Archimedes' Werke

Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben
und mit einer Einleitung versehen

von

Sir Thomas L. Heath

K. C. B., Sc. D., F. R. S.

Deutsch von

Dr. Fritz Kliem

Berlin
Verlag von O. Häring
1914

Aus der Vorrede zur englischen Ausgabe.

Dieses Buch soll ein Seitenstück zu meiner kürzlich veröffentlichten Ausgabe von Apollonius' Abhandlung über Kegelschnitte bilden. Wenn es der Mühe wert gewesen ist, das Werk des „großen Geometers" denjenigen unter den heutigen Mathematikern zugänglich zu machen zu suchen, die wegen seiner Länge oder Form nicht imstande sind, es im griechischen Original oder in einer lateinischen Übersetzung zu lesen, oder, wenn sie es gelesen haben, es zu beherrschen und das ganze System der Abhandlung zu begreifen, so meine ich noch weniger einer Rechtfertigung zu bedürfen, wenn ich eine gleichartige Wiederherstellung der erhaltenen Werke vielleicht des größten mathematischen Genies, das die Welt jemals gesehen hat, der Öffentlichkeit übergebe.

Michel Chasles hat einen lehrreichen Unterschied zwischen den vorherrschenden Zügen der Geometrie des Archimedes und der Geometrie hervorgehoben, die wir bei Apollonius so hoch entwickelt finden. Ihre Werke können, sagt Chasles, als Ursprung und Grundlage der beiden großen Fragen aufgefaßt werden, die das Gebiet der Geometrie gleichsam unter sich teilen. Apollonius beschäftigt sich mit der *Geometrie der Formen und der Lagen*, während wir bei Archimedes die *Geometrie der Maße* finden, die von der Quadratur krummliniger ebener Figuren und von der Quadratur und Kubatur krummer Flächen handelt, Fragen, „welche die von Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz und Newton geschaffene und allmählich vervollkommnete Rechnung des Unendlichen zur Welt gebracht haben."

Aber mag man in Archimedes den Mann sehen, dem es trotz der Beschränktheit der ihm zur Verfügung stehenden Mittel gelungen ist, wirkliche *Integrationen* auszuführen zum Zwecke der Auffindung der Fläche eines Parabelsegments und einer Spirale, der Oberfläche und des Rauminhalts einer Kugel und eines Kugelsegments und des Rauminhalts beliebiger Segmente der Umdrehungskörper zweiten Grades, oder mag man ihm zusehen bei der Auffindung des Schwerpunkts eines Parabelsegments, bei der Berechnung arithmetischer Näherungswerte für π, bei der Aufstellung eines Systems, durch das sich in Worten jede Zahl ausdrücken läßt bis zu der, die wir mit einer 1 und 80000 Billionen Nullen schreiben würden, oder bei der Begründung der gesamten Hydrostatik, die er zugleich so weit fördert, daß er eine höchst vollständige Untersuchung der Ruhelagen und der Stabilität eines in einer Flüssigkeit schwimmenden rechtwinklig abgeschnittenen Segments eines Rotationshyperboloids anstellen kann, — immer wird der erstaunlich weitgehende Umfang der Gegenstände und ihre meisterhafte Behandlung den verständnisvollen Leser hinreißen. Und wenn diese Dinge imstande sind, beim Studium des Archimedes wahre Begeisterung zu wecken, so sind Stil und Methode nicht minder unwiderstehlich anziehend. Ein Zug, der vielleicht auf den Mathematiker, der an die durch die Allgemeinheit der modernen Methoden gesicherte Schnelligkeit und Unmittelbarkeit gewöhnt ist, den tiefsten Eindruck machen wird, ist die *Deliberation*, durch die Archimedes an die Lösung irgendeines seiner Hauptprobleme herankommt. Dieser wichtige Charakterzug mit seinen Nebenwirkungen ist um so mehr geeignet, Bewunderung zu erregen, als die Methode an die Taktik eines großen Feldherrn erinnert, der alles voraussieht, alles ausschaltet, was nicht unmittelbar zur Ausführung seines Planes dient, jeden Teil seiner Stellung beherrscht, und dann plötzlich — wenn die wirkliche Ausführung des Planes in den Augen des Zuschauers sein schließliches Ziel bereits verdunkelt hat — den entscheidenden Streich führt. So lesen wir bei Archimedes Satz auf Satz, dessen Tragweite nicht unmittelbar ersichtlich ist, den wir aber später unfehlbar benutzt finden; und wir werden über so leicht ersteigbare Stufen geleitet, daß die Schwierigkeit der ursprünglichen Aufgabe, die sie am Anfang bietet, kaum richtig gewertet wird. Wie Plutarch sagt, ist es „nicht möglich, in der Geometrie schwierigere und mühsamere Fragen oder einfachere und klarere Erläuterungen zu finden“. Aber es ist sicher eine rhetorische Übertreibung, wenn Plutarch fortfährt, durch die Leichtigkeit der aufeinanderfolgenden Schritte würden wir zu dem Glauben verleitet, daß jeder sie hätte selbst finden können. Im Gegenteil, die künstliche Einfachheit und die vollendete Geschlossenheit der Abhandlungen enthalten zugleich etwas Geheimnisvolles. Obwohl jeder Schritt auf dem vorangehenden beruht, werden wir im Dunkel darüber gelassen, wie Archimedes zu ihnen gekommen ist. Es liegt in der Tat viel Wahres in einer Bemerkung Wallis', des

Inhalts, er habe anscheinend „mit voller Absicht die Wege seiner Untersuchung gleichsam verdeckt, als ob er der Nachwelt das Geheimnis seiner Forschungsmethode mißgönnt hätte, während er sie zur Anerkennung seiner Ergebnisse zu zwingen wünschte“. Wallis fügt mit gleichem Rechte hinzu, nicht nur Archimedes, sondern fast alle Alten hätten ihre Analysis-Methode (und daß sie eine solche besaßen, ist gewiß) so vor der Nachwelt verborgen, daß mancher moderne Mathematiker es für leichter halten würde, eine neue Analysis zu finden, als die alte sich herauszusuchen. Das ist zweifellos der Grund, weshalb Archimedes und die anderen griechischen Geometer während des gegenwärtigen Jahrhunderts so wenig Beachtung gefunden haben, und weshalb man Archimedes größtenteils nur unbestimmt als Erfinder einer Schraube kennt, während selbst Mathematiker kaum mehr von ihm wissen, als daß er das nach ihm benannte hydrostatische Prinzip entdeckt hat. Erst seit neuerer Zeit besitzen wir eine befriedigende Ausgabe des griechischen Textes, die von Heiberg (1880/81, 2. Aufl. Bd. I 1910, Bd. II 1913), und ich kenne keine vollständige Übersetzung außer der deutschen von Nizze (1824), die jetzt vergriffen und so selten ist, daß ich Schwierigkeiten hatte, mir ein Exemplar zu verschaffen.

Der Plan dieses Werkes ist derselbe wie der, den ich bei der Herausgabe der *Kegelschnitte* des Apollonius verfolgt habe. In diesem Falle sind jedoch Zusammenziehungen weniger nötig und auch weniger empfehlenswert und es ist möglich gewesen, die Numerierung der Sätze beizubehalten und sie in einer Form auszusprechen, die sich näher an die ursprüngliche anschließt, ohne ihren Sinn dadurch zu verdunkeln. Überdies ist der Inhalt nicht so kompliziert, daß er absolute Gleichförmigkeit der angewandten Bezeichnungen erforderte (das einzige Mittel, wodurch sich Apollonius leidlich lesbar machen läßt); trotzdem habe ich, so weitgehend wie möglich, Gleichförmigkeit zu erzielen versucht. Mein Hauptziel war, eine durchaus zuverlässige Reproduktion der Abhandlungen zu bieten, so wie sie uns erhalten sind, ohne etwas hinzuzufügen oder etwas Wesentliches oder Wichtiges fortzulassen. Die Anmerkungen haben zum größten Teil den Zweck, Licht über gewisse Stellen des Textes zu verbreiten oder Beweise von Sätzen zu ergänzen, die von Archimedes als bekannt angenommen werden; bisweilen habe ich es für richtig gehalten, hinter gewissen Sätzen in eckigen Klammern und in gleichem Druck Anmerkungen einzufügen, die genau die Bedeutung dieser Sätze zum Ausdruck bringen sollen, in solchen Fällen nämlich, wo die Unterbringung dieser Anmerkungen in der Einleitung oder am Fuße der Seite Veranlassung hätte geben können, sie zu übersehen.

Ein großer Teil der Einleitung ist, wie man sehen wird, historisch; das übrige ist teils dazu bestimmt, über gewisse von Archimedes angewandte Methoden und ihre mathematische Bedeutung einen allgemeineren Überblick zu geben, als es in Anmerkungen zu den einzelnen Sätzen möglich wäre, teils zur Erörterung gewisser aus dem Inhalt sich ergebender Fragen, über die wir keine positiven historischen Angaben besitzen, die uns Aufklärung geben könnten. In den letztgenannten Fällen, wo es nötig ist, zum Zwecke der Aufklärung dunkler Punkte Hypothesen aufzustellen, habe ich Sorge getragen, ihren spekulativen Charakter hervorzuheben; ich habe jedoch auch die historische Evidenz angegeben, wo diese zum Beweise einer besonderen Hypothese herangezogen werden kann, da es meine Absicht war, den authentischen Bericht, den wir besitzen, und die Schlüsse, die aus ihm gezogen worden sind oder gezogen werden können, nebeneinanderzustellen, damit der Leser imstande sei, selbst zu entscheiden, wie weit er diese Schlüsse als einleuchtend anerkennen kann. Vielleicht bedarf die Länge des Kapitels über die sog. *νεύσεις* oder *inclinationes* einer Rechtfertigung, da es ein wenig über das zur Erklärung des Archimedes Notwendige hinausgeht; aber der Gegenstand ist interessant, und ich hielt es für gut, meinen Bericht darüber so erschöpfend wie möglich zu gestalten, um meinen Studien über Apollonius und Archimedes eine gewisse Abrundung zu geben.

März 1897.

T. L. Heath.

Vorwort zur deutschen Ausgabe.

Die Entdeckung der Konstantinopeler Archimedes-Handschrift durch Heiberg (1906) hat in dieser deutschen Ausgabe des Werkes von Sir T. L. Heath mehrere Zusätze und Änderungen notwendig gemacht. Das wichtigste Werk, das diese Handschrift enthält, ist die *Methode*, die einzige Abhandlung, die uns einen Blick in die Geisteswerkstatt des großen griechischen Mathematikers gestattet; denn während wir in allen anderen Schriften nur die fertigen *Beweise* lesen, zeigt uns hier Archimedes selbst den Weg, auf dem er einen Teil seiner Ergebnisse *gefunden* hat. Diese wertvolle Schrift ist von Sir T. Heath 1912 als Supplement zu seiner Ausgabe englisch herausgegeben und in die vorliegende Übersetzung eingefügt worden. Ferner sind die in der Konstantinopeler Handschrift enthaltenen Bruchstücke des *Stomachion* aufgenommen worden. Die auf Grund des genannten Fundes und der soeben erscheinenden zweiten Auflage von Heibergs Textausgabe notwendig gewordenen Änderungen in der Einleitung hat Sir T. Heath selbst vorgenommen.

Für sein liebenswürdiges Entgegenkommen und seine stets bereitwillige Unterstützung bei der Übersetzungsarbeit und der Revision der Korrekturbogen fühle ich mich Sir T. Heath zu aufrichtigstem Danke verpflichtet. Dank weiß ich auch meinem hochverehrten früheren Lehrer Herrn Geh. Regierungsrat Professor Dr. Sturm in Breslau für sein Interesse an meiner Arbeit und manchen sachkundigen Ratschlag; ihm verdanke ich u. a. den zweiten Beweis in der Fußnote zu Satz 34 des ersten Buches *Über Kugel und Zylinder* (S. 189).

Beim Lesen der Korrekturbogen haben mich der Herr Verleger und Herr stud. phil. Schicht in Berlin in dankenswerter Weise unterstützt.

Breslau, August 1913.

Dr. Fritz Kliem.

Verzeichnis der wichtigsten benutzten Werke.

Joseph Torelli, *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis.* (Oxford, 1792.)

Ernst Nizze, *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet.* (Stralsund, 1824.)

J. L. Heiberg, *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.* (Leipzig, 1880—1; 2te Aufl, Bd. I 1910, Bd. II 1913.)

J. L. Heiberg, *Quaestiones Archimedeae.* (Kopenhagen, 1879.)

F. Hultsch, Artikel *Archimedes* in Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaften.* (II. 1, 1895, SS. 507 bis 539.)

C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* (Leipzig, 1870.)

M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Bd. I, 3te Auflage. (Leipzig, 1907.)

G. Friedlein, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii.* (Leipzig, 1873.)

James Gow, *A short history of Greek Mathematics.* (Cambridge, 1884.)

Siegmund Günther, *Abriß der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum* in Iwan von Müllers *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft,* V, 1.

Hermann Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter.* (Leipzig, 1874.)

J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid.* (Leipzig, 1882.)

J. L. Heiberg, *Euclidis elementa.* (Leipzig, 1883—8.)

F. Hultsch, Artikel *Arithmetica* in Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie,* II. 1, SS. 1066—1116.

F. Hultsch, *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae.* (Berlin, 1864.)

F. Hultsch, *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt.* (Berlin, 1876—8.)

Gino Loria, *Il periodo aureo della geometria greca.* (Modena, 1895.)

Maximilien Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques,* Tome I. (Paris, 1883.)

J. H. T. Müller, *Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker.* (Leipzig, 1860.)

G. H. F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen.* (Berlin, 1842.)

F. Susemihl, *Geschichte der griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit,* Bd. I. (Leipzig, 1891.)

P. Tannery, *La Géométrie grecque*, Première partie, *Histoire générale de la Géométrie élémentaire.* (Paris, 1887.)

H. G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* (Kopenhagen, 1886.)

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.* (Kopenhagen, 1896.)

Inhalt.

Einleitung.

Seite

Kapitel I. Archimedes 1

Kapitel II. Handschriften und wichtigste Ausgaben. — Reihenfolge der Abfassung. — Dialekt. — Verlorene Werke 9

Kapitel III. Archimedes' Beziehungen zu seinen Vorgängern 29
- § 1. Benutzung der überlieferten geometrischen Methoden . . . 30
- § 2. Frühere Entdeckungen, Quadraturen und Kubaturen betreffend 38
- § 3. Kegelschnitte 42
- § 4. Oberflächen zweiten Grades 44
- § 5. Zwei mittlere Proportionalen in stetiger Proportion 57

Kapitel IV. Arithmetik bei Archimedes 59
- § 1. Das griechische Zahlensystem 60
- § 2. Addition und Subtraktion 62
- § 3. Multiplikation 63
- § 4. Division 64
- § 5. Ausziehung der Quadratwurzel 66
- § 6. Die ältesten Untersuchungen über unmeßbare oder inkommensurable Größen 69
- § 7. Archimedes' Näherungswerte für $\sqrt{3}$ 72
- § 8. Näherungswerte für die Quadratwurzeln aus großen Zahlen . 76
  - Anmerkung über andere Hypothesen hinsichtlich der Näherungswerte für $\sqrt{3}$ 82

Kapitel V. Über die als *ΝΕΥΣΕΙΣ* bekannten Probleme 94
- § 1. *Νεύσεις*, auf die Archimedes Bezug nimmt 94
- § 2. Mechanische Konstruktionen: die *Konchoide* des Nikomedes . 99
- § 3. Pappus' Lösung der in den Sätzen 8, 9 *Über Spiralen* benutzten *νεῦσις* 102
- § 4. Die Aufgabe der zwei mittleren Proportionalen 104
- § 5. Die Dreiteilung eines Winkels 105
- § 6. Über gewisse *ebene νεύσεις* 108

Kapitel VI. Kubische Gleichungen 117

Kapitel VII. Antizipationen der Integralrechnung bei Archimedes . . 137

Archimedes' Werke.

	Seite
Über Kugel und Zylinder, Buch I	155
" " " " , Buch II	201
Die Kreismessung	231
Über Konoide und Sphäroide	238
Über Spiralen	283
Über das Gleichgewicht von Ebenen, Buch I	315
" " " " " , Buch II	327
Die Sandrechnung	343
Quadratur der Parabel	354
Über schwimmende Körper, Buch I	371
" " " , Buch II	380
Archimedes' Methode, mechanische Sätze behandelnd — an Eratosthenes	413
Stomachion (Fragmente)	451
Buch der Hilfssätze	456
Die Rinder-Aufgabe	471

Einleitung.

Kapitel I.

Archimedes.

Eine Lebensbeschreibung des Archimedes ist von einem gewissen Herakleides[1]) verfaßt worden, aber diese Biographie ist nicht erhalten, und soweit Einzelheiten bekannt sind, sind sie aus vielen verschiedenen Quellen zusammenzusuchen.[2]) Nach Tzetzes[3]) starb er im Alter von 75 Jahren, und da er bei der Zerstörung von Syrakus (212 v. Chr.) umkam, so folgt, daß er etwa um das Jahr 287 v. Chr. geboren ist. Er war der Sohn Phidias', des Astronomen[4]), und stand in nahen, wenn nicht verwandtschaft-

---

[1]) Eutocius erwähnt dieses Werk in seinem Kommentar zu Archimedes' *Kreismessung*, *ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ*. Er spielt wieder darauf an in seinem Kommentar zu Apollonius' *Kegelschnitten* (ed. Heiberg. Band II, S. 168), wo jedoch fälschlich der Name *Ἡράκλειος* angegeben ist. Dieser Herakleides ist vielleicht derselbe wie der, den Archimedes selbst in der Vorrede zu seinem Buche *Über Spiralen* erwähnt.

[2]) Eine erschöpfende Materialsammlung bieten Heibergs *Quaestiones Archimedeae* (1879). Die Vorrede zu Torellis Ausgabe gibt auch die Hauptpunkte, und dasselbe Werk (SS. 363—370) zitiert wörtlich die meisten der Original-Hinweise auf die mechanischen Erfindungen des Archimedes. Ferner gibt der Artikel *Archimedes* (von Hultsch) in Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft* einen ganz hervorragenden Überblick über alle wertvollen Nachrichten. Vgl. auch Susemihls *Geschichte der griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit*, I. SS. 723—733.

[3]) Tzetzes, *Chiliades Historiarum* (ed. Kiessling, Leipzig, 1826) II. 35, 105.

[4]) Phidias wird von Archimedes in der *Sandrechnung* erwähnt, *τῶν προτέρων ἀστρολόγων Εὐδόξου .... Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς* (die letzten Worte sind die Verbesserung von Blass für *τοῦ Ἀκούπατρος*, die Lesart des Textes). Vgl. Codex Clarkianus 12 der Bodleiana (Oxford), Scholia Clarkiana in Gregor. Nazianz. Oratio 34 (S. 555a ed. Morel.), *Φειδίας τὸ μὲν γένος ἦν Συρακόσιος ἀστρολόγος ὁ τοῦ Ἀρχιμήδους πατήρ*, eine Stelle, auf die R. Förster (*Jahrbücher für classische Philologie*, 1886, S. 678) aufmerksam gemacht hat.

lichen Beziehungen zu König Hieron und seinem Sohne Gelon. Wie aus einer Stelle bei Diodor[1]) hervorgeht, brachte er längere Zeit in Alexandria zu, wo er vermutlich bei Euklids Nachfolgern studierte. In Alexandria mag er mit Conon von Samos (der bei ihm als Mathematiker und persönlicher Freund in höchster Achtung stand) und Eratosthenes bekanntgeworden sein. Conon pflegte er seine Entdeckungen vor ihrer Veröffentlichung mitzuteilen, und an Eratosthenes ist die berühmte Rinder-Aufgabe adressiert. Ein anderer Freund, dem er mehrere seiner Werke gewidmet hat, war Dositheus von Pelusium, ein Schüler Conons, obwohl er sich vermutlich erst später als Archimedes in Alexandria aufhielt.

Nach seiner Rückkehr nach Syrakus weihte er sein Leben gänzlich der mathematischen Forschung. Gelegentlich machte er sich durch eine Menge von geistreichen mechanischen Erfindungen berühmt. Diese Dinge waren jedoch nur „geometrische Spielereien“[2]), und er legte ihnen keinen Wert bei. „Er besaß“, wie Plutarch[3]) schreibt, „einen so hohen Geist, eine so tiefe Seele und einen solchen Schatz wissenschaftlicher Kenntnisse, daß er über die Erfindungen, die ihm den Ruf übermenschlichen Scharfsinns erworben hatten, doch nicht das geringste schriftlich hinterlassen wollte, sondern, da er das Geschäft der Handwerker und jede Art Kunst, die auf Nutzen und Vorteil gerichtet ist, als unedel und schmutzig ansah, seinen ganzen Ehrgeiz in solche Untersuchungen setzte, deren Schönheit und Feinheit von jeder Vermischung mit den gemeinen Nöten des Lebens frei sind.“ Tatsächlich schrieb er nur ein solches mechanisches Buch *Über die Herstellung einer Kugel*[4]), von dem später noch die Rede sein wird.

Einige seiner mechanischen Erfindungen wurden während der Belagerung von Syrakus mit großem Erfolge gegen die Römer

---

[1]) Diodor V. 37, 3, *οὓς [τοὺς κοχλίας] Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος εὗρεν, ὅτε παρέβαλεν εἰς Αἴγυπτον.*

[2]) Plutarch, *Marcellus*, 14.

[3]) *Ebenda*, 17.

[4]) Pappus VIII. S. 1026 (ed. Hultsch). *Κάρπος δὲ πού φησιν ὁ Ἀντιοχεὺς Ἀρχιμήδη τὸν Συρακόσιον ἓν μόνον βιβλίον συντεταχέναι μηχανικὸν τὸ κατὰ τὴν σφαιροποιΐαν, τῶν δὲ ἄλλων οὐδὲν ἠξιωκέναι συντάξαι. καίτοι παρὰ τοῖς πολλοῖς ἐπὶ μηχανικῇ δοξασθεὶς καὶ μεγαλοφυής τις γενόμενος ὁ θαυμαστὸς ἐκεῖνος, ὥστε διαμεῖναι παρὰ πᾶσιν ἀνθρώποις ὑπερβαλλόντως ὑμνούμενος, τῶν τε προηγουμένων γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς ἐχομένων θεωρίας τὰ βραχύτατα δοκοῦντα εἶναι σπουδαίως συνέγραφεν· ὃς φαίνεται τὰς εἰρημένας ἐπιστήμας οὕτως ἀγαπήσας ὡς μηδὲν ἔξωθεν ὑπομένειν αὐταῖς ἐπεισάγειν.*

angewendet. So erfand er Katapulte, deren geistreiche Konstruktion es ermöglichte, sie für lange oder kurze Schußweiten zu verwenden, ferner Maschinen, die durch Löcher in den Mauern Schauer von Wurfgeschossen schleuderten. Andere bestanden aus langen beweglichen Pfählen, die, über die Mauern hinausragend, entweder schwere Gewichte auf die feindlichen Schiffe fallen ließen oder mit eisernen Zangen, die wie Hände oder Kranichschnäbel aussahen, die Vorderteile der Schiffe packten, dann in die Luft hoben und wieder fallen ließen.[1]) Marcellus soll seine Ingenieure und Handwerker verhöhnt haben mit den Worten „Sollen wir es nicht aufgeben, gegen diesen geometrischen Briareus zu kämpfen, der gemächlich am Meere sitzt, unsere Schiffe zu unserem Entsetzen spielend umherwirft und mit der Menge von Wurfgeschossen, die er auf uns schleudert, die hundertarmigen Riesen der Mythologie übertrifft?“[2]) Aber die Ermahnung hatte keinen Erfolg, denn die Römer hatten so erbärmliche Angst, „daß sie, sobald nur ein Stück Seil oder Holz über der Mauer auftauchte, schrieen ‚da ist es wieder‘, und behauptend, daß Archimedes eine Maschine gegen sie in Bewegung setze, kehrt machten und wegliefen. Daher nahm Marcellus von allen Kämpfen und Angriffen Abstand und setzte alle Hoffnung auf eine lange Belagerung.“[3])

Wenn wir recht berichtet sind, starb Archimedes, wie er gelebt hatte, in mathematische Betrachtung vertieft. Die Nachrichten über die genauen Umstände seines Todes weichen in Einzelheiten voneinander ab. So sagt Livius einfach, inmitten der wüsten Szenen, die sich nach der Einnahme von Syrakus abspielten, sei er bei der Betrachtung einiger Figuren, die er in den Sand gezeichnet hatte, gefunden und von einem Soldaten, der ihn nicht kannte, erschlagen worden.[4]) Plutarch gibt in dem folgenden Abschnitte mehrere Versionen. „Marcellus war am meisten von allen über den Tod des Archimedes bestürzt; denn das Schicksal wollte es, daß er an einer Figur eine Aufgabe

---

[1]) Polybius, *Hist.* VIII. 7—8; Livius XXIV. 34; Plutarch, *Marcellus*, 15—17.

[2]) Plutarch, *Marcellus*, 17.

[3]) *Ebenda.*

[4]) Livius XXV. 31. Cum multa irae, multa avaritiae foeda exempla ederentur, Archimedem memoriae proditum est in tanto tumultu, quantum pavor captae urbis in discursu diripientium militum ciere poterat, intentum formis, quas in pulvere descripserat, ab ignaro milite quis esset interfectum; aegre id Marcellum tulisse sepulturaeque curam habitam, et propinquis etiam inquisitis honori praesidioque nomen ac memoriam eius fuisse.

zu lösen bemüht war und Geist wie Augen auf seine Untersuchung gerichtet hatte, so daß er den Einfall der Römer und die Eroberung der Stadt nicht bemerkte. Als nun plötzlich ein Soldat zu ihm trat und ihm befahl, ihm zu Marcellus zu folgen, weigerte er sich, bis er eine Lösung für seine Aufgabe gefunden hätte; darüber geriet der Soldat so in Wut, daß er sein Schwert zog und ihn niederschlug. Andere sagen, der Römer sei mit gezogenem Schwerte auf ihn zu gerannt und habe ihn zu töten gedroht; als Archimedes ihn sah, habe er ihn dringend gebeten, ein wenig zu warten, damit er sein Problem nicht unfertig und ungelöst zu lassen brauche, aber der andere habe nicht darauf geachtet und ihn erschlagen. Noch eine dritte Nachricht gibt es, folgenden Inhalts: als er einige seiner mathematischen Instrumente zu Marcellus trug, Sonnenuhren, Kugeln und Winkel, die auf die scheinbare Größe der Sonne eingestellt waren, trafen ihn einige Soldaten und töteten ihn in der Meinung, daß er Gold in dem Gefäße trage."[1]) Am meisten ausgeschmückt unter allen Fassungen der Erzählung ist wohl diese: zu einem römischen Soldaten, der ihn töten will, sagt er, „Bursche, geh' weg von meiner Zeichnung", worüber der Mann so ergrimmt, daß er ihn niederschlägt.[2]) Der von Zonaras stammende Zusatz zu der Erzählung, wonach Archimedes gesagt haben soll *παρὰ κεφαλὰν καὶ μὴ παρὰ γραμμάν*, während offenbar Plutarchs zweite Fassung zugrunde liegt, ist vielleicht der am weitesten hergeholte von den Strichen, die spätere Hände in das Bild hineingemalt haben.

Archimedes soll seine Freunde und Verwandten gebeten haben, auf seinem Grabmal eine Darstellung eines Zylinders mit einer eingeschriebenen Kugel anzubringen und das Verhältnis des Zylinders zur Kugel[3]) als Inschrift hinzuzufügen; wir können daraus schließen, daß er selbst die Entdeckung dieses Verhältnisses [*Über Kugel und Zylinder*, I. 33, 34] als seine größte Errungenschaft ansah. Als Cicero als Quästor in Sizilien war, fand er das Grab in vernachlässigtem Zustande und ließ es wiederherstellen.[4])

Außer den oben angeführten Einzelheiten aus dem Leben des Archimedes ist uns nichts überliefert, ausgenommen eine Anzahl Anekdoten, die, wenn auch vielleicht nicht buchstäblich wahr, uns doch zu einer Vorstellung von der Persönlichkeit des originellsten

---

[1]) Plutarch, *Marcellus*, 19.

[2]) Tzetzes, *Chil.* II. 35, 135; Zonaras IX. 5.

[3]) Plutarch, *Marcellus*, 17 am Ende.

[4]) Cicero, *Tusculan.* V. 64f.

Mathematikers des Altertums verhelfen, die wir nicht gern verändert sehen möchten. Um uns beispielsweise zu zeigen, wie vollkommen er von seinen abstrakten Studien in Anspruch genommen war, wird uns erzählt, daß er alles, auch das Essen und dergleichen Lebensbedürfnisse vergaß, und daß er geometrische Figuren in die Asche des Feuers oder, wenn er sich salbte, in das Öl an seinem Körper zeichnete.[1]) Von derselben Art ist die folgende wohlbekannte Erzählung: als er im Bade die Lösung der ihm von Hieron vorgelegten Frage, ob eine angeblich aus reinem Golde gefertigte Krone nicht in Wirklichkeit einen gewissen Bestandteil Silber enthalte, gefunden hatte, lief er nackt durch die Straßen nach seinem Hause und rief erfreut *εὕρηκα, εὕρηκα.*[2])

Nach Pappus[3]) tat Archimedes den berühmten Ausspruch „Gib mir einen Platz, wo ich stehen kann, und ich bewege die Erde (*δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν*)“ im Zusammenhang mit der von ihm gefundenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Last durch eine gegebene Kraft zu bewegen. Plutarch schildert, wie er Hieron erklärt, daß jedes gegebene Gewicht durch eine gegebene Kraft bewegt werden könne, und im Vertrauen auf die Stärke seines Beweises sich rühmt, er würde, wenn ihm eine zweite Erde gegeben würde, hinübergehen und diese erste Erde bewegen. „Und als Hieron ihn befremdet bat, die Aufgabe wirklich auszuführen und ein Beispiel einer großen durch geringe Kraft bewegten Last zu geben, da ließ er sich ein dreimastiges Lastschiff aus dem Besitze des Königs zur Verfügung stellen, das von vielen Männern nur sehr mühsam ans Land gezogen werden konnte; dieses belud er mit starker Bemannung und voller Fracht, setzte sich dann weit weg und zog das Schiff ohne große Anstrengung glatt und sicher, als bewege es sich durch die See, über den Boden hin, indem er nur das Ende eines zusammengesetzten Flaschenzuges (*πολύσπαστος*) ruhig mit der Hand hielt und daran zog.“[4]) Nach Proclus hatte Hieron das Schiff bauen lassen und wollte es dem König Ptolemaeus schicken; als nun alle Syrakusaner mit vereinten Kräften nicht imstande waren, das Schiff vom Stapel laufen zu lassen, konstruierte Archimedes eine mechanische Vorrichtung, die Hieron befähigte, es mit eigener

---

1) Plutarch, *Marcellus*, 17.

2) Vitruv, *Architect.* IX. 3. Zur Erklärung der Art, wie Archimedes seine Aufgabe vermutlich gelöst hat, vgl. die Anmerkung zu Satz 7 der Abhandlung *Über schwimmende Körper* I. (S. 376f.)

3) Pappus VIII. S. 1060.

4) Plutarch, *Marcellus*, 14.

Hand zu bewegen, so daß letzterer erklärte, „von dem Tage an sei Archimedes in allem, was er sagen würde, Glauben zu schenken.“[1]) Wenn nun auch damit bestätigt ist, daß Archimedes eine mechanische Vorrichtung zur Bewegung eines großen Schiffes erfunden und so ein praktisches Beispiel für seine Behauptung gegeben hat, so ist doch nicht sicher, ob die benutzte Maschine nur ein Flaschenzug (*πολύσπαστος*) gewesen ist, wie Plutarch berichtet; denn Athenaeus[2]), der denselben Vorfall erzählt, sagt, daß eine *Schraube* verwendet worden sei. Es ist anzunehmen, daß sich dieser Ausdruck auf eine Maschine bezieht, die dem von Pappus beschriebenen *κοχλίας* ähnlich ist; dieser besteht aus einem Zahnrad mit schrägen Zähnen, das sich auf einer zylindrischen, mit einer Kurbel gedrehten Schraube bewegt.[3]) Pappus beschreibt ihn jedoch im Zusammenhang mit dem *βαρουλκός* Herons, und indem er sich ausdrücklich auf Heron als Autorität bezieht, macht er keinerlei Andeutung, daß Archimedes den *βαρουλκός* oder im besonderen den *κοχλίας* erfunden habe; andererseits wird der *πολύσπαστος* von Galen[4]) und der *τρίσπαστος* (dreifacher Flaschenzug) von Oribasius[5]) als Erfindung des Archimedes erwähnt; der *τρίσπαστος* hat seinen Namen, weil er drei Rollen (Vitruv) oder drei Seile (Oribasius) enthält. Trotzdem kann es wohl sein, daß das Schiff zwar, wenn es einmal sich zu bewegen begonnen hatte, durch den *τρίσπαστος* oder *πολύσπαστος* leicht in Bewegung erhalten werden konnte, daß aber Archimedes doch eine Vorrichtung ähnlich dem *κοχλίας* anwenden mußte, um den ersten Antrieb zu geben.

Noch ein anderes Instrument wird im Zusammenhange mit dem Ausspruche von der Bewegung der Erde genannt. Tzetzes' Fassung ist „Gib mir einen Platz, wo ich stehen kann (*πᾶ βῶ*), und ich will die ganze Erde mit einem *χαριστίων* bewegen“[6]); da

---

1) Proclus, *Kommentar zu Euklid* I. S. 63 (ed. Friedlein).

2) Athenaeus V. 207 a—b, *κατασκευάσας γὰρ ἕλικα τὸ τηλικοῦτον σκάφος εἰς τὴν θάλασσαν κατήγαγε· πρῶτος δ' Ἀρχιμήδης εὗρε τὴν τῆς ἕλικος κατασκευήν.* Dasselbe besagt die Feststellung des Eustathius *ad Il.* III. S. 114 (ed. Stallbaum) *λέγεται δὲ ἕλιξ καί τι μηχανῆς εἶδος, ὃ πρῶτος εὑρὼν ὁ Ἀρχιμήδης εὐδοκίμησέ, φασι, δι' αὐτοῦ.*

3) Pappus VIII. SS. 1066, 1108 f.

4) Galen, *in Hippocr. De artic.*, IV. 47 (= XVIII. S. 747, ed. Kühn).

5) Oribasius, *Coll. med.*, XLIX. 22 (IV. S. 407, ed. Bussemaker), *Ἀπελλίδους ἢ Ἀρχιμήδους τρίσπαστον*; an derselben Stelle wird gesagt, daß dieser *πρὸς τὰς τῶν πλοίων καθολκάς* erfunden worden sei.

6) Tzetzes, *Chil.* II. 130.

er aber an anderer Stelle[1]) das Wort *τρίσπαστος* gebraucht, kann man annehmen, daß die beiden Worte ein und dasselbe Ding bedeuten.[2])

Es wird sich empfehlen, an dieser Stelle auch die anderen mechanischen Erfindungen des Archimedes zu erwähnen. Die bekannteste ist die Wasserschraube[3]) (auch *κοχλίας* genannt), die er scheinbar in Ägypten zum Zwecke der Bewässerung von Feldern erfunden hat. Sie wurde auch benutzt, um Wasser aus Minen oder aus dem Kielraume von Schiffen zu pumpen.

Ferner konstruierte er eine Kugel, mittels welcher die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der 5 Planeten am Himmel nachgeahmt werden konnten. Cicero sah den Apparat mit eigenen Augen und beschreibt ihn[4]), indem er erzählt, daß er den Kreislauf des Mondes und die scheinbare Bewegung der Sonne mit solcher Genauigkeit darstellte, daß er sogar (während eines kurzen Zeitraums) die Finsternisse des Mondes und der Sonne zeigen könnte. Hultsch vermutet, daß er durch Wasser getrieben wurde.[5]) Wir wissen, wie oben erwähnt, von Pappus, daß Archimedes ein Buch über die Herstellung einer solchen Kugel geschrieben hat (*περὶ σφαιροποιΐας*), und Pappus spricht an einer Stelle von solchen, „die Kugeln herzustellen und ein Modell des Himmels mit Hilfe der regelmäßigen Kreisbewegung des Wassers anzufertigen verstehen“. In jedem Falle ist sicher, daß Archimedes sich viel mit Astronomie beschäftigt hat. Livius nennt ihn „unicus spectator caeli siderumque“. Hipparch sagt[6]): „Aus diesen Beobachtungen geht hervor, daß die Unterschiede in den Jahren nur ganz gering sind, aber was die Sonnenwenden anlangt, so glaube ich beinahe (*οὐκ ἀπελπίζω*), daß Archimedes und ich uns in den Beobachtungen

---

[1]) *Ebenda*, III. 61, *ὁ γῆν ἀνασπῶν μηχανῇ τῇ τρισπάστῳ βοῶν· ὅπα βῶ καὶ σαλεύσω τὴν χθόνα.*

[2]) Heiberg vergleicht Simplicius, *Comm. in Aristot. Phys.* (ed. Diels, S. 1110, 2), *ταύτῃ δε τῇ ἀναλογίᾳ τοῦ κινοῦντος καὶ τοῦ κινουμένου καὶ τοῦ διαστήματος τὸ σταθμιστικὸν ὄργανον τὸν καλούμενον χαριστίωνα συστήσας ὁ Ἀρχιμήδης ὡς μέχρι παντὸς τῆς ἀναλογίας προχωρούσης ἐκόμπασεν ἐκεῖνο τὸ πᾶ βῶ καὶ κινῶ τὰν γᾶν.*

[3]) Diodor I. 34, V. 37; Vitruv X. 16; Philo III. S. 330 (ed. Pfeiffer); Strabo XVII. S. 807; Athenäus V. 208f.

[4]) Cicero, *De republica*, I. 21—22; *Tusc.*, I. 63; *De nat. deorum*, II. 88. Vgl. Ovid, *Fasti*, VI. 277; Lactantius, *Instit.*, II. 5, 18; Martianus Capella, II. 212, VI. 583f.; Claudian, *Epigr.* 18; Sextus Empiricus, S. 416 (ed. Bekker).

[5]) *Zeitschrift f. Math. u. Physik (hist.-litt. Abtheilung)*, XXII. (1877), 106f.

[6]) Ptolemaeus, *σύνταξις*, I. S. 153.

und den daraus gezogenen Folgerungen um die Länge eines Vierteltages geirrt haben.“ Es ist daraus zu entnehmen, daß Archimedes die Frage nach der Länge des Jahres erörtert hat, wie auch Ammianus bestätigt.[1]) Macrobius sagt, er habe die Abstände der Planeten bestimmt.[2]) Archimedes selbst beschreibt in der *Sandrechnung* den Apparat, mit dem er den scheinbaren Durchmesser oder den Sehwinkel der Sonne gemessen hat.

Die Erzählung, daß er die römischen Schiffe durch ein System von Brenngläsern oder Hohlspiegeln in Brand gesteckt habe, findet sich bei keinem Gewährsmann vor Lucian.[3])

Wir hören von einem sog. *loculus Archimedius*, der eine Art Geduldspiel war, bestehend aus 14 Elfenbeinstücken, die in verschiedenen Formen aus einem Quadrat herausgeschnitten waren; die Aufgabe des Spiels war, die Stücke auf verschiedene Weisen so zusammenzusetzen, daß sie verschiedene Gegenstände (z. B. ein Schiff, einen Helm, ein Schwert usw.) darstellten. Man war früher der Ansicht, das Geduldspiel sei keine Erfindung des Archimedes, sondern der Name solle vielleicht nur zum Ausdruck bringen, daß es geschickt hergestellt war, ebenso wie *πρόβλημα Ἀρχιμήδειον* einfach zur sprichwörtlichen Bezeichnung für etwas sehr Schwieriges geworden war.[4]) Aber es hat sich jetzt doch als wirklich von Archimedes stammend herausgestellt, insofern als ein Fragment eines von Archimedes *Στομάχιον* (etwa „Neckspiel“ oder „Quälgeist“) genannten Werkes, enthalten in der von Heiberg ans Licht gebrachten Konstantinopeler Handschrift, den Beweis liefert, daß dieses Werk von dem fraglichen „Chinesischen Spiel“ handelt.[5])

---

[1]) Ammianus Marcell., XXVI. I. 8.

[2]) Macrobius, *in Somn. Scip.*, II. 3.

[3]) Dieselbe Erzählung wird von Proclus bei Zonaras XIV. 3 berichtet. Zu den anderen Stellen, die auf den Gegenstand Bezug haben, vgl. Heibergs *Quaestiones Archimedeae*, SS. 39—41.

[4]) Vgl. auch Tzetzes, *Chil.* XII. 270, *τῶν Ἀρχιμήδους μηχανῶν χρείαν ἔχω.*

[5]) Das Fragment enthält außer der Vorrede nur zwei kurze Sätze; doch ist ein anderer Satz aus demselben Werke, arabisch überliefert, von Suter in den *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* IX, 1899, S. 493 ff. veröffentlicht.

Kapitel II.

Handschriften und wichtigste Ausgaben — Reihenfolge der Abfassung — Dialekt — Verlorene Werke.

Die Textquellen und Übersetzungen sind von Heiberg in den Prolegomena zu Band III der ersten Auflage seines Archimedes sehr eingehend beschrieben, wo der Herausgeber das in seiner früheren Abhandlung *Quaestiones Archimedeae* (1879) über denselben Gegenstand Gesagte ergänzt und zum Teil verbessert. In der Vorrede zu Band I der zweiten Auflage (1910) erwähnt er kurz die von ihm bei der Vorbereitung dieser Ausgabe benutzten neuen Handschriften. Wir wollen uns zunächst mit den Handschriften beschäftigen, auf denen die erste Ausgabe beruht.

Die besten Handschriften haben alle ihren gemeinsamen Ursprung in einer Handschrift, die, soviel bekannt geworden ist, nicht mehr existiert. Diese ist in einer (später zu erwähnenden, zwischen 1499 und 1531 angefertigten) Abschrift als „älteste" (*παλαιοτάτου*) bezeichnet und ist allem Anscheine nach nicht später als im 9ten oder 10ten Jahrhundert geschrieben. Eine Zeitlang war sie im Besitze des Georg Valla, der in der Zeit zwischen 1486 und 1499 in Venedig lehrte; aus Übersetzungen von Teilen aus Archimedes und Eutocius, die von Valla angefertigt und in seinem Buche *de expetendis et fugiendis rebus* (Venedig, 1501) veröffentlicht sind, können wichtige Schlüsse über die Lesarten der Handschrift gezogen werden. Sie scheint sorgfältig aus einem Original abgeschrieben zu sein, das einen in Mathematik wohl bewanderten Besitzer hatte, und sie enthielt Figuren, die größtenteils mit viel Sorgfalt und Genauigkeit gezeichnet waren, aber es bestand eine merkwürdige Verwirrung zwischen den Buchstaben in den Figuren und denen im Text. Diese Handschrift wurde nach Vallas Tode, 1499, Eigentum des Albertus Pius Carpensis (Alberto Pio, Prinz von Carpi). Ein Teil seiner Bücherei ging durch verschiedene Hände und gelangte schließlich an den Vatikan; das Schicksal des Valla-Manuskriptes scheint jedoch anders gewesen zu sein, denn wir hören, daß es sich im Jahre 1544 im Besitze des Kardinals Rodolphus Pius (Rodolfo Pio), eines Neffen des Albertus, befand, worauf es verschwunden zu sein scheint.

Die drei wichtigsten erhaltenen Handschriften sind:[1])

F (= Codex Florentinus bibliothecae Laurentianae Mediceae plutei XXVIII. 4to.).

B (= Codex Parisinus 2360, olim Mediceus).

C (= Codex Parisinus 2361, Fonteblandensis).

Unter diesen ist sicher B von der Valla-Handschrift abgeschrieben. Das wird durch eine Notiz in der Abschrift selbst bezeugt, die aussagt, das Original habe früher Georg Valla und nachher Albertus Pius gehört. Daraus kann man auch schließen, daß B vor dem Tode des Albertus i. J. 1531 geschrieben worden ist; denn wenn zur Zeit der Herstellung von B das Valla-Manuskript schon im Besitze des Rodolphus Pius gewesen wäre, so wäre dieser Name vermutlich genannt worden. Die erwähnte Notiz gibt auch eine Liste von besonderen im Original verwendeten Abkürzungen; diese Liste ist für die Vergleichung mit F und anderen Handschriften von Wichtigkeit.

Aus einer Note in C geht hervor, daß diese Handschrift im Jahre 1544 in Rom von einem gewissen Christophorus Auverus geschrieben worden ist, und zwar auf Kosten des Georgius Armagniacus (Georges d'Armagnac), Bischofs von Rodez, der damals Gesandter des Königs Franz I. bei dem Papste Paul III. war. Ferner erwähnt ein gewisser Guilelmus Philander in einem Brief an Franz I., der in einer Ausgabe des Vitruv (1552) veröffentlicht ist, daß ihm der Kardinal Rodolphus Pius auf Vermittelung des Georgius Armagniacus gütigst gestattet habe, einen Band Archimedes einzusehen, der bestimmt war, die von Franz in Fontainebleau gegründete Bibliothek zu zieren, und sich Auszüge daraus zu machen. Er fügt hinzu, daß der Band früher Eigentum des Georg Valla gewesen sei. Es ist somit kaum zu bezweifeln, daß C die Abschrift ist, die Georgius Armagniacus hat herstellen lassen, um sie der Bibliothek in Fontainebleau zu schenken.

---

[1]) Ich behalte die von Heiberg in seiner ersten Auflage zur Bezeichnung der verschiedenen Handschriften benutzten Buchstaben bei. In der Vorrede zu Bd. I der neuen Auflage sind die Zeichen F, B, C, V, A, D bezüglich durch D, G, H, E, F, J ersetzt. „A" bezeichnet in der neuen Auflage die Lesarten der (selbst verlorenen) mit Hilfe von D, E, G, H wiederhergestellten Valla-Handschrift.

F, B und C enthalten nun dieselben Werke des Archimedes und Eutocius in gleicher Reihenfolge, nämlich: (1) zwei Bücher *de sphaera et cylindro*, (2) *de dimensione circuli*, (3) *de conoidibus*, (4) *de lineis spiralibus*, (5) *de planis aeque ponderantibus*, (6) *arenarius*, (7) *quadratura parabolae* und die Kommentare des Eutocius zu (1), (2) und (5). Am Schluß der *quadratura parabolae* stehen in F und B die folgenden Zeilen:

εὐτυχοίης λέον γεώμετρα
πολλοὺς εἰς λυκάβαντας ἴοις πολὺ φίλτατε μούσαις.

F und C enthalten ferner *mensurae* von Heron und zwei Fragmente περὶ σταθμῶν und περὶ μέτρων; die Reihenfolge ist in beiden dieselbe und der Inhalt nur insofern verschieden, als das zweite Fragment περὶ μέτρων in F ein wenig länger als in C ist.

Eine kurze Vorrede zu C stellt fest, daß die erste Seite des Originals vom Alter so verwischt und abgenutzt war, daß nicht einmal der Name des Archimedes darauf zu lesen war, während es in Rom keine Abschrift gab, mit deren Hilfe der Schaden hätte gutgemacht werden können, und ferner, daß die letzte Seite von Herons *de mensuris* in ähnlicher Weise zerstört war. Nun war in F offenbar die erste Seite zunächst leer gelassen und ist später von anderer Hand sehr lückenhaft ergänzt, während sich in B ähnliche Lücken und eine vom Abschreiber hinzugefügte Bemerkung finden, daß in dem Original die erste Seite undeutlich war. An anderer Stelle (S. 4 von Bd. III, ed. Heiberg) haben alle drei Handschriften dieselbe Lücke, und der Schreiber von B bemerkt, daß eine ganze Seite oder gar zwei fehlen.

Nun kann C nicht von F abgeschrieben sein, weil in F die letzte Seite des Fragmentes περὶ μέτρων vollkommen deutlich ist; andererseits muß das Original von F am Ende unleserlich gewesen sein, weil sich am Ende von F nicht das Wort τέλος oder eins der anderen Zeichen findet, mit denen Abschreiber die Beendigung ihrer Aufgabe anzudeuten pflegten. Vallas Übersetzungen beweisen wiederum, daß seine Handschrift an Stelle gewisser inkorrekter Lesarten in F solche besitzt, die mit den korrekten in B und C übereinstimmen. Daher kann F nicht Vallas Handschrift selbst sein.

Über F steht positiv folgendes fest. Vallas Übersetzungen stimmen, abgesehen von den wenigen eben erwähnten Lesarten, völlig mit dem Texte der Handschrift F überein. Aus einem 1491 in Venedig geschriebenen Briefe des Angelus Politianus (Angelo Poliziano) an Laurentius Mediceus (Lorenzo de' Medici) geht hervor, daß ersterer in Venedig eine Handschrift entdeckt hatte, die Werke von Archimedes und Heron enthielt, und daß er beabsichtigte, sich eine Abschrift zu verschaffen. Da G. Valla damals in Venedig lebte, so kann die Handschrift kaum eine andere als seine gewesen sein, und zweifellos ist F gleich im Jahre 1491 oder kurz nachher davon abgeschrieben worden. Eine Bestätigung für diesen Ursprung von F liegt in der Tatsache, daß darin die Formen der meisten Buchstaben älter als die im 15ten Jahrhundert üblichen sind, und daß die Abkürzungen usw., die alle ein altes Original verraten, auffallend mit der Beschreibung übereinstimmen, die in der oben erwähnten Note zu B von den Abkürzungen in Vallas Handschrift gegeben wird. Ferner ist bemerkenswert, daß die verstümmelte Stelle, die der unlesbaren ersten Seite des Originals entspricht, gerade eine Seite in F einnimmt, nicht mehr und nicht weniger.

Die natürliche Schlußfolgerung aus all diesen Feststellungen ist, daß F, B und C ihren Ursprung in der Valla-Handschrift gemeinsam haben, und daß von ihnen die Handschrift F die zuverlässigste ist. Denn einmal wird die äußerste Sorgfalt, mit der sich der Schreiber von F an das Original gehalten hat, durch eine Anzahl von Fehlern illustriert, die mit Vallas Lesarten korrespondieren, aber in B und C verbessert sind, und zweitens herrscht kein Zweifel, daß der Schreiber von B einigermaßen kundig gewesen ist und selbständig viele Änderungen, nicht immer erfolgreich, vorgenommen hat.

Um noch zu anderen Handschriften überzugehen, so wissen wir, daß Papst Nicolaus V. eine Archimedes-Handschrift besaß, die er ins Lateinische übersetzen ließ. Diese Übersetzung ist von Jacobus Cremonensis (Jacopo Cassiani)[1]) verfaßt und eine Abschrift davon von Joannes Regiomontanus (Johann Müller aus Königsberg bei Hassfurt in Franken) um 1461 angefertigt worden, der nicht nur eine Anzahl von Verbesserungen des lateinischen Textes am Rande notierte, sondern auch an vielen Stellen griechische Lesarten aus einer anderen Handschrift hinzufügte. Diese Abschrift des Regiomontan wird in Nürnberg aufbewahrt und war die Grundlage für die in der *editio princeps* von Thomas Gechauff Venatorius (Basel, 1544) veröffentlichte lateinische Übersetzung; sie wird von Heiberg mit N^b bezeichnet. (Auf eine andere Abschrift derselben Übersetzung wird von Regiomontan angespielt,

---

[1]) Tiraboschi, *Storia della Letteratura Italiana*, Vol. VI. Pt. 1 (S. 358 der Ausgabe von 1807). Cantor (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2te Aufl. II. S. 209) gibt den vollen Namen und Titel als Jacopo da S. Cassiano Cremonese canonico regolare.

und das ist zweifellos die lateinische Handschrift 327 aus dem 15. Jahrhundert, die noch in Venedig existiert.) Aus dem Umstande, daß die Übersetzung des Jacobus Cremonensis dieselbe Lücke aufweist, die oben bei F, B und C erwähnt wurde (Bd. III, ed. Heiberg, S. 4), ergibt sich ziemlich sicher, daß der Übersetzer entweder die Valla-Handschrift selbst oder (wahrscheinlicher) eine Abschrift davon vor sich hatte, obwohl die Reihenfolge der Bücher in der Übersetzung in einem Punkte von der in unseren Handschriften abweicht, insofern nämlich, als der *arenarius* nach statt vor der *quadratura parabolae* kommt.

Es ist wahrscheinlich, daß die von Regiomontan benutzte griechische Handschrift V (= Codex Venetus Marcianus CCCV aus dem 15ten Jahrhundert) gewesen ist, die noch existiert und dieselben Bücher des Archimedes und Eutocius mit demselben Heron-Fragment wie F enthält und in gleicher Reihenfolge. Wenn die obige Folgerung, daß F ungefähr vom Jahre 1491 datiert, richtig ist, so kann V nicht von F abgeschrieben sein, da diese Handschrift dem Kardinal Bessarione gehörte, der im Jahre 1472 starb; der einfachste Weg, ihre Ähnlichkeit mit F zu erklären, ist die Annahme, daß beide von Vallas Handschrift abgeschrieben sind.

Regiomontan erwähnt in einer nachträglich und mit anderer Tinte eingefügten Notiz zwei andere griechische Handschriften, von denen er eine als „exemplar vetus apud magistrum Paulum" bezeichnet. Wahrscheinlich ist hier der Mönch Paulus (Albertini) von Venedig gemeint, dessen Leben von 1430 bis 1475 währte; möglicherweise ist das „exemplar vetus" die Handschrift Vallas.

Zwei andere weniger gute Handschriften, nämlich A (= Codex Parisinus 2359, olim Mediceus) und D (= Cod. Parisinus 2362, Fonteblandensis), verdanken V ihren Ursprung.

Es ist sodann notwendig, die Ansichten zu erörtern, die über die von Nicolaus Tartaglia für seine lateinische Übersetzung gewisser Werke des Archimedes benutzten Handschriften möglich sind. Der im Jahre 1543 in Venedig veröffentlichte Teil seiner Übersetzung enthielt die Bücher *de centris gravium vel de aequerepentibus* I—II, *tetragonismus* [*parabolae*], *dimensio circuli* und *de insidentibus aquae* I; der Rest, bestehend aus Buch II *de insidentibus aquae*, wurde mit Buch I derselben Abhandlung nach Tartaglias Tode (1557) von Troianus Curtius veröffentlicht (Venedig, 1565). Nun ist die zuletzt genannte Abhandlung in keinem (bis 1906 bekannten) griechischen Manuskript erhalten und, da Tartaglia es ohne einen Hinweis auf seinen anderweitigen Ursprung zu den übrigen Büchern hinzufügt, die, wie er sagt, einer verstümmelten und kaum lesbaren griechischen Handschrift entnommen sind, so kann man leicht schließen, daß die griechische Handschrift die Abhandlung auch enthielt. Es ist jedoch in einem 8 Jahre später (1551) geschriebenen Briefe von Tartaglia selbst bezeugt, daß er damals keinen griechischen Text der Bücher *de insidentibus aquae* besaß, und es wäre sonderbar, wenn der Text in so kurzer Zeit spurlos verschwunden sein sollte. Ferner sagt Commandinus in der Vorrede zu seiner Ausgabe derselben Abhandlung (Bologna, 1565), daß er niemals von einem griechischen Texte des Werkes gehört habe. Daher ist die Annahme am natürlichsten, daß Tartaglia es aus anderer Quelle und nur in lateinischer Übersetzung erhalten hat.[1])

Die Tatsache, daß Tartaglia die alte von ihm benutzte Handschrift als „fracti et qui vix legi poterant libri“ bezeichnet zu derselben Zeit, da der Schreiber der Vorrede zu C eine ähnliche Beschreibung von Vallas Handschrift gab, macht es wahrscheinlich, daß die beiden identisch waren; diese Wahrscheinlichkeit wird gestützt durch eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen den Fehlern in Tartaglias und Vallas Fassungen.

Im Falle der *quadratura parabolae* und der *dimensio circuli* eignet sich Tartaglia jedoch eine andere lateinische Übersetzung an, ohne irgendwie ihre Quelle anzugeben; diese Übersetzung ist von Lucas Gauricus „Juphanensis ex regno Neapolitano“ (Luca Gaurico von Gifuni) im Jahre 1503 veröffentlicht, und er kopiert sie so genau, daß er die Mehrzahl der ganz augenscheinlichen Fehler und die falsche Interpunktion beibehält, nur wenige Lücken ausfüllt und einige Figuren und Buchstaben ändert. Vergleicht man diese Übersetzung des Gauricus mit Vallas Lesarten und der Übersetzung von Jacobus Cremonensis, so sieht man, daß sie nach derselben Handschrift wie die letzte angefertigt ist, nämlich nach der des Papstes Nicolaus V.

Gerade wo Tartaglia die Valla-Handschrift benutzt hat, scheint er sich nicht sehr große Mühe gegeben zu haben, sie zu entziffern, wenn sie schwer lesbar war — er wird im Entziffern von Handschriften nicht geübt gewesen sein — und in solchen Fällen zögerte er nicht, aus anderen Quellen zu schöpfen. An einer Stelle

---

[1]) Das von A. Mai nach zwei vatikanischen Handschriften (*Classici auct.* I. p. 426—30; Bd. II. von Heibergs erster Ausgabe, S. 356—8) herausgegebene Fragment von Buch I, *περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων* ist unecht. Abgesehen von dem ersten Satze enthält es nur Erklärungen und keine Beweise. Heiberg neigt zu der Ansicht, daß es einen von einem mittelalterlichen Gelehrten angestellten Versuch der Rückübersetzung ins Griechische darstelle, und vergleicht damit den ähnlichen Versuch von Rivault.

(*de planor. equilibr.* II. 9) gibt er in der Tat als archimedischen Beweis eine etwas überarbeitete und abgekürzte Paraphrase des Eutocius und bei vielen anderen Gelegenheiten bringt er Verbesserungen und Einschaltungen aus einer anderen griechischen Handschrift, die er einmal nennt. Diese Handschrift scheint eine Abschrift von F gewesen zu sein mit Einschiebungen, die einem des Gegenstandes nicht unkundigen Bearbeiter zu verdanken sind; und diese ergänzte Abschrift von F war scheinbar auch die Quelle für die Nürnberger Handschrift, die wir jetzt zu erwähnen haben.

N^a (= Codex Norimbergensis) wurde im 16. Jahrhundert geschrieben und von Willibald Pirkheimer von Rom nach Nürnberg gebracht. Dieses Manuskript enthält dieselben Werke des Archimedes und Eutocius und in derselben Reihenfolge wie F, ist aber augenscheinlich nicht von F direkt abgeschrieben, während es andererseits so nahe mit Tartaglias Übersetzung übereinstimmt, daß man einen gemeinsamen Ursprung annehmen muß. N^a ist von Venatorius zur Vorbereitung der *editio princeps* benutzt worden, und Venatorius hat darin durch Bemerkungen am Rande oder auf daran befestigten Streifen viele Fehler eigenhändig verbessert; ebenso nahm er im Texte viele Änderungen vor, indem er das Original abradierte, und schrieb zuweilen Weisungen für den Drucker darauf, so daß nach ihm der Druck angefertigt zu sein scheint. Der Charakter der Handschrift weist sie derselben Klasse wie die anderen zu; sie stimmt mit ihnen in den wichtigeren Fehlern und einer ähnlichen Lücke am Anfang überein. Einige nur ihr und F gemeinsame Fehler beweisen ihre Ahstammung von F, wenn auch, wie oben gesagt, erst aus zweiter Hand.

Wir gehen nunmehr zu den neuen *subsidia critica* über, die Heiberg zur Vorbereitung seiner zweiten, augenblicklich im Erscheinen begriffenen Auflage (Bde. I, II 1910—13) benutzt hat. Zwei Handschriften sind von Wichtigkeit.

1. Codex Ottobonian. lat. 1850 („B“ in der Vorrede zu der neuen Auflage), der eine dem Griechischen sich Wort für Wort anschließende Übersetzung von Wilhelm von Mörbeke (13tes Jahrhundert) enthält. Diese Handschrift ist von Valentin Rose[1]) gefunden und von Heiberg im Jahre 1904 verglichen worden.

Noch wichtiger ist

2. Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, 4to, aus dem 10ten Jahrhundert.

Heiberg hat die Geschichte seiner Entdeckung dieser Hand-

---

[1]) *Deutsche Litteraturzeitung* 1884, S. 210f.

schrift veröffentlicht und eine erschöpfende Beschreibung von ihr gegeben.[1]) Seine Aufmerksamkeit wurde auf eine Notiz in Bd. IV (1899) der *Ἱεροσολυμιτικὴ βιβλιοθήκη* von Papadopulos Kerameus gelenkt, die sich auf ein Palimpsest mathematischen Inhalts bezog, und zugleich erkannte er an einigen beigefügten Probezeilen, daß die Handschrift etwas von Archimedes enthalten müsse. Auf Grund einer Besichtigung der Handschrift selbst in Konstantinopel und einer photographischen Reproduktion war er imstande, festzustellen, was sie enthielt, und viel von ihrem Inhalt zu entziffern. Das war im Jahre 1906, und er sah die Handschrift noch einmal im Jahre 1908. Sie ist aus Pergament (mit Ausnahme der letzten acht Blätter 178 bis 185, die aus Papier aus dem 16ten Jahrhundert bestehen) und enthält Schriften des Archimedes, die in einer guten Hand des 10ten Jahrhunderts in zwei Spalten geschrieben sind. Man hatte (glücklicherweise nur mit teilweisem Erfolg) versucht, die Schrift auszuwaschen und dann das Pergament im 12ten bis 13ten oder 13ten bis 14ten Jahrhundert von neuem benutzt, und zwar um ein Euchologion darauf zu schreiben. Die ältere Schrift ist auf den meisten der 177 ersten Blätter mehr oder minder deutlich sichtbar; nur 29 Blätter zeigen keine Spur einer solchen Schrift; von 9 weiteren ist sie hoffnungslos abgewaschen; auf einigen anderen Blättern sind von ihr nur wenige Worte lesbar; und auf etwa 14 Blättern stammt die alte Schrift von anderer Hand und ist nicht in Spalten geteilt. Alles übrige ist mit Hilfe eines Vergrößerungsglases leidlich lesbar. Von den Abhandlungen des Archimedes, die uns auch in anderen Handschriften erhalten sind, enthält die neue Handschrift einen großen Teil der Bücher *Über Kugel und Zylinder*, fast das ganze Werk *Über Spiralen* und Teile der *Kreismessung* und der Bücher *Über das Gleichgewicht von Ebenen.* Am wichtigsten ist jedoch die Tatsache, daß sie enthält (1) einen beträchtlichen Teil des Werkes *Über schwimmende Körper*, von dem man früher annahm, daß sein griechischer Text verloren und es nur in der lateinischen Übersetzung von Wilhelm von Mörbeke erhalten sei, und (2) das Wertvollste von allem, den größten Teil des Buches, das am Anfange des Buches selbst *Ἔφοδος* und an anderen Stellen *Ἐφόδιον* oder *Ἐφοδικόν* genannt wird, was *Methode* bedeutet. Der in der Handschrift enthaltene Teil dieses letzten Werkes ist von Heiberg bereits griechisch[2]) und auch in deutscher Übersetzung, von Zeuthen

---

[1]) *Hermes*, XLII, 1907, S. 235f.

[2]) *Hermes*, a. a. O. SS. 243—297. Archimedes, II. Aufl. Bd. II, S. 425f.

mit einem Kommentar versehen,[1]) herausgegeben worden. Die Abhandlung war früher nur aus einer Anspielung auf sie bei Suidas bekannt, der berichtet, Theodosius habe einen Kommentar zu ihr geschrieben; aber die neuerdings von H. Schöne entdeckte und 1903 herausgegebene *Metrica* Herons[2]) erwähnt drei Sätze aus ihr, darunter die beiden Hauptsätze, die Archimedes am Anfang als neuartige Sätze bezeichnet, zu deren Behandlung die *Methode* die Mittel liefere. Schließlich enthält die Handschrift im Anschluß an die Vorrede zwei Sätze aus dem *Stomachion* betitelten Werke, worin, wie bereits gesagt[3]), das als *loculus Archimedius* bekannte Geduldspiel behandelt wird.

Es bleibt noch übrig, die wichtigsten Ausgaben des griechischen Textes anzuführen und die veröffentlichten lateinischen Übersetzungen, die ganz oder teilweise auf direkter Vergleichung mit den Handschriften beruhen. Das sind außer Gauricos und Tartaglias Übersetzung die folgenden:

1. Die *editio princeps*, zu Basel 1544 von Thomas Gechauff Venatorius unter dem Titel veröffentlicht: *Archimedis opera quae quidem exstant omnia nunc primum graece et latine in lucem edita. Adiecta quoque sunt Eutocii Ascalonitae commentaria item graece et latine nunquam antea excusa.* Der griechische Text und die lateinische Übersetzung in dieser Ausgabe stammen aus verschiedenen Quellen; die für den griechischen Text ist N^a, dagegen war die Übersetzung Joannes Regiomontans verbesserte Abschrift (N^b) der lateinischen Übersetzung, die Jacobus Cremonensis nach der Handschrift des Papstes Nicolaus V. verfaßt hatte. Regiomontan hatte seine Revision vorgenommen mit Hilfe (1) einer anderen noch existierenden Abschrift derselben Übersetzung, (2) anderer griechischer Handschriften, von denen eine wahrscheinlich V war, während eine andere Vallas Handschrift selbst gewesen sein kann.

2. Eine Übersetzung des F. Commandinus (enthaltend: *circuli dimensio, de lineis spiralibus, qradratura parabolae, de conoidibus et sphaeroidibus, de arenae numero*) erschien 1558 in Venedig unter dem Titel: *Archimedis opera nonnulla in latinum conversa et commentariis illustrata.* Für diese Übersetzung wurden mehrere Handschriften benutzt, unter ihnen V, aber keine, die denen, die wir jetzt besitzen, vorzuziehen wäre.

3. D. Rivaults Ausgabe, *Archimedis opera quae exstant graece et latine novis demonstr. et comment. illustr.* (Paris, 1615) gibt nur

---

[1]) *Bibliotheca Mathematica* VII_3, 1906—7, SS. 321—363.

[2]) *Heronis Alexandrini opera*, Bd. III. 1903, SS. 80, 17; 130, 12; 130, 25.

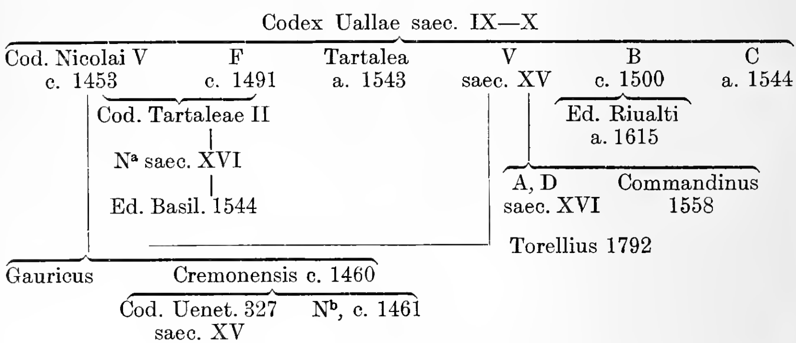
[3]) *Oben*, S. 8.

die Sätze griechisch, während die Beweise lateinisch und etwas überarbeitet sind. Rivault schloß sich an die Baseler *editio princeps* mit Heranziehung von B an.

4. Torellis Ausgabe (Oxford, 1792) betitelt: *Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα μετὰ τῶν Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπομνημάτων, Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis ex recensione J. Torelli Veronensis cum nova versione latina. Accedunt lectiones variantes ex codd. Mediceo et Parisiensibus.* Torelli folgte in der Hauptsache der Baseler *editio princeps*, aber verglich auch V. Das Buch wurde nach Torellis Tode von Abram Robertson herausgegeben, der die Vergleichung fünf weiterer Handschriften F, A, B, C, D mit der Baseler Ausgabe hinzufügte. Die Vergleichung ist jedoch nicht gut, und die Ausgabe wurde beim Druck nicht gehörig korrigiert.

5. Zuletzt kommt die endgültige Ausgabe von Heiberg (*Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, Latine uertit notisque illustrauit J. L. Heiberg.* Leipzig, 1880—81). Die zweite Auflage, betitelt *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg,* ist augenblicklich im Erscheinen begriffen (Bd. I, II, 1910—13).

Der Zusammenhang sämtlicher Handschriften und der oben genannten Ausgaben und Übersetzungen wird von Heiberg in dem folgenden Schema gut dargestellt (jedoch mit Auslassung seiner eigenen Ausgabe):



Die übrigen Ausgaben, die Teile des Archimedes in griechischer Sprache geben, und die weiteren Übersetzungen des ganzen Werkes oder einzelner Teile, die vor Heibergs Ausgabe erschienen, basieren nicht auf neuer Vergleichung der Originalquellen, obwohl einzelne Herausgeber ausgezeichnete Text-Verbesserungen gemacht haben, besonders Wallis und Nizze. Folgende Bücher seien erwähnt:

Joh. Chr. Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher, übersetzt und erläutert* (Nürnberg, 1670). Diese Übersetzung umfaßte alle griechisch erhaltenen Werke und erschien drei Jahre nach desselben Verfassers Sonderübersetzung der *Sandrechnung*. Aus Sturms Vorrede geht hervor, daß er hauptsächlich die Ausgabe von Rivault benutzt hat.

Js. Barrow, *Opera Archimedis, Apollonii Pergaei conicorum libri, Theodosii sphaerica methodo novo illustrata et demonstrata* (London, 1675).

Wallis, *Archimedis arenarius et dimensio circuli, Eutocii in hanc commentarii cum versione et notis* (Oxford, 1678), auch in Wallis' *Opera*, Vol. III. S. 509—546.

Karl Friedr. Hauber, *Archimeds zwei Bücher über Kugel und Cylinder. Ebendesselben Kreismessung. Übersetzt mit Anmerkungen usw. begleitet* (Tübingen, 1798).

F. Peyrard, *Œuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire, suivies d'un mémoire du traducteur, sur un nouveau miroir ardent, et d'un autre mémoire de M. Delambre, sur l'arithmétique des Grecs.* (Seconde édition, Paris, 1808.)

Ernst Nizze, *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke, aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet* (Stralsund, 1824).

Die Handschriften (außer der 1906 gefundenen Konstantinopeler) geben die einzelnen Abhandlungen in folgender Reihenfolge:

1. *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α΄ β΄*, zwei Bücher *Über Kugel und Zylinder.*
2. *κύκλου μέτρησις*[1]), *Die Kreismessung.*
3. *περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, Über Konoide und Sphäroide.*
4. *περὶ ἑλίκων, Über Spiralen.*
5. *ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α΄ β΄*[2]), zwei Bücher *Über das Gleichgewicht von Ebenen.*

---

[1]) Pappus (I. S. 312, ed. Hultsch) spielt auf die *κύκλου μέτρησις* an mit den Worten *ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.*

[2]) Archimedes selbst bezieht sich zweimal auf Eigenschaften, die in Buch I. festgestellt sind, als *ἐν τοῖς μηχανικοῖς* bewiesen (*Quadratur der Parabel*, Sätze 6, 10). Vgl. *Über schwimmende Körper* II. 2, wo Satz 8 des Buches I als ein „in den Elementen der Mechanik" (*ἐν τοῖς στοιχείοις τῶν μηχανικῶν*) bewiesener Satz erwähnt wird. Pappus (VIII. S. 1034) erwähnt *τὰ Ἀρχιμήδους περὶ ἰσορροπιῶν.* Der Anfang des ersten Buches wird auch von Proclus in seinem *Kommentar zu Euklid* I., S. 181 zitiert, wo die Lesart *τοῦ ᾱ ἰσορροπιῶν* heißen sollte, und nicht *τῶν ἀνισορροπιῶν* (Hultsch).

6. *ψαμμίτης*, *Die Sandrechnung.*
7. *τετραγωνισμὸς παραβολῆς* (dieser Name ist später für den von Archimedes selbst gegebenen eingesetzt worden, der zweifellos *τετραγωνισμὸς τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*[1]) gewesen sein muß), *Quadratur der Parabel.*

Zu diesen wären die folgenden Werke hinzuzufügen, die zum großen Teil in der neuentdeckten Konstantinopeler Handschrift enthalten sind:

8. *περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος*, *Die Methode, mechanische Sätze behandelnd*, an Eratosthenes gerichtet.
9. *ὀχουμένων α′ β′*[2]), zwei Bücher *Über schwimmende Körper*, eine Abhandlung, die man früher nur in der lateinischen Übersetzung von Wilhelm von Mörbeke erhalten glaubte.
10. Bruchstücke des *στομάχιον*, das als *loculus Archimedius* bekannte Geduldspiel behandelnd (siehe oben).

Die Bücher sind jedoch nicht in der obigen Reihenfolge geschrieben worden; Archimedes gibt selbst teils durch seine einleitenden Briefe, teils durch die Benutzung von Ergebnissen aus früheren Arbeiten in späteren Schriften hinreichende Fingerzeige, die chronologische Ordnung etwa wie folgt anzunehmen:

1. *Über das Gleichgewicht von Ebenen, I.*
2. *Quadratur der Parabel.*
3. *Über das Gleichgewicht von Ebenen, II.*
4. *Die Methode.*
5. *Über Kugel und Zylinder, I, II.*
6. *Über Spiralen.*

---

[1]) Der Name „Parabel“ wird zuerst von Apollonius für die Kurve angewendet. Archimedes gebraucht immer den alten Ausdruck „Schnitt eines rechtwinkeligen Kegels“. Vgl. Eutocius (Heiberg, vol. III; S. 342) *δέδεικται ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς.*

[2]) Dieser Titel entspricht den folgenden Stellen, die auf das Buch Bezug nehmen: Strabo I. S. 54 (*Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ τῶν ὀχουμένων*) und Pappus VIII. S. 1024 (*ὡς Ἀρχιμήδης ὀχουμένοις*). Das von Mai herausgegebene Fragment hat einen längeren Titel, *περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων*, wo der erste Teil der Übersetzung Tartaglias entspricht, *de insidentibus aquae*, und der des Commandinus, *de iis quae vehuntur in aqua.* Aber Archimedes verwendet absichtlich das allgemeinere Wort *ὑγρόν* (Flüssigkeit) an Stelle von *ὕδωρ*; deshalb ist wohl der kürzere Titel besser (*περὶ*) *ὀχουμένων*, *de iis quae in humido vehuntur* (Torelli und Heiberg).

7. *Über Konoide und Sphäroide.*
8. *Über schwimmende Körper, I, II.*
9. *Die Kreismessung.*
10. *Die Sandrechnung.*

Es ist jedoch zu beachten, daß in Bezug auf die Abhandlung (8) nur feststeht, daß sie nach (7) geschrieben ist, und in Bezug auf (9) nur, daß sie jünger als (5) und älter als (10) ist.

Zu dem Obigen tritt eine Sammlung von Hilfssätzen *(Liber Assumptorum)*, die durch Vermittelung des Arabischen auf uns gekommen ist. Die Sammlung wurde zum ersten Male von S. Foster herausgegeben, *Miscellanea* (London, 1659) und darauf von Borelli in einem zu Florenz 1661 veröffentlichten Buche, dessen Titel lautet *Liber assumptorum Archimedis interprete Thebit ben Kora et exponente doctore Almochtasso Abilhasan.* Die Hilfsätze können jedoch in der heutigen Form von Archimedes nicht geschrieben sein, da sein Name darin mehrmals genannt wird. Wahrscheinlich waren es Sätze, die von einem späteren griechischen Schriftsteller[1]) gesammelt worden sind, um ein altes Werk zu erläutern, doch ist es ganz wahrscheinlich, daß einige von den Sätzen Archimedischen Ursprungs sind, z. B. diejenigen, die sich auf die geometrischen Figuren mit den Namen *ἄρβηλος*[2]) wörtlich „Schuster-Messer") und *σάλινον* (vielleicht „Salzfaß") beziehen[3]), und Satz 8, der sich mit dem Problem der Dreiteilung des Winkels beschäftigt.

---

[1]) Der Sammler des *Liber Assumptorum* muß, wie es scheint, in hohem Maße aus denselben Quellen wie Pappus geschöpft haben. Die Zahl der Sätze, die in beiden Sammlungen in wesentlich derselben Form vorkommen, ist m. E. noch größer, als man bisher angenommen hat. Tannery (*La Géométrie grecque*, S. 162) nennt als Beispiele die Hilfssätze 1, 4, 5, 6; die Bemerkungen in dem vorliegenden Werke werden jedoch ergeben, daß noch mehr übereinstimmende Stellen vorkommen.

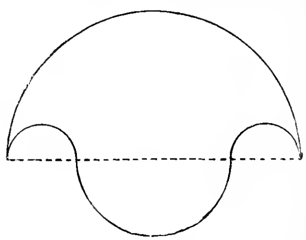
[2]) Pappus gibt (S. 208) einen sogenannten „alten Satz" (*ἀρχαία πρότασις*) über dieselbe Figur, die er als *χωρίον, ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον*, beschreibt. Vgl. die Bemerkung zu Satz 6 (S. 462). Die Bedeutung des Wortes ist aus den Scholien zu Nicander, *Theriaca*, 423 zu entnehmen: *ἄρβηλοι λέγονται τὰ κυκλοτερῆ σιδήρια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξύουσι τὰ δέρματα.* Vgl. Hesychius, *ἀνάρβηλα, τὰ μὴ ἐξεσμένα δέρματα· ἄρβηλοι γὰρ τὰ σμιλία.*

[3]) Die besten Autoritäten scheinen zu behaupten, daß der Name *σάλινον* in keinem Falle von Archimedes selbst für die fragliche Figur angewendet worden ist, sondern erst von einem späteren Schriftsteller. Dementsprechend halte ich *σάλινον* einfach für die gräzisierte Form des lateinischen Wortes *salinum.* Wir wissen, daß das Salzfaß seit den frühesten Tagen der römischen Republik ein wichtiger Bestandteil des italischen Hausrates war· „Wer nicht gerade arm war, hatte ein silbernes, das sich vom Vater auf

Archimedes gilt ferner als Autor der *Rinder-Aufgabe*, die in dem 1773 von Lessing herausgegebenen Epigramm formuliert ist. Nach der dem Epigramm vorangeschickten Überschrift wurde sie

---

den Sohn vererbte (Hor., *Carm.* II. 16, 13, Liv. XXVI. 36); dazu gehörte eine silberne *patella*, die zugleich mit dem Salzfaß bei den häuslichen Opfern gebraucht wurde (Persius, *Satiren* III. 24, 25). Nur diese zwei Silber-Gegenstände vertrugen sich mit der Einfachheit der römischen Sitten in den früheren Zeiten der Republik (Plin., *Hist. Nat.* XXXIII. § 153, Val. Max. IV. 4, § 3). . . . An Gestalt war das *salinum* wohl meistens eine runde flache Schale". [*Dict. of Greek and Roman Antiquities*, Artikel *salinum*]. Ferner haben wir in den ersten Kapiteln von Mommsens *Römischer Geschichte* reichliche Beispiele von ähnlichen Übertragungen lateinischer Wörter in die sizilische Mundart des Griechischen. So wird gezeigt (Buch I, Kap. XIII), daß infolge des latinisch-sizilischen Handels gewisse Wörter, die Gewichte bezeichneten, *libra, triens, quadrans, sextans, uncia* im dritten Jahrhundert der Stadt ihren Weg in die Umgangssprache Siziliens fanden unter den Formen *λίτρα, τριᾶς, τετρᾶς, ἑξᾶς, οὐγκία.* Ähnlich wurden (Kap. XI.) lateinische Rechts-Ausdrücke übertragen; so wurde *mutuum* (eine Art Darlehen) zu *μοῖτον, carcer* zu *κάρκαρον*. Schließlich wurde aus dem lateinischen Worte für Speck, *arvina*, im sizilischen Griechisch *ἀρβίνη*, und aus *patina* (Schüssel) *πατάνη*. Das letzte Wort entspricht so genau, wie man nur wünschen kann,



der angenommenen Übertragung von *salinum*. Überdies hat die Erklärung von *σάλινον* als *salinum* zwei augenscheinliche Vorzüge, daß (1) sie in dem Worte keinerlei Änderung erfordert, und (2) die Ähnlichkeit der unteren Kurve mit einer gebräuchlichen Form des Salzfasses ersichtlich ist. Ich will zur Bekräftigung meiner Annahme hinzufügen, daß Dr. A. S. Murray vom Britischen Museum der Meinung ist, man gehe kaum fehl, wenn man eine der kleinen Silberschalen aus dem römischen Tischgerät im Museum, das zu Chaourse (Aisne) in Frankreich gefunden worden ist, als *salinum* ansieht; diese besitzt eine der Kurve in der Figur des *σάλινον* ziemlich ähnliche Schnittlinie. Die anderen Erklärungen von *σάλινον*, die man versucht hat, sind folgende:

(1) Cantor bringt es mit *σάλος*, „das Schwanken des hohen Meeres" in Verbindung und übersetzt es mit *Wogengestalt.* Aber die Ähnlichkeit ist nicht ganz befriedigend, und die Endung *-ινον* würde eine Erklärung verlangen.

von Archimedes in einem Briefe an Eratosthenes[1]) den Mathematikern in Alexandria mitgeteilt. In den Scholien zu Platos *Charmides* 165 E befindet sich auch ein Hinweis auf „das von Archimedes als Rinder-Aufgabe bezeichnete“ Problem (*τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα*). Die Frage, ob Archimedes wirklich die Aufgabe gestellt hat, oder ob sein Name ihr nur vorangestellt worden ist, um sie als außerordentlich schwierig zu kennzeichnen, ist vielfach erörtert worden. Eine erschöpfende Darstellung der Argumente für und gegen gibt Krumbiegel in einem Artikel in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Hist. lit. Abteilung)* XXV. (1880), S. 121 f.; daran schließt sich (*ebenda*, S. 153 f.) eine Erörterung des Problems selbst von Amthor. Das Endergebnis der Untersuchung Krumbiegels ist, daß (1) das Epigramm in seiner gegenwärtigen Form kaum von Archimedes geschrieben sein kann, aber daß (2) es möglich, ja wahrscheinlich ist, daß die Aufgabe ihrem Inhalte nach von Archimedes stammt. Hultsch[2]) spricht über ihre Veranlassung eine geistvolle Vermutung aus. Wie bekannt, hat Apollonius in seinem *ὠκυτόκιον* einen besseren Näherungswert für π ausgerechnet als Archimedes, und

(2) Heiberg meint, das Wort sei „sine dubio ab Arabibus deprauatum“ und nimmt an, daß es *σέλινον*, Eppich, („ex similitudine frondis apii“) heißen müsse. Aber was man auch von der Ähnlichkeit halten mag, die Theorie, daß das Wort verderbt sei, läßt sich sicher nicht durch die Analogie zu *ἄρβηλος* stützen, das von den Arabern korrekt reproduziert worden ist, wie wir aus der in der vorigen Note angeführten Stelle aus Pappus wissen.

(3) Dr. Gow vermutet, *σάλινον* sei ein „Sieb“, indem er *σάλαξ* heranzieht. Aber diese Hypothese hat keinerlei Augenschein für sich.

[1]) Die Überschrift lautet: *Πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ*. Das übersetzt Heiberg, „Die Aufgabe, die Archimedes fand und in einem Epigramm . . . in einem Brief an Eratosthenes sandte“. Er gibt jedoch zu, daß die Reihenfolge der Worte dagegen spricht, ebenso die Verwendung des Plurals *ἐπιγράμμασιν*. Offenbar ist es recht unbeholfen, die beiden Ausdrücke *ἐν ἐπιγράμμασιν* und *ἐν ἐπιστολῇ* mit *ἀπέστειλεν* zu verbinden. In der Tat scheint es unmöglich, anders zu übersetzen, als es Krumbiegel in Übereinstimmung mit der Reihenfolge der Worte tut „Aufgabe, die Archimedes unter (den) Epigrammen fand und . . . in seinem Briefe an Eratosthenes schickte“; und dieser Sinn ist sicher unbefriedigend. Hultsch bemerkt, obwohl der Fehler *πραγματουμένοις* für *πραγματευομένοις* und die ganze Form der Überschrift die Hand eines Schreibers verraten, der mehrere Jahrhunderte nach Archimedes lebte, so müsse er doch eine ältere Quelle gehabt haben, da er die Erzählung von dem Briefe an Eratosthenes nicht gut erfunden haben könne.

[2]) Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie*, II. 1, SS. 534, 5.

er muß daher schwierigere Multiplikationen als die in der *Kreismessung* enthaltenen ausgeführt haben. Auch das andere Werk des Apollonius über die Multiplikation großer Zahlen, das bei Pappus teilweise erhalten ist, war durch die *Sandrechnung* des Archimedes angeregt worden; und wenn wir auch die Abhandlung des Apollonius nicht gerade als polemisch zu betrachten haben, so stellte sie doch tatsächlich eine Kritik des früheren Buches dar. Daß nun Archimedes mit einer Aufgabe antwortete, die selbst für Apollonius schwierige Rechnungen mit sehr großen Zahlen verlangte, ist durchaus nicht unmöglich. Und es liegt unverkennbar eine satirische Färbung in den Einleitungsworten des Epigramms: „Berechne die Menge der Sonnenrinder, deinen Verstand dazu aufwendend, wenn du an Weisheit teilhast“, in dem Übergang vom ersten Teil zum zweiten, wo gesagt ist, die Fähigkeit, den ersten Teil zu lösen, verleihe den Anspruch, „nicht unwissend noch unkundig der Zahlen zu heißen, aber doch noch nicht unter die Weisen gezählt zu werden“, und dann wieder in den letzten Zeilen. Hultsch schließt, daß die Aufgabe keinesfalls viel jünger als die Zeit des Archimedes ist und spätestens vom Anfange des zweiten Jahrhunderts v. Chr. datiert.

Es steht fest, daß von den erhaltenen Büchern im 6. Jahrhundert n. Chr. nur drei allgemein bekannt waren, nämlich: *Über Kugel und Zylinder, Die Kreismessung* und *Über das Gleichgewicht von Ebenen.* So kannte Eutocius von Ascalon, der zu diesen Werken Kommentare schrieb, die *Quadratur der Parabel* nur dem Namen nach und hat das Buch nie gesehen, ebensowenig das *Über Spiralen.* Wo Stellen durch Verweisungen auf das erstere Buch erläutert sind, gibt Eutocius Erklärungen aus Apollonius und anderen Quellen, und er spricht unbestimmt von der Entdeckung einer geraden Linie, die dem Umfang eines gegebenen Kreises gleich ist, „mit Hilfe gewisser Spiralen“, während er Satz 18 angeführt hätte, wenn ihm die Abhandlung *Über Spiralen* bekannt gewesen wäre. Daher darf man annehmen, daß nur die drei von Eutocius kommentierten Arbeiten in den damals gebräuchlichen Ausgaben enthalten waren, beispielsweise in der des Isidorus von Milet, des Lehrers des Eutocius, die letzterer mehrmals anführt.

Unter diesen Umständen ist es erstaunlich, daß so viel mehr Bücher bis auf den heutigen Tag erhalten sind. Und in der Tat haben sie in beträchtlichem Maße ihre ursprüngliche Form verloren. Archimedes schrieb dorischen Dialekt[1]), aber in den

[1]) So spricht Eutocius in seinem Kommentar zu Satz 4 von Buch II *Über Kugel und Zylinder* von dem Fragment, das er in einem alten Buche

bekanntesten Büchern *(Über Kugel und Zylinder* und *Kreismessung)* sind in Wirklichkeit alle Spuren dieses Dialekts verschwunden, während ein teilweiser Verlust an dorischen Formen in anderen Büchern stattgefunden hat, von denen jedoch die *Sandrechnung* am wenigsten gelitten hat.

Ferner sind in allen Büchern mit Ausnahme der *Sandrechnung* Änderungen und Zusätze in erster Linie von einem der dorischen Mundart kundigen Interpolator eingefügt worden, und dann wurden nach der Zeit des Eutocius das Buch *Über Kugel und Zylinder* und die *Kreismessung* vollständig umgearbeitet.

Von verlorenen Werken des Archimedes lassen sich die folgenden nachweisen:

1. Auf Untersuchungen über *Polyeder* bezieht sich Pappus, der nach der Behandlung (V. S. 352) der fünf regelmäßigen Polyeder eine Beschreibung von dreizehn anderen, von Archimedes entdeckten gibt; diese sind halbregulär und werden von gleichseitigen und gleichwinkeligen, aber verschiedenartigen Polygonen begrenzt.

2. Ein Buch arithmetischen Inhalts, betitelt *ἀρχαί, Grundzüge,* dem Zeuxippus gewidmet. Wir erfahren von Archimedes selbst, daß das Buch von der *Benennung der Zahlen* (*κατονόμαξις τῶν ἀριθμῶν*)[1]) handelte und eine Methode auseinandersetzte, wie man

gefunden hatte und das ihm die fehlende Ergänzung zu dem genannten Satze zu sein schien, als „teilweise des Archimedes bevorzugte dorische Mundart bewahrend“ (*ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον*). Aus dem Ausdruck *ἐν μέρει* schließt Heiberg, daß die dorischen Formen um die Zeit des Eutocius in den uns erhaltenen Büchern nicht minder zu verschwinden begonnen hatten als in dem angeführten Fragment.

[1]) Gestützt auf die Beobachtung, daß Archimedes bei allen Anspielungen auf dieses Werk in der *Sandrechnung* von der *Benennung der Zahlen* oder von *Zahlen, die benannt sind,* oder *ihre Namen haben* (*ἀριθμοὶ κατωνομασμένοι, τὰ ὀνόματα ἔχοντες, τὰν κατονομαξίαν ἔχοντες*) spricht, hält Hultsch (Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie*, II. 1, S. 511) *κατονόμαξις τῶν ἀριθμῶν* für den Titel des Werkes; und er übersetzt die Worte *τινὰς τῶν ἐν ἀρχαῖς »ἀριθμῶν« τῶν κατονομαξίαν ἐχόντων* mit „einige der *anfangs* erwähnten Zahlen, welche eine besondere Benennung haben“, wo „anfangs“ sich auf die Stelle bezieht, wo Archimedes zuerst *τῶν ὑφ᾽ ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις* Erwähnung tut. Aber *ἐν ἀρχαῖς* scheint als Ausdruck für „anfangs“ weniger natürlich als *ἐν ἀρχῇ* oder *κατ᾽ ἀρχάς*. Da ferner kein Partizipial-Ausdruck außer *κατονομαξίαν ἐχόντων* mit *ἐν ἀρχαῖς* in dieser Bedeutung verbunden werden kann, wäre der Sinn unbefriedigend; denn die Zahlen sind am Anfang nicht *benannt,* sondern nur *erwähnt,* und daher hätte ein Wort wie *εἰρημένων* gewählt werden müssen. Aus diesen Gründen, meine ich, haben Heiberg, Cantor und Susemihl recht, wenn sie *ἀρχαί* als Titel der Abhandlung betrachten.

größere Zahlen als die in der gewöhnlichen griechischen Bezeichnungsweise darstellbaren ausdrücken könne. Dadurch wurden alle Zahlen umfaßt bis zu der enorm großen, die wir heute durch eine 1 mit 80000 Billionen Nullen dahinter darstellen würden; und indem er dieselbe Methode in der *Sandrechnung* darlegt, erklärt Archimedes, er tue dies zum Nutzen derer, die keine Gelegenheit gehabt hätten, das frühere an Zeuxippus gesandte Werk zu lesen.

3. Ein oder mehrere mechanische Werke. Ein solches Werk unter dem Titel *περὶ ζυγῶν, Über Wagen* oder *Hebel,* ist bei Pappus (VIII. S. 1068, 20) erwähnt, wo gesagt wird, Archimedes habe dort bewiesen, daß „größere Kreise kleinere überwältigen (*κατακρατοῦσι*), wenn sie sich um denselben Mittelpunkt drehen". In den erhaltenen Schriften des Archimedes werden gewisse Sätze mit der Bemerkung „das ist bewiesen" als richtig vorausgesetzt ohne Titelangabe des Werkes, aus dem sie entnommen sind; Heiberg spricht die begründete Vermutung aus, daß einige von ihnen einen Teil des Werkes *περὶ ζυγῶν* gebildet haben werden. Solche sind die folgenden: (1) der Satz, daß der Schwerpunkt zweier Körper zusammengenommen auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der einzelnen Körper liegt (benutzt in *Über das Gleichgewicht von Ebenen* I. 4), und (2) der Satz, daß, wenn ein Körper in Ruhe an einem Punkte hängt, sein Schwerpunkt mit dem Aufhängepunkt in einer senkrechten Linie liegt (benutzt in der *Quadratur der Parabel,* 6). Simplicius (*De caelo* II. 14, S. 543, 31—34, Heiberg) bemerkt, daß Sätze über Schwerpunkte (*τὰ κεντροβαρικά*), so die sehr eleganten Sätze des Archimedes, die Auffindung der Lage des Schwerpunktes eines Körpers zum Ziele hätten, d. h. eines gewissen Punktes in dem genannten Körper, derart, daß, wenn der Körper an einem in diesem Punkte befestigten Faden aufgehängt wird, er in seiner Lage bleibt, ohne sich irgendwohin zu neigen. Die Ähnlichkeit dieser Beschreibung mit dem in der *Quadratur der Parabel,* Satz 6, angenommenen Satze berechtigt zu der Vermutung, daß Simplicius auf dieselbe Schrift anspielt, aus der dieser Satz entnommen ist; aus der Stelle braucht man, meine ich, nicht zu schließen, daß ein besonderes Werk des Archimedes mit dem Titel *κεντροβαρικά* existierte. Eine andere Anspielung auf dasselbe Prinzip zur Auffindung von Schwerpunkten findet sich bei Pappus (VIII. SS. 1032—3). Pappus spricht zunächst von einem Körper, der im Gleichgewicht gehalten wird dadurch, daß ein Punkt durch einen starren senkrechten Stab unterstützt

wird; befindet er sich so im Gleichgewicht, so geht die durch den Stab dargestellte gerade Linie verlängert durch den Schwerpunkt des Körpers; und befindet sich der Körper abermals im Gleichgewicht dadurch, daß ein anderer Punkt ähnlich durch den Stab unterstützt wird, so ist in dem Körper eine zweite durch den Schwerpunkt gehende Linie bestimmt. Demnach müssen sich die beiden geraden Linien, in dem Körper fixiert gedacht, schneiden und durch ihren Schnittpunkt seinen Schwerpunkt bestimmen. Denkt man sich sodann, sagt Pappus, den Körper in seinem Schwerpunkt aufgehängt, so bleibt er in jeder Lage, in die man ihn bringt, in Ruhe; „das ist das für die Theorie der Schwerpunkte grundlegendste Prinzip, deren elementare Sätze man in Archimedes' Büchern *Über das Gleichgewicht* (*περὶ ἰσορροπιῶν*) und in Herons *Mechanik* findet.“ In *Über schwimmende Körper* II. 2 wird uns berichtet, die Aufgabe der Auffindung des Schwerpunkts eines Rotationsparaboloids sei in den *ἰσορροπίαι* gelöst, und in der *Methode*, Satz 1, wird gesagt, die *ἰσορροπικά* enthielten die Aufgabe, den Schwerpunkt eines Dreiecks zu finden. Nun ist die letztgenannte Aufgabe in dem erhaltenen Buch I *Über das Gleichgewicht von Ebenen* (*ἐπιπέδων ἰσορροπίαι*) gelöst. Diese Bemerkung könnte zu der Vermutung führen, die *ἰσορροπίαι* oder *ἰσορροπικά* seien einfach die Abhandlung *Über das Gleichgewicht von Ebenen*. Das kann jedoch nicht richtig sein, denn diese Abhandlung enthält die Aufgabe nicht, den Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids zu finden. Die zu Anfang der *Methode* als ersichtliche oder wohlbekannte, in einem „veröffentlichten“ Werke bereits „bewiesene“ Sätze angeführten mechanischen Sätze sind hauptsächlich wieder Sätze aus *Über das Gleichgewicht von Ebenen* I. Das gilt jedoch nicht von einem unter ihnen, nämlich dem über den Schwerpunkt des *Kegels*. Diese Tatsachen lassen vermuten, daß das Buch I *Über das Gleichgewicht von Ebenen* (das vielleicht *Elemente der Mechanik* hieß) in verstümmelter Form auf uns gekommen ist, daß es *ἰσορροπίαι* weiteren Inhalts enthielt (darunter z. B. die Bestimmung des Schwerpunkts einer Pyramide, eines Kegels, eines Rotationsparaboloids, usw.) und daß es möglicherweise den zweiten Namen *περὶ ζυγῶν* besessen hat. Buch II *Über das Gleichgewicht von Ebenen* (das nur von dem Schwerpunkt des Parabelsegments handelt) kann entweder eine selbständige Abhandlung oder ein Teil des größeren Werkes gewesen sein. Es ist jedoch klar, daß es *ein* mechanisches Buch gegeben haben muß, das älter als *Über das Gleichgewicht von Ebenen* I war, weil in Satz 4 dieses Buches ein mechanischer Satz als früher bewiesen (*προδέδεικται*) vorausgesetzt wird. Das kann in der Tat, wie Zeuthen[1]) meint, entweder ein Werk des Archimedes selbst oder eines Vorgängers gewesen sein; in jedem Falle ist jedoch Archimedes der erste, der die elementarsten mechanischen Sätze in so streng geometrischer Weise behandelte, wie er es in der Abhandlung *Über das Gleichgewicht von Ebenen* tut.

4. *κατοπτρικά,* ein optisches Werk, aus dem Theon (über Ptolemäus, *Synt.* I. S. 29, ed. Halma) eine Bemerkung über Brechung anführt. Vgl. Olympiodorus *in Aristot. Meteor.*, II. S. 94, ed. Ideler.

5. *περὶ σφαιροποιΐας*, *Über die Herstellung einer Kugel*, ein mechanisches Werk über die Konstruktion einer Kugel, die, wie schon erwähnt, die Bewegungen der Himmelskörper darstellte (S. 7).

6. Nach Hipparch muß Archimedes über den *Kalender* oder die Länge des Jahres geschrieben haben (vgl. S. 7 f.).

Arabische Schriftsteller schreiben Archimedes noch Werke über folgende Gegenstände zu: (1) über den Kreis[2]), (2) über ein Siebeneck im Kreise, (3) über einander berührende Kreise, (4) über parallele Linien, (5) über Dreiecke, (6) über die Eigenschaften rechtwinkeliger Dreiecke, (7) ein Buch *Daten;* aber es läßt sich nicht recht feststellen, ob er derartige Werke geschrieben hat. Ein von Gongava (Löwen, 1548) aus dem Arabischen ins Lateinische übersetztes Buch, betitelt *antiqui scriptoris de speculo comburente concavitatis parabolae*, kann kein Werk des Archimedes sein, da es Apollonius erwähnt.

---

[1]) *Bibliotheca Mathematica* VII_3, 1906/7, S. 346.

[2]) Beweise, die als aus diesem Werke des Archimedes herstammend bezeichnet werden, sind unter anderen Beweisen eines Satzes in einem Buche von Abū'l-Raihān Muh. el-Bīrūnī, Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise (*Bibliotheca Mathematica* XI_3, 1910/11, SS. 13, 14) angegeben. Da dieser Satz Ähnlichkeit mit dem Satze 3 des *Liber assumptorum* hat, so spricht Suter die Vermutung aus, dieses letztgenannte Werk sei vielleicht nur ein Teil oder eine Auswahl aus einem umfangreicheren Werke über den Kreis gewesen (a. a. O. S. 67). Dasselbe Werk des el-Bīrūnī (a. a. O. SS. 37, 39) erwähnt als Archimedisch zwei Sätze, die bisher Heron zugeschrieben wurden. Der erste bezieht sich auf die Aufgabe, die Höhe eines Dreiecks zu finden, wenn die Seiten gegeben sind (vgl. Herons *Metrica* I. 5, 6); der andere gibt die berühmte Formel für den Inhalt des Dreiecks, ausgedrückt durch die Seiten, die bei Heron zweimal abgeleitet ist (*Metrica* I. 7 und *Dioptra,* 30). Somit bestätigt sich Suters Ansicht (*Bibliotheca Mathematica* VII_3, 1906/7, S. 100), dieser letzte Satz sei älter als Heron.

Kapitel III.

Archimedes' Beziehungen zu seinen Vorgängern.

Ein außerordentlich großer Teil der in den Schriften des Archimedes behandelten Gegenstände stellt ganz neue eigene Entdeckungen dar. Obwohl die Gesamtheit seiner Stoffe fast enzyklopädisch war, indem sie (ebene und räumliche) Geometrie, Arithmetik, Mechanik, Hydrostatik und Astronomie umfaßte, war er doch kein Kompilator, kein Verfasser von Handbüchern; in dieser Hinsicht unterscheidet er sich gerade von seinem großen Nachfolger Apollonius, dessen Werk, wie das des Euklid vor ihm, zum großen Teile im Systematisieren und Generalisieren der benutzten Methoden bestand und die Ergebnisse auf Grund der einzelnen Bemühungen früherer Geometer gewann. Bei Archimedes haben wir nicht nur das Aufarbeiten vorhandener Stoffe; sein Gegenstand ist immer etwas Neues, ein bestimmter Zuwachs zur Summe des Wissens, und seine vollkommene Originalität muß jedem auffallen, der seine Werke mit Verständnis liest, auch ohne ausdrückliche Bekräftigungen, wie sie in den einleitenden Briefen, die den meisten vorangehen, enthalten sind. Diese Einleitungen sind jedoch für den Mann und sein Werk hervorragend charakteristisch; ihre Aufrichtigkeit und Einfachheit, das Fehlen jeglicher Selbstsucht und irgend welchen Bestrebens, die eigenen Errungenschaften durch Vergleich mit denen anderer zu verherrlichen, oder durch Betonen ihrer Mißerfolge, wo er selbst zum Ziele gekommen war — all' diese Dinge verstärken denselben Eindruck. So pflegt er einfach zu berichten, welche besonderen Entdeckungen seiner Vorgänger ihn auf die Möglichkeit gebracht hätten, sie in neuen Richtungen auszudehnen; z. B. sagt er, im Zusammenhang mit den Bemühungen früherer Geometer, den Kreis und andere Figuren zu quadrieren, sei er auf den Gedanken gekommen, daß noch niemand versucht habe, die Parabel zu quadrieren, er habe sich also mit der Aufgabe beschäftigt und sie schließlich gelöst. In derselben Weise spricht er in der Vorrede zu seiner Abhandlung *Über Kugel und Zylinder* von seinen Entdeckungen über diese Körper als Ergänzungen zu den von Eudoxus bewiesenen Sätzen über Pyramide, Kegel und Zylinder. Er zögert nicht, auszusprechen, daß gewisse Aufgaben ihn lange Zeit genarrt und daß ihn manche bis zur endgültigen Lösung viele Jahre lang in Anspruch genommen hätten; und an einer Stelle (in der Vorrede zu dem Buche *Über Spiralen*) besteht er ausdrücklich darauf, sich eingehend über zwei Sätze zu verbreiten, die er mitgeteilt und bei einer späteren Untersuchung als falsch erkannt hatte, in der Absicht, daraus eine Nutzanwendung herzuleiten. Dieselbe Einleitung enthält eine großmütige Lobrede auf Conon, in der er erklärt, Conon würde gewisse Probleme vor ihm gelöst und zugleich die Geometrie mit vielen anderen Entdeckungen bereichert haben, wenn er nicht zu früh gestorben wäre.

In einigen Objekten seiner Beschäftigung hat Archimedes keine Vorgänger, so in der Hydrostatik, wo er die ganze Wissenschaft erfand, und (was die mathematische Behandlung betrifft) in seinen mechanischen Untersuchungen. In diesen Fällen mußte er daher bei der Grundlegung des Gegenstandes eine Darstellungsweise wählen, die sich enger an die elementarer Lehrbücher anschloß, aber in den späteren Teilen wandte er sich dann zu speziellen Untersuchungen.

So hat der Historiker der Mathematik, wenn er Archimedes' Verpflichtungen gegen seine Vorgänger erörtert, eine verhältnismäßig leichte Aufgabe. Es ist jedoch zunächst nötig zu berichten, wie Archimedes die von den früheren Geometern ausgebildeten Methoden benutzt, und zweitens auf einige Einzelergebnisse einzugehen, die, wie er angibt, früher gefunden sind, und die seinen eigenen Untersuchungen zugrunde liegen, oder die er stillschweigend als bekannt annimmt.

§ 1. Benutzung der überlieferten geometrischen Methoden.

In meiner Ausgabe der *Kegelschnitte* des Apollonius[1]) habe ich versucht, nach dem Vorgange Zeuthens in seinem Werke *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* einigen Aufschluß über die passend sogenannte *geometrische Algebra* zu geben, die in den Werken der griechischen Geometer eine so wichtige Rolle spielt. Die zwei wichtigsten der unter diesem Namen zusammengefaßten Methoden sind (1) die Anwendung der *Proportionenlehre* und (2) die Methode der *Flächenanlegung;* beide Methoden sind in

[1]) *Apollonius of Perga*, SS. CI ff.

den *Elementen* des Euklid vollständig auseinandergesetzt, aber es hat sich ergeben, daß die zweite bei weitem die ältere ist, da sie von Eudemus (wie Proclus erwähnt) den Pythagoreern zugeschrieben wird. Es wurde a. a. O. hervorgehoben, daß die im zweiten Buche des Euklid begonnene und im sechsten fortgesetzte *Flächenanlegung* von Apollonius angewendet wird, um die von ihm als grundlegend benutzten Eigenschaften der Kegelschnitte auszudrücken, nämlich die Eigenschaften, die wir durch die kartesischen Gleichungen

$$y^2 = px,$$
$$y^2 = px \mp \frac{p}{d} x^2$$

ausdrücken, die sich auf einen Durchmesser und die Tangente in einem seiner Endpunkte als Achsen beziehen; die zweite Gleichung wurde mit den Ergebnissen der Sätze 27, 28 und 29 von Euklids sechstem Buche verglichen, die eine geometrische Lösung der quadratischen Gleichungen

$$ax \pm \frac{b}{c} x^2 = D$$

bedeuten. Es wurde ferner gezeigt, daß Archimedes in der Regel seine Behandlung der Zentral-Kegelschnitte nicht nach der Methode der Flächenanlegung ausführt, wie es Apollonius tut, sondern daß er die Grundeigenschaft im allgemeinen in Form einer Proportion ausdrückt

$$\frac{y^2}{x \cdot x_1} = \frac{y'^2}{x' \cdot x'_1},$$

oder im Falle der Ellipse

$$\frac{y^2}{x \cdot x_1} = \frac{b^2}{a^2},$$

wo x, x_1 die von den Endpunkten des der Beziehung zugrunde liegenden Durchmessers gemessenen Abszissen sind.

Es folgt daraus, daß die Flächenanlegung bei Archimedes viel seltener als bei Apollonius vorkommt. Von Archimedes wird sie jedoch in allen Formen mit Ausnahme der allgemeinsten angewendet. Die einfachste Form der „Anlegung eines Rechtecks“ an eine gegebene Strecke, das einer gegebenen Fläche gleich sein soll, tritt z. B. in dem Satze *Über das Gleichgewicht von Ebenen* II. 1 auf; dieselbe Ausdrucksweise wird (wie bei Apollonius) für die Eigenschaft $y^2 = px$ der Parabel angewendet, wo px in der Sprache des Archimedes das an die Strecke p „angelegte“ (*παραπίπτον παρά*) und die Abszisse (x) „zur Breite habende“ (*πλάτος ἔχον*)

Rechteck ist. Dann haben wir in den Sätzen 2, 25, 26, 29 des Buches *Über Konoide und Sphäroide* den vollständigen Ausdruck, der mit der Lösung der Gleichung

$$ax + x^2 = b^2$$

gleichbedeutend ist: „Lege ein Rechteck (an eine gewisse Strecke) an, (das) um ein Quadrat vermehrt (παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ) (einem gewissen Rechteck) gleich (ist)." So soll ein derartiges Rechteck (in Satz 25) dem gleich gemacht werden, welches wir oben im Falle der Hyperbel $x \cdot x_1$ genannt haben, oder, was dasselbe ist, $x(a + x)$ oder $ax + x^2$, wo a die Länge der Hauptachse ist. Aber wir finden, sonderbar genug, bei Archimedes nicht die Anlegung eines Rechtecks, das „um ein Quadrat *vermindert*" ist, das wir erhalten würden, wenn wir im Falle der Ellipse $x(a - x)$ für $x \cdot x_1$ substituieren. Im Falle der Ellipse wird die Fläche $x \cdot x_1$ dargestellt (*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 29) als Gnomon, der die Differenz ist zwischen dem Rechteck $h \cdot h_1$ (h und h_1 sind die Abszissen der Ordinate, die ein Segment der Ellipse abschneidet) und einem an $h_1 - h$ angelegten Rechteck, das um ein Quadrat mit der Seite $h - x$ vergrößert ist; das Rechteck $h \cdot h_1$ ist einfach aus den Seiten h, h_1 konstruiert. So umgeht Archimedes[1]) die Anlegung eines Rechtecks, das um ein Quadrat *vermindert* ist, indem er für $x \cdot x_1$ den ziemlich komplizierten Ausdruck:

$$h \cdot h_1 - [(h_1 - h)(h - x) + (h - x)^2]$$

gebraucht. Daß dieser gleich $x \cdot x_1$ sein muß, ist leicht zu erkennen, da er sich, wie folgt, umformen läßt:

$$\begin{aligned} h \cdot h_1 &- [h_1(h - x) - x(h - x)] \\ &= x(h_1 + h) - x^2 \\ &= ax - x^2, \quad \text{da} \quad h_1 + h = a, \\ &= x \cdot x_1. \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Umformung von Rechtecken und Quadraten in Übereinstimmung mit den Methoden bei Euklid, Buch II, für Archimedes ebenso wichtig ist wie für andere Geometer, und es erübrigt sich, auf diese Form der geometrischen Algebra näher einzugehen.

---

[1]) Zweifellos hatte Archimedes die Absicht, das Lemma in Satz 2 (das die Summation von Reihen mitteilt, deren Glieder die Form $a \cdot rx + (rx)^2$ haben, wo r nacheinander die Werte 1, 2, 3 . . . annimmt,) für das Rotations-Hyperboloid sowohl wie für das Sphäroid dienstbar zu machen.

Die Lehre von den *Proportionen*, wie sie im fünften und sechsten Buche Euklids auseinandergesetzt ist, einschließlich der Transformation von Verhältnissen (angedeutet durch die Ausdrücke *componendo*, *dividendo* usw.) und der Komposition oder Multiplikation von Verhältnissen, ermöglichte es den alten Geometern, mit Größen im allgemeinen zu rechnen und Beziehungen zwischen ihnen herauszuarbeiten, in einer Weise, die an Wirksamkeit nicht viel hinter den Methoden der modernen Algebra zurückbleibt. So konnten Addition und Subtraktion von Verhältnissen durch ein Verfahren ausgeführt werden, gleichbedeutend mit dem, das in der modernen Algebra „auf einen gemeinsamen Nenner bringen“ heißt. Sodann konnte die Komposition oder Multiplikation von Verhältnissen unbegrenzt ausgedehnt werden, und daher fanden die algebraischen Operationen der Multiplikation und Division in der geometrischen Algebra einen leichten und angemessenen Ausdruck. Beispielsweise sei a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ eine Reihe von Größen in stetiger Proportion (d. h. in geometrischer Progression), so daß

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Durch Multiplikation folgt:

$$\frac{a_n}{a_0} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n, \quad \text{oder} \quad \frac{a_1}{a_0} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}.$$

Es ist leicht verständlich, wie fruchtbar eine Methode wie die der Proportionen in der Hand eines Archimedes werden konnte; es seien hier einige Beispiele eingeschoben, die illustrieren mögen, wie meisterhaft er diese Methode anwendet.

1. Ein gutes Beispiel einer Reduktion der Ordnung eines Verhältnisses in der eben gezeigten Weise liefert *Über das Gleichgewicht von Ebenen*, II. 10. Hier betrachtet Archimedes ein Verhältnis, das wir a^3/b^3 nennen wollen, wo $a^2/b^2 = c/d$ ist; er führt das Verhältnis zwischen Kuben auf ein solches zwischen Strecken zurück, indem er zwei Strecken x, y einführt, so daß

$$\frac{c}{x} = \frac{x}{d} = \frac{d}{y}.$$

Daraus folgt
$$\left(\frac{c}{x}\right)^2 = \frac{c}{d} = \frac{a^2}{b^2}.$$

oder
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

und daraus
$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{c}{x}\right)^3 = \frac{c}{x} \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{d}{y} = \frac{c}{y}.$$

2. Im vorstehenden haben wir ein Beispiel der Anwendung von Hilfslinien zum Zwecke der Vereinfachung von Verhältnissen, wobei gleichsam eine Kraftersparnis zustande kommt, die es ermöglicht, eine schwierige Aufgabe erfolgreicher anzugreifen. Mittels solcher Hilfslinien oder, was dasselbe ist, zur Hilfe konstruierter fester Punkte in einer Figur, verbunden mit der Anwendung von Proportionen, ist Archimedes imstande, bemerkenswerte *Eliminationen* auszuführen.

So erhält er in dem Satze *Über Kugel und Zylinder* II. 4 drei Relationen, die drei noch unbestimmte Punkte verknüpfen, und eliminiert zugleich zwei Punkte, so daß die Aufgabe darauf zurückgeführt ist, den übrigbleibenden Punkt mit Hilfe einer Gleichung zu finden. Algebraisch ausgedrückt, führen die drei ursprünglichen Beziehungen zu den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{3a-x}{2a-x} &= \frac{y}{x} \\ \frac{a+x}{x} &= \frac{z}{2a-x} \\ \frac{y}{z} &= \frac{m}{n} \end{aligned}\right\},$$

und das Ergebnis nach der Elimination von y und z drückt Archimedes in einer Form aus, die dasselbe bedeutet wie

$$\frac{m+n}{n} \cdot \frac{a+x}{a} = \frac{4a^2}{(2a-x)^2}.$$

Der Satz *Über das Gleichgewicht von Ebenen* II. 9 beweist wiederum nach derselben Methode der Proportionen, wenn die Strecken a, b, c, d, x, y den folgenden Bedingungen genügen

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}, \quad (a > b > c > d) \\ \frac{d}{a-d} = \frac{x}{\frac{3}{5}(a-c)}, \\ \frac{2a+4b+6c+3d}{5a+10b+10c+5d} = \frac{y}{a-c}, \end{aligned}\right\}$$

dann gilt $$x + y = \tfrac{2}{5}a.$$

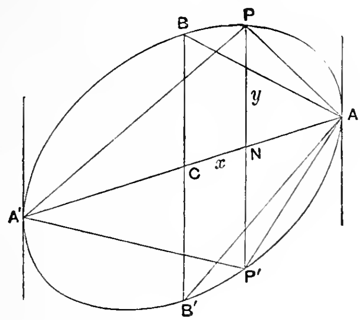
Der Satz ist nur als Hilfssatz für den folgenden eingefügt und von keinerlei wesentlicher Bedeutung; aber ein Blick auf den Beweis (der wieder eine Hilfslinie einführt) wird zeigen, daß er wirklich ein außergewöhnliches Beispiel der Behandlung von Proportionen darbietet.

3. Noch ein anderes Beispiel ist hier wertvoll. Es führt zu dem Beweise, wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

daß dann $$\frac{2a+x}{a+x} \cdot y^2 (a-x) + \frac{2a-x}{a-x} y^2 (a+x) = 4ab^2.$$

A, A' sind die Berührungspunkte von zwei parallelen Tangentialebenen eines Sphäroids; die Ebene der Zeichnung ist die Ebene durch AA' und die Achse des Sphäroids, und PP' ist die Schnittlinie dieser Ebene mit einer anderen zu ihr senkrechten und zu den Tangentialebenen parallelen Ebene, welche letzte das Sphäroid



in zwei Segmente mit den Achsen AN, $A'N$ zerschneidet. Eine andere Ebene ist durch den Mittelpunkt C parallel zu den Tangentialebenen gelegt; diese teilt das Sphäroid in zwei Hälften. Schließlich sind Kegel konstruiert, deren Grundflächen die Schnitte des Sphäroids mit den parallelen Ebenen sind, wie in der Figur angedeutet ist.

Der Satz des Archimedes hat die folgende Form [*Über Konoide und Sphäroide*, Sätze 31, 32].

Ist APP' das kleinere von den beiden Segmenten, deren gemeinsame Basis der Schnitt durch PP' ist, und sind x, y die Koordinaten von P, so hat er in vorangehenden Sätzen bewiesen, daß

$$\frac{\text{(Volumen des) Segment(s) } APP'}{\text{(Volumen des) Kegel(s) } APP'} = \frac{2a+x}{a+x} \quad \ldots \quad (\alpha),$$

und $$\frac{\text{halbes Sphäroid } ABB'}{\text{Kegel } ABB'} = 2; \quad \ldots\ldots \quad (\beta),$$

und er sucht den Beweis, daß

$$\frac{\text{Segment } A'PP'}{\text{Kegel } A'PP'} = \frac{2a - x}{a - x}.$$

Die Methode ist folgende.

Wir haben $$\frac{\text{Kegel } ABB'}{\text{Kegel } APP'} = \frac{a}{a-x} \cdot \frac{b^2}{y^2} = \frac{a}{a-x} \cdot \frac{a^2}{a^2 - x^2}.$$

Setzen wir $$\frac{z}{a} = \frac{a}{a-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma),$$

so wird das Verhältnis der Kegel $\dfrac{za}{a^2 - x^2}$.

Nun ist nach (α)

$$\frac{\text{Kegel } APP'}{\text{Segment } APP'} = \frac{a+x}{2a+x}.$$

Daher, *ex aequali*,

$$\frac{\text{Kegel } ABB'}{\text{Segment } APP'} = \frac{za}{(a-x)(2a+x)}.$$

Aus (β) folgt

$$\frac{\text{Sphäroid}}{\text{Segment } APP'} = \frac{4za}{(a-x)(2a+x)},$$

und daraus $$\frac{\text{Segment } A'PP'}{\text{Segment } APP'} = \frac{4za - (a-x)(2a+x)}{(a-x)(2a+x)}$$

$$= \frac{z(2a-x) + (2a+x) \cdot [z - (a-x)]}{(a-x)(2a+x)}.$$

Wir wollen nun das Verhältnis des Segmentes $A'PP'$ zu dem Kegel $A'PP'$ erhalten, und die Vergleichung des Segmentes mit dem Kegel ergibt sich, wenn wir noch zwei Verhältnisse *ex aequali* kombinieren, nämlich

$$\frac{\text{Segment } APP'}{\text{Kegel } APP'} = \frac{2a+x}{a+x}, \quad \text{nach } (\alpha),$$

und $$\frac{\text{Kegel } APP'}{\text{Kegel } A'PP'} = \frac{a-x}{a+x}.$$

Kombinieren wir nun die *drei* letzten Proportionen *ex aequali*, so haben wir

$$\frac{\text{Segment } A'PP'}{\text{Kegel } A'PP'} = \frac{z(2a-x) + (2a+x)[z-(a-x)]}{a^2 + 2ax + x^2}$$

$$= \frac{z(2a-x) + (2a+x)[z-(a-x)]}{z(a-x) + (2a+x)x},$$

da $\qquad a^2 = z(a-x)$, wegen (γ).

[Der Zweck der Transformation im Zähler und Nenner des letzten Bruches, wodurch $z(2a-x)$ und $z(a-x)$ die ersten Glieder werden, ist jetzt klar, da $\frac{2a-x}{a-x}$ der Bruch ist, den Archimedes zu erhalten wünscht, und um zu beweisen, daß der gefundene Bruch diesem gleich ist, ist nur zu zeigen, daß

$$\frac{2a-x}{a-x}=\frac{z-(a-x)}{x}.]$$

Nun ist
$$\begin{aligned}\frac{2a-x}{a-x}&=1+\frac{a}{a-x}\\ &=1+\frac{z}{a},\quad \text{nach } (\gamma),\\ &=\frac{a+z}{a}=\frac{z+a-(2a-x)}{a-(a-x)}\quad (\textit{dividendo}^{1)})\\ &=\frac{z-(a-x)}{x},\end{aligned}$$

so daß
$$\frac{\text{Segment } A'PP'}{\text{Kegel } A'PP'}=\frac{2a-x}{a-x}.$$

4. Eine Anwendung der Methode der Proportionen bei Euklid verdient Erwähnung, weil Archimedes sie unter ähnlichen Umständen *nicht* benutzt. Archimedes (*Quadratur der Parabel*, Satz 23) summiert die geometrische Reihe

$$a+a\left(\tfrac{1}{4}\right)+a\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+\ldots+a\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}$$

nahezu ähnlich, wie es in unseren Lehrbüchern geschieht, während Euklid (IX. 35) jede geometrische Reihe mit beliebiger Gliederzahl mit Hilfe von Proportionen folgendermaßen summiert.

Es seien $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ $(n+1)$ Glieder einer geometrischen Reihe, unter ihnen a_{n+1} das größte. Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\ldots=\frac{a_2}{a_1}.$$

Daher
$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}}=\ldots=\frac{a_2-a_1}{a_1}.$$

Addieren wir alle Vorder- und alle Hinterglieder, so erhalten wir

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1},$$

was die Summe von n Gliedern der Reihe liefert.

