; donc il est aussi impossible que les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines t' aient un commun diviseur.

Il reste encore à démontrer que les déterminants contenus dans v_2-v_3 lignes quelconques de l'assemblant des systèmes de racines s', n'ont pas d'autre commun diviseur que le déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines t'. Si leur plus grand commun diviseur contenait un autre facteur, on pourrait encore satisfaire aux équations (10) par d'autres valeurs que les v_3 systèmes de racines t' susdits, les coefficients ayant des valeurs qui réduisent ce facteur à zéro. Cela serait seulement possible dans le cas particulier où les fonctions φ, χ et ψ auraient un commun diviseur, et si elles pouvaient être réduites ainsi à un degré inférieur.

Il est clair que ce cas reste ici hors de considération.

§ 96. En substituant les valeurs

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2},\\
v_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2}+\frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2}+\frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2}\\
&= 3.\frac{(k+1)(k+2)}{2}-(l+m+n).\frac{2k+3}{2}+\frac{l^2+m^2+n^2}{2},\\
v_2 &= \beta_1+\beta_2+\beta_3 = \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2}+\frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2}\\
&\quad+\frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} =\\
&\quad 3.\frac{(k+1)(k+2)}{2}-2(l+m+n).\frac{2k+3}{2}+\frac{(m+n)^2+(l+n)^2+(l+m)^2}{2},\\
v_3 &= \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2} =\\
&\quad \frac{(k+1)(k+2)}{2}-(l+m+n).\frac{2k+3}{2}+\frac{(l+m+n)^2}{2}
\end{aligned}\right\} (12)$$

dans la forme $v-v_1+v_2-v_3$, on trouve

$$v-v_1+v_2-v_3 = \frac{l^2+m^2+n^2}{2}+\frac{(m+n)^2+(l+n)^2+(l+m)^2}{2}-\frac{(l+m+n)^2}{2}=0. (13),$$

conformément au § 29.

§ 97. Nous avons considéré dans ce qui précède trois assemblants:

1. celui de la fonction F;
2. celui des systèmes de racines s';
3. celui des systèmes de racines t'.

Pour déterminer le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant de la fonction F, on emprunte d'abord de l'assemblant des systèmes de racines t' un déterminant D_{v_3} qui ne soit pas nul identiquement; puis, de v_2-v_3 colonnes quelconques de l'assemblant des systèmes de racines s' le déterminant $D_{v_2-v_3}$ supplémentaire à D_{v_3}; ensuite, de l'assemblant de la fonction F le déterminant D_v supplémentaire à $D_{v_2-v_3}$.

Le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant de la fonction F s'obtient donc par la formule [1]:

$$R = \frac{D_v}{D_{v_2-v_3} : D_{v_3}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

§ 98. On pourrait encore satisfaire à l'équation (7) d'une autre manière, et cela, indépendamment des valeurs des indéterminées s. Dans ce cas une seule solution commune (x_1, y_1, z_1) existe pour les équations (1). En substituant les valeurs des racines communes dans l'équation (3), elle se réduit à

$$x_1^k\,\theta_1 + x_1^{k-1}y_1\,\theta_2 + x_1^{k-1}z_1\,\theta_3 + x_1^{k-2}y_1^2\,\theta_4 + x_1^{k-2}y_1 z_1\,\theta_5 \ldots + z_1^k\,\theta_v = 0 \quad (15),$$

indiquant que les fonctions θ sont liées entre elles par une relation linéaire, dont les coefficients sont:

$$\left| x_1^k,\ x_1^{k-1}y_1,\ x_1^{k-1}z_1,\ x_1^{k-2}y_1^2,\ x_1^{k-2}y_1 z_1, \ldots . z_1^k \right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Chaque solution commune des équations (1) donne une telle relation linéaire entre les fonctions θ. Pour trouver le résultant il suffit de supposer qu'il n'existe qu'une seule solution commune pour les équations (1). Les fonctions θ ne sont donc liées entre elles que par une seule relation linéaire.

§ 99. En supposant le degré k de la fonction F tel que le nombre des fonctions θ ne soit pas supérieur à celui des indéterminées s, il faut que le plus grand commun diviseur des déterminants de l'assemblant de la fonction F soit nul, pour qu'il existe une relation linéaire entre les fonctions θ.

Ce plus grand commun diviseur doit donc être le résultant des équations (1). L'équation (14) en est l'expression.

---

[1]) Les indices indiquent ici le degré des déterminants représentés par les symboles.

§ 100. Quand on considère l'équation (14), il est évident que le résultant est une fonction homogène des coefficients des fonctions φ, χ et ψ du degré

$$-(v_2-v_3)+v_3=v-v_2+2\,v_3=v_1-2\,v_2+3\,v_3=$$
$$\frac{l^2+m^2+n^2}{2}-2.\frac{(m+n)^2+(l+n)^2+(l+m)^2}{2}+3.\frac{(l+m+n)^2}{2}$$
$$=l\,m+l\,n+m\,n \quad \ldots\ldots\ldots (17),$$

cela se trouve en remplaçant les symboles v par leurs valeurs (12).

En prenant pour D_{v_3} un déterminant qui contient seulement des éléments a, on peut prendre pour $D_{v_2-v_3}$ un déterminant qui renferme $\beta_2+\beta_3$ lignes d'éléments a, tandis que le déterminant D_v contient α_1 colonnes d'éléments a. Par rapport aux coefficients a de la fonction φ, le résultant est donc du degré

$$\alpha_1-(\beta_2+\beta_3)+v_3=\frac{(k-l+1)\,(k-l+2)}{2}-\frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2}$$
$$-\frac{(k-l-m+1)\,(k-l-m+2)}{2}+\frac{(k-l-m-n+1)\,(k-l-m-n+2)}{2}=$$
$$(1-1+1-1).\frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2}+(n+m-n-m).\frac{2k-2l+3}{2}-\frac{n^2+m^2-(m+n)^2}{2}$$
$$=mn \quad \ldots\ldots\ldots (18).$$

De la même manière on trouve que le résultant est par rapport aux coefficients b de la fonction χ du degré

$$\alpha_2-(\beta_3+\beta_1)+v_3=\frac{(k-m+1)\,(k-m+2)}{2}-\frac{(k-l-m+1)\,(k-l-m+2)}{2}$$
$$-\frac{(k-m-n+1)\,(k-m-n+2)}{2}+\frac{(k-l-m-n+1)\,(k-l-m-n+2)}{2}=$$
$$(1-1+1-1).\frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2}+(l+n-l-n).\frac{2k-2m+3}{2}-\frac{l^2+n^2-(l+n)^2}{2}$$
$$=ln \quad \ldots\ldots\ldots (19),$$

et par rapport aux coefficients c de la fonction ψ du degré

$$\alpha_3-(\beta_1+\beta_2)+v_3=\frac{(k-n+1)\,(k-n+2)}{2}-\frac{(k-m-n+1)\,(k-m-n+2)}{2}$$
$$-\frac{(k-l-n+1)\,(k-l-n+2)}{2}+\frac{(k-l-m-n+1)\,(k-l-m-n+2)}{2}=$$
$$(1-1+1-1)\frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2}+(l+m-l-m).\frac{2k-2n+3}{2}-\frac{l^2+m^2-(l+m)^2}{2}$$
$$=lm \quad \ldots\ldots\ldots (20).$$

§ 101. Dans le cas particulier où les fonctions φ, χ et ψ sont du même degré n, on trouve les valeurs

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} &&= \binom{3}{0}\cdot\binom{k+2}{2},\\
v_1 &= 3\times\frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} &&= \binom{3}{1}\cdot\binom{k-n+2}{2},\\
v_2 &= 3\times\frac{(k-2n+1)(k-2n+2)}{2} &&= \binom{3}{2}\cdot\binom{k-2n+2}{2},\\
v_3 &= \frac{(k-3n+1)(k-3n+2)}{2} &&= \binom{3}{3}\cdot\binom{k-3n+2}{2},
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(21),$$

tandis que le degré du résultant devient $3n^2$.

§ 102. Bezout assigna à la fonction F le degré

$$k = l + m + n - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22).$$

On a pour cette valeur:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(l+m+n-1)(l+m+n)}{2},\\
v_1 &= \frac{(m+n-1)(m+n)}{2}+\frac{(l+n-1)(l+n)}{2}+\frac{(l+m-1)(l+m)}{2},\\
v_2 &= \frac{l(l+1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2},\\
v_3 &= 0,
\end{aligned}\right\}\ldots(23),$$

et dans le cas special de $l=m=n$:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(3n-1).\,3n}{2},\\
v_1 &= 3\times\frac{(2n-1).\,2n}{2},\\
v_2 &= 3\times\frac{(n-1).\,n}{2},\\
v_3 &= 0,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24),$$

tandis que le résultant se réduit en ce cas à

$$R = \frac{D_v}{D_{v_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25).$$

§ 103. Quand on prend pour k une valeur qui est d'une unité supérieure à celle posée par Bezout, on trouve dans le cas où l, m et n sont inégaux les résultats suivants:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(l+m+n)\,(l+m+n+1)}{2},\\
v_1 &= \frac{(m+n)\,(m+n+1)}{2} + \frac{(l+n)\,(l+n+1)}{2} + \frac{(l+m)\,(l+m+1)}{2},\\
v_2 &= \frac{l\,(l+1)}{2} + \frac{m\,(m+1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2},\\
v_3 &= 0,\\
R &= \frac{D_v}{D_{v_2}},
\end{aligned}\right\}\ldots (26).$$

§ 104. Le degré de la fonction F ayant une plus grande valeur que celle posée par Bezout, on trouve en prenant $k = \lambda + l + m + n - 2$:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(\lambda+l+m+n-1)\,(\lambda+l+m+n)}{2},\\
v_1 &= \frac{(\lambda+m+n-1)\,(\lambda+m+n)}{2} + \frac{(\lambda+l+n-1)(\lambda+l+n)}{2} + \frac{(\lambda+l+m-1)\,(\lambda+l+m)}{2},\\
v_2 &= \frac{(\lambda+l-1)\,(\lambda+l)}{2} + \frac{(\lambda+m-1)\,(\lambda+m)}{2} + \frac{(\lambda+n-1)\,(\lambda+n)}{2},\\
v_3 &= \frac{(\lambda-1)\,.\,\lambda}{2},
\end{aligned}\right\} (27).$$

Pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, on trouve $v_3 = 0$: les v_2 systèmes de racines s' sont indépendants entre eux, et l'expression du résultant ne renferme que deux déterminants. Le résultant aura la forme la plus simple, quand on prend $\lambda = 0$, mais toute valeur positive de λ conduit de même au résultant, qui prend alors une forme plus compliquée.

Il reste encore à démontrer que les valeurs négatives de λ ne conduisent pas au résultant.

Auparavant il importe de remarquer que l'équation (14), qui s'est trouvée être l'expression du résultant, a été déduite en partant de la supposition que les équations θ soient indépendantes entre elles. A ces équations on peut dans ce cas satisfaire en tout par $v_1 - v$ systèmes de racines indépendants entre eux. Les v_2 systèmes de racines s', liés entre eux par les v_3 relations linéaires dont les coefficients sont représentés par les valeurs t', sont équivalents à $v_1 - v$ systèmes de racines indépendants entre eux, d'après la condition (13).

Il s'ensuit du raisonnement par lequel on a trouvé entre les v_2 systèmes de racines s' les v_3 relations linéaires, que ces relations existent seulement, si k n'est pas inférieur à $l + m + n$.

Pour $k < l + m + n$ ou $\lambda < 2$, il n'existe pas de telles relations entre les systèmes de racines s'.

Pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 0$, on a $v_3 = 0$ et $v_2 = v_1 - v$; les v_2 systèmes de racines s' représentent dans ces cas précisément les $v_1 - v$ systèmes de racines indépendants entre eux, qui peuvent se produire.

Pour $\lambda < 0$, v_3 est positif. Les v équations linéaires homogènes θ aux v_1 variables s peuvent se vérifier dans ce cas par $v_2 = v_1 - v + v_3$ systèmes de racines s' indépendants entre eux. Comme ce nombre est de v_3 unités supérieur à $v_1 - v$, les équations θ sont liées entre elles par v_3 relations linéaires, sans qu'une relation entre les coefficients soit exigée. Donc, les valeurs négatives de λ ne conduisent pas au résultant.

La plus petite valeur de λ qui conduit au résultant est donc $\lambda = 0$, et cette valeur pour k est $k = l + m + n - 2$, précisément la valeur posée par Bezout [1]).

---

[1]) Qu'on nous permette de signaler ici une erreur de M. le Chevalier François Faà de Bruno dans sa Théorie générale de l'élimination, Paris 1859.

Il croit pouvoir trouver le résultant dans quelques cas en prenant pour le degré de la fonction F une valeur inférieure à $l + m + n - 2$. Il applique cette idée fausse à trois équations dont deux sont du troisième et une du deuxième degré, et trouve vingt et une équations linéaires entre vingt-deux arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_{22}$, mais il n'a pas remarqué que les colonnes de son assemblant (voyez les pages 136 et 137 de son ouvrage) sont liées entre elles par deux relations linéaires dont les coefficients sont compris dans les lignes du tableau:

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	α_{18}	α_{19}	α_{20}	α_{21}	α_{22}
o	o	o	o	o	o	a''	b'''	c''	d''	e''	f''	$-a'$	$-b'$	$-c'$	$-d'$	$-e'$	$-f'$	$-g'$	$-h'$	$-k'$	$-l'$
$-a''$	$-b''$	$-c''$	$-d''$	$-e''$	$-f''$	o	o	o	o	o	o	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l

de sorte qu'il y a réellement vingt et une équations entre vingt arbitraires, d'où l'on ne peut pas déduire le résultant.

De même, ce mathématicien croit à tort que la recherche du résultant se simplifie, quand on laisse de côté quelques termes des polynômes multiplicateurs. Comme application il donne l'exemple de trois équations du second degré (voyez les pages 137 et 138). Il trouve un déterminant qui est nul identiquement (sans parler de la faute d'impression qui s'est glissée dans cet assemblant).

En effet, le déterminant trouvé par lui pour le résultant, doit être divisible par le déterminant

$$\begin{vmatrix} o & f'' & -f' \\ -f'' & o & f \\ f' & -f & o \end{vmatrix} \quad \text{qui est identiquement nul.}$$

De même, les conclusions des pages 133 jusqu'à 136 et des pages 186 et 187 sont inexactes.

§ 105. Pour éclaircir la théorie générale qui précède, déterminons en premier lieu le résultant des équations:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0, \\ \chi \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0, \\ \psi \equiv c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 xz + c_4 y^2 + c_5 yz + c_6 z^2 = 0.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (28),$$

où l'on a $l = 1$, $m = 1$, $n = 2$.

