Mellen W. Haskell

Göttingen, 1886.

Weierstrass:

Vorlesungen

über

Anwendungen

der

Elliptischen Functionen.

Nach den Heften von G. Schulz, R. v. Lilienthal und F. Haenlein zusammengestellt von O. Bolza.

Winter 1882–3.

Inhaltsverzeichnis.

pg.

I. Teil: Allgemeine Sätze.

cap. I. Die Differentialgleichung $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$.

cap. II. Periodenbestimmung.

cap. VI. Elliptische Integrale.

II. Teil: Anwendungen.

cap. VI. Die geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoid.

cap. VII. Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

I. Teil:

Allgemeine Sätze.

I. Kapitel.

Die Differentialgleichung: $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$

§ 1. Es soll eine anal. Function s von u bestimmt werden, welche der Diffgl.:

$$(1) \qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = S$$

genügt und für $u = 0$ unendlich wird.

Angenommen, es gebe eine solche Function; dann wird die Function:

$$(2) \qquad t = \frac{1}{s}$$

der Diff. gl.

$$(3) \qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 4t - g_2 t^3 - g_3 t^4$$

genügen und für $u = 0$ verschwinden.

Wir setzen:

$$(4) \qquad t = w^2.$$

w genügt dann der Diff.gl.

$$(5) \qquad \left(\frac{dw}{du}\right)^2 = 1 - \frac{g_2}{4} w^4 - \frac{g_3}{4} w^6$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhalten wir für $\frac{dw}{du}$

zwei Werte die wir nach steigenden Potenzen von w entwickeln können:

$$(6) \qquad \frac{dw}{du} = \pm \left\{ 1 - \frac{g_2}{8} w^4 - \frac{g_3}{8} w^6 - \cdots\cdots \right\}$$

Die Potenzreihe convergirt für kleine $|w|$. Hieraus folgt, nach functionth. Sätzen, dass es zwei nach Potenzen von u fortschreitende Reihen gibt, die für kleine $|u|$ convergiren, für $u=0$ verschwinden und der Diffgl. (5) genügen.

In der Potenzreihe (6) kommen nur gerade Potenzen von w vor; es verschwinden also für $w=0$ alle geraden Ableitungen von w. Ferner folgt durch Diff. von (6):

$$\left(\frac{dw}{du}\right)_0 = \pm 1\,; \quad \left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 = 0\,; \quad \left(\frac{d^3w}{du^3}\right)_0 = 0\,; \left(\frac{d^4w}{du^3}\right)_0 = 0\,;$$

$$\left(\frac{d^5w}{du^5}\right)_0 = \mp \frac{4!\,g_2}{8}\,; \quad \left(\frac{d^6w}{du^6}\right)_0 = 0\,; \quad \left(\frac{d^7w}{du^7}\right)_0 = \mp \frac{6!\,g_3}{8}$$

Es ist also:

$$w = \pm \left\{ u - \frac{3g_2}{5!} u^5 - \frac{90\,g_3}{7!} u^7 + \cdots\cdots \right\}$$

$$t = w^2 = u^2 \left\{ 1 - \frac{g_2}{20} u^4 - \frac{g_3}{28} u^6 + \cdots\cdots \right\}$$

Da die beiden Functionen w für t denselben Wert liefern, so gibt es nur eine der Diffgl. (3) und der Anfangsbedingung $t = 0$ für $u = 0$ genügende Function t.

Schliesslich erhalt man für s:

(7) $s = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots\cdots = \wp(u)$.

Die Potenzreihe enthält nur gerade Potenzen von u und convergirt für kleine $|u|$.

Indem man in bekannter Weise das Functionenelement (7) über seinen urspr. Bereich fortsetzt, erhält man eine anal. Function von u, welche nach allgem. Sätzen in ihrem ganzen Bereich der Diffgl. (1) genügt.

§ 2. Zur näheren Untersuchung dieser anal. Function zeigen wir zunächst dass dieselbe ein algebraisches Additionstheorem besitzt.

Es seien u_1 und u_2 zwei verschiedene Werte von u, welche selbst, sowie ihre Summe $u_1 + u_2$ innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (7) liegen. Ferner seien:

(1) $x_1 = \wp u_1$; $x_2 = \wp u_2$; $y_1 = \wp' u_1$; $y_2 = \wp' u_2$.

Es bestehen denn zwischen diesen Grössen die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} y_1^2 &= 4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3 \\ y_2^2 &= 4x_2^3 - g_2 x_2 - g_3 \end{aligned}$$

Bilden wir nun mit zwei neuen unabhängigen Variabeln x, y die lin. Function:

$$(x_1 - x_2)\, y + (x_2 - x)\, y_1 + (x - x_1)\, y_2 ,$$

so verschwindet dieselbe, wenn wir für x, y ~~eines~~ der beiden Wertepaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ setzen.

Betrachten wir daher die folgenden beiden Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$(3)\qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

$$(4)\qquad (x_1 - x_2)\, y + (x_2 - x)\, y_1 + (x - x_1)\, y_2 = 0,$$

so werden dieselben erfüllt, wenn wir für x, y eines der beiden Wertepaare $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ setzen. Es gibt aber noch ein drittes Wertepaar, welches dem Gleichungssystem (3), (4) genügt. Um dasselbe zu erhalten, berechnen wir y aus (4) und setzen den Wert in (3) ein:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - \left[\frac{(x_2 - x)\, y_1 + (x - x_1)\, y_2}{x_1 - x_2} \right]^2 = 0$$

Diese Gleichung ist in x vom 3ten Grade; sie muss also ausser den beiden Wurzeln x_1 und x_2 noch eine dritte Wurzel x_3 haben. Durch Division mit $(x-x_1)(x-x_2)$ erhält man:-

$$(5) \qquad x_3 = \frac{(x_1+x_2)(2x_1x_2 - \frac{g_2}{2}) - g_3 - y_1 y_2}{2(x_1-x_2)^2}$$

Hieraus folgt, dass x_3 eine anal. Function von u_1, u_2 ist, die regulär ist in der Umgebung jeder Stelle u_1', u_2' deren Coordinaten beide innerhalb des Convergenzkreises von (7), § 1, liegen und von einander verschieden sind, und überdiess so beschaffen sind, dass $\wp u_1$ und $\wp u_2$ von einander verschieden und endlich sind.

Unter den angegebenen Bedingung lässt sich also x_3 nach u_1 und u_2 differentiiren.

Wir setzen jetzt zur Abkürzung:

$$(6) \qquad \begin{aligned} F(x) &= 4x^3 - g_2 x - g_3 - \left[\frac{(x_2-x)y_1 + (x-x_1)y_2}{x_1-x_2}\right]^2 \\ &= 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned}$$

$$L = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \qquad M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Wir verstehen nun unter x irgend einen der 3 Functionen x_1, x_2, x_3 von u_1, u_2. Dann ist für beliebige u_1, u_2

$$\mathcal{F}(x) = 0 = 4x^3 - g_2 x - g_3 - (\mathcal{L} + \mathcal{M}x)^2$$

Wir können daher diese Gleichung nach u_1, u_2 total differentiiren:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx - 2(\mathcal{L} + \mathcal{M}x)(d\mathcal{L} + x\, d\mathcal{M}) = 0$$

Dabei sind dx, $d\mathcal{L}$, $d\mathcal{M}$ die totalen Differentiale nach u_1, u_2

Bezeichnen wir dann mit y_3 den durch Gl. (4) zu $x = x_3$ gehörigen Wert von y, und verstehen wir unter x, y eines der 3 Wertepaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, so folgt:

$$(7) \qquad \frac{dx}{y} = \frac{2(d\mathcal{L} + x\, d\mathcal{M})}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Wir setzen hierin successive für x, y die Werte $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ und berechnen $\frac{\partial F}{\partial x}$ aus der 2ten Form für $\mathcal{F}(x)$:

$$\mathcal{F}(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Wir addiren die gefundenen Gleichungen und beachten, dass:

$$\frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = 0$$

und

$$\frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{x_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{x_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = 0$$

dann kommt:

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} = 0$$

Da nun:

$dx_1 = y_1\, du_1$; $dx_2 = y_2 du_2$, so folgt:

$$dx_3 = -y_3\, du_1 - y_3\, du_2, \text{ also}$$

$$(8) \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u_1} = \frac{\partial x_3}{\partial u_2}$$

Nun gelten für x_1 u. x_2 Entwickelungen von der Form:

$$x_1 = \frac{1 + u_1^4\, \mathfrak{P}(u_1)^2}{u_1^2}; \qquad y_1 = \frac{-2 + u_1^4\, \mathfrak{P}(u_1^2)}{u_1^3}$$

$$x_2 = \frac{1 + u_2^4\, \mathfrak{P}(u_2^2)}{u_2^2}; \qquad y_2 = \frac{-2 + u_2^4\, \mathfrak{P}(u_2^2)}{u_2^3}$$

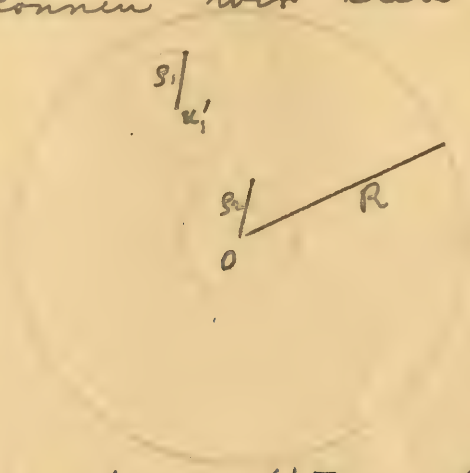
Setzt man diese Reihen in den Ausdruck (5) für x_3 ein, so erhält man:

$$x_3 = \frac{\mathfrak{P}_1(u_1, u_2)}{\mathfrak{P}_2(u_1, u_2)}.$$

Beide Potenzreihen convergiren wenn $|u_1|$ und $|u_2| < R$, wo R der Convergenzradius von $\wp u$ ist. Nun ist:

$$\wp_2(u_1 - u_2) = 2u_1^4 u_2^4 (x_1 - x_2)^2$$

Der Nenner von x_3 verschwindet also stets und nur dann wenn $\wp u_1 = \wp u_2$ wird. Wir nehmen jetzt innerhalb (R) eine beliebige Stelle u_1' an; dann können wir stets ρ_2 hinreichend klein



annehmen, so dass für $|u_2| \leqq \rho_2$, $\wp u_2$ von $\wp u_1'$ verschieden ist. Alsdann können wir ρ_1 so klein nehmen dass für $|u_2| \leqq \rho_2$ u. für $|u_1 - u_1'| \leqq \rho_1$, $\wp u_1$ von $\wp u_2$ verschieden ist, also $\wp_2(u_1, u_2) \neq 0$, und überdiess (ρ_1) ganz innerhalb (R).

Nun verwandeln wir $\wp_1(u_1, u_2)$ und $\wp_2(u_1, u_2)$ in Potenzreihen von $u_1 - u_1'$ u. u_2. Das constante Glied im Nenner ist dann $\neq 0$, wir können also x_3 in eine Potenzreihe von $u_1 - u_1'$ und u_2 verwandeln, die convergirt für $|u_1 - u_1'| < \rho_1$,

$|u_2| < \rho_2$:

$$x_3 = \mathfrak{P}(u_1 - u_1', u_2)$$

Diese Potenzreihe ordnen wir nach Potenzen von u_2:

(9) $$x_3 = f_0 + f_1 \frac{u_2}{1} + f_2 \frac{u_2^2}{2!} + \dots$$

Die Coefficienten $f_0, f_1, \dots$ sind dann Potenzreihen von $u_1 - u_1'$; speciell ergibt sich aus der Ableitung der Reihe:

$$f_0 = x_1 .$$

Wir sind jetzt sicher, dass wir die Reihe (9) sowohl nach u_2 als auch, wegen der gleichmässigen Convergenz in Beziehung auf u_1, nach u_1 gliedweise differentiiren dürfen.

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_2} = f_1 + f_2 u_2 + f_3 \frac{u_2^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_1} = f_0' + f_1' u_2 + f_2' \frac{u_2^2}{2!} + \dots \left\{ f_n' = \frac{df_n}{du_1} \right\}$$

Also, da nach (8) $\frac{\partial x_3}{\partial u_1} = \frac{\partial x_3}{\partial u_2}$:

$$f_1 = f_0' \; ; \quad f_2 = f_1' ; \dots \dots f_n = f_{n-1}' .$$

Daraus folgt:

$$f_n = \frac{d^n f_0}{du_1^n} = \frac{d^n x_1}{du_1^n} = \wp^{(n)}(u_1).$$

Also ist:

$$x_3 = \wp(u_1) + \wp'(u_1) \cdot u_2 + \wp''(u_1) \frac{u_2^2}{2!} + \dots = \wp(u_1 + u_2)$$

Wir haben also das Resultat:

$$x_3 = \wp(u_1 + u_2)$$

Also nach (5)

$$(10) \quad \wp(u_1 + u_2) = \frac{(\wp u_1 + \wp u_2)(2\wp u_1 \wp u_2 - \frac{g_2}{2}) - g_3 - \wp' u_1 \wp' u_2}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}$$

Die durch die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d\wp}{du}\right)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2 \wp u - g_3$$

definirte Function besitzt also das durch Gl. (9) ausgedrückte Additionstheorem, aus dem eine algebraische Gleichung zwischen $\wp(u_1 + u_2)$, $\wp u_1$, $\wp u_2$ wird, wenn man $\wp' u_1$, $\wp' u_2$ durch $\wp u_1$, $\wp u_2$ ausdrückt.

Das Additionstheorem (10) ist übrigens zunächst nur bewiesen, wenn u_1, u_2, $u_1 + u_2$ innerhalb (R) liegen.

§ 3. Wir benutzen das Additionstheorem,

um die Function $\wp u$ auch über ihren urspr. Bereich (R) hinaus zu definiren.

Wir multipliciren die Gl. (10) mit dem Nenner der rechten Seite, setzen dann $u_1 = u$, $u_2 = u + h$ und entwickeln nach dem Taylor'schen Satz nach Potenzen von h; da die entstehende Gleichung für beliebige hinreichend kleine u und h gilt, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen von h beiderseits gleich sein. Vergleicht man die Coefficienten von h^2 und beachtet dabei die durch Differentiation von $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$ erhaltenen Gleichungen:

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \tfrac{1}{2} g_2$$

$$\wp''' u = 12 \wp u \, \wp' u,$$

so erhält man:

$$(1) \quad \wp(2u) = \frac{\left(\wp^2 u - \frac{1}{4} g_2\right)^2 + 2 g_3 \wp u}{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3} = \frac{G(\wp u)}{H(\wp u)}.$$

Setzt man $\frac{u}{2}$ statt u, so erhält man $\wp u$ ausgedrückt als rat. Funct. von $\wp(\frac{u}{2})$

$$\wp u = \frac{G_1(\wp \frac{u}{2})}{H_1(\wp \frac{u}{2})}$$

Setzt man hierin $\frac{u}{2}$ statt u, so erhält man $\wp(\frac{u}{2})$ durch $\wp(\frac{u}{4})$ ausgedrückt; führt man das in den Ausdruck für $\wp u$ ein, so kommt:

$$\wp u = \frac{G_2(\wp\frac{u}{4})}{H_2(\wp\frac{u}{4})},$$

wo G_2 und H_2 ganze Functionen; indem man so fortfährt, erhält man schliesslich:

$$(2) \qquad \wp u = \frac{G_n(\wp\frac{u}{2^n})}{H_n(\wp\frac{u}{2^n})}.$$

Wir können Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von u entwickeln; ist k der Grad von G_n, l der von H_n, so erhält man:

$$\wp u = \frac{A_0 u^{-2k} + \cdots}{B_0 u^{-2l} + \cdots} \quad \begin{cases} A_0 \neq 0 \\ B_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$= u^{2(l-k)} \cdot \frac{(A_0 + A_1 u + \cdots)}{(B_0 + B_1 u + \cdots)}$$

oder, da $B_0 \neq 0$,

$$\wp u = u^{2(l-k)} \{ b_0 + b_1 u + \cdots \}. \quad (b_0 \neq 0)$$

Durch Vergleichung mit der bekannten Entwickelung für $\wp u$ folgt:

$$l - \varkappa = -1,$$
$$\varkappa = l + 1.$$

Der Grad des Zählers ist also um eine Einheit höher als die des Nenners.

Wir können also $\wp u$ darstellen als Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen; der Zähler beginnt mit einem Constanten Glied, der Nenner mit u^2.

$$(3) \qquad \wp u = \frac{\mathfrak{P}_n(u)}{\mathfrak{P}_n'(u)}.$$

Der Convergenzradius der Reihe:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \cdots$$

war R. Setzen wir darin $\frac{u}{2^n}$ statt u und ordnen nach Potenzen von u, so erhalten wir für $\wp\left(\frac{u}{2^n}\right)$ eine Potenzreihe die für $|u| < 2^n R$ convergirt. Daraus folgt, dass auch die beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(u)$ und $\mathfrak{P}_n'(u)$ für $|u| < 2^n R$ convergiren. Die linke Seite der Gl. (3) hat nur für $|u| < R$ eine Bedeutung, die rechte dagegen für $|u| < 2^n R$. Dies benutzen wir um die Bedeutung der

Function $\wp u$ über ihren ursprünglichen Bereich hinaus zu erweitern.

Wir definiren jetzt eine Function $\bar{\wp} u$ auf folg. Weise: Ist u_0 irgend eine Stelle der Ebene, so nehmen wir n so gross dass

$$2^n R > |u_0|.$$

Dann convergiren die Reihen $\mathfrak{P}_n(u)$ und $\mathfrak{P}'_n(u)$ noch für $u = u_0$; der Quotient $\mathfrak{P}_n u : \mathfrak{P}'_n u$ hat dann einen ganz bestimmten Wert und diesen Wert definiren wir als den Wert von $\bar{\wp} u$ für $u = u_0$.

Ich behaupte, die so definirte Function $\bar{\wp} u$ ist eine, in der ganzen Ebene eindeutige, analytische Function von u, von welcher die urspr. Reihe $\wp u$ ein Element ist.

1) Sie ist <u>eindeutig</u>.

Beweis: ist n_0 die kleinste ganze Zahl fur die $2^n R > |u_0|$, so kann man zur Berechnung von $\bar{\wp}(u_0)$ alle die co-vielen Potenzreihen $\frac{\mathfrak{P}u}{\mathfrak{P}'u}$ verwenden für die $n \geqq n_0$, so dass es scheint, als erhielte man ∞-viele Werte für $\bar{\wp}(u_0)$. Aber welche von den ∞-vielen Quotienten man auch benutzen mag, man erhält stets denselben Wert für $\bar{\wp}u_0$. Denn sind n u. m zwei versch. ganze Zahlen, beide $\geqq n_0$, u. gehen wir aus von:

$$\wp u = \frac{G_n\left(\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{H_n\left(\wp\left(\frac{u}{2}\right)\right)} = \frac{\mathfrak{P}_n(u)}{\mathfrak{P}_n'(u)},$$

so stimmen $\wp u$ u. $\dfrac{\mathfrak{P}_n(u)}{\mathfrak{P}_n'(u)}$ überein für $|u| < R$; ebenso stimmt aber auch $\dfrac{\mathfrak{P}_m(u)}{\mathfrak{P}_m'(u)}$ mit $\wp u$ überein für $|u| < R$; beide Ausdrücke stimmen also für $|u| < R$ auch untereinander überein; daraus folgt aber, dass beide übereinstimmen in ihrem ganzen gemeinsamen Gültigkeitsbereich; es ist also auch:

$$\frac{\mathfrak{P}_n(u_0)}{\mathfrak{P}_n'(u_0)} = \frac{\mathfrak{P}_m(u_0)}{\mathfrak{P}_m'(u_0)} = \bar{\wp}(u_0).$$

Somit ist $\bar{\wp}u$ in der ganzen Ebene eindeutig definirt.

2) Die so definirte Function ist eine

analytische. Denn sind u_1, u. u_2 irgend zwei Stellen der Ebene, an denen $\bar{p}u$ endlich ist, so nehmen wir $\underline{n}$ so gross dass sowohl $|u_1|$ als $|u_2| < 2^n R$. Dann liegen u_1 u. u_2 im Gültigkeitsgebiet von $\frac{P_n(u)}{P_n'(u)}$. Wir können dann aus $\frac{P_n}{P_n'}$ eine für die Umgebung von u_1 gültige Reihe:

$$\bar{p}u = \mathfrak{P}(u|u_1)$$

und eine für die Umgeb. von u_2 gültige:

$$\bar{p}u = \mathfrak{P}(u|u_2)$$

ableiten. Da beide Potenzreihen aus demselben Quotienten $\frac{P_n}{P_n'}$ abgeleitet sind, so kann man, von $\mathfrak{P}(u|u_1)$ ausgehend, durch analytische Fortsetzung zu $\mathfrak{P}(u|u_2)$ gelangen u. umgekehrt.

Man kann also von jedem Wert von $\bar{p}u$ zu jedem anderen durch anal. Fortsetzung gelangen; $\bar{p}u$ ist also eine anal. Function; da überdiess $\frac{P_n}{P_n'}$ innerhalb (R) mit $\wp u$ coincidirt, so folgt dass $\wp u$ ein Element dieser anal. Function ist.

3) Ist u_0 eine beliebige Stelle im

Endlichen u. $\frac{p_n(u)}{p_n'(u)}$ eine Darstellung für $\wp u$, in deren Gültigkeitsbereich u_0 liegt, so lässt sich aus $\frac{p_n(u)}{p_n'(u)}$ eine nach Potenzen von $(u-u_0)$ fortschreitende Reihe ableiten, die nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthält.

$\wp u$ hat also an jeder Stelle im Endlichen den Charakter einer rationalen Function.

Daraus folgt aber nach allgem. Functionentheoretischen Sätzen, dass $\wp u$ sich als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen darstellen lässt:

$$\wp u = \frac{g(u)}{h(u)}.$$

4) Die Gültigkeit der Diff.gleichung $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$ u. des Additionstheorems ist direkt nur für das Functionenelement $\wp u$ nachgewiesen; nach allgem. Sätzen gelten dann beide auch in dem ganzen übrigen Bereich von $\wp u$. Wir haben also das Resultat: Es

gibt eine und nur eine analytische Function von u, welche der Diff.gl.

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

genügt u. für $u=0$ ∞ wird. Dieselbe ist in der ganzen Ebene eindeutig und besitzt an jeder Stelle im Endlichen den Charakter einer rationalen Function. In ihrem ganzen Bereich gilt das Additionstheorem:

$$\wp(u_1+u_2) = \frac{(2\wp u_1\,\wp u_2 - \frac{1}{2}g_2)(\wp u_1 + \wp u_2) - g_3 - \wp' u_1\,\wp' u_2}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}$$

§4. Da die Function $\wp u$ ein algebr. Additionstheorem besitzt, so muss sie, nach einem in der Theorie der ellipt. Functionen bewiesenen Satz, entweder rational oder periodisch sein.

1) Angenommen, es genüge eine rationale Function der Diff.=gleichung; so muss dieselbe, nach §1 die Form haben: –

$$\wp u = u^{-2} + b_2 u^2 + b_3 u^4 + \dots + b_m u^{2m-2}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Diff-gl. ein, so ist rechts die höchste Potenz von u die $(6m-6)$ te; links die $(4m-6)$ te; daraus folgt, dass $b_m = 0$ sein muss, so lange $m > 0$; es ist also

$$(1) \qquad \wp u = u^{-2}$$

Setzt man diesen Wert in die Diff.gl. ein, so genügt derselbe stets und nur dann, wenn:

$$(2) \qquad g_2 = g_3 = 0$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann der Diff.gl. keine rationale Function genügen; $\wp u$ muss also periodisch sein. Da $\wp u$ eindeutig, so wird es entweder einfach- oder doppeltperiodisch sein.

2) Angenommen, $\wp u$ sei eine <u>einfach-periodische</u> Function; und sei 2ω die primitive Periode; dann ist, wie in der Theorie der

elliptischen Functionen gezeigt wird:

$$(3) \qquad \wp u = R\left(e^{\frac{i\pi u}{\omega}}\right)$$

wo R eine rat. Function bedeutet.

Um die rat. Funct. R zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass jeder Wert v, für den $\wp u$ ∞ wird, eine Periode von $\wp u$ ist.

In der Umgebung einer solchen Stelle muss, da $\wp u$ überall den Charakter einer rat. Funct. besitzt, für $\wp u$ eine Entwickelung gelten:

$$\wp u = A_0 (u-v)^{-m} + \cdots$$

Durch Einsetzen in die Diff.gl. folgt:

$$m = 2 \;, \quad A_0 = 1,$$

also:
$$\wp u = (u-v)^{-2} + \cdots$$

Es ist also:

$$\frac{\wp'(v+h)}{\wp^2(v+h)} = -2h + \mathfrak{L}(h),$$

also:

$$\lim_{h=0} \left\{ \frac{\wp'(v+h)}{\wp^2(v+h)} = 0 \right.$$

Ist daher v eine Unendlichkeits-stelle von pu, so findet man:

$$(4) \qquad p(u+v) = p(u)$$

v muss also eine Periode von pu sein. Da in unserm Fall pu einfach periodisch, so wird es nur unendlich für:

$$u = 2\mu\omega,$$

wo μ eine ganze Zahl. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\pi i}{\omega} = \alpha \quad ; \quad x = e^{\alpha u}$$

so wird $x = 1$ für $u = 2\mu\omega$. $R(x)$ hat also im Nenner den Factor $(x-1)^n$. Da pu ausser in den Punkten $2\mu\omega$ in keinem im Endl. gelegenen Punkt cs wird, und da die Function $e^{\alpha u}$ jeden vorgeschr. Wert $m+ni$ ausser $m=0, n=0$ im Endl. annimmt, so muss $R(x)$ die Form haben:

$$(5) \qquad pu = \frac{G(x)}{x^m(x-1)^n}$$

Setzt man $-u$ statt u so geht x in $\frac{1}{x}$ uber; aus der Bedingung $pu = p(-u)$ ergibt sich -denn dass:

$$2m + n - k = 0$$

wenn k der Grad von $G(x)$ ist.

Entwickelt man die rechte Seite nach Potenzen von $x-1$:

$$pu = \frac{c_0}{(x-1)^n} + \text{----}$$

und den x nach Potenzen von u, so folgt:

$$n = 2.$$

Entwickelt man andrerseits $R(x)$ nach steigenden Potenzen von x:

$$pu = \frac{b_0}{x^m} + \text{-----},$$

so ist:

$$p'u = -\frac{m\, b_0}{x^{m+1}}\,\frac{dx}{du} + \text{----} = -\frac{\alpha m\, b_0}{x^m} + \text{---}$$

Aus der Diffgl. folgt dann:

$$\frac{\alpha^2 m^2 b_0^2}{x^{2m}} + \text{-----} = \frac{4\, b_0^3}{x^{3m}} + \text{-------},$$

also: $m = 0.$

somit: $k = 2.$

$\wp u$ hat daher die Form:

$$(9)\quad \wp u = \frac{c_0}{(x-1)^2} + \frac{c_1}{x-1} + c_2$$

Aus der Bedingung $\wp(-u) = \wp u$ folgt: (10) $c_0 = c_1$

Ferner folgt:

$$(11)\quad \wp' u = -\frac{d\, c_0\, x\,(x+1)}{(x-1)^3}$$

Sind e', e'', e''' die 3 Wurzeln der Gl.:

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0,$$

so gehören zu jedem Wert 2 Werte x; die sämmtlichen 6 Werte von x müssen der Gl. genügen:

$$(12)\quad 4\,(R(x))^3 - g_2\,(R(x)) - g_3 = 0$$

oder der damit identischen:

$$(12_a)\quad (\wp' u)^2 = \frac{d^2 c_0^2 x^2 (x+1)^2}{(x-1)^6} = 0$$

Umgekehrt muss jede Wurzel von (12_a) auch der Gl. (12) genügen, also in (9) eingesetzt einen der Werte e', e'', e''' für $\wp u$ liefern; setzen wir der Reihe nach alle

Wurzeln von (12a) ein, so erhalten wir somit alle Wurzeln von ($\mathcal{S}= 0.$)

Die Wurzeln von (12a) sind $x = 0, -1, \infty$; ihnen entspr. die Werte:-

$$e' = c_2 \quad ; \quad e'' = c_2 - \frac{c_0}{4} \quad ; \quad e''' = c_2$$

Wir sehen also zunächst dass 2 Wurzeln der Gl. gleich sein müssen. Bezeichnen wir dies. mit e_1 und e_2, so folgt:

$$(13) \qquad \begin{aligned} c_2 &= e_2 \\ c_0 &= 12 e_2 \end{aligned}$$

oder, wegen der Relation: $e_1 + e_2 + e_3 = 0$,

$$(13_a) \qquad \begin{aligned} c_2 &= -\frac{e_1}{2} \\ c_0 &= -6 e_1 \end{aligned}$$

Da 2 Wurzeln von $\mathcal{S}$ gleich sind, so muss die Discriminante verschwinden:

$$(14) \qquad g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

Wir haben endlich noch die Constante α zu bestimmen: wir erhalten dieselbe, indem wir in (9) beide Seiten nach steigenden Potenzen von u entwicklen:

$$\frac{1}{u^2} + \cdots\cdots = \frac{c_0}{\alpha^2 u^2} + \cdots\cdots$$

also:

$$(15) \qquad \alpha^2 = c_0 = -6e_1 = -\frac{\pi^2}{\omega^2}$$

also:

$$\frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{3e_1}{2}}$$

Somit erhält man für $\wp u$ nach einfacher Rechnung:

$$(16_a) \qquad \wp u = \frac{\frac{3e_1}{2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{3e_1}{2}} \cdot u\right)} - \frac{e_1}{2}$$

oder:

$$(16_b) \qquad \wp u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2$$

Dieser Ausdruck nimmt noch eine andere Form an, wenn man g_2 und g_3 einführt:

$$e_1 e_2 e_3 = +\frac{1}{4}\, g_3\,,$$

also hier: $e_1^3 = g_3$

dazu $g_2^3 = 27 g_3^2$ gibt:

$$(17) \qquad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}\ ; \text{ also } e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}.$$

Hiernach kommt:

$$(16_c) \qquad pu = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\cdot u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2}.$$

Sobald umgekehrt zwei Wurzeln der Gl. $S=0$ gleich sind ($e_2 = e_3$), so findet man durch directe Ausführung der Integration für pu den Ausdruck (16). Wir haben also das <u>Resultat</u>: Soll unserer Differentialgleichung eine einfach periodische Function genügen, so muss:

$$g_2 = 27 g_3^2.$$

und sobald diese Bedingung erfüllt ist, so genügt ihr auch wirklich eine solche, nämlich die obengegeb. Function (16).

Wenn endlich die Function pu weder rational, noch einfach periodisch ist, so muss sie doppeltperiodisch sein; angenommen, es seien 2ω, $2\omega'$ ein Paar

Primitivperioden, so behaupte ich, $\wp u$ ist identisch mit der in der Theorie der elliptischen Functionen definirten Function:

$$\wp(u \mid \omega, \omega').$$

Beweis: Nach (4) wird die Func. $\wp u$ nur unendlich in den mit $u = 0$ congruenten Stellen; ebenso $\wp(u \mid \omega, \omega')$. In der Umgebung irgend einer dieser Stellen fangen beide Functionen mit $(u-v)^{-2} +$. an; $\wp(u \mid \omega, \omega') - \wp u$, ist also eine eindeutige doppeltperiodische Function von u, die im Endlichen nirgends ∞ wird; sie muss also constant sein. Da in den Entwickelungen beider Functionen nach Potenzen von u kein constantes Glied vorkommt, so folgt:

$$\wp u = \wp(u \mid \omega, \omega').$$

II. Kapitel.

Periodenbestimmung.

§ 5. Wir setzen jetzt voraus, die 3 Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Gl. $S = 0$ seien verschieden, also:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$$

und stellen uns die Aufgabe, die Perioden der durch die Diff.gl. und die Anfangsbedingung $pu = \infty$ für $u = 0$ definirten Funct. pu zu bestimmen.

Angenommen, es seien 2ω, $2\omega'$ irgend ein Paar Fundamentalperioden, und es sei:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) > 0.$$

Ferner bezeichnen:

$$e_1 = p\omega, \quad e_2 = p(\omega + \omega'), \quad e_3 = p\omega'.$$

e_1, e_2, e_3 sind dann die 3 Wurzeln der Gl.: $S = 0$.

Ferner bezeichnen:

$$h = e^{\tau\pi i} \; ; \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

Fixirt man dann das Zeichen von

$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}$ willkührlich, so lassen sich stets die vierten Wurzeln so definiren, dass die folg. Gleichungen bestehen:

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = \vartheta_2(0) = 2h^{1/4} + 2h^{9/4} + 2h^{\frac{25}{4}} + \dots$$

$$\text{(I)}\quad \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_3(0) = 1 + 2h + 2h^4 + \dots$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \vartheta_0(0) = 1 - 2h + 2h^4 - \dots$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\text{(II)}\qquad \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \lambda = \kappa^2$$

so folgt aus (I)

$$(\mathrm{II}_a)\qquad \lambda = \frac{16h\,(1+h^2+h^6+\dots)^4}{(1+2h+2h^4+\dots)^4}$$

Da nun ω und ω' noch unbekannt sind, so können wir auch nicht angeben in welcher Reihenfolge die drei Wurzeln von $S=0$ mit e_1, e_2, e_3 zu bezeichnen sind, also ist auch λ unbekannt, also alle in Gl. (II_a) vorkommenden Grössen. Ich behaupte nun aber:

Wenn man die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{S}=0$ in beliebiger Reihenfolge mit e_1, e_2, e_3 bildet und aus diesen die Grösse λ berechnet und die Gl. (II_a) anschreibt; wenn sodann h_0 irgend einen der Gl. (II_a) genügenden Wert von h bezeichnet (worin die Voraussetzung $|h_0|<1$ mit enthalten ist); wenn man dann weiter unter τ_0 irgend einen der ∞ vielen Werte von

$$(1) \qquad \tau_0 = \frac{1}{\pi i} \log h_0$$

versteht; und wenn man dann endlich ω_0 und ω_0' durch die Gl. definirt:

$$(2) \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{e_2-e_3}} \left(2h_0^{1/4} + 2h_0^{9/4} + \cdots\right)^2$$

(Vorzeichen der Wurzel beliebig)

$$(3) \qquad \omega_0' = \omega_0 \tau_0 \;;$$

alsdann ist $2\omega_0, 2\omega_0'$ ein Paar Fundamentalperioden unserer Function $\wp u$.

Beweis: Bilden wir jetzt aus den beiden Grössen $2\omega_0$ und $2\omega_0'$ als

Fundamentalperioden die Function:

$$\wp(u \mid \omega_0, \omega_0')$$

und bezeichnet:

$$\wp\omega_0 = e_1' \,;\quad \wp(\omega_0 + \omega_0') = e_2' \,;\quad \wp\omega_0' = e_3' \,;$$

so können wir auch für diese Function die Gl. (I) aufstellen, da ja die einzige hierzu erforderliche Bedingung $|h_0| < 1$ erfüllt ist. Es ist also:

$$e_1' - e_3' = \left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)^2 (1 + 2h_0 + 2h_0^4 + \dots)^4$$

aber andererseits folgt aus der Gl.:

$$\lambda = \frac{16 h_0 (1 + h_0^2 + h_0^6 + \dots)^4}{(1 + 2h_0 + 2h_0^4 + \dots)^4}$$

Zusammen mit (2)

$$e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right)^2 (1 + 2h_0 + 2h_0^4 + \dots)^4,$$

also:

$$e_1' - e_3' = e_1 - e_3 .$$

Ferner können wir auch die Gl. (II_a) für die Function $\wp(u \mid \omega_0, \omega_0')$ aufstellen: es folgt:

$$\lambda' = \lambda$$

also:

$$e_2' - e_3' = e_2 - e_3 .$$

Da endlich:

$$e_1' + e_2' + e_3' = e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

so folgt:

$$e_1' = e_1 \; ; \quad e_2' = e_2 \; ; \quad e_3' = e_3 .$$

Die Function $\wp(u | \omega_0, \omega_0')$ genügt also ders. Diffgl. $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$ wie unsere Funct. $\wp(u | \omega, \omega')$ und da überdiess beide ∞ werden für $u = 0$, so müssen sie identisch sein.

Es müssen also $2\omega_0, 2\omega_0'$ ein Paar Fundamentalperioden der Function $\wp(u | \omega, \omega')$ sein, also ω_0, ω_0' und ω, ω' aequivalent.

Unser Problem wird also gelöst sein, sobald es gelingt, irgend einen der Gl. (II_a) genügenden Wert von h zu finden.

§6. Dies ist nun sehr einfach, wenn $|\lambda|$ hinreichend klein ist; denn aus (II_a) folgt für λ eine nach Potenzen von h fortschreitende

Reihe:

$$(1) \qquad \lambda = 16h + (h)_2 + \cdots$$

und hieraus folgt durch Umkehrung eine Reihe:

$$(2) \qquad h = \frac{\lambda}{16}(1 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \cdots),$$

die für kleine $|\lambda|$ sicher convergirt und auch Werte von $|h|$ liefert, die < 1.

Wir erhalten daraus durch Wurzelausziehen eine Reihe für $h^{1/4}$

$$(3) \qquad h^{1/4} = \frac{\lambda^{1/4}}{2}(1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \cdots)$$

Zu jedem der 4 Werte von $\lambda^{1/4}$ gehört dann ein bestimmter Wert von $h^{1/4}$. Dieselbe Reihe erhält man einfacher, indem man aus (II_a) zuerst die 4te Wurzel zieht und dann umkehrt:

$$(4) \qquad \left(\frac{\lambda}{16}\right)^{1/4} = \frac{h^{1/4}(1 + h^2 + h^6 + \cdots)}{1 + 2h + 2h^4 + \cdots}$$

Die Ausführung der Umkehrung ergibt:

$$(III) \qquad h^{1/4} = \frac{\lambda^{1/4}}{2}\left(1 + 2\frac{\lambda}{2^4} + 15\frac{\lambda^2}{2^8} + 150\frac{\lambda^3}{2^{12}} + \cdots\right)$$

Die Reihe (III) convergirt in demselben Bezirk $|\lambda| < \rho$, in welchem die Reihe (2) convergirt und zugleich Werte für $|h|$

liefert, die < 1. Denn, ist allgemein $|x| < \rho$ derj. Bezirk, in welchem die Reihe:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

convergirt u. $\neq 0$ ist, so convergirt die nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, in welche sich $\log f(x)$ entwickeln lässt in demselben Bezirk, also auch:

$$\left[f(x)\right]^m = e^{m \log f(x)}.$$

Nun wird aber die Reihe:

$$1 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \dots\dots$$

in dem Bezirk $|\lambda| < \rho$ nicht 0, da sonst $h = 0$ würde, woraus rückwärts $\lambda = 0$ folgen würde, was nicht möglich, da die drei e's als versch. vorausgesetzt werden, und demnach convergirt die Reihe (III) ebenfalls in dem Bezirk $|\lambda| < \rho$.

Von den Reihen (2) und III wissen wir nun zwar, dass sie für hinreichend kleine $|\lambda|$ convergiren, aber bei beliebig vorgeschriebenen e_1, e_2, e_3 sind sie nicht anwendbar, so lange wir ihren Convergenzbezirk nicht kennen. Um diesem Uebelstand abzuhelfen, führen wir andere Reihen ein. Aus I folgt:

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\right) &= 1+2h^4+2h^{16}+\dots = \vartheta_3(0|4\tau) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_2}\right) &= 2h+2h^9+2h^{25}+\dots = \vartheta_2(0|4\tau) \end{aligned}$$

also:

$$(\mathrm{IV})\quad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}} = \frac{2h+2h^9+\dots}{1+2h^4+2h^{16}+\dots} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)}$$

Wir bezeichnen die linke Seite mit $\lambda_1^{1/4}$; da

$$(6)\quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = 1-\lambda = \kappa'^2,$$

so ist:

$$(7)\quad \lambda_1^{1/4} = \frac{1-(1-\lambda)^{1/4}}{1+(1+\lambda)^{1/4}}.$$

Wir müssen noch den Sinn der 4ten Wurzeln bestimmen; denn von den Formeln I wissen wir nur, dass sie bei passender Wahl der $\sqrt[4]{\ }$ richtig sind. Wir setzen nun voraus, dass

$$(8)\quad |\lambda| < 1,$$

was stets zu erzwingen ist, da die Reihenfolge in der wir die 3 Wurzeln der Gl.: $S=0$ mit e_1, e_2, e_3 bezeichnen, uns noch freisteht. Alsdann können wir $(1-\lambda)^{1/4}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln:

$$(1-\lambda)^{1/4} = j\left(1 - \frac{\lambda}{4} + \cdots\right)$$

wo j eine der 4 vierten Einheitswurzeln ist. Hierin setzen wir jetzt für λ die Reihe (1) ein und entwickeln zunächst $(1-\lambda)^{1/4}$, sodann $\lambda_1^{1/4}$ nach Potenzen von h. Andrerseits erhalten wir eine solche Entwickelung aus (IV); beide Entwickelungen stimmen nur überein, wenn $j = 1$ gewählt wird. In (IV) können wir also die eine der beiden 4ten Wurzeln beliebig wählen. Die andere muss dann so bestimmt werden, dass der Wert von

$$\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = (1-\lambda)^{1/4}$$

mit dem aus dem binomischen Lehrsatz für $(1-\lambda)^{1/4}$ erhaltenen Wert übereinstimmt.

Diese Wahl der Wurzeln lässt sich auch noch anders ausdrücken. Beschränkt man x auf das Gebiet $|x| < 1$, und definirt dann $\log(1+x)$ durch die Reihe:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

so ist der aus dem binomischen Lehrsatz erhaltene Wert von $(1+x)^m$ identisch mit

$$e^{m\log(1+x)}.$$

Nun liegt aber, wenn man $|x| < 1$ festsetzt, die imag. Coord. von:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots$$

stets zwischen $-\pi/2$ u. $+\frac{\pi}{2}$ [Aus $\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$ zu beweisen]; wenn wir also

$$(1+x)^m = \rho e^{i\vartheta}$$

setzen, so liegt ϑ zwischen $-\frac{m\pi}{2}$ u. $+\frac{m\pi}{2}$.

Bezeichnen wir also den durch den binom. Lehrsatz gelieferten Wert von $(1-\lambda)^{1/4}$ mit

$$p + qi = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so ist

$$-\frac{\pi}{8} \leqq \vartheta \leqq +\frac{\pi}{8},$$

also

$$(10) \qquad 1)\ p > 0 \qquad 2)\ |p| > |q|$$

Durch diese Bedingung ist aber die Wurzel $\sqrt[4]{1-\lambda}$ eindeutig definirt; denn die übrigen Wurzelwerte sind:

$$-p-qi \quad ; \quad -q+pi \quad ; \quad +q-pi.$$

Man sieht, dass keiner derselben die beiden Bedingungen zugleich erfüllt.

Setzen wir jetzt

$$h^4 = h_1, \tag{11}$$

so folgt:

$$\lambda_1^{1/4} = \frac{2h_1^{1/4} + 2h_1^{9/4} + \text{----}}{1 + 2h_1 + 2h_1^4 + \text{----}} \tag{12}$$

andererseits war:

$$\lambda^{1/4} = \frac{2h^{1/4} + 2h^{9/4} + \text{---}}{1 + 2h + 2h^4 + \text{---}}.$$

$\lambda_1^{1/4}$ ist also dieselbe Function von h_1, wie $\lambda^{1/4}$ von h.

Hat man daher die umgekehrte Aufgabe, h_1 bei ggb. λ_1 zu bestimmen, so erhält man eine Wurzel h_1 der Gl. (12), indem man in der Reihe (2) u. (3) einfach λ durch λ_1 ersetzt:

$$h_1 = \frac{\lambda_1}{16}(1 + B_1\lambda_1 + B_2\lambda_1^2 + \text{----}) \tag{13}$$

$$h_1^{1/4} = \frac{\lambda_1^{1/4}}{2}(1 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \text{---}) \tag{14}$$

Da $\lambda_1^{1/4}$ mit λ verschwindet, so convergiren auch diese Reihen für hinreichend kleine $|\lambda|$. Andererseits ist offenbar der Wert: $h_1' = h^4$ ebenfalls eine Wurzel von (12), wo h definirt ist durch

$$h = \frac{\lambda}{16}(1 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \cdots).$$

Es ist nicht selbstverständlich, dass h_1' mit h_1 identisch ist, aber leicht zu zeigen; dann, da beides Wurzeln von (12) sind, so ist:

$$\frac{2h_1^{1/4} + 2h_1^{9/4} + \cdots}{1 + 2h_1 + \cdots} = \frac{2h_1'^{1/4} + 2h_1'^{9/4} + \cdots}{1 + 2h_1' + \cdots}.$$

Daraus folgt

$$(h_1^{1/4} - h_1'^{1/4})(1 + \mathfrak{P}(h_1, h_1')) = 0$$

Mit λ verschwinden sowohl h_1 als h_1'; also ist für kleine $|\lambda|$

$$1 + \mathfrak{P}(h_1, h_1') \neq 0,$$

also:

$$h_1 = h_1' = h^4.$$

Nun haben wir bereits vorausgesetzt, dass $|\lambda| < 1$; wir wollen zeigen, dass als dann:

$$|\lambda_1| < |\lambda|.$$

Zum Beweis bemerken wir, dass in der binom. Entwickelung:

$$(1-x)^m = \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1} x^{\nu-1} \binom{m}{\nu-1}.$$

Der Quotient des $(\nu+1)$ ten Coefficienten durch den ν ten, ist:

$$(15) \qquad q_\nu = 1 - \frac{m+1}{\nu}.$$

Daraus folgt, dass von einem best. ν an alle Coefficienten dasselbe Zeichen haben. Wenden wir dies auf die Entwickelung von $(1-\lambda)^{1/4}$ an, so folgt,

$$q_1 = -\frac{1}{4} \; ; \quad q_2 = +\frac{3}{8},$$

also sind vom 2ten Glied an alle Coefficienten negativ.

Demnach hat die Entwickelung von

$$\lambda_1^{1/4} = \frac{1-(1-\lambda)^{1/4}}{1+(1-\lambda)^{1/4}}$$

nach Potenzen von λ die Form:

$$\lambda_1^{1/4} = \frac{\mathfrak{P}(\lambda)}{2-\mathfrak{P}(\lambda)},$$

worin: $\mathfrak{P}(\lambda) = \frac{\lambda}{4} + \cdots$

nur positive Coefficienten enthält.

Nun ist, für $|\lambda| \overline{\overline{<}} 1$, $|\mathfrak{p}(\lambda)| < 2$, also können wir $\lambda_1^{1/4}$ nach aufsteigenden Potenzen von λ entwickeln:

$$(\text{V}) \qquad \lambda_1^{1/4} = \lambda(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2 + \text{---}), \quad \gamma_0 = \frac{1}{8}$$

und da in der Entwickelung von $\frac{1}{1-x}$ alle Coefficienten positiv sind, so sind <u>alle γ positiv</u>.

$\mathfrak{p}(\lambda)$ convergirt auch noch für $\lambda = 1$, also auch die Reihe (V), und da für $\lambda = 1$, $\lambda_1^{1/4} = 1$ wird, so folgt:

$$(\text{V}_a) \qquad \sum_{\rho=0}^{\infty} \gamma_\rho = 1$$

Hieraus folgt aber, dass für $|\lambda| < 1$ $|\lambda_1^{1/4}| < |\lambda|$; also ist:

$$(16) \qquad |\lambda_1| < |\lambda^4| < |\lambda|,$$

Q. E. D.

Also ist die Reihe (13) stärker convergent als die Reihe (3), und daher zur Berechnung von h geeigneter.

Aber auch diese Reihe kann uns bei gegebenem λ nichts nützen, so lange wir ihren Convergenzbezirk nicht kennen.

Wir definiren nun eine Reihe von Grössen:

$$(17)\qquad \begin{aligned} \lambda_2^{1/4} &= \frac{1-(1-\lambda_1)^{1/4}}{1+(1-\lambda_1)^{1/4}} \\ \lambda_3^{1/4} &= \frac{1-(1-\lambda_2)^{1/4}}{1+(1-\lambda_2)^{1/4}} \\ &\vdots \qquad \cdots\cdots \\ \lambda_n^{1/4} &= \frac{1-(1-\lambda_{n-1})^{1/4}}{1+(1-\lambda_{n-1})^{1/4}} \end{aligned}$$

wobei die 4 te Wurzel jedesmal in derselben Weise bestimmt werden soll wie bei $(1-\lambda)^{1/4}$. Da $|\lambda| < 1$, so ist $|\lambda_1| < 1$, also ganz wie oben:

$$(18)\qquad |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots\cdots > |\lambda_n|$$

Ueberdiess nähert sich $|\lambda_n|$ mit wachsendem n der 0; denn aus (V) folgt:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \lambda^3(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \cdots\cdots)^4, \qquad \text{also}$$

$$\left|\frac{\lambda_1}{\lambda}\right| < \varepsilon < 1 \quad ; \quad \text{ebenso}$$

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right| < \varepsilon, \qquad \text{also}$$

$$|\lambda_n| < \varepsilon^n |\lambda|$$

also wird mit wachsendem n λ_n unendlich klein.

Setzen wir nun weiter:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1^4 = h^{(4^2)} \\ h_3 &= h_2^4 = h^{(4^3)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ h_n &= h_{n-1}^4 = h^{(4^n)} \end{aligned} \tag{19}$$

so folgt aus (12) ganz ebenso wie oben:

$$\lambda_2^{1/4} = \frac{2h_2^{1/4} + 2h_2^{9/4} + \ldots}{1 + 2h_2 + \ldots}$$

und so fort bis

$$\lambda_n^{1/4} = \frac{2h_n^{1/4} + 2h_n^{9/4} + \ldots}{1 + 2h_n + 2h_n^4 + \ldots} \tag{20}$$

und durch Umkehrung:

$$h_2^{1/4} = h_1 = h^4 = \frac{\lambda_2^{1/4}}{2}\left(1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \cdots\cdots\right)$$

und so fort bis

$$(21) \quad h_n^{1/4} = h^{(4^{n-1})} = \frac{\lambda_n^{1/4}}{2}\left(1 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \cdots\cdots\right).$$

Da wir nun wissen dass die Reihe

$$1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots\cdots$$

für hinreichend kleine $|x|$ sicher convergirt und da durch Vergrösserung von n $|\lambda_n|$ beliebig klein gemacht werden kann, so können wir, auch wenn die Reihe (3) nicht convergiren sollte, doch stets n so gross nehmen, dass die Reihe (21) convergirt, also zur Berechnung von $h^{(4^{n-1})}$, indirect also auch zur Berechnung von h brauchbar wird.

Um aber im gegebenen Fall zu wissen, bis zu welchem n wir gehen müssen, müssten wir doch wieder den Convergenzbezirk der Reihe (3) kennen.

§7. Zur Bestimmung dieses Convergenzbezirks führt nun folgende Betrachtung:

Aus (V) folgt:

$$(1) \quad \left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^{1/4} = \frac{\lambda}{16}\left(1 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 + \dots\right)$$

also

$$(2) \quad \frac{1}{4}\log\frac{\lambda_1}{16} = \log\frac{\lambda}{16} + \lambda\,\mathfrak{P}(\lambda) = \log\frac{\lambda}{16} + \psi(\lambda)$$

Die Potenzreihe $\psi(\lambda)$ hat nur positive Coefficienten und convergirt für $|\lambda| < 1$.

<u>Beweis</u>: Wir bilden die logarithmische Ableitung von:

$$\lambda_1^{1/4} = \frac{1-(1-\lambda)^{1/4}}{1+(1-\lambda)^{1/4}}$$

Es kommt:

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{2(1-\lambda)^{-3/4}d\lambda}{1-(1-\lambda)^{1/2}} = 2\frac{d\lambda}{\lambda}\left[(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}} + (1-\lambda)^{-\frac{1}{4}}\right]$$

wir entwickeln nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\frac{1}{4}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{d\lambda}{\lambda} + (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\lambda + \dots)\,d\lambda.$$

Dabei sind alle ε positiv, da sowohl in der Entwickelung von $(1-\lambda)^{-\frac{3}{4}}$ als in der von $(1-\lambda)^{-1/4}$ nur positive Coefficienten vorkommen.

Also durch Integration:

$$\log \lambda_1^{1/4} = \log \lambda + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2 \lambda^2 + \dots$$

Durch Vergleichung mit (2) folgt:

$$\varepsilon_0 = \log 2 - \log 16 = -\log 8$$

$$\varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2 \lambda^2 + \dots = \psi(\lambda)$$

Also hat in der Tat $\psi(\lambda)$ lauter positive Coeff. und convergiert für $|\lambda| < 1$.