---

1) Bedeutet den Schluß $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$ aus der Voraussetzung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

§ 2. Frühere Entdeckungen, Quadraturen und Kubaturen betreffend.

Archimedes spricht davon, daß der Satz: *Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate über ihren Durchmessern* von früheren Geometern bewiesen worden sei, und sagt auch, daß der Beweis auf einem gewissen Hilfssatze beruhe, den er folgendermaßen ausspricht: „Von ungleichen Längen-, Flächen-, Körpergrößen übertrifft die größere die kleinere um eine Größe, die, [fortgesetzt] zu sich selbst addiert, imstande ist, jede gegebene gleichartige (τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων) Größe zu übertreffen.“ Wir wissen, daß Hippokrates von Chios den Satz bewiesen hat, daß sich Kreise wie die Quadrate über ihren Durchmessern verhalten, aber über seine Methode kann kein sicherer Schluß gezogen werden. Andererseits schreibt man Eudoxus (von dem in der Vorrede zu *Kugel und Zylinder* erwähnt wird, daß er zwei sogleich anzuführende Sätze aus der räumlichen Geometrie bewiesen habe) allgemein die Erfindung der *Exhaustions-Methode* zu, mit der Euklid den fraglichen Satz XII. 2 beweist. Der von Archimedes genannte Hilfssatz, der in dem ursprünglichen Beweise verwendet sein soll, findet sich jedoch in dieser Form bei Euklid nicht und wird in dem Beweise von XII. 2 nicht benutzt; der hier angewandte Hilfssatz ist der von ihm X. 1 bewiesene, nämlich: „Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind und von der größeren mehr als die Hälfte weggenommen wird, von dem Reste abermals mehr als die Hälfte und dies immer so fort, so bleibt einmal ein Rest, der kleiner ist, als die kleinere gegebene Größe.“ Dieser letzte Hilfssatz wird von Archimedes häufig angewendet, und die Anwendung auf gleichseitige einem Kreise oder Sektor eingeschriebene Polygone in der Art von XII. 2 wird als in den *Elementen*[1]) überliefert bezeichnet, womit offenbar nur Euklids *Elemente* gemeint sein können. Die durch die Erwähnung von *zwei* Hilfssätzen im Zusammenhange mit dem fraglichen Satze scheinbar entstehende Schwierigkeit läßt sich, wie ich meine, durch einen Hinweis auf den Beweis von X. 1 bei Euklid wegschaffen. Hier nimmt er die kleinere Größe und sagt, durch Multiplikation [mit einer hinreichend großen Zahl] lasse es sich erreichen, daß sie die größere einmal übertreffe, und diese Feststellung basiert er offenbar auf der vierten Definition des Buches V., des Inhalts: „Größen haben ein Verhältnis, wenn sie, vervielfacht, einander übertreffen können.“ Betrachtet man also die kleinere Größe in X. 1 als Differenz zwischen

---

[1]) *Über Kugel und Zylinder*, I. 6.

zwei ungleichen Größen, so ist klar, daß der von Archimedes zuerst erwähnte Hilfssatz im wesentlichen zum Beweise des Hilfssatzes X. 1 benutzt ist, der in den uns überlieferten Untersuchungen über Quadraturen und Kubaturen eine so viel größere Rolle zu spielen scheint.[1])

Die zwei Sätze, die Archimedes dem Eudoxus zuschreibt[2]), sind:

(1) *Jede Pyramide ist der dritte Teil des Prismas, das dieselbe Grundfläche wie die Pyramide und gleiche Höhe hat,* und

(2) *Jeder Kegel ist der dritte Teil des Zylinders, der dieselbe Grundfläche wie der Kegel und gleiche Höhe hat.*

Archimedes sagt zwar in der Vorrede zu Buch I *Über Kugel und Zylinder*, daß diese Sätze keinem der Geometer vor Eudoxus bekannt gewesen seien, doch kann er nur gemeint haben, daß Eudoxus der erste war, der einen wissenschaftlichen Beweis für die Sätze angegeben hat; denn in der neuentdeckten *Methode* sagt er, Demokrit habe ihre Gültigkeit als erster behauptet, obwohl er nicht imstande war, sie zu beweisen, und daher gebühre Demokrit kein geringer Teil des Verdienstes.

Die anderen Hilfssätze aus der räumlichen Geometrie, die Archimedes als von früheren Geometern bewiesen anführt, sind:[3])

(3) *Kegel von gleicher Höhe stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen, und umgekehrt.*

(4) *Wenn ein Zylinder von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so verhält sich der Zylinder zum Zylinder wie die Achse zur Achse.*

(5) *Kegel, welche dieselben Grundflächen wie Zylinder und gleiche Höhe mit ihnen haben, verhalten sich wie die Zylinder.*

(6) *Die Grundflächen gleicher Kegel sind zu ihren Höhen umgekehrt proportional, und umgekehrt.*

(7) *Kegel, deren Grundflächen-Durchmesser dasselbe Verhältnis wie ihre Achsen haben, stehen im dreifachen Verhältnis* [d. h. verhalten sich wie die Kuben] *der Grundflächen-Durchmesser.*

---

[1]) Der Zusammenhang zwischen den beiden Hilfssätzen ergibt sich in algebraischer Form folgendermaßen:

$$m \cdot \beta > \alpha \quad \text{(Archimedes), und}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2^n \cdot \beta > \alpha, \\ \text{d. h. } \beta > \dfrac{\alpha}{2^n} \end{array}\right\} \text{(Euklid).}$$

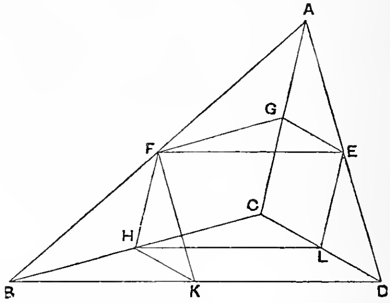
[2]) *Über Kugel und Zylinder* I. Vorrede.

[3]) Hilfssätze zwischen Satz 16 und 17 von Buch I *Über Kugel und Zylinder.*

In der Vorrede zur *Quadratur der Parabel* sagt er, frühere Geometer hätten auch bewiesen:

(8) *Kugeln haben zu einander das dreifache Verhältnis ihrer Durchmesser;* er fügt hinzu, daß dieser Satz und der erste von denen, die er Eudoxus zuschreibt, oben mit (1) bezeichnet, mit Hilfe desselben Hilfssatzes bewiesen wurden, nämlich, daß die Differenz zwischen zwei ungleichen Größen so vervielfacht werden kann, daß sie jede gegebene Größe übertrifft, während (wenn Heibergs Text richtig ist) der zweite der Sätze des Eudoxus, mit (2) bezeichnet, mittels „eines dem vorigen ähnlichen Hilfssatzes" bewiesen wurde. Tatsächlich stehen alle die Sätze (1) bis (8) im zwölften Buche des Euklid, mit Ausnahme von (5), der jedoch leicht aus (2) folgt; (1), (2), (3) und (7) beruhen alle auf demselben Hilfssatze [X. 1] wie der bei Euklid XII. 2 benutzte.

Die Beweise für die obigen 7 Sätze mit Ausnahme von (5), wie sie bei Euklid gegeben werden, sind zu lang, um sie hier auszuführen, aber die folgende Skizze wird den in den Beweisen eingeschlagenen Weg und die Reihenfolge der Sätze zeigen. Es sei $ABCD$ eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche; sie werde von zwei Ebenen geschnitten, die eine halbiere AB, AC, AD bezüglich in F, G, E, die andere halbiere BC, BD, BA bezüglich in H, K, F. Diese Ebenen sind dann je zu einer Fläche parallel



und schneiden zwei zu der ursprünglichen ähnliche und untereinander gleiche Pyramiden ab, während bewiesen wird, daß der Rest aus zwei gleichen Prismen besteht, die zusammen genommen größer als die Hälfte der ursprünglichen Pyramide sind [XII. 3]. Sodann wird bewiesen [XII. 4], wenn zwei Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche und gleicher Höhe gegeben sind, und jede in der genannten Weise in zwei gleiche zur ganzen ähnliche Pyramiden und zwei Prismen geteilt wird, so verhalten sich die Summen der Prismen in den beiden Pyramiden zueinander wie die Grundflächen der ganzen Pyramiden. Wenn wir in gleicher Weise die beiden in jeder übrigbleibenden Pyramiden teilen, dann wieder alle Pyramiden, die übrigbleiben, und so fort, so folgt einerseits nach X. 1, daß wir schließlich Restpyramiden bekommen werden, die zusammen kleiner als irgend ein vorgeschriebener Körper sind, und andererseits, daß die Summen aller der bei den aufeinanderfolgenden Unterteilungen sich ergebenden Prismen sich wie die Grundflächen der ursprünglichen Pyramiden verhalten. Demnach ist Euklid imstande, die regelrechte im Satze XII. 2 auseinandergesetzte Exhaustionsmethode anzuwenden und den Satz [XII. 5] aufzustellen, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Der Satz wird sodann [XII. 6] auf Pyramiden mit gleicher Höhe und vieleckigen Grundflächen ausgedehnt. Demnächst [XII. 7] wird ein dreiseitiges Prisma in drei Pyramiden geteilt, die mit Hilfe von XII. 5 als gleich nachgewiesen werden; es folgt als Zusatz, daß jede Pyramide der dritte Teil des Prismas mit derselben Grundfläche und gleicher Höhe ist. Sodann werden zwei ähnliche und ähnlich gelegene Pyramiden genommen und die Parallelepipede vervollständigt, die sich als sechsmal so groß wie die entsprechenden Pyramiden ergeben; und da (nach XI. 33) ähnliche Parallelepipede „im dreifachen Verhältnis entsprechender Seiten stehen", folgt dasselbe für die Pyramiden [XII. 8]. Ein Zusatz gibt die unmittelbar ersichtliche Ausdehnung auf den Fall ähnlicher Pyramiden mit vieleckigen Grundflächen. Der Satz [XII. 9], daß sich in gleichen dreiseitigen Pyramiden die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten, wird nach derselben Methode der Vervollständigung der Parallelepipede und mit Benutzung von XI. 34 bewiesen; und ähnlich für die Umkehrung. Dann wird bewiesen [XII. 10]: wenn man in den Kreis, der die Grundfläche eines Zylinders ist, ein Quadrat beschreibt und dann nacheinander Vielecke, indem man die in jedem Falle sich ergebenden Bogen halbiert und so die Seitenzahl verdoppelt, und wenn man Prismen von gleicher Höhe wie der Zylinder über dem Quadrat und den Vielecken als Grundflächen errichtet, so ist das Prisma mit der quadratischen Basis größer als die Hälfte des Zylinders, das nächste Prisma fügt dazu mehr als die Hälfte des Restes, und so fort. Und jedes Prisma ist das Dreifache der Pyramide mit derselben Grundfläche und Höhe. So ergibt dieselbe Exhaustionsmethode wie in XII. 2, daß jeder Kegel der dritte Teil des Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe ist. Genau dieselbe Methode wird benutzt, um zu beweisen [XII. 11], daß Kegel und Zylinder mit gleichen Höhen sich wie ihre Grundflächen verhalten, und [XII. 12] daß sich ähnliche Kegel und Zylinder wie die Kuben ihrer Grundflächendurchmesser verhalten (der letzte Satz hängt selbstverständlich von dem ähnlichen Satze XII. 8 für Pyramiden ab). Die nächsten drei Sätze werden ohne neue Bezugnahme auf X. 1 bewiesen. So wird das in der 5. Definition des Buches V niedergelegte Kriterium der Gleichvielfachen benutzt, um zu beweisen [XII. 13], wenn ein Zylinder mit einer Ebene parallel zu seinen Grundflächen geschnitten wird, so verhalten sich die entstehenden Zylinder wie ihre Achsen. Daraus folgt leicht [XII. 14], daß Kegel und Zylinder mit gleichen Grundflächen ihren Höhen proportional sind, und [XII. 15] daß in gleichen Kegeln und Zylindern die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, und umgekehrt, daß Kegel und Zylinder mit dieser Eigenschaft gleich sind. Um schließlich zu beweisen, daß Kugeln sich wie die Kuben ihrer Durchmesser verhalten [XII. 18], wird ein neues Verfahren eingeschlagen, das zwei einleitende Sätze erfordert. In dem ersten von diesen [XII. 16] wird durch Anwendung des üblichen Hilfssatzes X. 1 bewiesen, wenn zwei (selbst nahezu gleiche) konzentrische Kreise gegeben sind, so kann in den äußeren Kreis ein gleichseitiges Vieleck eingeschrieben werden, dessen Seiten den inneren nicht berühren; der zweite Satz [XII. 17] benutzt das Ergebnis des ersten, um zu beweisen, wenn zwei konzentrische Kugeln gegeben sind, so ist es möglich, ein gewisses Polyeder in die äußere einzubeschreiben, so daß es die innere nirgends berührt, und ein Zusatz fügt den Beweis hinzu, wenn ein ähnliches Polyeder in eine zweite Kugel eingeschrieben wird, daß dann die Volumina der Polyeder sich wie die Kuben der Durchmesser der betreffenden Kugeln verhalten. Diese letzte Eigenschaft wird dann angewendet, um zu beweisen [XII. 18], daß Kugeln sich wie die Kuben ihrer Durchmesser verhalten.

§ 3. Kegelschnitte.

In meiner Ausgabe der *Kegelschnitte* des Apollonius findet sich eine erschöpfende Aufzählung der von Archimedes benutzten Sätze über Kegelschnitte, nach drei Gesichtspunkten eingeteilt: (1) solche Sätze, die er ausdrücklich früheren Schriftstellern zuschreibt, (2) solche, die er ohne einen solchen Hinweis als bekannt annimmt, (3) solche, die neue, Archimedes selbst zu verdankende Entwickelungen aus der Kegelschnittslehre darzustellen scheinen. Alle diese Eigenschaften werden in diesem Buche an ihrer Stelle auftreten; es wird hier genügen, nur solche Sätze anzuführen, die der ersten Rubrik angehören, und einige aus der zweiten, die man sicher als vorher bekannt ansehen kann.

Archimedes sagt, die folgenden Sätze „sind in den Elementen der Kegelschnitte bewiesen“, d. h. in den älteren Lehrbüchern von Euklid und Aristaeus.

1. Über die *Parabel*:

(a) wenn PV der Durchmesser eines Segmentes ist und QVq die zu der Tangente in P parallele Sehne, so ist $QV = Vq$;

(b) wenn die Tangente in Q die Verlängerung von VP in T schneidet, so ist $PV = PT$;

(c) wenn zwei zu der Tangente in P parallele Sehnen QVq, $Q'V'q'$ den Durchmesser PV in V bzw. V' schneiden, so gilt

$$PV : PV' = QV^2 : Q'V'^2.$$

2. Wenn zwei von einem Punkte aus gezogene Linien *irgend einen Kegelschnitt* berühren, und zwei zu den Tangenten bezüglich parallele Sehnen sich schneiden, so verhalten sich die Rechtecke aus den Abschnitten der Sehnen wie die Quadrate über den bezüglich zu ihnen parallelen Tangenten.

3. Der folgende Satz wird als „in den Kegelschnitten“ bewiesen angeführt. Wenn in einer Parabel p_a der Parameter der Hauptordinaten ist, QQ' eine zu der Achse nicht senkrechte Sehne, die in V von dem Durchmesser PV halbiert wird, p der Parameter der auf PV bezogenen Ordinaten, und wenn QD auf PV senkrecht steht, dann gilt

$$VQ^2 : QD^2 = p : p_a.$$

[Vgl. *Über Konoide und Sphäroide,* Satz 3.]

Die Parabel-Eigenschaften $PN^2 = p_a \cdot AN$ und $QV^2 = p \cdot PV$ waren vor der Zeit des Archimedes schon wohlbekannt. In der Tat ist die erste Eigenschaft von Menaechmus, dem Entdecker der Kegelschnitte, benutzt worden.

Man kann als sicher annehmen, daß die folgenden Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel in den *Kegelschnitten* des Euklid bewiesen waren.

1. Für die Ellipse

$$PN^2 : AN \cdot A'N = P'N'^2 : AN' \cdot A'N' = CB^2 : CA^2,$$

und $$QV^2 : PV \cdot P'V = Q'V'^2 : PV' \cdot P'V' = CD^2 : CP^2.$$

(Beide Sätze konnten in der Tat leicht aus dem oben angeführten Satze über die Rechtecke aus den Abschnitten sich schneidender Sehnen abgeleitet werden.)

2. Für die Hyperbel

$$PN^2 : AN \cdot A'N = P'N'^2 : AN' \cdot A'N',$$

und

$$QV^2 : PV \cdot P'V = Q'V'^2 : PV' \cdot P'V',$$

obwohl in diesem Falle das Fehlen der Vorstellung von der zweiteiligen Hyperbel als *einer Kurve* (die zuerst bei Apollonius auftritt) Euklid und auch Archimedes verhinderte, die Verhältnisse denen der Quadrate über den parallelen Halbmessern gleichzusetzen.

3. Wenn P irgend ein Punkt einer Hyperbel ist und PK, PL je zu einer Asymptote parallel bis zum Schnittpunkt mit der anderen gezogen werden, dann gilt

$$PK \cdot PL = \text{const.}$$

Diese Eigenschaft war Menaechmus in dem besonderen Falle der gleichseitigen Hyperbel bekannt.

Wahrscheinlich kannten die Vorgänger des Archimedes die Eigenschaft der Subnormale der Parabel ($NG = \frac{1}{2}p_a$). Sie wird stillschweigend als richtig angenommen, *Über schwimmende Körper*, II, 4, usw.

Aus der Benutzung der Eigenschaft, daß in der Hyperbel $AT < AN$ (wo N der Fußpunkt der Ordinate von P ist, und T der Schnittpunkt der Tangente in P mit der Hauptachse) können wir vielleicht schließen, daß die harmonische Eigenschaft:

$$TP : TP' = PV : P'V$$

oder wenigstens ihr besonderer Fall:

$$TA : TA' = AN : A'N$$

vor Archimedes bekannt war.

Schließlich hatte mit Beziehung auf die Entstehung der Kegelschnitte aus Kegeln und Zylindern Euklid schon in seinen *Phaenomena* festgestellt: „Wenn ein Kegel oder Zylinder mit einer zur Grundfläche nicht parallelen Ebene geschnitten wird, so ist der entstehende Schnitt ein Schnitt eines spitzwinkeligen Kegels [eine Ellipse], ähnlich einem ϑυρεός.“ Zwar ist es nicht wahrscheinlich, daß Euklid einen anderen als einen geraden Kegel im Sinne hatte, doch ist die Feststellung mit *Über Konoide und Sphäroide*, Sätze 7, 8, 9, zu vergleichen.

§ 4. Oberflächen zweiten Grades.

Satz 11 der Abhandlung über *Konoide und Sphäroide* stellt ohne Beweis die Beschaffenheit gewisser ebener Schnitte der Rotationskonikoide fest. Außer den evidenten Tatsachen, (1) daß

Schnitte senkrecht zur Umdrehungsachse Kreise sind, und (2) daß Schnitte durch die Achse dem erzeugenden Kegelschnitte kongruent sind, behauptet Archimedes folgendes:

1. In einem Rotationsparaboloid ist jeder ebene, zur Achse parallele Schnitt eine mit der erzeugenden kongruente Parabel.

2. In einem Rotationshyperboloid ist jeder ebene, zur Achse parallele Schnitt eine der erzeugenden ähnliche Hyperbel.

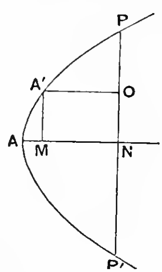
3. In einem Rotationshyperboloid ist ein ebener Schnitt durch die Spitze des Asymptotenkegels eine Hyperbel, die der erzeugenden nicht ähnlich ist.

4. In jedem Sphäroid ist ein ebener, zur Achse paralleler Schnitt eine der erzeugenden ähnliche Ellipse.

Archimedes setzt hinzu: „Die Beweise aller dieser Sätze sind offenbar (φανεϱαί).“ Die Beweise lassen sich in der Tat wie folgt ergänzen.

1. *Schnitt des Rotationsparaboloids mit einer zur Achse parallelen Ebene.*

Die Ebene der Zeichnung sei der ebene Schnitt durch die Achse AN, der den gegebenen ebenen Schnitt rechtwinkelig schneidet; $A'O$ sei die Schnittlinie. POP' sei eine doppelte Ordinate, bezogen auf AN in dem Schnitt durch die Achse; sie schneidet $A'O$ und AN rechtwinkelig in O bzw. N. $A'M$ stehe senkrecht auf AN.



Es werde in O auf $A'O$ in der Ebene des gegebenen zur Achse parallelen Schnittes das Lot errichtet, auf dem durch die Oberfläche die Länge y begrenzt werde.

Dann gilt, da der Endpunkt von y auf dem Kreisschnitt mit dem Durchmesser PP' liegt,

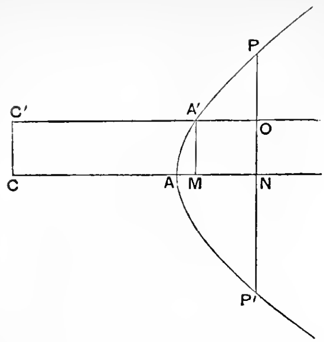
$$y^2 = PO \cdot P'O.$$

Ist $A'O = x$ und p der Hauptparameter der erzeugenden Parabel, so folgt weiter

$$\begin{aligned} y^2 &= PN^2 - ON^2 \\ &= PN^2 - A'M^2 \\ &= p(AN - AM) \\ &= px, \end{aligned}$$

so daß der Schnitt eine mit der erzeugenden kongruente Parabel ist.

2. *Schnitt des Rotationshyperboloids mit einer zur Achse parallelen Ebene.*



Wir nehmen, wie vorher, den ebenen Schnitt durch die Achse, der den gegebenen ebenen Schnitt in $A'O$ rechtwinkelig schneidet. Die Hyperbel PAP' in der Zeichnungs-Ebene stelle den ebenen Schnitt durch die Achse dar, und C sei der Mittelpunkt (d. h. die Spitze des Asymptotenkegels). Es werde CC' senkrecht zu CA gezogen bis zum Schnittpunkte C' mit der Verlängerung von OA'. Das übrige werde wie vorher konstruiert.

Es sei

$$CA = a, \qquad C'A' = a', \qquad C'O = x,$$

und y habe dieselbe Bedeutung wie vorher.

Dann ist

$$y^2 = PO \cdot PO' = PN^2 - A'M^2,$$

und wegen der Eigenschaft der ursprünglichen Hyperbel

$$PN^2 : CN^2 - CA^2 = A'M^2 : CM^2 - CA^2$$

(was konstant ist).

Daher $\quad A'M^2 : CM^2 - CA^2 = PN^2 : CN^2 - CA^2$

$$= PN^2 - A'M^2 : CN^2 - CM^2$$

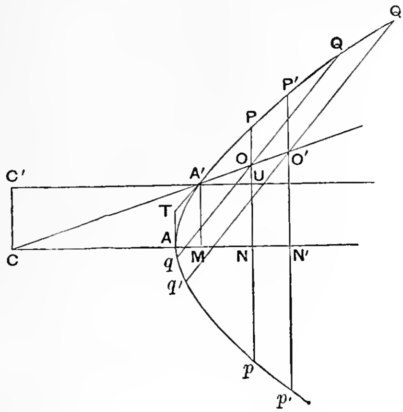
$$= y^2 : x^2 - a'^2,$$

woraus hervorgeht, daß der Schnitt eine der ursprünglichen ähnliche Hyperbel ist.

3. *Schnitt eines Rotationshyperboloids mit einer Ebene durch den Mittelpunkt* (d. h. *die Spitze des Asymptotenkegels*).

Ich halte es für zweifellos, daß Archimedes seinen Satz über diesen Schnitt mit Hilfe derselben allgemeinen Kegelschnitts-Eigenschaft bewiesen hat, die er zum Beweise der Sätze 3 und 12—14 derselben Abhandlung benutzt, und die er zu Anfang des Satzes 3 als bekannten, in den „Elementen der Kegelschnitte" bewiesenen Satz anführt, nämlich daß die Rechtecke aus den Abschnitten sich schneidender Sehnen sich wie die Quadrate über den parallelen Tangenten verhalten.

Die Ebene der Zeichnung stelle den ebenen Schnitt durch die Achse dar, der die gegebene Ebene durch den Mittelpunkt rechtwinkelig schneidet. $CA'O$ sei die Schnittlinie, und zwar C der Mittelpunkt, A' der Schnittpunkt von $CA'O$ mit der Oberfläche. $CAMN$ sei die Achse des Hyperboloids und POp, $P'O'p'$ zwei auf sie bezogene Doppelordinaten in dem ebenen Schnitt durch die Achse, die $CA'O$ in O bzw. O' schneiden; $A'M$ sei die Ordinate von A'. Wir legen in A und A' die Tangenten an den Schnitt durch die Achse, die sich in T schneiden, und nennen



QOq, $Q'O'q'$ die Doppelordinaten in demselben Kegelschnitt, die zu der Tangente in A' parallel sind, und bezüglich durch O, O' gehen.

Es seien, wie vorher, y und y' die von der Oberfläche auf den in O und O' in der Ebene des gegebenen Schnittes durch $CA'O$ auf OC errichteten Loten abgeschnittenen Strecken, und

$$CO = x, \quad CO' = x', \quad CA = a, \quad CA' = a'.$$

Dann haben wir wegen der Eigenschaft der sich schneidenden Sehnen, da $QO = Oq$,

$$PO \cdot Op : QO^2 = TA^2 : TA'^2 = P'O' \cdot O'p' : Q'O'^2.$$

Ferner $\quad y^2 = PO \cdot Op, \quad y'^2 = P'O' \cdot O'p',$

und wegen der Eigenschaft der Hyperbel

$$QO^2 : x^2 - a'^2 = Q'O'^2 : x'^2 - a'^2.$$

Es folgt, *ex aequali*, daß

$$y^2 : x^2 - a'^2 = y'^2 : x'^2 - a'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

und damit, daß der Schnitt eine Hyperbel ist.

Um zu beweisen, daß diese Hyperbel der erzeugenden nicht ähnlich ist, ziehen wir CC' senkrecht zu CA, und $C'A'$ parallel zu CA, die sich in C' schneiden; $C'A'$ schneide Pp in U.

Wenn nun die Hyperbel (α) der ursprünglichen ähnlich wäre, müßte sie nach dem vorangehenden Satze der Hyperbel ähnlich sein, die durch die in $C'A'U$ auf der Papier-Ebene senkrechte Ebene ausgeschnitten wird.

Nun ist

$$CO^2 - CA'^2 = (C'U^2 - C'A'^2) + (CC' + OU)^2 - CC'^2$$
$$> C'U^2 - C'A'^2,$$

und $$PO \cdot Op < PU \cdot Up.$$

Daher $$PO \cdot Op : CO^2 - CA'^2 < PU \cdot Up : C'U^2 - C'A'^2,$$

und es folgt, daß die Hyperbeln nicht ähnlich sind.[1])

---

[1]) Ich halte es für wahrscheinlicher, daß Archimedes diesen Beweis benutzt hat, als einen, den Zeuthen skizziert (S. 421). Er benutzt einfach die Gleichung der Hyperbel und verfährt folgendermaßen. Wenn y dieselbe Bedeutung wie oben hat, und die auf die Achsen CA, CC' bezogenen Koordinaten von P z, x sind, während die von O, bezogen auf dieselben Achsen, z, x' sind, so haben wir für den Punkt P

$$x^2 = \varkappa (z^2 - a^2),$$

wo $\varkappa$ konstant ist.

Ebenso ist, da der Winkel $A'CA$ gegeben ist, $x' = \alpha z$, wo α konstant ist.

Daher $$y^2 = x^2 - x'^2 = (\varkappa - \alpha^2) z^2 - \varkappa a^2.$$

Nun ist z proportional zu CO, nämlich gleich $\frac{CO}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, und aus der Gleichung wird

$$y^2 = \frac{\varkappa - \alpha^2}{1+\alpha^2} \cdot CO^2 - \varkappa a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

was offenbar eine Hyperbel bedeutet, da $\alpha^2 < \varkappa$.

Obwohl nun die Griechen den Beweis in geometrischer, der obigen gleichwertiger Form ausgeführt haben könnten, scheint er mir der Art, wie Archimedes die Gleichungen der Zentral-Kegelschnitte betrachtete, fremd zu sein. Diese drückt er immer in Form einer Proportion aus

$$\frac{y^2}{x^2 \sim a^2} = \frac{y'^2}{x'^2 \sim a^2} \left[= \frac{b^2}{a^2} \text{ im Falle der Ellipse}\right],$$

und nie in der Form einer Gleichung zwischen Flächen, wie die von Apollonius benutzte

$$y^2 = px \pm \frac{p}{d} x^2.$$

Ferner hätte das Auftreten von zwei verschiedenen Konstanten und die Notwendigkeit, sie geometrisch als Verhältnisse von Flächen bzw. Strecken auszudrücken, den Beweis sehr lang und kompliziert gemacht; und tatsächlich drückt Archimedes das Verhältnis $y^2/(x^2 - a^2)$ im Falle der Hyperbel nie in der Form eines Verhältnisses zwischen konstanten Flächen wie b^2/a^2 aus. Wenn nun schließlich die Gleichung des gegebenen Schnittes durch $CA'O$ in der Form (1) gefunden war, vorausgesetzt, daß die Griechen wirklich das geometrische Äquivalent gefunden hätten, dann würde man es vermutlich noch für nötig gehalten haben, zu verifizieren, daß

$$CA'^2 = \frac{\varkappa(1+\alpha^2)}{\varkappa - \alpha^2} \cdot a^2,$$

bevor man endgültig ausgesprochen hätte, daß die durch die Gleichung dargestellte Hyperbel und der durch die Ebene hervorgerufene Schnitt dasselbe Ding seien.

4. *Schnitt eines Sphäroids mit einer zur Achse parallelen Ebene.* Daß dies eine der erzeugenden ähnliche Ellipse ist, kann offenbar auf genau dieselbe Weise bewiesen werden, wie oben Satz (2) für das Hyperboloid.

Wir sind nun in der Lage, zu betrachten, was die Bemerkung des Archimedes bedeutet: „Die Beweise aller dieser Eigenschaften sind offenbar.“ Zunächst bedeutet „offenbar“ wohl nicht „bekannt“, weil von früheren Geometern bewiesen; denn Archimedes hat die Gewohnheit, den Tatbestand genau festzustellen, wenn er irgendwo wichtige, von seinen unmittelbaren Vorgängern stammende Sätze benutzt, wie seine Hinweise auf Eudoxus, auf die *Elemente* [des Euklid] und auf die „Elemente der Kegelschnitte“ bezeugen. Wenn wir die Bemerkung mit Bezug auf die Fälle der zu den Achsen der betreffenden Oberflächen parallelen Schnitte betrachten, so liegt eine natürliche Erklärung in der Annahme, daß Archimedes damit einfach meinte, die Sätze seien derart, daß sie leicht aus den grundlegenden Eigenschaften der drei Kegelschnitte, die jetzt durch ihre Gleichungen ausgedrückt werden, sich ableiten lassen, wenn man dabei noch berücksichtigt, daß die Schnitte mit Ebenen senkrecht zu den Achsen Kreise sind. Aber ich meine, diese Erklärung des „offenbaren“ Charakters der Beweise läßt sich so nicht auf den dritten Satz anwenden, des Inhalts, daß der Schnitt eines Rotationshyperboloids mit jeder Ebene, die durch die Spitze des Asymptotenkegels aber nicht durch die Achse geht, eine Hyperbel ist. Diese Tatsache ist in der Tat nicht mehr offenbar im gewöhnlichen Sinne des Wortes als der entsprechende Satz über das Sphäroid, nämlich daß jeder Schnitt durch den Mittelpunkt, aber nicht durch die Achse eine Ellipse ist. Aber dieser letzte Satz ist nicht zusammen mit den anderen in Satz 11 als „offenbar“ angegeben; der Beweis ist in dem allgemeineren Satze 14 enthalten, daß jeder nicht zur Achse senkrechte Schnitt eines Sphäroids eine Ellipse ist, und daß parallele Schnitte ähnlich sind. Auch kann ich, in Anbetracht dessen, daß die Sätze wesentlich ähnlichen Charakter haben, nicht glauben, daß Archimedes es so verstanden wissen wollte, wie Zeuthen annimmt, daß nur der Satz über das Hyperboloid und nicht die anderen direkt mittels des geometrischen Äquivalentes der kartesischen Gleichung des Kegelschnittes bewiesen werden solle, und nicht mit Hilfe der Eigenschaft der Rechtecke aus den Abschnitten sich schneidender Sehnen, die früher [Satz 3] mit Bezug auf die Parabel benutzt wird und später für den Fall des Sphäroids und der elliptischen Schnitte der Konoide und Sphäroide im allgemeinen. Das ist meines Erachtens um so unwahrscheinlicher, weil der Beweis nur mittels der Kegelschnittsgleichung den Griechen viel mehr Schwierigkeiten bereitet hätte und daher schwerlich „offenbar“ genannt worden wäre.

Es scheint daher notwendig, nach einer anderen Erklärung zu suchen, und ich glaube, die folgende wird befriedigen. Die oben mit 1, 2 und 4 bezeichneten Sätze über achsenparallele Schnitte von Konoiden und Sphäroiden werden später in den Sätzen 15—17 mit Beziehung auf Tangentialebenen benutzt; dagegen wird der Satz 3 über den Schnitt eines Hyperboloids mit einer Ebene durch den Mittelpunkt aber nicht durch die Achse nicht im Zusammenhang mit Tangentialebenen benutzt, sondern nur zum formellen Beweise dafür, daß eine von irgend einem Punkte des Hyperboloids parallel zu irgend einem Durchmesser des Hyperboloids gezogene Linie auf der konvexen Seite außerhalb, auf der konkaven Seite innerhalb der Fläche fällt. Daher ist es nicht so wahrscheinlich, daß die vier Sätze in Satz 11 wegen ihrer späteren Anwendung zusammengestellt sind, als daß sie an dieser Stelle mit besonderer Beziehung auf die drei unmittelbar folgenden Sätze (12—14) eingeschoben sind, die von elliptischen Schnitten der drei Flächen handeln. Der Hauptzweck der ganzen Abhandlung war die Bestimmung der Inhalte von Segmenten der drei Körper, die durch Ebenen abgeschnitten werden, und daher war es zunächst nötig, alle die Schnitte zu bestimmen, die Ellipsen oder Kreise sind und somit Grundflächen von Segmenten bilden können. So nimmt sich Archimedes in den Sätzen 12—14 vor, die elliptischen Schnitte zu finden, aber bevor er das tut, gibt er zur Klarstellung der Grundlagen die in Satz 11 gruppierten Sätze, um die Sätze über elliptische Schnitte mit äußerster Genauigkeit aussprechen zu können. Satz 11 enthält tatsächlich mehr *Erklärungen*, die auf das Ziel der folgenden drei Sätze hinweisen sollen, als Sätze, die um ihrer selbst willen ausgesprochen werden; bevor Archimedes zu elliptischen Schnitten übergeht, hält er es für nötig, darauf hinzuweisen, daß Schnitte senkrecht zur Achse jeder Fläche nicht Ellipsen sondern Kreise sind, und daß einige Schnitte der beiden Konoide weder Ellipsen noch Kreise sind, sondern Parabeln bzw. Hyperbeln. Es ist als ob er gesagt hätte: „Da ich die Inhalte von Segmenten der drei Körper finden will, die durch kreisförmige oder elliptische Schnitte abgeschnitten werden, gehe ich dazu über, die verschiedenen elliptischen Schnitte zu betrachten; aber ich will erst klarmachen, daß Schnitte senkrecht zur Achse keine Ellipsen sondern Kreise sind, während Schnitte der Konoide mit gewissen Ebenen weder Ellipsen noch Kreise, sondern Parabeln bzw. Hyperbeln sind. Mit diesen letzten Schnitten habe ich in den nächsten Sätzen nichts zu tun, und daher brauche ich mein Buch mit den Beweisen nicht zu belasten; aber da einige von ihnen mit Hilfe der gewöhnlichen Eigenschaften der Kegelschnitte leicht ergänzt werden können, andere mit Hilfe der Methoden, die in den jetzt darüber abzuleitenden Sätzen auseinandergesetzt sind, überlasse ich sie dem Leser zur Übung." Das wird, meine ich, die Anführung aller der Sätze erklären, mit Ausnahme des über achsenparallele Schnitte des Sphäroids; dieser ist meines Erachtens der Symmetrie wegen mit den anderen zusammen angeführt, und weil er auf demselben Wege wie der entsprechende für das Hyperboloid bewiesen werden kann; wenn aber seine Erwähnung bis Satz 14 über die elliptischen Schnitte eines Sphäroids im allgemeinen aufgeschoben worden wäre, hätte er noch einen besonderen Satz erfordert, da die Achsen der in Satz 14 behandelten Schnitte mit der Achse des Sphäroids einen Winkel bilden und ihr nicht parallel sind.

Gleichzeitig genügt die Tatsache an sich, daß Archimedes die Beweise der Sätze über achsenparallele Schnitte von Konoiden und Sphäroiden ausläßt, um die Vermutung zu erheben, daß die zeitgenössischen Geometer mit der Vorstellung von drei Dimensionen vertraut waren und sie in der Praxis anzuwenden wußten. Das überrascht nicht, da wir sehen, daß Archytas bei seiner Lösung der Aufgabe der zwei mittleren Proportionalen den Schnitt eines gewissen Kegels mit einer auf einem geraden Kreiszylinder gezogenen Kurve doppelter Krümmung benutzt.[1]) Aber wenn wir nach anderen Beispielen frühzeitiger Beschäftigung mit dreidimensionaler Geometrie suchen, finden wir nichts mit Ausnahme einiger unklarer Angaben über den Inhalt einer verlorenen Schrift des Euklid, die aus zwei Büchern mit dem Titel *Oberflächen-Örter* (*τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ*)[2]) bestand. Diese Abhandlung wird von

---

[1]) Vgl. Eutocius über Archimedes (Vol. III. SS. 98—102), oder *Apollonius of Perga*, SS. XXII—XXIII.

[2]) Aus diesem Ausdrucke schließen wir, daß die Griechen meinten „Örter, die Oberflächen sind" zum Unterschiede von Örtern, die Linien sind. Vgl. Proclus' Definition eines Ortes als „Lage einer Linie oder Oberfläche, die eine und dieselbe Eigenschaft bedingt" (*γραμμῆς ἢ ἐπιφανείας θέσις ποιοῦσα ἓν καὶ ταὐτὸν σύμπτωμα*), S. 394. Pappus (SS. 660—662) gibt bei der Erwähnung der *Ebenen Örter* des Apollonius eine Einteilung der Örter nach ihrer *Ordnung* mit Bezug darauf, wofür sie Örter sind. So sagt er, Örter sind (1) *ἑφεκτικοί*, d. h. *feste*, beispielsweise ist in diesem Sinne der Ort

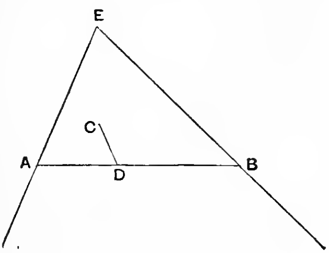
4*

Pappus unter anderen Werken von Aristaeus, Euklid und Apollonius erwähnt, die zu dem sog. τόπος ἀναλυόμενος[1]) zusammengestellt sind. Da die anderen Werke in dem Verzeichnis, die sich mit ebenen Gegenständen beschäftigen, nur von geraden Linien, Kreisen und Kegelschnitten handeln, so ist *a priori* wahrscheinlich, daß die *Oberflächen-Örter* des Euklid zum wenigsten solche Örter umfaßten, die Kegel, Zylinder und Kugeln sind. Darüber hinaus ist alles Vermutung, die sich auf zwei von Pappus im Zusammenhange mit der Abhandlung mitgeteilte Hilfssätze stützt.

Erster Hilfssatz zu den Oberflächen-Örtern des Euklid.[2])

Der Text dieses Hilfssatzes und die beigefügte Figur sind nicht befriedigend, so wie sie überliefert sind, aber sie sind, wie folgt, von Tannery in einer Weise erklärt worden, die eine Abänderung der Figur verlangt, aber nur eine geringfügige Änderung im Text.[3])

„Wenn AB eine gerade Linie und CD zu einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel ist, und wenn das Verhältnis $AD \cdot DB : DC^2$ [gegeben] ist, so liegt der Punkt C auf einem Kegelschnitt. Wenn nun AB nicht mehr der Lage nach gegeben ist, und A, B nicht mehr gegeben sind, sondern auf der Lage nach gegebenen geraden Linien AE, EB liegen[4]), so liegt der [über die Ebene, die AE, EB enthält] sich erhebende Punkt C auf einer der Lage nach gegebenen Oberfläche. Und das ist bewiesen."



eines Punktes ein Punkt, der einer Linie eine Linie usw.; (2) διεξοδικοί oder *bewegliche*, in diesem Sinne ist eine Linie der Ort eines Punktes, eine Oberfläche der einer Linie, ein Körper der einer Oberfläche; (3) ἀναστροφικοί, *nach rückwärts sich umwendende*, d. h. vermutlich nach vor- und rückwärts sich bewegende, in diesem Sinne ist eine Oberfläche der Ort eines Punktes und ein Körper der einer Linie. So ist ein *Oberflächen-Ort* vermutlich der Ort eines im Raume bewegten Punktes oder einer solchen Linie.

[1]) Pappus, SS. 634, 636.

[2]) Pappus, S. 1004.

[3]) *Bulletin des sciences math.*, 2e Série, VI. 149.

[4]) Die Worte des griechischen Textes sind γένηται δὲ πρὸς θέσει εὐθεῖα ταῖς AE, EB, und die obige Übersetzung verlangt nur εὐθείαις statt εὐθεῖα. Die Figur im Text ist so gezeichnet, daß ADB und AEB als zwei parallele Linien dargestellt sind, CD senkrecht zu ADB und AEB in E treffend.

Gemäß dieser Erklärung wird behauptet: wenn AB sich mit je einem Endpunkte auf den festen Geraden AE, EB bewegt, während DC eine feste Richtung hat und das Verhältnis $AD \cdot DB : DC^2$ konstant ist, dann liegt C auf einer gewissen Oberfläche. Was den ersten Satz angeht, so bleibt die Länge von AB konstant, aber es ist nicht ganz klar, ob die Strecke AB, wenn sie nicht mehr der Lage nach gegeben ist, auch ihre Länge ändern soll.[1]) Wenn jedoch AB für alle Lagen, die sie einnimmt, von gleicher Länge bleibt, ist der Ort von C so kompliziert, daß wir nicht annehmen können, Euklid habe ihn erfolgreich untersucht. Vielleicht hat deshalb Pappus die Formulierung absichtlich etwas unbestimmt gelassen, um dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß sie mehrere Oberflächen-Örter umfaßt, die, obwohl zu demselben Typus gehörig, von Euklid getrennt behandelt worden sind, da sie in jedem Falle etwas abweichende die Allgemeinheit des Satzes beschränkende Bedingungen erfüllen.

Zum mindesten ist die von Zeuthen ausgesprochene Vermutung[2]) berechtigt, daß Euklid zwei Fälle des Typus betrachtet hat, nämlich (1) den, wo die Länge von AB konstant bleibt, während die beiden festen Geraden, auf denen sich A, B bezüglich bewegen, parallel sind, anstatt sich in einem Punkte zu schneiden, und (2) den, wo die zwei festen Geraden einen Schnittpunkt haben, während AB sich immer parallel zu sich selbst bewegt und demnach ihre Länge ändert.

(1) In dem ersten Falle, wo die Länge von AB konstant ist und die zwei festen Geraden parallel sind, würden wir eine von einem bewegten Kegelschnitt beschriebene Oberfläche haben.[3]) Diese Oberfläche wäre eine zylindrische Fläche, obwohl sie von den Alten als „Zylinder“ nur in dem Falle bezeichnet worden wäre, wo der bewegte Kegelschnitt eine *Ellipse* war; denn das Wesen eines „Zylinders“ verlangte, daß er zwischen zwei parallelen Kreisschnitten eingeschlossen werden konnte. Wenn nun der bewegte Kegelschnitt eine Ellipse war, so konnte es nicht schwer sein, die Kreisschnitte des Zylinders zu finden; dazu mußte man erst einen zur Achse senkrechten Schnitt nehmen, darauf nach

---

[1]) Die Stelle lautet einfach, „wenn AB *ihrer Lage beraubt wird* (*στερηθῇ τῆς θέσεως*) und die Punkte A, B ihres Gegebenseins beraubt werden“ (*στερηθῇ τοῦ δοθέντος εἶναι*).

[2]) Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten*, S. 425 ff.

[3]) Es ergäbe sich eine von einer bewegten Linie erzeugte Oberfläche, *διεξοδικὸς γραμμῆς*, wie Pappus sagt.

der Methode des Archimedes, *Über Konoide und Sphäroide*, Satz 9, zunächst zeigen, daß der Schnitt eine Ellipse oder ein Kreis ist, und dann im ersten Falle, daß der Schnitt mit einer unter gewissem Neigungswinkel gegen die Ellipse gelegten Ebene, durch die größere Achse gehend oder parallel zu ihr, ein Kreis ist. Es hätte Euklid nichts hindern können, die ähnlich durch eine bewegte Hyperbel oder Parabel erzeugte Oberfläche zu untersuchen; aber da hätte es keine Kreisschnitte gegeben, und daher wären die Flächen wohl nicht als sehr wichtig angesehen worden.

(2) Im zweiten Falle, wo AE und BE sich in einem Punkte schneiden und AB sich immer parallel zu sich selbst bewegt, ist die erzeugte Oberfläche offenbar ein Kegel. Einige besondere Fälle dieser Art können sehr wohl von Euklid behandelt worden sein, aber er hat schwerlich den allgemeinen Fall, wo DC beliebige Richtung hat, soweit zu erörtern vermocht, daß er zeigen konnte, die Fläche sei wirklich in dem Sinne ein Kegel, in dem die Griechen den Ausdruck verstanden, oder mit anderen Worten, daß er die Kreisschnitte fand. Dazu wäre notwendig gewesen, die Hauptebenen zu bestimmen, oder die kubische Gleichung der Diskriminante aufzulösen, was wir Euklid nicht zutrauen können. Wenn ferner Euklid die Kreisschnitte in dem allgemeinsten Falle gefunden hätte, so hätte sich Archimedes einfach auf die Tatsache bezogen, anstatt sich dieselbe Aufgabe in dem besonderen Falle vorzunehmen, wo die Symmetrie-Ebene gegeben ist. Diese Bemerkungen beziehen sich auf den Fall, daß der Ortskegelschnitt für C eine Ellipse ist; es ist noch weniger Grund zu der Annahme vorhanden, daß Euklid die Existenz von Kreisschnitten nachgewiesen haben könnte, wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel war, denn es ist nicht ersichtlich, ob Euklid wirklich wußte, daß Hyperbeln und Parabeln als Schnitte eines schrägen Kreiskegels erhalten werden können.

Zweiter Hilfssatz zu den Oberflächen-Örtern.

Darin gibt Pappus einen vollständigen Beweis des Satzes: *Der Ort eines Punktes, dessen Abstand von einem gegebenen Punkte in einem gegebenen Verhältnis zu seinem Abstande von einer festen Geraden steht, ist ein Kegelschnitt und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem das gegebene Verhältnis kleiner als, gleich oder größer als 1 ist.*[1] Zwei Annahmen über die Anwendung dieses Satzes durch Euklid in der genannten Abhandlung sind möglich.

[1] Siehe Pappus, SS. 1006—1014, und Hultsch' Appendix, SS. 1270—1273; oder vgl. *Apollonius of Perga*, SS. XXXVI—XXXVIII.

(1) Betrachten wir eine Ebene und eine Gerade, die sie unter beliebigem Winkel schneidet. Denken wir uns irgend eine zu der Geraden senkrechte Ebene, deren Schnittlinie mit der ersten Ebene wir X nennen wollen. Wenn dann die gegebene Gerade die zu ihr senkrechte Ebene im Punkte S trifft, so kann in dieser Ebene ein Kegelschnitt beschrieben werden, der S zum Brennpunkt und X zur Leitlinie hat; und da das Lot auf X von irgend einem Punkte des Kegelschnitts aus in konstantem Verhältnis zu dem Lote von demselben Punkte auf die ursprüngliche Ebene steht, so haben alle Punkte des Kegelschnitts die Eigenschaft, daß ihre Abstände von S ein gegebenes Verhältnis zu ihren Abständen von der gegebenen Ebene haben. Wenn wir ähnlich Ebenen nehmen, welche die gegebene Gerade in beliebig vielen Punkten außer S rechtwinklig schneiden, sehen wir: *Der Ort eines Punktes, dessen Abstand von einer gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältnis zu seinem Abstand von einer gegebenen Ebene hat, ist ein Kegel, dessen Spitze der Schnittpunkt der gegebenen Geraden mit der gegebenen Ebene ist, während die Symmetrie-Ebene durch die gegebene Gerade geht und auf der gegebenen Ebene senkrecht steht.* War das gegebene Verhältnis derart, daß der Leitkegelschnitt eine Ellipse war, so konnten die Kreisschnitte der Oberfläche mit Hilfe derselben Methode gefunden werden, die Archimedes (*Über Konoide und Sphäroide,* Satz 8) in dem noch allgemeineren Falle anwendet, wo das Lot von der Spitze des Kegels auf die Ebene des gegebenen elliptischen Schnittes nicht notwendig durch den Brennpunkt geht.

(2) Eine andere natürliche Vermutung wäre, anzunehmen, daß Euklid mit Hilfe des von Pappus angegebenen Satzes den *Ort eines Punktes* fand, *dessen Abstand von einem gegebenen Punkte in gegebenem Verhältnis zu seinem Abstande von einer festen Ebene steht.* Das hätte Oberflächen ergeben, die mit den von Archimedes behandelten Konoiden und Sphäroiden identisch sind, mit Ausnahme des durch Umdrehung einer Ellipse um die kleinere Achse entstehenden Sphäroids. Wir kommen so zu demselben Standpunkt wie Chasles, der annahm, daß die *Oberflächen-Örter* des Euklid sich mit Rotationsflächen zweiten Grades und ihren Schnitten beschäftigten.[1]) Neuere Autoren haben diese Theorie allgemein als unwahrscheinlich angesehen. So sagt Heiberg, daß die Konoide und Sphäroide ohne Zweifel von Archimedes selbst entdeckt seien; sonst hätte er es nicht für nötig gehalten, ihre genauen Definitionen in seinem einleitenden Briefe an Dositheus zu geben; des-

[1]) *Aperçu historique,* SS. 273/4.

halb können sie nicht Gegenstand der Schrift des Euklid[1]) gewesen sein. Ich gestehe, daß das Argument Heibergs, weit davon entfernt, gegen die Wahrscheinlichkeit der Chaslesschen Konjektur entscheiden zu können, mir kein großes Gewicht zu haben scheint. Die Vermutung, Euklid habe mit Hilfe des von Pappus ausgesprochenen und bewiesenen Satzes den Ort des Punktes gefunden, dessen Abstand von einem gegebenen Punkte zu seinem Abstand von einer festen Ebene ein gegebenes Verhältnis hat, verpflichtet uns nicht zu der Annahme, daß er den Örtern einen Namen gegeben habe, noch daß er mehr über sie bewiesen habe, als daß Schnitte durch das Lot von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Ebene Kegelschnitte sind, während Ebenen senkrecht zu demselben Lote Kreisschnitte ergeben; und offenbar würden diese Tatsachen sich ohne weiteres von selbst zu erkennen geben. Berücksichtigen wir jedoch, daß Archimedes die Absicht hatte, die Inhalte von Segmenten der einzelnen Oberflächen zu finden, so ist es nicht überraschend, daß er es vorzog, von ihnen eine Definition zu geben, die ihre Form direkter kennzeichnete, als es ihre Beschreibung als Örter getan hätte; wir haben einen Parallelfall in der zwischen Kegelschnitten als solchen und Kegelschnitten als Örtern aufgestellten Unterscheidung, die durch die verschiedenen Titel von Euklids *Kegelschnitten* und den *körperlichen Örtern* des Aristaeus gekennzeichnet ist, und auch durch die Tatsache, daß Apollonius zwar in der Vorrede von dem Nutzen einiger Sätze aus seinen *Kegelschnitten* für die Synthesis „körperlicher Örter" spricht, dann aber mit der Erwähnung des „Ortes mit Beziehung auf drei oder vier Linien" fortfährt und keinen Satz ausspricht des Inhalts, daß der Ort des und des Punktes ein Kegelschnitt ist. Ein weiterer besonderer Grund, die Konoide und Sphäroide als Oberflächen zu definieren, die durch Drehung eines Kegelschnitts um seine Achse entstehen, ist der, daß diese Definition Archimedes gestattete, das Sphäroid mit darunter zu verstehen, das er „flach" (ἐπιπλατὺ σφαιροειδές) nennt, d. h. das durch Umdrehung einer Ellipse um ihre *kleinere* Achse entstehende, welches keiner von den Örtern ist, deren Entdeckung die Hypothese Euklid zuschreibt. Archimedes' neue Definition diente beiläufig dazu, die Natur der Schnitte durch die Rotationsachse und senkrecht zu ihr noch augenfälliger zu machen, als es durch die vermutliche Euklidische Behandlungsweise der Oberflächen geschehen wäre; das würde auch erklären, daß Archimedes zu

[1]) *Litterargeschichtliche Studien über Euklid,* S. 79.

erwähnen unterläßt, die zwei Klassen von Schnitten seien vorher bekannt gewesen; denn es hätte keinen Zweck gehabt, Euklid die Beweise von Sätzen zuzuschreiben, die mit der neuen Definition der Oberflächen selbstverständlich wurden. Die weiteren Definitionen des Archimedes lassen sich aus demselben Prinzip erklären. So hat die *Achse*, wie sie von ihm definiert wird, eine spezielle Beziehung zu seiner Definition der Oberflächen, da sie *Rotationsachse* bedeutet, während die Achse eines *Kegelschnitts* für Archimedes ein *Durchmesser* ist. Der *Asymptotenkegel* des Hyperboloids, der durch Umdrehung der Asymptoten um die Achse erzeugt wird, und der Mittelpunkt, betrachtet als Durchschnittspunkt der Asymptoten, waren für Archimedes' Erörterung der Flächen nützlich, brauchten aber in Euklids Beschreibung der Flächen als Örter nicht hineingebracht zu werden. Ähnlich steht es mit der *Achse* und dem *Scheitel* eines *Segmentes* jeder Fläche. Und im allgemeinen scheint mir, daß alle von Archimedes gegebenen Definitionen in derselben Weise erklärt werden können ohne Verzicht auf die vermutete Entdeckung von drei der Oberflächen durch Euklid.

Ich meine also, wir können es noch als möglich ansehen, daß sich Euklids *Oberflächen-Örter* nicht nur mit Kegeln, Zylindern und (wahrscheinlich) Kugeln beschäftigten, sondern auch (in beschränktem Maße) mit drei anderen Umdrehungsflächen zweiten Grades, nämlich dem Paraboloid, dem Hyperboloid und dem verlängerten Sphäroid. Leider sind wir jedoch auf die Aufstellung von Vermutungen beschränkt; Sicherheit kann schwerlich erreicht werden, es sei denn auf Grund neu entdeckter Dokumente.

§ 5. Zwei mittlere Proportionalen in stetiger Proportion.

Archimedes nimmt die Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen in zwei Sätzen an (*Über Kugel und Zylinder* II. 1,5). Vielleicht war er damit zufrieden, die von Archytas, Menaechmus[1]) und Eudoxus gegebenen Konstruktionen anzuwenden. Es ist jedoch erwähnenswert, daß Archimedes die zwei geometrischen Mittel nicht einführt, wo sie nur bequem, aber nicht notwendig sind; wenn er z. B. (*Über Kugel und Zylinder* I. 34) für ein Verhältnis $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$, wo $\beta > \gamma$, ein Verhältnis zwischen Linien einsetzen

[1]) Die Konstruktionen des Archytas und Menaechmus sind von Eutocius mitgeteilt [*Archimedes,* Vol. III. SS. 92—102]; oder vgl. *Apollonius of Perga*, SS. XIX—XXIII.

will, und es für seinen Zweck genügt, daß das gesuchte Verhältnis nicht *größer* als $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist, so nimmt er zwei *arithmetische* Mittel δ, ε zwischen β und γ und setzt dann als bekanntes Ergebnis voraus, daß

$$\frac{\beta^3}{\delta^3} < \frac{\beta}{\gamma}.$$ [1])

[1]) Der Satz ist von Eutocius bewiesen; siehe die Note zu *Über Kugel und Zylinder* I. 34. (S. 188).

Kapitel IV.

Arithmetik bei Archimedes.

Zwei von den Abhandlungen, die *Kreismessung* und die *Sandrechnung*, sind vornehmlich arithmetischen Inhalts. Von der *Sandrechnung* braucht hier nichts gesagt zu werden, denn das darin auseinandergesetzte und angewandte System, Zahlen von jeder Größe auszudrücken, kann nicht besser als in dem Buche selbst beschrieben werden; in der *Kreismessung* jedoch, die eine ganze Menge Rechnungen mit beträchtlich großen, wenn auch durch die gewöhnliche griechische Zahlenbezeichnung ausdrückbaren Zahlen erfordert, gibt Archimedes nur die Ergebnisse der verschiedenen arithmetischen Operationen, Multiplikation, Ausziehung der Quadratwurzel, usw., ohne irgend eine der Operationen selbst auseinanderzusetzen. Verschiedene interessante Fragen hängen demnach damit zusammen; ich will zur Bequemlichkeit des Lesers erst eine kurze Übersicht des griechischen Zahlensystems und der Methoden geben, nach denen andere griechische Mathematiker gewöhnlich die verschiedenen unter dem allgemeinen Ausdrucke λογιστική *(Rechenkunst)* zusammengefaßten Operationen ausführten, um dann fortzuschreiten zu einer Erklärung (1) des Weges, auf dem Archimedes Näherungswerte für die Quadratwurzeln aus großen Zahlen ausrechnete, (2) der Methode, durch die er zu den zwei Näherungswerten für $\sqrt{3}$ gelangt ist, die er einfach angibt ohne irgend einen Hinweis, wie sie gefunden sind.[1])

§ 1. Das griechische Zahlensystem.

Es ist wohlbekannt, daß die Griechen alle Zahlen von 1 bis 999 mit Hilfe der Buchstaben des Alphabets, zu denen man

[1]) Für die Abfassung dieses Kapitels verdanke ich besonders viel den Artikeln *Arithmetica* und *Archimedes* von Hultsch in Pauly-Wissowas *Real-Encyclopädie*, II, 1 sowie den folgenden Artikeln desselben Gelehrten: (1) *Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes* in den *Nachrichten von der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1893), S. 367 ff., und (2) *Zur Kreismessung des Archimedes* in der *Zeitschrift für Math. u. Physik* (*Hist. litt. Abtheilung*) XXXIX. (1894) S. 121 ff. und 161 ff. Im ersten Teil des Kapitels habe ich auch Nesselmanns Werk *Die Algebra der Griechen* und die historischen Werke von Cantor und Gow benutzt.

noch 3 andere Zeichen hinzufügte, entsprechend dem folgenden Schema ausdrückten, in dem jedoch der Akzent bei jedem Buchstaben besser durch einen kurzen horizontalen, darüber gesetzten Strich ersetzt wird, z. B. $\bar{\alpha}$. (Nach der richtigeren Praxis bezeichneten die Akzente nicht die Kardinal-, sondern die Ordinalzahlen oder Brüche, z. B. $\gamma' =$ *τρίτος* [der dritte] oder *τρίτον* [$\frac{1}{3}$].)

α′, β′, γ′, δ′, ε′, ϛ′, ζ′, η′, ϑ′	bedeuten	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
ι′, κ′, λ′, μ′, ν′, ξ′, ο′, π′, ϙ′	„	10, 20, ... 90,
ρ′, σ′, τ′, υ′, φ′, χ′, ψ′, ω′, ϡ′	„	100, 200, ... 900.

Dazwischen liegende Zahlen werden durch einfaches Nebeneinandersetzen ausgedrückt (das in diesem Falle Addition bedeutet), wobei die größte Zahl an das linke Ende geschrieben wird, die nächst größte folgt, usw. So würde die Zahl 153 durch ρνγ′ oder $\overline{\rho\nu\gamma}$ ausgedrückt werden. Es gab kein Zeichen für Null, und deshalb war 780 einfach ψπ′, und 306 τϛ′.

Tausender (*χιλιάδες*) werden als Einheiten einer höheren Ordnung aufgefaßt, und 1000, 2000, ... bis 9000 (in Worten *χίλιοι, δισχίλιοι,* usw.) werden durch dieselben Buchstaben wie die ersten 9 natürlichen Zahlen dargestellt, nur mit einem kleinen Strich vorn unter der Zeile; so war z. B. ͵δ′ 4000, und nach demselben Prinzip des Nebeneinandersetzens wie vorher wurde 1823 ausgedrückt durch ͵αωκγ′ oder ͵$\overline{\alpha\omega\kappa\gamma}$, 1007 durch ͵αζ′ usw.

Nach 9999 kam eine *Myriade* (*μυριάς*), und 10000 und höhere Zahlen wurden mit Benutzung der gewöhnlichen Zahlen mit dem als neue Benennung geltenden Substantiv *μυριάδες* ausgedrückt (obwohl auch die Worte *μύριοι, δισμύριοι, τρισμύριοι* usw. vorkommen nach Analogie von *χίλιοι, δισχίλιοι* usw.). Verschiedene Abkürzungen werden für das Wort *μυριάς* gebraucht, am häufigsten M oder $\overset{\upsilon}{M}$; wo diese benutzt wurde, schrieb man die Zahl der Myriaden oder das Vielfache von 10000 gewöhnlich über die Abkürzung, aber auch manchmal davor oder selbst dahinter. So war 349450 $\overset{\lambda\delta}{M}$͵ϑυν′.[1])

[1]) Diophant bezeichnet Myriaden, auf die Tausender folgen, durch die gewöhnlichen Zeichen für die Zahlen der Einheiten und trennt sie nur durch einen Punkt von den Tausendern. So schreibt er für 3069000 $\overline{\tau\varsigma}$. ͵$\overline{\vartheta}$, und $\overline{\lambda\gamma}$. ͵$\overline{\alpha\psi o\varsigma}$ für 331776. Manchmal werden Myriaden durch die gewöhnlichen Buchstaben mit zwei Punkten darüber bezeichnet, wie $\ddot{\varrho} = 100$ Myriaden (1000000), und Myriaden von Myriaden mit zwei Paaren von Punkten, wie $\overset{::}{\iota}$ für 10 Myriaden Myriaden (1000000000).

Brüche (*λεπτά*) werden auf verschiedene Weise geschrieben. Die gebräuchlichste war, den Nenner durch die gewöhnliche Zahl mit einem oder 2 hinzugefügten Akzenten auszudrücken. War der Zähler die Einheit, und handelte es sich daher einfach um ein Symbol für ein einzelnes Wort, wie *τρίτον*, $\frac{1}{3}$, so war es nicht nötig, den Zähler auszudrücken, und das Zeichen war *γ″*; ähnlich *ς″* $= \frac{1}{6}$, *ιε″* $= \frac{1}{15}$, usw. War der Zähler von der Einheit verschieden und sollte eine gewisse Zahl von Vierteln, Fünfteln, usw. ausgedrückt werden, so wurde die gewöhnliche Zahl für den Zähler verwendet; so *ϑ′ια″* $= \frac{9}{11}$, *ι′ οα″* $= \frac{10}{71}$. In Herons *Geometrie* wird der Nenner bei der letzten Klasse von Brüchen zweimal geschrieben; so war $\frac{2}{5}$ (*δύο πέμπτα*) *β′ε″ε″*, $\frac{23}{33}$ (*λεπτὰ τριακοστότριτα κγ′* oder *εἰκοσιτρία τριακοστότριτα*) war *κγ′ λγ″ λγ″*. Das Zeichen für $\frac{1}{2}$, *ἥμισυ*, ist bei Archimedes, Diophant und Eutocius L″, bei Heron C oder ein Zeichen ähnlich einem großen **S**.[1])

Eine beliebte Methode, Brüche mit Zählern, größer als 1, auszudrücken, war die Zerlegung in Partialbrüche mit dem Zähler 1, wo Nebeneinandersetzen wie gewöhnlich Addition bedeutet. So wurde $\frac{3}{4}$ geschrieben L″ *δ″* $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{15}{16}$ war C *δ″η″ις″* $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$; Eutocius schreibt L″ *ξδ″* oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$ für $\frac{33}{64}$, usw. Manchmal wird derselbe Bruch in mehrere verschiedene Summen zerlegt; so ist bei Heron (S. 119, ed. Hultsch) $\frac{163}{224}$ verschieden ausgedrückt als

$$(a)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224},$$
$$(b)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{112},$$
und
$$(c)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}.$$

Sexagesimale Brüche. Dieses System muß erwähnt werden, denn die einzigen uns überlieferten Beispiele von ausgeführten arithmetischen Operationen sind in solchen Brüchen ausgedrückt; überdies sind sie von besonderem Interesse, da sie viel mit dem modernen System der Dezimalbrüche gemein haben, natürlich mit dem Unterschiede, daß die Teilungszahl 60 statt 10 ist. Das Schema der Sexagesimalbrüche wurde von den Griechen bei astronomischen Rechnungen verwandt und erscheint vollständig ausgebildet in der *σύνταξις* des Ptolemaeus. Der Umfang eines Kreises und damit die 4 rechten Winkel um seinen Mittelpunkt werden

---

[1]) Diophant hat eine allgemeine Methode, Brüche auszudrücken, die der modernen Schreibweise gerade entgegengesetzt ist; der Nenner wird über den Zähler geschrieben, so $\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{5}{3}$, $\frac{\varkappa\varepsilon}{\varkappa\alpha} = \frac{21}{25}$, und $\frac{\alpha\,.\,\omega\iota\varsigma}{\varrho\varkappa\zeta\,.\,\varphi\xi\eta} = 1270568/10816$. Manchmal schreibt er den Zähler hin und führt dann den Nenner ein mit *ἐν μορίῳ* oder *μορίου*, z. B. $\overline{\tau\varsigma}\,.\,\overline{{}_{,}\vartheta}\;\mu o\varrho\,.\,\overline{\lambda\gamma}\,.\,\overline{{}_{,}\alpha\psi o\varsigma} = 3069000/331776$.

in 360 Teile (τμήματα oder μοῖραι) oder, wie wir sagen, *Grade* geteilt, jede μοῖρα in 60 Teile, genannt (*erste*) *Sechzigstel*, (πρῶτα) ἑξηκοστά, oder *Minuten* (λεπτά), jeder von diesen wieder in δεύτερα ἑξηκοστά (*Sekunden*), usw. Ähnlich wurde auch der Radius des Kreises in 60 Teile (τμήματα) geteilt, diese waren wiederum in Sechzigstel geteilt, und so fort. So hatte man ein bequemes, für alle arithmetischen Operationen verwendbares Bruchsystem, bestehend aus Einheiten von jeder Größe oder Art: so und so viele Brüche, die wir durch $\frac{1}{60}$ bezeichnen würden, so und so viele, die wir $(\frac{1}{60})^2$, $(\frac{1}{60})^3$ schreiben würden, und so fort bis zu beliebiger Ausdehnung. Es überrascht daher nicht, wenn Ptolemaeus an einer Stelle sagt: „Im allgemeinen werden wir die Methode der Zahlen des sexagesimalen Systems benutzen wegen der Unbequemlichkeit der [gewöhnlichen] Brüche.“ Denn es ist klar, daß die aufeinanderfolgenden Untereinheiten eine Art Rahmen mit festen Abteilungen bildeten, worin jeder beliebige Bruch untergebracht werden konnte, und es ist leicht zu sehen, daß sich z. B. beim Addieren und Subtrahieren mit sexagesimalen Brüchen fast so leicht wie heute mit Dezimalen rechnen läßt, da 60 Einheiten einer Benennung gleich einer Einheit der nächst höheren Benennung sind, und das Umwandeln in die nächst höhere Einheit und das „Borgen“ nicht weniger einfach sind, als wenn die Zahl der Einheiten einer Benennung, die eine Einheit der nächst höheren ausmachen, 10 statt 60 ist. Zum Ausdrucke der Einheiten der Peripherie, *Grade*, wurde μοῖραι oder das Symbol $\overset{o}{\mu}$ allgemein gebraucht und dabei die gewöhnliche Zahl mit einem Strich darüber; *Minuten*, *Sekunden*, usw., wurden durch einen, zwei, usw. der Zahl beigesetzte Akzente bezeichnet. So $\overset{o}{\mu}\,\overline{\beta} = 2^0$, μοιρῶν $\overline{\mu\zeta}$ $\mu\beta'$ μ'' $= 47^0\ 42'\ 40''$. Wo *keine* Einheit einer einzelnen Benennung vorkam, wurde das Zeichen *O* gebraucht, was οὐδεμία μοῖρα, οὐδὲν ἑξηκοστόν u. ä. bedeutete; so $\overline{O}\ \alpha'\ \beta''\ O'''$ $= 0^0\ 1'\ 2''\ 0'''$. Ähnlich wurde für die Einheiten, die Teile des Radius darstellten, das Wort τμήματα oder ein gleichbedeutendes gebraucht und die Brüche wurden wie vorher geschrieben; so τμημάτων $\overline{\xi\zeta}\delta'\nu\varepsilon'' = 67$ (Einheiten) $4'\ 55''$.

§ 2. Addition und Subtraktion.

Zweifellos wurden beim Hinschreiben von Zahlen zu diesen Zwecken die einzelnen Potenzen von 10 getrennt gehalten in einer Weise, die praktisch unserem Zahlensystem entspricht, und die Hunderter, Tausender usw. in getrennten vertikalen Reihen geschrieben. Folgendes würde daher die typische Form einer Additionsaufgabe sein:

$,\alpha\,\upsilon\,\varkappa\,\delta'$	1 4 2 4
$\varrho\;\;\gamma'$	1 0 3
$\overset{\alpha}{M}\,{}_{,}\beta\,\sigma\,\pi\,\alpha'$	1 2 2 8 1
$\overset{\gamma}{M}\quad\lambda'$	3 0 0 3 0
$\overset{\delta}{M}\,{}_{,}\gamma\,\omega\,\lambda\,\eta'$	4 3 8 3 8

und der im Kopfe auszuführende Teil der Rechnung wäre für den Griechen derselbe wie für uns.

Ähnlich würde eine Subtraktion wie folgt dargestellt werden:

$\overset{\vartheta}{M}\,{}_{,}\gamma\,\chi\,\lambda\,\varsigma'$	9 3 6 3 6
$\overset{\beta}{M}\,{}_{,}\gamma\,\upsilon\;\;\vartheta'$	2 3 4 0 9
$\overset{\zeta}{M}\quad\sigma\,\varkappa\,\zeta'$	7 0 2 2 7.

§ 3. Multiplikation.

Eine Anzahl von Beispielen ist in Eutocius' Kommentar zur *Kreismessung* enthalten, und die Ähnlichkeit mit unserem Verfahren ist ebenso wie in den obigen Fällen der Addition und Subtraktion zu merken. Der Multiplikand wird zuerst geschrieben, darunter der Multiplikator und vor diesem ἐπί (= „in"). Dann wird die höchste Potenz von 10 im Multiplikator genommen und in die Glieder multipliziert, welche die einzelnen Vielfachen der aufeinanderfolgenden Potenzen von 10 enthalten, beginnend mit der höchsten und bis zur niedrigsten absteigend; darauf wird die nächst höchste Potenz von 10 im Multiplikator in die verschiedenen Stellen des Multiplikandus in derselben Reihenfolge multipliziert. Dasselbe Verfahren wird eingeschlagen, wenn die zu multiplizierenden Zahlen, oder nur eine, Brüche enthalten. Zwei Beispiele aus Eutocius seien angeführt, aus denen das ganze Verfahren verständlich sein wird.

(1)

$\psi\pi'$	780	
$\grave{\epsilon}\pi\grave{\iota}\;\psi\pi'$	$\times$ 780	
$\overset{\mu\vartheta}{M}\overset{\varepsilon}{M}{}_{,}\varsigma'$	490000	56000
$\overset{\varepsilon}{M}{}_{,}\varsigma'\,{}_{,}\varsigma\upsilon'$	56000	6400
$\grave{o}\mu o\tilde{v}\;\overset{\xi}{M}{}_{,}\eta\upsilon'$	Summe 608400	

(2)

͵γιγʹ ∟ʺ δʺ	$3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ [$= 3013\frac{3}{4}$]				
ἐπὶ ͵γιγʹ ∟ʺ δʺ	$\times\ 3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$				
$\overset{\lambda}{M}\overset{\gamma}{M}$͵θ͵αφψνʹ	9000000	30000	9000	1500	750
$\overset{\gamma}{M}$ϙλεʹβʹ ∟ʺ	30000	100	30	5	$2\frac{1}{2}$
͵θλθʹαʹ ∟ʺ ∟ʺδʺ	9000	30	9	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
͵αφʹεʹαʹ ∟ʺ δʺ ηʺ	1500	5	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
ψνʹβʹ ∟ʺ ∟ʺδʺηʺιςʺ	750	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

[ὁμοῦ] $\overset{\lambda\eta}{M}$͵βχπθʹιςʺ

$$[9041250+30137\tfrac{1}{2}+9041\tfrac{1}{4}+1506+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+753+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}] = 9082689\tfrac{1}{16}.$$

Ein Beispiel einer ähnlichen Multiplikation von Zahlen mit Brüchen sei aus Heron (SS. 80, 81) entnommen. Es ist nur eins von vielen, und der Kürze wegen lassen wir die griechische Bezeichnung weg. Heron will das Produkt von $4\frac{33}{64}$ und $7\frac{62}{64}$ finden und geht wie folgt vor:

$$4\cdot 7 = 28,$$
$$4\cdot\tfrac{62}{64} = \tfrac{248}{64},$$
$$\tfrac{33}{64}\cdot 7 = \tfrac{231}{64},$$
$$\tfrac{33}{64}\cdot\tfrac{62}{64} = \tfrac{2046}{64}\cdot\tfrac{1}{64} = \tfrac{31}{64}+\tfrac{62}{64}\cdot\tfrac{1}{64}.$$

Das Resultat ist demnach:

$$28+\tfrac{510}{64}+\tfrac{62}{64}\cdot\tfrac{1}{64} = 28+7+\tfrac{62}{64}+\tfrac{62}{64}\cdot\tfrac{1}{64}$$
$$= 35+\tfrac{62}{64}+\tfrac{62}{64}\cdot\tfrac{1}{64}.$$

Die Multiplikation von $37^0\,4'\,55''$ (im sexagesimalen System) mit sich selbst ist von Theon von Alexandria in seinem Kommentar zu Ptolemaeus' *σύνταξις* in ganz ähnlicher Weise ausgeführt.

§ 4. Division.

Die Operation des Dividierens mit einer einstelligen Zahl war für die Griechen so leicht wie für uns, und die schriftliche Division wurde von ihnen, *mutatis mutandis*, in derselben Weise wie jetzt mittels Multiplikation und Subtraktion ausgeführt. Nehmen wir beispielsweise an, daß die in der ersten Multiplikations-Aufgabe oben wiedergegebene Rechnung umgekehrt und $\overset{\xi}{M}$͵ηυʹ (608400) durch ψπʹ (780) dividiert werden soll. Die Glieder, welche die verschiedenen Potenzen von 10 enthalten, wären im Kopfe wie bei der Addition und Subtraktion getrennt zu halten, und die erste Frage wäre nun, wie oft 7 Hunderter in 60 Myriaden enthalten sind, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß auf die 7 Hunderter 80 folgt und daß 780 nicht viel weniger als 8 Hunderter beträgt. Die Antwort ist 7 Hunderter oder ψ', und das gibt, mit dem Divisor $\psi\pi'$ (780) multipliziert, $\overset{\nu\delta}{M}{}_{,}\varsigma'$ (546000), was, von $\overset{\xi}{M}{}_{,}\eta\upsilon'$ (608400) subtrahiert, den Rest $\overset{\varsigma}{M}{}_{,}\beta\upsilon'$ (62400) läßt. Dieser Rest ist dann durch 780 oder annähernd 8 Hunderter zu dividieren, und es wäre mit 8 Zehnern oder π' zu probieren. In dem besonderen Falle wäre dann das Resultat vollständig, da ja der Quotient $\psi\pi'$ (780) ist und kein Rest bleibt, denn π' (80) mit $\psi\pi'$ (780) multipliziert gibt genau die Zahl $\overset{\varsigma}{M}{}_{,}\beta\upsilon'$ (62400).

Ein wirkliches Beispiel einer schriftlichen Division, wo Dividendus und Divisor Sexagesimal-Brüche enthalten, ist bei Theon angegeben. Die Aufgabe ist, 1515 20′ 15″ durch 25 12′ 10″ zu dividieren, und Theons Darstellung des Prozesses gelangt zu Folgendem:

Divisor	Dividendus	Quotient
25 12′ 10″	1515 20′ 15″	Erstes Glied 60
	$25 \cdot 60 = 1500$	
	Rest $15 = 900'$	
	Summe $920'$	
	$12' \cdot 60 = 720'$	
	Rest $200'$	
	$10'' \cdot 60 = 10'$	
	Rest $190'$	Zweites Glied 7′
	$25 \cdot 7' = 175'$	
	Rest $15' = 900''$	
	Summe $915''$	
	$12' \cdot 7' = 84''$	
	Rest $831''$	
	$10'' \cdot 7 = 1''\,10'''$	
	Rest $829''\,50'''$	Drittes Glied 33″
	$25 \cdot 33'' = 825''$	
	Rest $4''\,50''' = 290'''$	
	$12' \cdot 33'' = 396'''$	
	(zu groß um) $106'''$	

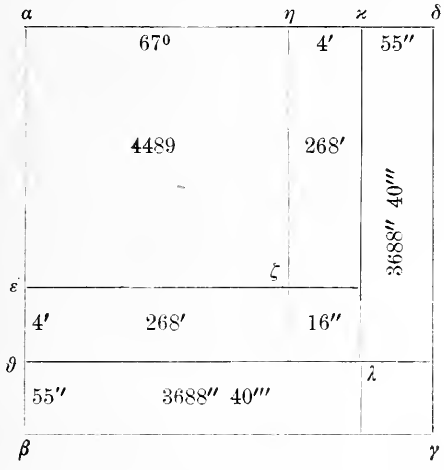
Daher ist der Quotient etwas kleiner als 60 7′ 33″. Wie man sieht, besteht zwischen dieser Operation Theons und der oben bei der Division von $\overset{\xi}{M}{}_{\prime}\eta\upsilon'$ (608400) durch $\psi\pi'$ (780) ausgeführten der Unterschied, daß Theon für ein Glied des Quotienten *drei* Subtraktionen macht, während im anderen Falle der Rest nach *einer* Subtraktion erhalten wurde. Das Ergebnis ist, daß Theons Methode, obwohl ganz klar, länger ist, und überdies läßt sie weniger leicht voraussehen, welches die geeignete Zahl zum versuchsweisen Einsetzen in den Quotienten ist, so daß mehr Zeit bei erfolglosen Versuchen verlorengeht.

§ 5. Ausziehung der Quadratwurzel.

Wir sind jetzt in der Lage einzusehen, wie vermutlich die Operation der Ausziehung der Quadratwurzel in Angriff genommen wurde. Zuerst hatte man, wie im Falle der Division, die gegebene ganze Zahl, deren Quadratwurzel gesucht war, sozusagen in Abteilungen zu zerlegen, deren jede eine gewisse Anzahl von Einern und von den verschiedenen Potenzen von 10 enthielt. Man hatte dann so und so viele Einer, so und so viel Zehner, so und so viel Hunderter, usw., und es ist zu beachten, daß die Quadrate der Zahlen von 1 bis 9 zwischen 1 und 99 liegen, die Quadrate der Zahlen von 10 bis 90 zwischen 100 und 9900, usw. Das erste Glied der Quadratwurzel wäre dann eine Anzahl von Zehnern oder Hundertern oder Tausendern usw. und wäre ebenso zu finden wie das erste Glied des Quotienten bei einer schriftlichen Division, nötigenfalls durch Versuche. Ist A die zu radizierende Zahl, während a das erste Glied oder die erste Stelle der Quadratwurzel und x die nächste noch zu findende Stelle bedeutet, so wäre die Identität $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ zu benutzen und x so zu finden, daß $2ax + x^2$ etwas kleiner als der Rest $A - a^2$ wird. So ist der größte mögliche Wert von x, der die Bedingung erfüllt, durch Versuche leicht zu finden. Ist dieser Wert b, so hat man den weiteren Betrag $2ab + b^2$ von dem ersten Rest $A - a^2$ zu subtrahieren, und aus dem so erhaltenen zweiten Reste wäre ein drittes Glied der Quadratwurzel abzuleiten, usw. Daß dies wirklich das angewandte Verfahren war, ergibt sich aus einem einfachen von Theon in seinem Kommentar zur σύνταξις behandelten Falle. Hier steht die Quadratwurzel aus 144 in Frage und wird mit Hilfe von Eukl. II, 4 gefunden. Die höchste mögliche Stelle (d. h. Potenz von 10) in der Quadratwurzel ist 10; 10^2 von 144 subtrahiert gibt den Rest 44, und dieser muß nicht nur das doppelte Produkt aus 10 und dem nächsten Gliede der Quadratwurzel enthalten, sondern auch das Quadrat dieses nächsten Gliedes selbst. Da nun $2 \cdot 10$ selbst 20 gibt, so läßt die Division von 44 durch 20 als nächstes Glied der Quadratwurzel 2 vermuten; und das stellt sich gerade als der gesuchte Wert heraus, da

$$2 \cdot 20 + 2^2 = 44.$$

Noch ein Beispiel desselben Verfahrens bietet Theons Beschreibung der Methode des Ptolemaeus zur Ausziehung von Quadratwurzeln nach dem System der Sexagesimalbrüche. Es handelt sich darum, näherungsweise die Quadratwurzel aus 4500 μοῖραι oder *Graden* zu finden, und es wird eine geometrische Figur benutzt, welche die im wesentlichen Euklidische Grundlage der ganzen Methode klarmacht. Nesselmann gibt eine vollständige Reproduktion des Abschnittes aus Theon, doch wird die folgende rein arithmetische Darstellung seines Inhalts vielleicht klarer gefunden werden, wenn man sie zugleich mit der Figur betrachtet.



Ptolemaeus hat zuerst gefunden, daß der ganzzahlige Teil von $\sqrt{4500}$ 67 ist. Nun ist $67^2 = 4489$, so daß sich 11 als Rest ergibt. Nehmen wir nun an, daß der fehlende Teil der Quadratwurzel mit Hilfe der üblichen Sexagesimalbrüche ausgedrückt sei, und daß wir daher setzen können

$$\sqrt{4500} = \sqrt{67^2 + 11} = 67 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2},$$

wo x, y noch zu finden sind. Es muß nun x so groß sein, daß $\frac{2 \cdot 67\,x}{60}$ etwas kleiner als 11 ist, oder x muß etwas kleiner als $\frac{11 \cdot 60}{2 \cdot 67}$ oder $\frac{330}{67}$ sein, was andererseits größer als 4 ist. Durch

Einsetzen dieses Wertes ergibt sich, daß 4 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, nämlich daß $\left(67+\frac{4}{60}\right)^2$ kleiner als 4500 ist, so daß sich ein Rest ergibt, mit Hilfe dessen y gefunden werden kann.

Nun ist $11-\frac{2\cdot 67\cdot 4}{60}-\left(\frac{4}{60}\right)^2$ der Rest, und dieser ist gleich

$$\frac{11\cdot 60^2-2\cdot 67\cdot 4\cdot 60-16}{60^2}=\frac{7424}{60^2}.$$

Daher müssen wir y so wählen, daß $2\left(67+\frac{4}{60}\right)\frac{y}{60^2}$ nahe gleich $\frac{7424}{60^2}$, oder $8048\,y$ annähernd gleich $7424\cdot 60$ wird.

Demnach ist y annähernd gleich 55. Wir haben dann von dem oben gefundenen Reste $\frac{7424}{60^2}$ abzuziehen

$$2\left(67+\frac{4}{60}\right)\frac{55}{60^2}+\left(\frac{55}{60^2}\right)^2 \text{ oder } \frac{442\,640}{60^3}+\frac{3025}{60^4}.$$

Die Subtraktion $\frac{7424}{60^2}-\frac{442\,640}{60^3}$ gibt $\frac{2800}{60^3}$ oder $\frac{46}{60^2}+\frac{40}{60^3}$; hier bricht Theon jedoch ab und subtrahiert den Rest $\frac{3025}{60^4}$ nicht mehr; statt dessen bemerkt er nur, daß das Quadrat von $\frac{55}{60^2}$ nahezu gleich $\frac{46}{60^2}+\frac{40}{60^3}$ sei. In der Tat, wenn wir $\frac{3025}{60^4}$ von $\frac{2800}{60^3}$ abziehen, um den genauen Rest zu bekommen, so finden wir $\frac{164\,975}{60^4}$.

Um einen Begriff von der Genauigkeit dieser Methode der Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe sexagesimaler Brüche zu geben, brauchen wir nur zu erwähnen, daß Ptolemaeus $\frac{103}{60}+\frac{55}{60^2}+\frac{23}{60^3}$ als Näherungswert für $\sqrt{3}$ angibt, was mit 1,7320509 in der gewöhnlichen dezimalen Schreibweise gleichbedeutend und somit auf 6 Stellen genau ist.

Wir gehen jetzt zu der Frage über, wie Archimedes die beiden Näherungswerte für $\sqrt{3}$ gefunden hat, die er in der *Kreismessung* als gegeben annimmt. Bei der Behandlung dieses Gegenstandes will ich mich der von Hultsch angewandten historischen Methode der Darstellung anschließen, da ich ihr vor allen den meist apriorischen Theorien den Vorzug gebe, die eine große Zahl scharfsinniger Autoren zu verschiedenen Zeiten aufgestellt hat.

§ 6. Die ältesten Untersuchungen über unmeßbare oder inkommensurable Größen.

Aus einer Stelle in Proclus' Kommentar zu Euklid I.[1]) erfahren wir, daß Pythagoras die *Theorie der Irrationalzahlen* (*ἡ τῶν ἀλόγων πραγματεία*) begründet hat. Ferner sagt Plato (*Theaetet* 147 D) „Über Quadratwurzeln schrieb Theodorus [von Cyrene] ein Werk, in dem er uns mit Bezug auf die aus 3 oder 5 [Quadrat-]Fuß bewies, daß ihre Längen zur Seite eines Quadratfußes inkommensurabel sind, und in ähnlicher Weise fortfuhr, nacheinander alle [anderen inkommensurablen Wurzeln] bis zur Wurzel aus 17 Quadratfuß auszusondern, worüber er aus irgend einem Grunde nicht hinausging." Der Grund dafür, daß $\sqrt{2}$ nicht als inkommensurable Quadratwurzel genannt ist, muß nach Cantors Meinung der sein, daß sie schon früher als solche bekannt war. Wir können daraus schließen, daß es die Quadratwurzel aus 2 war, die von Pythagoras geometrisch konstruiert und als inkommensurabel zu der Seite eines Quadrats, in dem sie die Diagonale darstellte, erwiesen worden ist. Einen Hinweis auf die Methode, nach der Pythagoras den Wert von $\sqrt{2}$ zu finden versucht hat, haben Cantor und Hultsch in der berühmten Stelle aus Plato (*Rep.* VIII. 546 B, C) über die „geometrische" oder „Hochzeits-" Zahl gefunden. Wenn nämlich Plato die *ῥητὴ* und *ἄρρητος διάμετρος τῆς πεμπάδος* in Gegensatz bringt, so bezieht er sich auf die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 5 Längen-Einheiten lang ist; die *ἄρρητος διάμετρος* oder irrationale Diagonale, ist dann $\sqrt{50}$ selbst, die nächste rationale Zahl ist $\sqrt{50-1}$, und das ist die *ῥητὴ διάμετρος*. Wir haben hierin die Erklärung des Weges, auf dem Pythagoras den ersten und nächstliegenden Näherungswert für $\sqrt{2}$ gefunden haben muß; er hat statt 2 einen gleichwertigen unechten Bruch genommen, doch so, daß der Nenner jedenfalls ein Quadrat war, während der Zähler einem vollständigen Quadrate so nahe wie möglich lag. So wählte Pythagoras $\frac{50}{25}$, und der erste Näherungswert für $\sqrt{2}$ war demnach $\frac{7}{5}$, wobei überdies klar ist, daß $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$. Ferner kann Pythagoras die Richtigkeit des bei Euklid II. 4 bewiesenen Satzes, daß $(a+b)^2$

[1]) S. 65 (ed. Friedlein).

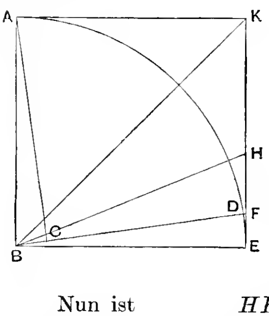
$= a^2 + 2ab + b^2$, wo a, b irgend welche Strecken sind, nicht unbekannt gewesen sein, denn dieser Satz beruht nur auf Sätzen des ersten Buches, die dem Pythagoreischen Satze I. 47 vorausgehen, und die, als Grundlage für I. 47, seinem Urheber im wesentlichen bekannt gewesen sein müssen. Ein nur wenig davon verschiedener geometrischer Beweis ergibt die Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, die Pythagoras gleichfalls wohlbekannt gewesen sein muß. Es konnte daher dem Entdecker des ersten Näherungswertes $\sqrt{50-1}$ für $\sqrt{50}$ nicht entgehen, daß die Anwendung der Formel mit dem *positiven* Zeichen einen viel besseren Näherungswert, nämlich $7 + \frac{1}{14}$, gibt, dessen Quadrat nur um den Betrag $\left(\frac{1}{14}\right)^2$ größer als 50 ist. Daher können wir Pythagoras die Entdeckung der durch die Beziehung

$$7\frac{1}{14} > \sqrt{50} > 7$$

dargestellten Tatsache wohl zuschreiben.

Das daraus folgende Ergebnis, daß $\sqrt{2} > \frac{1}{5}\sqrt{50-1}$ ist, benutzt Aristarch von Samos im 7. Satze seines Werkes *Über Größe und Entfernung der Sonne und des Mondes.*[1])

[1]) Ein Teil des Beweises dieses Satzes war eine Art Vorläufer des ersten Teiles von Satz 3 in Archimedes' *Kreismessung;* sein Inhalt sei daher in der Reproduktion von Hultsch hier eingeschoben.



$ABEK$ ist ein Quadrat, KB eine Diagonale, $\sphericalangle HBE = \frac{1}{2} \sphericalangle KBE$, $\sphericalangle FBE = 3^0$, und AC steht auf BF senkrecht, so daß die Dreiecke ACB, BEF ähnlich sind. Aristarch will beweisen, daß

$$AB : BC > 18 : 1.$$

Wenn R einen rechten Winkel bezeichnet, so sind die Winkel KBE, HBE, FBE bezüglich $\frac{30}{60}$ R, $\frac{15}{60}$ R, $\frac{2}{60}$ R.

Nun ist $\quad HE : FE > \sphericalangle HBE : \sphericalangle FBE.$

[Das wird als bekannter Hilfssatz von Aristarch wie von Archimedes angenommen.]

Daher $\quad HE : FE > 15 : 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$

Nun ist nach Konstruktion $\quad BK^2 = 2\,BE^2.$

Ferner gilt [Euklid VI. 3] $BK : BE = KH : HE;$

daher $\quad KH = \sqrt{2} \cdot HE.$

Betreffs Theodorus Untersuchungen über die Werte von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... $\sqrt{17}$ ist ziemlich sicher, daß $\sqrt{3}$ von ihm geometrisch dargestellt worden ist, nämlich ebenso wie später bei Archimedes als Lot von einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite. Diese Quadratwurzel ließe sich dann leicht mit der von Plato erwähnten Seite des „einen Quadratfußes“ vergleichen. Auch die Tatsache, daß gerade die Seite von drei Quadrat*fuß* (*τρίπους δύναμις*) als inkommensurabel nachgewiesen wird, legt die Vermutung nahe, daß bei dem Beweise des Theodorus ein besonderer Grund vorlag, ausdrücklich *Fuß* statt einfach Längeneinheiten zu sagen; die Erklärung ist wahrscheinlich die, daß Theodorus die Seiten seiner Dreiecke ebenso teilte, wie der griechische Fuß geteilt war, d. h. in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel. Deshalb ging Theodorus wahrscheinlich von der Identität $3 = \frac{48}{16}$ aus, genau ebenso wie Pythagoras einen Näherungswert für $\sqrt{2}$ gefunden hatte, indem er $\frac{50}{25}$ für 2 setzte. Es wäre dann klar, daß

$$\sqrt{3} < \sqrt{\frac{48+1}{16}}, \text{ d. h. } \frac{7}{4}.$$

Um $\sqrt{48}$ weiter zu untersuchen, wird Theodorus sie in die Form $\sqrt{49-1}$ gebracht haben, wie Pythagoras $\sqrt{50}$ in die Form $\sqrt{49+1}$ gebracht hatte, und das Ergebnis wäre

$$\sqrt{48} \left(= \sqrt{49-1}\right) < 7 - \frac{1}{14}.$$

Von weiteren Untersuchungen über inkommensurable Quadratwurzeln vor Archimedes wissen wir nichts.

Da nun $\qquad \sqrt{2} > \sqrt{\frac{50-1}{25}}$,

so folgt $\qquad KH : HE > 7 : 5$,

und daraus $\qquad KE : EH > 12 : 5$ . . . . (β).

Aus (α) und (β) zusammen ergibt sich

$$KE : FE > 18 : 1.$$

Daher ist, weil $\qquad BF > BE$ (oder KE

$$BF : FE > 18 : 1,$$

und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$AB : BC > 18 : 1.$$

§ 7. Archimedes' Näherungswerte für $\sqrt{3}$.

Wenn wir sehen, daß Aristarch von Samos sich noch damit begnügt, den ersten und sehr rohen von Pythagoras gefundenen Näherungswert für $\sqrt{2}$ zu benutzen, so ist es um so erstaunlicher, daß Aristarchs jüngerer Zeitgenosse Archimedes auf einmal ohne ein Wort der Erklärung angibt, es sei

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

was er in der *Kreismessung* tut.

Um zu einer Erklärung der wahrscheinlichen Schritte zu gelangen, durch die Archimedes diese Näherungswerte erhielt, verwendet Hultsch dieselbe Methode der *Analysis*, die von den griechischen Geometern zur Lösung von Aufgaben benutzt wurde, die Methode nämlich, daß man die Aufgabe als gelöst annimmt und daraus die nötigen Folgerungen zieht. Um die beiden Brüche $\frac{265}{153}$ und $\frac{1351}{780}$ zu vergleichen, zerlegen wir die Nenner zunächst in ihre Primfaktoren und erhalten

$$780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13,$$
$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17.$$

Wir bemerken dabei, daß $2 \cdot 2 \cdot 13 = 52$, während $3 \cdot 17 = 51$, und bringen daher die Beziehung zwischen den Zahlen in folgender Weise zum Ausdruck

$$780 = 3 \cdot 5 \cdot 52,$$
$$153 = 3 \cdot 51.$$

Zum bequemeren Vergleichen multiplizieren wir Zähler und Nenner des Bruches $\frac{265}{153}$ mit 5; die beiden ursprünglichen Brüche sind dann

$$\frac{1351}{15 \cdot 52} \quad \text{und} \quad \frac{1325}{15 \cdot 51},$$

so daß wir Archimedes' Annahme in die Form

$$\frac{1351}{52} > 15\sqrt{3} > \frac{1325}{51}$$

bringen können, die offenbar gleichbedeutend ist mit

$$26 - \frac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26 - \frac{1}{51}.$$

Nun ist $26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + \left(\frac{1}{52}\right)^2}$, und dieser Ausdruck ist ein Näherungswert für $\sqrt{26^2 - 1}$.

Wir haben demnach

$$26 - \frac{1}{52} > \sqrt{26^2 - 1}.$$

Da $26 - \frac{1}{52}$ mit $15 \cdot \sqrt{3}$ verglichen ist, und wir einen Näherungswert für $\sqrt{3}$ selbst suchen, dividieren wir mit 15 und erhalten so

$$\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52}\right) > \frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1} = \sqrt{\frac{676 - 1}{225}} = \sqrt{\frac{675}{225}} = \sqrt{3},$$

und es folgt

$$\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52}\right) > \sqrt{3}.$$

Die untere Grenze für $\sqrt{3}$ war angegeben durch

$$\sqrt{3} > \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{51}\right),$$

und ein Blick darauf lehrt, daß man sie erhält, indem man einfach $(52 - 1)$ für 52 einsetzt.

Nun gilt der folgende Satz: *Wenn* $a^2 \pm b$ *eine ganze nichtquadratische Zahl ist, und* a^2 *die nächste Quadratzahl (je nach dem vorliegenden Falle größer oder kleiner als die erste Zahl), so ist*

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Hultsch beweist diese Doppel-Ungleichung durch eine Reihe von Sätzen, die nach griechischer Art formuliert sind, und es ist kaum zu bezweifeln, daß Archimedes im wesentlichen dieselben Resultate gefunden und bewiesen hat, wenn nicht gar in derselben Form. Folgende Umstände stützen die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme.

(1) Gewisse von Heron angegebene Näherungswerte beweisen, daß er die Formel

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

kannte und häufig anwandte (darin bedeutet das Zeichen $\sim$ „ist annähernd gleich“).

So gibt er an: $$\sqrt{50} \sim 7 + \frac{1}{14}.$$
$$\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16},$$
$$\sqrt{75} \sim 8 + \frac{11}{16}.$$

(2) Die Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a+1}$ wird von dem Araber Alkarkhī (11. Jahrhundert) benutzt, der aus griechischen Quellen schöpfte (Cantor, S. 763 f.).

Es kann daher kaum ein Zufall sein, daß uns die Formel
$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$
gerade das gibt, was wir brauchen, um die beiden Archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ zu erhalten, und zwar in direktem Zusammenhange miteinander.[1])

Wir sind jetzt in der Lage, die Synthesis, wie folgt, auszuführen. Aus der geometrischen Darstellung von $\sqrt{3}$ als Lot von einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite erhalten wir $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ und als erste Annäherung
$$2 - \frac{1}{4} > \sqrt{3}.$$

Mit Benutzung unserer Formel können wir das sogleich umformen in
$$\sqrt{3} > 2 - \frac{1}{4-1}, \quad \text{oder} \quad 2 - \frac{1}{3}.$$

[1]) Die meisten apriorischen Theorien über den Ursprung der Approximationen stehen dem gewichtigen Einwand offen, daß sie in der Regel Reihen von Näherungswerten geben, in denen die beiden hier in Frage stehenden nicht unmittelbar aufeinander folgen, sondern durch andere getrennt sind, die bei Archimedes nicht auftreten. Hultsch' Erklärung besitzt den großen Vorzug, daß sie dieser Einwand nicht trifft. Aber es ist billig, zu erwähnen, daß die hier angeführte, von Hultsch gebrauchte Formel in Hunraths Lösung des Problems vorkommt (*Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Dezimalbrüche*, Kiel, 1884, S. 21; vgl. *Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern,* Hadersleben, 1883); dieselbe Formel wird implizit in einer der von Tannery angegebenen Lösungen angewendet (*Sur la mesure du cercle d'Archimède* in den *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 2e série, IV. [1882], S. 313—337. *Mémoires scientifiques* de P. Tannery, ed. Heiberg u. Zeuthen, I. S. 226—253.

Archimedes wird dann $\left(2-\frac{1}{3}\right)$ oder $\frac{5}{3}$ quadriert und $\frac{25}{9}$ erhalten haben, was er mit 3 oder $\frac{27}{9}$ verglich; d. h. er setzte $\sqrt{3}=\sqrt{\frac{25+2}{9}}$ und erhielt

$$\frac{1}{3}\left(5+\frac{1}{5}\right)>\sqrt{3}, \text{ d. h. } \frac{26}{15}>\sqrt{3}.$$

Um eine noch genauere Approximation zu finden, ging er in derselben Weise weiter und verglich $\left(\frac{26}{15}\right)^2$ oder $\frac{676}{225}$ mit 3 oder $\frac{675}{525}$, woraus sich ergab, daß

$$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{26^2-1}{225}},$$

und daher, daß $$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right)>\sqrt{3},$$

d. h. $$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}.$$

Die Anwendung der Formel ergab dann

$$\sqrt{3}>\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52-1}\right),$$

d. h. $$\sqrt{3}>\frac{1326-1}{15\cdot 51}, \text{ oder } \frac{265}{153}.$$

Das vollständige Ergebnis war daher

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}.$$

Somit ging Archimedes vermutlich von dem ersten Näherungswerte $\frac{7}{4}$ zu $\frac{5}{3}$, von $\frac{5}{3}$ zu $\frac{26}{15}$ und von $\frac{26}{15}$ direkt zu $\frac{1351}{780}$, dem genauesten von allen, über, aus dem er den weniger genauen $\frac{265}{153}$ ableitete. Der Grund, weshalb er nicht zu einer noch näheren Approximation als $\frac{1351}{780}$ weiterging, ist vielleicht der, daß die Quadrierung dieses Bruches Zahlen hineingebracht hätte, die zur bequemen Handhabung in seinen weiteren Rechnungen viel zu groß gewesen wären. Ein ähnlicher Grund läßt sich dafür anführen, daß er von $\frac{5}{3}$ statt von $\frac{7}{4}$ ausging; hätte er die letzte Zahl benutzt, so hätte er nach derselben Methode zuerst erhalten $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49-1}{16}}$, und daraus $\frac{7-\frac{1}{14}}{4} > \sqrt{3}$, oder $\frac{97}{56} > \sqrt{3}$; die Quadrierung von $\frac{97}{56}$ hätte ergeben $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{97^2-1}}{56}$ und die entsprechende Annäherung $\frac{18817}{56 \cdot 194}$, wo die Zahlen für seinen Zweck wiederum unbequem groß sind.

§ 8. Näherungswerte für die Quadratwurzeln aus großen Zahlen.

Archimedes gibt in der *Kreismessung* die folgenden Näherungswerte:

(1) $3013\frac{3}{4} > \sqrt{9082321}$,

(2) $1838\frac{9}{11} > \sqrt{3380929}$,

(3) $1009\frac{1}{6} > \sqrt{1018405}$,

(4) $2017\frac{1}{4} > \sqrt{4069284\frac{1}{36}}$,

(5) $591\frac{1}{8} < \sqrt{349450}$,

(6) $1172\frac{1}{8} < \sqrt{1373943\frac{33}{64}}$,

(7) $2339\frac{1}{4} < \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$.

Zweifellos erhielt Archimedes die ganzzahligen Bestandteile der Quadratwurzeln aus diesen Zahlen mit Hilfe der auf dem Euklidischen Theorem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ beruhenden Methode, die bereits an dem oben angegebenen Beispiel aus Theon exemplifiziert worden ist, wo ein Näherungswert für $\sqrt{4500}$ in Sexagesimalbrüchen ermittelt wird. Die Methode unterscheidet sich in der Hauptsache von unserer heutigen nicht; aber während wir, etwa in dem ersten Falle, $\sqrt{9082321}$, sofort entscheiden können, wieviel Stellen die Quadratwurzel haben wird, indem wir die gegebene Zahl, von hinten anfangend, in Stellenpaare zerlegen, ließ das Fehlen eines Zeichens für 0 im Griechischen die Zahl der Stellen der Quadratwurzel weniger leicht erkennen, da die griechisch geschriebene Zahl $\overset{ϡ\eta}{M}{}_{,}\beta\tau\kappa\alpha'$ nur 6 statt 7 Zeichen enthält, die Stellen bedeuten. Aber selbst bei griechischer Schreibweise ist unschwer zu übersehen, daß von den Stellenwerten in der Wurzel, Einern, Zehnern, Hundertern, usw., die Einer dem Bestandteile $\varkappa\alpha'$ des Radikanden, die Zehner $͵\beta\tau$, die Hunderter $\overset{\eta}{M}$ und die Tausender $\overset{ϡ}{M}$ entsprechen. Es ist somit klar, daß die Quadratwurzel aus 9082321 von der Form

$$1000\,x + 100\,y + 10\,z + w$$

sein muß, wo x, y, z, w nur einen oder den anderen von den Werten 0, 1, 2, ... 9 haben können. Es sei x gefunden, dann muß der Rest $N - (1000\,x)^2$, wo N die gegebene Zahl ist, zunächst $2 \cdot 1000x \cdot 100y$ und $(100y)^2$ enthalten, sodann $2 \cdot (1000x + 100y)10z$ und $(10\,z)^2$ und schließlich noch zwei ähnlich gebildete Zahlen.

In dem besonderen Falle (1) ist offenbar $x = 3$. Die Subtraktion von $(3000)^2$ gibt den Rest 82321, der $2 \cdot 3000 \cdot 100\,y$ enthalten muß. Aber selbst wenn y nur gleich 1 ist, wäre dieses Produkt 600000, d. h. größer als 82321. Daher fehlen in der Quadratwurzel die Hunderter. Um z zu finden, beachten wir, daß 82321

$$2 \cdot 3000 \cdot 10\,z + (10\,z)^2$$

enthalten muß, und z finden wir demnach, indem wir 82321 durch 60000 dividieren. Daher $z = 1$. Wiederum berücksichtigen wir, um w zu finden, daß der Rest

$$(82321 - 2 \cdot 3000 \cdot 10 - 10^2) \quad \text{oder} \quad 22221$$

$2 \cdot 3010\,w + w^2$ enthalten muß, und indem wir 22221 durch $2 \cdot 3010$ dividieren, sehen wir, daß $w = 3$. Daher ist 3013 der ganzzahlige Teil der Quadratwurzel, und der Rest ist $22221 - (2 \cdot 3010 \cdot 3 + 3^2) = 4152$.

Die Bedingungen der Aufgabe verlangen nun, daß der zu ermittelnde Näherungswert der Quadratwurzel nicht kleiner als der wahre Wert sein darf, und daher muß der zu 3013 hinzuzufügende gebrochene Teil etwas zu groß genommen werden. Nun ist leicht zu sehen, daß dieser Bruch größer als $\frac{1}{2}$ sein muß, weil $2 \cdot 3013 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ kleiner als der Rest 4152 ist. Nehmen wir also an, die gesuchte Zahl (die näher bei 3014 als bei 3013 liegt) sei $3014 - \frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ etwas zu klein sein kann.

Nun ist $3014^2 = 3013^2 + 2 \cdot 3013 + 1 = 3013^2 + 6027$
$= 9082321 - 4152 + 6027$,

woraus folgt $9082321 = 3014^2 - 1875$.

Wenden wir Archimedes' Formel $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$ an, so erhalten wir

$$3014 - \frac{1875}{2 \cdot 3014} > \sqrt{9082321}.$$

Der gesuchte Bruch $\frac{p}{q}$ darf daher nicht größer sein als $\frac{1875}{6028}$.

Es bleibt zu erklären, warum Archimedes für $\frac{p}{q}$ den Wert $\frac{1}{4}$ nimmt, der gleich $\frac{1507}{6028}$ ist. Zunächst bevorzugt er offenbar Brüche mit der Einheit als Zähler und einer Potenz von 2 als Nenner, weil sie zur Vereinfachung der Rechnung beitragen, z. B. wenn zwei solche einander gleiche Brüche addiert werden sollen. (Die Ausnahmen $\frac{9}{11}$ und $\frac{1}{6}$ sind durch besondere Umstände zu erklären, die sogleich erwähnt werden sollen.) Ferner muß in dem vorliegenden Falle daran erinnert werden, daß in der nachfolgenden Rechnung 2911 zu $3014 - \frac{p}{q}$ addiert und die Summe durch 780 oder $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ dividiert werden soll. Es würde offenbar zur Vereinfachung beitragen, wenn ein Faktor gehoben werden könnte, z. B. der für diesen Zweck geeignetste, 13. Wenn wir nun $2911 + 3014$ oder 5925 durch 13 dividieren, so erhalten wir den Quotienten 455 und den Rest 10, so daß $10 - \frac{p}{q}$ noch durch 13 dividiert werden muß. Daher ist $\frac{p}{q}$ so zu wählen, daß $10q - p$ durch 13 teilbar ist, während $\frac{p}{q}$ nahezu gleich, aber nicht größer als $\frac{1875}{6028}$ ist. Daher liegt die einfache Lösung $p = 1$, $q = 4$ nahe.

(2) $\sqrt{3380929}$.

Der gewöhnliche Prozeß der Ausziehung der Quadratwurzel ergab als ihren ganzzahligen Bestandteil 1838 und als Rest 2685. Wie vorher war leicht zu sehen, daß die genaue Wurzel näher bei 1839 als bei 1838 lag und daß

$$\begin{aligned} 3380929 &= 1838^2 + 2685 = 1839^2 - 2 \cdot 1838 - 1 + 2685 \\ &= 1839^2 - 992. \end{aligned}$$

Die Archimedische Formel ergab dann

$$1839 - \frac{992}{2 \cdot 1839} > \sqrt{3380929}.$$

Es kann Archimedes nicht entgangen sein, daß $\frac{1}{4}$ eine gute Approximation für $\frac{992}{2 \cdot 1839}$ oder $\frac{1984}{7356}$ ist, da $\frac{1}{4} = \frac{1839}{7356}$; und $\frac{1}{4}$ hätte die notwendige Bedingung erfüllt, daß der zu wählende Bruch kleiner als der wirkliche Wert sein mußte. Wenn also Archimedes $\frac{2}{11}$ als Näherungswert für diesen Bruch nimmt, so ist klar, daß er dabei die Vereinfachung der darauf folgenden Rechnung durch Elimination eines Faktors im Auge hat. Wird der Bruch mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet, so ist die Summe aus $1839 - \frac{p}{q}$ und 1823 oder $3662 - \frac{p}{q}$ durch $240 = 6 \cdot 40$ zu dividieren. Die Division von 3662 durch 40 gibt als Rest 22, und dann sind p, q so zu wählen, daß $22 - \frac{p}{q}$ sich bequem durch 40 teilen läßt, während $\frac{p}{q}$ kleiner als $\frac{992}{3678}$ aber diesem Werte annähernd gleich ist. Wie man leicht sieht, genügt die Lösung $p = 2$, $q = 11$ diesen Bedingungen.

(3) $\sqrt{1018405}$.

Das gewöhnliche Verfahren ergab $1018405 = 1009^2 + 324$ und die Approximation

$$1009 \frac{324}{2018} > \sqrt{1018405}.$$

Der für $\frac{324}{2018}$ einzusetzende Bruch mußte größer als dieser aber annähernd ihm gleich sein; $\frac{1}{6}$ erfüllte diese Bedingungen, während die nachfolgende Rechnung keine Änderung daran verlangte.

(4) $\sqrt{4069284\frac{1}{36}}$.

Der gewöhnliche Prozeß ergab $4069284\frac{1}{36} = 2017^2 + 995\frac{1}{36}$; es folgte

$$2017 + \frac{36 \cdot 995 + 1}{36 \cdot 2 \cdot 2017} > \sqrt{4069284\tfrac{1}{36}},$$

und $2017\frac{1}{4}$ ergab sich als geeigneter Näherungswert, der etwas größer war als die linke Seite dieser Ungleichheit.

(5) $\sqrt{349450}$.

In dem Falle dieser und der beiden folgenden Wurzeln war ein Näherungswert zu ermitteln, der kleiner anstatt größer als der wahre Wert war. Archimedes mußte daher den zweiten Teil der Formel

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

benutzen. In dem besonderen Falle $\sqrt{349450}$ ist 591 der ganzzahlige Bestandteil der Wurzel, 169 der Rest. Das ergibt

$$591 + \frac{169}{2 \cdot 591} > \sqrt{349450} > 591 + \frac{169}{2 \cdot 591 + 1},$$

und da $169 = 13^2$, während $2 \cdot 591 + 1 = 7 \cdot 13^2$, so folgt ohne weitere Rechnung

$$\sqrt{349450} > 591\tfrac{1}{7}.$$

Warum nimmt nun Archimedes an Stelle dieses Näherungswertes einen anderen weniger genauen, nämlich $591\frac{1}{8}$? Die nachfolgende Rechnung und die anderen Näherungswerte im ersten Teile des Beweises legen die Antwort nahe, daß er es zur Erleichterung der Rechnung vorzog, für seine Annäherungen nur Brüche von der Form $\frac{1}{2^n}$ zu verwenden. Aber er muß daran gedacht haben, daß die Einsetzung des zunächst liegenden derartigen Bruches $\frac{1}{8}$ für $\frac{1}{7}$ sein Endresultat möglicherweise beeinflussen und es dem wahren Werte weniger nahe bringen konnte, als nötig war. Tatsächlich beeinflußt es das Resultat nicht, wie Hultsch gezeigt hat, wenn man $591\frac{1}{7}$ nimmt und mit dieser Zahl weiter rechnet. Wir müssen daher annehmen, daß Archimedes auf der Grundlage der Zahl $591\frac{1}{7}$ eine Strecke weit vorgedrungen ist, um sich zu überzeugen, daß er keinen merklichen Fehler beging, wenn er den bequemeren obwohl minder genauen Näherungswert $591\frac{1}{8}$ nahm.

(6) $\sqrt{1373943\frac{33}{64}}$.

In diesem Falle ist der ganzzahlige Teil der Wurzel 1172 und der Rest $359\frac{33}{64}$. Daher, wenn R die Wurzel bezeichnet,

$$R > 1172 + \frac{359\frac{33}{64}}{2 \cdot 1172 + 1},$$

und *a fortiori*

$$R > 1172 + \frac{359}{2 \cdot 1172 + 1}.$$

Nun ist $2 \cdot 1172 + 1 = 2345$; der Bruch wird daher $\frac{359}{2345}$, und $\frac{1}{7}\left(=\frac{359}{2513}\right)$ erfüllt die notwendigen Bedingungen, daß er nämlich dem gegebenen Bruche annähernd gleich aber nicht größer als dieser sein soll. Hier hätte Archimedes wiederum $1172\frac{1}{7}$ als Näherungswert genommen, wenn nicht aus demselben Grunde wie im letzten Falle $1172\frac{1}{8}$ bequemer gewesen wäre.

(7) $\sqrt{5472132\frac{1}{16}}$.

Der ganzzahlige Bestandteil der Wurzel ist hier 2339, der Rest $1211\frac{1}{16}$, so daß, wenn R die genaue Wurzel ist,

$$R > 2339 + \frac{1211\frac{1}{16}}{2 \cdot 2339 + 1},$$

und *a fortiori* $\qquad R > 2339\frac{1}{4}$.

Einige Worte seien hinzugefügt über Archimedes' schließliche Reduktion der Ungleichheiten

$$3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} > \pi > 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$$

auf die einfachere Form

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

Tatsächlich ist $\frac{1}{7} = \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$, so daß im ersten Bruche nur eine geringfügige Veränderung, die Verminderung des Nenners um 1, notwendig war, um die einfache Zahl $3\frac{1}{7}$ zu erhalten.

Betreffs der *unteren* Grenze für π sehen wir, daß $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} = \frac{1137}{8069}$; Hultsch macht den sinnreichen Vorschlag, die Wirkung der Vergrößerung des Nenners um 1 zu verfolgen. Das gibt $\frac{1137}{8070}$ oder $\frac{379}{2690}$; dividieren wir 2690 durch 379, so liegt der Quotient zwischen 7 und 8, so daß

$$\frac{1}{7} > \frac{379}{2690} > \frac{1}{8}.$$

Nun lehrt ein bekannter Satz (bewiesen bei Pappus VII. S. 689), wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, daß dann

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d}.$$

Ähnlich kann bewiesen werden

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

In dem obigen Falle folgt, daß

$$\frac{379}{2690} > \frac{379+1}{2690+8} > \frac{1}{8},$$

was genau gibt $$\frac{379}{2690} > \frac{10}{71} > \frac{1}{8},$$

und $\frac{10}{71}$ liegt viel näher bei $\frac{379}{2690}$ als $\frac{1}{8}$.

Anmerkung über andere Hypothesen hinsichtlich der Näherungswerte für $\sqrt{3}$.

Eine Darstellung und Prüfung aller der verschiedenen Theorien, die bis zum Jahre 1882 zu dem Zwecke aufgestellt worden sind, die Näherungswerte des Archimedes für $\sqrt{3}$ zu erklären, findet der Leser in der erschöpfenden Schrift von Dr. Siegmund Günther, betitelt *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* (Leipzig, 1882). Derselbe Verfasser gibt weitere Hinweise in seinem *Abriß der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum* im Anhang zu Bd. V, Teil 1 von Iwan von Müllers *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft* (München, 1894).

Günther ordnet die verschiedenen Hypothesen nach drei allgemeinen Gesichtspunkten:

(1) solche, die auf eine mehr oder minder versteckte Anwendung der Methode der Kettenbrüche hinauslaufen; zu diesen gehören die Lösungen von De Lagny, Mollweide, Hauber, Buzengeiger, Zeuthen, P. Tannery (erste Lösung), Heilermann;

(2) solche, die Näherungswerte in der Form von Bruchreihen wie $a + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \ldots$ angeben; zu dieser Klasse gehören die Lösungen von Radicke, v. Pessl, Rodet (mit Beziehung auf die Çulvasūtras), Tannery (zweite Lösung);

(3) solche, welche die inkommensurable Größe zwischen eine obere und untere Grenze einschließen und dann die Grenzen enger und enger ziehen. Diese Klasse umfaßt die Lösungen von Oppermann, Alexejeff, Schönborn, Hunrath, obwohl die ersten

beiden von Günther auch mit der Methode der Kettenbrüche in Zusammenhang gebracht werden.

Von den derart von Günther unterschiedenen Methoden brauchen hier nur diejenigen erörtert zu werden, die mehr oder minder den Anspruch erheben können, auf historischer Basis zu ruhen, in dem Sinne, daß sie Anwendungen oder Erweiterungen von Prinzipien darstellen, die in den auf uns gekommenen Werken anderer griechischer Mathematiker niedergelegt sind. Die meisten quasi-historischen Lösungen hängen mit dem System der *Seiten-* und *Diagonalzahlen* (πλευρικοὶ und διαμετρικοὶ ἀριθμοί) des Theon von Smyrna (um 130 n. Chr.) zusammen; dieses setzt er in einem Werke auseinander, das den Zweck verfolgte, soviel von den Prinzipien der Mathematik zu bieten, wie für das Studium der Werke Platos notwendig war.

Die *Seiten-* und *Diagonalzahlen* werden folgendermaßen gebildet. Wir gehen von zwei Einheiten aus und bilden (*a*) ihre Summe, (*b*) die Summe aus der doppelten ersten und der einfachen zweiten, wodurch wir zwei neue Zahlen erhalten, nämlich:

$$1 \cdot 1 + 1 = 2, \qquad 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Von diesen Zahlen ist die erste eine *Seiten-*, die zweite eine *Diagonalzahl*, oder (wie wir sagen wollen)

$$a_2 = 2, \qquad d_2 = 3.$$

Auf dieselbe Weise, wie diese Zahlen aus $a_1 = 1$, $d_1 = 1$ gebildet sind, werden nacheinander neue Zahlenpaare aus a_2, d_2 usw. gebildet, gemäß den Formeln:

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \qquad d_{n+1} = 2\,a_n + d_n,$$

wodurch wir erhalten

$$a_3 = 1 \cdot 2 + 3 = 5, \qquad d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$
$$a_4 = 1 \cdot 5 + 7 = 12, \qquad d_4 = 2 \cdot 5 + 7 = 17,$$

und so fort.

Theon stellt bezüglich dieser Zahlen den allgemeinen Satz auf, den wir durch die Gleichung

$$d_n^2 = 2\,a_n^2 \pm 1$$

ausdrücken würden. Der (nicht angegebene, weil zweifellos wohlbekannte) Beweis ist einfach. Denn wir haben

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2\,a_n^2 &= (2\,a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2\,(a_{n-1} + d_{n-1})^2 \\ &= 2\,a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -\,(d_{n-1}^2 - 2\,a_{n-1}^2) \\ &= +\,(d_{n-2}^2 - 2\,a_{n-2}^2), \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$

während $d_1^2 - 2\,a_1^2 = -1$, womit der Satz bewiesen ist.