Pour $\lambda = 2$, on trouve les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll}k = \lambda + l + m + n - 2 & & = 4, \\ \alpha_1 = \dfrac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} & & = 10, \\ \alpha_2 = \dfrac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} & & = 10, \\ \alpha_3 = \dfrac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} & & = 6, \\ \beta_1 = \dfrac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} & & = 3, \\ \beta_2 = \dfrac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2} & & = 3, \\ \beta_3 = \dfrac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} & & = 6, \\ v = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} & & = 15, \\ v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & & = 26, \\ v_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & & = 12, \\ v_3 = \dfrac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2} & & = 1,\end{array}\right\} (29).$$

Les fonctions Φ, X, Ψ et F sont dans ce cas:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = s_1 x^3 + s_2 x^2 y + s_3 x^2 z + s_4 x y^2 + s_5 xyz + s_6 xz^2 + s_7 y^3 + s_8 y^2 z + s_9 yz^2 + s_{10} z^3, \\ X = s_{11} x^3 + s_{12} x^2 y + s_{13} x^2 z + s_{14} xy^2 + s_{15} xyz + s_{16} xz^2 + s_{17} y^3 + s_{18} y^2 z + s_{19} yz^2 + s_{20} z^3, \\ \Psi = s_{21} x^2 + s_{22} xy + s_{23} xz + s_{24} y^2 + s_{25} yz + s_{26} z^2, \\ F = \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi,\end{array}\right\} (30),$$

d'où l'on déduit l'assemblant

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
$p_1=x^4$	a_1										b_1										c_1					
$p_2=x^3y$	a_2	a_1									b_2	b_1									c_2	c_1				
$p_3=x^3z$	a_3		a_1								b_3		b_1								c_3		c_1			
$p_4=x^2y^2$		a_2		a_1								b_2		b_1							c_4	c_2		c_1		
$p_5=x^2yz$		a_3	a_2		a_1							b_3	b_2		b_1						c_5	c_3	c_2		c_1	
$p_6=x^2z^2$			a_3			a_1							b_3			b_1					c_6		c_3			c_1
$p_7=xy^3$				a_2			a_1							b_2			b_1					c_4		c_2		
$p_8=xy^2z$				a_3	a_2			a_1						b_3	b_2			b_1				c_5	c_4	c_3	c_2	
$p_9=xyz^2$					a_3	a_2			a_1						b_3	b_2			b_1			c_6	c_5		c_3	c_2
$p_{10}=xz^3$						a_3				a_1						b_3				b_1			c_6			c_3
$p_{11}=y^4$							a_2										b_2							c_4		
$p_{12}=y^3z$							a_3	a_2									b_3	b_2						c_5	c_4	
$p_{13}=y^2z^2$								a_3	a_2									b_3	b_2					c_6	c_5	c_4
$p_{14}=yz^3$									a_3	a_2									b_3	b_2					c_6	c_5
$p_{15}=z^4$										a_3										b_3						c_6

(31).

Des équations (8) on déduit qu'on peut satisfaire aux équations θ par les systèmes de racines s' contenus dans les lignes de l'assemblant :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
t_1											c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6					$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$			
t_2												c_1		c_2	c_3		c_4	c_5	c_6			$-b_1$		$-b_2$	$-b_3$	
t_3													c_1		c_2	c_3		c_4	c_5	c_6			$-b_1$		$-b_2$	$-b_3$
t_4	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$															a_1	a_2	a_3			
t_5		$-c_1$		$-c_2$	$-c_3$		$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$													a_1		a_2	a_3	
t_6			$-c_1$		$-c_2$	$-c_3$		$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$													a_1		a_2	a_3
t_7	b_1	b_2	b_3								$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$													
t_8		b_1		b_2	b_3							$-a_1$		$-a_2$	$-a_3$											
t_9			b_1		b_2	b_3							$-a_1$		$-a_2$	$-a_3$										
t_{10}				b_1			b_2	b_3						$-a_1$			$-a_2$	$-a_3$								
t_{11}					b_1			b_2	b_3						$-a_1$			$-a_2$	$-a_3$							
t_{12}						b_1			b_2	b_3						$-a_1$			$-a_2$	$-a_3$						

(32).

De l'égalité (10) se déduit le système de racines t', représentant les coefficients de la relation linéaire qui existe entre les systèmes de racines s' :

$$\begin{array}{c|c|}
 & u_1 \\
\hline
t_1 & a_1 \\
t_2 & a_2 \\
t_3 & a_3 \\
t_4 & b_1 \\
t_5 & b_2 \\
t_6 & b_3 \\
t_7 & c_1 \\
t_8 & c_2 \\
t_9 & c_3 \\
t_{10} & c_4 \\
t_{11} & c_5 \\
t_{12} & c_6
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Par la formule (14) on trouve ensuite le résultant:

$$R = \frac{\begin{vmatrix}
a_1 & & & & & & & & & c_1 & & & & & \\
a_2 & a_1 & & & & & & & & c_2 & c_1 & & & & \\
a_3 & & & & & & & & & c_3 & & c_1 & & & \\
 & a_2 & b_1 & & & & & & & c_4 & c_2 & & c_1 & & \\
 & a_3 & & b_1 & & & & & & c_5 & c_3 & c_2 & & c_1 & \\
 & & & & b_1 & & & & & c_6 & & c_3 & & & c_1 \\
 & & b_2 & & & b_1 & & & & & c_4 & & c_2 & & \\
 & & b_3 & b_2 & & & b_1 & & & & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & \\
 & & & b_3 & b_2 & & & b_1 & & & c_6 & c_5 & & c_3 & c_2 \\
 & & & & b_3 & & & & b_1 & & & c_6 & & & c_3 \\
 & & & & & b_2 & & & & & & & c_4 & & \\
 & & & & & b_3 & b_2 & & & & & & c_5 & c_4 & \\
 & & & & & & b_3 & b_2 & & & & & c_6 & c_5 & c_4 \\
 & & & & & & & b_3 & b_2 & & & & & c_6 & c_5 \\
 & & & & & & & & b_3 & & & & & & c_6
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
 & & & & & & & & c_1 & c_2 & c_3 \\
 & & & & & & & & & c_1 & \\
 & & & & & & & & & & c_1 \\
-c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & & & & & & & \\
 & -c_2 & -c_3 & & -c_4 & -c_5 & -c_6 & & & & \\
-c_1 & & -c_2 & -c_3 & & -c_4 & -c_5 & -c_6 & & & \\
b_3 & & & & & & & & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\
 & b_2 & b_3 & & & & & & & -a_1 & \\
b_1 & & b_2 & b_3 & & & & & & & -a_1 \\
 & b_1 & & & b_2 & b_3 & & & & & \\
 & & b_1 & & & b_2 & b_3 & & & &
\end{vmatrix} : c_6} \quad (34).$$

Ce résultant est du degré $v - v_2 + 2\,v_3 = 15 - 12 + 2 = 5$, $v_1 - 2\,v_2 + 3\,v_3 = 26 - 24 + 3 = 5$, ou $lm + ln + mn = 1 + 2 + 2 = 5$.

§ 106. Si l'on avait choisi au § 105 pour le degré de la fonction F la valeur fixée par Bezout, on aurait obtenu les valeurs suivantes:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\lambda & = 0, & \\
k & = l + m + n - 2 & = 2\,, \\
\alpha_1 & = \dfrac{(k - l + 1)(k - l + 2)}{2} & = 3\,, \\
\alpha_2 & = \dfrac{(k - m + 1)(k - m + 2)}{3} & = 3\,, \\
\alpha_3 & = \dfrac{(k - n + 1)(k - n + 2)}{2} & = 1\,, \\
\beta_1 & = \dfrac{(k - m - n + 1)(k - m - n + 2)}{2} & = 0\,, \\
\beta_2 & = \dfrac{(k - l - n + 1)(k - l - n + 2)}{2} & = 0\,, \\
\beta_3 & = \dfrac{(k - m - n + 1)(k - m - n + 2)}{2} & = 1\,, \\
v & = \dfrac{(k + 1)(k + 2)}{2} & = 6\,, \\
v_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 7\,, \\
v_2 & = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = 1\,, \\
v_3 & = 0\,, &
\end{array}
\right\} \quad \ldots. (35),
$$

et les fonctions

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\Phi & s_1\, x + s_2\, y + s_3\, z\,, \\
X & = s_4\, x + s_5\, y + s_6\, z\,, \\
\Psi & = s_7\,, \\
F & = \Phi\,\varphi + X\,\chi + \Psi\,\psi\,,
\end{array}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36),
$$

d'où l'on aurait déduit l'assemblant:

$$\begin{array}{r|ccccccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\
\hline
p_1 = x^2 & a_1 & & & b_1 & & & c_1 \\
p_2 = xy & a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & & c_2 \\
p_3 = xz & a_3 & & a_1 & b_3 & & b_1 & c_3 \\
p_4 = y^2 & & a_2 & & & b_2 & & c_4 \\
p_5 = yz & & a_3 & a_2 & & b_3 & b_2 & c_5 \\
p_6 = z^2 & & & a_3 & & & b_3 & c_6
\end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37).$$

On pourrait alors satisfaire aux équations θ par le système de racines s':

$$\begin{array}{r|ccccccc|}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\
\hline
t_1 & b_1 & b_2 & b_3 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & o
\end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38),$$

tandis que la formule (25) donnerait pour le résultant la forme la plus simple, laquelle est du degré 5:

$$R = \begin{vmatrix}
 & & b_1 & & & c_1 \\
a_1 & & b_2 & b_1 & & c_2 \\
 & a_1 & b_3 & & b_1 & c_3 \\
a_2 & & & b_2 & & c_4 \\
a_3 & a_2 & & b_3 & b_2 & c_5 \\
 & a_3 & & & b_3 & c_6
\end{vmatrix} : b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39).$$

§ 107. Pour donner encore un autre exemple, choisissons les équations:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi \equiv a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2 = o, \\
\chi \equiv b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 = o, \\
\psi \equiv c_1x^3 + c_2x^2y + c_3x^2z + c_4xy^2 + c_5xyz + c_6xz^2 + c_7y^3 + c_8y^2z + c_9yz^2 + c_{10}z^3 = o,
\end{array}\right\} \ldots (40),$$

où $l = 2$, $m = 2$ et $n = 3$.

Prenons la valeur fixée par Bezout: $k = l + m + n - 2 = 5$. Ainsi on trouve les valeurs:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} &&= 10\ ,\\
\alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} &&= 10\ ,\\
\alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} &&= 6\ ,\\
\beta_1 &= \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} &&= 1\ ,\\
\beta_2 &= \frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2} &&= 1\ ,\\
\beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} &&= 3\ ,\\
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} &&= 21\ ,\\
v_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &&= 26\ ,\\
v_2 &= \beta_1+\beta_2+\beta_3 &&= 5\ ,\\
v_3 &= 0\ ,
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots(41),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi \equiv s_1\, x^3+s_2\, x^2y+s_3\, x^2z+s_4\, xy^2+s_5\, xyz+s_6\, xz^2+s_7\, y^3+s_8\, y^2z+s_9\, yz^2+s_{10}z^3,\\
&X \equiv s_{11}x^3+s_{12}x^2y+s_{13}x^2z+s_{14}xy^2+s_{15}xyz+s_{16}xz^2+s_{17}y^3+s_{18}y^2z+s_{19}yz^2+s_{20}z^3,\\
&\Psi \equiv s_{21}x^2+s_{22}xy+s_{23}xz+s_{24}\, y^2+s_{25}\, yz+s_{26}\, z^2,\\
&F \equiv \Phi\varphi+X\chi+\Psi\psi,
\end{aligned}\right\}(42),$$

tandis que l'assemblant de la fonction F est:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
$p_1 = x^5$	a_1										b_1										c_1					
$p_2 = x^4y$	a_2	a_1									b_2	b_1									c_2	c_1				
$p_3 = x^4z$	a_3		a_1								b_3		b_1								c_3		c_1			
$p_4 = x^3y^2$	a_4	a_2		a_1							b_4	b_2		b_1							c_4	c_2		c_1		
$p_5 = x^3yz$	a_5	a_3	a_2		a_1						b_5	b_3	b_2		b_1						c_5	c_3	c_2		c_1	
$p_6 = x^3z^2$	a_6		a_3			a_1					b_6		b_3			b_1					c_6		c_3			c_1
$p_7 = x^2y^3$		a_4		a_2			a_1					b_4		b_2			b_1				c_7	c_4		c_2		
$p_8 = x^2y^2z$		a_5	a_4	a_3	a_2			a_1				b_5	b_4	b_3	b_2			b_1			c_8	c_5	c_4	c_3	c_2	
$p_9 = x^2yz^2$		a_6	a_5		a_3	a_2			a_1			b_6	b_5		b_3	b_2			b_1		c_9	c_6	c_5		c_3	c_2
$p_{10} = x^2z^3$			a_6			a_3				a_1			b_6			b_3				b_1	c_{10}		c_6			c_3
$p_{11} = xy^4$				a_4			a_2							b_4			b_2					c_7		c_4		
$p_{12} = xy^3z$				a_5	a_4		a_3	a_2						b_5	b_4		b_3	b_2				c_8	c_7	c_5	c_4	
$p_{13} = xy^2z^2$				a_6	a_5	a_4		a_3	a_2					b_6	b_5	b_4		b_3	b_2			c_9	c_8	c_6	c_5	c_4
$p_{14} = xyz^3$					a_6	a_5			a_3	a_2					b_6	b_5			b_3	b_2		c_{10}	c_9		c_6	c_5
$p_{15} = xz^4$						a_6				a_3						b_6				b_3			c_{10}			c_6
$p_{16} = y^5$							a_4										b_4							c_7		
$p_{17} = y^4z$							a_5	a_4									b_5	b_4						c_8	c_7	
$p_{18} = y^3z^2$							a_6	a_5	a_4								b_6	b_5	b_4					c_9	c_8	c_7
$p_{19} = y^2z^3$								a_6	a_5	a_4								b_6	b_5	b_4				c_{10}	c_9	c_8
$p_{20} = yz^4$									a_6	a_5									b_6	b_5					c_{10}	c_9
$p_{21} = z^5$										a_6										b_6						c_{10}

(43).

Les systèmes de racines s' qui résultent de l'équation (8) sont contenus dans les lignes de l'assemblant :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}	s_{26}
t_1											c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	$-b_5$	$-b_6$
t_2	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$											a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
t_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6					$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$										
t_4		b_1		b_2	b_3		b_4	b_5	b_6			$-a_1$		$-a_2$	$-a_3$		$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$							
t_5			b_1		b_2	b_3		b_4	b_5	b_6			$-a_1$		$-a_2$	$-a_3$		$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$						

. (44).

Puisqu'on a $v_3 = o$, ces systèmes de racines s' sont indépendants entre eux, et les déterminants de l'assemblant (44) ont l'unité pour leur plus grand commun diviseur.