Aus § 6; 17 folgt nun:

$$\frac{1}{4} \log \frac{\lambda_1}{16} = \log \frac{\lambda}{16} + \psi(\lambda)$$

$$\frac{1}{4^2} \log \frac{\lambda_2}{16} = \frac{1}{4} \log \frac{\lambda_1}{16} + \frac{1}{4} \psi(\lambda_1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{4^n} \log \frac{\lambda_n}{16} = \frac{1}{4^{n-1}} \log \frac{\lambda_{n-1}}{16} + \frac{1}{4^{n-1}} \psi(\lambda_{n-1})$$

Durch Addition:

$$\frac{1}{4^n} \log \frac{\lambda_n}{16} = \log \frac{\lambda}{16} + \sum_{\varrho=0}^{n-1} \frac{1}{4^\varrho} \psi(\lambda_\varrho).$$

Nun war:

$$\frac{\lambda_n}{16} = \frac{h_n (1 + h_n^2 + h_n^6 + \dots)^4}{(1 + 2h_n + 2h_n^4 + \dots)^4},$$

also:

$$\log\frac{\lambda_n}{16} = \log h_n + 4\log(1+h_n^2+\dots) - 4\log(1+2h_n+\dots)$$

Nun ist $h_n = h^{(4^n)}$, also

$$\frac{1}{4^n}\log\frac{\lambda_n}{16} = \log h + \frac{1}{4^{n-1}}\left\{\log(1+(h)) - \log(1+(h))\right\}$$

Wächst n über alle Grenzen, so wird $|h_n|$ unendlich klein, also

$$\lim\left(\frac{1}{4^n}\log\frac{\lambda_n}{16}\right) = \log h,$$

also, da auch $\sum\limits_{\rho=0}^{n-1}\frac{1}{4^\rho}\cdot\psi(\lambda_\rho)$ mit wachsendem n sich einer festen Grenze nähert:

$$\log h = \log\frac{\lambda}{16} + \sum_{\rho=0}^{\infty}\psi(\lambda_\rho)\cdot\frac{1}{4^\rho}.$$

λ_ρ lässt sich nach Potenzen von λ entwickeln (convergent für $|\lambda|<1$) und alle Coeff. positiv). Daher lässt sich auch $\psi(\lambda_\rho)$ nach Potenzen von λ entwickeln. Auch hier sind alle Coeff. positiv und die Reihe convergirt für $|\lambda|<1$. Und da $\sum\frac{1}{4^\rho}\psi(\lambda_\rho)$ für $|\lambda|<1$ einen endl. Werth hat, so lässt sich auch $\sum\frac{1}{4^\rho}\psi(\lambda_\rho)$ nach Potenzen von λ entwickeln: die entstehende Reihe convergirt für $|\lambda| < 1$ und hat lauter positive Coefficienten:

$$\log h = \log \frac{\lambda}{16} + \xi_1 \lambda + \xi_2 \lambda^2 + \cdots$$

Weiter folgt:

$$h^m = e^{m \log h} = e^{m \log \frac{\lambda}{16} + m(\xi_1 \lambda + \xi_2 \lambda^2 + \cdots)}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{16}\right)^m \left\{ 1 + \eta_1 \lambda + \eta_2 \lambda^2 + \cdots \right\},$$

convergent für $|\lambda| < 1$ und nur pos. Coeff. Dies gilt auch für $m = \frac{1}{4}$; nun war aber:

$$h^{1/4} = \left(\frac{\lambda}{16}\right)^{1/4} (1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \cdots)$$

Für kleine $|\lambda|$ convergirt diese Reihe und stimmt mit $1 + \eta_1 \lambda + \eta_2 \lambda^2 + \cdots$ überein; beide Reihen sind also identisch. Wir haben also das

Resultat. Die Reihe:

$$h^{1/4} = \frac{\lambda^{1/4}}{2} \left(1 + 2 \frac{\lambda}{2^4} + 15 \frac{\lambda^2}{2^8} + \cdots\right)$$

convergirt für $|\lambda| < 1$ und alle Coefficienten sind positiv.

Die Reihe convergirt aber auch noch für $\lambda = 1$.

Beweis:

1) Die Potenzreihe $\Psi(\lambda)$ convergirt auch noch für $\lambda = 1$; denn es ist

$$\int \frac{(1-\lambda)^{-\rho}}{\lambda}\, d\lambda = \text{Const.} + \log \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-1)}{n!} \cdot \frac{\lambda^n}{n}$$

Für $\lambda = 1$ ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder:

$$\frac{n^2 + (\rho-2)\,n - (\rho-1)}{n^2}$$

Die Reihe convergirt also (Gauss III, pg. 139) für $\lambda = 1$, so lange

$$(\rho - 2) + 1 < 0,$$

d. h., so lange

$$\rho < 1.$$

Diese Bedingung ist in unserm Fall erfüllt ($\rho = \frac{3}{4}$ und $\rho = \frac{1}{4}$), also:

$$\underline{\Psi(1) \text{ convergent.}}$$

2) Für $\lambda = 1$ wird $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$: so wird also:

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{1}{4^\rho} \Psi(\lambda_\rho) = \frac{4}{3}\, \Psi(1)$$

und daher convergirt die Reihe:

$$1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots$$

auch noch für $\lambda = 1$.

Ferner ergibt sich aus:

$$\frac{1}{4} \log \frac{\lambda_1}{16} = \log \frac{\lambda}{16} + \psi(\lambda), \text{ für } \lambda = 1$$

$$\frac{1}{4} \log \frac{1}{16} = \log \frac{1}{16} + \psi(1).$$

also

$$\underline{\psi(1) = -\frac{3}{4} \log \frac{1}{16}}$$

Endlich folgt aus (p47) dass für $\lambda = 1$

$$\log h = \log \frac{1}{16} + \frac{4}{3} \psi(1),$$

also

$$\log h = 0$$

$$\underline{h = 1}$$

Es ist also:

$$\frac{1}{16} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \beta_\varrho = 1 \qquad \{\beta_0 = 1\}$$

und ebenso, da auch $h^{1/4} = 1$ für $\lambda = 1$

$$(\text{VI}) \qquad \frac{1}{2} \sum \alpha_\varrho = 1$$

Daraus ergibt sich eine Bestimmung

des Fehlers, den wir begehen, wenn wir bei der Berechnung von $h^{1/4}$ mit dem $(n+1)$ ten Gliede abbrechen:

$$h^{1/4} = \frac{\lambda^{1/4}}{2}(1 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n) + \sum_{\rho=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^{1/4}}{2} \cdot \alpha_\rho \lambda^\rho$$

Nun ist:

$$|r_n| < \left| \sum \frac{\lambda^{1/4}}{2} \alpha_\rho \lambda^\rho \right| < \frac{|\lambda^{1/4}|}{2} |\lambda|^{n+1} \sum_{n+1}^{\infty} \alpha_\rho .$$

Nun ist aber

$$\sum_{n+1}^{\infty} \alpha_\rho = 2 - (1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$$

$$= 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

also ist der vernachlässigte Rest:

$$|r_n| < \frac{|\lambda|^{1/4} |\lambda|^{n+1}}{2} \left\{ 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \right\}$$

Ganz in derselben Weise folgt, dass bei der Reihe:

$$h = \frac{\lambda_1^{1/4}}{2} (1 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \ldots)$$

der vernachlässigte Rest:

$$|r_n| < \frac{|\lambda_1^{1/4}| \, |\lambda|^{n+1}}{2} \left\{ 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \right\}.$$

Wir haben also (wenn wir $\lambda_1^{1/4} = l$

setzen) das folgende

Resultat: Um die Perioden der durch die Diff. gl.:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = S$$

definirten Function $\wp u$ zu bestimmen, wählen wir die Reihenfolge der drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Gleichung $S = 0$, so dass:

$$|\lambda| = \left|\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right| < 1.$$

Alsdann definiren wir $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$ und $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, so dass der reelle Teil von

$$\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}$$

1) positiv und 2) seinem absoluten Betrage nach grösser als der imag. Teil wird. Mit den so definirten 4ten Wurzeln bilden wir den Ausdruck:

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}.$$

Dann hat die Constante $h = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}}$ den folgenden Wert:

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

Die Reihe convergirt für $|\lambda| \leqq 1$, und der Fehler, den man begeht, wenn man mit dem $(n+1)$ten Glied abbricht, ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als:

$$\text{(VII)} \quad |r_n| < \frac{|l|^{4n+5}}{2} \left\{ 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \right\}$$

Setzt man dann ferner:

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{e_2 - e_3}} \left(2h^{1/4} + 2h^{9/4} + \cdots \right)^2$$

(wobei das Vorzeichen der Wurzel und das von $h^{1/2}$ beliebig), und

$$\omega' = \frac{\omega}{\pi i} \log h$$

(wobei irgend einer der ∞-vielen Werte von $\log h$ genommen werden darf), dann sind 2ω, $2\omega'$ ein Paar Primitivperioden der Function $\wp(u \mid g_2, g_3)$.

§ 8. Hiermit ist nun zwar die Aufgabe, bei gegebenen Invarianten g_2, g_3 ein Paar Primitivperioden der Function

$\wp(u|g_2, g_3)$ zu bestimmen, vollständig und in vollster Allgemeinheit gelöst.

Allein für die Anwendungen ist es zweckmässig, sich von zwei Beschränkungen zu befreien, an die das bisherige Verfahren geknüpft war; 1) die Wahl der Reihenfolge von e_1, e_2, e_3, und 2) die Bestimmung der 4ten Wurzeln.

Wir hatten die Reihenfolge der e so gewählt, dass $|\lambda| < 1$. Bezeichnen wir nun die nach dem bisherigen Verfahren bestimmten Perioden mit $2\omega_0, 2\omega_0'$; die dabei auftretenden λ und h, τ mit λ_0, h_0, τ. Ist dann $2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}'$ irgend ein Paar aequivalenter Perioden und setzen wir:

$$h = e^{\pi i \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}}$$

(1) $$e_\alpha = \wp(\tilde{\omega}) \;; \quad e_\beta = \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') \;; \quad e_\gamma = \wp(\tilde{\omega}')$$

$$\lambda = \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\gamma};$$

dann ist wieder:

(2) $$\lambda = \frac{16h(1 + h^2 + h^6 + \text{---})^4}{(1 + 2h + 2h^4 + \text{----})^4} = \frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}.$$

Wie wir also auch die Reihenfolge der e wählen, immer giebt es Werte von h, deren absoluter Betrag < 1 und die der Gleichung (2) genügen.

Angenommen, es sei ein solcher Wert von h gefunden; bestimmen wir dann nach § 5, (2) und (3) zwei Grössen ω, ω', so sind dies, wie dort gezeigt, ein Paar halbe Primitivperioden. Dieser Schluss bleibt somit bestehen auch wenn $|\lambda| > 1$. Dagegen können wir jetzt nicht mehr die Reihe

$$h = \frac{\lambda^{1/4}}{2}(1 + \alpha_1 \lambda + \cdots\cdots)$$

anwenden, da dieselbe nur für $|\lambda| < 1$ convergirt. Nun lässt sich aber die 4te Wurzel $\sqrt[4]{1-\lambda}$ stets so definiren, dass $|\lambda_1| < 1$ wird. Denn, ist $p+qi$ einer von den beiden Werten von $\sqrt[4]{1-\lambda}$ deren reelle Coord. positiv ist, so ist:

$$|\lambda_1^{1/4}| = \frac{(1-p)^2+q^2}{(1+p)^2+q^2} < 1,$$

also auch $|\lambda_1| < 1$

Ist also auch $|\lambda| > 1$, so wird doch bei passender Wahl von $\sqrt[4]{1-\lambda}$ die Reihe:

$$(3) \qquad h = \frac{l}{2}\,(1+\alpha_1 l^4 + \alpha_2 l^8 + \dots)$$

convergiren. Der so bestimmte Wert von h ist seinem abs. Betrage nach <1, und er genügt auch der Gleichung:

$$(3_a) \quad \lambda = \frac{16h(1+h^2+\dots)^4}{(1+2h+\dots)^4} = \frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}$$

Denn die Reihe (1) ist die Umkehrung von

$$(4) \quad l = \frac{2h+2h^9+\dots}{1+2h^4+2h^{16}+\dots} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)} = \frac{1-(1-\lambda)^{1/4}}{1+(1-\lambda)^{1/4}}$$

Hieraus folgt:

$$(5) \quad (1-\lambda)^{1/4} = \frac{\vartheta_3(0|4\tau)-\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)+\vartheta_2(0|4\tau)} = \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}$$

also:

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\vartheta_3^4(0|\tau)-\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)} = \frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}.$$

Der ~~duach~~ durch die Gl. (3) gelieferte Wert von h genügt also in der Tat der Gl.

(3a); hieraus erhalten wir dann nach §5, (2) und (3) ein Paar Primitivperioden.

Somit haben wir uns von der Beschränkung $|\lambda| < 1$ befreit und die $\sqrt[4]{1-\lambda}$ ist nur noch der einen Bedingung unterworfen:

$$(7) \qquad \Re\left(\sqrt[4]{1-\lambda}\right) > 0$$

Wir haben bisher ω berechnet mit Hilfe der Reihe

$$(8) \quad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt{e_2-e_3}}\left(2h^{1/4} + 2h^{9/4} + \cdots\right)^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{e_2-e_3}}\,\vartheta_2^2(0|\tau).$$

Es ist zweckmässiger statt dessen die stärker convergirende Reihe:

$$(9) \quad \omega = \frac{2\pi}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}\right)^2}\left(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots\right) = \frac{2\pi\,\vartheta_3^2(0|4\tau)}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}\right)^2}$$

anzuwenden.

Es ist zu zeigen, dass die so definirte Grösse ω ebenfalls eine halbe Periode ist. Es folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{e_1-e_3}} \cdot \frac{\vartheta_3^2(0|4\tau)}{\left(1+\sqrt[4]{1-\lambda}\right)^2}.$$

Wir nehmen nun an, dass die $\sqrt[4]{1-\lambda}$ ebenso definirt wird wie bei der Berechnung von h; dann ist:

$$\sqrt[4]{1-\lambda} = \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)};$$

also

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{e_1-e_3}} \frac{\vartheta_3^2(0|\tau)}{\left[\vartheta_0(0|\tau)+\vartheta_3(0|\tau)\right]^2} \vartheta_3^2(0|4\tau)$$

Nun ist aber:

$$\vartheta_0(0|\tau) + \vartheta_3(0|\tau) = 2\vartheta_3(0|4\tau)$$

also ist

$$(10) \qquad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-e_3}} \vartheta_3^2(0|\tau)$$

Nehmen wir dazu Gl (6);

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)},$$

so folgt:

$$(11) \qquad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt{e_2-e_3}} \vartheta_2^2(0|\tau).$$

Die durch die Gleichung (9) definirte Grösse ω ist also identisch mit der durch Gl. (8) definirten, also liefert Gl. (9) eine halbe Periode.

Nach alle Dem haben wir folgendes <u>Resultat</u>: Um ein Paar Primitivperioden der Function $\wp(u|g_2, g_3)$ zu erhalten, bezeichnen wir die 3 Wurzeln der Gleichung $S = 0$ in irgend einer Reihenfolge mit e_1, e_2, e_3; sodann wählen wir die 4ten Wurzeln $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$ und $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$ so dass:

$$\text{(VIII)} \qquad R\left(\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}}\right) > 0.$$

Alsdann ist die Grösse

$$\text{(IX)} \qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}$$

sicher < 1 und die Reihe

$$\text{(X)} \qquad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

convergirt.

Setzt man dann:

$$\text{(XI)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\right)^2} \left\{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots\right\}^2$$

$$\text{(XII)} \qquad \omega' = \frac{\omega}{\pi i} \log \text{nat}\, h,$$

wo für den log irgend einer seiner ∞-vielen Werte zu nehmen ist, so ist 2ω, $2\omega'$ ein Paar Primitivperioden von $\wp(u \mid g_2\, g_3)$.

III. Kapitel.

Bestimmung von $\underline{u}$ bei gegebenem $\wp\underline{u}$.

§9. Die Function $\wp u$ nimmt jeden vorgeschriebenen Wert s_0 an zwei incongruenten Stellen $+u_0$ und $-u_0$ an; an beiden Stellen ist $|\wp' u|$ gleich, aber das Zeichen von $\wp' u$ ist entgegengesetzt. Ist daher der Wert s_0 von s und das Vorzeichen von $\wp' u$ bekannt, so ist u bis auf eine Periode $2\bar{\omega}$ bestimmt.

Um nun u als Function von s zu bestimmen, gehen wir aus von der Diffgl.:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S.$$

Daraus folgt:

$$du = \pm \frac{ds}{\sqrt{S}} = \pm \left(1 - \frac{g_2}{4} t^4 - \frac{g_3}{4} t^6\right)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

wenn wir $s = t^{-2}$ setzen; weiter durch Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz:

$$du = \pm \left(1 + t^2 \mathfrak{P}(t^2)\right) dt,$$

sicher convergent für kleine $|t|$;
daraus:
$$u = b \pm t\, \mathfrak{P}(t^2).$$
$b = 0$, da, für $u = 0$, $s = \infty$, also $t = 0$.
Indem wir wieder s einführen:
$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{s}}\, \mathfrak{P}(s^{-1}).$$

Da diese Reihe nur für hinreichend grosse $|s|$ convergirt, und auch dann nur schwach, so ist es zweckmässiger statt $\wp u$ die Function $\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}$ einzuführen.

Setzen wir: $\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = t$, so ist

$$(1) \qquad t^2 = \frac{s - e_1}{s - e_2} \qquad\qquad t = \pm \frac{\sqrt{s - e_1}}{\sqrt{s - e_2}}$$ TM I p190

Wenn s gegeben ist, so ist t nur bis aufs Vorzeichen bestimmt, was darin seinen Grund hat, dass t die Perioden 4ω, $2\omega'$ hat und dass
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u + 2\omega) = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u)$$
Ferner ist:
$$(2) \qquad 2t\,\frac{dt}{du} = \frac{e_1 - e_2}{(s - e_2)^2} \cdot \frac{ds}{du}$$

Auch durch Angabe des Zeichens von $\frac{ds}{du}$ wird das Zeichen von t nicht bestimmt, da $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(-u) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(+u)$. Hat man aber das Zeichen von t willkürlich fixirt, so ist dadurch nach Gl. (2) auch das Zeichen von $\frac{dt}{du}$ mitbestimmt.

Statt also direct aus dem gegebenen Wert von s und dem Vorzeichen von $\frac{ds}{du}$ den Wert von u zu bestimmen, berechnen wir aus (1) u. (2) t u. $\frac{dt}{du}$, wobei wir über das Vorzeichen von t willkürlich verfügen; und nun stellen wir uns die Aufgabe, diej. Werte von u zu finden, für die $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = t$ und $\frac{dt}{du}$ das vorgeschriebene Zeichen hat.

Da $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u)$ eine elliptische Function 2ten Grades von u mit den Perioden 4ω, $2\omega'$ ist, so ist hierdurch u bis auf eine additive Periode

$$4\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

bestimmt. Nach Art. 25 genügt t der Diffgl.:

$$(3)\quad \frac{dt}{du} = \pm\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2},$$

wo
$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u)$ nimmt jeden Wert an 2 incongruenten Stellen an; an der einen ist das obere, an der andern das untere Zeichen zu wählen. Da bei unserer Aufgabe das Vorzeichen von $\frac{dt}{du}$ vorgeschrieben ist, so kann über die Wahl kein Zweifel sein. Wir nehmen an, das gegebene Zeichen von $\frac{dt}{du}$ sei derart, dass in (3) das Zeichen $-$ zu nehmen ist; dann folgt:

$$(4)\quad du = -\frac{dt}{\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Wir setzen nun voraus: $|k|<1$, u. nehmen zunächst $|t|$ so klein, dass auch $|kt|<1$. Dann ist:

$$(5)\quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\, k^{2n}t^{2n}$$

also

$$(6)\quad \sqrt{e_1-e_3}\,du = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\, k^{2n}\,\frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dies lässt sich auf die Form bringen:

(7) $\sqrt{e_1 - e_3}\, du = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)\, dt,$

wo $\varphi_n(t)$ eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe ist, die für $|t| < 1$ convergirt; da $\sum c_n \varphi_n(t)$ im Bereich $|t| \leqq 1 - \varepsilon$ (ε beliebig klein) gleichmässig convergent, so dürfen wir gliedweise integriren. Also:

(8) $\sqrt{e_1 - e_3} \cdot u = C - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(t)$

wo $\psi_n'(t) = \varphi_n(t)$ und $\psi_n(0) = 0$.

Die Potenzreihe $\psi_n(t)$ convergirt für $|t| < 1$ und $\sum c_n \psi_n(t)$ ist gleichmässig convergent in dem Bezirk $|t| \leqq 1 - \varepsilon$; stellt also in diesem Bezirk eine reguläre analytische Function dar.

Die Reihe $\psi_n(t)$ convergirt auch noch für $t = 1$, da sie stärker convergirt als $\psi_0(t)$ und diese Reihe convergirt auch noch für $t = 1$, wie bekannt. Ueberdies ist:

$$|\psi_n(t)| < |\psi_0(1)|$$

Da $\sum c_n$ endlich, so folgt hieraus, dass auch noch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(1)$$

convergirt und einen endlichen Wert besitzt. Da $\sum c_n \psi_n(t)$ bis in beliebige Nähe von $t = 1$ stetig ist, so nähert sich $\sum c_n \psi_n(t)$ stetig dem festen Wert $\sum c_n \psi_n(1)$ wenn t sich dem Wert 1 nähert. Wir dürfen also zur Bestimmung der Integrationsconstante in (8) für t den Wert 1 setzen; alsdann wird $u = 0$ und wir erhalten:

$$\sqrt{e_1 - e_3}\; u = -\sum c_n \left(\psi_n(t) - \psi_n(1)\right)$$

Nun ist aber:

$$\psi_n(t) - \psi_n(1) = \int_1^t \frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = J_n$$

wenn die Integration auf directem Wege ausgeführt wird.

Nun ist:

$$J_n = -\frac{\sqrt{1-t^2}\; t^{2n-1}}{2n} + \frac{2n-1}{2n} J_{n-1}$$

Mit Hilfe dieser Recursionsformel erhält man:

$$J_n = \frac{1.3.5 \ldots\ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots\ldots 2n} \left\{ \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}\, G_n(t) \right\}$$

wobei:

$$G_n(t) = t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{2.4}{3.5} t^5 + \ldots + \frac{2.4 \ldots 2n-2}{3.5 \ldots 2n-1} t^{2n-1}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{2.4 \ldots\ldots (2p-2)}{3.5 \ldots\ldots (2p-1)} t^{2p-1}$$

$$J_0 = \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{i} \log\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)$$

Welcher von den ∞ vielen Werten des log. zu nehmen ist, sieht man durch Vergleichung mit dem auf anderem Wege für J_0 erhaltenen Wert $\varphi_0(t) - \varphi_0(1)$. Setzen wir daher zur Abkürzung:

(I) $$\mathfrak{K} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n}$$

und

$$\mathfrak{G}(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 G_1(t) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 G_2(t) + \ldots$$

Dann ist:

$$\sqrt{e_1 - e_3}\, u = \frac{\mathfrak{K}}{i} \log\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right) + \mathfrak{G}(t)\sqrt{1-t^2}.$$

Die Reihen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}(t)$ sind convergent für $|k| < 1$, $|kt| < 1$.

Aus der gleichmässigen Convergenz der Reihe $\sum c_n \varphi_n(t)$ folgt die gleichmässige Convergenz der Reihe $G(t)$. Wir dürfen also $G(t)$ nach Potenzen von t ordnen. Führt man dabei folgende Bezeichnungen ein:

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} \breve{R}_0 &= 1 \\ \breve{R}_1 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 \\ \breve{R}_2 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 \kappa^4 \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so erhält man:

$$(\mathrm{III})\qquad G(t) = t(\breve{R} - \breve{R}_0) + \frac{2}{3} t^3 (\breve{R} - \breve{R}_1) + \frac{2.4}{3.5} t^5 (\breve{R} - \breve{R}_2) + \frac{2.4.6}{3.5.7} t^7 (\breve{R} - \breve{R}_3) + \cdots$$

Wir erhalten also für u:

$$(\mathrm{IV})\qquad u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \frac{\breve{R}}{i} \log \operatorname{nat} (t + i\sqrt{1-t^2}) + \sqrt{1-t^2} \left[(\breve{R} - \breve{R}_0) t + \frac{2}{3} (\breve{R} - \breve{R}_1) t^3 + \frac{2.4}{3.5} (\breve{R} - \breve{R}_2) t^5 + \cdots \right] \right\}$$

Diese Darstellung von u ist deshalb für numerische Berechnungen sehr geeignet, weil man die Grössen $\breve{R}_0, \breve{R}_1, \breve{R}_1 \ldots$ schon bei der Berechnung von $\breve{R}$ mit erhält, weil sie sich aus den ersten Gliedern von $\breve{R}$ zusammensetzen.

§ 10. Die Anwendbarkeit dieser Reihe ist aber an die Beschränkungen $|k| < 1$ u. $|kt| < 1$ geknüpft. Von diesen Beschränkungen wollen wir uns jetzt befreien.

Nach Art. 35 (5) ist

$$(1) \qquad (1-\lambda)^{1/4} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} = \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}$$

Dabei ist die Wahl der 4ten Wurzeln ganz willkürlich. Angenommen bei Zugrundelegung eines bestimmten Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ nehme die linke Seite den Wert r an; geht man dann zu dem aequivalenten Periodenpaar

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega - 2\omega' \\ \tilde{\omega}' &= \omega' \end{aligned}\right\} \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{1-2\tau}$$

über, so folgt aus Art. 37, 3

$$\frac{\vartheta_0(0|\tilde{\tau})}{\vartheta_3(0|\tilde{\tau})} = i\,\frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = i r$$

Wählt man also die 4te Wurzel $(1-\lambda)^{1/4}$ willkürlich, so gibt es stets solche Primitivperioden für welche die Gleichung (1) richtig ist.

Nun ist wieder nach Art. 37, 2.

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} \sigma_2 u &= \frac{\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_0(v|\tau)} \\ \sigma_3 u &= \frac{\vartheta_0(v|\tau)}{\vartheta_0(0|\tau)} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} v &= \frac{u}{2\omega} \\ \tau &= \frac{\omega'}{\omega} \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u - \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u + \sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u} = \frac{\vartheta_3(v|\tau)-\vartheta_0(v|\tau)}{\vartheta_3(v|\tau)+\vartheta_0(v|\tau)} =$$

$$= \frac{\vartheta_2(2v|4\tau)}{\vartheta_3(2v|4\tau)} = \frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)} \cdot \frac{\sigma_1(2u|4\tau)}{\sigma_2(2u|4\tau)} =$$

$$= \frac{\vartheta_3(0|\tau)-\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)+\vartheta_0(0|\tau)} \cdot \frac{\sigma_1(2u|4\tau)}{\sigma_2(2u|4\tau)} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}} \cdot \frac{\sigma_1(2u|4\tau)}{\sigma_2(2u|4\tau)} = l \cdot \frac{\sigma_1(2u|4\tau)}{\sigma_2(2u|4\tau)}.$$

Wir haben also folgende Beziehung:

$$(\mathrm{V})\quad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sigma_2 u - \sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sigma_3 u}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sigma_2 u + \sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sigma_3 u} = l \cdot \frac{\sigma_1(2u|4\tau)}{\sigma_2(2u|4\tau)}$$

gültig für beliebige Wahl der Wurzeln.

Wir wählen jetzt die 4ten Wurzeln so, dass $\mathfrak{R}\left(\dfrac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\right) > 0.$

Dann ist nach § 8, IX sicher

$$|l| < 1$$

Ist der Wert von $\wp u = s$ gegeben und das Vorzeichen von $\wp' u$, so ist dadurch der Wert von $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$ bis aufs Vorzeichen bestimmt:

$$\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = \pm \frac{\sqrt{s - e_3}}{\sqrt{s - e_2}}.$$

Wegen der Relation:

$$\frac{\sigma_3(u + 2\omega')}{\sigma_2(u + 2\omega')} = - \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}$$

gibt es unter den congruenten Werten von u für die $\wp u = s$ und $\wp'$ vorgeschriebenes Vorzeichen hat, immer sowohl solche, für die das obere, als auch solche, für die das untere Zeichen gilt. Wir können also über das Zeichen willkürlich verfügen: dadurch ist dann das Zeichen von $\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)$ mitbestimmt.

Wir wählen nun das Vorzeichen so dass

$$\mathcal{R}\left(\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\cdot\frac{\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{s-e_2}}\right) \gtreqq 0$$

Alsdann ist:

$$\left|\frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sigma_2-\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sigma_3}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\cdot\sigma_2+\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sigma_3}\right| \lesseqq 1$$

Durch diese Festsetzung ist der Wert von

$$\frac{\sigma_1(2u\,|\,4\tau)}{\sigma_2(2u\,|\,4\tau)} = \xi$$

bestimmt. Wir setzen zur Abkürzung

$$2u = w$$

und stellen uns jetzt die Aufgabe, einen von den Werten von w zu finden für die

$$\frac{\sigma_1(w\,|\,4\tau)}{\sigma_2(w\,|\,4\tau)} = \xi.$$

Diese Aufgabe ist die in § 9 gelöste. Statt der Primitivperioden $2\omega, 2\omega'$ haben wir hier $2\omega, 4\omega'$. Bezeichnen wir die zu diesen Perioden gehörigen e und k mit E und K, so genügt ξ der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{dw}\right)^2 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3)(1-\xi^2)(1-K^2\xi^2)$$

und hieraus folgt nach § 9

$$\sqrt{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3}\, w = \frac{\overline{\mathfrak{K}}}{i} \log\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) + \overline{\mathfrak{G}}(\xi)\sqrt{1-\xi^2}.$$

Dabei ist in $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ überall K an Stelle von k zu setzen. Nun ist:

$$K^2 = \left[\frac{\vartheta_2(0|4\tau)}{\vartheta_3(0|4\tau)}\right]^4 = \left[\frac{\vartheta_3(0|\tau) - \vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau) + \vartheta_0(0|\tau)}\right]^4 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}\right)^4$$

also: $\qquad K^2 = l^4.$

Hieraus folgt zunächst die Convergenz der Reihe ( ); denn nach unseren Festsetzungen ist $|l| < 1$; also $|K^2| < 1$; ferner $|l\xi| \leqq 1$, also $|l^2\xi| < 1$, d. h. $|K\xi| < 1$, und dies waren die beiden Convergenzbedingungen.

Ferner ist (Art. 35, 3)

$$\sqrt{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0|4\tau);$$

Andererseits, (Art. 35, 8)

$$\frac{\pi}{2w}\,\vartheta_3^2(0\,|\,4\tau) = \left(\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_3}}{2}\right)^2,$$

also
$$\sqrt{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3} = \left(\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_3}}{2}\right)^2$$

Diese Grösse bezeichnen wir zur Abkürzung mit m^2:

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_3}}{2} = m$$

Setzt man schliesslich noch in ( ) für w den Wert $2u$ ein, und führt für $\sqrt{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_3}$ und K die gefundenen Werte ein, und setzt:

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4$$

$$(\underline{\mathrm{VI}})\quad L_2 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 l^8$$

- - - - - -

$$L = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 l^8 + \dots \text{ ad inf.}$$

so hat man folgendes

<u>Resultat</u>. Um einen der Werte von u zu bestimmen für die $\wp u = s$ wird, wähle man $\sqrt[4]{e_1-e_2}$ willkührlich, sodann

$\sqrt[4]{e_1-e_3}$ so dass

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\right) > 0.$$

Weiter fixire man man $\sqrt{s-e_2}$ willkürlich und wähle dann den Wert von $\sqrt{s-e_3}$ so dass

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\;\frac{\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{s-e_2}}\right) \overline{\overline{>}}\; 0.$$

Alsdann sind die absoluten Beträge der beiden Grössen:

$$(\underline{\mathrm{VII}})\qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}}$$

und

$$(\underline{\mathrm{VIII}})\qquad l\xi = \frac{\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{s-e_2}-\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{s-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt{s-e_3}}$$

kleiner als 1, und die Gleichung:

$$(\underline{\mathrm{IX}})\; u = \frac{2}{(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_3})^2}\left\{\frac{\mathfrak{L}}{i}\log\mathrm{nat}\left(\xi+i\sqrt{1-\xi^2}\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{1-\xi^2}\left(\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_0}{l}\,l\xi+\frac{2}{3}\,\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_1}{l^3}(l\xi)^3+\frac{2.4}{3.5}\,\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_2}{l^5}(l\xi)^5+\dots\right.\right.$$

gibt einen Wert von u für welchen die Gleichung $\wp u = s$ erfüllt ist.

Dabei war nach §9 ein ganz bestimmter Wert des log zu nehmen; diese Beschränkung können wir jetzt fallen lassen. Denn wenn wir das durch die Reihe ( ) dargestellte Functionenelement der Function u von ξ über seinen urspr. Bereich $|l^2\xi| < 1$ fortsetzen, so werden wir immer noch Werte von u erhalten, die der Gleichung $\wp u = s$ genügen. Bei passender Wahl des Weges, auf dem man fortsetzt, kann man erreichen dass ξ, $\sqrt{1-\xi^2}$ und die Reihe $G(\xi)$ ihren Anfangswert annehmen, während der log um $2\pi i$ wächst (Beweis?). Alsdann wächst u um

$$\frac{L\pi}{m^2}$$

Da ξ und auch $\frac{du}{d\xi}$ ihren Anfangswert annehmen, so folgt, dass $\frac{L\pi}{m^2}$ eine Periode von $\wp u$ sein muss, also

$$\frac{L\pi}{m^2} = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.$$

Nun ist (Art. 35, 8)

$$\frac{2\omega}{\pi} = \frac{(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \dots)^2}{m^2} = \frac{H}{m^2}$$

$$\frac{\omega'\pi i}{\omega} = \log h.$$

also:

$$\omega = \frac{\pi H}{2m^2}, \quad \omega' = \frac{H \cdot \log h}{2im^2},$$

somit

$$\frac{L\pi}{m^2} = \mu \frac{\pi}{m^2} H + \mu' \frac{H}{m^2} \log h.$$

Sowohl L als h lassen sich nach Potenzen von l entwickeln:

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + \cdots$$

somit auch H. Durch Vergleichung der für beide Seiten von ( ) sich ergebenden Entwickelungen folgt:

$$\mu' = 0, \quad \mu = 1,$$

also

$$\frac{L\pi}{m^2} = 2\omega$$

Wir erhalten hierdurch einen neuen Ausdruck für die Periode 2ω:

$$(\mathrm{X}) \quad 2\omega = \frac{\pi}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 l^{4n}.$$

Führt man die Fortsetzung der Function u von ξ in anderer Weise aus, so wechselt $\sqrt{1-\xi^2}$ sein Zeichen, während ξ und $G(\xi)$ ihren Anfangswert annehmen. Wegen:

$$(\xi + i\sqrt{1-\xi^2})(\xi - i\sqrt{1-\xi^2}) = 1$$

wechselt dabei u nur sein Vorzeichen. Man erhält dann den 2ten incongruenten Wert von u für welchen $\wp u = s$; $\wp' u$ hat für denselben entgegengesetztes Zeichen wie für den ursprünglichen.

Um ein Kriterium dafür zu finden, welchen der beiden Werte von $\sqrt{1-\xi^2}$ man bei gegebenem Vorzeichen von $\wp' u$ zu nehmen hat, gehen wir auf die zwischen s und ξ bestehende Gleichung ( ) zurück, aus welcher unmittelbar folgt:

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}} \frac{\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{s-e_2}} = \frac{1-l\xi}{1+l\xi}$$

Andererseits folgt aus der Definitionsgleichung für l:

$$\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}} = \frac{1-l}{1+l}.$$

Daher ist:

$$\frac{s-e_3}{s-e_2} = \left(\frac{1+l}{1-l} \cdot \frac{1-l\xi}{1+l\xi}\right)^2.$$

Durch Auflösen nach s ergibt sich für s eine rationale Function 2ten Grades von ζ. Wir wollen die drei Differenzen $s-e_3$, $s-e_2$, $s-e_1$ durch ζ ausdrücken. Dazu suchen wir die Werte von ζ für welche s die Werte e_3, e_2, e_1, ∞ annimmt.

s wird $= e_3$ für $\zeta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{l}$

s " $= e_2$ " $\zeta_1 = \zeta_2 = -\frac{1}{l}$

s " $= \infty$ " $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \frac{1}{l^2}$

s " $= e_1$ " $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = -\frac{1}{l^2}$.

$s-e_3$, $s-e_2$ und $s-e_1$ sind ebenfalls rationale Functionen 2ten Grades von ζ; da wir jetzt ihre 0= und ∞-Pkte. kennen, so können wir sie bis auf Constante Factoren angeben:

$$s - e_3 = \frac{C_3 (1 - l\zeta)^2}{(1-\zeta)(1-l^2\zeta)}$$

$$s - e_2 = \frac{C_2 (1 + l\zeta)^2}{(1-\zeta)(1-l^2\zeta)}$$

$$s - e_1 = \frac{b_1 (1+\xi)(1+l^2\xi)}{(1-\xi)(1-l^2\xi)}$$

Die Constanten ergeben sich wenn man dem ξ die speciellen Werte: $-\frac{1}{l}$ resp. $+\frac{1}{l}$ gibt.

$$b_3 = \frac{(e_2-e_3)(1+l)^2}{4l} = \frac{(e_2-e_3)(m+m')^2}{4mm'}$$

$$b_2 = \frac{(e_2-e_3)(1-l)^2}{4l} = \frac{(e_2-e_3)(m-m')^2}{4mm'}$$

$$b_3 = \frac{(e_1-e_3)(1-l)^2}{(1+l)^2} = \frac{(e_1-e_3)(m-m')^2}{(m+m')^2}$$

wobei:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}}{2} \\ m' &= \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad l = \frac{m'}{m}$$

Aus Gl. ( ) folgt, dass:

$$\frac{d\xi}{du} = -2m^2 \sqrt{1-l^4\xi^2}\,\sqrt{1-\xi^2}$$

wo $\sqrt{1-\xi^2}$ einen der beiden Wurzelwerte bedeutet; andererseits:

$$\frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$$

wo wieder $\sqrt{S}$ einen der beiden Wurzelwerte bezeichnet. Daraus folgt:

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{\sqrt{S}}{2m^2\sqrt{1-l^4\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Andererseits können wir aber $\frac{ds}{d\xi}$ aus einer der Gl. ( ) berechnen. Wir zerlegen dazu $s-e_3$ in Partialbrüche:

$$s-e_3 = \frac{A}{1-\xi} + \frac{B}{1-l^2\xi} + C$$

so ergibt sich:

$$A = -B = \frac{e_3(1-l)}{1+l},$$

daraus:

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{(e_2-e_3)(1-l^2)^2}{4l} \cdot \frac{1-l^2\xi^2}{(1-\xi)^2(1-l^2\xi)^2},$$

oder, da

$$(s-e_2)(s-e_3) = \frac{(e_2-e_3)^2(1-l^2)^2}{16\,l^2} \cdot \frac{(1-l^4\xi^2)^2}{(1-\xi)^2(1-l^2\xi)^2},$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{4l(s-e_2)(s-e_3)}{(e_2-e_3)(1-l^2\xi^2)}.$$

Durch Vergleichung beider Werte von $\frac{ds}{d\xi}$ folgt:

$$(\text{XI}) \quad \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1-l^2\xi^2}{\sqrt{1-l^4\xi^2}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{8mm'} \cdot \frac{e_2-e_3}{(s-e_2)(s-e_3)}.$$

Da das Vorzeichen von $\frac{ds}{du}$ gegeben ist, so ist auch das von $\sqrt{S}$ gegeben; die Gleichung XI lehrt dann, welchen der beiden Wurzelwerte man in der Formel:

$$u = \frac{1}{2m^2}\left\{\frac{L}{i}\log\operatorname{nat}\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1-\xi^2}\left(\frac{L-L_0}{l}(l\xi) + \frac{2}{3}\,\frac{L-L_1}{l^3}(l\xi)^3 + \dots\right)\right\}$$

für $\sqrt{1-\xi^2}$ zu wählen hat.

Hiermit ist die Aufgabe: bei gegebenem Wert von $\wp u$ und gegebenem Vorzeichen von $\wp' u$ den Wert von u zu bestimmen, vollständig gelöst.

IV. Kapitel.
Specialfall reeller g_2, g_3.

Für die Anwendungen ist der Specialfall von Wichtigkeit, dass g_2 und g_3 reell sind. Alsdann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) > 0$;

dann sind alle drei e reell; wir wahlen ihre Reihenfolge so, dass

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

2) $G < 0$; dann ist eine Wurzel reell, die beiden andern conjugirt imaginär; wir bezeichnen die reelle Wurzel mit e_2.

Wir werden jetzt für diesen Specialfall näher untersuchen; die Bestimmung der Perioden, den Verlauf von $\wp u$, und die Bestimmung von u bei gegebenem $\wp u$.

A. Periodenbestimmung.

§ 11. Nach § 8 ist die Reihenfolge, in welcher wir die 3 Wurzeln der Gl. $S = 0$ mit e_1, e_2, e_3 bezeichnen ganz willkürlich. Da wir später unter e_1, e_2, e_3 diese Wurzeln in ganz best. Reihenfolge verstehen werden, so wollen wir zur Unterscheidung die 3 Wurzeln bei willkürlicher Reihenfolge mit $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ bezeichnen.

Die Resultate des § 8 nehmen dann folgende Gestalt an:

Man definire die $\sqrt[4]{}$, so dass

$$\mathcal{R}\left(\frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}\right) = M > 0;$$

aus der so definirten Grössen $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}$ und $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}$ bilde man die Grössen:

$$\bar{l} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}$$

$$\bar{m} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{2}$$

$$\bar{h} = \frac{\bar{l}}{2} + 2\left(\frac{\bar{l}}{2}\right)^5 + \cdots$$

Dann sind:

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2\bar{m}^2}\left\{1 + 2\bar{h}^4 + 2\bar{h}^{16} + \cdots\right\}$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}}{\pi i} \log \text{nat}\, \bar{h}$$

ein Paar halber Primitivperioden von $\wp(u \mid g_2, g_3)$, und es ist:

$$e_\alpha = \wp\tilde{\omega}\,; \quad e_\beta = \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')\,; \quad e_\gamma = \wp(\tilde{\omega}')$$

Über die Reihenfolge der e und über die innerhalb der Beschränkung $M > 0$ willkürliche Wahl der $\sqrt[4]{}$, soll nun so verfügt werden, dass die Resultate des § 8 in reeller Form erscheinen und dass die auftretenden Reihen möglichst rasch convergiren.

Wir unterscheiden dabei die beiden oben angeführten Hauptfälle.

I. Hauptfall: Alle e reell.

Wir setzen alsdann fest:

$$e_1 > e_2 > e_3$$

1) $e_2 - e_3 < e_1 - e_2$, d.h. $e_2 < 0$

Wir wählen:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3.$$

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_1 - e_3} \; ; \; \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \sqrt[4]{e_1 - e_2}$$

wo $\sqrt[4]{}$ den reellen pos. Wert bedeutet; dabei ist $M > 0$.

$$\bar{l} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = l \text{ (reell u. pos.)}$$

$$\bar{m} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{2} = m \text{ (reell u. pos.)}$$

$$\bar{h} = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + \dots = h \text{ (r. u. p) u.} < 0.0432$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \dots\right\}^2 = \omega_1 \text{ (r. u. p.)}$$

$$\frac{\tilde{\omega}'}{i} = \frac{\omega}{\pi} \log \text{nat} \frac{1}{h} = \frac{\omega_3}{i} \text{ (r. u. p.)}$$

2) $e_2 - e_3 > e_1 - e_2$; d.h. $e_2 > 0$.

Auch in diesem Fall convergiren die eben angeführten Reihen, aber stärker convergirende Reihen erhält man, wenn man setzt:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1.$$

Wir wählen:

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} \, ; \quad \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}$$

wobei $M > 0$.

$$\bar{l} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = l_1 \text{ (reell u. pos.)}$$

$$\bar{m} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2}\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}\right) = m_1 \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

(m_1 reell u. pos.)

$$\bar{h} = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + \ldots = h_1 \text{ (reell, pos, } < 0.0432)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi i}{2 m_1^2}\left(1 + 2h_1^4 + \ldots\right)^2 \, ; \left(\frac{\tilde{\omega}}{i} \text{ reell u. pos.}\right)$$

$$\tilde{\omega}' = -\frac{\tilde{\omega}}{\pi i} \log \text{nat} \frac{1}{h_1}, \text{ (reell u. neg.)}$$

Da $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ mit ω_1, ω_3 aequivalent sein müssen, so muss sein:

$$\tilde{\omega} = p\omega_1 + q\omega_3 \; ; \; \tilde{\omega}' = p'\omega_1 + q'\omega_3 ,$$

wo die ganzen Zahlen p, q, p', q' der Bedingung genügen: $pq' - qp' = +1$.

Da ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$ u. $\frac{\tilde{\omega}}{i}$, $-\omega_3$ reell u. pos. sind, so muss sein:

$$p = 0,\; q = +1 ;\quad p' = -1,\; q' = 0 ;$$

also ist:

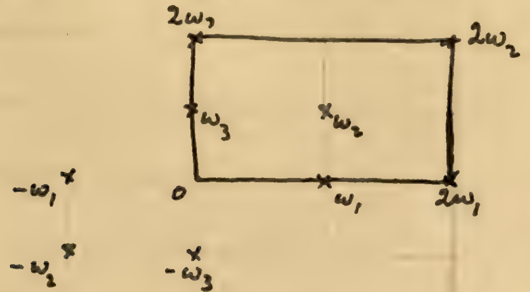
$$\tilde{\omega} = \omega_3 \; ; \; \tilde{\omega}' = -\omega_1 \; ;$$

somit

$$\frac{\omega_3}{i} = \frac{\pi}{2m_1^2}\left(1 + 2h_1^4 + \dots\right)^2$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{\pi i} \log \text{nat} \frac{1}{h_1}$$

Wenn also alle 3 e reell sind, so gibt es ein Paar Primitivperioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ der Function $\wp(u \mid g_2 g_3)$, von denen die erste reell u. positiv, die zweite



rein imaginär mit positiver Coordinate ist. Für diese ist das Periodenparallelogramm ein Rechteck.

II. Hauptfall: Eine Wurzel reell, die beiden andern conjugirt imaginär.

Wir nennen die reelle Wurzel e_2 und setzen:

$$e_2 - e_3 = \varrho\, e^{\varepsilon i};$$

dann ist:

$$e_2 - e_1 = \varrho\, e^{-\varepsilon i};$$

$$e_1 - e_3 = 2\varrho i \sin\varepsilon.$$

e_3 soll diej. der beiden conj. Wurzeln sein, für welche:

$$0 \leqq \varepsilon \leqq \pi$$

1) $e_2 > 0$; d. h. $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ weil $e_2 = \frac{2\varrho \cos\varepsilon}{3}$.

In diesem Falle wählen wir:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 3.$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} &= \varrho^{1/4} e^{\varepsilon i/4} \\ \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} &= \varrho^{1/4} e^{-\varepsilon i/4} \end{aligned}\right\} \quad M = \cos\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\bar{l} = i \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = i\, l_2; \quad l_2 = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} \text{ (reell u. pos.)}$$

$$\bar{m} = \varrho^{1/4} \cos\frac{\varepsilon}{4} = m_2 \text{ (reell u. pos.)}$$

$$\bar{h} = i\left\{\frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + \dots\right\} = i\, h_2$$

(h_2 reell u. pos.)

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2m_2^2}\left\{1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \dots\right\}^2$$

Da $\wp(\tilde{\omega}) = e_2$, so dürfen wir $\tilde{\omega}$ mit ω_2 bezeichnen, also:

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2m_2^2}\left\{1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \dots\right\}^2$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}}{\pi i}\log\text{nat}\, i h_2 = \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2 i}{\pi}\log\text{nat}\frac{1}{h_2}$$

Da $\wp\tilde{\omega}' = e_3$, so dürfen wir $\tilde{\omega}'$ mit ω_3 bezeichnen. Ferner definiren wir eine Grösse ω_2' durch die Gleichung:

$$\omega_2' = \frac{2\omega_2 i}{\pi}\log\text{nat}\frac{1}{h_2}.$$

Dann ist:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_2'}{2}, \text{ also:}$$

$$\omega_2' = 2\omega_3 - \omega_2$$

Daraus folgt dass auch $2\omega_2'$ eine Periode von $\wp(u \mid g_2 g_3)$ ist, allein das Periodenpaar $2\omega_2, 2\omega_2'$ ist kein primitives Periodenpaar.

Da $\wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') = e_\beta$ =

so ist

$$\wp(\omega_2 + \omega_3) = e_1 = \wp(\omega_2 - \omega_3)$$

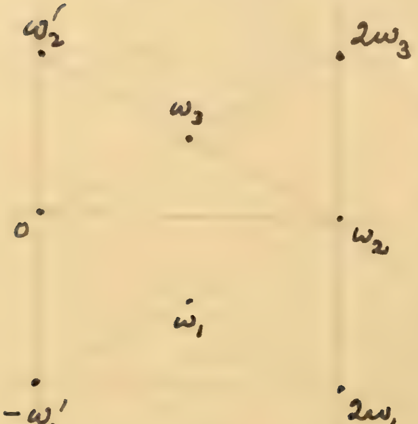
Wir dürfen daher $\omega_2 - \omega_3$ mit ω_1 bezeichnen.

$$\omega_1 = \omega_2 - \omega_3 = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{2}.$$

Man sieht, dass ω_1 und ω_3 conjugirt complex sind.

ω_1 und ω_3 zusammen bilden ein Paar primitiver Perioden; durch diese lassen sich ω_2 und ω_2' ausdrücken:

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_1 \qquad \omega_2' = \omega_3 - \omega_1$$



Aus der Zeichnung sieht man, dass das Rechteck ω_2, ω_2' doppelt so gross ist, wie das Parallelogramm ω_1, ω_3.

2) $e_2 < 0$, d. h. $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$.

Die Festsetzungen und Formeln des vorigen Falles bleiben gültig; allein man erhält stärker convergente Reihen, wenn man setzt:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1.$$

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_2 - e_1} = \varrho^{1/4} e^{-\frac{\varepsilon i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \varrho^{1/4} e^{\frac{\pi-\varepsilon}{4} i}$$

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \sqrt[4]{e_2 - e_3} = e^{-\frac{\pi i}{2}} \varrho^{1/4} e^{\frac{\varepsilon i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \varrho^{1/4} e^{-\frac{\pi-\varepsilon}{4} i}$$

Dann ist: $M = \cos\frac{\pi-\varepsilon}{4} > 0$.

$$\bar{l} = i \operatorname{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{4} = i\, l_3 \;;\quad l_3 \text{ reell u. pos.}$$

$$\bar{m} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \varrho^{1/4} \cos\frac{\pi-\varepsilon}{4} = e^{-\frac{\pi i}{4}} m_3 \;;\quad m_3 \text{ r. u. p.}$$

$$\bar{h} = i\left\{\frac{l_3}{2} + 2\left(\frac{l_3}{2}\right)^5 + \dots\right\} = i\, h_3 \;;\quad h_3 \text{ r. u. p.}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi i}{2 m_3^2}\left(1 + 2h_3^{\,4} + 2h_3^{\,16} + \dots\right)^2$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}}{\pi i} \log\text{nat}\, i h_3 = \frac{\tilde{\omega}}{2} - \frac{\tilde{\omega}}{\pi i}\log\text{nat}\frac{1}{h_3}.$$

$2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ bilden ein Paar Primitivperioden von $\wp(u \mid g_2, g_3)$; ebenso die beiden in der No. II, 1) definirten Grössen $2\omega_1$, $2\omega_2$; es muss also sein:

$$\tilde{\omega} = p\,\omega_1 + q\,\omega_2 \;;\quad \tilde{\omega}' = p'\omega_1 + q'\omega_2$$

wo die ganzen Zahlen p, q, p', q' der Bedingung $pq' - qp' = +1$ genügen.

Da
$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{2},$$

so folgt:

$$2\tilde{\omega} = \omega_2(p+2q) - p\,\omega_2' \;;\; 2\tilde{\omega}' = \omega_2(p'+2q') - p'\omega_2'$$

Nun ist:

$$\omega_2,\ \frac{\omega_2'}{i},\ \frac{\tilde{\omega}}{i},\ -2\tilde{\omega}' - \omega,\ \text{reell u. pos.}$$

Daraus folgt:

$$p+2q = 0 \quad ; \quad p \text{ negativ.}$$

$$p' - \frac{p}{2} = 0$$

somit:

$$\left.\begin{aligned} p &= -2q \\ p' &= -q \end{aligned}\right\} \quad q \text{ positiv.}$$

Zwischen q u. q' besteht die Relation:

$$q(q-2q') = +1$$

Daraus folgt:

$$q = +1\,, \quad q' = 0 \;;$$

$$p = -2\,, \quad p' = -1$$

$$\tilde{\omega} = -2\omega_1 + \omega_2 = \omega_2'$$

$$\tilde{\omega}' = -\omega_1 = \frac{\omega_2'}{2} - \frac{\omega_2}{2}$$

Es ist also:

$$\omega_2' = \frac{\pi i}{2m_3^2}\left(1 + 2h_3^4 + 2h_3^{16} + \dots\right)^2$$

$$\omega_2 = \frac{2\omega_2'}{\pi i} \log \text{nat} \frac{1}{h_3}$$

B. Verlauf von $\wp u$.

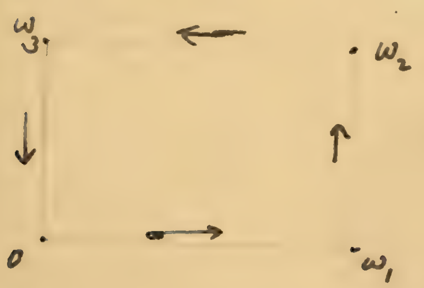
§ 12. Nach Art. 19, 5 ist:

$$\wp(u+\omega_\lambda) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp(u) - e_\lambda}.$$

Mit Hilfe dieser Formel soll nun der Verlauf von $\wp u$ untersucht werden, wenn $u = v + \omega_\lambda$, oder $vi + \omega_\lambda$, wo v reell.

I. Fall: Alle e reell.

Dann gibt es nach § 11 ein Paar Primitivperioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ von $\wp(u/g_2 g_3)$, bei dem ω_1 und $\frac{\omega_3}{i}$ reell u. positiv.



Es soll der Verlauf von $\wp u$ untersucht werden, wenn u den Umfang des Rechtecks: $0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ im Sinn der Pfeile durchläuft.

1) Von 0 bis ω_1 ist u reell und positiv, $= v$.

Da: $\wp(u/g_2 g_3) = \frac{1}{u^2} + \times + \frac{g_2}{2^2.5}u^2 + \dots$

$$\wp'(u|g_2 g_3) = -\frac{2}{u^3} + ----$$

und da zwischen 0 u. ω_1, $\wp' u$ nicht verschwindet, so folgt: $\wp u$ ist reell und nimmt von $+\infty$ bis e_1 ab; $\wp' u$ ist reell und negativ, $= -\sqrt{S}$.