6*

Cantor hat hervorgehoben, daß jemand, dem die Richtigkeit dieses Satzes geläufig war, auch bemerken mußte, wenn die Zahlen nacheinander gebildet werden, daß dann der Quotient d_n^2/a_n^2 mehr und mehr sich dem Werte 2 nähere, und infolgedessen, daß die aufeinanderfolgenden Brüche d_n/a_n immer nähere und nähere Annäherungen an den Wert $\sqrt{2}$ bilden, oder mit anderen Worten, daß

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots\ldots$$

sukzessive Näherungswerte für $\sqrt{2}$ sind. Es ist zu bemerken, daß der dritte dieser Näherungswerte, $\frac{7}{5}$, der Pythagoreische ist, auf den Plato hinweist; der Umstand, daß das obige Schema Theons eine Methode bietet, alle positiven ganzzahligen Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

zu finden, und zwar in einem zur Einführung in das Studium Platos bestimmten Werke, läßt, wie Tannery hervorgehoben hat, mit großer Wahrscheinlichkeit vermuten, daß sogar schon zu Platos Lebzeiten die systematische Untersuchung der genannten Gleichung in der Akademie begonnen hatte. In diesem Zusammenhange ist Proclus' Kommentar zu Euklid I. 47 interessant. Dort ist auseinandergesetzt, daß bei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken „es nicht möglich ist, Zahlen zu finden, die den Seiten entsprechen; denn es gibt keine Quadratzahl, die doppelt so groß ist wie ein Quadrat, ausgenommen in dem Sinne *annähernd* doppelt, 7^2 z. B. ist das Doppelte von 5^2 vermindert um 1." Wenn man bedenkt, daß Theons Verfahren die Auffindung aller Quadratzahlen zum Zweck hat, die nur um die Einheit von den doppelten Quadraten einer anderen Reihe von Zahlen bezüglich verschieden sind, und daß die Seiten der beiden Quadratreihen bezüglich als *Diagonal-* und *Seitenzahlen* bezeichnet werden, so ist der Schluß kaum zu widerlegen, daß Plato ein solches System im Sinne hat, wenn er von *ῥητὴ διάμετρος* (*rationaler* Diagonale) im Vergleich zu *ἄρρητος διάμετρος* (*irrationaler* Diagonale) *τῆς πεμπάδος* spricht (vgl. S. 69 oben).

Es läßt sich nun vermuten, daß Archimedes nach einer ähnlichen Methode wie die, nach der aufeinander folgende Näherungswerte für $\sqrt{2}$ mittels aufeinander folgender rationaler Lösungen der unbestimmten Gleichungen $2x^2 - y^2 = \pm 1$ gefunden werden konnten, versucht habe, alle rationalen Lösungen der beiden unbestimmten Gleichungen zu finden, die in ähnlicher Beziehung zu $\sqrt{3}$ stehen, nämlich

$$x^2 - 3y^2 = 1,$$
$$x^2 - 3y^2 = -2.$$

Zeuthen scheint als erster *eo nomine* die alten Näherungswerte für $\sqrt{3}$ mit der Auflösung dieser Gleichungen in Verbindung gebracht zu haben, die auch von Tannery zur Grundlage seiner ersten Methode gemacht worden sind. Aber in der Hauptsache war dieselbe Methode schon 1723 von De Lagny benutzt worden, dessen Hypothese zum Vergleich nach der von Tannery beschrieben werden soll, die sie so genau antizipiert.

Zeuthens Lösung.

Mit Berufung auf die Tatsache, daß schon vor Euklids Zeit die Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ mit Hilfe der Substitutionen

$$x = mn, \qquad y = \frac{m^2 - n^2}{2}, \qquad z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

wohlbekannt war, schließt Zeuthen, daß es nicht schwer gewesen sein kann, aus Euklid II. 5 die Identität

$$3(mn)^2 + \left(\frac{m^2 - 3n^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 3n^2}{2}\right)^2$$

abzuleiten, woraus sich durch Fortschaffen der Nenner leicht die Formel

$$3(2mn)^2 + (m^2 - 3n^2)^2 = (m^2 + 3n^2)^2$$

erhalten ließ.

War daher eine Lösung von $m^2 - 3n^2 = 1$ bekannt, so ließ sich sofort eine zweite finden, indem man setzte

$$x = m^2 + 3n^2, \qquad y = 2mn.$$

Nun wird offenbar die Gleichung

$$m^2 - 3n^2 = 1$$

durch die Werte $m = 2$, $n = 1$ befriedigt; daher ist die nächste Lösung der Gleichung

$$x^2 - 3y^2 = 1$$
$$x_1 = 2^2 + 3 \cdot 1 = 7, \qquad y_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4;$$

und indem wir in gleicher Weise fortfahren, bekommen wir eine beliebige Anzahl von Lösungen, wie

$$x_2 = 7^2 + 3 \cdot 4^2 = 97, \qquad y_2 = 2 \cdot 7 \cdot 4 = 56,$$
$$x_3 = 97^2 + 3 \cdot 56^2 = 18817, \qquad y_3 = 2 \cdot 97 \cdot 56 = 10864,$$

und so fort.

Sodann wendet sich Zeuthen zu der anderen Gleichung

$$x^2 - 3y^2 = -2$$

und benutzt die Identität

$$(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2 = -2(m^2 - 3n^2).$$

Wenn wir daher eine Lösung der Gleichung $m^2 - 3n^2 = 1$ kennen, können wir substituieren

$$x = m + 3n, \qquad y = m + n.$$

Setzen wir wie vorher $m = 2$, $n = 1$, so haben wir

$$x_1 = 5, \qquad y_1 = 3.$$

Setzen wir $x_2 = x_1 + 3y_1 = 14$, $y_2 = x_1 + y_1 = 8$, so erhalten wir

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

(und $m = 7$, $n = 4$ ist, wie wir gesehen haben, eine Lösung von $m^2 - 3n^2 = 1$).

Gehen wir wieder von x_2, y_2 aus, so haben wir

$$x_3 = 38, \quad y_3 = 22$$

und

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{19}{11}$$

(wo $m = 19$, $n = 11$ eine Lösung der Gleichung $m^2 - 3n^2 = -2$ ist);

$$x_4 = 104, \quad y_4 = 60,$$

woraus

$$\frac{x_4}{y_4} = \frac{26}{15}$$

(und $m = 26$, $n = 15$ genügt der Gleichung $m^2 - 3n^2 = 1$);

$$x_5 = 284, \quad y_5 = 164 \quad \text{oder} \quad \frac{x_5}{y_5} = \frac{71}{41}.$$

Ähnlich

$$\frac{x_6}{y_6} = \frac{97}{56}, \quad \frac{x_7}{y_7} = \frac{265}{153}, \quad \text{usw.}$$

Diese Methode gibt alle sukzessiven Näherungswerte für $\sqrt{3}$, indem sie die beiden Gleichungen

$$x^2 - 3y^2 = 1,$$
$$x^2 - 3y^2 = -2$$

in Betracht zieht.

Tannerys erste Lösung.

Tannery legt sich die Frage vor, wie Diophant die Lösung der beiden unbestimmten Gleichungen vorgenommen hätte. Er nimmt die erste Gleichung in der verallgemeinerten Form

$$x^2 - ay^2 \doteq 1$$

und setzt dann, indem er annimmt, eine Lösung (p, q) der Gleichung sei bekannt,

$$p_1 = mx - p, \quad q_1 = x + q.$$

Dann ist $p_1^2 - aq_1^2 = m^2x^2 - 2mpx + p^2 - ax^2 - 2aqx - aq^2 = 1$, woraus folgt, da nach Annahme $p^2 - aq^2 = 1$,

$$x = \frac{2(mp + aq)}{m^2 - a},$$

so daß
$$p_1 = \frac{(m^2 + a)p + 2amq}{m^2 - a}, \quad q_1 = \frac{2mp + (m^2 + a)q}{m^2 - a}$$

und
$$p_1^2 - aq_1^2 = 1.$$

Die so gefundenen Werte p_1, q_1 sind rational aber nicht notwendig ganz; wenn ganzzahlige Lösungen gewünscht werden, haben wir nur zu setzen

$$p_1 = (u^2 + av^2)p + 2auvq, \qquad q_1 = 2puv + (u^2 + av^2)q,$$

wo (u, v) eine andere ganzzahlige Lösung von $x^2 - ay^2 = 1$ ist.

Wenn allgemein (p, q) eine bekannte Lösung der Gleichung

$$x^2 - ay^2 = r$$

ist, setzen wir $p_1 = \alpha p + \beta q$, $q_1 = \gamma p + \delta q$, und „il suffit pour déterminer α, β, γ, δ de connaître les trois groupes de solutions les plus simples et de résoudre deux couples d'équations du premier degré à deux inconnues." So sind

(1) für die Gleichung $\qquad x^2 - 3y^2 = 1$

die ersten drei Lösungen:

$$(p = 1,\ q = 0), \quad (p = 2,\ q = 1), \quad (p = 7,\ q = 4),$$

woraus
$$\left.\begin{matrix} 2 = \alpha \\ 1 = \gamma \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} 7 = 2\alpha + \beta \\ 4 = 2\gamma + \delta \end{matrix}\right\},$$

so daß
$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2,$$

und es folgt, daß die vierte Lösung gegeben ist durch

$$p = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 26,$$
$$q = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 15;$$

(2) für die Gleichung

$$x^2 - 3y^2 = -2$$

sind die ersten drei Lösungen (1, 1), (5, 3), (19, 11) und wir haben

$$\left.\begin{matrix} 5 = \alpha + \beta \\ 2 = \gamma + \delta \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} 19 = 5\alpha + 3\beta \\ 11 = 5\gamma + 3\delta \end{matrix}\right\},$$

woraus folgt $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, $\delta = 2$, und die nächste Lösung ist gegeben durch

$$p = 2 \cdot 19 + 3 \cdot 11 = 71,$$
$$q = 1 \cdot 19 + 2 \cdot 11 = 41,$$

usw.

Daher können durch Benutzung der beiden unbestimmten Gleichungen und Fortsetzung des angedeuteten Verfahrens alle aufeinander folgenden Näherungswerte für $\sqrt{3}$ gefunden werden.

Von den beiden Methoden, die Gleichungen zu behandeln, hat Tannerys offenbar im Vergleich zu Zeuthens den Vorzug, daß sie zur Lösung *jeder* Gleichung von der Form $x^2 - ay^2 = r$ verwandt werden kann.

De Lagnys Methode.

Der Gedankengang ist folgender. Wenn $\sqrt{3}$ durch einen unechten Bruch genau ausgedrückt werden könnte, so würde dieser Bruch zwischen 1 und 2 liegen und das Quadrat seines Zählers dreimal so groß sein wie das Quadrat des Nenners. Da dies unmöglich ist, muß man zwei Zahlen so suchen, daß das Quadrat der größeren sich so wenig wie möglich von dem dreifachen Quadrate der kleineren unterscheidet, jedoch kleiner oder größer sein kann. De Lagny entwickelt dann die folgenden sukzessiven Beziehungen

$$2^2 = 3 \cdot 1^2 + 1,\ 5^2 = 3 \cdot 3^2 - 2,\ 7^2 = 3 \cdot 4^2 + 1,\ 19^2 = 3 \cdot 11^2 - 2,$$
$$26^2 = 3 \cdot 15^2 + 1,\ 71^2 = 3 \cdot 41^2 - 2,\ \text{usw.}$$

Aus diesen Relationen wird eine Reihe von Brüchen abgeleitet, die größer als $\sqrt{3}$ sind, nämlich $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$ usw., und eine andere Reihe von solchen, die kleiner als $\sqrt{3}$ sind, nämlich $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$ usw. Als Bildungsgesetz ergab sich in jedem Falle, wenn $\frac{p}{q}$ ein Bruch in der Reihe war, daß dann

$$\frac{p'}{q'} = \frac{2p + 3q}{p + 2q}$$

der nächste war. Das führte zu den Ergebnissen

$$\frac{2}{1} > \frac{7}{4} > \frac{26}{15} > \frac{97}{56} > \frac{362}{209} > \frac{1351}{780} \ldots > \sqrt{3}$$

und $$\frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \frac{989}{571} < \frac{3691}{2131} \ldots < \sqrt{3},$$

während das Bildungsgesetz der sukzessiven Näherungswerte in jeder Reihe genau das ist, das Tannery als Ergebnis der Behandlung der beiden unbestimmten Gleichungen nach der Diophantischen Methode erhält.

Heilermanns Methode.

Diese Methode muß erwähnt werden, da sie auch auf einer Verallgemeinerung des Systems der *Seiten-* und *Diagonalzahlen* des Theon von Smyrna beruht.

Theons Bildungsregel war

$$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = 2\,S_{n-1} + D_{n-1};$$

Heilermann setzt nun statt 2 in der zweiten Relation einfach eine beliebige Zahl a ein und entwickelt das folgende Schema:

$$\begin{array}{ll} S_1 = S_0 + D_0, & D_1 = a\,S_0 + D_0, \\ S_2 = S_1 + D_1, & D_2 = a\,S_1 + D_1, \\ S_3 = S_2 + D_2, & D_3 = a\,S_2 + D_2, \\ \vdots & \vdots \\ S_n = S_{n-1} + D_{n-1}, & D_n = a\,S_{n-1} + D_{n-1}. \end{array}$$

Es folgt, daß

$$a S_n^2 = a S_{n-1}^2 + 2 a S_{n-1} D_{n-1} + a D_{n-1}^2,$$
$$D_n^2 = a^2 S_{n-1}^2 + 2 a S_{n-1} D_{n-1} + D_{n-1}^2.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$\begin{aligned} D_n^2 - a S_n^2 &= (1-a)(D_{n-1}^2 - a S_{n-1}^2), \text{ und ähnlich,} \\ &= (1-a)^2 (D_{n-2}^2 - a S_{n-2}^2) \\ &= \ldots . \\ &= (1-a)^n (D_0^2 - a S_0^2). \end{aligned}$$

Das entspricht der allgemeinsten Form der „Pell"schen Gleichung

$$x^2 - a y^2 = \text{const.}$$

Setzen wir nun $D_0 = S_0 = 1$, so haben wir

$$\frac{D_n^2}{S_n^2} = a + \frac{(1-a)^{n+1}}{S_n^2},$$

woraus folgt, daß, wenn der Bruch auf der rechten Seite mit wachsendem n gegen Null abnimmt, $\frac{D_n}{S_n}$ ein Näherungswert für $\sqrt{a}$ ist.

Offenbar haben wir in dem Falle $a = 3$, $D_0 = 2$, $S_0 = 1$

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{D_1}{S_1} = \frac{5}{3}, \quad \frac{D_2}{S_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \quad \frac{D_3}{S_3} = \frac{19}{11}, \quad \frac{D_4}{S_4} = \frac{52}{30} = \frac{26}{15},$$

$$\frac{D_5}{S_5} = \frac{71}{41}, \quad \frac{D_6}{S_0} = \frac{194}{112} = \frac{97}{56}, \quad \frac{D_7}{S_7} = \frac{265}{153}, \text{ usf.}$$

Diese Methode führt, wie Heilermann zeigt, schneller vorwärts, wenn sie nicht zur Berechnung von $\sqrt{a}$ sondern von $b\sqrt{a}$ benutzt wird, wo b so gewählt ist, daß $b^2 a$ (was an die Stelle von a kommt) der Einheit möglichst nahe liegt. Setzen wir also $a = \frac{27}{25}$, so daß $\sqrt{a} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$, dann haben wir (wenn $D_0 = S_0 = 1$ gesetzt wird)

$$S_1 = 2, \quad D_1 = \frac{52}{25}, \quad \text{und} \quad \sqrt{3} \sim \frac{5}{3} \cdot \frac{26}{25} \quad \text{oder} \quad \frac{26}{15},$$

$$S_2 = \frac{102}{25}, \quad D_2 = \frac{54+52}{25} = \frac{106}{25}, \quad \text{und} \quad \sqrt{3} \sim \frac{5}{3} \cdot \frac{106}{102} \quad \text{oder} \quad \frac{265}{153},$$

$$S_3 = \frac{208}{25}, \quad D_3 = \frac{102 \cdot 27}{25 \cdot 25} + \frac{106}{25} = \frac{5404}{25 \cdot 25},$$

und
$$\sqrt{3} \sim \frac{5404}{25 \cdot 208} \cdot \frac{5}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{1351}{780}.$$

Das ist eins von den wenigen Beispielen, wo es gelingt, die beiden Archimedischen Näherungswerte in unmittelbarer Aufeinanderfolge zu bekommen, ohne daß andere Werte dazwischen liegen. Keine andere Methode verknüpft die beiden Werte so direkt miteinander, ausgenommen die von Hunrath und Hultsch, die auf der Formel

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

beruhen.

Wir gehen nunmehr zu der zweiten Klasse von Lösungen über, welche die Näherungswerte als Summen von Bruchreihen entwickeln; dazu gehört

Tannerys zweite Methode.

Diese werde erläutert durch ihre Anwendung (1) auf den Fall der Quadratwurzel aus einer großen Zahl, z. B. $\sqrt{349450}$ oder $\sqrt{571^2 + 23409}$, der ersten derartigen, die bei Archimedes vorkommt, (2) auf den Fall $\sqrt{3}$.

(1) Mit Benutzung der Formel

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}$$

untersuchen wir, was sich ergibt, wenn wir für $\sqrt{571^2 + 23409}$ den Ausdruck

$$571 + \frac{23409}{1142}$$

setzen. Es stellt sich heraus, daß das richtig den ganzzahligen Teil der Wurzel gibt, und wir nehmen nun an, die Wurzel sei

$$571 + 20 + \frac{1}{m}.$$

Quadrieren wir und vernachlässigen wir $\frac{1}{m^2}$, so haben wir

$$571^2 + 400 + 22840 + \frac{1142}{m} + \frac{40}{m} = 571^2 + 23409,$$

woraus
$$\frac{1182}{m} = 169$$

und
$$\frac{1}{m} = \frac{169}{1182} > \frac{1}{7},$$

so daß
$$\sqrt{349450} > 591\frac{1}{7}.$$

(2) Berücksichtigen wir, daß

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a + 1};$$

so haben wir $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \sim 1 + \dfrac{2}{2 \cdot 1 + 1}$

$$\sim 1 + \frac{2}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{5}{3}.$$

Nehmen wir nun an, daß $\sqrt{3} = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{m}\right)$, quadrieren und vernachlässigen $\frac{1}{m^2}$, so erhalten wir

$$\frac{25}{9} + \frac{10}{3m} = 3,$$

woraus $m = 15$, und wir bekommen als zweiten Näherungswert

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{15} \quad \text{oder} \quad \frac{26}{15}.$$

Wir haben nun $\quad 26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$

und können weitere Näherungswerte nach Tannerys erster Methode finden.

Oder wir können auch setzen

$$\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{n}\right)^2 = 3$$

und erhalten mit Vernachlässigung von $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{26^2}{15^2} + \frac{52}{15\,n} = 3\,,$$

woraus $n = -15 \cdot 52 = -780$, und

$$\sqrt{3} \sim \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{780} = \frac{1351}{780}\right).$$

Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Methode nur $\frac{1351}{780}$ mit $\frac{26}{15}$ in Zusammenhang bringt und nicht mit dem dazwischenliegenden Näherungswerte $\frac{265}{153}$, zu dessen Berechnung Tannery implizit einen besonderen Fall der Formel von Hunrath und Hultsch benutzt.

Rodets Methode ist, wie es scheint, erfunden worden, um den in den Çulvasūtras[1]) befindlichen Näherungswert

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

zu erklären; aber, wenn der Näherungswert $\frac{4}{3}$ gegeben ist, können die beiden anderen sukzessiven in der Formel enthaltenen Näherungswerte nach der eben beschriebenen Methode des Quadrierens ermittelt werden[2]), ohne ein solch umständliches Verfahren, wie das von Rodet, das, auf $\sqrt{3}$ angewandt, auch nur dieselben Resultate wie die einfachere Methode gibt.

Schließlich möge mit Bezug auf die dritte Klasse von Lösungen erwähnt werden,

(1) daß Oppermann die Formel

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\,b} > \frac{2\,ab}{a+b}$$

---

[1]) Siehe Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, I. (3. Aufl. 1907) S. 640f.

[2]) Cantor hat dies schon in seiner ersten Ausgabe von 1880 ausgesprochen.

benutzt, die nacheinander ergibt

$$\frac{2}{1} > \sqrt{3} > \frac{3}{2},$$

$$\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{12}{7},$$

$$\frac{97}{56} > \sqrt{3} > \frac{168}{97},$$

aber nur zu einem der Archimedischen Näherungswerte führt, und zwar durch Kombination der beiden letzten Verhältnisse, nämlich

$$\frac{97+168}{56+97} = \frac{265}{153},$$

(2) daß Schönborn der von Hunrath und Hultsch erfolgreich angewandten Formel ziemlich nahe kommt, indem er beweist[1]), daß

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm \sqrt{b}}.$$

---

[1]) *Zeitschrift für Math. und Physik* (*Hist. litt. Abtheilung*) XXVIII. (1883), S. 169 f.

Kapitel V.

Über die als *ΝΕΥΣΕΙΣ* bekannten Probleme.

Das Wort *νεῦσις*, lateinisch gewöhnlich *inclinatio*, befriedigend zu übersetzen ist schwer, aber seine Bedeutung läßt sich aus einigen allgemeinen Bemerkungen bei Pappus entnehmen, die sich auf die zwei (jetzt verlorenen) Bücher des Apollonius mit dem Titel *νεύσεις* beziehen. Pappus berichtet[1]): „Man sagt, eine Linie *neige sich* (*νεύειν*) gegen einen Punkt, wenn sie verlängert durch den Punkt geht.“ und gibt unter besonderen Fällen des allgemeinen Problems die folgenden an.

„Zwei Linien sind der Lage nach gegeben; zwischen sie soll eine der Länge nach gegebene gerade Linie gelegt werden, so daß sie sich nach einem gegebenen Punkte neigt.“

„Wenn der Lage nach gegeben sind (1) ein Halbkreis und eine gerade Linie, die auf seiner Grundlinie senkrecht steht, oder (2) zwei Halbkreise, deren Grundlinien in einer Geraden liegen, zwischen die zwei Linien eine der Länge nach gegebene gerade Linie so zu legen, daß sie sich gegen einen Winkel des [einen] Halbkreises neigt.“

Es soll somit eine gerade Linie so über zwei Geraden oder Kurven hinweggezogen werden, daß sie durch einen gegebenen Punkt geht und der auf ihr durch die Geraden oder Kurven begrenzte Abschnitt eine gegebene Länge hat.[2])

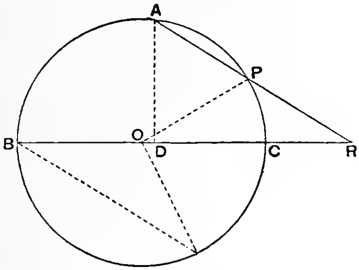
§ 1. Bei Archimedes sind die folgenden Anspielungen auf spezielle *νεύσεις* zu finden. Die Beweise der Sätze 5, 6, 7 in

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) VII. S. 670.

[2]) In der deutschen Übersetzung des Werkes von Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, ist *νεῦσις* durch „Einschiebung“ wiedergegeben, aber das drückt die Bedingung nicht aus, daß die gesuchte Linie durch einen gegebenen Punkt gehen soll, ebenso wie *inclinatio* (und damit der griechische Ausdruck selbst) die andere Forderung nicht zum Ausdruck bringt, daß der auf der Linie entstehende Abschnitt eine gegebene Länge haben soll.

dem Buche *Über Spiralen* stützen sich auf drei besondere Fälle des allgemeinen Theorems „*wenn A irgend ein Punkt auf einem Kreise und BC ein Durchmesser ist, so ist es möglich, durch A eine Gerade zu ziehen, die den Kreis zum zweiten Male in P und die Verlängerung von BC in R schneidet, so daß der Abschnitt PR eine gegebene Länge hat.*" In jedem Einzelfalle wird lediglich die Tatsache als richtig angeführt ohne Erklärung oder Beweis irgend welcher Art, und zwar setzt

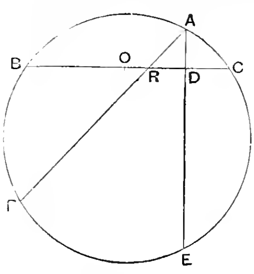


(1) Satz 5 den Fall voraus, wo die Tangente in A zu BC parallel ist,

(2) Satz 6 den Fall, wo die Punkte A, P der obenstehenden Figur miteinander vertauscht sind,

(3) Satz 7 den Fall, wo A, P die in der Figur dargestellte gegenseitige Lage haben.

Die Sätze 8 und 9 setzen des weiteren voraus (wie vorher ohne Beweis und ohne jede Lösung der darin liegenden Aufgabe) (4) „*wenn AE, BC zwei einander im Punkte D rechtwinkelig schneidende Sehnen eines Kreises sind, so daß $BD > DC$, so ist es möglich, durch A eine andere Gerade ARP zu ziehen, die BC in R und den Kreis zum zweiten Male in P schneidet, so daß $PR = DE$.*"



Schließlich sind die Annahmen in den Sätzen 5, 6, 7 mit Satz 8 des *Liber Assumptorum* zu vergleichen, den man doch wohl Archimedes zuschreiben muß, was auch über die Abfassung des ganzen Buches gesagt werden mag. Dieser Satz beweist, „*wenn in der ersten Figur APR so gezogen ist, daß PR gleich dem Radius OP ist, dann ist der Bogen AB dreimal so groß wie der Bogen PC.*" Mit anderen Worten, wenn man einen Bogen AB eines Kreises mit einem beliebigen zugehörigen Zentriwinkel hat, so kann man einen Bogen finden, der gleich einem Drittel des gegebenen Bogens ist, *d. h. der gegebene Winkel kann in drei gleiche Teile geteilt werden, wenn man nur APR durch A so ziehen kann, daß der Abschnitt PR zwischen dem Kreise und der Verlängerung von BO dem Radius des Kreises gleich ist.* So ist die *Dreiteilung des Winkels* auf eine *νεῦσις* zurückgeführt, ganz ähnlich den in den Sätzen 6, 7 des Buches *Über Spiralen* als möglich vorausgesetzten.

Die *νεύσεις*, auf die Archimedes somit Bezug nimmt, lassen sich, wie man leicht sieht, im allgemeinen nicht mittels der geraden Linie und des Kreises allein lösen. Nehmen wir in der ersten Figur an, daß x die unbekannte Länge OR bezeichne, während O der Mittelpunkt von BC ist, und daß k die gegebene Strecke sei, der PR gleich gemacht werden soll; ferner sei $OD = a$, $AD = b$, $BC = 2c$. Dann haben wir, gleichgültig, ob BC ein Durchmesser oder (allgemeiner) eine beliebige Sehne des Kreises ist,

$$AR \cdot RP = BR \cdot RC,$$

und daher $$k \cdot \sqrt{b^2 + (x-a)^2} = x^2 - c^2.$$

Die entstehende Gleichung ist, rational gemacht, eine Gleichung vierten Grades in x; oder, wenn wir die Länge von AR mit y bezeichnen, haben wir zur Bestimmung von x und y die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= (x-a)^2 + b^2 \\ ky &= x^2 - c^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (\alpha).$$

Mit anderen Worten, wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legen, können die Werte x und y, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, als Koordinaten der Schnittpunkte einer gewissen gleichseitigen Hyperbel und einer gewissen Parabel bestimmt werden.

In einem besonderen Falle, wenn nämlich D mit dem Mittelpunkte O von BC zusammenfällt oder wenn A der eine Endpunkt des BC rechtwinkelig schneidenden Durchmessers ist, haben wir $a = 0$, und die Gleichungen reduzieren sich auf die einzige Gleichung

$$y^2 - ky = b^2 + c^2,$$

die quadratisch ist und nach der traditionellen Methode der Flächenanlegung geometrisch gelöst werden kann; denn substituiert man u für $y - k$, so daß $u = AP$, so wird aus der Gleichung

$$u(k + u) = b^2 + c^2,$$

und wir haben einfach die Aufgabe „an eine gerade Linie von der Länge k ein Rechteck anzulegen, das, um ein Quadrat vermehrt, einer gegebenen Fläche $(b^2 + c^2)$ gleich ist“.

Die andere in den Sätzen 8 und 9 angewandte νεῦσις kann in der allgemeineren Form gelöst werden, wo k, die gegebene Strecke, der PR gleichgemacht werden soll, irgend einen unterhalb eines gewissen Maximums gelegenen Wert hat und nicht notwendig gleich DE ist, und zwar in genau derselben Weise; die beiden (α) entsprechenden Gleichungen sind für die zweite Figur

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= (a-x)^2 + b^2 \\ ky &= c^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Auch hier kann die Aufgabe nach der gewöhnlichen Methode der Flächenanlegung in dem speziellen Falle gelöst werden, wo AE der BC rechtwinklig schneidende Durchmesser ist; es ist interessant, daß dieser Spezialfall in einem Fragment der *Quadratur der Monde* von Hippokrates benutzt zu sein scheint, ein Fragment, das uns in einem Zitat des Simplicius[1]) aus Eudemus' Geschichte der Geometrie erhalten ist, während Hippokrates wahrscheinlich nicht später als um 450 v. Chr. blühte.

Demgemäß finden wir, daß Pappus seiner allgemeinen Einteilung der geometrischen Probleme entsprechend verschiedene Klassen von νεύσεις unterscheidet. Nach seinem Bericht unterschieden die Griechen 3 Arten von Aufgaben, nämlich *ebene*, *körperliche* und *lineare*. Er fährt so fort[2]): „Solche, die durch gerade Linien und den Umfang eines Kreises gelöst werden können, nennt man wohl mit Recht *eben* (ἐπίπεδα); denn die Linien, durch die solche Aufgaben gelöst werden, haben ihren Ursprung in der Ebene. Solche aber, deren Lösung durch Anwendung eines oder mehrerer Kegelschnitte gefunden wird, heißen *körperlich* (στερεά); denn die Konstruktion erfordert die Anwendung der Oberflächen von Körpern, nämlich von Kegeln. Es bleibt eine dritte Art von Aufgaben, die man *linear* (γραμμικόν) nennt; denn außer den schon genannten Linien [Kurven] werden zur Konstruktion solche von komplizierterem und weniger natürlichem Ursprung verwendet, die durch weniger regelmäßige Oberflächen und verwickelte Bewegungen erzeugt werden.“ Unter anderen Beispielen aus der *linearen* Klasse der Kurven erwähnt Pappus

---

[1]) Simplicius, *Comment. in Aristot. Phys.* SS. 61—68 (ed. Diels). Das ganze Zitat ist bei Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, SS. 109—121 reproduziert. Mit Bezug auf die benutzte Konstruktion siehe besonders S. 64 und S. XXIV in Diels' Ausgabe; vgl. Bretschneider, SS. 114, 115 und Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, SS. 269, 270.

[2]) Pappus, IV. SS. 270—272.

Spiralen, die als *quadratrices* bekannten Kurven, Konchoiden und Zissoiden. Er fügt hinzu: „Die Geometer scheinen einen erheblichen Fehler zu begehen, wenn sie die Lösung einer ebenen Aufgabe mit Hilfe von Kegelschnitten oder linearen Kurven oder überhaupt mit den Hilfsmitteln einer fremden Art ausführen, wie es beispielsweise der Fall ist (1) bei der Aufgabe über die Parabel im fünften Buche der Kegelschnitte des Apollonius[1]) und (2) wenn Archimedes in dem Werke über die Spirale eine körperliche νεῦσις mit Bezug auf den Kreis ausführt; denn man kann, ohne einen körperlichen Ort zu Hilfe zu nehmen, den [Beweis des] von letzterem [Archimedes] angegebenen Satz[es] finden, den Beweis nämlich, daß der Umfang des bei der ersten Umdrehung erhaltenen Kreises der geraden Linie gleich ist, die auf der Anfangslinie senkrecht steht und bis zur Tangente der Spirale reicht."

Die in diesem Zitat erwähnte „körperliche νεῦσις" ist die in den Sätzen 8 und 9 des Buches *Über Spiralen* als möglich angenommene und wird von Pappus an anderer Stelle wieder genannt, wo er zeigt, wie die Aufgabe mit Hilfe von Kegelschnitten zu lösen ist.[2]) Auf diese Lösung werden wir später zurückkommen, aber wenn Pappus das Verfahren des Archimedes als unorthodox verwirft, so erscheint dieser Vorwurf gezwungen, wenn wir betrachten, was Archimedes genau genommen voraussetzt. Es ist nicht die wirkliche Lösung, sondern ihre *Möglichkeit*, die er voraussetzt; und ihre Möglichkeit kann ohne jede Benutzung von Kegelschnitten erkannt werden. Denn in dem besonderen Falle ist die notwendige Bedingung der Möglichkeit nur, daß DE in der zweiten obigen Figur nicht die *größte* Länge hat, die der Abschnitt PR annehmen kann, wenn APR sich um A aus der Lage ADE in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Kreises dreht; und daß DE nicht die größte Länge ist, die PR haben kann, ist beinahe selbstverständlich. In der Tat, würde P statt auf dem Kreise sich auf der Parallelen zu BC durch E bewegen und ARP sich aus der Lage ADE in der Richtung nach dem Mittelpunkte drehen, so würde die Länge von PR stetig wachsen, und *a fortiori* muß PR länger als DE sein, solange P sich auf dem durch die Parallele abgeschnittenen Kreisbogen bewegt; und andrerseits, wenn ARP sich in der Richtung auf B weiterbewegt, muß einmal eine mit DE gleiche Länge PR abgeschnitten werden, bevor P nach B kommt, wo dann PR verschwindet. Da also

---

[1]) Vgl. *Apollonius of Perga*, SS. CXXVIII, CXXIX.

[2]) Pappus IV. S. 298f.

die Methode des Archimedes nur von der theoretischen Lösungsmöglichkeit der νεῦσις abhängt, und diese Möglichkeit aus ganz elementaren Betrachtungen erschlossen werden kann, hatte er gar keine Gelegenheit, Kegelschnitte zum Beweise einer unmittelbar ersichtlichen Tatsache zu benutzen, und es kann billigerweise nicht behauptet werden, er habe eine ebene Aufgabe durch Anwendung von Kegelschnitten gelöst.

Gleichzeitig können wir als sicher annehmen, daß Archimedes sich im Besitze einer Lösung der angeführten νεῦσις befand. Aber es ist nicht zu ersehen, wie er sie gelöst hat, ob mit Hilfe von Kegelschnitten oder in anderer Weise. Daß er *fähig* gewesen ist, die Lösung mit Hilfe von Kegelschnitten, wie es Pappus tut, auszuführen, ist nicht zu bezweifeln. Ein Beispiel der Einführung von Kegelschnitten zur Lösung einer „körperlichen Aufgabe“ war in der Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei ungleichen Strecken durch Menaechmus, den Entdecker der Kegelschnitte, vorhanden, der zu diesem Zwecke die Schnittpunkte einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel benutzte. Die Lösung der kubischen Gleichung, die dem Satze *Über Kugel und Zylinder* II. 4 zugrunde liegt, wird in dem von Eutocius wiedergegebenen und von ihm Archimedes selbst zugeschriebenen Fragmente gleichfalls mittels der Schnittpunkte einer Parabel mit einer gleichseitigen Hyperbel ausgeführt[1]).

Immer wenn ein Problem keine Lösung mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises zuließ, war die Lösung, die sich mit Hilfe von Kegelschnitten ermöglichen ließ, von größter theoretischer Wichtigkeit. Zunächst gestattete die Möglichkeit einer solchen Lösung, das Problem als „körperliche Aufgabe“ zu klassifizieren; daher die von Pappus der Lösung durch Kegelschnitte beigelegte Wichtigkeit. Die Methode hatte jedoch zweitens noch andere große Vorzüge, besonders im Hinblick auf die Forderung, daß die Lösung einer Aufgabe von einem διορισμός begleitet sein sollte, der ein Kriterium für die Möglichkeit einer wirklichen Lösung lieferte. Oft ergab der διορισμός auch die Bestimmung der Anzahl der Lösungen sowohl wie die Grenzen für ihre Möglichkeit (beispielsweise häufig bei Apollonius). So lieferte die Theorie der Kegelschnitte in allen Fällen, wo die Lösung einer Aufgabe in der Auffindung der Schnittpunkte zweier Kegelschnite bestand, ein wirksames Hilfsmittel, διορισμοί anzustellen.

§ 2. Aber obwohl die Lösung „körperlicher Aufgaben“ mit

[1]) Siehe die Bemerkung zu *Über Kugel und Zylinder* II. 4.

Hilfe von Kegelschnitten solche Vorteile hatte, war sie nicht die einzige Methode, die Archimedes zur Verfügung stand. Eine andere bestand in der Anwendung mechanischer Konstruktionen, wie sie von den griechischen Geometern oft benutzt und von Pappus als legitimer Ersatz für Kegelschnitte anerkannt werden, die sich in der Ebene schwer zeichnen lassen.[1])

So wird in Apollonius' Lösung der Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen, wie sie Eutocius angibt, angenommen, daß ein Lineal um einen Punkt gedreht werde, bis die Durchschnittspunkte des Lineals mit zwei gegebenen, zueinander senkrechten geraden Linien von einem gewissen festen Punkte gleich weit entfernt sind; dieselbe Konstruktion wird auch unter Herons Namen angegeben. Eine andere Fassung von Apollonius' Lösung ist die von Joannes Philoponus angegebene, die folgendes annimmt: es sei ein Kreis mit dem Durchmesser OC gegeben und zwei durch O gehende, einen rechten Winkel bildende Geraden OD, OE; dann kann durch C eine Gerade gezogen werden, die den Kreis zum zweiten Male in F, die beiden Geraden bezüglich in D und E schneidet, so daß die Abschnitte CD, FE gleich sind. Diese Lösung ist zweifellos entdeckt worden mit Hilfe des Durchschnittes des Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel, die OD, OE zu Asymptoten hat und durch C geht; diese Annahme stimmt mit Pappus' Feststellung überein, Apollonius habe die Aufgabe durch Anwendung von Kegelschnitten gelöst.[2]) Die gleichwertige mechanische Konstruktion wird von Eutocius dem Philo Byzantinus zugeschrieben, der ein Lineal um C dreht, bis CD, FE gleich sind.[3])

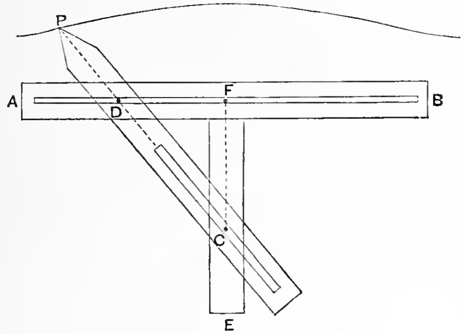
Nun ließ sich offenbar zur wirklichen Ausführung einer *νεῦσις* eine ähnliche Methode anwenden. Wir brauchen uns nur ein Lineal (oder irgendeinen Gegenstand mit gerader Kante) zu denken mit zwei Marken, deren Abstand voneinander der gegebenen Strecke gleich ist, die nach der Aufgabe von zwei Kurven auf einer durch den festen Punkt gehenden Geraden abgeschnitten werden soll; wenn dann das Lineal so bewegt wird, daß es immer durch den festen Punkt geht, während einer der markierten Punkte auf ihm dem Laufe der einen Kurve folgt, so ist es nur nötig, das Lineal so lange zu bewegen, bis der

[1]) Pappus III. S. 54.

[2]) Pappus III. S. 56.

[3]) Wegen näherer Einzelheiten siehe *Apollonius of Perga*, SS. CXXV bis CXXVII.

zweite Punkt auf die andere Kurve fällt. Durch ein derartiges Verfahren dürfte Nikomedes wohl zur Entdeckung seiner Kurve, der Konchoide, geführt worden sein, die er (nach Pappus) bei seiner Verdoppelung des Würfels einführte, und mit der er auch einen Winkel in drei gleiche Teile teilte (nach derselben Autorität). Aus der Tatsache, daß Nikomedes von Eratosthenes' Lösung der Verdoppelungsaufgabe geringschätzig gesprochen haben soll und daher später als Eratosthenes gelebt haben muß, schließt man, er habe nach 200 v. Chr. gelebt, während er andrerseits früher als 70 v. Chr. geschrieben haben muß. da Geminus um diese

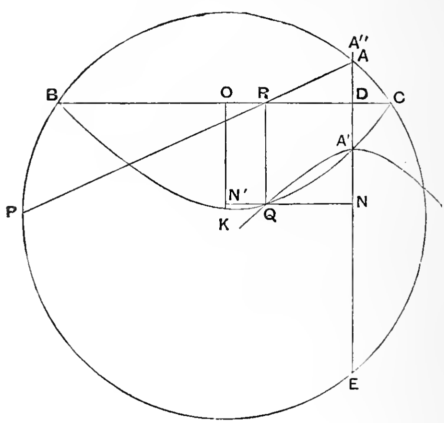


Zeit den Namen der Kurve kennt. Tannery nimmt ihn zwischen Archimedes und Apollonius an.[1]) Während also über den Gebrauch einer solchen mechanischen Methode zur Auflösung einer *νεῦσις* vor der Zeit des Nikomedes nichts bekannt zu sein scheint, kann der Zeitraum zwischen Archimedes und der Entdeckung der Konchoide schwerlich sehr groß gewesen sein. In der Tat kann die Konchoide des Nikomedes nicht nur benutzt werden, um alle bei Archimedes erwähnten *νεύσεις* zu lösen, sondern jeden Fall einer solchen Aufgabe, wo eine der Kurven eine gerade Linie ist. Pappus und Eutocius schreiben Nikomedes die Erfindung eines Instruments zur Konstruktion seiner Konchoide zu. AB sei ein Lineal mit einem zur Längsseite parallelen Spalt, FE ein zweites, zu dem ersten senkrechtes Lineal mit einem in C befestigten Stift. Dieser Stift bewegt sich in einem Längsspalt eines dritten Lineals, während auf diesem Lineal in D ein fester Stift angebracht ist in einer Geraden mit dem Spalt, in dem C sich bewegt; dieser Stift D kann sich in dem Spalt von AB entlang bewegen. Wenn nun das Lineal PD so bewegt wird, daß der Stift D die Länge

[1]) *Bulletin des Sciences Mathématiques,* 2[e] série VII. S. 284.

des Spaltes von AB auf beiden Seiten von F beschreibt, so beschreibt das Ende des Lineals die Kurve, die man Konchoide nennt. Nikomedes nannte die gerade Linie AB das *Lineal* (*κανών*), den festen Punkt C den *Pol* (*πόλος*) und die Länge PD die *Entfernung* (*διάστημα*); die Grundeigenschaft der Kurve, die man jetzt in Polar-Koordinaten durch die Gleichung $r = a + b \sec \vartheta$ ausdrücken würde, ist die folgende: Wenn irgendein Radiusvektor von C nach der Kurve gezogen wird, so ist die auf ihm von der Kurve und der Geraden AB begrenzte Länge konstant. So kann jede *νεῦσις*, bei der eine der beiden gegebenen Linien eine Gerade ist, mittels des Durchschnitts der anderen Linie mit einer gewissen Konchoide gelöst werden, deren Pol der feste Punkt ist, nach dem die gesuchte Gerade sich neigen (*νεύειν*) soll. Pappus erzählt uns, daß in der Praxis die Konchoide nicht immer wirklich gezogen wurde, sondern daß „einige" ein bequemeres Verfahren einschlugen, indem sie das Lineal um den festen Punkt drehten, bis der Abschnitt durch Probieren die gegebene Länge bekam.[1])

§ 3. Im folgenden ist die Methode dargestellt, nach der Pappus zur Lösung der in den Sätzen 8, 9 des Buches *Über Spiralen* benutzten *νεῦσις* Kegelschnitte verwendet. Er beginnt mit zwei Hilfssätzen.



(1) Wenn von einem gegebenen Punkte A aus eine Gerade gezogen wird, die eine der Lage nach gegebene Gerade BC in R schneidet, und wenn RQ auf BC senkrecht steht und zu AR ein gegebenes Verhältnis hat, so ist der Ort des Punktes Q eine *Hyperbel*.

[1]) Pappus IV. S. 246.

Man ziehe AD senkrecht zu BC und nehme A' auf der Verlängerung von AD so an, daß

$$QR:RA = A'D:DA = \text{(dem gegebenen Verhältnis)}.$$

Auf DA werde DA'' gleich DA' abgemessen. Wenn dann QN senkrecht zu AN ist, so gilt:

$$(AR^2 - AD^2):(QR^2 - A'D^2) = \text{const.},$$

oder

$$QN^2 : A'N \cdot A''N = \text{const.}$$

(2) Wenn BC eine gegebene Länge hat und RQ in einem beliebigen Punkte R auf BC senkrecht steht, so daß

$$BR \cdot RC = k \cdot RQ,$$

wo k eine Strecke von gegebener Länge ist, so ist der Ort des Punktes Q eine *Parabel.*

O sei der Mittelpunkt von BC und OK senkrecht auf BC, so daß

$$OC^2 = k \cdot KO.$$

QN' werde senkrecht zu OK gezogen. Dann ist:

$$\begin{aligned} QN'^2 = OR^2 &= OC^2 - BR \cdot RC \\ &= k(KO - RQ), \text{ nach Annahme,} \\ &= k \cdot KN'. \end{aligned}$$

In dem besonderen von Archimedes benutzten Falle (mit der geringen Verallgemeinerung, daß die gegebene Länge k, der PR gleich ist, nicht notwendig gleich DE ist) haben wir:

(1) das gegebene Verhältnis $RQ:AR$ ist die Einheit, oder $RQ = AR$, weshalb A'' mit A zusammenfällt, und nach dem ersten Hilfssatze

$$QN^2 = AN \cdot A'N,$$

so daß Q auf einer *gleichseitigen Hyperbel* liegt.

(2) $BR \cdot RC = AR \cdot RP = k \cdot AR = k \cdot RQ$, und nach dem zweiten Hilfssatze liegt Q auf einer gewissen *Parabel.*

Wenn wir nun O als Anfangspunkt, OC als x-Achse, OK als y-Achse nehmen und $OD = a$, $AD = b$, $BC = 2c$ setzen, so werden die Hyperbel und die Parabel, die die Lage von Q bestimmen, durch die Gleichungen

$$(a - x)^2 = y^2 - b^2,$$

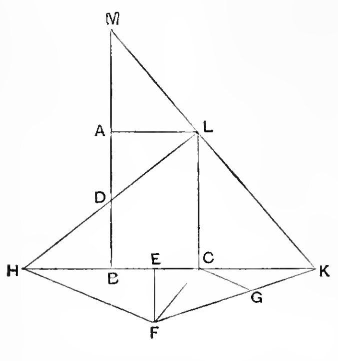
$$c^2 - x^2 = ky$$

dargestellt, die genau mit den oben durch rein algebraische Methoden erhaltenen Gleichungen (β) übereinstimmen. Pappus sagt nichts von dem *διορισμός*, der zur vollständigen Lösung der verallgemeinerten Aufgabe nötig ist, dem *διορισμός* nämlich, der den *größten* Wert von k festlegt, für den die Lösung möglich ist.

Dieser größte Wert würde offenbar dem Falle entsprechen, in dem die gleichseitige Hyperbel und die Parabel einander berühren. Zeuthen hat gezeigt[1]), daß der entsprechende Wert von k durch den Schnitt von zwei anderen Hyperbeln oder einer Hyperbel und einer Parabel bestimmt werden kann, und zweifellos wäre Apollonius bei seiner Kenntnis der Kegelschnitte und in Übereinstimmung mit seinem anerkannten Bestreben, die für *διορισμοί* nützlichen und notwendigen Eigenschaften herauszuarbeiten, imstande gewesen, diesen besonderen *διορισμός* mit Hilfe von Kegelschnitten auszuführen; aber es läßt sich nicht ersehen, ob Archimedes ihn mit Hilfe von Kegelschnitten oder überhaupt wirklich in Angriff genommen hat, da es ja, wie oben gezeigt, klar ist, daß er für seinen unmittelbaren Zweck nicht nötig war.

Dieses Kapitel schließe passend mit einer Beschreibung von (1) einigen wichtigen bei Pappus angegebenen Anwendungen von *νεύσεις* und (2) gewissen Sonderfällen derselben Klasse von Aufgaben, die *eben* sind, d. h. mittels der geraden Linie und des Kreises allein gelöst werden können und von den griechischen Geometern (wie Pappus berichtet) als solche erkannt worden sind.

§ 4. Eine der beiden wichtigen Anwendungen „körperlicher" *νεύσεις* ist von Nikomedes, dem Entdecker der Konchoide, gefunden worden, der diese Kurve zur Lösung einer *νεῦσις* einführte, auf die er das Problem der *Verdoppelung des Würfels*[2]) oder (was auf dasselbe hinauskommt) die *Auffindung von zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei gegebenen ungleichen Strecken* zurückgeführt hatte.



Die beiden gegebenen ungleichen Strecken seien rechtwinklig zueinander gezeichnet, CL, LA. Das Rechteck $ABCL$ werde vervollständigt und AB in D, BC in E halbiert. Wir ziehen die Gerade LD und verlängern sie bis zum Schnittpunkte H mit der Verlängerung von CB. Von E ziehen wir EF senkrecht zu BC und legen darauf den Punkt F, so daß CF gleich AD wird. Wir ziehen HF und durch C die Parallele CG zu HF. Verlängern

[1]) Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, SS. 273—275.

[2]) Pappus IV. S. 242 f. u. III. S. 58 f.; Eutocius zu Archimedes, *Über Kugel und Zylinder* II. 1. (Bd. III. S. 114 f.).

wir BC bis K, so bilden die Geraden CG, CK einen Winkel, und wir ziehen nun durch den gegebenen Punkt F die Gerade FGK, die CG, CK bezüglich in G, K schneidet, so daß der Abschnitt GK gleich AD oder FC ist. (Das ist die νεῦσις, auf die das Problem zurückgeführt ist; sie kann durch eine Konchoide mit dem Pol F gelöst werden.) Wir ziehen die Gerade KL und verlängern sie bis zum Schnittpunkte M mit der Verlängerung von BA.

Dann sollen CK, AM die gesuchten mittleren Proportionalen zwischen CL, LA sein oder

$$CL : CK = CK : AM = AM : AL.$$

Wir haben nach Euklid II. 6

$$BK \cdot KC + CE^2 = EK^2.$$

Addieren wir beiderseits EF^2, so haben wir

$$BK \cdot KC + CF^2 = FK^2.$$

Nun folgt aus dem Parallelismus von AL und BK

$$\begin{aligned} MA : AB &= ML : LK \\ &= BC : CK; \end{aligned}$$

und, da $AB = 2AD$ und $BC = \frac{1}{2}HC$,

$$\begin{aligned} MA : AD &= HC : CK \\ &= FG : GK, \text{ da } CG \text{ parallel zu } HF \end{aligned}$$

ist; daraus folgt *componendo*

$$MD : AD = FK : GK.$$

Aber $GK = AD$; daher $MD = FK$ und $MD^2 = FK^2$.

Ferner ist

$$MD^2 = BM \cdot MA + AD^2$$

und $$FK^2 = BK \cdot KC + CF^2,$$ wie oben bewiesen,

während $MD^2 = FK^2$ und $AD^2 = CF^2$; daher

$$BM \cdot MA = BK \cdot KC.$$

Somit ist $$\begin{aligned} CK : MA &= BM : BK \\ &= MA : AL \\ &= LC : CK, \end{aligned}$$

d. h. $$LC : CK = CK : MA = MA : AL.$$

§ 5. Die zweite wichtige Aufgabe, die auf eine „körperliche" νεῦσις zurückgeführt werden kann, ist die *Dreiteilung eines beliebigen Winkels.* Eine Methode, sie auf eine νεῦσις zurückzuführen, wurde oben als Folgerung aus Satz 8 des *Liber Assumptorum* genannt. (Diese Methode erwähnt Pappus nicht, sondern beschreibt IV. S. 272f.) einen anderen Weg zur Ausführung der Reduktion, den er folgendermaßen einleitet: „Wenn die früheren Geometer versuchten, die genannte Aufgabe über den Winkel, eine Aufgabe ‚körperlicher‘ Natur, mit ebenen Methoden zu lösen, so konnten sie die Lösung nicht finden; denn sie waren mit dem Gebrauch der Kegelschnitte noch nicht vertraut und deshalb in Verlegenheit. Später jedoch teilten sie einen Winkel mit Hilfe von Kegelschnitten in drei gleiche Teile, und zur Auffindung dieser Konstruktion diente ihnen die folgende *νεῦσις*.“

Die *νεῦσις* wird folgendermaßen beschrieben: ein Rechteck $ABCD$ ist gegeben, durch A soll eine Gerade AQR gezogen werden, die CD in Q und die Verlängerung von BC in R schneidet, so daß der Abschnitt QR eine gegebene Länge, etwa k, hat.

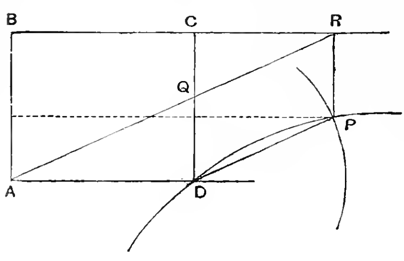
Angenommen, die Aufgabe sei gelöst, QR gleich k. Wir ziehen DP parallel zu QR und RP parallel zu CD bis zum Schnittpunkte P. Dann ist in dem Parallelogramm $DPRQ$ $DP = QR = k$.

Daher liegt P auf dem *Kreise* mit dem Mittelpunkte D und dem Radius k.

Nun ist nach dem Satze Euklid I. 34 über die Ergänzungen der um die Diagonale des ganzen Parallelogramms herumliegenden Parallelogramme

$$BC \cdot CD = BR \cdot QD = PR \cdot RB;$$

da $BC \cdot CD$ gegeben ist, muß P auf der *gleichseitigen Hyperbel* liegen, die BR, BA zu Asymptoten hat und durch D geht.



Um daher die Konstruktion auszuführen, haben wir nur diese gleichseitige Hyperbel zu zeichnen und den Kreis mit dem Mittelpunkte D und dem Radius k. Der eine Schnittpunkt der beiden Kurven ist P, und R wird bestimmt, indem man PR parallel zu CD zieht. So ist AQR gefunden.

[Obwohl Pappus ein *Rechteck* $ABCD$ nimmt, läßt sich die Konstruktion ebenso auf irgendein Parallelogramm anwenden.]

Nehmen wir nun an, ABC sei ein beliebiger spitzer Winkel, der in drei gleiche Teile geteilt werden soll. AC stehe senkrecht auf BC. Wir vervollständigen das Rechteck $ADBC$ und verlängern DA.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und der Winkel CBE der dritte Teil des Winkels ABC. BE treffe AC in E und die

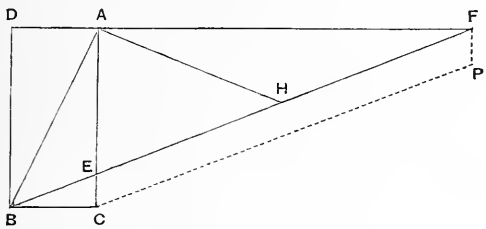
Verlängerung von DA in F. EF werde in H halbiert und A mit H verbunden.

Da nun der Winkel ABE doppelt so groß wie der Winkel EBC ist, und die Winkel EBC, EFA als Wechselwinkel an Parallelen gleich sind, so ist

$$\sphericalangle ABE = 2 \sphericalangle AFH = \sphericalangle AHB.$$

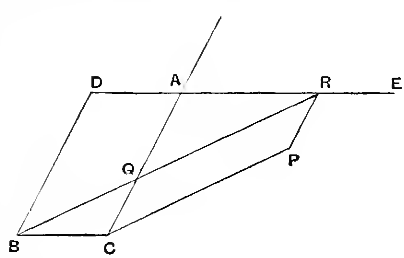
Daher $$AB = AH = HF,$$

und $$EF = 2HF$$
$$= 2AB.$$



Um daher den Winkel ABC zu trisezieren, haben wir nur die folgende νεῦσις zu lösen: *wenn das Rechteck $ADBC$ mit der Diagonale AB gegeben ist, durch B eine Gerade BEF zu ziehen, die AC in E und die Verlängerung von DA in F schneidet, so daß EF doppelt so groß wie AB ist*; und diese νεῦσις wird in der bereits angegebenen Weise gelöst.

Es stellt sich heraus, daß diese Methoden zur Verdoppelung des Würfels und zur Trisektion eines beliebigen spitzen Winkels auf der Anwendung einer und derselben νεῦσις beruhen, die in ihrer allgemeinsten Form so ausgesprochen werden kann: *wenn irgend zwei gerade Linien gegeben sind, die einen Winkel bilden, und ein fester Punkt, der auf keiner der beiden Linien liegt, so soll durch den festen Punkt eine Gerade gelegt werden, so daß der auf ihr zwischen den festen Linien begrenzte Abschnitt eine gegebene Länge hat.* Sind AE, AC die festen Linien und B der feste Punkt, so werde das Parallelogramm $ACBD$ vervollständigt und angenommen, daß



die Gerade BQR, die CA in Q und AE in R schneidet, die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so daß QR die gegebene Länge hat. Wenn dann das Parallelogramm $CQRP$ vervollständigt ist, so betrachten wir P als Hilfspunkt, der zur Lösung der Aufgabe bestimmt werden muß; und wir haben gesehen, daß P gefunden werden kann als einer der Schnittpunkte (1) des Kreises um den Mittelpunkt C mit dem Radius k, der gegebenen Länge, und (2) der Hyperbel, die durch C geht und DE, DB zu Asymptoten hat.

Es bleibt nur noch übrig, einige besondere Fälle der Aufgabe zu betrachten, die zu ihrer Lösung Kegelschnitte nicht erfordern, sondern „ebene" Aufgaben sind, indem sie nur die gerade Linie und den Kreis erfordern.

§ 6. Wir wissen aus Pappus, daß Apollonius sich in seinen zwei Büchern über *νεύσεις* mit Problemen dieser Art beschäftigt hat, die der Lösung durch *„ebene"* Methoden fähig sind. In der Tat reduziert sich die obige *νεῦσις* auf eine „ebene" Aufgabe in dem Sonderfalle, wo B auf der Halbierungslinie eines der von den gegebenen Geraden gebildeten Winkel liegt, oder (mit anderen Worten) wo das Parallelogramm $ACBD$ ein Rhombus oder ein Quadrat ist. Demnach sehen wir, daß Pappus als einen der „ebenen" Fälle, die wegen ihres größeren Nutzens für viele Zwecke ausdrücklich bewiesen waren, den folgenden anführt[1]): wenn ein Rhombus mit einer verlängerten Seite gegeben ist, in den äußeren Winkel eine Gerade von gegebener Länge einzuschieben, die sich nach der entgegengesetzten Ecke neigt; und er gibt später in seinen Hilfssätzen zu Apollonius' Werk einen für die Aufgabe mit dem Rhombus nützlichen Satz an und (nach einem einleitenden Hilfssatze) eine Lösung der *νεῦσις*, die sich auf das Quadrat bezieht.

Es erhebt sich daher die Frage: wie entdeckten die griechischen Geometer diesen und andere besondere Fälle, wo eine Aufgabe, die im allgemeinen „körperlich" ist und daher die Anwendung von Kegelschnitten (oder ein mechanisches Äquivalent) erfordert, „eben" wird? Zeuthen ist der Meinung, sie seien wahrscheinlich als Ergebnisse einer Untersuchung der allgemeinen Lösung durch Kegelschnitte gefunden worden.[2]) Ich fühle mich aus folgenden Gründen davon nicht überzeugt.

---

[1]) Pappus VII. S. 670.

[2]) „Mit dieser selben Aufgabe ist nämlich ein wichtiges Beispiel dafür verknüpft, daß man bemüht war, solche Fälle zu entdecken, in denen Aufgaben, zu deren Lösung im allgemeinen Kegelschnitte erforderlich sind, sich mittels Zirkel und Lineal lösen lassen. Da nun das Studium der allgemeinen Lösung durch Kegelschnitte das beste Mittel gewährt, solche Fälle zu entdecken, so ist es ziemlich wahrscheinlich, daß man wirklich diesen Weg eingeschlagen hat." Zeuthen, a. a. O. S. 280.

(1) Die authentischen Fälle scheinen sehr selten zu sein, in denen wir zu der Annahme berechtigt sind, die Griechen hätten die Eigenschaften von Kegelschnitten benutzt — ebenso wie wir zwei kartesische Gleichungen zweiten Grades kombinieren und transformieren würden — um zu beweisen, daß die Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten auch auf gewissen Kreisen oder Geraden liegen. Allerdings können wir mit Recht schließen, Apollonius habe nach einer Methode dieser Art seine Lösung der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels gefunden, wo er an Stelle der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel, die Menaechmus benutzt, dieselbe Hyperbel anwendet und außerdem den *Kreis,* der durch die gemeinsamen Punkte der Hyperbel und der Parabel hindurchgeht[1]; aber bei den einzigen Sätzen in seinen Kegelschnitten, die Gelegenheit zu einer ähnlichen Reduktion bieten[2], führt er sie nicht aus und wird deswegen von Pappus getadelt. In diesen Sätzen werden die Fußpunkte der von einem gegebenen Punkte aus nach einer Parabel gezogenen Normalen als Schnittpunkte der Parabel mit einer gewissen gleichseitigen Hyperbel bestimmt, und Pappus beanstandet diese Methode, da sie ein Beispiel der Lösung einer „ebenen" Aufgabe durch Kegelschnitte sei[3]; sein Einwand bezieht sich auf die Benutzung einer *Hyperbel*, wo dieselben Punkte als Schnittpunkte der Parabel mit einem gewissen *Kreise* gefunden werden konnten. Der Beweis dieser letzten Tatsache hätte Apollonius keine Schwierigkeit bereitet, und Pappus muß das gewußt haben; wenn er ihm also unter diesen Umständen die Benutzung der Hyperbel zum Vorwurf macht, so läßt sich mindestens schließen, daß er ebensowenig einverstanden gewesen wäre, hätte Apollonius die Hyperbel herangezogen und ihre Eigenschaften zum Beweise dafür benutzt, daß die Aufgabe in dem besonderen Falle „eben" ist.

(2) Die Lösung der allgemeinen Aufgabe durch Kegelschnitte zieht den Hilfspunkt P und die Gerade CP heran. Wir müssen dann natürlich erwarten, eine Spur von diesen Elementen in den besonderen Lösungen der νεῦσις für den Rhombus und das Quadrat zu finden; aber sie erscheinen in den betreffenden Erörterungen und Figuren bei Pappus nicht.

Zeuthen ist der Ansicht, die νεῦσις mit Bezug auf ein Quadrat sei wahrscheinlich durch dieselbe Untersuchung als „eben" erkannt

---

[1]) *Apollonius of Perga,* S. CXXV, CXXVI.

[2]) Ebenda, S. CXXVIII und SS. 182, 186 (*Kegelschnitte,* V. 58, 62).

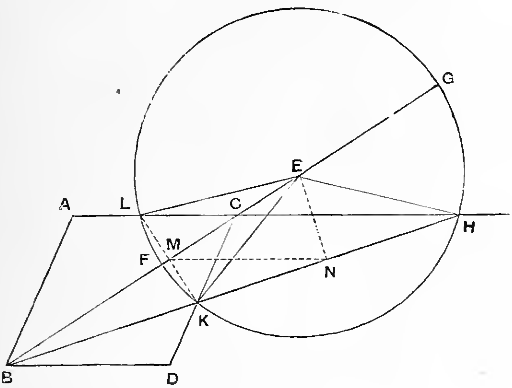
[3]) Pappus IV. S. 270. Vgl. S. 98.

worden, welche die Möglichkeit ergeben hatte, den allgemeineren Fall des Rhombus mit Zirkel und Lineal allein zu lösen, d. h. durch systematisches Studium der allgemeinen Lösung durch Kegelschnitte. Diese Vermutung hält er für wahrscheinlicher als die, daß die Entdeckung der ebenen Konstruktion für das Quadrat zufällig sein sollte; denn (sagt er) wenn man dieselbe Aufgabe nur mit elementar-geometrischen Hilfsmitteln behandelt, so ist die Entdeckung, daß sie eben ist, durchaus nicht leicht[1]). Hier bin ich wiederum von Zeuthens Argument nicht überzeugt, da mir eine einfachere Erklärung des Weges möglich scheint, auf dem die Griechen zu der Entdeckung gelangten, daß die spezielle *νεῦσις* eben war. Sie wußten zunächst, daß die Dreiteilung eines *rechten Winkels* eine „ebene“ Aufgabe war, und daß somit auch ein *halber rechter Winkel* mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises in drei gleiche Teile geteilt werden konnte. Es ergab sich somit, daß die entsprechende *νεῦσις*, d. h. die für das Quadrat, eine „ebene“ Aufgabe in dem besonderen Falle war, wo die gegebene Länge des gesuchten Abschnitts das Doppelte der Quadratdiagonale war. Diese Tatsache mußte natürlich die Frage anregen, ob die Aufgabe auch noch eben war, wenn k irgendeinen anderen Wert hatte; und wenn diese Frage erst einmal gründlich untersucht wurde, so konnte der Beweis, daß die Aufgabe „eben“ war, und ihre Lösung so scharfsinnigen Geometern, wie die Griechen es waren, kaum auf die Dauer entgehen. Das wird, denke ich, klar werden, wenn man die von Pappus angegebene, unten reproduzierte Lösung prüft. Wenn man nun bewiesen hatte, daß die *νεῦσις* mit Bezug auf ein Quadrat eben war, was war wiederum natürlicher als die weitere Frage, ob der Zwischenfall zwischen denen des Quadrats und des Parallelogramms, der des Rhombus, vielleicht auch eine „ebene“ Aufgabe sei?

Was die wirkliche Lösung der ebenen *νεύσεις* mit Bezug auf Rhombus und Quadrat angeht, d. h. allgemein der Fälle, wo der feste Punkt B auf der Halbierungslinie eines der Winkel zwischen den gegebenen beiden Geraden liegt, so sagt Zeuthen, wir besäßen nur in einem der Fälle eine positive Feststellung, daß die Griechen

[1]) „Die Ausführbarkeit kann dann auf die zuerst angedeutete Weise gefunden sein, die den allgemeinen Fall, wo der Winkel zwischen den gegebenen Geraden beliebig ist, in sich begreift. Dies scheint mir viel wahrscheinlicher als die Annahme, daß die Entdeckung dieser ebenen Konstruktion zufällig sein sollte; denn wenn man dieselbe Aufgabe nur mittels rein elementar-geometrischer Hilfsmittel behandelt, so liegt die Entdeckung, daß sie eben ist, ziemlich fern.“ Zeuthen, a. a. O. S. 282.

die νεῦσις mit Zirkel und Lineal lösten, den Fall nämlich, wo $ACDB$ ein *Quadrat* ist.[1]) Das scheint ein Mißverständnis zu sein, denn nicht nur erwähnt Pappus den Fall des Rhombus als eine der ebenen νεύσεις, welche die Griechen gelöst hätten, sondern es ergibt sich auch aus einem später von ihm angegebenen Satze, wie sie wirklich gelöst wurde. Diesen Satz nennt Pappus „einbegriffen" (παραθεωρούμενον, wahrscheinlich „Gegenstand derselben Untersuchung") in der 8. Aufgabe von Apollonius' erstem Buch



der νεύσεις und spricht ihn in folgender Form aus.[2]) *Wenn ein Rhombus AD mit der bis E verlängerten Diagonale BC gegeben ist, wenn EF die mittlere Proportionale zwischen BE, EC ist und wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt E und dem Radius EF beschrieben wird, der CD in K und die Verlängerung von AC in H schneidet, so liegen B, K, H in gerader Linie.* Der Beweis ist, wie folgt.

Der Kreis schneide AC in L, E werde mit L, K, H verbunden. LK schneide BC in M. Da wegen der Eigenschaft des Rhombus die Winkel LCM, KCM gleich sind, und somit CL, CK mit dem Durchmesser FG des Kreises gleiche Winkel bilden, so folgt, daß $CL = CK$. Da die Dreiecke ECK und ECL kongruent sind, so gilt auch

$$\sphericalangle CKE = \sphericalangle CLE = \sphericalangle CHE.$$

[1]) „Indessen besitzen wir doch nur in einem einzelnen hierher gehörigen Falle eine positive Angabe darüber, daß die Griechen die Einschiebung mittels Zirkel und Lineal ausgeführt haben, wenn nämlich die gegebenen Geraden zugleich rechte Winkel bilden, $AJBC$ also ein Quadrat wird." Zeuthen, a. a. O. S. 281.

[2]) Pappus VII. S. 778.

Nun ist nach Voraussetzung

$$EB : EF = EF : EC$$

oder $$EB : EK = EK : EC \quad (\text{da } EF = EK),$$

und der Winkel CEK ist den Dreiecken BEK, KEC gemeinsam; daher sind die Dreiecke BEK, KEC ähnlich und

$$\sphericalangle CBK = \sphericalangle CKE$$
$$= \sphericalangle CHE, \text{ wie oben bewiesen.}$$

Ferner $$\sphericalangle HCE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCK.$$

Somit sind in den Dreiecken CBK, CHE zwei Winkel bezüglich gleich; folglich $\sphericalangle CEH = \sphericalangle CKB$.

Aber, da nach obigem $\sphericalangle CKE = \sphericalangle CHE$, liegen die Punkte K, C, E, H auf einem Kreise. Daher

$$\sphericalangle CEH + \sphericalangle CKH = (\text{zwei rechte Winkel}).$$

Demnach, da $\sphericalangle CEH = \sphericalangle CKB$,

$$\sphericalangle CKH + \sphericalangle CKB = (\text{zwei rechte Winkel}),$$

und BKH ist eine Gerade.

Nun läßt die Form des Satzes sogleich vermuten, daß Apollonius in der erwähnten 8. Aufgabe einfach eine Konstruktion gegeben hat, bei der ein Kreis beschrieben wurde, der CD und die Verlängerung von AC bezüglich in K und H schneidet, und Pappus' Beweis, daß BKH eine gerade Linie ist, hat den Zweck, zu beweisen, daß HK *sich gegen* B *neigt*, oder (mit anderen Worten) zu verifizieren, daß die von Apollonius gegebene Konstruktion *eine gewisse νεῦσις löst, bei der* BKH *so gezogen werden soll, daß* KH *eine gegebene Länge hat.*

Die zur Konstruktion führende Analysis ist vermutlich etwa folgendermaßen ausgeführt worden.

BKH sei so gezogen, daß KH gleich der gegebenen Länge k ist. KH werde in N halbiert und NE senkrecht zu KH gezogen bis zum Schnittpunkte E mit der Verlängerung von BC.

KM werde senkrecht zu BC gezogen und bis zum Schnittpunkte L mit AC verlängert. Dann sind wegen der Eigenschaft des Rhombus die Dreiecke KCM, LCM kongruent.

Daher $KM = ML$, und folglich ist die Verbindungslinie MN parallel zu LH.

Da nun die Winkel bei M und N rechte sind, kann ein Kreis um $EMKN$ beschrieben werden.

Daher $$\sphericalangle CEK = \sphericalangle MNK$$
$$= \sphericalangle CHK,$$

da MN und HL parallel sind.

Es kann also um $CEHK$ ein Kreis beschrieben werden. Es folgt $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EHK = \sphericalangle EKH.$
Demnach sind die Dreiecke EKH, DBC ähnlich.

Schließlich ist

$$\sphericalangle CKN = \sphericalangle CBK + \sphericalangle BCK;$$

ziehen wir von diesen gleichen Winkeln bezüglich die gleichen Winkel EKN und BCK ab, so haben wir

$$\sphericalangle EKC = \sphericalangle EBK.$$

Daher sind die Dreiecke EBK, EKC ähnlich und

$$BE : EK = EK : EC,$$

oder

$$BE \cdot EC = EK^2.$$

Aber wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke KEH und CDB ist

$$EK : KH = DC : CB,$$

und das Verhältnis $DC : CB$ ist gegeben, während KH auch gegeben ist $(= k)$.

Somit ist EK gegeben, und um E zu finden, haben wir nur, in der griechischen Ausdrucksweise, „an BC ein um ein Quadrat vergrößertes Rechteck anzulegen. das der gegebenen Fläche EK^2 gleich ist".

Somit ist die von Apollonius angegebene Konstruktion offenbar die folgende.[1])

[1]) Zu dieser Konstruktion bin ich ohne Hilfe durch sorgfältige Prüfung von Pappus' Satz gelangt; aber sie ist keine neue Entdeckung. Samuel Horsley gibt dieselbe Konstruktion in seiner Wiederherstellung der *Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo* (Oxford, 1770); er erklärt jedoch, er sei infolge eines Fehlers in der in der Handschrift gegebenen Figur in die Irre gegangen und unfähig gewesen, die Konstruktion aus Pappus' Satz abzuleiten, bis er durch eine Lösung derselben Aufgabe von Hugo d'Omerique wieder auf die richtige Spur geführt worden sei. Diese Lösung befindet sich in einem 1698 in Cadiz erschienenen Werke, betitelt *Analysis geometrica siva nova et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica quam arithmeticas quaestiones.* D'Omeriques Konstruktion, die in der Tat mit der des Apollonius identisch ist, scheint auf Grund einer eigenen, unabhängigen Analysis gefunden zu sein, da er sich nicht auf Pappus bezieht, wie er es in anderen Fällen tut, wo er Pappus heranzieht (z. B. wenn er die Konstruktion für den Fall des Quadrates angibt, die von Pappus einem gewissen Heraklit zugeschrieben wird). Die Konstruktion unterscheidet sich von der oben angegebenen nur dadurch, daß der Kreis nur zur Bestimmung des Punktes K benutzt wird, worauf BK gezogen und bis zum Schnittpunkte H mit AC verlängert wird. Von anderen Lösungen derselben Aufgabe seien hier zwei erwähnt. (1) Die in Marino Ghetaldis nachgelassenem Werke *De Resolutione et Compositione Mathematica Libri quinque* (Rom.

Wenn k die gegebene Strecke ist, suche man eine Strecke p, so daß

$$p : k = AB : BC.$$

An BC lege man ein um ein Quadrat vergrößertes Rechteck an, das der Fläche p^2 gleich ist. $BE \cdot EC$ sei dieses Rechteck, und mit E als Mittelpunkt und dem Radius p beschreibe man den Kreis, der die Verlängerung von AC in H und CD in K schneidet.

HK ist dann gleich k und neigt sich nach B, wie von Pappus bewiesen; die Aufgabe ist somit gelöst.

Nachdem so die von Apollonius benutzte Konstruktion für die „ebene" νεῦσις mit Bezug auf den Rhombus mittels des von Pappus angegebenen Satzes wiederhergestellt ist, können wir verstehen, weshalb Pappus noch eine besondere Lösung für den Fall des Quadrates (die er eine „Aufgabe nach Heraklit" nennt) mit einem einleitenden Hilfssatze hinzufügt, obwohl doch auch dieser Fall Gegenstand der „8. Aufgabe" des Apollonius ist. Es scheint klar, daß Apollonius den Fall des Quadrates nicht getrennt von dem des Rhombus behandelt hat, weil die Lösung für den Rhombus ebenso auf das Quadrat anwendbar war, und diese Vermutung wird durch die Tatsache gestützt, daß Pappus bei der Aufzählung der wichtigsten in den νεύσεις diskutierten Aufgaben nur den Rhombus und nicht das Quadrat erwähnt. Da er jedoch eine Lösung der νεῦσις für das Quadrat von einem gewissen Heraklit kannte, die nicht mit der des Apollonius übereinstimmte, während sie sich auf den Fall des Rhombus nicht anwenden ließ, fügte Pappus sie als weitere bemerkenswerte Methode für das Quadrat hinzu[1]). Das ist zweifellos die Erklärung der Überschrift des der Aufgabe Heraklits vorangeschickten Hilfssatzes, die Hultsch so schwierig zu erklären findet und daher in Klammern setzt als

1630) gegebene Lösung, enthalten unter den Lösungen anderer Aufgaben, die alle „methodo qua antiqui utebantur" gelöst werden, ist zwar geometrisch, von der obigen jedoch ganz verschieden, da sie mittels einer Reduktion der Aufgabe auf eine einfachere ebene νεῦσις, ähnlich der von Hippokrates zu seiner *Quadratur der Monde* benutzten, ausgeführt wird. (2) Christian Huygens (*De circuli magnitudine inventa; accedunt problematum quorundam illustrium constructiones*, Lugduni Batavorum, 1654) gibt eine ziemlich komplizierte Lösung, die sich als Verallgemeinerung von Heraklits Lösung für den Fall des Quadrates auffassen läßt.

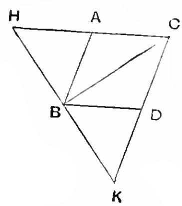
[1]) Diese Anschauung der Sache erhält durch folgende Tatsachen wirksame Unterstützung. In Pappus' Zusammenfassung (S. 670) des Inhalts der νεύσεις des Apollonius werden „zwei Fälle" der νεῦσις mit Bezug auf den Rhombus an letzter Stelle unter den im ersten der beiden Bücher behandelten speziellen Aufgaben erwähnt. Wie wir gesehen haben, war der eine Fall

Interpolation eines Abschreibers, der die Figur und den Inhalt des Satzes mißverstanden habe. Die Worte bedeuten „Hilfssatz, nützlich für die Aufgabe mit Bezug auf Quadrate, welche die Stelle des Rhombus einnehmen“ (wörtlich „welche dasselbe tun wie der Rhombus“), d. h. Hilfssatz, nützlich für Heraklits Lösung der *νεῦσις* in dem besonderen Falle eines Quadrates.[1]) Der Hilfssatz ist folgender.

$ABCD$ sei ein Quadrat, die Gerade BHE sei so gezogen, daß sie CD in H und die Verlängerung von AD in E schneidet, und EF stehe senkrecht auf BE und schneide die Verlängerung von BC in F. Zu beweisen, daß $CF^2 = BC^2 + HE^2$.

EG werde parallel zu DC gezogen und schneide CF in G. Dann sind, da BEF ein rechter Winkel ist, die Winkel HBC und FEG gleich.

(der oben angegebene) Gegenstand der „8. Aufgabe“ des Apollonius, und ebenso ist klar, daß der andere Fall in der „9. Aufgabe“ behandelt worden ist. Dieser andere Fall ist offenbar der, wo die durch B zu legende Gerade, statt den Außenwinkel des Rhombus bei C zu durchkreuzen, quer über dem Winkel C selbst liegt, d. h. beide Seiten CA, CD in den Verlängerungen schneidet. In dem früheren Falle ist die Lösung der Aufgabe für jede beliebige Länge von k möglich, im zweiten Falle aber ist die Aufgabe offenbar nicht lösbar, wenn die gegebene Länge k kleiner als ein gewisses Minimum ist. Daher erfordert die Aufgabe einen *διορισμός* zur Festlegung der kleinsten Länge von k. Demnach sehen wir, daß Pappus nach Einfügung des Quadratfalles einen „für den *διορισμός* der 9. Aufgabe nützlichen Hilfssatz“ angibt, der nachweist, wenn $CH = CK$ und B der Mittelpunkt von HK ist, daß dann HK die kürzeste Strecke ist, die durch B gezogen werden kann und bis CH, CK reicht. Pappus fährt fort, der *διορισμός* für den Rhombus sei nun evident; ist HK die Linie, die in B auf BC senkrecht steht und die Verlängerungen von CA und CD in H und K schneidet, so darf, damit die Aufgabe eine Lösung zulasse, die gegebene Länge k nicht kleiner als HK sein.



[1]) Hultsch übersetzt die Worte *λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ ἐπὶ τετραγώνων ποιούντων τὰ αὐτὰ τῷ ῥόμβῳ* (S. 780) so: „Lemma utile ad *problema* de quadratis quorum summa rhombo aequalis est“, und bringt in seinem Appendix (S. 1260) eine Anmerkung, in der er auseinandersetzt, was nach seiner Ansicht gemeint ist. Die „Quadrate“ faßt er auf als das gegebene Quadrat und das über der gegebenen Länge des Abschnittes, und für den Rhombus gibt er eine Konstruktion an, die indes aus Pappus' Figur nicht zu ersehen ist. So ist er gezwungen, *τῷ ῥόμβῳ* durch „*einem* Rhombus“ zu übersetzen, während „deren Summe gleich ist“ kaum möglich ist für *ποιούντων τὰ αὐτά*.

Deshalb sind die Dreiecke BCH, EGF kongruent und

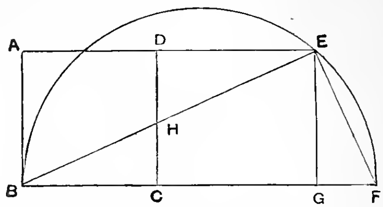
$$EF = BH.$$

Nun ist $$BF^2 = BE^2 + EF^2,$$

oder $$BC \cdot BF + BF \cdot FC = BH \cdot BE + BE \cdot EH + EF^2.$$

Aber da die Winkel HCF, HEF rechte sind, so liegen die Punkte C, H, E, F auf einem Kreise, und daher ist

$$BC \cdot BF = BH \cdot BE.$$



Subtrahieren wir diese gleichen Beträge, so haben wir

$$\begin{aligned} BF \cdot FC &= BE \cdot EH + EF^2 \\ &= BE \cdot EH + BH^2 \\ &= BH \cdot HE + EH^2 + BH^2 \\ &= EB \cdot BH + EH^2 \\ &= FB \cdot BC + EH^2. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir den gemeinsamen Bestandteil $BC \cdot CF$, so folgt

$$CF^2 = BC^2 + EH^2.$$

Heraklits Analysis und Konstruktion verlaufen nun, wie folgt.

Angenommen, BHE sei so gezogen, daß HE die gegebene Länge k hat.

Da $$CF^2 = BC^2 + EH^2 = BC^2 + k^2,$$

und BC und k gegeben sind, ist CF und damit BF gegeben.

Somit ist der Halbkreis mit dem Durchmesser BF gegeben, und daher auch E, sein Schnittpunkt mit der gegebenen Linie ADE; folglich ist BE gegeben.

Zur Ausführung der Konstruktion bestimmen wir zunächst das Quadrat, das gleich der Summe des gegebenen Quadrates und des Quadrates über k ist. Dann verlängern wir BC bis F, so daß CF gleich der Seite des so gefundenen Quadrates wird. Wird nun der Halbkreis über dem Durchmesser BF beschrieben, so schließt er den Punkt D ein (da $CF > CD$ und daher $BC \cdot CF > CD^2$), und schneidet daher die Verlängerung von AD in einem Punkte E.

Die Verbindungslinie BE werde gezogen und schneide CD in H.

Dann ist $HE = k$, und die Aufgabe ist gelöst.

Kapitel VI.

Kubische Gleichungen.

Es ist oft erörtert worden, wie die griechischen Geometer imstande waren, alle Formen der quadratischen Gleichung, die positive Wurzeln ergeben, geometrisch zu lösen; denn andere konnten sie nicht in Betracht ziehen, da ihnen der Begriff einer negativen Größe unbekannt war. Die quadratische Gleichung wurde als einfache Gleichung zwischen Flächen betrachtet, und ihr geometrischer Ausdruck wurde erleichtert durch die antiken Methoden, beliebige geradlinig begrenzte Flächen in Parallelogramme, Rechtecke und schließlich Quadrate von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln; ihre Lösung beruhte dann auf dem Prinzip der *Flächenanlegung*, deren Entdeckung den Pythagoreern zugeschrieben wird. So waren alle Aufgaben, die auf das geometrische Äquivalent einer quadratischen Gleichung mit einer positiven Wurzel zurückgeführt werden konnten, mit einem Schlage gelöst. Eine besondere Form der Gleichung ist die *rein* quadratische, die für die Griechen gleichbedeutend war mit der Aufgabe, ein Quadrat zu finden, das einer gegebenen geradlinig begrenzten Fläche gleich ist. Diese Fläche konnte in ein Rechteck umgeformt werden, und die allgemeine Form der Gleichung wurde somit $x^2 = ab$, so daß es nur nötig war, die mittlere Proportionale zwischen a und b zu finden. In dem besonderen Falle, wo die Fläche als Summe zweier oder mehrerer Quadrate oder als Differenz von zwei Quadraten gegeben war, ergab sich eine andere Methode auf Grund des Pythagoreischen Satzes, Euklid I. 47 (der, wenn nötig, beliebig oft hintereinander angewendet wurde). Der Zusammenhang zwischen den beiden Methoden läßt sich erkennen, wenn man Euklid VI. 13, wo die mittlere Proportionale zwischen a und b gefunden wird, und Euklid II. 14 vergleicht, wo dieselbe Aufgabe ohne Anwendung von Proportionen mit Hilfe von I. 47 gelöst ist, und wo die tatsächlich angewandte Formel folgende ist

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Ebenso stand die Wahl zwischen den beiden Methoden frei, wenn die zu lösende Gleichung $x^2 = pa^2$ war, wo p irgend eine ganze Zahl ist; somit ergab sich die „*Multiplikation*" von Quadraten als auf der Konstruktion der mittleren Proportionale beruhend. Die Gleichung $x^2 = 2a^2$ war die einfachste dieser Art, und die Entdeckung einer geometrischen Konstruktion für die Seite des Quadrates, das doppelt so groß wie ein gegebenes Quadrat ist, war besonders wichtig, da sie der Anfang der Theorie der inkommensurablen oder „irrationalen" Größen (*ἀλόγων πραγματεία*) war, die von Pythagoras begründet sein soll. Wir haben allen Grund zu glauben, daß durch diese erfolgreiche Verdoppelung des Quadrates die Frage angeregt wurde, ob nicht auch eine Konstruktion für die *Verdoppelung des Würfels* gefunden werden könnte, und die Erzählungen von dem Grabmal, das Minos seinem Sohne errichten ließ, und dem Orakel, das den Deliern auftrug, einen würfelförmigen Altar zu verdoppeln, haben ohne Zweifel den Zweck, das rein mathematische Problem in ein romantisches Gewand zu kleiden. Möglicherweise ist man durch den Zusammenhang zwischen der Verdoppelung des Quadrates und der Auffindung einer mittleren Proportionale zu der Reduktion der Verdoppelung des Würfels auf die Aufgabe, *zwei mittlere Proportionalen* zwischen zwei ungleichen Strecken zu finden, geführt worden. Diese dem Hippokrates von Chios zugeschriebene Reduktion ergab gleichzeitig die Möglichkeit, den Würfel mit irgend einem Verhältnis zu *multiplizieren*. Wenn nämlich x, y zwei mittlere Proportionalen zwischen a, b sind, so haben wir

$$a : x = x : y = y : b.$$

woraus wir ableiten

$$a : b = a^3 : x^3;$$

somit ist ein Würfel (x^3) gefunden, der zu a^3 das Verhältnis $b : a$ hat, während jeder Bruch $\frac{p}{q}$ in ein Verhältnis zwischen Strecken transformiert werden kann, von denen eine (die zweite) der Kante a des gegebenen Würfels gleich ist. So gibt die Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen die Lösung jeder rein kubischen Gleichung oder das Äquivalent der Ausziehung der Kubikwurzel, ebenso wie die einzelne mittlere Proportionale gleichbedeutend mit der Ausziehung der Quadratwurzel ist. Denn nehmen wir an, die gegebene Gleichung sei $x^3 = bcd$, so haben wir nur die mittlere Proportionale a zwischen c und d zu konstruieren, und aus der Gleichung wird $x^3 = a^2 \cdot b = a^3 \cdot \frac{b}{a}$, und das ist genau die Multiplikation eines Würfels mit einem Streckenverhältnis, die wir mittels der beiden mittleren Proportionalen ausführen können.

In der Tat finden wir, daß die großen Geometer Aufgaben nicht auf die Multiplikation des Würfels *eo nomine* zurückzuführen pflegen, sondern auf die gleichwertige Aufgabe der beiden mittleren Proportionalen; die kubische Gleichung $x^3 = a^2 b$ wird gewöhnlich nicht in dieser Form, sondern als Proportion aufgestellt. So wird in den beiden Sätzen *Über Kugel und Zylinder* II. 1, 5, wo Archimedes die beiden mittleren Proportionalen benutzt, x zu finden verlangt, wo

$$a^2 : x^2 = x : b;$$

er spricht nicht von der Auffindung der Kante eines Würfels, der einem gewissen Parallelepiped gleich ist, wie man nach Analogie der Auffindung eines Quadrates, das einem gegebenen Rechteck gleich ist, vermuten könnte. Bisher haben wir also keinerlei Kenntnis von einem allgemeinen System der Addition und Subtraktion von Körpern durch Umformung von Parallelepipeden in Würfel und von Würfeln in Parallelepipede, das wir in Anwendung zu sehen erwarten müßten, wenn die Griechen die Lösung der allgemeinen Form der kubischen Gleichung systematisch versucht hätten nach einer Methode, die der bei der Behandlung quadratischer Gleichungen gebräuchlichen *Flächenanlegung* analog wäre.

Es erhebt sich sodann die Frage: behandelten die griechischen Geometer in dieser Allgemeinheit die kubische Gleichung

$$x^3 \pm a x^2 \pm B x \pm \Gamma = 0,$$

die unter der Voraussetzung, daß sie als selbständige Aufgabe der körperlichen Geometrie angesehen wurde, für sie eine einfache Gleichung zwischen Körper-Inhalten war, indem x und a lineare Größen darstellten, B eine Fläche (ein Rechteck) und Γ einen Rauminhalt (ein Parallelepiped)? Und war die Reduktion einer Aufgabe von höherer Ordnung als die, welche durch quadratische Gleichungen gelöst werden konnten, auf die Lösung einer kubischen Gleichung von der obigen Form eine gebräuchliche und bekannte Methode, eine solche Aufgabe zu behandeln? Die einzige auf eine solche Vermutung direkt hinweisende Stelle findet sich bei Archimedes, der die Aufgabe, eine Kugel durch eine Ebene in zwei Segmente zu teilen, deren Volumina ein gegebenes Verhältnis haben (*Über Kugel und Zylinder* II. 4), auf die Lösung einer kubischen Gleichung zurückführt, die er in einer mit

$$4 a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n} a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gleichwertigen Form angibt; darin bedeutet a den Radius der Kugel, $m:n$ das gegebene Verhältnis (aufgefaßt als Verhältnis zwischen Strecken, von denen $m > n$) und x die Höhe des größeren der gesuchten Segmente. Archimedes erklärt, dies sei ein besonderer Fall der allgemeineren Aufgabe, eine Strecke (a) in zwei Teile (x, $a-x$) zu teilen, so daß der eine Teil ($a-x$) sich zu einer anderen gegebenen Strecke (c) verhält wie eine gegebene Fläche (die wir uns der Einfachheit wegen in ein Quadrat b^2 umgeformt denken können) zu dem Quadrat über dem anderen Abschnitt (x^2), d. h. daß

$$(a-x):c = b^2:x^2 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Er setzt weiter auseinander, daß die Gleichung (2) in dieser allgemeinen Form einen διορισμός erfordert, d. h. daß die Grenzen für die Möglichkeit einer reellen Lösung usw. untersucht werden müssen, aber daß der Spezialfall (mit den in der besonderen Aufgabe enthaltenen Bedingungen) keinen διορισμός erfordert, d. h. daß die Gleichung (1) immer eine reelle Lösung ergibt. Er fügt hinzu: „Analysis und Synthesis für diese beiden Aufgaben sollen am Ende gegeben werden". Das heißt, er verspricht, getrennt eine erschöpfende Untersuchung der Gleichung (2) zu geben, die mit der kubischen Gleichung

$$x^2(a-x) = b^2 c \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

äquivalent ist, und sie auf den speziellen Fall (1) anzuwenden.

Wo auch diese Lösung gegeben war, sie ist eine Zeitlang verloren gewesen und zwar wahrscheinlich noch vor der Zeit des Dionysodor und Diokles verschwunden (letzterer lebte nach Cantor spätestens um das Jahr 100 v. Chr.); aber Eutocius berichtet, er habe ein altes Fragment gefunden, das die Originallösung des Archimedes zu enthalten scheine, und gibt es vollständig wieder. Aus der Note des Eutocius (die ich unmittelbar nach dem Satze wiedergegeben habe, zu dem sie gehört, *Über Kugel und Zylinder* II. 4) werden wir sehen, daß die Lösung (deren Echtheit wir wohl nicht bezweifeln dürfen) mittels des Schnittpunktes einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel ausgeführt wurde, deren Gleichungen wir so schreiben können:

$$x^2 = \frac{b^2}{a} y,$$

$$(a-x)\,y = ac.$$

Der διορισμός besteht in der Aufsuchung des *größten* möglichen Wertes für $x^2(a-x)$, und es wird bewiesen, daß dieser größte Wert, der eine reelle Lösung gestattet, der dem Werte $x = \frac{2}{3} a$ entsprechende ist. Dieses Ergebnis wird durch den Nachweis erhalten, daß die Kurven sich in dem Punkte, für den $x = \frac{2}{3} a$, berühren, wenn $b^2 c = \frac{4}{27} a^3$. Ist andererseits $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$, so wird bewiesen, daß zwei reelle Lösungen vorhanden sind. In dem besonderen Falle (1) ist klar, daß die Bedingung für die reelle Lösung erfüllt ist, denn der Ausdruck in (1), der dem $b^2 c$ in (2) entspricht, ist $\frac{m}{m+n} 4a^3$, und es nur nötig, daß

$$\frac{m}{m+n} 4a^3 \leqq \frac{4}{27}(3a)^3 \quad \text{oder} \quad 4a^3,$$

was offenbar immer richtig ist.

Somit ist klar, daß Archimedes die kubische Gleichung (2) mit Hilfe der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte nicht nur gelöst, sondern auch die Bedingungen vollständig diskutiert hat, unter denen 0, 1 oder 2 Wurzeln zwischen 0 und a vorhanden sind. Es ist ferner zu bemerken, daß der *διορισμός* Ähnlichkeit mit dem hat, mittels dessen Apollonius die Zahl der möglichen Normalen feststellt, die von einem gegebenen Punkte aus nach einem Kegelschnitte gezogen werden können.[1]) Schließlich kann Archimedes' Methode als Erweiterung der von Menaechmus zur Lösung der rein kubischen Gleichung angewandten betrachtet werden. Diese kann in die Form

$$a^3 : x^3 = a : b$$

gebracht werden, die man wieder in die Form des Archimedes

$$a^2 : x^2 = x : b$$

umwandeln kann, und die von Menaechmus benutzten Kegelschnitte sind

$$x^2 = ay, \qquad xy = ab,$$

zu denen er offenbar durch die zwei mittleren Proportionalen geführt worden ist, die den Gleichungen

$$a : x = x : y = y : b$$

genügen.

Der oben beschriebene Fall ist nicht der einzige, wo wir annehmen können, Archimedes habe eine Aufgabe dadurch gelöst, daß er sie zunächst auf eine kubische Gleichung zurückführte und diese dann löste. Am Schlusse der Vorrede zum Buche

---

[1]) Vgl. *Apollonius of Perga,* S. 168 ff.

Über Konoide und Sphäroide sagt er, die darin enthaltenen Ergebnisse könnten zur Entdeckung vieler Sätze und Aufgaben benutzt werden, und als Beispiele für letztere nennt er die folgenden: „von einem gegebenen Sphäroid oder Konoid mittels einer zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebene ein Segment abzuschneiden, das einem gegebenen Kegel oder Zylinder oder einer gegebenen Kugel gleich ist." Archimedes gibt zwar die Lösungen nicht an, doch werden die folgenden Betrachtungen über seine Methode Aufschluß geben.

(1) Der Fall des „rechtwinkeligen Konoids" (des Rotationsparaboloids) ist eine „ebene" Aufgabe und interessiert uns daher an dieser Stelle nicht.

(2) Im Falle des Sphäroids konnte das Volumen des ganzen Sphäroids leicht ermittelt werden und dadurch auch das Verhältnis des gesuchten Segments zu dem übrigbleibenden; darauf konnte die Aufgabe auf genau demselben Wege gelöst werden wie die oben beschriebene ähnliche im Falle der Kugel, da die Ergebnisse der Sätze 29—32 *Über Konoide und Sphäroide* denen von Satz 2 *Über Kugel und Zylinder* II. entsprechen. Oder Archimedes kann in diesem Falle nach einer direkteren Methode vorgegangen sein, die wir uns folgendermaßen vorstellen können. Es werde durch die Achse des Sphäroids die Ebene gelegt, die auf der gegebenen Ebene (und damit auf der Grundfläche des gesuchten Segments) senkrecht steht. Diese Ebene schneidet die elliptische Grundfläche des Segments in einer ihrer Achsen, die wir $2y$ nennen wollen. Es sei x die Länge der Achse des Segments (oder der innerhalb des Segments liegende Abschnitt des Sphäroiddurchmessers, der durch den Mittelpunkt der Grundfläche des Segments geht). Dann ist der Inhalt der Grundfläche des Segments veränderlich wie y^2 (da alle Schnitte des Sphäroids, die zur gegebenen Ebene parallel sind, ähnlich sein müssen) und daher das Volumen des *Kegels*, der Scheitel und Grundfläche mit dem Segment gemein hat, veränderlich wie $y^2 x$. Nun ist das Verhältnis des Volumens des Segments zu dem des Kegels (*Über Konoide und Sphäroide*, Sätze 29—32) gleich dem Verhältnis $(3a - x):(2a - x)$, wo $2a$ die Länge des Sphäroiddurchmessers bedeutet, der durch den Scheitel des Segments geht. Daher ist

$$y^2 x \cdot \frac{3a - x}{2a - x} = C,$$

wo C ein bekanntes Volumen ist. Da ferner x, y die Koordinaten eines Punktes auf dem elliptischen Schnitte des Sphäroids sind, der durch die Ebene entsteht, die durch die Achse geht und auf der Schnittebene senkrecht steht, bezogen auf einen Durchmesser dieser Ellipse und die Tangente in einem Endpunkte des Durchmessers, so ist das Verhältnis $y^2 : x(2a - x)$ gegeben. Somit kann die Gleichung in die Form

$$x^2(3a - x) = b^2 c$$

gebracht werden, und das ist wieder dieselbe Gleichung wie die in dem Fragmente des Eutocius gelöste. Ein διοϱισμός ist in diesem Falle formal notwendig, obwohl die Konstanten nur so zu wählen sind, daß das Volumen, dem das Segment gleich gemacht werden soll, kleiner als das des ganzen Sphäroids ist.

(3) Für das „stumpfwinkelige Konoid" (Rotationshyperboloid) muß man die eben für das Sphäroid ausgeführte direkte Methode anwenden, und zwar ergibt sich die entsprechende Gleichung mit Hilfe der Sätze *Über Konoide und Sphäroide,* 25, 26 unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen zu

$$y^2 x \cdot \frac{3a + x}{2a + x} = C.$$

und da das Verhältnis $y^2 : x(2a + x)$ konstant ist,

$$x^2(3a + x) = b^2 c.$$

Schreibt man diese Gleichung als Proportion wie die ähnliche oben, so wird aus ihr

$$b^2 : x^2 = (3a + x) : c.$$

Zweifellos hat Archimedes diese Gleichung so gut wie die ähnliche mit dem negativen Zeichen gelöst, d. h. er hat die beiden Gleichungen

$$x^3 \pm a x^2 \mp b^2 c = 0$$

gelöst und alle ihre positiven reellen Wurzeln erhalten. Mit anderen Worten, er hat, soweit die reellen Wurzeln in Betracht kommen, eine kubische Gleichung vollständig gelöst, in der das Glied in x fehlt, wenn auch die Bestimmung der positiven und negativen Wurzeln derselben Gleichung für ihn zwei getrennte Probleme darstellte. Und es ist klar, daß alle kubischen Gleichungen leicht auf den von Archimedes gelösten Typus zurückgeführt werden können.

Wir besitzen noch eine andere Lösung der kubischen Gleichung, auf welche die Teilung der Kugel in Segmente von gegebenem Verhältnis von Archimedes zurückgeführt ist. Diese Lösung stammt von Dionysodor und ist in derselben Note bei Eutocius wiedergegeben.[1]) Dionysodor verallgemeinert die Gleichung nicht, wie

[1]) *Über Kugel und Zylinder* II. 4 (Note am Ende).

es im Gegensatz dazu in dem oben genannten Fragment geschieht; er beschäftigt sich nur mit dem besonderen Falle

$$4\,a^2 : x^2 = (3\,a - x) : \frac{m}{m+n}\,a,$$

wobei er der Notwendigkeit eines διορισμός enthoben ist. Die von ihm benutzten Kurven sind die Parabel

$$\frac{m}{m+n}\,a\,(3\,a - x) = y^2$$

und die gleichseitige Hyperbel

$$\frac{m}{m+n}\,2\,a^2 = xy.$$

Wenn wir uns nun zu Apollonius wenden, so finden wir, daß er in seiner Vorrede zum 4. Buche der *Kegelschnitte*[1]) den Nutzen von Untersuchungen über die mögliche Zahl von Punkten betont, die Kegelschnitte miteinander oder mit Kreisen gemeinsam haben, denn „es lassen sich dadurch einige Dinge leichter erkennen, nämlich, daß mehrere Lösungen oder soundsoviele möglich sind, oder andererseits, daß gar keine Lösung möglich ist“; seine Meisterschaft in der Handhabung dieser Untersuchungsmethode zeigt er in Buch V, wo er die Zahl der Normalen eines Kegelschnitts bestimmt, die durch einen gegebenen Punkt gehen, die Bedingungen dafür aufstellt, daß zwei von den Normalen durch ihn zusammenfallen, oder (mit anderen Worten) daß der Punkt auf der Evolute des Kegelschnitts liegt, usw. Für diese Zwecke benutzt er die Schnittpunkte einer gewissen gleichseitigen Hyperbel mit dem fraglichen Kegelschnitt, und unter den verschiedenen Fällen finden wir einige (V. 51, 58, 62), die auf kubische Gleichungen zurückgeführt werden können, diejenigen nämlich, in denen der Kegelschnitt eine Parabel und die Achse der Parabel zu einer der Asymptoten der Hyperbel parallel ist. Apollonius führt jedoch die kubische Gleichung nicht ein; er greift die Aufgabe direkt geometrisch an, ohne sie auf eine andere zurückzuführen. Das ist nach Lage der Dinge nur natürlich, weil die Lösung doch das Einzeichnen der gleichseitigen Hyperbel in die vorliegende Figur, die den fraglichen Kegelschnitt enthielt, erforderte; so kann Apollonius z. B. in dem Falle der Aufgabe, die zu einer kubischen Gleichung führt, sozusagen zwei Schritte in einen zusammenziehen, und die Einführung der kubischen Gleichung als solcher wäre ganz überflüssig. Bei Archimedes lag der Fall anders, da

[1]) *Apollonius of Perga*, S. LXXIII.

er in seiner ursprünglichen Figur keinen Kegelschnitt hatte; und die Tatsache, daß er sich vornahm, eine etwas allgemeinere kubische Gleichung als die für die vorliegende Aufgabe gerade erforderliche zu lösen, machte eine getrennte Behandlung mit einer Anzahl neuer Figuren nötig. Überdies behandelte Apollonius in anderen Sätzen zu gleicher Zeit Fälle, die, in algebraische Form gebracht, nicht auf kubische, sondern auf biquadratische Gleichungen geführt hätten, und diese hätten als solche für die Griechen keinen Sinn gehabt; es war daher um so weniger Grund vorhanden, in dem einfacheren Falle eine Hilfsaufgabe einzuführen.

Wie bereits erwähnt, scheint man die kubische Gleichung als Gegenstand systematischer, selbständiger Untersuchung etwa ein Jahrhundert nach Archimedes' Tode aus den Augen verloren zu haben. So berichtet Diokles, der Entdecker der Zissoide, über die Aufgabe der Teilung der Kugel in Segmente von gegebenem Verhältnis, sie sei von Archimedes auf eine andere Aufgabe zurückgeführt worden, „die er in seinem Werke über Kugel und Zylinder nicht löst"; und dann wendet er sich zur direkten Lösung der ursprünglichen Aufgabe, ohne die kubische Gleichung irgendwie hineinzubringen. Aus diesem Umstande darf man nicht auf mangelnde geometrische Geschicklichkeit bei Diokles schließen; im Gegenteil, seine Lösung der Originalaufgabe ist ein bemerkenswertes Beispiel geschickter Anwendung von Kegelschnitten zur Lösung einer ziemlich komplizierten Aufgabe, und er verfährt dabei selbständig, indem er darauf ausgeht, den Schnittpunkt einer *Ellipse* und einer gleichseitigen Hyperbel zu finden, während uns die Lösungen der kubischen Gleichung an die Anwendung der *Parabel* und der gleichseitigen Hyperbel gewöhnt haben. Ich habe Diokles' Lösung an ihrer Stelle als Teil der Note des Eutocius zu Archimedes' Satz reproduziert; aber es wird, meine ich, angemessen sein, hier ihr Äquivalent in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise der analytischen Geometrie dem Zwecke dieses Kapitels entsprechend wiederzugeben. Archimedes hat bewiesen [*Über Kugel und Zylinder* II. 2], wenn k die Höhe eines Segments ist, das durch eine Ebene von einer Kugel vom Radius a abgeschnitten wird, und h die Höhe des Kegels, der dieselbe Grundfläche und denselben Rauminhalt wie das Segment hat, daß dann gilt

$$(3a - k) : (2a - k) = h : k.$$

Ebenso, wenn h' die Höhe des Kegels ist, der zu dem Rest-Segment der Kugel in ähnlicher Beziehung steht,

$$(a + k) : k = h' : (2a - k).$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir ab

$$(h-k):k=a:(2a-k),$$

und

$$(h'-2a+k):(2a-k)=a:k.$$

Diokles verallgemeinert diese Gleichungen ein wenig, indem er für a im dritten Gliede jeder Proportion eine andere Länge b einsetzt; indem er noch die Bedingung hinzufügt, daß die Segmente (und damit auch die Kegel) das Verhältnis $m:n$ haben sollen, hat er die folgenden 3 Gleichungen zu lösen:

$$\left.\begin{array}{r}(h-k):k=b:(2a-k),\\(h'-2a+k):(2a-k)=b:k,\\h:h'=m:n.\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(\mathrm{A}).$$

Es sei $m>n$, so daß $k>a$. Die Aufgabe ist dann, eine gegebene Strecke von der Länge $2a$ in zwei Teile k und $(2a-k)$ zu teilen, von denen k der größere ist, derart, daß die drei gegebenen Gleichungen zugleich erfüllt sind.

Denken wir uns zwei Koordinatenachsen, so daß der Anfangspunkt der Mittelpunkt der gegebenen Strecke ist, die y-Achse auf ihr senkrecht steht und x positiv ist, wenn es auf der Hälfte der gegebenen Strecke liegt, die den gesuchten Teilpunkt enthalten soll. Die von Diokles gezeichneten Kegelschnitte sind dann

(1) die Ellipse

$$(y+a-x)^2=\frac{n}{m}\left[(a+b)^2-x^2\right]$$

und (2) die gleichseitige Hyperbel

$$(x+a)(y+b)=2ab.$$

Ein Schnittpunkt der Kegelschnitte gibt einen Wert von x zwischen 0 und a und führt zu der gesuchten Lösung. Behandeln wir die Gleichungen algebraisch und eliminieren wir y mittels der zweiten Gleichung, die wir schreiben können

$$y=\frac{a-x}{a+x}\cdot b,$$

so erhalten wir aus der ersten

$$(a-x)^2\left(1+\frac{b}{a+x}\right)^2=\frac{n}{m}\left[(a+b)^2-x^2\right],$$

das ist

$$(a+x)^2(a+b-x)=\frac{m}{n}(a-x)^2(a+b+x)\quad\ldots(\mathrm{B}).$$

Mit anderen Worten, Diokles' Methode ist gleichwertig mit der Auflösung einer vollständigen kubischen Gleichung, die alle drei

Potenzen von x und ein konstantes Glied enthält, obwohl eine solche Gleichung nicht erwähnt wird.

Um die Richtigkeit des Ergebnisses zu verifizieren, haben wir uns nur zu erinnern, daß x der Abstand des Teilpunktes vom Mittelpunkte der gegebenen Strecke ist, und somit

$$k = a + x, \quad 2a - k = a - x.$$

Daher erhalten wir aus den ersten beiden der gegebenen Gleichungen (A)

$$h = a + x + \frac{a+x}{a-x} \cdot b,$$

$$h' = a - x + \frac{a-x}{a+x} \cdot b,$$

woraus wir mittels der dritten Gleichung ableiten

$$(a+x)^2 (a+b-x) = \frac{m}{n} (a-x)^2 (a+b+x),$$

und diese Gleichung ist dieselbe wie die oben durch Elimination gefundene (B).

Ich habe, bevor die Darstellung der griechischen Behandlungsweise der kubischen Gleichung abgeschlossen war, absichtlich jede Anspielung auf eine interessante Hypothese Zeuthens[1]) aufgeschoben, eine Hypothese, die, als bewiesen betrachtet, einige Schwierigkeiten zu heben geeignet wäre, die in Pappus' Bericht über die orthodoxe Klassifikation der Aufgaben und Örter liegen. Ich habe bereits die Stelle angeführt, wo Pappus die *ebenen* (ἐπίπεδα), *körperlichen* (στερεά) und *linearen* (γραμμικά) Aufgaben unterscheidet.[2]) Parallel zu dieser Einteilung der Aufgaben in drei Klassen oder Ordnungen ist die Unterscheidung zwischen drei Klassen von *Örtern.*[3]) Die erste Klasse besteht aus den *ebenen Örtern* (τόποι ἐπίπεδοι), das sind ausschließlich gerade Linien und Kreise, die zweite aus den *körperlichen Örtern* (τόποι στερεοί), das sind Kegelschnitte[4]), und die dritte aus *linearen Örtern* (τόποι γραμμικοί). Zugleich ist aus Pappus' Angaben klar zu ersehen,

[1]) *Die Lehre von den Kegelschnitten*, S. 226 ff.

[2]) S. 97.

[3]) Pappus VII. S. 652, 662.

[4]) Allerdings definiert Proclus (S. 394, ed. Friedlein) die „körperlichen Linien" weitergreifend als solche, die entstehen „durch Schnitt einer körperlichen Figur, wie die zylindrische Schraubenlinie und die konischen Kurven"; aber der Hinweis auf die zylindrische Schraubenlinie beruht wohl auf einem Irrtum.

daß man Aufgaben ursprünglich eben, körperlich oder linear nannte, wenn sie zu ihrer Lösung bezüglich die geometrischen Örter erforderten, welche die entsprechenden Namen trugen. Aber es finden sich in der Klassifikation der Aufgaben sowohl wie der Örter einige logische Mängel.

(1) Pappus spricht davon, daß es ein schwerer Fehler seitens der Geometer sei, eine ebene Aufgabe mit Hilfe von Kegelschnitten (d. h. „körperlichen Örtern") oder „linearen Kurven" und allgemein, eine Aufgabe „mit Hilfe einer fremden Art" (*ἐξ ἀνοικείου γένους*) zu lösen. Würde dieser Grundsatz streng angewandt, so gälte der Einwand sicher ebenso auch der Lösung einer „körperlichen" Aufgabe mittels einer „linearen" Kurve. Obwohl nun Pappus z. B. die Konchoide und Zissoide als „lineare" Kurven anführt, erhebt er doch keinen Einspruch gegen ihre Anwendung zur Lösung der Aufgabe der zwei mittleren Proportionalen, die eine „körperliche" Aufgabe ist.

(2) Die Anwendung der Bezeichnung „körperliche Örter" auf die drei Kegelschnitte bezieht sich einfach auf die *Definition* der Kurven als Schnitte einer körperlichen Figur, nämlich des Kegels, und zweifellos wurde der „ebene Ort" im Gegensatz zum „körperlichen Ort" so genannt. Das stimmt mit Pappus' Feststellung überein, daß „ebene" Aufgaben deshalb passend so genannt würden, weil die Linien, durch die sie gelöst werden, „ihren Ursprung in einer Ebene haben". Aber, wenn man das auch als genügende Unterscheidung ansehen kann, falls nur „ebene" und „körperliche" Örter in ihrer gegenseitigen Beziehung betrachtet werden, sie wird auf einmal logisch mangelhaft, wenn man noch die dritte oder „lineare" Klasse hinzubringt. Denn einerseits zeigt Pappus, wie die „Quadratrix" (eine „lineare" Kurve) durch eine Konstruktion in drei Dimensionen („durch Oberflächen-Örter", *διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις τόπων*) erzeugt werden kann; andererseits haben andere „lineare" Örter, die Konchoide und Zissoide, ihren Ursprung in einer Ebene. Wenn also Pappus' Bericht über den Ursprung der Ausdrücke „eben" und „körperlich" und ihre Anwendung auf Aufgaben und Örter genau zutrifft, so wird man annehmen müssen, daß der dritte Name der „linearen" Aufgaben und Örter erst zu einer Zeit geprägt worden ist, wo die Ausdrücke „ebene" und „körperliche" Örter so lange bekannt und angewandt waren, daß man ihren Ursprung vergessen hatte.

Um diese Schwierigkeiten fortzuschaffen, nimmt Zeuthen an, die Ausdrücke „eben" und „körperlich" seien anfänglich für *Aufgaben* geschaffen und *später* auf die geometrischen Örter übertragen worden, die zu ihrer Lösung dienten. Wenn man nun Aufgaben, die mittels der Geraden und des Kreises gelöst werden konnten, „eben“ nannte, so bezog sich der Ausdruck nach dieser Erklärung nicht auf irgendeine besondere Eigenschaft der geraden Linie oder des Kreises, sondern auf die Tatsache, daß die Aufgaben auf Gleichungen nicht höheren als zweiten Grades beruhten. Die Lösung einer quadratischen Gleichung erfolgte unter der geometrischen Form der Flächenanlegung, und der Name „eben“ ergab sich für diese Klasse von Aufgaben als natürliche Bezeichnung, sobald die Griechen sich einer neuen Klasse von Aufgaben gegenübergestellt sahen, auf die im Gegensatz zu den vorigen der Name „körperlich“ anzuwenden war. Das trat ein, wenn man die Operationen, mittels deren Aufgaben auf Flächenanlegungen reduziert wurden, auch auf Aufgaben anzuwenden versuchte, die auf der Lösung einer *kubischen* Gleichung beruhen. Zeuthen nimmt nun an, die Griechen hätten diese Gleichung in eine ähnliche Form zu bringen gesucht, wie sie die reduzierte „ebene“ Aufgabe annahm, nämlich in die Form einer einfachen Gleichung zwischen *Körpern*, entsprechend der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + Bx + \Gamma = 0;$$

die Ausdrücke „körperlich“ oder „eben“ seien dann angewandt worden, je nachdem sich die Aufgabe in der angedeuteten Weise auf das geometrische Äquivalent einer kubischen oder quadratischen Gleichung zurückführen ließ.

Zeuthen führt ferner aus, der Ausdruck „lineare Aufgabe“ sei später zur Bezeichnung solcher Fälle erfunden worden, die, gleichwertig mit algebraischen Gleichungen höheren als dritten Grades, keine Reduktion auf eine einfache Beziehung zwischen Längen, Flächen oder Rauminhalten zuließen, und entweder überhaupt auf keine Gleichung zurückgeführt oder als solche nur mittels zusammengesetzter Verhältnisse dargestellt werden konnten. Das Wort „linear“ ist vielleicht angewandt worden, weil man in solchen Fällen zu neuen Klassen von Kurven greifen mußte, direkt und ohne vermittelnden Schritt in Form einer Gleichung. Oder möglicherweise wurde der Ausdruck überhaupt erst zu einer Zeit gebraucht, als die ursprüngliche Entstehung der Namen „ebene“ und „körperliche“ Aufgaben vergessen war.

Schließt man sich diesen Annahmen an, so wäre noch zu erklären, wie Pappus dazu kommt, der Bezeichnung „körperliche Aufgabe“ eine weitere Bedeutung zu geben, die nach seinem Bericht auch solche Aufgaben umfaßt, die sich nicht auf kubische, sondern auf biquadratische Gleichungen zurückführen lassen, obwohl sie nach derselben Methode der Kegelschnitte gelöst werden, wie die mit kubischen Gleichungen äquivalenten. Das läßt sich durch die Annahme erklären, die kubische Gleichung sei zur Zeit des Apollonius in den Hintergrund geraten infolge der Aufmerksamkeit, die man der Methode der Lösung durch Kegelschnitte widmete, und der Entdeckung, daß letztere Methode eine weitere Anwendung zuließ; daher sei die Möglichkeit der Lösung durch Kegelschnitte als das entscheidende Merkmal der Aufgabenklasse angesehen worden, und der Name „körperliche Aufgabe" sei zu dem ihm von Pappus gegebenen Sinne durch ein natürliches Mißverständnis gekommen. Eine ähnliche Vermutung würde nach Zeuthens Ansicht einen Umstand erklären, der sonst sonderbar erscheinen müßte, nämlich, daß Apollonius den Ausdruck „körperliche Aufgabe" nicht gebraucht, obwohl man ihn in der Vorrede zum vierten Buche der *Kegelschnitte* erwarten sollte. Apollonius wird den Ausdruck vermieden haben, da dieser die engere ihm von Zeuthen beigelegte Bedeutung hatte und daher nicht für alle Aufgaben paßte, die Apollonius im Sinne hatte.

Man muß zugeben, daß Zeuthens Hypothese in mehreren Punkten anziehend ist. Ich kann mich jedoch nicht damit zufrieden geben, daß die dafür sprechende positive Evidenz imstande sein soll, die Autorität des Pappus zu überwiegen, wo seine Angaben mit der Hypothese unvereinbar sind. Um die Sachlage klar zu machen, haben wir uns zu erinnern, daß Menaechmus, der Entdecker der Kegelschnitte, ein Schüler des Eudoxus war, der um 365 v. Chr. blühte; wir können daher die Entdeckung der Kegelschnitte wohl um das Jahr 350 annehmen. Nun schrieb Aristaeus, „der Ältere", ein Buch über *körperliche Örter* (στερεοὶ τόποι), dessen Entstehung Cantor um das Jahr 320 festlegt. Daher müssen nach Zeuthens Annahme die „körperlichen Aufgaben", deren Lösung durch Kegelschnitte letzteren den Namen „körperliche Örter" verschaffte, solche gewesen sein, die schon vor 320 untersucht und als körperliche Aufgaben erkannt worden waren, während sozusagen die endgültige Bestimmung der neu entdeckten Kurven für den Dienst dieser Aufgabenklasse in dem kurzen Zeitraume zwischen ihrer Entdeckung und der Entstehung von Aristaeus' Werk erfolgt sein muß. Es ist somit wichtig zu erörtern, welche besonderen Aufgaben, die zu kubischen Gleichungen führen, wohl vor dem Jahre 320 Gegenstand des Nachdenkens waren. Wir haben sicher keinen Grund zu der Annahme, daß die von Archimedes benutzte kubische Gleichung (*Über Kugel und Zylinder* II. 4) eine von diesen Aufgaben war; denn die Aufgabe, eine Kugel in Segmente zu teilen, die in gegebenem Verhältnis zu einander stehen, konnte nicht von Geometern in Angriff genommen werden, denen es noch nicht gelungen war, den Rauminhalt der Kugel und des Kugelsegmentes zu finden, und wir wissen, daß Archimedes der erste war, der dies beides entdeckte. Andererseits stammt die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels oder die Lösung einer rein kubischen Gleichung aus sehr früher Zeit. Ebenso ist sicher, daß die Dreiteilung des Winkels die griechischen Geometer schon lange beschäftigt hatte. Pappus sagt, „die alten Geometer" hätten diese Aufgabe betrachtet und sie zuerst mittels ebener Betrachtungen (*διὰ τῶν ἐπιπέδων*) zu lösen versucht, obwohl sie von Natur eine körperliche Aufgabe war (*πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον*), aber sie seien nicht zum Ziel gekommen; und wir wissen, daß Hippias von Elis um das Jahr 420 v. Chr. eine transzendente Kurve fand, die einer doppelten Anwendung fähig war, für die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises.[1]) Für diese Kurve ergab sich der Name Quadratrix[2]), aber da Deinostratus, ein Bruder des Menaechmus, offenbar der erste ist, der die Kurve zur Quadratur des Kreises[3]) verwendet, so können wir ohne Zweifel schließen, daß sie ursprünglich für den Zweck der Dreiteilung des Winkels bestimmt war. Wenn wir also sehen, daß die griechischen Geometer vor der Entdeckung der Kegelschnitte ihre Hauptanstrengung auf die Lösung dieser Aufgabe verwandt hatten, so ist es leicht möglich, daß ihnen die Zurückführung auf das geometrische Äquivalent einer kubischen Gleichung gelungen war. Sie waren wohl imstande, diese Reduktion mittels der Figur zu der *νεῦσις* auszuführen, die oben, nur noch mit einigen Hilfslinien versehen, wiedergegeben ist. Der Beweis ist offenbar äquivalent mit der Elimination von x aus den beiden Gleichungen

---

[1]) Proclus (ed. Friedlein), S. 272.

[2]) Der Charakter der Kurve läßt sich folgendermaßen beschreiben. Es seien zwei rechtwinkelige Achsen Oy, Ox gegeben, und eine Strecke OP von einer gewissen Länge (a) drehe sich gleichförmig aus ihrer Anfangslage längs Oy in die Lage längs Ox, während eine Gerade, die immer parallel zu Ox bleibt und in ihrer ursprünglichen Lage durch P geht, sich auch gleichförmig bewegt und zu derselben Zeit nach Ox kommt wie der gedrehte Radius OP. Der Schnittpunkt dieser Linie mit OP beschreibt die Quadratrix, die wir daher durch die Gleichung

$$y : a = 2\vartheta : \pi$$

darstellen können.

[3]) Pappus IV. SS. 250—252.

$$\left.\begin{array}{r}xy = ab \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4(a^2+b^2)\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

worin $x = DF$, $y = FP = EC$, $a = DA$, $b = DB$.