Par la formule (25) on trouve pour le résultant :

$$R = \frac{\begin{vmatrix}
a_1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
a_2 & a_1 &&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
a_3 && a_1 &&&&&&&&&&&&&&& c_1 &&& \\
a_4 & a_2 && a_1 &&&&&&& b_1 &&&&&&&& c_1 && \\
a_5 & a_3 & a_2 && a_1 &&&&&&& b_1 &&&&&& c_2 && c_1 & \\
a_6 && a_3 &&& a_1 &&&&&&& b_1 &&&&& c_3 &&& c_1 \\
& a_4 && a_2 &&& a_1 &&&& b_2 &&& b_1 &&&&& c_2 && \\
& a_5 & a_4 & a_3 & a_2 &&& a_1 &&& b_3 & b_2 &&& b_1 &&& c_4 & c_3 & c_2 & \\
& a_6 & a_5 && a_3 & a_2 &&& a_1 &&& b_3 & b_2 &&& b_1 && c_5 && c_3 & c_2 \\
&& a_5 &&& a_3 &&&& a_1 &&& b_3 &&&& b_1 & c_6 &&& c_3 \\
&&& a_4 &&& a_2 &&&& b_4 &&& b_2 &&&&& c_4 && \\
&&& a_5 & a_4 && a_3 & a_2 &&& b_5 & b_4 && b_3 & b_2 &&& c_7 & c_5 & c_4 & \\
&&& a_6 & a_5 & a_4 && a_3 & a_2 && b_6 & b_5 & b_4 && b_3 & b_2 && c_8 & c_6 & c_5 & c_4 \\
&&&& a_6 & a_5 &&& a_3 & a_2 && b_6 & b_5 &&& b_3 & b_2 & c_9 && c_6 & c_5 \\
&&&&& a_6 &&&& a_3 &&& b_6 &&&& b_3 & c_{10} &&& c_6 \\
&&&&&& a_4 &&&&&&& b_4 &&&&& c_7 && \\
&&&&&& a_5 & a_4 &&&&&& b_5 & b_4 &&&& c_8 & c_7 & \\
&&&&&& a_6 & a_5 & a_4 &&&&& b_6 & b_5 & b_4 &&& c_9 & c_8 & c_7 \\
&&&&&&& a_6 & a_5 & a_4 &&&&& b_6 & b_5 & b_4 && c_{10} & c_9 & c_8 \\
&&&&&&&& a_6 & a_5 &&&&&& b_6 & b_5 &&& c_{10} & c_9 \\
&&&&&&&&& a_6 &&&&&&& b_6 &&&& c_{10}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
c_1 & c_2 & c_3 & -b_1 & -b_2 \\
&&& a_1 & a_2 \\
-a_1 & -a_2 & -a_3 && \\
& -a_1 &&& \\
&& -a_1 &&
\end{vmatrix}} \quad . . (45),$$

lequel résultant est du degré $v - v_2 = 21 - 5 = 16$ ou $lm + ln + mn = 4 + 6 + 6 = 16$.

§ 108. Pour compléter la théorie précédente, il faut démontrer que les formes que le résultant prend pour les valeurs différentes du degré k de la fonction F, sont au fond les mêmes.

En suivant le même raisonnement qu'au § 75, il résulte de l'équation (3) que l'on a $s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = o$ et $\theta_v = o$, si l'on peut satisfaire aux équations θ par un système de racines s' dont s_{α_1}

et $s_{\alpha_1} + {}_{\alpha_2}$ sont nuls. Cette propriété est dans le cas en question plus générale et s'énonce :

Quand on emprunte d'un système de racines appartenant aux équations θ les trois groupes d'éléments :

1. les éléments qui correspondent aux $k - l + 1$ derniers coefficients de la fonction Φ,

2. les éléments qui correspondent aux $k - m + 1$ derniers coefficients de la fonction X,

3. les éléments qui correspondent aux $k - n + 1$ derniers coefficients de la fonction Ψ,

et que le cas se présente que tous les éléments de deux de ces groupes sont nuls, tous les éléments du troisième groupe sont aussi nuls.

En même temps les $k + 1$ dernières équations θ disparaissent.

Afin de démontrer ce théorème, posons dans l'équation (3) $x = o$.

Il faut qu'on puisse satisfaire à l'équation restante pour toutes valeurs de y et de z. En tenant compte de cette observation on démontre facilement de la manière connue le théorème proposé.

En introduisant un tel système de racines s' dans l'équation (3) et en divisant les deux membres par x, l'équation qu'on obtient est précisément celle qui se déduit de la fonction F, quand on diminue le degré k d'une unité.

Parmi les systèmes de racines s' qui résultent des identités (8), il y en a un ou plusieurs qui ont la propriété proposée, si k remplit l'une des conditions :

$$k > m + n \ , \ k > l + n \ , \ k > l + m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (46).$$

Si l, m et n ne sont pas tous égaux à l'unité, l'une des conditions (46) est assurément remplie, quand on a

$$k > l + m + n - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47).$$

La forme du résultant, en supposant $k > l + m + n - 2$, se réduit donc à celle que l'on obtient, quand on diminue la valeur de k d'une unité.

Il s'ensuit que les formes diverses du résultant, obtenues pour des valeurs différentes de k, supérieures à $l + m + n - 2$, sont égales à celle obtenue pour $k = l + m + n - 2$.

ÉVALUATION DE LA SOLUTION COMMUNE.

§ 109. La théorie précédente donne le moyen de trouver le système de racines des équations (1), si le résultant de ces équations est nul.

En évaluant (§ 38) la relation linéaire qui existe dans ce cas entre les équations θ, et en la comparant à la relation qui doit exister entre ces fonctions (§ 98), on voit que les trois premiers coefficients de cette relation forment un système de racines pour les équations (1).

S'il n'existe qu'une seule solution commune, les fonctions θ ne sont liées entre elles que par une seule relation linéaire. Supposons pour la trouver, le degré k de la fonction F d'une unité inférieur au degré que Bezout fixa pour déterminer le résultant. C'est à la fois la plus petite valeur pour k qu'on puisse prendre. On obtient alors:

$$\left.\begin{array}{lll}
k=l+m+n-3\,, & & \\
\alpha_1=\dfrac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} & =\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}\,, & \\
\alpha_2=\dfrac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} & =\dfrac{(l+n-2)(l+n-1)}{2}\,, & \\
\alpha_3=\dfrac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} & =\dfrac{(l+m-2)(l+m-1)}{2}\,, & \\
\beta_1=\dfrac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} & =\dfrac{(l-2)(l-1)}{2}\,, & \\
\beta_2=\dfrac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2} & =\dfrac{(m-2)(m-1}{2}\,, & \\
\beta_3=\dfrac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} & =\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}\,, & \\
v=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} & =\dfrac{(l+m+n-2)(l+m+n-1)}{2}\,, & \\
v_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\,, & & \\
v_2=\beta_1+\beta_2+\beta_3\,, & & \\
v_3=(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)=1\,, & &
\end{array}\right\}\,.(48).$$

La valeur $v_3=1$ montre que les équations θ sont dans ce cas liées entre elles au moins par une relation linéaire, tandis qu'il existe $v_2=v_1-(v-1)$ systèmes de racines indépendants entre eux pour les équations θ.

Ces v_2 systèmes de racines s' sont, sans résolution directe des équations θ, faciles à déterminer par les identités (8).

L'assemblant de la fonction F a la propriété (§ 46) que les déterminants qui sont contenus dans $v-1$ colonnes quelconques, sont tous divisibles par le même déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines s'.

On peut obtenir les coefficients de la relation linéaire qui existe entre les équations θ, en résolvant $v - 1$ des équations ζ, indépendantes entre elles. Ainsi on trouve les valeurs des variables x, y et z satisfaisant aux équations (1), sous la forme de déterminants du degré $v - 1 = v_1 - v_2$. Comme ces déterminants sont tous divisibles par un déterminant du degré v_2, les valeurs des variables x, y et z se réduisent donc au degré

$$v - 1 - v_2 = v_1 - 2\,v_2 = (v_1 - 2\,v_2 + 3\,v_3) - 3\,v_3 = \\ lm + ln + mn - 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49),$$

lequel est de trois unités inférieur à celui du résultant.

§ 110. Appliquons en premier lieu la théorie du paragraphe précédent à l'exemple du § 107 où l'on a $l = 2$, $m = 2, n = 3$, et supposons le résultant de ces équations nul. Pour trouver la solution commune posons $k = l + m + n - 3 = 4$, ce qui donne les valeurs:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(k-l+1)\,(k-l+2)}{2} &&= 6\,, \\
\alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} &&= 6\,, \\
\alpha_3 &= \frac{(k-n+1)\,(k-n+2)}{2} &&= 3\,, \\
\beta_1 &= \frac{(k-m-n+1)\,(k-m-n+2)}{2} &&= 0\,, \\
\beta_2 &= \frac{(k-l-n+1)\,(k-l-n+2)}{2} &&= 0\,, \\
\beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)\,(k-l-m+2)}{2} &&= 1\,, \\
v &= \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} &&= 15\,, \\
v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &&= 15\,, \\
v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &&= 1\,, \\
v_3 &= 1\,,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (50),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &\equiv s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 xz + s_4 y^2 + s_5 yz + s_6 z^2 , \\
X &\equiv s_7 x^2 + s_8 xy + s_9 xz + s_{10} y^2 + s_{11} yz + s_{12} z^2 , \\
\Psi &\equiv s_{13} x + s_{14} y + s_{15} z , \\
F &\equiv \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi ,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(51).$$

L'assemblant de la fonction F est donc:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}
$p_1 = x^4$	a_1						b_1						c_1		
$p_2 = x^3y$	a_2	a_1					b_2	b_1					c_2	c_1	
$p_3 = x^3z$	a_3		a_1				b_3		b_1				c_3		c_1
$p_4 = x^2y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1			c_4	c_2	
$p_5 = x^2yz$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1		c_5	c_3	c_2
$p_6 = x^2z^2$	a_6		a_3			a_1	b_6		b_3			b_1	c_6		c_3
$p_7 = xy^3$		a_4		a_2				b_4		b_2			c_7	c_4	
$p_8 = xy^2z$		a_5	a_4	a_3	a_2			b_5	b_4	b_3	b_2		c_8	c_5	c_4
$p_9 = xyz^2$		a_6	a_5		a_3	a_2		b_6	b_5		b_3	b_2	c_9	c_6	c_5
$p_{10} = xz^3$			a_6			a_3			b_6			b_3	c_{10}		c_6
$p_{11} = y^4$				a_4						b_4				c_7	
$p_{12} = y^3z$				a_5	a_4					b_5	b_4			c_8	c_7
$p_{13} = y^2z^2$				a_6	a_5	a_4				b_6	b_5	b_4		c_9	c_8
$p_{14} = yz^3$					a_6	a_5					b_6	b_5		c_{10}	c_9
$p_{15} = z^4$						a_6						b_6			c_{10}

..(52),

et le système de racines s':

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}
t_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$	0	0	0

..(53).

Quand on supprime de l'assemblant (52) la sixième colonne, les déterminants contenus dans les colonnes restantes sont tous divisibles par b_6. Par la résolution des équations ζ on trouve ensuite les valeurs des coefficients p_1, p_2 et p_3.

La solution commune des équations (40) s'écrit donc:

$$x = \left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_2 & a_1 & & & & b_2 & b_1 & & & & & c_2 & c_1 & \\
a_3 & & a_1 & & & b_3 & & b_1 & & & & c_3 & & c_1 \\
a_4 & a_2 & & a_1 & & b_4 & b_2 & & b_1 & & & c_4 & c_2 & \\
a_5 & a_3 & a_2 & & a_1 & b_5 & b_3 & b_2 & & b_1 & & c_5 & c_3 & c_2 \\
a_6 & & a_3 & & & b_6 & & b_3 & & & b_1 & c_6 & & c_3 \\
& a_4 & & a_2 & & & b_4 & & b_2 & & & c_7 & c_4 & \\
& a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & & c_8 & c_5 & c_4 \\
& a_6 & a_5 & & a_3 & & b_6 & b_5 & & b_3 & b_2 & c_9 & c_6 & c_5 \\
& & a_6 & & & & & b_6 & & & b_3 & c_{10} & & c_6 \\
& & & a_4 & & & & & b_4 & & & & c_7 & \\
& & & a_5 & a_4 & & & & b_5 & b_4 & & & c_8 & c_7 \\
& & & a_6 & a_5 & & & & b_6 & b_5 & b_4 & & c_9 & c_8 \\
& & & & a_6 & & & & & b_6 & b_5 & & c_{10} & c_9 \\
& & & & & & & & & & b_6 & & & c_{10}
\end{array}\right| : b_6 . \quad (54a),$$

$$y = -\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_1 & & & & & b_1 & & & & & & c_1 & & \\
a_3 & & a_1 & & & b_3 & & b_1 & & & & c_3 & & c_1 \\
a_4 & a_2 & & a_1 & & b_4 & b_2 & & b_1 & & & c_4 & c_2 & \\
a_5 & a_3 & a_2 & & a_1 & b_5 & b_3 & b_2 & & b_1 & & c_5 & c_3 & c_2 \\
a_6 & & a_3 & & & b_6 & & b_3 & & & b_1 & c_6 & & c_3 \\
& a_4 & & a_2 & & & b_4 & & b_2 & & & c_7 & c_4 & \\
& a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & & c_8 & c_5 & c_4 \\
& a_6 & a_5 & & a_3 & & b_6 & b_5 & & b_3 & b_2 & c_9 & c_6 & c_5 \\
& & a_6 & & & & & b_6 & & & b_3 & c_{10} & & c_6 \\
& & & a_4 & & & & & b_4 & & & & c_7 & \\
& & & a_5 & a_4 & & & & b_5 & b_4 & & & c_8 & c_7 \\
& & & a_6 & a_5 & & & & b_6 & b_5 & b_4 & & c_9 & c_8 \\
& & & & a_6 & & & & & b_6 & b_5 & & c_{10} & c_9 \\
& & & & & & & & & & b_6 & & & c_{10}
\end{array}\right| : b_6 . \quad (54b),$$

$$z = \begin{vmatrix}
a_1 & & & & & b_1 & & & & & & c_1 & & \\
a_2 & a_1 & & & & b_2 & b_1 & & & & & c_2 & c_1 & \\
a_4 & a_2 & & a_1 & & b_4 & b_2 & & b_1 & & & c_4 & c_2 & \\
a_5 & a_3 & a_2 & & a_1 & b_5 & b_3 & b_2 & & b_1 & & c_5 & c_3 & c_2 \\
a_6 & & a_3 & & & b_6 & & b_3 & & & b_1 & c_6 & & c_3 \\
 & a_4 & & a_2 & & & b_4 & & b_2 & & & c_7 & c_4 & \\
 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & & c_8 & c_5 & c_4 \\
 & a_6 & a_5 & & a_3 & & b_6 & b_5 & & b_3 & b_2 & c_9 & c_6 & c_5 \\
 & & a_6 & & & & & b_6 & & & b_3 & c_{10} & & c_6 \\
 & & & a_4 & & & & & b_4 & & & & c_7 & \\
 & & & a_5 & a_4 & & & & b_5 & b_4 & & & c_8 & c_7 \\
 & & & a_6 & a_5 & & & & b_6 & b_5 & b_4 & & c_9 & c_8 \\
 & & & & a_6 & & & & & b_6 & b_5 & & c_{10} & c_9 \\
 & & & & & & & & & & b_6 & & & c_{10}
\end{vmatrix} : b_6 \,.\, (54c).$$

Remarque. Si l'on avait choisi pour k une valeur supérieure à $l + m + n - 3$, on aurait obtenu le même résultat, mais sous une forme plus compliquée.

En prenant $k = l + m + n - 2$, et en supprimant de l'assemblant (43) de la fonction F les $6^{\text{ième}}$, $9^{\text{ième}}$, $10^{\text{ième}}$, $24^{\text{ième}}$, $25^{\text{ième}}$, $26^{\text{ième}}$ colonnes, on aurait obtenu dans l'exemple en question pour x, y et z des déterminants du degré 20, tous divisibles par le facteur du $7^{\text{ième}}$ degré:

$$b_6 \times \begin{vmatrix}
a_4 & & b_4 & & & \\
a_5 & a_4 & b_5 & b_4 & & \\
a_6 & a_5 & b_6 & b_5 & b_4 & \\
 & a_6 & & b_6 & b_5 & b_4 \\
 & & & & b_6 & b_5 \\
 & & & & & b_6
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (55),$$

de sorte que les résultats auraient été du $13^{\text{ième}}$ degré, ce qui s'accorde avec la théorie.