2) von ω_1 bis ω_2 ist

$$u = \omega_1 + vi.$$

Also:

$$\wp u = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(vi) - e_1},$$

$$\wp' u = -\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(\wp(vi) - e_1)^2} \cdot \wp'(vi)$$

$\wp(vi)$ ist reell; $\wp'(vi) = -\frac{2i}{v^3} + ----$, ist für kleine v, $= -iP$, also auch in dem ganzen Intervall; also $\wp' u = +iP$ und $\frac{d\wp}{dv} = i\wp' u = -P$ negativ; also ist $\wp u$ auf dem ganzen Intervall reell und nimmt ab von e_1 bis e_2. Daher ist $S < 0$, also:

$$\wp' u = +\sqrt{S}$$

3) Von ω_2 bis ω_3 ist:

$$u = \omega_2 - v.$$

$$\wp u = e_2 - \frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}{\wp v - e_2}, \text{ reell}$$

$$\wp' u = -\frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}{(\wp v - e_2)^2}\, \wp' v, \text{ positiv} = +P$$

$$\frac{d\wp}{dv} = -\frac{d\wp}{du} \text{ negativ};$$

$\wp u$ nimmt also ab von e_2 bis e_3.

S ist > 0, also:

$$\wp' u = +\sqrt{S}$$

4) Von ω_3 bis 0 ist:

$$u = \omega_3 - vi$$

$$\wp u = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(vi) - e_3}, \text{ reell.}$$

$$\wp' u = +\frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(vi - e_3)^2}\, \wp'(vi) = -i P.$$

$$\frac{d\wp}{dv} = -i\wp' u = -P.$$

$\wp u$ nimmt ab von e_3 bis $-\infty$.

S ist < 0, also:

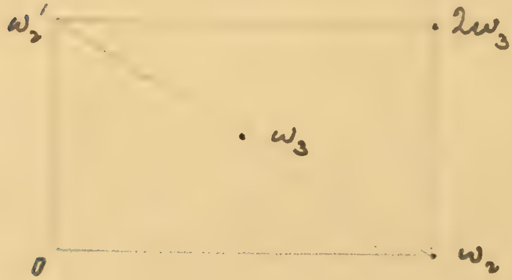
$$\wp' u = -\sqrt{S}.$$

Die erhaltenen Resultate stellen wir in folgender Tabelle zusammen:

u	$\wp u$	$\wp' u$	$\dfrac{\frac{ds}{du}}{\sqrt{S}}$
$0 \ldots\ldots \omega_1$	$+\infty \ldots\ldots e_1$	$-P$	-1
$\omega_1 \ldots\ldots \omega_2$	$e_1 \ldots\ldots e_2$	$+iP$	$+1$
$\omega_2 \ldots\ldots \omega_3$	$e_2 \ldots\ldots e_3$	$+P$	$+1$
$\omega_3 \ldots\ldots 0$	$e_3 \ldots\ldots -\infty$	$-iP$	-1

II. Fall: e_2 reell, e_1, e_3 conj. imaginär.

Dann hat $\wp(u \mid g_2 g_3)$ eine reelle u. eine rein imag. Halbperiode, ω_2 und ω_2'. Es soll der Verlauf von $\wp u$ auf dem Umfang des Rechtecks: $0\ \omega_2\ 2\omega_3\ \omega_2'$ untersucht werden.



1) Von 0 bis ω_2 ist $\wp u$ reell, und nimmt von $+\infty$ bis e_2 ab; $\wp' u = -P = -\sqrt{S}$

2) Von ω_2 bis $2\omega_3$ ist:

$$u = \omega_2 + vi$$

also:
$$\wp u = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(vi) - e_2}.$$

$e_2 - e_1$ u. $e_2 - e_3$ sind conjugirt, also $(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)$ reell u. > 0. Daher ist $\wp u$ reell.

$$\wp' u = -\frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{[\wp(vi) - e_2]^2}\,\wp'(vi) = +i\,\mathfrak{P}.$$

S ist negativ, also:
$$\wp' u = +\sqrt{S}.$$

$$\frac{d\wp}{dv} = i\,\frac{d\wp}{du} = -\mathfrak{P}.$$

$\wp u$ nimmt somit beständig ab von e_2 bis $-\infty$.

3) Von $2\omega_3$ bis ω_2' ist:–
$$u = 2\omega_3 - v;$$
also, da $2\omega_3$ eine Periode,
$$\wp u = \wp(-v) = \wp v;$$
somit nimmt $\wp u$ von $+\infty$ bis e_2 ab.

Ferner: $\wp' u = \wp'(2\omega_3 - v) = \wp'(-v) = -\wp' v$

also: $$\wp' u = +\mathfrak{P} = +\sqrt{S}.$$

4) Von ω_2' bis 0 ist:

$$u = \omega_2' - vi = \omega_3 - \omega_1 - vi$$

also:
$$\wp u = \wp(\omega_3 - \omega_1 - vi) = \wp(\omega_3 + \omega_1 - vi)$$
$$= \wp(\omega_2 - vi) = \wp(\omega_2 + vi)$$

$\wp u$ nimmt also ab von e_2 bis $-\infty$.
Ferner ist:

$$\wp' u = -\wp'(\omega_2 + vi) = -i\,\mathfrak{P} = -\sqrt{\mathfrak{S}}.$$

Wir erhalten daher in diesem Falle folgende Tabelle:

u	$\wp u$	$\wp' u$	$\frac{ds}{du} : \sqrt{\mathfrak{S}}$
$0 \ldots\ldots \omega_2$	$+\infty \ldots\ldots e_2$	$-\mathfrak{P}$	-1
$\omega_2 \ldots\ldots 2\omega_3$	$e_2 \ldots\ldots -\infty$	$+i\,\mathfrak{P}$	$+1$
$2\omega_3 \ldots\ldots \omega_2'$	$+\infty \ldots\ldots e_2$	$+\mathfrak{P}$	$+1$
$\omega_2' \ldots\ldots 0$	$e_2 \ldots\ldots -\infty$	$-i\,\mathfrak{P}$	-1

Aus der Formel:

$$\wp(u + \omega_\lambda) = e_\lambda + \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda}$$

folgt:
$$\wp(\omega_\lambda - u) = \wp(\omega_\lambda + u)$$
$$\wp'(\omega_\lambda - u) = -\wp'(\omega_\lambda + u)$$

Hieraus ergibt sich der Verlauf von $\wp u$ auf den Verlängerungen der betrachteten Rechteckseiten.

C. Bestimmung von u.

§13. Behält man die Bezeichnungen des §11 bei, so nehmen die Resultate des §10 folgende Form an: Hat man zu einem ggb. Wert s von $\wp u$ einen der beiden zugehörigen incongruenten Werte von u zu bestimmen, so definirt man $\sqrt{s-e_\gamma}$ u. $\sqrt{s-e_\beta}$ so, dass:

$$\mathcal{R}(N) = \mathcal{R}\left(\frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \cdot \frac{\sqrt{s-e_\gamma}}{\sqrt{s-e_\beta}}\right) \overline{\overline{>}}\ 0$$

wobei die $\sqrt[4]{}$ nach §11 definirt sind; dann ist der abs. Betrag von

$$l\xi = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s-e_\beta} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s-e_\beta} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s-e_\gamma}} = \frac{1-N}{1+N}$$

kleiner als l, und

$$u = \frac{1}{2m^2}\left\{\frac{\mathcal{L}}{i}\operatorname{lognat}\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) + \sqrt{1-\xi^2}\left(\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}{l}(l\xi) + \dots\right)\right\}$$

wobei:

$$\mathcal{L}_0 = 1\,;\quad \mathcal{L}_1 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l\,;\quad \mathcal{L}_2 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) l^4 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 l^8;$$

$$\mathcal{L} = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 l^8 + \dots \text{ ad inf.}$$

Ueberdiess ist: $\tilde{\omega} = \dfrac{\mathcal{L}\pi}{2m^2}$

Diese Formeln sollen jetzt unter der Voraussetzung, dass g_2, g_3 und s reell sind, näher untersucht werden.

I. Hauptfall: Alle e reell.

Nach § 12 gibt es zu jedem reellen s auf dem Umfang des Rechtecks $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ einen Wert von u, und man kann auch im Voraus bestimmen auf welcher Seite der gesuchte Punkt liegt.

Mit Hilfe der Formel:

$$\wp(u+\omega_\lambda) = e_\lambda + \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp(u) - e_\lambda}$$

kann man die 4 dabei auftretenden Fälle auf die zwei Fälle reduciren:

1) $s > e_1$; dann ist u reell u. $0 < u < \omega_1$.

2) $s < e_3$; dann ist u rein imag. u. $\frac{u}{i} < \frac{\omega_3}{i}$

Ist nämlich $e_1 > s > e_2$, so setzt man: $\quad u = u' + \omega_1$.

Dann ist: $\quad s' = \wp(u')$

$$s' - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{s - e_1}.$$

also:

$$s' - e_3 = (e_1 - e_3)\,\frac{s - e_2}{s - e_1} < 0\,;$$

$$s' < e_3$$

Ist $e_2 > s > e_3$, so setzt man:

$$u = \omega_3 + u'$$

$$s' = pu'.$$

Dann ist:

$$s' - e_3 = \frac{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)}{s - e_3},$$

also:

$$s' - e_1 = (e_1 - e_3)\,\frac{e_2 - s}{s - e_3} > 0,$$

$$s' > e_1$$

Wir haben also nur die 2 Intervalle $s > e_1$ und $s < e_3$ zu untersuchen.

ξ fällt stets reell aus.

Ist $\xi^2 < 1$, so ist

$$\frac{1}{i}\log\text{nat}\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$= \text{arc cos}\,\xi$, reell und

$$0 \leqq \text{arc} \leqq \pi$$

Ist $\xi^2 > 1$, so ist

$\log\text{nat}\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) = \log\text{nat}\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)$, reell.

l ist entweder reell oder rein imag.: die Reihe L enthält also nur reelle positive Terme.

Will man möglichst stark convergirende Reihen erhalten, so hat man wieder die beiden Fälle: $e_2 > 0$ und $e_2 < 0$ zu unterscheiden.

1) $\underline{\underline{e_2 < 0}}$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

$\underline{(a) \quad s > e_1}$

Wir definiren:

$$\sqrt{s - e_\gamma} = \sqrt{s-e_3} \quad ; \quad \sqrt{s - e_\beta} = \sqrt{s-e_2}$$

$$N = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}} \cdot \frac{\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{s-e_2}}, \text{ reell, pos.} > M$$

Wir wissen im Voraus dass $|\xi| < 1$ ausfallen muss: wir können uns aber auch direct davon überzeugen.

Es ist:

$$l\xi = \frac{1-N}{1+N} \quad ; \quad l = \frac{1-M}{1+M}$$

Wächst s von e_1 bis $+\infty$, so nimmt N ab von $\frac{1}{M}$ bis M. Die Function:

$$\varphi(t) = \frac{1-t}{1+t}$$

nimmt beständig ab, wenn t wächst; ferner ist:

$$\varphi(M) = l \;;\quad \varphi\left(\frac{1}{M}\right) = -l \;;\quad \varphi(N) = l\xi \;;$$

nimmt also s von e_1 bis $+\infty$ zu, so nimmt $l\xi$ von $-l$ bis $+l$ zu; es ist also

$$l^2\xi^2 < l^2 \;;\quad \text{also} \quad \xi^2 < 1$$

Also:

$$u = \pm\frac{1}{2m^2}\left\{\mathcal{L} \arccos\xi + \sqrt{1-\xi^2}\left(\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}{l}(l\xi)+\ldots\right)\right\}$$

$$\omega_1 = \frac{\mathcal{L}\pi}{2m^2}$$

(b) $s < e_3$.

Wir definiren:

$$\sqrt{s-e_3} = i\sqrt{e_3-s} \quad ; \quad \sqrt{s-e_2} = i\sqrt{e_2-s}.$$

Dann ist:

$$N = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\,\frac{\sqrt{e_3-s}}{\sqrt{e_2-s}} < M\;;$$

also:

$$\varphi(N) > \varphi(M)$$

$$l\xi > l \quad ; \quad \xi > 1 \quad ; \quad \xi^2 > 1.$$

$$u = \pm\frac{i}{2m^2}\left\{-\mathcal{L}\log\text{nat}\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)+\sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}_0}{l}(l\xi)+\ldots\right)\right\}$$

2) $\underline{\underline{e_2 > 0}}$: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

(a) $s > e_1$

Wir definieren:

$$\sqrt{s-e_\gamma} = \sqrt{s-e_1} \quad ; \quad \sqrt{s-e_\beta} = \sqrt{s-e_2}$$

also:

$$N = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}} \; \frac{\sqrt{s-e_1}}{\sqrt{s-e_2}}, \text{ reell, pos, } < M$$

also: $\varphi(N) > \varphi(M)$, d.h. $l_1\xi > l_1$; $\xi > 1$

$$l_1\xi = \frac{1-N}{1+N}$$

$$u = \pm\frac{1}{2m_1^2}\left\{ L \log \text{nat}\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) - \sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{L-L_0}{l}(l\xi) + \dots\right)\right\}$$

(b) $s < e_3$

$$\sqrt{s-e_1} = i\sqrt{e_1-s} \quad ; \quad \sqrt{s-e_2} = i\sqrt{e_2-s}$$

$$N = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}} \; \frac{\sqrt{e_1-s}}{\sqrt{e_2-s}}, \text{ reell, pos. } > M$$

$\frac{dN}{ds} > 0$; N wächst von M bis $\frac{1}{M}$ wenn s von $-\infty$ bis e_3 wächst; also nimmt $\varphi(N)$ von $+l_1$ bis $-l_1$ ab; also $\xi^2 < 1$.

$$u = \pm\frac{i}{2m_1^2}\left\{ L \arccos\xi + \sqrt{1-\xi^2}\left(\frac{L-L_0}{l}(l\xi) + \dots\right)\right\}$$

$$\omega_3 = \frac{L\pi i}{2m_1^2}$$

II. Hauptfall: e_2 reell, $e_1 e_3$ conj. imaginär.

Da $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, so muss

$$\mathfrak{R}(e_1) = \mathfrak{R}(e_3) = -\frac{e_2}{2};$$

wir setzen daher

$$e_1 = -\frac{e_2}{2} + if \quad ; \qquad e_3 = -\frac{e_2}{2} - if,$$

wo f reell und positiv.

$$\left.\begin{aligned} e_2 - e_3 &= \frac{3e_2}{2} + if = \varrho e^{\varepsilon i} \\ e_2 - e_1 &= \frac{3e_2}{2} - if = \varrho e^{-\varepsilon i} \end{aligned}\right\} \quad 0 < \varepsilon < \pi$$

Ferner setzen wir

$$\left.\begin{aligned} s - e_3 &= re^{i\theta} = \left(s + \frac{e_2}{2}\right) + fi \\ s - e_1 &= re^{-i\theta} = \left(s + \frac{e_2}{2}\right) - fi \end{aligned}\right\} \quad 0 < \theta < \pi$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2f}{3e_2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{f}{s + \frac{e_2}{2}}.$$

Hieraus ergibt sich:

Nimmt s von $+\infty$ bis e_2 ab, so wächst θ von 0 bis ε

" s " e_2 " $-\infty$ ", " " θ " ε " π.

Aus § 12 wissen wir bereits:
Liegt s zwischen $+\infty$ u. e_2, so gibt es einen reellen pos. Wert u zwischen 0 und ω_2; liegt s zwischen e_2 u. $-\infty$, so gibt es einen rein imag. Wert zwischen 0 u. ω_2'.

Wir entscheiden wieder 2 Fälle, um möglichst stark convergirende Reihen zu erhalten:

1) $\underline{\underline{l_2 > 0, \text{ d. h. } \varepsilon < \frac{\pi}{2}}}$; $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3.$

$$\mathcal{M} = e^{-\frac{\varepsilon i}{2}} \; ; \quad \mathcal{N} = \pm e^{i(\theta - \frac{\varepsilon}{2})}$$

somit: $\quad \mathcal{R}(\mathcal{N}) = \pm \cos(\theta - \frac{\varepsilon}{2})$

Für die Wahl des Vorzeichens haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, die jedoch mit der Unterscheidung $l \lesseqgtr l_2$ nicht zusammenfallen.

$$(a) \quad \theta - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist $\cos(\theta - \frac{\varepsilon}{2}) > 0$. Wir müssen also definiren:

$$\mathcal{N} = e^{i(\theta - \frac{\varepsilon}{2})}$$

Dann wird:

$$l\zeta = i \operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\theta}{2}\right),$$

und, da $l = i l_2$;

$$l_2 \zeta = \operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Andererseits war:

$$l_2 = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$$

Lasst man θ von 0 bis ε wachsen, d.h. s von $+\infty$ bis e_2 abnehmen, so nimmt $l_2 \xi$ von l_2 bis $-l_2$ ab; es ist also $\xi^2 < 1$; u fällt reell aus, wie wir im voraus wussten.

Ist dagegen $\theta > \varepsilon$, also $s < e_2$, so ist $l_2 \xi < -l_2$, also $\xi < -1$, $\xi^2 > 1$, u wird rein imaginär.

$$(b) \quad \theta - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Dann müssen wir definieren:

$$N = -e^{i(\theta - \frac{\varepsilon}{2})} = e^{i(\pi - (\frac{\varepsilon}{2} - \theta))}.$$

Dann wird:

$$l_2 \xi = \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

l_2 können wir schreiben:

$$l_2 = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

Da $\theta < \pi$ und $\frac{\pi}{2} > \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\pi}{4}$, so folgt:

$$l_2 \xi > l_2 \quad ; \quad \xi > 1;$$

somit ist u rein imaginär, was auch daraus hervorgeht, dass $\theta - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\pi}{2}$ nur möglich ist, wenn $\theta > \varepsilon$, also $s < e_2$.

2) $e_2 < 0$, d.h. $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$.

$$\mathcal{M} = e^{-\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)i} \quad ; \quad \mathcal{N} = \pm\, e^{-i\left(\theta + \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)}$$

somit:
$$\mathfrak{R}(\mathcal{N}) = \pm \cos\left(\theta + \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$$

Fur die Zeichenbestimmung sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) $\theta < \frac{\varepsilon}{2}$ (also dabei stets $\theta < \varepsilon$, $s > e_2$)

$$\mathcal{N} = +\, e^{-i\left(\theta + \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)}$$

$$l\xi = i\, tg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\varepsilon}{4}\right),$$

somit:
$$l_3\xi = tg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\varepsilon}{4}\right)$$

Ferner war:
$$l_3 = tg\left(\frac{\pi-\varepsilon}{4}\right)$$

Für alle hier in Betracht kommenden Werte von s ist $l_3\xi > l_3$, also $\xi > 1$; somit, da m^2 rein imaginar, n reell.

(b) $\theta > \frac{\varepsilon}{2}$

$$\varkappa = -e^{-i(\theta + \frac{\pi-\varepsilon}{2})} = e^{i(\frac{\pi}{2} - (\theta - \frac{\varepsilon}{2}))}$$

$$l\xi = -i\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\right) = -i\,ctg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\varepsilon}{4}\right)$$

$$l_3\xi = -ctg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi-\varepsilon}{4}\right)$$

$$l_3 = tg\left(\frac{\pi-\varepsilon}{4}\right)$$

Wächst θ von $\frac{\varepsilon}{2}$ bis ε, so wächst $l_3\xi$ von -1 bis $-l_3$; ξ ist also < -1, also $\xi^2 > 1$, u somit reell.

Wächst θ von ε bis π, nimmt also a von e_2 bis $-\infty$ ab, so wächst $l_3\xi$ von $-l_3$ bis $+l_3$; es ist also $\xi^2 < 1$, somit u rein imaginär.

Zugleich ergibt sich:

$$\omega_2 = \frac{\mathfrak{L}\pi}{2m_2^2}\;; \quad \text{wo } \mathfrak{L} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_2^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 l_2^4 + \dots$$

$$\frac{\omega_2'}{i} = \frac{\mathfrak{L}\pi}{2m_3^2}\;; \quad \text{wo } \mathfrak{L} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_3^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 l_3^4 + \dots$$

D. Die ϑ-Functionen.

§14. Für die numerische Berechnung ist es vorteilhaft, die σ-Functionen durch die ϑ-Functionen auszudrücken. Es sollen die bezüglichen Formeln auf reelle Form gebracht werden.

Geht man von den Primitivperioden $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ aus und bezeichnet wieder:

$$e_\alpha = \wp(\tilde{\omega}) \; ; \quad e_\beta = \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') \; ; \quad e_\gamma = \wp(\tilde{\omega}'),$$

so hat man die in Art. 22, 23 etc. vorkommenden Wurzelgrössen folgendermaassen zu definiren (Art. 21):

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \frac{\sigma_\beta \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}}$$

$$(1) \qquad \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{\sigma_\gamma \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}}$$

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \frac{\sigma_\gamma (\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')}$$

Ferner sei:

$$(2) \qquad \tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \; ; \quad h = e^{\tau \pi i} \; ; \quad h^{1/4} = e^{\frac{\tau}{4}\pi i}$$

Fixirt man dann das Zeichen von $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ beliebig, so ist

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{G} = \frac{1}{2\tilde{\omega}}\,\vartheta_1'(0|\tau) = \frac{\pi}{\tilde{\omega}}\,h^{1/4}(1 - 3h^{1.2} + 5h^{2.3} + \dots)$$

(3)
$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \vartheta_2(0|\tau) = 2h^{1/4}(1 + h^{1.2} + h^{2.3} + -)$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \vartheta_3(0|\tau) = (1 + 2h + 2h^4 + --)$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \vartheta_0(0|\tau) = (1 - 2h + 2h^4 - \dots)$$

Diese Gleichungen dienen zugleich dazu, die $\sqrt[4]{}$ zu definiren. Die Quadrate ders. sind mit den durch (1) definirten $\sqrt[2]{}$ identisch. Ferner

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}.$$

Setzt man endlich:

(4) $$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}}\;;\qquad \delta = 2\eta\,\tilde{\omega}.$$

so ist:

(5)
$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{G}\;\sigma u = e^{\delta v^2}\,\vartheta_1(v|\tau)$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}\;\sigma u = e^{\delta v^2}\,\vartheta_2(v|\tau)$$

$$(5)\quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\cdot\sigma_\beta u &= e^{\delta v^2}\vartheta_3(v|\tau) \\ \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\cdot\sigma_\gamma u &= e^{\delta v^2}\vartheta_0(v|\tau) \end{aligned}$$

Die sämmtl. hier auftretenden Grössen sollen jetzt in reeller Form dargestellt werden. Dabei sind wieder dieselben Fälle zu unterscheiden wie oben in § 11, 12, 13.

I. Hauptfall: Alle e reell.

1) $e_2 < 0$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

$\sigma\omega_1$, $\sigma_2\omega_1$, $\sigma_3\omega_1$ sind reell und positiv, ebenso $\dfrac{\sigma_3\omega_2}{\sigma\omega_2}$ wie man aus Art. 23. 1 sieht, denn:

$$\frac{\sigma_3\omega_2}{\sigma\omega_2} = \sqrt{e_1 - e_3}\;\frac{\sigma_2\omega_3}{\sigma_1\omega_3}, \text{ reell u. pos.}$$

Es folgt hieraus:

$$(I_a)\quad \begin{aligned} \sqrt{e_\beta - e_\gamma} &= \sqrt{e_2 - e_3} \\ \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} &= \sqrt{e_1 - e_3} \\ \sqrt{e_\alpha - e_\beta} &= \sqrt{e_1 - e_2} \end{aligned}$$

Ferner:

(II_a) $\quad \tau = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$; $h = e^{\tau\pi i}$ reell u. pos.

Wir definiren:

(III_a) $\quad \sqrt{\dfrac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2\omega_1}{\pi}}$ reell u. pos.

Dann folgt aus (3)

$$(\mathrm{IV}_a) \quad \left.\begin{aligned} \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} &= \sqrt[4]{e_2 - e_3} \\ \sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} &= \sqrt[4]{e_1 - e_3} \\ \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} &= \sqrt[4]{e_1 - e_2} \end{aligned}\right\} \text{ reell u. pos.}$$

$$(\mathrm{V}_a) \quad \begin{aligned} \delta &= 2\eta_1 \omega_1 \quad \text{reell} \\ v &= \frac{u}{2\omega_1} \quad \text{reell, wenn } u \text{ reell} \end{aligned}$$

2) $\underline{\underline{e_2 > 0}}$; α_3, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

$$\tilde{\omega} = \omega_3 \,, \quad \tilde{\omega}' = -\omega_1$$

Da $\sigma_1\omega_3$, $\sigma_2\omega_3$, $\dfrac{\sigma\omega_3}{i}$ reell u. pos. und ferner, da

$$\frac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{i} \quad \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma_3 \omega_1}$$

nach Art. 23, 1; so folgt:

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = -i\sqrt{e_1 - e_2}$$

$$(\mathrm{I}_b) \qquad \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = -i\sqrt{e_1 - e_3}$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = -i\sqrt{e_2 - e_3}$$

Ferner:

$$(\mathrm{II}_b) \qquad \tau' = -\frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{1}{\tau} = \tau_1 \quad ; \quad h = e^{\tau_1 \pi i} = h_1$$

Wir definiren:

$$(\mathrm{III}_b) \qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} \; ;$$

dann ist:

$$\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_1 - e_2}$$

$$(\mathrm{IV}_b) \qquad \sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_1 - e_3}$$

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}$$

$$(\mathrm{V}_b) \qquad \begin{aligned} &\delta = 2\eta_3 \omega_3 \,, \text{ reell} \\ &v = \frac{u}{2\omega_3} = -\frac{ui}{2\omega_3} \cdot i = -v_1 i \; ; \; v_1 = \frac{ui}{2\omega_3} . \end{aligned}$$

II. Hauptfall.

1) $\underline{\underline{e_2 > 0}}$, d.h. $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$; $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$.

$$\tilde{\omega} = \omega_2 \; ; \; \tilde{\omega}' = \omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_2'}{2} .$$

Es ist:

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_2+\omega_3)}{\sigma(\omega_2+\omega_3)} = \frac{\sigma_3\,\omega_1}{\sigma\omega_1} = \frac{e^{-\eta_3\omega_1}\,\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}.$$

$\sigma\omega_2$ ist reell u. pos., $\sigma\omega_1$ und $\sigma\omega_3$ sind ~~conjugirt~~ conjugirt. Ferner ist:

$$\mathfrak{J}(-\eta_3\omega_1) = \frac{\pi i}{4}$$

wie aus der Gleichung:

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

folgt. Daher ist

$$\sqrt{e_1 - e_3} = e^{\frac{\pi i}{4}}\left|\sqrt{e_1-e_3}\right| = e^{\frac{\pi i}{4}}\left|\sqrt{i(e_2-e_1)}\right|$$

Die Bestimmung der beiden übrigen Quadratwurzeln macht Schwierigkeiten; es lassen sich aber direct die 4ten Wurzeln bestimmen. Es ist:

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{1}{2} + \frac{\tau'}{2}\;;\quad \tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_2}$$

$$(\mathrm{II}_c)\qquad h = i\,h_2\;;\quad h_2 = e^{\frac{\tau'\pi i}{2}},\ \text{reell u. pos.}$$

Wir wählen:

$$(\mathrm{III}_c)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}$$

Nun ist:

$$\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = (1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \ldots) + i(2h_2 + 2h_2^9 + \ldots)$$

Es ist also sowohl der reelle als der

imaginäre Teil von $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}$ positiv. Von den 4 Werten von $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}$ hat aber nur einer diese Eigenschaft.

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_2 - e_3} = \varrho^{1/4} e^{\frac{\varepsilon i}{4}}$$

Ebenso folgt:

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \sqrt[4]{e_2 - e_1} = \varrho^{1/4} e^{-\frac{\varepsilon i}{4}}$$

Wir erhalten ferner:

$$\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_1 - e_3} = \pm e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{i(e_3 - e_1)}$$

Nach Art. 33, 10 ist nun

$$\frac{2\omega_2}{\pi}\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{G} = e^{\frac{\pi i}{8}} \cdot (\text{einer reell. pos. Grösse})$$

Daher ist das Zeichen + zu wählen.

Die in unseren Formeln auftretenden Wurzeln haben also folgende Werte:

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt{e_1 - e_3} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{i(e_3 - e_1)}$$

$$(\mathrm{I}_c) \quad \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \sqrt{e_2 - e_3} = \varrho^{1/2} e^{\frac{\varepsilon i}{2}}$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \sqrt{e_2 - e_1} = \varrho^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon i}{2}}$$

Ferner:

$$\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_1 - e_3} = e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{i(e_3 - e_1)}$$

$$(\mathrm{IV}_c) \quad \sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \sqrt[4]{e_2 - e_3} = \varrho^{1/4} e^{\frac{\varepsilon i}{4}}$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \sqrt{e_2 - e_1} = \varrho^{1/4} e^{-\frac{\varepsilon i}{4}}$$

Endlich ist:

$$(V_c)\quad \begin{aligned} \delta &= 2\eta_2 \omega_2 \text{ reell u. pos } = \delta_2 \\ v &= \frac{u}{2\omega_2} = v_2,\text{ reell wenn } u \text{ reell} \end{aligned}$$

2) $\underline{\underline{e_2 < 0}}$, d. h. $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$; $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = 1$

$$\tilde{\omega} = \omega_2' \ ; \quad \tilde{\omega}' = -\omega_1 = \frac{\omega_2' - \omega_2}{2}$$

Es ist zunächst:

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1(\omega_2' - \omega_1)}{\sigma(\omega_2' - \omega_1)} = \frac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3}.$$

Nun ist $\frac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3}$ conjugirt zu $\frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1}$, also nach (I_c)

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \sqrt{e_3 - e_1} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{i(e_3 - e_1)}$$

Ferner:

$$\sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{\sigma_1 \omega_2'}{\sigma \omega_2'} = \frac{\sigma_1(\omega_3 - \omega_1)}{\sigma(\omega_3 - \omega_1)} = \frac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} \text{ (Art. 23,2)}$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \frac{\sigma_3 \omega_2'}{\sigma \omega_2'} = \frac{\sigma_3(\omega_3 - \omega_1)}{\sigma(\omega_3 - \omega_1)} = -\frac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma \omega_2} \text{ (Art. 23,2)}$$

Also:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} &= \sqrt{e_2 - e_1} \\ \sqrt{e_\alpha - e_\beta} &= -\sqrt{e_2 - e_3} \end{aligned}\right\} \text{ wo } \sqrt{e_2 - e_1} \text{ und } \sqrt{e_2 - e_3} \text{ die in } (I_c) \text{ angegebenen Werte haben.}$$

Weiter ist:

$$(\mathrm{II}_d)\quad \tau = -\frac{\omega_1}{\omega_2'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}\,;\quad h = e^{\frac{\pi i}{2}} e^{-\frac{\pi i}{2\tau'}} = i h_3$$

$$h_3 = e^{-\frac{\pi i}{2\tau'}}$$

Wir wählen:

$$(\mathrm{III}_d)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$$

Dann ergibt sich aus Art. 35, 3 u. 4:

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \varrho^{1/4} e^{-\frac{\varepsilon i}{4}}\,;\quad \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = e^{-\frac{\pi i}{2}} \varrho^{1/4} e^{+\frac{\varepsilon i}{4}}.$$

Wir haben also:

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \sqrt{i(e_3 - e_1)}$$

$$(\mathrm{I}_d)\quad \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \varrho^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon i}{2}}$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = -\varrho^{1/2} e^{\frac{\varepsilon i}{2}}$$

$$\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{i(e_3 - e_1)} \quad \text{(aus. Art. 33, 10)}$$

$$(\mathrm{IV}_d)\quad \sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \varrho^{1/4} e^{-\frac{\varepsilon i}{4}}$$

$$\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = e^{-\frac{\pi i}{2}} \varrho^{1/4} e^{\frac{\varepsilon i}{4}}$$

Endlich ist:

$$(\mathrm{V}_d)\quad v = \frac{u}{2\omega_2'} = -\frac{ui}{2\omega_2'}\, i = -v_3 i\,;\quad v_3 = \frac{ui}{\omega_2'}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\sigma'(\omega_2')}{\sigma(\omega_2')} = \frac{\sigma'(\omega_3-\omega_1)}{\sigma(\omega_3-\omega_1)} = \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} - 2\eta_1 \text{ (Art. 8)}$$

$$= \eta_2 - 2\eta_1 = \eta_3 - \eta_1$$

Wir bezeichnen:

$$\eta_3 - \eta_1 = \eta_2'$$

η_2' ist rein imaginär, da η_1, η_3 conjugirt. Daher ist:

$$\delta = 2\eta_2'\omega_2' = \delta_3 \text{ reell.}$$

V. Kapitel.

Die Differentialgleichung: $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$

§15. Es sei jetzt die Diffgl: vorgelegt:

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x),$$

wo

$$(2) \qquad R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

Wir untersuchen, ob es möglich ist, diese Diff.gl. durch eine lineare Subst:

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta} \quad \left(\text{oder } \frac{\delta x - \beta}{\alpha - \gamma x} = s\right)$$

überzuführen in die Diff.gl.:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = S.$$

Nach (3) ist:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma s + \delta)^2} \cdot \frac{ds}{du}$$

Daher geht die Diff.gl. über in:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{(\gamma s + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} R\left(\frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}\right) = R_1(s)$$

wobei:

$$R_1(s) = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \left\{ \begin{array}{l} A(\alpha s + \beta)^4 + 4B(\alpha s + \beta)^3(\gamma s + \delta) + 6C(\alpha s + \beta)^2(\gamma s + \delta)^2 \\ \quad + 4B'(\alpha s + \beta)(\gamma s + \delta)^3 + A'(\gamma s + \delta)^2 \end{array} \right\}$$

offenbar wieder eine ganze Function 4ten Grades von s darstellt, falls die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Diese Function $R_1(s)$ soll nun mit S identisch werden; dazu ist erforderlich, dass der Coefficient von s^4 verschwindet, d.h. dass:

$$A\alpha^4 + 4B\alpha^3\gamma + 6C\alpha^2\gamma^2 + 4B'\alpha\gamma^3 + A'\gamma^4 = 0$$

oder, da wir stets eine der beiden Grössen α u. γ, etwa $\gamma \neq 0$ voraussetzen können:

$$A\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^4 + 4B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3 + 6C\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + 4B'\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) + A' = 0$$

oder:

$$R\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = 0$$

Setzen wir also $\frac{\alpha}{\gamma} = a$, so muss a eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ sein. Durch Einführung von a nimmt die Substitution (3) die Form an:

$$x = a + \frac{\lambda}{s - \mu} \quad \text{und} \quad s = \mu + \frac{\lambda}{x - a}$$

wobei:

$$\lambda = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \quad ; \quad \mu = -\frac{\delta}{\gamma}$$

Ferner wird:

$$R_1(s) = \frac{(s-\mu)^4}{\lambda^2} R\left(a + \frac{\lambda}{s-\mu}\right)$$

$$= \frac{(s-\mu)^4}{\lambda^2}\left\{r_0 + r_1\frac{\lambda}{s-\mu} + r_2\frac{\lambda^2}{(s-\mu)^2} + r_3\left(\frac{\lambda}{s-\mu}\right)^3 + r_4\left(\frac{\lambda}{s-\mu}\right)^4\right\}$$

$$= r_0\frac{(s-\mu)^4}{\lambda^2} + r_1\frac{(s-\mu)^3}{\lambda} + r_2(s-\mu)^2 + r_3\lambda(s-\mu) + r_4\lambda^2$$

wo:

$$r_0 = R(a) \;;\quad r_1 = R'(a) = \frac{dr_0}{da}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}R''(a) = \frac{1}{2}\frac{dr_1}{da} \;;\quad r_3 = \frac{1}{6}R'''(a) = \frac{1}{3}\frac{dr_2}{da}$$

$$r_4 = \frac{1}{24}R^{(iv)}(a) = \frac{1}{4}\frac{dr_3}{da}$$

Wir haben bereits die Substitution so eingerichtet, dass $r_0 = 0$, dass sich also $R_1(s)$ reducirt auf:

$$R_1(s) = r_1\frac{(s-\mu)^3}{\lambda} + r_2(s-\mu)^2 + r_3\lambda(s-\mu) + r_4\lambda^2$$

Es muss nun ferner der Coefficient von s^3 gleich 4 werden und der von s^2 verschwinden. Dies giebt die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{r_1}{\lambda} = 4 \;;\quad -\frac{3r_1\mu}{\lambda} + r_2 = 0$$

aus denen sich für λ u. μ folgende Werte ergeben:

$$\lambda = \frac{r_1}{4} = \frac{1}{4} R'(a)$$

$$\mu = \frac{r_2}{12} = \frac{1}{24} R''(a)$$

Bei diesen Werten von λ und μ nimmt jetzt $R_1(s)$ die Gestalt an:

$$R_1(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

wo

$$g_2 = \frac{r_2^2}{12} - \frac{r_1 r_3}{4}$$

$$g_3 = \frac{r_1 r_2 r_3}{48} - \frac{r_1^2 r_4}{16} - \frac{r_2^3}{216}$$

Somit ist nachgewiesen, dass die vorgelegte Diffgl.

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

durch eine Subst. von der Form

$$x = a + \frac{\lambda}{s-\mu}$$

in eine Diffgl. von der Form

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

übergeführt werden kann.

Dabei bedeutete a irgend eine der 4 Wurzeln der Gl. $R(x) = 0$; es ist nun wesentlich zu zeigen, dass g_2 u. g_3 von der Wahl dieser Wurzel unabhängig sind und nur von den Coefficienten A, B, C, B', A' der Function $R(x)$ abhängen.

Zu diesem Zweck geben wir zunächst dem a einen ganz beliebigen Wert, (d.h. der nicht Wurzel der Gl. $R(x)=0$ zu sein braucht), und setzen:

$$G_2 = r_0 r_4 + \frac{1}{12} r_2^2 - \frac{1}{4} r_1 r_3$$

$$G_3 = \frac{1}{6} r_0 r_2 r_4 + \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{16} r_1^2 r_4 - \frac{1}{216} r_2^3.$$

G_2 und G_3 sind dann Funktionen von a die in g_2 und g_3 übergehen, sobald $r_0 = 0$.

Wir zeigen zunächst, dass G_2 und G_3 von a unabhängig sind; es ist nämlich da die höheren Ableitungen von $R(a)$ als die 4te identisch verschwinden:

$$\frac{dG_2}{da} = r_1 r_4 + \frac{1}{2} r_2 r_3 - \frac{1}{2} r_2 r_3 - r_1 r_4 = 0,$$

Ebenso
$$\frac{dG_3}{da} = 0.$$

Da somit G_2 und G_3 von a unabhängig sind, so folgt zunächst, dass g_2 und g_3 von der Wahl der Wurzel unabhängig sind. Andererseits können wir zur Berechnung der Werte von g_2 und g_3 dem a einen ganz beliebigen passenden Wert geben; zweckmässig erweist sich hierzu der Wert $a = 0$. Alsdann wird:

$r_0 = A'$, $r_1 = 4B'$, $r_2 = 6C$, $r_3 = 4B$, $r_4 = A$.

Daher ist:

$$g_2 = AA' + 3C^2 - 4BB'$$

$$g_3 = ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & B' \\ C & B' & A' \end{vmatrix}$$

Dies sind gerade die beiden Invarianten der Binärform 4ten Grades.

Wir haben also das

Resultat: Die Differentialgleichung:

$$\text{(I)} \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

verwandelt sich durch die Substitution:

$$(\text{II}_a) \qquad x = a + \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{s - \frac{1}{24}R''(a)}$$

oder

$$(\text{II}_b) \qquad s = \frac{1}{24}R''(a) + \frac{1}{4}\,\frac{R'a}{x-a}$$

wo a eine Wurzel der Gl. $R(x) = 0$ ist, in

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Dabei haben die Grössen g_2 und g_3 folg.

Werte:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{aligned} g_2 &= AA' + 3C^2 - 4BB' \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3 \end{aligned}$$

Das allgemeine Integral der Diff gl.

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$$

ist aber nun bekannt:

$$s = \wp(u - u_1)$$

wo u_1 eine willkürliche Integrations-constante bedeutet. Somit lautet das allgemeine Integral der Diffgl: $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$

$$(\mathrm{IV})\quad x = a + \frac{\frac{1}{4} R'(a)}{\wp(u-u_1) - \frac{1}{24} R''(a)}$$

oder:

$$\wp(u-u_1) = \frac{1}{24} R''a + \frac{1}{4}\,\frac{R'a}{x-a}$$

Ist die Diffgl. mit der Anfangsbedingung zu integriren, dass für $u = u'$ x einen vorgeschriebenen Wert x' und $\frac{dx}{du}$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen annehmen sollen, so erhält man zur Bestimmung der Integrationsconstanten u_1 die Gleichung:

$$x' = a + \frac{\frac{1}{4} R'(a)}{\wp(u'-u_1) - \frac{1}{24} R''(a)}$$

und das Vorzeichen von $\wp'(u'-u_1)$ ergibt sich aus:

$$\wp'(u'-u_1) = -\frac{1}{4} R'(a) \frac{\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u'}}{(x'-a)^2}$$

Hieraus lässt sich nach §10 u_1 bis auf eine additive Periode bestimmen.

Die bisherigen Formeln bleiben giltig, wenn $A = 0$ wird, d. h. wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist; ausser der Substitution (II) genügt aber in diesem Fall noch die einfachere:

$$x = \frac{s - \frac{C}{2}}{B}$$

(V)

oder, $s = Bx + \frac{1}{2} C$

g_2 und g_3 nehmen einfachere Werte an:

$$g_2 = 3C^2 - 4BB'$$

$$g_3 = 2BB'C - A'B^2 - C^3$$

und das allgemeine Integral kann auch dargestellt werden in der Form:

$$x = \frac{\wp(u-u_1)}{B} - \frac{C}{2B}$$

Die Aufgabe; ein Integral der Diff-gl. $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ zu finden, welches für $u = 0$ den vorgeschrieben Wert x_0 annimmt erfordert nach dem bisherigen die Lösung der transcendenten Gl:

$$\wp u_1 = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{x_0 - a}$$

Die Aufgabe lässt sich jedoch auch auf rein algebraischem Wege lösen; wie weiter unten (§ 24) bewiesen besteht zwischen $\wp u$ und diesem particulären Integral x die Gl:

$$(\mathrm{VI}) \quad \wp u = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)}}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x,x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{C}{2},$$

wobei:

$$R(x,x_0) = Ax^2x_0^2 + 2B(x+x_0)xx_0 + 6C\,xx_0 + 2B'(x+x_0) + A'.$$

Berechnung der e.

§16. Nach den Ergebnissen des vorigen § ist das allgemeine Integral von $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ eine lineare Function von:

$$\wp(u-u_1 \mid g_2\, g_3)$$

somit eine elliptische Function 2ten Grades von u, deren Perioden dieselben sind wie die ders. Function. Diese sind aber nur von g_2 u. g_3 abhängig (nicht von u_1), somit haben alle particulären Integrale der Diffgl. $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ dieselben Fundamentalperioden.

Dieselben lassen sich nach §§ 5–8 aus den beiden Invarianten $g_2\, g_3$ berechnen. Dabei hat man die Grössen:

$$e_\beta - e_\gamma,\quad e_\alpha - e_\gamma,\quad e_\alpha - e_\beta$$

nötig. Zur Bestimmung der e führt folgende Betrachtung:

Es seien a, a', a'', a''' die 4 Wurzeln von $R(x)$; $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ die 3 Wurzeln von S, und es sei a die bei der Transf.

benutzte Wurzel:

$$s = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{x-a};$$

(1) dann ist

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{4} \frac{R'(a)}{(x-a)^2}$$

Für $x = a$ werden s und $\frac{ds}{dx}$ unendl., während für eine der 3 andern Wurzeln a u. $\frac{ds}{dx}$ endlich und $\frac{ds}{dx} \neq 0$ sind.

Nun ist:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 R(x) = S;$$

also:

$$4(s-e_\alpha)(s-e_\beta)(s-e_\gamma) = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 R(x)$$

Nimmt x einen der Werte a', a'', a''' an, so verschwindet die rechte Seite, es muss also auch die linke verschwinden, somit muss s einen der Werte e', e'', e''' annehmen. Um die 3 e zu erhalten hat man also dem x in der Gl:

$$s = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{x-a}$$

der Reihe nach die Werte a', a'', a''' zu geben, denn nimmt s die Werte e_α, e_β, e_γ (in irgend einer Reihenfolge) an. Dies liefert die Gleichungen:

$$e_\alpha = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{a'-a}$$

$$(2) \qquad e_\beta = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{a''-a} \qquad (I)$$

$$e_\gamma = \frac{1}{24} R''(a) + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{a'''-a}$$

Hieraus folgt, da $R'(a) = A(a-a')(a-a'')(a-a''')$

$$e_\beta - e_\gamma = -\frac{A}{4}(a-a')(a''-a''')$$

$$(3) \qquad e_\alpha - e_\gamma = -\frac{A}{4}(a-a'')(a'-a''') \qquad (II)$$

$$e_\alpha - e_\beta = -\frac{A}{4}(a-a''')(a'-a'')$$

Wir discutiren diese Gleichungen für den für die Anwendungen wichtigsten Fall, dass alle <u>Coefficienten</u> von $R(x)$ <u>reell</u> sind. Dann sind entweder alle 4 Wurzeln reell; oder 2 reell, 2 conjugirt imaginär; oder 2 Paar conj. imag.

<u>I. Hauptfall: alle a reell.</u>

Wir bezeichnen die Wurzeln mit a_0, a_1, a_2, a_3 und setzen fest: $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$.

Wir wählen: $a = a_0$, $a' = a_1$, $a'' = a_2$, $a''' = a_3$.
Dann erhält man aus (3)

$$e_\beta - e_\gamma = -A.P$$
$$e_\alpha - e_\gamma = -A.P$$
$$e_\alpha - e_\beta = -A.P$$

Die drei Differenzen und somit auch die e selbst sind reell: Zur Bestimmung der Indices haben wir 2 Fälle zu unterscheiden:

1) $A > 0$; dann folgt aus der Bedingung $e_1 > e_2 > e_3$: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

2) $A < 0$; dann ist: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ –

II. Hauptfall: 2 Wurzeln reell, 2 conj.

Es seien a_0 u. a_1 reell und $a_0 > a_1$, a_2 u. a_3 conjugirt und $\mathfrak{I}(a_2) > 0$.

Dann ergibt sich:

$$e_\beta - e_\gamma = -i\,\mathfrak{P}.A.$$

Daraus folgt, dass e_β u. e_γ conjugirt imaginär sind. Da ferner $(e_\alpha - e_\gamma)$ u. $(e_\alpha - e_\beta)$ sich als conj. imaginär ergeben, so muss e_α reell sein, wir haben also $e_\alpha = e_2$ zu setzen.

Für die Bestimmung von β u. γ unterscheiden wir wieder:

1) $A > 0$; dann ist $e_\beta - e_\gamma = -i\mathfrak{P}$; es ist aber nach unserem Festsetzungen: $e_1 - e_3 = +i\mathfrak{P}$; somit: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$

2) $A < 0$; dann ist: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$.

III. Hauptfall: 2 Paar conj. Wurzeln.

Es seien a_0 u. a_1 conj. und $\mathfrak{I}(a_0) > 0$; ebenso a_2 u. a_3 conj. und $\mathfrak{I}(a_2) > 0$. Es ergibt sich:

$$e_\beta - e_\gamma = +A\mathfrak{P}$$

$e_\alpha - e_\gamma = -A\mathfrak{P}$, weil $a_0 - a_2$ u. $a_1 - a_3$ conj.

$e_\alpha - e_\beta = -A\mathfrak{P}$, weil $a_0 - a_3$ u. $a_1 - a_2$ conj.

Die drei Differenzen sind also reell; nimmt man also die Gl:

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$$

so folgt: die drei e sind selbst reell.

1) $A > 0$; dann folgt: $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$

2) $A < 0$; dann folgt: $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$

Wir hatten bei der Substitution die Wurzel a_0 gewählt; man überzeugt sich leicht, dass man dieselben Ausdrücke bekommen hätte, wenn man eine andere Wurzel gewählt hätte.

§17. Nach §15 ist:

$$x = a + \frac{1}{4} \frac{R'(a)}{\wp(u) - \frac{1}{24}R''(a)} = \varphi(u, a)$$

ein particuläres Integral der Diffgl. $(\frac{dx}{du})^2 = R(x)$. Dasselbe ist definirt durch die Anfangsbedingung: $x = a$ für $u = 0$.

Gibt man dem a der Reihe nach die Werte a_0, a_1, a_2, a_3 so erhält man 4 particuläre Integrale, welche für die Anwendungen von besonderer Wichtigkeit sind.

Die Function $\varphi(u, a)$ ist eine ellipt. Function 2. Gr. von u; sie wird ∞^1 an den 2 incongruenten Stellen $+u_0$ u. $-u_0$ an welchen:

$$\wp(u) = \frac{1}{24} R''(a).$$

Zur eindeutigen Definition von u_0 ist überdies das Vorzeichen von $\wp'(u_0)$ anzugeben. Es ist:

$$\wp' u = -\frac{1}{4}\frac{R'(a)}{(x-a)^2}\frac{dx}{du},$$

also ist:

$$\wp' u_0 = -\frac{1}{4} R'(a)\left(\frac{\frac{dx}{du}}{(x-a)^2}\right)_{x=\infty} = -\frac{1}{4} R'(a)\sqrt{A}$$

An den beiden Stellen $\pm u_0$ hat $\wp' u$ das entgegengesetzte Vorzeichen; an der einen ist $\sqrt{A} = \sqrt{A}$, an der andern $\sqrt{A} = -\sqrt{A}$ zu setzen. Wir setzen fest, es soll unter u_0 diej. Wurzel der Gl:

$$\wp u = \frac{1}{24} R''(a)$$

verstanden werden, für welche:

$$\wp' u = -\frac{1}{4} R'(a)\sqrt{A}$$

Wie weiter unten (§25) bewiesen wird gilt in der Umgebung der Stelle u_0 die Entwickelung:

$$x = -\frac{(u-u_0)^{-1}}{\sqrt{A}} - \frac{B}{A} - \frac{\frac{B^2}{A} - C}{\sqrt{A}}(u-u_0)$$

$$- \frac{2B^3 - 3ABC + A^2B'}{2A^2}(u-u_0)^2 - \dots$$

und in der Umgebung der Stelle $-u_0$

$$x = +\frac{(u+u_0)^{-1}}{\sqrt{A}} - \frac{B}{A} + \frac{\frac{B^2}{A} - C}{\sqrt{A}}(u+u_0)$$

$$- \frac{2B^3 - 3ABC + A^2B'}{2A^2}(u+u_0)^2 + \cdots$$

Daraus folgt nach Art. 16:

$$\varphi(u,a) = C_0 + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'(u+u_0)}{\sigma(u+u_0)} - \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)}\right)$$

Zur Bestimmung der Constanten C_0 entwickeln wir beide Seiten nach Potenzen von $(u-u_0)$:

$$-\frac{(u-u_0)^{-1}}{\sqrt{A}} - \frac{B}{A} - \frac{\frac{B^2}{A} - C}{\sqrt{A}}(u-u_0) - \frac{2B^3 - 3ABC + A^2B'}{2A^2}(u-u_0)^2 + \cdots$$

$$= -\frac{(u-u_0)^{-1}}{\sqrt{A}} + \left(C_0 + \frac{1}{\sqrt{A}}\,\frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}\right) - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\wp(2u_0)(u-u_0) - \cdots$$

Daraus folgt:

$$C_0 = -\frac{B}{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}$$

Durch Vergleichung der höheren Glieder erhält man nebenbei die Resultate:

$$\wp(2u_0) = \frac{B^2 - AC}{A}$$

$$\text{(I)} \qquad \wp'(2u_0) = \frac{2B^3 + A^2B' - 3ABC}{A\sqrt{A}}$$

Wir haben somit das Resultat:

Bestimmt man die Grösse u_0 aus der Gleichung:

$$(\text{II}) \qquad \wp u_0 = \frac{1}{24} R''(a)$$

mit der Nebenbedingung:

$$\wp' u_0 = -\frac{1}{4} R'(a)\sqrt{A}$$

so ist:

$$(\text{III}_a) \quad \varphi(u,a) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'(u+u_0)}{\sigma(u+u_0)} - \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)} - \frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}\right)$$

Man kann die Constante C_0 auch noch auf eine zweite Art bestimmen; setzt man $u=0$, so wird $\varphi(u,a)=a$, und rechts erhält man:

$$C_0 + \frac{2}{\sqrt{A}} \; \frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}$$

Also:

$$\varphi(u,a) = a + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'(u+u_0)}{\sigma(u+u_0)} - \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)} - 2\,\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}\right)$$

§18. Wir haben jetzt die Bestimmung der Grösse u_0 für den speciellen Fall reeller Coefficienten näher zu discutiren.

u_0 war definirt durch die Gl:

$$\wp(u_0) = \frac{1}{24} R''(a) \quad (= e_0 \text{ zur Abk.})$$

mit der Zeichenbestimmung:

$$\wp' u_0 = -\frac{1}{4} R'(a) \sqrt{A}$$

Nach § 17, 1 ist:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \wp(2u_0) &= \frac{B^2 - AC}{A} \\ \wp'(2u_0) &= \frac{2B^3 + A^2B' - 3ABC}{A\sqrt{A}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: der Wert von $2u_0$ ist (bis auf eine Periode) unabhängig von der Wahl der Wurzel a.