Die zweite Gleichung ergibt

$$(x+a)(x-3a) = (y+b)(3b-y).$$

Aus der ersten Gleichung ist leicht zu sehen, daß

$$(x+a):(y+b) = a:y,$$

und $$(x-3a)y = a(b-3y);$$

wir haben daher

$$a^2(b-3y) = y^2(3b-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta),$$

[oder $$y^3 - 3by^2 - 3a^2y + a^2b = 0].$$

Wenn nun die Dreiteilung des Winkels auf das geometrische Äquivalent dieser kubischen Gleichung zurückgeführt war, so war es für die Griechen natürlich, sie als *körperliche Aufgabe* zu bezeichnen. Man mußte bemerken, daß sie in dieser Beziehung mit der einfacheren Aufgabe der Verdoppelung des Würfels oder dem Äquivalent der reinen kubischen Gleichung Ähnlichkeit hatte; und es war natürlich, nachzusehen, ob die gemischte kubische Gleichung sich durch Umformung von Rauminhalten auf die Form der reinen kubischen Gleichung bringen ließ, ebenso wie die Umformung von Flächen es ermöglichte, die gemischte quadratische Gleichung auf die reine quadratische zurückzuführen. Die Zurückführung auf die reine kubische Gleichung mußte sich nun bald als unmöglich herausstellen und der stereometrische Weg der Untersuchung als unfruchtbar erkannt und deshalb aufgegeben werden.

Die beiden Aufgaben der Verdoppelung des Würfels und der Dreiteilung des Winkels, die in dem einen Falle zu einer reinen, in dem anderen zu einer gemischten kubischen Gleichung führen, sind also die einzigen zu kubischen Gleichungen führenden Aufgaben, mit denen sich die Griechen bis zu der Zeit der Entdeckung der Kegelschnitte sicher beschäftigt haben. Menaechmus, der diese entdeckte, zeigte, daß sie mit Erfolg zur Auffindung der beiden mittleren Proportionalen und damit zur Lösung der reinen kubischen Gleichung verwandt werden konnten, und die nächste Frage ist die, ob es vor der Entstehung von Aristaeus' *Körperlichen Örtern* bewiesen war, daß die Dreiteilung des Winkels mittels derselben Kegelschnitte ausgeführt werden konnte entweder direkt in der Form der oben beschriebenen *νεῦσις* ohne die Reduktion auf eine kubische Gleichung oder in der Form der kubischen Hilfsgleichung (β). Nun war (1) die Lösung der kubischen Gleichung in den Tagen, da die Kegelschnitte noch etwas Neues waren, wohl noch etwas zu schwierig. Die Lösung der Gleichung (β) als solcher verlangt die Konstruktion der Kegelschnitte, die wir durch die Gleichungen

$$xy = a^2,$$
$$bx = 3a^2 + 3by - y^2$$

darstellen würden, und die Konstruktion wäre bestimmt schwieriger als die von Archimedes im Zusammenhang mit seiner kubischen Gleichung angewandte, die nur die Konstruktion der Kegelschnitte

$$x^2 = \frac{b^2}{a} y,$$
$$(a - x) y = ac$$

erfordert; daher können wir kaum annehmen, daß die Dreiteilung des Winkels in der Form der *kubischen Hilfsgleichung* vor dem Jahre 320 v. Chr. mit Hilfe von Kegelschnitten gelöst worden ist. (2) Der Winkel kann mit Hilfe von Kegelschnitten in drei gleiche Teile geteilt worden sein in dem Sinne, daß die angeführte *νεῦσις* durch Zeichnen der Kurven (α) ausgeführt wurde, d. h. einer gleichseitigen Hyperbel und eines Kreises. Das konnte leicht vor der Zeit des Aristaeus geschehen; aber wenn die Festsetzung des Namens „körperliche Örter" für Kegelschnitte ihre Anwendbarkeit auf die direkte Lösung der Aufgabe in dieser Art und Weise ohne jede Beziehung auf die kubische Gleichung im Auge hatte oder also einfach deshalb vorgenommen wurde, weil vorher mittels der Zurückführung auf diese kubische Gleichung der „körperliche" Charakter der Aufgabe bewiesen war, so liegt offenbar nicht der mindeste Grund vor, weshalb man die Quadratrix, die ja demselben Zwecke gedient hatte, nicht *gleichzeitig* auch als „körperlichen Ort" hätte ansehen sollen, und in diesem Falle hätte *Aristaeus* in seinem Werke den letzteren Ausdruck kaum auf Kegelschnitte allein angewendet. (3) Die einzige noch übrigbleibende Möglichkeit, die mit Zeuthens Ansicht über den Ursprung des Namens „körperliche Örter" übereinstimmt, scheint die zu sein, daß man annimmt, die Kegelschnitte seien einfach deshalb so genannt worden, weil sie ein Mittel lieferten, *eine* „körperliche Aufgabe", nämlich die Verdoppelung des Würfels, zu lösen, nicht aber eine Aufgabe von dem allgemeineren, der gemischten kubischen Gleichung entsprechenden Charakter; in diesem Falle könnte die Berechtigung des allgemeinen Namens „körperlicher Ort" nur auf Grund der Annahme zugegeben werden, daß er zu einer Zeit aufgekommen sei, als die Griechen noch hofften, es werde ihnen gelingen, die allgemeine kubische Gleichung auf die reine Form zurückzuführen. Mir scheint jedoch die traditionelle Erklärung des Ausdruckes natürlicher als diese. Die Kegelschnitte waren die ersten Kurven von allgemeinem Interesse, zu deren Konstruktion man zu räumlichen Figuren greifen mußte, abweichend von der gewöhnlichen Konstruktion ebener Figuren in einer Ebene[1]; daher ist der Gebrauch des Ausdruckes „körperlicher Ort“ für Kegelschnitt lediglich auf Grund seines körperlichen Ursprungs zunächst die natürliche Art, die neue Kurvenklasse zu charakterisieren, und der Ausdruck kann sehr wohl im Gebrauch geblieben sein, auch als man an den körperlichen Ursprung nicht mehr dachte, ebenso wie man fortfuhr, die einzelnen Arten der Kegelschnitte bezüglich als „Schnitte eines rechtwinkeligen, stumpfwinkeligen und spitzwinkeligen Kegels“ zu bezeichnen.

Während also, wie gesagt, die beiden erwähnten Aufgaben vor der Entdeckung „körperlicher Örter“ naturgemäß den Namen „körperliche Aufgaben“ gehabt haben *können*, glaube ich keinen hinreichenden Grund für die Ansicht wahrzunehmen, daß „körperliche Aufgabe“ damals oder später ein *technischer Ausdruck* für eine Aufgabe gewesen ist, die sich auf eine kubische Gleichung zurückführen läßt, was zugleich voraussetzen würde, daß das geometrische Äquivalent der allgemeinen kubischen Gleichung an und für sich, unabhängig von seinen Anwendungen, untersucht worden ist und daß es überhaupt in der griechischen Geometrie eine so bekannte Stellung einnahm, daß man eine Aufgabe als gelöst ansehen konnte, sobald sie auf eine kubische Gleichung zurückgeführt war. Wenn das so gewesen wäre und wenn der technische Ausdruck für eine solche kubische Gleichung „körperliche Aufgabe“ lautete, so kann ich nicht einsehen, weshalb Archimedes dann keinerlei Bezug darauf genommen hat, als er zu seiner kubischen Gleichung kam. Statt dessen läßt sich aus seinen Worten vielmehr entnehmen, daß er sie als *res integra* in Angriff genommen hat. Wäre wiederum die allgemeine kubische Gleichung eine Zeit lang als Aufgabe von selbständigem Interesse angesehen worden, die sich mittels der Schnittpunkte von Kegelschnitten lösen ließ, so hätte diese Tatsache Nikoteles kaum unbekannt

---

[1]) Allerdings benutzt Archytas' Lösung der Aufgabe von den zwei mittleren Proportionalen eine auf einem Zylinder liegende Kurve doppelter Krümmung; aber solche Kurven hat man vermutlich um ihrer selbst willen nicht untersucht, oder eben, genau ausgedrückt, nicht als *Örter* betrachtet; daher lassen sich aus dem körperlichen Ursprung dieser vereinzelten Kurve Einwände gegen die Verwendung des Namens „körperliche Örter“ für Kegelschnitte nicht ableiten.

sein können, der, wie in der Vorrede zum 4. Buche der *Kegelschnitte* des Apollonius erwähnt, mit Konon einen Streit hatte über die Untersuchungen, in denen letzterer die Höchstzahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte erörtert hatte. Nun berichtet Apollonius, Nikoteles habe behauptet, daß von Konons Entdeckungen für *διορισμοί* kein Gebrauch gemacht werden könne; aber es scheint unglaublich, daß Nikoteles etwas Derartiges selbst für polemische Zwecke ausgesprochen haben sollte, wenn die kubischen Gleichungen damals eine bekannte Klasse von Aufgaben gebildet hätten, für deren Diskussion die Schnittpunkte von Kegelschnitten doch entscheidende Bedeutung hätten haben müssen.

Ich meine deshalb, die positiv nachweisbaren Tatsachen berechtigen uns nicht, Zeuthens Schlüsse über die folgenden Grenzen hinaus anzuerkennen.

1. Es kann kaum stimmen, daß die Alten den Ausdruck „ebene Aufgabe“ (*ἐπίπεδον πρόβλημα*) in dem von Pappus erklärten Sinne gebraucht haben. Denn Pappus sagt, „Aufgaben, die mittels der geraden Linie und des Kreises gelöst werden können, *nennt man wohl mit Recht* eben (*λέγοιτ᾽ ἂν εἰκότως ἐπίπεδα*); denn die Linien, durch die solche Aufgaben gelöst werden, haben ihren Ursprung in der Ebene“. Die Worte „nennt man wohl mit Recht“ deuten an, daß Pappus, soweit ebene Aufgaben in Betracht kommen, nicht ihre alte Definition gibt, sondern seine eigene Vermutung, weshalb man sie wohl „eben“ nennt. Die wahre Bedeutung des Ausdrucks ist, wie Zeuthen sagt, zweifellos nicht, daß gerade Linien und Kreise ihren Ursprung in der Ebene haben (was ebenso auch für andere Kurven gelten würde), sondern daß die fraglichen Aufgaben sich lösen ließen nach den gewöhnlichen ebenen Methoden der Umformung von Flächen, der Behandlung einfacher Gleichungen zwischen Flächen und im besonderen der Flächenanlegung. Mit anderen Worten, ebene Aufgaben waren solche, die, algebraisch ausgedrückt, auf Gleichungen nicht höheren als zweiten Grades beruhen.

2. Ging man zu weiteren Aufgaben über, die außerhalb des Bereichs der ebenen Methoden lagen, so mochte man finden, daß einzelne von diesen Aufgaben, insbesondere die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung des Winkels, auf einfache Gleichungen zwischen *Rauminhalten*, statt zwischen Flächen reduzierbar waren; und es ist wohl möglich, daß die Griechen nach Analogie des natürlichen Unterschiedes zwischen ebenen und räumlichen Figuren (eine Analogie, der auch die von Euklid ausdrücklich aufgestellte Unterscheidung zwischen „ebenen“ und „körperlichen“ *Zahlen* folgt)

den Ausdruck „körperliche Aufgabe“ auf eine solche Aufgabe anwandten, die sie auf eine Gleichung zwischen Rauminhalten zurückführen konnten, zum Unterschiede von der „ebenen Aufgabe“, die auf eine einfache Gleichung zwischen Flächen reduzierbar war.

3. Die erste „körperliche Aufgabe“ in diesem Sinne, deren Lösung ihnen gelang, war die Multiplikation des Würfels, entsprechend der Lösung einer reinen kubischen Gleichung in der Algebra, und es ergab sich, daß sie mit Hilfe von Kurven ausgeführt werden konnte, die man durch Schneiden eines Körpers, nämlich des Kegels, mit gewissen Ebenen erhielt. So fand man, daß Kurven körperlichen Ursprungs zur Lösung einer besonderen körperlichen Aufgabe geeignet waren, und dieses Ergebnis konnte nur angemessen erscheinen; und so fand man für den Kegelschnitt, die einfachste Kurve, die in dieser Weise mit einer körperlichen Aufgabe zusammenhängt, den Namen „körperlicher Ort“ passend, sei es, wegen seiner Anwendung, oder (wahrscheinlicher) wegen seines Ursprungs.

4. Weitere Untersuchungen ergaben, daß die allgemeine kubische Gleichung mittels stereometrischer Methoden nicht auf die einfachere Form der reinen kubischen Gleichung zurückgeführt werden konnte; man mußte daher die Methode der Kegelschnitte versuchsweise direkt entweder (1) auf die abgeleitete kubische Gleichung oder (2) auf die ihr zugrunde liegende ursprüngliche Aufgabe anwenden. In der Praxis, z. B. in dem Falle der Dreiteilung des Winkels, ergab sich, daß die kubische Gleichung in dieser Weise oft schwieriger zu lösen war als die ursprüngliche Aufgabe. Deshalb ließ man die Reduktion auf eine kubische Gleichung als unnötige Komplikation fallen, und das geometrische Äquivalent der kubischen Gleichung, als selbständige Aufgabe aufgefaßt, gewann keinerlei dauernde Stellung als „körperliche Aufgabe“ *par excellence.*

5. Es ergab sich weiter, daß die Lösbarkeit durch Kegelschnitte als Merkmal einer gewissen Aufgabenklasse angesehen wurde, und da sich für die Kegelschnitte der alte Name „körperliche Örter“ erhalten hatte, kam der Ausdruck „körperliche Aufgabe“ in dem weiteren Sinne zur Anwendung, in dem Pappus ihn erklärt, so nämlich, daß Aufgaben, die auf biquadratische Gleichungen führen, ebensowohl eingeschlossen werden, wie solche, die sich auf kubische reduzieren lassen.

6. Die Ausdrücke „lineare Aufgabe“ und „linearer Ort“ wurden dann nach Pappus analog zu den anderen Ausdrücken geprägt, um eine Aufgabe zu bezeichnen, die durch gerade Linien, Kreise oder Kegelschnitte nicht gelöst werden konnte, bzw. eine Kurve, die zur Lösung einer solchen Aufgabe benutzt werden konnte.

Kapitel VII.

Antizipationen der Integralrechnung bei Archimedes.

Obwohl die bei Euklid XII. 2 benutzte *Exhaustionsmethode* die griechischen Geometer in Wirklichkeit dicht bis an das unendlich Große und das unendlich Kleine herangebracht hat, haben sie sich doch, wie schon oft hervorgehoben worden ist, niemals gestattet, von derartigen Begriffen Gebrauch zu machen. Allerdings hatte Antiphon[1]), ein Sophist, der mit Sokrates öfter Streitigkeiten gehabt haben soll, behauptet, wenn man in einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck, etwa ein Quadrat, einzeichnete, dann ein Achteck, indem man in den vier Segmenten gleichschenkelige Dreiecke konstruierte, dann gleichschenkelige Dreiecke in die übrigbleibenden acht Segmente einzeichnete usw. „bis dadurch die Kreisfläche völlig erschöpft würde, daß auf solche Art dem Kreise ein Vieleck werde eingeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreisumfange zusammenfallen würden“. Dagegen bemerkt jedoch Simplicius und zieht auch Eudemus zur Unterstützung seiner Ansicht heran, das eingeschriebene Vieleck werde niemals mit dem Kreisumfange zusammenfallen, selbst wenn man die Teilung der Fläche bis ins Unendliche treibe, und die Annahme, daß dies doch der Fall sei, würde die Aufhebung des geometrischen Grundsatzes bedeuten, daß die Größen *ad infinitum* teilbar sind.[2]) In der Tat war die Zeit für Antiphons Anschauung noch nicht reif, und vielleicht war es das Ergebnis der dialektischen Streitigkeiten, zu denen die Vorstellung des Unendlichen Anlaß gab, daß die griechischen Geometer sich vor dem Gebrauch solcher Ausdrücke wie unendlich groß und unendlich klein hüteten und dafür die Idee von Dingen substituierten, die *größer* oder *kleiner als irgend eine festgesetzte Größe* sind. Daher sagten sie nie, wie es Hankel ausdrückt[3]), der Kreis *ist* ein Vieleck mit unendlich vielen unendlich

---

[1]) Bretschneider, S. 101.

[2]) Bretschneider, S. 102.

[3]) Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, S. 123.

kleinen Seiten; sie sind immer vor dem Abgrunde des Unendlichen stehen geblieben und haben niemals die Grenze der klaren Anschauung überschritten. Sie sprechen nie von einer unendlich nahen Annäherung oder von dem Grenzwerte der Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern. Und doch müssen sie praktisch zu einer solchen Vorstellung gekommen sein, z. B. müssen sie in dem Falle des Satzes, daß Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, zu der ersten Vermutung der Richtigkeit des Satzes durch die Vorstellung gelangt sein, daß der Kreis als Grenze eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks mit unendlich großer Zahl entsprechend kleiner Seiten angesehen werden könne. Sie begnügten sich jedoch mit einem solchen Schlusse nicht; sie suchten nach einem unwiderleglichen Beweise, und dieser konnte der Natur der Sache nach nur indirekt sein. Demnach finden wir überall in den Beweisen nach der Exhaustionsmethode den Nachweis, daß in jeder Annahme, die von der in dem Satze behaupteten abweicht, eine Unmöglichkeit liegt. Ja, diese stringente Verifikation mittels einer doppelten *reductio ad absurdum* wird in jedem einzelnen Falle der Anwendung der Exhaustionsmethode wiederholt; es wird nirgends versucht, an Stelle dieses Teiles des Beweises irgendwelche allgemeinen Sätze aufzustellen, auf die man sich einfach in jedem Einzelfalle hätte beziehen können.

Die obigen allgemeinen Merkmale des griechischen Exhaustionsverfahrens treten auch bei den Erweiterungen der Methode auf, die sich bei Archimedes finden. Um das zu erläutern, wird es sich empfehlen, bevor wir zu den Fällen übergehen, wo er wirkliche *Integrationen* ausführt, seinen geometrischen Beweis des Satzes zu erwähnen, daß die Fläche des Parabelsegments vier Drittel des Dreiecks mit derselben Grundlinie und Spitze beträgt. Hier *erschöpft* Archimedes die Parabel, indem er fortgesetzt in jedem übrigbleibenden Segment ein Dreieck zeichnet, das dieselbe Grundlinie und Spitze (denselben Scheitel) wie das Segment hat. Ist A die Fläche des so in das ursprüngliche Segment eingeschriebenen Dreiecks, so gibt das Verfahren eine Reihe von Flächen

$$A, \quad \tfrac{1}{4}A, \quad (\tfrac{1}{4})^2 A, \ldots$$

und die Fläche des Segments ist in Wirklichkeit die Summe der unendlichen Reihe

$$A\,[1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + \ldots].$$

Aber Archimedes drückt es nicht in dieser Weise aus. Er beweist zuerst, wenn $A_1, A_2, \ldots A_n$ eine beliebige Anzahl von

Gliedern einer solchen Reihe ist, so daß $A_1 = 4A_2$, $A_2 = 4A_3, \ldots$ dann ist

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \tfrac{1}{3}A_n = \tfrac{4}{3}A_1,$$

oder
$$A\,[1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{4})^{n-1} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1}] = \tfrac{4}{3}A.$$

Nach diesem Ergebnisse würden wir heutzutage n unendlich groß werden lassen und schließen, daß zugleich $(\frac{1}{4})^{n-1}$ unendlich klein wird und daß der Grenzwert der Summe auf der linken Seite die Fläche des Parabelsegments ist, die deshalb gleich $\frac{4}{3}A$ sein muß. Archimedes sagt nichts davon, daß er das Ergebnis auf diese Weise erschlossen habe; er *behauptet* nur, die Fläche des Segments sei gleich $\frac{4}{3}A$ und verifiziert es dogmatisch, indem er beweist, daß sie nicht größer oder kleiner als $\frac{4}{3}A$ sein kann.

Ich gehe nunmehr zu den Archimedischen Erweiterungen der Exhaustionsmethode über, die den eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels bilden. Man wird an allen den wesentlichen Zug bemerken, daß Archimedes eine eingeschriebene und eine umgeschriebene Figur zu der Kurve oder Fläche in Beziehung setzt, deren Flächen- oder Rauminhalt er ermitteln will, und dann gleichsam beide Figuren in eine *zusammendrückt*, so daß sie miteinander und mit der zu messenden krummen Figur zusammenfallen; aber es ist wiederum zu beachten, daß er seine Methode nicht in dieser Weise auseinandersetzt, oder etwa irgendwo sagt, die gegebene Kurve oder Fläche sei die Grenzform der umgeschriebenen oder eingeschriebenen Figur. Ich bespreche die Fälle in der Reihenfolge, in der sie im Texte dieses Buches vorkommen.

1. *Oberfläche der Kugel und des Kugelsegments.*

Zunächst wird bewiesen (*Über Kugel und Zylinder* I. 21, 22): wenn man in einen Kreis oder ein Kreissegment ein Vieleck einbeschreibt, dessen Seiten AB, BC, $CD \ldots$ sämtlich untereinander gleich sind, wie es die betreffenden Figuren veranschaulichen, dann gilt

(a) für den Kreis

$$(BB' + CC' + \ldots) : AA' = A'B : BA,$$

(b) für das Segment

$$(BB' + CC' + \ldots + KK' + LM) : AM = A'B : BA.$$

Darauf wird bewiesen, wenn man die Vielecke um den Durchmesser AA' dreht, so ist die bei einer vollständigen Umdrehung durch die gleichen Seiten des Polygons beschriebene Oberfläche [I. 24, 35]

(a) gleich dem Kreise mit dem Radius $\sqrt{AB(BB' + CC' + \ldots + YY')}$

oder

(b) gleich dem Kreise mit dem Radius $\sqrt{AB(BB' + CC' + \ldots + LM)}$.

Mittels der obigen Proportionen erkennt man also, daß die von den gleichen Seiten beschriebenen Oberflächen gleich sind

(a) dem Kreise mit dem Radius $\sqrt{AA' \cdot A'B}$

und (b) dem Kreise mit dem Radius $\sqrt{AM \cdot A'B}$;

sie sind daher bezüglich [I. 25, 37] *kleiner als*

(a) der Kreis mit dem Radius AA',

(b) der Kreis mit dem Radius AL.

Archimedes nimmt dann Vielecke, die dem Kreise oder Kreissegmente (das in diesem Falle kleiner als der Halbkreis gedacht wird) umgeschrieben sind, so daß ihre Seiten zu denen der vorhin erwähnten eingeschriebenen Vielecke parallel sind (vgl. die Figuren auf SS. 185, 196); und er beweist durch ein ähnliches Verfahren [I. 30, 40], wenn die Vielecke wie vorher um den Durchmesser gedreht werden, so sind die durch die gleichen Seiten während einer vollständigen Umdrehung beschriebenen Oberflächen bezüglich *größer als* dieselben Kreise.

Nachdem Archimedes diese Ergebnisse für die ein- und umgeschriebenen Figuren bewiesen hat, schließt und beweist er endlich [I. 33, 42, 43], daß die Oberfläche der Kugel oder des Kugelsegments dem ersten oder zweiten der Kreise bezüglich *gleich* ist.

Um die Wirkung der aufeinanderfolgenden Schritte zu erkennen, wollen wir die einzelnen Ergebnisse trigonometrisch ausdrücken. Nehmen wir in den Figuren auf den Seiten 181, 193 bezüglich an, daß $4n$ die Zahl der Seiten des in den Kreis eingeschriebenen Vielecks sei und $2n$ die Zahl der gleichen Seiten des in das Segment eingeschriebenen Vielecks, während in letzterem Falle der Winkel AOL mit α bezeichnet werde, dann bedeuten die obigen Proportionen bezüglich dasselbe wie die Formeln[1])

$$\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \sin(2n-1)\frac{\pi}{2n} = \cot\frac{\pi}{4n},$$

und
$$\frac{2\left[\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \ldots + \sin(n-1)\frac{\alpha}{n}\right] + \sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2n}.$$

Somit geben die beiden Proportionen tatsächlich eine Summierung der Reihe
$$\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \ldots + \sin(n-1)\vartheta,$$

[1]) Diese Formeln sind mit einer kleinen Änderung aus Loria, *Il periodo aureo della geometria greca,* S. 108 entnommen.

wo im allgemeinen $n\vartheta$ gleich irgend einem Winkel α ist $(\alpha < \pi)$, und in dem besonderen Falle, wo n gerade und $\vartheta = \pi/n$ ist.

Die Flächen der Kreise, die den durch Umdrehung der gleichen Seiten der *eingeschriebenen* Polygone erzeugten Oberflächen gleich sind, ergeben sich dann (wenn a der Radius des größten Kreises der Kugel ist) bezüglich zu

$$4\pi a^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \sin(2n-1)\frac{\pi}{2n}\right]$$

oder $\quad 4\pi a^2 \cos\frac{\pi}{4n} \quad$ und

$$\pi a^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2n}\left\{2\left[\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \ldots + \sin(n-1)\frac{\alpha}{n}\right] + \sin\alpha\right\}$$

oder $$\pi a^2 \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2n}(1-\cos\alpha).$$

Die Flächen der Kreise, die den von den gleichen Seiten der *umgeschriebenen* Polygone beschriebenen Oberflächen gleich sind, erhält man aus den Flächen der eben angegebenen Kreise, indem man sie durch $\cos^2(\pi/4n)$ bzw. $\cos^2(\alpha/2n)$ dividiert.

Die von Archimedes erhaltenen Ergebnisse sind demnach dieselben, die man erhalten würde, wenn man die Grenzwerte der obigen trigonometrischen Ausdrücke für unendlich großes n nähme, wo also $\cos(\pi/4n)$ und $\cos(\alpha/2n)$ beide der Einheit gleich sind.

Die ersten Ausdrücke für die Flächen der Kreise (für unendlich großes n) sind aber genau diejenigen, die wir durch die Integrale

$$4\pi a^2 \cdot \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \quad \text{oder} \quad 4\pi a^2$$

und

$$\pi a^2 \cdot \int_0^{\alpha} 2\sin\vartheta\, d\vartheta \quad \text{oder} \quad 2\pi a^2(1-\cos\alpha)$$

darstellen würden.

Somit ist Archimedes' Verfahren in beiden Fällen mit einer wirklichen Integration gleichbedeutend.

2. *Volumen der Kugel und des Kugelsektors.*

Die Methode braucht hier nicht besonders auseinandergesetzt zu werden, da sie unmittelbar auf dem vorigen Falle beruht. Die Untersuchung entspricht genau der für die Oberfläche der Kugel oder des Kugelsegments. Dieselben ein- und umgeschriebenen Figuren werden benutzt und der Kugelsektor wird natürlich mit dem räumlichen Gebilde verglichen, das aus der dem Segment ein- oder umgeschriebenen Figur besteht, und aus dem Kegel, der dieselbe Grundfläche wie diese Figur hat, und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Es wird dann bewiesen (1) für die der Kugel ein- oder umgeschriebene Figur, daß ihr Volumen dem eines Kegels gleich ist, dessen Grundfläche der Oberfläche der Figur und dessen Höhe dem Lote vom Kugelmittelpunkte auf irgendeine der gleichen Seiten des rotierenden Vielecks gleich ist, (2) für die dem Sektor ein- oder umgeschriebene Figur, daß ihr Volumen dem eines Kegels gleich ist, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Teiles der Figur ist, der dem in dem Sektor enthaltenen *Segmente* der Kugel ein- oder umgeschrieben ist, und dessen Höhe das vom Mittelpunkte auf irgend eine der gleichen Polygonseiten gefällte Lot ist.

Wenn dann die ein- und umgeschriebenen Figuren gleichsam in eine zusammengedrückt werden, so ist der Übergang zur Grenze in diesem Falle so gut wie derselbe bei den Oberflächen, und die resultierenden Rauminhalte sind einfach die vorher genannten Oberflächen, in beiden Fällen mit $\frac{1}{3}a$ multipliziert.

3. *Fläche der Ellipse.*

Auch dieser Fall gehört nicht eigentlich hierher, da er keine von den Eigentümlichkeiten der Archimedischen Erweiterungen der Exhaustionsmethode darbietet. Diese Methode wird tatsächlich, *mutatis mutandis*, genau so angewendet, wie bei Euklid XII. 2. Wir haben keine gleichzeitige Anwendung ein- und umgeschriebener Figuren, sondern nur die einfache Exhaustion der Ellipse und des Hilfskreises mittels beliebig wachsender Seitenzahl der Vielecke, die beiden eingeschrieben sind (*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 4).

4. *Volumen eines Segments des Rotationsparaboloids.*

Archimedes stellt zunächst ein gelegentlich in einem Satze aus einer anderen Abhandlung (*Über Spiralen*, Satz 11) gefundenes Ergebnis als Hilfssatz auf, nämlich: wenn man n Glieder einer arithmetischen Reihe hat, h, $2h$, $3h$, . . ., dann gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{rl} & h + 2h + 3h + \ldots + nh > \frac{1}{2}n^2 h \\ \text{und} & h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h < \frac{1}{2}n^2 h \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (\alpha).$$

Darauf schreibt er dem Paraboloidsegment Figuren ein und um, die aus kleinen Zylindern bestehen (wie aus der Figur zu den Sätzen 21, 22 *Über Konoide und Sphäroide* zu ersehen ist), deren Achsen längs der Segmentachse liegen und untereinander gleich sind. Ist c die Länge der Achse AD des Segments, und besteht die umgeschriebene Figur aus n Zylindern, deren Achsen alle die Länge h haben, so daß $c = nh$, so beweist Archimedes

$$(1) \qquad \frac{\text{Zylinder } CE}{\text{eingeschr. Figur}} = \frac{n^2 h}{h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h}$$

$$> 2, \text{ nach dem Hilfssatze,}$$

und

$$(2) \qquad \frac{\text{Zylinder } CE}{\text{umgeschr. Figur}} = \frac{n^2 h}{h + 2h + 3h + \ldots + nh}$$

$$< 2.$$

Vorher ist bewiesen worden [Sätze 19, 20]: läßt man n genügend wachsen, so kann der Unterschied der ein- und umgeschriebenen Figur kleiner als jedes angebbare Volumen gemacht werden. Demnach wird durch das gewöhnliche strenge Verfahren geschlossen und bewiesen, daß

$$(\text{Zylinder } CE) = 2\,(\text{Segment}),$$

so daß

$$(\text{Segment } ABC) = \tfrac{3}{2}(\text{Kegel } ABC).$$

Der Beweis ist also äquivalent mit der Aufstellung der folgenden Formel unter der Voraussetzung, daß h unendlich klein, n unendlich groß ist, während nh den Wert c behält,

Grenzwert von $h[h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h] = \frac{1}{2}c^2$;

das ist in unserer Bezeichnungsweise

$$\int_0^c x\,dx = \tfrac{1}{2}c^2.$$

Somit ist die Methode im wesentlichen dieselbe wie unsere, wenn wir das Volumen des Paraboloidsegments in der Form

$$\varkappa \int_0^c y^2\,dx$$

ausdrücken, wo $\varkappa$ eine Konstante ist, die in Archimedes' Ergebnis aus dem Grunde nicht auftritt, weil er nicht den wirklichen Inhalt des Paraboloidsegments angibt, sondern nur sein Verhältnis zum umgeschriebenen Zylinder.

5. *Volumen eines Segments des Rotationshyperboloids.*

In diesem Falle wird zuerst bewiesen [*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 2], wenn eine Reihe von n Gliedern vorliegt,

$$ah + h^2, \quad a \cdot 2h + (2h)^2, \quad a \cdot 3h + (3h)^2, \ldots\, a \cdot nh + (nh)^2,$$

und wenn

$$(ah + h^2) + [a \cdot 2h + (2h)^2] + \ldots + [a \cdot nh + (nh)^2] = S_n,$$

dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} n\,[a\cdot n\,h+(n\,h)^2]\,/\,S_n<(a+n\,h)\Big/\left(\frac{a}{2}+\frac{n\,h}{3}\right) \\ \text{und}\quad n\,[a\cdot n\,h+(n\,h)^2]\,/\,S_{n-1}>(a+n\,h)\Big/\left(\frac{a}{2}+\frac{n\,h}{3}\right) \end{array}\right\}\quad \ldots\ (\beta).$$

Sodann [Sätze 25, 26] konstruiert Archimedes ein- und umgeschriebene Figuren, die wie vorher aus Zylindern zusammengesetzt sind (Figur auf S. 271), und beweist, wenn AD in n gleiche Teile von der Länge h geteilt wird, so daß $n\,h=AD$, und wenn $AA'=a$, daß dann

$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{eingeschr. Figur}}=\frac{n\,[a\cdot n\,h+(n\,h)^2]}{S_{n-1}}$$

$$>(a+n\,h)\Big/\left(\frac{a}{2}+\frac{n\,h}{3}\right),$$

und

$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{umgeschr. Figur}}=\frac{n\,[a\cdot n\,h+(n\,h)^2]}{S_n}$$

$$<(a+n\,h)\Big/\left(\frac{a}{2}+\frac{n\,h}{3}\right).$$

Wie vorher gelangt er zu dem Schlusse

$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{Segment } ABB'}=\frac{a+n\,h}{\frac{a}{2}+\frac{n\,h}{3}}.$$

Das drückt dasselbe aus wie die folgende Formel, wenn $n\,h=b$ und h unendlich klein wird und n ins Unendliche wächst,

$$\text{Grenzwert von } n\,(a\,b+b^2)\,/\,S_n=(a+b)\Big/\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right),$$

oder

$$\text{Grenzwert von } \frac{b}{n}\,S_n=b^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right).$$

Nun ist

$$S_n=a\,(h+2\,h+\ldots+n\,h)+[h^2+(2\,h)^2+\ldots+(n\,h)^2],$$

so daß

$$h\,S_n=a\,h\,(h+2\,h+\ldots+n\,h)+h\,[h^2+(2\,h)^2+\ldots+(n\,h)^2].$$

Den Grenzwert des letzten Ausdruckes würden wir schreiben

$$\int_0^b (a\,x+x^2)\,d\,x,$$

was gleich

$$b^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)$$

ist; Archimedes hat somit das Äquivalent dieser Integration angegeben.

6. *Volumen eines Sphäroidsegments.*

Archimedes gibt hier nicht das Äquivalent der Integration

$$\int_0^b (a x - x^2)\, d x,$$

wahrscheinlich, weil diese bei seiner Methode noch einen anderen Hilfssatz verlangt hätte, entsprechend dem, durch den er die obigen Beziehungen (β) festgestellt hat. Es sei in dem Falle des Segments, das kleiner als das halbe Sphäroid ist (Figur auf S. 275), $AA' = a$, $CD = \frac{1}{2} c$, $AD = b$; AD werde in n gleiche Teile von der Länge h geteilt.

Die in den Sätzen 29, 30 erwähnten Gnomone sind dann die Differenzen zwischen dem Rechteck $c b + b^2$ und den aufeinanderfolgenden Rechtecken

$$c h + h^2, \quad c \cdot 2 h + (2 h)^2, \quad \ldots c \cdot (n - 1) h + [(n - 1) h]^2,$$

und in diesem Falle haben wir die folgenden Schlüsse (wenn S_n die Summe der ersten n Glieder der aus den letzten Rechtecken gebildeten Reihe ist):

$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{eingeschr. Figur}} = \frac{n(c b + b^2)}{n(c b + b^2) - S_n}$$
$$> (c + b) \Big/ \left(\frac{c}{2} + \frac{2 b}{3}\right),$$

und
$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{umgeschr. Figur}} = \frac{n(c b + b^2)}{n(c b + b^2) - S_{n-1}}$$
$$< (c + b) \Big/ \left(\frac{c}{2} + \frac{2 b}{3}\right),$$

und endlich wird bewiesen, daß

$$\frac{\text{Zylinder } EB'}{\text{Segment } ABB'} = \frac{c + b}{\frac{c}{2} + \frac{2 b}{3}}.$$

Archimedes benutzt somit den Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{n(c b + b^2) - S_n}{n(c b + b^2)} \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{S_n}{n(c b + b^2)},$$

und die ausgeführte Integration ist dieselbe wie oben im Falle des Hyperboloids, mit c statt a.

Archimedes erörtert als besonderen Fall das Volumen des halben Sphäroids [Sätze 27, 28]. Er unterscheidet sich von dem soeben genannten dadurch, daß c verschwindet und $b = \frac{1}{2} a$, so daß der Grenzwert von

$$\frac{h^2 + (2 h)^2 + (3 h)^2 + \ldots + (n h)^2}{n (n h)^2}$$

zu finden ist; und das geschieht mit Hilfe eines Zusatzes zu dem auf SS. 245—247 gegebenen Hilfssatze [*Über Spiralen*, Satz 10], worin bewiesen wird, daß

$$h^2 + (2\,h)^2 + \ldots + (n\,h)^2 > \tfrac{1}{3} n\,(n\,h)^2$$

und
$$h^2 + (2\,h)^2 + \ldots + [(n-1)\,h]^2 < \tfrac{1}{3} n\,(n\,h)^2.$$

Der Grenzwert entspricht offenbar dem Integral

$$\int_0^b x^2\,d\,x = \tfrac{1}{3} b^3.$$

7. *Fläche einer Spirale.*

(1) Archimedes findet die von der ersten vollständigen Windung der Spirale und der Anfangslinie begrenzte Fläche mittels des eben genannten Satzes, nämlich

$$h^2 + (2\,h)^2 + \ldots + (n\,h)^2 > \tfrac{1}{3} n\,(n\,h)^2,$$
$$h^2 + (2\,h)^2 + \ldots + [(n-1)]^2 < \tfrac{1}{3} n\,(n\,h)^2.$$

Er beweist [Sätze 21, 22, 23], daß eine aus ähnlichen Kreissektoren bestehende Figur jedem Spiralenbogen umgeschrieben werden kann, so daß die Fläche der umgeschriebenen Figur die der Spirale um weniger als irgend eine angegebene Fläche übertrifft, und auch, daß eine Figur derselben Art eingeschrieben werden kann, so daß die Fläche der Spirale die der eingeschriebenen Figur um weniger als jede angegebene Fläche übertrifft. Dann schreibt er schließlich Figuren dieser Art um und ein [Satz 24]; so sind z. B. in der umgeschriebenen Figur, wenn n ähnliche Sektoren vorhanden sind, die Radien n Strecken, die eine arithmetische Reihe bilden, etwa h, $2\,h$, $3\,h$, $\ldots n\,h$, und $n\,h$ ist gleich a, wo a die auf der Anfangslinie durch die Spirale am Ende der ersten Windung abgeschnittene Strecke ist. Da sich nun ähnliche Sektoren wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, und der $n$mal genommene Sektor vom Radius $n\,h$ oder a gleich dem Kreise mit demselben Radius ist, so sagt die erste der obigen Formeln aus, daß

$$(\text{umgeschriebene Figur}) > \tfrac{1}{3} \pi\,a^2.$$

Ein ähnliches Verfahren für die eingeschriebene Figur führt durch Anwendung der zweiten Formel zu dem Ergebnis, daß

$$(\text{eingeschriebene Figur}) < \tfrac{1}{3} \pi\,a^2.$$

In der üblichen Weise wird der Schluß gezogen, daß

$$(\text{Fläche der Spirale}) = \tfrac{1}{3} \pi\,a^2;$$

und der Beweis bedeutet die Ermittelung des Grenzwertes von

$$\frac{\pi}{n}\left\{h^2 + (2\,h)^2 + \ldots + [(n-1)\,h]^2\right\}$$

oder von $\quad \frac{\pi h}{a}\left\{h^2 + (2h)^2 + \ldots + [(n-1)h]^2\right\}$,

welch' letzteren wir ausdrücken würden durch

$$\frac{\pi}{a}\int_0^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\pi a^2.$$

[Offenbar ergibt dieses Beweisverfahren ebenso auch die Fläche, die von der Spirale und irgend einem Radiusvektor begrenzt wird, dessen Länge b nicht größer als a ist; denn wir haben nur $\pi b/a$ für π einzusetzen und zu beachten, daß in diesem Falle $nh = b$. Wir erhalten somit für die Fläche

$$\frac{\pi}{a}\int_0^b x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\pi b^3/a.]$$

(2) Um die Fläche zu finden, die durch einen Bogen an einer beliebigen Stelle der Spirale (der jedoch nicht größer als eine vollständige Windung ist) begrenzt wird und durch die Radien Vektoren an seinen Enden von den Längen b und c, wo $c > b$, benutzt Archimedes den folgenden Satz: hat man eine arithmetische Reihe, bestehend aus den Gliedern

$$b,\quad b+h,\quad b+2h,\quad \ldots\quad b+(n-1)h,$$

und ist $S_n = b^2 + (b+h)^2 + (b+2h)^2 + \ldots + [(b+(n-1)h]^2$,

so gilt $\quad \dfrac{(n-1)[b+(n-1)h]^2}{S_n - b^2} < \dfrac{[b+(n-1)h]^2}{[b+(n-1)h]b + \frac{1}{3}[(n-1)h]^2}$

und $\quad \dfrac{(n-1)[b+(n-1)h]^2}{S_{n-1}} > \dfrac{[b+(n-1)h]^2}{[b+(n-1)h]b + \frac{1}{3}[(n-1)h]^2}$.

[*Über Spiralen*, Satz 11 und Anmerkung.]

Dann konstruiert er in Satz 26 um- und eingeschriebene Figuren, die aus ähnlichen Kreissektoren bestehen, wie vorher. In jeder Figur kommen $(n-1)$ Sektoren vor und daher zusammen n Radien, darunter b und c, so daß wir sie als Glieder der obigen arithmetischen Reihe ansehen können, wo $[b+(n-1)h] = c$. So wird mittels der obigen Ungleichheiten bewiesen, daß

$$\frac{\text{Sektor } OB'C}{\text{umgeschr. Fig.}} < \frac{[b+(n-1)h]^2}{[b+(n-1)h]b + \frac{1}{3}[(n-1)h]^2} < \frac{\text{Sektor } OB'C}{\text{eingeschr. Fig.}};$$

und nach der gewöhnlichen Methode wird geschlossen, daß

$$\frac{\text{Sektor } OB'C}{\text{Spirale } OBC} = \frac{[b+(n-1)h]^2}{[b+(n-1)h]b + \frac{1}{3}[(n-1)h]^2} = \frac{c^2}{cb + \frac{1}{3}(c-b)^2}.$$

Erinnern wir uns, daß $(n-1)=(c-b)/h$, so sehen wir, der Beweis ist identisch mit der Ableitung der folgenden Grenzformel, wenn n unendlich groß und h unendlich klein wird, während $b+(n-1)h=c$,

$$\begin{aligned}\text{Grenzwert von } h\left\{b^2+(b+h)^2+\ldots+[b+(n-2)h]^2\right\} &= (c-b)\left[cb+\tfrac{1}{3}(c-b)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{3}(c^3-b^3);\end{aligned}$$

das ist in unserer Bezeichnung

$$\int_b^c x^2\,dx=\tfrac{1}{3}(c^3-b^3).$$

(3) Archimedes führt getrennt [Satz 25] aber nach genau derselben Methode den besonderen Fall aus, wo es sich um die bei einer vollständigen Umdrehung beschriebene Fläche handelt, angefangen an der Anfangslinie. Das bedeutet die Substitution von $(n-1)a$ für b und na für c, wobei a der Radiusvektor am Ende der ersten vollständigen Windung der Spirale ist.

Es sei bemerkt, daß Archimedes keinen Gebrauch von der Tatsache macht, die der Formel

$$\int_0^c x^2\,dx-\int_b^c x^2\,dx=\int_0^b x^2\,dx$$

entspricht.

8. *Fläche des Parabelsegments.*

Unter den beiden von Archimedes gegebenen Lösungen für die Aufgabe der Quadratur des Parabelsegments ist die *mechanische* Lösung mit einer wirklichen Integration gleichwertig. In den Sätzen 14, 15 der *Quadratur der Parabel* wird bewiesen, daß von zwei dem Segment ein- und umgeschriebenen Figuren, die beide aus Trapezen bestehen, deren parallele Seiten Durchmesser der Parabel sind, die eingeschriebene Figur kleiner, die umgeschriebene größer als ein Drittel eines gewissen Dreiecks ist (EqQ in der Figur auf S. 362). Dann haben wir in Satz 16 den üblichen Prozeß, der die Ermittelung des Grenzwertes bedeutet, wenn die Zahl der Trapeze unendlich groß, ihre Breite unendlich klein wird, und es wird bewiesen

$$(\text{Fläche des Segments})=\tfrac{1}{3}\triangle EqQ.$$

Das Ergebnis ist äquivalent mit der Benutzung der Parabelgleichung, bezogen auf Qq als x-Achse und den Durchmesser durch Q als y-Achse, nämlich

$$py=x(2a-x),$$

die, wie auf S. 357 gezeigt, aus Satz 4 abgeleitet werden kann, und der Ausrechnung von

$$\int_0^{2a} y\,d\,x,$$

wo y die aus der Gleichung zu entnehmende Funktion von x ist; und offenbar ist

$$\frac{1}{p}\int_0^{2a}(2\,a\,x - x^2)\,d\,x = \frac{4\,a^3}{3\,p}.$$

Die Gleichwertigkeit der Methode mit einer Integration kann man auch so einsehen. In Satz 16 (siehe die Figur auf S. 363) wird bewiesen, wenn man $q\,E$ in n gleiche Teile teilt und die in dem Satze angegebene Konstruktion ausführt, so wird $Q\,q$ durch O_1, $O_2, \ldots$ in dieselbe Anzahl von gleichen Teilen geteilt. Die Fläche der umgeschriebenen Figur ist dann, wie leicht zu sehen, die Summe der Flächen der Dreiecke

$$Q\,q\,F,\quad Q\,R_1\,F_1,\quad Q\,R_2\,F_2,\ \ldots$$

oder der Dreiecke

$$Q\,q\,F,\quad Q\,O_1\,R_1,\quad Q\,O_2\,D_1,\ \ldots\,.$$

Bezeichnen wir nun die Fläche des Dreiecks $Q\,q\,F$ mit $\triangle$, so folgt

$$(\text{umgeschriebene Figur}) = \triangle\left[1 + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\,\triangle^2}\cdot\triangle\,[\triangle^2 + 2^2\,\triangle^2 + \ldots + n^2\,\triangle^2].$$

Ähnlich erhalten wir

$$(\text{eingeschrieb. Figur}) = \frac{1}{n^2\,\triangle^2}\cdot\triangle\,[\triangle^2 + 2^2\triangle^2 + \ldots + (n-1)^2\,\triangle^2].$$

Nehmen wir den Grenzwert, so haben wir, wenn A die Fläche des Dreiecks $E\,q\,Q$ bezeichnet, so daß $A = n\,\triangle$,

$$(\text{Fläche des Segments}) = \frac{1}{A^2}\int_0^A \triangle^2\,d\,\triangle$$

$$= \tfrac{1}{3}\,A.$$

Betrachtet man den Schluß von dieser Seite, so ist die Integration identisch mit der, die Archimedes' Quadratur der Spirale entspricht.

Es bleibt noch übrig, von dem Gesichtspunkte dieses Kapitels die unter dem Titel *Methode* im Jahre 1906 von Heiberg entdeckte und in dem vorliegenden Bande reproduzierte Abhandlung zu betrachten. Diese Schrift ist außerordentlich interessant, weil sie zeigt, wie Archimedes bei Quadraturen und Kubaturen ursprünglich zu seinen wichtigsten Ergebnissen gelangt ist. Die Methode ist mechanisch, und Archimedes hebt ausdrücklich hervor, sie sei zwar zur Auffindung von Sätzen von höchstem Nutzen, liefere aber durch sich selbst keine wirklichen Beweise dafür, Beweise nämlich von dem strengen nnd wissenschaftlichen Charakter, den die Geometrie verlangt.

Die wesentlichsten Züge der in der neuentdeckten Schrift angewandten mechanischen Methode sind folgende. Es sei X eine ebene oder räumliche Figur, deren Fläche oder Rauminhalt gefunden werden soll. Die Methode besteht in dem Abwägen infinitesimaler Elemente von X (mit oder ohne Hinzufügung der entsprechenden Elemente einer anderen Figur C) gegen die entsprechenden Elemente einer Figur B, wobei von B und C die Flächen oder Volumina und die Lage des Schwerpunkts von B von vornherein bekannt sind. Zu diesem Zwecke werden die Figuren zunächst in eine solche Lage gebracht, daß sie als gemeinsamen Durchmesser oder Achse dieselbe gerade Linie haben; wenn dann die infinitesimalen Elemente Schnitte der Figuren mit parallelen und (im allgemeinen) zur Achse senkrechten Ebenen sind, so liegen die Schwerpunkte aller Elemente in dem einen oder anderen Punkte des gemeinsamen Durchmessers oder der Achse. Dieser Durchmesser oder die Achse wird verlängert und als Wagebalken oder Hebel gedacht. Es genügt, den einfachen Fall zu nehmen, wo die Elemente von X allein gegen die Elemente einer anderen Figur B abgewogen werden. Die Elemente, die einander entsprechen, sind die Schnitte von X bzw. B mit einer (im allgemeinen) zu dem Durchmesser oder der Achse senkrechten Ebene, die beide Figuren schneidet; die Elemente werden in dem Falle ebener Figuren als gerade Linien und in dem Falle körperlicher Figuren als ebene Flächen angesprochen. Obwohl Archimedes die Elemente gerade Linien bzw. ebene Flächen nennt, so sind es doch offenbar im ersten Falle unendlich schmale Streifen (Flächen) und im zweiten Falle unendlich dünne ebene Blättchen (Körper); aber die Breite oder Dicke (dx, wie wir sie nennen würden) geht nicht in die Rechnung ein, weil sie für die beiden Elemente, die für sich gegeneinander abgewogen werden, als gleich betrachtet wird und sich daher weghebt. Die Anzahl der Elemente in jeder Figur ist unendlich groß, aber Archimedes braucht das nicht zu sagen; er sagt nur: X und B sind bezüglich aus allen ihren Elementen *zusammengesetzt*, d. h. aus den geraden Linien in dem Falle von Flächen und aus den ebenen Figuren in dem Falle von Körpern.

Der Archimedische Gedanke besteht nun darin, das Abwägen der Elemente so einzurichten, daß die Elemente von X alle in *einem Punkte* des Hebels angreifen, während die Elemente von B in verschiedenen Punkten wirken, dort nämlich, wo sie von Anfang an wirklich liegen. Er entfernt daher die Elemente von X aus ihrer ersten Lage und konzentriert sie in einem Punkte des Hebels, während die Elemente von B dort gelassen werden, wo sie sind, und daher in ihren betreffenden Schwerpunkten wirken. Da von B, als Ganzes genommen, der Schwerpunkt sowohl wie die Fläche oder das Volumen bekannt ist, kann man sich vorstellen, daß B als eine Masse wirkt, die in ihrem Schwerpunkt angehängt ist; und nehmen wir nun die ganzen Körper X und B in den Lagen, in die sie zuletzt gebracht sind, so kennen wir demnach die Abstände der beiden Schwerpunkte von dem Stütz- oder Aufhängepunkte des Hebels und ferner die Fläche oder das Volumen von B. Somit ist die Fläche oder das Volumen von X gefunden. Die Methode kann umgekehrt auf das Problem der Auffindung des Schwerpunkts von X angewandt werden, wenn die Fläche oder das Volumen von X vorher bekannt ist; in diesem Falle ist es nötig, daß die Elemente von X, und daher auch X selbst, *an den Stellen, wo sie sind*, gewogen werden, und daß die Figuren, deren Elemente nach einem einzigen Punkte des Hebels bewegt werden, um sie dort zu wägen, andere Figuren als X sind.

Die Methode wird sich herausstellen nicht als *Integration,* was gewisse geometrische Beweise in den großen Abhandlungen wirklich sind, sondern als geistreiches Werkzeug zur *Umgehung* der besonderen Integration, die man natürlich zur direkten Ermittelung des gesuchten Flächen- oder Rauminhaltes brauchen würde, und, anstatt dessen, zur Zurückführung der Lösung auf eine *andere* Integration, deren Ergebnis bereits bekannt ist. Archimedes arbeitet mit *Momenten* in Bezug auf den Aufhängungspunkt des Hebels, d. h. den Produkten der Flächen- oder Raumelemente in die Abstände zwischen dem Aufhängungspunkte des Hebels und den bezüglichen Schwerpunkten der Elemente; und, wie oben gesagt, während diese Abstände für alle Elemente von B verschieden sind, erreicht er es durch Bewegung der Elemente von X, daß sie für alle Elemente von X in ihren endgültigen Lagen dieselben werden. Als bekannt setzt er die Tatsache voraus, daß die Summe der Momente sämtlicher Teile der Figur B, wenn diese in den Punkten wirken, wo sie liegen, gleich dem Moment der ganzen

Figur ist, wenn diese als eine Masse in einem Punkte, ihrem Schwerpunkte, wirkt.

Wir setzen das Element von X gleich $u \cdot dx$; dabei ist u die Länge oder Fläche eines Schnittes von X mit einer aus einer ganzen Reihe von Parallelebenen, die den Hebel rechtwinkelig schneiden, und x ist längs des Hebels (der die gemeinsame Achse der beiden Figuren ist) vom Aufhängungspunkt des Hebels als Anfangspunkt gemessen. Dieses Element ist nun an dem Hebel angebracht zu denken in konstanter Entfernung, etwa a, vom Anfangspunkte und auf der B entgegengesetzten Seite. Ist nun $u' \cdot dx$ das entsprechende Element von B, abgeschnitten durch dieselbe Ebene, und x sein Abstand vom Anfangspunkt, so stellt Archimedes' Beweisführung die Gleichung auf

$$a \int_h^k u\, dx = \int_h^k x\, u'\, dx.$$

Nun ist das zweite Integral bekannt, weil der Flächen- oder Rauminhalt der Figur B (etwa ein Dreieck, eine Pyramide, ein Prisma, eine Kugel, ein Kegel oder ein Zylinder) bekannt ist, und B als eine Masse in ihrem Schwerpunkt, der auch bekannt ist, wirkend gedacht werden kann; das Integral ist gleich $b\,U$, wo b der Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängungspunkt des Hebels und U der Flächen- oder Rauminhalt von B ist. Daher ist

$$\text{der Flächen- oder Rauminhalt von } X = \frac{b\,U}{a}.$$

In dem Falle, wo die Elemente von X zusammen mit den entsprechenden Elementen einer anderen Figur C gegen die entsprechenden Elemente von B abgewogen werden, haben wir, wenn v das Element von C und V den Flächen- oder Rauminhalt von C bezeichnet,

$$a \int_h^k u\, dx + a \int_h^k v\, dx = \int_h^k x\, u'\, dx$$

und $$(\text{Flächen- oder Rauminhalt von } X + V)\, a = b\, U.$$

Bei den besonderen Aufgaben, die in der Abhandlung behandelt werden, ist h durchweg gleich 0, und k ist oft, aber nicht immer, gleich a.

Archimedes' Werke.

Über Kugel und Zylinder.

Buch I.

„Archimedes grüßt Dositheus.

Bei einer früheren Gelegenheit habe ich Dir die Untersuchungen gesandt, die ich bis dahin vollendet hatte, darunter die Beweise dafür, daß jedes von einer Geraden und dem Schnitt eines rechtwinkeligen Kegels [einer Parabel] begrenzte Segment gleich vier Dritteln des Dreiecks ist, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat. Seitdem bin ich auf gewisse wichtige Sätze gekommen und habe ihre Beweise ausgearbeitet. Es sind diese: erstens, daß die Oberfläche jeder Kugel viermal so groß wie ihr größter Kreis ist (*τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ*); sodann, daß die Oberfläche jedes Kugelsegments gleich einem Kreise ist, dessen Radius (*ἡ ἐκ τοῦ κέντρου*) gleich ist der Linie, die vom Scheitel (*κορυφή*) des Segments nach dem Umfange des Kreises gezogen ist, der die Grundfläche des Segments ist; ferner, daß der Zylinder, dessen Grundfläche dem größten Kreise und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist, selbst [d. h. dem Rauminhalte nach] um die Hälfte größer als die Kugel, und auch seine Oberfläche [die Grundflächen eingeschlossen] um die Hälfte größer als die Oberfläche der Kugel ist. Nun haben die erwähnten Figuren diese Eigenschaften natürlich schon immer gehabt (*αὐτῇ τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα*), jedoch sind sie denen unbekannt geblieben, die sich vor mir mit Geometrie beschäftigt haben, indem keiner von ihnen bemerkt hat, daß diese Figuren miteinander kommensurabel sind. Daher brauche ich mich wohl nicht zu scheuen, sie den Untersuchungen anderer Geometer an die Seite zu stellen und denjenigen Sätzen des Eudoxus über Körper, die bei weitem als die bedeutendsten gelten, daß nämlich jede Pyramide ein Drittel des Prismas ist, das dieselbe Grundfläche wie die Pyramide und gleiche Höhe hat, und daß jeder Kegel ein Drittel des Zylinders ist, der dieselbe Grundfläche wie der Kegel und gleiche Höhe hat. Denn obwohl diese Sätze natürlich auch schon immer für die Figuren gegolten haben, sind sie doch tatsächlich allen den ausgezeichneten Geometern, die vor Eudoxus gelebt haben, unbekannt gewesen und von keinem gefunden worden. Allen, die dazu fähig sind, steht es jedoch frei, meine Entdeckungen zu prüfen. Sie hätten eigentlich noch zu Lebzeiten Konons veröffentlicht werden sollen; denn ich meine, er wäre am fähigsten gewesen, sie zu verstehen und darüber ein angemessenes Urteil zu fällen; aber da ich es für richtig halte, sie denen mitzuteilen, die in der Mathematik bewandert sind, schicke ich sie Dir mit meinen Beweisen, deren Prüfung den Mathematikern freisteht. Lebe wohl.

Zunächst setze ich die Axiome[1]) und Annahmen auseinander, die ich für die Beweise meiner Sätze brauche.

Definitionen.

1. Es gibt in der Ebene gewisse begrenzte krumme Linien (*καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι*)[2]), die entweder ganz auf derselben Seite der geraden Linien liegen, die ihre Endpunkte verbinden, oder keinen Teil auf der anderen Seite haben.

2. Ich wende den Ausdruck **konkav nach derselben Richtung** auf eine Linie von der Art an, daß entweder alle möglichen geraden Verbindungslinien irgend zweier ihrer Punkte auf dieselbe Seite der Linie fallen, oder einige auf die eine Seite, andere auf die Linie selbst, aber keine auf die andere Seite.

3. Ähnlich gibt es auch gewisse begrenzte Oberflächen, die nicht selbst in einer Ebene liegen, aber ihre Grenzen in einer Ebene haben, derart, daß sie entweder ganz auf derselben Seite der ihre Grenzen enthaltenden Ebene liegen, oder keinen Teil auf der anderen Seite haben.

4. Ich wende den Ausdruck **konkav nach derselben Richtung** auf Oberflächen von der Art an, daß entweder alle möglichen geraden Verbindungslinien irgend zweier ihrer Punkte auf dieselbe Seite der Oberfläche fallen, oder einige auf eine und dieselbe Seite, andere auf die Oberfläche selbst, aber keine auf die andere Seite.

5. Ich gebrauche den Ausdruck **körperlicher Sektor**, wenn ein Kegel eine Kugel schneidet und seine Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, zur Bezeichnung der Figur, die von der Ober-

[1]) Obwohl das Wort *ἀξιώματα* gebraucht ist, sind die „Axiome“ mehr Definitionen; und in der Tat nennt sie Eutocius in seinen Anmerkungen so (*ὅροι*).

[2]) Unter dem Ausdrucke *krumme Linien* versteht Archimedes nicht nur Kurven von stetiger Krümmung, sondern Linien, die aus einer beliebigen Zahl von Stücken bestehen, die gerade oder gekrümmt sein können.

fläche des Kegels umschlossen wird und dem Teil der Kugeloberfläche, der innerhalb des Kegels liegt.

6. Den Ausdruck **körperlicher Rhombus** wende ich an, wenn zwei Kegel mit derselben Grundfläche ihre Spitzen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der Grundfläche haben, in solcher Lage, daß ihre Achsen in einer Geraden liegen, zur Bezeichnung der aus den beiden Kegeln zusammengesetzten Figur.

Annahmen.

1. *Von allen Linien, welche dieselben Endpunkte haben, ist die gerade die kürzeste.*[1])

2. Von anderen Linien, die in einer Ebene liegen und dieselben Endpunkte haben, sind irgend zwei dann ungleich, wenn sie beide nach derselben Richtung konkav sind und die eine von der anderen und der ihre Endpunkte verbindenden Geraden entweder ganz eingeschlossen wird, oder teilweise eingeschlossen wird

---

[1]) Diese bekannte Archimedische Annahme ist in Wahrheit kaum eine *Definition* der geraden Linie, wenn auch Proklus sagt [S. 110 ed. Friedlein]: „Archimedes definierte (*ὡρίσατο*) die gerade Linie als die kürzeste unter denjenigen [Linien], die dieselben Endpunkte haben. Denn weil sie nach Euklids Definition *ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις*, deshalb ist sie die kürzeste unter denen, die dieselben Endpunkte haben.“ Proklus hat kurz vorher [S. 109] Euklids Definition erläutert, die offenbar von der gewöhnlich in unseren Lehrbüchern gegebenen verschieden ist; die gerade Linie ist nicht „die, welche gleichmäßig zwischen ihren Endpunkten liegt,“ sondern „die, welche *ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*.“ Proklus' Worte sind: „Er [Euklid] zeigt hierdurch, daß die gerade Linie allein [von allen Linien] eine Entfernung bedeckt (*κατέχειν διάστημα*), die gleich der zwischen den Punkten auf ihr ist. Denn soweit einer von ihren Punkten von einem anderen entfernt ist, so groß ist die Länge (*μέγεθος*) der von ihnen begrenzten geraden Linie; und das bedeutet *τὸ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις*. Wenn du aber auf einem Kreisumfange oder einer anderen Linie zwei Punkte nimmst, ist der zwischen ihnen begrenzte Teil der Linie größer als ihr Abstand; und das ist der Fall bei jeder Linie außer bei der geraden.“ Es geht also daraus hervor, daß Euklids Definition von Proklus in einem Sinne verstanden worden ist, der dem der Archimedischen Annahme sehr ähnlich ist; Proklus interpretiert sie tatsächlich etwa so: „Eine gerade Linie ist diejenige, die gleiche Ausdehnung darstellt mit [den Entfernungen zwischen] ihren Punkten.“ Ich habe jedoch an anderer Stelle (*The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge 1908, Bd. I. SS. 166, 167) gezeigt, daß dies nicht Euklids Meinung gewesen sein kann. Über Archimedes' Annahme siehe auch Eneström in *Bibliotheca Mathematica* $VIII_3$, 1907/8, S. 66 und X_3, 1909/10, S. 53, 54.

und teilweise mit der anderen zusammenfällt, und die eingeschlossene [Linie] ist die kleinere [von den beiden].

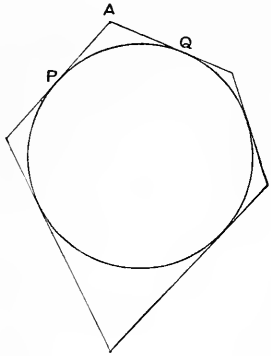
3. Ähnlich ist von den Oberflächen, welche dieselben Grenzen haben, wenn diese Grenzen in einer Ebene liegen, die Ebene die kleinste [der Fläche nach].

4. Von anderen Oberflächen mit denselben Grenzen, wo diese Grenzen in einer Ebene liegen, sind irgend zwei dann ungleich, wenn beide nach derselben Richtung konkav sind und die eine von der anderen und der die Grenzen enthaltenden Ebene entweder vollständig eingeschlossen wird, oder zum Teil eingeschlossen wird und zum Teil mit der anderen zusammenfällt, und die eingeschlossene [Oberfläche] ist [der Fläche nach] die kleinere [von den beiden].

5. Ferner übertrifft von ungleichen Linien, ungleichen Oberflächen und ungleichen Körpern das größere [Element] das kleinere um eine solche Größe, die, zu sich selbst addiert, größer gemacht werden kann, als irgendeine gegebene Größe unter denjenigen, die mit [ihr und mit] einander vergleichbar sind.[1])

Dies vorausgeschickt, ist klar, *wenn ein Vieleck einem Kreise eingeschrieben wird, daß der Umfang des eingeschriebenen Vielecks kleiner als der Umfang des Kreises ist;* denn jede Seite des Vielecks ist kleiner als der Teil des Kreisumfanges, der durch sie abgeschnitten wird.“

Satz 1.



Beschreibt man um einen Kreis ein Vieleck, so ist der Umfang des umgeschriebenen Vielecks größer als der des Kreises.

Irgend zwei benachbarte Seiten, die von der Ecke A ausgehen, mögen den Kreis bezüglich in P, Q berühren.

Dann ist [*Annahmen*, 2]

$$PA + AQ > (\text{Bogen } PQ).$$

Eine ähnliche Ungleichheit gilt für jeden Winkel des Vielecks, und durch Addition folgt das gewünschte Ergebnis.

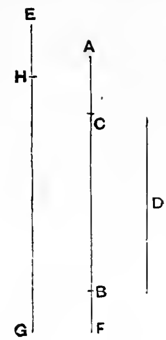
Satz 2.

Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, so ist es möglich, zwei ungleiche Strecken zu finden, so daß das Verhältnis der größeren Strecke zur kleineren kleiner ist als das der größeren Größe zur kleineren.

---

[1]) Zu dieser Annahme vergleiche die Einleitung, Kapitel III, § 2.

Die beiden ungleichen Größen seien AB, D, und die größere sei AB.



BC, gleich D, werde auf BA abgetragen, GH sei irgend eine Strecke.

Addiert man nun CA ausreichend oft zu sich selbst, so wird die Summe größer als D werden. AF sei diese Summe, und E werde auf der Verlängerung von GH so gewählt, daß GH dasselbe Vielfache von HE ist, wie AF von AC.

Daher gilt

$$EH : HG = AC : AF.$$

Aber, da $\quad AF > D$ (oder CB),

$$AC : AF < AC : CB.$$

Folglich, *componendo*,

$$EG : GH < AB : D.$$

Demnach sind EG, GH zwei Strecken, die der gestellten Bedingung genügen.

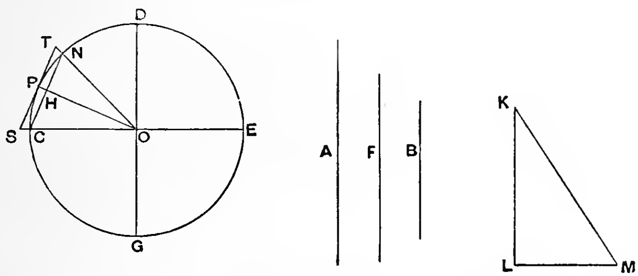
Satz 3.

Wenn zwei ungleiche Größen und ein Kreis gegeben sind, dann ist es möglich, dem Kreise ein Vieleck einzuschreiben und ein anderes umzuschreiben, so daß die Seite des umgeschriebenen Vielecks zu der des eingeschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die größere Größe zur kleineren.

A, B seien die gegebenen Größen, A die größere.

Man ermittele [Satz 2] zwei Strecken F, KL, wovon F die größere, so daß

$$F : KL < A : B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



LM werde senkrecht zu KL gezogen und so lang gemacht, daß $KM = F$.

In dem gegebenen Kreise seien CE, DG zwei aufeinander senkrechte Durchmesser. Wenn wir nun den Winkel DOC halbieren, den halben Winkel wiederum und so fort, so werden wir schließlich zu einem Winkel (etwa NOC) gelangen, der kleiner als der doppelte Winkel LKM ist.

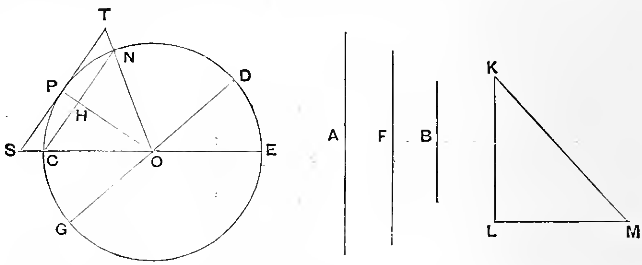
Ziehen wir NC, so erhalten wir (nach Konstruktion) die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks. OP sei der den Winkel NOC halbierende Radius des Kreises (der somit auch NC in H halbiert und auf NC senkrecht steht), und die Tangente in P schneide die Verlängerungen von OC, ON bezüglich in S, T.

Nun gilt $$\sphericalangle HOC < \sphericalangle LKM,$$
da $$\sphericalangle CON < 2 \sphericalangle LKM,$$
und die Winkel bei H und L sind rechte;
folglich $$MK : LK > OC : OH$$ $$> OP : OH.$$
Daher $$ST : CN < MK : LK$$ $$< F : LK;$$
folglich, *a fortiori*, nach (1),
$$ST : CN < A : B.$$
Somit sind zwei Vielecke gefunden, die der Bedingung genügen.

Satz 4.

Sind wiederum zwei ungleiche Größen und ein Sektor gegeben, so ist es möglich, dem Sektor ein Vieleck umzuschreiben und ein anderes einzuschreiben, so daß die Seite des umgeschriebenen Vielecks zu der des eingeschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die größere Größe zur kleineren.

[Das in diesem Satze auftretende „eingeschriebene Vieleck" hat die beiden den Sektor begrenzenden Radien zu Seiten, wäh-



rend die übrigen Seiten (deren Anzahl nach Konstruktion eine Potenz von 2 ist) gleiche Teile von dem Bogen des Sektors abschneiden; das „umgeschriebene Vieleck" wird von den zu den Seiten des eingeschriebenen Vielecks parallelen Tangenten und den verlängerten Grenzradien gebildet.]

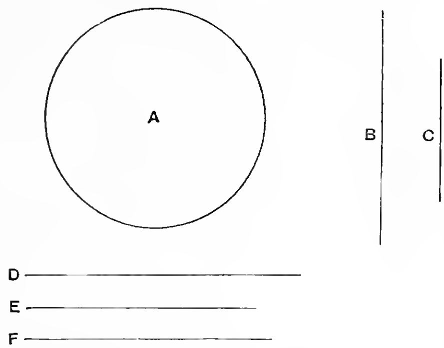
In diesem Falle führen wir dieselbe Konstruktion wie in dem letzten Satze aus mit dem Unterschiede, daß wir den Winkel COD des Sektors statt des rechten Winkels zwischen zwei Durchmessern halbieren, dann die Hälfte wiederum, und so fort. Der Beweis entspricht genau dem vorigen.

Satz 5.

Wenn ein Kreis und zwei ungleiche Größen gegeben sind, dem Kreise ein Vieleck um- und ein anderes einzuschreiben, so daß das umgeschriebene zu dem eingeschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die größere Größe zur kleineren.

A sei der gegebene Kreis und B, C die gegebenen Größen, B davon die größere.

Man wähle zwei ungleiche Strecken D, E, von denen D die größere ist, so daß $D:E < B:C$ [Satz 2], und es sei F die mittlere Proportionale zu D und E, so daß D auch größer als F ist.



Man schreibe (wie in Satz 3) dem Kreise ein Vieleck um und ein anderes ein, so daß das Verhältnis der Seite des ersten zu der des zweiten kleiner als das Verhältnis $D:F$ ist.

Somit ist das Verhältnis der Quadrate der Seiten der beiden Vielecke kleiner als das Verhältnis $D^2:F^2$.

Aber das genannte Verhältnis der Quadrate der Seiten ist gleich dem Verhältnis der Flächen der Vielecke, da diese ähnlich sind; daher ist das Verhältnis der Fläche des umgeschriebenen Vielecks zu der des eingeschriebenen kleiner als das Verhältnis $D^2:F^2$ oder $D:E$ und *a fortiori* kleiner als das Verhältnis $B:C$.

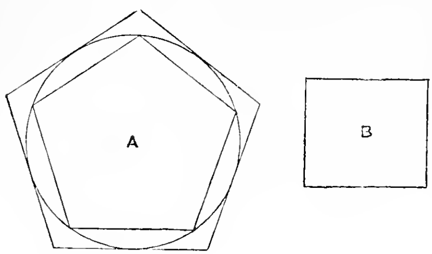
Satz 6.

„Ähnlich können wir beweisen: *wenn zwei ungleiche Größen und ein Sektor gegeben sind, dann ist es möglich, dem Sektor ein Vieleck umzuschreiben und ein anderes dem ersten ähnliches einzuschreiben, so daß das umgeschriebene zu dem eingeschriebenen ein kleineres Verhältnis hat als die größere Größe zur kleineren.*

Ebenso ist klar, *daß, wenn ein Kreis oder Sektor und eine gewisse Fläche gegeben sind, es möglich ist durch Einschreiben von regelmäßigen Vielecken in den Kreis oder Sektor und durch fortgesetztes Einschreiben von solchen in die übrig bleibenden Segmente schließlich Segmente des Kreises oder Sektors übrig zu lassen, die [zusammen] kleiner als die gegebene Fläche sind.* Denn das ist in den *Elementen* bewiesen [Euklid XII, 2].

Aber es ist noch zu beweisen, *daß, wenn ein Kreis oder Sektor und eine Fläche gegeben sind, es möglich ist, dem Kreise oder Sektor ein Vieleck umzuschreiben, so daß die Summe der zwischen der Peripherie und der umgeschriebenen Figur übrig bleibenden Flächen kleiner als die gegebene Fläche ist.*"

Der Beweis für den Kreis (der, wie Archimedes sagt, ebenso auf einen Sektor angewandt werden kann) ist wie folgt.



A sei der gegebene Kreis und B die gegebene Fläche.

Da nun $A + B$ und A zwei ungleiche Größen sind, kann man dem Kreise ein Vieleck (C) umschreiben und ein anderes (J) einschreiben [wie in Satz 5], so daß

$$C : J < A + B : A \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Das umgeschriebene Vieleck (C) ist dann das gesuchte; denn der Kreis (A) ist größer als das eingeschriebene Vieleck (J).

Daher wegen (1) *a fortiori*

$$C : A < A + B : A,$$

woraus folgt
$$C < A + B,$$
oder
$$C - A < B.$$

Satz 7.

Schreibt man einem gleichschenkligen Kegel [d. h. einem geraden Kreiskegel] eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche ein, so ist die Oberfläche der Pyramide ohne die Grundfläche gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Pyramidenbasis und dessen Höhe gleich dem von der Spitze auf eine von den Seiten der Basis gefällten Lote ist.

Da die Seiten der Pyramidengrundfläche gleich sind, sind die von der Spitze auf alle Seiten der Grundfläche gefällten Lote gleich und der Beweis des Satzes ist evident.

Satz 8.

Wird einem gleichschenkligen Kegel eine Pyramide umgeschrieben, so ist die Oberfläche der Pyramide ohne die Grundfläche gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Pyramidenbasis und dessen Höhe gleich der Seite [d. h. einer Erzeugenden] des Kegels ist.

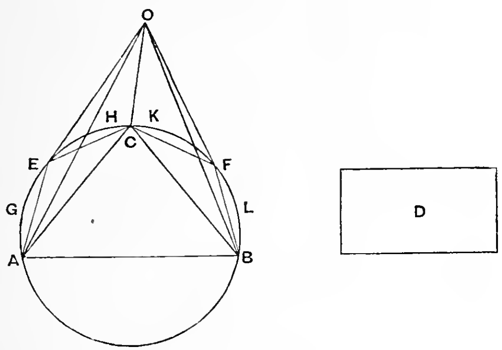
Die Grundfläche der Pyramide ist ein dem Grundkreise des Kegels umgeschriebenes Vieleck, und die Verbindungslinie der Spitze des Kegels oder der Pyramide mit dem Berührungspunkte irgend einer Seite des Vielecks steht auf dieser Seite senkrecht. Also sind alle diese Lote, als Erzeugende des Kegels, untereinander gleich, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Satz 9.

Wenn man in den Grundkreis eines gleichschenkligen Kegels eine Sehne legt und von ihren Endpunkten nach der Kegelspitze gerade Linien zieht, so ist das entstehende Dreieck kleiner als der Teil der Kegeloberfläche, der zwischen den nach der Spitze gezogenen Linien liegt.

ABC sei die kreisförmige Grundfläche des Kegels, O seine Spitze.

Die Sehne AB werde in den Kreis gelegt und O mit A und B verbunden. Man halbiere den Bogen ACB in C und ziehe die Linien AC, BC, OC.



Dann ist $\triangle OAC + \triangle OBC > \triangle OAB$.

Der Überschuß der Summe der ersten beiden Dreiecke über das dritte sei gleich der Fläche D.

Dann ist D entweder kleiner als die Summe der Segmente AEC, CFB oder nicht kleiner.

I. D sei nicht kleiner als die Summe der genannten Segmente.

Wir haben nun zwei Oberflächen:

(1) die aus dem Teile $OAEC$ des Kegelmantels und dem Segment AEC bestehende und

(2) das Dreieck OAC;

da die beiden Oberflächen dieselbe Begrenzung (den Umfang des Dreiecks OAC) haben, ist die erste Oberfläche größer als die zweite, die von ihr *eingeschlossen* wird [*Annahmen,* 3 oder 4].

Also (Oberfläche $OAEC$) + (Segment AEC) $> \triangle\, OAC$.

Ähnlich (Oberfläche $OCFB$) + (Segment CFB) $> \triangle\, OBC$.

Da nun D nicht kleiner als die Summe der Segmente ist, erhalten wir durch Addition

$$(\text{Oberfläche } OAECFB) + D > \triangle\, OAC + \triangle\, OBC$$
$$> \triangle\, OAB + D, \text{ nach Annahme.}$$

Nehmen wir den gemeinsamen Bestandteil D weg, so haben wir das gesuchte Ergebnis.

II. D sei kleiner als die Summe der Segmente AEC, CFB.

Wenn wir nun die Bogen AC, BC halbieren, dann die Hälften halbieren, und so fort, so werden wir schließlich Segmente übrig behalten, die zusammen kleiner als D sind. [Satz 6.]

Es seien AGE, EHC, CKF, FLB solche Segmente, und O werde mit E und F verbunden.

Dann gilt wie vorher

(Oberfläche $OAGE$) + (Segment AGE) $> \triangle\, OAE$,

und (Oberfläche $OEHC$) + (Segment EHC) $> \triangle\, OEC$.

Folglich (Oberfläche $OAGHC$) + (Segmente AGE, EHC)

$$> \triangle\, OAE + \triangle\, OEC$$
$$> \triangle\, OAC, \text{ a fortiori.}$$

Ähnlich für den Teil des Kegelmantels, der zwischen OC, OB und dem Bogen CFB liegt.

Folglich durch Addition

(Oberfläche $OAGEHCKFLB$) + (Segmente AGE, EHC, CKF, FLB)

$$> \triangle\, OAC + \triangle\, OBC$$
$$> \triangle\, OAB + D.$$

Aber die Summe der Segmente ist kleiner als D, und das gewünschte Ergebnis folgt.

Satz 10.

Wenn in der Ebene des Grundkreises eines gleichschenkligen Kegels zwei Tangenten an den Kreis gelegt werden, die sich schneiden, und die Berührungspunkte und der Schnittpunkt der Tangenten mit der

Kegelspitze verbunden werden, so ist die Summe der beiden von den Verbindungslinien und den beiden Tangenten begrenzten Dreiecke größer als der eingeschlossene Teil des Kegelmantels.

Es sei ABC die kreisförmige Basis des Kegels, O seine Spitze; AD, BD seien die beiden Tangenten des Kreises, die sich in D schneiden. O werde mit A, B, D verbunden.

Die Gerade ECF berühre den Kreis in C, dem Mittelpunkte des Bogens ACB, und ist deshalb parallel zu AB. Man ziehe OE, OF.

Dann ist $$ED + DF > EF,$$

und, wenn man $AE + FB$ auf beiden Seiten hinzufügt,

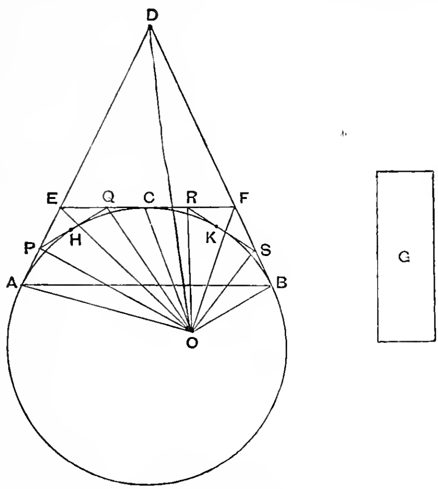
$$AD + DB > AE + EF + FB.$$

Nun sind OA, OC, OB als Erzeugende des Kegels einander gleich und bezüglich zu den Tangenten in A, C, B senkrecht.

Es folgt somit

$$\triangle OAD + \triangle ODB > \triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB.$$

Die Fläche G sei gleich dem Überschuß der ersten Summe über die zweite.



G ist dann entweder kleiner oder nicht kleiner als die Summe der Flächen $EAHC$, $FCKB$, die zwischen dem Kreise und den Tangenten liegen; diese Summe heiße L.

I. G sei nicht kleiner als L.

Wir haben nun zwei Oberflächen:

(1) die der Pyramide mit der Spitze O und der Grundfläche $AEFB$ ohne die Fläche OAB,

(2) die aus dem Teile $OACB$ des Kegelmantels und dem Segment ACB zusammengesetzte.

Diese zwei Oberflächen haben dieselbe Begrenzung, nämlich den Umfang des Dreiecks OAB, und da die erste die zweite einschließt, ist die erste größer [*Annahmen*, 4].

Das heißt, die Oberfläche der Pyramide ohne die Fläche OAB ist größer als die Summe der Oberfläche $OACB$ und des Segments ACB.

Nehmen wir das Segment von beiden Summen fort, so haben wir

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB + L > \text{Oberfläche } OAHCKB.$$

G ist nicht kleiner als L, folglich ist

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB + G > \text{Oberfläche } OAHCKB;$$

aber nach der Annahme ist jene Summe gleich $\triangle OAD + \triangle ODB$, also $\triangle OAD + \triangle ODB$ größer als dieselbe Oberfläche.

II. G sei kleiner als L.

Wenn wir die Bogen AC, CB halbieren und in ihren Mittelpunkten die Tangenten konstruieren, dann die Hälften halbieren und wieder die Tangenten ziehen, und so fort, werden wir schließlich zu einem Vieleck gelangen, so daß die Summe der zwischen den Seiten des Vielecks und dem Segmentumfange liegenden Teile kleiner als G ist.

Diese Reststücke seien die zwischen dem Vielecke $APQRSB$ und dem Segmente liegenden, und ihre Summe sei M. O werde mit P, Q usw. verbunden.

Dann ist wie vorher

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB > \triangle OAP + \triangle OPQ + \ldots + \triangle OSB.$$

Ebenso, wie vorher,

(Oberfläche der Pyramide $OAPQRSB$ ohne die Fläche OAB)
$>$ (der Teil $OACB$ des Kegelmantels
zusammen mit dem Segment ACB).

Nehmen wir von beiden Summen das Segment fort, so wird $\triangle OAP + \triangle OPQ + \ldots + M >$ der Teil $OACB$ des Kegelmantels.

Daher ist *a fortiori*

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB + G,$$

was nach Annahme gleich

$$\triangle OAD + \triangle ODB$$

ist, größer als der Teil $OACB$ des Kegelmantels.

Satz 11.

Schneidet man einen geraden Zylinder mit einer zu seiner Achse parallelen Ebene, so ist der durch die Ebene abgeschnittene Teil des Zylindermantels größer als die Fläche des Parallelogramms, in welchem die Ebene den Zylinder schneidet.

Satz 12.

Legt man in den Endpunkten zweier Erzeugenden eines geraden Zylinders Tangenten an die Grundkreise, und schneiden sich die Tangentenpaare, so sind die von jeder Erzeugenden und den beiden zugehörigen Tangenten eingeschlossenen Parallelogramme zusammen größer als der zwischen den beiden Erzeugenden eingeschlossene Teil des Zylindermantels.

[Die Beweise dieser beiden Sätze folgen genau den Methoden der Sätze 9, 10; daher ist es unnötig, sie wiederzugeben.]

„Aus den bewiesenen Eigenschaften geht hervor: (1) *wenn man einem gleichschenkligen Kegel eine Pyramide einschreibt, daß die Oberfläche der Pyramide ohne die Grundfläche kleiner als der Kegelmantel ist*, und (2) *wenn man eine Pyramide einem gleichschenkligen Kegel umschreibt, daß die Oberfläche der Pyramide ohne die Grundfläche größer ist als der Kegelmantel.*

Aus dem Bewiesenen ergibt sich ferner: (1) *wenn man in einen senkrechten Zylinder ein Prisma einschreibt, daß die aus ihren Parallelogrammen zusammengesetzte Oberfläche des Prismas* [*d. h. ohne ihre Grundflächen*] *kleiner als der Zylindermantel ist*, und (2) *wenn man ein Prisma einem senkrechten Zylinder umschreibt, daß die aus ihren Parallelogrammen zusammengesetzte Oberfläche des Prismas größer als der Zylindermantel ist.*“

Satz 13.

Der Mantel jedes senkrechten Zylinders ist gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zu der Seite [*d. h. einer Erzeugenden*] *des Zylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche.*

Es sei der Kreis A die Grundfläche des Zylinders, CD gleich dem Durchmesser dieses Kreises und EF gleich der Höhe des Zylinders.

H sei die mittlere Proportionale zu CD und EF, B ein Kreis mit dem Radius H.

Dann soll der Kreis B dem Mantel des Zylinders gleich sein, den wir S nennen wollen.

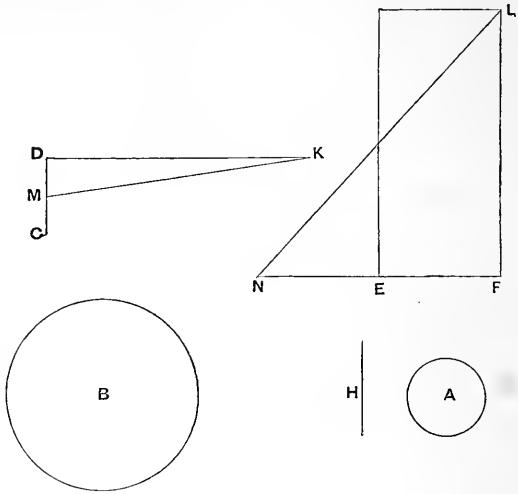
Wären B und S nicht gleich, so müßte B entweder größer oder kleiner als S sein.

I. Angenommen, $B < S$.

Dann ist es möglich, dem Kreise B ein regelmäßiges Vieleck umzuschreiben und ein anderes einzuschreiben, so daß das Verhältnis des ersten zum zweiten kleiner als das Verhältnis $S:B$ ist.

Das sei geschehen; um A beschreibe man ein Vieleck, das dem um B umgeschriebenen ähnlich ist; dann errichte man über dem Vieleck um A ein Prisma von derselben Höhe wie der Zylinder. Das Prisma wird daher dem Zylinder umgeschrieben sein.

Es stehe KD senkrecht auf CD, FL senkrecht auf EF und beide seien gleich dem Umfange des Vielecks um A. CD werde in M halbiert und M mit K verbunden.



Dann ist $\triangle KDM =$ Vieleck um A.

Ebenso $\square EL =$ Mantel des Prismas.

FE werde bis N verlängert, so daß $FE = EN$, und N mit L verbunden.

Da nun die Vielecke um A und B ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate über den Radien von A und B.

Somit

$$\begin{aligned}\triangle KDM : (\text{Vieleck um } B) &= MD^2 : H^2\\ &= MD^2 : CD \cdot EF\\ &= MD : NF\\ &= \triangle KDM : \triangle LFN\\ &\qquad (\text{da } DK = FL).\end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}(\text{Vieleck um } B) &= \triangle LFN\\ &= \square EL\\ &= (\text{Mantel des Prismas um } A),\\ &\qquad \text{nach dem Obigen.}\end{aligned}$$

Aber $(\text{Vieleck um } B) : (\text{Vieleck in } B) < S : B$.

Daher (Mantel des Prismas um A) : (Vieleck in B) $< S : B$
oder (Mantel des Prismas um A) : $S <$ (Vieleck in B) : B,
was unmöglich ist [da der Mantel des Prismas größer als S ist, während das dem Kreise B eingeschriebene Vieleck kleiner als B ist].

Also kann B nicht kleiner als S sein.

II. Angenommen, $B > S$.

Es werde dem Kreise B ein regelmäßiges Vieleck umgeschrieben und ein anderes eingeschrieben, so daß

(Vieleck um B) : (Vieleck in B) $< B : S$.

In den Kreis A werde ein Vieleck eingeschrieben, das dem in B eingeschriebenen ähnlich ist, und über dem Vieleck in A ein Prisma errichtet von derselben Höhe wie der Zylinder.

Wiederum seien die wie vorher gezogenen Linien DK, FL beide dem Umfange des Vielecks in A gleich.

Dann ist in diesem Falle

$\triangle KDM >$ (Vieleck in A),

da das Lot vom Zentrum auf eine Seite des Vielecks kleiner als der Radius von A ist.

Ferner $\triangle LFN = \square EL =$ (Mantel des Prismas).

Nun ist

(Vieleck in A) : (Vieleck in B) $= MD^2 : H^2$
$= \triangle KDM : \triangle LFN$,
wie vorher.

Ferner $\triangle KDM >$ (Vieleck in A).

Folglich auch

$\triangle LFN$ oder (Mantel des Prismas) $>$ (Vieleck in B).

Aber das ist unmöglich, weil

(Vieleck um B) : (Vieleck in B) $< B : S$
$<$ (Vieleck um B) : S, *a fortiori*,

so daß (Vieleck in B) $> S$
$>$ (Mantel des Prismas), *a fortiori*.

Demnach ist B weder größer noch kleiner als S, also

$B = S$.

Satz 14.

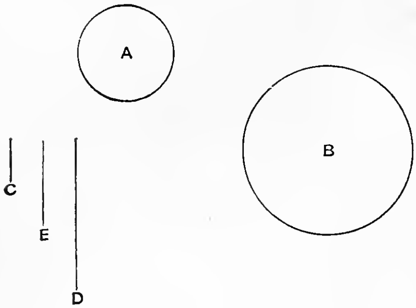
Der Mantel jedes gleichschenkligen Kegels ist gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zu der Seite [*einer Erzeugenden*] *des Kegels und dem Radius des Grundkreises.*

Der Kreis A sei die Grundfläche des Kegels; C sei gleich dem Radius dieses Kreises, D gleich der Seite des Kegels und E die mittlere Proportionale zu C und D.

Man zeichne einen Kreis B, dessen Radius gleich E ist.

Dann soll B gleich dem Kegelmantel sein, den wir S nennen wollen.

Wären B und S nicht gleich, so müßte B entweder größer oder kleiner als S sein.



I. Angenommen, $B < S$.

Dem Kreise B werde ein regelmäßiges Vieleck umgeschrieben und ein ähnliches eingeschrieben, so daß das Verhältnis des ersten zum zweiten kleiner ist als das Verhältnis $S : B$.

Um A werde ein anderes ähnliches Vieleck umgeschrieben und über diesem eine Pyramide errichtet, deren Spitze dieselbe ist wie die des Kegels.

Dann gilt (Vieleck um A) : (Vieleck um B)

$= C^2 : E^2$

$= C : D$

$=$ (Vieleck um A) : (Mantel der Pyramide).

Folglich

(Mantel der Pyramide) $=$ (Vieleck um B).

Nun ist

(Vieleck um B) : (Vieleck in B) $< S : B$.

Folglich

(Mantel der Pyramide) : (Vieleck in B) $< S : B$,

was unmöglich ist, da der Mantel der Pyramide größer als S, während das Vieleck in B kleiner als B ist.

Also kann B nicht kleiner als S sein.

II. Angenommen, $B > S$.

Wir nehmen wieder regelmäßige Vielecke, die dem Kreise B um- und eingeschrieben sind, so daß das Verhältnis des ersten zum zweiten kleiner ist als das Verhältnis $B : S$.

Dem Kreise A schreiben wir ein Vieleck ein, das dem in B eingeschriebenen ähnlich ist, und errichten über ihm eine Pyramide, deren Spitze dieselbe wie die des Kegels ist.

In diesem Falle gilt

(Vieleck in A) : (Vieleck in B) $= C^2 : E^2$

$= C : D$

$>$ (Vieleck in A) : (Mantel der Pyramide).

Das ist klar, weil das Verhältnis von C zu D größer ist als das Verhältnis des Lotes vom Zentrum von A auf eine Seite des Vielecks zu dem Lote von der Spitze des Kegels auf dieselbe Seite.[1])

Folglich (Mantel der Pyramide) $>$ (Vieleck in B).

Aber (Vieleck um B) : (Vieleck in B) $< B:S$.

Folglich *a fortiori*

$$(\text{Vieleck um } B):(\text{Mantel der Pyramide}) < B:S,$$

was unmöglich ist [da das Vieleck um B größer als B ist, während der Mantel der Pyramide kleiner als S ist].

Da somit B weder größer noch kleiner als S ist, folgt

$$B = S.$$

Satz 15.

Der Mantel jedes gleichschenkligen Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche wie die Seite des Kegels zum Radius der Grundfläche.

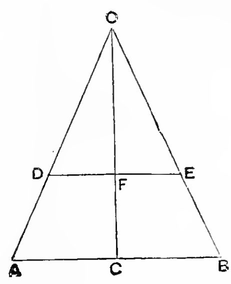
Nach Satz 14 ist der Mantel des Kegels gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zu der Seite des Kegels und dem Radius der Grundfläche.

Daraus ergibt sich der Satz, weil Kreise sich wie die Quadrate über ihren Radien verhalten.

Satz 16.

Schneidet man einen gleichschenkligen Kegel mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, so ist der Teil des Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zu (1) dem Teil der Seite des Kegels, der zwischen die parallelen Ebenen fällt, und (2) der Linie, die gleich der Summe der Radien der in den Parallelebenen liegenden Kreise ist.

Das Dreieck OAB sei ein Schnitt durch die Achse des Kegels, DE der Schnitt mit der den Stumpf abschneidenden Ebene, OFC die Achse des Kegels.



Dann ist der Mantel des Kegels OAB gleich einem Kreise, dessen Radius $\sqrt{OA \cdot AC}$ ist. [Satz 14.]

Ebenso ist der Mantel des Kegels ODE gleich einem Kreise vom Radius $\sqrt{OD \cdot DF}$.

Und der Mantel des Stumpfs ist gleich der Differenz zwischen den beiden Kreisen.

[1]) Das ist offenbar das geometrische Äquivalent der Tatsache, daß, wenn α, β zwei Winkel sind, beide kleiner als ein rechter, und $\alpha > \beta$, dann $\sin\alpha > \sin\beta$ ist.

Nun ist

$$OA \cdot AC - OD \cdot DF = DA \cdot AC + OD \cdot AC - OD \cdot DF.$$

Aber $$OD \cdot AC = OA \cdot DF,$$

da $$OA : AC = OD : DF.$$

Folglich $$OA \cdot AC - OD \cdot DF = DA \cdot AC + DA \cdot DF$$
$$= DA(AC + DF).$$

Da sich nun Kreise wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, so folgt, daß die Differenz zwischen den Kreisen von den Radien $\sqrt{OA \cdot AC}$ bzw. $\sqrt{OD \cdot DF}$ gleich einem Kreise vom Radius $\sqrt{DA(AC + DF)}$ ist.

Somit ist der Mantel des Kegelstumpfs gleich diesem Kreise.

Hilfssätze.

„1. *Kegel von gleicher Höhe haben dasselbe Verhältnis wie ihre Grundflächen; Kegel mit gleichen Grundflächen haben dasselbe Verhältnis wie ihre Höhen.*[1])

2. *Wird ein Zylinder mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten, so verhält sich die Achse zur Achse wie der Zylinder zum Zylinder.*[2])

3. *Die Kegel, welche dieselben Grundflächen* [*und Höhen*] *wie die Zylinder haben, haben dasselbe Verhältnis wie die Zylinder.*

4. *Und die Grundflächen gleicher Kegel sind umgekehrt proportional zu ihren Höhen; und solche Kegel, deren Grundflächen zu ihren Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.*[3])

5. *Und Kegel, deren Grundflächendurchmesser dasselbe Verhältnis wie ihre Achsen haben, stehen im dreifachen Verhältnis* [d. h. verhalten sich wie die Kuben] *der Grundflächendurchmesser.*[4])

Alle diese Sätze sind von früheren Geometern bewiesen worden."

---

[1]) Euklid XII. 11. „Kegel, wie auch Zylinder, von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen."

Euklid XII. 14. „Kegel, wie auch Zylinder, von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen."

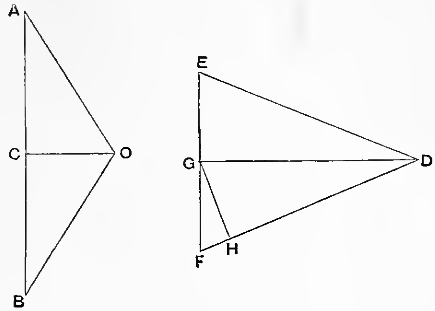
[2]) Euklid XII. 13. „Wenn ein Zylinder mit einer zu den einander gegenüberliegenden Grundflächen parallelen Ebene geschnitten wird, so verhält sich die Achse zur Achse wie der Zylinder zum Zylinder."

[3]) Euklid XII. 15. „Die Grundflächen gleicher Kegel, wie auch Zylinder, verhalten sich umgekehrt wie ihre Höhen; und solche Kegel, wie auch Zylinder, deren Grundflächen sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, sind gleich."

[4]) Euklid XII. 12. „Ähnliche Kegel, wie auch Zylinder, stehen im dreifachen Verhältnis der Durchmesser ihrer Grundflächen."

Satz 17.

Wenn zwei gleichschenklige Kegel gegeben sind, und der Mantel des einen Kegels der Grundfläche des anderen gleich ist, während das vom Zentrum der Grundfläche [des ersten Kegels] auf die Seite dieses Kegels gefällte Lot der Höhe [des anderen Kegels] gleich ist, so sind die Kegel gleich.



Es seien OAB, DEF Achsenschnitte der beiden Kegel, C, G die Zentren der betreffenden Grundflächen, GH das Lot von G auf FD; ferner sei die Grundfläche des Kegels OAB gleich dem Mantel des Kegels DEF und OC gleich GH.

Da nun die Grundfläche von OAB gleich dem Mantel von DEF ist, so gilt:

(Grundfläche des Kegels OAB):(Grundfläche des Kegels DEF)
$= $(Mantel von DEF):(Grundfläche von DEF)
$= DF:FG$ [Satz 15.]
$= DG:GH$, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DGF, DHG,
$= DG:OC$.

Somit verhalten sich die Grundflächen der Kegel umgekehrt wie ihre Höhen; folglich sind die Kegel gleich. [*Hilfssatz* 4.]

Satz 18.

Jeder aus gleichschenkligen Kegeln zusammengesetzte körperliche Rhombus ist gleich dem Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des einen der den Rhombus bildenden Kegel und dessen Höhe gleich dem von der Spitze des zweiten Kegels auf eine Seite des ersten gefällten Lote ist.

Der Rhombus $OADB$ bestehe aus zwei Kegeln mit den Spitzen O, D und gemeinsamer Grundfläche (dem Kreise mit dem Durchmesser AB).

FHK sei ein anderer Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel von OAB und dessen Höhe FG gleich DE, dem Lote von D auf OB, sei.

Dann soll der Kegel FHK dem Rhombus gleich sein.

Es werde ein dritter Kegel LMN konstruiert, dessen Grundfläche (der Kreis mit dem Durchmesser MN) gleich der Grundfläche von OAB und dessen Höhe LP gleich OD sei.

Da nun $\qquad LP = OD$,

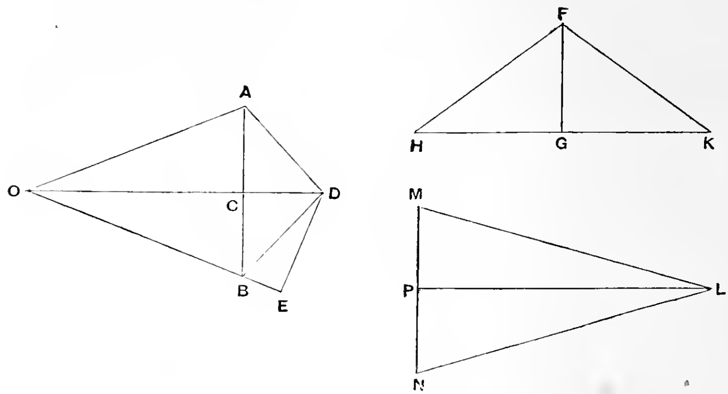
so gilt $\qquad LP : CD = OD : CD$.

Aber [*Hilfssatz* 1] $OD : CD =$ (Rhombus $OADB$) : (Kegel DAB),

und $\qquad LP : CD =$ (Kegel LMN) : (Kegel DAB).

Es folgt

(Rhombus $OADB$) = (Kegel LMN) . . . . . (1).



Ferner, da $AB = MN$, und

(Mantel von OAB) = (Grundfläche von FHK),

(Grundfläche von FHK) : (Grundfläche von LMN)

= (Mantel von OAB) : (Grundfläche von OAB)

$= OB : BC$ [Satz 15]

$= OD : DE$, infolge ähnlicher Dreiecke,

$= LP : FG$, nach Annahme.

Somit sind in den Kegeln FHK, LMN die Grundflächen umgekehrt proportional zu den Höhen.

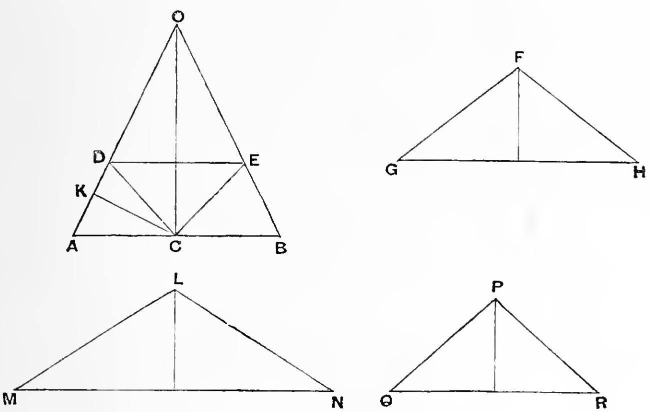
Folglich sind die Kegel FHK, LMN gleich, und demnach ist wegen (1) der Kegel FHK gleich dem gegebenen körperlichen Rhombus.

Satz 19.

Wird ein gleichschenkliger Kegel mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten und über dem entstehenden Kreisschnitte ein Kegel errichtet, dessen Spitze das Zentrum der Grundfläche [des ersten Kegels] ist, und wird der so entstehende Rhombus von dem ganzen Kegel weggenommen, so ist der Rest gleich dem Kegel, dessen Grundfläche dem Mantel des zwischen den parallelen Ebenen liegenden Teiles *des ersten Kegels und dessen Höhe dem vom Zentrum der Grundfläche des ersten Kegels auf eine Seite dieses Kegels gefällten Lote gleich ist.*

Der Kegel OAB werde von einer zur Grundfläche parallelen Ebene in dem Kreise mit dem Durchmesser DE geschnitten. C sei der Mittelpunkt der Basis des Kegels, und mit der Spitze C und dem Schnittkreise mit dem Durchmesser DE als Grundfläche werde der Kegel konstruiert, der mit dem Kegel ODE den Rhombus $ODCE$ bildet.

FGH sei ein Kegel, dessen Grundfläche dem Mantel des Stumpfs $DABE$ und dessen Höhe dem Lote (CK) von C auf OA gleich sei.



Dann soll der Kegel FGH gleich der Differenz zwischen dem Kegel OAB und dem Rhombus $ODCE$ sein.

Es sei (1) LMN ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Kegels OAB und dessen Höhe gleich CK ist,

(2) PQR ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Kegels ODE und dessen Höhe gleich CK ist.

Da nun der Mantel des Kegels OAB gleich dem des Kegels ODE vermehrt um den des Stumpfs $DABE$ ist, haben wir nach Konstruktion

$$(\text{Grundfläche von } LMN) = (\text{Grundfläche von } FGH) + (\text{Grundfläche von } PQR),$$

und, da die Höhen der drei Kegel gleich sind,

$$(\text{Kegel } LMN) = (\text{Kegel } FGH) + (\text{Kegel } PQR).$$

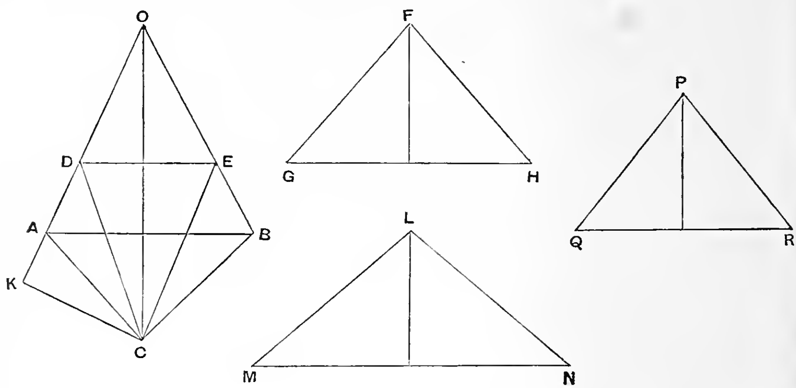
Der Kegel LMN ist aber gleich dem Kegel OAB [Satz 17] und der Kegel PQR gleich dem Rhombus $ODCE$ [Satz 18].

Folglich (Kegel OAB) = (Kegel FGH) + (Rhombus $ODCE$), und der Satz ist bewiesen.

Satz 20.

Wird einer der beiden gleichschenkligen Kegel, die einen Rhombus bilden, mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten und über dem entstehenden Kreisschnitte der Kegel konstruiert, der dieselbe Spitze wie der zweite Kegel hat, und wird der entstehende Rhombus von dem ganzen Rhombus weggenommen, so ist der Rest gleich dem Kegel, dessen Grundfläche dem Mantel des zwischen den parallelen Ebenen liegenden Kegelstumpfs und dessen Höhe dem von der Spitze des zweiten Kegels auf die Seite des ersten Kegels gefällten Lote gleich ist.

Der Rhombus sei $OACB$, und der Kegel OAB werde mit einer zu seiner Grundfläche parallelen Ebene in dem Kreise mit dem Durchmesser DE geschnitten. Mit diesem Kreise als Grundfläche und C als Spitze werde der Kegel konstruiert, der also mit ODE den Rhombus $ODCE$ bildet.



FGH sei ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Stumpfs $DABE$ und dessen Höhe gleich dem Lote (CK) von C auf OA ist.

Der Kegel FGH soll der Differenz zwischen den Rhomben $OACB$, $ODCE$ gleich sein.

Es sei (1) LMN ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel von OAB und dessen Höhe gleich CK ist,

(2) PQR ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel von ODE und dessen Höhe gleich CK ist.

Da nun der Mantel von OAB gleich dem Mantel von ODE, vermehrt um den des Stumpfs $DABE$ ist, haben wir nach Konstruktion

$$(\text{Grundfläche von } LMN) = (\text{Grundfläche von } PQR) + (\text{Grundfläche von } FGH),$$

und die drei Kegel haben gleiche Höhe;

folglich $(\text{Kegel } LMN) = (\text{Kegel } PQR) + (\text{Kegel } FGH)$.

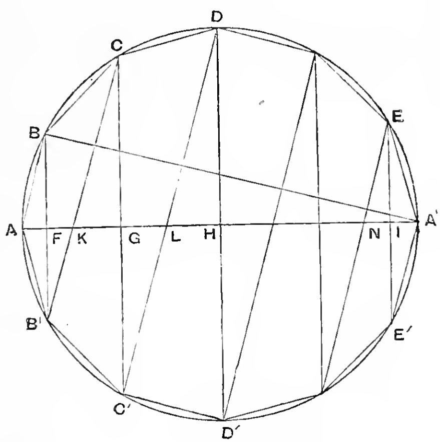
Aber der Kegel LMN ist gleich dem Rhombus $OACB$ und der Kegel PQR gleich dem Rhombus $ODCE$ [Satz 18].

Folglich ist der Kegel FGH gleich der Differenz zwischen den beiden Rhomben $OACB$, $ODCE$.

Satz 21.

Ist ein regelmäßiges Vieleck von gerader Seitenzahl einem Kreise eingeschrieben, etwa $ABC\ldots A'\ldots C'B'A'$, so daß AA' ein Durchmesser ist, und verbindet man einen Eckpunkt mit dem übernächsten, etwa B mit B', und zieht die zu BB' parallelen Linien, die je zwei andere Eckpunkte verbinden, CC', DD' . . ., dann gilt die Proportion

$$(BB' + CC' + \ldots) : AA' = A'B : BA.$$



Die Linien BB', CC', DD', . . . mögen AA' in F, G, H, . . . schneiden; man ziehe die Linien CB', DC', . . . , die AA' in K, L, . . . schneiden.

Dann ist klar, daß CB', DC' . . . untereinander und zu AB parallel sind.

Aus der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke folgt

$$\begin{aligned} BF : FA &= B'F : FK \\ &= CG : GK \\ &= C'G : GL \\ &\ldots\ldots \\ &= E'J : JA'; \end{aligned}$$

und durch Addition der Vorder- und Hinterglieder erhalten wir

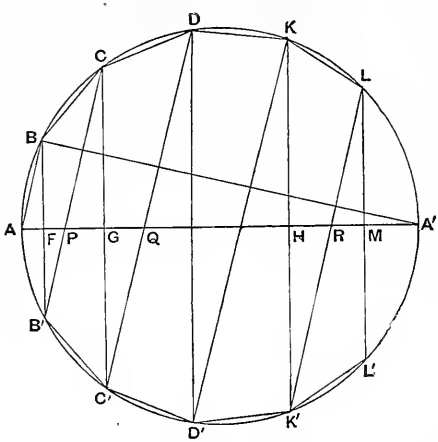
$$\begin{aligned} (BB' + CC' + \ldots) : AA' &= BF : FA \\ &= A'B : BA. \end{aligned}$$

Satz 22.

Ist ein Vieleck in ein Kreissegment LAL' so eingeschrieben, daß alle seine Seiten mit Ausnahme der Grundlinie gleich und ihre Anzahl *gerade ist, etwa $LK \ldots A \ldots K'L'$, wo A der Mittelpunkt des Bogens LAL' ist, und zieht man die Linien BB', $CC' \ldots$, die zur Grundlinie parallel sind und je zwei Eckpunkte verbinden, dann gilt die Proportion*

$$(BB' + CC' + \ldots + LM) : AM = A'B : BA,$$

wo M der Mittelpunkt von LL' und AA' der durch M gehende Durchmesser ist.



Zieht man CB', DC', $\ldots LK'$ wie im vorigen Satze und nimmt man an, daß sie AM in P, Q, $\ldots R$ schneiden, während BB', CC', $\ldots$ KK' AM in F, G, $\ldots H$ schneiden, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke

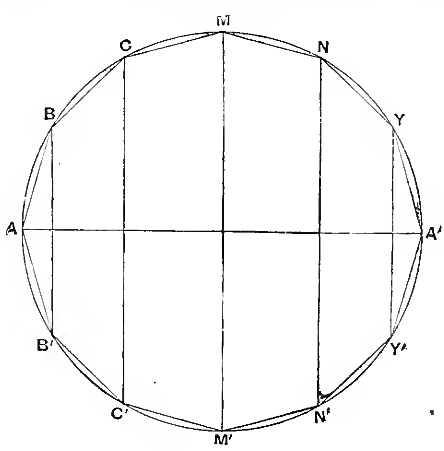
$$\begin{aligned} BF : FA &= B'F : FP \\ &= CG : PG \\ &= C'G : GQ \\ &\ldots\ldots \\ &= LM : RM; \end{aligned}$$

und durch Addition der Vorder- und Hinterglieder erhalten wir:

$$\begin{aligned} (BB' + CC' + \ldots + LM) : AM &= BF : FA \\ &= A'B : BA. \end{aligned}$$

Satz 23.

Es sei $ABC \ldots$ ein größter Kreis einer Kugel, und es werde in ihn ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben, dessen Seitenzahl ein Vielfaches von vier ist. AA', MM' seien zueinander rechtwinkelige Durchmesser und Verbindungslinien entgegengesetzter Eckpunkte des Vielecks.



Wenn nun das Vieleck und der größte Kreis sich gleichzeitig um den Durchmesser AA' drehen, so beschreiben die Eckpunkte des Vielecks, außer A und A', Kreise, die auf der Kugeloberfläche liegen und deren

Ebenen zu dem Durchmesser AA' rechtwinkelig sind. Ebenso beschreiben die Seiten des Vielecks Teile von Kegelmänteln, z. B. bildet die von BC beschriebene Oberfläche einen Teil von dem Mantel des Kegels, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser CC' und dessen Spitze der Punkt ist, in dem die Verlängerungen von CB, $C'B'$ einander und den Durchmesser AA' schneiden.

Vergleicht man die Halbkugel MAM' und die Hälfte der durch Umdrehung des Vielecks entstehenden Figur, die von dieser Halbkugel eingeschlossen wird, so sieht man, daß die Oberfläche der Halbkugel und die der eingeschriebenen Figur dieselbe in einer Ebene (nämlich dem Kreise mit dem Durchmesser MM') gelegene Begrenzung haben, daß die erste die zweite ganz einschließt und daß beide nach derselben Richtung konkav sind.

Folglich ist [*Annahmen*, 4] die Oberfläche der Halbkugel größer als die der eingeschriebenen Figur, und dasselbe gilt für die anderen Hälften der Figuren.

Somit gilt der Satz:

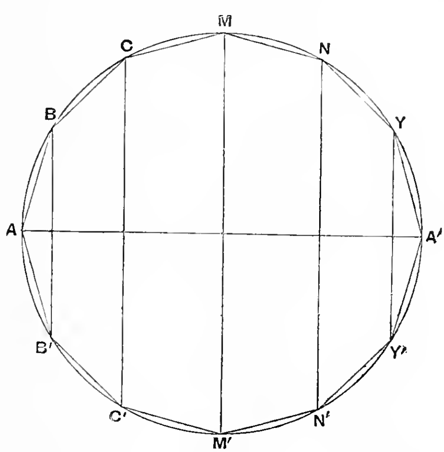
Die Oberfläche der Kugel ist größer als die Oberfläche der durch Umdrehung des in den größten Kreis eingeschriebenen Vielecks um den Durchmesser des größten Kreises beschriebenen Figur.

Satz 24.

Wird ein regelmäßiges Vieleck $AB\ldots A'\ldots B'A$, dessen Seitenzahl ein Vielfaches von vier ist, einem größten Kreise einer Kugel eingeschrieben, und zieht man die Linie BB' und alle die anderen zu BB' parallelen Linien, die je zwei Eckpunkte verbinden, so ist die Oberfläche der durch Umdrehung des Vielecks um den Durchmesser AA' in die Kugel eingeschriebenen Figur gleich einem Kreise, dessen Radiusquadrat gleich dem Rechteck

$$BA(BB'+CC'+\ldots)$$

ist.



Die Oberfläche der Figur ist aus den Mänteln von Teilen verschiedener Kegel zusammengesetzt.

Nun ist der Mantel des Kegels ABB' gleich einem Kreise mit dem Radius $\sqrt{BA\cdot\frac{1}{2}BB'}$. [Satz 14]

Der Mantel des Stumpfs $BB'C'C$ ist gleich einem Kreise mit dem Radius $\sqrt{BC \cdot \frac{1}{2}(BB' + CC')}$, usw. [Satz 16]

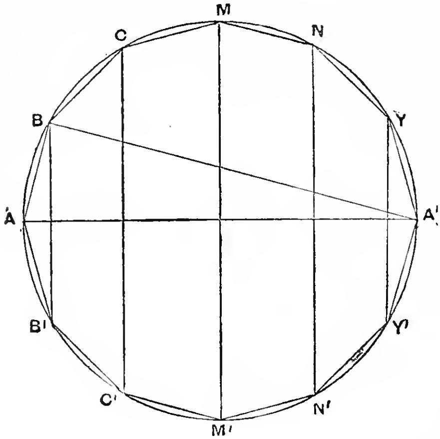
Es folgt, da $BA = BC = \ldots$, daß die ganze Oberfläche gleich einem Kreise ist, dessen Radius gleich

$$\sqrt{BA(BB' + CC' + \ldots + MM' + \ldots + YY')}$$

ist.

Satz 25.

Die Oberfläche der in den vorigen Sätzen der Kugel eingeschriebenen Figur, die aus Teilen von Kegelmänteln besteht, ist kleiner als das Vierfache des größten Kreises der Kugel.



Es sei $AB \ldots A' \ldots B'A$ ein regelmäßiges, einem größten Kreise eingeschriebenes Vieleck, dessen Seitenzahl ein Vielfaches von vier ist.

Wie vorher ziehe man die parallelen Linien BB', CC', ... YY'.

R sei ein Kreis, dessen Radiusquadrat gleich $AB(BB' + CC' + \ldots + YY')$ ist, so daß die Oberfläche der in die Kugel eingeschriebenen Figur gleich R ist. [Satz 24]

Nun ist

$$(BB' + CC' + \ldots + YY') : AA' = A'B : AB, \qquad \text{[Satz 21]}$$

oder $$AB(BB' + CC' + \ldots + YY') = AA' \cdot A'B.$$

Folglich $$(\text{Radius von } R)^2 = AA' \cdot A'B < AA'^2.$$

Folglich ist die Oberfläche der eingeschriebenen Figur oder der Kreis R kleiner als das Vierfache des Kreises $AMA'M'$.

Satz 26.

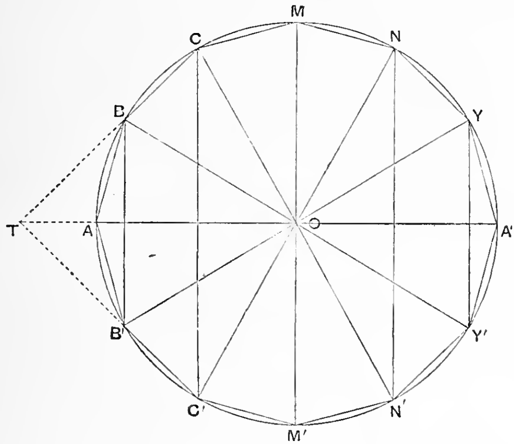
Die wie oben einer Kugel eingeschriebene Figur ist [dem Volumen nach] gleich einem Kegel, dessen Grundkreis gleich der Oberfläche der in die Kugel eingeschriebenen Figur und dessen Höhe gleich dem vom Mittelpunkte der Kugel auf eine Seite des Vielecks gefällten Lote ist.

Es sei wie vorher $AB \ldots A' \ldots B'A$ das dem größten Kreise eingeschriebene regelmäßige Vieleck, und die Linien BB', CC', ... seien gezogen.

Mit der Spitze O konstruiere man die Kegel, deren Grundflächen die Kreise mit den Durchmessern BB', CC', ... in den Perpendikularebenen zu AA' sind.

Dann ist $OBAB'$ ein körperlicher Rhombus, und sein Volumen ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Kegels ABB' und dessen Höhe gleich dem Lote von O auf AB ist [Satz 18]. Die Länge des Lotes sei p.

Schneiden sich ferner die Verlängerungen von CB, $C'B'$ in T, so ist der Teil der körperlichen Figur, der durch Umdrehung des Dreiecks BOC um AA' beschrieben wird, gleich der Differenz



zwischen den Rhomben $OCTC'$ und $OBTB'$, d. h. gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Stumpfs $BB'C'C$ und dessen Höhe p ist [Satz 20].

Wird in dieser Weise fortgeschritten und addiert, so ergibt sich, da Kegel von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten, daß das Volumen des Rotationskörpers gleich einem Kegel von der Höhe p ist, dessen Grundfläche gleich der Summe der Mäntel des Kegels BAB', des Stumpfs $BB'C'C$ usw. ist, d. h. gleich einem Kegel von der Höhe p und einer Grundfläche, die der Oberfläche des Körpers gleich ist.

Satz 27.

Die wie vorher der Kugel eingeschriebene Figur ist kleiner als das Vierfache des Kegels, dessen Grundfläche gleich einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Nach Satz 26 ist das Volumen der körperlichen Figur gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der Figur und dessen Höhe p ist, d. i. das Lot von O auf irgend eine Seite des Vielecks. R sei ein solcher Kegel.

Man denke sich ferner einen Kegel S, dessen Grundfläche gleich dem größten Kreise und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

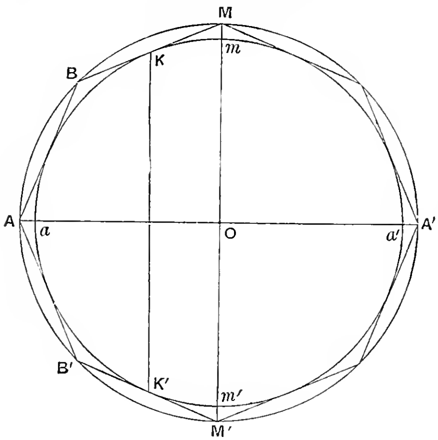
Da nun die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers kleiner als das Vierfache des größten Kreises ist [Satz 25], so ist die Grundfläche des Kegels R kleiner als das Vierfache der Grundfläche des Kegels S.

Ebenso ist die Höhe (p) von R kleiner als die von S.

Folglich ist das Volumen von R kleiner als das Vierfache des Volumens von S, und der Satz ist bewiesen.

Satz 28.

Ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seitenzahl ein Vielfaches von vier ist, werde einem größten Kreise einer gegebenen Kugel umgeschrieben, etwa $AB \ldots A' \ldots B'A$; und um das Vieleck werde ein anderer Kreis beschrieben, der somit denselben Mittelpunkt wie der größte Kreis der Kugel haben wird. AA' halbiere das Vieleck und schneide die Kugel in a, a'.