§ 111. Comme second exemple prenons les équations (28) du § 105, où l'on a $l = 1$, $m = 1$, $n = 2$. Si le résultant (39) de ces équations est nul, on peut prendre $k = l + m + n - 3 = 1$, d'où l'on trouve les valeurs:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(k - l + 1)\,(k - l + 2)}{2} &&= 1\,, \\
\alpha_2 &= \frac{(k - m + 1)\,(k - m + 2)}{2} &&= 1\,, \\
\alpha_3 &= \frac{(k - n + 1)\,(k - n + 2)}{2} &&= 0\,, \\
\beta_1 &= \frac{(k - m - n + 1)\,(k - m - n + 2)}{2} &&= 0\,, \\
\beta_2 &= \frac{(k - l - n + 1)\,(k - l - n + 2)}{2} &&= 0\,, \\
\beta_3 &= \frac{(k - l - m + 1)\,(k - l - m + 2)}{2} &&= 0\,, \\
v &= \frac{(k + 1)\,(k + 2)}{2} &&= 3\,, \\
v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &&= 2\,, \\
v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &&= 0\,, \\
v_3 &= 1\,, \\
\Phi &= s_1\,, \\
X &= s_2\,, \\
\Psi &= 0\,, \\
F &= \Phi\varphi + X\chi\,,
\end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \text{(56)},$$

et l'assemblant

$$\begin{array}{l|cc|}
 & s_1 & s_2 \\
\hline
p_1 = x & a_1 & b_1 \\
p_2 = y & a_2 & b_2 \\
p_3 = z & a_3 & b_3
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(57)},$$

de sorte que le système de racines des équations (28) s'écrit

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58),$$

comme il était facile à prévoir.

ÉVALUATION DE DEUX SOLUTIONS COMMUNES.

§ 112. Il est aisé de déterminer la condition qui doit être remplie, pour qu'il y ait deux systèmes de racines pour les équations (1). Deux relations linéaires indépendantes entre elles existent dans ce cas entre les équations θ, et la plus petite valeur qu'on puisse prendre pour le degré de la fontion F est $k = l + m + n - 3$.

Pour cette valeur de k les équations θ sont liées entre elles par une relation linéaire, sans que les coefficients soient soumis à une condition. Pour qu'il y ait une deuxième relation entre les équations θ, indépendante de la première, il est nécessaire (§ 48) que le plus grand commun diviseur des déterminants contenus dans $v-1$ lignes quelconques de l'assemblant de la fonction F, soit nul.

On peut appliquer cette théorie à l'exemple du § 107. Pour qu'il existe deux solutions communes pour les équations (40), il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants contenus dans toutes les lignes à une près de l'assemblant (52) soit nul.

Il en résulte que les valeurs (54) s'annulent.

§ 113. Si la condition du paragraphe précédent est remplie, on peut évaluer les deux systèmes de racines des équations (1). Pour cela, il est impossible de diminuer le degré de la fonction F, car pour $k = l + m + n - 4$ on trouve $v_3 = 3$; il existerait donc pour cette valeur de k trois relations linéaires entre les fonctions θ, sans que les coefficients soient soumis à une condition.

De $v-2$ équations ζ, indépendantes entre elles, on peut déduire deux systèmes de racines p', dont un des deux premiers éléments est nul.

Pour fixer les idées, supposons que ces deux systèmes de racines soient contenus dans les lignes de l'assemblant:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot p_v \\
q_1 & o\,, & p_{12}, & -p_{13}, & p_{14}, & -p_{15}, & p_{16}, \cdot\cdot \pm p_{1v} \\
q_2 & -p_{12}, & o\,, & p_{23}, & -p_{24}, & p_{25}, & -p_{26}, \cdot\cdot \pm p_{2v}
\end{array} \quad \ldots\ldots (59),$$

où les indices ont la même signification qu'au § 2.

Afin d'évaluer un système de racines p', conforme au système (16), multiplions les lignes de l'assemblant (59) respectivement par q_1 et q_2, et ajoutons les résultats. En confrontant le système de racines p' ainsi obtenu, avec le système de valeurs (16), on obtient l'égalité:

$$\frac{x^k}{-p_{12}\,q_2} = \frac{x^{k-1}\,y}{p_{12}\,q_1} = \frac{x^{k-1}\,z}{-p_{13}\,q_1 + p_{23}\,q_2} = \frac{x^{k-2}\,y^2}{p_{14}\,q_1 - p_{24}\,q_1} =$$

$$= \frac{x^{k-2}\,yz}{-p_{15}\,q_1 + p_{25}\,q_2} \ldots\ldots = \frac{\pm z^k}{p_{1v}\,q_1 - p_{2v}\,q_2} \ldots\ldots\ldots (60).$$

Des deux premiers membres de cette égalité on déduit:

$$\frac{x}{-q_2} = \frac{y}{q_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61),$$

et par la substitution de ces valeurs dans l'égalité (60) on trouve:

$$\frac{x^{k-1}}{p_{12}} = \frac{x^{k-1}\,z}{-p_{13}\,y - p_{23}\,x} = \frac{x^{k-2}\,y^2}{p_{14}\,y + p_{24}\,x} = \frac{x^{k-2}\,yz}{-p_{15}\,y - p_{25}\,x} = \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots = \frac{\pm z^k}{p_{1v}\,y + p_{2v}\,x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62).$$

Des trois premiers membres de l'égalité (62) on déduit les deux équations:

$$\left.\begin{array}{l} p_{23}\,x + p_{13}\,y + p_{12}\,z = o\,, \\ p_{24}\,x^2 + p_{14}\,xy - p_{12}\,y^2 = o\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

qui suffisent précisément pour déterminer les deux solutions communes des équations (1).

Les coefficients des équations (63) sont du degré $v-2$, mais on peut choisir en plusieurs cas les $v-2$ colonnes de l'assemblant telles que ces coefficients soient divisibles par un même facteur. Souvent il y a un facteur du degré v_2; les coefficients des équations (63) se réduisent alors aux formes du degré $lm + ln + mn - 4$.

Remarque. En prenant de l'égalité (62) trois autres membres, on trouve pour les équations (63) d'autres formes. De cette manière on peut trouver, comme dans la remarque du § 83, des propriétés particulières de l'assemblant de la fonction F.

§ 114. Appliquons ce qui précède aux équations (40) du § 107. Quand on supprime la sixième et la quinzième colonne de l'assemblant (52), les déterminants contenus dans les colonnes restantes sont tous divisibles par b_6.

Cette division faite, on trouve pour les coefficients $p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{14}$ et p_{24} des valeurs sous la forme de déterminants du degré 12.

ÉVALUATION DE TROIS, QUATRE, ETC. SOLUTIONS COMMUNES.

§ 115. Pour qu'il existe trois solutions communes pour les équations (1), il est nécessaire que les équations θ soient liées entre elles par trois relations linéaires indépendantes entre elles, dont aucun coefficient ne soit nul. Pour cela, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants contenus dans $v-2$ colonnes quelconques de l'assemblant de la fonction F, soit nul.

La plus petite valeur qu'on puisse prendre pour le degré de la fonction F est dans ce cas $k = l + m + n - 3$.

Pour cette valeur de k les équations θ sont liées entre elles par une relation linéaire, sans qu'aucune relation soit exigée entre les coefficients. Afin qu'il y ait deux autres relations linéaires entre les équations θ, indépendantes de la première, il faut que le plus grand commun diviseur des déterminants contenus dans $v-2$ lignes (ou colonnes) quelconques de l'assemblant de la fonction F, soit nul.

En appliquant cette théorie à l'exemple du § 107, nous trouvons, pour que les équations (40) aient trois solutions communes, que les déterminants contenus dans toutes les colonnes à deux colonnes quelconques près de l'assemblant (52) sont nuls. Par-là les coefficients des équations (63) s'annulent.

Si la condition pour l'existence de trois solutions communes est remplie, on peut les déterminer.

Les équations θ doivent être liées entre elles dans ce cas par trois relations linéaires indépendantes entre elles. La plus petite valeur pour le degré de la fonction F est en ce cas $k = l + m + n - 4$, car pour cette valeur on trouve $v_3 = 3$, indiquant que les équations θ sont en général liées entre elles par trois relations linéaires indépendantes entre elles.

Afin d'obtenir les coefficients de ces trois relations, égalons à zéro deux des trois premières quantités arbitraires p, les autres éléments des trois systèmes de valeurs p' indépendants entre eux, s'obtiennent en résolvant les équations ζ.

Supposons que ces systèmes de valeurs p' soient contenus dans les lignes de l'assemblant:

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots\cdots & p_v \\
\hline
q_1 & o, & o, & p_{123}, & -p_{124}, & p_{125}, & -p_{126}, & \cdots & \pm p_{12v} \\
q_2 & o, & -p_{123}, & o, & p_{134}, & -p_{135}, & p_{136}, & \cdots & \mp p_{13v} \\
q_2 & p_{123}, & o, & o, & -p_{234}, & p_{235}, & -p_{236}, & \cdots & \pm p_{23v}
\end{array} \quad \ldots (64),$$

où les indices ont la même signification qu'au § 2.

Afin d'obtenir les coefficients d'une relation linéaire qui est conforme à (16), nous multiplions les lignes de l'assemblant (64) respectivement par q_1, q_2, q_3 et nous ajoutons les résultats.

En confrontant le système de coefficients ainsi obtenu, avec le système (16), on obtient l'égalité:

$$\frac{x^k}{q_3 p_{123}} = \frac{x^{k-1} y}{-q_2 p_{123}} = \frac{x^{k-1} z}{q_1 p_{123}} = \frac{x^{k-2} y^2}{-q_1 p_{124} + q_2 p_{134} - q_3 p_{234}}$$

$$\frac{x^{k-2} y z}{q_1 p_{125} - q_2 p_{135} + q_3 p_{235}} = \ldots = \frac{\pm z^k}{q_1 p_{12v} - q_2 p_{13v} + q_3 p_{23v}} \quad \ldots (65).$$

Des trois premiers membres de cette égalité on déduit:

$$\frac{x}{q_3} = \frac{y}{q_2} = \frac{z}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66),$$

et par la substitution de ces valeurs dans l'égalité (65) on trouve :

$$\frac{x^{k-1}}{p_{123}} = \frac{x^{k-2}y^2}{-p_{124}z - p_{134}y - p_{234}x} = \frac{x^{k-2}yz}{p_{12}z + p_{135}y + p_{235}x} = \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots = \frac{\pm z^k}{p_{12v}z + p_{13v}y + p_{23v}x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67).$$

Des trois premiers membres de l'égalité (67) on déduit les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} p_{234}x^2 + p_{134}xy + p_{124}xz + p_{123}y^2 &= o\,, \\ p_{235}x^2 + p_{135}xy + p_{125}xz - p_{123}yz &= o\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68),$$

qui suffisent précisément pour déterminer les trois solutions communes des équations (1).

Par l'élimination de z entre les équations (68) on obtient

$$(-p_{124}p_{235} + p_{125}p_{234})x^3 - (p_{124}p_{135} - p_{125}p_{134} + p_{123}p_{234})x^2y$$
$$+ p_{123}(p_{125} - p_{134})xy^2 - p_{123}^2y^3 = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (69).$$

Cette équation se réduit par les relations

$$\left.\begin{aligned} p_{123}p_{245} - p_{124}p_{235} + p_{125}p_{234} &= 0\,, \\ p_{123}p_{145} - p_{124}p_{135} + p_{125}p_{134} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (70),$$

empruntées au § 33, après division par $-p_{123}$, à la suivante :

$$p_{245}x^3 + (p_{145} + p_{234})x^2y + (p_{134} - p_{125})xy^2 + p_{123}y^3 = 0 \ldots (71).$$

On tire de cette équation trois valeurs pour le rapport de x par y, et la première équation (68) donne les valeurs correspondantes du rapport de z par y, de sorte que l'on a trois systèmes de racines pour les équations (1).

Remarque. En choisissant dans l'égalité (67) trois autres membres on trouve pour les équations (68) d'autres formes. De cette manière on peut trouver, comme dans la remarque du § 83, des propriétés particulières de l'assemblant de la fonction F.

§ 116. Pour appliquer ce qui est traité dans le paragraphe précédent, nous prenons $k = l + m + n - 4$, ce qui donne les valeurs:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} &&= \frac{(m+n-3)(m+n-2)}{2}, \\
\alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} &&= \frac{(l+n-3)(l+n-2)}{2}, \\
\alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} &&= \frac{(l+m-3)(l+m-2)}{2}, \\
\beta_1 &= \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} &&= \frac{(l-3)(l-2)}{2}, \\
\beta_2 &= \frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2} &&= \frac{(m-3)(m-2)}{2}, \\
\beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} &&= \frac{(n-3)(n-2)}{2}, \\
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(l+m+n-3)(l+m+n-2)}{2} &&, \\
v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &&, \\
v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &&, \\
v_3 &= \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2} &&= \frac{(-3)(-2)}{2} = 3,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (72).$$

Comme $k < l + m + n$, la valeur $v_3 = 3$ montre que les fonctions θ sont liées entre elles par trois relations linéaires indépendantes entre elles, si k n'est pas inférieur à l'une des grandeurs $m + n$, $l + n$ ou $l + m$.

Quant aux valeurs de β_1, β_2, β_3, et par conséquent de v_2, il faut remarquer qu'elles varient de signification, si k est inférieur à l'une des grandeurs $m + n$, $l + n$ ou $m + n$. Ce cas se présente, si l, m ou n est égal à l'unité, par exemple, si l'on a $l = 1$, $m = 3$, $n = 3$.

En substituant ces valeurs dans les formules (72) on trouve les résultats suivants:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{3\;.\;4}{2} = 6\,,\\
\alpha_2 &= \frac{1\;.\;2}{2} = 1\,,\\
\alpha_3 &= \frac{1\;.\;2}{2} = 1\,,\\
\beta_1 &= \frac{(-2)(-1)}{2} = 1\,,\\
\beta_2 &= \frac{0\;.\;1}{2} = 0\,,\\
\beta_3 &= \frac{0\;.\;1}{2} = 0\,,\\
v &= \frac{4\;.\;5}{2} = 10\,,\\
v_1 &= 6+1+1 = 8\,,\\
v_2 &= \beta_1\,,\\
v_3 &= \frac{(-3)(-2)}{2} = 3\,,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73).$$

Comme la condition (13) est toujours remplie, les $v = 10$ équations linéaires homogènes θ à $v_1 = 8$ variables sont en ce cas liées entre elles par $v - v_1 = v_3 - \beta_1 = 2$ relations linéaires indépendantes entre elles.