Andrerseits folgt aus (III_a) dass der Wert von u_0 für zwei verschiedene Wurzeln, z. B. a und a' verschieden sein muss, weil sonst $\varphi(u, a)$ und $\varphi(u, a')$ identisch wären. Die Werte von u_0 für die verschiedenen $\varphi(u, a)$ müssen sich also um halbe Perioden unterscheiden. Ist also w_0 ein der Gl. (1) genügender Wert von $2u_0$, so sind die Werte von u_0 für die 4 Functionen $\varphi(u, a)$:

$$\frac{w_0}{2}\,; \quad \frac{w_0}{2} + \omega_1\,; \quad \frac{w_0}{2} + \omega_2\,; \quad \frac{w_0}{2} + \omega_3.$$

Es soll nun für den Fall, dass so reell ist, u_0 näher bestimmt werden. Zu diesem Zweck bilden wir die Differenzen (nach §16, Gl. I):

$$a_0 - e_\alpha = + \frac{A}{4}(a-a'')(a-a''') = \frac{1}{4}\;\frac{R'(a)}{a-a'}$$

$$a_0 - e_\beta = + \frac{A}{4}(a-a')(a-a''') = \frac{1}{4}\;\frac{R'(a)}{a-a''}$$

$$a_0 - e_\gamma = + \frac{A}{4}(a-a')(a-a'') = \frac{1}{4}\;\frac{R'(a)}{a-a'''}$$

Wir haben oben die Indices α, β, γ bestimmt für den Fall, dass $a = a_0$, $a' = a_1$, $a'' = a_2$, $a''' = a_3$ gesetzt wird; gibt man dem a den Wert a_1, so muss man $a' = a_0$, $a'' = a_3$, $a''' = a_2$ wählen, damit die Differenzen $e_\beta - e_\gamma$, $e_\alpha - e_\gamma$, $e_\alpha - e_\beta$ dieselben Werte annehmen wie im vorigen Fall; alsdann nehmen aber auch die Indices α, β, γ dieselben Werte an wie für

$$a = a_0,\; a' = a_1,\; a'' = a_2,\; a''' = a_3.$$

Die folgende Tabelle gibt an, in welcher Reihenfolge man in den vier

Fällen $a = a_0, a_1, a_2, a_3$ die drei Wurzeln a', a'', a''' mit a_0, a_1, a_2, a_3 bezeichnen muss, damit die in § 16 gegebene Bestimmung der Indices für alle Fälle gültig bleibt:

	a	a'	a''	a'''
$\varphi(u, a_0)$	a_0	a_1	a_2	a_3
$\varphi(u, a_1)$	a_1	a_0	a_3	a_2
$\varphi(u, a_2)$	a_2	a_3	a_0	a_1
$\varphi(u, a_3)$	a_3	a_2	a_1	a_0

Um das Vorzeichen der drei Differenzen zu erhalten, muss man noch das von $R'(a)$ kennen.

Wenn alle Wurzeln reell u $A > 0$, so ist $R'(a_0) > 0$; $R'(a_1) < 0$; $R'(a_2) > 0$ $R'(a_3) < 0$

Wenn dagegen $A < 0$, so ist

$R'(a_0) < 0$; $R'(a_1) > 0$; $R'(a_2) < 0$; $R'(a_3) > 0$

Dasselbe gilt im zweiten Hauptfall für $R'(a_0)$ und $R'(a_1)$

Hiernach kann man nun das Vorzeichen von s_0-e_1, s_0-e_2, s_0-e_3 bestimmen, also angeben in welchem der 4 Intervalle: $+\infty \ldots e_1$, $e_1 \ldots e_2$, $e_2 \ldots e_3$, $e_3 \ldots -\infty$, s_0 liegt.

Zur Bestimmung der Lage von u_0 hat man dann noch das Vorzeichen von $\wp'(u_0) = -\frac{1}{4} R'(a)\sqrt{A}$ zu bestimmen. Hiernach kann man auch die halbe Periode $\bar{\omega}$ angeben, um welche sich die Werte von u_0 für zwei verschiedene Functionen $\varphi(u, a)$ unterscheiden.

Die Durchführung der Rechnung ergibt für die beiden ersten Hauptfälle folgende Tabellen, in welchen v_0 eine reelle positive Grösse zwischen 0 und ω_1 (resp. 0 und ω_2) bedeutet. v_0' eine reelle positive Grösse zwischen 0 und $\frac{\omega_3'}{i}$ (resp. 0 und $\frac{\omega_2'}{i}$).

I. Hauptfall: Alle a reell.

Für die Function:	$A > 0$	$A < 0$
	hat u_0 den Wert:	
$\varphi(u, a_0)$	v_0	$v_0'i + \omega_3$
$\varphi(u, a_1)$	$v_0 + \omega_3$	$v_0'i + \omega_2$
$\varphi(u, a_2)$	$v_0 + \omega_2$	$v_0'i + \omega_1$
$\varphi(u, a_3)$	$v_0 + \omega_1$	$v_0'i$

II. Hauptfall: 2 Wurzeln reell, 2 imaginär.

Hier bestimmen wir u_0 nur für die beiden reellen Functionen $\varphi(u, a_0)$ und $\varphi(u, a_1)$

	$A > 0$	$A < 0$
φ	u_0	
$\varphi(u, a_0)$	v_0	$v_0'i + \omega_2$
$\varphi(u, a_1)$	$v_0 + \omega_2$	$v_0'i$

III. Hauptfall: 2 Paar conjugirte Wurzeln.

In diesem Fall ist die Bestimmung

von u_0 weniger einfach.

Es sei: $a_0 = \lambda + \mu i, \quad a_1 = \lambda - \mu i \quad \mu > 0$

$a_2 = \lambda' + \mu' i, \quad a_3 = \lambda' - \mu' i \quad \mu' > 0$

Dann ist:

$$s_0 = e_\beta + \frac{A}{4}(a - a')(a - a''')$$

Also für die Function $\varphi(u, a_0)$

$$s_0 = e_\beta + \frac{A}{4}(a_0 - a_1)(a_0 - a_3) = e_\beta + \frac{A}{2} i\beta\left[(\alpha - \alpha') + (\beta + \beta')\, i\right]$$

$$= \left[e_\beta - \frac{A}{2}\beta(\beta + \beta')\right] + \frac{A}{2}\beta(\alpha - \alpha')\, i.$$

Da e_β reell ist, so ist s_0 imaginär ausser wenn $\alpha - \alpha' = 0$. Wir haben also 2 Fälle zu unterscheiden.

1) $\alpha \neq \alpha'$. Dann ist s_0 imaginär; u_0 liegt also nicht auf den Seiten des Rechtecks $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ oder von Verlängerungen. Wegen §17, I wissen wir aber, dass $2u_0$ auf den Seiten dieses Rechtecks (oder Verlängerungen) liegt.

a) $A > 0$; dann ist $\wp'(2u_0)$ reell; somit muss nach §12 $2u_0$ die

Form haben:

$$2u_0 = 2v_0 + 2\tilde{\omega}, \text{ oder}$$

$$2u_0 = 2v_0 + 2\tilde{\omega} + \omega_3$$

Da aber u_0 nicht $= v_0 + \tilde{\omega}$ sein kann, weil sonst $\wp u_0$ reell wäre, so folgt:

$$u_0 = v_0 + \frac{\omega_3}{2} + \tilde{\omega}.$$

Da nun die Werte von u_0 für die verschiedenen $\varphi(u, a)$ sich nur um halbe Perioden unterscheiden, so folgt, dass die 4 Werte von u_0 in irgend einer Reihenfolge sind:

$$v_0 + \frac{\omega_3}{2}; \quad v_0 + \frac{\omega_3}{2} + \omega_1, \quad v_0 + \frac{\omega_3}{2} + \omega_2, \quad v_0 + \frac{\omega_3}{2} + \omega_3$$

b) $A < 0$; dann ist $\wp'(2u_0)$ imaginär, somit

$$2u_0 = 2v_0' i + 2\tilde{\omega} + \omega_1,$$

somit heissen die 4 Werte von u_0:

$$v_0' i + \frac{\omega_1}{2}, \quad v_0' i + \frac{\omega_1}{2} + \omega_1, \quad v_0' i + \frac{\omega_1}{2} + \omega_2; \quad v_0' i + \frac{\omega_1}{2} + \omega_3.$$

Die Entscheidung, wie diese vier Werte von u_0 den 4 Functionen $\varphi(u,a)$ zuzuordnen sind, hängt von dem Vorzeichen von $\alpha - \alpha'$ ab. Zur Ausführung hat man die Werte von $\wp(\frac{\omega_\lambda}{2})$ nötig. Man erhält dieselben, wenn man in der Formel:

$$\wp(u+\omega_\lambda) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda}$$

$u = -\frac{\omega_\lambda}{2}$ setzt.

2) $\alpha = \alpha'$. Setzt man dann: $x - a = y$, so kommt:

$$R(x) = A(y^2+\beta^2)(y^2+\beta'^2)$$

a_0 wird reell; die Bestimmung von u_0 ergibt sich ohne Schwierigkeit aus §12. Unter der Voraussetzung $\beta > \beta'$ ergibt sich folgende Tabelle:

	$A > 0$	$A < 0$
φ	u_0	
$\varphi(u, a_0)$	$v_0' i + \omega_3$	$v_0 + \omega_1$
$\varphi(u, a_1)$	$v_0' i$	$v_0 + \omega_3$
$\varphi(u, a_2)$	$v_0' i + \omega_1$	v_0
$\varphi(u, a_3)$	$v_0' i + \omega_2$	$v_0 + \omega_2$

Verlauf der Functionen $\varphi(u,a)$.

§19. Es soll im Folgenden der Verlauf der Functionen $\varphi(u,a)$ untersucht werden, wenn a den Umfang des Rechtecks $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ (resp. $0, \omega_2, 2\omega_3, \omega_2'$) durchläuft. Es war:

$$\varphi(u,a) = a + \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{s-s_0}.$$

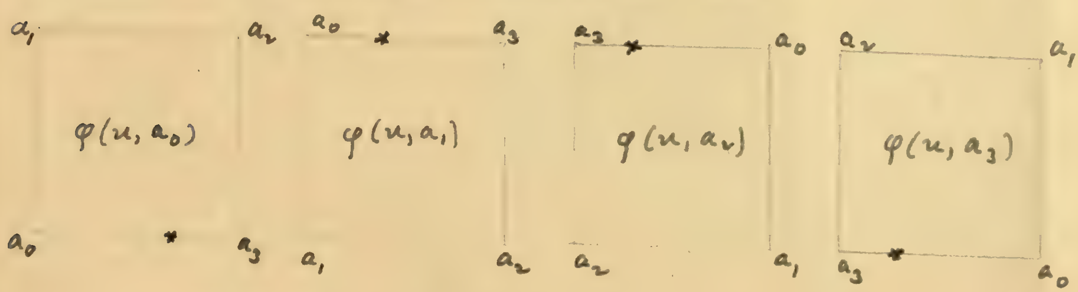
Wir betrachten nun die Fälle, in denen a, also auch $R'(a)$ reell sind: wenn u den Umfang des angegebenen Rechtecks durchläuft, so nimmt s von $+\infty$ durch e_1, e_2, e_3 bis $-\infty$ ab. (resp. von $+\infty$ über e_2 bis $-\infty$; dann wieder von $+\infty$ über e_2 bis $-\infty$). $\varphi(u,a)$ wird also beständig zunehmen wenn $R'(a) > 0$, dagegen beständig abnehmen wenn $R'(a) < 0$. Da überdiess den Werten $0, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ von s die Werte a', a'', a''' von $\varphi(u,a)$ entsprechen, so lässt sich der Verlauf von $\varphi(u,a)$ leicht angeben.

I. Hauptfall: Alle a reell.

1) $A > 0$.

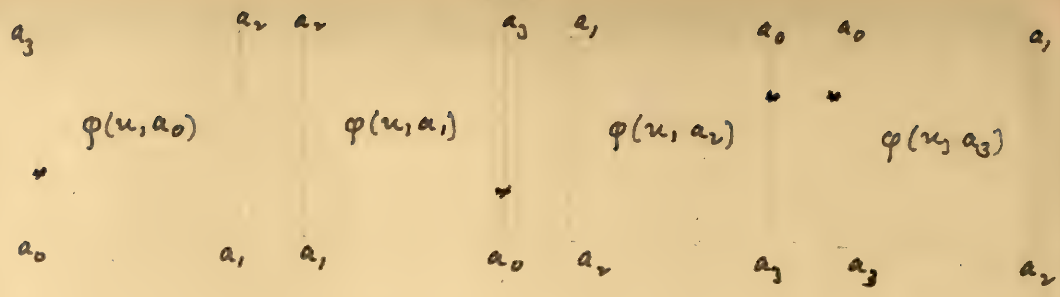
u	$\varphi(u, a_0)$	$\varphi(u, a_1)$	$\varphi(u, a_2)$	$\varphi(u, a_3)$
0	a_0	a_1	a_2	a_3
ω_1	a_3	a_2	a_1	a_0
ω_2	a_2	a_3	a_0	a_1
ω_3	a_1	a_0	a_3	a_2

In dem folgenden Diagramm bezeichnet * die Unendlichkeitsstelle:



2) $A < 0$.

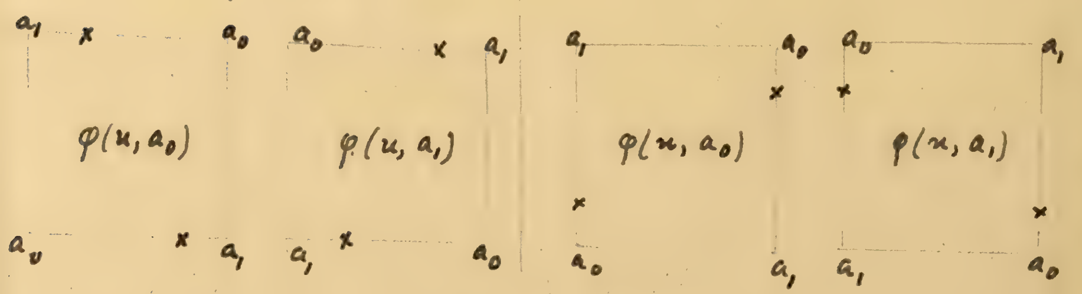
u	$\varphi(u, a_0)$	$\varphi(u, a_1)$	$\varphi(u, a_2)$	$\varphi(u, a_3)$
0	a_0	a_1	a_2	a_3
ω_1	a_1	a_0	a_3	a_2
ω_2	a_2	a_3	a_0	a_1
ω_3	a_3	a_2	a_1	a_0



II. Hauptfall: 2 Wurzeln reell, 2 imaginär.

	1) $A > 0$		2) $A < 0$	
u	$\varphi(u, a_0)$	$\varphi(u, a_1)$	$\varphi(u, a_0)$	$\varphi(u, a_1)$
0	a_0	a_1	a_0	a_1
ω_2	a_1	a_0	a_1	a_0
$2\omega_3$	a_0	a_1	a_0	a_1
ω_2'	a_1	a_0	a_1	a_0

1) $A > 0$ 2) $A < 0$



III. Hauptfall: Alle Wurzeln imaginär.

In diesem Falle ist für die Anwendungen die Untersuchung der $\varphi(u, a)$ ohne Bedeutung, da dieselben imaginäre Werte durchlaufen. Statt dessen wollen wir ein particuläres Integral herleiten, das für $u = 0$ unendlich wird. Das allgemeine Integral ist:

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'(u+\kappa+u_0)}{\sigma(u+\kappa+u_0)} - \frac{\sigma'(u+\kappa-u_0)}{\sigma(u+\kappa-u_0)} - \frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}\right)$$

Soll x für $u = 0$ ∞ werden, so muss $\kappa = \pm u_0$ gesetzt werden.

1) $\kappa = +u_0$

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'(u+2u_0)}{\sigma(u+2u_0)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}\right) = \psi_1(u)$$

Für reelle u ist x reell, wenn $A > 0$. Denn es ist:

$$\frac{\sigma'(u+2u_0)}{\sigma(u+2u_0)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp'(2u_0)}{\wp u - \wp(2u_0)}.$$

und $\wp(2u_0)$ und $\wp'(2u_0)$ sind reell wenn $A > 0$.

Für $u = 0$ wird $x = -\infty$; ferner

ist:

$$\frac{d\psi_1}{du} = - \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\wp(u+2u_0) - \wp u \right)$$

für $u = +0$ positiv; für reelle Werte von u verschwindet $\frac{dx}{du}$ nicht, denn dies kann nur eintreten für:

$$u + 2u_0 = \pm u + 2\tilde{\omega}$$

oder

$$u = \tilde{\omega} - u_0,$$

was stets complex ist.

$\frac{dx}{du}$ wird zwischen 0 u. $2\omega_1$ auch nicht ∞, also wächst $\psi_1(u)$ beständig von 0 bis $2\omega_1$; für $u = 2\omega_1$ wird $\psi_1 u = +\infty$.

2) $K = - u_0$

$$\psi_2(u) = - \frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma'(u-2u_0)}{\sigma(u-2u_0)} - \frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)} \right),$$

ebenfalls reell für reelle u.

Wächst u von 0 bis $2\omega_1$, so nimmt ψ_2 ab von $+\infty$ bis $-\infty$.

Das Raisonnement bleibt auch für den in § 18 erwähnten Ausnahmsfall $\alpha = \alpha'$ gültig, weil auch dann u_0 imaginär.

Beziehungen zwischen den $\varphi(u, a)$

§ 20. Das allgemeine Integral unserer Diffgl. ist:

$$x = \varphi(u + k, a)$$

wo k die Integrationsconstante. Durch passende Bestimmung von k muss man die particulären Integrale $\varphi(u, a)$, $\varphi(u, a')$, $\varphi(u, a'')$, $\varphi(u, a''')$ erhalten. Es muss sich, z. B., k so bestimmen lassen, dass:

$$\varphi(u, a_1) = \varphi(u + k, a_0)$$

Zur Bestimmung setzt man $u = 0$; dann wird:

$$\varphi(0, a_1) = a_1$$

k muss also der Gleichung genügen:

$$a_1 = \varphi(k, a_0)$$

Ist, z. B., $A > 0$ und haben wir den ersten Hauptfall, so ist nach § 19:

$$\varphi(\omega_3, a_0) = a_1 \quad ; \text{ also } \quad k = \omega_3$$

In dieser Weise lässt sich die Constante k für alle einzelnen Fälle bestimmen.

Vorzeichen von $\sqrt{R(x)}$.

§21. Alle Functionen $\varphi(u, a)$ genügen der Diffgl.:
$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x);$$
so ist also:
$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$
Um das Vorzeichen von $\sqrt{R(x)}$ für die einzelnen Functionen und für die verschiedenen Intervalle zu erhalten, beachten ~~wir~~, dass:
$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{du} = -\frac{1}{4} \frac{R'(a)}{(s-s_0)} \cdot \frac{ds}{du}$$
Das Vorzeichen von $\frac{ds}{du}$ ist bekannt (§11); somit ist also auch das von $\frac{dx}{du}$, d. h. das von $\sqrt{R(x)}$ bestimmt. Man erhält für die verschiedenen Fälle folg. Tabelle.

I. Hauptfall: alle a reell.

1) $A > 0$.

$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$ versehen mit folg. Zeichen.

u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_2}{du}$	$\frac{d\varphi_3}{du}$
$0 \ldots\ldots \omega_1$	+	−	+	−
$\omega_1 \ldots\ldots \omega_2$	−	+	−	+
$\omega_2 \ldots\ldots \omega_3$	−	+	−	+
$\omega_3 \ldots\ldots 0$	+	−	+	−

2) $A < 0$

$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$ mit folg. Zeichen

u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_2}{du}$	$\frac{d\varphi_3}{du}$
$0 \ldots \omega_1$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\omega_1 \ldots \omega_2$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\omega_2 \ldots \omega_3$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\omega_3 \ldots 0$	$-$	$+$	$-$	$+$

II. Hauptfall: a_0 u. a_1 reell, a_2 u. a_3 imag.

In diesem Falle lassen wir u das Rechteck $0, \omega_2, 2\omega_3, \omega_2'$ umlaufen, und erhalten für das Vorzeichen von $\sqrt{R(x)}$ folgende Tabelle:

	1) $A > 0$		2) $A < 0$	
u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$
$0 \ldots \omega_2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\omega_2 \ldots 2\omega_3$	$-$	$+$	$+$	$-$
$2\omega_3 \ldots \omega_2'$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\omega_2' \ldots 0$	$+$	$-$	$-$	$+$

III. Hauptfall: Alle a imaginär.

$$A > 0.$$

Es ist von $u = -\infty$ bis $u = +\infty$:

$$\frac{d\psi_1}{du} = +\sqrt{R(\psi_1)} \quad ; \quad \frac{d\psi_2}{du} = -\sqrt{R(\psi_2)}.$$

[Wir schliessen hieran, als Nachtrag zu § 12 die Untersuchung des Vorzeichens von

$$\sqrt{S} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

Aus der Tabelle in § 12 folgt:

1) alle e reell:

$$u = 0 \ldots\ldots \omega_1 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$$

$$u = \omega_1 \ldots\ldots \omega_2 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = +\sqrt{S}$$

$$u = \omega_2 \ldots\ldots \omega_3 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = +\sqrt{S}$$

$$u = \omega_3 \ldots\ldots 0 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$$

2) e_2 reell; e_1, e_3 conjugirt imaginär:

$$u = 0 \ldots\ldots \omega_2 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$$

$$u = \omega_2 \ldots\ldots 2\omega_3 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = +\sqrt{S}$$

$$u = 2\omega_3 \ldots\ldots \omega_2' \quad ; \quad \frac{ds}{du} = +\sqrt{S}$$

$$u = \omega_2' \ldots\ldots 0 \quad ; \quad \frac{ds}{du} = -\sqrt{S}.$$]

VI. Kapitel.
Elliptische Integrale.

§ 22. Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, zwischen zwei Wurzeln von $R(x)$ genommen.

I. Fall: alle a reell.

$$J_{-\infty}^{a_3} = \int_{-\infty}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} ;$$

zur Berechnung setze:

$$x = \varphi(u, a_0).$$

Geht u von v bis ω_1, so wächst x von $-\infty$ bis a_3; es ist $\frac{dx}{du} = +\sqrt{R(x)}$, also:

$$J_{-\infty}^{a_3} = \int_v^{\omega_1} du = \omega_1 - v ;$$

s nimmt ab von c_0 bis e_1 und $\frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$, also $du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$; demnach

$$J_{-\infty}^{a_3} = \int_{e_1}^{c_0} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

Zur Berechnung von $J_{a_3}^{a_2}$ setze:

$$x = \varphi(u, a_2).$$

Es ist: $\frac{dx}{du} = +\sqrt{R(x)}$, und u geht von ω_3

bis 0. Also:

$$J_{a_3}^{a_2} = \int_{\omega_3}^{0} du = -\omega_3$$

s nimmt von e_3 bis $-\infty$ ab, und

$\frac{ds}{du} = -\sqrt{S}$, also:

$$J_{a_3}^{a_2} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

In derselben Weise berechnet man $J_{a_2}^{a_1}$, $J_{a_1}^{a_0}$, $J_{a_0}^{+\infty}$ und erhält folgende Tabelle:

1) $A > 0$.

	Grenzen von u	Grenzen von $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$	Grenzen von $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$	Wert des Integrals	Transform.-Function
	$v \ldots \omega_1$	$-\infty \ldots a_3$	$e_1 \ldots e_0$	$\omega_1 - v$	$\varphi(u, a_0)$
(1)	$\omega_3 \ldots 0$	$a_3 \ldots a_2$	$-\infty \ldots e_3$	$-\omega_3$	$\varphi(u, a_2)$
	$0 \ldots \omega_1$	$a_2 \ldots a_1$	$e_1 \ldots +\infty$	ω_1	$\varphi(u, a_2)$
	$\omega_3 \ldots 0$	$a_1 \ldots a_0$	$-\infty \ldots e_3$	$-\omega_3$	$\varphi(u, a_0)$
	$0 \ldots v$	$a_0 \ldots +\infty$	$e_0 \ldots +\infty$	v	$\varphi(u, a_0)$

2) $A < 0$

	Grenzen von $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$	Transform.-Function	Grenzen von $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$	Wert des Integrals	Grenzen von u
	$-\infty \ldots a_3$	$\varphi(u, a_3)$	$-\infty \ldots e_3$	$-v'i$	$v'i \ldots 0$
(2)	$a_3 \ldots a_2$	$\varphi(u, a_3)$	$e_1 \ldots +\infty$	ω_1	$0 \ldots \omega_1$
	$a_2 \ldots a_1$	$\varphi(u, a_1)$	$-\infty \ldots e_3$	$-\omega_3$	$\omega_3 \ldots 0$
	$a_1 \ldots a_0$	$\varphi(u, a_1)$	$e_1 \ldots +\infty$	ω_1	$0 \ldots \omega_1$
	$a_0 \ldots +\infty$	$\varphi(u, a_3)$	$e_0 \ldots e_3$	$+v'i - \omega_3$	$\omega_3 \ldots v'i$

II. Fall: a_0 u. a_1 reell, a_2 u. a_3 imag.

1) $A > 0$

	Grenzen von $\int\frac{dx}{\sqrt{R_x}}$	Transf.-Function	Grenzen von $\int\frac{dx}{\sqrt{S}}$	Wert des Integrals	Grenzen von u
(3)	$-\infty \ldots a_1$	$\varphi(u, a_0)$	$e_2 \ldots c_0$	$\omega_2 - v$	$v \ldots \omega_2$
	$a_1 \ldots a_0$	$\varphi(u, a_0)$	$-\infty \ldots e_2$	$-\omega_2'$	$\omega_2' \ldots 0$
	$a_0 \ldots +\infty$	$\varphi(u, a_0)$	$c_0 \ldots +\infty$	v	$0 \ldots v$

2) $A < 0$

	Grenzen von $\int\frac{dx}{\sqrt{R_x}}$	Transf.-Function	Grenzen von $\int\frac{dx}{\sqrt{S}}$	Wert des Integrals	Grenzen von u
(4)	$-\infty \ldots a_1$	$\varphi(u, a_1)$	$-\infty \ldots c_1$	$-v'i$	$v'i \ldots 0$
	$a_1 \ldots a_0$	$\varphi(u, a_1)$	$e_2 \ldots +\infty$	ω_2	$0 \ldots \omega_2$
	$a_0 \ldots +\infty$	$\varphi(u, a_1)$	$c_1 \ldots e_2$	$v'i - \omega_2'$	$\omega_2' \ldots v'i$

III. Fall: Alle a imaginär.

$A > 0.$

Setze:

$$x = \psi_1(u),$$

so wird:

$$(5)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 2\int_{e_1}^{+\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}} = 2\omega_1.$$

Der Specialfall: $A = 0$.

§23. Wenn $A = 0$ ist, so werden die bisherigen Formeln nicht mehr anwendbar; es wird dann $R(x)$ vom 3. Grade; seien a_3, a_2, a_1 die 3 Wurzeln von $R(x)$.

Die Transformation:

$$(1) \qquad x = a + \frac{\frac{1}{4}R'(a)}{s - \frac{1}{24}R''(a)} = \varphi(u, a)$$

bleibt auch dann gültig, nur tritt an Stelle von $\varphi(u, a_0)$ eine einfachere:

$$(2) \qquad x = \frac{s - \frac{C}{2}}{B};$$

wir bezeichnen

$$\varphi(u, a_0) = \frac{\wp u}{B} - \frac{C}{2B}$$

Wir haben auch hier die Berechnung der e, der $\bar{u}_0$, ferner die Discussion der $\varphi(u, a)$ durchzuführen:

1) Berechnung der e.

Aus (2) folgt:

$$s = Bx + \frac{C}{2},$$

also:

$$e_\lambda = B a_3 + \frac{C}{2} \qquad e_\lambda - e_\mu = B(a_3 - a_2)$$

$$(3) \qquad e_\mu = B a_2 + \frac{C}{2} \qquad e_\lambda - e_\nu = B(a_3 - a_1)$$

$$e_\nu = B a_1 + \frac{C}{2} \qquad e_\mu - e_\nu = B(a_2 - a_1)$$

<u>I. Fall</u>: <u>alle a reell</u>: <u>$a_1 > a_2 > a_3$</u>

1) $B > 0$. alle e sind reell und

$$(4) \qquad e_\lambda = e_3\,, \quad e_\mu = e_2\,, \quad e_\nu = e_1$$

2) $B < 0$. alle e reell, und

$$(5) \qquad e_\lambda = e_1\,, \quad e_\mu = e_2\,, \quad e_\nu = e_3$$

<u>II. Fall</u>: <u>a_1 reell, a_2 u. a_3 conj. imag.</u>

$a_2 = \alpha + \beta i$, $a_3 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$.

Es wird $e_\nu = e_2$ und e_λ und e_μ conj. imag. Da $e_1 - e_3$ pos. imag., so folgt weiter:

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} 1)\ B > 0 : & e_\lambda = e_3\,;\ e_\mu = e_1 \\ 2)\ B < 0 : & e_\lambda = e_1\,;\ e_\mu = e_3 \end{array}$$

2) Verlauf der Functionen $\varphi(u, a)$.

I. Fall: Alle a reell.

a) Es ist:

$$\varphi(u, a_0) = \frac{\wp u}{B} - \frac{C}{2B}$$

1) $B > 0$: für $u = 0$ ist $\wp u = +\infty$, also $x = +\infty$; $\frac{d\varphi_0}{dt}$ ist negativ; für $u = \omega$ ist

$$x = \frac{e_1}{B} - \frac{C}{2B} = a_1$$

Geht u von ω_1 bis ω_2, so nimmt x, stets reell bleibend, von a_1 bis a_2 ab; von ω_2 bis ω_3 geht x von a_2 bis a_3; von ω_3 bis 0 nimmt x von a_3 bis $-\infty$ ab.

2) $B < 0$.

u	0	ω_1	ω_2	ω_3	0
x	$-\infty$	a_3	a_2	a_1	$+\infty$

Ferner waren $\pm u_0$ die beiden incongruenten ∞-Stellen von $\varphi(u, a_0)$; beide fallen hier zusammen mit $u = 0$; also $u_0 = 0$. Die Darstellung von x nach § 17 verliert zugleich ihre Gültigkeit, da x für $u = 0$ von der 2ten Ordn. ∞ wird.

b)

$$\varphi(u, a_1) = a_1 + \frac{b_1}{\wp u - e_1}$$

$$c_1 = \frac{1}{24} R''(a_1) \; ; \quad b_1 = B(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) = \frac{1}{4} R'(a_1)$$

$$s = c_1 + \frac{b_1}{x - a_1} \; ;$$

setzt man $x = a_1, a_2$, so kommt:

$$e_\lambda' = c_1 - B(a_1 - a_3) = c_1 + e_\lambda - e_\nu$$

$$e_\mu' = c_1 - B(a_1 - a_2) = c_1 + e_\mu - e_\nu,$$

daraus:
$$e_\lambda' - e_\mu' = e_\lambda - e_\mu .$$

Beachtet man, dass $e_\lambda', e_\mu', e_\nu'$ abgesehen von der Reihenfolge mit e_λ, e_μ, e_ν identisch sind, so folgt aus der letzten Gl.:

$$e_\lambda' = e_\lambda \; ; \quad e_\mu' = e_\mu \; :$$

denn bei jeder andern Annahme würde man eine mit der Gl: $e_\lambda + e_\mu + e_\nu = 0$ nicht identische Relation zwischen e_λ, e_μ, e_ν erhalten, was gegen die vorausgesetzte Willkürlichkeit von $a_1\, a_2\, a_3$ verstossen würde. Dann folgt aber:

$$c_1 = \frac{1}{24} R''(a_1) = e_\nu$$

1) $B > 0$; $b_1 > 0$; $\frac{dx}{dt} > 0$; $c_1 = e_1$. Für $u = 0$ ist $x = a_1$; mit u wächst x : für

$u = \omega_1$ wird $x = \infty$; weil $\wp\omega_1 = e_1 = c_1$:
für $u = \omega_2$ wird $x = a_1 + \dfrac{B(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{e_2 - c_1} =$

$$= a_1 + \frac{B(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{B(a_2 - a_1)} = a_1 - (a_1 - a_3) = a_3 ;$$

für $u = \omega_3$ wird $x = a_2$. Endlich wird $u_0 = \omega_1$.

In dieser Weise ist die folgende Tabelle berechnet:

1) $B > 0$.

(7)

	$\frac{1}{24} R''(a)$	u: 0	ω_1	ω_2	ω_3
$\varphi(u, a_0)$	∞	$+\infty$	a_1	a_2	a_3
$\varphi(u, a_1)$	e_1	a_1	$\pm\infty$	a_3	a_2
$\varphi(u, a_2)$	e_2	a_2	a_3	$\mp\infty$	a_1
$\varphi(u, a_3)$	e_3	a_3	a_2	a_1	$\pm\infty$

2) $B < 0$.

(8)

	$\frac{1}{24} R''(a)$	u: 0	ω_1	ω_2	ω_3
$\varphi(u, a_0)$	∞	$-\infty$	a_3	a_2	a_1
$\varphi(u, a_1)$	e_3	a_1	a_2	a_3	$\mp\infty$
$\varphi(u, a_2)$	e_2	a_2	a_1	$\pm\infty$	a_3
$\varphi(u, a_3)$	e_1	a_3	$\mp\infty$	a_1	a_2

Da sämmtliche Functionen $\varphi(u, a)$ an ihren ∞-Stellen ∞^2 werden, so eignet sich die Darstellung des § 17 nicht mehr.

Das allgemeine Integral der Diffgl.:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

ist:

$$x = \frac{\wp(u+\alpha)}{B} - \frac{C}{2B}.$$

In dieser Form müssen also die 4 $\varphi(u, a)$ enthalten sein:

$$\varphi(u; a_1) = \frac{\wp(u+\alpha_1)}{B} - \frac{C}{2B}$$

Setzt $u = 0$, so kommt:

$$a_1 = \frac{\wp\alpha_1}{B} - \frac{C}{2B} = \frac{e_\nu}{B} - \frac{C}{2B},$$

also

$$\wp\alpha_1 = e_\nu$$

1). $B > 0$; $e_\nu = e_1$. $\alpha_1 = \omega_1$

2) $B < 0$; $e_\nu = e_3$. $\alpha_1 = \omega_3$

Man erhält in dieser Weise folg. Tabelle:

		1) $B > 0$	2) $B < 0$
(9)	$\varphi(u, a_1) =$	$\frac{\wp(u+\omega_1)}{B} - \frac{C}{2B}$	$\frac{\wp(u+\omega_3)}{B} - \frac{C}{2B}$
	$\varphi(u, a_2) =$	$\frac{\wp(u+\omega_2)}{B} - \frac{C}{2B}$	$\frac{\wp(u+\omega_2)}{B} - \frac{C}{2B}$
	$\varphi(u, a_3) =$	$\frac{\wp(u+\omega_3)}{B} - \frac{C}{2B}$	$\frac{\wp(u+\omega_1)}{B} - \frac{C}{2B}$

II. Fall: a_1 reell; a_2 u. a_3 conj. imag.

1) $B > 0$.

	$\frac{1}{24} R''(a)$	0	ω_2	$2\omega_3$	ω_2'
$\varphi(u, a_0)$	∞	$+\infty$	a_1	$\mp\infty$	a_1
$\varphi(u, a_1)$	e_2	a_1	$\pm\infty$	a_1	$\pm\infty$

2) $B < 0$.

$\varphi(u, a_0)$	∞	$-\infty$	a_1	$\pm\infty$	a_1
$\varphi(u, a_1)$	e_2	a_1	$\mp\infty$	a_1	$\mp\infty$

$$\varphi(u, a_1) = \frac{\wp(u+\omega_2)}{B} - \frac{C}{2B}$$

für $B > 0$ und $B < 0$.

3) Vorzeichen von $\sqrt{R(x)}$.

I. Fall: Alle a reell.

1) $B > 0$.

u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_2}{du}$	$\frac{d\varphi_3}{du}$
0 ----- ω_1	$-$	$+$	$-$	$+$
ω_1 ---- ω_2	$+$	$-$	$+$	$-$
ω_2 ---- ω_3	$+$	$-$	$+$	$-$
ω_3 ---- 0	$-$	$+$	$-$	$+$

2) $B < 0$.

u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_2}{du}$	$\frac{d\varphi_0}{du}$
$0 \dots \omega_1$	+	−	+	−
$\omega_1 \dots \omega_2$	−	+	−	+
$\omega_2 \dots \omega_3$	−	+	−	+
$\omega_3 \dots 0$	+	−	+	−

II. Fall: a_2 und a_3 conj. imaginär.

	1) $B > 0$		2) $B < 0$	
u	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$	$\frac{d\varphi_0}{du}$	$\frac{d\varphi_1}{du}$
$0 \dots \omega_2$	−	+	+	−
$\omega_2 \dots 2\omega_3$	+	−	−	+
$2\omega_3 \dots \omega_2'$	+	−	−	+
$\omega_2' \dots 0$	−	+	+	−

4) Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, genommen zwischen 2 Wurzeln von $R(x)$.

Ganz nach denselben Principien wie in § 22 findet man folgende Tabelle:

I. Fall: Alle a reell.

Grenzen von $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$	Transform.-Function	Grenzen von $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$	Grenzen von u	Wert des Integrals
		1) $B > 0$		
$-\infty \dots a_3$	$\varphi_0(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_3 \dots 0$	$-\omega_3$
$a_3 \dots a_2$	$\varphi_3(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_1$	ω_1
$a_2 \dots a_1$	$\varphi_1(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_3 \dots 0$	$-\omega_3$
$a_1 \dots +\infty$	$\varphi_1(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_1$	ω_1
		2) $B < 0$		
$-\infty \dots a_3$	$\varphi_0(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_1$	ω_1
$a_3 \dots a_2$	$\varphi_2(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_3 \dots 0$	$-\omega_3$
$a_2 \dots a_1$	$\varphi_2(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_1$	ω_1
$a_1 \dots +\infty$	$\varphi_0(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_3 \dots 0$	$-\omega_3$

II. Fall: a_2 und a_3 conj. imaginär.

Grenzen von $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$	Transform.-Function	Grenzen von $\int \frac{ds}{\sqrt{S}}$	Grenzen von u	Wert des Integrals
		1) $B > 0$		
$-\infty \dots a_1$	$\varphi_1(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_2' \dots 0$	$-\omega_2'$
$a_1 \dots +\infty$	$\varphi_1(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_2$	ω_2
		2) $B < 0$		
$-\infty \dots a_1$	$\varphi_0(u)$	$e_1 \dots +\infty$	$0 \dots \omega_2$	ω_2
$a_1 \dots +\infty$	$\varphi_0(u)$	$-\infty \dots e_3$	$\omega_2' \dots 0$	$-\omega_2'$

Das Integral: $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

§ 24. Es seien jetzt x_0 und $x_1 > x_0$ zwei Werte von x die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln a', a von $R(x)$ eingeschlossen sind, so dass also:

$$a' < x_0 < x_1 < a.$$

Es soll das allgemeine Integral $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ berechnet werden.

Wenn eine der beiden Grenzen $x_0 x_1$ mit a' resp. a zusammenfällt, so setzt man für x dij. Function $\varphi(u)$, die bei der Berechnung des Integrals zwischen den Grenzen a' u. a benutzt wurde; die eine Grenze für u ist dann in der Form ω enthalten, die andere ist derj. Wert von u für welchen $x = x_0$ resp. x_1 wird, und den man nach § 10 berechnen kann.

Ebenso könnte man das allgemeine Integral mit den Grenzen $x_0 \dots x_1$ behandeln; dann hätte man aber für beide Grenzen die langwierige Rechnung des §10 durchzuführen.

Es ist daher von grösster Wichtigkeit, dass dieser Fall sich auf den vorigen zurückführen lässt.

Wir stellen uns, um dies zu zeigen, zunächst die Aufgabe, ein particuläres Integral der Diffgl.

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

zu bestimmen, welches für $u = 0$ den Wert x_0 annimmt, während überdies $\left(\frac{dx}{du}\right)_0 = y_0$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält.

Das allgemeine Integral von (1) ist:

$$x = a + \frac{b}{\wp(u-\alpha) - c},$$

wo α eine willkürliche Constante.

$$(2) \quad \wp(u-\alpha) = c + \frac{b}{x-a} \quad ; \quad \wp'(u-\alpha) = -\frac{b}{(x-a)^2}\, y.$$

Zur Bestimmung von α erhalten wir, also:

$$(3) \quad \wp\alpha_0 = c + \frac{b}{x_0 - a} \quad ; \quad \wp'\alpha_0 = \frac{b}{(x_0 - a)^2}\, y_0,$$

wo durch α_0 bis auf eine additive Constante $2\bar{\omega}$ bestimmt ist.

Nun ist:

$$\wp(u) = \wp\left[(u-\alpha) + \alpha\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u-\alpha)-\wp'\alpha}{\wp(u-\alpha)-\wp\alpha}\right] - \wp(u-\alpha) - \wp\alpha \quad \text{(Art. 12, 5)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{y y_0}{(x-x_0)^2} + \frac{1}{4}\frac{R(x)(x_0-a)^4 + R(x_0)(x-a)^4}{(x-a)^2(x_0-a)^2(x-x_0)^2} +$$

$$- \frac{R'(a)(x-a+x_0-a)}{4(x-a)(x_0-a)}$$

Bringt man die zwei letzten Glieder auf gleichen Nenner und ordnet den Zähler nach Potenzen von $(x-a)$, so bekommt der Zähler den Factor $(x-a)^2(x_0-a)^2$, und man erhält:

$$\wp u = \frac{1}{2}\frac{y y_0}{(x-x_0)^2} + \frac{2R^{iv}(a)\frac{(x-a)^2(x_0-a)^2}{4!} + R'''(a)\frac{(x-a)(x_0-a)^2+(x_0-a)(x-a)^2}{3!}}{4(x-x_0)^2}$$

$$+ \frac{\frac{R''a}{2!}\left[(x_0-a)^2+(x-a)^2\right] + R'a\left[(x_0-a)+(x-a)\right]}{4(x-x_0)^2}$$

Der Zähler des zweiten Bruches ist eine symmetrische Function $F(x, x_0)$ von x u. x_0, in Beziehung auf jede der beiden Variabeln vom 2. Grad, also auf die Form zu bringen:

$$F(x,x_0) = \alpha + \beta(x+x_0) + \gamma x x_0 + \delta(x+x_0)^2 + \varepsilon x_0^2 x_0^2 + \zeta(x+x_0)x x_0$$

$F(x, x_0)$ hat überdies die Eigenschaft in $2R(x_0)$ überzugehen für $x = x_0$; andrerseits ist:

$$F(x_0, x_0) = \alpha + 2\beta x_0 + \gamma x_0^2 + 4\delta x_0^2 + \varepsilon x_0^4 + 2\zeta x_0^3$$
$$= 2R(x_0).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen folgt:

$2A = \varepsilon$; $4B = \zeta$; $\gamma + 4\delta = 12C$; $\beta = 4B'$; $\alpha = 2A'$

also:

$$F(x,x_0) = 2\big(Ax^2x_0^2 + 2B(x+x_0)xx_0 + 6Cxx_0 + 2B'(x+x_0) + A'\big) + \delta(x-x_0)^2$$

(4) [setze] $= 2R(x,x_0) + \delta(x-x_0)^2.$

so kommt:

(5) $$\wp u = \frac{yy_0}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x,x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{\delta}{4}$$

Es bleibt noch $\frac{\delta}{4}$ zu berechnen. Da δ von x_0 unabhängig ist, so dürfen wir bei der Berechnung für x_0 einen beliebigen speciellen Wert setzen; wir wählen $x_0 = a$, wo a eine Wurzel von $R(x)$. Dann fällt in dem Ausdruck für $\wp u$ das erste Glied weg: $y_0 = 0$.

Um $\frac{R(x,a)}{2(x-a)^2}$ zu berechnen, formen wir $R(x,x_0)$ um. Es ist allgemein:

(6) $$\begin{cases} R(x_0,x_0) = R(x_0) \\ \left(\dfrac{\partial R(x,x_0)}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \dfrac{1}{2}R'(x_0) \\ \left(\dfrac{\partial^2 R(x,x_0)}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = \dfrac{1}{6}R''(x_0) - 2C, \end{cases}$$

also:

$$(7)\quad \wp u = \frac{yy_0}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{R'(x_0)}{4(x-x_0)} + \frac{1}{24}R''(x_0) - \frac{C}{2} + \frac{\delta}{4}$$

Setzt man nun $x_0 = a$, so kommt:

$$\wp u = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{24}R''(a) - \frac{C}{2} + \frac{\delta}{4}$$

Für $x = a$ ist aber, wie wir bereits aus §2 wissen:

$$\wp u = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{24}R''(a).$$

Beide Formeln müssen übereinstimmen, also muss

$$\frac{\delta}{4} = \frac{C}{2}$$

sein. Also ist:

$$(8)\quad s = \wp u = \frac{yy_0}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x,x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{C}{2}$$

In dieser Weise drückt sich also $\wp u$ durch dasjenige particuläre Integral x aus, welches für $u = 0$ den Wert x_0 annimmt, während $\frac{dx}{du} = y_0$ wird.

In diesem allgemeineren Fall lässt sich also s nicht mehr rational durch x ausdrücken, wohl aber rational durch x und $\frac{dx}{du}$; ebenso lässt sich umgekehrt x rational durch $\wp u$ und $\wp' u$ ausdrücken.

Wählt man s in der Form:

$$(9) \qquad s = \frac{\mathcal{Y}y_0}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{R'(x_0)}{4(x-x_0)} + \frac{1}{24} R''(x_0)$$

und differentiirt, so erhält man:

$$(10) \quad \frac{ds}{du} = -\left\{\sqrt{R(x_0)}\left[\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{R'(x)}{4(x-x_0)^2}\right] - \sqrt{R(x)}\left[\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{R'(x_0)}{4(x_0-x)^2}\right]\right\}$$

Berechnet man aus (9) y und setzt es in (10) ein für $\sqrt{R(x)}$, so fallen alle Glieder mit $(x-x_0)^{-3}$ und $(x-x_0)^{-2}$ weg, (man entwickelt $R(x)$ und $R'(x)$ nach Potenzen von $x-x_0$), und man erhält x in der Form:

$$(11) \qquad x = \frac{y_0 \cdot \wp' u - M'}{2L'} = \varphi(u, x_0),$$

worin M' und L' ganze Functionen 2ten Grades von $s = \wp u$.

Die Function x genügt der Diffgl:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x),$$

die Function s der Gl:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S,$$

also ist

$$du = \pm \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Soll aber die Substitution zur Berechnung des Integrals brauchbar sein, so muss s beständig in derselben Richtung sich ändern, wenn x von x_0 bis x, wächst: es darf also:

$$\frac{ds}{dx} = \pm \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{R(x)}}$$

nicht verschwinden in diesem Intervall, oder, da $R(x)$ endlich und $\neq 0$ bleibt, es darf S nicht verschinden.

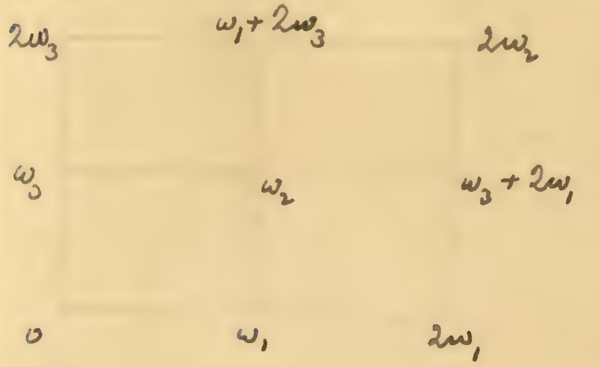
Da $$\frac{ds}{dx} = \frac{\frac{ds}{du}}{\sqrt{R(x)}},$$

so darf auch $\frac{ds}{du}$ nicht verschwinden. Für $u = 0$ wird $x = x_0$, für $u = \alpha$ wird $x = a$. Durchläuft u das Intervall $0 \ldots \alpha$, so wächst x von x_0 bis a; es lässt sich zeigen, dass in dem Intervalle $0 \ldots \alpha$ keiner der Werte $\tilde{\omega}$ liegt, für die $\frac{ds}{du} = 0$.

Es war:

$$x = a + \frac{b}{\wp(u-\alpha) - c}; \quad \frac{dx}{du} = -\frac{b}{(\wp(u-\alpha)-c)^2}\wp'(u-\alpha)$$

Dem Weg $x_0 \ldots . a$ in der x-Ebene entspricht, wenn überdies das Vorzeichen von $\sqrt{R(x)}$ gegeben ist, in der u-Ebene ein ganz bestimmter Weg L innerhalb des Periodenparallelograms; der Umfang desselben ist $2\bar{\omega}$, der Endpunkt der Punkt α. Sind zunächst alle Wurzeln reell, so ist α enthalten in einer der 4 Formen: t, ti, $\omega_1 + ti$, $\omega_3 + t$, wo t reell; und zwar weil $\wp\alpha$ reell.



Da $\wp(u-\alpha)$ auf dem ganzen Weg L reell, so ist auch $u-\alpha$ in einer der 4 Formen enthalten. Der Weg L setzt sich also aus Parallelen zu ω_1 u. ω_3 zusammen, die die Abstände $|\omega_3|$ resp. $|\omega_1|$ von einander haben.

In jedem der 8 Punkte $\alpha + \bar{\omega}$ wird x einer der Wurzeln von $R(x)$ gleich; auf jeder der 8 Strecken $(0, \omega_1)$ $(\omega_1, 2\omega_1)$, $(0, \omega_3)$, $(\omega_3, 2\omega_3)$, (ω_1, ω_2), (ω_3, ω_2), $(\omega_2, \omega_1 + 2\omega_3)$,

$(\omega_1, \omega_3 + 2\omega_1)$ liegt also ein Punkt, in dem x einer Wurzel von $R(x)$ gleich wird.

Sei nun z. B. der Anfangspunkt der Curve L der Punkt 0, dann behaupte ich liegt der Punkt α entweder auf der Seite $(0, \omega_1)$ oder auf $(0, \omega_3)$, denn sonst würde u beim Durchlaufen von L ein Punkt $\alpha + \bar{\omega}$ überschreiten, in dem x einer Wurzel von $R(x)$ gleich wird, was gegen unsere Annahme ist, dass wenn u den Weg L durchläuft, x von x_0 bis a wächst.

Daraus folgt aber, dass auf der Curve L keiner der Punkte $\bar{\omega}$ liegt, für die $\frac{ds}{du}$ verschwindet, was zu beweisen war.

Ganz analog gestaltet sich der Beweis wenn 2 Wurzeln imaginär. Dagegen verliert er seine Gültigkeit, wenn alle Wurzeln von $R(x)$ imaginär sind.

Da nun x_1 zwischen x_0 und a liegt, so verschwindet $\frac{ds}{dx}$ nicht, wenn x von x_0 bis x_1 wächst.

Um die Grenzen von s zu bestimmen, entwickeln wir s nach Potenzen von $(x-x_0)$:

$$s = \frac{R(x_0)}{(x-x_0)^2} + \cdots\cdots$$

Für $x = x_0$ wird $s = \infty$; für ∞ kleine Werte von $x - x_0$ hat s dasselbe Zeichen wie $R(x_0)$. Ist $R(x_0) > 0$ so ist $s = +\infty$. Ist $R(x_0) < 0$, so ist $s = -\infty$.

Ferner: $$\frac{ds}{dx} = -\frac{2R(x_0)}{(x-x_0)^3} - \cdots\cdots$$

Im ersten Falle nimmt s ab von $s = +\infty$ bis zu dem Wert s_1, der zu $x = x_0$ gehört. Im zweiten Fall wächst s von $-\infty$ bis s_1.

Es bleibt noch das Zeichen von $\sqrt{S}$ zu bestimmen. Es war:

$$\frac{ds}{dx} = \pm \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{R(x)}}.$$

1) Ist $R(x_0) > 0$, so ist $\frac{ds}{dx} < 0$ im ganzen Intervalle, also hat $\sqrt{S}$ das entgegengesetzte Zeichen von $\sqrt{R(x)}$:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

2) Ist $R(x_0) < 0$, so ist $\frac{ds}{dx}$ beständig > 0, also hat $\sqrt{S}$ dasselbe Zeichen wie $\sqrt{R(x)}$: $$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = +\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

Nunmehr ist alles zur Berechnung von

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

erforderliche Material beisammen. Wir setzen:

$$s = \frac{\sqrt{R(x)}\,\sqrt{R(x_0)}}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x,x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{C}{2}.$$

Dann haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

I) $R(x_0) > 0$. $\dfrac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\dfrac{ds}{\sqrt{S}}$; wächst x von x_0 bis x_1, so nimmt s ab von $+\infty$ bis s_1; und es ist $s_1 > e_1$, das S nicht verschwindet, also:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{s_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

II) $R(x_0) < 0$. $\dfrac{dx}{\sqrt{R(x)}} = +\dfrac{ds}{\sqrt{S}}$; die Grenzen für s sind $-\infty$ und s_1 und $s_1 < e_3$; also:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{-\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Andere Darstellung der Functionen $\varphi(u, a)$.

Es war:

$$x = \varphi(u, a) = a + \frac{b}{\wp u - c}$$

auf die Form gebracht:

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \frac{\sigma'}{\sigma}(u + u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) \right\}$$

Diese Form ist besonders zum Zweck nachheriger Integration geeignet.

Für andere Zwecke, ist es passender, x als Quotient von σ-Producten darzustellen. Es ist:

$$x = \frac{a(\wp u - (c - \frac{b}{a})}{\wp u - \wp u_0}$$

Ist nun u_1 einer der beiden incongruenten Werte, für die

$$\wp u = c - \frac{b}{a})$$

wird, so kommt:

$$x = a \, \frac{\wp u - \wp u_1}{\wp u - \wp u_0},$$

oder:

$$x = a\,\frac{\sigma^2 u_0}{\sigma^2 u_1}\cdot\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_0)\,\sigma(u-u_0)}.$$

Eine allgemeine Discution der Gleichung:

$$\wp u_1 = c - \frac{b}{a} = m$$

ist nicht durchführbar, da dabei nicht nur das Vorzeichen der Differenzen $a-a'$, etc., sondern auch das der Wurzeln a selbst eine Rolle spielt. Sind z. B. alle Wurzeln reell, und $A>0$, so ist:

$$m_0 = c_0 - \frac{b_0}{a_0},$$

$$e_3 = c_0 - \frac{b_0}{a_0 - a_1},$$

also:

$$m_0 - e_3 = \frac{b_0\,a_1}{a_0(a_0-a_1)}$$

Die Entscheidung, ob $m - e_3 \gtrless 0$ hängt also von dem Vorzeichen von $\frac{a_1}{a_0}$ ab.