Werden der größte Kreis und das umgeschriebene Vieleck zusammen um AA' gedreht, so beschreibt der größte Kreis die Kugeloberfläche, die Eckpunkte des Vielecks, abgesehen von A, A', bewegen sich auf der Oberfläche einer größeren Kugel, die Berührungspunkte der Seiten des Vielecks mit dem größten Kreise der inneren Kugel beschreiben Kreise auf dieser Kugel in Perpendikularebenen zu AA', und die Seiten des Vielecks selbst beschreiben Teile von Kegelmänteln. *Die umgeschriebene Figur ist somit größer als die Kugel selbst.*

Irgend eine Seite, etwa BM, berühre den inneren Kreis in K; K' sei der Berührungspunkt des Kreises mit $B'M'$.

Dann ist der durch Umdrehung von KK' um AA' beschriebene Kreis die in einer Ebene liegende Begrenzung zweier Oberflächen, nämlich

(1) der durch Umdrehung des Kreissegments KaK' entstehenden Oberfläche und

(2) der durch Umdrehung des Teiles $KB \ldots A \ldots B'K'$ des Vielecks entstehenden.

Nun schließt die zweite Oberfläche die erste ganz ein, und beide sind nach derselben Richtung konkav; folglich [*Annahmen*, 4] ist die zweite Oberfläche größer als die erste.

Dasselbe gilt für den Teil der Oberfläche auf der anderen Seite des Kreises vom Durchmesser KK'.

Daraus ergibt sich durch Addition: *die Oberfläche der umgeschriebenen Figur ist größer als die der Kugel selbst.*

Satz 29.

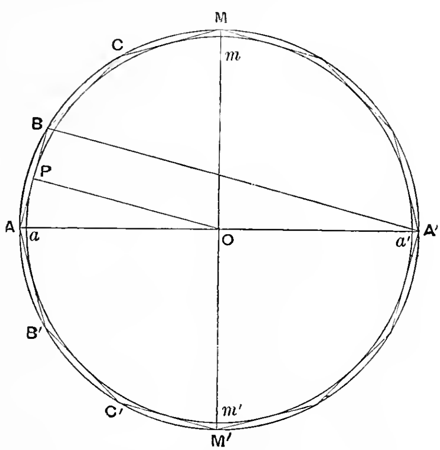
Die Oberfläche der einer Kugel wie im vorigen Satze umgeschriebenen Figur ist gleich einem Kreise, dessen Radiusquadrat gleich $AB(BB' + CC' + \ldots)$ *ist.*

Denn die der Kugel umgeschriebene Figur ist einer größeren Kugel eingeschrieben, und der Beweis des Satzes 24 läßt sich anwenden.

Satz 30.

Die Oberfläche der wie vorher einer Kugel umgeschriebenen Figur ist größer als das Vierfache des größten Kreises der Kugel.

$AB \ldots A' \ldots B'A$ sei das dem größten Kugelkreise $ama'm'$ umgeschriebene regelmäßige Vieleck mit $4n$ Seiten, das bei seiner Umdrehung um AA' die der Kugel umgeschriebene Figur beschreibt.



Der Kreis R sei gleich der Oberfläche der umgeschriebenen Figur.

Nun gilt

$$(BB' + CC' + \ldots) : AA' = A'B : BA,$$

[wie in Satz 21]

so daß $$AB(BB' + CC' + \ldots) = AA' \cdot A'B,$$

woraus folgt (Radius von R) $= \sqrt{AA' \cdot A'B}$ [Satz 29]
$> A'B$.

Es ist aber $A'B = 2\,OP$, wo P der Punkt ist, in dem AB den Kreis $ama'm'$ berührt.

Folglich

(Radius von R) $>$ (Durchmesser des Kreises $ama'm'$);

daher ist R und somit auch die Oberfläche der umgeschriebenen Figur größer als das Vierfache des größten Kreises der gegebenen Kugel.

Satz 31.

Der wie vorher einer Kugel umgeschriebene Rotationskörper ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Körpers und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Der Körper ist wie vorher einer größeren Kugel eingeschrieben, und da das Lot vom Zentrum auf irgend eine Seite des herumgedrehten Vielecks gleich dem Radius der inneren Kugel ist, so ist der Satz identisch mit Satz 26.

Zusatz. *Der der kleineren Kugel umgeschriebene Körper ist größer als das Vierfache des Kegels, dessen Grundfläche ein größter Kugelkreis und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.*

Denn da die Oberfläche des Körpers größer als das Vierfache des größten Kreises der inneren Kugel ist [Satz 30], so ist der Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Körpers und dessen Höhe der Kugelradius ist, größer als das Vierfache des Kegels von derselben Höhe, der den größten Kreis zur Grundfläche hat. [*Hilfssatz* 1]

Folglich ist nach dem Satze das Volumen des Körpers größer als das Vierfache des letzten Kegels.

Satz 32.

Wird ein regelmäßiges Vieleck mit $4n$ Seiten einem größten Kreise einer Kugel eingeschrieben, etwa $ab \ldots a' \ldots b'a$, und ein ähnliches Vieleck $AB \ldots A' \ldots B'A$ dem größten Kreise umgeschrieben, und drehen sich beide Vielecke mit dem größten Kreise um die Durchmesser aa' bzw. AA', so daß sie Oberflächen von Körpern beschreiben, die der Kugel ein- bzw. umgeschrieben sind, so verhalten sich

(1) *die Oberflächen der ein- und umgeschriebenen Figuren wie die Quadrate ihrer Seiten und*

(2) *die Figuren selbst [d. h. ihre Rauminhalte] wie die Kuben ihrer Seiten.*

(1) AA', aa' mögen in derselben Geraden liegen, und $MmOm'M'$ sei der zu ihnen rechtwinkelige Durchmesser.

Man ziehe BB', CC', ... und bb', cc', ..., die alle untereinander und zu MM' parallel sind.

Es seien R und S Kreise, so daß

$R =$ (Oberfläche des umgeschriebenen Körpers),

$S =$ (Oberfläche des eingeschriebenen Körpers).

Dann ist

$$(\text{Radius von } R)^2 = AB(BB' + CC' + \ldots), \qquad [\text{Satz } 29]$$

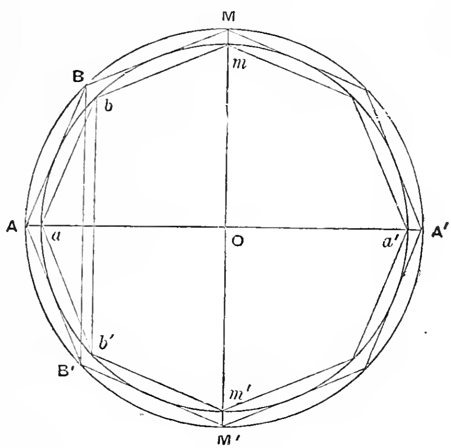
$$(\text{Radius von } S)^2 = ab(bb' + cc' + \ldots). \qquad [\text{Satz } 24]$$

Da die Vielecke ähnlich sind, sind die in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Rechtecke ähnlich und haben daher das Verhältnis $AB^2 : ab^2$.

Folglich

(Oberfläche des umgeschr. Körpers) : (Oberfläche d. eingeschr. Körpers) $= AB^2 : ab^2$.

(2) V sei ein Kegel mit dem Kreise R als Grundfläche und der Höhe Oa und W ein Kegel mit dem Kreise S als Grundfläche, dessen Höhe gleich dem Lote von O auf ab ist, das wir p nennen wollen.



Dann sind V, W bezüglich gleich den Rauminhalten der um- und eingeschriebenen Figuren. [Sätze 31, 26]

Da nun die Vielecke ähnlich sind, haben wir

$$AB : ab = Oa : p$$
$$= (\text{Höhe des Kegels } V) : (\text{Höhe des Kegels } W);$$

und, wie oben gezeigt, verhalten sich die Grundflächen der Kegel (die Kreise R, S) wie AB^2 zu ab^2.

Folglich $\qquad V : W = AB^3 : ab^3$.

Satz 33.

Die Oberfläche jeder Kugel ist gleich dem Vierfachen ihres größten Kreises.

C sei ein Kreis, der gleich dem Vierfachen des größten Kreises ist.

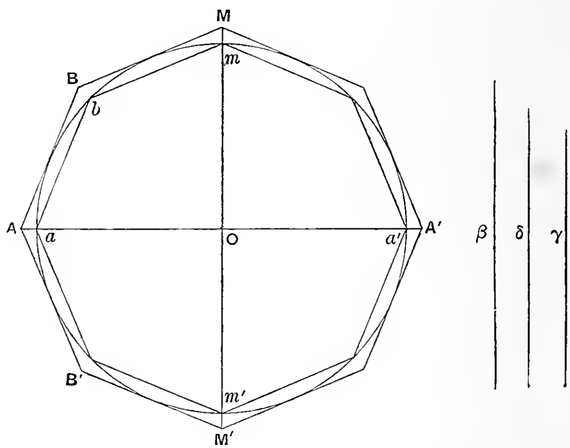
Wenn dann C nicht gleich der Oberfläche der Kugel ist, muß er entweder kleiner oder größer sein.

I. Angenommen, C sei kleiner als die Oberfläche der Kugel.

Es ist dann möglich, zwei Strecken β, γ, von denen β die größere ist, so zu finden, daß

$$\beta : \gamma < (\text{Oberfläche der Kugel}) : C. \qquad [\text{Satz } 2]$$

Man nehme zwei solche Linien, und δ sei die mittlere Proportionale zu ihnen.



Man schreibe ähnliche regelmäßige Vielecke einem größten Kreise um und ein, so daß das Verhältnis ihrer Seiten kleiner als das Verhältnis $\beta : \delta$ ist. [Satz 3]

Die Vielecke drehe man zugleich mit dem Kreise um eine gemeinsame Diagonale, wobei sie wie vorher Rotationskörper beschreiben.

Dann gilt

$$(\text{Oberfläche des äußeren Körpers}) : (\text{Oberfläche des inneren Körpers})$$
$$= (\text{Seite des äußeren Vielecks})^2 : (\text{Seite des inneren V.})^2 \quad [\text{Satz } 32]$$
$$< \beta^2 : \delta^2 \quad \text{oder} \quad \beta : \gamma$$
$$< (\text{Oberfläche der Kugel}) : C, \text{ a fortiori.}$$

Aber das ist unmöglich, da die Oberfläche des umgeschriebenen Körpers größer als die der Kugel ist [Satz 28], während die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers kleiner als C ist [Satz 25].

Folglich ist C nicht kleiner als die Oberfläche der Kugel.

II. Angenommen, C sei größer als die Oberfläche der Kugel.

Man nehme zwei Strecken β, γ, von denen β die größere ist, so daß $$\beta : \gamma < C : (\text{Oberfläche der Kugel}).$$

Wie vorher schreibe man dem größten Kreise ähnliche regelmäßige Vielecke um und ein, so daß das Verhältnis ihrer Seiten kleiner ist als das von β zu δ, und denke man sich in der üblichen Weise Rotationskörper entstanden.

Dann ist in diesem Falle

$$(\text{Oberfläche des umgeschr. Körpers}) : (\text{Oberfl. des eingeschr. Körpers}) < C : (\text{Oberfläche der Kugel}).$$

Aber das ist unmöglich, da die Oberfläche des umgeschriebenen Körpers größer als C ist [Satz 30], während die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers kleiner als die der Kugel ist [Satz 23].

Somit ist C nicht größer als die Oberfläche der Kugel.

Folglich muß der Kreis C, da er weder größer noch kleiner st, gleich der Oberfläche der Kugel sein.

Satz 34.

Jede Kugel ist gleich dem Vierfachen des Kegels, dessen Grundfläche gleich dem größten Kreise und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Es sei $ama'm'$ ein größter Kreis der Kugel.

Wenn nun die Kugel nicht gleich dem Vierfachen des genannten Kegels ist, so ist sie entweder größer oder kleiner.

I. Wenn möglich, sei die Kugel größer als das Vierfache des Kegels.

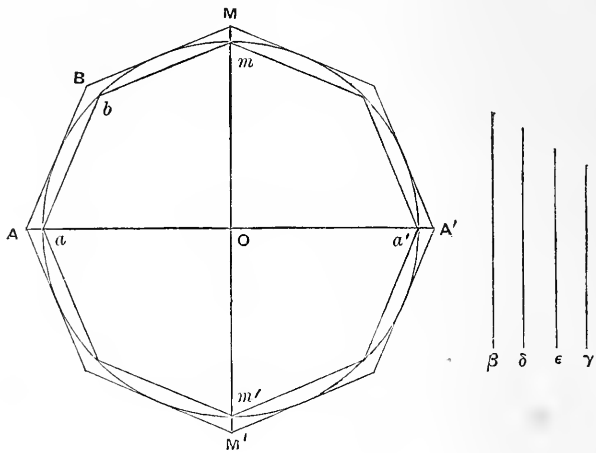
Es sei V ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Vierfachen des größten Kreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Dann ist nach Annahme die Kugel größer als V, und zwei Strecken β, γ lassen sich finden (von denen β die größere ist), so daß $$\beta : \gamma < (\text{Volumen der Kugel}) : V.$$

Zwischen β und γ seien δ, ε zwei arithmetische Mittel, so daß $\beta - \delta = \delta - \varepsilon = \varepsilon - \gamma$.

Wie vorher schreibe man dem größten Kreise ähnliche regelmäßige Vielecke mit $4n$ Seiten um und ein, so daß das Verhältnis der Seiten kleiner als $\beta : \delta$ ist.

Der Durchmesser aa' des Kreises liege in derselben Geraden mit einer gemeinsamen Diagonale beider Vielecke, und letztere drehe man mit dem Kreise um aa', wobei sie die Oberflächen von zwei Rotationskörpern beschreiben. Die Volumina dieser Körper verhalten sich daher wie die Kuben der Seiten der Vielecke. [Satz 32]



Somit

(Volumen des äußeren Körpers) : (Volumen des inneren Körpers)

$< \beta^3 : \delta^3$, nach Annahme,

$< \beta : \gamma$, *a fortiori* (da $\beta : \gamma > \beta^3 : \delta^3$)[1]),

$<$ (Volumen der Kugel) : V, *a fortiori.*

---

[1]) Daß $\beta : \gamma > \beta^3 : \delta^3$, wird von Archimedes als bewiesen angenommen. Eutocius beweist die Beziehung in seinem Kommentar wie folgt.

Man bestimme x so, daß $\beta : \delta = \delta : x$.

Somit $\beta - \delta : \beta = \delta - x : \delta$,

und, da $\beta > \delta$, $\beta - \delta > \delta - x$.

Aber nach Annahme $\beta - \delta = \delta - \varepsilon$.

Folglich $\delta - \varepsilon > \delta - x$,

oder $x > \varepsilon$.

Wiederum sei $\delta : x = x : y$,

und wie vorher haben wir $\delta - x > x - y$, da $\delta > x$,

so daß *a fortiori* $\delta - \varepsilon > x - y$.

Folglich $\varepsilon - \gamma > x - y$;

und, da $x > \varepsilon$, $y > \gamma$.

Nun sind nach Annahme β, δ, x, y in stetiger Proportion; folglich

$$\beta^3 : \delta^3 = \beta : y$$
$$< \beta : \gamma.$$

Aber das ist unmöglich, weil das Volumen des umgeschriebenen Körpers größer als das der Kugel ist [Satz 28], während das Volumen des eingeschriebenen Körpers kleiner als V ist [Satz 27].

Somit ist die Kugel nicht größer als V oder das Vierfache des in dem (zu beweisenden) Satze genannten Kegels.

II. Wenn möglich, sei die Kugel kleiner als V.

In diesem Falle bestimmen wir β, γ $(\beta > \gamma)$ so, daß

$$\beta : \gamma < V : (\text{Volumen der Kugel}).$$

Im übrigen verlaufen Konstruktion und Beweis wie vorher, und wir erhalten schließlich

$$(\text{Volumen des äußeren Körpers}) : (\text{Volumen des inneren Körpers}) < V : (\text{Volumen der Kugel}).$$

Aber das ist unmöglich, weil das Volumen des äußeren Körpers größer als V ist [Satz 31, Zusatz] und das Volumen des eingeschriebenen Körpers kleiner als das Volumen der Kugel.

Also ist die Kugel nicht kleiner als V. Da nun die Kugel weder kleiner noch größer als V ist, ist sie gleich V oder dem Vierfachen des in dem Satze genannten Kegels.

Zusatz. Aus dem Bewiesenen folgt, *daß jeder Zylinder, der einen größten Kugelkreis zur Grundfläche und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat, gleich $\frac{3}{2}$ der Kugel ist, und daß seine Oberfläche einschließlich der Grundflächen gleich $\frac{3}{2}$ der Kugeloberfläche ist.*

Dieselbe Beziehung läßt sich auch folgendermaßen nachweisen.

Es seien δ, ε zwei arithmetische Mittel zwischen β und γ $(\beta > \gamma)$, so daß

$$\beta - \delta = \delta - \varepsilon = \varepsilon - \gamma.$$

Es seien x, y geometrische Mittel zwischen β und γ, so daß

$$\beta : x = x : y = y : \gamma,$$

und

$$\beta^3 : x^3 = \beta : \gamma.$$

Nun folgt *dividendo*

$$\frac{\beta - x}{\beta} = \frac{x - y}{x} = \frac{y - \gamma}{y};$$

folglich, da

$$\beta > x > y,$$

$$\beta - x > x - y > y - \gamma.$$

Daher

$$\beta - x > \tfrac{1}{3}(\beta - \gamma);$$

aber

$$\beta - \delta = \delta - \varepsilon = \varepsilon - \quad ,$$

daher

$$\beta - \delta = \tfrac{1}{3}(\beta - \gamma);$$

folglich

$$\beta - x > \beta - \delta,$$

und

$$x < \delta.$$

Demnach ist

$$\beta^3 : \delta^3 < \beta^3 : x^3 \quad \text{oder} \quad \beta : \gamma.$$

Denn der Zylinder ist das Dreifache des Kegels mit derselben Grundfläche und Höhe [Euklid XII. 10], d. h. das Sechsfache des Kegels mit derselben Grundfläche, dessen Höhe gleich dem Kugelradius ist.

Aber die Kugel ist das Vierfache des letzten Kegels [Satz 34]. Folglich ist der Zylinder $\frac{3}{2}$ der Kugel.

Ferner ist der Mantel eines Zylinders gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zur Höhe des Zylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche ist [Satz 13].

In diesem Falle ist die Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche, und der Kreis hat deshalb den Durchmesser der Kugel zum Radius oder ist gleich dem Vierfachen des größten Kreises der Kugel.

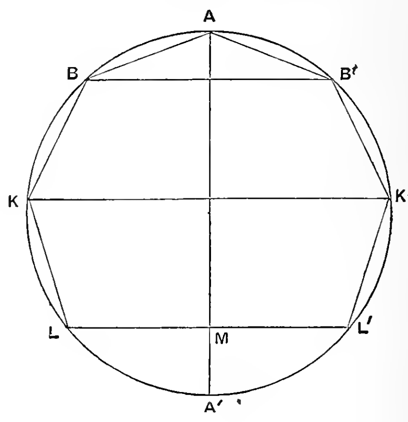
Folglich ist die Oberfläche des Zylinders einschließlich der Grundflächen gleich dem Sechsfachen des größten Kreises.

Und die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache des größten Kreises [Satz 33]; folglich

$$\text{(Oberfläche des Zylinders einschließlich der Grundflächen)} = \tfrac{3}{2}\cdot\text{(Oberfläche der Kugel)}.$$

Satz 35.

Wird in ein Kreissegment LAL' (wo A der Mittelpunkt des Bogens ist) ein Vieleck $LK\ldots A\ldots K'L'$ eingeschrieben, von dem LL' eine Seite ist, während die anderen Seiten $2n$ an Zahl und alle gleich sind, und dreht sich das Vieleck mit dem Segment um den Durchmesser AM, wobei eine in ein Kugelsegment eingeschriebene körperliche Figur entsteht, so ist die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers (ab-



gesehen von der Grundfläche des Segments) gleich einem Kreise, dessen Radiusquadrat gleich dem Rechteck

$$AB\left(BB' + CC' + \ldots + KK' + \frac{LL'}{2}\right)$$

ist.

Die Oberfläche der eingeschriebenen Figur besteht aus Teilen von Kegelmänteln.

Nehmen wir diese nacheinander, so ist der Mantel des Kegels BAB' gleich einem Kreise vom Radius

$$\sqrt{AB\cdot\tfrac{1}{2}BB'}. \qquad \text{[Satz 14]}$$

Der Mantel des Kegelstumpfs $BCC'B'$ ist gleich einem Kreise vom Radius

$$\sqrt{AB\cdot\frac{BB'+CC'}{2}}; \qquad \text{[Satz 16]}$$

usw.

Schreiten wir in dieser Weise fort und addieren, so finden wir, da Kreise sich wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, daß die Oberfläche der eingeschriebenen Figur einem Kreise gleich ist, dessen Radius ist

$$\sqrt{AB\left(BB' + CC' + \ldots + KK' + \frac{LL'}{2}\right)}.$$

Satz 36.

Die Oberfläche der wie vorher einem Kugelsegmente eingeschriebenen Figur ist kleiner als die des Kugelsegments.

Das ist klar, weil die kreisförmige Grundfläche des Segments die gemeinsame Begrenzung für zwei Oberflächen ist, von denen eine, das Segment, die andere, die Oberfläche des Körpers, einschließt, während beide nach derselben Richtung konkav sind [*Annahmen*, 4].

Satz 37.

Die Oberfläche der in das Kugelsegment durch Umdrehung von $LK\ldots A\ldots K'L'$ um AM eingeschriebenen körperlichen Figur ist kleiner als ein Kreis, dessen Radius gleich AL ist.

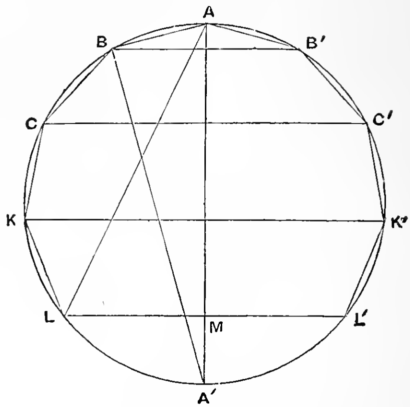
Der Durchmesser AM schneide den Kreis, von dem LAL' ein Segment ist, zum zweiten Male in A'. Man verbinde A' mit B.

Wie in Satz 35 ist die Oberfläche der eingeschriebenen Figur gleich einem Kreise, dessen Radiusquadrat ist

$$AB(BB' + CC' + \ldots + KK' + LM).$$

Aber dieses Rechteck ist gleich

$$A'B \cdot AM \qquad \text{[Satz 22]}$$
$$< A'A \cdot AM$$
$$< AL^2.$$



Folglich ist die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers kleiner als der Kreis, dessen Radius gleich AL ist.

Satz 38.

Die körperliche Figur, die wie vorher in ein Kugelsegment eingeschrieben ist, das kleiner als die Halbkugel ist, vermehrt um den Kegel, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segments und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des eingeschriebenen Körpers und dessen Höhe gleich dem Lote vom Mittelpunkte der Kugel auf irgend eine Seite des Vielecks ist.

O sei der Mittelpunkt der Kugel, p die Länge des Lotes von O auf AB.

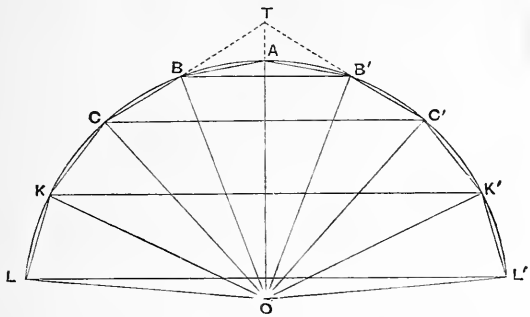
Man denke sich Kegel mit der gemeinsamen Spitze O konstruiert, deren Grundflächen die Kreise mit den Durchmessern BB', CC', . . . sind.

Dann ist der Rhombus $OBAB'$ gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Kegels BAB' und dessen Höhe p ist. [Satz 18]

Wenn sich CB, $C'B'$ wiederum in T schneiden, so ist der von dem Dreieck BOC bei der Umdrehung des Vielecks um AO beschriebene Körper die Differenz zwischen den Rhomben $OCTC'$

und $OBTB'$ und somit gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Stumpfs $BCC'B'$ und dessen Höhe p ist. [Satz 20]

Ähnliches gilt für den Teil des Körpers, der von dem Dreieck COD beschrieben wird, wenn das Vieleck rotiert; und so fort.



Somit ergibt sich durch Addition der dem Segment eingeschriebene Körper vermehrt um den Kegel OLL' gleich einem Kegel, dessen Grundfläche die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers und dessen Höhe p ist.

Zusatz. *Der Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius* AL *und dessen Höhe gleich dem Kugelradius ist, ist größer als die Summe des eingeschriebenen Körpers und des Kegels* OLL'.

Denn nach dem Satze ist der eingeschriebene Körper vermehrt um den Kegel OLL' gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Körpers und dessen Höhe p ist.

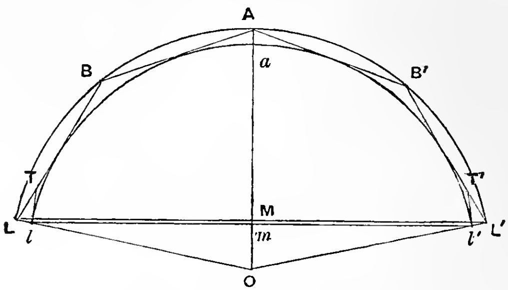
Dieser letzte Kegel ist nun kleiner als ein Kegel, dessen Höhe gleich OA und dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius AL ist, weil die Höhe p kleiner als OA und die Oberfläche des Körpers kleiner als ein Kreis vom Radius AL ist. [Satz 37]

Satz 39.

Es sei lal' ein Segment eines größten Kugelkreises, kleiner als der Halbkreis. O sei der Mittelpunkt der Kugel und werde mit l und l' verbunden. Ein Vieleck werde dem Sektor $Olal'$ umgeschrieben, so daß seine Seiten, außer den beiden Radien, $2n$ an Zahl und untereinander gleich sind, etwa $LK, \ldots BA, AB', \ldots K'L'$; Oa sei der Radius des größten Kreises, der das Segment lal' halbiert.

Der dem Vieleck umgeschriebene Kreis wird dann denselben Mittelpunkt O wie der gegebene größte Kreis haben.

Das Vieleck und die beiden Kreise drehe man nun zusammen um OA. Die beiden Kreise beschreiben Kugeln, die Eckpunkte außer A Kreise auf der äußeren Kugel mit den Durchmessern BB', usw., die Berührungspunkte der Seiten mit dem inneren Segment Kreise auf der inneren Kugel, die Seiten selbst beschreiben Mäntel von Kegeln oder Kegelstümpfen und die ganze



dem Segment der inneren Kugel durch Umdrehung der gleichen Seiten des Vielecks umgeschriebene Figur hat zur Grundfläche den Kreis vom Durchmesser LL'.

Die Oberfläche der so dem Kugelsektor umgeschriebenen Figur [mit Ausnahme ihrer Grundfläche] ist größer als die des Kugelsegments, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser ll' ist.

Man lege in l, l' die Tangenten lT, $l'T'$ an das innere Segment. Diese beschreiben mit den Seiten des Vielecks bei ihrer Umdrehung einen Körper, dessen Oberfläche größer als die des Segments ist [*Annahmen*, 4].

Aber die durch Umdrehung von lT beschriebene Oberfläche ist kleiner als die durch Umdrehung von LT beschriebene, da der Winkel TlL ein rechter Winkel ist, und daher $LT > lT$.

Folglich ist *a fortiori* die von $LK \ldots A \ldots K'L'$ beschriebene Oberfläche größer als die des Segments.

Zusatz. *Die Oberfläche der so dem Kugelsektor umgeschriebenen Figur ist gleich einem Kreise, dessen Radiusquadrat gleich dem Rechteck*

$$AB(BB' + CC' + \ldots + KK' + \tfrac{1}{2}LL')$$

ist.

Denn die umgeschriebene Figur ist der äußeren Kugel eingeschrieben, und somit läßt sich Satz 35 anwenden.

Satz 40.

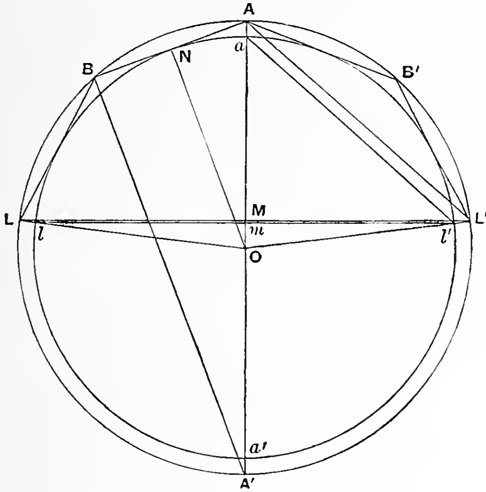
Die Oberfläche der wie vorher dem Sektor umgeschriebenen Figur ist größer als ein Kreis, dessen Radius gleich al ist.

Der Durchmesser $A\,a\,O$ schneide den größten Kreis und den dem gedrehten Vieleck umgeschriebenen Kreis zum zweiten Male in a' bzw. A'. Man verbinde A' mit B und O mit N, dem Berührungspunkte von AB mit dem inneren Kreise.

Nun ist nach Satz 39, Zusatz, die Oberfläche der dem Sektor $O\,l\,a\,l'$ umgeschriebenen körperlichen Figur gleich einem Kreise dessen Radiusquadrat gleich dem Rechteck

$$AB\left(BB' + CC' + \ldots + KK' + \frac{LL'}{2}\right)$$

ist.



Aber dieses Rechteck ist gleich $A'B \cdot AM$ [wie in Satz 22].

Da nun AL' und $a\,l'$ parallel sind, so sind die Dreiecke AML' und aml' ähnlich. Aus $AL' > a\,l'$ folgt $AM > a\,m$.

Ferner ist $\qquad A'B = 2\,ON = a\,a'$.

Folglich $\qquad A'B \cdot AM > am \cdot a\,a'$

$$> a\,l'^2.$$

Somit ist die Oberfläche der dem Sektor umgeschriebenen körperlichen Figur größer als ein Kreis vom Radius $a\,l'$ oder $a\,l$.

Zusatz 1. *Das Volumen der dem Sektor umgeschriebenen Figur, vermehrt um den Kegel, dessen Spitze O und dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser LL' ist, ist gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der umgeschriebenen Figur und dessen Höhe ON ist.*

Denn die Figur ist der äußeren Kugel eingeschrieben, die denselben Mittelpunkt wie die innere hat; somit läßt sich Satz 38 anwenden.

Zusatz 2. *Das Volumen der umgeschriebenen Figur, vermehrt um den Kegel OLL' ist größer als der Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius al und dessen Höhe gleich dem Radius (Oa) der inneren Kugel ist.*

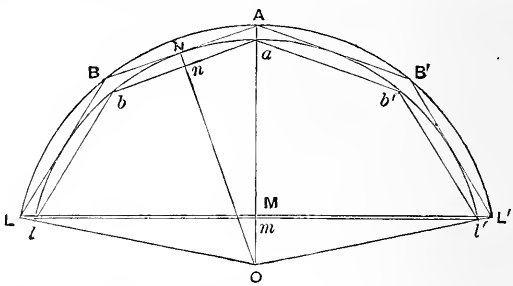
Denn das Volumen der Figur mit dem Kegel OLL' ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der Figur und dessen Höhe gleich ON ist.

Nun ist die Oberfläche der Figur größer als ein Kreis, dessen Radius gleich al ist [Satz 40], während die Höhen Oa, ON gleich sind.

Satz 41.

Es sei lal' ein Segment eines größten Kugelkreises und zwar kleiner als der Halbkreis.

Es werde in den Sektor $Olal'$ ein Vieleck so eingeschrieben, daß die Seiten $lk, \ldots ba, ab', \ldots k'l'$ an Zahl $2n$ und alle gleich sind. Ein ähnliches Vieleck werde dem Sektor umgeschrieben, so daß seine Seiten zu denen des ersten Vielecks parallel sind; und der dem äußeren Vieleck umgeschriebene Kreis werde gezeichnet.



Nun drehe man die Vielecke und die Kreise zusammen um OaA, den Radius, der das Segment lal' halbiert.

Dann *verhalten sich* (1) *die Oberflächen der so entstandenen (äußeren und inneren) Rotationskörper wie AB^2 zu ab^2 und* (2) *ihre Volumina, vermehrt um die entsprechenden Kegel mit denselben Grundflächen und der Spitze O, wie AB^3 zu ab^3.*

(1) Denn die Oberflächen sind gleich Kreisen, deren Radiusquadrate bezüglich gleich

$$AB\left(BB' + CC' + \ldots + KK' + \frac{LL'}{2}\right) \quad \text{[Satz 39, Zus.]}$$

und $\qquad ab\left(bb' + cc' + \ldots + kk' + \frac{ll'}{2}\right)$ [Satz 35]

sind. Aber diese Rechtecke verhalten sich wie AB^2 zu ab^2, folglich auch die Oberflächen.

(2) OnN sei senkrecht zu ab und AB gezogen; und die Kreise, die gleich den Oberflächen des äußeren und inneren Rotationskörpers sind, seien bezüglich mit S, s bezeichnet.

Nun ist das Volumen des umgeschriebenen Körpers mit dem Kegel OLL' gleich einem Kegel, dessen Grundfläche S und dessen Höhe ON ist [Satz 40, Zus. 1].

Und das Volumen des eingeschriebenen Körpers mit dem Kegel Oll' ist gleich einem Kegel mit der Grundfläche s und der Höhe On [Satz 38].

Aber $\qquad S : s = AB^2 : ab^2$

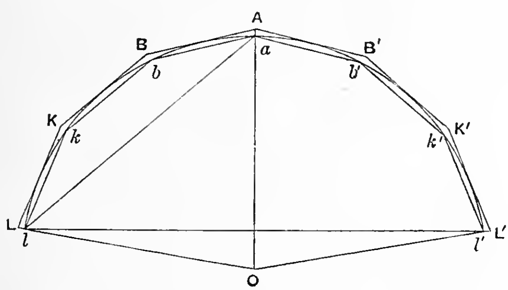
und $\qquad ON : On = AB : ab.$

Folglich verhält sich das Volumen der umgeschriebenen Figur mit dem Kegel OLL' zu dem Volumen der eingeschriebenen Figur mit dem Kegel Oll' wie AB^3 zu ab^3 [*Hilfssatz* 5].

Satz 42.

Ist lal' ein Kugelsegment, kleiner als eine Halbkugel, und Oa der zur Grundfläche des Segments senkrechte Radius, so ist die Oberfläche des Segments gleich einem Kreise, dessen Radius gleich al ist.

R sei ein Kreis, dessen Radius gleich al ist. Dann muß die Oberfläche des Segments, die wir S nennen wollen, wenn sie nicht gleich R ist, entweder größer oder kleiner als R sein.



I. Angenommen, wenn möglich, $S > R$.

Es sei lal' ein Segment eines größten Kreises, das kleiner als ein Halbkreis ist. Man verbinde O mit l und l' und schreibe ähnliche Vielecke mit $2n$ gleichen Seiten dem Sektor um und ein wie in den vorangehenden Sätzen, doch so, daß

$$(\text{umgeschriebenes Vieleck}) : (\text{eingeschriebenes Vieleck}) < S : R. \qquad \text{[Satz 6]}$$

Die Vielecke drehe man nun mit dem Segment um OaA, wobei Rotationskörper entstehen, die dem Kugelsegment um- und eingeschrieben sind.

Dann gilt

(Oberfläche des äußeren Körpers): (Oberfläche des inneren Körpers)

$$= AB^2 : ab^2 \qquad \text{[Satz 41]}$$
$$= \text{(umgeschr. Vieleck)} : \text{(eingeschr. Vieleck)}$$
$$< S : R, \quad \text{nach Annahme.}$$

Aber die Oberfläche des äußeren Körpers ist größer als S [Satz 39].

Folglich ist die Oberfläche des inneren Körpers größer als R, was nach Satz 37 unmöglich ist.

II. Angenommen, $S < R$.

In diesem Falle schreiben wir Vielecke so um und ein, daß ihr Verhältnis kleiner als $R : S$ ist, und wir erhalten das Ergebnis

(Oberfläche des äußeren Körpers): (Oberfläche des inneren Körpers)

$$< R : S.$$

Aber die Oberfläche des äußeren Körpers ist größer als R [Satz 40].

Folglich ist die Oberfläche des inneren Körpers größer als S, was unmöglich ist [Satz 36].

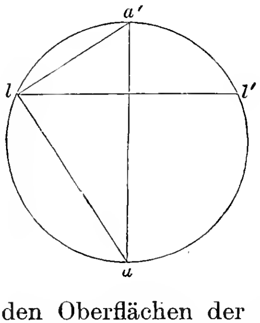
Folglich, da S weder größer noch kleiner als R ist,

$$S = R.$$

Satz 43.

Auch wenn das Kugelsegment größer als eine Halbkugel ist, ist seine Oberfläche einem Kreise gleich, dessen Radius gleich al ist.

Es sei $lal'a'$ ein größter Kreis der Kugel, aa' der auf ll' senkrechte Durchmesser; das Segment $la'l'$ sei kleiner als ein Halbkreis.



Dann ist nach Satz 42 die Oberfläche des Segments $la'l'$ der Kugel gleich einem Kreise, dessen Radius gleich $a'l$ ist.

Die Oberfläche der ganzen Kugel ist gleich einem Kreise vom Radius aa' [Satz 33].

Aber $aa'^2 - a'l^2 = al^2$, und Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Folglich ist die Oberfläche des Segments lal', da sie die Differenz zwischen den Oberflächen der ganzen Kugel und des Segments $la'l'$ ist, gleich einem Kreise, dessen Radius gleich al ist.

Satz 44.

Das Volumen jedes Kugelsektors ist gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des in dem Sektor enthaltenen Kugelsegments und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

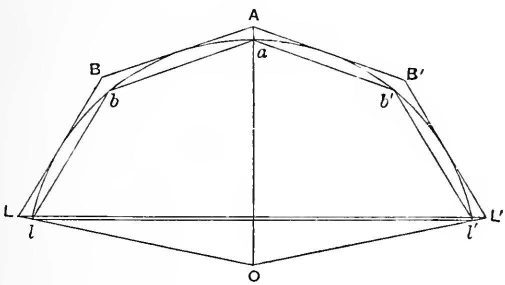
R sei ein Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Kugelsegments $l\,a\,l'$ und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist; und S sei das Volumen des Sektors $O\,l\,a\,l'$.

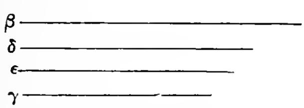
Wenn nun S nicht gleich R ist, muß es entweder größer oder kleiner sein.

I. Angenommen, $S > R$.

Man ermittle zwei Strecken β, γ, von denen β die größere ist, so daß
$$\beta : \gamma < S : R;$$
und δ, ε seien zwei arithmetische Mittel zwischen β, γ.

Es sei $l\,a\,l'$ ein Segment eines größten Kugelkreises. Man verbinde O mit l und l' und schreibe, wie vorher, ähnliche Vielecke mit $2\,n$ gleichen Seiten dem Kreissektor um und ein, doch so, daß das Verhältnis ihrer Seiten kleiner als $\beta : \delta$ ist [Satz 4].





Dann drehe man die beiden Vielecke mit dem Segment um OaA, wobei zwei Rotationskörper entstehen.

Bezeichnen wir die Volumina dieser Körper bezüglich mit V und v, so haben wir
$$\begin{aligned}(V + \text{Kegel } OLL') &: (v + \text{Kegel } Oll') \\ &= AB^3 : ab^3 \qquad \text{[Satz 41]} \\ &< \beta^3 : \delta^3 \\ &< \beta : \gamma, \textit{ a fortiori}^{1}), \\ &< S : R, \text{ nach Annahme.}\end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. die Anmerkung zu Satz 34, S. 188.

Nun ist $(V + \text{Kegel } OLL') > S$.

Folglich auch $(v + \text{Kegel } Oll') > R$.

Aber das ist unmöglich nach Satz 38, Zus., kombiniert mit den Sätzen 42, 43.

Folglich ist S nicht größer als R.

II. Angenommen, $S < R$.

In diesem Falle nehmen wir β, γ so, daß

$$\beta : \gamma < R : S,$$

und die übrige Konstruktion verläuft wie vorher.

Wir erhalten so die Beziehung

$$(V + \text{Kegel } OLL') : (v + \text{Kegel } Oll') < R : S.$$

Nun ist $(v + \text{Kegel } Oll') < S$.

Folglich $(V + \text{Kegel } OLL') < R$;

was unmöglich ist nach Satz 40, Zus. 2, kombiniert mit den Sätzen 42, 43.

Da nun S weder größer noch kleiner als R ist, folgt

$$S = R.$$

Über Kugel und Zylinder.

Buch II.

„Archimedes grüßt Dositheus.

Bei früherer Gelegenheit batest Du mich, die Beweise für die Aufgaben auszuarbeiten, die ich selbst Konon mitgeteilt hatte. Sie beruhen zum größten Teil auf den Sätzen, deren Beweise ich Dir bereits geschickt habe, nämlich, (1) daß die Oberfläche jeder Kugel gleich dem Vierfachen des größten Kreises der Kugel ist, (2) daß die Oberfläche jedes Kugelsegments gleich einem Kreise ist, dessen Radius gleich der vom Scheitel des Segments nach dem Umfange der Grundfläche gezogenen Linie ist, (3) daß der Zylinder, dessen Grundfläche ein größter Kugelkreis und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist, selbst anderthalbmal so groß wie die Kugel ist, während seine Oberfläche [einschließlich der beiden Grundflächen] anderthalbmal so groß wie die Oberfläche der Kugel ist, und (4) daß jeder körperliche Sektor gleich einem Kegel ist, der den Kreis zur Grundfläche hat, der gleich der Oberfläche des zu dem Sektor gehörigen Kugelsegments ist, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist. Diejenigen Theoreme und Aufgaben nun, die auf diesen Sätzen beruhen, habe ich in dem Buche ausgearbeitet, das ich Dir hiermit schicke; diejenigen, die nach anderen Methoden gelöst werden, nämlich die auf Spiralen und Konoide bezüglichen, werde ich mich bemühen, Dir bald zu schicken.

Die erste von den Aufgaben war folgende: *Wenn eine Kugel gegeben ist, eine ebene Fläche zu finden, die der Oberfläche der Kugel gleich ist.*

Die Lösung ergibt sich unmittelbar aus den vorher genannten Sätzen. Denn das Vierfache des größten Kreises der Kugel ist eine ebene Fläche und gleich der Oberfläche der Kugel.

Die zweite Aufgabe war die folgende.“

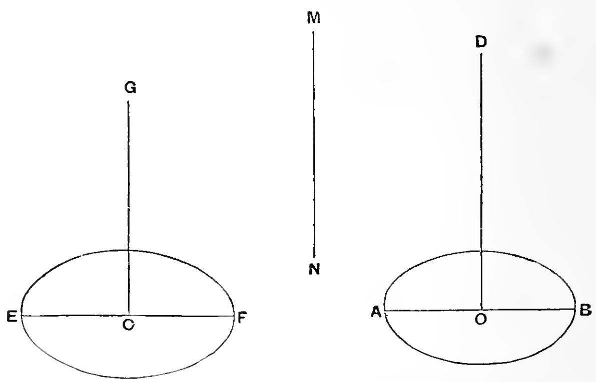
Satz 1. (Aufgabe.)

Wenn ein Kegel oder Zylinder gegeben ist, soll eine Kugel gefunden werden, die dem Kegel oder Zylinder gleich ist.

Wenn V der gegebene Kegel oder Zylinder ist, können wir einen Zylinder herstellen, der gleich $\frac{3}{2}V$ ist. Dieser Zylinder sei der, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser AB und dessen Höhe OD ist.

Wenn wir nun einen anderen Zylinder konstruieren könnten, der gleich dem Zylinder (OD) ist, doch so, daß seine Höhe gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche ist, so wäre die Aufgabe gelöst, weil dieser letzte Zylinder gleich $\frac{3}{2}V$ wäre, und die Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe (oder dem Grundflächendurchmesser) desselben Zylinders ist, wäre dann die gesuchte [I. 34, Zusatz].

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und der Zylinder (CG) sei gleich dem Zylinder (OD), während EF, der Durchmesser der Grundfläche, gleich der Höhe CG ist.



Da nun in gleichen Zylindern die Höhen und Grundflächen umgekehrt proportional sind, haben wir

$$AB^2 : EF^2 = CG : OD$$
$$= EF : OD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Die Strecke MN genüge der Beziehung

$$EF^2 = AB \cdot MN \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Folglich $\qquad AB : EF = EF : MN,$

und durch Kombination von (1) und (2) haben wir

$$AB : MN = EF : OD$$

oder $\qquad AB : EF = MN : OD.$

Folglich $AB : EF = EF : MN = MN : OD,$

und EF, MN *sind die beiden mittleren Proportionalen zu* AB *und* OD.

Die Synthesis der Aufgabe ist also folgende. Man konstruiere die beiden mittleren Proportionalen EF, MN zu AB und OD und einen Zylinder, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Durchmesser EF und dessen Höhe CG gleich EF ist.

Denn da

$$AB : EF = EF : MN = MN : OD,$$

so gilt

$$EF^2 = AB \cdot MN,$$

und folglich

$$\begin{aligned} AB^2 : EF^2 &= AB : MN \\ &= EF : OD \\ &= CG : OD; \end{aligned}$$

d. h. die Grundflächen der beiden Zylinder (OD), (CG) verhalten sich umgekehrt wie ihre Höhen.

Folglich sind die Zylinder gleich, und es folgt

$$\text{Zylinder } (CG) = \tfrac{3}{2} V.$$

Die Kugel mit dem Durchmesser EF ist daher die gesuchte, da sie gleich V ist.

Satz 2.

Ist BAB' *ein Kugelsegment,* BB' *ein Durchmesser der Grundfläche des Segments,* O *der Mittelpunkt der Kugel und* AA' *der Durchmesser der Kugel, der* BB' *in* M *halbiert, so ist das Volumen des Segments gleich dem eines Kegels, dessen Grundfläche dieselbe wie die des Segments und dessen Höhe* h *ist, wo*

$$h : AM = OA' + A'M : A'M.$$

Längs MA werde MH gleich h abgetragen und längs MA' MH' gleich h', wo

$$h' : A'M = OA + AM : AM.$$

Man denke sich die drei Kegel konstruiert, die O, H, H' zu Spitzen und die Grundfläche (BB') des Segments zur gemeinsamen Grundfläche haben. Man ziehe AB, $A'B$.

Es sei C ein Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Kugelsegments BAB', d. h. gleich einem Kreise mit dem Radius AB [I. 42], und dessen Höhe gleich OA ist.

Dann ist der Kegel C gleich dem körperlichen Sektor $OBAB'$ [I. 44].

Da nun $\quad HM : MA = OA' + A'M : A'M$,

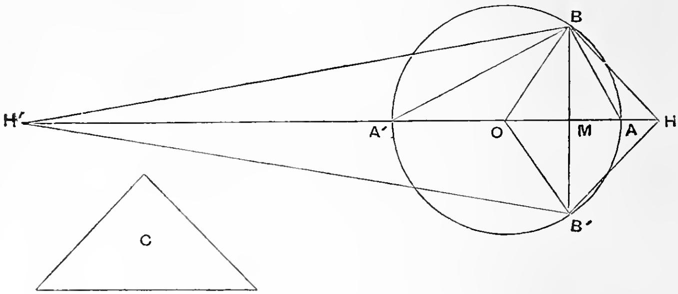
so folgt *dividendo* $\quad HA : AM = OA' : A'M$, und daraus *alternando* $\quad HA : AO = AM : MA'$,

so daß $\quad HO : OA = AA' : A'M$

$$= MA \cdot AA' : A'M \cdot MA$$

$$= AB^2 : BM^2$$

= (Grundfläche des Kegels C) : (Kreis mit dem Durchmesser BB').



Aber OA ist gleich der Höhe des Kegels C; da nun Kegel gleich sind, wenn ihre Grundflächen sich umgekehrt wie die Höhen verhalten, so folgt, daß der Kegel C (oder der körperliche Sektor $OBAB'$) gleich einem Kegel ist, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser BB' und dessen Höhe gleich OH ist.

Und dieser letzte Kegel ist gleich der Summe von zwei anderen mit derselben Grundfläche und den Höhen OM, MH, d. h. gleich dem körperlichen Rhombus $OBHB'$.

Somit ist der Sektor $OBAB'$ gleich dem Rhombus $OBHB'$.

Subtrahieren wir den gemeinsamen Bestandteil, den Kegel OBB', so folgt:

das Segment BAB' = dem Kegel HBB'.

Ähnlich können wir nach derselben Methode beweisen, daß das Segment $BA'B'$ = dem Kegel $H'BB'$.

Anderer Beweis der letzten Eigenschaft.

Es sei D ein Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der ganzen Kugel und dessen Höhe gleich OA ist.

Dann ist D gleich dem Volumen der Kugel. [I. 33, 34.].

Da nun $\quad OA' + A'M : A'M = HM : MA$,

so folgt *dividendo* und *alternando* wie vorher

$$OA : AH = A'M : MA.$$

Da $H'M : MA' = OA + AM : AM$,

so folgt wiederum $H'A' : OA = A'M : MA$

$= OA : AH$,

nach dem Obigen.

Componendo folgt $H'O : OA = OH : HA$ . . . . (1).

Durch Vertauschung ergibt sich

$H'O : OH = OA : AH$ . . . . (2),

und *componendo* $HH' : HO = OH : HA$

$= H'O : OA$, nach (1),

woraus folgt $HH' \cdot OA = H'O \cdot OH$ . . . . (3).

Da $H'O : OH = OA : AH$, nach (2),

$= A'M : MA$,

so folgt weiter

$$(H'O + OH)^2 : H'O \cdot OH = (A'M + MA)^2 : A'M \cdot MA,$$

und daraus infolge von (3)

$$HH'^2 : HH' \cdot OA = AA'^2 : A'M \cdot MA$$

oder $HH' : OA = AA'^2 : BM^2$.

Nun hat der Kegel D, der gleich der Kugel ist, zur Grundfläche einen Kreis, dessen Radius gleich AA' ist, und zur Höhe eine Strecke gleich OA.

Folglich ist dieser Kegel D gleich einem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser BB' und dessen Höhe gleich HH' ist; folglich ist

der Kegel D = dem Rhombus $HBH'B'$,

oder der Rhombus $HBH'B'$ = der Kugel.

Aber das Segment BAB' = dem Kegel HBB';

somit ist das übrigbleibende Segment $BA'B'$ gleich dem Kegel $H'BB'$.

Zusatz. *Das Segment BAB' verhält sich zu einem Kegel mit derselben Grundfläche und gleicher Höhe wie $OA' + A'M$ zu $A'M$.*

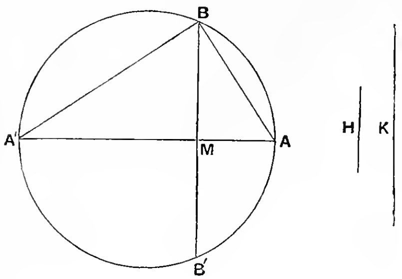
Satz 3. (Aufgabe.)

Eine gegebene Kugel mit einer Ebene so zu schneiden, daß die Oberflächen der Segmente zueinander ein gegebenes Verhältnis haben.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst. AA' sei ein Durchmesser eines größten Kreises der Kugel; eine auf AA' senkrechte Ebene schneide die Ebene des größten Kreises in der Geraden BB' und AA' in M und teile die Kugel so, daß die Oberfläche des Segments BAB' zu der des Segments $BA'B'$ das gegebene Verhältnis hat.

Nun sind diese Oberflächen bezüglich gleich Kreisen, deren Radien gleich AB, $A'B$ sind [I. 42, 43].

Folglich ist das Verhältnis $AB^2 : A'B^2$ gleich dem gegebenen Verhältnis, d. h. AM hat zu MA' das gegebene Verhältnis.



Demnach verläuft die Synthesis folgendermaßen.

Wenn $H:K$ das gegebene Verhältnis ist, teile man AA' in M so, daß

$$AM:MA' = H:K.$$

Ferner ist

$$AM:MA' = AB^2 : A'B^2$$

= (Kreis mit dem Radius AB) : (Kreis mit dem Radius $A'B$)

= (Oberfläche des Segments BAB') : (Oberfläche des Segments $BA'B'$).

Somit ist das Verhältnis der Oberflächen der Segmente gleich dem Verhältnis $H:K$.

Satz 4. (Aufgabe.)

Eine gegebene Kugel mit einer Ebene so zu schneiden, daß die Volumina der Segmente zu einander ein gegebenes Verhältnis haben.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und die gesuchte Ebene schneide den größten Kreis ABA' in der Linie BB' rechtwinklig. AA' sei der Durchmesser des größten Kreises, der auf BB' (im Mittelpunkte M) senkrecht steht, und O sei der Mittelpunkt der Kugel.

Man bestimme H auf der Verlängerung von OA und H' auf der Verlängerung von OA' so, daß

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA \quad \ldots \quad (1),$$

und

$$OA + AM : AM = H'M : MA' \quad \ldots \quad (2).$$

Man ziehe BH, $B'H$, BH', $B'H'$.

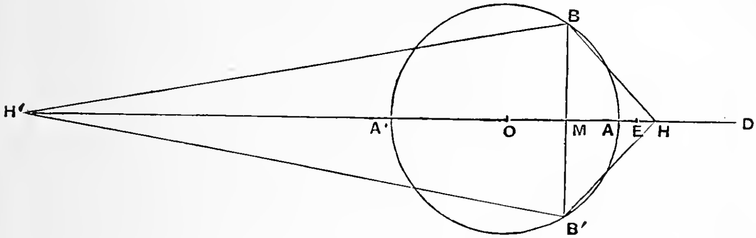
Dann sind die Kegel HBB', $H'BB'$ bezüglich gleich den Kugelsegmenten BAB', $BA'B'$ [Satz 2].

Folglich ist das Verhältnis der Kegel und damit das ihrer Höhen gegeben, d. h.

$$HM : H'M = \text{dem gegebenen Verhältnis} \quad . \; . \quad (3).$$

Wir haben also drei Gleichungen (1), (2), (3), in denen die Punkte M, H, H' noch unbestimmt sind, und es ist zunächst notwendig, aus ihnen eine andere Gleichung abzuleiten, in der nur einer dieser Punkte (M) vorkommt, d. h. wir haben sozusagen H und H' zu *eliminieren.*

Nun ist aus (3) klar, daß $HH' : H'M$ auch ein gegebenes Verhältnis ist; und Archimedes' Eliminationsverfahren besteht nun darin, daß er *erstens* Werte für die beiden Verhältnisse $A'H' : H'M$ und $HH' : H'A'$ findet, die beide von H und H' unabhängig sind, und daß er *zweitens* das Produkt dieser beiden Verhältnisse dem bekannten Werte des Verhältnisses $HH' : H'M$ gleichsetzt.



(a) Einen solchen Wert für $A'H' : H'M$ zu finden.

Aus der obigen Gleichung (2) folgt unmittelbar

$$A'H' : H'M = OA : OA + AM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

(b) Einen solchen Wert für $HH' : A'H'$ zu finden.

Aus (1) leiten wir ab

$$\begin{aligned} A'M : MA &= OA' + A'M : HM \\ &= OA' : AH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5); \end{aligned}$$

und aus (2)

$$\begin{aligned} A'M : MA &= H'M : OA + AM \\ &= A'H' : OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6). \end{aligned}$$

Folglich ist $HA : AO = OA' : A'H'$,

und daraus folgt $OH : OA' = OH' : A'H'$

oder $OH : OH' = OA' : A'H'$.

Daraus ergibt sich

$$HH' : OH' = OH' : A'H'$$

oder

$$HH' \cdot H'A' = OH'^2.$$

Folglich

$$\begin{aligned} HH' : H'A' &= OH'^2 : H'A'^2 \\ &= AA'^2 : A'M^2, \text{ wegen (6).} \end{aligned}$$

(c) Um die Verhältnisse $A'H' : H'M$ und $HH' : H'M$ einfacher auszudrücken, führen wir folgende Konstruktion aus: wir verlängern OA bis D, so daß $OA = AD$ ist. (D liegt jenseits von H, denn $A'M > MA$, und folglich nach (5) $OA > AH$.)

Dann ist $\quad A'H' : H'M = OA : OA + AM$

$$= AD : DM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Nun teilen wir AD in E so, daß

$$HH' : H'M = AD : DE \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Dann haben wir mit Benutzung der Gleichungen (8), (7) und des oben gefundenen Wertes von $HH' : H'A'$

$$\begin{aligned} AD : DE &= HH' : H'M \\ &= (HH' : H'A') \cdot (A'H' : H'M) \\ &= (AA'^2 : A'M^2) \cdot (AD : DM). \end{aligned}$$

Aber $\quad AD : DE = (DM : DE) \cdot (AD : DM)$.

Folglich $\quad MD : DE = AA'^2 : A'M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$

D ist gegeben, da $AD = OA$ ist. Auch das Verhältnis $AD : DE$ ist gegeben (da es gleich $HH' : H'M$ ist). Somit ist DE bekannt.

Folglich reduziert sich die Aufgabe auf die folgende: $A'D$ in M so zu teilen, daß

MD : (eine gegebene Strecke) = (eine gegebene Fläche) : $A'M^2$.

Archimedes fügt hinzu: „Wird die Aufgabe in dieser allgemeinen Form vorgelegt, so erfordert sie einen *διορισμός* [d. h. es ist notwendig, die Grenzen der Ausführbarkeit zu untersuchen], fügt man aber die in dem vorliegenden Falle geltenden Bedingungen hinzu, so ist kein *διορισμός* nötig."

In dem gegenwärtigen Falle lautet die Aufgabe:

Ist eine Strecke $A'A$ gegeben, und wird sie bis D verlängert, so daß $A'A = 2\,AD$ ist, und ist auf AD ein Punkt E gegeben, so soll AA' in einem Punkte M so geteilt werden, daß

$$AA'^2 : A'M^2 = MD : DE.$$

„Analysis und Synthesis für beide Aufgaben werde ich am Schlusse angeben.[1]"

Die Synthesis der Hauptaufgabe verläuft wie folgt. Es sei $R : S$ das gegebene Verhältnis, wo R kleiner als S ist. Wenn AA' ein Durchmesser eines größten Kreises und O der Mittelpunkt ist, verlängere man OA bis D, so daß $OA = AD$ ist, und teile AD in E so, daß

$$AE : ED = R : S.$$

Dann teile man AA' in M so, daß

$$MD : DE = AA'^2 : A'M^2.$$

---

[1]) Siehe die auf diesen Satz folgende Anmerkung.

In M errichte man die Perpendikular-Ebene zu AA'; diese Ebene teilt dann die Kugel in zwei Segmente, die sich wie R zu S verhalten sollen.

Man konstruiere H auf der Verlängerung von $A'A$ und H' auf der von AA', so daß

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$OA + AM : AM = H'M : MA' \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir haben dann zu zeigen, daß

$$HM : MH' = R : S \quad \text{oder} \quad AE : ED.$$

(α) Wir finden zunächst den Wert von $HH' : H'A'$, wie folgt.

Wie in der Analysis unter (b) gezeigt, gilt

$$HH' \cdot H'A' = OH'^2$$

oder
$$\begin{aligned} HH' : H'A' &= OH'^2 : H'A'^2 \\ &= AA'^2 : A'M^2 \\ &= MD : DE, \text{ nach Konstruktion.} \end{aligned}$$

(β) Ferner haben wir

$$\begin{aligned} H'A' : H'M &= OA : OA + AM \\ &= AD : DM. \end{aligned}$$

Folglich
$$\begin{aligned} HH' : H'M &= (HH' : H'A') \cdot (H'A' : H'M) \\ &= (MD : DE) \cdot (AD : DM) \\ &= AD : DE, \end{aligned}$$

woraus folgt
$$\begin{aligned} HM : MH' &= AE : ED \\ &= R : S. \end{aligned}$$

Q. e. d.

Anmerkung. Die Lösung der Hilfsaufgabe, auf die Archimedes die Hauptaufgabe des Satzes 4 zurückführt und deren Erörterung er verspricht, gibt in einer höchst interessanten und wichtigen Anmerkung Eutocius, der den Gegenstand mit folgender Erklärung einleitet.

„Er [Archimedes] verspricht, eine Lösung dieser Aufgabe am Ende zu geben, aber in keiner der Abschriften ist das Versprochene zu finden. Daher finden wir, daß auch Dionysodor die versprochene Erörterung vermißt und, da er die fehlende Hilfsaufgabe nicht bewältigen konnte, eine Lösung der ganzen Aufgabe auf abweichendem Wege unternommen hat, wovon ich später sprechen will. Auch Diokles spricht in seinem Werke περὶ πυρίων die Ansicht aus, Archimedes habe das Versprechen gemacht, aber nicht gehalten, und er versucht, das Fehlende selbst zu ergänzen. Diesen

Versuch werde ich später auch besprechen. Aber es wird sich zeigen, daß er mit der ausgelassenen Untersuchung nichts gemein hat, sondern eine Konstruktion nach selbständiger Beweismethode, wie die des Dionysodor, darstellt. Andrerseits habe ich dank unermüdlichem Suchen in einem alten Buche einige Sätze behandelt gefunden, die zwar wegen mancher Irrtümer nichts weniger als klar waren und in den Figuren viele Fehler enthielten, in der Hauptsache aber doch das boten, was ich suchte, und überdies zum Teil die von Archimedes angewandte dorische Mundart aufwiesen, während die in ältester Zeit gebräuchlichen Namen beibehalten waren, nämlich Schnitt eines rechtwinkligen Kegels für die Parabel und Schnitt eines stumpfwinkligen Kegels für die Hyperbel; daher kam ich auf die Vermutung, diese Sätze könnten vielleicht das sein, was er am Schlusse zu geben versprochen hatte. Deshalb beschäftigte ich mich gründlicher damit, und da mir der Text, so wie er mir vorlag, wegen der genannten vielen Fehler große Schwierigkeiten bereitete, machte ich mir den Sinn schrittweise klar und will, so gut ich kann, versuchen, ihn in gewohnter und klarer Sprache auseinanderzusetzen. Zuerst werde ich die Aufgabe allgemein behandeln, damit klar wird, was Archimedes über die Grenzen der Möglichkeit sagt; darauf soll die spezielle Anwendung auf die in seiner Analysis der Aufgabe enthaltenen Bedingungen folgen."

Die hieran sich anschließende Erörterung läßt sich folgendermaßen wiedergeben.

Die allgemeine Aufgabe ist:

Zwei Strecken AB, AC und eine Fläche D sind gegeben; AB soll in M so geteilt werden, daß

$$AM : AC = D : MB^2$$

wird.

Analysis.

Angenommen, M sei gefunden, und AC sei rechtwinklig zu AB gezeichnet. Man ziehe die Strecke CM und verlängere sie. Durch B werde parallel zu AC die Gerade EBN gezogen, die CM in N schneidet, und durch C parallel zu AB die Linie CHE, die EBN in E schneidet. Man vervollständige das Rechteck $CENF$ und ziehe durch M parallel zu AC die Gerade PMH, die FN in P schneidet.

Man trage EL auf EN so ab, daß

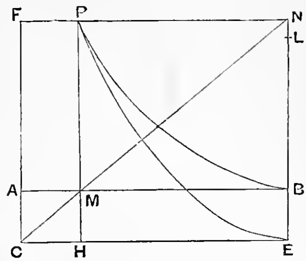
$$CE \cdot EL \text{ (oder } AB \cdot EL) = D.$$

Dann ist nach der Annahme

$$AM : AC = CE \cdot EL : MB^2.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACM und ENC folgt:

$$AM : AC = CE : EN$$
$$= CE \cdot EL : EL \cdot EN.$$



Somit ergibt sich:

$$PN^2 = MB^2 = EL \cdot EN.$$

Wird also eine Parabel mit dem Scheitel E, der Achse EN und dem Parameter EL beschrieben, so geht sie durch P; und sie ist der Lage nach gegeben, da EN gegeben ist.

Daher liegt P auf einer gegebenen Parabel.

Da die Rechtecke $FPHC$ und $ABEC$ gleich sind, gilt ferner:

$$FP \cdot PH = AB \cdot BE.$$

Wird also eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten CE und CF beschrieben, die durch B geht, so geht sie auch durch P; und diese Hyperbel ist der Lage nach gegeben.

Daher liegt P auf einer gegebenen Hyperbel.

Somit ist P als Schnittpunkt der Parabel und der Hyperbel bestimmt; und wenn P gefunden ist, so ist auch M gefunden.

διορισμός.

Da $$AM : AC = D : MB^2,$$
so ist $$AM \cdot MB^2 = AC \cdot D.$$

Aber $AC \cdot D$ ist gegeben, und *es wird später bewiesen werden, daß $AM \cdot MB^2$ seinen größten Wert dann erreicht, wenn $BM = 2\,AM$ ist.*

Somit ist eine notwendige Bedingung der Möglichkeit einer Lösung, daß $AC \cdot D$ nicht größer sein darf als $\frac{1}{3}AB \cdot (\frac{2}{3}AB)^2$ oder $\frac{4}{27}AB^3$.

Synthesis.

Ist O ein Punkt auf AB, so daß $BO = 2\,AO$, so haben wir als Bedingung für die Möglichkeit der Lösung gefunden:

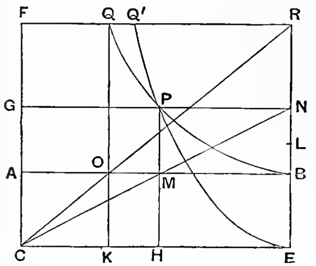
$$AC \cdot D \leqq AO \cdot OB^2.$$

Somit ist $AC \cdot D$ entweder gleich oder kleiner als $AO \cdot OB^2$.

(1) Ist $AC \cdot D = AO \cdot OB^2$, so löst der Punkt O selbst die Aufgabe.

(2) Es sei $AC \cdot D$ kleiner als $AO \cdot OB^2$. Man zeichne AC rechtwinklig zu AB. Man ziehe die Gerade CO. Durch B ziehe man die zu AC parallele Gerade EBR, die CO in R schneidet, und durch C

die zu AB parallele Geradė CE, die EBR in E schneidet. Man vervollständige das Rechteck $CERF$ und ziehe durch O parallel zu AC die Gerade QOK, die FR in Q und CE in K schneidet.



Da

$$AC \cdot D < AO \cdot OB^2,$$

so trage man auf RQ die Strecke RQ' so ab, daß

$$AC \cdot D = AO \cdot Q'R^2$$

oder

$$AO : AC = D : Q'R^2.$$

Auf ER trage man EL so ab, daß $D = CE \cdot EL$ (oder $AB \cdot EL$).

Da nun
$$AO : AC = D : Q'R^2$$
$$= CE \cdot EL : Q'R^2,$$

und $AO : AC = CE : ER$, wegen der Ähnlichkeit von Dreiecken,
$$= CE \cdot EL : EL \cdot ER,$$

so folgt
$$Q'R^2 = EL \cdot ER.$$

Man beschreibe eine Parabel mit dem Scheitel E, der Achse ER und dem Parameter EL. Diese Parabel geht dann durch Q'.

Ferner ist das Rechteck $FQKC$ gleich dem Rechteck $ABEC$, oder
$$FQ \cdot QK = AB \cdot BE;$$
und wenn wir eine durch B gehende gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten CE, CF beschreiben, so geht sie auch durch Q.

Die Parabel und die Hyperbel mögen sich in P schneiden; durch P werde parallel zu AC die Gerade PMH gezogen, die AB in M und CE in H schneidet, und parallel zu AB die Gerade GPN, die CF in G und ER in N schneidet.

Dann soll M der gesuchte Teilpunkt sein.

Da
$$PG \cdot PH = AB \cdot BE,$$
sind die Rechtecke $GPMA$ und $MBEH$ flächengleich, und folglich ist CMN eine gerade Linie.

Folglich
$$\left.\begin{aligned} AM : AC &= MB : BN \\ &= CE : EN \end{aligned}\right\} \text{wegen ähnlicher Dreiecke}$$
$$= CE \cdot EL : EL \cdot EN.$$

Es ist aber
$$CE \cdot EL = D,$$
und nach der Parabeleigenschaft
$$EL \cdot EN = PN^2 = MB^2.$$

Folglich
$$AM : AC = D : MB^2.$$

Beweis des διορισμός.

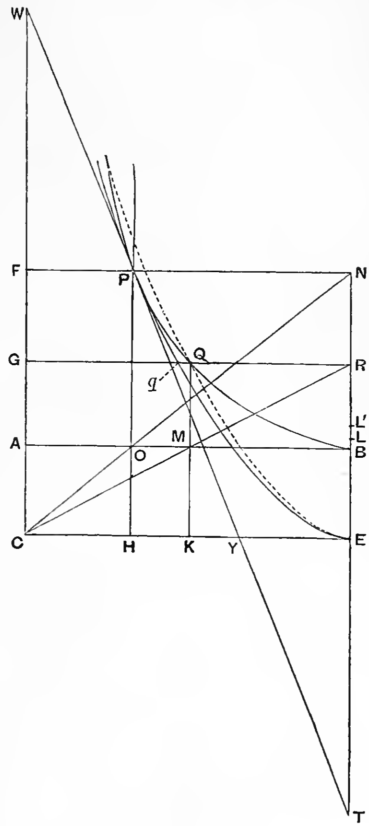
Es bleibt noch zu beweisen: *wird AB in O so geteilt, daß $BO = 2AO$, so ist $AO \cdot OB^2$ der größte Wert von $AM \cdot MB^2$ oder*

$$AO \cdot OB^2 > AM \cdot MB^2,$$

wo M irgend ein von O verschiedener Punkt auf AB ist.

Es sei $$AO : AC = CE \cdot EL' : OB^2,$$
so daß $$AO \cdot OB^2 = CE \cdot EL' \cdot AC.$$

Man ziehe die Verbindungslinie CO und verlängere sie bis N; EBN werde durch B parallel zu AC gezogen und das Rechteck $CENF$ vervollständigt.



Durch O ziehe man parallel zu AC die Linie POH, die FN in P und CE in H schneidet.

Mit dem Scheitel E, der Achse EN und dem Parameter EL' beschreibe man die Parabel. Diese geht durch P, wie oben in der Analysis gezeigt, und schneidet jenseits von P den Parabeldurchmesser CF in einem gewissen Punkte.

Sodann zeichne man die durch B gehende gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten CE und CF. Diese Hyperbel geht auch durch P, wie in der Analysis bewiesen.

Man verlängere NE bis T, so daß $TE = EN$ wird. Die Gerade TP schneide CE in Y und CF in W. TP muß die Parabel in P berühren.

Da nun $$BO = 2AO,$$
so ist auch $$TP = 2PW.$$
Andererseits ist $$TP = 2PY;$$
daher $$PW = PY.$$

Da nun die zwischen den Asymptoten liegende Strecke WY im Punkte P halbiert wird, d. i. in dem Punkte, den sie mit der Hyperbel gemeinsam hat, so ist WY eine Tangente der Hyperbel.

Da somit die Hyperbel und die Parabel in P eine gemeinsame Tangente haben, berühren sie einander im Punkte P.

Nun nehme man irgend einen Punkt M auf AB und ziehe durch M parallel zu AC die Linie QMK, wo Q der Schnittpunkt mit der Hyperbel, K der mit CE ist. Schließlich ziehe man durch Q parallel zu AB die Gerade $GqQR$, die CF in G, die Parabel in q und EN in R schneidet.

Da wegen der Hyperbeleigenschaft die Rechtecke $GQKC$ und $ABEC$ gleich sind, ist CMR eine gerade Linie. Wegen der Eigenschaft der Parabel ist

$$qR^2 = EL' \cdot ER,$$

so daß

$$QR^2 < EL' \cdot ER.$$

Es sei

$$QR^2 = EL \cdot ER;$$

wir haben also

$$\begin{aligned} AM : AC &= CE : ER \\ &= CE \cdot EL : EL \cdot ER \\ &= CE \cdot EL : QR^2 \\ &= CE \cdot EL : MB^2 \end{aligned}$$

oder

$$AM \cdot MB^2 = CE \cdot EL \cdot AC.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} AM \cdot MB^2 &< CE \cdot EL' \cdot AC \\ &< AO \cdot OB^2. \end{aligned}$$

Ist $AC \cdot D < AO \cdot OB^2$, so gibt es zwei Lösungen, da die Hyperbel zwei Schnittpunkte mit der Parabel hat.

Denn zeichnen wir mit dem Scheitel E und der Achse EN eine Parabel, deren Parameter gleich EL ist, so geht diese Parabel durch den Punkt Q (siehe die letzte Figur); und da die Parabel den Durchmesser CF jenseits von Q schneidet, muß sie die Hyperbel zum zweiten Male schneiden (denn diese hat CF zur Asymptote).

[Setzen wir $AB = a$, $BM = x$, $AC = c$ und $D = b^2$, so geht die Proportion

$$AM : AC = D : MB^2$$

über in die Gleichung

$$x^2 (a - x) = b^2 c,$$

d. h. in eine *kubische Gleichung,* in der das Glied mit x fehlt.

Denken wir uns EN, EC als Koordinatenachsen und zwar EN als y-Achse, so ist die in der obigen Lösung benutzte Parabel

$$x^2 = \frac{b^2}{a} \cdot y,$$

und die gleichseitige Hyperbel ist

$$y (a - x) = ac.$$

Somit erhält man die Lösung der kubischen Gleichung und die Bedingungen, unter denen keine oder eine oder zwei positive Lösungen vorhanden sind, mit Hilfe der beiden Kegelschnitte.]

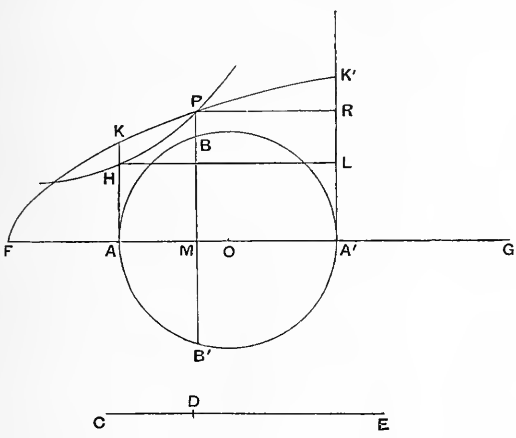
[Die von Dionysodor und Diokles angegebenen interessanten Lösungen der Hauptaufgabe des Satzes 4 seien der Vollständigkeit halber hier eingeschoben.

Dionysodors Lösung.

AA' sei ein Durchmesser der gegebenen Kugel. Es soll eine Ebene gefunden werden, die auf AA' (in einem Punkte M) senkrecht steht, so daß die entstehenden Segmente der Kugel ein gegebenes Verhältnis (etwa $CD:DE$) haben.

Man verlängere $A'A$ bis F, so daß $AF = OA$ wird, wo O der Mittelpunkt der Kugel ist.

Auf AA' errichte man das Lot AH, dessen Länge der Proportion
$$FA:AH = CE:ED$$
genügt; AH verlängere man bis K, so daß
$$AK^2 = FA \cdot AH \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$



Man beschreibe die Parabel, die F zum Scheitel, FA zur Achse und AH zum Parameter hat. Diese geht wegen der Gleichung (α) durch K.

$A'K'$ ziehe man parallel zu AK bis zum Schnittpunkte mit der Parabel, K'; mit $A'F$, $A'K'$ als Asymptoten beschreibe man die gleichseitige Hyperbel, die durch H geht. Diese Hyperbel schneidet die Parabel zwischen K und K' in einem Punkte P.

Auf AA' fälle man das Lot PM, das den größten Kreis in B und B' schneidet, und durch H und P ziehe man parallel zu AA' die Geraden HL, PR, die $A'K'$ bezüglich in L, R schneiden.

Dann ist infolge der Eigenschaft der Hyperbel

$$MP \cdot PR = AH \cdot HL,$$

d. h.
$$PM \cdot MA' = HA \cdot AA'$$

oder
$$PM : AH = AA' : A'M$$

und
$$PM^2 : AH^2 = AA'^2 : A'M^2.$$

Ferner ist infolge der Eigenschaft der Parabel

$$PM^2 = FM \cdot AH,$$

d. h.
$$FM : PM = PM : AH$$

oder
$$FM : AH = PM^2 : AH^2$$

$$= AA'^2 : A'M^2, \text{ nach dem obigen Ergebnis.}$$

Wir denken uns nun die folgenden beiden Kegel konstruiert. Der eine hat den Kreis mit dem Radius $A'M$ zur Grundfläche und FM zur Höhe, der andere den Kreis mit dem Radius AA' zur Grundfläche und AH zur Höhe. Da sich Kreise wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, so verhalten sich nach der zuletzt gewonnenen Proportion die Grundflächen dieser Kegel umgekehrt wie ihre Höhen.

Folglich sind die Kegel gleich; d. h. wenn wir den ersten Kegel durch das Symbol $\mathfrak{K}(A'M)$, FM bezeichnen, usf.

$$\mathfrak{K}(A'M),\ FM = \mathfrak{K}(AA'),\ AH.$$

Nun gilt

$$\mathfrak{K}(AA'),\ FA : \mathfrak{K}(AA'),\ AH = FA : AH$$

$$= CE : ED, \text{ nach Konstruktion.}$$

Folglich

$$\mathfrak{K}(AA'),\ FA : \mathfrak{K}(A'M),\ FM = CE : ED \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Aber (1) $\mathfrak{K}(AA')$, FA ist gleich der Kugel. [I. 34]

(2) Es läßt sich beweisen, daß $\mathfrak{K}(A'M)$, FM gleich dem Kugelsegment ist, das A' zum Scheitel und $A'M$ zur Höhe hat.

Man nehme G auf der Verlängerung von AA' so an, daß die folgende Proportion gilt:

$$GM : MA' = FM : MA$$

$$= OA + AM : AM.$$

Dann ist der Kegel GBB' gleich dem Segment $A'BB'$ [Satz 2].

Und
$$FM : MG = AM : MA', \text{ nach Annahme,}$$

$$= BM^2 : A'M^2.$$

Folglich

$$(\text{Kreis mit dem Radius } BM) : (\text{Kreis mit dem Radius } A'M) = FM : MG,$$

so daß $\quad \mathfrak{K}(A'M),\ FM = \mathfrak{K}(BM),\ MG$

$$= \text{Segment } A'BB'.$$

Wir haben daher aus der obigen Gleichung (β)

$$(\text{Kugel}) : (\text{Segment } A'BB') = CE : ED,$$

woraus folgt

$$(\text{Segment } ABB') : (\text{Segment } A'BB') = CD : DE.$$

Diokles' Lösung.

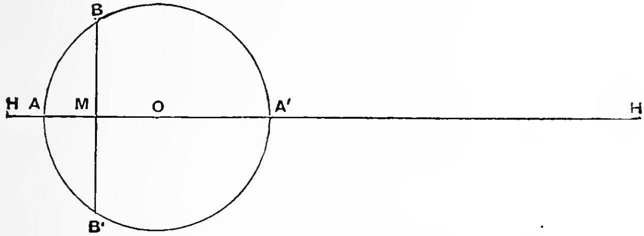
Diokles geht, wie Archimedes, von der in Satz 2 bewiesenen Eigenschaft aus, wenn die Schnittebene einen Kugeldurchmesser AA' in M rechtwinklig schneidet, und wenn H, H' bezüglich auf den Verlängerungen von OA, OA' so gewählt werden, daß die Proportionen

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA,$$
$$OA + AM : AM = H'M : MA'$$

gelten, daß dann die Kegel HBB', $H'BB'$ bezüglich gleich den Segmenten ABB', $A'BB'$ sind.

Nachdem er gefolgert hat

$$HA : AM = OA' : A'M,$$
$$H'A' : A'M = OA : AM,$$



spricht er die Aufgabe in folgender Form aus, indem er sie durch Substitution einer *beliebigen* Strecke für OA oder OA' ein wenig verallgemeinert:

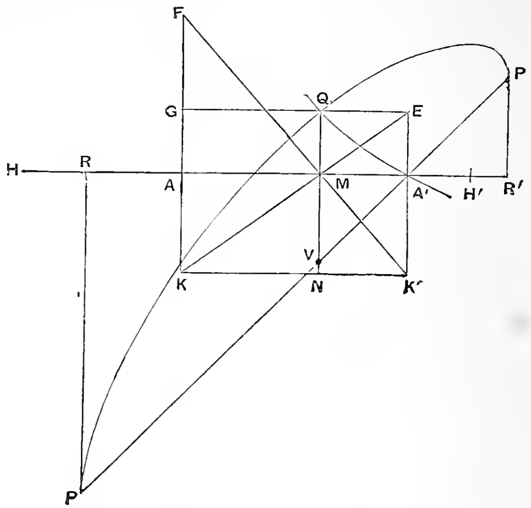
Gegeben sind eine Strecke AA', ihre Endpunkte A, A', ein Verhältnis $C : D$ und eine andere Strecke AK; AA' soll in M geteilt und zwei Punkte H, H' bezüglich auf den Verlängerungen von $A'A$ und AA' gefunden werden, so daß die folgenden Beziehungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} C : D &= HM : MH' \\ HA : AM &= AK : A'M \\ H'A' : A'M &= AK : AM \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\ldots\ldots\ (\alpha), \\ &\ldots\ldots\ (\beta), \\ &\ldots\ldots\ (\gamma). \end{aligned}$$

Analysis.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und die Punkte M, H, H' gefunden.

AK lege man rechtwinklig an AA' an und ziehe $A'K'$ parallel und gleich AK. Man ziehe KM, $K'M$ und verlängere sie, bis sie $K'A'$, KA bezüglich in E, F schneiden. Man verbinde K mit K', ziehe durch E parallel zu $A'A$ die Gerade EG, die KF in G schneidet, und durch M parallel zu AK die Gerade QMN, die EG in Q und KK' in N schneidet.



Nun ist $\quad HA : AM = A'K' : A'M$, nach (β),

$\qquad = FA : AM$, infolge ähnlicher Dreiecke,

woraus folgt $\quad HA = FA$.

Ähnlich $\quad H'A' = A'E$.

Ferner gilt

$$FA + AM : A'K' + A'M = AM : A'M$$

$$= AK + AM : EA' + A'M,$$ infolge ähnlicher Dreiecke.

Daraus folgt

$$(FA + AM) \cdot (EA' + A'M) = (KA + AM) \cdot (K'A' + A'M).$$

Wir tragen AR längs AH und $A'R'$ längs $A'H'$ so ab, daß

$$AR = A'R' = AK.$$

Da nun $FA + AM = HM$, $EA' + A'M = MH'$, so haben wir

$$HM \cdot MH' = RM \cdot MR' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta).$$

(Fällt also R zwischen A und H, so fällt R' außerhalb der Strecke $A'H'$ und umgekehrt.)

Nun gilt

$$C:D = HM:MH', \text{ nach Annahme,}$$
$$= HM\cdot MH':MH'^2$$
$$= RM\cdot MR':MH'^2, \text{ nach } (\delta).$$

Auf MN tragen wir die Strecke MV ab, die gleich $A'M$ ist. Wir ziehen die Gerade $A'V$. Auf RR' errichten wir die Lote RP, $R'P'$, bis sie $A'V$ bezüglich in P, P' schneiden. Da der Winkel $MA'V$ ein halber rechter ist, so ist PP' der Lage nach gegeben, und da R, R' gegeben sind, so sind auch P, P' gegeben.

Infolge der Eigenschaften paralleler Geraden gilt

$$P'V:PV = R'M:MR.$$

Folglich $$PV\cdot P'V:PV^2 = RM\cdot MR':RM^2.$$

Aber $$PV^2 = 2\,RM^2,$$

daher $$PV\cdot P'V = 2\,RM\cdot MR'.$$

Oben ist bewiesen, daß

$$RM\cdot MR':MH'^2 = C:D.$$

Somit $$PV\cdot P'V:MH'^2 = 2\,C:D.$$

Aber $$MH' = A'M + A'E = VM + MQ = QV.$$

Folglich $$QV^2:PV\cdot P'V = D:2\,C,$$

d. h. das Verhältnis $QV^2:PV\cdot P'V$ ist gegeben.

Wählen wir nun eine Strecke p, so daß

$$D:2\,C = p:PP'$$ [1]

wird und beschreiben wir eine Ellipse mit PP' als Durchmesser und p als zugehörigem Parameter [$= DD'^2/PP'$ in der für die Kegelschnitte gebräuchlichen Bezeichnungsweise] und so, daß die Ordinaten gegen PP' unter einem halben rechten Winkel geneigt sind, d. h. zu QV oder AK parallel, dann geht die Ellipse durch Q.

[1]) Hier ist im griechischen Text ein Fehler, der bis heute allen Herausgebern entgangen zu sein scheint. Die Stelle lautet: ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν, ὡς τὴν Δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ, οὕτως τὴν ΤΥ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν Φ, d. h. (mit den obigen Benennungen) „Wenn wir eine Strecke p nehmen, so daß $D:2C = PP':p$ wird." Das kann nicht richtig sein, weil wir dann hätten

$$QV^2:PV\cdot PV' = PP':p,$$

während die beiden letzten Glieder zu vertauschen sind, da die korrekte Eigenschaft der Ellipse ist:

$$QV^2:PV\cdot PV' = p:PP'. \quad \text{[Apollonius I. 21].}$$

Der Fehler ist wohl mindestens so alt wie Eutocius, ich halte es jedoch für wahrscheinlicher, daß Eutocius ihn gemacht hat, als Diokles selbst, da es eher möglich ist, daß ein intelligenter Mathematiker beim Abschreiben eines fremden Werkes einen solchen Fehler selbst macht, als daß er ihn in seinem Original übersieht.

Somit liegt Q auf einer der Lage nach gegebenen Ellipse.

Da EK Diagonale in dem Rechteck $GEK'K$ ist, so ist ferner

$$GQ \cdot QN = AA' \cdot A'K'.$$

Beschreibt man also die durch A' gehende gleichseitige Hyperbel mit KG, KK' als Asymptoten, so geht sie auch durch Q.

Folglich liegt Q auf einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel.

Somit ist Q als Schnittpunkt einer gegebenen Ellipse und einer gegebenen Hyperbel bestimmt und daher auch gegeben. Mithin ist M gegeben und H, H' sind sofort zu finden.

Synthesis.

Man zeichne AA', AK zueinander rechtwinklig, ziehe $A'K'$ parallel und gleich AK und verbinde K mit K'.

Man mache AR (auf der Verlängerung von $A'A$ abgetragen) und $A'R'$ (auf der Verlängerung von AA' abgetragen) beide gleich AK und errichte in R und R' die Lote auf RR'.

Dann ziehe man PP' durch A', so daß der Winkel $AA'P$ ein halber rechter wird; die Schnittpunkte dieser Geraden mit den eben gezogenen Loten sind bezüglich P, P'.

Man wähle die Strecke p so, daß die Beziehung

$$D : 2\,C = p : PP'$$ [1]

erfüllt wird, und beschreibe mit PP' als Durchmesser und p als zugehörigem Parameter eine Ellipse, so daß die Neigungswinkel der Ordinaten gegen PP' gleich dem Winkel $AA'P$, d. h. die Ordinaten parallel zu AK sind.

Mit KA, KK' als Asymptoten konstruiere man die durch A' gehende gleichseitige Hyperbel.

Die Hyperbel und die Ellipse mögen sich in Q schneiden, und durch Q ziehe man senkrecht zu AA' die Gerade $QMVN$, die AA' in M, PP' in V und KK' in N schneidet. Ebenso ziehe man parallel zu AA' die Gerade GQE, die AK, $A'K'$ bezüglich in G, E schneidet.

KA und $K'M$ verlängere man bis zu ihrem Schnittpunkte F.

Dann folgt aus der Eigenschaft der Hyperbel

$$GQ \cdot QN = AA' \cdot A'K',$$

und, da diese Rechtecke gleich sind, ist KME eine gerade Linie.

Längs AR trage man AH gleich AF und längs $A'R'$ $A'H'$ gleich $A'E$ ab.

---

[1] Hier wiederholt sich im griechischen Text der auf Seite 219 erwähnte Fehler.

Aus der Eigenschaft der Ellipse folgt

$$QV^2 : PV \cdot P'V = p : PP'$$
$$= D : 2\,C.$$

Da die Geraden PR, VM, $P'R'$ parallel sind, so folgt

$$PV : P'V = RM : R'M$$

oder
$$PV \cdot P'V : P'V^2 = RM \cdot MR' : R'M^2,$$

während $P'V^2 = 2\,R'M^2$, da $RA'P$ ein halber rechter Winkel ist.

Somit ist
$$PV \cdot P'V = 2\,RM \cdot MR',$$

woraus folgt
$$QV^2 : 2\,RM \cdot MR' = D : 2\,C.$$

Aber
$$QV = EA' + A'M = MH'.$$

Folglich
$$RM \cdot MR' : MH'^2 = C : D.$$

Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgt

$$FA + AM : K'A' + A'M = AM : A'M$$
$$= KA + AM : EA' + A'M.$$

Mithin ist

$$(FA + AM) \cdot (EA' + A'M) = (KA + AM) \cdot (K'A' + A'M)$$

oder
$$HM \cdot MH' = RM \cdot MR'.$$

Es folgt, daß

$$HM \cdot MH' : MH'^2 = C : D$$

oder
$$HM : MH' = C : D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Ferner ist
$$HA : AM = FA : AM$$
$$= A'K' : A'M \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

und
$$H'A' : A'M = EA' : A'M$$
$$= AK : AM \quad \ldots\ldots \quad (\gamma).$$

Somit genügen die Punkte M, H, H' den drei gegebenen Beziehungen.]

Satz 5. (Aufgabe.)

Ein Kugelsegment zu konstruieren, das einem gegebenen Segment ähnlich und einem anderen gleich ist.

Es sei ABB' ein Segment, dessen Scheitel A und dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesssr BB' ist, und DEF ein anderes Segment, dessen Scheitel D und dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser EF ist. AA', DD' seien Durchmesser der größten Kugelkreise, die bezüglich durch BB', EF gehen, und O, C seien die Kugelmittelpunkte.

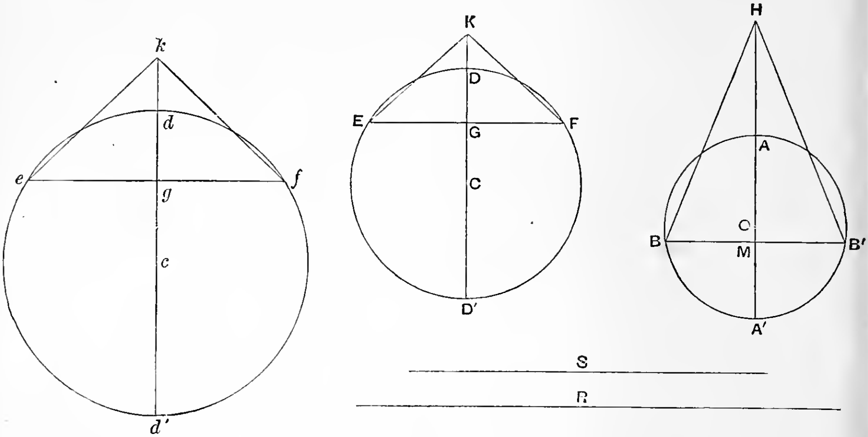
Es sei nun verlangt, ein Segment zu konstruieren, das dem Segment DEF ähnlich und ABB' an Rauminhalt gleich ist.

Analysis.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und def das gesuchte Segment, d der Scheitel und ef der Durchmesser der Grundfläche. Es sei dd' der Kugeldurchmesser, der ef halbiert, c der Mittelpunkt der Kugel.

M, G, g seien die Punkte, in denen BB', EF, ef bezüglich von AA', DD', dd' rechtwinklig geschnitten werden; man verlängere OA, CD, cd bezüglich bis H, K, k, so daß die Bedingungen

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA,$$
$$CD' + D'G : D'G = KG : GD,$$
$$cd' + d'g : d'g = kg : gd$$



erfüllt sind, und denke sich die Kegel mit den Spitzen H, K, k und denselben Grundflächen wie die entsprechenden Segmente konstruiert. Die Kegel sind dann den Segmenten bezüglich gleich [Satz 2].

Somit sind nach der Annahme die Kegel HBB' und kef einander gleich.

Folglich gilt

(Kreis mit dem Durchmesser BB') : (Kreis mit dem Durchmesser ef)

$$= kg : HM,$$

so daß $$BB'^2 : ef^2 = kg : HM \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Aber da die Segmente DEF und def ähnlich sind, so sind es auch die Kegel KEF und kef; folglich

$$KG : EF = kg : ef.$$

Das Verhältnis $KG : EF$ ist gegeben, folglich auch das Verhältnis $kg : ef$.

Eine Strecke R werde so gewählt, daß

$$kg : ef = HM : R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird; R ist also gegeben.

Da nun $kg : HM = BB'^2 : ef^2 = ef : R$, nach (1) und (2), so denke man eine Strecke S so gewählt, daß

$$ef^2 = BB' \cdot S$$

oder

$$BB'^2 : ef^2 = BB' : S.$$

Folglich

$$BB' : ef = ef : S = S : R,$$

d. h. *ef und S sind zwei mittlere Proportionalen in stetiger Proportion zwischen BB' und R.*

Synthesis.

ABB', DEF seien größte Kreise, AA', DD' die Durchmesser, die BB', EF bezüglich in M, G halbieren, und O, C die Mittelpunkte.

Die Punkte H, K wähle man ebenso wie vorher und konstruiere die Kegel HBB', KEF, die deshalb gleich den entsprechenden Segmenten ABB', DEF sind.

Die Strecke R konstruiere man entsprechend der Proportion

$$KG : EF = HM : R,$$

und zwischen BB' und R nehme man zwei mittlere Proportionalen ef, S.

Mit ef als Grundlinie konstruiere man ein Kreissegment mit dem Scheitel d, das dem Kreissegment DEF ähnlich ist. Man vervollständige den Kreis, nenne den durch d gehenden Durchmesser dd' und den Mittelpunkt c. Man denke sich die Kugel konstruiert, von der def ein größter Kreis ist, und lege durch ef die zu dd' senkrechte Ebene.

Dann ist def das gesuchte Kugelsegment.

Denn die Kugelsegmente DEF, def sind ähnlich, da die Kreissegmente DEF, def ähnlich sind.

Man verlängere cd bis k, so daß die Proportion gilt:

$$cd' + d'g : d'g = kg : gd.$$

Dann sind die Kegel KEF, kef ähnlich.

Daraus folgt

$$kg : ef = KG : EF = HM : R,$$

und daraus wieder

$$kg : HM = ef : R.$$

Aber da sich BB', ef, S, R in stetiger Proportion befinden, so gilt

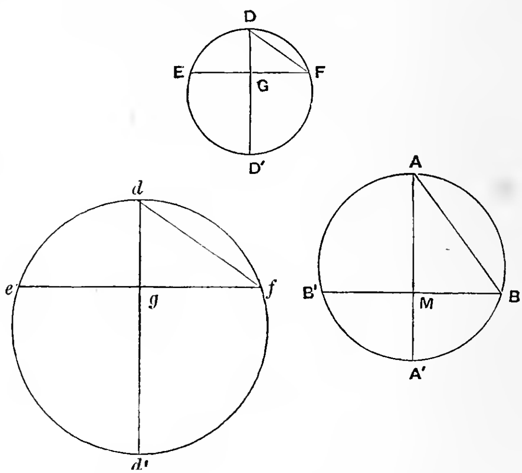
$$\begin{aligned} BB'^2 : ef^2 &= BB' : S \\ &= ef : R \\ &= kg : HM. \end{aligned}$$

Die Grundflächen der Kegel HBB', kef verhalten sich also umgekehrt wie ihre Höhen. Die Kegel sind deshalb gleich, und def ist das gesuchte Segment, da es an Rauminhalt dem Kegel kef gleich ist.

Satz 6. (Aufgabe.)

Wenn zwei Kugelsegmente gegeben sind, ein drittes Kugelsegment zu finden, das einem der gegebenen Segmente ähnlich und dessen Oberfläche gleich der des anderen ist.

ABB' sei das Segment, dessen Oberfläche die Oberfläche des gesuchten Segments gleich gemacht werden soll, $ABA'B'$ der größte Kreis, dessen Ebene die Grundfläche des Segments ABB' in BB' rechtwinklig schneidet. AA' sei der zu BB' senkrechte Durchmesser.



DEF sei das Segment, dem das gesuchte Segment ähnlich werden soll, $DED'F$ der größte Kreis, der die Grundfläche des Segments in EF rechtwinklig schneidet; DD' sei der auf EF im Mittelpunkte G senkrecht stehende Durchmesser.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und def ein Segment, das zu DEF ähnlich und dessen Oberfläche der von ABB' gleich ist; die Figur für def vervollständige man ebenso wie die für DEF, wobei entsprechende Punkte entsprechend durch kleine und große Buchstaben bezeichnet seien.

Man ziehe die Verbindungslinien AB, DF, df.

Da nun die Oberflächen der Segmente def, ABB' gleich sind, so sind es auch die Kreise mit den Radien df, AB; [I. 42, 43] d. h. $df = AB$.

Aus der Ähnlichkeit der Segmente DEF, def ergibt sich

$$d'd : dg = D'D : DG,$$

und

$$dg : df = DG : DF;$$

daraus folgt

$$d'd : df = D'D : DF$$

oder

$$d'd : AB = D'D : DF.$$

Aber AB, $D'D$, DF sind sämtlich gegeben; somit ist auch $d'd$ gegeben.

Demnach ergibt sich die folgende Synthesis.

Man konstruiere $d'd$ entsprechend der Proportion

$$d'd : AB = D'D : DF \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Mit $d'd$ als Durchmesser beschreibe man den Kreis und denke sich die Kugel konstruiert, von der dieser ein größter Kreis ist.

In g teile man $d'd$ so, daß

$$d'g : gd = D'G : GD$$

wird, und lege durch g die Perpendikularebene zu $d'd$, die das Segment def von der Kugel abschneidet und die Ebene des größten Kreises in ef schneidet. Dann sind die Segmente def, DEF ähnlich und $dg : df = DG : DF$.

Aus dem Obigen folgt *componendo*

$$d'd : dg = D'D : DG.$$

Aus den letzten beiden Proportionen folgt *ex aequali*

$$d'd : df = D'D : DF,$$

und daraus wegen (1)

$$df = AB.$$

Somit hat das Segment def eine gleich große Oberfläche wie das Segment ABB' [I. 42, 43], während es dem Segment DEF ähnlich ist.

Satz 7. (Aufgabe.)

Von einer gegebenen Kugel ist durch eine Ebene ein Segment so abzuschneiden, daß es zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Höhe ein gegebenes Verhältnis hat.

AA' sei ein Durchmesser eines größten Kugelkreises. Es ist verlangt, eine zu AA' senkrechte Ebene zu legen, die ein Segment ABB' abschneidet, so daß das Segment ABB' zu dem Kegel ABB' ein gegebenes Verhältnis hat.

Analysis.

Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und die Schnittebene schneide die Ebene des größten Kreises in BB', den Durchmesser AA' in M. Der Mittelpunkt der Kugel heiße O.

Man verlängere OA bis H, so daß die Beziehung gilt

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dann ist der Kegel HBB' gleich dem Segment ABB'. [Satz 2]

Daher muß das gegebene Verhältnis gleich dem Verhältnis des Kegels HBB' zu dem Kegel ABB', d. h. gleich dem Verhältnis $HM : MA$ sein.

Somit ist das Verhältnis $OA' + A'M : A'M$ und daher auch $A'M$ gegeben.

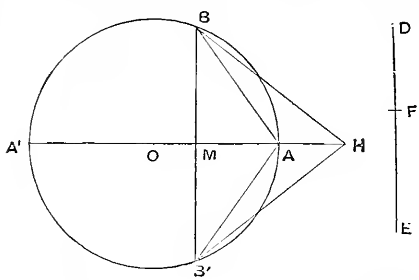
διορισμός.

Nun ist $\quad OA' : A'M > OA' : A'A,$

so daß $\quad OA' + A'M : A'M > OA' + A'A : A'A$
$\qquad > 3 : 2.$

Für die Möglichkeit der Lösung ist also die Bedingung notwendig, daß das gegebene Verhältnis größer als $3:2$ ist.

Die **Synthesis** verläuft folgendermaßen.



Es sei AA' ein Durchmesser eines größten Kreises, O der Mittelpunkt der Kugel.

Man nehme eine Strecke DE und auf ihr einen Punkt F so an, daß $DE : EF$ gleich dem gegebenen Verhältnis ist, und dieses sei größer als $3 : 2$.

Da nun $\quad OA' + A'A : A'A = 3 : 2,$

so ist $\quad DE : EF > OA' + A'A : A'A$

oder $\quad DF : FE > OA' : A'A.$

Daher läßt sich auf AA' ein Punkt M so finden, daß

$$DF : FE = OA' : A'M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird.

Durch M lege man die zu AA' senkrechte Ebene, welche die Ebene des größten Kreises in BB' schneidet und von der Kugel das Segment ABB' abschneidet.

Wie vorher wähle man auf der Verlängerung von OA den Punkt H gemäß der Proportion

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA.$$

Folglich ist $HM : MA = DE : EF$, wegen (2).

Es folgt, daß der Kegel HBB' oder das Segment ABB' zu dem Kegel ABB' das gegebene Verhältnis $DE : EF$ hat.

Satz 8.

Wird eine Kugel durch eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Ebene in zwei Segmente $A'BB'$, ABB' zerschnitten, von denen $A'BB'$ das größere ist, dann ist das Verhältnis

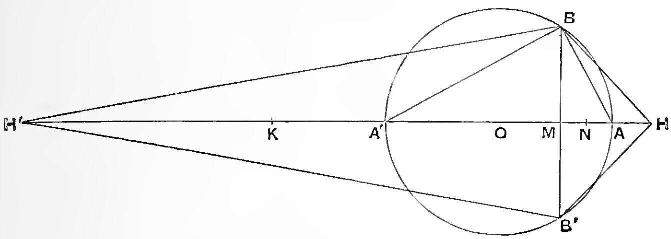
$$(\textit{Segment } A'BB') : (\textit{Segment } ABB')$$
$$< (\textit{Oberfläche von } A'BB')^2 : (\textit{Oberfläche von } ABB')^2$$

aber
$$> (\textit{Oberfläche von } A'BB')^{\frac{3}{2}} : (\textit{Oberfläche von } ABB')^{\frac{3}{2}}.[1]$$

Die Schnittebene schneide den größten Kreis $A'BAB'$ rechtwinklig in BB', und AA' sei der auf BB' in M senkrecht stehende Durchmesser.

O sei der Mittelpunkt der Kugel.

Man verbinde B mit A und A'.



Wie gewöhnlich wähle man H auf der Verlängerung von OA und H' auf der Verlängerung von OA' gemäß den Proportionen

$$OA' + A'M : A'M = HM : MA \quad . \; . \; . \quad (1),$$
$$OA + AM : AM = H'M : MA' \quad . \; . \; . \quad (2),$$

und denke man sich die Kegel konstruiert, die beide dieselbe Grundfläche wie die Segmente und bezüglich H und H' zu Spitzen haben. Die Kegel sind dann bezüglich gleich den Segmenten [Satz 2], und sie verhalten sich wie ihre Höhen HM, $H'M$.

Ferner gilt die Proportion:

$$(\text{Oberfläche von } A'BB') : (\text{Oberfläche von } ABB')$$
$$= A'B^2 : AB^2 \qquad [\text{I. } 42, 43]$$
$$= A'M : AM.$$

---

[1]) Das ist in der Sprache des Archimedes so ausgedrückt, daß das größere Segment zu dem kleineren ein Verhältnis habe „kleiner als das Zweifache (διπλάσιον) dessen, welches die Oberfläche des größeren Segments zu der des kleineren hat, aber größer als das Einundeinhalbfache (ἡμιόλιον) [dieses Verhältnisses]“.

Wir haben also die Richtigkeit der folgenden beiden Beziehungen nachzuweisen

(a) $$H'M : MH < A'M^2 : MA^2,$$

(b) $$H'M : MH > A'M^{\frac{3}{2}} : MA^{\frac{3}{2}}.$$

(a) Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} A'M : AM &= H'M : OA + AM \\ &= H'A' : OA', \text{ da } OA = OA'. \end{aligned}$$

Da $A'M > AM$, so folgt $H'A' > OA'$; nehmen wir also K auf $H'A'$ so an, daß $OA' = A'K$ ist, so liegt K zwischen H' und A'.

Wegen (1) ist dann

$$A'M : AM = KM : MH.$$

Somit ist $$\begin{aligned} KM : MH &= H'A' : A'K, \text{ da } A'K = OA', \\ &> H'M : MK. \end{aligned}$$

Folglich $$H'M \cdot MH < KM^2.$$

Daraus folgt nun

$$H'M \cdot MH : MH^2 < KM^2 : MH^2,$$

oder $$\begin{aligned} H'M : MH &< KM^2 : MH^2 \\ &< A'M^2 : AM^2, \text{ wegen (1).} \end{aligned}$$

(b) Da $OA' = OA$, so gilt

$$A'M \cdot MA < A'O \cdot OA$$

oder $$\begin{aligned} A'M : OA' &< OA : AM \\ &< H'A' : A'M, \text{ infolge von (2).} \end{aligned}$$

Folglich $$\begin{aligned} A'M^2 &< H'A' \cdot OA' \\ &< H'A' \cdot A'K. \end{aligned}$$

Man nehme nun einen Punkt N auf $A'A$ so an, daß der folgenden Beziehung genügt wird.

$$A'N^2 = H'A' \cdot A'K.$$

Folglich $$H'A' : A'K = A'N^2 : A'K^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Es folgt ferner

$$H'A' : A'N = A'N : A'K$$

und, *componendo*,

$$H'N : A'N = NK : A'K,$$

woraus sich ergibt

$$A'N^2 : A'K^2 = H'N^2 : NK^2.$$

Folglich gilt wegen (3)

$$H'A' : A'K = H'N^2 : NK^2.$$

Nun ist $$H'M : MK > H'N : NK.$$

Folglich $H'M^2 : MK^2 > H'A' : A'K$
$$> H'A' : OA'$$
$$> A'M : MA, \text{ wegen (2), wie oben,}$$
$$> OA' + A'M : MH, \text{ wegen (1),}$$
$$> KM : MH.$$

Somit ist
$$H'M^2 : MH^2 = (H'M^2 : MK^2) \cdot (MK^2 : MH^2)$$
$$> (KM : MH) \cdot (KM^2 : MH^2).$$

Es folgt $H'M : MH > KM^{\frac{3}{2}} : MH^{\frac{3}{2}}$
$$> A'M^{\frac{3}{2}} : MA^{\frac{3}{2}}, \text{ wegen (1).}$$

[Der Text des Archimedes gibt noch einen zweiten Beweis für diesen Satz, den wir hier auslassen, da er weder klarer noch kürzer als der vorstehende ist.]

Satz 9.

Von allen Kugelsegmenten mit gleicher Oberfläche hat die Halbkugel den größten Rauminhalt.

Es sei $ABA'B'$ ein größter Kreis einer Kugel, AA' ein Durchmesser und O der Mittelpunkt. Die Kugel schneide man mit einer nicht durch O gehenden Ebene, die auf AA' (in M) senkrecht steht und die Ebene des größten Kreises in BB' schneidet. Das Segment ABB' sei dann entweder kleiner als die Halbkugel, wie in der ersten Figur oder größer als die Halbkugel, wie in der zweiten Figur.

Es sei $DED'E'$ ein größter Kreis einer anderen Kugel, DD' ein Durchmesser und C der Mittelpunkt. Diese Kugel schneide man mit der durch C gehenden, auf DD' senkrechten Ebene, die sich mit der Ebene des größten Kreises in dem Durchmesser EE' schneidet.

Die Oberflächen des Segments ABB' und der Halbkugel DEE' seien gleich.

Da die Oberflächen gleich sind, folgt
$$AB = DE. \qquad \text{[I. 42, 43]}$$

Nun ist in der ersten Figur
$$AB^2 > 2AM^2 \text{ und } < 2AO^2$$
und in der zweiten $AB^2 < 2AM^2$ und $> 2AO^2$.

Nehmen wir also R auf AA' so an, daß
$$AR^2 = \tfrac{1}{2}AB^2$$
wird, so fällt R zwischen O und M.

Da nun $AB^2 = DE^2$, so folgt

$$AR = CD.$$

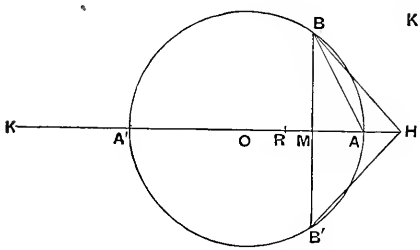
Wir verlängern OA' bis K, so daß $OA' = A'K$ wird, und $A'A$ bis H gemäß der Proportion

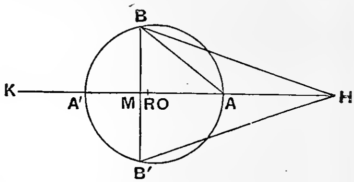
$$A'K : A'M = HA : AM.$$

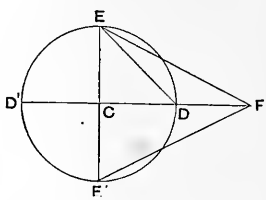
Daraus folgt *componendo*

$$A'K + A'M : A'M = HM : MA \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Somit ist der Kegel HBB' gleich dem Segment ABB'. [Satz 2]







Verlängern wir CD bis F, so daß $CD = DF$ wird, so ist der Kegel FEE' gleich der Halbkugel DEE'. [Satz 2]

Nun ist $\quad AR \cdot RA' > AM \cdot MA'$,

und $\quad AR^2 = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} AM \cdot AA' = AM \cdot A'K.$

Daraus folgt

$$AR \cdot RA' + RA^2 > AM \cdot MA' + AM \cdot A'K$$

oder $\quad AA' \cdot AR > AM \cdot MK$

$$> HM \cdot A'M, \text{ wegen (1).}$$

Mithin ist $\quad AA' : A'M > HM : AR$

oder $\quad AB^2 : BM^2 > HM : AR,$

d. h. $\quad AR^2 : BM^2 > HM : 2\,AR$, da $AB^2 = 2\,AR^2$,

$$> HM : CF.$$

Da nun $AR = CD$ oder CE ist, so folgt:

(Kreis mit dem Durchmesser EE') : (Kreis mit dem Durchmesser BB')

$$> HM : CF.$$

Folglich ist der Kegel FEE' größer als der Kegel HBB', und somit die Halbkugel DEE' größer als das Segment ABB'.

Die Kreismessung.

Satz 1.

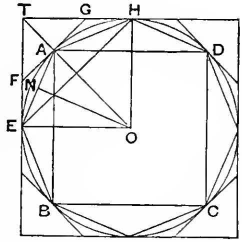
Die Fläche eines jeden Kreises ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in dem eine der den rechten Winkel einschließenden Seiten gleich dem Radius, die andere gleich dem Umfange des Kreises ist.

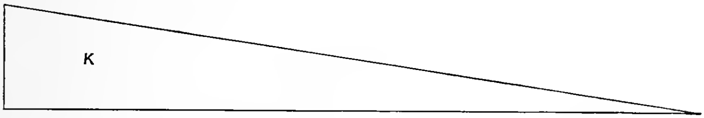
$ABCD$ sei der gegebene Kreis, K das beschriebene Dreieck.

Wäre nun der Kreis nicht gleich K, so müßte er entweder größer oder kleiner sein.

I. Wenn möglich, sei der Kreis größer als K.

Man schreibe ihm ein Quadrat $ABCD$ ein, halbiere die Bogen AB, BC, CD, DA, halbiere sodann (wenn nötig) die Hälften, und so fort, bis die Seiten des eingeschriebenen Vielecks, dessen Ecken





die Teilpunkte sind, Segmente abschneiden, deren Summe kleiner ist als der Überschuß der Kreisfläche über K.

Dann ist die Fläche des Vielecks größer als K.

Es sei AE eine seiner Seiten und ON das vom Mittelpunkte O auf AE gefällte Lot.

Dann ist ON kleiner als der Radius des Kreises und somit kleiner als die eine der Katheten von K. Ebenso ist der Umfang des Vielecks kleiner als der des Kreises, d. h. kleiner als die andere Kathete von K.

Folglich ist die Fläche des Vielecks kleiner als K; das ist aber mit der Annahme nicht vereinbar.

Somit ist die Fläche des Kreises nicht größer als K.

II. Wenn möglich, sei der Kreis kleiner als K.

Man schreibe dem Kreise ein Quadrat um und lasse zwei benachbarte Seiten, die den Kreis in E, H berühren, sich in T schneiden. Man halbiere die Bogen zwischen benachbarten Berührungspunkten und ziehe die Tangenten in den Teilpunkten. A sei der Mittelpunkt des Bogens EH und FAG die in A berührende Tangente.

Dann ist der Winkel TAG ein rechter.

Folglich ist
$$\begin{aligned} TG &> GA \\ &> GH. \end{aligned}$$

Es folgt, daß das Dreieck FTG größer ist als die Hälfte der Fläche $TEAH$.

Halbiert man ebenso den Bogen AH und konstruiert man im Mittelpunkte die Tangente, so schneidet diese von der Fläche GAH mehr als die Hälfte ab.

Setzen wir dieses Verfahren fort, so werden wir schließlich zu einem umgeschriebenen Vieleck gelangen, derart daß die zwischen ihm und dem Kreise liegenden Flächenstücke zusammen kleiner sind als der Überschuß von K über die Kreisfläche.

Somit ist die Fläche des Vielecks kleiner als K.

Da nun das Lot aus O auf irgend eine Seite des Vielecks gleich dem Radius des Kreises ist, während der Umfang des Vielecks größer als der des Kreises ist, so muß die Fläche des Vielecks größer als das Dreieck K sein, was unmöglich ist.

Folglich ist die Fläche des Kreises nicht kleiner als K.

Da nun die Kreisfläche weder größer noch kleiner als K ist, so muß sie gleich K sein.

Satz 2.

Die Fläche eines Kreises verhält sich zu dem Quadrate über seinem Durchmesser wie 11 *zu* 14.

[Der Text dieses Satzes ist unbefriedigend, und Archimedes kann ihn nicht vor Satz 3 gesetzt haben, da die Annäherung auf dem Ergebnisse dieses Satzes beruht.]

Satz 3.

Das Verhältnis des Umfangs eines jeden Kreises zu seinem Durchmesser ist kleiner als $3\frac{1}{7}$, *aber größer als* $3\frac{10}{71}$.

[Hinsichtlich der interessanten Fragen, die der arithmetische Inhalt dieses Archimedischen Satzes anregt, muß man bei seiner Wiedergabe sorgfältig unterscheiden zwischen den Schritten, die in dem uns erhaltenen Texte wirklich ausgeführt werden, und den dazwischen liegenden (meist von Eutocius ergänzten), die man zweckmäßig einschiebt, um den Beweis leichter verständlich zu machen. Demgemäß sind alle nicht wirklich im Texte ausgeführten Schritte in eckige Klammern gesetzt, damit klar hervortritt, in welchem Umfange Archimedes die erforderlichen Rechnungen ausläßt und nur Resultate angibt. Man wird bemerken, daß er zwei Näherungswerte für $\sqrt{3}$ angibt (wovon einer kleiner und der andere größer als der wahre Wert ist) ohne jede Erklärung, wie er dazu gekommen ist; ebenso werden Näherungswerte für die Quadratwurzeln aus einigen großen Zahlen, die keine vollständigen Quadrate sind, nur angegeben. Eine Untersuchung dieser verschiedenen Näherungswerte und des Mechanismus der griechischen Arithmetik im allgemeinen ist in der Einleitung, Kap. IV, zu finden.]

I. Es sei AB ein Durchmesser irgend eines Kreises, O sein Mittelpunkt, AC die Tangente in A, und der Winkel AOC der dritte Teil eines rechten Winkels.

Dann ist $\quad OA:AC\,[=\sqrt{3}:1] > 265:153 \quad \ldots \quad (1)$

und $\quad OC:CA\,[=2:1] = 306:153 \quad \ldots\ldots \quad (2)$.

Erstens ziehe man die Linie OD, die den Winkel AOC halbiert und AC in D schneidet.

Nun ist $\quad CO:OA = CD:DA, \quad$ [Eukl. VI. 3]

so daß $\quad [CO+OA:OA = CA:DA$ oder]

$$CO+OA:CA = OA:AD.$$

Folglich ist [wegen (1) und (2)]

$$OA:AD > 571:153 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Es folgt $\quad OD^2:AD^2\,[=(OA^2+AD^2):AD^2$

$$> (571^2+153^2):153^2]$$

$$> 349\,450:23\,409,$$

so daß $\quad OD:DA > 591\frac{1}{8}:153 \quad \ldots\ldots \quad (4).$

Zweitens sei OE die Halbierungslinie des Winkels AOD und schneide AD in E.

[Dann ist $DO:OA = DE:EA$,

so daß $DO + OA:DA = OA:AE$.]

Daher ist $OA:AE\,[> (591\tfrac{1}{8} + 571):153$, nach (3) und (4)]

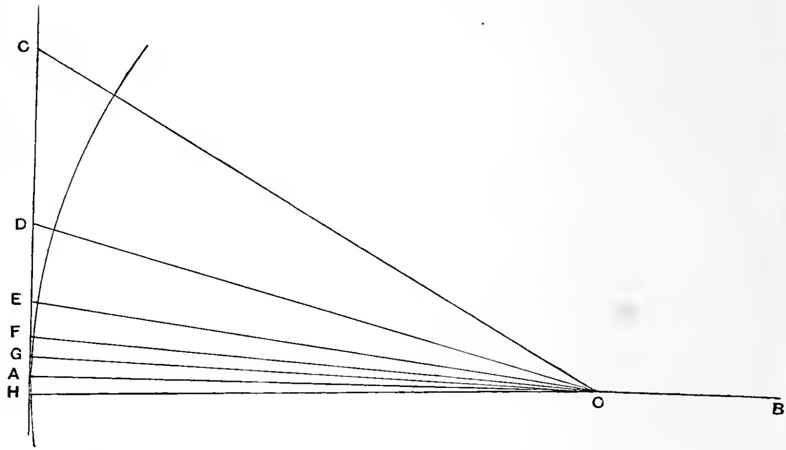
$> 1162\tfrac{1}{8}:153$ . . . . (5).

[Es folgt $OE^2:EA^2 > \{(1162\tfrac{1}{8})^2 + 153^2\}:153^2$

$> (1\,350\,534\tfrac{33}{64} + 23\,409):23\,409$

$> 1\,373\,943\tfrac{33}{64}:23\,409$.]

Somit ist $OE:EA > 1172\tfrac{1}{8}:153$ . . . . (6).



Drittens halbiere OF den Winkel AOE und schneide AE in F.

Wir erhalten somit das [den obigen Beziehungen (3) und (5) entsprechende] Resultat:

$OA:AF\,[> (1162\tfrac{1}{8} + 1172\tfrac{1}{8}):153]$

$> 2334\tfrac{1}{4}:153$ . . . . (7).

[Daher ist $OF^2:FA^2 > \{(2334\tfrac{1}{4})^2 + 153^2\}:153^2$

$> 5\,472\,132\tfrac{1}{16}:23\,409$.]

Es folgt $OF:FA > 2339\tfrac{1}{4}:153$ . . . . . . (8).

Viertens halbiere OG den Winkel AOF und schneide AF in G.

Wir haben dann

$OA:AG\,[> (2334\tfrac{1}{4} + 2339\tfrac{1}{4}):153$, nach (7) und (8)]

$> 4673\tfrac{1}{2}:153$.

Nun ist der Winkel AOC, der ein Drittel eines rechten Winkels ist, viermal halbiert worden, und es folgt

$\sphericalangle AOG = \tfrac{1}{48}$ (rechter Winkel).

Man mache den Winkel AOH auf der anderen Seite von OA gleich dem Winkel AOG und lasse OH die Verlängerung von GA in H schneiden.

Dann ist $\sphericalangle GOH = \frac{1}{24}$ (rechter Winkel). Somit ist GH eine Seite eines dem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks von 96 Seiten.

Da nun $$OA : AG > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

während $$AB = 2OA, \quad GH = 2AG,$$

so folgt

$$AB : (\text{Umfang des 96-Ecks}) \; [> 4673\tfrac{1}{2} : (153 \cdot 96)]$$
$$> 4673\tfrac{1}{2} : 14688.$$

Aber es ist

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$
$$\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right]$$
$$< 3\tfrac{1}{7}.$$

Somit ist der Umfang des Kreises (der kleiner als der Umfang des Vielecks ist) *a fortiori* kleiner als der $3\frac{1}{7}$ mal genommene Durchmesser AB.

II. Es sei AB wiederum ein Durchmesser eines Kreises und die Sehne AC sei so gezeichnet, daß der Winkel CAB der dritte Teil eines rechten Winkels ist. C werde mit B verbunden.

Dann ist $$AC : CB \, [= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

Erstens halbiere man den Winkel BAC durch die Linie AD, die BC in d und den Kreis in D schneidet. Man verbinde B mit D.