§ 117. Prenons ensuite l'exemple du § 107. Si les déterminants contenus dans $v - 2 = 13$ colonnes quelconques de l'assemblant (52), sont tous nuls, on peut prendre pour l'évaluation des trois solutions communes des équations (40) $k = l + m + n - 4 = 3$, d'où l'on trouve les valeurs :

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} = \frac{2.3}{2} = 3\,,\\
\alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} = \frac{2.3}{2} = 3\,,\\
\alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1\,,\\
\beta_1 &= \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)}{2} = \frac{-1.0}{2} = 0\,,\\
\beta_2 &= \frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)}{2} = \frac{-1.0}{2} = 0\,,\\
\beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} = \frac{0.1}{2} = 0\,,\\
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{4.5}{2} = 10\,,\\
v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7\,,\\
v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 0\,,\\
v_3 &= \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)}{2} = \frac{(-3)(-2)}{2} = 3\,,
\end{aligned}\right\} \ldots (74),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= s_1x + s_2y + s_3z\,,\\
X &= s_4x + s_5y + s_6z\,,\\
\Psi &= s_7\,,\\
F &= \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi\,,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75).$$

Ainsi on obtient l'assemblant:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$p_1 = x^3$	a_1			b_1			c_1
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1		b_2	b_1		c_2
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1	b_3		b_1	c_3
$p_4 = xy^2$	a_4	a_2		b_4	b_2		c_4
$p_5 = xyz$	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2	c_5
$p_6 = xz^2$	a_6		a_3	b_6		b_3	c_6
$p_7 = y^3$		a_4			b_4		c_7
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		b_5	b_4	c_8
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		b_6	b_5	c_9
$p_{10} = z^3$			a_6			b_6	c_{10}

. . . . (76),

d'où l'on peut déduire les valeurs des coefficients p_{123}, p_{124}, etc. des équations (68) qui fournissent les trois systèmes de racines communes.

Pour le degré de ces coefficients on trouve

$$v - v_3 - v_2 = v_1 - 2v_2 = (v_1 - 2v_2 + 3v_3) - 3v_3 =$$
$$lm + ln + mn - 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77),$$

donnant 7 pour le cas spécial susdit, ce qui s'accorde avec la théorie.

§ 118. Après ce qui précède, il n'est pas nécessaire de montrer quelles conditions doivent être remplies pour qu'il existe pour les équations (1) plus de trois systèmes de racines indépendants entre eux, ni de montrer comment se fait le calcul de ces solutions communes. Pour éclaircir plus amplement ce qui a été dit, il suffira de résoudre le problème de l'élimination entre trois équations homogènes du second degré à trois variables.

Les équations proposées sont dans ce cas:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\equiv a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 = 0, \\ \chi &\equiv b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 = 0, \\ \psi &\equiv c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 xz + c_4 y^2 + c_5 yz + c_6 z^2 = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (78).$$

Pour obtenir le résultant, on prendra d'après Bezout $k = l + m + n - 2 = 4$, ce qui donne les valeurs:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} = \frac{3.4}{2} = 6, \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta_3 = \frac{(k-2n+1)(k-2n+2)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1, \\ v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{5.6}{2} = 15, \\ v_1 &= 3\alpha_1 = 18, \\ v_2 &= 3\beta_1 = 3, \\ v_3 &= \frac{(k-3n+1)(k-3n+2)}{2} = \frac{-1.0}{2} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (79),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 xz + s_4 y^2 + s_5 yz + s_6 z^2, \\ X &= s_7 x^2 + s_8 xy + s_9 xz + s_{10} y^2 + s_{11} yz + s_{12} z^2, \\ \Psi &= s_{13} x^2 + s_{14} xy + s_{15} xz + s_{16} y^2 + s_{17} yz + s_{18} z^2, \\ F &= \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (80).$$

De ces fonctions on déduit l'assemblant:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
$p_1 = x^4$	a_1						b_1						c_1					
$p_2 = x^3y$	a_2	a_1					b_2	b_1					c_2	c_1				
$p_3 = x^3z$	a_3		a_1				b_3		b_1				c_3		c_1			
$p_4 = x^2y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1			c_4	c_2		c_1		
$p_5 = x^2yz$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1		c_5	c_3	c_2		c_1	
$p_6 = x^2z^2$	a_6		a_3			a_1	b_6		b_3			b_1	c_6		c_3			c_1
$p_7 = xy^3$		a_4		a_2				b_4		b_2				c_4		c_2		
$p_8 = xy^2z$		a_5	a_4	a_3	a_2			b_5	b_4	b_3	b_2			c_5	c_4	c_3	c_2	
$p_9 = xyz^2$		a_6	a_5		a_3	a_2		b_6	b_5		b_3	b_2		c_6	c_5		c_3	c_2
$p_{10} = xz^3$			a_6			a_3			b_6			b_3			c_6			c_3
$p_{11} = y^4$				a_4						b_4						c_4		
$p_{12} = y^3z$				a_5	a_4					b_5	b_4					c_5	c_4	
$p_{13} = y^2z^2$				a_6	a_5	a_4				b_6	b_5	b_4				c_6	c_5	c_4
$p_{14} = yz^3$					a_6	a_5					b_6	b_5					c_6	c_5
$p_{15} = z^4$						a_6						b_6						c_6

(81),

et l'assemblant des systèmes de racines s':

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}
t_1							c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	$-b_5$	$-b_6$
t_2	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$							a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
t_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$						

(82),

d'où l'on peut déduire aisément le résultant des équations (78).

Le calcul de la solution commune, si le résultant est nul, se fait par les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
k &= l + m + n - 3 = 3\,,\\
\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} = \frac{2\,.\,3}{2} = 3\,,\\
\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 &= \frac{(k-2n+1)\,(k-2n+2)}{2} = \frac{0\,.\,1}{2} = 0\,,\\
v &= \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} = \frac{4\,.\,5}{2} = 10\,,\\
v_1 &= 3\alpha_1 = 9\,,\\
v_2 &= 3\beta_1 = 0\,,\\
v_3 &= \frac{(k-3n+1)\,(k-3n+2)}{2} = \frac{(-2)(-1)}{2} = 1\,,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (83),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = s_1 x + s_2 y + s_3 z\,, \\ X = s_4 x + s_5 y + s_6 z\,, \\ \Psi = s_7 x + s_8 y + s_9 z\,, \\ F = \Phi\,\varphi + X\,\chi + \Psi\,\psi\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84),$$

d'où l'on déduit l'assemblant :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
$p_1 = x^3$	a_1			b_1			c_1		
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1		b_2	b_1		c_2	c_1	
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1	b_3		b_1	c_3		c_1
$p_4 = xy^2$	a_4	a_2		b_4	b_2		c_4	c_2	
$p_5 = xyz$	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2	c_5	c_3	c_2
$p_6 = xz^2$	a_6		a_3	b_6		b_3	c_6		c_3
$p_7 = y^3$		a_4			b_4			c_4	
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		b_5	b_4		c_5	c_4
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		b_6	b_5		c_6	c_5
$p_{10} = z^3$			a_6			b_6			c_6

. . . . (85).

La solution commune est donc exprimée par l'équation

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{-A_2} = \frac{z}{A_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86),$$

où les symboles A_1, A_2, A_3 (voir § 2) désignent des déterminants de l'assemblant (85).

Si les déterminants de l'assemblant (85) sont tous nuls, il existe deux solutions communes pour les équations (78).

Quand on supprime dans ce cas la neuvième colonne de l'assemblant (85), on déduit des colonnes restantes de la manière connue les valeurs des coefficients p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{14}, p_{24} des équations (63).

Si les déterminants contenus dans 8 colonnes quelconques de l'assemblant (85) sont tous nuls, il existe trois solutions communes pour les équations (78).

Pour déterminer les coefficients des équations (68), par lesquelles on obtient les trois solutions communes, on se servira des valeurs :

$$\left.\begin{aligned}
k &= l+m+n-4 = 2\,,\\
\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)}{2} = \frac{1\,.\,2}{2} = 1\,,\\
\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 &= \frac{(k-2n+1)\,(k-2n+2)}{2} = \frac{-1\,.\,0}{2} = 0\,,\\
v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{3\,.\,4}{2} = 6\,,\\
v_1 &= 3\alpha_1 = 3\,,\\
v_2 &= 3\beta_1 = 0\,,\\
v_3 &= \frac{(k-3n+1)(k-3n+2)}{2} = \frac{(-3)\,(-2)}{2} = 3\,,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(87),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= s_1\,,\quad \mathrm{X} = s_2\,,\quad \Psi = s_3\,,\\
F &= \Phi\varphi + \mathrm{X}\chi + \Psi\psi\,,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(88),$$

d'où l'on déduit l'assemblant

	s_1	s_2	s_3
$p_1 = x^2$	a_1	b_1	c_1
$p_2 = xy$	a_2	b_2	c_2
$p_3 = xz$	a_3	b_3	c_3
$p_4 = y^2$	a_4	b_4	c_4
$p_5 = yz$	a_5	b_5	c_5
$p_6 = z^2$	a_6	b_6	c_6

. . . . (89).

On tire aisément de cet assemblant les valeurs des coefficients des équations (68).

Si les déterminants de l'assemblant (89) sont tous nuls, les équations (78) ont quatre solutions communes. Pour les déterminer, nous avons conformément à (68) les équations:

$$\left.\begin{aligned}
p_{2345}\,x^2 + p_{1345}\,xy + p_{1245}\,xz + p_{1235}\,y^2 + p_{1234}\,yz &= 0\,,\\
p_{2346}\,x^2 + p_{1346}\,xy + p_{1246}\,xz + p_{1236}\,y^2 - p_{1234}\,z^2 &= 0\,,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(90),$$

dont les coefficients sont des déterminants empruntés à deux colonnes quelconques de l'assemblant (89):

$$\begin{aligned}
&p_{1234} = \begin{vmatrix} a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix},\ p_{1235} = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix},\ p_{1245} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix},\ p_{1345} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix},\ p_{2345} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix},\\
&p_{1236} = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix},\ p_{1246} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix},\ p_{1346} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix},\ p_{2346} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\ \ldots\ldots\ldots\ (91).
\end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (90), on trouve, comme on pouvait s'y attendre, deux équations que l'on peut aussi obtenir par l'élimination de z^2 et de yz entre les équations φ et χ (78).

Quand on développe les déterminants (91), les équations (90) se réduisent aux suivantes:

$$b_6(a_1x^2+a_2xy+a_3xz+a_4y^2+a_5yz)-a_6(b_1x^2+b_2xy+b_3xz+b_4y^2+b_5yz)=0,$$
$$b_5(a_1x^2+a_2xy+a_3xz+a_4y^2+a_6z^2)-a_5(b_1x^2+b_2xy+b_3xz+b_4y^2+b_6z^2)=0,$$

d'où l'on peut retrouver facilement les fonctions φ et χ mêmes.

IV. Elimination entre n équations homogènes à n variables.

LE RÉSULTANT.

§ 119. Il est aisé d'étendre la théorie d'élimination, comme elle a été traitée au chapitre précédent, à n équations homogènes à n variables:

$$\left.\begin{array}{lcl} \varphi_1 & = & 0\,, \\ \varphi_2 & = & 0\,, \\ \varphi_3 & = & 0\,, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n & = & 0\,, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

En représentant les degrés des fonctions homogènes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ par $g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n$ et le degré de la fonction F par j, on obtient les valeurs [1]):

[1]) La factorielle est notée, d'après Kramp:
$a^{n|r} = a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots\ldots(a+[n-1]r)$.

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
v_1 &= \sum_1^n \frac{(j-g_k+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
v_2 &= \sum_1^n \frac{(j-g_{k_1}-g_{k_2}+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= \frac{(j-g_1-g_2-g_3-\dots-g_n+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}},
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (2)$$

qui se réduisent dans le cas où l'on a $g_1 = g_2 = g_3 = \dots\dots = g_n = g$, aux suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
v_1 &= \binom{n}{1} \cdot \frac{(j-g+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
v_2 &= \binom{n}{2} \cdot \frac{(j-2g+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= \binom{n}{n} \cdot \frac{(j-ng+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}},
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (3).$$

§ 120. Les valeurs v sont liées par la relation:

$$v - v_1 + v_2 - v_3 + \dots\dots + (-1)^n v_n = 0 \dots\dots\dots\dots (4),$$

ce qui se démontre facilement, quand les fonctions φ sont du même degré g.

En développant la fonction $(j-lg+1)^{n-1/1}$ suivant les puissances ascendantes de g par le théorème de Maclaurin, il nous faut évaluer les valeurs des quotients différentiels successifs par rapport à g, pour $g = o$. On peut exprimer ces valeurs par les quotients différentiels successifs de la fonction $(j+1)^{n-1/1}$ par rapport à j, de sorte que l'on a la formule:

$$\left[\frac{d^p(j-lg+1)^{n-1/1}}{dg^p}\right]_0 = (-1)^p l^p \frac{d^p(j+1)^{n-1/1}}{dj^p} = (-1)^p l^p D^p (j+1)^{n-1/1}. (5).$$

Or, en développant, on trouve:

$$(j - lg + 1)^{n-1/1} = (j+1)^{n-1/1} - \frac{l}{1} g\, D(j+1)^{n-1/1}$$
$$+ \frac{l^2}{1.2} g^2 D^2 (j+1)^{n-1/1} - \frac{l^3}{1.2.3} g^3 D^3 (j+1)^{n-1/1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \frac{l^k}{1^{k/1}} g^k D^k (j+1)^{n-1/1} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{l^{n-1}}{1^{n-1/1}} g^{n-1} 1^{n-1/1} \quad \ldots (6),$$

car on a $D^{n-1}(j+1)^{n-1/1} = 1^{n-1/1}$.

Substituant les valeurs (3) dans le premier membre de l'équation (4) et développant les termes divers d'après la formule (6), on trouve

$$v - v_1 + v_2 - v_3 + \ldots\ldots + (-1)^n v_n =$$
$$\binom{n}{o}\frac{(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} - \binom{n}{1}\frac{(j-g+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} + \binom{n}{2}\frac{(j-2g+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$-\binom{n}{3}\frac{(j-3g+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} + \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\frac{(j-ng+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$= \left\{\binom{n}{o} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\right\} \frac{(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$-\frac{g}{1}\left\{-\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n \binom{n}{n}\right\} \frac{D(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$+\frac{g^2}{1.2}\left\{-\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - 3^2\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n^2 \binom{n}{n}\right\} \frac{D^2(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^k \frac{g^k}{1^{k/1}}\left\{-\binom{n}{1} + 2^k\binom{n}{2} - 3^k\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n^k \binom{n}{n}\right\} \frac{D^k(j+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-1} \frac{g^{n-1}}{1^{n-1/1}}\left\{-\binom{n}{1} + 2^{n-1}\binom{n}{2} - 3^{n-1}\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n^{n-1} \binom{n}{n}\right\} \frac{1^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} \ldots (7).$$

Les expressions comprises entre les accolades sont toutes nulles, comme il sera démontré dans la note 1 à la fin de ce chapitre; donc, pour le cas en question l'équation (4) se trouve démontrée.

§ 121. Pour démontrer en général la formule (4), nous écrirons les valeurs (2) sous la forme de coefficients binominaux. Posant $j - n + 1 = s$, on a:

$$\left.\begin{array}{l} v = \binom{s}{n-1}, \quad v_1 = \sum\limits_1^n \binom{s-g_k}{n-1}, \\ v_2 = \sum\limits_1^n \binom{s-g_{k_1}-g_{k_2}}{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \quad v_n = \binom{s-g_1-g_2-g_3-\ldots-g_n}{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

En substituant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (4), nous trouvons la confirmation de cette formule, d'après la note 3 à la fin de ce chapitre.