Das Integral: $\int\limits_{x_0}^{x_1} \mathfrak{F}(x, \sqrt{R(x)}) . dx$.

§ 25. $\mathfrak{F}(x, \sqrt{R(x)})$ soll eine rationale Function von x und $\sqrt{R(x)}$ sein; wir machen die Substitution:

$$x = \varphi(u, x_0).$$

Dann lassen sich x und $\sqrt{R(x)}$ rational ausdrücken durch $\wp u, \wp' u, x_0, \sqrt{R(x_0)}$:

$$x = f(\wp u, \wp' u; x_0, \sqrt{R(x_0)})$$

$$\sqrt{R(x)} = f_1(\wp u, \wp' u; x_0, \sqrt{R(x_0)}).$$

$\mathfrak{F}(x, \sqrt{R(x)}) . dx$ geht dann über in $\psi(u) . du$ wo $\psi(u)$ eine elliptische Function von u ist. Kennt man die Unendlichkeitsstellen von $\psi(u)$ und die zugehörigen Entwicklungscoefficienten, so kann man nach [§16] $\psi(u)$ integriren.

1) Es sind also zunächst die ∞-Stellen von $\psi(u)$ zu finden. Wir bringen dazu $\mathfrak{F}(x, \sqrt{R(x)})$ auf die Form:

$$\mathfrak{F}(x, \sqrt{R(x)}) = \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{Q}}{\sqrt{R(x)}},$$

wo P und Q rationale Functionen von x.

Es bleibt weiter zu behandeln das Integral:
$$\int \frac{Q\,dx}{\sqrt{R(x)}};$$
nun ist:
$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du,$$
also:
$$\int \frac{Q\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int Q\,du.$$

Es seien nun $\alpha_1, \alpha_2 \text{---} \alpha_r$ die Werte von x, für die Q ∞ wird. Die elliptische Function 2ten Grades $\varphi(u, x_0)$ nimmt jeden dieser r Werte an 2, im Allgemeinen versch. Stellen an: den Wert α_1 in b_1 und b_1'; α_2 in b_2 und b_2', etc. Dann bilden b_1, b_1'; $b_2, b_2', \text{----}\, b_r, b_r'$ ein vollständiges System incongruenter ∞-Stellen der Function Q von u. Zur Bestimmung derselben hat man zunächst die zu den Werten $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ von x gehörigen Werte von s zu berechnen nach der Gl.:
$$s = \frac{\sqrt{R(x)}\,\sqrt{R(x_0)}}{2(x-x_0)^2} + \frac{R(x, x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{C'}{2}.$$

Zu jedem α gehören $2s$ wegen der 2-Wertigkeit von $\sqrt{R(x)}$; zu jedem ist aber durch § 24, 10 das Vorzeichen von $\frac{ds}{du}$ best. Ist aber s und das Zeichen von $\frac{ds}{du}$ bekannt, so lässt sich das zugehörige u nach § 10 berechnen.

2) Ferner sind die Entwickelungscoefficienten der negativen Potenzen von Q zu bestimmen.

Man entwickele zunächst Q nach steigenden Potenzen von $x-\alpha$. (Ist $\alpha = x'$, so hat man für $x-a$ zu setzen: $\frac{1}{x}$). Sodann entwickeln wir $x-\alpha$ nach Potenzen von $u-b$ und $u-b'$; Die Coefficienten dieser Entwickelung lassen sich finden, ohne dass man die Werte b, b' zu kennen braucht.

Es ist nämlich:

$$x = \alpha + \left(\frac{dx}{du}\right)_b (u-b) + \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_b \frac{(u-b)^2}{2} + \dots$$

Nun folgt aus der Diffgl:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2} R'(x) = R_1(x)$$

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{2}\, R''(x)\, \frac{dx}{du} = R_2(x)\cdot\frac{dx}{du}$$

- - - - -

$$\frac{d^{2n}x}{dx^{2n}} = R_{2n-1}(x)$$

$$\frac{d^{2n+1}x}{dx^{2n+1}} = R'_{2n-1}(x)\cdot\frac{dx}{du} = R_{2n}(x)\cdot\frac{dx}{du}$$

$$\frac{d^{2n+2}x}{dx^{2n+2}} = R'_{2n}(x)\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + R_{2n}(x)\frac{d^2x}{du^2} = R_{2n+1}(x).$$

Daraus folgt, dass allgemein:

$$\frac{d^{2n}x}{du^{2n}} = R_{2n-1}(x)$$

$$\frac{d^{2n+1}x}{du^{2n+1}} = R_{2n}(x)\frac{dx}{du}.$$

Für $u = b$ und $u = b'$ wird $x = \alpha$; es möge für $u = b$, $\frac{dx}{du} = +\sqrt{R(\alpha)}$ werden, u. für $u = b'$, $\frac{dx}{du} = -\sqrt{R(\alpha)}$. Dann sieht man, dass die Entwickelungscoefficienten, die zu den Stellen b und b' gehören, durch die Gl. () vollkommen bestimmt sind. Es ist.

$$x = \alpha + R_1(\alpha)\frac{(u-b)^2}{2} + R_3(\alpha)\frac{(u-b)^4}{4!} + \cdots\cdots$$
$$+ \sqrt{R(\alpha)}\left\{(u-b) + R_2(\alpha)\frac{(u-b)^3}{3!} + \cdots\cdots\right\}$$

Die zum Punkt $u = b'$ gehörige Entwicklung geht daraus hervor, indem man statt $+\sqrt{R(x)}$ setzt $-\sqrt{R(x)}$.

Für den Fall, dass $x = \infty$ wird, für $u = b$, setzt man:

$$\frac{1}{x} = \xi, \text{ also } -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \frac{d\xi}{du};$$

es ist dann:

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = A'\xi^4 + 4B'\xi^3 + 6C\xi^2 + 4B\xi + A,$$

also:

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=b} = \sqrt{A}\;;\;\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_b = 2B$$

$$\left(\frac{d^3\xi}{du^3}\right)_b = 6C\sqrt{A}\;;\;\left(\frac{d^4\xi}{du^4}\right)_b = 12(AB' + BC)$$

$$\left(\frac{d^5\xi}{du^5}\right)_b = 12(AA' + 6BB' + 3C^2)\sqrt{A}, \text{ etc.}$$

und es wird:

$$\xi = B(u-b)^2 + \frac{1}{2}(AB' + BC)(u-b)^4 + \dots$$

$$+\sqrt{A}\left\{(u-b) + C(u-b)^3 + \dots\right\}$$

Ist für $u = b$, $\left(\frac{d\xi}{du}\right)_b = +\sqrt{A}$, so ist $\sqrt{A} = +\sqrt{A}$; im andern Falle $-\sqrt{A}$.

Daraus folgt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{A}}(u-b)^{-1} - \frac{B}{A} + \frac{\frac{B^2}{A} - C}{\sqrt{A}}(u-b) - \frac{2B^3 - 3ABC + A^2B'}{2A^2}(u-b)^2 + \dots$$

Dies reicht hin, die Coefficienten c_λ des §10 zu bestimmen, und damit ist die Integration von von $Q\,du$ gelöst.

§26. Es soll dies an einigen speciellen Fällen durchgeführt werden, unter der Voraussetzung $x_0 = a$.

1) Ist $Q = x$, also hat man das Integral:

$$J = \int_a^x \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

so ist bereits in §17 gezeigt, dass:

$$(1)\quad x = \varphi(u,a) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right),$$

wo u bestimmt ist durch:

$$\wp u_0 = \frac{1}{24} R''(a) \quad ; \quad \wp' u_0 = -\frac{1}{4} R'(a)\sqrt{A}.$$

$$J = \int_0^u x\,du = \left(-\frac{B}{A} + \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right)u + \frac{1}{\sqrt{A}}\log\frac{\sigma(u+u_0)}{\sigma(u-u_0)} + \text{Const}.$$

Für $u = 0$ wird $J = 0$ also $\text{Const} = -\frac{\pi i}{\sqrt{A}}$, also:

$$J = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) - \frac{B}{A}\right)u + \frac{1}{\sqrt{A}}\log\frac{\sigma(u_0+u)}{\sigma(u_0-u)}.$$

---

2) Ist $Q = x^2$, so gehen wir aus von der Entwickelung:

$$\sqrt{A}\left(x + \frac{B}{A}\right) = -(u-u_0)^{-1} - \left(\frac{B^2}{A} - C\right)(u-u_0) + \cdots\cdot$$

$$\sqrt{A}\left(x + \frac{B}{A}\right) = +(u+u_0)^{-1} + \left(\frac{B^2}{A} - C\right)(u+u_0) + \cdots\cdots$$

daraus:

$$Ax^2 + 2Bx + \frac{B^2}{A} = \psi(u) = (u-u_0)^{-2} + \mathfrak{P}(u-u_0)$$

$$= (u+u_0)^{-2} + \mathfrak{P}(u+u_0).$$

$\pm u_0$ sind die einzigen incongruenten ∞-Stellen von $\psi(u)$, also ist nach § 10:

$$\psi(u) = \wp(u-u_0) + \wp(u+u_0) + \text{Const.}$$

Setzt man $u=0$, so bestimmt sich die Constante:

$$\psi(u) = \wp(u-u_0) + \wp(u+u_0) + \psi(0) - 2\wp u_0$$

Nun ist:

$$\psi(0) = Aa^2 + 2Ba + \frac{B^2}{A} = \frac{1}{12} R''(a) + \frac{B^2}{A} - C$$

und

$$2\wp u_0 = \frac{1}{12} R''(a), \text{ also:}$$

$$\psi(0) - 2\wp u_0 = \frac{B^2}{A} - C,$$

also:

$$(2) \quad Ax^2 + 2Bx + C = \frac{1}{12} R''(x) = \wp(u+u_0) + \wp(u-u_0).$$

Da x bereits durch Partialbruchzerfällung dargestellt, so erhält man hieraus x^2.

3) Um x^3 zu berechnen, gehen wir aus von

$$(3) \quad \frac{1}{2} R'(x) = \frac{d^2x}{du^2} = +\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\wp'(u-u_0) - \wp'(u+u_0)\right).$$

Da x^2 und x bereits dargestellt, so ergibt sich hieraus x^3.

Nachtrag zu 1): Für $u = 0$ wird $\varphi(u, a) = a$, also:

$$a = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right),$$

also durch Subtraction:

$$(4) \qquad x = a + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0)\right)$$

4) Es soll nunmehr eine analoge Darstellung des allgemeinen Integrals:

$$x = \varphi(u, x_0)$$

gegeben werden, welche für die Integration bequem ist.

Wir gehen aus von der Formel:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(v-w) = \frac{\sigma'}{\sigma}(v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(w) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v + \wp' w}{\wp v - \wp w};$$

bilden wir ebenso:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(w-u) = \frac{\sigma'}{\sigma}(w) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' w + \wp' u}{\wp w - \wp u}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Die drei Werte u, v, w sind ganz beliebig, nur müssen sie untereinander incongruent sein, und es darf nicht die Summe zweier $= 0$ sein, weil sonst rechts Nenner verschwinden würden. Addiren wir die 3 Gleichungen, so kommt:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp' v+\wp' w}{\wp v-\wp w}+\frac{1}{2}\frac{\wp' w+\wp' u}{\wp w-\wp u}+\frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}= \tag{5}$$
$$=\frac{\sigma'}{\sigma}(v-w)+\frac{\sigma'}{\sigma}(w-u)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass dieselbe Formel gilt, wenn an die Stelle von $\wp u$ irgend eine elliptische Function 2ten Grades mit denselben Perioden tritt. Zu diesem Zweck betrachten wir die Funct.:

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\frac{\varphi' v+\varphi' w}{\varphi v-\varphi w}+\frac{1}{2}\frac{\varphi' w+\varphi' u}{\varphi w-\varphi u}+\frac{1}{2}\frac{\varphi' u-\varphi' v}{\varphi u-\varphi v}.$$

$\Phi(u)$ kann ∞ werden:

1) wo φu ∞ wird: sei $u=\alpha$ eine ∞-Stelle von $\varphi(u)$ und sei:

$$\varphi(u)=c_1(u-\alpha)^{-1}+\mathfrak{P}(u-\alpha),$$

so folgt:

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi' u(\varphi v-\varphi w)}{(\varphi u-\varphi w)(\varphi u-\varphi v)}=\frac{1}{2}\frac{\varphi' u}{\varphi w-\varphi u}+\frac{1}{2}\frac{\varphi' u}{\varphi u-\varphi v}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\varphi' u}{(\varphi u)^2}\cdot\frac{\varphi v-\varphi w}{\left(1-\frac{\varphi w}{\varphi u}\right)\left(1-\frac{\varphi v}{\varphi u}\right)}$$

und dies bleibt für $u=\alpha$ endlich, da

$$\frac{\varphi' u}{[\varphi(u)]^2} = \mathfrak{P}(u-\alpha)$$

$u = \alpha$ ist also für $\Phi(u)$ keine ∞-Stelle.

2) An den beiden Stellen $u = v, v'$, wo:

$$\varphi(u) = \varphi(v)$$

wird; da

$$\varphi'(v') = -\varphi'(v),$$

so ist v' keine ∞-Stelle; in der Umgebung von $u = v$ ist

$$\Phi(u) = (u-v)^{-1} + * + c_1(u-v) + \dots$$

3) An den beiden Stellen $u = w, w'$ wo:

$$\varphi(u) = \varphi(w).$$

Die Stelle $u = w'$ ist keine ∞-Stelle für Φ, da $\varphi'(w') = -\varphi'(w)$; in der Umgebung von $v = w$ ist

$$\Phi(u) = -(u-w)^{-1} + \mathfrak{P}(u-w).$$

Andere incongruente Unendlichkeitsstellen hat $\Phi(u)$ nicht; es ist daher nach § 10:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} - \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' w}{\wp u - \wp w} + C.$$

Zur Bestimmung von C entwickeln wir nach Potenzen von $u - v$:

$$\Phi(u) = (u-v)^{-1} + \left(C - \frac{1}{2}\frac{\wp' v + \wp' w}{\wp v - \wp w}\right) + (u-v)\,\mathfrak{P}(u-v)$$

$$= (u-v)^{-1} + * + (u-v)\,\mathfrak{P}(u-v).$$

Durch Vergleichung:

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{p'v + p'w}{pv - pw},$$

und damit ist die Formel () bewiesen.

Wir wenden dieselbe jetzt auf den besonderen Fall an, dass w einem der beiden incongruenten Werte u_1, u_2 gleich wird für die $\varphi(u)$ ∞ wird. Alsdann verschwinden die Glieder:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'v}{\varphi v - \varphi w} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'u}{\varphi w - \varphi u};$$

die anderen werden:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(w)\,(\varphi u - \varphi v)}{(\varphi w)^2\left(1 - \frac{\varphi u}{\varphi w}\right)\left(1 - \frac{\varphi v}{\varphi w}\right)}.$$

Nun ist:

$$\lim_{\varphi w \doteq \infty} \frac{\varphi' w}{(\varphi w)^2} = \sqrt{A}$$

und zwar sei:

$$\lim_{w = u_1} \frac{\varphi' w}{(\varphi w)^2} = +\sqrt{A}$$

$$\lim_{w = u_2} \frac{\varphi' w}{(\varphi w)^2} = -\sqrt{A}$$

Wir erhalten daher, je nachdem $w = u_1$ oder u_2 wird, die beiden Formeln:

$$(6)\begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v} + \frac{1}{2}\sqrt{A}\,(\varphi u - \varphi v) = \\ = \frac{\sigma'}{\sigma}(v - u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1 - u) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v) \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v} - \frac{1}{2}\sqrt{A}\,(\varphi u - \varphi v) = \\ = \frac{\sigma'}{\sigma}(v - u_2) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_2 - u) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v) \end{cases}$$

Also durch Subtrahiren:

$$(8)\quad \sqrt{A}\,(\varphi u - \varphi v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v - u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v - u_2).$$

Die Formel enthält noch die willkürliche Constante v. Ist $\varphi(u) = \varphi(u, \alpha)$, so erhält man hieraus die Formel (4), indem man $v = 0$ setzt; es wird dann $u_2 = u_0$, $u_1 = -u_0$; $\varphi(v) = a$.

Ist v_1 einer der Nullpunkte von $\varphi(u)$, so ist:

$$(9)\quad \sqrt{A}\cdot\varphi u = \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1 - u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1 - u_2).$$

5) Wir betrachten schliesslich noch das Integral:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x - k)\sqrt{R(x)}}.$$

Durch die Substitution $x = \varphi(u, x_0)$ kommt

$$J = \int_0^{u'} \frac{du}{x-k}$$

Es seien α und α' die beiden incongruenten Werte von u, für die $\varphi(u) = k$, und zwar sei:

$$\varphi'(\alpha) = +\sqrt{R(k)} \quad , \quad \varphi'(\alpha') = -\sqrt{R(k)}$$

Dann ist:

$$\frac{1}{x-k} = \frac{1}{\sqrt{R(k)}}(u-\alpha)^{-1} + \mathfrak{P}(u-\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R(k)}}(u-\alpha')^{-1} + \mathfrak{P}(u-\alpha')$$

und α, α' sind die einzigen incongruenten ∞-Stellen von $\frac{1}{x-k}$; also ist:

$$\frac{1}{x-k} = \frac{1}{\sqrt{R(k)}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\alpha) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\alpha')\right\} + \text{const.}$$

Die Constante bestimmt sich, indem man für u einen speciellen Wert setzt; zum Beispiel, $u = 0$; dann wird $x = x_0$.

Ueber die Mehrdeutigkeit der auftretenden Logarithmen.

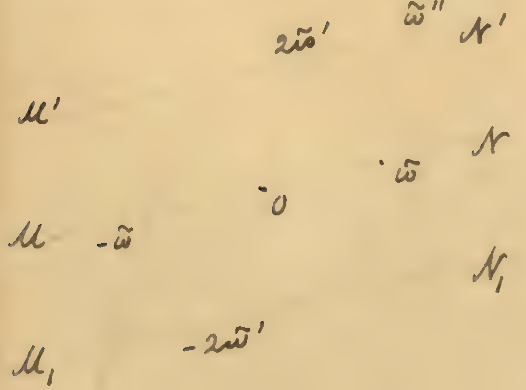
§ 27. Bei der Integration von $\varphi(u,a)$ treten Logarithmen auf; wir haben zu untersuchen, welcher der ∞-vielen Werte zu nehmen ist.

Es seien $\tilde\omega$ und $\tilde\omega'$ ein Paar halbe Primitivperioden von $\varphi(u,a)$; es soll der Wert des Integrals:

$$\Psi(u_0) = \int_0^{\tilde\omega}\left(\frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)} - \frac{\sigma'(u+u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right) du$$

$$= \tilde\omega \int_0^1\left(\frac{\sigma'(\tilde\omega\varepsilon-u_0)}{\sigma(\tilde\omega\varepsilon-u_0)} - \frac{\sigma'(\tilde\omega\varepsilon+u_0)}{\sigma(\tilde\omega\varepsilon+u_0)}\right) du$$

bestimmt werden. Es sei $\Re\left(\frac{\tilde\omega'}{\tilde\omega i}\right) > 0$.



Der Integrationsweg für u ist die Gerade $(0\,\tilde\omega)$; sobald der Punkt u_0 in diese Gerade rückt, wird $\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)$ unendlich, das Integral sinnlos;

ebenso wird $\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)$ ∞, wenn u_0 in die Strecke $(0, -\tilde{\omega})$ rückt.

Da überdies $\frac{\sigma'}{\sigma}(2m\tilde{\omega}+2m'\tilde{\omega}')$ ∞ ist, so folgt, dass $\psi(u_0)$ seinen Sinn verliert, so bald u_0 in eine der Geraden MN, $M'N'$, etc. fällt. Nehmen wir u_0 zwischen zwei solchen Geraden, so ist $\psi(u_0)$ in der Umgebung der Stelle u_0 eine reguläre analytische Function. Von hier aus lässt sie sich fortsetzen bis an die beiden einschliessenden Geraden; innerhalb eines solchen Streifens verhält sich $\psi(u_0)$ regulär; ist also speciell auch stetig.

Da $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ complex, so können wir u_0 stets und nur auf eine Weise auf die Form bringen:

$$u_0 = 2\mu\tilde{\omega} + 2\mu'\tilde{\omega}',$$

wo μ und μ' reell. Die Bedingung für die Endlichkeit des Integrals $\psi(u_0)$ ist dann, dass μ' keine ganze Zahl ist.

Es sei nun zunächst: $0 < \mu' < 1$. Nun ist für jedes dieser Bedingung genügende u_0:

$$\psi(u_0) = \left[\log \frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right]_0^{\tilde{\omega}}$$

Nun ist:

$$\frac{\sigma(\tilde{\omega}-u_0)}{\sigma(\tilde{\omega}+u_0)} = + e^{-2\tilde{\eta} u} \quad (\text{art. } 7)$$

also:

$$\log \frac{\sigma(\tilde{\omega}-u_0)}{\sigma(\tilde{\omega}+u_0)} = -2\tilde{\eta} u + 2\kappa\pi i,$$

ferner:

$$\log \frac{\sigma(-u_0)}{\sigma(+u_0)} = \pi i + 2\kappa'\pi i,$$

also:

$$\psi(u_0) = \pi i - 2\tilde{\eta} u_0 + 2m\pi i.$$

Zur Bestimmung der ganzen Zahl m benutzen wir das gefundene Resultat, dass $\psi(u_0)$ innerhalb eines Streifens stetig bleibt; es sei daher

$$\mu' = 2k + \mu''$$

wo k eine ganze Zahl und $0 < \mu'' < 1$, also:

$$u_0 = 2\mu\tilde{\omega} + 2\mu''\tilde{\omega}' + 2k\tilde{\omega}'.$$

Dann bleibt $\psi(u_0)$ stetig, wenn wir k constant lassen, μ beliebig, μ'' beliebig zwischen 0 und 1 variiren lassen. Wir dürfen also u_0 übergehen lassen in:

$$2k\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}'.$$

Für diesen Wert von u_0 lässt sich aber $\psi(u_0)$ eindeutig berechnen; es ist dann:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) = -2\tilde{\eta}' - 4k\tilde{\eta}';$$

also:

$$\psi(2k\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}') = -2(2k+1)\tilde{\eta}'\tilde{\omega},$$

also durch Vergleichung mit dem oben gefundenen Ausdruck für $\psi(u_0)$:

$$\pi i - 2\tilde{\eta}(2k+1)\tilde{\omega}' + 2mi\pi = -2(2k+1)\tilde{\eta}'\tilde{\omega},$$

also:

$$\pi i(2m+1) = 2(2k+1)(\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}')$$

Nun ist:

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}' = +\frac{\pi i}{2} \quad (\text{Art. } 7),$$

also $m = k$, und es folgt:

$$\int_0^{\tilde{\omega}} \left\{ \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)} - \frac{\sigma'(u+u_0)}{\sigma(u+u_0)} \right\} du = (2k+1)\pi i - 2\tilde{\eta} u_0.$$

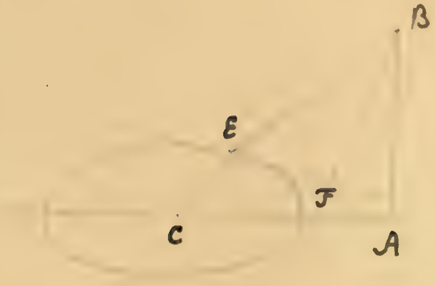
II. Teil:

Beispiele und Anwendungen.

I. Kapitel.

Berechnung des Mantels eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis.

§1. Geometrischer Teil.



Es sei B die Spitze des Kegels; C der Mittelpunkt der kreisförmigen Basis, BA das Loth auf die Ebene derselben; EF die Tangente der Basis an ihren Punkt E; BF die senkrechte von B auf diese Tangente. Dann ist auch AF senkrecht zu EF. Setzen wir dann:

$BF = t$, $BA = c$, $CA = a$, $CE = r$, $\sphericalangle ECA = \varphi$,

so ist der Kegelmantel offenbar dargestellt durch:

$$(1) \qquad S = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} t \, d\varphi$$

Nun ist:

$$t^2 = c^2 + AF^2.$$

Da $AF \parallel CE$, so folgt weiter:

$$AF = r - a\cos\varphi,$$

also:

$$S = \frac{r}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{c^2+(r-a\cos\varphi)^2}\,d\varphi,$$

oder:

$$(2)\qquad S = r\int_0^{\pi}\sqrt{c^2+(r-a\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

Setzt man: $x = \cos\varphi$, so kommt (weil φ zwischen 0 und π bleibt):

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

also:

$$S = r\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{c^2+r-ax)^2}\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder wenn man setzt:

$$(3)\qquad R(x) = (1-x^2)(c^2+(ax-r)^2)$$

$$(4)\qquad S = r\int_{-1}^{+1}(c^2+(ax-r)^2)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

§2. Berechnung des elliptischen Integrals.

Die Wurzeln von $R(x) = 0$ sind:

$a_0 = +1,\quad a_1 = -1,\quad a_2 = \frac{1}{a}(r+ci),\ a_3 = \frac{1}{a}(r-ci).$

Wir haben also den Fall II.

Ferner ist:

$$A = -a^2,\quad B = \frac{ar}{2},\quad C = -\frac{r^2+c^2-a^2}{6},\quad B' = -\frac{ar}{2},\quad A' = r^2+c^2$$

Also ist $A < 0$.

Wir haben also nach § 22, 4 zu setzen:

$$x = \varphi(u, \alpha_1),$$

d. h.:

$$(5)\qquad x = -1 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(-1)}{s - \frac{1}{24}R''(-1)},$$

und erhalten:

$$(6)\qquad \int_{-1}^{+1}\left(c^2+(ax-r)^2\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_0^{\omega_2}\left(c^2+(ax-r)^2\right)du$$

Nach § 26, 4 ist:

$$(7)\qquad x = -1 - \frac{i}{\alpha}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0)\right)$$

Und u_0 ist nach § 18, II

$$(8)\qquad u_0 = v'i,\quad \text{wo}\quad 0 < v' < \frac{\omega_2'}{i}.$$

Wir haben nun die elliptische Function $Q = c^2+(ax-r)^2$ durch Partialbruchzerfällung darzustellen. Nun war: (26, 2):

$$\frac{1}{12}R''(x) = Ax^2 + 2Bx + C = \wp(u+u_0) + \wp(u-u_0).$$

Hier ist:

$$(9) \qquad z = -\frac{1}{12} R''(x) = a^2x^2 - arx + \frac{r^2+c^2-a^2}{6},$$

$$Q = a^2x^2 - 2arx + r^2 + c^2,$$

also:

$$Q = z - arx + r^2 + c^2 - \frac{r^2+c^2-a^2}{6}$$

Nun ist:

$$-s_0 = -\frac{1}{24} R''(-1) = \frac{a^2+ar}{2} + \frac{r^2+c^2-a^2}{12}$$

Ferner:

$$\frac{1}{2} R'(-1) = (a+r)^2 + c^2;$$

daraus:

$$e_2 = s_0 + \frac{1}{8} R'(-1) = \frac{r^2+c^2-a^2}{6},$$

also: $\quad r^2 + c^2 = a^2 + 6e_2,$

andrerseits:

$$e_2 + 2s_0 = -a^2 - ar,$$

also: $\quad r^2 + c^2 = 5e_2 - 2s_0 - ar;$

demnach:

$$Q = z - ar(x+1) + 2(2e_2 - s_0),$$

also:

$$S = r\int_0^{\omega_2} z\,du - ar^2\int_0^{\omega_2}(x+1)\,du + 2(2e_2 - s_0)\,\omega_2.$$

Nun ist:

$$\int_0^{\omega_2} z\,du = -\int_0^{\omega_2} \left(\wp(u+u_0) + \wp(u-u_0)\right) du$$

$$= \left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)\right]_0^{\omega_2} = 2\eta_2 = 2\frac{\sigma'\omega_2}{\sigma\omega_2}$$

Ferner:

$$a\int_0^{\omega_2}(x+1)\,du = 2i\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0)\cdot\omega_2 + i\int_0^{\omega_2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)\right)du;$$

da $u_0 = v'i$, so ist $\kappa = 0$, also (§ 27):

$$\int_0^{\omega_2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)\right)du = \pi i - 2\eta_2 u_0$$

Setzt man diese Werte in ( ) ein, so ergibt sich als Endformel:

$$S = \pi r^2 + 2r\omega_2\left(2e_2 - s_0 - ir\,\frac{\sigma'(v'i)}{\sigma(v'i)}\right) + 2r\frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}(1 - rv').$$

Für $c = 0$ erhält man eine interessante Probe dieser Formel; man hat 2 Fälle zu unterscheiden je nachdem $r > a$ oder $< a$.

Die hier entwickelten Formeln sind auch geeignet zur Berechnung des Inhalts und Umfangs von sphärischen Kegelschnitten.

<u>Beispiel</u>: $r = 2$, $a = 1$, $c = 3$.

Es ist:

$$e_2 - e_3 = \frac{r^2 + c^2 - a^2}{4} + \frac{ac}{2} i = 3 + \frac{3}{2} i.$$

$$e_2 - e_1 = \frac{r^2 + c^2 - a^2}{4} - \frac{ac}{2} i = 3 - \frac{3}{2} i.$$

$$e_2 = 2 \; ; \qquad s_0 = -\frac{5}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 26^\circ \, 33' \, 54''$$

$$\frac{\alpha}{4} = 6^\circ \, 38' \, 28''$$

$$\log l_2 = 0.06608 - 1$$

$$\log h_2 = 0.76506 - 2$$

$$\log m^2 = 0.85898$$

$$\log \omega_2 = 0.93941 - 1$$

$$\omega_2 = 0.86979$$

$$2\eta_2 \omega_2 = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1 + 3^3 h_2^2 - 5^3 h_2^6 + \dots}{1 + 3 h_2^2 - 5 h_2^6 + \dots} = \frac{\pi^2}{6} (1 + 24 h_2^2 - 72 h_2^4 + \dots)$$

$$\log (2\eta_2 \omega_2) = 0.24976$$

$$\log 2\eta_2 = \underline{0.31035}$$

$$s_0 - e_3 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i \qquad s_0 - e_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} i$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -1 \qquad \varepsilon = 135^\circ$$

$$\varepsilon - \frac{\alpha}{2} > \frac{\pi}{2}$$

$$\ell_2 \xi = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$\log \ell_2 \xi = 0.74627 - 1$$

$$\log \xi = 0.68019 \qquad \xi = 4.7884$$

$$\log \operatorname{nat}\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = -2.2486$$

$$\log \sqrt{\xi^2 - 1} = 0.67051$$

$$\mathfrak{L} = 1.000046$$

$$\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_0 = 0.00004595$$

$$\log v' = 0.79418 - 1$$

$$\underline{v' = 0.62256}$$

Da $|v'| < |2\omega_2|$ und $< |2\omega_2'|$, so gilt die Entwickelung:

$$\frac{\sigma'(v'i)}{\sigma(v'i)} = \frac{1}{v'i} + \frac{g_2}{2^2.2.5} v'^3 i - \frac{g_3}{2^2.5.7} v'^5 i + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7} v'^7 i - \frac{g_2 g_3}{2^4.3.5.7.11} v'^9 i + \dots$$

$$g_2 = 3, \quad g_3 = 26$$

$$i \frac{\sigma'(v'i)}{\sigma(v'i)} = 1.61159. \qquad \pi r^2 = 11.4003$$

$$2r\omega_2\left(2e_2 - s_0 - ir\frac{\sigma'(v'i)}{\sigma(v'i)}\right) = 12.5663$$

$$2r\eta_2(1 - rv') = -1.0018$$

$$\mathcal{S} = 23.965$$

II. Kapitel.

Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids.

Sei die Gleichung des Ellipsoids:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \quad (\alpha > \beta > \gamma)$$

Die Dichtigkeit sei 1, dann ist das Potential dieses Ellipsoids in Beziehung auf einen innern Punkt mit den Coordinaten ξ, η, ζ:

$$(2) \qquad V_i = \pi \alpha \beta \gamma \int_0^\infty \left(1 - \frac{\xi^2}{t+\alpha^2} - \frac{\eta^2}{t+\beta^2} - \frac{\zeta^2}{t+\gamma^2}\right) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

wo:

$$(3) \qquad R(t) = (t+\alpha^2)(t+\beta^2)(t+\gamma^2)$$

Wir setzen nach § 23:

$$t = \varphi(u, a_0) = \frac{s}{B} - \frac{C}{2B}$$

$$(4) \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{6}$$

Wächst t von $-\gamma^2$ über 0 bis $+\infty$, so wächst s von e_1 über $s_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{12}$ bis $+\infty$, und u nimmt von ω_1 über v bis 0 ab. Aus:

$$(5) \qquad t = 4s - \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$$

folgt:

$$t + \alpha^2 = 4(s - e_3)$$
$$(6) \qquad t + \beta^2 = 4(s - e_2)$$
$$t + \gamma^2 = 4(s - e_1)$$

ferner:

$$e_1 - e_3 = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \gamma^2)$$
$$(7) \qquad e_1 - e_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - \gamma^2)$$
$$e_2 - e_3 = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$$

Durch die Substitution (5) erhält man:

$$(8) \qquad V_i = \pi\alpha\beta\gamma \int_{s_0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{4(s-e_3)} - \frac{y^2}{4(s-e_2)} - \frac{x^2}{4(s-e_1)} \right\} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Wir setzen jetzt: $s = \wp u$; $s_0 = \wp v$.

Nach §12 ist:

$$\frac{1}{\wp u - e_\lambda} = \frac{-e_\lambda + \wp(u + \omega_\lambda)}{(e - e_\nu)(e_\lambda - e_\mu)},$$

also:

$$(9) \qquad \int_0^u \frac{du}{\wp u - e_\lambda} = - \frac{e_\lambda u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u + \omega\lambda) - \eta_\lambda}{(e_\lambda - e_\nu)(e_\lambda - e_\mu)}$$

$$= - \frac{e_\lambda u + \frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$

Durch Benutzung dieser Formel und der Gleichung (7), geht V_i über in:

$$V_i = \pi\alpha\beta\gamma\left\{v + \frac{4Ax^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} + \frac{4By^2}{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)} + \frac{4Cz^2}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)}\right\}$$

Dabei haben die Grössen A, B, C folgende Werte:

$$A = \frac{\sigma_3'v}{\sigma_3 v} + v\left(s_0 - \frac{\alpha^2}{4}\right)$$

$$B = \frac{\sigma_2'v}{\sigma_2 v} + v\left(s_0 - \frac{\beta^2}{4}\right)$$

$$C = \frac{\sigma_1'v}{\sigma_1 v} + v\left(s_0 - \frac{\gamma^2}{4}\right)$$

Die Grössen A, B, C lassen sich nun noch weiter vereinfachen. Es ist:

$$\frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} = \wp u - e_\lambda,$$

also:

$$\frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u - e_\lambda}$$

Für $u = v$ wird $\wp u = s_0$; $\wp' v = -\frac{\alpha\beta\gamma}{4}$;

$s_0 - e_1 = \frac{\gamma^2}{4}$; $s_0 - e_2 = \frac{\beta^2}{4}$, $s_0 - e_3 = \frac{\alpha^2}{4}$.

Daher wird:

$$A = \frac{\sigma'v}{\sigma v} + v\left(s_0 - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

$$B = \frac{\sigma'v}{\sigma v} + v\left(s_0 - \frac{\beta^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\gamma\alpha}{\beta}$$

$$C = \frac{\sigma'v}{\sigma v} + v\left(s_0 - \frac{\gamma^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

In diesen Ausdrücken kommt nun nur $\frac{\sigma' v}{\sigma v}$ vor; diese sind also für die Ausrechnung brauchbarer.

Das Potential des Ellipsoids in Bezug auf einen äusseren Punkt ist:

$$V_a = \pi\alpha\beta\gamma \int_{t_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{t+\alpha^2}-\frac{y^2}{t+\beta^2}-\frac{z^2}{t+\gamma^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Dabei ist t_0 die grösste Wurzel der Gleichung:

$$\frac{x^2}{t+\alpha^2}+\frac{y^2}{t+\beta^2}+\frac{z^2}{t+\gamma^2}=1$$

Durch die Substitution $t = t' + t_0$ erhält man:

$$V_a = \pi\alpha\beta\gamma \int_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{t+t_0+\alpha^2}-\frac{y^2}{t+t_0+\beta^2}-\frac{z^2}{t+t_0+\gamma^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R(t+t_0)}}$$

Die Wurzeln von $t+t_0$ sind:

$$-(t_0+\alpha^2),\ -(t_0+\beta^2),\ -(t_0+\gamma^2).$$

Wir haben also nur in den bisherigen Formeln $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ zu ersetzen durch $t_0+\alpha^2, t_0+\beta^2, t_0+\gamma^2$. Dabei bleiben die Grössen e_1, e_2, e_3 ungeändert; wir können also dieselben σ- und $\wp$-Functionen anwenden wie im vorigen Falle. An Stelle von

s_0 tritt:

$$s_0' = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{12} + \frac{t_0}{4} \; ; \quad \wp v' = s_0'$$

es ist auch hier: $0 < v' < \omega_1$

Wir erhalten schliesslich:

$$V_a = \pi\alpha\beta\gamma \left\{ v' + \frac{4A'x^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} + \frac{4B'y^2}{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)} + \frac{4C'z^2}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)} \right\}$$

wobei:

$$A' = \frac{\sigma'(v')}{\sigma(v')} + v'\left(s_0' - \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{t_0}{4}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\beta^2+t_0)(\gamma^2+t_0)}{\alpha^2+t_0}}$$

$$B' = \frac{\sigma'(v')}{\sigma(v')} + v'\left(s_0' - \frac{1}{4}\beta^2 - \frac{t_0}{4}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\gamma^2+t_0)(\alpha^2+t_0)}{\beta^2+t_0}}$$

$$C' = \frac{\sigma'(v')}{\sigma(v')} + v'\left(s_0' - \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{t_0}{4}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha^2+t_0)(\beta^2+t_0)}{\gamma^2+t_0}}.$$

III. Kapitel.

Potential einer elliptischen Scheibe.

Die Gleichung der Ellipse sei:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \tag{1}$$

Dieselbe sei gleichförmig mit Masse von der Dichtigkeit 1 belegt. Dann ist das Potential dieser Ellipse auf irgend einen Punkt x, y, z, der ausserhalb der Ellipse liegt:

$$V = \iint \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} \tag{2}$$

mit dem Integrationsbereich:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \leqq 1$$

Wir führen 2 neue Variable ein, durch die Substitution:

$$x' = \alpha\lambda\cos\psi, \qquad y' = \beta\lambda\sin\psi,$$

dann wird:

$$V = \alpha\beta \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\, d\lambda\, d\psi}{\sqrt{(x-\alpha\lambda\cos\psi)^2+(y-\beta\lambda\sin\psi)^2+z^2}} \tag{3}$$

Wir formen zunächst das nach ψ zu nehmende Integral um, und betrachten zu diesem Zweck vorerst das allgemeinere Integral:

$$(4) \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi + c + 2a'\sin\psi + 2b'\cos\psi + 2c'\sin\psi\cos\psi}}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass der Radicand beständig positiv bleibt, wenn ψ von 0 bis 2π wächst. Setzen wir dann:

$$(5) \quad e^{\psi i} = \frac{t-i}{t+i}, \text{ d. h., } t = -\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2},$$

so kommt:

$$(6) \quad d\psi = \frac{2dt}{t^2+1}, \quad \cos\psi = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sin\psi = \frac{-2t}{t^2+1}.$$

Wächst ψ von 0 bis 2π, so wächst t von $-\infty$ bis $+\infty$. Es ist also:

$$(7) \qquad J = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

wo:

$$R(t) = (a+c+2b')t^4 - 4(a'+c')t^3 + 6\,\frac{c-a+2b}{3}\,t^2$$
$$-4(a'-c')t + (a+c-2b').$$

Aus der oben gemachten Voraussetzung folgt, dass auch $R(t)$ beständig positiv bleibt, wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst; es müssen also alle Wurzeln von $R(t)$ imaginär sein. Es ist also nach § 22, 5:

$$(8) \qquad J = 4\omega_1 = 4\int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Dabei ist:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

$$g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3$$

Hieraus ergibt sich eine Darstellung von S in Determinantenform:

$$(9) \qquad S = -\begin{vmatrix} A & B & C-2s \\ B & C+s & B' \\ C-2s & B' & A' \end{vmatrix}.$$

In unserem Falle ist:

$A = a + c + 2b'$, $\quad B = -a' - c'$, $\quad C = \dfrac{c - a + 2b}{3}$

$B' = -a' + c'$, $\quad A' = a + c - 2b'$.

Setzt man diese Werte in die Determinante ein, und nimmt dann folgende Umformungen vor:

1) Zeile I − Zeile III

2) Colonne I − Colonne III

3) Zeile I und Colonne I mit $-\frac{1}{2}$ multiplicirt.

4) eingeführt: $\frac{a+b-c}{3} = q$

5) Colonne III − Colonne I

6) Zeile III − Zeile I,

so erhält man:

$$\mathcal{S} = -4 \begin{vmatrix} a-g+s & c' & -b' \\ c' & b-g+s & -a' \\ -b' & -a' & c+g-s \end{vmatrix}$$

(10) $$\mathcal{S} = -4\left\{(a-g+s)(b-g+s)(c+g-s) - a'^2(a-g+s) - b'^2(b-g+s) - c'^2(c+g-s) + 2a'b'c'\right\}$$

oder, wenn wir setzen:

(11) $$\rho = s - g,$$

so kommt

(12) $$\mathcal{S} = R_1(\rho) = -4\left\{(a+\rho)(b+\rho)(c-\rho) - a'^2(a+\rho) - b'^2(b+\rho) - c'^2(c-\rho) + 2a'b'c'\right\}$$

Es ist dann:

(13) $$J = 4\int_{\rho_1}^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{R_1(\rho)}}$$

wo ρ_1 die grösste (reelle) Wurzel von $R_1(\rho) = 0$ ist. (NB. alle drei sind reell).

Kehren wir nun zu unserem Beispiel zurück, es ist:

$$(x-\alpha\lambda\cos\psi)^2 + (y-\beta\lambda\sin\psi)^2 + z^2 = \alpha^2\lambda^2\cos^2\psi + \beta^2\lambda^2\sin^2\psi + (x^2+y^2+z^2) - 2\beta\lambda y\sin\psi - 2\alpha\lambda x\cos\psi.$$

also haben wir zu setzen:

$$a = \alpha^2\lambda^2, \qquad b = \beta^2\lambda^2, \qquad c = x^2+y^2+z^2$$

$$a' = -\beta\lambda y, \qquad b' = -\alpha\lambda x, \qquad c' = 0$$

Also ist:

$$(14) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(x-\alpha\lambda\cos\psi)^2+(y-\beta\lambda\sin\psi)^2+z^2}} = 4\int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Dabei ist, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$g = \frac{\alpha^2\lambda^2+\beta^2\lambda^2-(x^2+y^2+z^2)}{3},$$

$$S = -4\Big\{(\alpha^2\lambda^2+s-g)(\beta^2\lambda^2+s-g)(x^2+y^2+z^2-s+g) - y^2\beta^2\lambda^2(\alpha^2\lambda^2+s-g) - x^2\alpha^2\lambda^2(\beta^2\lambda^2+s-g)\Big\}$$

Wir setzen jetzt:

$$s-g = \lambda^2\rho,$$

dann wird:

$$(15) \qquad S = -4\lambda^4\Big\{(\alpha^2+\rho)(\beta^2+\rho)(x^2+y^2+z^2-\rho\lambda^2) - y^2\beta^2(\alpha^2+\rho) - x^2\alpha^2(\beta^2+\rho)\Big\} =$$

$$= 4\lambda^4\Big\{\lambda^2\rho(\alpha^2+\rho)(\beta^2+\rho) - x^2\rho(\beta^2+\rho) - y^2\rho(\alpha^2+\rho) - z^2(\alpha^2+\rho)(\beta^2+\rho)\Big\}$$

$$(16) \qquad = 4\lambda^4(R(\rho,\lambda)).$$

Bezeichnen wir mit ρ_1 die grösste unter den drei reellen Wurzeln der Gleichung: $R(\rho, \lambda) = 0$, dann ist:

$$(16) \qquad \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{R(\rho, \lambda)}}$$

Dieses Integral haben wir nun mit $\lambda\, d\lambda$ zu multiplicieren und dann nach λ von 0 bis 1 zu integriren. Dabei ist aber eine Vorsicht zu beobachten: Die Gleichung (14) galt für alle Werte von λ von 0 bis 1, die Grenzen incl.; dagegen verliert die Gleichung 16 ihre Gültigkeit für $\lambda = 0$, da dann die Substitution (14a) nicht mehr anwendbar; wird λ unendlich klein, so wird ρ_1 ∞. Wir integriren daher zunächst nur von $\lambda = \varepsilon$ bis $\lambda = 1$, wo ε eine kleine positive Grösse ist, und haben:

$$(17) \quad \int_{\varepsilon}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\lambda\, d\lambda\, d\psi}{\sqrt{(x - \alpha\lambda\cos\psi)^2 + (y - \beta\lambda\sin\psi)^2 + z^2}} = 4 \int_{\varepsilon}^{1}\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{\lambda\, d\lambda\, d\rho}{\sqrt{R(\rho, \lambda)}}$$

Auf der rechten Seite lässt sich nun die Integration nach λ ausführen; es ist nämlich:

$$\frac{4\lambda}{\sqrt{R(\rho,\lambda)}} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sqrt{R(\rho,\lambda)}}{\rho(\rho+\alpha^2)(\rho+\beta^2)}\right),$$

also ist:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{\sqrt{R(\rho,\lambda)}}{\rho(\rho+\alpha^2)(\rho+\beta^2)}d\rho = \int_{\rho_1}^{\infty}\frac{4\lambda\, d\rho}{\sqrt{R(\rho,\lambda)}} - \frac{\sqrt{R(\rho_1,\lambda)}}{\rho_1(\rho_1+\alpha^2)(\rho_1+\beta^2)}\cdot\frac{d\rho_1}{d\lambda}$$

Da $R(\rho_1,\lambda) = 0$, so fällt das zweite Glied weg, und wir erhalten:

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{\sqrt{R(\rho,\lambda)}}{\rho(\rho+\alpha^2)(\rho+\beta^2)}d\rho = \int_{\rho_1}^{\infty}\frac{4\lambda\, d\rho}{\sqrt{R(\rho,\lambda)}}$$

Die Differentiation unterm Zeichen ist erlaubt, da man sich leicht überzeugt, dass das zu differentiirende Integral für alle Werte von λ von ε bis 1 eine reguläre analytische Function von λ ist. Bezeichnen wir daher mit ρ_0 die grösste Wurzel von $R(\rho,1) = 0$, mit ρ_ε die grösste Wurzel von $R(\rho,\varepsilon) = 0$, so kommt:

$$(19)\quad 4\int_{\varepsilon}^{1}\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{\lambda\, d\lambda\, d\rho}{\sqrt{R(\rho,\lambda)}} = \int_{\rho_0}^{\infty}\frac{\sqrt{R(\rho,1)}\cdot d\rho}{\rho(\rho+\alpha^2)(\rho+\beta^2)} - \int_{\rho_\varepsilon}^{\infty}\frac{\sqrt{R(\rho,\varepsilon)}\cdot d\rho}{\rho(\rho+\alpha^2)(\rho+\beta^2)}.$$

Nehmen wir nun zunächst an, z sei von 0 verschieden, so ist $\rho_\varepsilon > 0$, da

$R(\rho, \varepsilon)$ für $\rho = +\infty$ und $\rho = 0$ verschiedenes Vorzeichen annimmt. Es ist dann also:

$$0 < R(\rho, \varepsilon) < 4\varepsilon^2 \rho(\rho + \alpha^2)(\rho + \beta^2),$$

also:

$$0 < \int_{\rho_\varepsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{R(\rho, \varepsilon)}}{\rho(\rho + \alpha^2)(\rho + \beta^2)} d\rho < \varepsilon \int_{\rho_\varepsilon}^{\infty} \frac{2 d\rho}{\sqrt{\rho(\rho + \alpha^2)(\rho + \beta^2}}.$$

Der zweite Teil auf der rechten Seite von (19) wird also mit ε unendlich klein: Nun ist aber

$$\int_\varepsilon^1 \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{\lambda \, d\lambda \, d\rho}{\sqrt{R(\rho, \lambda)}}$$

eine stetige Function von ε und für beliebig kleine ε gilt (19); es folgt daraus:

$$(20) \qquad V = \alpha \beta \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sqrt{R(\rho, 1)}}{\rho(\rho + \alpha^2)(\rho + \beta^2)} d\rho$$

Dies gilt zunächst unter der Voraussetzung $z \neq 0$; da aber V eine stetige Function von x, y, z, so gilt es auch noch für $z = 0$.

Das Integral ist ein elliptisches Integral und lässt sich nach §26,5 berechnen.

IV. Kapitel.

Oberfläche des Ellipsoids.

§1. Geometrischer Teil.

Die Gleichung des Ellipsoids sei:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

wobei $a > b > c$ vorausgesetzt wird:

Sämmtliche mit diesem Ellipsoid confocalen Flächen 2ten Grades sind dann enthalten in der Form:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} = 1.$$

Durch jeden Punkt x', y', z' des Raumes geht dann 1 mit dem ggb. Ellipsoid confocales Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid und ein zweischaliges Hyperboloid, entsprechend den drei, stets reellen Wurzeln:

$$t_3 < c, \quad c < t_2 < b, \quad b < t_1 < a$$

der Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{x'^2}{a-t} + \frac{y'^2}{b-t} + \frac{z'^2}{c-t} = 1$$

Wir wollen zunächst die rechtwinkligen

Coordinaten x', y', z' durch die elliptischen Coordinaten t_1, t_2, t_3 ausdrücken. Zu diesem Zwecke führen wir ein:

$$(4) \qquad \pi(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$$

und setzen dann:

$$(5) \qquad \psi(t) = \left(1 + \frac{x'^2}{t-a} + \frac{y'^2}{t-b} + \frac{z'^2}{t-c}\right)\pi(t)$$

Alsdann ist:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \psi(a) &= -x'^2\,\pi'(a) \\ \psi(b) &= -y'^2\,\pi'(b) \\ \psi(c) &= -z'^2\,\pi'(c) \end{aligned}$$

$\psi(t)$ ist eine ganze Function 3ten Grades von t; der Coefficient von t^3 ist 1; $\psi(t)$ verschwindet für $t = t_1, t_2, t_3$, also ist:

$$(7) \qquad \psi(t) = (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

Setzt man hierin $t = a, b, c$ so erhält man aus (6) Ausdrücke für x'^2, y'^2, z'^2. Liegt der Punkt x', y', z' auf dem Ellipsoid (1), so ist: $t_3 = 0$; für solche Punkte ist also:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a-t_1)(a-t_2)}{(a-b)(a-c)} \\ y^2 &= \frac{b(b-t_1)(b-t_2)}{(b-a)(b-c)} \\ z^2 &= \frac{c(c-t_1)(c-t_2)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

Wir haben also die Rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche unseres gegebenen Ellipsoids durch 2 unabhängige Grössen t_1, t_2 ausgedrückt. Ist dann das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = P\,dt_1^2 + 2Q\,dt_1\,dt_2 + R\,dt_2^2,$$

so ist bekanntlich das Oberflächenelement:

$$dS = dt_1\,dt_2\sqrt{PR - Q^2}$$

Wir haben also zunächst $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ zu bilden. Zu diesem Zweck nehmen wir zunächst wieder den Punkt x, y, z beliebig im Raume an, so dass auch t_3 variabel ist. Dann ist:

$$x^2 = \frac{(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3)}{(a-b)(a-c)};$$

durch logarithmische Differentiation:

$$dx = \frac{x}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}{}_\alpha \frac{dt_\alpha}{t_\alpha - a};$$

ebenso:

$$dy = \frac{y}{2}\sum \frac{dt_\alpha}{t_\alpha - b};$$

$$dz = \frac{z}{2}\sum \frac{dt_\alpha}{t_\alpha - c}.$$

Da die t_α der Gleichung (3) genügen, so ist:

$$\frac{x^2}{(t_\alpha - a)(t_\beta - a)} + \frac{y^2}{(t_\alpha - b)(t_\beta - b)} + \frac{z^2}{(t_\alpha - c)(t_\beta - c)} = 0.$$

Also erhält man:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\frac{x^2}{(t_\alpha - a)^2} + \frac{y^2}{(t_\alpha - b)^2} + \frac{z^2}{(t_\alpha - c)^2}\right\} dt_\alpha^2$$

Nun ist aber:

$$\frac{\psi(t)}{\pi(t)} = 1 + \frac{x^2}{t-a} + \frac{y^2}{t-b} + \frac{z^2}{t-c}$$

Daraus durch Differentiation nach t:

$$\frac{\psi'(t)}{\pi(t)} - \frac{\psi(t)\,\pi'(t)}{\pi^2(t)} = -\left(\frac{x^2}{(t-a)^2} + \frac{y^2}{(t-b)^2} + \frac{z^2}{(t-c)^2}\right)$$

für $t = t_\alpha$ wird $\psi(t_\alpha) = 0$, $\pi(t_\alpha) \neq 0$, also:

$$\frac{x^2}{(t_\alpha - a)^2} + \frac{y^2}{(t_\alpha - b)^2} + \frac{z^2}{(t_\alpha - c)^2} = -\frac{\psi'(t_\alpha)}{\pi(t_\alpha)}$$

Also erhalten wir:

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\psi'(t_\alpha)}{\pi(t_\alpha)}\,dt_\alpha^2$$

(Diese Ableitung lässt sich ohne Weiteres auf eine n-fache Mannigfaltigkeit übertragen).