Dann ist $$\sphericalangle BAD = \sphericalangle dAC$$
$$= \sphericalangle dBD,$$

und der rechte Winkel BDd ist den beiden Dreiecken ADB, BDd gemeinsam. Folglich sind die Dreiecke ADB, BDd ähnlich.

Demnach haben wir

$$AD : DB = BD : Dd = AB : Bd$$
$$[= AC : Cd] \qquad \text{[Eukl. VI. 3]}$$
$$= AB + AC : Bd + Cd$$
$$= AB + AC : BC$$

oder $$AB + AC : BC = AD : DB.$$

[Aber nach dem Obigen ist

$$AC:CB < 1351:780,$$

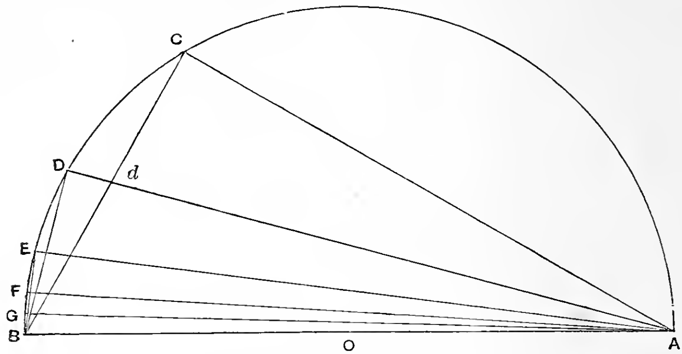
während

$$BA:BC = 2:1 = 1560:780.]$$

Es folgt $AD:DB < 2911:780$ . . . . . . (1).

[Demnach ist $AB^2:BD^2 < (2911^2 + 780^2):780^2 < 9082321:608400.]$

Somit ist $AB:BD < 3013\tfrac{3}{4}:780$ . . . . . . (2).



Zweitens halbiere AE den Winkel BAD und schneide den Kreis in E; E werde mit B verbunden.

Dann beweisen wir ebenso wie vorher, daß

$$\begin{aligned} AE:EB & [= BA + AD:BD \\ & < (3013\tfrac{3}{4} + 2911):780, \text{ nach (1) und (2)}] \\ & < 5924\tfrac{3}{4}:780 \\ & < (5924\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{13}):(780\cdot\tfrac{4}{13}) \\ & < 1823:240 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3). \end{aligned}$$

[Es folgt $AB^2:BE^2 < (1823^2 + 240^2):240^2 < 3380929:57600.]$

Folglich ist $AB:BE < 1838\tfrac{9}{11}:240$ . . . . . . (4).

Drittens halbiere AF den Winkel BAE und schneide den Kreis in F.

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} AF:FB & [= BA + AE:BE \\ & < 3661\tfrac{9}{11}:240, \text{ nach (3) und (4)}] \\ & < (3661\tfrac{9}{11}\cdot\tfrac{11}{40}):(240\cdot\tfrac{11}{40}) \\ & < 1007:66 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5). \end{aligned}$$

[Daraus folgt

$$AB^2 : BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2$$
$$< 1018405 : 4356.]$$

Daher ist $AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66$ . . . . (6).

Viertens werde der Winkel BAF durch die Linie AG halbiert, die den Kreis in G schneidet.

Dann ist $AG : GB [= BA + AF : BF]$

$$< 2016\tfrac{1}{6} : 66, \text{ nach (5) und (6).}$$

[Ferner ist $AB^2 : BG^2 < \{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2\} : 66^2$

$$< 4069284\tfrac{1}{36} : 4356.]$$

Demnach ist $AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66$,

woraus folgt $BG : AB > 66 : 2017\frac{1}{4}$ . . . . (7).

[Nun ist der Winkel BAG das Resultat der vierten Halbierung des Winkels BAC oder des dritten Teiles eines rechten Winkels, und daher ist er der achtundvierzigste Teil eines rechten Winkels.

Der zu der Sehne BG gehörige Zentriwinkel ist daher

$$\tfrac{1}{24} \text{ (rechter Winkel).]}$$

Folglich ist BG eine Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks von 96 Seiten.

Aus (7) folgt

$$(\text{Umfang des Vielecks}) : AB\ [> 96 \cdot 66 : 2017\tfrac{1}{4}]$$
$$> 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

Und es ist
$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\tfrac{10}{71}.$$

Um so mehr ist also der Umfang des Kreises größer als der $3\frac{10}{71}$ mal genommene Durchmesser.

Folglich ist das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser

$$< 3\tfrac{1}{7} \text{ aber } > 3\tfrac{10}{71}.$$

Über Konoide und Sphäroide.

Einleitung.[1]

„Archimedes grüßt Dositheus.

In diesem Buche schicke ich Dir meine Beweise für die noch übrigen Sätze, deren Beweise in meinen früheren Dir gesandten Büchern nicht enthalten waren, und auch für einige später gefundene, die ich trotz häufiger Versuche früher hatte aufgeben müssen, weil mir ihre Entdeckung Schwierigkeiten machte. Daher habe ich diese Sätze selbst nicht mit den übrigen zusammen veröffentlicht. Als ich aber später größere Sorgfalt darauf verwandte, entdeckte ich das, wobei ich vorher stecken geblieben war.

Der Rest der früheren Sätze behandelte das rechtwinklige Konoid [Rotationsparaboloid]; die neueren Entdeckungen beziehen sich auf das stumpfwinklige Konoid [Rotationshyperboloid] und auf kugelartige Körper, von denen ich einige *länglich* (*παραμάκεα*), andere *flach* (*ἐπιπλατέα*) nenne.

I. Über das *rechtwinklige Konoid* war Folgendes festgesetzt worden: dreht sich ein Schnitt eines rechtwinkligen Kegels [eine Parabel] um den festbleibenden Durchmesser [die Achse] bis zur Rückkehr in die Anfangslage, so soll der von dem Schnitt des rechtwinkligen Kegels beschriebene Körper ein **rechtwinkliges Konoid** heißen, der festgehaltene Durchmesser seine **Achse**, während **Scheitel** der Punkt heißt, in dem die Achse die Oberfläche des Konoids trifft (*ἅπτεται*). Berührt eine Ebene das rechtwinklige Konoid und schneidet eine zu dieser Berührungsebene parallele Ebene ein Segment von dem Konoid ab, so wird als **Grundfläche** des Segments der Teil der schneidenden Ebene bezeichnet, der

[1] Diese ganze Einleitung ist einschließlich der Definitionen wörtlich aus dem griechischen Text übersetzt, um die Terminologie des Archimedes genau wiederzugeben. Ist das einmal geschehen, so verliert man nichts, wenn man wieder zur modernen Phraseologie und Bezeichnungsweise zurückkehrt. Diese werden wir demnach wie gewöhnlich anwenden, wenn wir zu den eigentlichen Sätzen der Abhandlung kommen.

von dem Schnitt des Konoids eingeschlossen wird, als **Scheitel** [des Segments] der Punkt, in dem die erste Ebene das Konoid berührt, und als **Achse** [des Segments] der innerhalb des Segments liegende Teil der durch den Scheitel des Segments parallel zur Achse des Konoids gezogenen Linie.

Die zur Betrachtung vorgeschlagenen Fragen waren:

(1) Wenn ein Segment des rechtwinkligen Konoids durch eine zur Achse senkrechte Ebene abgeschnitten wird, weshalb ist dieses Segment anderthalbmal so groß wie der Kegel, der dieselbe Grundfläche und Achse wie das Segment hat?

(2) Wenn von dem rechtwinkligen Konoid durch zwei beliebige Ebenen Segmente abgeschnitten werden, weshalb haben diese Segmente das doppelte Verhältnis ihrer Achsen?

II. Bezüglich des *stumpfwinkligen Konoids* legen wir Folgendes zugrunde. Haben wir in einer Ebene einen Schnitt eines stumpfwinkligen Kegels [eine Hyperbel], seinen Durchmesser [ihre Achse] und die dem Schnitt des stumpfwinkligen Kegels nächsten Geraden [d. h. die Asymptoten der Hyperbel], und lassen wir die Ebene, in der diese Linien liegen, sich um den festgehaltenen Durchmesser [die Achse] drehen und zur Anfangslage zurückkehren, so beschreiben die dem Schnitt des stumpfwinkligen Kegels nächsten Geraden [die Asymptoten] offenbar einen gleichschenkligen Kegel, dessen Spitze der Schnittpunkt der nächsten Geraden und dessen Achse der festgehaltene Durchmesser [die Achse] ist. Die von dem Schnitt des stumpfwinkligen Kegels beschriebene Figur heißt ein **stumpfwinkliges Konoid** [Rotationshyperboloid], seine **Achse** ist der festgehaltene Durchmesser, sein **Scheitel** der Punkt, in dem die Achse die Oberfläche des Konoids trifft. Der durch die dem Schnitt des stumpfwinkligen Kegels nächsten Geraden beschriebene Kegel heißt **das Konoid einhüllend** (περιέχων τὸ κωνοειδές), und die Strecke zwischen dem Scheitel des Konoids und der Spitze des das Konoid einhüllenden Kegels heißt **der Achse anliegend** (ποτεοῦσα τῷ ἄξονι). Berührt eine Ebene das stumpfwinklige Konoid, und schneidet eine zu der Berührungsebene parallele Ebene ein Konoidsegment ab, so wird als **Grundfläche** dieses Segments der Teil der schneidenden Ebene bezeichnet, der von dem Schnitt des Konoids eingeschlossen wird, als **Scheitel** [des Segments] der Berührungspunkt der Ebene, die das Konoid berührt, als **Achse** [des Segments] der innerhalb des Segments liegende Teil der durch den Scheitel des Segments und die Spitze des einhüllenden Kegels des Konoids gelegten Geraden;

und die zwischen den soeben genannten Punkten liegende Strecke heißt **der Achse anliegend.**

Rechtwinklige Konoide sind alle ähnlich; stumpfwinklige Konoide sollen dann ähnlich heißen, wenn ihre einhüllenden Kegel ähnlich sind.

Folgende Fragen werden zur Überlegung vorgeschlagen:

(1) Wenn von einem stumpfwinkligen Konoid ein Segment durch eine zur Achse senkrechte Ebene abgeschnitten wird, warum verhält sich dieses Segment zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Achse wie die Summe aus der Achse des Segments und dem Dreifachen der der Achse anliegenden Strecke zu der Summe aus der Achse des Segments und dem Doppelten der der Achse anliegenden Strecke?

(2) Wird ein Segment des stumpfwinkligen Konoids durch eine nicht zur Achse senkrechte Ebene abgeschnitten, warum verhält sich dieses Segment zu der Figur mit derselben Grundfläche und Achse, einem Kegelsegment[1]) (*ἀπότμαμα κώνου*), wie die Summe aus der Achse des Segments und dem Dreifachen der der Achse des Segments anliegenden Strecke zu der Summe aus der Achse des Segments und dem Doppelten der der Achse anliegenden Strecke?

III. Hinsichtlich der kugelartigen Figuren legen wir Folgendes zugrunde. Wird ein Schnitt eines spitzwinkligen Kegels [eine Ellipse] um den festgehaltenen größeren Durchmesser [die große Achse] bis zur Rückkehr in die Anfangslage gedreht, so heißt die durch den Schnitt des spitzwinkligen Kegels beschriebene Figur ein **längliches Sphäroid** (*παραμᾶκες σφαιροειδές*). Dreht sich aber der Schnitt des spitzwinkligen Kegels um den fest bleibenden kleineren Durchmesser [die kleine Achse] bis zur Rückkehr in die Anfangslage, so heißt die von dem Schnitt des spitzwinkligen Kegels beschriebene Figur ein **flaches Sphäroid** (*ἐπιπλατὺ σφαιροειδές*). Bei beiden Sphäroiden bezeichnen wir als **Achse** den festgehaltenen Durchmesser [die Achse], als **Scheitel** den Punkt, in dem die Achse die Oberfläche des Sphäroids trifft, als **Zentrum** den Mittelpunkt der Achse und als **Durchmesser** die durch den Mittelpunkt senkrecht zur Achse gezogene Gerade.

Und wenn parallele Ebenen irgend ein Sphäroid berühren, ohne es zu schneiden, und wenn eine andere Ebene zu den berührenden Ebenen parallel gelegt wird und das Sphäroid schneidet,

---

[1]) Das *Kegelsegment* wird später definiert (S. 242).

so bezeichnen wir als **Grundfläche** der entstehenden Segmente den von dem Schnitt des Sphäroids umschlossenen Teil der schneidenden Ebene, als **Scheitel** die Punkte, in denen die parallelen Ebenen das Sphäroid berühren, und als **Achsen** die innerhalb der Segmente liegenden Teile der Verbindungslinie ihrer Scheitel. Daß die Berührungsebenen mit der Oberfläche des Sphäroids nur einen Punkt gemeinsam haben, und daß die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch das Zentrum des Sphäroids geht, werden wir beweisen. **Ähnlich** heißen solche Sphäroide, deren Achsen sich wie die „Durchmesser“ verhalten. Segmente von Sphäroiden und Konoiden mögen **ähnlich** heißen, wenn sie von ähnlichen Figuren abgeschnitten sind und ähnliche Grundflächen haben, während ihre Achsen, die entweder auf den Ebenen der Grundflächen senkrecht stehen oder mit den entsprechenden Durchmessern [Achsen] der Grundflächen gleiche Winkel bilden, sich ebenso verhalten wie die entsprechenden Durchmesser [Achsen] der Grundflächen.

Die folgenden Fragen über Sphäroide werden zur Überlegung vorgeschlagen:

(1) Wird ein Sphäroid mit der auf der Achse in ihrem Mittelpunkte senkrechten Ebene geschnitten, warum ist dann jedes der entstehenden Segmente doppelt so groß wie der Kegel mit derselben Grundfläche und Achse? Steht aber die Schnittebene auf der Achse senkrecht, ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, so verhält sich (a) das größere der entstehenden Segmente zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Achse wie die Summe aus der halben Achse des Sphäroids und der Achse des kleineren Segments zu der Achse des kleineren Segments, und (b) das kleinere Segment zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Achse wie die Summe aus der halben Achse des Sphäroids und der Achse des größeren Segments zur Achse des größeren Segments.

(2) Wird ein Sphäroid mit einer durch den Mittelpunkt gehenden, aber nicht zur Achse senkrechten Ebene geschnitten, warum ist dann jedes der entstehenden Segmente das Doppelte der Figur, welche dieselbe Grundfläche und Achse wie das Segment hat und ein Kegelsegment[1]) darstellt?

(3) Wird aber das Sphäroid mit einer weder durch den Mittelpunkt gehenden, noch zur Achse senkrechten Ebene geschnitten, so verhält sich (a) das größere der entstehenden Segmente zu der Figur mit derselben Grundfläche und Achse wie die Summe aus

[1]) Siehe die Definition des *Kegelsegments* (*ἀπότμαμα κώνου*) auf S. 242.

der halben Verbindungslinie der Segmentscheitel und der Achse des kleineren Segments zu der Achse des kleineren Segments, und (b) das kleinere Segment zu der Figur mit derselben Grundfläche und Achse wie die Summe aus der halben Verbindungslinie der Segmentscheitel und der Achse des größeren Segments zur Achse des größeren Segments. Die genannte Figur ist in diesen Fällen auch ein Kegelsegment.[1])

Sind die vorstehenden Sätze bewiesen, so lassen sich mit ihrer Hilfe viele Sätze beweisen und Aufgaben lösen. Dazu gehören z. B. die folgenden Sätze:

(1) Ähnliche Sphäroide und ähnliche Segmente von Sphäroiden und Konoiden stehen im dreifachen Verhältnis ihrer Achsen.

(2) In gleichen Sphäroiden verhalten sich die Quadrate der „Durchmesser" umgekehrt wie die Achsen, und wenn sich in Sphäroiden die Quadrate der „Durchmesser" umgekehrt wie die Achsen verhalten, so sind die Sphäroide gleich.

Ferner gehört dazu die Aufgabe: von einem gegebenen Sphäroid oder Konoid durch eine zu einer gegebenen Ebene parallele Ebene ein Segment abzuschneiden, das einem gegebenen Kegel oder Zylinder oder einer gegebenen Kugel gleich ist.

Nachdem ich nun also die Sätze und Anweisungen (ἐπιτάγματα), nach denen sie sich beweisen lassen, vorausgeschickt habe, will ich dazu übergehen, Dir die Sätze selbst zu erklären. Lebe wohl!

Definitionen.

Wenn ein Kegel mit einer Ebene geschnitten wird, die alle Seiten [Erzeugenden] des Kegels trifft, so ist der Schnitt entweder ein Kreis oder ein Schnitt eines spitzwinkligen Kegels [eine Ellipse]. Ist der Schnitt ein Kreis, so ist der von dem Kegel abgeschnittene Teil, der auf derselben Seite wie die Kegelspitze liegt, offenbar ein Kegel. Ist aber der Schnitt ein Schnitt eines spitzwinkligen Kegels [eine Ellipse], so soll die von dem Kegel abgeschnittene Figur, die auf derselben Seite wie die Spitze liegt, ein **Kegelsegment** heißen. Als **Grundfläche** des Segments bezeichnen wir die von dem Schnitt des spitzwinkligen Kegels eingeschlossene Fläche, als **Spitze** den Punkt, der auch die Spitze des Kegels ist, als **Achse** die von der Kegelspitze nach dem Mittelpunkte des Schnittes des spitzwinkligen Kegels gezogene Gerade.

Und wenn ein Zylinder mit zwei parallelen Ebenen geschnitten wird, die alle Seiten [Erzeugenden] des Zylinders treffen,

---

[1]) Vgl. vorige Seite.

so sind die Schnitte entweder Kreise oder einander gleiche und ähnliche Schnitte spitzwinkliger Kegel [Ellipsen]. Sind nun die Schnitte Kreise, so ist klar, daß der zwischen den parallelen Ebenen liegende Teil des Zylinders ein Zylinder ist. Wenn aber die Schnitte Schnitte von spitzwinkligen Kegeln [Ellipsen] sind, so soll der zwischen den parallelen Ebenen liegende Teil des Zylinders ein **Zylinderstumpf** (*τόμος κυλίνδρου*) heißen. Als **Grundflächen** des Stumpfes bezeichnen wir die von den Schnitten der spitzwinkligen Kegel [Ellipsen] umschlossenen Flächen und als **Achse** die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Schnitte der spitzwinkligen Kegel, so daß die Achse mit der Achse des Zylinders in derselben Geraden liegt."

Hilfssatz.

Ist in einer steigenden arithmetischen Reihe, die aus den Größen A_1, $A_2, \ldots A_n$ besteht, die gemeinsame Differenz gleich dem kleinsten Gliede A_1, so ist

$$n \cdot A_n < 2(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$$

und

$$> 2(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}).$$

[Dieser Hilfssatz wird beiläufig in der Abhandlung *Über Spiralen*, Satz 11, bewiesen. Indem Archimedes die aufeinander folgenden Glieder der Reihe durch Strecken darstellt und diese dann alle verlängert, so daß sie der größten gleich werden, gibt er das Äquivalent des folgenden Beweises.

Ist $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n$,

so haben wir auch $S_n = A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1$.

Und es ist $A_1 + A_{n-1} = A_2 + A_{n-2} = \ldots = A_n$.

Folglich ist $2S_n = (n+1)A_n$,

woraus folgt $nA_n < 2S_n$

und $nA_n > 2S_{n-1}$.

Ist also die Reihe $a, 2a, \ldots na$, so gilt

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}a,$$

und $n^2 a < 2S_n$,

aber $> 2S_{n-1}$.]

Satz 1.

Sind $A_1, B_1, C_1, \ldots K_1$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots K_2$ zwei Reihen von Größen, die den Proportionen

$$\left.\begin{aligned} A_1 : B_1 &= A_2 : B_2, \\ B_1 : C_1 &= B_2 : C_2, \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

genügen, und sind $A_3, B_3, C_3, \ldots K_3$ *und* $A_4, B_4, C_4, \ldots K_4$ *zwei andere Reihen, die den Proportionen*

$$\left.\begin{aligned} A_1 : A_3 &= A_2 : A_4, \\ B_1 : B_3 &= B_2 : B_4, \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

genügen, so gilt

$$\begin{aligned} &(A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \ldots + K_3) \\ &\quad = (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \ldots + K_4). \end{aligned}$$

Das wird folgendermaßen bewiesen.

Da $\qquad A_3 : A_1 = A_4 : A_2$

und $\qquad A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$

während $\qquad B_1 : B_3 = B_2 : B_4,$

so haben wir *ex aequali*

$$\left.\begin{aligned} A_3 : B_3 &= A_4 : B_4 \\ \text{Ähnlich ergibt sich} \quad B_3 : C_3 &= B_4 : C_4, \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\gamma).$$

Andrerseits folgt aus den Gleichungen (α)

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = \ldots$$

Folglich haben wir

$$A_1 : A_2 = (A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1) : (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2)$$

oder

$$(A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1) : A_1 = (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2) : A_2$$

und $\qquad A_1 : A_3 = A_2 : A_4,$

während aus den Gleichungen (γ) ebenso folgt

$$A_3 : (A_3 + B_3 + C_3 + \ldots + K_3) = A_4 : (A_4 + B_4 + C_4 + \ldots + K_4).$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt *ex aequali*

$$\begin{aligned} &(A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \ldots + K_3) \\ &\quad = (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \ldots + K_4). \end{aligned}$$

Zusatz. Läßt man in der dritten und vierten Reihe irgend welche einander entsprechenden Größen weg, so ist das Ergebnis dasselbe. Fehlen beispielsweise die letzten Glieder K_3, K_4, so gilt

$$\begin{aligned} &(A_1 + B_1 + C_1 + \ldots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \ldots + J_3) \\ &\quad = (A_2 + B_2 + C_2 + \ldots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \ldots + J_4), \end{aligned}$$

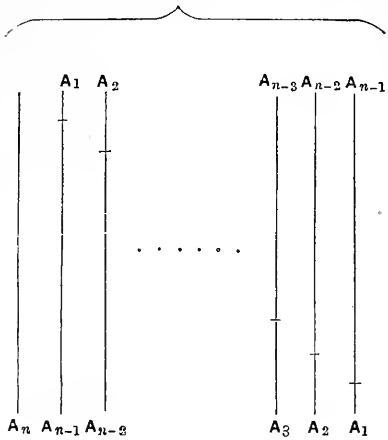
wo J in jeder Reihe unmittelbar vor K kommt.

Hilfssatz zu Satz 2.

[*Über Spiralen*, Satz 10.]

Wenn die n Strecken $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ *eine steigende arithmetische Reihe bilden, in der die gemeinsame Differenz gleich dem kleinsten Gliede* A_1 *ist, dann gilt*

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) = 3(A_1^2+A_2^2+A_3^2+\ldots+A_n^2).$$



Man lege die Strecken $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots A_1$ von links nach rechts nebeneinander hin und verlängere $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots A_1$, bis sie alle gleich A_n werden, so daß die Verlängerungen bezüglich gleich $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ sind.

Nehmen wir alle Strecken nacheinander, so bekommen wir

$$\begin{aligned}2A_n^2 &= 2A_n^2,\\ (A_1+A_{n-1})^2 &= A_1^2 + A^2_{n-1} + 2A_1\cdot A_{n-1},\\ (A_2+A_{n-2})^2 &= A_2^2 + A^2_{n-2} + 2A_2\cdot A_{n-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (A_{n-1}+A_1)^2 &= A^2_{n-1} + A_1^2 + 2A_{n-1}\cdot A_1.\end{aligned}$$

Durch Addition folgt

$$(n+1)A_n^2 = 2(A_1^2+A_2^2+\ldots+A_n^2) + 2A_1\cdot A_{n-1} + 2A_2\cdot A_{n-2} + \ldots + 2A_{n-1}\cdot A_1.$$

Um also das gewünschte Ergebnis zu erhalten, müssen wir die Richtigkeit der folgenden Beziehung beweisen:

$$2(A_1\cdot A_{n-1}+A_2\cdot A_{n-2}+\ldots+A_{n-1}\cdot A_1)+A_1(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) = A_1^2+A_2^2+A_3^2+\ldots+A_n^2 \quad \ldots \quad (\alpha).$$

Nun ist
$$\begin{aligned}2A_2\cdot A_{n-2} &= A_1\cdot 4A_{n-2}, \text{ da } A_2 = 2A_1,\\ 2A_3\cdot A_{n-3} &= A_1\cdot 6A_{n-3}, \text{ da } A_3 = 3A_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ 2A_{n-1}\cdot A_1 &= A_1\cdot 2(n-1)A_1.\end{aligned}$$

Es folgt

$$2(A_1 \cdot A_{n-1} + A_2 \cdot A_{n-2} + \ldots + A_{n-1} \cdot A_1) + A_1(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)$$
$$= A_1 \cdot [A_n + 3A_{n-1} + 5A_{n-2} + \ldots + (2n-1)A_1].$$

Nun läßt sich beweisen, daß dieser letzte Ausdruck gleich $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2$ ist.

Denn es ist

$$\begin{aligned} A_n^2 &= A_1(n \cdot A_n) \\ &= A_1[A_n + (n-1)A_n] \\ &= A_1[A_n + 2(A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1)], \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} (n-1)A_n = A_{n-1} &+ A_1 \\ + A_{n-2} &+ A_2 \\ \ldots &\ldots \\ + A_1 &+ A_{n-1}. \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich

$$A^2_{n-1} = A_1[A_{n-1} + 2(A_{n-2} + A_{n-3} + \ldots + A_1)],$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A_2^2 = A_1(A_2 + 2A_1),$$
$$A_1^2 = A_1 \cdot A_1;$$

daraus folgt durch Addition

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2$$
$$= A_1[A_n + 3A_{n-1} + 5A_{n-2} + \ldots + (2n-1)A_1].$$

Somit ist die obige Gleichung (α) richtig, und es folgt

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2).$$

Zusatz 1. *Aus dem vorangehenden Ergebnis folgt unmittelbar*

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + A_n^2) \quad . \quad . \quad (1).$$

Wie oben gezeigt, ist

$$A_n^2 = A_1[A_n + 2(A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1)],$$

und folglich $\quad A_n^2 > A_1(A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1)$,

woraus wiederum folgt

$$A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) < 2A_n^2.$$

Aus dem Satze ergibt sich

$$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A^2_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Zusatz 2. Alle diese Ergebnisse bleiben gültig, wenn wir überall *ähnliche Figuren* statt der Quadrate einsetzen; denn ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten.

[In dem vorstehenden Satze sind die Bezeichnungen A_1, A_2, A_3, ... A_n statt a, $2a$, $3a$, ... na verwendet worden, um den geometrischen Charakter des Beweises zum Ausdruck zu bringen; setzen wir jedoch jetzt die letzten Werte in die verschiedenen Ergebnisse ein, so haben wir (1)

$$(n+1)\,n^2 a^2 + a\,(a + 2a + \ldots + na) = 3\,[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2].$$

Daher ist

$$a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2 = \frac{a^2}{3}\left[(n+1)\,n^2 + \frac{n\,(n+1)}{2}\right] = a^2 \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Ebenso folgt (2)

$$n^3 < 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

und (3)

$$n^3 > 3\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2].]$$

Satz 2.

Ist A_1, A_2, ... A_n eine Anzahl von Flächen, derart daß[1])

$$A_1 = ax + x^2,$$
$$A_2 = a \cdot 2x + (2x)^2,$$
$$A_3 = a \cdot 3x + (3x)^2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n = a \cdot nx + (nx)^2,$$

dann gilt $n \cdot A_n : (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) < (a + nx) : \left(\frac{a}{2} + \frac{nx}{3}\right)$

und $n \cdot A_n : (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) > (a + nx) : \left(\frac{a}{2} + \frac{nx}{3}\right)$.

Denn nach dem Hilfssatze vor Satz 1 ist

$$n \cdot anx < 2\,(ax + a \cdot 2x + \ldots + a \cdot nx)$$

und

$$> 2\,(ax + a \cdot 2x + \ldots + a \cdot \overline{n-1}\,x).$$

Nach dem Hilfssatze vor diesem Satze ist

$$n \cdot (nx)^2 < 3\,[x^2 + (2x)^2 + (3x)^2 + \ldots + (nx)^2]$$

und

$$> 3\,[x^2 + (2x)^2 + \ldots + (\overline{n-1\,x})^2].$$

---

[1]) Die Ausdrucksweise des Archimedes schließt sich hier der traditionellen Methode der Flächenanlegung an: *εἴ κα ... παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ*, „wenn an jede der Strecken eine [rechteckige] um ein Quadrat vermehrte Fläche angelegt wird.“ So ist A_1 ein an eine Strecke a angelegtes Rechteck von der Höhe x, das aber über a soweit hinausragt, daß die Grundlinie um x länger als a ist.

Mithin ist

$$\frac{an^2x}{2}+\frac{n(nx)^2}{3}<\left\{(ax+x^2)+[a\cdot 2x+(2x)^2]+\ldots+[a\cdot nx+(nx)^2]\right\}$$

und $$>\left\{(ax+x^2)+[a\cdot 2x+(2x)^2]+\ldots+[a\cdot\overline{n-1}\,x+(\overline{n-1}\,x)^2]\right\}$$

oder $$\frac{an^2x}{2}+\frac{n(nx)^2}{3}<A_1+A_2+\ldots+A_n$$

und $$>A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}.$$

Daraus folgt

$$n\cdot A_n:(A_1+A_2+\ldots+A_n)<n[a\cdot nx+(nx)^2]:\left[\frac{an^2x}{2}+\frac{n(nx)^2}{3}\right]$$

oder $$n\cdot A_n:(A_1+A_2+\ldots+A_n)<(a+nx):\left(\frac{a}{2}+\frac{nx}{3}\right);$$

ebenso $$n\cdot A_n:(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1})>(a+nx):\left(\frac{a}{2}+\frac{nx}{3}\right).$$

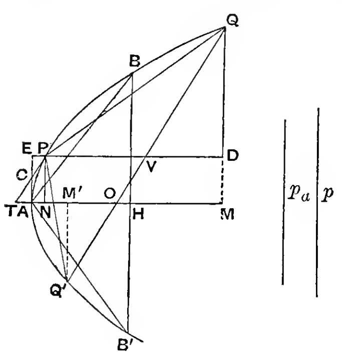
Satz 3.

(1) *Sind TP, TP' zwei sich in T schneidende Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts und Qq, $Q'q'$ zwei sich in O schneidende Sehnen, die bezüglich zu TP, TP' parallel sind, dann gilt die Proportion*

$$QO\cdot Oq:Q'O\cdot Oq'=TP^2:TP'^2.$$

„Das ist in den Elementen der Kegelschnitte bewiesen[1]."

(2) *Ist QQ' eine in V von dem Durchmesser PV halbierte Parabelsehne und ist die Länge von PV konstant, so sind die Flächen des Dreiecks PQQ' und des Segments PQQ' auch konstant bei jeder beliebigen Richtung von QQ'.*



Es sei ABB' das besondere Segment der Parabel, dessen Scheitel A ist, so daß die Achse auf BB' im Mittelpunkte H senkrecht steht, und $AH=PV$.

Man ziehe QD senkrecht zu PV.

Es sei p_a der Parameter der Hauptordinaten und p eine andere Strecke, so daß

$$QV^2:QD^2=p:p_a;$$

[1]) d. h. in den Abhandlungen über Kegelschnitte von Aristaeus und Euklid. Vgl. Apollonius III. 17.

es folgt dann, daß p der Parameter der zu dem Durchmesser PV gehörigen, d. h. zu QV parallelen Ordinaten ist.

„Denn das ist in den Kegelschnitten bewiesen[1]).“

Somit ist $$QV^2 = p \cdot PV.$$

Andrerseits ist $BH^2 = p_a \cdot AH$, während $AH = PV$.

Es folgt $$QV^2 : BH^2 = p : p_a.$$

Es ist aber $$QV^2 : QD^2 = p : p_a,$$

folglich $$BH = QD.$$

Daher ist $$BH \cdot AH = QD \cdot PV,$$

und deshalb $$\triangle ABB' = \triangle PQQ';$$

d. h. die Fläche des Dreiecks PQQ' ist konstant, solange die Länge von PV konstant ist.

Daher ist die Fläche des Segments PQQ' unter denselben Bedingungen auch konstant; denn das Segment ist gleich $\frac{4}{3} \triangle PQQ'$. [*Quadratur der Parabel*, Satz 17 oder 24.]

---

[1]) Den hier von Archimedes als bekannt angenommenen Satz kann man auf verschiedenen Wegen beweisen.

(1) Er läßt sich leicht aus Apollonius I. 49 ableiten (vgl. *Apollonius of Perga*, SS. LIII, 39). Zieht man in der Figur die Tangenten in A und P, wovon die erste PV in E, die andere die Achse in T schneide, und schneiden AE und PT sich in C, so sagt der Satz des Apollonius
$$CP : PE = p : 2PT,$$
wo p der Parameter der zu PV gehörigen Ordinaten ist.

(2) Unabhängig läßt er sich folgendermaßen beweisen. QQ' schneide die Achse in O, und QM, $Q'M'$, PN seien zur Achse gehörige Ordinaten.

Dann gilt $$AM : AM' = QM^2 : Q'M'^2 = OM^2 : OM'^2,$$
woraus folgt $$\begin{aligned} AM : MM' &= OM^2 : OM^2 - OM'^2 \\ &= OM^2 : (OM - OM') \cdot MM', \end{aligned}$$
so daß $$OM^2 = AM \cdot (OM - OM').$$
Dafür läßt sich schreiben: $(AM - AO)^2 = AM \cdot (AM + AM' - 2AO)$
oder $$AO^2 = AM \cdot AM'.$$

Da nun $QM^2 = p_a \cdot AM$ und $Q'M'^2 = p_a \cdot AM'$, so folgt
$$QM \cdot Q'M' = p_a \cdot AO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Nun ist $$\begin{aligned} QV^2 : QD^2 &= QV^2 : \left(\frac{QM + Q'M'}{2}\right)^2 \\ &= QV^2 : \left[\left(\frac{QM - Q'M'}{2}\right)^2 + QM \cdot Q'M'\right] \\ &= QV^2 : (PN^2 + QM \cdot Q'M') \\ &= p \cdot PV : p_a(AN + AO), \text{ wegen } (\alpha). \end{aligned}$$

Es ist aber $$PV = TO = AN + NO;$$
folglich $$QV^2 : QD^2 = p : p_a.$$

Satz 4.

Die Fläche der Ellipse verhält sich zu der des Hilfskreises wie die kleine Achse zur großen.

Es sei AA' die große und BB' die kleine Achse der Ellipse, und BB' schneide den Hilfskreis in b, b'.

Angenommen, O sei ein Kreis, der folgender Proportion genügt

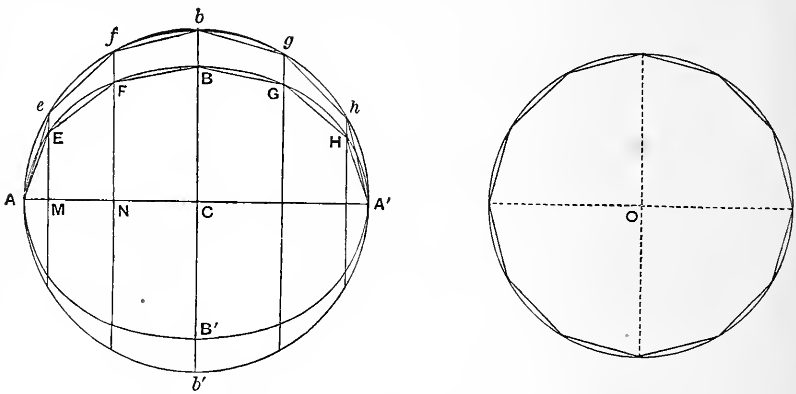
$$(\text{Kreis } AbA'b') : O = CA : CB.$$

Dann soll O der Fläche der Ellipse gleich sein.

Denn wäre das nicht der Fall, so müßte O entweder größer oder kleiner als die Ellipse sein.

I. Wenn möglich, sei O größer als die Ellipse.

Wir können dann dem Kreise O ein gleichseitiges Vieleck mit $4n$ Seiten einschreiben, dessen Fläche größer als die der Ellipse ist. [Vgl. *Über Kugel und Zylinder* I. 6.]



Ist das geschehen, so schreibe man in den Hilfskreis der Ellipse das Vieleck $AefbghA' \ldots$ ein, das dem in O eingeschriebenen ähnlich ist. Die auf AA' senkrechten Linien eM, fN, ... mögen die Ellipse bezüglich in E, F, ... schneiden. Man ziehe die Verbindungslinien AE, EF, FB, ...

Die Fläche des in den Hilfskreis eingeschriebenen Vielecks werde mit P', die des in die Ellipse eingeschriebenen mit P bezeichnet.

Da nun alle die Strecken eM, fN, ... in E, F, ... nach demselben Verhältnis geteilt werden, so daß

$$eM : EM = fN : FN = \ldots = bC : BC,$$

so haben die Dreieckspaare, wie eAM, EAM, und die Trapezpaare, wie $eMNf$, $EMNF$, alle dasselbe Verhältnis wie bC zu BC oder wie CA zu CB.

Durch Addition folgt also

$$P' : P = CA : CB.$$

Nun ist $\quad P' :$ (Vieleck in O) $=$ (Kreis $AbA'b'$) $: O$

$= CA : CB$, nach der Annahme.

Daher ist P gleich dem in O eingeschriebenen Vieleck.

Aber das ist unmöglich, weil das letzte Vieleck nach der Annahme größer als die Ellipse und *a fortiori* größer als P ist.

Demnach ist O nicht größer als die Ellipse.

II. Wenn möglich, sei O kleiner als die Ellipse.

In diesem Falle schreiben wir in die *Ellipse* ein Vieleck P mit $4n$ gleichen Seiten ein, so daß $P > O$.

Die Lote von den Eckpunkten auf die Achse AA' verlängere man, bis sie den Hilfskreis schneiden, und zeichne in dem Kreise das entsprechende Vieleck (P').

In den Kreis O schreibe man ein zu P' ähnliches Vieleck ein.

Dann ist $\quad P' : P = CA : CB$

$=$ (Kreis $AbA'b'$) $: O$, nach der Annahme,

$= P' :$ (Vieleck in O).

Daher ist das in O eingeschriebene Vieleck gleich dem Vieleck P, was unmöglich ist, da $P > O$.

Somit ist O weder größer noch kleiner als die Ellipse, also ihr gleich, und die Behauptung ist bewiesen.

Satz 5.

Sind AA', BB' bezüglich die große und kleine Achse einer Ellipse und ist d der Durchmesser eines Kreises, so gilt

(Fläche der Ellipse) : (Fläche des Kreises) $= AA' \cdot BB' : d^2$.

Denn es ist

(Fläche der Ellipse) : (Fläche des Hilfskreises)

$= BB' : AA'$ [Satz 4]

$= AA' \cdot BB' : AA'^2$

und

(Fläche des Hilfskreises) : (Fläche des Kreises mit dem Durchmesser d)

$= AA'^2 : d^2$.

Das gewünschte Ergebnis folgt somit *ex aequali*.

Satz 6.

Die Flächen von Ellipsen verhalten sich wie die Rechtecke aus ihren Achsen.

Das folgt unmittelbar aus den Sätzen 4, 5.

Zusatz. *Die Flächen ähnlicher Ellipsen verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Achsen.*

Satz 7.

Wenn eine Ellipse mit dem Mittelpunkt C und ein Lot CO auf ihrer Ebene gegeben ist, dann ist es möglich, einen Kreiskegel mit der Spitze O zu finden, so daß die gegebene Ellipse ein Schnitt von ihm ist [oder, mit anderen Worten, die Kreisschnitte des Kegels mit der Spitze O zu finden, der durch den Umfang der Ellipse geht].

Man denke sich eine Ellipse, die BB' zur kleinen Achse hat und deren Ebene auf der des Papiers senkrecht steht. Man ziehe CO senkrecht zur Ebene der Ellipse und lasse O die Spitze des gesuchten Kegels sein. Man verlängere OB, OC, OB' und ziehe in derselben Ebene mit ihnen die Gerade BED, welche die Verlängerungen von OC, OB' bezüglich in E, D schneidet, und zwar in solcher Richtung, daß

$$BE \cdot ED : EO^2 = CA^2 : CO^2,$$

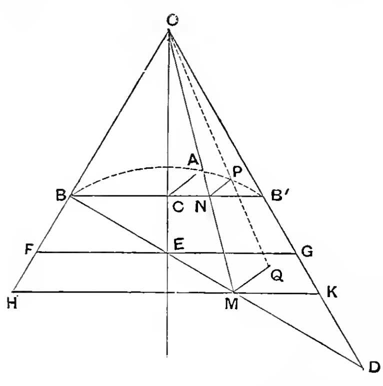
wo CA die Hälfte der großen Achse der Ellipse ist.

„Und das ist möglich, weil

$$BE \cdot ED : EO^2 > BC \cdot CB' : CO^2.“$$

[Die Konstruktion und dieser Satz werden als bekannt vorausgesetzt.]

Man denke sich nun den Kreis mit dem Durchmesser BD in der zur Papierebene senkrechten Ebene und beschreibe den Kegel, der diesen Kreis zur Grundfläche und O zur Spitze hat.



Wir haben also zu beweisen, daß die gegebene Ellipse ein Schnitt dieses Kegels ist, oder wenn P ein beliebiger Punkt der Ellipse ist, daß P auf der Oberfläche des Kegels liegt.

Man ziehe PN senkrecht zu BB'; man ziehe die Gerade ON bis zum Schnittpunkte M mit BD und ziehe MQ in der Ebene des Kreises mit dem Durchmesser BD senkrecht zu BD bis zum Schnittpunkte Q mit dem Kreise. Ferner ziehe man FG, HK bezüglich durch E, M parallel zu BB'.

Wir haben dann

$$\begin{aligned}
QM^2 : HM \cdot MK &= BM \cdot MD : HM \cdot MK \\
&= BE \cdot ED : FE \cdot EG \\
&= (BE \cdot ED : EO^2) \cdot (EO^2 : FE \cdot EG) \\
&= (CA^2 : CO^2) \cdot (CO^2 : BC \cdot CB') \\
&= CA^2 : CB^2 \\
&= PN^2 : BN \cdot NB'.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
QM^2 : PN^2 &= HM \cdot MK : BN \cdot NB' \\
&= OM^2 : ON^2;
\end{aligned}$$

da nun PN und QM parallel sind, ist OPQ eine gerade Linie.

Aber Q liegt auf der Peripherie des Kreises mit dem Durchmesser BD; daher ist OQ eine Erzeugende des Kegels, und somit liegt P auf dem Kegel.

Demnach geht der Kegel durch alle Punkte der Ellipse.

Satz 8.

Wenn eine Ellipse gegeben ist, ferner eine Ebene, die durch eine ihrer Achsen, AA', geht und auf der Ebene der Ellipse senkrecht steht, und eine durch den Mittelpunkt C gehende Gerade CO in der gegebenen Ebene durch AA', aber nicht senkrecht zu AA', dann ist es möglich, einen Kegel mit der Spitze O zu finden, so daß die gegebene Ellipse ein Schnitt von ihm ist [oder, mit anderen Worten, die Kreisschnitte des Kegels mit der Spitze O zu finden, dessen Oberfläche durch den Umfang der Ellipse geht].

Nach der Voraussetzung sind OA und OA' ungleich. Man verlängere OA' bis D, so daß OD gleich OA wird. Man ziehe die Verbindungslinie AD und durch C parallel zu ihr die Gerade FG.

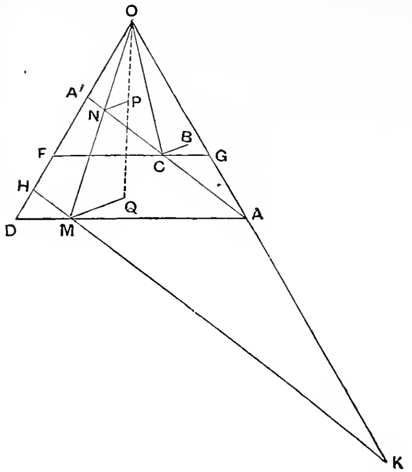
Die Ebene der gegebenen Ellipse ist zur Papierebene senkrecht zu denken. Es sei BB' die andere Achse der Ellipse.

Man denke sich die durch AD gehende und zur Ebene des Papiers senkrechte Ebene und beschreibe in ihr entweder (a), wenn $CB^2 = FC \cdot CG$, den Kreis mit dem Durchmesser AD, oder (b), wenn das nicht der Fall ist, die Ellipse mit AD als Achse, deren andere Achse d der folgenden Bedingung genügt:

$$d^2 : AD^2 = CB^2 : FC \cdot CG.$$

Man konstruiere den Kegel mit der Spitze O, dessen Oberfläche durch die soeben gezogene Kurve geht. Das ist möglich, auch wenn die Kurve eine Ellipse ist, da die Gerade vom Punkte O nach dem Mittelpunkte von AD auf der Ebene der Ellipse senkrecht steht, und zwar erfolgt die Konstruktion nach Satz 7.

Ist nun P irgend ein Punkt der gegebenen Ellipse, so haben wir nur zu beweisen, daß P auf der Oberfläche des soeben erhaltenen Kegels liegt.



Man ziehe PN senkrecht zu AA', ferner die Verbindungslinie ON und verlängere sie, bis sie AD in M schneidet. Durch M ziehe man HK parallel zu AA'.

Schließlich errichte man in M auf der Zeichnungsebene das Lot MQ (das also auch auf HK und AD senkrecht steht), wo Q den Schnittpunkt mit der Ellipse oder dem Kreise über AD (und daher auch mit der Oberfläche des Kegels) bedeutet.

Dann ist

$$\begin{aligned} QM^2 : HM \cdot MK &= (QM^2 : DM \cdot MA) \cdot (DM \cdot MA : HM \cdot MK) \\ &= (d^2 : AD^2) \cdot (FC \cdot CG : A'C \cdot CA) \\ &= (CB^2 : FC \cdot CG) \cdot (FC \cdot CG : A'C \cdot CA) \\ &= CB^2 : CA^2 \\ &= PN^2 : A'N \cdot NA. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der inneren Glieder erhalten wir

$$\begin{aligned} QM^2 : PN^2 &= HM \cdot MK : A'N \cdot AN \\ &= OM^2 : ON^2. \end{aligned}$$

Da nun PN und QM parallel sind, so ist OPQ eine gerade Linie, und da Q auf der Oberfläche des Kegels liegt, so muß auch P darauf liegen.

Ebenso liegen alle anderen Punkte der Ellipse auch auf dem Kegel, und die Ellipse ist daher ein Schnitt des Kegels.

Satz 9.

Wenn eine Ellipse gegeben ist, ferner eine Ebene, die durch eine ihrer Achsen geht und auf der Ebene der Ellipse senkrecht steht, und eine Gerade CO durch den Mittelpunkt C der Ellipse in der gegebenen Ebene durch die Achse, aber nicht senkrecht zu dieser Achse, dann ist es möglich, einen Zylinder mit der Achse OC zu finden, von dem die

Ellipse ein Schnitt ist [oder, mit anderen Worten, die Kreisschnitte des Zylinders mit der Achse OC zu finden, dessen Oberfläche durch den Umfang der gegebenen Ellipse geht].

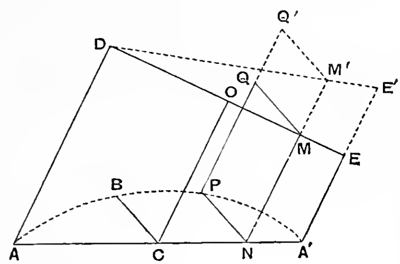
Es sei AA' eine Achse der Ellipse, und die Ebene der Ellipse stehe senkrecht auf der des Papiers, so daß OC in der Papierebene liegt.

Man ziehe AD, $A'E$ parallel zu CO und lasse DE die durch O gehende Gerade sein, die auf AD und $A'E$ senkrecht steht.

Wir haben nun drei verschiedene Fälle, je nachdem die andere Achse BB' der Ellipse (1) gleich, (2) größer oder (3) kleiner als DE ist.

(1) Angenommen, $BB' = DE$.

Man lege durch O die Perpendikularebene zu CO (in der DE liegen muß) und beschreibe in dieser Ebene den Kreis mit dem Durchmesser DE. Durch diesen Kreis lege man den Zylinder mit der Achse OC.



Dieser Zylinder ist der gesuchte, oder seine Oberfläche geht durch jeden Punkt P der Ellipse.

Denn ist P irgend ein Punkt der Ellipse, so ziehe man PN senkrecht zu AA'; durch N ziehe man parallel zu CO die Gerade NM, die DE in M schneide, und durch M in der Ebene des Kreises mit dem Durchmesser DE die Gerade MQ senkrecht zu DE, wo Q den Schnittpunkt mit dem Kreise bedeutet.

Da nun $$DE = BB',$$

so folgt $$PN^2 : AN \cdot NA' = DO^2 : AC \cdot CA'.$$

Ferner ist $DM \cdot ME : AN \cdot NA' = DO^2 : AC^2$,

da AD, CO, NM und $A'E$ parallel sind.

Daher $$PN^2 = DM \cdot ME$$
$$= QM^2,$$

wegen der Eigenschaft des Kreises.

Da nun PN und QM gleich und parallel sind, so ist PQ zu MN und damit zu CO parallel. Folglich ist PQ eine Erzeugende des Zylinders, dessen Oberfläche demnach durch P geht.

(2) Ist $BB' > DE$, so nehmen wir E' auf $A'E$ so an, daß $DE' = BB'$ wird, und beschreiben den Kreis mit dem Durch-

messer DE' in der zu der Zeichnungsebene senkrechten Ebene; im übrigen verlaufen Konstruktion und Beweis genau ebenso wie im Falle (1).

(3) Angenommen, $BB' < DE$.

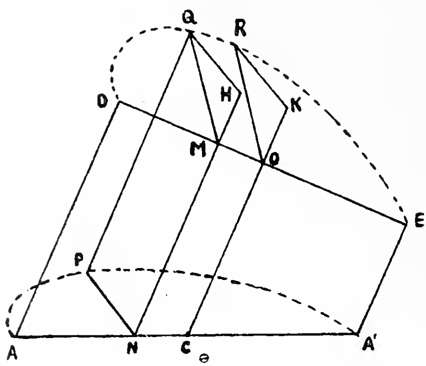
Man wähle auf der Verlängerung von CO den Punkt K gemäß der Beziehung

$$DO^2 - CB^2 = OK^2.$$

In K errichte man auf der Papierebene das Lot KR und mache es gleich CB.

Dann ist $\quad OR^2 = OK^2 + CB^2 = OD^2.$

In der durch DE und OR gelegten Ebene beschreibe man den Kreis mit dem Durchmesser DE. Durch diesen Kreis (der durch R gehen muß) lege man den Zylinder mit der Achse OC.



Wir haben dann zu beweisen, wenn P irgend ein Punkt der gegebenen Ellipse ist, daß P auf dem so erhaltenen Zylinder liegt.

Wir ziehen PN senkrecht zu AA' und durch N parallel zu CO die Gerade NM, die DE in M schneidet. In der Ebene des Kreises mit dem Durchmesser DE ziehen wir MQ senkrecht zu DE, wo Q der Schnittpunkt mit dem Kreise ist.

Schließlich fällen wir das Lot QH auf die Verlängerung von NM. Dann steht QH senkrecht auf der Ebene, die AC und DE enthält, d. h. auf der Ebene der Zeichnung.

Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KRO, HQM

$$QH^2 : QM^2 = KR^2 : OR^2.$$

Und es ist $\quad QM^2 : AN \cdot NA' = DM \cdot ME : AN \cdot NA'$

$$= OD^2 : CA^2.$$

Da nun $OR = OD$, so folgt *ex aequali*

$$QH^2 : AN \cdot NA' = KR^2 : CA^2$$
$$= CB^2 : CA^2$$
$$= PN^2 : AN \cdot NA'.$$

Somit ist QH gleich PN, und QH, PN sind auch parallel. Demnach ist PQ parallel zu MN und daher auch zu CO, so daß PQ eine Erzeugende ist und der Zylinder durch P geht.

Satz 10.

Von den früheren Geometern ist bewiesen worden, *daß das Verhältnis irgend zweier Kegel gleich dem Produkte der Verhältnisse ihrer Grundflächen und ihrer Höhen ist*[1]) [wörtlich: gleich dem aus den Verhältnissen der Grundflächen und Höhen zusammengesetzten Verhältnisse]. Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, *daß das Verhältnis irgend zweier Kegelsegmente gleich dem Produkte der Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen ist.*

Der Satz, *daß jeder Zylinderstumpf das Dreifache des Kegelsegments ist, das dieselbe Grundfläche wie der Stumpf und gleiche Höhe hat*, wird gleichfalls auf dieselbe Weise bewiesen, wie der Satz, *daß der Zylinder das Dreifache des Kegels ist, der dieselbe Grundfläche wie der Zylinder und gleiche Höhe hat.*[2])

Satz 11.

(1) *Wird ein Rotationsparaboloid von einer durch die Achse gehenden oder zu ihr parallelen Ebene geschnitten, so ist der Schnitt eine Parabel, die der ursprünglichen Parabel kongruent ist, die durch ihre Umdrehung das Paraboloid erzeugt. Die Achse des Schnittes ist die Schnittlinie der schneidenden Ebene mit der durch die Achse des Paraboloids gehenden Ebene, die auf der Schnittebene senkrecht steht.*

Wird das Paraboloid von einer zu seiner Achse senkrechten Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

(2) *Wird ein Rotationshyperboloid von einer durch die Achse gehenden, zur Achse parallelen oder durch den Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten, so ist der Schnitt eine Hyperbel, die der ursprünglichen Hyperbel, die durch ihre Umdrehung das Hyperboloid erzeugt,* (a) *wenn die Schnittebene durch die Achse geht, kongruent,* (b) *wenn sie zur Achse parallel ist, ähnlich,* (c) *wenn sie durch den Mittelpunkt geht, nicht ähnlich ist. Die Achse des Schnittes ist die Schnittlinie der schneidenden Ebene mit der durch die Achse des Hyperboloids gehenden Ebene, die auf der Schnittebene senkrecht steht.*

---

[1]) Das folgt aus Euklid XII. 11 und 14 zusammengenommen. Vgl. *Über Kugel und Zylinder* I, Hilfssatz 1.

[2]) Diesen Satz hat Eudoxus bewiesen, wie in der Vorrede zu *Über Kugel und Zylinder* I. erwähnt. Vgl. Euklid XII. 10.

Jeder Schnitt des Hyperboloids mit einer zur Achse senkrechten Ebene ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

(3) *Wird irgend ein Sphäroid von einer durch die Achse gehenden oder zur Achse parallelen Ebene geschnitten, so ist der Schnitt eine Ellipse, die,* (a) *wenn der Schnitt durch die Achse geht, kongruent,* (b) *wenn er zur Achse parallel ist, ähnlich der Ellipse ist, die durch ihre Umdrehung die Figur erzeugt. Die Achse des Schnittes ist die Schnittlinie der schneidenden Ebene mit der durch die Achse des Sphäroids gehenden Ebene, die auf der Schnittebene senkrecht steht.*

Entsteht der Schnitt durch eine zur Achse des Sphäroids senkrechte Ebene, so ist er ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

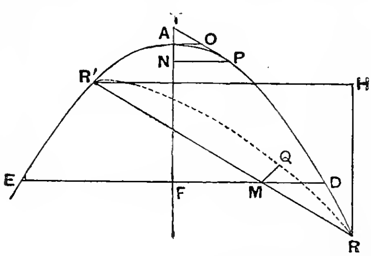
(4) *Wird irgend eine der genannten Figuren von einer durch die Achse gehenden Ebene geschnitten, und fällt man von irgend einem Punkte auf der Oberfläche der Figur, aber nicht auf dem Schnitt, das Lot auf die Schnittfläche, so fällt dieses Lot innerhalb des Schnittes.*

„Die Beweise aller dieser Sätze sind evident.“ [1]

Satz 12.

Wird ein Rotationsparaboloid mit einer zur Achse weder parallelen noch senkrechten Ebene geschnitten und schneidet die durch die Achse gehende zur Schnittebene senkrechte Ebene diese in einer Geraden, deren innerhalb des Paraboloids fallender Abschnitt RR' ist, so ist der Schnitt des Paraboloids eine Ellipse, deren große Achse RR' und deren kleine Achse gleich dem senkrechten Abstande zwischen den durch R und R' parallel zur Achse des Paraboloids gezogenen Geraden ist.

Die schneidende Ebene werde senkrecht zur Ebene der Zeichnung angenommen, und die letztgenannte sei die durch die Achse ANF des Paraboloids gelegte Ebene, die von der Schnittebene in RR' rechtwinklig geschnitten wird. RH sei parallel zur Achse des Paraboloids und $R'H$ senkrecht zu RH.



Es sei Q irgend ein Punkt des in der schneidenden Ebene entstehenden Schnittes, und von Q fälle man das Lot QM auf RR'. QM steht daher auf der Ebene der Zeichnung senkrecht.

Durch M ziehe man senkrecht zur Achse ANF die Gerade $DMFE$, die den in der Zeichnungsebene liegenden parabolischen Schnitt in D und E schneidet.

[1] Vgl. die Einleitung, Kapitel III. § 4.

Dann steht QM auf DE senkrecht, und legt man durch DE und QM die verbindende Ebene, so steht diese auf der Achse senkrecht und schneidet das Paraboloid in einem Kreise.

Da Q auf diesem Kreise liegt, so ist

$$QM^2 = DM \cdot ME.$$

Ist nun PT die zu RR' parallele Tangente des in der Zeichnungsebene liegenden parabolischen Schnittes und schneidet PT die Tangente in A' im Punkte O, so ist nach der Eigenschaft der Parabel

$$DM \cdot ME : RM \cdot MR' = AO^2 : OP^2 \qquad \text{[Satz 3 (1)]}$$
$$= AO^2 : OT^2, \text{ da } AN = AT.$$

Daher ist $$QM^2 : RM \cdot MR' = AO^2 : OT^2$$
$$= R'H^2 : RR'^2,$$

wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AOT und $HR'R$.

Somit liegt Q auf einer Ellipse, deren große Achse RR' und deren kleine Achse gleich $R'H$ ist.

Sätze 13, 14.

Wird ein Rotationshyperboloid von einer Ebene geschnitten, die alle Erzeugenden des einhüllenden Kegels schneidet, oder ein längliches Sphäroid von einer nicht zur Achse senkrechten Ebene[1]*, und schneidet eine durch die Achse gehende Ebene die Schnittebene rechtwinklig in einer Geraden, auf der das Hyperboloid oder Sphäroid einen Abschnitt RR' begrenzt, dann ist der entstehende Schnitt eine Ellipse, die RR' zur großen Achse hat.*

Die schneidende Ebene werde senkrecht zur Ebene der Zeichnung angenommen, und die letztgenannte sei die durch die Achse ANF gehende Ebene, die von der Schnittebene in RR' rechtwinklig geschnitten wird. Der Schnitt des Hyperboloids oder Sphäroids mit der Papierebene ist also eine Hyperbel oder Ellipse, die ANF zur Haupt- oder großen Achse hat.

Man nehme auf dem in der schneidenden Ebene entstehenden Schnitte irgend einen Punkt Q an und fälle von ihm das Lot QM auf RR'. QM steht dann auf der Papierebene senkrecht.

Durch M ziehe man senkrecht zur Achse ANF die Gerade DFE, deren Schnittpunkte mit der Hyperbel oder Ellipse D, E sind; und durch QM und DE lege man die Ebene. Diese Ebene

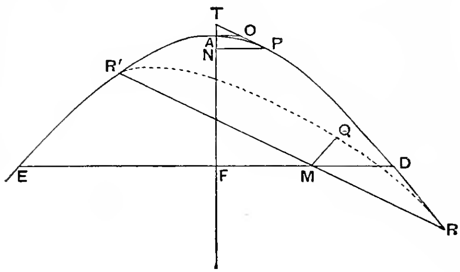
[1] Archimedes beginnt den Satz 14 für das *Sphäroid* mit der Bemerkung, wenn die Schnittebene durch die Achse gehe oder parallel zu ihr sei, dann sei der Fall klar (δῆλον). Vgl. Satz 11 (3).

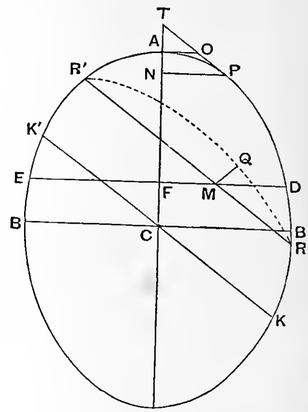
steht demnach auf der Achse senkrecht und schneidet das Hyperboloid oder Sphäroid in einem Kreise.

Daher ist $$QM^2 = DM \cdot ME.$$

Es sei PT die zu RR' parallele Tangente der Hyperbel oder Ellipse, und die Tangente in A schneide PT in O.

Dann ist nach der Eigenschaft der Hyperbel oder Ellipse
$$DM \cdot ME : RM \cdot MR' = OA^2 : OP^2$$
oder
$$QM^2 : RM \cdot MR' = OA^2 : OP^2.$$





Nun ist (1) bei der Hyperbel $OA < OP$, da $AT < AN$[1]), und demnach $OT < OP$, während $OA < OT$,

(2) bei der Ellipse, wenn KK' der zu RR' parallele Durchmesser und BB' die kleine Achse ist,
$$BC \cdot CB' : KC \cdot CK' = OA^2 : OP^2$$
und
$$BC \cdot CB' < KC \cdot CK', \text{ so daß } OA < OP.$$
Somit ist in beiden Fällen der Ort des Punktes Q eine Ellipse, deren große Achse RR' ist.

Zusatz 1. Wenn das Sphäroid ein ‚flaches‘ Sphäroid ist, so ist der Schnitt eine Ellipse, und alles verläuft ebenso wie vorher, nur daß in diesem Falle RR' die *kleine* Achse ist.

Zusatz 2. Bei allen Konoiden oder Sphäroiden sind parallele Schnitte ähnlich, weil das Verhältnis $OA^2 : OP^2$ für alle parallelen Schnitte dasselbe ist.

---

[1]) Bezüglich dieser Annahme vgl. die Einleitung, Kapitel III. § 3.

Satz 15.

(1) *Wird durch irgend einen Punkt der Oberfläche eines Konoids eine Gerade gezogen, im Falle des Paraboloids parallel zur Achse und im Falle des Hyperboloids parallel zu irgend einer durch die Spitze des einhüllenden Kegels gehenden und innerhalb dieses Kegels liegenden Geraden, so fällt der Teil der geraden Linie, der auf der konvexen Seite der Oberfläche liegt, außerhalb, der andere Teil innerhalb der Oberfläche.*

Denn legt man eine Ebene im Falle des Paraboloids durch die Achse und den Punkt und im Falle des Hyperboloids durch den gegebenen Punkt und die gegebene Gerade durch die Spitze des einhüllenden Kegels, so ist der Schnitt mit dieser Ebene (a) bei dem Paraboloid eine Parabel, deren Achse die Achse des Paraboloids ist, (b) bei dem Hyperboloid eine Hyperbel, in der die gegebene Gerade durch die Spitze des einhüllenden Kegels ein Durchmesser[1]) ist. [Satz 11.]

Somit folgt die Behauptung aus den Eigenschaften der Kegelschnitte.

(2) *Berührt eine Ebene ein Konoid, ohne es zu schneiden, so berührt sie es nur in einem Punkte, und die durch den Berührungspunkt und die Achse des Konoids gelegte Ebene steht auf der Berührungsebene senkrecht.*

Denn wenn möglich, berühre die Ebene in zwei Punkten. Durch jeden Punkt ziehe man die Parallele zur Achse. Die durch die beiden Parallelen gelegte Ebene wird daher entweder die Achse enthalten oder zu ihr parallel sein. Daher ist der Schnitt dieser Ebene mit dem Konoid ein Kegelschnitt [Satz 11 (1), (2)], die beiden Punkte liegen auf diesem Kegelschnitt, und ihre Verbindungslinie liegt innerhalb des Kegelschnitts und damit innerhalb des Konoids. Aber diese Gerade liegt in der Berührungsebene, da die beiden Punkte in dieser Ebene liegen. Also muß ein Teil der Berührungsebene innerhalb des Konoids liegen, was unmöglich ist, da die Ebene das Konoid nicht schneidet.

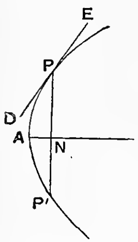
Daher berührt die Tangentialebene nur in einem Punkte.

Daß die Ebene durch den Berührungspunkt und die Achse auf der Berührungsebene senkrecht steht, ist in dem besonderen Falle evident, wo der Berührungspunkt der Scheitel des Konoids

---

[1]) Im Texte ist hier wohl ein Fehler, wenn es heißt „der *Diameter*“ (d. h. die Achse) der Hyperbel ist „die in dem Konoid von der Spitze des Kegels gezogenen Gerade“. Diese gerade Linie ist aber im allgemeinen nicht die *Achse* des Schnittes.

ist. Denn wenn irgend zwei Ebenen durch die Achse zwei Kegelschnitte ausschneiden, so stehen die Scheiteltangenten beider Kegelschnitte auf der Achse des Konoids senkrecht. Und alle derartigen Tangenten liegen in der Berührungsebene, die deshalb auf der Achse und auf jeder Ebene durch die Achse senkrecht stehen muß.



Ist der Berührungspunkt P nicht der Scheitel, so lege man die Ebene durch die Achse AN und den Punkt P. Sie schneidet das Konoid in einem Kegelschnitt, dessen Achse AN ist, und die Berührungsebene in einer Geraden DPE, die den Kegelschnitt in P berührt. Man ziehe die Gerade PNP' senkrecht zur Achse und lege durch sie die Ebene, die auch auf der Achse senkrecht steht. Diese Ebene schneidet das Konoid in einem Kreise und die Berührungsebene in einer Tangente des Kreises, die daher auf PN senkrecht steht. Somit steht die Kreistangente auf der PN und AN enthaltenden Ebene senkrecht, und es folgt, daß diese letzte Ebene auf der Tangentialebene senkrecht steht.

Satz 16.

(1) *Berührt eine Ebene ein Sphäroid, ohne es zu schneiden, so berührt sie es nur in einem Punkte, und die Ebene durch den Berührungspunkt und die Achse steht auf der Berührungsebene senkrecht.*

Das läßt sich nach derselben Methode wie der vorangehende Satz beweisen.

(2) *Wird ein Konoid oder Sphäroid mit einer Ebene durch die Achse geschnitten und längs irgendeiner Tangente des entstehenden Kegelschnitts die auf der Schnittebene senkrechte Ebene errichtet, so berührt diese Ebene das Konoid oder Sphäroid in demselben Punkte, in dem die Gerade den Kegelschnitt berührt.*

Denn sie kann mit der Oberfläche keinen anderen Punkt gemeinsam haben. Wäre das der Fall, so würde das Lot von dem zweiten Punkte auf die Schnittebene auch auf der Tangente des Kegelschnittes senkrecht stehen und daher außerhalb der Oberfläche fallen. Aber es muß innerhalb liegen. [Satz 11 (4)]

(3) *Berühren zwei parallele Ebenen ein Sphäroid, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den Mittelpunkt des Sphäroids.*

Wenn die Ebenen auf der Achse senkrecht stehen, so ergibt sich der Satz unmittelbar. Andernfalls steht die Ebene durch die Achse und einen Berührungspunkt auf der Tangentialebene in diesem Punkte senkrecht. Daher steht sie auch auf der parallelen Berührungsebene senkrecht und muß deshalb durch den zweiten Berührungspunkt gehen. Somit liegen beide Berührungspunkte in einer Ebene durch die Achse, und der Satz ist auf einen planimetrischen zurückgeführt.

Satz 17.

Berühren zwei parallele Ebenen ein Sphäroid und legt man durch den Mittelpunkt die zu den Tangentialebenen parallele Ebene, so fällt die durch irgend einen Punkt auf dem Umfange des entstehenden Kegelschnittes parallel zur Berührungssehne der Tangentialebenen gezogene Gerade außerhalb des Sphäroids.

Das läßt sich durch Zurückführung auf einen planimetrischen Satz sofort beweisen.

Archimedes fügt hinzu, es sei ersichtlich, wenn die zu den Berührungsebenen parallele Ebene nicht durch den Mittelpunkt gehe, daß dann eine in der angegebenen Weise gezogene Gerade in der Richtung des kleineren Segments außerhalb, in der anderen Richtung jedoch innerhalb des Sphäroids falle.

Satz 18.

Jedes Sphäroid wird durch eine Ebene durch den Mittelpunkt hinsichtlich der Oberfläche und des Volumens in zwei gleiche Teile geteilt.

Um das zu beweisen, nimmt Archimedes ein kongruentes Sphäroid, teilt es ebenso durch eine Ebene durch den Mittelpunkt und wendet dann die Methode der Anlegung an.

Sätze 19, 20.

Ist ein durch eine Ebene abgeschnittenes Segment eines Rotationsparaboloids oder -hyperboloids gegeben oder ein auch durch eine Ebene abgeschnittenes Segment eines Sphäroids, das kleiner als das halbe Sphäroid ist, dann ist es möglich, dem Segment eine körperliche Figur einzuschreiben und eine andere umzuschreiben, beide aus Zylindern oder ‚Zylinderstümpfen‘ gebildet, so daß die umgeschriebene Figur die eingeschriebene um ein Volumen übertrifft, das kleiner als das eines beliebig gegebenen Körpers ist.

Die ebene Grundfläche des Segments stehe auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, und die letztgenannte sei die Ebene durch die Achse des Konoids oder Sphäroids, die auf der Grundfläche des Segments in BC senkrecht steht. Der Schnitt in der Zeichnungsebene ist dann ein Kegelschnitt BAC. [Satz 11]

EAF sei die zu BC parallele Tangente des Kegelschnitts und A der Berührungspunkt. Durch EAF lege man die zur Grundfläche des Segments parallele Ebene. Diese Ebene berührt dann das Konoid oder Sphäroid in A. [Satz 16]

(1) Steht die Grundfläche des Segments auf der Achse des Konoids oder Sphäroids senkrecht, so ist A der Scheitel des Konoids oder Sphäroids, und seine Achse AD steht auf BC im Mittelpunkte senkrecht.

(2) Steht die Grundfläche des Segments auf der Achse des Konoids oder Sphäroids nicht senkrecht, so ziehen wir AD

(a) in dem Paraboloid parallel zur Achse,

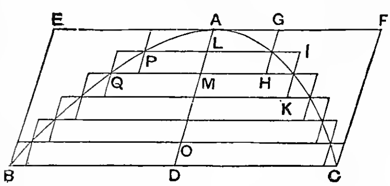
(b) in dem Hyperboloid durch den Mittelpunkt (oder die Spitze des einhüllenden Kegels),

(c) in dem Sphäroid durch den Mittelpunkt,

und in allen Fällen folgt, daß AD die Strecke BC in D halbiert.

Dann ist A der Scheitel des Segments und AD seine Achse.

Ferner ist die Grundfläche des Segments ein Kreis oder eine Ellipse mit BC als Durchmesser bzw. Achse und dem Mittelpunkte D. Daher können wir durch diese Kurve einen Zylinder oder ‚Zylinderstumpf' legen, dessen Achse AD ist. [Satz 9]



Wenn wir diesen Zylinder oder Stumpf fortgesetzt durch Ebenen, die zur Grundfläche parallel sind, halbieren, so werden wir schließlich zu einem Zylinder oder Stumpf kommen, dessen Volumen kleiner als das eines beliebig gegebenen Körpers ist.

Dieser Zylinder oder Stumpf habe die Achse OD, und AD werde in $L, M, \ldots$ in Abschnitte geteilt, die gleich OD sind. Durch $L, M, \ldots$ ziehe man die Parallelen zu BC, die den Kegelschnitt in $P, Q, \ldots$ schneiden, und durch diese Geraden lege man die zur Grundfläche des Segments parallelen Ebenen. Diese schneiden das Konoid oder Sphäroid in Kreisen oder ähnlichen Ellipsen. Über diesen Kreisen oder Ellipsen errichte man je zwei Zylinder oder Zylinderstümpfe, deren Achsen alle gleich OD sind, und immer einen in der Richtung nach A den anderen in der Richtung nach D, wie an der Figur zu sehen ist.

Dann bilden die in der Richtung nach A errichteten Zylinder oder Zylinderstümpfe eine umgeschriebene, die in der Richtung nach D eine eingeschriebene Figur im Hinblick auf das Segment.

Der Zylinder oder Stumpf PG in der umgeschriebenen Figur ist gleich dem Zylinder oder Stumpf PH in der eingeschriebenen, QJ in der umgeschriebenen ist gleich QK in der eingeschriebenen Figur und sofort.

Durch Addition erhalten wir also:

(umgeschriebene Figur) = (eingeschriebene Figur)
+ (Zylinder oder Stumpf mit der Achse OD).

Aber der Zylinder oder Stumpf mit der Achse OD ist kleiner als der gegebene Körper, und somit ist der Satz bewiesen.

„Nach diesen einleitenden Sätzen wollen wir die mitgeteilten Sätze über die Figuren beweisen.“

Sätze 21, 22.

Jedes Segment eines Rotationsparaboloids ist einundeinhalbmal so groß wie der Kegel oder das Kegelsegment mit derselben Grundfläche und Achse.

Die Grundfläche des Segments stehe auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, und die Ebene der Zeichnung sei diejenige durch die Achse des Paraboloids, die auf der Grundfläche des Segments in BC senkrecht steht und die Oberfläche in der Parabel BAC schneidet.

EF sei die zu BC parallele Tangente der Parabel, A der Berührungspunkt.

(1) Steht die Grundfläche des Segments auf der Achse des Paraboloids senkrecht, so ist diese Achse die Gerade AD, die auf BC im Mittelpunkte D senkrecht steht.

(2) Steht die Grundfläche nicht auf der Achse des Paraboloids senkrecht, so ziehen wir AD parallel zur Achse des Paraboloids. AD halbiert dann BC, steht aber nicht darauf senkrecht.

Durch EF legen wir die zur Grundfläche des Segments parallele Ebene. Diese berührt das Paraboloid in A, und A ist der Scheitel des Segments, AD seine Achse.

Die Grundfläche des Segments ist ein Kreis mit dem Durchmesser BC oder eine Ellipse mit BC als großer Achse.

Demnach läßt sich ein Zylinder oder ein Zylinderstumpf finden, der durch den Kreis oder die Ellipse geht und AD zur Achse hat [Satz 9]; ebenso läßt sich ein Kegel oder ein Kegelsegment konstruieren, durch den Kreis oder die Ellipse gehend, und mit A als Scheitel und AD als Achse. [Satz 8]

Es sei X ein Kegel, der gleich $\frac{3}{2} \cdot$ (Kegel oder Kegelsegment ABC) ist. Der Kegel X ist daher gleich der Hälfte des Zylinders oder Zylinderstumpfs $CBEF$. [Vgl. Satz 10]

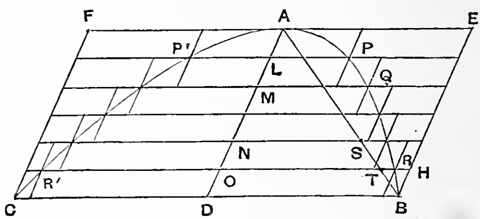
Wir haben zu beweisen, daß der Inhalt des Paraboloidsegments gleich X ist.

Ist das nicht der Fall, so muß das Segment entweder größer oder kleiner als X sein.

I. Wenn möglich, sei das Segment größer als X.

Wir können dann wie in dem vorigen Satze Figuren um- und einschreiben, die aus Zylindern oder Zylinderstümpfen von gleicher Höhe zusammengesetzt sind, und so, daß

$$(\text{umgeschr. Figur}) - (\text{eingeschr. Figur}) < (\text{Segment}) - X.$$



Der größte von den die umgeschriebene Figur bildenden Zylindern oder Zylinderstümpfen sei der, dessen Grundfläche der Kreis oder die Ellipse über BC und dessen Achse OD ist, und der kleinste von ihnen sei der, dessen Grundfläche der Kreis oder die Ellipse über PP' und dessen Achse AL ist.

Der größte unter den die eingeschriebene Figur bildenden Zylindern habe den Kreis oder die Ellipse über RR' zur Grundfläche und OD zur Achse, und der kleinste habe den Kreis oder die Ellipse über PP' zur Grundfläche und LM zur Achse.

Man lasse die Grundflächen aller Zylinder oder Stümpfe sich ausdehnen, bis sie den Mantel des großen Zylinders oder Stumpfs $CBEF$ schneiden.

Da nun

$$(\text{umgeschr. Figur}) - (\text{eingeschr. Figur}) < (\text{Segment}) - X$$

ist, so folgt

$$(\text{eingeschr. Figur}) > X \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Vergleichen wir sodann nacheinander die Zylinder oder Stümpfe, deren Höhen gleich OD sind und die bezüglich Teile des großen Zylinders oder Stumpfs $CBEF$ und der eingeschriebenen Figur bilden, so haben wir (erster Zylind. od. Stumpf in $CBEF$) : (erster Z. o. St. in d. eingeschr. Fig.)

$$= BD^2 : RO^2$$
$$= AD : AO$$
$$= BD : TO,$$ wenn T der Schnittpunkt von OR und AB ist.

Ferner ist entsprechend

(zweiter Zylind. od. Stumpf in $CBEF$) : (zweit. Z. o. St. in d. eingeschr. Fig.)

$$= HO : SN$$

und so fort.

Folglich gilt [Satz 1]

(Zylinder oder Stumpf $CBEF$) : (eingeschr. Figur)

$$= (BD + HO + \ldots) : (TO + SN + \ldots),$$

wo $BD, HO, \ldots$ untereinander gleich sind und $BD, TO, SN, \ldots$ in arithmetischer Progression abnehmen.

Aber es ist [Hilfssatz vor Satz 1]

$$BD + HO + \ldots > 2(TO + SN + \ldots).$$

Daher ist

(Zylinder oder Stumpf $CBEF$) > 2 (eingeschr. Figur)

oder $X >$ (eingeschr. Figur);

das ist aber nach (α) unmöglich.

II. Wenn möglich, sei das Segment kleiner als X.

In diesem Falle schreiben wir wie vorher Figuren ein und um, jedoch so, daß

(umgeschriebene Figur) — (eingeschr. Figur) $< X$ — (Segment),

woraus folgt

(umgeschriebene Figur) $< X$ . . . . . . (β).

Vergleichen wir nun die Zylinder oder Stümpfe, die bezüglich den großen Zylinder oder Stumpf $CBEF$ und die *umgeschriebene* Figur bilden, so haben wir

(erster Zylind. od. Stumpf in $CBEF$) : (erster Z. o. St. in d. umgeschr. Fig.)

$$= BD^2 : BD^2$$
$$= BD : BD,$$

(zweiter in $CBEF$) : (zweiter in der umgeschr. Figur)

$$= HO^2 : RO^2$$
$$= AD : AO$$
$$= HO : TO$$

und so fort.

Folglich gilt [Satz 1]

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } CBEF):(\text{umgeschriebene Figur})$$
$$= (BD + HO + \ldots):(BD + TO + \ldots),$$
$$< 2:1, \qquad \text{[Hilfssatz vor Satz 1]}$$

und es folgt

$$X < (\text{umgeschriebene Figur}),$$

was nach (β) unmöglich ist.

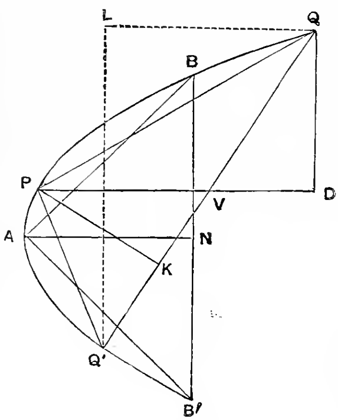
Da somit das Segment weder größer noch kleiner als X ist, so ist es gleich X und daher gleich $\frac{3}{2}$ (Kegel oder Kegelsegment ABC).

Satz 23.

Wenn von einem Rotationsparaboloid zwei Segmente abgeschnitten werden, das eine durch eine zur Achse senkrechte, das andere durch eine nicht zur Achse senkrechte Ebene, und wenn die Achsen der Segmente gleich sind, so sind auch ihre Volumina gleich.

Die beiden Ebenen mögen auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehen und die letztgenannte Ebene gehe durch die Achse des Paraboloids und schneide die beiden anderen Ebenen rechtwinklig in BB' bzw. QQ' und das Paraboloid selbst in der Parabel $QPQ'B'$.

Es seien AN, PV die gleichen Achsen der Segmente und A, P ihre Scheitel.



Man ziehe QL parallel zu AN oder PV und $Q'L$ senkrecht zu QL.

Da nun die durch BB', QQ' abgeschnittenen Segmente des parabolischen Schnittes gleiche Achsen haben, so sind die Dreiecke ABB' und PQQ' gleich [Satz 3]. Ferner ist, wenn QD auf PV senkrecht steht, $QD = BN$ (wie in demselben Satze 3 bewiesen).

Man denke sich nun zwei Kegel mit denselben Grundflächen wie die Segmente und mit den Scheiteln A bzw. P errichtet. Die Höhe des Kegels PQQ' ist dann PK, wenn PK auf QQ' senkrecht steht.

Nun ist das Verhältnis der Kegel gleich dem Produkte der Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen, d. h. gleich dem Produkte aus (1) dem Verhältnisse des Kreises über BB' zu der Ellipse über QQ' und (2) dem Verhältnisse von AN zu PK.

Das heißt, wir haben nach den Sätzen 5 und 12

$$(\text{Kegel } ABB') : (\text{Kegel } PQQ') = (BB'^2 : QQ' \cdot Q'L) \cdot (AN : PK).$$

Und es ist $BB' = 2\,BN = 2\,QD = Q'L$, während $QQ' = 2\,QV$.

Daher

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } ABB') : (\text{Kegel } PQQ') &= (QD : QV) \cdot (AN : PK)\\ &= (PK : PV) \cdot (AN : PK)\\ &= AN : PV.\end{aligned}$$

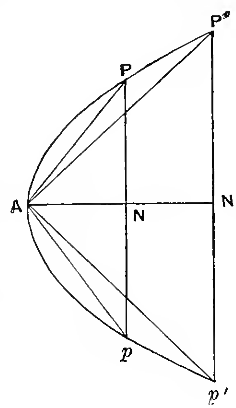
Da aber $AN = PV$, so ist das Verhältnis der Kegel gleich 1; und es folgt, daß die Segmente auch gleich sind, da jedes einundeinhalbmal so groß wie der entsprechende Kegel ist [Satz 22].

Satz 24.

Werden von einem Rotationsparaboloid zwei Segmente durch beliebige Ebenen abgeschnitten, so verhalten sich die Segmente zueinander wie die Quadrate ihrer Achsen.

Das Paraboloid werde von einer durch die Achse gehenden Ebene in dem parabolischen Schnitt $P'PApp'$ geschnitten, und die Achse der Parabel und des Paraboloids sei ANN'.

Auf ANN' trage man von A aus die Strecken AN, AN' ab, die bezüglich gleich den Achsen der gegebenen Segmente sind, und durch N, N' lege man die zur Achse senkrechten Ebenen, die das Paraboloid in Kreisen mit Pp bzw. $P'p'$ als Durchmessern schneiden. Man konstruiere die beiden Kegel mit diesen Kreisen als Grundflächen und der gemeinsamen Spitze A.



Nun sind die Paraboloidsegmente, deren Grundflächen die Kreise über Pp, $P'p'$ sind, bezüglich gleich den gegebenen Segmenten, da ihre entsprechenden Achsen gleich sind [Satz 23]; und da die Segmente APp, $AP'p'$ bezüglich einundeinhalbmal so groß wie die Kegel APp, $AP'p'$ sind, so haben wir nur zu zeigen, daß die Kegel sich wie AN^2 zu AN'^2 verhalten.

Aber es ist

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } APp) : (\text{Kegel } AP'p') &= (PN^2 : P'N'^2) \cdot (AN : AN')\\ &= (AN : AN') \cdot (AN : AN')\\ &= AN^2 : AN'^2;\end{aligned}$$

somit ist der Satz bewiesen.

Sätze 25, 26.

Ist in einem Rotationshyperboloid A der Scheitel und AD die Achse irgend eines durch eine Ebene abgeschnittenen Segments, und is AC der durch A gehende Halbmesser des Hyperboloids (wo CA offenbar mit AD in einer Geraden liegt), so gilt die Proportion:

(Segment) : (Kegel oder Kegelsegment mit derselben Grundfläche und Achse)

$$= (AD + 3\,CA) : (AD + 2\,CA).$$

Die Grundfläche des Segments stehe auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, und die letztgenannte sei die Ebene durch die Achse des Hyperboloids, die in BB' auf der Schnittebene senkrecht steht und die Oberfläche in dem hyperbolischen Segment BAB' schneidet. C sei der Mittelpunkt des Hyperboloids (oder die Spitze des einhüllenden Kegels).

Es sei EF die zu BB' parallele Tangente des hyperbolischen Schnitts. Der Berührungspunkt sei A, und C werde mit A verbunden. Dann geht die Verlängerung von CA durch den Mittelpunkt D von BB', CA ist ein Halbmesser des Hyperboloids, A der Scheitel des Segments und AD seine Achse. Man verlängere AC bis A' und H, so daß $AC = CA' = A'H$ wird.

Durch EF lege man die zur Grundfläche des Segments parallele Ebene. Diese Ebene berührt das Hyperboloid in A.

Dann ist (1), wenn die Grundfläche des Segments auf der Achse des Hyperboloids senkrecht steht, A der Scheitel und AD die Achse des Hyperboloids sowohl wie des Segments, und die Grundfläche des Segments ist ein Kreis mit BB' als Durchmesser.

(2) Steht die Grundfläche des Segments nicht auf der Achse des Hyperboloids senkrecht, so ist die Grundfläche eine Ellipse mit BB' als großer Achse. [Satz 13]

Nun können wir einen Zylinder oder Zylinderstumpf $EBB'F$ konstruieren, der durch den Kreis oder die Ellipse über BB' geht und AD zur Achse hat; ebenso können wir einen Kegel oder ein Kegelsegment mit der Spitze A durch den Kreis oder die Ellipse legen.

Wir haben zu beweisen:

(Segment ABB') : (Kegel oder Kegelsegment ABB') $= HD : A'D$.

Es sei V ein Kegel, so daß

V : (Kegel oder Kegelsegment ABB') $= HD : A'D$ . . (α);

dann haben wir zu beweisen, daß V gleich dem Segment ist.

Nun ist

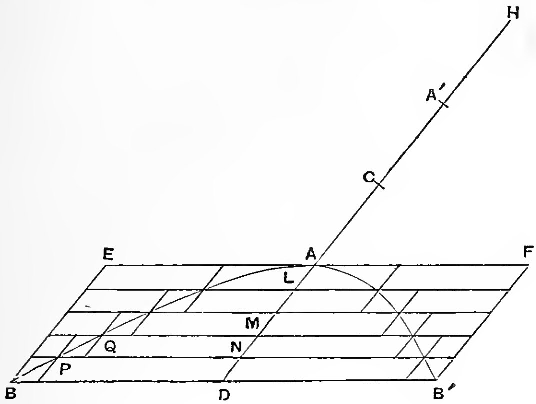
(Zylinder oder Stumpf $EBB'F$) : (Kegel oder Kegelsegment ABB')

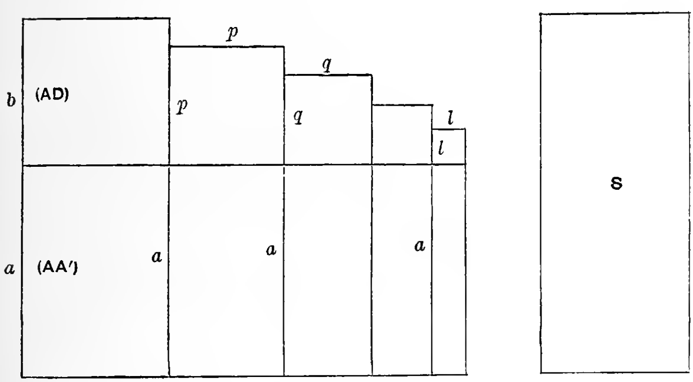
$$= 3 : 1.$$

Folglich, wegen (α),

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : V = A'D : \frac{HD}{3} \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Ist das Segment nicht gleich V, so muß es entweder größer oder kleiner sein.





I. Wenn möglich, sei das Segment größer als V.

Man konstruiere Figuren, die dem Segmente ein- und umgeschrieben sind und aus Zylindern oder Zylinderstümpfen bestehen, deren Achsen auf AD liegen und untereinander gleich sind, so daß

$$(\text{umgeschr. Figur}) - (\text{eingeschr. Figur}) < (\text{Segment}) - V,$$

woraus folgt

$$(\text{eingeschriebene Figur}) > V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Man verlängere die Grundflächen aller Zylinder oder Zylinderstümpfe, bis sie den Mantel des vollständigen Zylinders oder Stumpfes $EBB'F$ schneiden.

Ist nun ND die Achse des größten Zylinders oder Stumpfes in der umgeschriebenen Figur, so besteht der vollständige Zylinder aus Zylindern oder Stümpfen, die alle diesem größten Zylinder oder Stumpf gleich sind.

Wir denken uns eine Anzahl von Strecken a, die gleich AA' sind, und zwar sei ihre Zahl so groß wie die der Teile, in die AD durch die Grundflächen der Zylinder oder Stümpfe geteilt wird. An jede Strecke a legen wir ein Rechteck an, das sie um ein Quadrat überragt, und das größte der Rechtecke sei gleich dem Rechteck $AD \cdot A'D$, das kleinste gleich dem Rechteck $AL \cdot A'L$; die Seiten der überragenden Quadrate $b, p, q, \ldots l$ sollen eine fallende arithmetische Reihe bilden. Dann sind $b, p, q, \ldots l$ bezüglich gleich $AD, AN, AM, \ldots AL$, und die Rechtecke $(ab + b^2), (ap + p^2), \ldots (al + l^2)$ bezüglich gleich $AD \cdot A'D$. $AN \cdot A'N, \ldots AL \cdot A'L$.

Wir nehmen ferner an, daß wir eine Reihe von Flächen S haben, alle dem größten Rechteck $AD \cdot A'D$ gleich und ebensoviel an Zahl wie die kleiner werdenden Rechtecke.

Vergleichen wir nun die aufeinander folgenden Zylinder oder Stümpfe (1) in dem vollständigen Zylinder oder Stumpf $EBB'F$ und (2) in der eingeschriebenen Figur, angefangen an der Grundfläche des Segments, so haben wir

(erster Zylinder oder Stumpf in $EBB'F$) : (erster in der eingeschr. Fig.)

$$= BD^2 : PN^2$$

$$= (AD \cdot A'D) : (AN \cdot A'N), \text{ wegen der Hyperbeleigenschaft.}$$

$$= S : (ap + p^2).$$

Ebenso

(zweiter Zyl. oder Stumpf in $EBB'F$) : (zweiter in der eingeschr. Fig.)

$$= BD^2 : QM^2$$

$$= (AD \cdot A'D) : (AM \cdot A'M)$$

$$= S : (aq + q^2),$$

und so fort.

Der letzte Zylinder oder Stumpf in dem vollständigen Zylinder oder Stumpf $EBB'F$ hat keinen entsprechenden in der eingeschriebenen Figur.

Kombinieren wir die Proportionen, so haben wir [Satz 1]

(Zylinder oder Stumpf $EBB'F$) : (eingeschriebene Figur)

$= $ (Summe aller Flächen S) : $[(ap + p^2) + (aq + q^2) + \ldots]$

$> (a + b) : \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$ [Satz 2]

$> A'D : \frac{HD}{3}$, da $a = AA'$, $b = AD$,

$> (EBB'F) : V$, nach (β).

Folglich ist (eingeschriebene Figur) $< V$.

Aber das ist unmöglich, da nach (γ) die eingeschriebene Figur größer als V ist.

II. Nunmehr sei, wenn möglich, das Segment kleiner als V.

In diesem Falle schreiben wir Figuren um und ein, so daß (umgeschriebene Figur) — (eingeschriebene Figur) $< V$ — (Segment), woraus wir ableiten

$V >$ (umgeschriebene Figur) . . . . . (δ).

Wir vergleichen nun nacheinander die Zylinder oder Stümpfe in dem vollständigen Zylinder oder Stumpf und in der *umgeschriebenen* Figur; und wir erhalten

(erster Zylinder oder Stumpf in $EBB'F$) : (erster in der umgeschr. Fig.)

$= S : S$

$= S : (ab + b^2)$,

(zweiter in $EBB'F$) : (zweiter in der umgeschriebenen Figur)

$= S : (ap + p^2)$,

und so fort.

Folglich [Satz 1]

(Zylinder oder Stumpf $EBB'F$) : (umgeschriebene Figur)

$=$ (Summe aller Flächen S) : $[(ab + b^2) + (ap + p^2) + \ldots]$

$< (a + b) : \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$ [Satz 2]

$< A'D : \frac{HD}{3}$

$< (EBB'F) : V$, nach (β).

Daher ist die umgeschriebene Figur größer als V, was nach (δ) unmöglich ist. Somit ist das Segment weder größer noch kleiner als V und daher ihm gleich.

Folglich ist nach (α)

(Segment ABB') : (Kegel oder Kegelsegment ABB')

$= (AD + 3\,CA) : (AD + 2\,CA)$.

Sätze 27, 28, 29, 30.

(1) *Wird von einem Sphäroid, dessen Mittelpunkt C ist, durch eine die Achse treffende Ebene ein Segment abgeschnitten, das nicht größer als das halbe Sphäroid ist und A zum Scheitel, AD zur Achse hat, und ist $A'D$ die Achse des übrigbleibenden Sphäroidsegments, dann gilt die Proportion*

$$\text{(erstes Segment)} : \text{(Kegel oder Kegelsegment mit derselben Grundfl. u. Achse)}$$
$$= (CA + A'D) : A'D$$
$$[= (3\,CA - AD) : (2\,CA - AD)].$$

(2) *In dem besonderen Falle, daß die Ebene durch den Mittelpunkt geht und das Segment somit die Hälfte des Sphäroids ist, ist das halbe Sphäroid das Doppelte des Kegels oder Kegelsegments mit derselben Grundfläche und Achse.*

Die Schnittebene stehe auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, und diese letzte sei die durch die Achse des Sphäroids, die auf der Schnittebene in BB' senkrecht steht und das Sphäroid in der Ellipse $ABA'B'$ schneidet.

Es seien EF, $E'F'$ die beiden zu BB' parallelen Tangenten der Ellipse, die Berührungspunkte seien A, A', und durch die Tangenten legen wir die zur Grundfläche des Segments parallelen Ebenen. Diese Ebenen berühren das Sphäroid in A, A', und diese Punkte sind die Scheitel der beiden Segmente, in die es geteilt ist. Ferner geht AA' durch den Mittelpunkt C und halbiert BB' in D.

Dann sind (1), wenn die Grundfläche der Segmente auf der Achse des Sphäroids senkrecht steht, A, A' sowohl die Scheitel des Sphäroids wie die der Segmente; AA' ist die Achse des Sphäroids, und die Grundfläche der Segmente ist ein Kreis, der BB' zum Durchmesser hat;

(2) steht die Grundfläche der Segmente auf der Achse des Sphäroids nicht senkrecht, so ist die Grundfläche der Segmente eine Ellipse, von der BB' eine Achse ist, und AD, $A'D$ sind bezüglich die Achsen der Segmente.

Wir können nun einen Zylinder oder Zylinderstumpf $EBB'F$ mit der Achse AD durch den Kreis oder die Ellipse über BB' legen; und wir können auch einen Kegel oder ein Kegelsegment mit dem Scheitel A und dem Kreise oder der Ellipse über BB' als Grundfläche konstruieren.

Wir haben dann zu zeigen, wenn CA' bis H verlängert wird, so daß $A'H = CA'$ ist, daß

$$\text{(Segment } ABB'\text{)} : \text{(Kegel oder Kegelsegment } ABB'\text{)} = HD : A'D.$$

Es sei V ein Kegel, der der Proportion

$$V : (\text{Kegel oder Kegelsegment } ABB') = HD : A'D \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

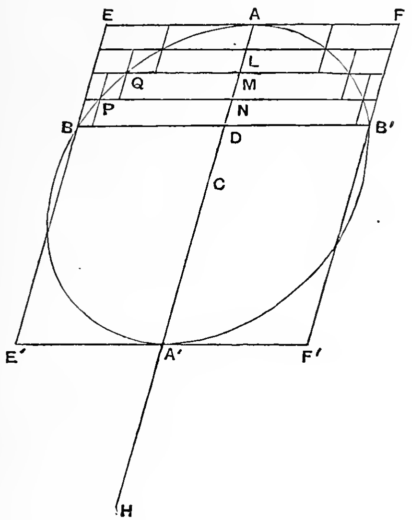
genügt; dann haben wir zu zeigen, daß das Segment ABB' gleich V ist.

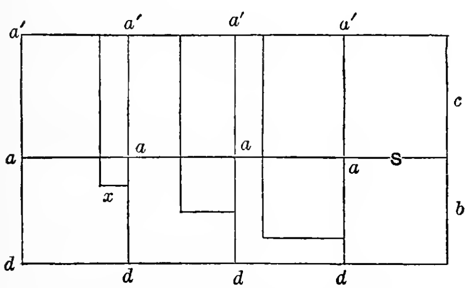
Aber da

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : (\text{Kegel oder Kegelsegment } ABB') = 3 : 1,$$

so haben wir nach (α)

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : V = A'D : \frac{HD}{3} \quad . \quad . \quad (\beta).$$





Ist nun das Segment ABB' nicht gleich V, so muß es entweder größer oder kleiner sein.

I. Wenn möglich, sei das Segment größer als V.

Wir konstruieren Figuren, die dem Segment ein- und umgeschrieben sind und aus Zylindern oder Zylinderstümpfen bestehen, deren Achsen längs AD liegen und alle untereinander gleich sind, so daß

(umgeschriebene Figur) — (eingeschriebene Figur) $<$ (Segment) — V.

woraus folgt, daß

$$\text{(eingeschriebene Figur)} > V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Wir verlängern alle Grundflächen der Zylinder oder Stümpfe, bis sie den Mantel des vollständigen Zylinders oder Stumpfes $EBB'F$ schneiden. Ist ND die Achse des größten Zylinders oder Zylinderstumpfes in der umgeschriebenen Figur, so zerfällt also der vollständige Zylinder oder Stumpf $EBB'F$ in Zylinder oder Zylinderstümpfe, die alle dem größten unter denen in der umgeschriebenen Figur gleich sind.

Wir nehmen Strecken da', alle gleich $A'D$ und an Zahl ebenso viele wie die Teile, in die AD durch die Grundflächen der Zylinder oder Stümpfe geteilt wird, und tragen da gleich AD auf da' ab. Es folgt $aa' = 2\,CD$.

An jede der Strecken $a'd$ legen wir Rechtecke mit der Höhe ad an und zeichnen wie in der Figur die Quadrate über den einzelnen Strecken ad. S bezeichne die Fläche jedes vollständigen Rechtecks.

Von dem ersten Rechteck nehmen wir einen Gnomon fort, dessen Breite gleich AN ist (d. h. dessen beide Endseiten gleich AN sind); von dem zweiten Rechteck nehmen wir einen Gnomon von der Breite AM fort usw.; von dem letzten Rechteck wird kein Gnomon weggenommen.

Dann ist

$$\begin{aligned}\text{der erste Gnomon} &= A'D \cdot AD - ND \cdot (A'D - AN)\\ &= A'D \cdot AN + ND \cdot AN\\ &= AN \cdot A'N.\end{aligned}$$

Ebenso

$$\text{der zweite Gnomon} = AM \cdot A'M$$

und so fort.

Der letzte Gnomon (der in dem vorletzten Rechteck) ist gleich $AL \cdot A'L$.

Nachdem so von den aufeinanderfolgenden Rechtecken die Gnomone weggenommen sind, ergeben sich als Reste (die wir R_1, R_2, ... R_n nennen wollen, wo n die Zahl der Rechtecke und demnach $R_n = S$ ist) Rechtecke, die an Strecken von der Länge aa' angelegt und „um Quadrate vermehrt" sind, deren Seiten bezüglich gleich DN, DM, ... DA sind.

Der Kürze halber werde DN mit x bezeichnet und aa' oder $2\,CD$ mit c; dann wird $R_1 = cx + x^2$, $R_2 = c \cdot 2\,x + (2\,x)^2$, ... Vergleichen wir nun nacheinander die Zylinder oder Zylinderstümpfe (1) in dem vollständigen Zylinder oder Stumpf $EBB'F$ und (2) in der eingeschriebenen Figur, so haben wir

$$\begin{aligned}(\text{erster Zylinder oder Stumpf in } EBB'F) &: (\text{erster in der eingeschr. Fig.})\\ &= BD^2 : PN^2\\ &= (AD \cdot A'D) : (AN \cdot A'N)\\ &= S : (\text{erster Gnomon});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{zweiter Zylind. od. Stumpf in } EBB'F) &: (\text{zweiter in der eingeschr. Fig.})\\ &= S : (\text{zweiter Gnomon}),\end{aligned}$$

und so fort.

Der letzte der Zylinder oder Stümpfe in $EBB'F$ hat keinen entsprechenden in der eingeschriebenen Figur, und ein entsprechender Gnomon ist nicht vorhanden.

Kombinieren wir die Proportionen, so haben wir [nach Satz 1]

$$\begin{aligned}&(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : (\text{eingeschriebene Figur})\\ &\quad = (\text{Summe aller Flächen } S) : (\text{Summe der Gnomone}).\end{aligned}$$

Nun sind die Differenzen zwischen S und den aufeinanderfolgenden Gnomonen $R_1, R_2, \ldots R_n$, während

$$\begin{aligned}R_1 &= cx + x^2,\\ R_2 &= c \cdot 2\,x + (2\,x)^2,\\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ R_n &= cb + b^2 = S,\end{aligned}$$

wo $b = nx = AD$.

Folglich [Satz 2]

$$\begin{aligned}&(\text{Summe aller Flächen } S) : (R_1 + R_2 + \ldots + R_n)\\ &\qquad < (c+b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{3}\right).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&(\text{Summe aller Flächen } S) : (\text{Summe der Gnomone})\\ &\qquad > (c+b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{2\,b}{3}\right)\\ &\qquad > A'D : \frac{HD}{3}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F):(\text{eingeschriebene Figur})$$
$$> A'D : \frac{HD}{3}$$
$$> (\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : V,$$

nach (β).

Daher ist $\quad (\text{eingeschriebene Figur}) < V,$

was nach (γ) unmöglich ist.

Demnach ist das Segment ABB' nicht größer als V.

II. Wenn möglich, sei das Segment ABB' kleiner als V.

Wir konstruieren dann eine ein- und eine umgeschriebene Figur, so daß

$$(\text{umgeschriebene Figur}) - (\text{eingeschriebene Figur}) < V - (\text{Segment}),$$

woraus folgt

$$V > (\text{umgeschriebene Figur}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta).$$

In diesem Falle vergleichen wir die Zylinder oder Stümpfe in $EBB'F$ mit denen in der *umgeschriebenen* Figur; es ergibt sich

$$(\text{erster Zylind. oder Stumpf in } EBB'F) : (\text{erster in der umgeschr. Fig.})$$
$$= S : S,$$
$$(\text{zweiter in } EBB'F) : (\text{zweiter in der umgeschriebenen Figur})$$
$$= S : (\text{erster Gnomon})$$

und so fort.

Schließlich $\quad (\text{letzter in } EBB'F) : (\text{letzter in der umgeschr. Fig.})$
$$= S : (\text{letzter Gnomon}).$$

Nun ist

$$[S + (\text{alle Gnomone})] = nS - (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}).$$

Und es ist

$$nS : (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}) > (c + b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{3}\right), \qquad [\text{Satz } 2]$$

so daß $\quad nS : [S + (\text{alle Gnomone})] < (c + b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{2b}{3}\right).$

Wenn wir die obigen Proportionen wie im Satze 1 kombinieren, so folgt

$$(\text{Zylinder oder Stumpf } EBB'F) : (\text{umgeschriebene Figur})$$
$$< (c + b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{2b}{3}\right)$$
$$< A'D : \frac{HD}{3}$$
$$< (EBB'F) : V, \text{ nach } (\beta).$$

Somit ist die umgeschriebene Figur größer als V, was nach (δ) unmöglich ist.

Da also das Segment ABB' weder größer noch kleiner als V ist, so ist es ihm gleich, und der Satz ist bewiesen.

(2) Der besondere Fall [Sätze 27, 28], wo das Segment die Hälfte des Sphäroids ist, unterscheidet sich von dem obigen dadurch, daß die Entfernung CD oder $c/2$ verschwindet, und daß die Rechtecke $cb + b^2$ einfach Quadrate (b^2) sind, so daß die Gnomone einfach die Differenzen zwischen b^2 und x^2, b^2 und $(2x)^2$ usw. sind.

Anstatt des Satzes 2 benutzen wir daher den oben angegebenen *Hilfssatz zu Satz* 2, Zusatz 1 [*Über Spiralen*, Satz 10], und an Stelle des Verhältnisses $(c + b) : \left(\frac{c}{2} + \frac{2b}{3}\right)$ erhalten wir das Verhältnis $3:2$, woraus folgt

$$(\text{Segment } ABB') : (\text{Kegel oder Kegelsegment } ABB') = 2:1.$$

[Zu diesem Ergebnis kommt man auch einfach dadurch, daß man CA für AD in dem Verhältnis $(3CA - AD) : (2CA - AD)$ substituiert.]

Sätze 31, 32.

Teilt eine Ebene ein Sphäroid in zwei ungleiche Segmente und sind AN, $A'N$ bezüglich die Achsen des kleineren und größeren Segments, während C der Mittelpunkt des Sphäroids ist, dann gilt die Proportion

$$(\textit{größeres Segment}) : (\textit{Kegel oder Segment mit derselben Grundfläche u. Achse}) = CA + AN : AN.$$

Die das Sphäroid teilende Ebene stehe längs PP' auf der Ebene der Zeichnung senkrecht, und diese letzte gehe durch die Achse des Sphäroids und werde von der Schnittebene in PP' und von der Oberfläche in der Ellipse $PAP'A'$ geschnitten.

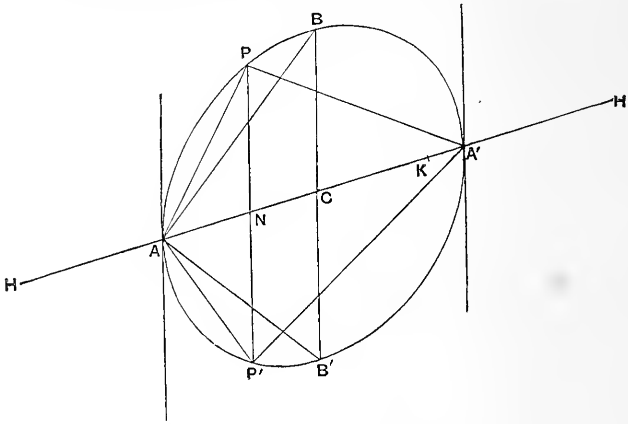
Wir ziehen die zu PP' parallelen Tangenten der Ellipse; sie mögen die Ellipse in A, A' berühren. Durch die Tangenten legen wir die zur Grundfläche der Segmente parallelen Ebenen. Diese Ebenen berühren das Sphäroid in A, A', die Gerade AA' geht durch den Mittelpunkt C und halbiert PP' in N, während AN, $A'N$ die Achsen der Segmente sind.

Dann ist (1), wenn die Schnittebene auf der Achse des Sphäroids senkrecht steht, AA' diese Achse, und A, A' sind die Scheitel des Sphäroids sowohl wie der Segmente. Die Schnitte des Sphäroids mit der schneidenden Ebene und allen zu ihr parallelen Ebenen sind Kreise.

(2) Steht die schneidende Ebene auf der Achse nicht senkrecht, so ist die Grundfläche der Segmente eine Ellipse, von der PP' eine Achse ist, und die Schnitte des Sphäroids mit allen zu der Schnittebene parallelen Ebenen sind ähnliche Ellipsen.

Wir legen durch C die zur Grundfläche der Segmente parallele Ebene, deren Schnittlinie mit der Zeichnungsebene BB' sei.

Nun konstruieren wir drei Kegel oder Kegelsegmente; zwei haben A zum gemeinsamen Scheitel und die ebenen Schnitte



durch PP' und BB' bezüglich zu Grundflächen, der (bzw. das) dritte den ebenen Schnitt durch PP' zur Grundfläche und A' zum Scheitel.

Wir verlängern CA bis H und CA' bis H', so daß

$$AH = A'H' = CA.$$

Dann haben wir zu beweisen

$$\begin{aligned}(\text{Segment } A'PP')&:(\text{Kegel oder Kegelsegment } A'PP')\\ &= CA + AN : AN\\ &= NH : AN.\end{aligned}$$

Nun ist das halbe Sphäroid das doppelte des Kegels oder Kegelsegments ABB' [Sätze 27, 28]. Folglich

$$(\text{das Sphäroid}) = 4\,(\text{Kegel oder Kegelsegment } ABB').$$

Aber

$$\begin{aligned}(\text{Kegel oder Kegelsegment } ABB')&:(\text{Kegel oder Kegelsegment } APP')\\ &= (CA : AN)\cdot(BC^2 : PN^2)\\ &= (CA : AN)\cdot(CA\cdot CA' : AN\cdot A'N) \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).\end{aligned}$$

Tragen wir AK auf AA' ab, so daß

$$AK : AC = AC : AN,$$

so haben wir $AK \cdot A'N : AC \cdot A'N = CA : AN$, und das zusammengesetzte Verhältnis in (α) wird

$$(AK \cdot A'N : AC \cdot A'N) \cdot (CA \cdot CA' : AN \cdot A'N),$$

d. h.

$$AK \cdot CA' : AN \cdot A'N.$$

Also ist

(Kegel oder Kegelsegment ABB') : (Kegel oder Kegelsegment APP')

$$= AK \cdot CA' : AN \cdot A'N.$$

Aber

(Kegel oder Kegelsegment APP') : (Segment APP')

$$= A'N : NH' \qquad \text{[Sätze 29, 30]}$$

$$= AN \cdot A'N : AN \cdot NH'.$$

Folglich *ex aequali*

(Kegel oder Kegelsegment ABB') : (Segment APP')

$$= AK \cdot CA' : AN \cdot NH',$$

so daß (Sphäroid) : (Segment APP')

$$= HH' \cdot AK : AN \cdot NH',$$

da

$$HH' = 4\, CA'.$$

Demnach haben wir

(Segment $A'PP'$) : (Segment APP')

$$= (HH' \cdot AK - AN \cdot NH') : AN \cdot NH'$$

$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : AN \cdot NH'.$$

Ferner ist

(Segment APP') : (Kegel oder Kegelsegment APP')

$$= NH' : A'N$$

$$= AN \cdot NH' : AN \cdot A'N$$

und

(Kegel oder Kegelsegment APP') : (Kegel oder Kegelsegment $A'PP'$)

$$= AN : A'N$$

$$= AN \cdot A'N : A'N^2.$$

Aus den letzten drei Proportionen erhalten wir *ex aequali*

(Segment $A'PP'$) : (Kegel oder Kegelsegment $A'PP'$)

$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : A'N^2$$

$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : (CA^2 + NH' \cdot CN)$$

$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : (AK \cdot AN + NH' \cdot CN) \quad . \quad (\beta).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} AK \cdot NH : AK \cdot AN &= NH : AN \\ &= CA + AN : AN \\ &= AK + CA : CA \\ &\qquad (\text{da } AK : AC = AC : AN) \\ &= HK : CA \\ &= HK - NH : CA - AN \\ &= NK : CN \\ &= NH' \cdot NK : NH' \cdot CN. \end{aligned}$$

Somit ist das Verhältnis in (β) gleich dem Verhältnis

$$AK \cdot NH : AK \cdot AN \quad \text{oder} \quad NH : AN.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} (\text{Segment } A'PP') &: (\text{Kegel oder Kegelsegment } A'PP') \\ &= NH : AN \\ &= CA + AN : AN. \end{aligned}$$

[Sind (x, y) die Koordinaten des Punktes P, bezogen auf die konjugierten Durchmesser AA' und BB' als x- und y-Achse, und sind $2a$, $2b$ bezüglich die Längen der Durchmesser, so haben wir, da

(Sphäroid) — (kleineres Segment) = (größeres Segment),

$$4 \cdot ab^2 - \frac{2a + x}{a + x} \cdot y^2 (a - x) = \frac{2a - x}{a - x} \cdot y^2 (a + x);$$

und der obige Satz enthält den geometrischen Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung, worin x und y verknüpft sind durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.]$$

Über Spiralen.

„Archimedes grüßt Dositheus.

Die meisten der Sätze, die ich an Konon geschickt habe, und um deren Beweise Du mich immer wieder bittest, sind in den Büchern, die Herakleides Dir gebracht hat, bereits bewiesen; einige weitere Beweise sind in dem Buche enthalten, das ich Dir jetzt schicke. Wundere Dich nicht, daß ich die Veröffentlichung dieser Beweise etwas lange aufgeschoben habe. Das liegt daran, daß ich die Sätze zuerst Männern mitteilen wollte, die sich mit Mathematik beschäftigen und sich gern selbst daran versucht hätten. Denn wie viele geometrische Sätze, die anfangs äußerst schwierig scheinen, finden mit der Zeit eine erfolgreiche Erledigung! Nun starb Konon, bevor er Zeit genug hatte, sich mit den genannten Sätzen zu befassen; andernfalls hätte er alle diese Dinge gefunden und klar gemacht und die Geometrie überdies durch viele eigene Entdeckungen bereichert. Denn ich weiß wohl, daß seine Begabung für mathematische Dinge ungewöhnlich und sein Fleiß außerordentlich war. Viele Jahre sind seit Konons Tode verflossen, aber ich habe nichts davon gehört, daß jemand eins von den Problemen in Angriff genommen hätte. Ich will sie nun der Reihe nach hier anführen, besonders da zwei darunter sind, die bis damals noch nicht zu einem richtigen Schluß gebracht worden waren[1]) [und die als warnendes Beispiel dienen mögen], wie manchmal Leute, die behaupten, alles beweisen zu können, aber keine Beweise dafür angeben, überführt werden, daß sie Unmögliches finden zu können vorgegeben haben.

Welche Aufgaben ich meine, welches diejenigen sind, deren Beweise Du bereits erhalten hast und von welchen die Beweise

---

[1]) In seiner ersten Ausgabe las Heiberg *συμβαίνει, δύο τινὰ αὐτῶν ἐν αὐτοῖς μὲν κεχωρισμένα, τέλος δὲ ποθεσόμενα,* indem er bemerkte, daß *F τέλους* hat, was auf die Lesart *τέλους δὲ ποτιδεόμενα* hindeuten könnte. In der neuen Ausgabe schreibt er: *συμβαίνει, δύο τινὰ τῶν ἐμαυτῷ μήπω πεπερασμένων διὰ τέλους ποτιτεθῆμεν,* „tatsächlich wurden zwei Sätze hinzugesetzt, die von mir noch nicht zu einem richtigen Schluß gebracht worden waren.“ Archimedes will sagen, daß die Sätze falsch waren.

in diesem Buche enthalten sind, will ich näher auseinandersetzen. Die erste Aufgabe war: wenn eine Kugel gegeben ist, eine ebene Fläche zu finden, die der Oberfläche der Kugel gleich ist; ihre Auflösung ist zum ersten Male durch die Veröffentlichung des Buches über die Kugel bekannt gemacht worden; denn wenn einmal bewiesen ist, daß die Oberfläche jeder Kugel viermal so groß wie der größte Kreis der Kugel ist, so ist klar, daß es möglich ist, eine ebene Fläche zu finden, die der Oberfläche der Kugel gleich ist. Die zweite war: wenn ein Kegel oder Zylinder gegeben ist, eine dem Kegel oder Zylinder gleiche Kugel zu finden; die dritte: eine gegebene Kugel mit einer Ebene so zu schneiden, daß ihre Segmente zueinander ein gegebenes Verhältnis haben; die vierte: eine gegebene Kugel mit einer Ebene so zu schneiden, daß die Segmente der Oberfläche zueinander ein gegebenes Verhältnis haben; die fünfte: ein gegebenes Kugelsegment einem gegebenen Kugelsegmente ähnlich zu machen[1]); die sechste: wenn zwei Segmente entweder derselben oder verschiedener Kugeln gegeben sind, ein Kugelsegment zu finden, das einem der Segmente ähnlich und dessen Oberfläche der Oberfläche des anderen Segments gleich ist. Die siebente war: von einer gegebenen Kugel durch eine Ebene ein Segment abzuschneiden, so daß das Segment zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Höhe wie das Segment ein gegebenes Verhältnis hat, größer als das von drei zu zwei. Von allen den eben genannten Aufgaben hat Herakleides Dir die Lösungen gebracht. Der darauf folgende Satz war falsch, nämlich, wenn eine Kugel durch eine Ebene in zwei ungleiche Teile geteilt wird, daß dann das Verhältnis des größeren Segments zum kleineren gleich dem Quadrat des Verhältnisses der größeren Oberfläche zur kleineren sein soll. Daß das falsch ist, folgt aus dem, was ich Dir früher geschickt habe; denn darin war folgender Satz enthalten: wird eine Kugel durch eine Ebene, die auf einem gewissen Kugeldurchmesser senkrecht steht, in zwei ungleiche Teile geteilt, so hat das größere Segment der Oberfläche zu dem kleineren dasselbe Verhältnis wie der größere Abschnitt des Durchmessers zum kleineren, während das Verhältnis des größeren Kugelsegments zum kleineren kleiner ist als „das Doppelte“ [d. h. das Quadrat] des Verhältnisses der größeren Ober-

---

[1]) *τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι,* d. h. ein Kugelsegment zu konstruieren, das einem gegebenen Segment ähnlich und einem anderen gegebenen Segment an Inhalt gleich ist. [Vgl. *Über Kugel und Zylinder* II. 5.]

fläche zur kleineren, aber größer als das „Einundeinhalbfache“[1]) dieses Verhältnisses. Auch der zuletzt angegebene Satz war falsch, nämlich: wird ein Durchmesser einer Kugel so geteilt, daß das Quadrat über dem größeren Abschnitte dreimal so groß wie das Quadrat über dem kleineren Abschnitte ist, und legt man durch den Teilpunkt die zu dem Durchmesser senkrechte Ebene und schneidet man mit ihr die Kugel, so ist die Figur von der Gestalt des größeren Kugelsegments das größte aller Segmente mit gleicher Oberfläche. Daß das falsch ist, ergibt sich auch aus den Sätzen, die ich Dir früher geschickt habe. Denn dort wurde bewiesen, daß die Halbkugel das größte unter allen von gleicher Oberfläche umschlossenen Segmenten ist.

Nach diesen Sätzen wurden die folgenden über den Kegel[2]) mitgeteilt. Wird ein Schnitt eines rechtwinkligen Kegels [eine Parabel] bei fest bleibendem Durchmesser [Achse] herumgedreht, so daß der Durchmesser [die Achse] die Achse [der Drehung] ist, so soll die von dem Schnitt des rechtwinkligen Kegels beschriebene Figur ein *Konoid* heißen. Und berührt eine Ebene das Konoid und schneidet eine zu der Berührungsebene parallele Ebene ein Segment von dem Konoid ab, so soll die schneidende Ebene die *Grundfläche* des abgeschnittenen Segments, der Berührungspunkt der anderen Ebene sein *Scheitel* heißen. Wird nun die beschriebene Figur mit einer zur Achse senkrechten Ebene geschnitten, so ist klar, daß der Schnitt ein Kreis sein muß; aber es muß bewiesen werden, daß das abgeschnittene Segment anderthalbmal so groß ist wie der Kegel, der dieselbe Grundfläche wie das Segment und gleiche Höhe hat. Und wenn zwei Segmente durch beliebige Ebenen von dem Konoid abgeschnitten werden, so ist klar, daß die Schnitte Schnitte spitzwinkliger Kegel [Ellipsen] sein werden, wenn die schneidenden Ebenen auf der Achse nicht senkrecht stehen; aber es muß bewiesen werden, daß die Segmente sich verhalten wie die Quadrate über den durch ihre Scheitel parallel zur Achse bis an die schneidenden Ebenen gezogenen Strecken. Die Beweise für diese Sätze gehen Dir noch nicht zu.

Dahinter kamen die folgenden Sätze über die *Spirale*, die gewissermaßen eine andere Art von Problemen behandeln und mit den vorangehenden nichts gemein haben; ihre Beweise habe ich in diesem Buche für Dich ausgearbeitet. Es sind die folgen-

---

[1]) (*λόγον*) *μείζονα ἢ ἡμιόλιον τοῦ, ὃν ἔχει κ. τ. λ.*, d. h. ein Verhältnis größer als (das Verhältnis der Oberflächen) $\frac{3}{2}$. Vgl. *Über Kugel und Zylinder* II. 8.