§ 122. Afin de simplifier la notation, on écrira le résultant des équations (1) en employant des logarithmes:

$$\log R = \log D_v - \log D_{v_2 - v_3 + v_4 - \cdots + (-1)^n v_n}$$
$$+ \log D_{v_3 - v_4 + \ldots + (-1)^{n-1} v_n} - \log D_{v_4 - \ldots + (-1)^{n-2} v_n}$$
$$+ \ldots \ldots + (-1)^{n-1} \log D_{v_n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Ainsi on trouve pour le degré du résultant

$$v - v_2 + 2 v_3 - 3 v_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} (n-1) v_n =$$
$$v_1 - 2 v_2 + 3 v_3 - 4 v_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n v_n \ldots\ldots\ldots (10).$$

Si les fonctions φ sont du même degré, on peut réduire le second membre de la formule (10) de la manière suivante:

$$v_1 - 2 v_2 + 3 v_3 - 4 v_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n v_n =$$
$$\binom{n}{1} \frac{(j - g + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} - 2 \binom{n}{2} \frac{(j - 2g + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$+ 3 \binom{n}{3} \frac{(j - 3g + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} - \ldots + (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \frac{(j - kg + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$+ \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} \frac{(j - ng + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} =$$
$$- \left\{ -\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} - 3 \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n n \binom{n}{n} \right\} \frac{(j + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$+ \frac{g}{1} \left\{ -\binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} - 3^2 \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n n^2 \binom{n}{n} \right\} \frac{D (j + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$- \frac{g^2}{1 . 2} \left\{ -\binom{n}{1} + 2^3 \binom{n}{2} - 3^3 \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n^3 \binom{n}{n} \right\} \frac{D^2 (j + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^k \frac{g^{k-1}}{1^{k-1/1}} \left\{ -\binom{n}{1} + 2^k \binom{n}{2} - 3^k \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n n^k \binom{n}{n} \right\} \frac{D^{k-1} (j + 1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{g^{n-1}}{1^{n-1/1}} \left\{ -\binom{n}{1} + 2^n \binom{n}{2} - 3^n \binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n n^n \binom{n}{n} \right\} \frac{1^{n-1/1}}{1^{n-1/1}}$$
$$= (-1)^n \frac{g^{n-1}}{1^{n-1/1}} (-1)^n 1^{n/1} = n g^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

puisque, d'après la note 1 à la fin de ce chapitre, les expressions entre les accolades sont toutes nulles, excepté la dernière qui est égale à $(-1)^n 1^{n/1}$.

Par rapport aux coefficients d'une des fonctions φ le résultant est évidemment du degré g^{n-1}.

§ 123. Dans le cas général on trouve pour le degré du résultant, d'après la note 3 à la fin de ce mémoire:

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 - 4v_4 + \ldots + (-1)^{n-1} n v_n = \sum_1^n g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1} \ldots (12).$$

Pour déterminer dans ce cas le degré du résultant par rapport aux coefficients de la fonction φ_1, posons [1]):

$$\left.\begin{array}{l}
Q_0^{n-1} = \dfrac{(j-g_1+1)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} = \dbinom{s}{n-1} \quad , \\[2ex]
Q_1^{n-1} = \sum\limits_2^n \dfrac{(j-g_1+1-g_k)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} = \sum\limits_2^n \dbinom{s-g_k}{n-1} \quad , \\[2ex]
Q_2^{n-1} = \sum\limits_2^n \dfrac{(j-g_1+1-g_{k_1}-g_{k_2})^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} = \sum\limits_2^n \dbinom{s-g_{k_1}-g_{k_2}}{n-1} \quad , \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
Q_{n-1}^{n-1} = \dfrac{(j-g_1+1-g_2-g_3 \ldots -g_n)^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} = \dbinom{s-g_2-g_3-\ldots-g_n}{n-1}
\end{array}\right\} \ldots (13),$$

où

$$s = j - g_1 + n - 1 \ldots\ldots (14).$$

Pour le degré du résultant par rapport aux coefficients de la fonction φ_1, on a conformément au § 100 l'expression:

$$Q_0^{n-1} - Q_1^{n-1} + Q_2^{n-1} - \ldots + (-1)^{n-1} Q_{n-1}^{n-1} \ldots\ldots (15),$$

qui est, d'après la note 3, égale à

$$g_2 g_3 g_4 \ldots g_n \ldots\ldots (16).$$

De la même manière on obtient pour le degré du résultant par rapport aux coefficients de la fonction φ_2:

$$g_1 g_3 g_4 \ldots g_n \ldots\ldots (17),$$

etc.

---

[1]) Dans le symbole Q_n^m il n'est pas nécessaire de considérer l'indice m comme un exposant.

§ 124. Quand on veut évaluer le résultant, on ne pourra supposer le degré de la fonction F inférieur à

$$j = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n - (n-1) \ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

ou inférieur à

$$j = ng - (n-1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19),$$

au cas où les fonctions φ sont du même degré g.

Dans ce cas particulier on a les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} v & = \binom{ng}{n-1}, \\ v_1 & = \binom{n}{1}\cdot\binom{(n-1)g}{n-1}, \\ v_2 & = \binom{n}{2}\cdot\binom{(n-2)g}{n-1}, \\ \ldots\ldots & \\ v_{n-2} & = \binom{n}{n-2}\cdot\binom{2g}{n-1}, \\ v_{n-1} & = \binom{n}{n-1}\cdot\binom{g}{n-1}, \\ v_n & = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (20).$$

Pour la valeur (19) de j, v_n est nul. Il en sera de même de v_{n-1}, si $g < n-1$, de v_{n-2}, si $2g < n-1$, etc.

En effet, si l'on veut déterminer le résultant de quatre équations homogènes du second degré à quatre variables, on obtient les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} j = 4 \times 2 - 3 = 5, \\ v = \dfrac{8.7.6}{6} = 56, \\ v_1 = 4 \times \dfrac{6.5.4}{6} = 80, \\ v_2 = 6 \times \dfrac{4 \times 3 \times 2}{6} = 24, \\ v_3 = 0, \\ v_4 = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (21).$$

Le résultant, étant le quotient de deux déterminants du degré 56 et 24, est du degré 32, ce qui s'accorde avec la valeur $4 \times 2^3 = 32$.

Si l'on veut déterminer le résultant de cinq équations homogènes du second degré à cinq variables, on obtient les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{llll} j = ng - (n-1) = 6 , & v = \binom{10}{4} & = 210 , \\ v_1 = \binom{5}{1}\cdot\binom{8}{4} = 350 , & v_2 = \binom{5}{2}\cdot\binom{6}{4} & = 150 , \\ v_3 = \binom{5}{3}\cdot\binom{4}{4} = 10 , & v_4 = 0 , \quad v_5 = & 0 , \end{array}\right\} \ldots . (22).$$

Le résultant est dans ce cas égal à un déterminant du degré 210, divisé par le quotient de deux déterminants, dont l'un est du degré 140 et l'autre du degré 10.

Le degré du résultant est $v_1 - 2\,v_2 + 3\,v_3 = 80$, ce qui s'accorde avec la valeur de $ng^{n-1} = 5 \times 2^4 = 80$.

LES SOLUTIONS COMMUNES.

§ 125. Si le résultant est nul, il existe une solution commune pour les équations proposées. Pour la déterminer, la plus petite valeur du degré de la fonction F qu'on puisse prendre, est la valeur (18) fixée par Bezout pour l'évaluation du résultant, diminuée d'une unité.

Pour cette valeur de j on a

$$v_n = (-1)^{n-1} \ldots \ldots (23),$$

et on aura finalement pour le degré de ces racines communes

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 - \ldots \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\,v_{n-1} =$$
$$\{v_1 - 2v_2 + 3v_3 - \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\,v_{n-1} + (-1)^{n-1}\,nv_n\} - (-1)^{n-1}\,nv_n =$$
$$\sum_1^n g_1\,g_2\,g_3 \ldots g_{n-1} - n \ldots \ldots (24).$$

Ce degré est égal au degré du résultant diminué de n unités.

§ 126. Après ce qui précède nous ne nous arrêterons pas à indiquer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de plusieurs solutions communes et à l'évaluation de ces racines communes.

Pour terminer, nous appliquerons encore la théorie de l'élimination aux quatre équations homogènes à quatre variables:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 u = 0 \quad ,\\
&\chi \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 u = 0 \quad ,\\
&\psi \equiv c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 xz + c_4 xu + c_5 y^2 + c_6 yz + c_7 yu + c_8 z^2\\
&\qquad + c_9 zu + c_{10} u^2 = 0 \quad ,\\
&\omega \equiv d_1 x^2 + d_2 xy + d_3 xz + d_4 xu + d_5 y^2 + d_6 yz + d_7 yu + d_8 z^2\\
&\qquad d_9 zu + d_{10} u^2 = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (25).$$

Prenons pour le degré de la fonction F la valeur fixée par Bezout $j = k + l + m + n - 3 = 3$; on en déduit les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{3.4.5}{6} = 10, \quad \beta_1 = \frac{0.1.2}{6} = 0, \quad \gamma_1 = \frac{-1.0.1}{6} = 0,\\
&\alpha_2 = \frac{3.4.5}{6} = 10, \quad \beta_2 = \frac{1.2.3}{6} = 1, \quad \gamma_2 = \frac{-1.0.1}{6} = 0,\\
&\alpha_3 = \frac{2.3.4}{6} = 4, \quad \beta_3 = \frac{1.2.3}{6} = 1, \quad \gamma_3 = \frac{0.1.2}{6} = 0,\\
&\alpha_4 = \frac{2.3.4}{6} = 4, \quad \beta_4 = \frac{1.2.3}{6} = 1, \quad \gamma_4 = \frac{0.1.2}{6} = 0,\\
&\qquad\qquad \beta_5 = \frac{1.2.3}{6} = 1,\\
&\qquad\qquad \beta_6 = \frac{2.3.4}{6} = 4,\\
&v = \frac{4.5.6}{6} = 20,\\
&v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 28,\\
&v_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 = 8,\\
&v_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 0,\\
&v_4 = \frac{(-2)(-1)(0)}{6} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi \equiv r_1 x^2 + r_2 xy + r_3 xz + r_4 xu + r_5 y^2 + r_6 yz\\
&\qquad + r_7 yu + r_8 z^2 + r_9 zu + r_{10} u^2 \quad ,\\
&\mathrm{X} \equiv r_{11} x^2 + r_{12} xy + r_{13} xz + r_{14} xu + r_{15} y^2 + r_{16} yz\\
&\qquad + r_{17} yu + r_{18} z^2 + r_{19} zu + r_{20} u^2 \quad ,\\
&\Psi \equiv r_{21} x + r_{22} y + r_{23} z + r_{24} u \quad ,\\
&\Omega \equiv r_{25} x + r_{26} y + r_{27} z + r_{28} u \quad ,\\
&F = \Phi \varphi + \mathrm{X} \chi + \Psi \psi + \Omega \omega \quad .
\end{aligned}\right\} (27).$$

Nous en obtiendrons deux assemblants, en premier lieu l'assemblant suivant :

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}	r_{25}	r_{26}	r_{27}	r_{28}
$p_1 = x^3$	a_1										b_1										c_1				d_1			
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1									b_2	b_1									c_2	c_1			d_2	d_1		
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1								b_3		b_1								c_3		c_1		d_3		d_1	
$p_4 = x^2u$	a_4			a_1							b_4			b_1							c_4			c_1	d_4			d_1
$p_5 = xy^2$		a_2			a_1							b_2			b_1						c_5	c_2			d_5	d_2		
$p_6 = xyz$		a_3	a_2			a_1						b_3	b_2			b_1					c_6	c_3	c_2		d_6	d_3	d_2	
$p_7 = xyu$		a_4		a_2			a_1					b_4		b_2			b_1				c_7	c_4		c_2	d_7	d_4		d_2
$p_8 = xz^2$			a_3					a_1					b_3					b_1			c_8		c_3		d_8		d_3	
$p_9 = xzu$			a_4	a_3					a_1				b_4	b_3					b_1		c_9		c_4	c_3	d_9		d_4	d_3
$p_{10} = xu^2$				a_4						a_1				b_4						b_1	c_{10}			c_4	d_{10}			d_4
$p_{11} = y^3$					a_2										b_2							c_5				d_5		
$p_{12} = y^2z$					a_3	a_2									b_3	b_2						c_6	c_5			d_6	d_5	
$p_{13} = y^2u$					a_4		a_2								b_4		b_2					c_7		c_5		d_7		d_5
$p_{14} = yz^2$						a_3		a_2								b_3		b_2				c_8	c_6			d_8	d_6	
$p_{15} = yzu$						a_4	a_3		a_2							b_4	b_3		b_2			c_9	c_7	c_6		d_9	d_7	d_6
$p_{16} = yu^2$							a_4			a_2							b_4			b_2		c_{10}		c_7		d_{10}		d_7
$p_{17} = z^3$								a_3										b_3					c_8				d_8	
$p_{18} = z^2u$								a_4	a_3									s_4	b_3				c_9	c_8			d_9	d_8
$p_{19} = zu^2$									a_4	a_3									b_4	b_3			c_{10}	c_9			d_{10}	d_9
$p_{20} = u^3$										a_4										b_4				c_{10}				d_{10}

(28),

et en second lieu celui des systèmes de racines r' :

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}	r_{25}	r_{26}	r_{27}	r_{28}
s_1											d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}					$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$
s_2											$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	b_1	b_2	b_3	b_4				
s_3	$-d_1$	$-d_2$	$-d_3$	$-d_4$	$-d_5$	$-d_6$	$-d_7$	$-d_8$	$-d_9$	d_{10}															a_1	a_2	a_3	a_4
s_4	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}											$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$				
s_5	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$							a_1	a_2	a_3	a_4														
s_6		$-b_1$			$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$					a_1			a_2	a_3	a_4											
s_7			$-b_1$			$-b_2$		$-b_3$	$-b_4$				a_1			a_2		a_3	a_4									
s_8				$-b_1$			$-b_2$		$-b_3$	$-b_4$				a_1			a_2		a_3	a_4								

(29).

Par la formule (9) on déduit de ces deux assemblants le résultant, qui est du degré 12.

Si le résultant est nul, on prendra pour l'évaluation du système de racines communes le degré de la fonction F égal à la valeur fixée par Bezout pour déterminer le résultant, diminuée d'une unité.