In unserem Fall soll das Linienelement ds ganz auf dem Ellipsoid liegen; es ist also $dt_3 = 0$ und $t_3 = 0$; demnach:

$$da^2 = -\frac{1}{4}\frac{\psi'(t_1)}{\pi(t_1)}dt_1^2 - \frac{1}{4}\frac{\psi'(t_2)}{\pi(t_2)}dt_2^2.$$

Also:

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{4}\frac{\psi' t_1}{\pi(t_1)} \qquad \mathcal{Q} = 0 \qquad \mathcal{R} = -\frac{1}{4}\frac{\psi'(t_2)}{\pi(t_2)}$$

Da $\mathcal{Q} = 0$, so schneiden sich die Curven $t_1 =$ Const. und $t_2 =$ Const. rechtwinklig. Wir erhalten also für das Oberflächenelement:

$$d\,\mathcal{S} = \sqrt{\frac{1}{16}\frac{\psi' t_1 \cdot \psi' t_2}{\pi t_1 \cdot \pi t_2}} \cdot dt_1\, dt_2$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\frac{t_1(t_1 - t_2)\,t_2(t_2 - t_1)}{\pi t_1 \cdot \pi t_2}}\, dt_1\, dt_2$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t_1 t_2 (t_1 - t_2)}{\sqrt{-t_1 \pi t_1}\,\sqrt{t_2 \pi t_2}}\, dt_1\, dt_2$$

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Integrationsgrenzen für t_1 und t_2. Statt die ganze Oberfläche des Ellipsoids zu berechnen, berechnen wir zunächst die Oberfläche desjenigen Octanten in dem $x, y, z > 0$. Für die

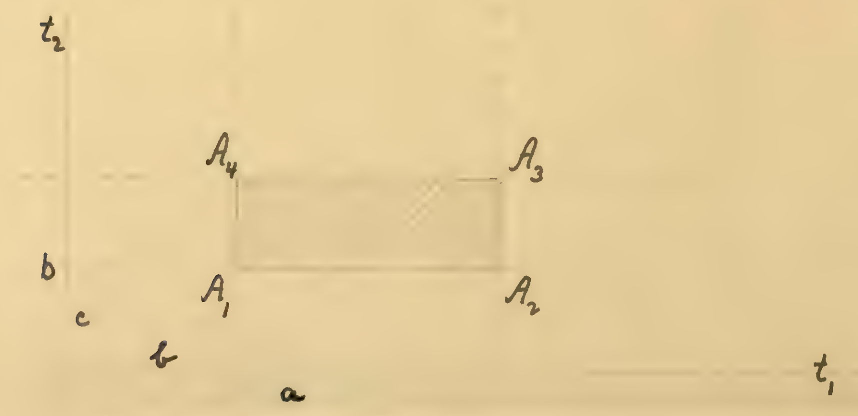
Punkte innerhalb dieses Octanten ist:

$$x = \sqrt{\frac{a(a-t_1)(a-t_2)}{(a-b)(a-c)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{b(b-t_1)(b-t_2)}{(b-a)(b-c)}}$$

$$z = \sqrt{\frac{c(c-t_1)(c-t_2)}{(c-a)(c-b)}}$$

Betrachten wir t_1, t_2 als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene, so wird durch die Gleichungen ( ) die Fläche des Octanten eindeutig abgebildet auf die Fläche des Rechtecks in der (t_1, t_2)-Ebene, welches von den Geraden $t_1 = b$, $t_1 = a$ und $t_2 = c$, $t_2 = b$ begrenzt wird:



Denn, entspricht der Begrenzung des Rechtecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Begrenzung des Octanten:

1) Ist $t_1 = b$, $t_2 = c$, so ist $x = \sqrt{a}$, $y = 0$, $z = 0$. Bleibt dann $t_2 = c$ während t_1 von b bis a wächst, so durchläuft der Punkt x, y, z den ersten Quadranten der Ellipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1;$$

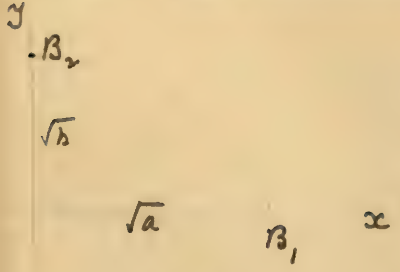
denn es ist dann

$$x = \sqrt{\frac{a(a-t_1)}{a-b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b(b-t_1)}{b-a}} = \sqrt{\frac{b(t_1-b)}{a-b}}, \quad z = 0.$$

Durch Elimination von t_1 folgt:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Mit wachsendem t_1 nimmt x ab, y zu;



für $t_1 = a$ ist: $x = 0$, $y = \sqrt{b}$. Der Rechteckseite $A_1 A_2$ entspricht also der Ellipsenquadrant $B_1 B_2$.

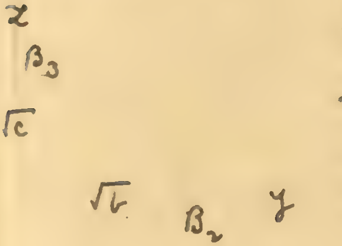
2) Längs $A_2 A_3$ ist $t_1 = a$;

$$x = 0, \quad y = \sqrt{\frac{b(b-t_2)}{b-c}}, \quad z = \sqrt{\frac{c(t_2-c)}{b-c}}.$$

Durch Elimination von t_2:

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Wächst t_2 von c bis b so nimmt y von $\sqrt{b}$ bis 0 ab, z von 0 bis $\sqrt{c}$ zu; der Rechteckseite A_2A_3 entspricht also der Quadrant B_2B_3 der Ellipse:



$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

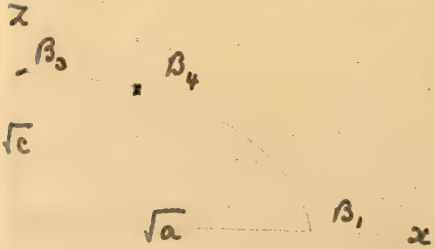
3) Längs A_3A_4 ist $t_2 = b$; also

$$x = \sqrt{\frac{a(a-t_1)}{a-c}} \qquad y = 0 \qquad z = \sqrt{\frac{c(t_1-c)}{a-c}}$$

Durch Elimination von t_1:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1$$

Nimmt t_1 ab von a bis b, so nimmt x zu von 0 bis: $x_0 = \sqrt{\frac{a(a-b)}{a-c}}$; z nimmt ab von $\sqrt{c}$ bis $z_0 = \sqrt{\frac{c(b-c)}{a-c}}$; der Punkt x, y, z durchläuft also die Ellipse:



$$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1$$

von B_3 bis zum Punkt B_4, dessen Coordinaten sind:

$$x_0 = \sqrt{\frac{a(a-b)}{a-c}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \sqrt{\frac{c(b-c)}{a-c}}$$

4) Längs $A_4 A_1$ endlich ist $t_1 = b$, also

$$x = \sqrt{\frac{a(a-t_2)}{a-c}}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{\frac{c(c-t_2)}{c-b}}$$

Durch Elimination von t_2:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1$$

Nimmt t_2 von b bis c ab, so durchläuft der Punkt x, y, z den Bogen $B_4 B_1$ der Ellipse: $\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1$.

Es entspricht also in der Tat der Begrenzung von $A_1 A_2 A_3 A_4$ die Begrenzung $B_1 B_2 B_3 B_4$ des Octanten.

Ferner entspricht jedem Punkt innerhalb $A_1 A_2 A_3 A_4$ ein und nur ein Punkt des Octanten innerhalb der Begrenzung $B_1 B_2 B_3 B_4$. Denn, ist $b < t_1 < a$ und $c < t_2 < b$, so ist: $0 < x < \sqrt{a}$, $0 < y < \sqrt{b}$, $0 < z < \sqrt{c}$ und durch jeden Punkt unseres Ellipsoids geht überhaupt nur 1 confocales einschaliges und 1 confocales 2-schaliges Hyperboloid. Zu jedem Punkt x, y, z des Ellipsoids gehört also nur 1 Wertepaar t_1, t_2.

Aus dem bisherigen folgt, dass der Integrationsbereich für t_1 und t_2 das Rechteck $A_1 A_2 A_3 A_4$ ist; wir haben also nach t_1 zu integriren von b bis a, nach t_2 von c bis b.

Wir erhalten daher für die Oberfläche O des Octanten:

$$O = \frac{1}{4} \int_c^b \int_b^a \frac{t_1 t_2 (t_1 - t_2)\, dt_1\, dt_2}{\sqrt{-t_1 \pi(t_1)}\,\sqrt{t_2 \pi t_2}}$$

oder:

$$O = \frac{1}{4}\left\{ \int_c^b \frac{t_2\, dt_2}{\sqrt{t_2 \pi(t_2)}} \cdot \int_b^a \frac{t_1^2\, dt_1}{\sqrt{-t_1 \pi(t_1)}} - \int_b^a \frac{t_1\, dt_1}{\sqrt{-t_1 \pi(t_1)}} \cdot \int \frac{t_2^2\, dt_2}{\sqrt{t_2 \pi(t_2)}} \right\}$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$t\pi(t) = t(t-c)(t-b)(t-a) = R(t)$$

$$U_1 = \int_b^a \frac{t\, dt}{\sqrt{R(t)}} \qquad U_2 = \int_c^b \frac{t\, dt}{\sqrt{R(t)}}$$

$$V_1 = \int_b^a \frac{t^2\, dt}{\sqrt{R(t)}} \qquad V_2 = \int_c^b \frac{t^2\, dt}{\sqrt{R(t)}}$$

Dann ist, da $\sqrt{-t_1 \pi(t_1)} = -i\sqrt{R(t_1)}$,

$$O = \frac{i}{4}\left(U_2 V_1 - U_1 V_2 \right).$$

§2. Berechnung des Integrals.

Wir nehmen zunächst mit dem Ausdruck O eine nach §26 nahe liegende Umformung vor; es ist:

$$O = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} U_2 & U_1 \\ V_2 & V_1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} U_2 & U_1 \\ V_2 + 2BU_2 & V_1 + 2BU_1 \end{vmatrix}$$

und setzen nun:

$$\int_b^a \frac{(t^2 + 2Bt)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = U_1'$$

$$\int_c^b \frac{(t^2 + 2Bt)\,dt}{\sqrt{R(t)}} = U_2'$$

so kommt:

$$O = \frac{i}{4}\left(U_2 U_1' - U_1 U_2'\right)$$

Wir haben nun die vier elliptischen Integrale zu berechnen. Es ist:

$$R(t) = At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4B't + A' =$$

$$= t(t-c)(t-b)(t-a);$$

also $A = 1$, $A' = 0$, etc.

$$a_0 = a\,;\quad a_1 = b\,;\quad a_2 = c\,;\quad a_3 = 0$$

Wir wählen für die 4 Integrale dieselbe Substitution:

$$t = \varphi(u, a_3) = \frac{1}{4}\,\frac{R'(0)}{\wp u - \frac{1}{24}R''(0)}$$

Wächst t von b bis a, so geht u von ω_2 bis ω_1, und es ist:

$$\frac{dt}{du} = +\sqrt{R(t)}$$

Wächst t von c bis b, so geht u von ω_3 bis ω_2, und es ist

$$\frac{dt}{du} = +\sqrt{R(t)}\,;$$

somit ist:

$$U_1 = \int_{\omega_2}^{\omega_1} t\,du \qquad U_2 = \int_{\omega_3}^{\omega_2} t\,du$$

$$U_1' = \int_{\omega_2}^{\omega_1} (t^2 + 2Bt)\,du \qquad U_2' = \int_{\omega_3}^{\omega_2} (t^2 + 2Bt)\,du$$

Nach § 26, 4 ist nun:

$$t = \frac{\sigma'}{\sigma}(u + u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0) - 2\,\frac{\sigma'}{\sigma}u_0$$

und nach § 18, 1 ist u_0 reell und

$$\omega_1 < u_0 < 2\omega_1$$

Statt u_0 können wir auch den congruenten Wert $-v$ einführen, wo dann v positiv u. $0 < v < \omega_1$; dann wird:

$$t = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) + 2\frac{\sigma'}{\sigma}v.$$

Es kommt daher:

$$U_1 = \int_{\omega_2}^{\omega_1}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)\right\}du - 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\,\omega_3$$

Zur Berechnung des Integrals setzen wir $u+\omega_1$ an Stelle von u; dann wird das Integral:

$$= -\int_0^{\omega_3}\left\{\frac{\sigma'(u+\omega_1-v)}{\sigma(u+\omega_1-v} - \frac{\sigma'(u+\omega_1+v)}{\sigma(u+\omega_1+v)}\right\}du$$

oder nach Art. 8

$$= -\int_0^{\omega_3}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u-(v+\omega_1)) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+(v+\omega_1))\right\}du - 2\eta_1\omega_3$$

Jetzt können wir § 27 anwenden; es ist hier: $\tilde{\omega} = \omega_3$, $\tilde{\omega}' = -\omega_1$, $u_0 = v+\omega_1$ also: $\kappa = -1$, daher:

$$= \pi i + 2\eta_3 v + 2\eta_3\omega_1 - 2\eta_1\omega_3,$$

oder, da

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$$

$$= 2\eta_3 v.$$

Daher:
$$\mathcal{U}_1 = 2\eta_3 v - 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_3$$
Ebenso ist:
$$\mathcal{U}_2 = \int_{\omega_3}^{\omega_2}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)\right\}du + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_1$$
$$= \int_0^{\omega_1}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_3-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_3+v)\right\}du + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_1$$
$$= \int_0^{\omega_1}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\big(u-(v+\omega_3)\big) - \frac{\sigma'}{\sigma}\big(u+(v+\omega_3)\big)\right\}du + 2\eta_3\omega_1 + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_1$$
Hier ist $\tilde{\omega} = \omega_1$, $\tilde{\omega}' = \omega_3$, $u_0 = v+\omega_3$, $K = 0$,

also:
$$\mathcal{U}_2 = \pi i - 2\eta_1 v - 2\eta_1\omega_3 + 2\eta_3\omega_1 + 2\frac{\sigma'}{\sigma}(v)\cdot\omega_1$$
$$= -2\eta_1 v + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_1$$
Zur Berechnung der beiden übrigen Integrale beachten wir dass, nach §26,2:
$$At^2 + 2Bt + C = \wp(u+u_0) + \wp(u-u_0)$$
also, da $A = 1$
$$t^2 + 2Bt = -C + \wp(u+u_0) + \wp(u-u_0)$$
$$= -C + \wp(u-v) + \wp(u+v)$$

Daher:

$$U_1' = C\omega_3 - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_1 - v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_1 + v) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_2 - v) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_3 + v)$$

$$= C\omega_3 - \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(v+\omega_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v-\omega_1)\right) + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(v+\omega_3) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v-\omega_3)\right)$$

$$= C\omega_3 - 2\eta_1 + 2\eta_2,$$

$$= C\omega_3 + 2\eta_3$$

Ganz ebenso erhält man:

$$U_2' = -2\eta_1 - C\omega_1$$

Demnach wird:

$$U_2 U_1' - U_1 U_2' = \left(-2\eta_1 v + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\cdot\omega_1\right)\left(2\eta_3 + C\omega_3\right)$$

$$-\left(2\eta_3 v - 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\omega_3\right)\left(-2\eta_1 - C\omega_1\right) =$$

$$= -2Cv(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) - 4\frac{\sigma' v}{\sigma v}(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1)$$

$$= -\pi i\left(Cv + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\right),$$

also

$$O = \frac{\pi}{4}\left(Cv + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\right),$$

und schliesslich die Oberfläche S des ganzen Ellipsoids:

$$S = 2\pi\left(Cv + 2\frac{\sigma' v}{\sigma v}\right)$$

Wir wollen diesem Ausdruck noch eine andere für gewisse Zwecke vorteilhaftere geben; es ist:

$$\wp v = \wp(-u_0) = \frac{1}{24} R''(0) = \frac{C}{2},$$

also:

$$C = 2\wp u$$

und ~~damit~~:

$$S = 4\pi\left(v\wp u + \frac{\sigma' v}{\sigma v}\right)$$

Wir geben schliesslich noch die Werte der Differenzen $e_1 - e_2$ etc. an; es ist:

$$e_1 - e_2 = \frac{a-b}{4} c$$

$$e_1 - e_3 = \frac{a-c}{4} b$$

$$e_2 - e_3 = \frac{b-c}{4} a$$

Ferner, die bei der Berechnung von v auftretende Grössen:

$$s_0 - e_1 = \frac{bc}{4}$$

$$s_0 - e_2 = \frac{ac}{4}$$

$$s_0 - e_3 = \frac{ab}{4}.$$

V. Kapitel.

Das sphärische Pendel.

Es seien x, y, z rechtwinkligen Coordinaten des materiellen Punktes P, mit der Masse 1, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem Aufhängungspunkt des Pendels, dessen positive z-Axe mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfällt.

Die Lange des Pendels sei l, die Beschleunigung durch die Schwerkraft $2g$.

Zur Zeit t_0 seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von P, p_0, q_0, r_0 die Geschwindigkeitscomponenten.

Aus dem Flächensatz folgt:

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k$$

wo k eine Constante, die durch die gegebenen Anfangswerte bestimmt ist.

Aus dem Satz von der lebendigen Kraft folgt:

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4gz + h,$$

wo h eine zweite, ebenfalls durch die Anfangsbedingungen bestimmte Constante bedeutet.

Ueberdies besteht zwischen x, y, z die Gleichung:

$$(3) \qquad x^2+y^2+z^2=l^2$$

woraus folgt:

$$(4) \qquad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0$$

Durch Quadriren der Gl. (1) erhält man:

$$(x^2+y^2)\left\{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2\right\}-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2=k^2$$

Mit Benutzung von (2) bis (4) ergibt sich heraus:

$$(l^2-z^2)\left(4gz+h-(\frac{dz}{dt})^2\right)-z^2(\frac{dz}{dt})^2=k^2$$

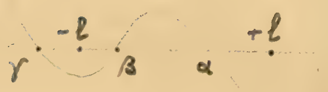
oder:

$$(5) \qquad (\frac{dz}{dt})^2=(1-\frac{z^2}{l^2})(4gz+h)-\frac{k^2}{l^2}=R(z)$$

Daraus folgt, dass z eine elliptische Function von t ist, die wir näher zu untersuchen haben.

$R(z)$ ist vom 3. Grad, also $A=0$; $B=-\frac{g}{l^2}$, also <0. Sämmtliche Wurzeln von $R(z)$ sind reell. Beweis: für $z=-\infty$ ist $R(z)>0$; für $z=\pm l$ wird $R(z)=-\frac{k^2}{l^2}$, also <0; zwischen $-\infty$ und $-l$ liegt also 1 Wurzel.

Zwischen $-l$ und $+l$ liegt entweder gar keine oder 2 Wurzeln; es muss das letztere eintreten. Denn für reelle Werte von t muss z, also auch $\frac{dz}{dt}$ reell werden, es muss also $R(z)$ für reelle t positiv sein; die Werte, die z während der Bewegung durchläuft, liegen aber wegen (3) zwischen $-l$ und $+l$; es muss also zwischen $-l$ und $+l$ Werte von z geben für die $R(z) > 0$; somit müssen zwischen $-l$ und $+l$ 2 Wurzeln liegen.



Diese 3 reellen Wurzeln seien nun α, β, γ, und $\alpha > \beta > \gamma$; dann ist $\gamma < -l < \beta < \alpha < +l$. Wir können nunmehr setzen:

$$(6) \quad R(z) = -\frac{4g}{l^2}(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Wir befinden uns also im Falle I, 2 des §23.

Da $R(z)$ sein Zeichen wechselt, wo es verschwindet, so muss z während der Bewegung zwischen den Grenzen β und d bleiben. Verstehen wir unter a irgend eine Wurzel von $R(z)$, so ist das allgemeine Integral von (5):

$$z = a + \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{\wp(t+\tau) - \frac{1}{24}R''(a)},$$

wo τ die Integrationsconstante bedeutet. Wir wollen a so wählen, dass τ reell wird; wir haben dann $a=\beta$ zu nehmen, also:

$$(7) \qquad z = \beta + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\wp(t+\tau) - \frac{1}{24}R''(\beta)}.$$

Denn das particuläre Integral: (§23, 8)

$$z_1 = \varphi(t, a_2)$$

ist für reelle Werte von t reell und wächst von a_2 bis a_1, wenn t von 0 bis ω_2 wächst.

τ bestimmt sich durch die Bedingung:

$$z_0 = \beta + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\wp(t_0+\tau) - \frac{1}{24}R''(\beta)},$$

oder:
$$\wp(t_0+\tau) = \frac{1}{24}R''(\beta) + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{z_0 - \beta}$$

woraus für τ zwei incongruente <u>reelle</u> Werte folgen. Welcher von beiden zu nehmen ist, wird entschieden durch die Gleichung:

$$(9) \quad \wp'(t_0+\tau) = -\frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{(z_0-\beta)^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{(z_0-\beta)^2}\cdot k_0$$

Nach § 23, 8 ist:

$$\frac{1}{24}R''(\beta) = e_2,$$

also ist:

$$\wp(t+\tau) - \frac{1}{24}R''(\beta) = \wp(t+\tau) - e_2 = \frac{\sigma_2^2(t+\tau)}{\sigma^2(t+\tau)},$$

also kommt:

$$z-\beta = \frac{1}{4}R'(\beta)\,\frac{\sigma^2(t+\tau)}{\sigma_2^2(t+\tau)}$$

$$(10) \qquad = \frac{g}{l^2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\,\frac{\sigma^2(t+\tau)}{\sigma_2^2(t+\tau)}.$$

Aus § 23, 3 folgt ferner:

$$e_1 - e_2 = \frac{g}{l^2}(\beta-\gamma)$$

$$e_1 - e_3 = \frac{g}{l^2}(\alpha-\gamma)$$

$$e_2 - e_3 = g/l^2(\alpha-\beta),$$

und hieraus lassen sich die Perioden von z berechnen. Wir haben nun ferner noch x und y als Functionen der Zeit auszudrücken. Wir gehen dabei aus von dem Ausdruck:

$$\frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}}{x+yi} = \frac{\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)+i\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)}{x^2+y^2},$$

oder, mit Benutzung von (1), (3), (4):

$$(12) \qquad \frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{-z\dfrac{dz}{dt} + i\kappa}{\ell^2 - z^2}.$$

Die rechte Seite ist eine elliptische Funktion von t; um sie zu integrieren müssen wir sie nach §] umformen. Wir benutzen dazu die Identität:

$$(13) \qquad \frac{-\dfrac{zdz}{dt} + i\kappa}{\ell^2 - z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{\kappa i}{\ell}}{z-\ell} + \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{\kappa i}{\ell}}{z+\ell};$$

so können wir die Formel §26,6 anwenden:

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v-u_1)$$

Setzen wir, nämlich:

$$(15) \qquad t + \tau = u \quad \text{und} \quad z = \wp u$$

so kommt:

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \dfrac{\kappa i}{\ell}}{\wp u - \ell} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \dfrac{\kappa i}{\ell}}{\wp u + \ell}.$$

Für $z = \pm \ell$ wird $R(z) = -\dfrac{\kappa^2}{\ell^2}$; es sei nun v_1 derjenige Wert von u für den:

$$(16) \qquad \left.\begin{aligned} \wp v_1 &= +\ell \\ \wp' v_1 &= -\frac{i\kappa}{\ell} \end{aligned}\right\} \text{und} \left\{\begin{aligned} \wp v_2 &= -\ell \\ \wp' v_2 &= +\frac{i\kappa}{\ell} \end{aligned}\right.$$

dann kommt:

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v_1}{\varphi u - \varphi v_1} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v_2}{\varphi u - \varphi v_2},$$

also, nach (14):

$$(17)\quad \frac{d\log(x+yi)}{du} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_2) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1)$$
$$+ \frac{\sigma'}{\sigma}(v_1-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v_2-u_1).$$

Nun war in § 26 u_1 ~~einer~~ der beiden incongruenten Werte von u für die $\varphi u = \infty$ wird; da in unserem Fall $A=0$ so fallen diese beiden Werte in einen zusammen, u. zwar ist nach § 23, 8:

$$(18)\qquad u_1 = -\omega_2$$

Wir haben nun weiter v_1 und v_1 näher zu bestimmen; es ist:

$$\wp u = e_2 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\varphi(u) - \beta},$$

also:

$$\wp v_1 = e_2 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\ell - \beta}$$

$$(19)\qquad \wp' v_1 = + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{(\ell-\beta)^2}\, i k$$

Nun ist $R'(\beta) > 0$, $\ell - \beta > 0$, also

$$\wp v_1 > e_2$$

Andrerseits ist:

$$e_1 = e_2 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\alpha-\beta}.$$

Da $\alpha < l$, so folgt:

$$e_1 > \wp v_1 > e_2.$$

Wir können, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, $k > 0$ annehmen; denn wäre $k < 0$, so würde eine einfache Umkehrung der positiven Richtung der x-Axe genügen um $k > 0$ zu machen. Dann ist aber:

$$\wp' v_1 = + i\,\mathfrak{P},$$

also nach § 12:

$$v_1 = \omega_1 + w_1 i, \quad \text{wo:} \tag{20}$$

$$0 < w_1 < \frac{\omega_3}{i}$$

Ferner ist:

$$\wp v_2 = e_2 - \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\beta-(-l)}$$

$$\wp' v_2 = -\frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{(\beta-(-l))^2}\,ik \tag{21}$$

$$e_3 = e_2 - \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\beta-\gamma}$$

Da $-l > \gamma$, so folgt:

$$\wp v_2 < e_3$$

$$\wp' v_2 = -i\,\mathfrak{P},$$

also:

$$(22) \qquad v_2 = w_2 i, \text{ wo wieder: }$$

$$0 < w_2 < \frac{\omega_3}{i}$$

Setzt man die Werte von u_1, v_1, v_2 in (17) ein und wendet dabei die Formeln an:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + 2\omega_\lambda) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) + 2\eta_\lambda \quad \text{und}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + \omega_\lambda) = \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u) - \eta_\lambda,$$

so kommt:

$$(23) \qquad \frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(u - w_1 i) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - w_2 i) - 2\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(u) + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i) + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_2 i)$$

Also, durch Integration:

$$x + yi = C_0 \frac{\sigma_1(u - w_1 i)\,\sigma(u - w_2 i)}{\sigma_2^2(u)} e^{u\left\{\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i) + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_2 i)\right\}}$$

Zur Bestimmung der Constanten seien x_1, y_1 die Werte von x, y für $u = 0$, also $t = -\tau$, dann kommt:

$$(24) \qquad \frac{x + yi}{x_1 + y_1 i} = -\frac{\sigma_1(u - w_1 i)\,\sigma(u - w_2 i)}{\sigma_1(w_1 i)\,\sigma(w_2 i)\,\sigma_2^2(u)} e^{u\left\{\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i) + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_2 i)\right\}}$$

Berücksichtigt man schliesslich noch, dass:

(Art. 42):

$$\sigma(u) = 2\omega \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}$$

(25)

$$\sigma_\lambda(u) = \frac{\vartheta_{\lambda+1}\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_{\lambda+1}'(0)} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \quad \lambda = 1, 2, 3$$

so erhält man:

$$(26) \quad \frac{x + yi}{x_1 + y_1 i} = -\frac{\vartheta_2\left(\frac{u - w_1 i}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u - w_2 i}{2\omega}\right)\vartheta_3^2(0)}{\vartheta_2\left(\frac{w_1 i}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{w_2 i}{2\omega}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)} \cdot e^{\frac{u}{2\omega}\left\{\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}\left(\frac{w_1 i}{2\omega}\right) + \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}\left(\frac{w_2 i}{2\omega}\right)\right\}}$$

Durch Trennung des reellen vom imaginären würde man hieraus x und y selbst als Functionen von u, also auch von t erhalten.

Doch lässt sich schon aus (26) ein wichtiger Schluss über die Art der Bewegung des sphärischen Pendels ziehen; wir setzen:

$$(27) \quad \frac{1}{2\omega}\left\{\frac{\vartheta_0'\left(\frac{w_1 i}{2\omega}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w_1 i}{2\omega}\right)} + \frac{\vartheta_3'\left(\frac{w_2 i}{2\omega}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{w_2 i}{2\omega}\right)}\right\} = mi.$$

m ist dann reell.

Nun denken wir uns neben dem bisherigen im Raume festen Coordinatensystem ein zweites rechtwinkliges, aber aber mit der Zeit veränderliches Coordinatensystem (ξ, η, ζ) eingeführt, dessen ξ-Axe mit der x-Axe den Winkel mu bildet, während die ζ-Axe mit der z-Axe zusammenfällt. Dann ist:

$$(28)\quad \begin{aligned} x &= \xi \cos(mu) - \eta \sin(mu) \\ y &= \xi \sin(mu) + \eta \cos(mu) \end{aligned}$$

dann wird:

$$x + yi = (\xi + i\eta)\, e^{mui},$$

also:

$$\frac{\xi + i\eta}{x_1' + iy_1} = -\frac{\vartheta_2\left(\frac{u - w_1 i}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{u - w_2 i}{2\omega}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{w_1 i}{2\omega}\right)\vartheta_1\left(\frac{w_2 i}{2\omega}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$$

Die rechte Seite ist eine periodische Function von u resp. t mit der reellen Periode 2ω. Da überdiess auch z eine periodische Function von t, mit derselben Periode ist, so folgt der

Satz. Die Bewegung des betrachteten materiellen Punktes ist eine periodische in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das mit der constanten Winkelgeschwindigkeit m um die z-Axe des ursprünglichen Systems rotirt.

Die Rotation der ξ-Axe um die z-Axe ist ebenfalls eine periodische Bewegung. Ihre Periode ist $\frac{2\pi}{m}$; in dem speciellen Fall dass die Perioden beider Bewegungen, also $\frac{2\pi}{m}$ und 2ω, commensurabel sind, wird die Bewegung des materiellen Punktes selbst periodisch sein.

Aus Gleichung (16) ergibt sich noch eine andere Darstellung von z, welche für numerische Berechnung geeignet ist: die Function:

$$l + z = l + \varphi(u)$$

wird ∞^2 für ω_2, wird $= 0$ für $u = \pm v_2$; also ist:

$$z + l = C \frac{\sigma(u-v_2)\,\sigma(u+v_2)}{\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)};$$

für $u = v_1$ wird $z = +l$, also:

$$1 + \frac{z}{l} = 2\,\frac{\sigma(v_1-\omega_2)\,\sigma(v_1+\omega_2)}{\sigma(v_1-v_2)\,\sigma(v_1+v_2)} \cdot \frac{\sigma(u-v_2)\,\sigma(u+v_2)}{\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)}.$$

Indem man die Werte für v_1, v_2 einführt und die σ durch die σ_λ ausdrückt und Art. 21 beachtet:

$$(30)\quad 1+\frac{z}{l} = -\frac{2(e_1-e_2)\,\sigma_3^2(w_1 i)}{\sigma_1((w_1-w_2)i)\,\sigma_1((w_1+w_2)i)}\cdot\frac{\sigma(u-w_2 i)\,\sigma(u+w_2 i)}{\sigma_2^2(u)}.$$

Ebenso wird die Function $l-z$ ∞^2 für $u=\omega_2$; $=0$ für $u=\pm v_1$, $=2l$ für $u=\pm v_2$; daher kommt:

$$1-\frac{z}{l} = 2\,\frac{\sigma(v_2-\omega_2)\,\sigma(v_2+\omega_2)}{\sigma(v_2-v_1)\,\sigma(v_2+v_1)}\cdot\frac{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u+v_1)}{\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)}$$

und hieraus:

$$(31)\quad 1-\frac{z}{l} = \frac{2\,\sigma_2^2(w_2 i)}{\sigma_1((w_2-w_1)i)\,\sigma_1((w_2+w_1)i)}\cdot\frac{\sigma_1(u-w_1 i)\,\sigma_1(u+w_1 i)}{\sigma_2^2(u)}.$$

Wir betrachten schliesslich noch einige specielle Fälle.

1.) Soll die Bewegung in einer durch die z-Axe gehenden Ebene stattfinden, so muss:

$$\frac{y}{x} = \text{const.}$$

daraus folgt: $\kappa = 0$, also:

$$R(z) = \left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)(4gz+h) = (l-z)(l+z)\left(z+\frac{h}{4g}\right)\frac{4g}{l^2}.$$

Die Wurzeln von $R(z)$ sind also; $+l$, $-l$, $-\frac{h}{4g}$.

Um zu entscheiden, in welcher Reihenfolge die Wurzeln mit α, β, γ zu bezeichnen sind, denken wir zunächst k noch $\neq 0$, aber sehr klein; dann wird $R(z)$ sehr klein für $z = \pm l$; da

$$\gamma < -l < \beta < \alpha < +l,$$

so folgt zunächst, dass α in $+l$ übergeht; die Wurzel $-l$ kann entweder aus β oder aus γ entstanden sein, und demnach haben wir 2 Fälle zu unterscheiden.

<u>I. Fall</u>: $-\dfrac{h}{4g} > -l$.

$$\alpha = +l, \quad \beta = -\frac{h}{4g}, \quad \gamma = -l.$$

Aus (10) leitet man die Formel her:

$$\frac{\alpha - z}{\alpha - \beta} = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u}, \quad \text{also:} \quad \frac{l - z}{l + \frac{h}{4g}} = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u}$$

Wächst u von 0 bis ω_1, so wächst z von $-\dfrac{h}{4g}$ bis $+l$; andere Werte nimmt z für reelle u überhaupt nicht an; z erreicht also den Culminationspunkt $-l$ <u>nie</u>. Ferner folgt:

$$e_1 = e_2 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{l - \beta} = \wp v_1$$

$$v_1 = \omega_1, \quad w_1 = 0.$$

$$e_3 = e_2 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{-l-\beta} = \wp v_2$$

$$v_2 = \omega_3 \quad ; \quad w_1 = \frac{\omega_3}{i}$$

Wählen wir nun die Schwingungsebene zur yz-Ebene, so wird $y \equiv 0$; also geht (24) über in:

$$\frac{x}{x_1} = -\frac{\sigma_1(u)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(\omega_3)\,\sigma_2^2(u)}\,e^{u\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(\omega_3)}.$$

$$\frac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma\omega_3} = -e^{-\eta_3 u}\cdot\sigma_3 u \quad ; \quad \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(\omega_3) = \eta_3,$$

also:

$$\frac{x}{x_1} = +\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u}$$

~~wo wieder~~ x_1 der Wert von x für $u = 0$. Für $u = 0$ wird $z = \beta$, also da

$$x = \sqrt{l^2 - z^2}\,;$$

$$x_1 = \sqrt{l^2 - \beta^2},$$

somit

$$x = \sqrt{l^2-\beta^2}\;\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u}.$$

<u>II. Fall</u>: $-\frac{h}{4g} < -l$.

$$\alpha = +l, \quad \beta = -l, \quad \gamma = -\frac{h}{4g}.$$

Gleichung (10) liefert:

$$z + l = \frac{g}{l^2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_2^2 u} \quad ; \quad \frac{l-z}{2l} = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_2^2 u}.$$

Wächst u von 0 bis ω_1, so wächst z von $-l$ bis $+l$; der materielle Punkt erreicht den Culminationspunkt und macht vollständige Umlaufe.

v_1 ist wieder $= \omega_1$; dagegen ist

$$\wp v_2 = \infty, \quad v_2 = 0 \quad ; \quad w_1 = 0; \; w_2 = 0;$$

also kommt:

$$x = \text{Const.}\, \frac{\sigma_1 u\, \sigma u}{\sigma_2^2 u}.$$

Die Constante lässt sich hier nicht mehr in derselben Weise bestimmen, da $x_1 = 0$. Es folgt dann aber aus ( ):

$$\frac{l^2 - z^2}{2l} = \frac{g}{l^2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\frac{\sigma^2 u\, \sigma_1^2 u}{\sigma_2^4 u},$$

also:

$$x^2 = 4g\left(\frac{h}{4g} - l\right)\frac{\sigma^2 u\, \sigma_1^2 u}{\sigma_2^4 u}.$$

$$x = \sqrt{h - 4gl}\,.\, \frac{\sigma u \,.\, \sigma_1 u}{\sigma_2^2 u}.$$

VI. Kapitel.

Die Geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoid.

---

§1. Coordinatensysteme.

Auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid:

$$(1) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > c)$$

soll von einem gegebenen Punkt in einer gegebenen Richtung eine geodätische Linie gezogen werden.

Wir drücken die Coordinaten eines Punktes des Ellipsoids durch zwei unabhängige Variable p, q aus:

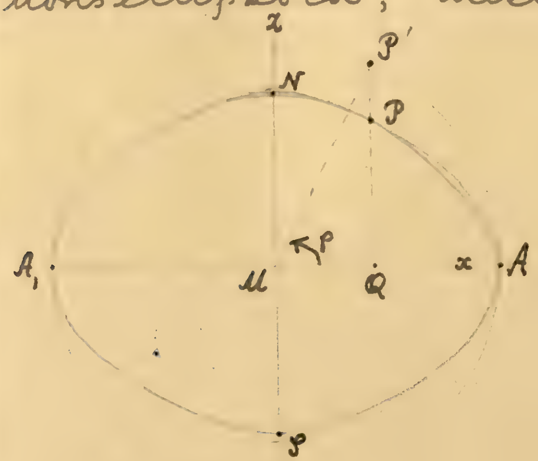
$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= a \cos p \cos q \\ y &= a \cos p \sin q \\ z &= c \sin p \end{aligned}$$

Variirt p von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, q von 0 bis 2π, so liefern die Gleichungen (2) alle Punkte des Rotationsellipsoids.

p und q haben eine einfache geometrische Bedeutung; die Curven $q =$ Const. sind nichts anderes als die Meridian-

Curven; stellen wir uns unter dem Ellipsoid die Erde vor, so ist q die geographische Länge des Punktes x, y, z; dem Schnittpunkt der positiven z-Axe mit dem Ellipsoid möge der Nordpol entsprechen; dann wächst die Länge q wenn man von dem Anfangsmeridian (der xz-Ebene) nach Osten fortschreitet.

Die Curven $p =$ Const. sind Parallelkreise, trotzdem ist p nicht mit der geographischen Breite identisch. Um die geometrische Bedeutung von p zu erkennen, betrachten wir die Schnittcurve der xz-Ebene mit dem Rotationsellipsoid; dieselbe ist die Ellipse:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Indem man $q = 0$ in (2) setzt ergibt sich für dieselbe die Darstellung:

$$x = a \cos p$$
$$y = 0$$
$$z = c \sin p$$

Wie bekannt, hat dann p folgende geometrische Bedeutung: Verlängert man die Ordinate QP, bis sie den mit dem Radius a um M beschriebenen Kreis in P' schneidet, dann bildet der Radius vector MP' mit MA den Winkel p.

Man nennt den Winkel p die reducirte Breite von P. Dasselbe, was hier für den Anfangsmeridian abgeleitet wurde, gilt natürlich für jeden andern ebenso.

Dagegen versteht man unter der wahren Breite von P den Winkel ψ, welchen die im Punkt P errichtete Normale mit der Ebene des Aequators bildet. Zwischen p und ψ besteht eine einfache Beziehung.

Da die Normale im Punkt P in der Meridianebene liegt, so ist ψ auch gleich dem Winkel zwischen der Normale und der x-Axe (wenn P an Anfangsmeridian liegt). Die Richtungscos. der Tangente in P sind nun:

$$\frac{\frac{dx}{dp}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dz}{dp}\right)^2}}, \quad 0, \quad \frac{\frac{dz}{dp}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dz}{dp}\right)^2}}, \quad \text{oder:}$$

$$\frac{-a \sin p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}, \quad 0, \quad \frac{c \cos p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}$$

Dabei ist diejenige Tangentenrichtung die positive, in welcher p wächst.

Daraus folgt für die Richtungscosinus der Normalen:

$$\cos \psi = \frac{c \cos p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}$$

(3)

$$\sin \psi = \frac{a \sin p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p}}$$

Um umgekehrt die reducirte Breite durch die wahre Breite auszudrücken, folgt aus (3)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{c} \operatorname{tg} p$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{c}{a} \operatorname{tg} \psi$$

oder, indem wir die numerische Excentricität ε einführen:

(4) $$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \qquad c^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

folgt:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

(5)

$$\operatorname{tg} p = \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \operatorname{tg} \psi$$

Da endlich alle Punkte von derselben reducirten Breite auch dieselbe wahre Breite haben, so gelten die Formeln (3) und (5) nicht nur für Punkte im Anfangsmeridian, sondern allgemein.

Der feste Punkt P_1 auf dem Ellipsoid, von dem aus die geodätische Linie gezogen werden soll, sei nun gegeben durch seine Länge q_2 und seine wahre Breite ψ_1; dadurch ist zugleich seine reducirte Breite p_2, sowie seine rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1, z_1, gegeben.

Die gegebene Anfangsrichtung definiren wir durch den Winkel α_1, welchen dieselbe mit dem Meridian bildet, wobei als positive Richtung des Meridians die vom Südpol zum Nordpol gerechnet wird. Den Winkel, welchen eine geodätische Linie in einem ihrer Punkte mit der Nordrichtung des durch diesen Punkt gehenden Meridians bildet, pflegt man in der Geodäsie das Azimuth der geodätischen Linie in diesem Punkte zu nennen; demnach ist α_1 das Azimuth der gesuchten geodätischen Linie im Punkt P_1.

§2. Aufstellung der Differentialgleichung.

Es sei jetzt allgemein die Aufgabe gegeben: Zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 der Fläche:

$$x = \varphi(p,q)$$

$$y = \psi(p,q)$$

$$z = \chi(p,q)$$

die kürzeste Linie zu ziehen.

Wir denken uns p, q als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene; und es sei

$$p = p(t), \qquad q = q(t),$$

diejenige Curve in der pq-Ebene, welcher auf der Fläche die gesuchte kürzeste Linie entspricht. Den beiden Endpunkten P_1, P_2 mögen die Werte t_1 und t_2 entsprechen und der Punkt x, y, z soll die Curve P_1P_2 beständig in derselben Richtung durchlaufen, während t von t_1 bis t_2 wächst. Ueberdies nehmen wir vorläufig an, die Curve sei von P_1 bis P_2 regulär und frei von singulären Punkten.

Bezeichnet dann s den Bogen der Curve von P_1 bis zu einem variabeln Pkt.

P von P_2 ist bekanntlich:

$$(6) \qquad ds = \sqrt{P\,dp^2 + 2Q\,dp\,dq + R\,dq^2}$$

Da nach den gemachten Festsetzungen s mit t wächst, so folgt:

$$ds = dt\sqrt{Pp'^2 + 2Qp'q' + Rq'^2},$$

worin p', q' die Ableitungen von p, q nach t.

Und die Länge S des ganzen Bogens von P_1 bis P_2 ist:

$$(7) \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{Pp'^2 + 2Qp'q' + Rq'^2}$$

Da $PR - Q^2$ beständig positiv, so kann der Radicand nur verschwinden wenn gleichzeitig $p' = 0$, $q' = 0$, was durch die Annahme, dass zwischen P_1 und P_2 keine singulären Punkte liegen sollen, ausgeschlossen ist; somit behält die Wurzel in dem ganzen Integrationsbereich dasselbe Vorzeichen.

Da nun S ein Minimum sein soll, so muss $\delta S = 0$ sein; bezeichnen wir daher:

$$(8) \qquad \sqrt{Pp'^2 + 2Qp'q' + Rq'^2} = \mathcal{F}(p, q; p', q').$$

so muss nach den Regeln der Variationsrechnung (§ 11) längs der ganzen Curve die Diffgl. stattfinden:

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q'}\right) = 0,$$

und $\frac{\partial F}{\partial p'}$ und $\frac{\partial F}{\partial p'}$ müssen sich längs der ganzen Curve stetig ändern.

Ferner muss, wenn ein Minimum stattfinden soll, längs der ganzen Curve die Grösse:

$$(10) \qquad F_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial p' \partial q'} \cdot \frac{1}{p'q'}$$

positiv bleiben. Nun ist:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p' \partial q'} = -\frac{PR - Q^2}{F^3} p'q',$$

also:

$$(11) \qquad F_1 = + \frac{PR - Q^2}{F^3}$$

Nun ist von t_1 bis t_2 $F > 0$; ebenso $PR - Q^2 > 0$; also $F_1 > 0$.

Daraus folgt, dass die Curve $P_1 P_2$ wirklich ein Minimum ist, vorausgesetzt, dass man P_2 hinreichend nahe bei P_1 annimmt.

In dem speciellen Fall unseres abgeplatteten Ellipsoids haben wir:

$$(12)\quad \begin{aligned} P &= a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p \\ Q &= 0 \\ R &= a^2 \cos^2 p \end{aligned}$$

Es ist ferner:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q'} = \frac{a^2 \cos^2 p\, q'}{F}$$

Die Diffgl. (9) lautet also:

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{a^2 \cos^2 p \,.\, q'}{F}\right) = 0$$

Ferner ist:

$$(14)\qquad F_1 = \frac{(a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p)\, a^2 \cos^2 p}{F^3}$$

Wir haben nun die Diffgl. (13) zu integriren, mit der Bedingung, dass für $t = t_1$, $p = p_1$, $q = 0$ wird, während das Azimuth $= \alpha_1$ wird.

In der Variationsrechnung wird nun der Satz bewiesen: Wenn die Function: $F_1(p_1, q_1, \cos\lambda, \sin\lambda) \neq 0$ für alle Werte von λ, so geht durch den Punkt (p_1, q_1) der pq-Ebene nach jeder

Richtung eine und nur eine Curve, welche der Diffgl. (9) genügt.

Diese Bedingung ist in unserem Falle offenbar erfüllt, wenn nur $\cos p_1$ nicht 0 ist, d. h., wenn der Anfangspunkt nicht mit einem der beiden Pole zusammenfällt.

Schliessen wir also diesen Fall aus, so wissen wir von vornherein: Es gibt eine und nur eine der Diffgl. (13) genügende Curve in der pq-Ebene, welche durch den gegebenen Punkt $p_1 q_1$ geht und in diesem Punkt eine gegebene Tangentenrichtung hat.

§3. Integration der Differentialgl.

Durch Integration von (13) erhalten wir:

$$(15) \qquad \frac{R q'}{\sqrt{P p'^2 + R q'^2}} = k.$$

Zur Bestimmung der Constanten k leiten wir zunächst eine Beziehung zwischen dem Azimuth α und dem Quotienten $\frac{dq}{dp}$ ab. Bezeichnet (C, p) den Winkel, welchen irgend eine auf der gegebenen Fläche gezogene Curve im Punkt p, q mit der Curve $q =$ const. bildet, so ist (Joachimsthal § 56):

$$tg\,(C, p) = \sqrt{\frac{R}{P}}\;\frac{dq}{dp},$$

also

$$\sin^2(C, p) = \frac{R\,dq^2}{P\,dp^2 + R\,dq^2}.$$

Nun ist α der Winkel, den die geodätische Linie im Punkt p, q mit der Curve $q =$ const. bildet, es ist also

$$(16) \qquad \sin^2\alpha = \frac{R q'^2}{P p'^2 + R q'^2}.$$

Durch Vergleichung mit (15) folgt:

$$k^2 = R \sin^2\alpha = a^2 \cos^2 p \sin^2\alpha,$$

also

$$k = \pm\, a \cos p \sin\alpha.$$

Im Punkt P_1 ist $p = p_1$, $\alpha = \alpha_1$, also

$$k = \pm\, a \cos p_1 \sin\alpha_1.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, gehen wir aus von Gl. (15); da R und $\sqrt{P p'^2 + R q'^2}$ positiv sind, so hat k dasselbe Vorzeichen wie $\frac{dq}{dt}$; nach den in § 2 getroffenen Festsetzungen wächst s mit t; $\left(\frac{dq}{ds}\right)_{t=1}$ ist aber > 0, wenn q mit α wächst, d. h., wenn $\sin\alpha_1 > 0$; dagegen < 0 wenn $\sin\alpha_1 < 0$; da überdiess $\cos p_1 > 0$, so hat k dasselbe Vorzeichen wie $\sin\alpha_1$, es ist also das Zeichen $+$ zu wählen. Die Constante k ist also bestimmt durch die Gleichung:

$$(17) \qquad k = a \cos p_1 \sin\alpha_1$$

und für beliebige p und α gilt die Gl.:

$$(18) \qquad k = a \cos p \sin\alpha$$

Aus der Gleichung:

$$tg^2\alpha = \frac{R}{P}\frac{dq^2}{dp^2}$$

haben wir noch eine Folgerung zu ziehen; es ergibt sich daraus:

$$tg\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{R}{P}}\,\frac{dq}{dp},$$

also, für $t = t_1$

$$tg\,\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{R_1}{P_1}}\,\frac{q_1'}{p_1'}$$

Ist $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, so ist $tg\,\alpha_1 > 0$; $\left(\frac{dq}{dp}\right)_1 > 0$, also das Zeichen $+$ zu wählen; ist $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$, so ist $tg\,\alpha_1 < 0$, $q_1' > 0$, $p_1' < 0$, also wieder das $+$ Zeichen zu wählen; u. s. f., so findet man:

$$(19) \qquad tg\,\alpha_1 = +\sqrt{\frac{R}{P}}\left(\frac{dq}{dp}\right)_1$$

Zu jedem Wert von $tg\,\alpha_1$ gehört also ein einziger Wert von $\left(\frac{dq}{dp}\right)_1$; daraus folgt aber nach § 2 Schluss, dass durch jeden Punkt auf dem Ellipsoid (die beiden Pole ausgenommen) nach jeder Richtung eine und nur eine geodätische Linie geht.

Wir haben nun die Diffgl. 1. Ordn.:

$$\frac{Rq'}{\sqrt{Rq'^2 + Pp'^2}} = k$$

zu integriren.

Wir betrachten zunächst den Specialfall $k = 0$; dies kann eintreten,
1) wenn $\cos p_1 = 0$; diesen Fall schliessen wir aus, da dann $F_1 = 0$ wird für $t = t_1$.
2) wenn $\sin \alpha_1 = 0$; dann folgt aus (15),

$$a^2 \cos^2 p \, \frac{dq}{dt} = 0,$$

oder, da $\cos p \neq 0$,

$$q = \text{Const}.$$

da für $t = t_1$ $q = 0$, so folgt:

$$q = 0,$$

d.h. die geodätische Linie, welche in P_1 den Meridian berührt, ist der Meridian selbst.

Wir gehen nun zu dem allgemeinen Fall $k \neq 0$ über. Aus der Gleichung:

$$k = a \cos p \sin \alpha$$

folgt dann:

1) Es kann p nie gleich $\pm \frac{\pi}{2}$ werden; die Curve geht also durch keinen der beiden Pole.

2) $\sin \alpha$ kann nie $= 0$ werden, die geodätische Linie also nie einen Meridian berühren; $\sin \alpha$ behält längs der ganzen Curve dasselbe Zeichen wie im Anfangspunkt P_1.

Ferner ergibt sich aus (15)

$$(20) \qquad dq^2 = \frac{k^2 P\, dp^2}{R(R-k^2)}$$

und da:

$$ds^2 = P dp^2 + R dq^2,$$

so folgt:

$$(21) \qquad ds^2 = \frac{PR}{R-k^2}\, dp^2.$$

Führen wir die Excentricität ein, so wird:
$$P = a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 p),$$
also:

$$(22) \qquad ds^2 = \frac{a^4 \cos^2 p\,(1-\varepsilon^2 \cos^2 p)}{a^2 \cos^2 p - k^2}\, dp^2$$

Wir führen nun in (22) z an Stelle

von p: $\quad \sin p = \frac{z}{c}, \quad \cos p \, dp = \frac{1}{c} dz,$

es kommt:

$$(23) \qquad ds^2 = \frac{a^4(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2)^2 dz^2}{c^2 \cdot Z},$$

wobei:

$$(24) \qquad Z = (a^2 - \kappa^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2)(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2)$$

Die Diffgl. (23) ist zu integriren mit der Anfangsbedingung, dass für $z = z_1$ $s = 0$ wird, während $\left(\frac{ds}{dz}\right)_1$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\cos \alpha_1$.

Um die Integration auszuführen, führen wir eine neue Variable u ein durch die Diffgl:

$$(25) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = Z$$

und die Anfangsbedingung $z = z_1$ für $u = u_1$; und $\left(\frac{dz}{du}\right)_1$ soll dasselbe Vorzeichen haben wie α_1.

Wir wissen dass durch die Diffgl. (25) z als ell. Func. 2. Grades von u definirt ist; wir bezeichnen dieselbe mit $\varphi(u)$. Durch Einsetzung in (23) erhalten wir:

$$(26) \qquad ds = \frac{a^2}{c^2}(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2)\, du.$$

$\frac{ds}{du}$ ist also eine ell. Function von u.

Wir drücken schliesslich noch x und y durch die unabhängigen Variable u aus; aus (2) folgt:

(27) $\quad d\log(x+yi) = -\operatorname{tg} p\, dp + i\, dq.$

Nun ist:

$$\operatorname{tg} p\, dp = \frac{z\,dz}{c^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}$$

$$dq = \frac{k\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2\right)dz}{c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\sqrt{Z}},$$

also kommt:

(28) $\quad \dfrac{d\log(x+yi)}{du} = -\dfrac{z\frac{dz}{du}}{c^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} + \dfrac{ik}{c}\,\dfrac{\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2\right)}{\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}.$

Somit ist auch $\frac{d}{du}\log(x+yi)$ eine elliptische Function von u.

Es bleibt uns nun noch übrig die elliptische Function $\varphi(u)$ näher zu untersuchen und s und $x+yi$ als Functionen von u auszudrücken.

§4. Berechnung des ell. Integrals.