[2]) Es soll vermutlich heißen „das Konoid“, nicht „den Kegel“.

den: wird eine gerade Linie um den einen dabei festbleibenden Endpunkt gleichförmig in einer Ebene herumgedreht, bis sie in die Anfangslage zurückkehrt, und bewegt sich, während die Gerade sich dreht, ein Punkt gleichförmig auf der geraden Linie, von dem festen Endpunkte ausgehend, so beschreibt der Punkt eine Spirale in der Ebene. Ich behaupte dann, daß die von der Spirale und der in die Anfangslage zurückgekehrten Geraden begrenzte Fläche der dritte Teil des Kreises ist, der den festen Punkt zum Mittelpunkt und die von dem Punkt auf der Geraden während der einen Umdrehung zurückgelegte Strecke zum Radius hat. Wenn ferner eine gerade Linie die Spirale in ihrem äußeren Endpunkte berührt, und eine andere gerade Linie senkrecht zu der herumgedrehten und wieder in ihre Anfangslage gebrachten Linie von ihrem festen Endpunkte aus gezogen wird, bis sie die Tangente schneidet, dann behaupte ich, daß die so [bis zum Schnittpunkte mit der Tangente] gezogene Gerade gleich dem Umfange des Kreises ist. Macht die sich drehende Gerade mit dem sich auf ihr bewegenden Punkte mehrere Umdrehungen, bis sie wiederum in ihre ursprüngliche Lage kommt, so behaupte ich: die bei der dritten Umdrehung zu der Spirale hinzugefügte Fläche ist das Doppelte der bei der zweiten hinzugefügten, die bei der vierten das Dreifache, die bei der fünften das Vierfache, und allgemein, die bei den späteren Umdrehungen hinzukommenden Flächen sind Vielfache der bei der zweiten hinzugefügten je nach den aufeinanderfolgenden Umdrehungszahlen, während die von der Spirale bei der ersten Umdrehung umschlossene Fläche der sechste Teil der bei der zweiten Umdrehung hinzutretenden ist. Werden ferner auf der bei einer Umdrehung beschriebenen Spirale zwei Punkte angenommen und mit dem festen Endpunkte der gedrehten Linie durch gerade Linien verbunden, und werden zwei Kreise mit dem festen Punkte als Mittelpunkt und den Verbindungslinien als Radien konstruiert, und wird die kürzere Linie verlängert, so behaupte ich: (1) die Fläche, die von dem Bogen des größeren Kreises begrenzt wird, der auf derselben Seite liegt wie der von den geraden Linien eingeschlossene Teil der Spirale und (ferner begrenzt wird) von der Spirale selbst und der verlängerten geraden Linie, hat zu (2) der von dem Umfange des kleineren Kreises, demselben Teile der Spirale und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte begrenzten Fläche dasselbe Verhältnis wie (3) der Radius des kleineren Kreises, vermehrt um zwei Drittel des Überschusses des Radius des größeren Kreises über den des kleineren, zu (4) dem Radius des kleineren Kreises, vermehrt um ein Drittel des genannten Überschusses.

Die Beweise dieser und anderer Sätze über die Spirale sind in dem vorliegenden Buche enthalten. Vorausgeschickt werden ihnen, wie es auch in anderen geometrischen Werken üblich ist, die zu den Beweisen erforderlichen Sätze. Auch hier setze ich wie in den früher veröffentlichten Büchern den folgenden Hilfssatz voraus: sind (zwei) ungleiche Linien oder (zwei) ungleiche Flächen gegeben, so kann der Überschuß der größeren über die kleinere durch [fortgesetzte] Addition zu sich selbst größer gemacht werden als jede gegebene Größe unter denen, die [mit diesem Überschuß und] miteinander vergleichbar sind.“

Satz 1.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig auf einer Linie und werden auf ihr zwei Abschnitte angenommen, so sind diese proportional zu den Zeiten, in denen sie zurückgelegt werden.

Zwei ungleiche Strecken werden auf einer geraden Linie angenommen und zwei die Zeiten darstellende auf einer anderen Geraden; und es wird bewiesen, daß sie proportional sind, indem man jede Strecke und die entsprechende Zeit nach der Methode von Euklid V. Def. 5 gleichvielmal nimmt.

Satz 2.

Bewegen sich zwei Punkte gleichförmig auf verschiedenen Linien und werden Paare von Strecken genommen, immer eine auf jeder Linie, so daß die Strecken eines jeden Paares in gleichen Zeiten beschrieben werden, so sind die Strecken proportional.

Das ist sofort bewiesen, da das Verhältnis der auf der einen Linie angenommenen Strecken gleich dem der für sie erforderlichen Zeiten ist und dieses auch gleich dem Verhältnis der auf der anderen Linie angenommenen Strecken sein muß.

Satz 3.

Sind beliebig viele Kreise gegeben, so ist es möglich, eine Strecke zu finden, die größer als die Summe aller ihrer Umfänge ist.

Denn wir brauchen nur um jeden Kreis ein Vieleck zu beschreiben und dann eine Strecke zu nehmen, die gleich der Summe der Vielecksumfänge ist.

Satz 4.

Sind zwei ungleiche Linien gegeben, nämlich eine Strecke und ein Kreisumfang, so ist es möglich, eine Strecke zu finden, die kleiner als die größere von den beiden Linien und größer als die kleinere ist.

Denn nach dem Hilfssatze kann der Überschuß, hinreichend oft zu sich selbst addiert, größer als die kleinere Linie gemacht werden.

So können wir z. B., wenn $c > l$ (wo c der Umfang des Kreises und l die Länge der Strecke ist), eine Zahl n finden, so daß

$$n(c - l) > l.$$

Folglich ist

$$c - l > \frac{l}{n}$$

und

$$c > l + \frac{l}{n} > l.$$

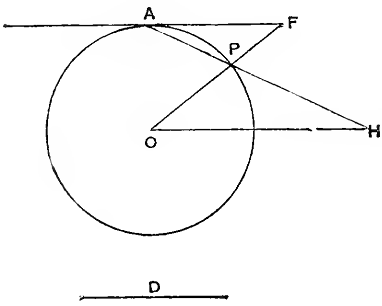
Somit haben wir nur l in n gleiche Teile zu teilen und einen von ihnen zu l zu addieren. Die erhaltene Strecke erfüllt die Bedingung.

Satz 5.

Ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte O gegeben und die Tangente an ihn in einem Punkte A, so ist es möglich, durch O eine Gerade OPF zu ziehen, die den Kreis in P und die Tangente in F trifft, so daß, wenn c der Umfang eines beliebigen Kreises ist,

$$FP : OP < (\text{Bogen } AP) : c.$$

Man nehme eine Strecke, etwa D, die größer als der Umfang c ist. [Satz 3.]



Durch O ziehe man OH parallel zu der gegebenen Tangente und durch A eine Gerade APH, die den Kreis in P und OH in H trifft, so daß der zwischen dem Kreise und der Geraden OH liegende Abschnitt PH gleich D wird.[1]) Man ziehe die Verbindungslinie OP und verlängere sie bis zum Schnittpunkte F mit der Tangente.

Dann ist

$$\begin{aligned} FP : OP &= AP : PH, \text{ weil } OH \text{ und } AF \text{ parallel sind,} \\ &= AP : D \\ &< (\text{Bogen } AP) : c. \end{aligned}$$

---

[1]) Diese Konstruktion, die ohne jede Erklärung, wie sie auszuführen ist, als möglich angenommen wird, beschreibt der griechische Originaltext so: „PH gleich D werde hingelegt (κείσθω), sich nach A neigend (νεύουσα).“ Das ist die übliche Ausdrucksweise für die unter dem Namen νεῦσις bekannte Klasse von Aufgaben.

Satz 6.

Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkte O gegeben ist, eine Sehne AB, kleiner als der Durchmesser, und das Lot OM von O auf AB, so ist es möglich, eine Gerade OFP zu ziehen, die die Sehne AB in F und den Kreis in P trifft, derart daß

$$FP:PB = D:E$$

wird, wo $D:E$ irgend ein gegebenes Verhältnis ist, das kleiner ist als $BM:MO$.

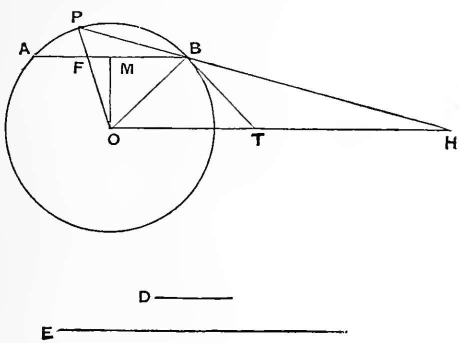
Man ziehe OH parallel zu AB und BT senkrecht zu BO, wobei T der Schnittpunkt mit OH sei.

Dann sind die Dreiecke BMO, OBT ähnlich, und daher

$$BM:MO = OB:BT,$$

woraus folgt

$$D:E < OB:BT.$$



Eine Strecke PH (größer als BT) werde so gewählt, daß

$$D:E = OB:PH$$

ist, und PH werde so hingelegt, daß sie durch B geht und P auf dem Umfange des Kreises liegt, während H auf die Gerade OH fällt.[1] (PH fällt außerhalb von BT, weil $PH > BT$ ist.) Die Gerade OP schneide AB in F.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} FP:PB &= OP:PH \\ &= OB:PH \\ &= D:E. \end{aligned}$$

---

[1]) Der griechische Satz lautet „PH werde zwischen den Umfang und die gerade Linie (OH) durch B gelegt". Die Konstruktion wird, wie die ähnliche im vorigen Satze, als möglich angenommen.

Satz 7.

Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkte O gegeben ist, eine Sehne AB, kleiner als der Durchmesser, und das Lot OM von O auf AB, so ist es möglich, durch O eine Gerade OPF zu ziehen, die den Kreis in P und die Verlängerung von AB in F trifft, so daß

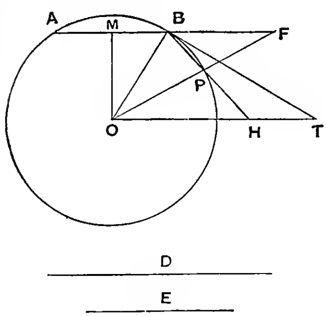
$$FP:PB = D:E$$

wird, wo $D:E$ irgend ein gegebenes Verhältnis ist, das größer ist als $BM:MO$.

Man ziehe OT parallel zu AB und BT senkrecht zu BO, wobei T der Schnittpunkt mit OT ist.

In diesem Falle gilt

$$D:E > BM:MO$$
$$> OB:BT,$$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BMO, OBT.



Man wähle die Strecke PH (kleiner als BT) gemäß der Proportion

$$D:E = OB:PH$$

und lege PH so, daß P und H bezüglich auf den Kreis und OT fallen, während HP verlängert durch B geht.[1])

Dann gilt

$$FP:PB = OP:PH$$
$$= D:E.$$

Satz 8.

Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkte O gegeben ist, eine Sehne AB, kleiner als der Durchmesser, die Tangente in B und das Lot OM von O auf AB, so ist es möglich, durch O eine gerade Linie OFP zu ziehen, die die Sehne AB in F, den Kreis in P und die Tangente in G schneidet, so daß

$$FP:BG = D:E$$

wird, wo $D:E$ irgend ein gegebenes Verhältnis ist, das kleiner ist als $BM:MO$.

Wird OT parallel zu AB gezogen und ist T der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangente in B, so ist

$$BM:MO = OB:BT,$$

so daß $$D:E < OB:BT.$$

---

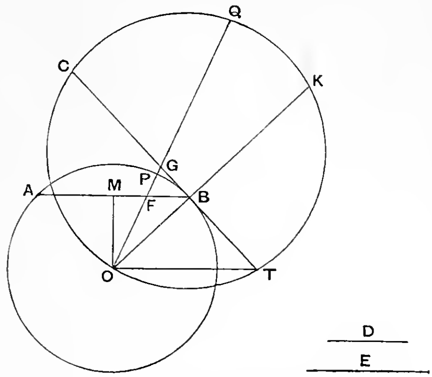
[1]) Der griechische Text nennt PH νεύουσαν ἐπὶ (*sich neigend nach*) B. Wie vorher wird die Konstruktion als möglich angenommen.

Der Punkt C werde auf der Verlängerung von TB so gewählt, daß

$$D:E = OB:BC;$$

woraus folgt $$BC > BT.$$

Durch die Punkte O, T, C lege man den Kreis, und die Verlängerung von OB schneide diesen Kreis in K.



Da $BC > BT$ und OB zu CT senkrecht ist, so ist es möglich, durch O eine Gerade OGQ zu ziehen, die CT in G und den Kreis um OTC in Q schneidet, so daß $GQ = BK$ wird.[1])

Die Gerade OGQ schneide AB in F und den ursprünglichen Kreis in P.

Nun ist $$CG \cdot GT = OG \cdot GQ;$$
und $$OF : OG = BT : GT,$$
so daß $$OF \cdot GT = OG \cdot BT.$$

Es folgt

$$CG \cdot GT : OF \cdot GT = OG \cdot GQ : OG \cdot BT$$

oder
$$\begin{aligned} CG : OF &= GQ : BT \\ &= BK : BT, \text{ nach Konstruktion,} \\ &= BC : OB \\ &= BC : OP. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $OP : OF = BC : CG$,

und mithin $$PF : OP = BG : BC$$

oder
$$\begin{aligned} PF : BG &= OP : BC \\ &= OB : BC \\ &= D : E. \end{aligned}$$

Satz 9.

Wenn ein Kreis mit dem Mittelpunkt O gegeben ist, eine Sehne AB, kleiner als der Durchmesser, die Tangente in B und das Lot OM von O auf AB, so ist es möglich, durch O eine Gerade $OPGF$

---

[1]) Im griechischen Texte heißt die Stelle: „Es ist möglich, eine andere [Gerade] GQ, gleich KB, zu legen, sich nach O neigend (*νεύουσαν*).“ Diese spezielle *νεῦσις* behandelt Pappus (S. 298, ed. Hultsch). Siehe die Einleitung, Kapitel V.

zu ziehen, die den Kreis in P, die Tangente in G und die Verlängerung von AB in F trifft, so daß

$$FP : BG = D : E$$

wird, wo $D : E$ irgend ein gegebenes Verhältnis ist, das größer ist als $BM : MO$.

OT werde parallel zu AB gezogen, T sei der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tangente in B.

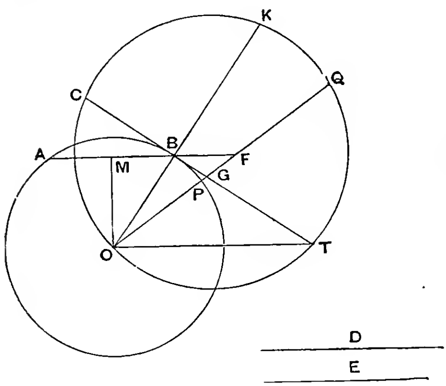
Dann ist $\qquad D : E > BM : MO$

$\qquad > OB : BT$, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BMO, OBT.

Man verlängere TB bis C, so daß

$$D : E = OB : BC,$$

woraus folgt $\qquad BC < BT$.



Man lege den Kreis durch die Punkte O, T, C und verlängere OB bis zum Schnittpunkte K mit diesem Kreise.

Da nun $TB > BC$ und OB auf CT senkrecht steht, so ist es möglich, durch O eine Gerade OGQ zu ziehen, die CT in G und den Kreis um OTC in Q trifft, so daß $GQ = BK$ wird.[1]) OQ schneide den ursprünglichen Kreis in P und die Verlängerung von AB in F.

Wir beweisen nun, genau wie im vorangehenden Satze,

$$CG : OF = BK : BT$$
$$= BC : OP.$$

Folglich ist, wie vorher,

$$OP : OF = BC : CG$$

und $\qquad OP : PF = BC : BG$,

woraus folgt $\qquad PF : BG = OP : BC$

$$= OB : BC$$
$$= D : E.$$

---

[1]) Vgl. die Anmerkung zum vorigen Satze.

Satz 10.

Sind A_1, A_2, A_3, ... A_n n Strecken, die eine steigende arithmetische Reihe bilden, in der die gemeinsame Differenz gleich dem kleinsten Gliede A_1 ist, dann ist

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2).$$

[Archimedes' Beweis dieses Satzes ist oben angegeben, S. 245 bis 247, und dort ist auseinandergesetzt, daß das Ergebnis gleichwertig ist mit

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.]$$

Zusatz 1. *Aus diesem Satze folgt*

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2),$$

und ferner $$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_{n-1}^2).$$

[Für den Beweis der letzten Ungleichheit siehe oben S. 246.]

Zusatz 2. *Alle diese Ergebnisse gelten ebenso, wenn für die Quadrate ähnliche Figuren eingesetzt werden.*

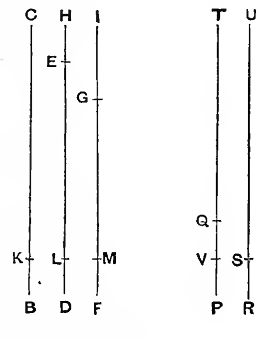
Satz 11.

Sind A_1, A_2, ... A_n n Strecken, die eine steigende arithmetische Reihe bilden, [in der die gemeinsame Differenz gleich dem kleinsten Gliede A_1 ist][1], so gilt

$$(n-1)A_n^2 : (A_n^2 + A_{n-1}^2 + \ldots + A_2^2) < A_n^2 : \{A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(A_n - A_1)^2\},$$

aber

$$(n-1)A_n^2 : (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2) > A_n^2 : \{A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(A_n - A_1)^2\}.$$



[Archimedes zeichnet die Glieder der Reihe, wie in der Figur angedeutet, nebeneinander hin, wo $BC = A_n$, $DE = A_{n-1}$, ... $RS = A_1$, und verlängert DE, FG, ... RS, bis sie alle gleich BC oder A_n werden, so daß EH, GJ, ... SU in der Figur bezüglich gleich A_1, A_2, ... A_{n-1} sind. Ferner trägt er auf BC, DE, FG, ... PQ bezüglich Strecken BK, DL, FM, ... PV ab, die alle gleich RS sind.

---

[1] Der Satz ist auch richtig, wenn die gemeinsame Differenz nicht gleich A_1 ist, und wird in dieser allgemeineren Form in den Sätzen 25 und 26 vorausgesetzt. Aber da Archimedes' Beweis die Gleichheit von A_1 und der gemeinsamen Differenz annimmt, sind die Worte zur Vermeidung von Mißverständnissen hier eingefügt.

Die Figur macht die Beziehungen zwischen den Gliedern übersichtlicher, aber die Verwendung einer so großen Anzahl von Buchstaben verursacht es, daß man dem Beweise nicht ganz leicht folgen kann; er werde deshalb im folgenden klarer dargestellt.]

Ersichtlich ist $(A_n - A_1) = A_{n-1}$.

Die folgende Proportion ist daher offenbar richtig:

$$(n-1)A_n^2 : (n-1)(A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}A_{n-1}^2) = A_n^2 : [A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(A_n - A_1)^2].$$

Um also das gewünschte Ergebnis zu erhalten, brauchen wir nur zu beweisen:

$$(n-1)A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 < (A_n^2 + A_{n-1}^2 + \ldots + A_2^2),$$

aber

$$> (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2).$$

I. Zum Beweise der ersten Ungleichheit benutzen wir die Beziehung

$$\begin{aligned}&(n-1)A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 \\ &\quad = (n-1)A_1^2 + (n-1)A_1 \cdot A_{n-1} + \tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 \quad . \quad . \quad (1).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}A_n^2 + A_{n-1}^2 + \ldots + A_2^2 \\ &= (A_{n-1} + A_1)^2 + (A_{n-2} + A_1)^2 + \ldots + (A_1 + A_1)^2 \\ &= (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2) \\ &\quad + (n-1)A_1^2 \\ &\quad + 2A_1(A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_1) \\ &= (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2) \\ &\quad + (n-1)A_1^2 \\ &\quad + A_1 \{A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + \ldots + A_1 \\ &\qquad\quad + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2} + A_{n-1}\} \\ &= (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2) \\ &\quad + (n-1)A_1^2 \\ &\quad + nA_1 \cdot A_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).\end{aligned}$$

Vergleichen wir die rechten Seiten von (1) und (2), so sehen wir, daß $(n-1)A_1^2$ beiden gemeinsam ist, und daß

$$(n-1)A_1 \cdot A_{n-1} < nA_1 \cdot A_{n-1};$$

während nach Satz 10, Zusatz 1,

$$\tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 < (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2).$$

Es folgt also

$$(n-1)A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 < (A_n^2 + A_{n-1}^2 + \ldots + A_2^2),$$

und damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

II. Zum Beweise des zweiten Teiles müssen wir zeigen:

$$(n-1)A_n \cdot A_1 + \tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 > (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \ldots + A_1^2).$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\begin{aligned}
(A_{n-2}+A_1)^2+(A_{n-3}+A_1)^2+\dots+(A_1+A_1)^2+A_1^2 \\
&=(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\dots+A_1^2) \\
&\quad+(n-1)A_1^2 \\
&\quad+2A_1(A_{n-2}+A_{n-3}+\dots+A_1) \\
&=(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\dots+A_1^2) \\
&\quad+(n-1)A_1^2 \\
&\quad+A_1\left\{\begin{matrix} A_{n-2}+A_{n-3}+\dots+A_1 \\ +A_1+A_2+\dots+A_{n-2}\end{matrix}\right\} \\
&=(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\dots+A_1^2) \\
&\quad+(n-1)A_1^2 \\
&\quad+(n-2)A_1\cdot A_{n-1} \quad \dots\dots \quad (3).
\end{aligned}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der rechten Seite von (1), so sehen wir, daß $(n-1)A_1^2$ beiden gemeinsam ist, und daß

$$(n-1)A_1\cdot A_{n-1}>(n-2)A_1\cdot A_{n-1},$$

während nach Satz 10, Zusatz 1,

$$\tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2>(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\dots+A_1^2).$$

Somit ist

$$(n-1)A_n\cdot A_1+\tfrac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2>(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\dots+A_1^2),$$

und das zweite gewünschte Ergebnis ist gewonnen.

Zusatz. *Die Ergebnisse des obigen Satzes bleiben auch richtig, wenn statt der Quadrate über den einzelnen Strecken ähnliche Figuren eingesetzt werden.*

Definitionen.

1. Wird eine in einer Ebene gezogene gerade Linie gleichförmig um einen Endpunkt, der dabei fest bleibt, gedreht, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt, und bewegt sich zu gleicher Zeit ein Punkt gleichförmig längs der Geraden, von dem festbleibenden Endpunkte ausgehend, so beschreibt der Punkt eine **Spirale** (ἕλιξ) in der Ebene.

2. Der während der Drehung der geraden Linie fest bleibende Endpunkt möge der **Ursprung**[1]) (ἀρχά) der Spirale heißen.

3. Die Lage der Geraden, von der aus sie sich zu drehen anfing, heiße die **Anfangslinie**[1]) der Drehung (ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς).

4. Die Strecke, die der längs der Geraden sich bewegende Punkt während der ersten Umdrehung zurücklegt, heiße der **erste Abstand**, die Strecke, die derselbe Punkt während der zweiten

[1]) Die wörtliche Übersetzung würde offenbar zugleich „Anfang der Spirale“ und „Anfang der Drehung“ bedeuten. Die modernen Namen sind jedoch für das Folgende geeigneter und werden deshalb hier eingeführt.

Umdrehung zurücklegt, heiße der **zweite Abstand,** und ähnlich mögen die während der späteren Umdrehungen zurückgelegten Strecken nach der betreffenden Umdrehung benannt werden.

5. Die von der bei der ersten Umdrehung beschriebenen Spirale und dem *ersten Abstande* begrenzte Fläche heiße die **erste Fläche**, die von der bei der zweiten Umdrehung beschriebenen Spirale und dem *zweiten Abstande* begrenzte die **zweite Fläche,** und ähnlich die späteren Flächen.

6. Wird von dem Ursprung der Spirale aus irgend eine gerade Linie gezogen, so heiße die von ihr aus in der Richtung liegende Seite, in der die Drehung erfolgt, **vorwärts** (*προαγούμενα*) und die andere Seite **rückwärts** (*ἑπόμενα*).

7. Der mit dem *Ursprung* als Mittelpunkt und dem *ersten Abstande* als Radius beschriebene Kreis heiße der **erste Kreis,** der mit demselben Mittelpunkte und dem doppelten Radius beschriebene der **zweite Kreis,** und ähnlich die folgenden Kreise.

Satz 12.

Wird eine beliebige Anzahl von Strecken vom Ursprung aus bis zur Spirale gezogen, die miteinander gleiche Winkel bilden, so bilden diese Strecken eine arithmetische Reihe.

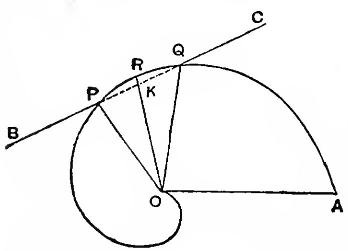
[Der Beweis ergibt sich von selbst.]

Satz 13.

Berührt eine gerade Linie die Spirale, so berührt sie sie nur in einem Punkte.

Es sei O der Ursprung der Spirale und BC eine Tangente.

Wenn möglich, berühre BC die Spirale in zwei Punkten P, Q. Man ziehe OP, OQ und halbiere den Winkel POQ durch die Gerade OR, die die Spirale in R trifft.



Dann ist [Satz 12] OR das arithmetische Mittel zwischen OP und OQ oder

$$OP + OQ = 2\,OR.$$

Aber für jedes Dreieck POQ gilt, wenn die Halbierungslinie des Winkels POQ die Seite PQ in K schneidet,

$$OP + OQ > 2\,OK^{1)}.$$

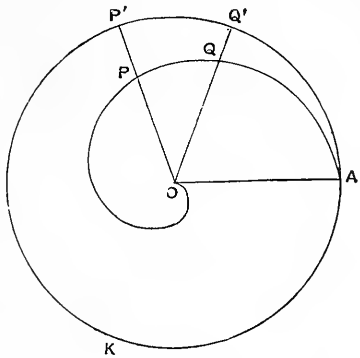
1) Das wird als bekannter Satz angenommen; er läßt sich leicht beweisen.

Folglich ist $OK < OR$, und es folgt, daß ein Punkt auf BC zwischen P und Q innerhalb der Spirale liegt. Somit schneidet BC die Spirale, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 14.

Ist O der Ursprung und sind P, Q zwei Punkte auf der ersten Windung der Spirale, und treffen die Verlängerungen von OP, OQ den „ersten Kreis" $AKP'Q'$ bezüglich in P', Q', während OA die Anfangslinie ist, dann gilt

$$OP : OQ = (\text{Bogen } AKP') : (\text{Bogen } AKQ').$$



Denn während die gedrehte Linie OA sich um O bewegt, bewegt sich der auf ihr liegende Punkt A gleichförmig auf dem Umfange des Kreises $AKP'Q'$, und zu gleicher Zeit bewegt sich der die Spirale beschreibende Punkt gleichförmig längs OA.

Während also A den Bogen AKP' beschreibt, legt der auf OA fortschreitende Punkt die Strecke OP zurück, und während A den Bogen AKQ' beschreibt, legt der auf OA bewegte Punkt die Entfernung OQ zurück.

Folglich gilt

$$OP : OQ = (\text{Bogen } AKP') : (\text{Bogen } AKQ'). \qquad \text{[Satz 2]}$$

Satz 15.

Sind P, Q zwei Punkte auf der zweiten Windung der Spirale, und treffen OP, OQ den „ersten Kreis" $AKP'Q'$ in P', Q' wie im vorigen Satze, und ist c der Umfang des ersten Kreises, dann gilt

$$OP : OQ = c + (\text{Bogen } AKP') : c + (\text{Bogen } AKQ').$$

Denn während der auf OA fortschreitende Punkt die Entfernung OP zurücklegt, beschreibt A den ganzen Umfang des „ersten Kreises" und außerdem den Bogen AKP'; und während der auf OA fortschreitende Punkt die Entfernung OQ zurücklegt, beschreibt der Punkt A den ganzen Umfang des „ersten Kreises" und außerdem den Bogen AKQ'.

Zusatz. Liegen P, Q auf der $n$ten Windung der Spirale, so gilt ähnlich

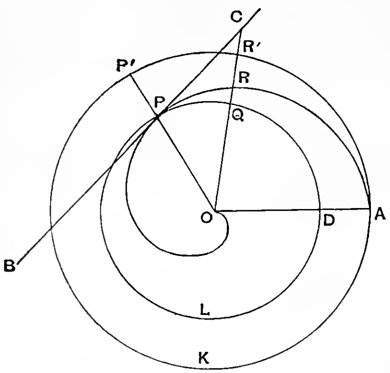
$$OP : OQ = (n-1)\,c + (\text{Bogen } AKP') : (n-1)\,c + (\text{Bogen } AKQ').$$

Sätze 16, 17.

Ist BC die Tangente in irgend einem Punkte P der Spirale und PC der „vorwärts“ gerichtete Teil von BC und zieht man OP, so ist der Winkel OPC stumpf, während der Winkel OPB spitz ist.

I. P liege auf der ersten Windung der Spirale.

Es sei OA die Anfangslinie, AKP' der „erste Kreis“. Man ziehe den Kreis DLP mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OP; der Kreis schneide OA in D. Dieser Kreis muß dann in der von P aus „vorwärts“ liegenden Richtung innerhalb der Spirale liegen, und in der „rückwärts“ liegenden Richtung außerhalb, da die von OP aus „vorwärts“ liegenden Radienvektoren der Spirale größer, die „rückwärts“ liegenden kleiner als OP sind. Daher kann der Winkel OPC nicht spitz sein, da er nicht kleiner sein kann als der Winkel zwischen OP und der Tangente des Kreises in P, und das ist ein rechter.



Es bleibt also nur zu beweisen, daß OPC kein rechter Winkel ist.

Wenn möglich, sei er ein rechter Winkel. BC berührt dann den Kreis in P.

Daher ist es möglich [Satz 5], eine Gerade OQC zu ziehen, die den Kreis durch P in Q und BC in C trifft, so daß

$$CQ : OQ < (\text{Bogen } PQ) : (\text{Bogen } DLP) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Angenommen, OC schneide die Spirale in R und den „ersten Kreis“ in R'; OP verlängere man bis zum Schnittpunkte P' mit dem „ersten Kreise“.

Aus (1) folgt *componendo*

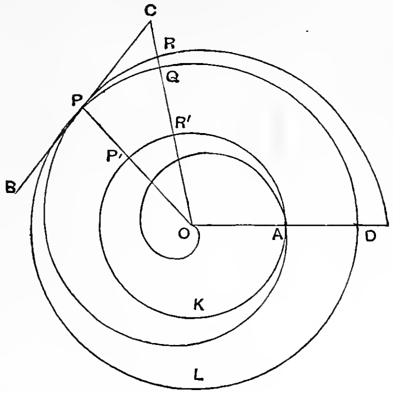
$$\begin{aligned} CO : OQ &< (\text{Bogen } DLQ) : (\text{Bogen } DLP) \\ &< (\text{Bogen } AKR') : (\text{Bogen } AKP') \\ &< OR : OP. \qquad \text{[Satz 14]} \end{aligned}$$

Aber das ist unmöglich, da $OQ = OP$ und $OR < OC$.

Somit ist der Winkel OPC kein rechter Winkel. Vorher ist bewiesen worden, daß er nicht spitz ist.

Folglich ist der Winkel OPC stumpf und OPB infolgedessen spitz.

II. Liegt P auf der zweiten oder n ten Windung, so ist der Beweis derselbe, abgesehen davon, daß wir in der obigen Proportion (1) statt des Bogens DLP einen Bogen zu nehmen haben, der gleich (p + Bogen DLP) oder [$(n-1)p$ + Bogen DLP] ist, wo p der Umfang des Kreises DLP durch P ist. Ähnlich ist bei den späteren Schritten p oder $(n-1)p$ zu jedem der Bogen DLQ und DLP hinzuzufügen und c oder $(n-1)c$ zu jedem der Bogen AKR', AKP', wo c der Umfang des „ersten Kreises" AKP' ist.



Sätze 18, 19.

I. *Ist OA die Anfangslinie, A der Endpunkt der ersten Windung der Spirale und wird in A die Tangente an die Spirale gelegt, so schneidet das in O auf OA errichtete Lot OB die genannte Tangente in einem Punkte B, und OB ist gleich dem Umfange des „ersten Kreises".*

II. *Ist A' der Endpunkt der zweiten Windung, so schneidet das Lot OB die Tangente in A' in einem Punkte B' und OB' ist gleich 2. (Umfang des „zweiten Kreises").*

III. *Ist allgemein A_n der Endpunkt der n ten Windung und schneidet OB die Tangente in A_n in einem Punkte B_n, so ist*

$$OB_n = n c_n,$$

wo c_n der Umfang des „n ten Kreises" ist.

I. Es sei AKC der „erste Kreis". Da der „rückwärtige" Winkel zwischen OA und der Tangente in A spitz ist [Satz 16], so schneidet die Tangente den „ersten Kreis" in einem zweiten Punkte C. Die Winkel CAO und BOA sind zusammen kleiner als zwei rechte Winkel; folglich schneidet OB die Verlängerung von AC in einem Punkte B.

Wenn also c der Umfang des ersten Kreises ist, so haben wir zu beweisen $$OB = c.$$

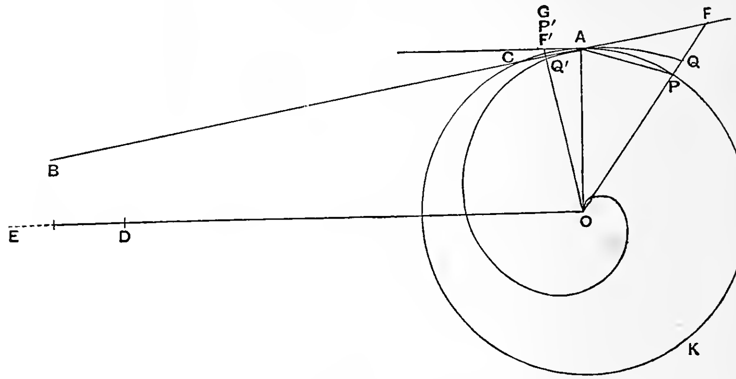
Wäre das nicht der Fall, so müßte OB entweder größer oder kleiner als c sein.

(1) Wenn möglich, sei $OB > c$.

Auf OB trage man eine Strecke OD ab, die kleiner als OB aber größer als c ist.

Wir haben dann einen Kreis AKC, in ihm eine Sehne AC, kleiner als der Durchmesser, und ein Verhältnis $AO:OD$, das größer als das Verhältnis $AO:OB$ ist, oder (was wegen ähnlicher Dreiecke dasselbe ist) als das Verhältnis von $\frac{1}{2}AC$ zu dem Lote von O auf AC. Folglich können wir [Satz 7] eine gerade Linie OPF ziehen, die den Kreis in P und die Verlängerung von CA in F schneidet, so daß

$$FP:PA = AO:OD.$$



Da $AO = PO$ ist, folgt durch Vertauschung der inneren Glieder

$$FP:PO = PA:OD$$
$$< (\text{Bogen } PA):c,$$

da (Bogen $PA) > PA$ und $OD > c$.

Componendo ergibt sich

$$FO:PO < (c + \text{Bogen } PA):c$$
$$< OQ:OA,$$

wenn OF die Spirale in Q trifft. [Satz 15]

Da nun $OA = OP$ ist, folgt $FO < OQ$, was unmöglich ist.

Folglich ist $OB \leqq c$.

(2) Wenn möglich, sei $OB < c$.

Auf OB tragen wir eine Strecke OE ab, die größer als OB aber kleiner als c ist.

Da in diesem Falle das Verhältnis $AO:OE$ kleiner als das Verhältnis $AO:OB$ ist (oder als das Verhältnis von $\frac{1}{2}AC$ zu dem

Lote von O auf AC), so können wir [Satz 8] eine gerade Linie $OF'P'G$ ziehen, die AC in F', den Kreis in P' und die Tangente des Kreises im Punkte A in G schneidet, so daß

$$F'P' : AG = AO : OE.$$

$OP'G$ schneide die Spirale in Q'.

Dann haben wir nach Vertauschung der inneren Glieder

$$F'P' : P'O = AG : OE$$
$$> (\text{Bogen } AP') : c,$$

da $AG > (\text{Bogen } AP')$ und $OE < c$.

Folglich ist

$$F'O : P'O < (\text{Bogen } AKP') : c$$
$$< OQ' : OA. \qquad \text{[Satz 14]}$$

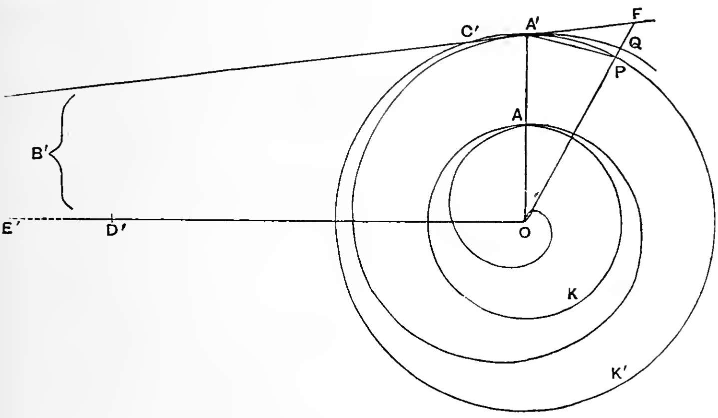
Aber das ist unmöglich, da $OA = OP'$ und $OQ' < OF'$.

Folglich ist $\qquad OB \geqq c.$

Da also OB weder größer noch kleiner als c ist, folgt

$$OB = c.$$

II. Es sei $A'K'C'$ der „zweite Kreis“, $A'C'$ die Tangente der Spirale in A' (sie schneidet den zweiten Kreis, weil der „rückwärtige“ Winkel $OA'C'$ spitz ist). Somit trifft wie vorher das Lot OB' auf OA' die Verlängerung von $A'C'$ in einem Punkte B'.



Ist nun c' der Umfang des „zweiten Kreises“, so haben wir zu beweisen, daß $OB' = 2c'$ ist.

Denn wäre das nicht der Fall, so müßte OB' entweder größer oder kleiner als $2c'$ sein.

(1) Wenn möglich, sei $OB' > 2c'$.

Man trage auf OB' eine Strecke OD' ab, so daß OD' kleiner als OB' aber größer als $2c'$ ist.

Dann können wir wie oben in dem Falle des „ersten Kreises" eine gerade Linie OPF ziehen, die den „zweiten Kreis" in P und die Verlängerung von $C'A'$ in F schneidet, so daß

$$FP : PA' = A'O : OD'.$$

OF treffe die Spirale in Q.

Wir haben nun, da $A'O = PO$,

$$\begin{aligned} FP : PO &= PA' : OD' \\ &< (\text{Bogen } A'P) : 2c', \end{aligned}$$

weil (Bogen $A'P$) $> A'P$ und $OD' > 2c'$.

Daher ist

$$\begin{aligned} FO : PO &< (2c' + \text{Bogen } A'P) : 2c' \\ &< OQ : OA'. \end{aligned} \qquad \text{[Satz 15, Zus.]}$$

Folglich ist $\quad FO < OQ$,

was unmöglich ist.

Somit ist $\quad OB' \leqq 2c'$.

Ähnlich können wir, wie in dem Falle des „ersten Kreises", beweisen $\quad OB' \geqq 2c'$.

Folglich gilt $\quad OB' = 2c'$.

III. Gehen wir ebenso zu dem „dritten" und den folgenden Kreisen über, so erhalten wir

$$OB_n = n c_n.$$

Satz 20.

I. *Ist P irgend ein Punkt auf der ersten Windung der Spirale, und errichtet man in O auf OP das Lot OT, so schneidet OT die in P berührende Tangente der Spirale in einem Punkte T; und trifft der mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OP konstruierte Kreis die Anfangslinie in K, so ist OT gleich dem Bogen dieses Kreises zwischen K und P, von K nach P „vorwärts" gemessen.*

II. *Ist allgemein P ein Punkt auf der $n$ten Windung und die Bezeichnung wie vorher, während p den Umfang des Kreises mit dem Radius OP bezeichnet, so ist*

$$OT = (n-1)p + \textit{Bogen } KP \text{ („}\textit{vorwärts}\text{" } \textit{gemessen}\text{)}.$$

I. Es sei P ein Punkt auf der ersten Windung der Spirale, OA die Anfangslinie, PR der nach „rückwärts" gezogene Teil der Tangente in P.

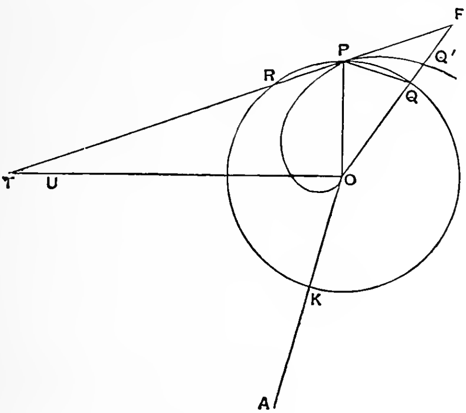
Dann ist [Satz 16] der Winkel OPR spitz. Daher schneidet PR den Kreis durch P in einem Punkte R, und ebenso schneidet OT die Verlängerung von PR in einem Punkte T.

Wäre nun die Strecke OT nicht gleich dem Bogen KRP, so müßte sie entweder größer oder kleiner sein.

(1) Wenn möglich, sei OT größer als der Bogen KRP.

Dann trage man auf OT eine Strecke OU ab, die kleiner als OT aber größer als der Bogen KRP ist.

Da nun das Verhältnis $PO:OU$ größer als das Verhältnis $PO:OT$ ist oder (was infolge der Ähnlichkeit von Dreiecken dasselbe ist) größer als das Verhältnis von $\frac{1}{2}PR$ zu dem Lote von O



auf PR, so können wir eine Gerade OQF ziehen, die den Kreis in Q und die Verlängerung von RP in F trifft, so daß

$$FQ:PQ = PO:OU. \qquad \text{[Satz 7]}$$

OF treffe die Spirale in Q'.

Wir haben dann

$$\begin{aligned} FQ:QO &= PQ:OU \\ &< (\text{Bogen } PQ):(\text{Bogen } KRP), \end{aligned}$$

nach der Annahme.

Componendo ergibt sich

$$\begin{aligned} FO:QO &< (\text{Bogen } KRQ):(\text{Bogen } KRP) \\ &< OQ':OP. \qquad \text{[Satz 14]} \end{aligned}$$

Aber $QO = OP$.

Folglich ist $FO < OQ'$, was unmöglich ist.

Demnach $\qquad OT \leqq (\text{Bogen } KRP)$.

(2) Der Beweis, daß OT nicht kleiner als der Bogen KRP sein kann, erfolgt nach der Methode des Satzes 18, I. (2) genau so wie der vorstehende Beweis nach der Methode des Satzes 18, I. (1).

Da also OT weder größer noch kleiner als der Bogen KRP ist, so ist sie ihm gleich.

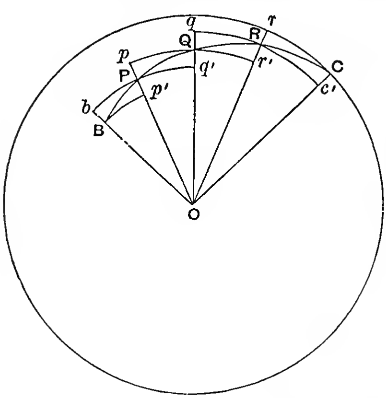
II. Liegt P auf der zweiten Windung, so ergibt dieselbe Methode $$OT = p + (\text{Bogen } KRP);$$ und ähnlich haben wir für einen Punkt P auf der $n$ten Windung $$OT = (n-1)p + (\text{Bogen } KRP).$$

Sätze 21, 22, 23.

Ist eine Fläche gegeben, die von irgend einem Bogen einer Spirale und den Verbindungslinien seiner Endpunkte mit dem Ursprung begrenzt wird, so ist es möglich, der Fläche eine Figur um- und eine andere einzuschreiben, beide aus ähnlichen Kreissektoren zusammengesetzt, so daß die umgeschriebene Figur die eingeschriebene um weniger als irgend eine gegebene Fläche übertrifft.

Es sei BC irgend ein Bogen der Spirale, O der Ursprung. Man zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OC, wo C der „vordere" Endpunkt des Bogens ist.

Halbieren wir nun den Winkel BOC, ebenso die beiden Hälften und so fort, so werden wir schließlich zu einem Winkel COr gelangen, der aus dem Kreise einen Sektor ausschneidet, kleiner als irgend eine gegebene Fläche. Es sei COr dieser Sektor.



Die anderen Linien, die den Winkel BOC in die gleichen Teile teilen, mögen die Spirale in P, Q und Or sie in R treffen. Mit O als Mittelpunkt und OB, OP, OQ, OR als Radien beschreiben wir bezüglich die Kreisbogen Bp', bPq', pQr', qRc', die je bis zu den benachbarten Radien reichen, wie aus der Figur ersichtlich ist. In jedem Falle fällt der von dem Punkte der Spirale aus nach „vorwärts" liegende Bogen innerhalb, der nach „rückwärts" liegende außerhalb der Spirale.

Wir haben nun eine um- und eine eingeschriebene Figur, beide aus ähnlichen Kreissektoren zusammengesetzt. Um ihre

Flächen zu vergleichen, vergleichen wir, bei OC beginnend, ihre aufeinander folgenden Sektoren. Der Sektor OCr in der umgeschriebenen Figur steht allein.

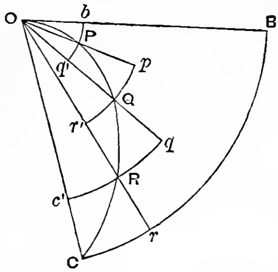
Ferner haben wir

$$(\text{Sektor } ORq) = (\text{Sektor } ORc'),$$
$$(\text{Sektor } OQp) = (\text{Sektor } OQr'),$$
$$(\text{Sektor } OPb) = (\text{Sektor } OPq'),$$

während der Sektor OBp' in der eingeschriebenen Figur allein steht.

Nehmen wir also die gleichen Sektoren fort, so ist die Differenz zwischen der um- und der eingeschriebenen Figur gleich der Differenz zwischen den Sektoren OCr und OBp'; und diese Differenz ist kleiner als der Sektor OCr, der selbst kleiner als die beliebig gegebene Fläche ist.

Der Beweis ist ganz unabhängig von der Zahl der Winkel, in die der Winkel BOC geteilt ist; die einzige Abweichung tritt dann ein, wenn der Bogen im Ursprunge beginnt, die kleinsten Sektoren OPb, OPq' in beiden Figuren gleich sind und deshalb kein einzeln stehender eingeschriebener Sektor vorhanden ist, so daß die Differenz zwischen der um- und der eingeschriebenen Figur gleich dem Sektor OCr selbst ist.



Somit ist der Satz allgemein richtig.

Zusatz. Da die von der Spirale begrenzte Fläche der Größe nach zwischen der um- und der eingeschriebenen Figur liegt, so folgt:

(1) *der Fläche kann eine Figur so umgeschrieben werden, daß sie die Fläche um weniger als irgend eine angegebene Fläche übertrifft,*

(2) *der Fläche kann eine Figur so eingeschrieben werden, daß die Fläche sie um weniger als irgend eine angegebene Fläche übertrifft.*

Satz 24.

Die von der ersten Windung der Spirale und der Anfangslinie begrenzte Fläche ist gleich einem Drittel des „ersten Kreises“ [$= \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$, wo $r = a\vartheta$ die Gleichung der Spirale ist].

[Derselbe Beweis liefert zugleich das Ergebnis: *Ist OP irgend ein Radiusvektor in der ersten Windung der Spirale, so ist die Fläche des durch ihn begrenzten Teiles der Spirale gleich einem Drittel desjenigen Sektors des mit dem Radius OP gezogenen Kreises, der von der*

Anfangslinie und OP begrenzt wird, von der Anfangslinie aus „vorwärts“ gemessen.]

Es sei O der Ursprung, OA die Anfangslinie, A der Endpunkt der ersten Windung.

Man ziehe den „ersten Kreis“, d. h. den Kreis mit O als Mittelpunkt und OA als Radius.

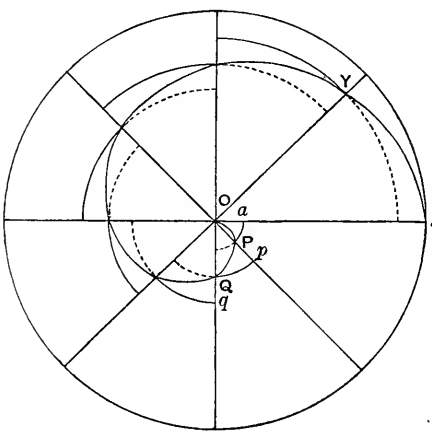
Ist nun C_1 die Fläche des ersten Kreises, R_1 die der ersten Windung der Spirale, begrenzt durch OA, so haben wir zu beweisen

$$R_1 = \tfrac{1}{3} C_1.$$

Wäre das nicht der Fall, so müßte R_1 entweder größer oder kleiner als $\frac{1}{3} C_1$ sein.

I. Wenn möglich, sei $R_1 < \frac{1}{3} C_1$.

Wir können dann um R_1 eine aus ähnlichen Kreissektoren bestehende Figur so umschreiben, daß, wenn F die Fläche dieser Figur ist,



$$F - R_1 < \tfrac{1}{3} C_1 - R_1$$

wird, woraus folgt $F < \frac{1}{3} C_1$.

Es seien OP, OQ, ... die Radien der Kreissektoren, bei dem kleinsten angefangen. Der Radius des größten ist offenbar OA.

Die Radien bilden nun eine steigende arithmetische Reihe, in der die gemeinsame Differenz gleich dem kleinsten Gliede OP ist. Ist n die Anzahl der Sektoren, so haben wir [nach Satz 10, Zusatz 1]

$$n \cdot OA^2 < 3\,(OP^2 + OQ^2 + \ldots + OA^2);$$

und, da die ähnlichen Sektoren proportional den Quadraten ihrer Radien sind, so folgt

$$C_1 < 3\,F$$

oder

$$F > \tfrac{1}{3} C_1.$$

Aber das ist unmöglich, da F kleiner als $\frac{1}{3} C_1$ war.

Folglich $$R_1 \geqq \tfrac{1}{3} C_1.$$

II. Wenn möglich, sei $R_1 > \frac{1}{3} C_1$.

Wir können dann eine aus ähnlichen Kreissektoren bestehende Figur *einschreiben*, so daß, wenn f ihre Fläche ist,

$$R_1 - f < R - \tfrac{1}{3} C_1,$$

woraus folgt

$$f > \tfrac{1}{3} C_1.$$

Wenn $(n-1)$ Sektoren vorhanden sind, so bilden ihre Radien OP, OQ, ... eine steigende arithmetische Reihe, in der das kleinste Glied gleich der gemeinsamen Differenz ist, und das größte Glied OY gleich $(n-1)\ OP$.

Dann gilt [Satz 10, Zusatz 1]

$$n \cdot OA^2 > 3\,(OP_1 + OQ^2 + \ldots + OY^2),$$

woraus folgt

$$C_1 > 3 f$$

oder

$$f < \tfrac{1}{3} C_1,$$

was unmöglich ist, da $f > \frac{1}{3} C_1$.

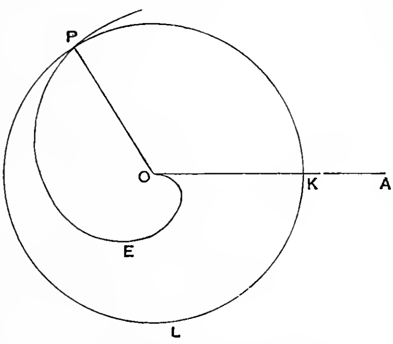
Folglich

$$R_1 \leqq \tfrac{1}{3} C_1.$$

Da also R_1 weder größer noch kleiner als $\frac{1}{3} C_1$ ist, so folgt

$$R_1 = \tfrac{1}{3} C_1.$$

[Archimedes ermittelt nicht die von dem Radiusvektor OP begrenzte Spiralenfläche, wo P irgend ein Punkt der ersten Windung ist; zu diesem Zwecke haben wir in dem obigen Beweise jedoch nur an Stelle der Fläche C_1 des „ersten Kreises“ die Fläche des Sektors KLP einzusetzen, der dem Kreise um O mit dem Radius OP angehört, während die beiden aus ähnlichen Sektoren gebildeten Figuren dem Teile OEP der Spirale um- und einzuschreiben sind. Es läßt sich dann genau dieselbe Beweismethode anwenden, und die Fläche von OEP ergibt sich gleich $\frac{1}{3}$ (Sektor KLP).



Wir können ferner nach derselben Methode beweisen, wenn P ein Punkt der zweiten oder einer späteren, etwa der n ten Windung ist, daß dann die *vollständige von dem Radiusvektor beschriebene Fläche*, vom Anfang bis zu der Zeit, wo er die Lage OP erreicht, wenn C die Fläche des vollständigen Kreises mit O als Mittelpunkt und OP als Radius bezeichnet, gleich $\frac{1}{3}(C +$ Sektor $KLP)$ bzw. $\frac{1}{3}[(n-1)\,C +$ Sektor $KLP]$ ist.

Die so von dem Radiusvektor beschriebene Fläche ist offenbar nicht dieselbe wie diejenige, die von der letzten vollständigen in P endenden Windung und dem durch sie begrenzten Abschnitt von OP eingeschlossen wird. Nehmen wir also an, R_1 sei die von der ersten Windung der Spirale und OA_1 begrenzte Fläche (wenn die erste Windung in A_1 auf der Anfangslinie endigt), R_2 die zu dieser durch die zweite vollständige in A_2 auf der Anfangslinie endende Windung *hinzugefügte* Fläche, usf. R_1 ist dann von dem Radiusvektor *zweimal* beschrieben worden, wenn er in die Lage OA_2 kommt; wenn der Radiusvektor in die Lage OA_3 kommt, hat er R_1 dreimal beschrieben, den Ring R_2 zweimal und den Ring R_3 einmal, usw.

Somit haben wir, wenn C_n die Fläche des „$n$ten Kreises" bezeichnet, allgemein

$$\tfrac{1}{3} n C_n = R_n + 2 R_{n-1} + 3 R_{n-2} + \ldots + n R_1,$$

während die wirkliche von der äußersten oder der vollständigen $n$ten Windung und dem von ihr auf OA_n begrenzten Abschnitte eingeschlossene Fläche gleich

$$R_n + R_{n-1} + R_{n-2} + \ldots + R_1$$

ist. Man kann nun zeigen, daß die Ergebnisse der späteren Sätze 25 und 26 sich aus der eben angegebenen Erweiterung des Satzes 24 ableiten lassen.

Um das allgemeine Ergebnis des Satzes 26 zu erhalten, wollen wir annehmen, BC sei ein Bogen irgend einer Windung der Spirale, und zwar kleiner als eine vollständige Windung, und B liege jenseits des Endpunktes A_n der $n$ten vollständigen Windung, während C von B aus „vorwärts" liegt.

Es sei $\frac{p}{q}$ der zwischen dem Endpunkte der $n$ten Windung und B liegende Bruchteil der nächsten Windung.

Dann ist die ganze von dem Radiusvektor bis zur Lage OB beschriebene Fläche (vom Anfang der Spirale an gerechnet) gleich

$$\tfrac{1}{3}\left(n + \frac{p}{q}\right)(\text{Kreis mit dem Radius } OB).$$

Ebenso ist die ganze von dem Radiusvektor vom Anfang bis zu der Lage OC beschriebene Fläche

$$\tfrac{1}{3}\left\{\left(n + \frac{p}{q}\right)(\text{Kreis mit dem Radius } OC) + (\text{Sektor } B'MC)\right\}.$$

Die von OB, OC und dem Teile BEC der Spirale begrenzte Fläche ist gleich der Differenz dieser beiden Ausdrücke, und da die Kreise sich wie OB^2 zu OC^2 verhalten, kann man die Differenz folgendermaßen ausdrücken:

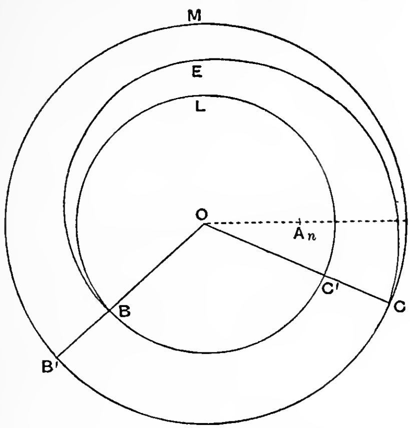
$$\tfrac{1}{3}\left\{\left(n+\frac{p}{q}\right)\left(1-\frac{OB^2}{OC^2}\right)(\text{Kreis mit dem Radius } OC) + (\text{Sektor } B'MC)\right\}.$$

Aber nach Satz 15, Zusatz, haben wir

$$\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{Kreis } B'MC) : \left\{\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{Kreis } B'MC) + \text{Sektor } B'MC\right\}$$
$$= OB : OC,$$

so daß

$$\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{Kreis } B'MC) : (\text{Sektor } B'MC) = OB : OC - OB.$$



Demnach ist $$\frac{\text{Fläche } BEC}{\text{Sektor } B'MC} = \tfrac{1}{3}\left\{\left(\frac{OB}{OC-OB}\right)\left(1-\frac{OB^2}{OC^2}\right)+1\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{OB(OC+OB)+OC^2}{OC^2}$$
$$= \frac{OC \cdot OB + \frac{1}{3}(OC-OB)^2}{OC^2}.$$

Das Ergebnis des Satzes 25 ist ein besonderer Fall des soeben erhaltenen und das des Satzes 27 folgt unmittelbar daraus, wie bei diesem Satze gezeigt wird.]

Sätze 25, 26, 27.

[Satz 25.] *Ist A_2 der Endpunkt der zweiten Windung der Spirale, so verhält sich die von der zweiten Windung und OA_2 begrenzte Fläche zu der Fläche des zweiten Kreises wie 7 zu 12, denn das Verhältnis* *ist gleich dem von* $\{r_2 r_1 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)^2\}$ *zu* r_2^2, *wo* r_1, r_2 *bezüglich die Radien des „ersten" und „zweiten" Kreises sind.*

[Satz 26.] *Ist* BC *irgend ein nach „vorwärts" gemessener Bogen irgend einer Windung der Spirale, nicht größer als eine vollständige Windung, und wird ein Kreis mit* O *als Mittelpunkt und* OC *als Radius gezogen, der* OB *in* B' *trifft, so gilt die Proportion*

$$(\textit{Fläche der Spirale zwischen } OB,\ OC) : (\textit{Sektor } OB'C) = \{OC \cdot OB + \tfrac{1}{3}(OC - OB)^2\} : OC^2.$$

[Satz 27.] *Ist* R_1 *die durch die Anfangslinie abgeschlossene Fläche der ersten Windung der Spirale,* R_2 *die Fläche des durch die zweite vollständige Windung hinzugefügten Ringes,* R_3 *die Fläche des durch die dritte Windung hinzugefügten Ringes, und so fort, dann gelten die Beziehungen*

$$R_3 = 2\,R_2,\ R_4 = 3\,R_2,\ R_5 = 4\,R_2, \ldots,\ R_n = (n-1)\,R_2$$

und

$$R_2 = 6\,R_1.$$

[Archimedes' Beweis des Satzes 25 ist *mutatis mutandis* derselbe wie sein Beweis des allgemeineren Satzes 26. Der letztgenannte wird demnach hier wiedergegeben und auf den in Satz 25 enthaltenen besonderen Fall angewendet.]

Es sei BC ein nach „vorwärts" gemessener Bogen irgend einer Windung der Spirale, CKB' der Kreis um O mit dem Radius OC.

Man zeichne einen Kreis, dessen Radiusquadrat gleich $OC \cdot OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2$ ist; in ihm sei σ ein Sektor, dessen Zentriwinkel gleich dem Winkel BOC ist.

Dann gilt $\sigma : (\text{Sektor } OB'C) = \{OC \cdot OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2\} : OC^2$, und wir haben also zu beweisen, daß

$$(\text{Fläche der Spirale } OBC) = \sigma.$$

Wäre das falsch, so müßte die Fläche der Spirale OBC (die wir S nennen wollen) entweder größer oder kleiner als σ sein.

I. Wenn möglich, sei $S < \sigma$.

Man schreibe der Fläche S eine aus ähnlichen Kreissektoren bestehende Fläche um, so daß, wenn F die Fläche der Figur ist,

$$F - S < \sigma - S,$$

woraus folgt

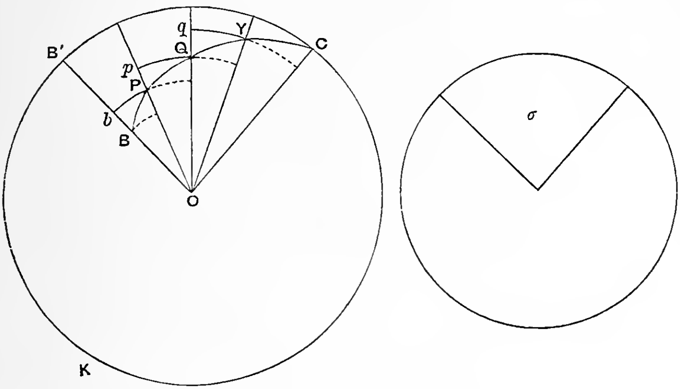
$$F < \sigma.$$

Die Radien der aufeinanderfolgenden Sektoren seien, bei OB angefangen, OP, $OQ, \ldots$ OC. Man verlängere OP, $OQ, \ldots$, bis sie den Kreis CKB' treffen.

Ist nun n die Anzahl der Strecken OB, OP, $OQ, \ldots$ OC, so ist die Zahl der Sektoren in der umgeschriebenen Figur $(n-1)$, und der Sektor $OB'C$ wird gleichfalls in $(n-1)$ Sektoren geteilt, die jedoch untereinander gleich sind. Ferner bilden OB, OP, OQ, ... OC eine steigende arithmetische Reihe von n Gliedern.

Daher gilt [s. Satz 11 und Zusatz]

$$\begin{aligned}(n-1)\,OC^2 : (OP^2 + OQ^2 + \ldots + OC^2) \\ < OC^2 : \{OC \cdot OB + \tfrac{1}{3}(OC - OB)^2\} \\ < (\text{Sektor } OB'C) : \sigma, \text{ nach der Annahme.}\end{aligned}$$



Folglich haben wir, da sich ähnliche Sektoren wie die Quadrate ihrer Radien verhalten,

$$(\text{Sektor } OB'C) : F < (\text{Sektor } OB'C) : \sigma,$$

so daß $$F > \sigma.$$

Aber das ist unmöglich, da $F < \sigma$.

Folglich $$S \geqq \sigma.$$

II. Wenn möglich, sei $S > \sigma$.

Man schreibe der Fläche S eine aus ähnlichen Kreissektoren bestehende Figur so ein, daß, wenn f ihre Fläche ist,

$$S - f < S - \sigma,$$

woraus folgt $$f > \sigma.$$

Es seien OB, OP, ... OY die Radien der aufeinanderfolgenden Sektoren, aus denen die Figur f besteht; $(n-1)$ sei ihre Anzahl.

Wir haben in diesem Falle [s. Satz 11 und Zusatz]

$$\begin{aligned}(n-1)\,OC^2 : (OB^2 + OP^2 + \ldots + OY^2) \\ > OC^2 : \{OC \cdot OB + \tfrac{1}{3}(OC - OB)^2\},\end{aligned}$$

woraus folgt

$$(\text{Sektor } OB'C) : f > (\text{Sektor } OB'C) : \sigma,$$

so daß

$$f < \sigma.$$

Aber das ist unmöglich, da $f > \sigma$.

Folglich

$$S \leqq \sigma.$$

Da also S weder größer noch kleiner als σ ist, so folgt

$$S = \sigma.$$

In dem besonderen Falle, wo B mit A_1, dem Endpunkte der ersten Windung der Spirale, und C mit A_2, dem Endpunkte der zweiten Windung, zusammenfällt, wird der Sektor $OB'C$ der vollständige „zweite Kreis", der nämlich, der OA_2 (oder r_2) zum Radius hat.

Somit wird

$$\begin{aligned}(\text{Spiralenfläche, begrenzt von } OA_2) &: (\text{„zweiter Kreis"}) \\ &= \{r_2 r_1 + \tfrac{1}{3}(r_2 - r_1)^2\} : r_2^2 \\ &= (2 + \tfrac{1}{3}) : 4 \qquad (\text{da } r_2 = 2\, r_1) \\ &= 7 : 12.\end{aligned}$$

Ferner ist die von OA_2 begrenzte Spiralenfläche gleich $R_1 + R_2$ (d. h. gleich der von der ersten Windung und OA_1 begrenzten Fläche vermehrt um den durch die zweite Windung hinzukommenden Ring). Der „zweite Kreis" ist das Vierfache des „ersten Kreises" und daher gleich $12\, R_1$.

Folglich ist $\quad (R_1 + R_2) : 12\, R_1 = 7 : 12$

oder

$$R_1 + R_2 = 7\, R_1.$$

Daraus folgt

$$R_2 = 6\, R_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Für die dritte Windung haben wir sodann

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2 + R_3) : (\text{„dritter Kreis"}) &= \{r_3 r_2 + \tfrac{1}{3}(r_3 - r_2)^2\} : r_3^2 \\ &= (3 \cdot 2 + \tfrac{1}{3}) : 3^2 \\ &= 19 : 27\end{aligned}$$

und

$$(\text{„dritter Kreis"}) = 9\ (\text{„erster Kreis"}) = 27\, R_1;$$

folglich

$$R_1 + R_2 + R_3 = 19\, R_1,$$

und aus (1) folgt

$$\begin{aligned}R_3 &= 12\, R_1 \\ &= 2\, R_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)\end{aligned}$$

und so fort.

Allgemein haben wir

$$(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) : n\text{ ter Kreis} = \{r_n r_{n-1} + \tfrac{1}{3}(r_n - r_{n-1})^2\} : r_n^2$$

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}) &: (n-1)\text{ ter Kreis} \\ &= \{r_{n-1} r_{n-2} + \tfrac{1}{3}(r_{n-1} - r_{n-2})^2\} : r_{n-1}^2\end{aligned}$$

und

$$n\text{ ter Kreis} : (n-1)\text{ ter Kreis} = r_n^2 : r_{n-1}^2.$$

Folglich haben wir

$$(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) : (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1})$$
$$= \{n(n-1) + \tfrac{1}{3}\} : \{(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{3}\}$$
$$= \{3n(n-1) + 1\} : \{3(n-1)(n-2) + 1\}.$$

Daraus folgt

$$R_n : (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1})$$
$$= 6(n-1) : \{3(n-1)(n-2) + 1\} \quad \ldots \quad (\alpha).$$

Ähnlich ergibt sich

$$R_{n-1} : (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2}) = 6(n-2) : \{3(n-2)(n-3) + 1\},$$

woraus wir ableiten

$$R_{n-1} : (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1})$$
$$= 6(n-2) : \{6(n-2) + 3(n-2)(n-3) + 1\}$$
$$= 6(n-2) : \{3(n-1)(n-2) + 1\} \quad \ldots \quad (\beta).$$

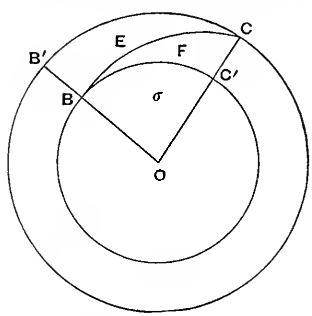
Durch Kombination von (α) und (β) erhalten wir

$$R_n : R_{n-1} = (n-1) : (n-2).$$

Das sagt aus, daß sich $R_2, R_3, R_4, \ldots R_n$ wie die aufeinanderfolgenden Zahlen $1, 2, 3, \ldots (n-1)$ verhalten.

Satz 28.

Ist O der Ursprung und BC irgend ein „vorwärts" gemessener Bogen einer beliebigen Windung der Spirale, so ziehe man (1) den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OB, der OC in C' treffe, und (2) den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OC, der die Verlängerung von OB in B' treffe. Bezeichnet nun E die von dem größeren Kreisbogen $B'C$, der Strecke $B'B$ und der Spirale BC eingeschlossene Fläche, während F die von dem kleineren Bogen BC', der Strecke CC' und der Spirale BC begrenzte Fläche bezeichnet, so gilt die Proportion



$$E : F = \{OB + \tfrac{2}{3}(OC - OB)\} : \{OB + \tfrac{1}{3}(OC - OB)\}.$$

Es sei σ die Fläche des kleineren Sektors OBC'; dann ist der größere Sektor gleich $\sigma + F + E$.

Aus Satz 26 folgt

$$(\sigma + F) : (\sigma + F + E) = \{OC \cdot OB + \tfrac{1}{3}(OC - OB)^2\} : OC^2 \quad \ldots (1),$$

woraus sich ergibt

$$E:(\sigma+F)=\{OC(OC-OB)-\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OC\cdot OB+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$=\{OB(OC-OB)+\tfrac{2}{3}(OC-OB^2\}$$
$$:\{OC\cdot OB+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Andrerseits ist

$$(\sigma+F+E):\sigma=OC^2:OB^2.$$

Aus der obigen Proportion (1) folgt also *ex aequali*

$$(\sigma+F):\sigma=\{OC\cdot OB+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}:OB^2$$

und daraus

$$(\sigma+F):F=\{OC\cdot OB+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OB(OC-OB)+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}.$$

Kombinieren wir dies mit der obigen Proportion (2), so erhalten wir

$$E:F=\{OB(OC-OB)+\tfrac{2}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OB(OC-OB)+\tfrac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$=\{OB+\tfrac{2}{3}(OC-OB)\}:\{OB+\tfrac{1}{3}(OC-OB)\}.$$

Über das Gleichgewicht von Ebenen

oder

die Schwerpunkte von Ebenen.

Buch I.

„Ich postuliere folgendes:

1. Gleiche Gewichte in gleichen Abständen sind im Gleichgewicht, und gleiche Gewichte in ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, das den größeren Abstand hat.

2. Wenn Gewichte in gewissen Abständen sich das Gleichgewicht halten und es wird zu einem der Gewichte etwas hinzugefügt, so sind sie nicht mehr im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, das man vergrößert hat.

3. Nimmt man ähnlich von einem der Gewichte etwas fort so bleiben sie nicht im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem Gewichte hin, von dem nichts fortgenommen ist.

4. Wenn gleiche und ähnliche [d. h. kongruente] ebene Figuren aufeinandergelegt sich decken, so fallen auch ihre Schwerpunkte aufeinander.

5. In ungleichen aber ähnlichen Figuren sind die Schwerpunkte ähnlich gelegen. Ähnlich gelegen mit Bezug auf ähnliche Figuren nenne ich Punkte von der Art, daß die von ihnen nach den gleichen Winkeln gezogenen Geraden mit den entsprechenden Seiten gleiche Winkel bilden.

6. Sind Größen in gewissen Abständen im Gleichgewicht, so sind (andere) ihnen gleiche Größen in denselben Abständen auch im Gleichgewicht.

7. Ist der Umfang einer Figur konkav in (einer und) derselben Richtung, so muß der Schwerpunkt im Inneren der Figur liegen.“

Satz 1.

Gewichte, die sich in gleichen Abständen das Gleichgewicht halten, sind gleich.

Angenommen, sie seien ungleich; dann nehme man von dem größeren den Unterschied zwischen beiden fort. Die verbleibenden Gewichte sind dann nicht im Gleichgewicht [*Postulat* 3]; aber das ist undenkbar.

Daher können die Gewichte nicht ungleich sein.

Satz 2.

Ungleiche Gewichte in gleichen Abständen halten sich nicht das Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem größeren Gewichte hin.

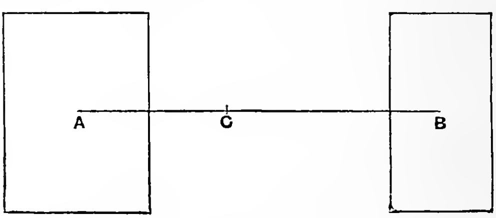
Man nehme von dem größeren die Differenz zwischen beiden fort. Die verbleibenden gleichen Gewichte werden sich daher das Gleichgewicht halten [*Post.* 1]. Wenn wir also die Differenz wieder hinzufügen, so sind die Gewichte nicht mehr im Gleichgewicht, sondern neigen sich nach dem größeren hin [*Post.* 2].

Satz 3.

Ungleiche Gewichte halten sich in ungleichen Abständen das Gleichgewicht, und zwar hat das größere Gewicht den kleineren Abstand.

Es seien A, B zwei ungleiche Gewichte (A das größere), die sich in Bezug auf C in den Abständen AC, BC das Gleichgewicht halten.

Dann soll AC kleiner als BC sein. Angenommen, dies sei nicht der Fall, so nehme man von A das Gewicht $(A - B)$ fort.



Die verbleibenden Gewichte neigen sich dann nach B hin [*Post.* 3]. Aber das ist unmöglich, denn (1) wenn $AC = BC$, so halten sich die Gewichte das Gleichgewicht, oder (2) wenn $AC > BC$, so neigen sie sich nach A hin, das den größeren Abstand hat [*Post.* 1].

Folglich $AC < BC$.

Umgekehrt, wenn die Gewichte sich das Gleichgewicht halten und $AC < BC$ ist, so ist $A > B$.

Satz 4.

Wenn zwei gleiche Größen nicht denselben Schwerpunkt haben, so ist der Schwerpunkt der beiden Größen zusammengenommen der Mittelpunkt der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte.

[Aus Satz 3 durch *reductio ad absurdum* abgeleitet. Archimedes nimmt an, daß der Schwerpunkt der beiden Größen zusammen auf der Verbindungslinie ihrer beiden Schwerpunkte liegt, indem er sagt, das sei früher bewiesen worden (προδέδεικται). Diese Anspielung bezieht sich zweifellos auf die verlorene Abhandlung *Über Hebel* (περὶ ζυγῶν).]

Satz 5.

Haben drei gleiche Größen ihre Schwerpunkte in einer Geraden in gleichen Abständen voneinander, so fällt der Schwerpunkt des Systems mit dem der mittleren Größe zusammen.

[Das folgt unmittelbar aus Satz 4.]

Zusatz 1. *Dasselbe gilt von jeder ungeraden Anzahl von Größen, wenn die von der mittleren gleich weit entfernten gleich sind, während die Abstände zwischen ihren Schwerpunkten gleich sind.*

Zusatz 2. *Ist eine gerade Anzahl von Größen gegeben, deren Schwerpunkte gleich weit voneinander entfernt in einer Geraden liegen, und sind die beiden mittleren gleich, während solche, die von diesen (auf beiden Seiten) gleich weit entfernt sind, auch bezüglich gleich sind, so ist der Schwerpunkt des Systems der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden mittleren.*

Sätze 6, 7.

Zwei Größen, mögen sie kommensurabel [Satz 6] *oder inkommensurabel sein* [Satz 7], *halten sich das Gleichgewicht in Abständen, die den Größen umgekehrt proportional sind.*

I. Angenommen, die Größen A, B seien kommensurabel und die Punkte A, B ihre Schwerpunkte. DE sei eine Strecke, die in C so geteilt ist, daß die folgende Proportion gilt

$$A : B = DC : CE.$$

Wir haben dann zu beweisen, wenn A nach E und B nach D gebracht wird, daß C der Schwerpunkt des aus den beiden Größen bestehenden Systems ist.

Da A, B kommensurabel sind, so sind es auch DC, CE. Es sei N ein gemeinsames Maß von DC, CE. Man mache die Strecken DH, DK je gleich CE, und EL (auf der Verlängerung von CE) gleich CD. Dann ist $EH = CD$, da $DH = CE$. Folglich ist E der Mittelpunkt von LH und D der von HK.

Demnach müssen LH, HK die Strecke N je eine gerade Anzahl von Malen enthalten.

Man nehme eine Größe O, die in A so oft enthalten ist wie N in LH, woraus folgt

$$A : O = LH : N.$$

Aber

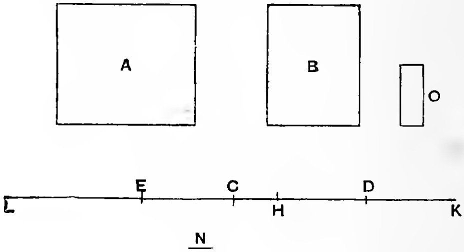
$$B : A = CE : DC$$
$$= HK : LH.$$

Folglich haben wir *ex aequali*

$$B : O = HK : N,$$

oder O ist in B so oft enthalten wie N in HK.

Somit ist O ein gemeinsames Maß von A, B.



Man teile LH, HK in Teile, die sämtlich gleich N sind, und A, B in Teile, die alle gleich O sind. Die Zahl der Teile von A ist daher gleich der der Teile von LH, und die Zahl der Teile von B gleich der der Teile von HK. Man verteile nun die Teile von A so auf die Teile von LH, daß immer der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der betreffenden Teilstrecke fällt, und in derselben Weise verteile man die Teile von B auf die Teilstrecken von HK.

Dann fällt der Schwerpunkt der Teile von A, die in gleichen Abständen auf LH verteilt sind, nach E, dem Mittelpunkte von LH [Satz 5, Zus. 2], und der Schwerpunkt der Teile von B, die in gleichen Abständen längs HK verteilt sind, nach D, dem Mittelpunkte von HK.

Wir können also annehmen, daß A selbst nach E, B selbst nach D gelegt ist.

Aber das aus allen Teilen O von A und B bestehende System ist ein System von einer geraden Anzahl gleicher Größen, die in gleichen Abständen längs LK verteilt sind. Und da

$LE = CD$ und $EC = DK$, so ist $LC = CK$, oder C ist der Mittelpunkt von LK. Folglich ist C der Schwerpunkt des längs LK angeordneten Systems.

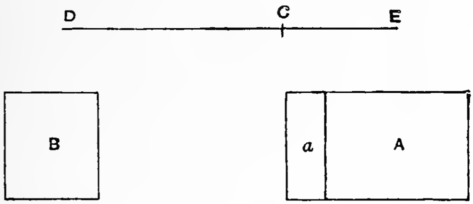
Wirkt also A in E und B in D, so halten sie sich in Bezug auf C das Gleichgewicht.

II. Angenommen, die Größen seien inkommensurabel, und zwar seien es die Größen $(A + a)$ und B. Es sei DE eine Strecke, die in C gemäß der folgenden Proportion geteilt ist

$$(A + a) : B = DC : CE.$$

Wird nun $(A + a)$ nach E und B nach D gelegt und halten sie sich um C nicht das Gleichgewicht, so ist $(A + a)$ entweder zu groß, um B das Gleichgewicht zu halten, oder nicht groß genug.

Wenn möglich, werde angenommen, daß $(A + a)$ zu groß ist, um B im Gleichgewicht zu halten. Man nehme von $(A + a)$



einen Betrag a fort, der kleiner ist als der Abzug, der bewirken würde, daß der Rest mit B im Gleichgewicht ist, aber so, daß der Rest A und die Größe B kommensurabel sind.

Da nun A und B kommensurabel sind und die Beziehung

$$A : B < DC : CE$$

gilt, so sind A und B nicht im Gleichgewicht [Satz 6], sondern D wird nach unten gezogen.

Aber das ist unmöglich, da der Abzug a von $(A + a)$ nicht hinreichend war, um Gleichgewicht herzustellen, so daß E immer noch nach unten gezogen wird. Demnach ist $(A + a)$ nicht zu groß, um B im Gleichgewicht zu halten; und ähnlich läßt sich beweisen, daß B nicht zu groß ist, um $(A + a)$ das Gleichgewicht zu halten.

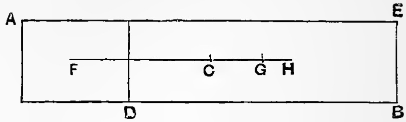
Daher haben $(A + a)$, B zusammengenommen ihren Schwerpunkt in C.

Satz 8.

Ist AB eine Größe mit dem Schwerpunkt C und AD ein Teil von ihr mit dem Schwerpunkt F, so ist der Schwerpunkt des übrig bleibenden Teiles ein Punkt G auf der Verlängerung von FC, so daß

$$GC : CF = (AD) : (DE).$$

Denn wäre der Schwerpunkt des Restes (DE) nicht G, so sei es ein Punkt H. Dann ergibt sich aus den Sätzen 6, 7 sofort ein Widerspruch.

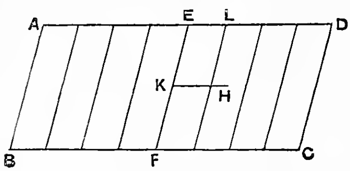


Satz 9.

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Gegenseiten.

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und EF die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Gegenseiten AD, BC.

Läge der Schwerpunkt nicht auf EF, so wollen wir annehmen, es sei H der Schwerpunkt, und HK parallel zu AD oder BC gezogen, wobei K der Schnittpunkt mit EF ist.



Wenn wir nun ED halbieren, dann auch die Hälften halbieren und in derselben Weise fortfahren, so ist es möglich, zu einer Strecke EL zu gelangen, die kleiner als KH ist. Wir teilen nun AE und ED in Teile, die alle gleich EL sind, und ziehen durch die Teilpunkte die Parallelen zu AB oder CD.

Wir haben dann eine Anzahl kongruenter Parallelogramme, und wird irgend eins von ihnen auf ein anderes gelegt, so fallen ihre Schwerpunkte zusammen [*Post.* 4]. Somit haben wir eine gerade Anzahl gleicher Größen, deren Schwerpunkte in gleichen Abständen auf einer Geraden liegen. Folglich liegt der Schwerpunkt des ganzen Parallelogramms auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden mittleren Parallelogramme [Satz 5, Zus. 2].

Aber das ist unmöglich, denn H liegt außerhalb der mittleren Parallelogramme. Folglich kann der Schwerpunkt nur auf EF liegen.

Satz 10.

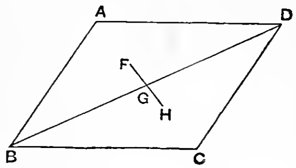
Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen.

Denn nach dem vorangehenden Satze liegt der Schwerpunkt auf jeder der beiden Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten. Somit ist er ihr Schnittpunkt, und das ist zugleich der Schnittpunkt der Diagonalen.

Anderer Beweis.

Es sei $ABCD$ das gegebene Parallelogramm und BD eine Diagonale. Dann sind die Dreiecke ABD, CDB kongruent, so daß [*Post.* 4], wenn man eins auf das andere legt, ihre Schwerpunkte aufeinanderfallen.

Es sei F der Schwerpunkt des Dreiecks ABD. G sei der Mittelpunkt von BD. Man ziehe die Strecke FG und verlängere sie bis H, so daß $FG = GH$.



Wenn wir nun das Dreieck ABD so auf das Dreieck CDB legen, daß AD auf CB und AB auf CD fällt, so fällt der Punkt F auf H.

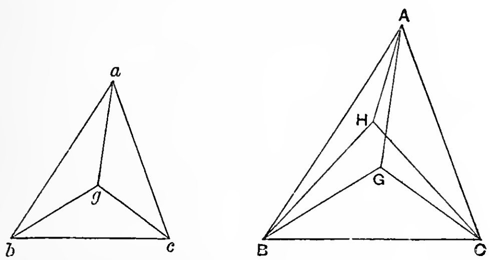
Aber nach *Post.* 4 fällt F auf den Schwerpunkt von CDB. Folglich ist H der Schwerpunkt von CDB.

Da nun F, H die Schwerpunkte der beiden gleichen Dreiecke sind, so ist der Schwerpunkt des ganzen Parallelogramms der Mittelpunkt von FH, d. i. der Mittelpunkt von BD oder der Schnittpunkt der beiden Diagonalen.

Satz 11.

Sind abc, ABC zwei ähnliche Dreiecke und g, G zwei in ihnen ähnlich gelegene Punkte, so muß, wenn g der Schwerpunkt des Dreiecks abc ist, G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein.

Es werde vorausgesetzt $ab : bc : ca = AB : BC : CA$. Der Satz wird durch eine auf der Hand liegende *reductio ad absurdum* bewiesen. Denn angenommen, G sei nicht der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so sei H sein Schwerpunkt.



Post. 5 fordert, daß g, H in Bezug auf die Dreiecke ähnlich gelegen sein sollen; und das führt sofort zu dem Widerspruche, daß die Winkel HAB, GAB gleich sein müßten.

Satz 12.

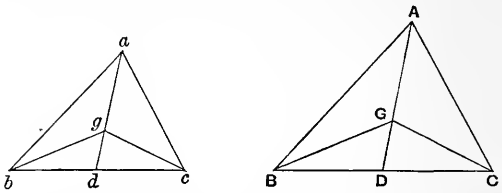
Sind zwei ähnliche Dreiecke abc, ABC gegeben, sind d, D die Mittelpunkte von bc, BC und liegt der Schwerpunkt von abc auf ad, so liegt der von ABC auf AD.

Es sei g der Punkt auf ad, der der Schwerpunkt von abc ist.

Dann wähle man G auf AD gemäß der Proportion

$$ad : ag = AD : AG$$

und ziehe die Verbindungslinien gb, gc, GB, GC.



Da die Dreiecke ähnlich und bd, BD die Hälften von bc bzw. BC sind, so folgt

$$ab : bd = AB : BD,$$

und die Winkel abd, ABD sind gleich.

Folglich sind die Dreiecke abd, ABD ähnlich und

$$\sphericalangle bad = \sphericalangle BAD.$$

Ferner folgt

$$ba : ad = BA : AD,$$

während wir nach dem Obigen haben

$$ad : ag = AD : AG.$$

Es ergibt sich also

$$ba : ag = BA : AG,$$

während die Winkel bag, BAG gleich sind. Demnach sind die Dreiecke bag, BAG ähnlich und

$$\sphericalangle abg = \sphericalangle ABG.$$

Da die Winkel abd, ABD auch gleich sind, so folgt

$$\sphericalangle gbd = \sphericalangle GBD.$$

Genau ebenso beweisen wir

$$\sphericalangle gac = \sphericalangle GAC,$$
$$\sphericalangle acg = \sphericalangle ACG,$$
$$\sphericalangle gcd = \sphericalangle GCD.$$

Somit sind g, G in Bezug auf die beiden Dreiecke ähnlich gelegen; folglich [Satz 11] ist G der Schwerpunkt von ABC.

Satz 13.

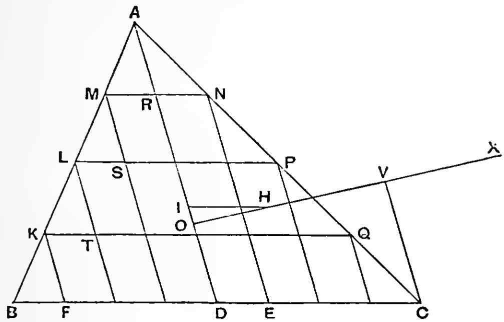
In jedem Dreieck liegt der Schwerpunkt auf der geraden Linie, die irgend einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet.

Es sei ABC ein Dreieck und D der Mittelpunkt von BC. Man ziehe AD. Dann soll der Schwerpunkt auf AD liegen.

Wenn möglich, sei das nicht der Fall, und H sei der Schwerpunkt. Man ziehe HJ parallel zu CB, wo J der Schnittpunkt mit AD ist.

Indem wir DC halbieren, dann die Hälften halbieren und so fort, werden wir schließlich zu einer Strecke, etwa DE, kommen, die kleiner als HJ ist. Wir teilen BD und DC in Abschnitte, die sämtlich gleich DE sind, und ziehen durch die Teilpunkte die Parallelen zu AD, die BA und AC in den Punkten K, L, M bzw. N, P, Q treffen.

Wir ziehen die Verbindungslinien MN, LP, KQ, die alle zu BC parallel sind.



Wir haben nun eine Reihe von Parallelogrammen FQ, TP, SN, und in allen halbiert AD Gegenseiten. Somit liegt der Schwerpunkt jedes Parallelogramms auf AD [Satz 9] und daher auch der Schwerpunkt der aus ihnen allen zusammengesetzten Figur.

Der Schwerpunkt dieser Figur sei O. Man ziehe die Verbindungslinie OH und verlängere sie. Ferner ziehe man CV parallel zu DA bis zum Schnittpunkte V mit der Verlängerung von OH.

Ist nun n die Anzahl der Teile, in die AC geteilt ist, so haben wir

$$\begin{aligned}\triangle ADC &: (\text{Summe der Dreiecke über } AN,\ NP, \ldots)\\ &= AC^2 : (AN^2 + NP^2 + \ldots)\\ &= n^2 : n\\ &= n : 1\\ &= AC : AN.\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$\triangle ABD : (\text{Summe der Dreiecke über } AM,\ ML, \ldots) = AB : AM.$$

Und es ist $\quad AC : AN = AB : AM.$

Es folgt

$$\triangle ABC : (\text{Summe aller kleinen Dreiecke}) = CA : AN > VO : OH, \text{ infolge}$$

der parallelen Geraden.

Es werde OV bis X so verlängert, daß

$$\triangle ABC : (\text{Summe aller kleinen Dreiecke}) = XO : OH$$

wird, woraus sich *dividendo* ergibt

$$(\text{Summe der Parallelogramme}) : (\text{Summe aller kleinen Dreiecke}) = XH : HO.$$

Da nun H der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist und O der Schwerpunkt des aus den Parallelogrammen gebildeten Teiles des Dreiecks, so folgt aus Satz 8, daß X der Schwerpunkt des aus allen den kleinen Dreiecken bestehenden Restes ist.

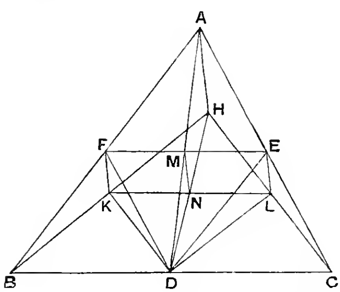
Aber das ist unmöglich, da alle Dreiecke auf einer Seite der durch X parallel zu AD gezogenen Geraden liegen.

Demnach kann der Schwerpunkt des Dreiecks nur auf AB liegen.

Anderer Beweis.

Wenn möglich, wollen wir annehmen, daß der nicht auf AD liegende Punkt H der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sei. Man ziehe AH, BH, CH. Es seien E, F bezüglich die Mittelpunkte von CA, AB; man ziehe die Verbindungslinien DE, EF, FD. EF schneide AD in M.

Man ziehe die zu AH parallelen Geraden FK, EL, die BH, CH bezüglich in K, L schneiden. Man ziehe die Verbindungslinien KD, HD, LD, KL. KL schneide DH in N, und N verbinde man mit M.



Da DE zu AB parallel ist, sind die Dreiecke ABC, EDC ähnlich. Und da $CE = EA$ und EL zu AH parallel ist, so folgt $CL = LH$. Ferner ist $CD = DB$. Folglich ist BH zu DL parallel.

Somit sind in den ähnlichen und ähnlich gelegenen Dreiecken ABC, EDC die Geraden AH, BH bezüglich parallel zu EL, DL; und es folgt, daß H, L mit Bezug auf die Dreiecke ähnlich gelegen sind.

Aber H ist nach der Annahme der Schwerpunkt von ABC. Demnach ist L der Schwerpunkt von EDC. [Satz 11]

Ebenso ist K der Schwerpunkt des Dreiecks FBD.

Nun sind die Dreiecke FBD, EDC gleich, so daß der Schwerpunkt der beiden zusammen der Mittelpunkt von KL, d. h. N ist.

Der nach Abzug der Dreiecke FBD, EDC verbleibende Rest des Dreiecks ABC ist das Parallelogramm $AFDE$, und der Schwerpunkt dieses Parallelogramms ist M, der Schnittpunkt seiner Diagonalen.

Es folgt, daß der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks ABC auf MN liegen muß; d. h. MN muß durch H gehen, was unmöglich ist (da MN zu AH parallel ist).

Somit kann der Schwerpunkt des Dreiecks ABC nur auf AD liegen.

Satz 14.

Aus dem vorangehenden Satze folgt sofort:

Der Schwerpunkt eines jeden Dreiecks ist der Schnittpunkt der von irgend zwei Ecken nach den Mittelpunkten der ihnen gegenüber liegenden Seiten gezogenen Geraden.

Satz 15.

Sind AD, BC die beiden parallelen Seiten eines Trapezes $ABCD$ (AD die kleinere) und sind E, F bezüglich die Mittelpunkte von AD, BC, so ist der Schwerpunkt des Trapezes der Punkt G auf EF, der folgende Bedingung erfüllt

$$GE : GF = (2\,BC + AD) : (2\,AD + BC).$$

Man verlängere BA, CD bis zu ihrem Schnittpunkte O. Dann geht die Verlängerung von FE auch durch O, da $AE = ED$ und $BF = FC$.

Nun liegt der Schwerpunkt des Dreiecks OAD auf OE und der des Dreiecks OBC auf OF. [Satz 13]

Es folgt, daß der Schwerpunkt des Restes, nämlich des Trapezes $ABCD$, auch auf OF liegt. [Satz 8]

Man ziehe die Verbindungslinie BD und teile sie in den Punkten L, M in drei gleiche Teile. Durch L, M ziehe man die zu BC parallelen Geraden PQ, RS die BA bezüglich in P, R, FE in W, V und CD in Q, S treffen.

Man ziehe DF, BE, die bezüglich PQ in H und RS in K schneiden.

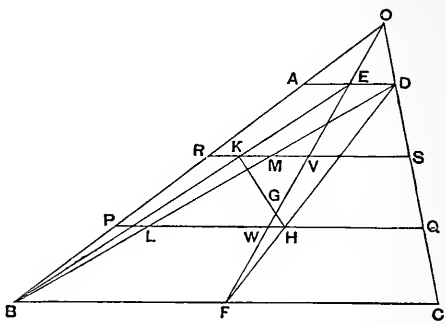
Da nun $BL = \frac{1}{3} BD$,

so folgt $FH = \frac{1}{3} FD$.

Demnach ist H der Schwerpunkt des Dreiecks DBC.[1])

Ähnlich folgt, da $EK = \frac{1}{3} BE$, daß K der Schwerpunkt des Dreiecks ADB ist.

Folglich liegt der Schwerpunkt der Dreiecke DBC, ADB zusammen, d. h. des Trapezes, auf der Strecke HK. Aber er liegt auch auf OF.



Schneiden sich also OF, HK in G, so ist G der Schwerpunkt des Trapezes.

Folglich haben wir [Sätze 6, 7]

$$\triangle DBC : \triangle ADB = KG : GH$$
$$= VG : GW.$$

Aber $\triangle DBC : \triangle ADB = BC : AD$.

Folglich $BC : AD = VG : GW$.

Daraus folgt

$$(2\,BC + AD) : (2\,AD + BC) = (2\,VG + GW) : (2\,GW + VG)$$
$$= EG : GF.$$

Q. E. D.

---

[1]) Diese leichte Folgerung aus Satz 14 wird von Archimedes ohne Beweis als richtig angenommen.

Über das Gleichgewicht von Ebenen.

Buch II.

Satz 1.

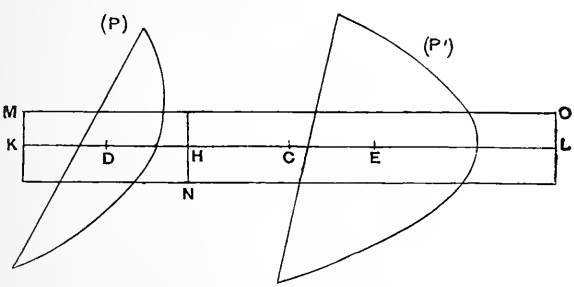
Sind P, P' zwei Parabelsegmente und D, E ihre Schwerpunkte, so ist der Schwerpunkt der beiden Segmente zusammengenommen der Punkt C auf DE, der bestimmt ist durch die Beziehung

$$P : P' = CE : CD.$$ [1]

Auf derselben Geraden mit DE messen wir EH, EL ab, beide gleich DC, und DK gleich DH, woraus sofort folgt, daß $DK = CE$ und $KC = CL$.

Wir legen an eine Grundlinie, die gleich KH ist, ein Rechteck MN an, das an Fläche dem Parabelsegment P gleich ist, und legen es so hin, daß KH es halbiert und zu seiner Grundlinie parallel ist.

Dann ist D der Schwerpunkt von MN, da $KD = DH$.



[1]) Dieser Satz ist in Wirklichkeit ein besonderer Fall der Sätze 6, 7 des ersten Buches und daher kaum notwendig. Da sich jedoch das Buch II ausschließlich mit Parabelsegmenten beschäftigt, so war es vielleicht Archimedes' Absicht, die Tatsache ausdrücklich hervorzuheben, daß die Größen in I. 6, 7 ebenso gut Parabelsegmente wie geradlinige Figuren sein können. Sein Verfahren besteht darin, daß er für die Segmente Rechtecke von gleicher Fläche einsetzt, eine Substitution, die durch die Ergebnisse seiner besonderen Abhandlung über die *Quadratur der Parabel* ermöglicht wird.

Wir verlängern die zu KH parallelen Seiten des Rechtecks und vervollständigen das Rechteck NO, dessen Grundlinie gleich HL ist. Dann ist E der Schwerpunkt des Rechtecks NO.

Nun gilt

$$\begin{aligned}(MN):(NO) &= KH:HL \\ &= DH:EH \\ &= CE:CD \\ &= P:P'.\end{aligned}$$

Aber $$(MN) = P,$$
folglich $$(NO) = P'.$$

Da nun C der Mittelpunkt von KL ist, so ist C der Schwerpunkt des ganzen Rechtecks, das aus den beiden Rechtecken (MN), (NO) zusammengesetzt ist, die bezüglich gleich P, P' sind und dieselben Schwerpunkte haben.

Folglich ist C der Schwerpunkt von P, P' zusammengenommen.

Definition und einleitende Hilfssätze zu Satz 2.

„Wird in ein von einer geraden Linie und einem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels [einer Parabel] begrenztes Segment ein Dreieck eingeschrieben, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat, werden in die übrigbleibenden Segmente wiederum Dreiecke eingeschrieben, die dieselben Grundlinien wie die Segmente und gleiche Höhen haben, und werden in die übrigbleibenden Segmente in derselben Weise Dreiecke eingeschrieben, so heiße die entstehende Figur dem Segment **in der bekannten Weise eingeschrieben** (*γνωρίμως ἐγγράφεσθαι*).

Und es gelten die Sätze,

(1) *daß die Verbindungslinie der beiden Ecken der so eingeschriebenen Figur, die dem Scheitel des Segments am nächsten liegen, und die Verbindungslinien der der Reihe nach folgenden Paare von Ecken zur Grundlinie des Segments parallel sind,*

(2) *daß die genannten Strecken von dem Durchmesser des Segments halbiert werden*, und

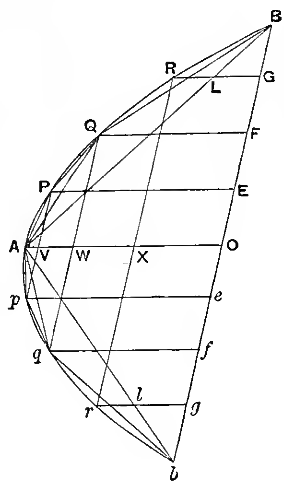
(3) *daß sie den Durchmesser nach der Proportion der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen teilen, wobei sich die Zahl eins auf den Scheitel des Segments [d. h. auf den an dem Scheitel liegenden Abschnitt] bezieht.*

Und diese Eigenschaften werden an ihrer Stelle (*ἐν ταῖς τάξεσιν*) zu beweisen sein.“

[Die letzten Worte drücken die Absicht aus, diese Sätze systematisch zu beweisen; aber diese Absicht ist offenbar nicht ausgeführt worden, oder wir haben wenigstens keine Nachricht von einem verlorenen Werke des Archimedes, in dem sie sich finden könnten. Die Ergebnisse können jedoch, wie folgt, leicht aus Sätzen abgeleitet werden, die in der *Quadratur der Parabel* enthalten sind.

(1) Es sei $BRQPApqrb$ eine „in der bekannten Weise“ dem Parabelsegment BAb eingeschriebene Figur, Bb die Grundlinie, A der Scheitel und AO der Durchmesser des Segments.

Man halbiere jede der Strecken BQ, BA, QA, Aq, Ab, qb und ziehe durch die Mittelpunkte die Parallelen zu AO, die Bb bezüglich in G, F, E, e, f, g treffen mögen.



Diese Geraden gehen dann durch die Scheitel R, Q, P, p, q, r der betreffenden Parabelsegmente [*Quadratur der Parabel*, Satz 18], d. h. durch die Ecken der eingeschriebenen Figur (da die Dreiecke und Segmente gleiche Höhe haben).

Ferner gilt $BG = GF = FE = EO$ und $Oe = ef = fg = gb$. Aber $BO = Ob$, und folglich sind alle Teile von Bb einander gleich.

Schneiden sich nun AB, RG in L und Ab, rg in l, so haben wir

$$\begin{aligned} BG : GL &= BO : OA \\ &= bO : OA \\ &= bg : gl, \end{aligned}$$

woraus folgt $\qquad GL = gl.$

Ferner gilt [*ebenda*, Satz 4]

$$\begin{aligned} GL : LR &= BO : OG \\ &= bO : Og \\ &= gl : lr; \end{aligned}$$

und da $GL = gl$, so folgt $LR = lr$.

Folglich sind GR, gr sowohl gleich als parallel.

Daher ist $GRrg$ ein Parallelogramm und Rr ist parallel zu Bb.

Ähnlich läßt sich zeigen, daß Qq, Pp zu Bb parallel sind.

(2) Da $RGgr$ ein Parallelogramm ist und RG, rg zu AO parallel sind, während $GO = Og$, so folgt, daß Rr von AO halbiert wird, und ähnlich für Qq, Pp.

(3) Sind schließlich V, W, X die Mittelpunkte von Pp, Qq, Rr, so gilt

$$AV : AW : AX : AO = PV^2 : QW^2 : RX^2 : BO^2$$
$$= 1 : 4 : 9 : 16,$$

woraus folgt $AV : VW : WX : XO = 1 : 3 : 5 : 7$.]

Satz 2.

Wird eine Figur „in der bekannten Weise“ einem Parabelsegment eingeschrieben, so liegt der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur auf dem Durchmesser des Segments.

Denn in der Figur der vorangehenden Hilfssätze muß der Schwerpunkt des Trapezes $BRrb$ auf XO liegen, der des Trapezes $RQqr$ auf WX, und so fort, während der Schwerpunkt des Dreiecks PAp auf AV liegt.

Daher liegt der Schwerpunkt der ganzen Figur auf AO.

Satz 3.

Sind BAB', bab' zwei ähnliche Parabelsegmente, deren Durchmesser bezüglich AO, ao sind, und wird jedem Segment „in der bekannten Weise“ eine Figur eingeschrieben und ist die Zahl der Seiten in beiden Figuren dieselbe, so teilen die Schwerpunkte der eingeschriebenen Figuren AO, ao in demselben Verhältnis.

[Archimedes spricht diesen Satz für *ähnliche* Segmente aus, aber er gilt ebenso auch für Segmente, die nicht ähnlich sind, wie der Verlauf des Beweises zeigen wird.]

Es seien $BRQPAP'Q'R'B'$, $brqpap'q'r'b'$ die beiden „in der bekannten Weise“ eingeschriebenen Figuren. Man ziehe die Verbindungslinien PP', QQ', RR', die AO in L, M, N treffen und pp', qq', rr', die ao in l, m, n treffen.

Dann gilt [Hilfssatz (3)]

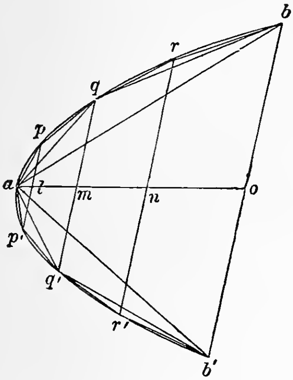
$$AL : LM : MN : NO$$
$$= 1 : 3 : 5 : 7$$
$$= al : lm : mn : no,$$

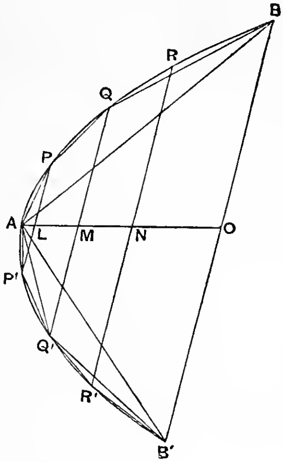
so daß AO, ao nach derselben Proportion geteilt werden.

Durch Umkehrung des Beweises für den Hilfssatz (3) erhalten wir ferner

$$PP' : pp' = QQ' : qq' = RR' : rr' = BB' : bb'.$$

Da somit $RR' : BB' = rr' : bb'$, und diese Verhältnisse bezüglich das Verhältnis bestimmen, in dem NO, no von den Schwerpunkten der Trapeze $BRR'B'$, $brr'b'$ [I. 15] geteilt werden, so folgt, daß die Schwerpunkte der Trapeze die Strecken NO, no in demselben Verhältnisse teilen.





Ebenso teilen die Schwerpunkte der Trapeze $RQQ'R'$, $rqq'r'$ die Strecken MN, mn bezüglich in demselben Verhältnis, und so fort.

Schließlich werden AL, al bezüglich von den Schwerpunkten der Dreiecke PAP', pap' in demselben Verhältnis geteilt.

Überdies haben die entsprechenden Trapeze und Dreiecke zueinander alle dasselbe Verhältnis (da ihre Seiten und Höhen bezüglich proportional sind), während AO, ao nach derselben Proportion geteilt sind.

Folglich teilen die Schwerpunkte der vollständigen eingeschriebenen Figuren die Strecken AO, ao in demselben Verhältnis.

Satz 4.

Der Schwerpunkt eines durch eine Gerade abgeschnittenen Parabelsegments liegt auf dem Durchmesser des Segments.

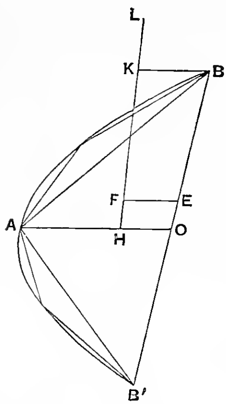
Es sei BAB' ein Parabelsegment, A sein Scheitel und AO sein Durchmesser.

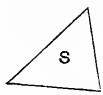
Liegt nun der Schwerpunkt des Segments nicht auf AO, so sei es, wenn möglich, der Punkt F. Durch F ziehen wir die Parallele zu AO, die BB' in E schneide.

Dem Segment schreiben wir das Dreieck ABB' ein, das denselben Scheitel und dieselbe Höhe wie das Segment hat, und nehmen eine Fläche S so an, daß die folgende Proportion gilt

$$\triangle ABB' : S = BE : EO.$$

Wir können dann „in der bekannten Weise“ in das Segment eine Figur einschreiben, so daß die übrigbleibenden Parabelsegmente zusammen kleiner als S sind. [Denn in Satz 20 der *Quadratur der Parabel* wird bewiesen, wenn in irgend ein Segment das Dreieck mit derselben Grundlinie und Höhe eingeschrieben wird, daß dann das Dreieck größer als die Hälfte des Segments ist; daraus geht hervor, daß wir jedesmal, wenn wir die Zahl der Seiten der „in der bekannten Weise“ eingeschriebenen Figur vergrößern, mehr als die Hälfte der vorher übriggebliebenen Segmente wegnehmen.]





In dieser Weise werde eine Figur eingeschrieben; ihr Schwerpunkt liegt dann auf AO [Satz 2]. Es sei der Punkt H.

Wir ziehen die Verbindungslinie HF und verlängern sie, bis sie die Parallele durch B zu AO in K schneidet.

Dann haben wir

$$\begin{aligned} &(\text{eingeschriebene Figur}) : (\text{Rest des Segments}) \\ &> \triangle ABB' : S \\ &> BE : EO \\ &> KF : FH. \end{aligned}$$

Es werde L auf der Verlängerung von HK so angenommen, daß das erste Verhältnis gleich dem Verhältnis $LF : FH$ ist.

Da nun H der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur und F der des Segments ist, muß L der Schwerpunkt aller der Segmente zusammen sein, die den Rest des ursprünglichen Segments bilden. [I. 8]

Aber das ist unmöglich, da alle diese Segmente auf einer Seite der Parallelen durch L zu AO liegen [Vgl. *Post.* 7].

Daher muß der Schwerpunkt des Segments auf AO liegen.

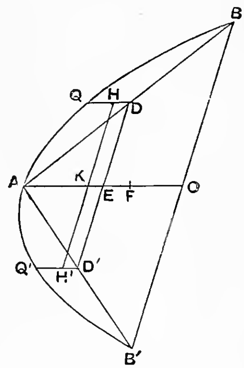
Satz 5.

Wird einem Parabelsegment eine Figur „in der bekannten Weise“ eingeschrieben, so liegt der Schwerpunkt des Segments näher an dem Scheitel des Segments als der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur.

Es sei BAB' das gegebene Segment, AO sein Durchmesser.

Zuerst sei das *Dreieck* ABB' die „in der bekannten Weise“ eingeschriebene Figur.

Man teile AO in F so, daß $AF = 2\,FO$ wird; F ist dann der Schwerpunkt des Dreiecks ABB'.



Man halbiere AB, AB' bezüglich in D, D' und ziehe die Verbindungslinie DD', die AO in E treffe. Wir ziehen DQ, $D'Q'$ parallel zu AO, bis sie die Kurve treffen. QD, $Q'D'$ sind dann die Durchmesser der Segmente, deren Grundlinien AB, AB' sind, und die Schwerpunkte dieser Segmente liegen bezüglich auf QD, $Q'D'$ [Satz 4]. Diese Schwerpunkte seien H, H'; die Verbindungslinie HH' schneide AO in K.

Nun sind QD, $Q'D'$ gleich[1]), und daher sind auch die Segmente gleich, deren Durchmesser sie sind [*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 3].

Ferner ist K der Mittelpunkt von HH', da QD, $Q'D'$ parallel sind[2]) und $DE = ED'$ ist.

Folglich ist K der Schwerpunkt der gleichen Segmente AQB, $AQ'B'$ zusammengenommen, und K liegt zwischen E und A. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABB' ist F.

---

[1]) Das läßt sich entweder aus dem obigen Hilfssatze (1) schließen (da QQ', DD' beide zu BB' parallel sind), oder aus Satz 19 der *Quadratur der Parabel*, auf Q und Q' zugleich angewandt.

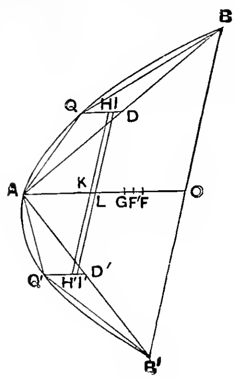
[2]) Offenbar findet sich hier eine Interpolation in dem Text, der die Worte enthält *καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΘΖΗΙ.* Es ist noch nicht bewiesen, daß $H'D'DH$ ein *Parallelogramm* ist; das kann nur aus der Tatsache gefolgert werden, daß H, H' die Strecken QD, $Q'D'$ bezüglich in demselben Verhältnis teilen. Aber diese letzte Eigenschaft erscheint erst in Satz 7 und ist dort nur für *ähnliche* Segmente ausgesprochen. Die Interpolation muß vor der Zeit des Eutocius geschehen sein, da er zu dem Satze eine Anmerkung macht und ihn einfach dadurch erklärt, daß er als bewiesen annimmt, daß H, H' die Strecken QD, $Q'D'$ bezüglich in demselben Verhältnis teilen.

Es folgt, daß der Schwerpunkt des ganzen Segments BAB' zwischen K und F liegt, und deshalb liegt er dem Scheitel A näher als der Punkt F.

Zweitens nehmen wir die „in der bekannten Weise“ eingeschriebene *fünfseitige* Figur $BQAQ'B'$, wobei QD, $Q'D'$ wie vorher die Durchmesser der Segmente AQB, $AQ'B'$ sein.

Dann liegt nach dem ersten Teile dieses Satzes der Schwerpunkt des Segments AQB (der offenbar auf QD liegt) näher an Q als der Schwerpunkt des Dreiecks AQB. Der Schwerpunkt des Segments sei H, der des Dreiecks J.

Ähnlich sei H' der Schwerpunkt des Segments $AQ'B'$ und J' der des Dreiecks $AQ'B'$.



Es folgt, daß K, der Mittelpunkt von HH', der Schwerpunkt der beiden Segmente AQB, $AQ'B'$ zusammengenommen ist, und L, der Mittelpunkt von JJ', der der beiden Dreiecke AQB, $AQ'B'$ zusammengenommen.

Ist nun F der Schwerpunkt des Dreiecks ABB', so ist der Schwerpunkt des ganzen Segments BAB' (d. h. der des Dreiecks ABB' und der beiden Segmente AQB, $AQ'B'$ zusammengenommen) der Punkt G auf KF, der definiert ist durch die Proportion

(Summe der Segmente AQB, $AQ'B'$): $\triangle ABB' = FG : GK$. [I. 6, 7]

Und der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur $BQAQ'B'$ ist der Punkt F' auf LF, der definiert ist durch die Proportion

$$(\triangle AQB + \triangle AQ'B') : \triangle ABB' = FF' : F'L. \qquad \text{[I. 6, 7]}$$

[Daraus folgt $\quad FG : GK > FF' : F'L$

oder $\quad GK : FG < F'L : FF'$

und *componendo* $\quad FK : FG < FL : FF'$,

während $\quad FK > FL$.]

Folglich ist $\quad FG > FF'$,

oder dem Scheitel A liegt G näher als F'.

Wenden wir dieses letzte Ergebnis an, so können wir, in derselben Weise fortschreitend, den Satz für *jede* „in der bekannten Weise“ eingeschriebene Figur beweisen.

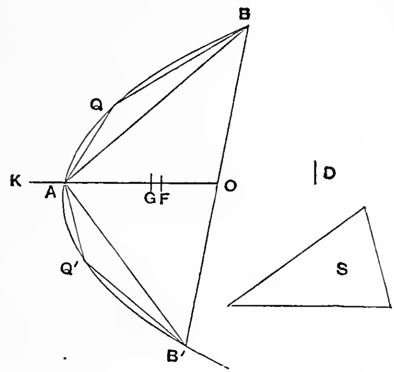
Satz 6.

Ist ein durch eine Gerade abgeschnittenes Parabelsegment gegeben, so ist es möglich, ihm „in der bekannten Weise“ eine Figur so einzuschreiben, daß der Abstand zwischen den Schwerpunkten des Segments und der eingeschriebenen Figur kleiner ist als irgend eine angegebene Länge.

Es sei BAB' das Segment, AO sein Durchmesser, G sein Schwerpunkt und ABB' das „in der bekannten Weise“ eingeschriebene Dreieck.

Es sei D die gegebene Länge und S eine Fläche, die der folgenden Proportion genügt

$$AG : D = \triangle ABB' : S.$$



In das Segment schreiben wir „in der bekannten Weise“ eine Figur ein, so daß die Summe der übrigbleibenden Segmente kleiner als S ist. Es sei F der Schwerpunkt der eingeschriebenen Figur.

Wir haben zu beweisen, daß $FG < D$.

Wenn nicht, müßte FG entweder gleich D oder größer als D sein.

Und es gilt offenbar

$$\begin{aligned}(\text{eingeschriebene Figur}) : (\text{Summe der übrigbleibenden Segmente}) &> \triangle ABB' : S \\ &> AG : D \\ &> AG : FG, \text{ nach Annähme (da } FG \geqq D).\end{aligned}$$

Das erste Verhältnis sei gleich dem Verhältnis $KG : FG$ (wo K auf der Verlängerung von GA liegt); und es folgt, daß K der Schwerpunkt der kleinen Segmente zusammengenommen ist. [I. 8]

Aber das ist unmöglich, da die Segmente alle auf derselben Seite der Parallelen durch K zu BB' liegen.

Daher muß FG kleiner als D sein.

Satz 7.

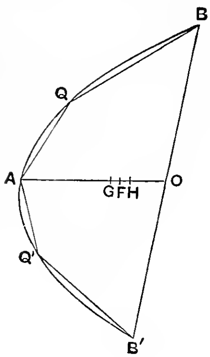
Sind zwei ähnliche Parabelsegmente gegeben, so teilen ihre Schwerpunkte ihre Durchmesser in demselben Verhältnis.

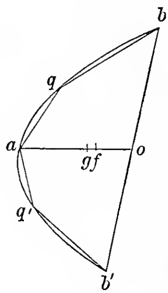
[Obwohl dieser Satz nur für *ähnliche* Segmente ausgesprochen wird wie der Satz 3, von dem er abhängt, so gilt er doch ebenso für *beliebige* Segmente. Diese Tatsache ist Archimedes nicht entgangen, denn er benutzt den Satz in seiner allgemeineren Form für den Beweis des unmittelbar folgenden Satzes 8.]

Es seien BAB', bab' die beiden ähnlichen Segmente, AO, ao ihre Durchmesser und G, g ihre Schwerpunkte.

Teilen nun G, g die Strecken AO, ao nicht bezüglich in demselben Verhältnis, so sei H der Punkt auf AO, der die folgende Proportion befriedigt

$$AH : HO = ag : go;$$





und es werde dem Segment BAB' „in der bekannten Weise" eine Figur so eingeschrieben, daß, wenn F ihr Schwerpunkt ist,

$$GF < GH. \quad \text{[Satz 6]}$$

Man schreibe dem Segment bab' „in der bekannten Weise" eine ähnliche Figur ein; ist f der Schwerpunkt dieser Figur, so gilt

$$ag < af. \quad \text{[Satz 5]}$$

Nach Satz 3 haben wir

$$af : fo = AF : FO.$$

Aber
$$AF : FO < AH : HO$$
$$< ag : go, \text{ nach Annahme.}$$

Folglich ergibt sich $af : fo < ag : go$, was unmöglich ist.

Es folgt, daß AO, ao von G, g in demselben Verhältnis geteilt werden müssen.

Satz 8.

Ist AO der Durchmesser eines Parabelsegments und G sein Schwerpunkt, so ist

$$AG = \tfrac{3}{2} GO.$$

Das Segment sei BAB'. Man schreibe das Dreieck ABB' „in der bekannten Weise" ein; F sei sein Schwerpunkt.

Man halbiere AB, AB' in D, D' und ziehe die Geraden DQ, $D'Q'$ parallel zu AO, bis sie die Kurve treffen, so daß QD, $Q'D'$ bezüglich die Durchmesser der Segmente AQB, $AQ'B'$ sind.

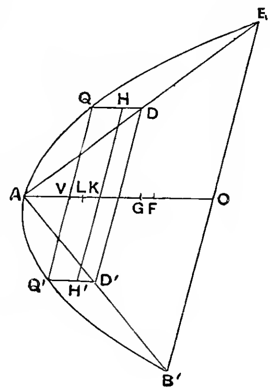
Es seien H, H' bezüglich die Schwerpunkte der Segmente AQB, $AQ'B'$. Man ziehe die Geraden QQ', HH', die AO in V, K treffen mögen.

K ist dann der Schwerpunkt der beiden Segmente AQB, $AQ'B'$ zusammengenommmen.

Nun gilt $AG:GO = QH:HD$, [Satz 7]

woraus folgt $AO:OG = QD:HD$.

Aber $AO = 4\,QD$ [wie sich leicht mittels des Hilfssatzes (3), S. 328, beweisen läßt].



Folglich haben wir

$$OG = 4\,HD,$$

und durch Subtraktion

$$AG = 4\,QH.$$

Ferner ist nach Hilfssatz (1) QQ' parallel zu BB' und damit zu DD'.

Es folgt aus Satz 7, daß HH' auch zu QQ' oder DD' parallel ist, und daraus

$$QH = VK.$$

Folglich ist

$$AG = 4\,VK$$

und $AV + KG = 3\,VK$.

Messen wir VL längs VK so ab, daß $VL = \frac{1}{3}AV$, so haben wir

$$KG = 3\,LK \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Andrerseits ist $AO = 4\,AV$ [Hilfssatz (3)]

$= 3\,AL$, da $AV = 3\,VL$,

woraus folgt $AL = \frac{1}{3}AO = OF \quad \ldots\ldots \quad (2).$

Nun gilt nach I. 6, 7

$$\triangle ABB' : (\text{Summe der Segmente } AQB,\ AQ'B') = KG : GF$$

und $\triangle ABB' = 3\,(\text{Summe der Segmente } AQB,\ AQ'B')$

[da das Segment ABB' gleich $\frac{4}{3}\triangle ABB'$ ist (*Quadratur der Parabel*, Sätze 17, 24)].

Folglich $KG = 3\,GF$.

Aber nach (1) ist $KG = 3\,LK$.

Folglich $LF = LK + KG + GF$

$= 5\,GF$.

Und nach (2) haben wir

$$LF = AO - AL - OF = \tfrac{1}{3}AO = OF.$$

Folglich $\qquad OF = 5\,GF$

und $\qquad OG = 6\,GF.$

Aber $\qquad AO = 3\,OF = 15\,GF.$

Somit erhalten wir durch Subtraktion

$$AG = 9\,GF$$
$$= \tfrac{3}{2}\,GO.$$

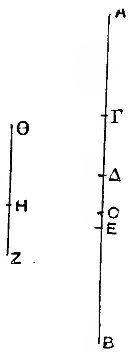
Satz 9 (Hilfssatz).