On trouve ainsi les valeurs :

$$\left.\begin{array}{l}
j = k + l + m + n - 4 = 2, \\[2ex]
\alpha_1 = \dfrac{2.3.4}{6} = 4\,, \quad \beta_1 = \dfrac{-1.0.1}{6} = 0\,, \quad \gamma_1 = \dfrac{-2.-1.0}{6} = 0\,, \\[2ex]
\alpha_2 = \dfrac{2.3.4}{6} = 4\,, \quad \beta_2 = \dfrac{0.1.2}{6} = 0\,, \quad \gamma_2 = \dfrac{-2.-1.0}{6} = 0\,, \\[2ex]
\alpha_3 = \dfrac{1.2.3}{6} = 1\,, \quad \beta_3 = \dfrac{0.1.2}{6} = 0\,, \quad \gamma_3 = \dfrac{-1.\ 0.1}{6} = 0\,, \\[2ex]
\alpha_4 = \dfrac{1.2.3}{6} = 1\,, \quad \beta_4 = \dfrac{0.1.2}{6} = 0\,, \quad \gamma_4 = \dfrac{-1.\ 0.1}{6} = 0\,, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \beta_5 = \dfrac{0.1.2}{6} = 0\,, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad \beta_6 = \dfrac{1.2.3}{6} = 1\,, \\[2ex]
v = \dfrac{3.4.5}{6} = 10,\ v_1 = 10,\ v_2 = 1,\ v_3 = 0,\ v_4 = \dfrac{-3.-2.-1}{6} = -1\,,
\end{array}\right\} \ldots (30),$$

et les fonctions

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi \equiv r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 u\,, \\
X \equiv r_5 x + r_6 y + r_7 z + r_8 u\,, \\
\Psi \equiv r_9\,, \\
\Omega \equiv r_{10}\,, \\
F \equiv \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi + \Omega\omega\,,
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31),$$

d'où l'on déduira l'assemblant :

$$
\begin{array}{l|cccccccccc|}
 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 & r_{10} \\
\hline
p_1 = x^2 & a_1 & & & & b_1 & & & & c_1 & d_1 \\
p_2 = xy & a_2 & a_1 & & & b_2 & b_1 & & & c_2 & d_2 \\
p_3 = xz & a_3 & & a_1 & & b_3 & & b_1 & & c_3 & d_3 \\
p_4 = xu & a_4 & & & a_1 & b_4 & & & b_1 & c_4 & d_4 \\
p_5 = y^2 & & a_2 & & & & b_2 & & & c_5 & d_5 \\
p_6 = yz & & a_3 & a_2 & & & b_3 & b_2 & & c_6 & d_6 \\
p_7 = yu & & a_4 & & a_2 & & b_4 & & b_2 & c_7 & d_7 \\
p_8 = z^2 & & & a_3 & & & & b_3 & & c_8 & d_8 \\
p_9 = zu & & & a_4 & a_3 & & & b_4 & b_3 & c_9 & d_9 \\
p_{10} = u^2 & & & & a_4 & & & & b_4 & c_{10} & d_{10}
\end{array}
\quad \ldots\ldots\ldots \text{(32)},
$$

et le système de racines r':

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 & r_{10} \\
\hline
s_1 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0
\end{array}
\quad \ldots\ldots\ldots \text{(33)}.
$$

De ces deux assemblants on trouve pour la solution commune:

$$
\frac{x}{p_1 : a_4} = \frac{y}{-p_2 : a_4} = \frac{z}{p_3 : a_4} = \frac{u}{-p_4 : a_4} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(34)},
$$

où p_1, p_2, p_3, p_4 sont des déterminants de l'assemblant que l'on obtient en supprimant dans l'assemblant (32) la huitième colonne.

Si les valeurs (34) s'annulent, il existe deux solutions communes. On peut les évaluer comme il a été indiqué dans le chapitre précédent, et on trouve ainsi les équations:

$$
\left.
\begin{array}{l}
p_{23}\, x + p_{13}\, y \;\; + p_{12}\, z = 0 \;, \\
p_{24}\, x + p_{14}\, y \;\; - p_{12}\, u = 0 \;, \\
p_{25}\, x^2 + p_{15}\, xy + p_{12}\, y^2 = 0 \;,
\end{array}
\right\}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(35)},
$$

dans lesquelles les coefficients sont des déterminants de l'assemblant que l'on obtient en supprimant dans l'assemblant (32) la huitième et la dixième colonne.

Les valeurs de p_{12}, p_{13}, p_{23}, p_{14} et p_{24} sont toutes divisibles par le déterminant du sixième degré :

$$\begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 & & c_5 \\ a_3 & a_2 & & b_3 & b_2 & c_6 \\ a_4 & & a_2 & b_4 & & c_7 \\ & a_3 & & & b_3 & c_8 \\ & a_4 & a_3 & & b_4 & c_9 \\ & & a_4 & & & c_{10} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

et les valeurs de p_{12}, p_{15} en p_{25} sont encore divisibles par a_4.

Cette division faite, les équations (35) se réduisent aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} z = 0 , \\ &\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} u = 0 , \\ &\frac{p_{25}}{a_4} x^2 + \frac{p_{15}}{a_4} xy + \frac{p_{12}}{a_4} y^2 = 0 , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

dont les deux premières peuvent se réduire facilement aux fonctions φ et χ mêmes, et réciproquement.

Remarque. Pour obtenir les deux premières équations (37), on aurait pu diminuer le degré j de la fonction F d'une unité. Ainsi on aurait :

$$\left.\begin{aligned} &j = k + l + m + n - 5 = 1 , \\ &\alpha_1 = 1 , \quad \alpha_2 = 1 , \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0 , \\ &\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0 , \\ &\gamma_1 = -1 , \quad \gamma_2 = -1 , \quad \gamma_3 = \gamma_4 = 0 , \\ &v = 4 , \ v_1 = 2 , \ v_2 = 0 , \ v_3 = \gamma_1 + \gamma_2 = -2 , \ v_4 = -4 , \end{aligned}\right\} \quad (38),$$

et l'assemblant :

$$\begin{array}{c|cc|}
 & r_1 & r_2 \\
\hline
p_1 = x & a_1 & b_1 \\
p_2 = y & a_2 & b_2 \\
p_3 = z & a_3 & b_3 \\
p_4 = u & a_4 & b_4
\end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39),$$

d'où l'on peut obtenir immédiatement les coefficients des deux premières équations (37).

NOTES [1].

Note 1.

Théorème. Quand m et n sont des nombres entiers positifs, la forme

$$-\binom{n}{1}+2^m\binom{n}{2}-3^m\binom{n}{3}+4^m\binom{n}{4}-\ldots\ldots+(-1)^n n^m\binom{n}{n}$$

aura la valeur zéro pour $m < n$,
et la valeur $(-1)^n 1^{n/1}$ pour $m = n$.

Démonstration. Pour abréger la notation, posons:

$$V_m^n=-\binom{n}{1}+2^m\binom{n}{2}-3^m\binom{n}{3}+4^m\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^n n^m\binom{n}{n} \ldots\ldots (1).$$

Pour $n > o$, on a

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,$$

d'où

$$V_o^n = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .(2).$$

On trouve ensuite
pour $n > 1$,

$$V_1^n=-\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}-3\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}-\ldots\ldots+(-1)^n n\binom{n}{n}$$

$$=-n\left\{1-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\binom{n-1}{3}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right\}=0. \;.(3).$$

---

[1]) Comparer: Wiskundige Opgaven met de Oplossingen door leden van het wiskundig genootschap, ter spreuke voerende: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven." Amsterdam, 1899. Tome VII, n^{os} 183 et 184; tome VIII, n^o 2.

pour $n > 2$,

$$V_2^n = -\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - 3^2\binom{n}{3} + 4^2\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^n n^2\binom{n}{n}$$

$$= -n\left\{1 - 2\binom{n-1}{1} + 3\binom{n-1}{2} - 4\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n\left\{-\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} - 3\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n V_1^{n-1} = 0 \quad \ldots\ldots (4),$$

pour $n > 3$,

$$V_3^n = -\binom{n}{1} + 2^3\binom{n}{2} - 3^3\binom{n}{3} + 4^3\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^n n^3\binom{n}{n}$$

$$= -n\left\{1 - 2^2\binom{n-1}{1} + 3^2\binom{n-1}{2} - 4^2\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} n^2\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n\left\{1 - (1+1)^2\binom{n-1}{1} + (1+2)^2\binom{n-1}{2} - (1+3)^2\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\left\{1 + (n-1)\right\}^2\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n\left\{\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]\right.$$
$$+ 2\left[-\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} - 3\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)\binom{n-1}{n-1}\right]$$
$$\left. + \left[-\binom{n-1}{1} + 2^2\binom{n-1}{2} - 3^2\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)^2\binom{n-1}{n-1}\right]\right\}$$

$$= -n\left\{2 V_1^{n-1} + V_2^{n-1}\right\} = 0 \quad \ldots\ldots (5),$$

etc.

Appliquant la même réduction à V_m^n, on obtient :

$$V_m^n = -\binom{n}{1} + 2^m\binom{n}{2} - 3^m\binom{n}{3} + 4^m\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^n n^m\binom{n}{n}$$

$$= -n\left\{1 - 2^{m-1}\binom{n-1}{1} + 3^{m-1}\binom{n-1}{2} - 4^{m-1}\binom{n-1}{3} \ldots + (-1)^{n-1} n^{m-1}\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n\left\{1 - (1+1)^{m-1}\binom{n-1}{1} + (1+2)^{m-1}\binom{n-1}{2} - (1+3)^{m-1}\binom{n-1}{3} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\left\{1 + (n-1)\right\}^{m-1}\binom{n-1}{n-1}\right\}$$

$$= -n\left\{\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right]\right.$$
$$+ \binom{m-1}{1}\left[-\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} - 3\binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)\binom{n-1}{n-1}\right]$$

$$+\binom{m-1}{2}\Big[-\binom{n-1}{1}+2^2\binom{n-1}{2}-3^2\binom{n-1}{3}+..+(-1)^{n-1}(n-1)^2\binom{n-1}{n-1}\Big]$$

. . . .

$$+\binom{m-1}{m-1}\Big[-\binom{n-1}{1}+2^{m-1}\binom{n-1}{2}-3^{m-1}\binom{n-1}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}$$
$$(n-1)^{m-1}\binom{n-1}{n-1}\Big]\Big\}\ldots\ldots\ldots(6),$$

ou

$$V_m^n=-n\Big\{\binom{m-1}{1}V_1^{n-1}+\binom{m-1}{2}V_2^{n-1}+\binom{m-1}{3}V_3^{n-1}+\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+\binom{m-1}{m-1}V_{m-1}^{n-1}\Big\}\ \ldots(7).$$

Cette formule est évidemment vraie, si l'on a $n>1$.

Par l'application réitérée de la formule (7) à chacun des V's qui entrent dans le second membre de cette formule, on trouve finalement pour $m<n$:

$$V_m^n=c_{n-1}V_1^{n-1}+c_{n-2}V_1^{n-2}+c_{n-3}V_1^{n-3}+\ldots+c_{n-m+1}V_1^{n-m+1}\ldots(8),$$

où les coefficients c sont des fonctions de m et n, lesquelles ne peuvent devenir infinies.

Comme on a $m<n$, et par conséquent $n-m+1>1$, les symboles V qui entrent dans le second membre de cette équation sont tous nuls, d'après la formule (3), de sorte que l'on a pour $m<n$:

$$V_m^n=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

Pour déterminer la valeur de V_n^n, on peut partir de l'équation (7). On trouve ainsi:

$$V_n^n=-n\Big\{\binom{n-1}{1}V_1^{n-1}+\binom{n-1}{2}V_2^{n-1}+\binom{n-1}{3}V_3^{n-1}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+\binom{n-1}{n-2}V_{n-2}^{n-1}+\binom{n-1}{n-1}V_{n-1}^{n-1}\Big\}\ \ldots(10).$$

Les symboles V dans le second membre de cette équation sont tous nuls, excepté V_{n-1}^{n-1}. Ainsi on obtient:

$$V_n^n=-n\,V_{n-1}^{n-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11).$$

En appliquant cette formule réitérativement, on trouve

$$\mathrm{V}_n^n = -n\,\mathrm{V}_{n-1}^{n-1} = (-1)^2\, n(n-1)\,\mathrm{V}_{n-2}^{n-2} = (-1)^3\, n(n-1)(n-2)\,\mathrm{V}_{n-3}^{n-3}$$
$$= \text{etc.}\ldots\ldots = (-1)^k\, n^{k/-1}\,\mathrm{V}_{n-k}^{n-k} \ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

d'où l'on obtient, en prenant $k = n - 1$,

$$\mathrm{V}_n^n = (-1)^{n-1}\, n^{n-1/-1}\,\mathrm{V}_1^1 = (-1)^n\, 1^{n/1} \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Note 2.

Théorème. Si les n nombres g_i sont arbitraires et le nombre m entier, et que l'on pose

$$S_1^m = g_1^m + g_2^m + g_3^m + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_n^m,$$
$$S_2^m = (g_1 + g_2)^m + (g_1 + g_3)^m + \ldots\ldots + (g_{n-1} + g_n)^m,$$
$$S_3^m = (g_1 + g_2 + g_3)^m + (g_1 + g_2 + g_4)^m + \ldots + (g_{n-2} + g_{n-1} + g_n)^m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n^m = (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n)^m,$$

la forme

$$-S_1^m + S_2^m - S_3^m + \ldots\ldots + (-1)^n S_n^m$$

aura la valeur zéro pour $m < n$,
et la valeur $(-1)^n\, 1^{n/1}\, g_1 g_2 g_3 \ldots g_n$ pour $m = n$;
et la forme

$$-S_1^m + 2\,S_2^m - 3\,S_3^m + \ldots\ldots + (-1)^n\, n\, S_n^m$$

aura la valeur zéro pour $m < n - 1$,
et la valeur $(-1)^n\, 1^{n-1/1}\, \Sigma\, g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1}$ pour $m = n - 1$.

Démonstration. Prenons comme point de départ le développement de la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme:

$$S^m_n = (g_1 + g_2 + g_3 + \dots\dots + g_n)^m =$$
$$= \Sigma g_1^{\,m} + \frac{1^{m/1}}{1^{m-1/1}.\,1^{1/1}} \Sigma g_1^{\,m-1} g_2 + \dots\dots + \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2}$$
$$+ \dots\dots + \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}.\,1^{p_3/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2} g_3^{\,p_3} + \dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1} \dots 1^{p_n/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2} \dots\dots g_n^{\,p_n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (14).$$

Dans chaque terme de ce développement la somme des exposants p_1, p_2, etc. est égale à m.

Pour $m < n$, le dernier terme est $1^{m/1} \Sigma g_1 g_2 g_3 \dots . g_m$; si l'on a $m = n$, le dernier terme est $1^{n/1} g_1 g_2 g_3 \dots . g_n$.

Le développement de S^m_l, où $l < n$, contient en général les mêmes termes que le développement de S^m_n, avec cette différence que les termes qui renferment plus de l éléments différents manquent, et que les termes restants sont affectés de coefficients.

En représentant provisoirement ces coefficients par $c_1, c_2, c_3, \dots c_l$, on obtient:

$$S^m_l = (g_1 + g_2 + \dots\dots g_l)^m + (g_1 + g_2 + \dots\dots g_{l-1} + g_{l+1})^m$$
$$+ \dots\dots + (g_{n-l+1} + g_{n-l+2} + \dots\dots + g_n)^m$$
$$= c_1 \Sigma g_1^{\,m} + c_2 \frac{1^{m/1}}{1^{m-1/1}.\,1^{1/1}} \Sigma g_1^{\,m-1} g_2 + \dots\dots + c_2 \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2}$$
$$+ \dots\dots + c_3 \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}.\,1^{p_3/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2} g_3^{\,p_3} + \dots\dots\dots$$
$$+ c_l \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1} \dots\dots 1^{p_l/1}} \Sigma g_1^{\,p_1} g_2^{\,p_2} \dots g_l^{\,p_l} \dots\dots\dots\dots\dots (15).$$

Pour déterminer les coefficients c, on peut raisonner de la manière suivante.

S^m_l contient $\binom{n}{l} = \dfrac{n^{l/-1}}{1^{l/1}}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$, ce nombre étant celui des combinaisons, l à l, de n éléments. Chacune de ces puissances $m^{\text{ièmes}}$ fournit l termes qui ne contiennent qu'un seul élément.