1) Wir haben zunächst die Diffgl:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left(a^2-k^2-\frac{a^2}{c^2}z^2\right)\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{c^2}z^2\right)$$

zu integriren. Wir setzen:

(29) $$z^2 = \zeta$$

(30) $$4\zeta\left(a^2 - k^2 - \frac{a^2}{c^2}\zeta\right)\left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\zeta\right) = R(\zeta)$$

Dann erhalten wir:

(31) $$\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = R(\zeta)$$

mit der Anfangsbedingung $\zeta = \zeta_1$ für $u = u_1$, und $\left(\frac{d\zeta}{du}\right)_1$ hat dasselbe Zeichen wie $z_1 \cos\alpha_1$.

Die 3 Wurzeln von $R(\zeta)$ sind:

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \frac{c^2(a^2 - k^2)}{a^2}, \quad \zeta_3 = -\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}.$$

Da $k = a\cos p_1 \sin\alpha_1$, so ist $a^2 > k^2$; es ist also $\zeta_2 > 0$; dagegen $\zeta_3 < 0$. Wir haben also zu setzen:

(32) $$a_1 = \frac{c^2(a^2 - k^2)}{a^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$$

Die Grösse B hat den Wert:

$$B = -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}, \text{ ist also } < 0.$$

Daraus folgt nach § 23, 3 und 5:

(33) $$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{c^2} = 1 \\ e_1 - e_3 &= \frac{\varepsilon^2(a^2 - k^2)}{c^2} + 1 \\ e_2 - e_3 &= \frac{\varepsilon^2(a^2 - k^2)}{c^2} \end{aligned}$$

Für reelle Werte von u muss ζ zwischen 0 und a_2 bleiben; wir betrachten daher zunächst dasjenige Particuläre Integral $\varphi(u, a)$ von (31), welches dieser Bedingung genügt; es ist das Integral:

$$\bar{\zeta} = \varphi(u, a_2) = \frac{1}{4}\,\frac{R'(0)}{\wp(u) - e_2}.$$

Wächst u von 0 bis ω_1, so wächst $\bar{\zeta}$ von 0 bis $\frac{c^2}{a^2}(a^2 - \kappa^2)$; wächst u weiter von ω_1 bis $2\omega_1$, so nimmt $\bar{\zeta}$ wieder ab von a_1 bis 0; ist daher u' irgend eine reelle Constante, bewegt sich die Function:

$$\zeta = \frac{1}{4}\,\frac{R'(0)}{\wp(u + u') - e_2} \tag{34}$$

zwischen den Werten 0 und a_1 hin und her, wenn u alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Für $u = u_1$ sollte $\zeta = \zeta_1$ werden; dies liefert für u' 2 incongruente Werte; welcher zu nehmen ist, ergibt sich aus der Festsetzung über das Zeichen von $\left(\frac{d\zeta}{du}\right)_2$

Aus Gleichung (34) folgt weiter:

$$\zeta = \frac{1}{4}\,R'(0)\;\frac{\sigma^2(u + u')}{\sigma_2^2(u + u')},$$

also:

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{R'(0)}\;\frac{\sigma(u + u')}{\sigma_2(u + u')}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel bestimmt sich durch die Angabe, dass für $u = u_1$ $z = z_1$ werden soll.

Wählen wir nun den bisher beliebigen Anfangswert u_1 so dass für $u = 0$ $z = 0$ wird, so erhalten wir

$$z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{R'(0)} \; \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}$$

da

$$\frac{dz}{du} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{R'(0)} + u \mathfrak{P}(u)$$

so haben wir das Zeichen + zu wählen, wenn $\cos\alpha$ für $u = 0$ positiv, das Zeichen − wenn $\cos\alpha$ negativ.

Für $u = \omega_1$ wird $\zeta = a_1 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - k^2)$. Nun ist aber $\zeta = c^2 \sin^2 p$; $k = a \cos p \sin\alpha$; für $u = \omega_1$ wird daher:

$$c^2 \sin^2 p = c^2 - c^2 \cos^2 p \sin^2 \alpha$$

oder:

$$\cos^2 p \sin^2 \alpha = \cos^2 p$$

$$\sin^2 \alpha = 1$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

Für $u = \pm\omega_1$ erreicht die geodätische Linie ihren höchsten, resp. tiefsten Punkt; in beiden ist das Azimuth ein Rechter, die Curve berührt also den Parallelkreis.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an für $u = 0$ sei $\cos\alpha > 0$; dann wird z für $u = \pm\omega_1$ seinen grössten Wert:

$$z_0 = c \sin p_0 \tag{35}$$

annehmen. Die reducirte Breite p_0 dieses Punktes ist dann bestimmt durch die Gl.:

$$a \cos p_0 = k = a \cos p_1 \sin \alpha_1 \tag{36}$$

Benutzen wir für k den Ausdruck $a \cos p_0$ so vereinfachen sich die Gl. (33):

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= 1 \\ e_1 - e_3 &= \frac{a^2}{c^2}(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sin^2 p_0) \\ e_2 - e_3 &= \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^2} \sin^2 p_0 \end{aligned} \tag{37}$$

also:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 p_0}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 p_0}, \tag{38}$$

oder nach (3), wenn wir die zu p_0 gehörige wahre Breite mit ψ_0 bezeichnen:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \varepsilon^2 \sin^2 \psi_0. \tag{39}$$

Ferner wird:

$$R'(0) = 4(a^2 - k^2)(1 - \varepsilon^2) = 4a^2 \sin^2 p_0 \cdot \frac{c^2}{a^2} = 4c^2 \sin^2 p_0$$

Wir erhalten also für z:

$$z = c \sin p_0 \frac{\sigma u}{\sigma_2 u}. \tag{40}$$

Man verificirt leicht, dass das Zeichen richtig ist, denn für $u = \omega$ wird:

$$\frac{\sigma\omega}{\sigma_2\omega} = \frac{1}{\sqrt{\wp\omega - e_2}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} = +1$$

also in der Tat:

$$z = c \sin p_0 .$$

2) Wir haben nun auch x und y als Functionen von u auszudrücken: Es war (28):

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = -\frac{z\frac{dz}{du}}{c^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{i\kappa}{c}\,\frac{\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}$$

Wir setzen wieder $z^2 = \zeta$

$$(41) \qquad \frac{d\log(x+yi)}{du} = -i\kappa\frac{\varepsilon^2}{c} + \frac{\frac{1}{2}\frac{d\zeta}{du} - i\kappa c}{\zeta - c^2}$$

Nun ist:

$$\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = R(\zeta),$$

also:

$$\left(\frac{d\zeta}{du}\right)_{\zeta=c^2} = \mp 2\kappa c .$$

Bezeichnen wir jetzt:

$$\zeta = \varphi(u)$$

und mit v denjenigen Wert von u für den

(42) $\quad \varphi(v) = c^2 \qquad \varphi'(v) = -2\kappa c,$

so geht Gleichung (41) über in:

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = -i\frac{k}{c}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v}$$

Also nach § 26,6:

(43) $$\frac{d\log(x+yi)}{du} = -\frac{ik\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\bar{u}_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v-\bar{u}_1)$$

Dabei ist $\bar{u}_1$ einer der beiden incongruenten Werte von u für die $\varphi(u)$ ∞ wird. (§ 23,8). Da $A = 0$, so fallen beides zusammen mit ω_2, also $\bar{u}_1 = \omega_2$

Es bleibt noch v näher zu bestimmen: es ist nach (34)

$$\wp v - e_2 = \frac{1}{4}\,\frac{R'(0)}{\zeta} = \frac{c^2 \sin^2 p_0}{\zeta},$$

also

(44) $$\wp v - e_2 = \sin^2 p_0$$

daraus

(45) $$\wp v - e_1 = \wp v - e_2 + (e_1 - e_2) = \sin^2 p_0 - 1 = -\cos^2 p_0$$

Es ist also:

$$e_1 > \wp v > e_2$$

Ferner:

$$\wp' u = -\frac{c^2 \sin^2 p_0}{\zeta^2}\,\frac{d\zeta}{du},$$

also:

$$\wp' v = +\frac{2\sin^2 p_0\, k\, i}{c}$$

k hat dasselbe Zeichen wie $\sin \alpha_1$; wir dürfen $k > 0$ voraussetzen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, da wir durch

Umkehrung der Richtung der positiven z-Axe k immer positiv machen können.

$\wp' v$ ist dann $+ i P$, also nach § 17

$$v = \omega_1 + w i,$$

wo $\quad 0 < w < \frac{\omega_3}{i}$.

Durch Einsetzen dieser Werte geht (43) über in:

$$\frac{d \log (x+yi)}{du} = - \frac{i k \varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - \omega_1 - wi) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - \omega_2) + \frac{\sigma'}{\sigma}(wi - \omega_3)$$

$$= - \frac{i k \varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(u - wi) - \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(u) + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi),$$

also:

$$(46) \qquad x + yi = C' \frac{\sigma_1 (u - wi)}{\sigma_2 u} e^{\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi) - \frac{i k \varepsilon^2}{c}\right) u}$$

Die Constante C' bestimmt sich durch die Bedingung, dass für $u = u_1$ $x = x_1$, $y = y_1$ werden soll. u_1 selbst bestimmt sich durch die Bedingung:

$$z_1 = c \sin p_0 \frac{\sigma(u_1)}{\sigma_2(u_1)}$$

Wir haben bei der bisherigen Ableitung über den willkührlichen Anfangswert u_1 so verfügt, dass für $u = 0$ $z = 0$ wird. Wir wollen noch eine zweite Annahme durchführen, nämlich die, dass für $\bar{u} = 0$ $\; z = c_0 \sin p_0$ wird, d.h. dass für $u = 0$ z seinen grössten, resp. kleinsten Wert hat.

Wir haben dann an Stelle von u zu setzen $\bar{u} + a_1$, und erhalten, wenn

$$m = -\frac{\varkappa \varepsilon^2}{c} + \frac{1}{i} \frac{\sigma'}{\sigma}(wi),$$

$$z = \frac{c \sin p_0 \, \sigma_1(\bar{u})}{\sigma_3(\bar{u})}$$

$$x + yi = b_1 \frac{\sigma(\bar{u} - wi)}{\sigma_3(\bar{u})} e^{m\bar{u}i}$$

Sind x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des höchsten Punktes den die geodätische Linie erreicht, so ist

$$x_0 + y_0 i = a \cos p_0 \, e^{iq_0} = -b_1 \sigma(wi),$$

also

$$e^{(q - q_0 - mu)i} \cos p = \frac{\cos p_0 \, \sigma(wi - u)}{\sigma(wi) \; \sigma_3(u)}$$

und

$$\sin p = \sin p_0 \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}.$$

Diese Gleichungen liefern die Länge und die reducirte Breite zum Punkt x, y, z der geodätischen Linie.

Wir führen endlich noch Beziehungen zwischen den Werten der $\sigma_\lambda(wi)$ und p_0 an. Es war:

$$\wp(wi + \omega_1) - e_2 = \sin^2 p_0,$$

also:

$$\wp(wi + \omega_1) - e_1 = -\cos^2 p_0,$$

oder, nach § 12:

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(wi) - e_1} = -\cos^2 p_0 ;$$

daraus:

$$\wp(wi) - e_1 = -\frac{a^2}{c^2}\,\frac{1-\varepsilon^2\cos^2 p_0}{\cos^2 p_0} = \frac{\sigma_1^2(wi)}{\sigma^2(wi)}$$

$$\wp(wi) - e_2 = -\frac{a^2}{c^2}\,tg^2 p_0 = \frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma^2(wi)}$$

$$\wp(wi) - e_3 = -\frac{a^2}{c^2}\,tg^2 p_0 (1-\varepsilon^2\cos^2 p_0) = \frac{\sigma_3^2(wi)}{\sigma^2(wi)}$$

Daraus, durch Division:

$$\frac{\sigma_3^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} = \sin^2 p_0$$

$$\frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} = \frac{\sin^2 p_0}{1-\varepsilon^2\cos^2 p_0} = \sin^2 \psi_0$$

Wir haben nunmehr z und $x+yi$ als eindeutige Functionen von u dargestellt; um uns von der Gestalt der hierdurch definirten geodätischen Linie eine Darstellung zu machen, nehmen wir zur Vereinfachung an, der gegebene Anfangspunkt falle mit dem Punkt $x_0 y_0$ zusammen, so dass $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, und, da $q_1 = 0$ vorausgesetzt wurde, $q_0 = 0$; endlich $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = 0$. Die geodätische Linie wird dann dargestellt durch die Gl. ( ).

z hat die reelle Periode $4\omega_1$ und bewegt sich, während u von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, zwischen den beiden Grenzwerten $+c\sin p_0$ und $-c\sin p_0$ hin u. her. Für $u = 2\mu\omega_1$ wird $\frac{dz}{du} = 0$, $\frac{dx}{du}$ und $\frac{dy}{du}$ nicht gleichzeitig; die geodätische Linie berührt also an den Punkten $u = 2\mu\omega$ den betr. Parallelkreis $p = \pm p_0$.

Dieselbe Periode wie z hat p.

Wächst u um $4\omega_1$ so nimmt der Factor $\frac{\sigma(u-wi)}{\sigma_3 u}$ in dem Ausdruck für $x+yi$ wieder denselben Wert an, dagegen wächst e^{mui} um den Factor $e^{4m\omega_1 i - 4\eta_1 wi}$. Die geographische Länge q nimmt also um den Winkel $4m\omega - 4\eta w$ zu.

Die geodätische Linie berührt daher jeden der beiden Parallelkreise $p = \pm p_0$ unendlich oft und zwei aufeinanderfolgende Berührungspunkte haben den constanten Längenunterschied $4m\omega_1 - 4\eta_1 \omega_1$.

Wir wollen schliesslich noch den Bogen s der geodätischen Linie als Function von u ausdrücken; der Anfangspunkt von s als der Punkt x_0, y_0, z_0; es ist nun nach (26):

$$ds = \frac{a^2}{c}\left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{c^2} z^2\right) du,$$

oder:

$$\frac{ds}{du} = c + \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^3} \zeta = c - c B \zeta$$

Nun war:

$$\zeta = \varphi(u, a_2) = \frac{1}{B}\left(\wp(u + \omega_2) - \frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{C}{2} = e_2$$

also:

$$\frac{ds}{du} = c\left\{1 + e_2 - \wp(u + \omega_2)\right\}$$

$$1 = e_1 - e_2,$$

also:

$$\frac{ds}{du} = c\left\{e_1 - \wp(u + \omega_2)\right\}$$

$$s = c\left\{e_1 u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u + \omega_2)\right\} + \text{Const.},$$

oder, wenn wir für u wieder $\bar{u} + \omega_1$ setzen,

$$s = c\left\{e_1 \bar{u} + \frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u} + \omega_3)\right\} + \text{Const.}$$

Für $\bar{u} = 0$ muss $s = 0$ werden, also

$$s = c\left\{e_1 \bar{u} + \frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u} + \omega_3) - \eta_3\right\}$$

oder, endlich,

$$s = c\left\{e_1 \bar{u} + \frac{\sigma_3' \bar{u}}{\sigma_3 \bar{u}}\right\}.$$

VII. Kapitel.

Rotation eines starren Systems um einen festen Punkt.

---

§1. Coordinatensysteme.

Um die Bewegung eines starren Systems materieller Punkte, das um einen festen Punkt drehbar ist und auf das gegebene Kräfte wirken, zu bestimmen, führen wir 2 rechtwinklige Coordinatensysteme ein. Beide haben den festen Pkt. als Anfangspkt; das erste (x, y, z) ist im Raume fest; das zweite dagegen ist mit dem Körper fest verbunden. Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten desselben Pktes in Beziehung auf das feste und das bewegl. Coordinatensystem; alsdann ist bekanntlich:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\
(1) \qquad y &= \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\
z &= \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1
\end{aligned}
$$

Dabei sind die 9 Coeff. α, β, γ, etc. Richtungscosinus, deren Bedeutung durch die folgende Tabelle gegeben wird: (Beide Coordinatensysteme sollen <u>gleichstimmig</u> sein.)

(2)

	x_1	y_1	z_1
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Es ist, zum Beispiel, $\alpha' = \cos(xy_1)$, etc. Zwischen diesen 9 Coefficienten bestehen, wie aus der anal. Geom. bekannt, 6 unabh. Relationen.

Diese, sowie eine Reihe anderer Relationen, lassen sich sämmtlich sehr einfach herleiten, wenn man den Begriff der <u>Coordinaten einer Strecke</u> einführt.

Sind a, b, c und a', b', c' die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Endpunkte einer Strecke AA', so nennt man $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$ die Coordinaten der Strecke AA'. Dabei wird a, b, c als der Anfangspunkt, a', b', c' als der Endpunkt der Strecke betrachtet. Fasst man $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$ als Coordinaten eines Punktes auf, so ist dieser Punkt der Endpkt einer Strecke, welche vom Nullpunkt der Strecke AA' gleich und parallel gezogen ist.

Zieht man jetzt von einem bel. Punkt P aus 2 Strecken PQ u. PR, deren Coordinaten x, y, z resp. x', y', z' sind, wobei PQ als die

erste, PR als die 2te definirt wird, und fällt man dann von R auf PQ die senkrechte RQ', so heisst nach Grassmann: PQ.PQ' das <u>innere Product</u>, PQ.Q'R das <u>äussere Product</u> der beiden Strecken. Für letzteres wird der Ausdruck <u>geometrisches Product</u> eingeführt. Wir wollen beide Producte durch die Coordinaten der Strecken ausdrücken.

$$PQ.PQ' = PQ.PR\cos\varphi, \text{ also}$$

$$(3) \qquad PQ.PQ' = xx' + yy' + zz'$$

Ferner ist: $PQ.Q'R = PQ.PR\sin\varphi$,

$$(4) \qquad (PQ.Q'R)^2 = \begin{Vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{Vmatrix}$$

Wir wollen nun das geometrische Product geometrisch darstellen, indem wir von P aus eine Strecke PS ziehen, welche senkrecht auf der Ebene der beiden Strecken PQ, PR steht und deren Länge sich zur Längeneinheit verhält, wie der Flächeninhalt des Rechtecks PQ.Q'R zur Flächeneinheit. Es ist zur vollst. Bestimmung der Strecke PS noch eine Festsetzung zu machen, auf welcher Seite der Ebene (PQ, PR) die Strecke PS liegen soll. Zu diesem Zweck denken wir uns die beiden Strecken PQ, PR ohne ihre gegenseitige Lage zu verändern, so verschoben, dass P mit dem Nullpunkt des Coordinatensystems zusammenfällt, dass PQ in die positive x-Axe fällt, und dass PR auf die Seite der positiven y-Axe in die xy-Ebene fällt. Die Strecke PS, deren Länge und relative Lage zu den beiden Strecken PQ, PR sich nicht geändert hat, fällt dann in die z-Axe; wir treffen nun weiter die Bestimmung dass sie in die positive z-Axe fallen soll.

Wir wollen nun die Coordinaten der Strecke PS, die wir mit x'', y'', z'' bezeichnen, berechnen.

Das innere Product der Strecken PQ und PS, ebenso das der Strecken PR und PS, ist 0; also

$$xx'' + yy'' + zz'' = 0$$
$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Daraus:

$$x'' = \lambda(yz' - zy')$$
$$y'' = \lambda(zx' - xz')$$
$$z'' = \lambda(xy' - yz')$$

Die Constante λ bestimmt sich aus der Bedingung:

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = PS^2 = \left\| \begin{matrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{matrix} \right\|, \text{ also}$$

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, denken wir uns dieselbe Verlegung der Strecken PQ, PR ausgeführt wie oben; es ist dann:

$$x > 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$
$$y' > 0 \quad z' = 0$$

Daraus:

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = \lambda x y'$$

z'' muss nach unseren Festsetzungen >0 ausfallen; $xy' > 0$, also muss $\lambda > 0$ sein, also $\lambda = +1$. Somit erhalten wir für die Coordinaten der Strecke PS:

$$(5) \qquad \begin{aligned} x'' &= yz' - zy' \\ y'' &= zx' - xz' \\ z'' &= xy' - yx' \end{aligned}$$

Man sieht, dass es für das Vorzeichen ganz wesentlich ist, welche der beiden

Strecken PQ, PR als erste, welche als 2te definirt wird.

Um das bisherige auf die Ableitung der Relationen zwischen den $\alpha, \beta, \ldots$ anzuwenden, beschreiben wir um den Nullpunkt O der beiden Coordinatensysteme eine Kugel mit dem Radius 1. Der Punkt A, in welchem die positive x_1-Axe diese Kugel schneidet, hat in dem beweglichen System die Coordinaten: $x_1 = +1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; also sind seine Coordinaten im ~~festen~~ System:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

Ebenso überzeugt man sich, dass α', β', γ' und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die auf das feste System bezogenen Coordinaten der Pkte B und C sind, in denen die positive y_1 und z_1 die Kugel mit dem Radius 1 schneidet. Betrachten wir jetzt die beiden Strecken OA und OB, so ist das innere Product derselben $= 0$, also:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

ihr äusseres Product $= 1$, also:

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1;$$

denn OC ist das geometrische Product von OA und OB; daraus folgt weiter (5):

$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta'$; $\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma'$; $\gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Indem wir mit α'', β'', γ'' multiplicieren und addiren:

$$(6a) \qquad +1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta$$

Indem man dieselbe Betrachtung für die beiden Strecken OB, OC; denn für OC, OA anstellt, erhält man das folgende System von Relationen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 1 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 1 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 1 \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' \\ \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' \\ \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha' = \beta''\gamma - \gamma''\beta \\ \beta' = \gamma''\alpha - \alpha''\gamma \\ \gamma' = \alpha''\beta - \beta''\alpha \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{cases}$$

Löst man jetzt die Gleichungen (1) auf, so erhält man unter Berücksichtigung von (6_a) und (9) (10) (11):

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{cases}$$

Für das Coefficientensystem:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

gelten dieselben Relationen die wir oben für das System:

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix}$$

abgeleitet haben:

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0 \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \end{cases}$$

§2. Die Geschwindigkeitscomponenten.

Die Bewegung des Systems wird vollkommen beschrieben sein, wenn man für jeden Punkt desselben die Coordinaten x, y, z als Functionen der Zeit ausgedrückt haben. Für ein und denselben Punkt des Systems sind x_1, y_1, z_1 constant, d.h. von der Zeit unabhängig, dagegen α, β, etc... von t abhängig; gehen wir bei constantem t von einem Punkt des Systems zu einem andern über, so ändern sich x_1, y_1, z_1, aber α, β, etc.... haben für alle Punkte dieselben Werte.

Daher wird die Bewegung auch bestimmt sein, sobald α, β, γ.... als Functionen der Zeit gefunden sind.

Wir leiten zunächst Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten ab; die Geschwindigkeitscomponenten des materiellen Punktes $\underline{m}$ (x, y, z), nach den Axen x, y, z genommen, seien u, v, w; nach den Axen x_1, y_1, z_1 dagegen u_1, v_1, w_1; dann ist:

$$(15)\quad \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = x_1 \frac{d\alpha}{dt} + y_1 \frac{d\alpha'}{dt} + z_1 \frac{d\alpha''}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} = x_1 \frac{d\beta}{dt} + y_1 \frac{d\beta'}{dt} + z_1 \frac{d\beta''}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} = x_1 \frac{d\gamma}{dt} + y_1 \frac{d\gamma'}{dt} + z_1 \frac{d\gamma''}{dt} \end{cases}$$

Nun ist:

$$(15a)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha u + \beta v + \gamma w \\ v_1 = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w \\ w_1 = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w \end{cases}$$

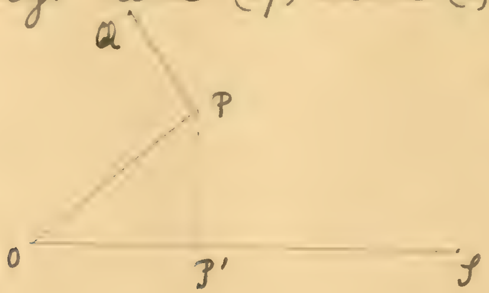
Setzt man hier für u, v, w die Werte aus (15) ein, und benutzt dabei die Abkürzungen:

$$(16)\quad \begin{cases} p = \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} = -\left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt}\right) \\ q = \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt} = -\left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt}\right) \\ r = \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} = -\left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right) \end{cases}$$

so erhält man:

$$(17)\quad \begin{cases} u_1 = q z_1 - r y_1 \\ v_1 = r x_1 - p z_1 \\ w_1 = p y_1 - q x_1 \end{cases}$$

Die Gleichungen (17) haben eine einfache geometrische Bedeutung. Wir construieren vom 0-Punkt aus die Strecke OS, deren Koordinaten im bewegl. System sind: p, q, r; dann verbinden wir den Punkt P des Systems, dessen Coordinaten im bewegl. System x_1, y_1, z_1 sind mit dem Punkt O; und endlich ziehen wir von P aus eine Strecke PQ, welche nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Punktes P in dem betrachteten Moment darstellt. Dann folgt aus (17) und (5), dass PQ das geometrische Product der beiden Strecken OS und OP ist.



Daraus folgt:

1) Die Geschwindigkeit steht senkrecht auf der Ebene SOP.

2) Bezeichnen wir $OS = s$ und die Senkrechte $PP' = l$, so ist:

$$PQ = ls.$$

Nun ist Grösse und Richtung von OS für alle Punkte des Systems dieselbe; um also die Geschwindigkeit von P in einem bestimmten Moment nach Grösse und Richtung zu erhalten, construirt man für diesen Moment die Strecke OS, die Geschwindigkeit steht dann auf der Ebene

POS senkrecht und ihre Grösse ist proportional mit dem Abstand l des Punktes P von der Geraden OS.

3) Für alle Punkte des Systems, welche in der Strecke OS oder deren Verlängerung liegen, ist die Geschwindigkeit $=0$. Die Bewegung ist also eine Rotationsbewegung und die Axe OS ist die <u>Momentane</u> <u>Rotationsaxe</u>.

Wenn man die Gleichungen (15a) nach u, v, w auflöst, so folgt:

$$(18)\quad \begin{cases} u = \alpha u_1 + \alpha' v_1 + \alpha'' w_1 \\ v = \beta u_1 + \beta' v_1 + \beta'' w_1 \\ w = \gamma u_1 + \gamma' v_1 + \gamma'' w_1 \end{cases}$$

Indem man hierin die Werte für u_1, v_1, w_1 aus (17) einsetzt, wird:

$$(19)\quad \begin{cases} u = (\alpha' r - \alpha'' q)\, x_1 + (\alpha'' p - \alpha r)\, y_1 + (\alpha q - \alpha' p)\, z_1 \\ v = (\beta' r - \beta'' q)\, x_1 + (\beta'' p - \beta r)\, y_1 + (\beta q - \beta' p)\, z_1 \\ w = (\gamma' r - \gamma'' q)\, x_1 + (\gamma'' p - \gamma r)\, y_1 + (\gamma q - \gamma' p)\, z_1 \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten auch für die drei Punkte A, B, C mit den Coordinaten α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'' \beta'' \gamma''$ im festen System; für A ist $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ $z_1 = 0$,

also:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q \\[2mm] \dfrac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q \\[2mm] \dfrac{d\gamma}{dt} = \gamma' r - \gamma'' q \end{cases}$$

Ebenso für B und C:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{dt} = \alpha'' p - \alpha r \\[2mm] \dfrac{d\beta'}{dt} = \beta'' p - \beta r \\[2mm] \dfrac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p - \gamma r \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha''}{dt} = \alpha q - \alpha' p \\[2mm] \dfrac{d\beta''}{dt} = \beta q - \beta' p \\[2mm] \dfrac{d\gamma''}{dt} = \gamma q - \gamma' p \end{cases}$$

§ 3. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Zur Bestimmung der Bewegung des Systems liefert uns nun der Flächensatz folg. 3 Diffgl.:

$$
(23)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=\sum m(yZ-zY)=U \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=\sum m(zX-xZ)=V \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=\sum m(xY-yX)=W
\end{cases}
$$

wobei X, Y, Z die Componenten der auf den Punkt x, y, z wirkenden beschleunigenden Kraft nach den 3 festen Coordinatenaxen bedeuten. Wir nehmen an, X, Y, Z seien gegeben als Functionen der Coordinaten der materiellen Punkte und der Zeit t. Denken wir uns dann in (23) die x_1, y_1, z_1 an Stelle der x, y, z eingeführt, so kommen in (23) nur die 9 Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen nach t und überdiess die Zeit t vor. Zwischen den 9 Unbekannten bestehen überdiess die 6 unabh. Gleichungen (6) und (7); man hat also im ganzen 9 Gleichungen, also gerade die genügende Zahl um daraus die 9 unbekannten Functionen α, β, γ.. von t zu bestimmen.

Um nun die Einführung der α, β, γ in (23) auszuführen, setzen wir zur Abkürzung:

$$x'' = yw - zv$$
$$y'' = zu - xw$$
$$z'' = xv - yu$$

construiren wir vom Nullpunkt aus die beiden Strecken OP und OQ, deren Coordinaten im festen System x, y, z und u, v, w sind, so sind nach (5) $x'' y'' z''$ die Coord. des geom. Productes OR von OP und OQ im festen System.

Setzen wir ferner:

$$x_1'' = y_1 w_1 - z_1 v_1$$
$$y_1'' = z_1 u_1 - x_1 w_1$$
$$z_1'' = x_1 v_1 - y_1 u_1 .$$

$x_1 y_1 z_1$ sind die Coord. von P im bewegl. System; $u_1 v_1 w_1$ die Coord. von Q im bewegl. System; also sind $x_1'' y_1'' z_1''$ die Coord. des Punktes R im bewegl. System; $x'' y'' z''$ und $x_1'' y_1'' z_1''$ sind also die Coord. desselben Pktes bezogen auf beide Systeme; es müssen für sie also die Gl. (1) und (13) bestehen. Bezeichnen wir daher:

$$(24)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathcal{L} \\ \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \mathcal{M} \\ \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \mathcal{N} \end{cases}$$

Ferner:

$$(25)\quad \begin{cases} \sum m(y_1 w_1 - z_1 v_1) = \mathcal{L}_1 \\ \sum m(z_1 u_1 - x_1 w_1) = \mathcal{M}_1 \\ \sum m(x_1 v_1 - y_1 u_1) = \mathcal{N}_1 \end{cases}$$

so ist:

$$(26)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 = \alpha\mathcal{L} + \beta\mathcal{M} + \gamma\mathcal{N} \\ \mathcal{M}_1 = \alpha'\mathcal{L} + \beta'\mathcal{M} + \gamma'\mathcal{N} \\ \mathcal{N}_1 = \alpha''\mathcal{L} + \beta''\mathcal{M} + \gamma''\mathcal{N} \end{cases}$$

Andrerseits ist aber, wenn wir in (25) die Werte für u_1, v_1, w_1 aus (17) einsetzen und dabei die Abkürzungen einführen:

$$(27)\quad \begin{cases} \sum m(y_1^2 + z_1^2) = A & \sum m y_1 z_1 = A' \\ \sum m(z_1^2 + x_1^2) = B & \sum m z_1 x_1 = B' \\ \sum m(x_1^2 + y_1^2) = C & \sum m x_1 y_1 = C' \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 = Ap - C'q - B'r \\ \mathcal{M}_1 = Bq - A'r - C'p \\ \mathcal{N}_1 = Cr - B'p - A'q \end{cases}$$

Darin sind die rechten Seiten die partiellen Ableitungen nach p, q, r der Function:

$$(29)\quad T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\right)$$

$$(30)\quad L_1 = \frac{\partial T}{\partial p} \qquad M_1 = \frac{\partial T}{\partial q} \qquad N_1 = \frac{\partial T}{\partial r}$$

Die neu eingeführte Function T ist nichts anderes als die lebendige Kraft des ganzen Systems; es ist nämlich:

$$\frac{1}{2}\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\sum m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$$

$$(31)\quad = \frac{1}{2}\sum m\left\{(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left\{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (x_1 p + y_1 q + z_1 r)^2\right\}$$

und, indem man aus multiplicirt:

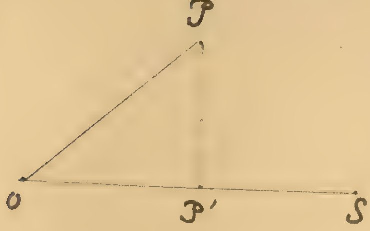
$$= \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\right)$$

$$= T.$$

Construiren wir wieder die beiden Strecken OS und OP, deren Coordinaten im bewegl. System p, q, r und x_1, y_1, z_1 sind, so ist:

$$(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2 = (OS.\ PP')^2$$

Das Quadrat des geom. Productes der beiden Strecken (4); bezeichnen wir daher



$$PP' = \varrho$$
$$OS = \omega$$

so ist ω die Winkelgeschwindigkeit mit der in dem betrachteten Augenblick das starre System um die momentane Rotationsaxe OS rotirt; ω hat für alle Punkte des Systems denselben Wert; wir können also schreiben:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m\varrho^2. \tag{32}$$

$\sum m\varrho^2$ ist aber nichts anders als das Trägheitsmoment des starren Körpers in Beziehung auf die momentane Rotationsaxe.

Nach diesem Excursus über die geometrische Bedeutung der Grösse T kehren wir zur Transformation der Diffgl. (23) zurück. Wir haben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \alpha \frac{dL}{dt} + \beta \frac{dM}{dt} + \gamma \frac{dN}{dt} + L \frac{d\alpha}{dt} + M \frac{d\beta}{dt} + N \frac{d\gamma}{dt}.$$

Wir führen für $\frac{d\alpha}{dt}, \ldots$ die Werte aus (20) ein und ordnen nach r, q, so kommt:

$$\mathcal{L}\frac{d\alpha}{dt} + \mathcal{M}\frac{d\beta}{dt} + \mathcal{N}\frac{d\gamma}{dt} = (\mathcal{L}\alpha' + \mathcal{M}\beta' + \mathcal{N}\gamma')r - (\mathcal{L}\alpha'' + \mathcal{M}\beta'' + \mathcal{N}\gamma'')q$$

$$= \frac{\partial T}{\partial q}r - \frac{\partial T}{\partial r}q \quad \text{(nach (26) u. (30))}$$

Wir erhalten so:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = \alpha\frac{d\mathcal{L}}{dt} + \beta\frac{d\mathcal{M}}{dt} + \gamma\frac{d\mathcal{N}}{dt}$$

oder, nach (23):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = \alpha\,\mathfrak{U} + \beta\,\mathfrak{V} + \gamma\,\mathfrak{W}.$$

Bezeichnet man nun mit X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der Kraft (X, Y, Z) nach den Axen x_1, y_1, z_1 und setzt:

$$\mathfrak{U}_1 = \Sigma m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1)$$

(33) $$\mathfrak{V}_1 = \Sigma m(z_1 X_1 - x_1 Z)$$

$$\mathfrak{W}_1 = \Sigma m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

so folgt ganz wie oben für $\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$:

$$\mathfrak{U}_1 = \alpha\,\mathfrak{U} + \beta\,\mathfrak{V} + \gamma\,\mathfrak{W}$$

(34) $$\mathfrak{V}_1 = \alpha'\,\mathfrak{U} + \beta'\,\mathfrak{V} + \gamma'\,\mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{W}_1 = \alpha''\,\mathfrak{U} + \beta''\,\mathfrak{V} + \gamma''\,\mathfrak{W}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke erhält man:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial p}\right) + q\frac{\partial J}{\partial r} - r\frac{\partial J}{\partial q} = U_1\,, \text{ ebenso}$$

$$(35) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial q}\right) + r\frac{\partial J}{\partial p} - p\frac{\partial J}{\partial r} = V_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right) + p\frac{\partial J}{\partial q} - q\frac{\partial J}{\partial p} = W_1$$

Die Diffgl. (35) vereinfachen sich nun wesentlich wenn wir das bisher ganz beliebig angenommene Axensystem $x_1 y_1 z_1$ mit den 3 Hauptträgheitsaxen des Körpers zusammenfallen lassen; alsdann werden bekanntlich:

$$A' = 0\,, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

also:

$$(36) \qquad J = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right),$$

und die Diffgl. (35) nehmen folgende einfache Gestalt an:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = \Sigma m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1)$$

$$(37) \qquad B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = \Sigma m(z_1 X_1 - x_1 Z_1)$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = \Sigma m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

Wir werden nun die Integration dieser

Diffgl. nur für 2 specielle Fälle durchführen:

1) Wenn keine Kräfte auf den Körper wirken, dann werden die rechten Seiten der Diffgl. (37, = 0.

2) Wenn die Schwerkraft auf den Körper wirkt und überdiess der feste Punkt mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammenfällt. Auch in diesem Falle verschwinden die rechten Seiten. Denn die X, Y, Z sind dann Constanten, die für alle Punkte des Systems denselben Wert haben; setzt man daher die Ausdrücke ein:

$$X_1 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \text{ etc.}$$

so kann man X_1, Y_1, Z_1 vor die Summenzeichen; die übrigbleibenden Summen:

$$\Sigma m x_1, \; \Sigma m y_1, \; \Sigma m z_1 \text{ sind } = 0,$$

da nach Voraussetzung der Nullpunkt des Coordinatensystems zugleich Schwerpunkt ist.

In diesen beiden speciellen Fällen nehmen also die Gl. (37, die einfachere Gestalt an:

$$A\frac{dp}{dt} = qr(B-C)$$
$$(38)\qquad B\frac{dq}{dt} = rp(C-A)$$
$$C\frac{dr}{dt} = pq(A-B)$$

§4. Integration der Differentialgleichungen für p, q, r.

Wir setzen also im Folgenden voraus, die drei Drehungsmomente U_1, V_1, W_1 (33) seien $= 0$. Dann gehen die Diffgl. (23) über in:

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad \frac{dM}{dt} = 0, \qquad \frac{dN}{dt} = 0,$$

oder wenn f, g, h drei Constanten bezeichnen:

$$(39)\qquad L = f, \qquad M = g, \qquad N = h.$$

Nun war:

$$L = \alpha L_1 + \alpha' M_1 + \alpha'' N_1 = \alpha\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha'\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha''\frac{\partial T}{\partial r}$$

oder, nach (36)

$$L = \alpha A p + \alpha' B q + \alpha'' C r,$$

und zwei analoge. Wir erhalten daher:

$$(40)\qquad \begin{aligned} f &= \alpha A p + \alpha' B q + \alpha'' C r \\ g &= \beta A p + \beta' B q + \beta'' C r \\ h &= \gamma A p + \gamma' B q + \gamma'' C r \end{aligned}$$

Wir lösen diese Gleichungen nach Ap, Bq, Cr auf:

$$\begin{aligned} Ap &= \alpha f + \beta g + \gamma h \\ Bq &= \alpha' f + \beta' g + \gamma' h \qquad (41) \\ Cr &= \alpha'' f + \beta'' g + \gamma'' h. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich nun wesentlich, wenn wir auch über das im Raume feste Coordinatensystem eine specielle Annahme machen. Zu diesem Zweck interpretiren wir die Gleichungen (39) geometrisch. Wir construiren vom Nullpunkt die beiden Strecken, deren Coordinaten im festen System sind: x, y, z und u, v, w; sodann construiren wir eine Strecke OM, deren Richtung mit der des geometrischen Productes beider Strecken zusammenfällt, und deren Länge sich zur Länge des geometrischen Productes verhält wie m zur Masseneinheit; dann sind

$$m(yw - zv), \quad m(zu - xw), \quad m(xv - yu)$$

die Coordinaten dieser Strecke im festen System. Diese Construction führen wir nun für alle vorhandenen materiellen Punkte aus, und bilden dann die geometrische Summe der sämmtlichen Strecken OM. Wir erhalten so eine resultirende Strecke OT, deren Coordinaten nichts anderes sind als L, M, N. Die Gleichungen (39) sagen dann aus, dass in dem speciellen Fall $U_1 = V_1 = W_1 = 0$ der Punkt T während der ganzen Bewegung des Körpers seinen Ort nicht ändert. Aus der Construction des Punktes T geht hervor, dass seine Lage von dem Coordinatensystem x, y, z unabhängig ist; wir verfügen nun über das bisher ganz willkürliche Coordinatensystem x, y, z so, dass der Punkt T in die positive z-Axe fällt. Nun sind aber f, g, h die Coordinaten von T im festen System; bei der getroffenen Wahl wird also:

(42) $f = 0, \quad g = 0, \quad h > 0$

Dadurch gehen die Gleichung (41) über in:

(43) $Ap = h\gamma, \quad Bq = h\gamma', \quad Cr = h\gamma''.$

p, q, r lassen sich also unmittelbar durch $\gamma, \gamma', \gamma''$ ausdrücken; setzen wir die so gefundenen Werte in die Diffgleichungen (38) ein, so erhalten wir für $\gamma, \gamma', \gamma''$ die Diffgl.:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) h\gamma'\gamma''$$

$$(44) \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = -\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) h\gamma''\gamma$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} = -\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) h\gamma\gamma'$$

Soll die Bewegung des starren Körpers vollkommen bestimmt sein, so muss für einen Augenblick die Lage und die Geschwindigkeitscomponenten der einzelnen Punkte des Systems bekannt sein. Für diesen Augenblick können wir dann den Punkt T rein geometrisch construiren. Ist aber OT bekannt auch nur für einen Augenblick, so können wir die Richtung der z-Axe und den Wert der Constanten h. Die Wahl der x und y ist dann noch willkürlich.

Um nun die Integration von (44) auszuführen, betrachten wir zunächst das allgemeinere System von Diffgl.:

$$(45)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a_1 x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2 x_3 x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -a_3 x_1 x_2 \end{aligned}$$

mit der Bedingung dass für $t = t_0$ x_1, x_2, x_3 vorgeschriebene Werte c_1, c_2, c_3 annehmen.

Wir nehmen an, dass keine der 3 Constanten $a_1, a_2, a_3 = 0$ sei, da sonst die Diffgl. (45) sich leicht durch Exponentialfunctionen integriren lassen.

Wir setzen nun:

$$(46)\qquad s = \frac{1}{3}\left(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2\right)$$

Dann ist:

$$\frac{ds}{dt} = -2a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3$$

ferner:

$$\frac{d}{dt}\left(a_2 a_3 x_1^2\right) = -2a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(s - a_\mu a_\nu x_\lambda^2\right) = 0 \qquad [\lambda = 1, 2, 3]$$

oder:

$$s - a_\mu a_\nu x_\lambda^2 = e^{(\lambda)}$$

wo e', e'', e''' Integrationsconstanten sind, deren Werte durch die Anfangsbedingungen vollkommen bestimmt sind. Addirt man die 3 Gleichungen:

$$s - a_2 a_3 x_1^2 = e'$$
$$(47) \qquad s - a_3 a_1 x_2^2 = e''$$
$$s - a_1 a_2 x_3^2 = e'''$$

und beachtet (46), so sieht man, dass:

$$(48) \qquad e' + e'' + e''' = 0.$$

Ferner hat man:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4(a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3)^2 = 4(s-e')(s-e'')(s-e''')$$

Daraus folgt wegen (48), dass

$$(49) \qquad s = \wp(t-t')$$

wo t' eine Integrationsconstante ist, welche durch die Anfangsbedingungen bis auf eine Periode bestimmt ist.

Wird $s = s_0$ für $t = t_0$, so hat man zur Bestimmung von t':

$$s_0 = \wp(t_0 - t').$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \wp'(t_0 - t') = -2a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 c_3$$

Es ist also auch das Vorzeichen von $\wp'(t_0 - t')$ bestimmt; also t' bis auf eine Periode bestimmt.

Nun ist:

$$s - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2(t-t')}{\sigma^2(t-t')}, \text{ also}$$

$$x_\alpha^2 = \frac{1}{a_\beta a_\gamma} \frac{\sigma_\lambda^2(t-t')}{\sigma^2(t-t')}.$$

Bezeichnen wir daher mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 3 Grössen deren Quadrate $= +1$ sind, so ist:

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_3}} \cdot \frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{a_3} \sqrt{a_1}} \cdot \frac{\sigma_\mu(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

$$x_3 = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sigma_\nu(t-t')}{\sigma(t-t')}$$

Zur Bestimmung der ε multiplicieren wir zunächst die 3 Gleichungen nachdem wir die erste mit $a_2 a_3$, die zweite mit $a_3 a_1$, die dritte mit $a_1 a_2$ multiplicirt haben:

$$a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\sigma_\lambda \sigma_\mu \sigma_\nu}{\sigma^3}$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \wp'(t-t')$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3$$

Es muss also $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = +1$ sein. Innerhalb dieser Grenzen ist das Vorzeichen der ε beliebig. Da nämlich bisher die Constante t' nur bis auf eine Periode bestimmt ist, so kann man durch Vermehrung derselben um 2ϖ bewirken dass die Vorzeichen richtig werden, unter Benutzung der Formeln:

$$\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(u - 2\omega_\lambda) = \frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(u)$$

$$\frac{\sigma_\mu}{\sigma}(u - 2\omega_\lambda) = -\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(u)$$

Wir wählen nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ und erhalten so die Formeln:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}} \frac{\sigma_\lambda}{\sigma}(t-t')$$

$$(50) \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}} \frac{\sigma_\mu}{\sigma}(t-t')$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}} \frac{\sigma_\nu}{\sigma}(t-t')$$

Dabei hat man zur Bestimmung der e die Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_0 - a_2 a_3 c_1^2 &= e' \\ (51) \qquad s_0 - a_0 a_1 c_2^2 &= e'' \\ s_0 - a_1 a_2 c_3^2 &= e''' \end{aligned}$$

und zur Bestimmung von t'

$$\begin{aligned} s_0 &= \wp(t_0 - t') \\ (52) \qquad \wp'(t_0 - t') &= -2a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 c_3 \end{aligned}$$

Wir kehren jetzt zu den Diffgl. (44) zurück; in denselben haben die Grösen $a_1 a_2 a_3$ folgende Werte:

$$(53) \qquad a_1 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) h; \quad a_2 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) h; \quad a_3 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) h$$

zur Bestimmung der e haben wir folg. Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_0 - a_2 a_3 \gamma_0^2 &= e_\lambda \\ (54) \qquad s_0 - a_3 a_1 \gamma_0'^2 &= e_\mu \\ s_0 - a_1 a_2 \gamma_0''^2 &= e_\nu \end{aligned}$$

wobei $\gamma_0 \cdot \gamma_0' \cdot \gamma_0''$ die gegebenen Anfangswerte der γ bezeichnen.

Da sämmtliche auf der linken Seite

vorkommenden Grössen reell sind, so sind die drei e reell. Um die Reihenfolge derselben zu bestimmen, setzen wir fest, es solle von den 3 Trägheitsmomenten A, B, C B das mittlere sein, d.h. wir verfügen über die Reihenfolge in der wir die 3 Hauptträgheitsaxen des Körpers mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen, so, dass wir diej. Axe die y-Axe nennen, zu welcher das mittlere Trägheitsmoment gehört. Alsdann ist $a_3 a_1 > 0$, $a_2 a_3$ und $a_1 a_2 < 0$; also ist $e_\mu < e_\lambda$ und e_ν: also ist $e_\mu = e_3$

Um nun auch über die x_1 und z_1-Axe passend zu verfügen, multipliciren wir zuerst die 3 Gleichungen (44) resp. mit $\frac{\gamma}{A}$, $\frac{\gamma'}{B}$, $\frac{\gamma''}{C}$ und addiren:

$$\frac{\gamma d\gamma}{A} + \frac{\gamma' d\gamma'}{B} + \frac{\gamma'' d\gamma''}{C} = 0$$

also

$$(55)\qquad \frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} = \frac{1}{D}$$

wo D eine positive Constante, deren

Wert durch die ggb. Anfangswerte der γ vollkommen bestimmt ist.

Wir bilden jetzt:

$$e_\lambda - e_\mu = a_2 (a_1 \gamma_0''^2 - a_3 \gamma_0^2)$$

$$= \frac{(A-C)\left[\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\gamma_0''^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\gamma^2\right]}{AC} h^2$$

Ziehen wir jetzt von der Gleichung:

$$\frac{\gamma^2}{B} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{B} = \frac{1}{B}$$

die Gleichung (JJ) ab, so folgt:

$$\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\gamma''^2 - \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\gamma^2 = \frac{1}{B} - \frac{1}{D}$$

also:

$$e_\lambda - e_\mu = \frac{(A-C)(D-B)}{ABCD} h^2$$

Indem wir den auf Exponentialfunctionen führenden Fall $D = B$ ausschliessen, haben wir nun 2 Fälle zu unterscheiden:

1) $D < B$; Alsdann nennen wir die Hauptaxe zu welcher das grösste Trägheitsmoment gehört die x_1-Axe, so dass:

$$A > B > C.$$

Dann ist:

$$\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\nu < 0;$$

also:

$$e_\lambda = e_2\,,\quad e_\mu = e_3\,,\quad e_\nu = 1$$

2) $D > B$; dann nennen wir die Hauptaxe mit dem kleinsten Trägheitsmoment x_1-Axe, so dass

$$A < B < C,$$

und:

$$e_\lambda - e_\nu < 0.$$

Somit ist bei diesen Festsetzungen in beiden Fällen:

(56) $$e_\lambda = e_2\,;\quad e_\mu = e_3\,;\quad e_\nu = e_1$$

Ferner liegt in beiden Fällen, wie aus (55) und $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 0$ folgt, D zw. B und C, so dass im ersten Falle:

$$A > B > D > C.$$

im zweiten:

$$A < B < D < C.$$

Ganz in derselben Weise wie oben $e_\lambda - e_\nu$ sind nun die folgenden Differenzen berechnet:

$$e_2 - e_3 = \frac{(A-B)(D-C)}{ABCD}\,h^2$$

(57) $$e_1 - e_3 = \frac{(B-C)(A-D)}{ABCD}\,h^2$$

$$e_1 - e_2 = \frac{(A-C)(B-D)}{ABCD}\,h^2.$$

Wir haben nun die Constante t zu bestimmen. Es ist:

$$e_0 - e_3 = a_1 a_3 \gamma_0'^2 > 0$$

$$e_0 - e_2 = a_2 a_3 \gamma_0'^2 < 0$$

also:

$$e_2 > \wp(t_0 - t') > e_3$$

Wir wollen der Einfachkeit wegen annehmen, es sei $t_0 = 0$, so dass der Bewegungszustand für $t = 0$ gegeben ist; ~~dann~~ folgt nach § 17:

$$t' = t'' + \omega_3 + 2\tilde{\omega},$$

wo t'' reell ist. Statt $t'' + 2\tilde{\omega}$ setzen wir das jetzt verfügbar gewordene Zeichen t_0:

$$(58) \qquad t' = t_0 + \omega_3$$

Setzt man diesen Wert von t' in (50) ein, ferner für λ, μ, ν die Zahlen 2, 3, 1; benutzt man dann weiter die Formeln Art. 23 und die Gleichungen (57), so erhält man nach einfachen Umformungen:

$$\gamma^2 = \frac{A(D-C)}{D(A-C)} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}(t-t_0)$$

$$(59) \qquad \gamma'^2 = \frac{h^2(A-D)(D-C)}{AC\,D^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_3^2}(t-t_0)$$

$$\gamma''^2 = \frac{C(A-D)}{D(A-C)} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2}(t-t_0)$$

Ziehen wir jetzt die Wurzeln, so entsteht die Frage nach dem Vorzeichen. [Ehe eine Entscheidung hierüber möglich ist, müssen wir noch eine Festsetzung über die pos. Richtungen der x_1, y_1, z_1-Axen treffen.]

Wir setzen zunächst, indem wir unter ε, ε', ε'' drei Grössen verstehen deren Quadrat $+1$ ist:

$$\gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\gamma' = \varepsilon' \frac{h}{D} \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\gamma'' = \varepsilon'' \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t-t_0)$$

Nach (50) ist:

$$\gamma = \frac{\kappa}{\sqrt{A-C}\,\sqrt{B-A}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma}(t-t_0-\omega_3)$$

$$\gamma' = \frac{\kappa'}{\sqrt{B-A}\,\sqrt{C-B}} \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma}(t-t_0-\omega_3)$$

$$\gamma'' = \frac{\kappa''}{\sqrt{C-B}\,\sqrt{A-C}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma}(t-t_0-\omega_3)$$

wo $\kappa, \kappa', \kappa''$ reelle positive Constanten.

Nun ist (Art. 23):

$$\frac{\sigma_2}{\sigma}(t-t_0-\omega_3) = -\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{i} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(t-t_0-\omega_3) = \sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{e_2-e_3}\;\frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(t-t_0-\omega_3) = -\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{i}\;\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t-t_0)$$

Unter Benutzung von (57) erhält man:

$$\gamma = m \frac{i\sqrt{A-B}\,\sqrt{D-C}}{\sqrt{A-C}\,\sqrt{B-A}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\gamma' = m' \frac{\sqrt{B-C}\,\sqrt{A-D}\,\sqrt{A-B}\,\sqrt{D-C}}{\sqrt{B-A}\,\sqrt{C-B}} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\gamma'' = m'' \frac{i\sqrt{B-C}\,\sqrt{A-D}}{\sqrt{C-B}\,\sqrt{A-C}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t-t_0),$$

wo wieder m, m', m'' reell und > 0.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $A > B > D > C$. Dann ist:

$$\sqrt{B-A} = i\sqrt{A-B}$$

$$\sqrt{C-B} = i\sqrt{B-C},$$ und es wird:

$$\gamma = m\frac{\sqrt{D-C}}{\sqrt{A-C}}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = m\sqrt{\frac{D-C}{A-C}}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$\gamma' = -m'\sqrt{A-D}\sqrt{D-C}\cdot\frac{\sigma}{\sigma_3} = -m'\sqrt{(A-D)(D-C)}\cdot\frac{\sigma}{\sigma_3}$$

$$\gamma'' = m''\frac{\sqrt{A-D}}{\sqrt{A-C}}\;\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = m''\sqrt{\frac{A-D}{A-C}}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

Also ist: $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, $\varepsilon'' = +1$

2) $A < B < D < C$. Dann ist

$$\gamma = -m\sqrt{\frac{D-C}{A-C}}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$\gamma' = m'\sqrt{(A-D)(D-C)}\cdot\frac{\sigma}{\sigma_3}$$

$$\gamma'' = -m''\sqrt{\frac{A-D}{A-C}}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

Also ist in diesem Falle: $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = -1$.

t_0 ist bestimmt bis auf eine Periode $2\tilde{\omega}$:

$$t_0 = t'' + 2\tilde{\omega} = t'' + 2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_3,$$

wo $0 \leqq t'' < 2\omega'$.