Comme $\Sigma g_1^{\,m}$ contient n de ces termes et que les termes divers de même espèce se présentent aussi souvent les uns que les autres, on trouve:

$$c_1 = \frac{\dfrac{n^{l/-1}}{1^{l/1}} \times l}{n} = \frac{(n-1)^{l-1/-1}}{1^{l-1/1}} = \binom{n-1}{l-1} \dots\dots\dots\dots (16).$$

Chaque puissance $m^{\text{ième}}$ de S_l^m contient $\binom{l}{2} = \dfrac{l^{2/-1}}{1^{2/1}}$ termes d'une espèce déterminée renfermant deux éléments. Le nombre total de ces termes est donc $\dfrac{n^{l/-1}}{1^{l/1}} \times \dfrac{l^{2/-1}}{1^{2/1}}$.

Ce nombre divisé par celui des combinaisons, 2 à 2, de n éléments donne:

$$c_2 = \frac{\dfrac{n^{l/-1}}{1^{l/1}} \times \dfrac{l^{2/-1}}{1^{2/1}}}{\dfrac{n^{2/-1}}{1^{2/1}}} = \frac{(n-2)^{l-2/-1}}{1^{l-2/1}} = \binom{n-2}{l-2} \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

On obtient de la même manière:

$$\left.\begin{aligned}
c_3 &= \frac{\dfrac{n^{l/-1}}{1^{l/1}} \times \dfrac{l^{3/-1}}{1^{3/1}}}{\dfrac{n^{3/-1}}{1^{3/1}}} = \frac{(n-3)^{l-3/-1}}{1^{l-3/1}} = \binom{n-3}{l-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{l-1} &= \binom{n-l+1}{1}, \\
c_l &= \binom{n-l}{0} = 1,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (18).$$

En substituant les valeurs obtenues dans l'équation (15), on obtient la formule:

$$\begin{aligned}
S_l^m = & \binom{n-1}{l-1} \Sigma g_1^m + \binom{n-2}{l-2} \frac{1^{m/1}}{1^{m-1/1}.\,1^{1/1}} \Sigma g_1^{m-1} g_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \binom{n-2}{l-2} \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} + \ldots\ldots + \binom{n-3}{l-3} \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}.\,1^{p_3/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} g_3^{p_3} + \\
& \ldots\ldots + \binom{n-l+1}{1} \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1} \ldots 1^{p_{l-1}/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} \ldots g_{l-1}^{p_{l-1}} + \\
& \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1} \ldots 1^{p_l/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} \ldots g_l^{p_l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19),
\end{aligned}$$

qui, pour $l = n$, conduit de nouveau à la formule (14).

En substituant les valeurs qui résultent de la formule (19) pour les différentes valeurs de l, dans la forme

$$S_1^m + S_2^m - S_3^m + \ldots\ldots + (-1)^n S_n^m,$$

et en réunissant les termes de même espèce, on obtient, pour $m < n$, le développement :

$$-S_1^m + S_2^m - S_3^m + \ldots + (-1)^n S_n^m =$$

$$-\left\{\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right\} \Sigma g_1^{\,n} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\binom{n-2}{0} - \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}\right\} \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1} \cdot 1^{p_2/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\left\{\binom{n-3}{0} - \binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-3}{n-3}\right\} \frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1} \cdot 1^{p_2/1} \cdot 1^{p_3/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} g_3^{p_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^m\left\{\binom{n-m}{0} - \binom{n-m}{1} + \binom{n-m}{2} \ldots + (-1)^{n-m}\binom{n-m}{n-m}\right\} 1^{m/1} \Sigma g_1 g_2 g_3 \ldots g_m$$

$$= 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

car les expressions entre les accolades sont toutes nulles.

Pour $m = n$, on trouve le développement suivant :

$$-S_1^n + S_2^n - S_3^n + \ldots + (-1)^n S_n^n =$$

$$-\left\{\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right\} \Sigma g_1^{\,n} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\binom{n-2}{0} - \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}\right\} \frac{1^{n/1}}{1^{p_1/1} \cdot 1^{p_2/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\left\{\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right\} \frac{1^{n/1}}{1^{p_1/1} \cdot 1^{p_2/1} \ldots 1^{p_{n-2}/1}} \Sigma g_1^{p_1} g_2^{p_2} \ldots g_{n-2}^{p_{n-2}}$$

$$+(-1)^{n-1}\left\{\binom{1}{0} - \binom{1}{1}\right\} \frac{1^{n/1}}{1^{2/1}} \Sigma g_1^{\,2} g_2 g_3 \ldots\ldots g_{n-1} + (-1)^n 1^{n/1} g_1 g_2 g_3 \ldots\ldots g_{n-1}$$

$$= (-1)^n 1^{n/1} g_1 g_2 g_3 \ldots g_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

En utilisant les formules trouvées, on démontre la seconde partie du théorème proposé de cette manière :

$$-S_1^m + 2 S_2^m - 3 S_3^m + \ldots\ldots + (-1)^n n S_n^m =$$

$$-\left\{\binom{n-1}{0} - 2\binom{n-1}{1} + 3\binom{n-1}{2} - \ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n-1}{n-1}\right\} \Sigma g_1^{\,m} +$$

. . . .

$$+\left\{2\binom{n-2}{0}-3\binom{n-2}{1}+4\binom{n-2}{2}-\,.\,.+(-1)^{n-2}n\binom{n-2}{n-2}\right\}\frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}}\,\Sigma g_1^{p_1}\,g_2^{p_2}$$

. . . .

$$-\left\{3\binom{n-3}{0}-4\binom{n-3}{1}+5\binom{n-3}{2}-\,.\,.+(-1)^{n-3}n\binom{n-3}{n-3}\right\}\frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.\,1^{p_2/1}.\,1^{p_3/1}}\,\Sigma g_1^{p_1}\,g_2^{p_2}\,g_3^{p_3}$$

. . . .

. . . .

$$+(-1)^m\left\{\binom{n-m}{0}-(m+1)\binom{n-m}{1}+(m+2)\binom{n-m}{2}\,.\,.+(-1)^{n-m}n\binom{n-m}{n-m}\right\}\times$$

$$1^{m/1}\,\Sigma g_1\,g_2\,g_3\ldots.g_m =$$

$$-\left\{-\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}-\ldots.+(-1)^{n-1}(n-1)\binom{n-1}{n-1}\right\}\Sigma g_1^{\,m}+$$

. . . .

$$+\left\{-\binom{n-2}{1}+2\binom{n-2}{2}-\,.\,.+(-1)^{n-2}(n-2)\binom{n-2}{n-2}\right\}\frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.1^{p_2/1}}\,\Sigma g_1^{p_1}\,g_2^{p_2}$$

. . . .

$$-\left\{-\binom{n-3}{1}+2\binom{n-3}{2}-\,.\,.+(-1)^{n-3}(n-3)\binom{n-3}{n-3}\right\}\frac{1^{m/1}}{1^{p_1/1}.1^{p_2/1}.1^{p_3/1}}\,\Sigma g_1^{p_1}\,g_2^{p_2}\,g_3^{p_3}$$

. . . .

. . . .

$$+(-1)^m\left\{-\binom{n-m}{1}+2\binom{n-m}{2}-\,.\,.+(-1)^{n-m}(n-m)\binom{n-m}{n-m}\right\}1^{m/1}\,\Sigma g_1\,g_2\,g_3\ldots g_m \quad (22).$$

Les expressions entre les accolades, représentées dans la note 1 par V_1^{n-1}, V_1^{n-2}, ... V_1^{n-m}, s'évanouissent pour $m < n-1$ ou $n-m > 1$, de sorte que l'on a dans ce cas

$$-\,S_1^m + 2\,S_2^m - 3\,S_3^m + \ldots\ldots + (-1)^n\,n\,S_n^m = 0\,\ldots\ldots (23).$$

Pour $m = n-1$ ou $n-m = 1$, toutes ces expressions s'évanouissent, à l'exception de la dernière, qui est égale à -1, de sorte que l'on a

$$-\,S_1^{n-1} + 2\,S_2^{n-1} - 3\,S_3^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n n\,S_n^{n-1} =$$

$$(-1)^n\,1^{n-1/1}\,\Sigma\,g_1\,g_2\,g_3\ldots g_{n-1}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Note 3.

Théorème. Si les n nombres g_i et le nombre s sont arbitraires, et que l'on pose

$$Q_0^m = \binom{s}{m},$$

$$Q_1^m = \binom{s-g_1}{m} + \binom{s-g_2}{m} + \binom{s-g_3}{m} + \dots\dots + \binom{s-g_n}{m},$$

$$Q_2^m = \binom{s-g_1-g_2}{m} + \binom{s-g_1-g_3}{m} + \dots\dots + \binom{s-g_{n-1}-g_n}{m},$$

$$Q_3^m = \binom{s-g_1-g_2-g_3}{m} + \binom{s-g_1-g_2-g_4}{m} + \dots + \binom{s-g_{n-2}-g_{n-1}-g_n}{m},$$

. . . .

$$Q_n^m = \binom{s-g_1-g_2-g_3\dots\dots-g_n}{m},$$

la forme

$$Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \dots\dots\dots + (-1)^n Q_n^m$$

aura la valeur zéro pour $m < n$,
et la valeur $g_1 g_2 g_3 \dots g_n$ pour $m = n$,
tandis que la forme

$$Q_1^m - 2\,Q_2^m + 3\,Q_3^m - \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\,n\,Q_n^m$$

aura la valeur zéro pour $m < n-1$,
et la valeur $\Sigma g_1 g_2 g_3 \dots g_{n-1}$ pour $m = n-1$.

Démonstration. En développant la fonction $(s-g)^{m/-1}$ suivant les puissances ascendantes de g par le théorème de Maclaurin, on trouve

$$(s-g)^{m/-1} = s^{m/-1} - \frac{g}{1} Ds^{m/-1} + \frac{g^2}{1.2} D^2 s^{m/-1} - \frac{g^3}{1.2.3} D^3 s^{m/-1}$$
$$+ \dots\dots + (-1)^m \frac{g^m}{1^{m/1}} D^m s^{m/-1} \dots\dots\dots\dots (25),$$

où $D^k s^{m/-1}$ représente le $k^{\text{ième}}$ quotient différentiel de $s^{m/-1}$ par rapport à s.

En appliquant cette formule on obtient:

$$
\left.\begin{aligned}
Q_0^m &= \frac{s^{m/-1}}{1^{m/1}}, \\
Q_1^m &= \frac{1}{1^{m/1}}\left\{\binom{n}{1} s^{m/-1} - S_1^1 \frac{Ds^{m/-1}}{1} + S_1^2 \frac{D^2 s^{m/-1}}{1.2}\right. \\
&\qquad \left. - S_1^3 \frac{D^3 s^{m/-1}}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m S_1^m \frac{D^m s^{m/-1}}{1^{m/1}}\right\}, \\
Q_2^m &= \frac{1}{1^{m/1}}\left\{\binom{n}{2} s^{m/-1} - S_2^1 \frac{Ds^{m/-1}}{1} + S_2^2 \frac{D^2 s^{m/-1}}{1.2}\right. \\
&\qquad \left. - S_2^3 \frac{D^3 s^{m/-1}}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m S_2^m \frac{D^m s^{m/-1}}{1^{m/1}}\right\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_n^m &= \frac{1}{1^{m/1}}\left\{\binom{n}{n} s^{m/-1} - S_n^1 \frac{Ds^{m/-1}}{1} + S_n^2 \frac{D^2 s^{m/-1}}{1.2}\right. \\
&\qquad \left. - S_n^3 \frac{D^3 s^{m/-1}}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m S_n^m \frac{D^m s^{m/-1}}{1^{m/1}}\right\},
\end{aligned}\right\} (26),
$$

où les coefficients S_n^m ont la même signification que dans la note 2.

En substituant les valeurs (26) dans la forme

$$Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n Q_n^m,$$

on trouve:

$$
\begin{aligned}
Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n Q_n^m &= \\
\frac{1}{1^{m/1}}\Big\{ \Big[1 - \tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2} - \ldots\ldots + (-1)^n \tbinom{n}{n}\Big] s^{m/-1} & \\
- \Big[- S_1^1 + S_2^1 - S_3^1 + \ldots + (-1)^n S_n^1\Big] \frac{Ds^{m/-1}}{1} & \\
+ \Big[- S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 + \ldots + (-1)^n S_n^2\Big] \frac{D^2 s^{m/-1}}{1.2} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+ (-1)^m \Big[- S_1^m + S_2^m - S_3^m + \ldots + (-1)^n S_n^m\Big] \frac{D^m s^{m/-1}}{1^{m/1}} \Big\} & \ldots (27).
\end{aligned}
$$

Pour $m < n$, les expressions entre les accolades s'évanouissent; donc, on a dans ce cas:

$$Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n Q_n^m = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (28).$$

Pour $m = n$, les expressions entre les accolades s'évanouissent, à l'exception de la dernière, qui est égale à $(-1)^n \, 1^{n/1} g_1 g_2 g_3 \ldots g_n$, de sorte que l'on a:

$$Q_0^n - Q_1^n + Q_2^n - \ldots\ldots\ldots + (-1)^n Q_n^n =$$

$$(-1)^{2n} \frac{1^{n/1}}{1^{n/1}} g_1 \, g_2 \, g_3 \ldots\ldots g_n = g_1 g_2 g_3 \ldots\ldots g_n \ldots\ldots\ldots\ldots (29),$$

car $D^m s^{m/-1} = 1^{m/1}$.

Pour l'autre forme on trouve immédiatement

$$Q_1^m - 2\, Q_2^m + 3\, Q_3^m - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} n Q_n^m =$$

$$-\frac{1}{1^{m/1}} \Big\{ \Big[-\tbinom{n}{1} + 2\tbinom{n}{2} - 3\tbinom{n}{3} + \ldots + (-1)^n n \tbinom{n}{n} \Big] s^{m/-1}$$

$$- \Big[-S_1^1 + 2\, S_2^1 - 3\, S_3^1 + \ldots + (-1)^n n S_n^1 \Big] \frac{Ds^{m/-1}}{1}$$

$$+ \Big[-S_1^2 + 2\, S_2^2 - 3\, S_3^2 + \ldots + (-1)^n n S_n^2 \Big] \frac{D^2 s^{m/-1}}{1\,.\,2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^m \Big[-S_1^m + 2\, S_2^m - 3\, S_3^m + \ldots + (-1)^n n S_n^m \Big] \frac{D^m s^{m/-1}}{1^{m/1}} \Big\} \; (30).$$

Pour $m < n - 1$, les expressions entre les accolades s'évanouissent, d'où l'on déduit dans ce cas

$$Q_1^m - 2\, Q_2^m + 3\, Q_3^m - \ldots + (-1)^{n-1} n \, Q_n^m = 0 \ldots\ldots\ldots (31).$$

Pour $m = n - 1$, les expressions entre les accolades s'évanouissent, excepté la dernière, qui est égale à $(-1)^n \, 1^{n-1/1} \, \Sigma \, g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1}$.

On trouve donc:

$$Q_1^{n-1} - 2\, Q_2^{n-2} + 3\, Q_3^{n-1} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n \, Q_n^{n-1} =$$

$$(-1)^{2n} \frac{1^{n-1/1}}{1^{n-1/1}} \Sigma g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1} = \Sigma \, g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1} \ldots\ldots\ldots (32).$$

GEDRUKT BIJ
JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN
HAARLEM