Es bleiben noch die ganzen Zahlen μ und μ' zu bestimmen. Nun ist:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(u+2\tilde{\omega}) = (-1)^{\mu+\mu'} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(u)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_3}(u+2\tilde{\omega}) = (-1)^{\mu} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_3}(u)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u+2\tilde{\omega}) = (-1)^{\mu'} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u)$$

μ und μ' bestimmen sich dann aus der Bedingung dass für $t=0$, $\gamma, \gamma', \gamma''$ die vorgeschriebenen Werte $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_0''$ annehmen sollen. Hieraus folgt.

I. Wenn $A > B > D > C$

$$\gamma_0 = (-1)^{\mu+\mu'} n \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t'')$$

$$\gamma_0' = (-1)^{\mu} n' \frac{\sigma}{\sigma_3}(t'')$$

$$\gamma_0'' = (-1)^{\mu'} n'' \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t'')$$

Nun sind $\frac{\sigma}{\sigma_3}(t'')$ und $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t'')$ positiv; μ und μ' sind also bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$(-1)^{\mu} \gamma_0' > 0$$

$$(-1)^{\mu'} \gamma_0'' > 0$$

Das Vorzeichen von γ_0 hängt davon ab ob $t'' < \omega_1$ oder $> \omega_1$, da im ersten Falle $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t'') > 0$, im zweiten < 0. Nun ist aber t'' schon durch Gl. (52) vollständig bestimmt. Es ist daher zu zeigen, dass beide ~~Gleichungen~~ Bestimmungen sich nicht widersprechen. Aus (52) folgt dass:

$$\wp'(t') = \wp'(t''+\omega_3) = +2a_1a_2a_3\gamma_0\gamma_0'\gamma_0''$$
$$= p\cdot(C-B)(A-C)(B-A)\gamma_0\gamma_0'\gamma_0'',$$

wo p positiv. [Setzt man die Werte für $\gamma_0, \gamma_0', \gamma_0''$ ein, so kommt:

$$\wp'(t''+\omega_3) = (C-B)(A-C)(B-A)\,\sigma_1(t'')\,\mathfrak{P}$$
$$= \sigma_1(t'')\,\mathfrak{P}.]$$

Nach Voraussetzung ist $(C-B)(A-C)(B-A) > 0$, also hat $\wp'(t''+\omega_3)$ dasselbe Zeichen wie $\gamma_0\cdot\gamma'\cdot\gamma_0''$, also $t'' < \omega_1$ wenn $\gamma_0\gamma_0'\gamma_0'' > 0$ und $t'' > \omega_1$ wenn $\gamma_0\gamma_0'\gamma_0'' < 0$. (§12)

Andrerseits ist: $\gamma_0\gamma_0'\cdot(-1)^{\mu+\mu'} > 0$.
$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t'')$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\gamma_0(-1)^{\mu+\mu'}$, also auch dasselbe wie $\gamma_0\gamma_0'\gamma_0''$, also dasselbe wie $\wp'(t''+\omega_3)$; beide Bestim-

mungen stimmen also überein.

Die positive Richtung der x_1, y_1, z_1-Axe war bisher willkürlich; wir können über dieselbe so verfügen, dass $\gamma_0; \gamma_0'; \gamma_0'' > 0$; dann wird μ und $\mu' \equiv 0 \pmod{2}$ und $t'' < \omega_1$.

II. Wenn $A < B < D < C$, so folgt:

$$(-1)^{\mu+1} \gamma_0' > 0, \quad (-1)^{\mu'+1} \gamma_0'' > 0, \quad (-1)^{\mu+\mu'+1} \gamma_0 \sigma_1(t'') > 0.$$

Soll auch hier μ und $\mu' \equiv 0 \pmod{2}$ werden, so müssen wir die positiven Richtungen der x_1, y_1, z_1 Axen so wählen, dass

$$\gamma_0'' < 0 \quad ; \quad \gamma_0' < 0$$

Und soll auch $t'' < \omega_1$, so muss auch $\gamma_0 < 0$ angenommen werden.

Wir haben demnach folgendes Resultat: Aus der ggb. Anfangslage u. den ggb. Anfangsgeschwindigkeiten construire man die Strecke OT und lege die positive z-Axe in die Richtung OT. Dann berechne man die Grösse D aus der Gleichung:

$$\frac{\gamma_0^2}{A} + \frac{\gamma_0'^2}{B} + \frac{\gamma_0''^2}{C} = \frac{1}{D}.$$

Man bezeichne dann von den drei Hauptträgheitsaxen diejenige als y_1-Axe zu welcher das mittlere Trägheitsmoment gehört und bilde die Differenz $B-D$. Man unterscheidet dann:

1., $B > D$. Dann bezeichnet man diejenige der beiden übrigen Trägheitsaxen als x_1-Axe zu welcher das grösste Trägheitsmoment gehört, und wählt dann die pos. Richtungen der x_1, y_1, z_1-Axen so, dass alle 3 mit der pos. z-Axe spitze Winkel bilden.

2., $B < D$. Dann bezeichnet man die zum kleinsten Trägheitsmoment gehörige Axe als x_1-Axe und wählt die pos. Richtungen der x_1, y_1, z_1-Axen so dass alle drei mit den pos. z-Axe stumpfe Winkel bilden. Die x und y-Axe bleiben willkührlich, abgesehen von der einen Bedingung dass beide Coordinatensysteme congruent sein müssen.

Bei diesen Festsetzungen über die

Coordinatensysteme

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$(60)\qquad \gamma' = \pm \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}}\ \frac{h}{D}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)$$

$$\gamma'' = \pm \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t-t_0)$$

Das obere Zeichen bezieht sich auf den Fall $B > D$; das untere auf den Fall $B < D$. t_0 ist reell, positiv und $\leqq \omega_1$.

§ 5. Bestimmung der α, β.

Nachdem nunmehr $\gamma, \gamma', \gamma''$ als Functionen von t bestimmt sind, gehen wir dazu über, auch die übrigen 6 Grössen $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ durch t auszudrücken.

Wir berechnen zunächst:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}}{\alpha^2+\beta^2} + i\,\frac{\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}}{\alpha^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{-\gamma\frac{d\gamma}{dt} + i\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)}{1-\gamma^2}.$$

Nun war (20):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q.$$

Ferner:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma'', \qquad \alpha''\beta - \alpha\beta'' = \gamma'.$$

Endlich:

$$q = \frac{h}{B}\gamma', \qquad r = \frac{h}{C}\gamma''.$$

Durch Benutzung dieser Werte erhält man:

$$\alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt} = h\left(\frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C}\right) \quad [55]$$

$$= h\left(\frac{1}{D} - \frac{\gamma^2}{A}\right) = h\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A} + \frac{1-\gamma^2}{A}\right)$$

Also ist:

$$(61) \quad \frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{h}{A}i + \frac{\gamma\frac{d\gamma}{dt} - ih\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right)}{\gamma^2 - 1}.$$

Wir setzen jetzt: $t - t_0 = u$ und $\gamma^2 = \varphi(u)$, also:

$$(62) \quad \varphi(u) = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_3^2 u} = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3}.$$

Daraus folgt dass $\varphi(u)$ eine elliptische Function 2^{ten} Grades von u ist mit den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$, welche an der Stelle $u = \omega_3$ ∞^2 wird. Ferner ist:

$$\varphi'(u) = 2\gamma \frac{d\gamma}{du} = 2\gamma\gamma'\gamma'' \frac{h(B-C)}{BC}. \quad [44]$$

Es sei jetzt v einer der beiden incongruenten Werte für die $\varphi(v) = 1$, also $\gamma^2 = 1$. Für diesen Wert v ist dann: $\gamma''^2 = -\gamma'^2$, wegen $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$ und

$$\frac{1}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} - \frac{\gamma'^2}{C} = \frac{1}{D},$$

also:

$$\gamma'^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \frac{1}{D} - \frac{1}{A}.$$

Daraus folgt:

$$[\varphi' v]^2 = -4\gamma'^4\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)^2 h^2 = -4h^2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right)^2,$$

also

$$\varphi'(v) = \pm 2ih\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right).$$

Es soll nun für v derjenige der beiden incongruenten Werte gewählt werden, für welchen

$$(63) \qquad \varphi'(v) = -2ih\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right).$$

Die Gl. (61) geht dann über in:

$$(64)\quad \frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{ih}{A} + \frac{\frac{1}{2}\varphi'(u) + \frac{1}{2}\varphi'(v)}{\varphi(u) - \varphi(v)}.$$

Da die beiden ∞^1 von $\varphi(u)$ zu einem ∞^2 zusammenstellen, für $u = \omega_3$, so folgt, dass in der Diffgl. für $\varphi(u)$:

$$(\varphi' u)^2 = R_4(\varphi)$$

der Coefficient von φ^4 in $R_4 = 0$ ist. Also ist nach § 26, 6:

$$(65)\quad \frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{ih}{A} + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_3) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v-\omega_3).$$

Wir haben nun noch v näher zu bestimmen. v ist definirt durch die beiden Gleichungen:

$$\varphi(v) = 1 \quad ; \quad \varphi'(v) = -2ih\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right).$$

Es ist also:

$$1 = \varphi(v) = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\,\frac{\wp v - e_1}{\wp v - e_3} = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\left\{1 - \frac{e_1 - e_3}{\wp v - e_3}\right\}.$$

Nun ist nach § 17, 1:

$$\frac{e_1 - e_3}{\wp v - e_3} = \frac{\wp(v+\omega_3) - e_3}{e_2 - e_3},$$

also:

$$\wp(v+\omega_3)-e_3 = -\frac{(e_2-e_3)\,C\,(A-D)}{A\,(B-C)}.$$

Da sowohl (e_2-e_3) als auch $\frac{A-D}{B-C}$ in beiden Fällen ($B>D$ und $B<D$) positiv sind, so folgt:

$$\wp(v+\omega_3) < e_3,$$

also nach § 17 $(v+\omega_3)$ rein imaginär (und $-\frac{\omega_3}{i} < \frac{v+\omega_3}{i} < \frac{\omega_3}{i}$), also muss auch v rein imaginär sein:

(66) $$v = w\,i$$

Die weitere Entscheidung ob $w>0$ oder <0 ist für die beiden Fälle verschieden. Es ist:

$$\varphi(u) = \frac{A\,(B-C)}{B\,(A-C)}\left\{1-\frac{\wp(u+\omega_3)-e_3}{e_2-e_3}\right\},$$

also:

$$\varphi'(u) = -\frac{\wp'(u+\omega_3)}{e_2-e_3}$$

also:

$$\wp'(v+\omega_3) = +(e_2-e_3)\,i\,h\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{A}\right).$$

1) Wenn $B>D$ so ist $\frac{1}{D}-\frac{1}{A}>0$, also

$$\wp'(v+\omega_3) = i\,P,$$

also nach §17:

$$\frac{v+\omega_3}{i} > \frac{\omega_3}{i}, \quad \text{also} \quad \underline{\underline{w > 0.}}$$

2) Wenn $B < D$, so ist $\frac{1}{D} - \frac{1}{A} < 0$,
also

$$\wp'(v+\omega_3) = -i\,P, \quad \text{also} \quad \underline{\underline{w < 0.}}$$

Beachtet man schliesslich die Formel (Art. 19):

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_3) = -\eta_3 + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u)$$

und setzt $(t-t_0)$ für u, so erhält man aus Gl. (65):

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{ih}{A} + \frac{\sigma'}{\sigma}(t-t_0-wi) + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi) - \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(t-t_0).$$

Also durch Integration:

$$(67) \quad \alpha+\beta i = \text{Const.} \times \frac{\sigma(t-t_0-wi)}{\sigma_3(t-t_0)}\, e^{i\left\{\frac{h}{A}+\frac{1}{i}\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi)\right\}(t-t_0)}$$

Die Bestimmung der Constanten verschieben wir bis wir auch $\alpha'+\beta' i$ und $\alpha''+\beta'' i$ bestimmt haben.

Zur Bestimmung dieser Grössen

gelangen wir ohne Ausführung einer weiteren Integration auf folg. Wege.

Aus den Relationen (9) und (15) leitet man leicht ab:

$$\frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i} = \frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1-\gamma^2}$$

(68)

$$\frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} = \frac{-\gamma\gamma'' - i\gamma'}{1-\gamma^2}$$

Somit sind die Grössen $(\alpha' + \beta' i)$ und $(\alpha'' + \beta'' i)$ durch bereits bekannte Grössen ausgedrückt. Diese Ausdrücke lassen sich aber noch wesentlich vereinfachen.

Es war $v = wi$ derjenige Wert von $u = t - t_0$ für den $\gamma^2 = 1$ wird; für denselben Wert wird:

$$\gamma'^2 = -\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}, \quad \gamma''^2 = +\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}$$

also

$$\bar{\gamma} = \sqrt{1}, \quad \bar{\gamma}' = i\sqrt{\frac{BC(A-C)}{AD(B-C)}}, \quad \bar{\gamma}'' = \sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}}$$

Um über das vorläufig unbestimmte Vorzeichen der Wurzeln zu entscheiden, setzen wir in (60) für $(t-t_0)$ den Wert v:

$$\bar{\gamma} = \pm \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(v)$$

$$(69)\qquad \bar{\gamma}' = \mp \sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}}\ \frac{h}{D}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(v)$$

$$\bar{\gamma}'' = \pm \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(v)$$

Das obere Vorzeichen gilt wenn $B > D$; das untere wenn $B < D$; v ist $= wi$ und w ist im 1^{ten} Falle > 0, im $2^{\text{ten}} < 0$.

$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(wi)$ und $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(wi)$ sind reell und > 0, denn sie wechseln ihr Zeichen nicht wenn w von $-\frac{\omega_3}{i}$ bis $+\frac{\omega_3}{i}$ wächst, und für $w = 0$ sind sie > 0. $\frac{\sigma}{\sigma_3}$ ist rein imaginär, und zwar $= + i\,\mathfrak{P}$, wenn $w > 0$; $- i\,\mathfrak{P}$ wenn $w < 0$; Daraus folgt:

$$\bar{\gamma} = \pm \mathfrak{P} = \pm 1$$

$$\bar{\gamma}' = - i\,\mathfrak{P} = - i \sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}}$$

$$\bar{\gamma}'' = \pm \mathfrak{P} = \pm \sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}},$$

wo wieder das obere Zeichen auf den ersten, das untere auf den zweiten Fall gilt. Durch Vergleichung mit (69) folgt:

$$1 = +\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(v)$$

$$-i\sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}} = \mp\sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}}\ \frac{h}{D}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(v)$$

$$+\sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}} = +\sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(v).$$

Hieraus folgt durch passende Division:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}(v) = +\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}$$

$$(70)\qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(v) = +\sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}(v) = \pm\frac{iC}{h}\sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{D}\sqrt{\frac{(D-C)(A-D)}{AC}} = \sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}}\sqrt{e_1-e_3} = \sqrt{e_1-e_3}\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(v)$$

$$\pm\sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{i}\ \frac{\sigma}{\sigma_1}(v).$$

Führt man diese Werte in (60) ein, so erhält man:

$$\gamma = \pm \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(v) \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(u)$$

(71) $$\gamma' = \mp \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(v) \frac{\sigma}{\sigma_3}(u)$$

$$\gamma'' = + \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{i} \frac{\sigma}{\sigma_1}(v) \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u)$$

Berücksichtigt man die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Formeln:

$$\sigma_\mu^2 u \, \sigma_\nu^2 v - \sigma_\nu^2 u \, \sigma_\mu^2 v = (e_\nu - e_\mu)\, \sigma(u+v)\, \sigma(u-v)$$

$$\sigma_\lambda u \, \sigma u \, \sigma_\mu v \, \sigma_\nu v + \sigma_\mu u \, \sigma_\nu u \, \sigma_\lambda v \, \sigma v = \sigma(u+v)\, \sigma_\lambda(u-v),$$

so erhält man:

$$1 - \gamma^2 = (e_1 - e_3) \frac{\sigma(u+v)\, \sigma(u-v)}{\sigma_1^2 v \; \sigma_3^2 u}$$

(72) $$-\gamma\gamma' + i\gamma'' = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u+v)\, \sigma_1(u-v)}{\sigma_1^2 v \; \sigma_3^2 u}$$

$$-\gamma\gamma'' - i\gamma' = \pm \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u+v)\, \sigma_3(u-v)}{\sigma_1^2 v \; \sigma_3^2 u}$$

Es ist also nach (68)

(73) $$\frac{\alpha' + \beta' i}{\alpha + \beta i} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u-v)}{\sigma(u-v)}$$

$$\frac{\alpha'' + \beta'' i}{\alpha + \beta i} = \pm \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(u-v)}{\sigma(u-v)}$$

Oder, wenn wir den Wert von $\alpha + \beta i$ aus (67) einsetzen und $\frac{h}{A} + \frac{1}{i}\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi) = v$ setzen:

$$\alpha + \beta i = K \frac{\sigma(u-v)}{\sigma_3(u)} e^{ivu}$$

$$\alpha' + \beta' i = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_1(u-v)}{\sigma_3(u)} e^{ivu}$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \pm \frac{iK}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{\sigma_3(u-v)}{\sigma_3(u)} e^{ivu}$$

Es bleibt noch die Constante K zu bestimmen. Für $t = t_0$, also $u = 0$, wird $\gamma' = 0$; also $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$; also muss für $u = 0$ $\alpha' + \beta' i$ die Form haben: $e^{i\mu}$, wo μ eine reelle Constante, die sich aus den Anfangswerten der $\alpha' \beta'$ berechnen lässt. Man hat also für $u = 0$:

$$e^{i\mu} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \sigma_1(v),$$

also:

$$K = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}\; e^{i\mu}}{\sigma_1(v)}.$$

So erhält man schliesslich folgende definitive Werte:

$$\alpha + \beta i = \sqrt{e_1 - e_3}\ \frac{\sigma(t - t_0 - wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t - t_0)}\ e^{i[\mu + \nu(t - t_0)]}$$

$$(74)\quad \alpha' + \beta' i = \frac{\sigma_1(t - t_0 - wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t - t_0)}\ e^{i[\mu + \nu(t - t_0)]}$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \pm i\ \frac{\sigma_3(t - t_0 - wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t - t_0)}\ e^{i[\mu + \nu(t - t_0)]}$$

wo das $\pm$ Zeichen sich wieder auf die beiden Fälle bezieht.

Wir haben in §2 den Punkt S eingeführt, dessen Coordinaten in dem beweglichen System p, q, r sind. p, q, r haben wir bereits durch $\gamma, \gamma', \gamma''$ ausgedrückt (43); es seien nun P, Q, R die Coordinaten desselben Punktes S in dem im Raume festen Coordinatensystem. Wir wollen P, Q, R als Functionen von t bestimmen. Nach (1) ist:

$$P = \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r$$
$$Q = \beta p + \beta' q + \beta'' r$$
$$R = \gamma p + \gamma' q + \gamma'' r.$$

Setzt man in die letzte Gleichung die Werte der p, q, r aus (43) ein und berücksichtigt (55), so folgt.

$$R = \frac{h}{D}, \text{ also constant.}$$

Wir berechnen nun weiter:

$$P + Qi = (\alpha + \beta i)\, p + (\alpha' + \beta' i)\, q + (\alpha'' + \beta'' i)\, r$$

und hieraus:

$$\frac{P + Qi}{\alpha + \beta i} = h \left\{ \frac{\gamma}{A} + \frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1 - \gamma^2} \frac{\gamma'}{B} + \frac{-\gamma\gamma'' - i\gamma'}{1 - \gamma^2} \frac{\gamma''}{C} \right\} =$$

$$= \frac{h}{1-\gamma^2} \left\{ \frac{\gamma}{A} - \gamma\left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} \right) + i \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \gamma'\gamma'' \right\} =$$

$$= \frac{h}{1-\gamma^2} \left\{ \gamma \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D} \right) + i\gamma'\gamma'' \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \right\} =$$

$$= - \frac{h(B-C)}{BC} \left\{ \frac{BC(A-D)}{AD(B-C)} \gamma + i\gamma'\gamma'' \right\} \frac{1}{1-\gamma^2}.$$

Nun ist, nach (69a) und (71):

$$\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)} = \pm \bar{\gamma}' \bar{\gamma}'' i = -(e_1 - e_3) \frac{\sigma_2^2(v)\, \sigma^2(v)}{\sigma_1^2(v)\, \sigma_3^2(v)}$$

Also ist:

$$\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)} \gamma + i\gamma'\gamma'' = \begin{cases} \mp (e_1 - e_3) \dfrac{\sigma_2^2(v)\sigma^2 v \; \sigma_3 v\, \sigma_1 u}{\sigma_1^3 v \; \sigma_3^2 v \; \sigma_3 u} \\[2ex] \mp (e_1 - e_3) \dfrac{\sigma_2 v \; \sigma v \; \sigma u \; \sigma_2 u}{\sigma_1^2 v \; \sigma_3^2 u} \end{cases} =$$

$$= F(e_1 - e_3)\frac{\sigma_2 v\, \sigma v}{\sigma_1 v\, \sigma_3 v}\;\frac{\sigma_1 u\, \sigma_3 u\, \sigma v\, \sigma_2 v + \sigma_2 u\, \sigma u\, \sigma_1 v\, \sigma_3 v}{\sigma_1^2 v\, \sigma_3^2 u}$$

$$= F(e_1 - e_3)\frac{\sigma_2 v\, \sigma v}{\sigma_1 v\, \sigma_3 v}\;\frac{\sigma(u+v)\,\sigma_2(u-v)}{\sigma_1^2 v\, \sigma_3^2 u}.$$

Endlich ist:

$$\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1 v}\cdot\frac{\sigma v}{\sigma_3 v} = \sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}}\cdot \pm i\sqrt{\frac{BC(A-D)}{AD(B-C)}}\cdot\sqrt{\frac{AC}{(A-D)(D-C)}}\cdot\frac{D}{h}$$

$$= \pm i\,\frac{BC}{(\sqrt{B-C})^2 h}.$$

Ist $B > D > C$, so ist $(\sqrt{B-C})^2 = B - C$, ist also $B < D < C$, so ist $(\sqrt{B-C})^2 = C - B$, – also:

$$\frac{\sigma_2 v\, \sigma v}{\sigma_1 v\, \sigma_3 v} = + \frac{i\,BC}{(B-C)\,h}, \quad \text{und}$$

$$\frac{P + Qi}{\alpha + \beta i} = \pm i\,\frac{(e_1 - e_3)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sigma(u+v)\,\sigma_2(u-v)}{\sigma_1^2 v\cdot\sigma_3^2 u}$$

$$= \pm i\,\frac{\sigma_2(u-v)}{\sigma(u-v)},$$

also, indem wir den Wert für $(\alpha + \beta i)$ aus (74) einsetzen:

$$(75)\;\begin{cases} P + Qi = \pm i\sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\sigma_2(t - t_0 - wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i[\mu + \nu(t-t_0)]} \\ \text{und} \\ R = \dfrac{h}{D}. \end{cases}$$

Damit sind die Functionen P, Q, R vollständig bestimmt.

Schliesslich wollen wir noch, um die Periodicität der Functionen besser übersehen zu können, die σ-Functionen durch die ϑ-Functionen ausdrücken. Es ist:

(76)
$$\sigma(u) = 2\omega \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta\omega v^2}$$
$$\sigma_1(u) = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} e^{2\eta\omega v^2}$$
$$\sigma_2(u) = \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)} e^{2\eta\omega v^2}$$
$$\sigma_3(u) = \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)} e^{2\eta\omega v^2}$$

wobei $v = \frac{u}{2\omega}$ gesetzt ist.

Bezeichnet man dann weiter:

(77)
$$\frac{w}{2\omega} = v_0$$

(78)
$$\lambda = \frac{2\omega' h}{A} + \frac{1}{i} \frac{\vartheta_0'(v_0 i)}{\vartheta_0(v_0 i)},$$

und berücksichtigt die Formeln (Art. 35):

$$\vartheta_1'(0) = \pi\,\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$$

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}$$

$$\vartheta_0(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2},$$

so erhält man nach einfacher Rechnung:

$$(79)\quad \begin{cases} \alpha + \beta i = \dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \dfrac{\vartheta_1(v - v_0 i)}{\vartheta_0(v)}\, e^{i(\mu + \lambda v)} \\[2ex] \alpha' + \beta' i = \dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \dfrac{\vartheta_2(v - v_0 i)}{\vartheta_0(v)}\, e^{i(\mu + \lambda v)} \\[2ex] \alpha'' + \beta'' i = \pm i\, \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \dfrac{\vartheta_0(v - v_0 i)}{\vartheta_0(v)}\, e^{i(\mu + \lambda v)} \\[2ex] P + Q i = \pm i \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}\, \dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \dfrac{\vartheta_3(v - v_0 i)}{\vartheta_0(v)}\, e^{i(\mu + \lambda v)} \end{cases}$$

$$(80)\quad \begin{aligned} \gamma &= \pm \frac{\vartheta_0(v_0 i)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} \\ \gamma' &= \mp \frac{\vartheta_3(v_0 i)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} \\ \gamma'' &= \frac{1}{i}\, \frac{\vartheta_1(v_0 i)}{\vartheta_2(v_0 i)} \cdot \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} \end{aligned}$$

Die Grösse w lässt sich nach den allgemeinen in § 15 entwickelten Methoden berechnen. Schneller jedoch führt folgender Weg zum Ziel; es folgt aus (70):

$$(81) \qquad \frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \varepsilon,$$

wie wir zur Abkürzung schreiben. Dann ist $0 < \varepsilon < 1$; dann bilden wir:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{C(A-B)}{B(A-C)}$$

so ist in beiden Fällen $1-\varepsilon^2 > 0$, also $\varepsilon < 1$.

Betrachten wir für den Augenblick $\underline{w}$ als variabel und bezeichnen $\frac{\sigma_3}{\sigma_2}(wi)$ als Function von w mit ξ, so ist (Art. 25):

$$\frac{d\xi}{dw} = -(e_2 - e_3)\,\frac{\sigma(wi)\,\sigma_1(wi)}{i\,\sigma_2^2(wi)}.$$

Wächst w von 0 bis $+\frac{\omega_3}{i}$, so ist $\frac{d\xi}{dw} < 0$ und ξ nimmt von 1 bis 0 ab; wächst w von $-\frac{\omega_3}{i}$ bis 0 so ist $\frac{d\xi}{dw} > 0$ und ξ wächst von 0 bis 1.

Ueberdiess ist (Art. 25):

$$\left(\frac{d\xi}{dw}\right)^2 = (1-\xi^2)\left(e_1 - e_3 - (e_1 - e_2)\,\xi^2\right),$$

oder, indem wir

$$\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2$$

setzen,

$$\frac{d\xi}{dw} = \mp \sqrt{e_1 - e_3}\,\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k'^2\xi^2}.$$

Für $0 < w < +\frac{\omega_3}{i}$ ist das obere, für $0 > w > -\frac{\omega_3}{i}$ das untere Zeichen zu nehmen; daraus folgt:

$$(82) \quad w = \pm \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_\xi^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}}.$$

Das $\pm$ Zeichen bezieht sich wieder auf die beiden Fälle $B > D$ und $B < D$.

§6. Grenzfälle.

Bei specieller Wahl der Anfangsbedingungen können die elliptischen Functionen in einfach periodische übergehn. Dies tritt ein wenn zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich werden. Da entweder

$$A > B > D > C \quad \text{oder} \quad A < B < D < C,$$

so kann dies nur eintreten wenn $D = C$ oder $D = B$ wird.

<u>I. Fall</u>: <u>$D = C$</u>. alsdann ist $e_2 = e_3$. es wird $\frac{\omega_3}{i}$ unendlich gross, während ω_1 endlich bleibt.

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3e_1}}$$

$$\sigma u = \sqrt{\frac{2}{3e_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\, u\right) e^{\frac{e_1}{4}u^2}$$

$$\sigma_1 u = \cos\left(\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\, u\right) e^{\frac{e_1}{4}u^2}$$

$$\sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{e_1}{4}u^2}$$

Es wird dann:

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = +1.$$

Aus Gleichung (61) wird dann:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{hi}{c},$$

also:
$$\alpha+\beta i = \text{Const.}\; e^{\frac{hi}{c}t}.$$

Da $\gamma = 0$, so ist $\alpha^2+\beta^2 = 1$, also ist der absolute Betrag der Constanten $= 1$. Indem wir unter t' eine passend gewählte reelle Constante verstehen:

$$\underline{\alpha+\beta i = e^{\frac{ih}{c}(t-t')}}.$$

$$\frac{\alpha'+\beta' i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma'+i\gamma''}{1-\gamma^2} = i,$$

also:
$$\underline{\alpha'+\beta' i = i\, e^{\frac{ih}{c}(t-t')}}.$$

$$\frac{\alpha''+\beta'' i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma''-i\gamma'}{1-\gamma^2} = 0,$$

also:
$$\underline{\alpha''=0}, \quad \underline{\beta''=0}.$$

Endlich: $\dfrac{P+Qi}{\alpha+\beta i} = 0$, also: $P+Qi=0$.

Somit ist die Bewegung durch

folgende Gleichungen beschrieben:

$$\alpha = \cos\frac{h}{c}(t-t')\,;\quad \beta = \sin\frac{h}{c}(t-t')\,;\quad \gamma = 0$$

$$\alpha' = -\sin\frac{h}{c}(t-t')\,;\quad \beta' = \cos\frac{h}{c}(t-t')\,;\quad \gamma' = 0$$

$$\alpha'' = 0\,;\quad \beta'' = 0\,;\quad \gamma'' = 0$$

$$P = 0\,;\quad Q = 0\,;\quad R = \frac{h}{C}$$

$$p = 0\,;\quad q = 0\,;\quad r = \frac{h}{C}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen geht hervor, dass der Punkt S fest bleibt, und zwar in der z=Axe, mit welcher auch die z_1=Axe zusammenfällt. Die Länge der Strecke OS ist $\frac{h}{C}$; somit ist die Bewegung eine gleichförmige Rotation um die Axe des Trägheits=momentes C mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{h}{C}$. Je Nachdem $B \gtrless C$, kann also die Axe des grössten und die des kleinsten Trägheitsmomentes zur Axe einer gewöhnlichen Rotations=

bewegung werden.

Umgekehrt, sobald in einem Moment die momentane Rotationsaxe in die Axe des Trägheitsmomentes C fällt, so fällt sie beständig damit zusammen. Denn, sobald $p=0$, $q=0$ wird, so wird

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = \mp 1$$

also nach (55)

$$C = D.$$

Wenn $D-C$ nicht gerade $=0$ ist, aber doch sehr klein, so weicht die Bewegung sehr wenig von der eben beschriebenen Rotationsbewegung ab.

II. Fall: $D = B$. Alsdann wird $e_1 = e_2$; ω_1 wird ∞, während $\frac{\omega_3}{i}$ endlich bleibt.

Die elliptischen Functionen gehen in hyperbolische über; die γ sind nicht mehr periodisch, sondern die Bewegung nähert sich asymptotisch einer gleichförmigen Rotationsbewegung um die B-Axe.

§ 7. Drehung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, der nicht zugleich der Schwerpunkt ist.

Wir haben das allgemeine Rotationsproblem bis jetzt in 2 speciellen Fällen gelöst:

1) Wenn keine Kräfte auf den Körper wirken;

2) Wenn die Schwerkraft die einzige wirkende Kraft ist, und zugleich der Schwerpunkt mit dem festen Punkt zusammenfällt.

Wir wollen nun noch den Fall untersuchen, in dem die Schwerkraft wirkt, während der Schwerpunkt nicht mit dem festen Punkt zusammenfällt.

Zu diesem Zwecke drücken wir die 9 Grössen $\alpha, \beta, \text{---}$ durch andre Grössen aus, die folgendermassen definirt werden.

Wegen der Relationen (14) (15) genügen die 3 Grössen $\alpha+\beta i$, $\alpha'+\beta' i$

und $\alpha'' + \beta'' i$ der Gleichung:

$$(83) \qquad (\alpha + \beta i)^2 + (\alpha' + \beta' i)^2 + (\alpha'' + \beta'' i)^2 = 0$$

Nun kann man dieser Gleichung auf die allgemeinste Weise genügen, wenn man setzt:

$$(84) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta i &= g^2 - h^2 \\ \alpha' + \beta' i &= i\,(g^2 + h^2) \\ \alpha'' + \beta'' i &= 2gh \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen lassen sich g^2 und h^2 berechnen; verfügt man dann über das Vorzeichen von g willkührlich, so ist das von h durch die 3te Gleichung bestimmt.

Wählt man für g, h ganz beliebige complexe Grössen, so liefern die Gl. (84) ein Werthsystem $\alpha, \beta, \ldots$, welches den beiden Gleichungen genügt:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2$$

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0.$$

Setzt man weiter:

$$(85)\qquad \begin{aligned} g &= \lambda + \mu i \\ h &= \nu + \rho i \end{aligned}$$

wo λ, μ, ν, ρ reell, so erhält man:

$$(86)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 \\ \beta &= 2(\lambda\mu - \nu\rho) \\ \alpha' &= 2(\lambda\mu + \nu\rho) \\ \beta' &= \mu^2 + \rho^2 - \lambda^2 - \nu^2 \\ \alpha'' &= 2(\nu\lambda - \mu\rho) \\ \beta'' &= 2(\mu\nu + \lambda\rho) \end{aligned}$$

Soll überdiess: $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ sein, so muss: $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = \pm 1$ sein; wir wählen das obere Zeichen:

$$(87)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1$$

Wählt man für λ, μ, ν, ρ irgend ein der Gl. (87) genügendes Wertsystem, so liefern die Gl. (86) ein Wertsystem $\alpha, \beta, \ldots$, welches den 3 Relationen genügt:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \qquad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0.$$

Umgekehrt, ist $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ irgend ein (reelles) diesen Gleichungen genügendes Wertsystem, so liefern die Gl. (84) und (85) zwei der Relation (87) genügende Wertsysteme λ, μ, ν, ρ.

Die Grössen $\gamma, \gamma', \gamma''$ erhält man aus (9), (10), (11):

$$
(88) \qquad \begin{aligned}
\gamma &= 2(\nu\lambda + \mu\rho) \\
\gamma' &= 2(\mu\lambda - \lambda\rho) \\
\gamma'' &= \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned}
$$

Aus (86) und (88) ergeben sich noch folgende Relationen:

$$
(88_a) \qquad \begin{aligned}
1 + \alpha + \beta' + \gamma'' &= 4\rho^2 \\
1 + \alpha - \beta' - \gamma'' &= 4\lambda^2 \\
1 - \alpha + \beta' - \gamma'' &= 4\mu^2 \\
1 - \alpha - \beta' + \gamma'' &= 4\nu^2 \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma' - \beta'' &= 4\lambda\rho, \quad & \alpha'' - \gamma &= 4\mu\rho \\
\beta - \alpha' &= 4\nu\rho, \quad & \gamma' + \beta'' &= 4\mu\nu \\
\alpha'' + \gamma &= 4\nu\lambda, \quad & \beta + \alpha' &= 4\lambda\mu
\end{aligned}
$$

Wir haben nun die p, q, r durch λ, μ, ν, ρ auszudrücken. Es ergibt sich:

$$
(89)\quad
\begin{aligned}
p\,dt &= 2(\lambda\,d\rho - \rho\,d\lambda + \nu\,d\mu - \mu\,d\nu) \\
q\,dt &= 2(\mu\,d\rho - \rho\,d\mu + \lambda\,d\nu - \nu\,d\lambda) \\
r\,dt &= 2(\nu\,d\rho - \rho\,d\nu + \mu\,d\lambda - \lambda\,d\mu) \\
0 &= \rho\,d\rho + \lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu
\end{aligned}
$$

Wir lösen diese Gleichungen nach $d\lambda, d\mu, d\nu, d\rho$ auf und erhalten:

$$
(90)\quad
\begin{aligned}
2\frac{d\lambda}{dt} &= -p\rho - q\nu + r\mu \\
2\frac{d\mu}{dt} &= -q\rho - r\lambda + p\nu \\
2\frac{d\nu}{dt} &= -r\rho - p\mu + q\lambda \\
2\frac{d\rho}{dt} &= \lambda p + \mu q + \nu r
\end{aligned}
$$

Nun lauteten die allgemeinen Diffgl. (37):

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + \Sigma m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + \Sigma m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + \Sigma m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)
\end{aligned}
$$

Es sei nun die Schwere die einzige wirkende Kraft; wir wählen die Richtung der Schwere zur positiven z-Axe:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 2g,$$

also

$$X_1 = 2g\gamma, \quad Y_1 = 2g\gamma', \quad Z_1 = 2g\gamma''.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Schwerpunktes in dem im Körper festen System mit (x_0, y_0, z_0), so erhalten wir:

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + 2Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma')$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + 2Mg(z_0\gamma - x_0\gamma'')$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq + 2Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma)$$

Das Problem lässt sich, falls der Schwerpunkt nicht in den festen Punkt fällt, nur in dem speciellen Fall lösen wo zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind und der Schwerpunkt in der Axes des dritten liegt. Wir setzen also voraus:

$$A = B, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 \neq 0.$$

Bezeichnet man:

$$Mgz_0 = \mathcal{H},$$

so erhält man, indem man die $\gamma'\gamma''\gamma$ nach (88) durch λ, μ, ν ausdrückt, folgende Diffgl:

$$A\frac{dp}{dt} = (A-C)\,qr - 2\mathcal{H}(\nu\mu - \lambda\rho)$$

$$(91) \qquad A\frac{dq}{dt} = -(A-C)\,rp + 2\mathcal{H}(\nu\lambda - \mu\rho)$$

$$C\frac{dr}{dt} = 0$$

aus den letzten folgt:

$$r = \text{Const.}$$

Aus den beiden ersten:

$$A\frac{d(p+qi)}{dt} = -i(A-C)\,r(p+qi) + 2\mathcal{H}(\lambda+\mu i)(\nu+\rho i)\,i.$$

Analog erhält man aus (90)

$$(92) \qquad \frac{d(\lambda+\mu i)}{dt} = \frac{i}{2}(p+qi)(\nu+\rho i) - \frac{ri}{2}(\lambda+\mu i)$$

$$\frac{d(\nu+\rho i)}{dt} = \frac{i}{2}(p-qi)(\lambda+\mu i) + \frac{ri}{2}(\nu+\rho i)$$

Durch Division dieser drei Gleichungen

mit $(p+qi)$, $(\lambda+\mu i)$, $(\nu+\rho i)$ kommt:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = -\frac{ri}{2} + \frac{i}{2}\,\frac{(p+qi)(\nu+\rho i)(\lambda-\mu i)}{\lambda^2+\mu^2}$$

(92a) $$\frac{d\log(\nu+\rho i)}{dt} = \frac{ri}{2} + \frac{i}{2}\,\frac{(p-qi)(\nu-\rho i)(\lambda+\mu i)}{\nu^2+\rho^2}$$

$$A\,\frac{d\log(p+qi)}{dt} = -i(A-C)r + i\,\frac{2H(p-qi)(\nu-\rho i)(\lambda+\mu i)}{p^2+q^2}$$

Setzen wir hierin:

(93) $$(p-qi)(\nu-\rho i)(\lambda+\mu i) = \xi + i\xi_1,$$

so kommt:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = -\frac{ri}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\xi-i\xi_1)i}{\lambda^2+\mu^2}$$

(92b) $$\frac{d\log(\nu+\rho i)}{dt} = \frac{ri}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\xi+i\xi_1)i}{\nu^2+\rho^2}$$

$$\frac{d\log(p+qi)}{dt} = -\frac{i(A-C)}{A}r + \frac{2Hi}{A}\cdot\frac{\xi+i\xi_1}{p^2+q^2}$$

Setzen wir in (92b) $-i$ statt $+i$ und addieren je zwei zusammengehörigen Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{d\log(\lambda^2+\mu^2)}{dt} = \frac{\xi_1}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\frac{d\log(\nu^2+\rho^2)}{dt} = -\frac{\xi_1}{\nu^2+\rho^2}$$

$$\frac{d\log(p^2+q^2)}{dt} = -\frac{4\mathcal{H}}{A}\,\frac{\xi_1}{p^2+q^2}.$$

Und hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2+\mu^2) = \xi_1$$

$$(94) \qquad \frac{d}{dt}(\nu^2+\rho^2) = -\xi_1$$

$$\frac{d}{dt}(p^2+q^2) = -\frac{4\mathcal{H}}{A}\xi_1$$

Aus (93) folgt ferner.

$$\frac{d\log(\xi+i\xi_1)}{dt} = -\frac{bri}{A} + \frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\lambda^2+\mu^2} - \frac{1}{\nu^2+\rho^2} - \frac{4\mathcal{H}}{A(p^2+q^2)}\right\}(\xi-i\xi_1)$$

also:

$$\frac{d(\xi+i\xi_1)}{dt} = -\frac{bri}{A}(\xi+i\xi_1) + \frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\lambda^2+\mu^2} - \frac{1}{\nu^2+\rho^2} - \frac{4\mathcal{H}}{A(p^2+q^2)}\right\}(\xi^2+\xi_1^2)$$

Indem wir die reellen Teile gleich setzen:

$$(95) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{br}{A}\xi_1,$$

Setzen wir hieraus den Wert von ξ_1 in (94) ein, so kommt:

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2+\mu^2) = \frac{A}{Cr}\frac{d\xi}{dt}$$

$$(94a) \quad \frac{d}{dt}(\nu^2+\rho^2) = -\frac{A}{Cr}\frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(p^2+q^2) = -\frac{4H}{Cr}\frac{d\xi}{dt}$$

Also integrando:

$$\lambda^2+\mu^2 = \frac{A}{Cr}(\xi-c_1)$$

$$(96) \quad \nu^2+\rho^2 = -\frac{A}{Cr}(\xi-c_2)$$

$$p^2+q^2 = -\frac{4H}{Cr}(\xi-c_3)$$

Die Grössen c_1, c_2, c_3 sind Integrations-constanten, die wegen der Gleichung

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 = 1$$

der Bedingung unterworfen sind

$$(97) \quad \frac{A}{Cr}(c_2-c_1) = 1$$

Aus (93) folgt:

$$\xi^2+\xi_1^2 = (\lambda^2+\mu^2)(\nu^2+\rho^2)(p^2+q^2)$$

oder, da $\xi_1 = \dfrac{A}{Cr}\,\dfrac{d\xi}{dt}$:

$$\frac{A^2}{C^2 r^2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{4A^2 H}{C^3 r^3}(\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3) - \xi^2.$$

Da auch r eine Integrationsconstante ist, so haben wir im Ganzen bis jetzt 4 Integrationsconstanten: r, c_1, c_2, c_2, zwischen denen die Relation (97) besteht; wir wollen c_1, c_2, c_3 als die unabhängigen Grössen betrachten und r durch diese ausdrücken:

$$(98) \qquad r = \frac{A}{C}(c_2 - c_1)$$

Wir erhalten dann für ξ folgende Diffgl.

$$(99) \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = -(c_2 - c_1)^2 \xi^2 + \frac{4H}{A(c_2 - c_1)}(\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3) = R(\xi)$$

ξ ist also eine elliptische Function 2ten Grades von t; alle übrigen gesuchten Grössen sind bereits durch ξ ausgedrückt. Unsere nächste Aufgabe ist daher die Natur der Function

ξ näher zu untersuchen.

Wir setzen zunächst voraus, es sei $k > 0$, also auch $c_2 - c_1 > 0$; neberdiess soll $H > 0$ sein, was stets durch passende Wahl der positiven z_1-Axe erreicht werden kann.

Die drei Wurzeln von $R(\xi)$ sind reell. Beweis: Für $\xi = c_1$ und $\xi = c_2$ ist $R(\xi) < 0$. Ist ξ_0 irgend ein Wert, den ξ während der Bewegung wirklich annimmt, so muss $R(\xi_0) > 0$ sein. Aus (96) folgt dann dass

$$\frac{\xi_0 - c_1}{c_2 - c_1} > 0 \quad ; \quad \text{also} \quad \xi_0 > c_1$$

$$\frac{\xi_0 - c_2}{c_2 - c_1} < 0 \quad ; \quad \text{also} \quad \xi_0 < c_2$$

also

$$c_1 < \xi_0 < c_2 .$$

Zwischen c_1 und c_2 gibt es also jedenfalls Werte von ξ, für die $R(\xi) > 0$. Also müssen zwischen c_1 und c_2 zwei

Wurzeln von $R(\xi)$ liegen. Da somit 2 Wurzeln reell sind, so muss auch die 3te reell sein. Da $R(c_2) < 0$ und $R(c_3) < 0$ dagegen $R(+\infty) > 0$, so muss diese 3te Wurzel $> c_2, c_3$ sein. Bezeichnen wir daher die 3 Wurzeln von $R(\xi)$ mit g_3, g_2, g_1, so dass:

$$g_3 < g_2 < g_1,$$

so ist

$$c_1 < g_3 < \xi_0 < g_2 < c_2, c_3 < g_1.$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\xi}$ das particuläre Integral $\varphi(u, a_3)$ von (99) welches für $\tau = 0$ den Wert g_3 annimmt, so ist (§23):

$$\wp(t) - e_3 = \frac{1}{4}\,\frac{R'(g_3)}{\bar{\xi} - g_3}.$$

Das allgemeine Integral von (99) ist also:

$$\xi = g_3 + \frac{1}{4}\,\frac{R'(g_3)}{\wp(t-t_0)-e_3} \tag{100}$$

wo t_0 eine Integrationsconstante ist, die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist und die jedenfalls reell ist; da ξ von g_3 bis g_2 wächst wenn $t-t_0$ von 0 bis ω_1 wächst.

Den Werten g_3, g_2, g_1, ∞ von ξ entsprechen die Werte ∞, e_1, e_2, e_3 von $\underline{\underline{u}}$; daraus erhält man, da

$$R'(g_3) = \frac{4H}{A(c_2-c_1)}(g_2-g_3)(g_1-g_3):$$

$$\left\{\begin{aligned} e_1-e_3 &= \frac{H(g_1-g_3)}{A(c_2-c_1)} \\ e_2-e_3 &= \frac{H(g_2-g_3)}{A(c_2-c_1)} \\ e_1-e_2 &= \frac{H(g_1-g_2)}{A(c_2-c_1)} \end{aligned}\right. \tag{101}$$

Wir haben jetzt die Grössen $\lambda+\mu i$, $\nu+\rho i$, $p+qi$ durch t auszudrücken.

Wenn man in (92_b) ξ_1, $\lambda^2+\mu^2$, $\nu^2+\varrho^2$, p^2+q^2 durch ξ ausdrückt, so erhält man:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = \frac{C-A}{2C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\xi}{dt} + c_1(c_2-c_1)i}{\xi - c_1}$$

$$(102)\quad \frac{d\log(\nu+\varrho i)}{dt} = -\frac{C-A}{2C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\xi}{dt} - c_2(c_2-c_1)i}{\xi - c_2}$$

$$\frac{d\log(p+qi)}{dt} = \frac{C-2A}{2C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\xi}{dt} - c_3(c_2-c_1)i}{\xi - c_3}$$

Wir setzen jetzt:

$$t - t_0 = u$$

$$\xi = \varphi(u)$$

Es sei nun:

$$\varphi(u_1) = c_1\,,\quad \varphi(u_2) = c_2\,,\quad \varphi(u_3) = c_3$$

Dann ist

$$(\varphi'(u_1))^2 = -c_1^2(c_2-c_1)^2$$

also

$$\varphi'(u_1) = \pm\, i\, c_1(c_2-c_1)$$

Es soll nun diejenige der beiden incongruenten Wurzeln der Gleichung $\varphi(u_1) = c_1$ für die

$$\varphi'(u_1) = +\, i\, c_1(c_2-c_1)$$

ebenso

$$\varphi'(u_2) = -\,i c_2 (c_2 - c_1)$$

$$\varphi'(u_3) = -\,i c_3 (c_2 - c_1)$$

Die Gleichungen (102) werden demnach:

$$\frac{d\log(\lambda + \mu i)}{dt} = \frac{(C-A)(c_2-c_1)i}{2C} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_1}{\varphi u - \varphi u_1}$$

$$(102_a)\quad \frac{d\log(\nu + \rho i)}{dt} = -\frac{(C-A)(c_2-c_1)i}{2C} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_2}{\varphi u - \varphi u_2}$$

$$\frac{d\log(p + q i)}{dt} = \frac{(C-2A)(c_2-c_1)i}{2C} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_3}{\varphi u - \varphi u_3}$$

Jetzt wenden wir § 26, 6 an; φu wird ∞ für $u = -\omega_3$, also ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_1}{\varphi u - \varphi u_1} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_3) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+\omega_3)$$

$$(102_b)\quad \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_2}{\varphi u - \varphi u_2} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_3) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_2+\omega_3)$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' u_3}{\varphi u - \varphi u_3} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_3) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_3) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_3+\omega_3)$$

Wir haben jetzt zu entscheiden in welchen Intervallen u_1, u_2, u_3 liegen.

Durchläuft u den Umfang des Rechtecks, $0 \ldots \omega_1$, $\omega_1 \ldots \omega_2$, $\omega_2 \ldots \omega_3$, $\omega_3 \ldots 0$, so wächst $\varphi(u)$ von

$$g_3 \cdots g_2,\quad g_2 \cdots g_1,\quad g_1 \cdots +\infty,\ -\infty \cdots g_3.$$

Nun liegt c_1 in dem Intervalle:

$-\infty \cdots g_3$, also:

$$u_1 = w_1 i \quad (w_1 \text{ reell})$$

c_2 und c_3 liegen in dem Intervalle

$g_2 \cdots g_1$, also:

$$u_2 = \omega_1 + w_2 i$$

$$u_3 = \omega_1 + w_3 i.$$

w_1, w_2, w_3 sind reell und liegen zwischen $-\frac{\omega_3}{i}$ und $+\frac{\omega_3}{i}$; um zu entscheiden ob sie $\gtrless 0$, müssten die Vorzeichen von c_1, c_2, c_3 bekannt sein.

Wir setzen diese Werte in (102_b) ein und benutzen die Formel Art. 19:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm \omega_\lambda) = \pm \eta_\lambda + \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u)$$

Führt man die Integration aus, so erhält man:

$$\lambda + \mu i = K_1 \frac{\sigma(t-t_0-w_1 i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{\mathcal{L}_1 i (t-t_0)}$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{(C-A)(c_2-c_1)}{2C} + \frac{1}{i} \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w_1 i)$$

$$\nu + \rho i = K_2 \frac{\sigma_1(t-t_0-w_2 i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{\mathcal{L}_2 i (t-t_0)}$$

(103)

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{(C-A)(c_2-c_1)}{2C} + \frac{1}{i} \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_2 i)$$

$$p + q i = K_3 \frac{\sigma_1(t-t_0-w_3 i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{\mathcal{L}_3 i (t-t_0)}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{(C-2A)(c_2-c_1)}{2C} + \frac{1}{i} \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w_3 i)$$

wo K_1, K_2, K_3 Integrationsconstante sind.

Es ist bemerkenswerth, dass zwischen den 3 Grössen w_1, w_2, w_3 und ebenso zwischen $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ eine Relation besteht, so dass es genügt, je zwei derselben zu berechnen. Führt man nämlich in (102_a) die Integration aus, ehe man die σ_λ einführt, und bildet dann:

$$\xi + i\xi_1 = (p - qi)(\nu - \rho i)(\lambda + \mu i),$$

so hat $\xi + i\xi_1$ die Form:

$$K \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\,\sigma(u-a_3)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\,\sigma(u-b_3)}\, e^{gu}.$$

$\xi + i\xi_1$ hat aber die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$. Es muss also sein

$$\Sigma a_\nu - b_\nu = 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$$

$$g = -(2m\eta_1 + 2m'\eta_3)$$

was eine Relation zwischen $w_1\, w_2\, w_3$ und eine zwischen $L_1\, L_2\, L_3$ liefert.

Die Constanten $K_1\, K_2\, K_3$ bestimmen sich am einfachsten wenn für $t = t_0$ die Werte $\lambda_0\, \mu_0\, \nu_0\, \rho_0\, p_0\, q_0$ der Grössen $\lambda\, \mu\, \nu\, \rho\, p\, q$ gegeben sind. Diese Werte $\lambda_0\, \mu_0 \dots$ dürfen nicht ganz willkührlich angenommen werden; für $t = t_0$ wird $\xi = g_3$, also:

$$\lambda_0^2 + \mu_0^2 = \frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}, \quad \nu_0^2 + \rho_0^2 = \frac{c_2 - g_3}{c_2 - c_1}.$$

also muss sein

$$\lambda_0 + \mu_0 i = \sqrt{\frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}}\, e^{i\theta}, \text{ wo } \theta \text{ reell.}$$

$$\nu_0 + \rho_0 i = \sqrt{\frac{c_2 - g_3}{c_2 - c_1}}\, e^{i\theta'}.$$

Endlich ist:

$$(\lambda_0^2+\mu_0^2)(\nu_0^2+\rho_0^2)(p_0^2+q_0^2) = g_3^2$$

da $$(\xi)_{t_0} = g_3 \,, \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t_0} = 0 \,.$$

Somit ist auch $(p_0^2+q_0^2)$ vorgeschrieben.

Endlich lassen sich die Grössen $\sqrt{\frac{g_3-c_1}{c_2-c_1}}$, etc. durch σ-Functionen mit den Argumenten w_1, w_2, w_3 ausdrücken.

Der Fall: $r<0$ wird ganz analog behandelt.

52

7

27 5 10

124 5-8

136