Sind a, b, c, d vier Strecken in stetiger Proportion und absteigender Größenordnung und gelten die Proportionen

$$d:(a-d) = x:\tfrac{3}{5}(a-c),$$
$$(2a+4b+6c+3d):(5a+10b+10c+5d) = y:(a-c),$$

so wird behauptet

$$x + y = \tfrac{2}{5}a.$$



[Das Folgende ist der von Archimedes angegebene Beweis mit dem einzigen Unterschiede, daß er in algebraischer, statt geometrischer Ausdrucksweise wiedergegeben ist. Das ist in diesem Einzelfalle einfach in der Absicht geschehen, den Beweis übersichtlicher zu machen. Archimedes stellt seine Strecken in der hier wiedergegebenen Figur dar; aber, da es möglich ist, algebraische Bezeichnungen zu verwenden, bietet es keinen Vorteil, die Figur mit ihren etwas schwerfälligen Benennungen zu benutzen, die den Gang des Beweises nur verdunkeln. Zwischen der Figur des Archimedes und den unten verwendeten Buchstaben bestehen die folgenden Beziehungen: $AB = a$, $\Gamma B = b$, $\Delta B = c$, $EB = d$, $ZH = x$, $H\Theta = y$, $\Delta O = z$.]

Wir haben
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

woraus folgt
$$\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} = \frac{c-d}{d}$$

und weiter
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b-c}{c-d} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Nun ist
$$\frac{2(a+b)}{2c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-d} = \frac{a-c}{c-d}$$

und ebenso
$$\frac{b+c}{d} = \frac{b+c}{c}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a-c}{c-d}.$$

Aus den beiden letzten Beziehungen folgt

$$\frac{a-c}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2c+d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Es werde z gemäß der folgenden Proportion gewählt

$$\frac{2a+4b+4c+2d}{2c+d}=\frac{a-c}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so daß

$$z<(c-d).$$

Folglich ist $\dfrac{a-c+z}{a-c}=\dfrac{2a+4b+6c+3d}{2(a+d)+4(b+c)}$.

Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a-c}{y}=\frac{5(a+d)+10(b+c)}{2a+4b+6c+3d},$$

so daß

$$\frac{a-c+z}{y}=\frac{5(a+d)+10(b+c)}{2(a+d)+4(b+c)}=\frac{5}{2} \quad . \quad . \quad (5).$$

Dividieren wir (3) durch (4) kreuzweise, so erhalten wir

$$\frac{z}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2(a+d)+4(b+c)},$$

woraus folgt

$$\frac{c-d-z}{c-d}=\frac{b+3c+2d}{2(a+d)+4(b+c)} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Aber nach (2) ist

$$\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}=\frac{3(b-c)}{3c}=\frac{2(c-d)}{2d},$$

so daß

$$\frac{c-d}{d}=\frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{b+3c+2d} \quad . \quad . \quad (7).$$

Durch Kombination von (6) und (7) ergibt sich

$$\frac{c-d-z}{d}=\frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{2(a+d)+4(b+c)}$$

und daraus

$$\frac{c-z}{d}=\frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Da [nach (1)]

$$\frac{c-d}{c+d}=\frac{b-c}{b+c}=\frac{a-b}{a+b},$$

so haben wir

$$\frac{c-d}{a-c}=\frac{c+d}{b+c+a+b},$$

woraus folgt

$$\frac{a-d}{a-c}=\frac{a+2b+2c+d}{a+2b+c}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{2(a+c)+4b} \quad . \quad (9).$$

Somit ist $$\frac{a-d}{\frac{3}{5}(a-c)}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}},$$

und daher nach der Voraussetzung

$$\frac{d}{x}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}.$$

Aber nach (8) ist

$$\frac{c-z}{d}=\frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)},$$

und es folgt *ex aequali*

$$\frac{c-z}{x}=\frac{3(a+c)+6b}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

Nach (5) ist $$\frac{a-c+z}{y}=\frac{5}{2}.$$

Folglich $$\frac{5}{2}=\frac{a}{x+y}$$

oder $$x+y=\tfrac{2}{5}a.$$

Satz 10.

Ist $PP'B'B$ der Teil einer Parabel, der von zwei parallelen Sehnen PP', BB' begrenzt wird, die in N, O von dem Durchmesser ANO halbiert werden (wo N näher als O an A, dem Scheitel des Segments, liegt), und wird NO in fünf gleiche Teile geteilt, von denen LM der mittlere ist (wo L näher an N liegt als M), so ist der Punkt G auf LM, der der folgenden Proportion

$$LG:GM=BO^2\cdot(2\,PN+BO):PN^2\cdot(2\,BO+PN)$$

genügt, der Schwerpunkt der Fläche $PP'B'B$.

Man zeichne eine Strecke ao gleich AO und trage auf ihr an gleich AN ab. p, q seien diejenigen Punkte auf ao, die durch die folgenden Proportionen bestimmt sind

$$ao:aq=aq:an \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$ao:an=aq:ap \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

[daraus folgt $ao:aq=aq:an=an:ap$, oder ao, aq, an, ap sind Strecken in stetiger Proportion und absteigender Größenordnung].

Man trage auf GA eine Strecke GF ab gemäß der Proportion

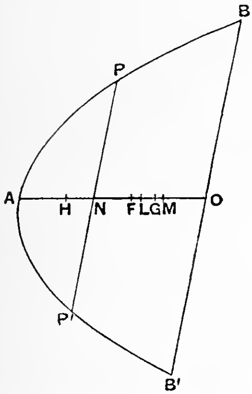
$$op:ap=\dot{O}L:GF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

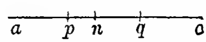
Da PN, OB zu ANO gehörige Ordinaten sind, so gilt

$$BO^2 : PN^2 = AO : AN$$
$$= ao : an$$
$$= ao^2 : aq^2, \text{ nach (1)},$$

so daß sich ergibt $\quad BO : PN = ao : aq \quad \ldots \ldots \quad (4)$

und $\quad BO^3 : PN^3 = ao^3 : aq^3$
$$= (ao : aq) \cdot (aq : an) \cdot (an : ap)$$
$$= ao : ap \quad \ldots \ldots \quad (5).$$





Somit haben wir

$$(\text{Segment } BAB') : (\text{Segment } PAP') = \triangle BAB' : \triangle PAP'$$
$$= BO^3 : PN^3$$
$$= ao : ap,$$

woraus folgt

$$(\text{Fläche } PP'B'B) : (\text{Segment } PAP') = op : ap = OL : GF, \text{ nach (3)},$$
$$= \tfrac{3}{5} ON : GF \quad \ldots \quad (6).$$

Nun ist $\quad BO^2 \cdot (2\,PN + BO) : BO^3 = (2\,PN + BO) : BO$
$$= (2\,aq + ao) : ao, \text{ nach (4)},$$
$$BO^3 : PN^3 = ao : ap, \text{ nach (5)},$$

und $\quad PN^3 : PN^2 \cdot (2\,BO + PN) = PN : (2\,BO + PN)$
$$= aq : (2\,ao + aq), \text{ nach (4)},$$
$$= ap : (2\,an + ap), \text{ nach (2)}.$$

Somit folgt *ex aequali*

$$BO^2 \cdot (2\,PN + BO) : PN^2 \cdot (2\,BO + PN) = (2\,aq + ao) : (2\,an + ap),$$

so daß sich nach der Voraussetzung ergibt

$$LG : GM = (2\,aq + ao) : (2\,an + ap).$$

Componendo und durch Multiplikation der Vorderglieder mit 5 erhalten wir

$$ON:GM = \{5(ao+ap)+10(aq+an)\}:(2an+ap).$$

Aber

$$ON:OM = 5:2$$
$$= \{5(ao+ap)+10(aq+an)\}:\{2(ao+ap)+4(aq+an)\}.$$

Es folgt

$$ON:OG = \{5(ao+ap)+10(aq+an)\}:(2ao+4aq+6an+3ap).$$

Folglich ist

$$(2ao+4aq+6an+3ap):\{5(ao+ap)+10(aq+an)\} = OG:ON$$
$$= OG:on.$$

Und $\qquad ap:(ao-ap) = ap:op$

$= GF:OL$, nach (3),

$= GF:\frac{3}{5}on$,

während ao, aq, an, ap sich in stetiger Proportion befinden.

Daher gilt nach Satz 9

$$GF+OG = OF = \tfrac{2}{5}ao = \tfrac{2}{5}OA.$$

Somit ist F der Schwerpunkt des Segments BAB'. [Satz 8]

H sei der Schwerpunkt des Segments PAP', also $AH = \frac{3}{5}AN$.

Da nun $\qquad AF = \frac{3}{5}AO$,

so erhalten wir durch Subtraktion

$$HF = \tfrac{3}{5}ON.$$

Aber nach der obigen Proportion (6) haben wir

$$(\text{Fläche } PP'B'B):(\text{Segment } PAP') = \tfrac{3}{5}ON:GF$$
$$= HF:FG.$$

Da nun F, H bezüglich die Schwerpunkte der Segmente BAB', PAP' sind, so folgt [nach I. 6, 7], daß G der Schwerpunkt der Fläche $PP'B'B$ ist.

Die Sandrechnung.

„Es gibt Leute, König Gelon, die der Meinung sind, die Zahl des Sandes sei unendlich groß; und ich meine mit dem Sande nicht nur den, der sich bei Syrakus und im übrigen Sizilien befindet, sondern auch den in allen möglichen bewohnten oder unbewohnten Gegenden. Andere gibt es, die ihn zwar nicht für unendlich halten, aber doch meinen, daß noch keine Zahl genannt worden sei, die seine Menge zu übertreffen imstande wäre. Und es ist klar, wenn die Anhänger dieser Meinung sich eine aus Sand bestehende Masse dächten, die der Erdmasse im übrigen gliche, und alle Meere und Vertiefungen der Erde bis zur Höhe der höchsten Berge mit Sand aufgefüllt, daß sie dann noch viel weniger einsehen würden, daß man eine die Menge dieses Sandes übertreffende Zahl angeben könne. Aber ich will Dir durch geometrische Beweise, denen Du folgen kannst, zu zeigen suchen, daß unter den von mir benannten und in dem an Zeuxippus gesandten Werke angegebenen Zahlen einige nicht nur größer sind als die Zahl der Sandmasse, die der in der beschriebenen Weise vollgefüllten Erde an Größe gleich ist, sondern auch als die einer Masse, die an Größe dem Weltall gleich ist. Nun weißt Du, daß die meisten Astronomen mit „Weltall“ die Kugel bezeichnen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde und deren Radius die Strecke zwischen dem Mittelpunkte der Sonne und dem Mittelpunkte der Erde ist. Das hast Du aus den von den Astronomen geschriebenen Darlegungen gelernt. Aristarch von Samos hat nun ein aus gewissen Hypothesen bestehendes Buch herausgegeben, in dem die Annahmen zu dem Ergebnis führen, daß das Weltall vielemal so groß ist wie das, was ich eben so genannt habe. Er setzt voraus, daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, daß die Erde sich in einer Kreislinie um die Sonne bewege, die im Mittelpunkte der Bahn liege, und daß die Kugel der Fixsterne, um denselben Mittelpunkt wie die Sonne gelegen, so groß sei, daß der Kreis, den er sich von der Erde durchlaufen denkt, sich zu der Entfernung der Fixsterne verhält wie der Mittelpunkt der Kugel zu ihrer Oberfläche. Nun ist leicht zu sehen, daß das nicht möglich ist; denn da der Mittelpunkt der Kugel keine Größe hat, können wir nicht sagen, daß er zu der Oberfläche der Kugel irgend ein Verhältnis habe. Wir müssen jedoch annehmen, daß Aristarch folgendes meint: da wir uns die Erde gewissermaßen als Mittelpunkt des Weltalls denken, ist das Verhältnis der Erde zu dem, was wir „Weltall" nennen, dasselbe wie das Verhältnis der Kugel, die den Kreis enthält, den er sich von der Erde durchlaufen denkt, zu der Kugel der Fixsterne. Denn die Beweise seiner Ergebnisse paßt er einer solchen Voraussetzung an und insbesondere scheint er vorauszusetzen, daß die Größe der Kugel, auf der er die Erde sich bewegend denkt, dem gleich sei, was wir das „Weltall" nennen.

Ich behaupte nun, selbst wenn eine Kugel aus Sand hergestellt würde, so groß wie sich Aristarch die Kugel der Fixsterne denkt, so kann ich auch dann noch beweisen, daß von den in den *Grundzügen*[2]) benannten Zahlen einige die Zahl des Sandes übertreffen, der der genannten Kugel an Größe gleich ist, wenn folgende Annahmen zugrunde gelegt werden.

1. *Der Umfang der Erde ist etwa* 3 000 000 *Stadien lang und nicht größer.*

Zwar haben einige, wie Du ja weißt, zu beweisen versucht, daß der genannte Umfang etwa 300 000 Stadien betrage. Aber ich gehe weiter, und indem ich die Größe der Erde zehnmal so groß ansetze, als sie meine Vorgänger schätzten, nehme ich an, daß ihr Umfang etwa 3 000 000 Stadien und nicht mehr beträgt.

2. *Der Durchmesser der Erde ist größer als der Durchmesser des Mondes und der Durchmesser der Sonne größer als der Durchmesser der Erde.*

In dieser Annahme stimme ich mit den meisten der früheren Astronomen überein.

3. *Der Durchmesser der Sonne ist etwa* 30 *mal so groß wie der Durchmesser des Mondes und nicht größer.*

Zwar hat von den früheren Astronomen Eudoxus ihn für etwa 9 mal so groß erklärt und mein Vater[1]) Phidias für 12 mal

---

[1]) *Ἀρχαί* war anscheinend der Titel des an Zeuxippus gesandten Werkes. Vgl. die Anmerkung zu der Aufzählung der verlorenen Werke des Archimedes in der Einleitung, Kapitel II, am Ende.

[2]) *τοῦ ἁμοῦ πατρὸς* ist die Verbesserung von Blass für *τοῦ Ἀκούπατρος* (*Jahrb. f. Philol.* CXXVII. 1883, S. 382).

so groß, während Aristarch zu beweisen versucht hat, daß der Durchmesser der Sonne größer als das 18fache, aber kleiner als das 20fache des Monddurchmessers ist. Ich greife jedoch, um ganz sicher zu gehen, noch höher als Aristarch und nehme den Durchmesser der Sonne etwa 30mal so groß wie den des Mondes und nicht größer an.

4. *Der Durchmesser der Sonne ist größer als die Seite des dem größten Kreise (auf der Kugel) des Weltalls eingeschriebenen Tausendecks.*

Ich mache diese Annahme[1]), weil Aristarch gefunden hat, daß die Sonne etwa $\frac{1}{720}$ des Tierkreises zu sein scheint, und ich selbst nach einer Methode, die ich sogleich beschreiben will, experimentell (*ὀργανικῶς*) den Winkel zu finden versucht habe, unter dem die Sonne dem Auge erscheint (*τὰν γωνίαν, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει*)."

[Bis zu dieser Stelle ist die Abhandlung wörtlich übersetzt, weil die *ipsissima verba* des Archimedes über einen derartigen Gegenstand historisch interessant sind. Der Rest des Werkes kann nun freier wiedergegeben werden, und, bevor wir zu seinem mathematischen Inhalt übergehen, ist nur noch zu bemerken nötig, daß Archimedes zunächst beschreibt, wie er zu einer oberen und unteren Grenze für den Sehwinkel der Sonne gekommen ist. Dazu nimmt er einen langen Stab oder ein Lineal (*κανών*), befestigt an seinem Ende einen kleinen Zylinder oder eine Scheibe, bringt den Stab in die Richtung der Sonne gleich nach ihrem Aufgange (so daß es möglich ist, direkt nach ihr hinzusehen), bringt dann den Zylinder in solche Entfernung, daß er die Sonne genau verdeckt, und mißt schließlich den Sehwinkel des Zylinders. Er setzt auch die Korrektion auseinander, die er für nötig hält, „weil das Auge nicht von einem Punkte, sondern von einer gewissen Fläche aus sieht" (*ἐπεὶ αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος*).]

Der Versuch ergab, daß der Sehwinkel des Sonnendurchmessers kleiner als $\frac{1}{164}$ und größer als $\frac{1}{200}$ eines rechten Winkels ist.

Es ist zu beweisen, daß (auf Grund dieser Annahme) der Durchmesser der Sonne größer ist als die Seite eines einem größten Kreise des „Weltalls" eingeschriebenen gleichseitigen Tausendecks.

Die Ebene des Papiers sei die Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne, den Mittelpunkt der Erde und das Auge, nachdem

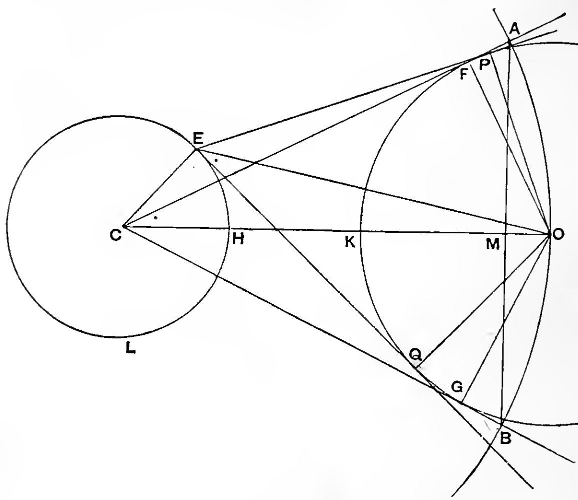
---

[1]) Das ist streng genommen keine Annahme, sondern ein später (SS. 345—348) auf Grund eines sogleich zu beschreibenden Versuches bewiesener Satz.

sich die Sonne gerade über den Horizont erhoben hat. Die Ebene schneide die Erde in dem Kreise EHL und die Sonne in dem Kreise FKG, die Mittelpunkte der Erde und Sonne seien bezüglich C, O, und E sei der Ort des Auges.

Ferner schneide die Ebene die Kugel des „Weltalls“ (d. h. die Kugel mit dem Mittelpunkte C und dem Radius CO) in dem größten Kreise AOB.

Von E aus legen wir die beiden Tangenten an den Kreis FKG, die in P, Q berühren, und von C aus die beiden Tangenten an denselben Kreis, die in F, G berühren.



CO treffe die Schnitte der Erde und Sonne bezüglich in H, K; und CF, CG mögen verlängert den größten Kreis AOB in A, B treffen.

Wir ziehen die Geraden EO, OF, OG, OP, OQ, AB und bezeichnen den Schnittpunkt von AB und CO mit M.

Nun ist $CO > EO$, da die Sonne gerade über dem Horizont steht.

Folglich $\sphericalangle PEQ > \sphericalangle FCG$.

Und es ist $\left.\begin{array}{l}\sphericalangle PEQ > \frac{1}{200} R \\ < \frac{1}{164} R\end{array}\right\}$ wo R einen rechten Winkel
aber bedeutet.

Somit ist *a fortiori* $\sphericalangle FCG < \frac{1}{164} R$,

und zu der Sehne AB gehört ein Bogen des größten Kreises, der kleiner als $\frac{1}{656}$ des Umfanges dieses Kreises ist, d. h.

$AB <$ (Seite des dem Kreise eingeschriebenen 656-Ecks).

Nun ist der Umfang jedes dem größten Kreise eingeschriebenen Vielecks kleiner als $\frac{44}{7} CO$. [Vgl. *Kreismessung*, Satz 3.]

Folglich $\qquad AB : CO < 11 : 1148$

und *a fortiori* $\qquad AB < \frac{1}{100} CO \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$

Da ferner $CA = CO$ und AM auf CO senkrecht steht, während OF auf CA senkrecht steht, so folgt

$$AM = OF.$$

Folglich ist $AB = 2\,AM =$ (Durchmesser der Sonne).

Somit ist (Durchmesser der Sonne) $< \frac{1}{100} CO$, nach (α), und *a fortiori*

(Durchmesser der Erde) $< \frac{1}{100} CO$. $\qquad$ [Annahme 2]

Demnach haben wir

$$CH + OK < \tfrac{1}{100} CO,$$

so daß $\qquad HK > \frac{99}{100} CO$

oder $\qquad CO : HK < 100 : 99.$

Ferner ist $\qquad CO > CF,$

während $\qquad HK < EQ.$

Folglich $\qquad CF : EQ < 100 : 99 \quad \ldots\ldots \quad (\beta).$

Nun gilt von den Katheten der rechtwinkligen Dreiecke CFO, EQO

$$OF = OQ, \text{ aber } EQ < CF \text{ (da } EO < CO).$$

Daraus folgt $\qquad \sphericalangle OEQ : \sphericalangle OCF > CO : EO,$

aber $\qquad\qquad < CF : EQ.$[1])

Verdoppeln wir die Winkel, so folgt

$$\sphericalangle PEQ : \sphericalangle ACB < CF : EQ$$
$$< 100 : 99, \text{ nach } (\beta).$$

Aber nach der Annahme ist

$$\sphericalangle PEQ > \tfrac{1}{200} R.$$

Demnach ist $\qquad \sphericalangle ACB > \frac{99}{20\,000} R$

$$> \tfrac{1}{203} R.$$

Es folgt, daß der Bogen AB größer als $\frac{1}{812}$ des Umfanges des größten Kreises AOB ist.

---

[1]) Der hier benutzte Satz ist offenbar gleichwertig mit der trigonometrischen Formel

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

wo α, β die Maßzahlen von zwei spitzen Winkeln sind und α größer als β ist.

Folglich ist *a fortiori*

$AB >$ (Seite des dem größten Kreise eingeschriebenen Tausendecks), und AB ist gleich dem Sonnendurchmesser, wie oben bewiesen.

Nun lassen sich folgende Beziehungen nachweisen:

(Durchmesser des „Weltalls“) $<$ 10000 *(Durchmesser der Erde)*

und *(Durchmesser des „Weltalls“)* $<$ 10000000000 *Stadien.*

(1) Der Kürze halber werde der Durchmesser des „Weltalls“ mit d_w, der der Sonne mit d_s, der der Erde mit d_e und der des Mondes mit d_m bezeichnet.

Es ist vorausgesetzt $d_s \leqq 30\,d_m$ [Annahme 3]

und $d_e > d_m$; [Annahme 2]

folglich $d_s < 30\,d_e$.

Nun ist nach dem letzten Satze

$d_s >$ (Seite eines dem größten Kreise eingeschriebenen Tausendecks),

so daß (Umfang des Tausendecks) $< 1000\,d_s$

$< 30000\,d_e$.

Aber der Umfang jedes einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks mit mehr als 6 Seiten ist größer als der des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und damit größer als der dreifache Durchmesser. Demnach ist

(Umfang des Tausendecks) $> 3\,d_w$.

Es folgt $d_w < 10000\,d_e$.

(2) (Umfang der Erde) $\leqq$ 3000000 Stadien [Annahme 1]

und (Umfang der Erde) $> 3\,d_e$.

Folglich $d_e <$ 1000000 Stadien,

woraus weiter folgt

$d_w <$ 10000000000 Stadien.

Annahme 5.

Es werde eine Menge Sandes genommen, die nicht größer ist als ein Mohnkorn; sie enthalte nicht mehr als 10000 Sandkörner.

Ferner sei der Durchmesser des Mohnkorns nicht kleiner als $\frac{1}{40}$ einer Fingerbreite.

Ordnungen und Perioden von Zahlen.

I. Wir besitzen herkömmliche Namen für die Zahlen bis zu einer Myriade (10000); demnach können wir Zahlen bis zu einer

Myriade Myriaden (100000000) ausdrücken. Diese Zahlen wollen wir als Zahlen der *ersten Ordnung* bezeichnen.

Es sei 100000000 die Einheit der *zweiten Ordnung*, und diese zweite Ordnung bestehe aus den Zahlen von dieser Einheit bis zu $(100000000)^2$.

Das sei wieder die Einheit der *dritten Ordnung*, die mit $(100000000)^3$ aufhöre, und so fort, bis wir zur 100000000*ten Ordnung* kommen, die mit $(100000000)^{100000000}$ aufhört, wofür wir P schreiben wollen.

II. Die eben beschriebenen Zahlen von 1 bis P mögen die *erste Periode* bilden.

P sei die Einheit der *ersten Ordnung der zweiten Periode*, die aus den Zahlen von P bis 100000000 P bestehe.

Die letzte Zahl sei die Einheit der *zweiten Ordnung der zweiten Periode*, und diese reiche bis $(100000000)^2 P$.

Wir können auf diesem Wege weiter gehen, bis wir zur 100000000*ten Ordnung der zweiten Periode* kommen, die mit $(100000000)^{100000000} P$ oder P^2 aufhört.

III. Wir nehmen P^2 zur Einheit der *ersten Ordnung der dritten Periode* und fahren in derselben Weise fort, bis wir zur 100000000*ten Ordnung der dritten Periode* kommen, die mit P^3 aufhört.

IV. Wir machen P^3 zur Einheit der *ersten Ordnung der vierten Periode* und setzen das Verfahren fort, bis wir zur 100000000*ten Ordnung der* 100000000*ten Periode kommen*, die mit $P^{100000000}$ aufhört. Diese letzte Zahl wird von Archimedes bezeichnet als „eine Myriaden-Myriade Einheiten der myriad-myriadsten Ordnung der myriad-myriadsten Periode (*αἱ μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες*),“ was offenbar bedeutet 100000000 mal das Produkt aus $(100000000)^{99999999}$ und $P^{99999999}$, d. h. $P^{100000000}$.

[Das soeben beschriebene Zahlenschema läßt sich mit Hilfe von Exponenten in folgender Weise klarer darstellen.

Erste Periode.

Erste Ordnung.	Zahlen von	1 bis 10^8.
Zweite Ordnung.	„ „	10^8 bis 10^{16}.
Dritte Ordnung.	„ „	10^{16} bis 10^{24}.
⋮		
(10^8)*te Ordnung.*	„ „	$10^{8\cdot(10^8-1)}$ bis $10^{8\cdot 10^8} (= P)$.

Zweite Periode.

Erste Ordnung. Zahlen von $P \cdot 1$ bis $P \cdot 10^8$.

Zweite Ordnung. „ „ $P \cdot 10^8$ bis $P \cdot 10^{16}$.

(10^8)*te Ordnung.* „ „ $P \cdot 10^{8 \cdot (10^8 - 1)}$ bis
$P \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$ (oder P^2).

(10^8)*te Periode.*

Erste Ordnung. „ „ $P^{10^8-1} \cdot 1$ bis $P^{10^8-1} \cdot 10^8$.

Zweite Ordnung. „ „ $P^{10^8-1} \cdot 10^8$ bis $P^{10^8-1} \cdot 10^{16}$.

(10^8) *te Ordnung.* „ „ $P^{10^8-1} \cdot 10^{8 \cdot (10^8-1)}$ bis
$P^{10^8-1} \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$ (oder P^{10^8}).

Die ungeheuere Ausdehnung dieses Schemas läßt sich ermessen, wenn man beachtet, daß die letzte Zahl der *ersten Periode* heute durch eine 1 mit 800000000 Nullen dargestellt werden würde, während die letzte Zahl der (10^8) *ten Periode* 100000000 mal so viel Nullen erfordern würde, d. h. 80000 Millionen Millionen.]

Oktaden.

Wir betrachten die Reihe von Gliedern in stetiger Proportion, von denen das erste 1 und das zweite 10 ist [d. h. die geometrische Reihe 1, 10^1, 10^2, 10^3 . . .]. Die *erste Oktade* dieser Glieder [d. h. 1, 10^1, 10^2, . . . 10^7] fällt demnach unter die oben beschriebene *erste Ordnung der ersten Periode*, die *zweite Oktade* [d. h. 10^8, 10^9, . . . 10^{15}] unter die *zweite Ordnung der ersten Periode*, da in jedem Falle das erste Glied der Oktade die Einheit der entsprechenden Ordnung ist. Ähnlich für die *dritte Oktade* und so fort. Wir können in derselben Weise beliebig viele Oktaden aufstellen.

Satz.

Ist eine Reihe von Gliedern in stetiger Proportion gegeben, etwa A_1, A_2, A_3, . . . A_m, . . . A_n, . . . A_{m+n-1}, . . ., *wovon* $A_1 = 1$, $A_2 = 10$ [so daß die Reihe die geometrische Progression 1, 10^1, 10^2, . . . 10^{m-1}, . . . 10^{n-1}, . . . 10^{m+n-2} . . . bildet], *und werden irgend zwei Glieder, etwa* A_m, A_n, *miteinander multipliziert, so ist das Produkt* $A_m \cdot A_n$ *ein Glied derselben Reihe und um ebenso viele Glieder von* A_n *entfernt wie* A_m *von* A_1; *und von* A_1 *ist es um eine Anzahl von Gliedern entfernt, die um eins kleiner ist als die Summe der Gliederzahlen, um die* A_m *und* A_n *bezüglich von* A_1 *entfernt sind.*

Wir denken uns das Glied, das von A_n um ebensoviel Glieder entfernt ist wie A_m von A_1. Diese Gliederanzahl ist m (wenn man das erste und letzte mitrechnet). Das gedachte Glied ist also m Glieder von A_n entfernt und ist daher das Glied A_{m+n-1}.

Wir haben somit zu beweisen

$$A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}.$$

Nun sind Glieder, die von anderen Gliedern in der stetigen Proportion gleich weit abstehen, proportional.

Also gilt

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_n}.$$

Aber $\qquad A_m = A_m \cdot A_1, \quad \text{da } A_1 = 1.$

Folglich ist $\qquad A_m \cdot A_n = A_{m+n-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$

Der zweite Teil des Satzes ist jetzt klar, da A_m um m Glieder von A_1 entfernt ist, A_n um n Glieder und A_{m+n-1} um $(m+n-1)$ Glieder.

Anwendung auf die Zahl des Sandes.

Nach der Annahme 5 [S. 348] ist

$$(\text{Durchmesser eines Mohnkorns}) \geqq \tfrac{1}{40}\,(\text{Fingerbreite});$$

und, da Kugeln sich wie die Kuben ihrer Durchmesser verhalten, so folgt

$$\begin{aligned}
&(\text{Kugel mit dem Durchmesser 1 Fingerbreite})\\
&\leqq 64\,000 \text{ Mohnkörner}\\
&\left.\begin{aligned}
&\leqq 64\,000 \times 10\,000\\
&\leqq 640\,000\,000\\
&\leqq 6 \text{ Einheiten der } \textit{zweiten Ordnung}\\
&\quad + 40\,000\,000 \text{ Einheiten der } \textit{ersten Ordnung}\\
(\textit{a fortiori}) &< 10 \text{ Einheiten der } \textit{zweiten Ordnung}.
\end{aligned}\right\}\text{Sandkörner.}
\end{aligned}$$

Wir vergrößern nun schrittweise den Durchmesser der gedachten Kugel, indem wir ihn jedesmal mit 100 multiplizieren. Indem wir berücksichtigen, daß die Kugel dadurch mit 100^3 oder 1 000 000 multipliziert wird, erhalten wir folgendermaßen die Zahlen der Sandkörner, die in den einzelnen Kugeln mit den aufeinanderfolgenden Durchmessern enthalten sind.

Kugel-Durchmesser	*Entsprechende Zahl der Sandkörner.*
(1) 100 Fingerbreiten	$<$ 1 000 000 $\times$ 10 Einheiten d. *zweiten Ordnung* $<$ (7 tes Glied d. Reihe) $\times$ (10 tes Glied d. Reihe) $<$ 16 tes Glied der Reihe [d. h. 10^{15}] $<$ [10^7 oder] 10 000 000 Einheiten der *zweiten Ordnung.*
(2) 10 000 Fingerbreiten	$<$ 1 000 000 $\times$ (letzte Zahl) $<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (16 tes Glied) $<$ 22 tes Glied der Reihe [d. h. 10^{21}] $<$ [10^5 oder] 100 000 Einheiten der *dritten Ordnung.*
(3) 1 Stadion ($<$ 10 000 Fingerbreiten)	$<$ 100 000 Einheiten der *dritten Ordnung.*
(4) 100 Stadien	$<$ 1 000 000 $\times$ (letzte Zahl) $<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (22 tes Glied) $<$ 28 tes Glied der Reihe [10^{27}] $<$ [10^3 oder] 1000 Einheiten der *vierten Ordnung.*
(5) 10 000 Stadien	$<$ 1 000 000 $\times$ (letzte Zahl) $<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (28 tes Glied) $<$ 34 tes Glied der Reihe [10^{33}] $<$ 10 Einheiten der *fünften Ordnung.*
(6) 1 000 000 Stadien	$<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (34 tes Glied) $<$ 40 tes Glied [10^{39}] $<$ [10^7 oder] 10 000 000 Einheiten der *fünften Ordnung.*
(7) 100 000 000 Stadien	$<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (40 tes Glied) $<$ 46 tes Glied [10^{45}] $<$ [10^5 oder] 100 000 Einheiten der *sechsten Ordnung.*
(8) 10 000 000 000 Stadien	$<$ (7 tes Glied der Reihe) $\times$ (46 tes Glied) $<$ 52 tes Glied [10^{51}] $<$ [10^3 oder] 1000 Einheiten der *siebenten Ordnung.*

Aber nach dem obigen Satze [S. 348] ist

(Durchmesser des „Weltalls") $<$ 10 000 000 000 Stadien.

Somit ist die Zahl der Sandkörner, die in einer Kugel von der Größe unseres „Weltalls" enthalten wäre, kleiner als 1000 *Einheiten der siebenten Zahlenordnung* [oder 10^{51}].

Daraus können wir weiter schließen, daß *eine Kugel von der Größe, die Aristarch der Kugel der Fixsterne zuschreibt, eine Anzahl von Sandkörnern enthalten würde, die kleiner ist als* 10 000 000 *Einheiten der achten Zahlenordnung* [oder $10^{56+7} = 10^{63}$].

Denn nach der Annahme haben wir

(Erde) : („Weltall") = („Weltall") : (Kugel der Fixsterne).

Und [S. 348]

(Durchmesser des „Weltalls“) $<$ 10000 (Durchmesser der Erde);

daraus folgt

(Durchm. der Kugel der Fixsterne) $<$ 10000 (Durchm. des „Weltalls“).

Folglich ist

(Kugel der Fixsterne) $< (10000)^3 \cdot$ („Weltall“).

Es folgt, daß die Zahl der Sandkörner, die in einer Kugel von der Größe der Kugel der Fixsterne enthalten wäre, sein müßte

$< (10000)^3 \times 1000$ Einheiten der *siebenten Ordnung*

$<$ (13tes Glied der Reihe) $\times$ (52tes Glied)

$<$ 64tes Glied der Reihe [10^{63}]

$<$ [10^7 oder] 10000000 Einheiten der *achten Ordnung.*

Schluß.

„Ich vermute, König Gelon, daß diese Dinge der großen Menge von Leuten, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben, unglaublich erscheinen, denen aber, die etwas davon verstehen und die Erörterung der Entfernungen und Größen der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls verfolgt haben, auf Grund des Beweises einleuchten werden. Und aus diesem Grunde fand ich den Gegenstand Deiner Beachtung nicht unwürdig.“

Quadratur der Parabel.

„Archimedes grüßt Dositheus.

Als ich gehört hatte, daß Konon, der zu seinen Lebzeiten mein Freund gewesen war, gestorben sei, und daß auch Du ihm nahe gestanden habest und überdies auch der Geometrie kundig seist, da war ich traurig über den Verlust nicht nur eines Freundes, sondern auch eines bewundernswerten Mathematikers, nahm mir aber vor, Dir in einem Briefe, wie ich ihn Konon zu schicken beabsichtigt hatte, einen geometrischen Satz mitzuteilen, der früher noch nicht, jetzt aber von mir behandelt worden ist, und den ich zuerst mit Hilfe der Mechanik gefunden und dann auch geometrisch bewiesen habe. Einige frühere Geometer haben zu beweisen versucht, daß es möglich sei, eine geradlinig begrenzte Fläche zu finden, die einem gegebenen Kreise und einem gegebenen Kreissegmente gleich ist; darauf haben sie versucht, die von dem Schnitt des ganzen Kegels[1]) und einer geraden Linie begrenzte Fläche zu quadrieren, indem sie schwerlich zulässige Hilfssätze voraussetzten, so daß die meisten erkannten, daß die Aufgabe nicht gelöst war. Aber ich habe nichts davon gehört, daß einer meiner Vorgänger versucht hätte, das von einer geraden Linie und dem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels [einer Parabel] begrenzte Segment zu quadrieren, eine Aufgabe, deren Lösung ich jetzt gefunden habe. Denn hier wird gezeigt, daß jedes von einer geraden Linie und einem Schnitt eines rechtwinkligen Kegels [einer Parabel] begrenzte Segment gleich vier Dritteln des Drei-

[1]) Hier scheint eine Korruption vorzuliegen: der Ausdruck im Text heißt *τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς*, und es ist nicht leicht, ihm eine natürliche und verständliche Deutung zu geben. Der Schnitt des „ganzen Kegels“ könnte vielleicht einen ihn ganz durchschneidenden Schnitt, d. h. eine Ellipse bedeuten, und die „gerade Linie“ eine Achse oder einen Durchmesser. Heiberg wendet sich jedoch gegen die Vermutung, daß *τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς* zu lesen sei, im Hinblick auf das hinzugefügte *καὶ εὐθείας*, weil der erste Ausdruck immer eine ganze Ellipse und niemals ein Segment von ihr bedeute (*Quaestiones Archimedeae*, S. 149).

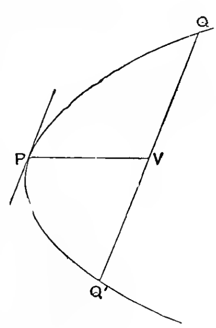
ecks ist, das mit dem Segment dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat, und zum Beweise dieser Eigenschaft ist folgender Hilfssatz benutzt, daß der Überschuß, um den die größere von (zwei) ungleichen Flächen die kleinere übertrifft, zu sich selbst hinzugefügt, größer gemacht werden kann als jede gegebene begrenzte Fläche. Die früheren Geometer haben diesen Hilfssatz auch benutzt; denn durch Benutzung desselben Hilfssatzes haben sie gezeigt, daß Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser und Kugeln sich wie die Kuben ihrer Durchmesser verhalten, und ferner, daß jede Pyramide der dritte Teil des Prismas ist, das dieselbe Grundfläche wie die Pyramide und gleiche Höhe hat; daß jeder Kegel ein Drittel des Zylinders ist, der dieselbe Grundfläche wie der Kegel und gleiche Höhe hat, haben sie durch Anwendung eines Hilfssatzes bewiesen, der dem vorigen ähnlich ist. Und tatsächlich ist jeder der eben genannten Sätze anerkannt[1]) worden, nicht minder als die ohne den Hilfssatz bewiesenen Sätze. Es genügt mir also, wenn mein jetzt veröffentlichtes Werk dieselbe Probe besteht wie die genannten Sätze; somit habe ich den Beweis ausgearbeitet und sende ihn Dir, zuerst nach der Methode der Mechanik behandelt und dann auch geometrisch bewiesen; vorausgeschickt sind auch die elementaren Sätze über Kegelschnitte, die für den Beweis von Nutzen sind (*στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν*). Lebe wohl."

Satz 1.

Wird durch einen Punkt einer Parabel eine Gerade gezogen, die entweder die Achse selbst oder zur Achse parallel ist wie PV, und ist QQ' eine Sehne, die zu der Tangente der Parabel in P parallel ist und PV in V schneidet, so ist

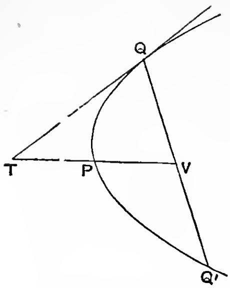
$$QV = VQ'.$$

Umgekehrt, *wenn $QV = VQ'$ ist, so ist die Sehne QQ' zu der Tangente in P parallel.*



[1]) Die Stelle lautet griechisch: *συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδὲν ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι.* Es hat den Anschein, als ob *πεπιστευκέναι* falsch sei und dafür das Passiv hätte gesetzt werden müssen.

Satz 2.



Ist in einer Parabel QQ' eine zu der Tangente in P parallele Sehne, und wird durch P die Gerade gezogen, die entweder die Achse selbst oder zur Achse parallel ist und die QQ' in V und die in Q berührende Parabeltangente in T schneidet, so ist

$$PV = PT.$$

Satz 3.

Wird durch einen Punkt einer Parabel eine Gerade gezogen, die entweder die Achse selbst oder zur Achse parallel ist wie PV, und werden durch zwei andere Punkte Q, Q' der Parabel die zu der Tangente in P parallelen Geraden gezogen, die PV bezüglich in V, V' treffen, so gilt die Proportion

$$PV : PV' = QV^2 : Q'V'^2.$$

„Und diese Sätze sind in den Elementen der Kegelschnitte bewiesen¹).“

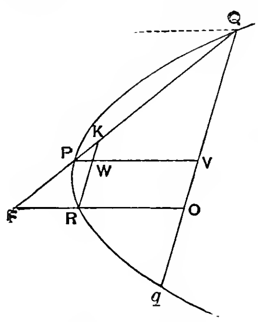
Satz 4.

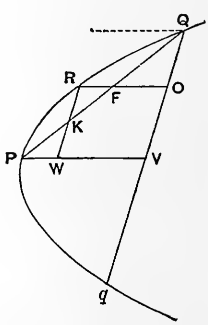
Ist Qq die Grundlinie eines Parabelsegments und P der Scheitel des Segments und trifft der Durchmesser durch irgend einen anderen Punkt R die Linie Qq in O und QP (wenn nötig, verlängert) in F, so gilt $$QV : VO = OF : FR.$$

Man ziehe die zu PV gehörige Ordinate RW, die QP in K trifft. Dann haben wir

$$PV : PW = QV^2 : RW^2,$$

woraus folgt $$PQ : PK = PQ^2 : PF^2,$$





¹) d. h. in den Abhandlungen über Kegelschnitte von Euklid und Aristaeus.

weil QV und RW parallel sind. Mit anderen Worten: PQ, PF, PK befinden sich in stetiger Proportion; mithin gilt

$$\begin{aligned} PQ:PF &= PF:PK \\ &= PQ \pm PF : PF \pm PK \\ &= QF:KF. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$QV:VO = OF:FR,$$

da QO, KR einerseits und PV, FO andrerseits einander parallel sind.

[Es läßt sich leicht einsehen, daß diese Gleichung gleichbedeutend ist mit der Einführung neuer Koordinatenachsen anstatt der Tangente und des Durchmessers, nämlich der Sehne Qq (etwa als x-Achse) und des Durchmessers durch Q (als y-Achse).

Denn wenn $QV = a$ ist, so wird $PV = \frac{a^2}{p}$, wo p der Parameter der auf PV bezogenen Ordinaten ist.

Setzt man nun $QO = x$ und $RO = y$, so erhält das obige Ergebnis die Gestalt:

$$\frac{a}{x-a} = \frac{OF}{OF-y},$$

woraus folgt

$$\frac{a}{2a-x} = \frac{OF}{y} = \frac{x \cdot \frac{a}{p}}{y}$$

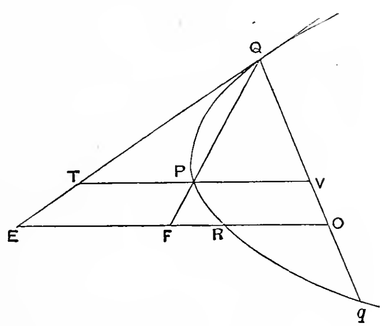
oder

$$py = x(2a-x).]$$

Satz 5.

Ist Qq die Grundlinie eines Parabelsegments, P der Scheitel des Segments und PV sein Durchmesser und schneidet der Parabeldurchmesser durch irgend einen anderen Punkt R Qq in O und die Tangente in Q in E, so gilt

$$QO:Oq = ER:RO.$$



Der Durchmesser durch R schneide QP in F.

Dann gilt nach Satz 4

$$QV:VO = OF:FR.$$

Da $QV = Vq$, so folgt

$$QV:qO = OF:OR \quad . \quad . \quad (1).$$

Ferner ist, wenn VP die Tangente in T schneidet,

$$PT = PV, \text{ und daher } EF = OF.$$

Verdoppeln wir also die Vorderglieder in (1), so haben wir

$$Qq : qO = OE : OR,$$

woraus folgt

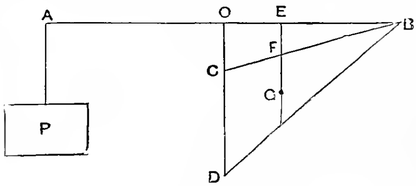
$$QO : Oq = ER : RO.$$

Sätze 6, 7.[1])

AOB sei ein horizontal liegender Hebel, der in seinem Mittelpunkte O unterstützt ist. Ein Dreieck BCD, in dem der Winkel C ein rechter oder stumpfer ist, werde an B und O aufgehängt, so daß C an O angehängt wird und CD mit O in eine vertikale Gerade fällt. Ist dann P eine Fläche, die, an A angehängt, das System im Gleichgewicht hält, so ist

$$P = \tfrac{1}{3} \triangle BCD.$$

Es werde auf OB der Punkt E so gewählt, daß $BE = 2OE$ wird, und zu OCD werde die Parallele EFH gezogen, die BC, BD bezüglich in F, H trifft. G sei der Mittelpunkt von FH.



Dann ist G der Schwerpunkt des Dreiecks BCD.

Werden nun die Ecken B, C gelöst und wird das Dreieck aufgehängt, indem man einen Faden von F nach E spannt, so wird das Dreieck in derselben Lage wie vorher bleiben, weil EFG eine vertikale Gerade ist. „Denn das ist bewiesen[2])."

Folglich wird wie vorher Gleichgewicht herrschen; also

$$P : \triangle BCD = OE : AO,$$
$$= 1 : 3$$

oder

$$P = \tfrac{1}{3} \triangle BCD.$$

Sätze 8, 9.

Es sei AOB ein horizontal liegender Hebel, der in seinem Mittelpunkte O unterstützt ist. Ein Dreieck BCD, bei C recht- oder stumpf-

---

[1]) In Satz 6 behandelt Archimedes den besonderen Fall, wo der Winkel BCD des Dreiecks ein rechter ist, so daß in der Figur C mit O und F mit E zusammenfällt. Er beweist dann in Satz 7 dieselbe Eigenschaft für das Dreieck, in dem BCD ein stumpfer Winkel ist, indem er das Dreieck als Differenz zwischen zwei rechtwinkligen Dreiecken BOD, BOC auffaßt und das Ergebnis des Satzes 6 benutzt. Ich habe der Kürze halber die beiden Sätze in einen zusammengezogen. Diese Bemerkung gilt auch für die Sätze, die auf 6, 7 folgen.

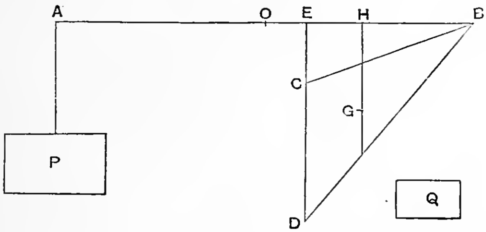
[2]) Zweifellos in dem verlorenen Buche περὶ ζυγῶν. Vgl. die Einleitung, Kap. II, am Ende.

winklig, werde in den Punkten B, E an OB angehängt, wobei die Ecke C so durch einen Faden mit E verbunden werde, daß die Seite CD mit E in derselben vertikalen Geraden liegt. Q sei eine Fläche derart, daß gilt

$$AO:OE = \triangle BCD:Q.$$

Hält dann eine in A aufgehängte Fläche P das System im Gleichgewicht, so ist

$$P < \triangle BCD \text{ aber } > Q.$$



G sei der Schwerpunkt des Dreiecks BCD; GH werde parallel zu DC, d. h. vertikal gezogen und treffe BO in H.

Wir können nun das Dreieck BCD in H angehängt denken, und, da Gleichgewicht herrscht, haben wir

$$\triangle BCD:P = AO:OH \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

woraus folgt
$$P < \triangle BCD.$$

Ferner gilt
$$\triangle BCD:Q = AO:OE.$$

Folglich ergibt sich nach (1)

$$\triangle BCD:Q > \triangle BCD:P$$

und
$$P > Q.$$

Sätze 10, 11.

Es sei AOB ein horizontal liegender Hebel, der in seinem Mittelpunkte O unterstützt ist. $CDEF$ sei ein Trapez, das so gelegt werden kann, daß seine parallelen Seiten CD, FE vertikal sind, während C senkrecht unter O liegt, und daß die anderen Seiten CF, DE sich in B schneiden. EF treffe BO in H, und das Trapez werde angehängt, indem man zwischen F, H und C, O Fäden zieht. Ferner sei Q eine Fläche gemäß der Proportion

$$AO:OH = (\textit{Trapez } CDEF):Q.$$

Ist nun P eine Fläche, die, in A angehängt, das System im Gleichgewicht hält, so ist

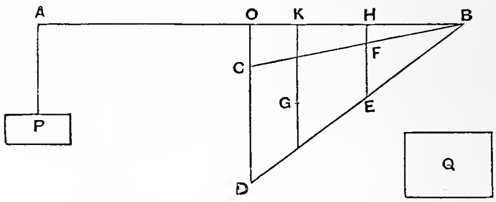
$$P < Q.$$

Dasselbe gilt in dem besonderen Falle, wo die Winkel bei C, F rechte sind und demnach C, F bezüglich mit O, H zusammenfallen.

Wir teilen OH in K so, daß die Proportion gilt

$$(2\,CD + FE):(2\,FE + CD) = HK:KO.$$

Wir ziehen KG parallel zu OD und bezeichnen mit G den Mittelpunkt des innerhalb des Trapezes gelegenen Teiles von KG.



Dann ist G der Schwerpunkt des Trapezes [*Über das Gleichgewicht von Ebenen* I. 15].

Wir können also annehmen, daß das Trapez in K aufgehängt ist, und das Gleichgewicht bleibt ungestört bestehen.

Folglich

$$AO:OK = (\text{Trapez } CDEF):P$$

und, nach Voraussetzung,

$$AO:OH = (\text{Trapez } CDEF):Q.$$

Da $OK < OH$, so folgt

$$P < Q.$$

Sätze 12, 13.

Liegt das Trapez $CDEF$ wie in den vorigen Sätzen, nur mit der Abänderung, daß CD senkrecht unter einem Punkte L auf OB anstatt unter O liegt, und ist das Trapez in L, H angehängt, so seien Q, R zwei Flächen, die den folgenden Proportionen genügen

$$AO:OH = (\textit{Trapez } CDEF):Q$$

und

$$AO:OL = (\textit{Trapez } CDEF):R.$$

Hält dann eine in A angehängte Fläche P das System im Gleichgewicht, so ist

$$P > R \textit{ aber } < Q.$$

Man nehme den Schwerpunkt G des Trapezes wie in den vorigen Sätzen und lasse die Parallele durch G zu CD die Gerade OB in K treffen.

Wir können dann das Trapez in K angehängt denken, und das Gleichgewicht bleibt bestehen.

Folglich (Trapez $CDEF$)$:P = AO:OK$.

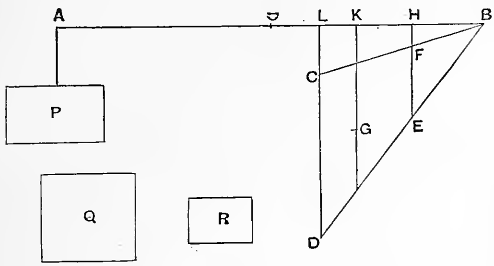
Daraus folgt

$$(\text{Trapez } CDEF):P > (\text{Trapez } CDEF):Q$$

aber

$$< (\text{Trapez } CDEF):R.$$

Somit ist $P < Q$ aber $> R$.



Sätze 14, 15.

Es sei Qq die Grundlinie eines Parabelsegments. Werden dann durch Q, q die Parallelen zur Achse der Parabel gezogen, beide nach derselben Seite von Qq, auf der das Segment liegt, so sind entweder (1) die so bei Q, q entstehenden Winkel beide rechte oder (2) einer ist spitz und der andere stumpf. Im zweiten Falle sei der Winkel bei q der stumpfe.

Man teile Qq durch die Punkte $O_1, O_2, \ldots O_n$ in eine Anzahl gleicher Teile. Durch $q, O_1, O_2, \ldots O_n$ ziehen wir die Durchmesser der Parabel, die die Tangente in Q in $E, E_1, E_2, \ldots E_n$ und die Parabel selbst in $q, R_1, R_2, \ldots R_n$ treffen. Wir ziehen die Verbindungslinien $QR_1, QR_2, \ldots QR_n$, die qE, $O_1E_1, O_2E_2, \ldots O_{n-1}E_{n-1}$ in $F, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$ treffen.

Die Durchmesser $Eq, E_1O_1, \ldots E_nO_n$ mögen die durch Q senkrecht zu den Durchmessern gezogene Gerade QOA bezüglich in den Punkten $O, H_1, H_2, \ldots H_n$ treffen. (In dem besonderen Falle, wo Qq selbst auf den Durchmessern senkrecht steht, fällt q mit O zusammen, O_1 mit H_1, usf.)

Es wird behauptet

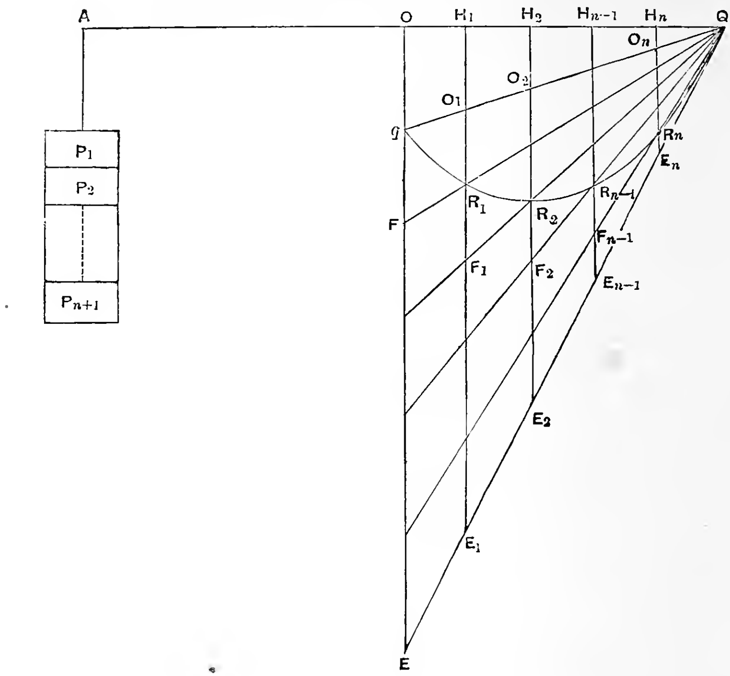
(1) $\triangle EqQ < 3\,(\textit{Summe der Trapeze } FO_1, F_1O_2, \ldots F_{n-1}O_n + \triangle E_nO_nQ)$,

(2) $\triangle EqQ > 3\,(\textit{Summe der Trapeze } R_1O_2, R_2O_3, \ldots R_{n-1}O_n + \triangle R_nO_nQ)$.

AO sei OQ gleich gemacht, und QOA werde als wagerecht liegender Hebel aufgefaßt, der in O unterstützt ist. Das Dreieck EqQ werde in der Lage, in der es gezeichnet ist, an OQ angehängt; das Trapez EO_1 werde in der gezeichneten Lage durch eine in A angehängte Fläche P_1 im Gleichgewicht gehalten, das Trapez $E_1 O_2$ in der gezeichneten Lage durch die in A angehängte Fläche P_2 und so fort, das Dreieck $E_n O_n Q$ in derselben Weise durch P_{n+1}.

Dann hält $P_1 + P_2 + \ldots + P_{n+1}$ das ganze Dreieck EqQ, wie es gezeichnet ist, im Gleichgewicht, und daher ist

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{n+1} = \tfrac{1}{3} \triangle EqQ. \qquad \text{[Sätze 6, 7]}$$



Ferner gilt

$$\begin{aligned} AO : OH_1 &= QO : OH_1 \\ &= Qq : qO_1 \\ &= E_1 O_1 : O_1 R_1 \quad \text{[nach Satz 5]} \\ &= (\text{Trapez } EO_1) : (\text{Trapez } FO_1); \end{aligned}$$

daraus folgt [Sätze 10, 11]

$$(FO_1) > P_1.$$

Sodann haben wir

$$\begin{aligned} AO : OH_1 &= E_1 O_1 : O_1 R_1 \\ &= (E_1 O_2) : (R_1 O_2) \quad \ldots\ldots \quad (\alpha), \end{aligned}$$

während

$$\begin{aligned} AO : OH_2 &= E_2 O_2 : O_2 R_2 \\ &= (E_1 O_2) : (F_1 O_2) \quad \ldots\ldots \quad (\beta); \end{aligned}$$

und, da (α) und (β) zugleich gelten, haben wir nach den Sätzen 12, 13

$$(F_1 O_2) > P_2 > (R_1 O_2).$$

Ebenso können wir beweisen

$$(F_2 O_3) > P_3 > (R_2 O_3)$$

und so fort.

Schließlich haben wir [Sätze 8, 9]

$$\triangle E_n O_n Q > P_{n+1} > \triangle R_n O_n Q.$$

Durch Addition erhalten wir

$$(1)\ (FO_1) + (F_1 O_2) + \cdots + (F_{n-1} O_n) + \triangle E_n O_n Q > P_1 + P_2 + \cdots + P_{n+1}$$
$$> \tfrac{1}{3} \triangle EqQ,$$

oder $\triangle EqQ < 3\,[(FO_1) + (F_1 O_2) + \cdots + (F_{n-1} O_n) + \triangle E_n O_n Q]$.

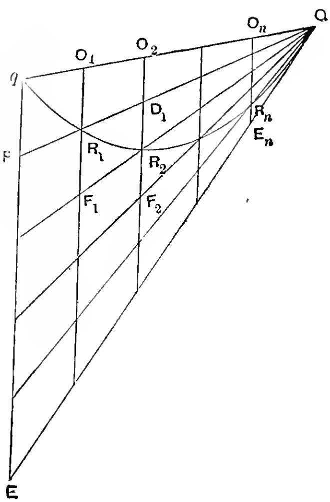
$$(2)\ (R_1 O_2) + (R_2 O_3) + \cdots + (R_{n-1} O_n) + \triangle R_n O_n Q < P_2 + P_3 + \cdots + P_{n+1}$$
$$< P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{n+1},\ \textit{a fortiori},$$
$$< \tfrac{1}{3} \triangle EqQ$$

oder $\triangle EqQ > 3\,[(R_1 O_2) + (R_2 O_3) + \cdots + (R_{n-1} O_n) + \triangle R_n O_n Q]$.

Satz 16.

Es sei Qq die Grundlinie eines Parabelsegments, wobei q nicht weiter als Q vom Scheitel der Parabel entfernt ist. Durch q sei die Gerade qE parallel zur Parabelachse gezogen bis zu ihrem Schnittpunkte E mit der Tangente in Q. Es soll bewiesen werden, daß

$$(\textit{Fläche des Segments}) = \tfrac{1}{3} \triangle EqQ.$$



Wenn nicht, so muß die Fläche des Segments entweder größer oder kleiner als $\frac{1}{3} \triangle EqQ$ sein.

I. Die Fläche des Segments sei größer als $\frac{1}{3} \triangle EqQ$. Dann kann der Überschuß, fortgesetzt zu sich selbst addiert, größer gemacht werden als $\triangle EqQ$. Und es ist daher möglich, einen Bruchteil des Dreiecks EqQ zu finden, der kleiner ist als der genannte Überschuß des Segments über $\frac{1}{3} \triangle EqQ$.

Das Dreieck FqQ sei ein solcher Bruchteil des Dreiecks EqQ. Wir teilen Eq in gleiche Teile, die alle gleich qF sind, und verbinden alle

Teilpunkte, F eingeschlossen, mit Q; diese Verbindungslinien mögen die Parabel bezüglich in R_1, R_2, ... R_n schneiden. Durch R_1, R_2, ... R_n ziehen wir die Parabeldurchmesser, die qQ bezüglich in O_1, O_2, ... O_n schneiden.

$O_1 R_1$ schneide QR_2 in F_1.

$O_2 R_2$ schneide QR_1 in D_1 und QR_3 in F_2.

$O_3 R_3$ schneide QR_2 in D_2 und QR_4 in F_3 und so fort.

Wir haben nach der Annahme

$$\triangle FqQ < (\text{Fläche des Segments}) - \tfrac{1}{3} \triangle EqQ$$

oder $\quad (\text{Fläche des Segments}) - \triangle FqQ > \tfrac{1}{3} \triangle EqQ \quad . \quad . \quad (\alpha).$

Da nun alle Teile von qE, qF und die übrigen, gleich sind, so haben wir

$$O_1 R_1 = R_1 F_1, \quad O_2 D_1 = D_1 R_2 = R_2 F_2, \text{ und so fort;}$$

folglich

$$\triangle FqQ = (FO_1) + (R_1 O_2) + (D_1 O_3) + \cdots$$
$$= (FO_1) + (F_1 D_1) + (F_2 D_2) + \cdots + (F_{n-1} D_{n-1}) + E_n R_n Q \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Aber

$$(\text{Fläche des Segments}) < (FO_1) + (F_1 O_2) + \cdots + (F_{n-1} O_n) + \triangle E_n O_n Q.$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$(\text{Fläche des Segments}) - \triangle FqQ$$
$$< (R_1 O_2) + (R_2 O_3) + \cdots + (R_{n-1} O_n) + \triangle R_n O_n Q$$

oder nach (α) *a fortiori*

$$\tfrac{1}{3} \triangle EqQ < (R_1 O_2) + (R_2 O_3) + \cdots + (R_{n-1} O_n) + \triangle R_n O_n Q.$$

Aber das ist unmöglich, da [Sätze 14, 15]

$$\tfrac{1}{3} \triangle EqQ > (R_1 O_2) + (R_2 O_3) + \cdots + (R_{n-1} O_n) + \triangle R_n O_n Q.$$

Folglich $\qquad (\text{Fläche des Segments}) \leqq \tfrac{1}{3} \triangle EqQ.$

II. Wenn möglich, sei die Fläche des Segments kleiner als $\tfrac{1}{3} \triangle EqQ$.

Man ermittele einen Bruchteil des Dreiecks EqQ, etwa das Dreieck FqQ, der kleiner ist als der Überschuß von $\tfrac{1}{3} \triangle EqQ$ über die Fläche des Segments und führe dieselbe Konstruktion aus wie vorher.

Da $\qquad \triangle FqQ < \tfrac{1}{3} \triangle EqQ - (\text{Fläche des Segments}),$

so folgt

$$\triangle FqQ + (\text{Fläche des Segments}) < \tfrac{1}{3} \triangle EqQ$$
$$< (FO_1) + (F_1 O_2) + \cdots + (F_{n-1} O_n) + \triangle E_n O_n Q.$$

[Sätze 14, 15]

Subtrahieren wir von beiden Seiten die Fläche des Segments, so erhalten wir

$$\triangle FqQ < (\text{Summe der Flächen } qFR_1,\ R_1F_1R_2,\ \ldots\ E_nR_nQ)$$
$$< (FO_1) + (F_1D_1) + \cdots + (F_{n-1}D_{n-1}) + \triangle E_nR_nQ,$$

a fortiori;

aber das ist unmöglich, da nach (β)

$$\triangle FqQ = (FO_1) + (F_1D_1) + \cdots + (F_{n-1}D_{n-1}) + \triangle E_nR_nQ.$$

Folglich gilt

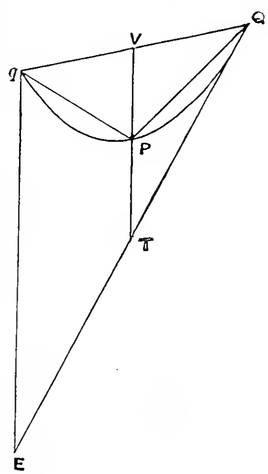
$$(\text{Fläche des Segments}) \geqq \tfrac{1}{3} \triangle EqQ.$$

Da also die Fläche des Segments weder kleiner noch größer ist als $\frac{1}{3} \triangle EqQ$, so ist sie gleich $\frac{1}{3} \triangle EqQ$.

Satz 17.

Nunmehr gilt auch der folgende Satz:

Die Fläche eines Parabelsegments beträgt vier Drittel des Dreiecks, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat.



Es sei Qq die Grundlinie des Segments, P sein Scheitel. Dann ist PQq das eingeschriebene Dreieck mit derselben Grundlinie wie das Segment und gleicher Höhe.

Da P der Scheitel[1]) des Segments ist, so halbiert der durch P gehende Durchmesser die Strecke Qq. V sei der Mittelpunkt von Qq.

VP und die dazu parallele Gerade qE mögen die Tangente in Q bezüglich in den Punkten T, E schneiden.

Dann haben wir

$$qE = 2\,VT$$

und $\quad PV = PT$, [Satz 2]

so daß $\quad VT = 2\,PV$.

Folglich $\quad \triangle EqQ = 4 \triangle PQq$.

---

[1]) Es ist eigenartig, daß Archimedes hier die Ausdrücke *Grundlinie* und *Scheitel* eines Segments benutzt, ihre Definition aber erst später bringt (am Ende des Satzes). Überdies benutzt er die Umkehrung der in Satz 18 bewiesenen Eigenschaft.

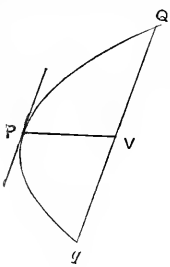
Aber nach Satz 16 ist die Fläche des Segments gleich $\frac{1}{3} \triangle EqQ$; folglich

$$(\text{Fläche des Segments}) = \tfrac{4}{3} \triangle PQq.$$

Definition. „In Segmenten, die von einer geraden Linie und einer Kurve begrenzt sind, bezeichne ich die gerade Linie als **Grundlinie**, und als **Höhe** das größte Lot, das sich von der Kurve auf die Grundlinie des Segments fällen läßt, und als **Scheitel** den Punkt, von dem das größte Lot ausgeht."

Satz 18.

Ist Qq die Grundlinie eines Parabelsegments und V der Mittelpunkt von Qq und trifft der Durchmesser durch V die Kurve in P, so ist P der Scheitel des Segments.

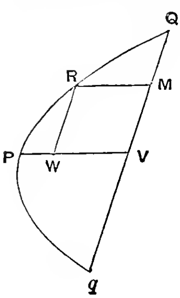


Denn Qq ist parallel zu der Tangente in P [Satz 1]. Folglich ist unter allen Loten, die von Punkten des Segments auf die Grundlinie Qq gefällt werden können, das von P das größte. Daher ist nach der Definition P der Scheitel des Segments.

Satz 19.

Ist Qq eine in V von dem Durchmesser PV halbierte Parabelsehne und ist RM der Durchmesser, der QV in M halbiert, und ist RW die auf PV bezogene Ordinate von R, so gilt

$$PV = \tfrac{4}{3} RM.$$



Denn nach der Parabeleigenschaft haben wir

$$PV : PW = QV^2 : RW^2$$
$$= 4\,RW^2 : RW^2,$$

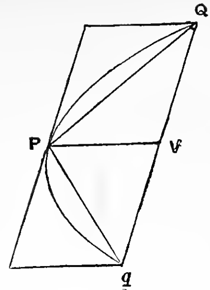
so daß $\qquad PV = 4\,PW,$

woraus folgt $\qquad PV = \tfrac{4}{3} RM.$

Satz 20.

Ist Qq die Grundlinie und P der Scheitel eines Parabelsegments, so ist das Dreieck PQq größer als die Hälfte des Segments PQq.

Denn die Sehne Qq ist parallel zu der Tangente in P und das Dreieck PQq ist die Hälfte des Parallelogramms, das von Qq, der Tangente in P und den Durchmessern durch Q, q gebildet wird.



Daher ist das Dreieck PQq größer als die Hälfte des Segments.

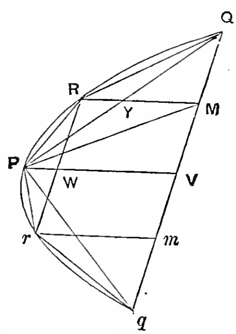
Zusatz. Es folgt, daß *es möglich ist, dem Segment ein Vieleck so einzuschreiben, daß die übrigbleibenden Segmente zusammen kleiner als irgend eine gegebene Fläche sind.*

Satz 21.

Ist Qq die Grundlinie und P der Scheitel eines Parabelsegments und ist R der Scheitel des durch PQ abgeschnittenen Segments, so ist

$$\triangle PQq = 8 \triangle PRQ.$$

Der Durchmesser durch R halbiert die Sehne PQ und daher auch QV, wenn PV der Qq halbierende Durchmesser ist. Der Durchmesser durch R halbiere PQ in Y und QV in M. Man ziehe PM.



Nach Satz 19 ist

$$PV = \tfrac{4}{3} RM.$$

Ferner $PV = 2\,YM.$

Folglich $YM = 2\,RY$

und $\triangle PQM = 2 \triangle PRQ.$

Daher $\triangle PQV = 4 \triangle PRQ$

und $\triangle PQq = 8 \triangle PRQ.$

Wird ferner RW, die Ordinate von R, bezogen auf PV, verlängert, bis sie die Kurve zum zweiten Male in r trifft, so ist

$$RW = rW,$$

und derselbe Beweis ergibt

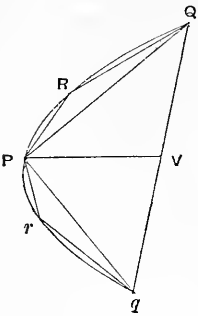
$$\triangle PQq = 8 \triangle Prq.$$

Satz 22.

Wenn eine Reihe von Flächen A, B, C, D, . . . vorliegt, von denen jede das Vierfache der nächstfolgenden ist, und wenn die größte, A, gleich dem einem Parabelsegment PQq eingeschriebenen Dreieck PQq

ist, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat, so gilt die Beziehung

$$(A + B + C + D + \ldots) < (\textit{Fläche des Segments } PQq).$$



Denn, da $\triangle PQq = 8 \triangle PRQ = 8 \triangle Prq$, wo R, r wie im letzten Satze die Scheitel der durch PQ, Pq abgeschnittenen Segmente sind, so haben wir

$$\triangle PQq = 4(\triangle PQR + \triangle Pqr).$$

Folglich, da $\triangle PQq = A$,

$$\triangle PQR + \triangle Pqr = B.$$

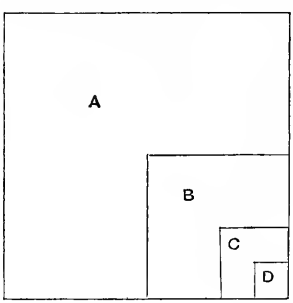
Ebenso beweisen wir, daß die ähnlich in die übrigbleibenden Segmente eingeschriebenen Dreiecke zusammen gleich der Fläche C sind, und so fort.

Daher ist $A + B + C + D + \ldots$ gleich der Fläche eines gewissen eingeschriebenen Vielecks und deshalb kleiner als die Fläche des Segments.

Satz 23.

Ist eine Reihe von Flächen A, B, C, D, ... Z gegeben, von denen A die größte ist, und ist jede das Vierfache der nächstfolgenden, so gilt die Beziehung

$$A + B + C + \ldots + Z + \tfrac{1}{3} Z = \tfrac{4}{3} A.$$



Wir denken uns eine Reihe von Flächen b, c, d ... definiert durch die Beziehungen

$$b = \tfrac{1}{3} B,$$

$$c = \tfrac{1}{3} C,$$

$$d = \tfrac{1}{3} D \quad \text{und so fort.}$$

Da nun

$$b = \tfrac{1}{3} B$$

und

$$B = \tfrac{1}{4} A,$$

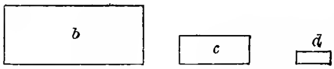
so haben wir

$$B + b = \tfrac{1}{3} A.$$

Ebenso

$$C + c = \tfrac{1}{3} B.$$

$$\cdots\cdots$$



Folglich ergibt sich

$$B+C+D+\ldots+Z+b+c+d+\ldots+z=\tfrac{1}{3}(A+B+C+\ldots+Y).$$

Aber $b+c+d+\ldots+y=\tfrac{1}{3}(B+C+D+\ldots+Y)$.

Durch Subtraktion erhalten wir also

$$B+C+D+\ldots+Z+z=\tfrac{1}{3}A$$

oder $$A+B+C+D+\ldots+Z+\tfrac{1}{3}Z=\tfrac{4}{3}A.$$

[Das algebraische Äquivalent dieses Ergebnisses ist offenbar

$$1+\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+\ldots+(\tfrac{1}{4})^{n-1}=\tfrac{4}{3}-\tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$
$$=\frac{1-(\tfrac{1}{4})^n}{1-\tfrac{1}{4}}.\,]$$

Satz 24.

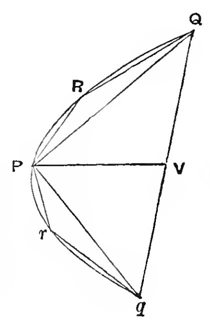
Jedes von einer Parabel und einer Sehne Qq begrenzte Segment ist gleich vier Dritteln des Dreiecks, das dieselbe Grundlinie wie das Segment und gleiche Höhe hat.

Wir setzen $$K=\tfrac{4}{3}\triangle PQq,$$

wo P der Scheitel des Segments ist, und haben dann zu beweisen, daß die Fläche des Segments gleich K ist.

Ist das Segment nicht gleich K, so muß es entweder größer oder kleiner sein.

I. Die Fläche des Segments sei größer als K.



Schreiben wir nun in die durch PQ, Pq abgeschnittenen Segmente Dreiecke ein, die dieselben Grundlinien und gleiche Höhen haben, d. h. Dreiecke mit denselben Scheiteln R, r wie die Segmente, und schreiben wir in die übrigbleibenden Segmente in derselben Weise Dreiecke ein und so fort, so behalten wir schließlich Segmente übrig, deren Summe kleiner ist als die Fläche, um die das Segment PQq die Fläche K übertrifft.

Daher muß das so entstandene Vieleck größer als die Fläche K sein, was unmöglich ist, da [Satz 23]

$$A+B+C+\ldots+Z<\tfrac{4}{3}A,$$

wo $$A=\triangle PQq.$$

Daher kann die Fläche des Segments nicht größer als K sein.

II. Wenn möglich, sei die Fläche des Segments kleiner als K.

Ist dann $\triangle PQq = A$, $B = \frac{1}{4} A$, $C = \frac{1}{4} B$ und so fort, bis wir zu einer Fläche X kommen, die kleiner ist als die Differenz zwischen K und dem Segment, so haben wir

$$A + B + C + \ldots + X + \tfrac{1}{3} X = \tfrac{4}{3} A \qquad \text{[Satz 23]}$$
$$= K.$$

Da nun K die Summe $A + B + C + \ldots + X$ um eine Fläche übertrifft, die kleiner als X ist, und die Fläche des Segments um eine Fläche, die größer als X ist, so folgt

$$A + B + C + \ldots + X > \text{(das Segment)},$$

was nach dem obigen Satze 22 unmöglich ist.

Somit ist das Segment nicht kleiner als K.

Da also das Segment weder größer noch kleiner als K ist, so folgt

$$\text{(Fläche des Segments } PQq) = K = \tfrac{4}{3} \triangle PQq.$$

Über schwimmende Körper.

Buch I.

Postulat 1.

„Es werde vorausgesetzt, daß eine Flüssigkeit die Eigenschaft habe, daß, wenn ihre Teile gleichmäßig liegen und zusammenhängen, der weniger gedrückte Teil von dem stärker gedrückten fortgetrieben wird; und daß jeder ihrer Teile von der darüberliegenden Flüssigkeit in senkrechter Richtung gedrückt wird, wenn die Flüssigkeit nicht in etwas eingeschlossen und von etwas anderem zusammengedrückt wird.“

Satz 1.

Wird eine Fläche mit einer Ebene geschnitten, die stets durch denselben Punkt geht, und ist der Schnitt jedesmal eine Kreislinie, deren Mittelpunkt der vorher genannte Punkt ist, so ist die Fläche eine Kugel.

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es irgend zwei von dem Punkte bis an die Fläche gezogene Strecken, die nicht gleich sind.

Es sei O der feste Punkt und A, B seien die beiden Punkte der Fläche, so daß OA, OB ungleich sind. Die Fläche werde mit der durch OA, OB gehenden Ebene geschnitten. Dann ist der Schnitt nach der Voraussetzung ein Kreis mit dem Mittelpunkt O.

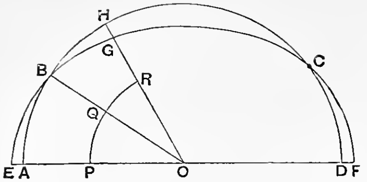
Folglich $OA = OB$, was der Annahme widerspricht. Daher kann die Fläche nur eine Kugel sein.

Satz 2.

Die Oberfläche jeder in Ruhe befindlichen Flüssigkeit ist die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt derselbe wie der der Erde ist.

Die Oberfläche der Flüssigkeit werde von einer durch O, den Mittelpunkt der Erde, gehenden Ebene in der Kurve $ABCD$ geschnitten.

$ABCD$ soll der Umfang eines Kreises sein.



Wenn nicht, so werden einige der von O nach der Kurve gezogenen Strecken ungleich sein.

Es sei OB eine dieser Strecken, derart, daß OB größer als einige der von O nach der Kurve gezogenen Strecken ist und kleiner als andere. Mit OB als Radius ziehen wir den Kreis EBF, der also teils innerhalb, teils außerhalb der Oberfläche der Flüssigkeit liegen wird.

Wir ziehen die Gerade OGH, die mit OB einen Winkel bildet, der gleich dem Winkel EOB ist, und die Oberfläche in H, den Kreis in G schneidet. In der Ebene zeichnen wir noch den Kreisbogen PQR um den Mittelpunkt O und innerhalb der Flüssigkeit.

Dann sind die Flüssigkeitsteile längs PQR gleichartig und zusammenhängend, und auf den Teil PQ drückt der Teil zwischen ihm und AB, während auf den Teil QR der Teil zwischen QR und BH drückt. Daher wird auf die Teile längs PQ, QR ein ungleicher Druck ausgeübt, und der unter geringerem Druck stehende Teil wird von dem unter größerem Druck stehenden in Bewegung gesetzt werden.

Daher kann nicht Ruhe herrschen, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich ist der Schnitt der Oberfläche der Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt O ist; dasselbe gilt für jeden anderen Schnitt mit einer Ebene durch O.

Daher ist die Oberfläche eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt O.

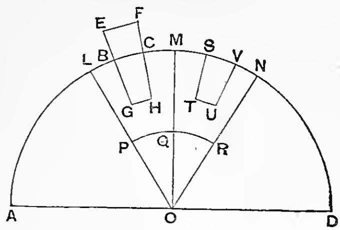
Satz 3.

Körper, die bei gleichem Rauminhalt gleiches Gewicht mit einer Flüssigkeit haben, tauchen, in die Flüssigkeit gebracht, so ein, daß sie nicht über die Oberfläche hervorragen, aber auch nicht tiefer sinken.

Wenn möglich, bleibe ein gewisser Körper $EFHG$, der Raumteil für Raumteil gleiches Gewicht mit der Flüssigkeit hat, in ihr so eingetaucht, daß ein Teil von ihm, $EBCF$, über die Oberfläche hervorragt.

Wir legen durch O, den Mittelpunkt der Erde, und durch den Körper eine Ebene, die die Flüssigkeitsoberfläche in dem Kreise $ABCD$ schneidet.

Wir denken uns eine Pyramide mit der Spitze O, die zur Grundfläche ein in der Oberfläche der Flüssigkeit gelegenes Parallelogramm hat, so daß sie den eintauchenden Teil des Körpers einschließt. Diese Pyramide werde von der Ebene des Kreises $ABCD$ in OL, OM geschnitten. Ferner werde eine Kugel im Inneren der Flüssigkeit unterhalb GH mit dem Mittelpunkte O beschrieben, und die Ebene $ABCD$ schneide diese Kugel in PQR.



Wir denken uns sodann noch eine Pyramide mit der Spitze O in der Flüssigkeit, unmittelbar an die erste Pyramide sich anschließend und dieser kongruent. Die so konstruierte Pyramide werde von der Ebene $ABCD$ in OM, ON geschnitten.

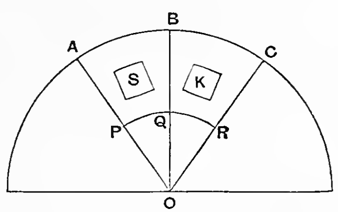
Schließlich sei $STUV$ ein Teil der Flüssigkeit innerhalb der zweiten Pyramide, der dem Teil $BGHC$ des Körpers kongruent ist, und SV liege in der Oberfläche der Flüssigkeit. Dann wird auf PQ, QR ungleicher Druck ausgeübt und zwar auf PQ der größere. Daher wird der über QR liegende Teil von dem über PQ liegenden in Bewegung gesetzt werden, und die Flüssigkeit befindet sich nicht in Ruhe, was der Annahme widerspricht.

Folglich ragt der Körper nicht über die Oberfläche hinaus. Er sinkt auch nicht tiefer, da alle Teile der Flüssigkeit unter demselben Drucke stehen.

Satz 4.

Ein Körper, der leichter als eine Flüssigkeit ist, taucht, in diese hineingebracht, nicht vollständig unter, sondern ein Teil von ihm ragt über die Oberfläche hervor.

In diesem Falle nehmen wir nach der Methode des vorangehenden Satzes an, der Körper sei, wenn möglich, vollständig untergetaucht, und die Flüssigkeit befinde sich in dieser Lage in Ruhe, und wir denken uns (1) eine den Körper einschließende Pyramide mit der Spitze im Erdmittelpunkte O, (2) eine andere der ersten unmittelbar benachbarte und ihr kongruente Pyramide mit derselben Spitze O, (3) einen innerhalb der zweiten Pyramide befindlichen Teil der Flüssigkeit, der dem in der anderen Pyramide eingetauchten Körper gleich ist, (4) eine Kugel mit dem Mittelpunkte O, deren Oberfläche unterhalb des eingetauchten Körpers und des



ihm entsprechenden Flüssigkeitsteiles in der zweiten Pyramide liegt. Wir denken uns durch den Mittelpunkt O eine Ebene gelegt, die die Oberfläche der Flüssigkeit in dem Kreise ABC, den Körper in S, die erste Pyramide in OA, OB, die zweite Pyramide in OB, OC, den Flüssigkeitsteil in der zweiten Pyramide in K und die innere Kugel in PQR schneidet.

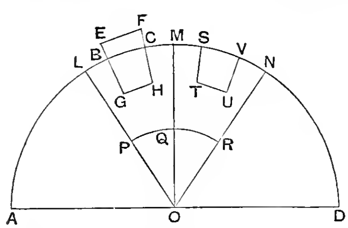
Dann stehen die Flüssigkeitsteile längs PQ, QR unter ungleichem Druck, da S leichter als K ist. Daher kann nicht Ruhe herrschen, was der Voraussetzung widerspricht.

Daher kann der Körper S in der Ruhelage nicht vollständig untertauchen.

Satz 5.

Ein Körper, der leichter als eine Flüssigkeit ist, taucht, in die Flüssigkeit gebracht, so tief ein, daß das Gewicht des Körpers gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

Der Körper sei $EGHF$, und $BGHC$ sei der eintauchende Teil, wenn die Flüssigkeit sich in Ruhe befindet. Wie in Satz 3 denken wir uns eine den Körper einschließende Pyramide mit der Spitze O und eine andere der ersten unmittelbar benachbarte und ihr kongruente Pyramide mit derselben Spitze. Wir denken uns einen Flüssigkeitsteil $STUV$ an der Grundfläche der zweiten Pyramide, der dem eintauchenden Teil des Körpers kongruent ist; die Konstruktion sei dieselbe wie in Satz 3.



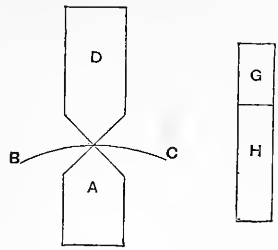
Da nun der Druck auf die Flüssigkeitsteile längs PQ, QR gleich sein muß, wenn die Flüssigkeit sich in Ruhe befinden soll, so folgt, daß das Gewicht des Teils $STUV$ der Flüssigkeit gleich dem Gewicht des Körpers $EGHF$ ist. Und das erstgenannte Gewicht ist gleich dem Gewicht der durch den eintauchenden Teil $BGHC$ des Körpers verdrängten Flüssigkeit.

Satz 6.

Wird ein Körper, der leichter als eine Flüssigkeit ist, gewaltsam in diese eingetaucht, so wird er durch eine Kraft aufwärts getrieben, die gleich dem Unterschied zwischen seinem Gewicht und dem der verdrängten Flüssigkeit ist.

A sei vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht, G bezeichne das Gewicht von A, und $(G + H)$ das Gewicht eines gleichen

Volumens der Flüssigkeit. Wir nehmen einen Körper D, dessen Gewicht H ist, und fügen ihn zu A hinzu. Dann ist das Gewicht von $(A+D)$ kleiner als das eines gleichen Volumens der Flüssigkeit; und wenn der Körper $(A+D)$ in die Flüssigkeit gebracht wird, so ragt er soweit heraus, daß sein Gewicht gleich dem der verdrängten Flüssigkeit ist. Aber sein Gewicht ist $(G+H)$.



Daher ist das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit $(G+H)$, und folglich ist das Volumen der verdrängten Flüssigkeit das Volumen des Körpers A. Demnach herrscht Ruhe, wenn A eintaucht und D herausragt. Somit hält das Gewicht von D der von der Flüssigkeit auf A nach oben ausgeübten Kraft das Gleichgewicht, und daher ist diese letzte Kraft gleich H, dem Unterschiede zwischen dem Gewichte von A und dem Gewichte der von A verdrängten Flüssigkeit.

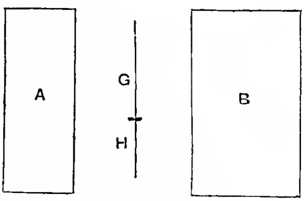
Satz 7.

Ein Körper, der schwerer als eine Flüssigkeit ist, sinkt, in diese hineingebracht, bis auf den Grund unter, und der Körper ist, in der Flüssigkeit gewogen, um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit leichter, als sein wahres Gewicht beträgt.

(1) Der erste Teil des Satzes ist klar, da der unter dem Körper befindliche Teil der Flüssigkeit unter größerem Druck steht und deshalb die anderen Teile ausweichen, bis der Körper den Grund erreicht.

(2) A sei ein Körper, der schwerer ist als dasselbe Volumen der Flüssigkeit, und $(G+H)$ sei sein Gewicht, wo G das Gewicht des gleichen Flüssigkeitsvolumens ist.

Man nehme einen Körper B, der leichter als das gleiche Volumen Flüssigkeit ist, und so, daß G das Gewicht von B ist, während das Gewicht des gleichen Flüssigkeitsvolumens $(G+H)$ ist.



A und B werden nun zu einem Körper zusammengefügt und eingetaucht. Da nun $(A+B)$ dasselbe Gewicht wie das gleiche Flüssigkeitsvolumen hat — beide Gewichte sind $(G+H)+G$ —, so folgt, daß $(A+B)$ in der Flüssigkeit in Ruhe verharrt.

Daher muß die Kraft, die A zum Sinken bringt, gleich der von der Flüssigkeit auf B nach oben ausgeübten sein. Diese letzte Kraft ist gleich dem Unterschiede zwischen $(G + H)$ und G [Satz 6]. Daher wird A von einer Kraft gleich H nach unten gezogen, d. h. sein Gewicht in der Flüssigkeit ist H oder die Differenz zwischen $(G + H)$ und G.

[Dieser Satz ist nach meiner Ansicht nicht als entscheidend für die Frage anzusehen, wie Archimedes das Verhältnis des in der berühmten Krone enthaltenen Goldes und Silbers *gefunden* hat (vgl. Einleitung, Kap. I.). Der Satz legt folgende Methode nahe.

Es sei W das Gewicht der Krone, w_1 und w_2 die Gewichte des in ihr enthaltenen Goldes und Silbers, so daß $W = w_1 + w_2$.

(1) Man nehme ein Gewicht W reinen Goldes und wäge es in einer Flüssigkeit. Der scheinbare Gewichtsverlust ist dann gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Bezeichnet F_1 dieses Gewicht, so ist also F_1 als Ergebnis der Wägung bekannt.

Es folgt, daß das Gewicht der von einem Gewichte w_1 Gold verdrängten Flüssigkeit $\frac{w_1}{W} \cdot F_1$ ist.

(2) Wir nehmen ein Gewicht W reinen Silbers und führen dieselbe Operation aus. Ist F_2 der Gewichtsverlust, wenn das Silber in der Flüssigkeit gewogen wird, so finden wir ebenso, daß das Gewicht der von w_2 verdrängten Flüssigkeit $\frac{w_2}{W} \cdot F_2$ ist.

(3) Schließlich wägen wir die Krone selbst in der Flüssigkeit und nennen den Gewichtsverlust F. Folglich ist das Gewicht der von der Krone verdrängten Flüssigkeit F.

Es folgt
$$\frac{w_1}{W} \cdot F_1 + \frac{w_2}{W} \cdot F_2 = F$$
oder
$$w_1 F_1 + w_2 F_2 = (w_1 + w_2) F,$$
woraus sich ergibt
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2 - F}{F - F_1}.$$

Dieses Verfahren entspricht zwar ziemlich genau dem in dem Gedichte *de ponderibus et mensuris* (wahrscheinlich um 500 n. Chr. geschrieben)[1]) angegebenen, das die Methode des Archimedes erläutern soll. Nach dem Verfasser dieses Gedichtes nehmen wir zunächst zwei gleiche Gewichte reinen Goldes und Silbers und wägen sie nochmals beide im Wasser; das gibt die Beziehung zwischen ihren Gewichten im Wasser und damit zwischen ihren Gewichtsverlusten im Wasser. Sodann nehmen wir die Mischung

---

[1]) Torellis *Archimedes*, S. 364; Hultsch, *Metrol. Script.* II. 95 f., und Prolegomena § 118.

aus Gold und Silber und ein gleiches Gewicht reinen Silbers und wägen in derselben Weise wiederum beide im Wasser.

Eine andere Fassung der von Archimedes angewandten Methode gibt jedoch Vitruv[1]), nach dessen Bericht er nacheinander die *Volumina* der von drei gleichen Gewichten verdrängten Flüssigkeitsmengen maß, (1) der Krone, (2) dem gleichen Gewichte Gold und (3) demselben Gewichte Silber. Ist wie vorher W das Gewicht der Krone und enthält sie bezüglich die Gewichte w_1 und w_2 Gold und Silber, so

(1) verdrängt die Krone eine gewisse Flüssigkeitsmenge, etwa V.

(2) Das Gewicht W Gold verdrängt ein gewisses Flüssigkeitsvolumen V_1; daher verdrängt ein Gewicht w_1 Gold ein Flüssigkeitsvolumen $\frac{w_1}{W} \cdot V_1$.

(3) Das Gewicht W Silber verdrängt ein gewisses Flüssigkeitsvolumen V_2; daher verdrängt ein Gewicht w_2 Silber ein Flüssigkeitsvolumen $\frac{w_2}{W} \cdot V_2$.

Es folgt
$$V = \frac{w_1}{W} \cdot V_1 + \frac{w_2}{W} \cdot V_2,$$
und daraus, da
$$W = w_1 + w_2,$$
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_2 - V}{V - V_1};$$
und dieses Verhältnis ist offenbar gleich dem vorher erhaltenen, nämlich $\frac{F_2 - F}{F - F_1}$.

Da Archimedes die Lösung der Aufgabe im Bade gefunden haben soll, so halte ich es für wahrscheinlicher, daß er zunächst auf die zweite Lösungsmethode gekommen ist. Denn er bemerkte, daß, wenn das Bad gefüllt war, das Volumen des überlaufenden Wassers dem Volumen seines Körpers gleich war. Das gab ihm seinen Gedanken ein. Er nahm die Krone und gleiche Gewichte reinen Goldes und Silbers. Er brachte sie dann nacheinander in ein mit Wasser gefülltes Gefäß und maß in jedem Falle den Rauminhalt des überlaufenden Wassers, wie bei seinem Körper im Bade.]

Postulat 2.

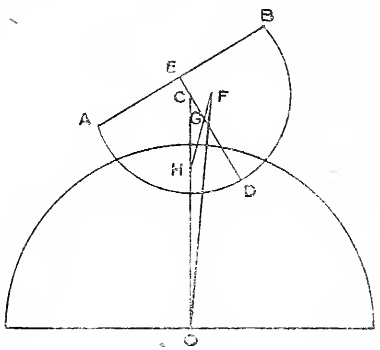
„Es werde vorausgesetzt, daß Körper, die in einer Flüssigkeit aufwärts getrieben werden, längs der Senkrechten [zur Oberfläche] aufwärts getrieben werden, die durch ihren Schwerpunkt geht.“

[1]) *De architect.* IX. 3.

Satz 8.

Wird ein Körper von der Gestalt eines Kugelsegments und aus einem Stoffe, der leichter als eine Flüssigkeit ist, in diese so hineingebracht, daß seine Grundfläche die Oberfläche nicht berührt, so befindet sich der Körper in einer Stellung in Ruhe, bei der seine Achse auf der Oberfläche senkrecht steht; und wird der Körper in eine solche Lage gebracht, daß seine Grundfläche die Flüssigkeit an einer Stelle berührt, und dann losgelassen, so bleibt er nicht in dieser Stellung, sondern kehrt in die symmetrische Lage zurück.

Zunächst sei das Segment größer als eine Halbkugel. Es werde mit einer Ebene durch seine Achse und den Mittelpunkt der Erde geschnitten, und, wenn möglich, befinde es sich in der in der Figur dargestellten Lage in Ruhe, wo AB die Schnittlinie der Ebene mit der Grundfläche des Segments ist, DE die Achse des Segments, C der Mittelpunkt der Kugel, von der das Segment ein Teil ist, O der Mittelpunkt der Erde. — Der Schwerpunkt H des eintauchenden Teils liegt auf OC, da, wenn zwei Kugeln sich schneiden, ihr Schnitt ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht steht. G sei der Schwerpunkt des Segments. Wir ziehen die Strecke HG und verlängern sie bis F, so daß $FG : GH =$ (Volumen des eintauchenden Teils) : (Rest des Segments).



Wir ziehen OF.

Dann wirkt das Gewicht des Teils des Segments außerhalb der Flüssigkeit abwärts längs FO und das Gewicht des eintauchenden Teils abwärts längs HO, während der Druck der Flüssigkeit auf den eintauchenden Teil aufwärts längs OH wirkt und nach Voraussetzung größer als das Gewicht des eintauchenden Teils ist.

Daher wird kein Gleichgewicht herrschen, sondern der Teil des Segments auf der Seite von A wird sich heben und der auf der Seite von B sich senken, bis DE eine zur Flüssigkeitsoberfläche senkrechte Lage annimmt.

Und wenn DE diese Lage angenommen hat, liegen die Schwerpunkte des eintauchenden Teils und des Teils außerhalb der Flüssigkeit in dem von O auf die Flüssigkeitsoberfläche gefällten Lote; daher wirken die Gewichte der beiden Teile des Körpers und der

Druck der Flüssigkeit auf den eintauchenden Teil in einer vertikalen Geraden DE. Daher wird Gleichgewicht herrschen.

Der Beweis ist derselbe, wenn das Segment eine Halbkugel oder kleiner als eine Halbkugel ist.

Satz 9.

Wird ein Körper von der Gestalt eines Kugelsegments und aus einem Stoffe, der leichter als eine Flüssigkeit ist, in diese so hineingebracht, daß seine Grundfläche ganz unter der Oberfläche liegt, so befindet sich der Körper in einer Stellung im Gleichgewicht, bei der seine Achse auf der Oberfläche senkrecht steht.

[Der Beweis dieses Satzes behandelt nur einen von drei am Anfang unterschiedenen Fällen, nämlich den, wo das Segment größer als die Halbkugel ist, während nur Figuren für die Fälle gegeben werden, wo das Segment gleich der Halbkugel oder kleiner als die Halbkugel ist.]

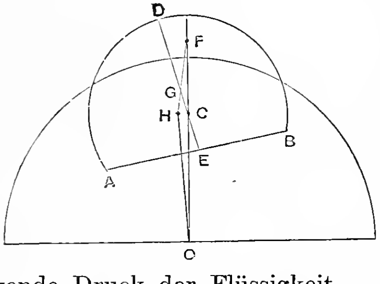
Nehmen wir zunächst an, das Segment sei größer als die Halbkugel. Es werde mit der Ebene durch seine Achse und den Erdmittelpunkt geschnitten, und, wenn möglich, befinde es sich in der in der Figur angedeuteten Stellung in Ruhe, wo AB der Schnitt der Ebene mit der Grundfläche des Segments ist, DE seine Achse, C der Mittelpunkt der Kugel, von der das Segment ein Teil ist, O der Mittelpunkt der Erde.

Der Schwerpunkt des außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Teils des Segments, etwa F, liegt auf der Verlängerung von OC, da seine Achse durch C geht.

Es sei G der Schwerpunkt des Segments. Wir ziehen FG und verlängern bis H, so daß die Proportion gilt

$FG : GH =$ (Volumen des eintauchenden Teils) : (Rest des Körpers).

Wir ziehen OH.



Dann wirkt das Gewicht des außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Körpers längs FO und der Druck der Flüssigkeit auf den eintauchenden Teil längs OH, während das Gewicht des eintauchenden Teils längs HO wirkt und nach der Voraussetzung kleiner ist als der längs OH wirkende Druck der Flüssigkeit.

Daher wird kein Gleichgewicht herrschen, sondern der auf der Seite von A liegende Teil des Segments wird sich heben, der nach B zu liegende sich senken, bis DE eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Lage annimmt.

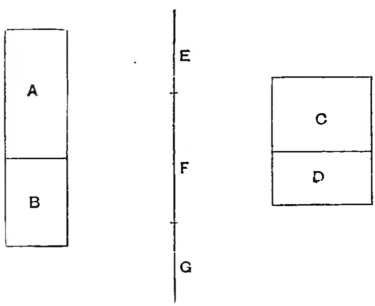
Über schwimmende Körper.

Buch II.

Satz 1.

Befindet sich ein Körper, der leichter als eine Flüssigkeit ist, in dieser in Ruhe, so verhält sich das Gewicht des Körpers zu dem desselben Volumens der Flüssigkeit wie der eintauchende Teil des Körpers zu dem ganzen.

Es sei $(A+B)$ der Körper, B der in die Flüssigkeit eintauchende Teil.



Es sei $(C+D)$ ein gleiches Volumen der Flüssigkeit, und zwar C an Volumen gleich A, D gleich B.

Ferner stelle die Strecke E das Gewicht des Körpers $(A+B)$ dar, die Strecke $(F+G)$ das Gewicht von $(C+D)$ und G das von D.

Dann gilt

$$\text{Gewicht von } (A+B) : \text{Gewicht von } (C+D) = E : (F+G) \quad . \ (1).$$

Das Gewicht von $(A+B)$ ist nun gleich dem Gewichte eines Volumens B der Flüssigkeit [I. 5], d. h. gleich dem Gewichte von D.

Das bedeutet $E = G$.

Aus (1) folgt also

$$\begin{aligned}\text{Gewicht von } (A+B) : \text{Gewicht von } (C+D) &= G : (F+G)\\ &= D : (C+D)\\ &= B : (A+B).\end{aligned}$$

Satz 2.

Wird ein Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht, dessen Achse nicht größer als $\frac{3}{4}p$ (wo p der Hauptparameter der erzeugenden Parabel ist) und dessen spezifisches Gewicht geringer als das einer Flüssigkeit ist, in diese Flüssigkeit gebracht, die Achse gegen die Vertikale unter irgend einem Winkel geneigt, doch so, daß die Grundfläche des Segments die Oberfläche der Flüssigkeit nicht berührt, so bleibt das Paraboloidsegment in dieser Lage nicht in Ruhe, sondern kehrt in die Lage zurück, bei der die Achse vertikal ist.

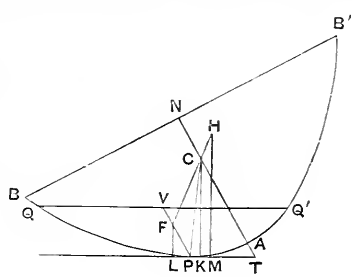
Die Achse des Paraboloidsegments sei AN, und durch AN legen wir die zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene. Diese Ebene schneide das Paraboloid in der Parabel BAB', die Grundfläche des Segments in BB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in der Parabelsehne QQ'.

Da nun die Achse AN in eine Lage gebracht ist, die nicht rechtwinklig zu QQ' ist, so ist BB' nicht parallel zu QQ'.

Wir ziehen die zu QQ' parallele Parabeltangente PT, wo P der Berührungspunkt ist.[1])

Durch P ziehen wir PV parallel zu AN bis zum Schnittpunkte V mit QQ'. Dann ist PV ein Durchmesser der Parabel und auch die Achse des in die Flüssigkeit eintauchenden Teils des Paraboloids.

Es seien AN, PV in C, F so geteilt, daß $AC = 2\,CN$ und $PF = 2\,FV$; dann ist C der Schwerpunkt des Paraboloids BAB' und F der des in die Flüssigkeit eintauchenden Teils, wie im Buche „Über Gleichgewichte" (ἐν ταῖς ἰσορροπίαις) bewiesen ist[2]).



Wir ziehen die Verbindungslinie FC und verlängern sie bis H, so daß H der Schwerpunkt des oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Teils des Paraboloids ist.

Da nun $\quad AN = \frac{3}{2} AC$

und $\quad AN \leqq \frac{3}{4} p,$

so folgt $\quad AC \leqq \frac{p}{2}.$

---

[1]) Der Rest des Beweises fehlt in der Übersetzung von Tartaglia, ist aber in dem neuen Texte von Heiberg vorhanden.

[2]) Da die Bestimmung des Schwerpunktes eines Paraboloidsegments, die hier als bekannt angenommen wird, in keinem erhaltenen Werke des

Zieht man also CP, so ist der Winkel CPT spitz.[1]) Wird also von C das Lot CK auf PT gefällt, so liegt K zwischen P und T. Und zieht man FL, HM parallel zu CK bis zu den Schnittpunkten mit PT, so stehen beide auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht. Nun wirkt die auf den eintauchenden Teil des Paraboloidsegments wirkende Kraft längs LF nach oben, während das Gewicht des außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Teils längs HM nach unten wirkt. Daher herrscht kein Gleichgewicht, sondern das Segment dreht sich derart, daß sich B nach oben, B' nach unten bewegt, bis AN die vertikale Lage erreicht.

[Zum Vergleich werde das trigonometrische Äquivalent für diesen und andere Sätze eingefügt.

Der Winkel NTP, unter dem in der obigen Figur die Achse AN gegen die Oberfläche der Flüssigkeit geneigt ist, werde mit ϑ bezeichnet.

Dann sind die auf AN und die Tangente in A als Achsen bezogenen Koordinaten des Punktes P

$$\frac{p}{4}\cot^2\vartheta, \quad \frac{p}{2}\cot\vartheta,$$

wo p der Hauptparameter ist.

Wir setzen $\qquad AN = h, \quad PV = k.$

Ist nun x' die Entfernung von T bis zu der Orthogonalprojektion von F auf TP und x die entsprechende Entfernung für den Punkt C, so haben wir

$$x' = \frac{p}{2}\cot^2\vartheta\cdot\cos\vartheta + \frac{p}{2}\cot\vartheta\cdot\sin\vartheta + \frac{2}{3}k\cos\vartheta,$$

$$x = \frac{p}{4}\cot^2\vartheta\cdot\cos\vartheta + \frac{2}{3}h\cos\vartheta,$$

woraus folgt $\quad x' - x = \cos\vartheta\left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}(h-k)\right\}.$

Archimedes vorkommt, so darf man wohl vermuten, daß sie in einer jetzt verlorenen Abhandlung ausgeführt worden ist oder in einem verlorenen Teile einer größeren Abhandlung, die die zwei Bücher über das Gleichgewicht von Ebenen enthalten hat.

[1]) Die Richtigkeit dieses Schlusses ergibt sich leicht aus der Eigenschaft der Subnormale. Denn trifft die Normale in P die Achse in G, so ist AG größer als $\frac{p}{2}$, ausgenommen den Fall, wo die Normale die Normale im Scheitel A selbst ist. Aber dieser letzte Fall ist hier ausgeschlossen, da nach der Voraussetzung AN nicht vertikal liegt. Da also P ein von A verschiedener Punkt ist, so ist AG immer größer als AC, und da der Winkel TPG ein rechter ist, so muß TPC spitz sein.

Damit das Paraboloidsegment sich so drehe, daß der Winkel PTN größer wird, muß x' größer als x oder der eben gefundene Ausdruck muß positiv sein.

Das ist immer der Fall, welchen Wert auch ϑ haben möge, wenn

$$\frac{p}{2} \geqq \frac{2}{3} h$$

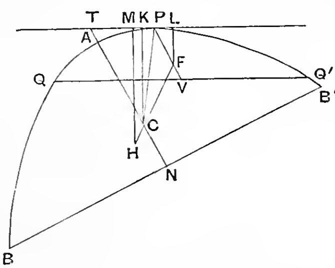
oder

$$h \leqq \frac{3}{4}.]$$

Satz 3.

Wird ein Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht, dessen Achse nicht größer als $\frac{3}{4}p$ *(wo* p *der Parameter ist) und dessen spezifisches Gewicht kleiner als das einer Flüssigkeit ist, in die Flüssigkeit gebracht, die Achse unter irgend einem Winkel gegen die Vertikale geneigt, doch so, daß seine Grundfläche ganz eintaucht, so bleibt der Körper nicht in dieser Lage, sondern kehrt in die Lage zurück, bei der die Achse vertikal ist.*

Die Achse des Paraboloids sei AN und durch AN werde die zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene gelegt, die das Paraboloid in der Parabel BAB' schneidet, die Grundfläche des Segments in BNB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in der Parabelsehne QQ'.



Da nun AN auf der Flüssigkeitsoberfläche nicht senkrecht steht, so sind QQ' und BB' nicht parallel.

Wir ziehen zu QQ' die Parallele PT, die die Parabel in P berühre. PT schneide die Verlängerung von NA in T. Wir ziehen den Durchmesser PV, der QQ' in V halbiert. PV ist dann die Achse des über der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Teils des Paraboloids.

Es sei C der Schwerpunkt des ganzen Paraboloidsegments, F der des Teils außerhalb der Flüssigkeit. Wir ziehen FC und verlängern bis H, so daß H der Schwerpunkt des eintauchenden Teils ist.

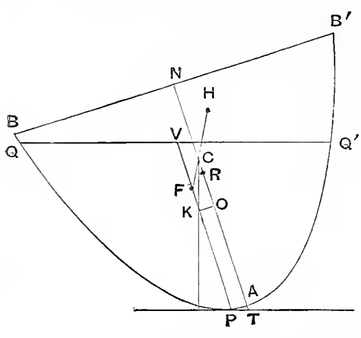
Da nun $AC \leqq \frac{p}{2}$, so ist der Winkel CPT spitz wie in dem vorigen Satze. Fällt man also von C das Lot CK auf PT, so liegt K zwischen P und T. Zieht man HM, FL parallel zu CK, so stehen sie auch auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht.

Die auf den eintauchenden Teil wirkende Kraft wirkt längs HM nach oben, während das Gewicht des Restes längs der Verlängerung von LF nach unten wirkt. Daher dreht sich das Paraboloid bis in die Lage, bei der AN vertikal ist.

Satz 4.

Gegeben ist ein Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht, dessen Achse AN größer als $\frac{3}{4}p$ (wo p der Parameter ist) und dessen spezifisches Gewicht kleiner als das einer Flüssigkeit ist, so jedoch, daß sein Verhältnis zu ihm nicht kleiner als $(AN - \frac{3}{4}p)^2 : AN^2$ ist; wird das Segment des Paraboloids unter beliebiger Neigung seiner Achse gegen die Vertikale in die Flüssigkeit gebracht, doch so, daß seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit nicht berührt, so bleibt es nicht in dieser Lage, sondern kehrt in die Lage zurück, bei der die Achse vertikal ist.

Die Achse des Paraboloidsegments sei AN und es werde durch sie die zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene gelegt, die das Segment in der Parabel BAB', die Grundfläche des Segments in BB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in der Parabelsehne QQ' schneidet.



Dann steht also AN nicht auf QQ' senkrecht.

Wir ziehen zu QQ' die Parallele PT, die die Parabel in P berührt, und den Durchmesser PV, der QQ' in V halbiert. Dann ist PV die Achse des untertauchenden Teils des Körpers.

Es sei C der Schwerpunkt des ganzen Körpers, F der des eintauchenden Teils. Wir ziehen FC und verlängern bis H, so daß H der Schwerpunkt des übrigbleibenden Teils ist.

Da nun $\qquad AN = \frac{3}{2} AC$

und $\qquad AN > \frac{3}{4} p,$

so folgt $\qquad AC > \frac{p}{2}.$

Wir tragen auf CA die Strecke CO gleich $\frac{p}{2}$ ab und auf OC die Strecke OR gleich $\frac{1}{2}AO$.

Da nun $$AN = \tfrac{3}{2}AC$$
und $$AR = \tfrac{3}{2}AO,$$
so erhalten wir durch Subtraktion
$$NR = \tfrac{3}{2}OC.$$
Das heißt $$AN - AR = \tfrac{3}{2}OC$$
$$= \tfrac{3}{4}p$$
oder $$AR = (AN - \tfrac{3}{4}p).$$

Folglich wird $(AN - \frac{3}{4}p)^2 : AN^2 = AR^2 : AN^2$, und daher ist das Verhältnis des spezifischen Gewichts des Körpers zu dem der Flüssigkeit nach der Voraussetzung nicht kleiner als das Verhältnis $AR^2 : AN^2$.

Aber nach Satz 1 ist das erste Verhältnis gleich dem Verhältnis des eintauchenden Teils zu dem ganzen Körper, d. h. gleich dem Verhältnis $PV^2 : AN^2$ [*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 24].

Daraus folgt $$PV^2 : AN^2 \geqq AR^2 : AN^2$$
oder $$PV \geqq AR.$$
Es folgt $$PF (= \tfrac{2}{3}PV) \geqq \tfrac{2}{3}AR$$
$$\geqq AO.$$

Wird also in O auf OA das Lot OK errichtet, so schneidet es PF zwischen P und F.

Verbindet man ferner C mit K, so ist das Dreieck KCO kongruent dem von der Normale, der Subnormale und der Ordinate des Punktes P gebildeten Dreieck (da CO gleich $\frac{1}{2}p$ oder der Subnormale und KO gleich der Ordinate ist).

Somit ist CK parallel zu der Normale in P oder senkrecht zu der Tangente in P und zur Oberfläche der Flüssigkeit.

Zieht man also durch F, H die Parallelen zu CK, so stehen sie auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht, und die auf den eintauchenden Teil des Körpers wirkende Kraft wirkt längs der ersten nach oben, während das Gewicht des anderen Teils längs der zweiten nach unten wirkt.

Daher bleibt der Körper nicht in seiner Lage, sondern dreht sich, bis AN eine vertikale Lage einnimmt.

[Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie vorher (Anmerkung am Schlusse von Satz 2) haben wir

$$x' - x = \cos\vartheta \left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}(h-k)\right\},$$

und der *kleinste* Wert des Ausdrucks in der Klammer für verschiedene Werte von ϑ ist

$$\frac{p}{2} - \frac{2}{3}(h-k),$$

entsprechend der Lage, bei der AN vertikal oder $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist.

Daher herrscht nur in dieser Lage stabiles Gleichgewicht, vorausgesetzt, daß

$$k \geqq (h - \tfrac{3}{4}p)$$

oder, wenn s das Verhältnis des spezifischen Gewichtes des Körpers zu dem der Flüssigkeit ist (in diesem Falle $= k^2 : h^2$),

$$s \geqq (h - \tfrac{3}{4}p)^2 : h^2.]$$

Satz 5.

Gegeben ist ein Segment eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht, dessen Achse AN größer als $\frac{3}{4}p$ (wo p der Parameter ist) und dessen spezifisches Gewicht kleiner als das einer Flüssigkeit ist, doch so, daß das Verhältnis der spezifischen Gewichte nicht größer ist als das Verhältnis $\{AN^2 - (AN - \frac{3}{4}p)^2\} : AN^2$; wird das Segment unter beliebiger Neigung seiner Achse gegen die Vertikale in die Flüssigkeit gebracht, jedoch so, daß seine Grundfläche vollständig untergetaucht ist, so bleibt es nicht in dieser Lage, sondern kehrt in die Lage zurück, bei der AN vertikal ist.

Durch AN werde die zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene gelegt, die das Paraboloidsegment in der Parabel BAB', die Grundfläche des Segments in BB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in der Parabelsehne QQ' schneidet.

Wir ziehen die zu QQ' parallele Tangente PT, und der Durchmesser PV, der QQ' halbiert, ist demnach die Achse des über der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Teils des Paraboloids.

Es sei F der Schwerpunkt des Teils außerhalb der Flüssigkeit, C der des ganzen Körpers; wir verlängern FC bis zum Schwerpunkte H des eintauchenden Teils.

Wie im vorigen Satze ist $AC > \frac{p}{2}$; wir tragen wieder CO gleich $\frac{p}{2}$ auf CA ab und OR gleich $\frac{1}{2}AO$ auf OC. Dann ist $AN = \frac{3}{2}AC$ und $AR = \frac{3}{2}AO$, und wir erhalten wie vorher

$$AR = (AN - \tfrac{3}{4}p).$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned}&(\text{spez. Gewicht des Körpers}):(\text{spez. Gewicht der Flüssigkeit})\\ &\leqq \{AN^2 - (AN - \tfrac{3}{4}p)^2\}:AN^2\\ &\leqq (AN^2 - AR^2):AN^2.\end{aligned}$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}&(\text{eintauchender Teil}):(\text{ganzer Körper})\\ &\leqq (AN^2 - AR^2):AN^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(\text{ganzer Körper}):(\text{Teil über der Oberfläche})\\ &\leqq AN^2:AR^2.\end{aligned}$$

Daher ist

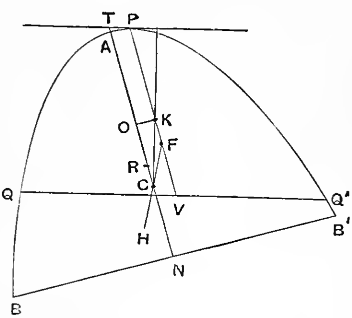
$$AN^2:PV^2 \leqq AN^2:AR^2,$$

woraus folgt

$$PV \geqq AR$$

und

$$\begin{aligned}PF &\geqq \tfrac{2}{3}AR\\ &\geqq AO.\end{aligned}$$



Wird daher in O auf AC das Lot errichtet, so trifft es PF in einem Punkte K zwischen P und F.

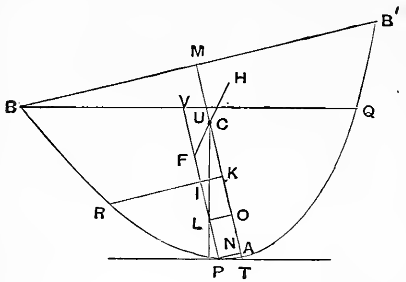
Und da $CO = \frac{1}{2}p$, so steht CK senkrecht auf PT, wie im vorigen Satze.

Nun wirkt die auf den eintauchenden Teil des Körpers wirkende Kraft durch H nach oben und das Gewicht des anderen Teils durch F nach unten, beidemal in Richtungen, die zu CK parallel sind, woraus sich der Satz ergibt.

Satz 6.

Wird ein Segment eines Rotationsparaboloids, das leichter als eine Flüssigkeit ist, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht und dessen Achse AM größer als $\frac{3}{4}p$ ist, doch so, daß $AM:\frac{1}{2}p < 15:4$ ist, unter beliebiger Neigung seiner Achse gegen die Vertikale in die Flüssigkeit gebracht, so daß seine Grundfläche die Flüssigkeit berührt, so bleibt es nicht in solcher Lage, daß die Grundfläche die Oberfläche gerade in einem Punkte berührt.

Das Paraboloidsegment sei in die beschriebene Lage gebracht, und die zur Flüssigkeitsoberfläche senkrechte Ebene durch die Achse AM schneide das Paraboloidsegment in dem Parabelsegment BAB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in BQ.



Auf AM werde C so angenommen, daß $AC = 2\,CM$ (oder so, daß C der Schwerpunkt des Paraboloidsegments ist), und auf CA werde die Strecke CK abgetragen, die sich aus folgender Proportion ergibt

$$AM : CK = 15 : 4.$$

Dann ist nach der Voraussetzung

$$AM : CK > AM : \tfrac{1}{2}p;$$

folglich $$CK < \tfrac{1}{2}p.$$

Auf CA werde CO gleich $\frac{1}{2}p$ abgetragen. Ferner errichten wir in K auf AC das Lot KR, das die Parabel in R trifft.

Wir ziehen die zu BQ parallele Tangente PT und durch P den Durchmesser PV, der BQ in V halbiert und KR in J trifft.

Dann ist $$PV : PJ \geqq KM : AK,$$

„denn das ist bewiesen“.[1])

[1]) Wir besitzen keinen Hinweis auf das Werk, in dem der Beweis dieses Satzes enthalten war. Der folgende Beweis ist kürzer als der von Robertson (im Anhang zu Torellis Ausgabe).

BQ schneide AM in U und PN sei die Ordinate von P auf AM.

Wir haben zu beweisen $PV \cdot AK \geqq PJ \cdot KM$, oder mit anderen Worten, $(PV \cdot AK - PJ \cdot KM)$ ist *positiv* oder *null*.

Nun ist
$$\begin{aligned} PV \cdot AK - PJ \cdot KM &= AK \cdot PV - (AK - AN)(AM - AK) \\ &= AK^2 - AK(AM + AN - PV) + AM \cdot AN \\ &= AK^2 - AK \cdot UM + AM \cdot AN, \end{aligned}$$
(da $AN = AT$).

Ferner gilt $$UM : BM = NT : PN.$$

Folglich $$UM^2 : (p \cdot AM) = 4\,AN^2 : (p \cdot AN),$$

woraus folgt $$UM^2 = 4\,AM \cdot AN$$

oder $$AM \cdot AN = \frac{UM^2}{4}.$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} PV \cdot AK - PJ \cdot KM &= AK^2 - AK \cdot UM + \frac{UM^2}{4} \\ &= \left(AK - \frac{UM}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

und demnach kann $(PV \cdot AK - PJ \cdot KM)$ nicht negativ sein.

Ferner ist $CK = \frac{4}{15} AM = \frac{2}{5} AC,$

woraus folgt $AK = AC - CK = \frac{3}{5} AC = \frac{2}{5} AM.$

Folglich ist
$$KM = \frac{3}{5} AM$$
$$= \frac{3}{2} AK.$$

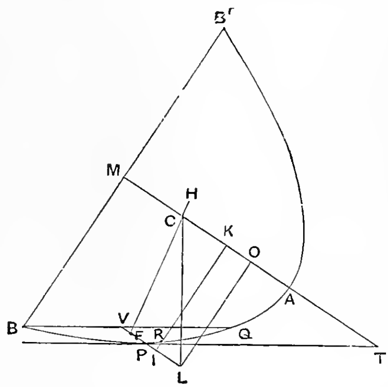
Es folgt
$$PV \geqq \frac{3}{2} PJ,$$
so daß
$$PJ \leqq 2\,JV.$$

Es sei F der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Paraboloids, so daß $PF = 2\,FV$. Wir verlängern FC bis zum Schwerpunkte H des Teils außerhalb der Flüssigkeit.

OL ziehen wir senkrecht zu PV.

Da nun $CO = \frac{1}{2} p$, so muß CL auf PT und damit auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht stehen.

Die auf den eintauchenden Teil des Paraboloids und den Teil außerhalb der Flüssigkeit wirkenden Kräfte wirken bezüglich aufwärts und abwärts längs der Parallelen zu CL durch F und H.



Daher kann das Paraboloid nicht in der Lage bleiben, bei der B gerade die Flüssigkeitsoberfläche berührt, sondern muß sich so drehen, daß der Winkel PTM wächst.

Der Beweis ist derselbe in dem Falle, wo der Punkt J nicht auf VP, sondern auf der Verlängerung von VP liegt, wie in der zweiten Figur.[1])

[Mit den auf S. 382 angewandten Bezeichnungen haben wir, wenn die Grundfläche BB' die Flüssigkeitsoberfläche in B berührt,
$$BM = BV \sin\vartheta + PN,$$
und wegen der Parabeleigenschaft
$$BV^2 = (p + 4\,AN) \cdot PV$$
$$= pk(1 + \cot^2\vartheta).$$

Folglich ist
$$\sqrt{ph} = \sqrt{pk} + \frac{p}{2} \cot\vartheta.$$

---

[1]) Merkwürdigerweise sind die Figuren bei Torelli, Nizze und Heiberg alle inkorrekt, da sie alle den Punkt, den ich J genannt habe, auf BQ statt auf der Verlängerung von VP haben.

Um das Ergebnis des Satzes zu erhalten, haben wir k aus dieser Gleichung und der folgenden zu eliminieren

$$x' - x = \cos\vartheta \left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \tfrac{2}{3}(h - k)\right\}.$$

Aus der ersten Gleichung haben wir

$$k = h - \sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta + \frac{p}{4}\cot^2\vartheta$$

oder
$$h - k = \sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta - \frac{p}{4}\cot^2\vartheta.$$

Folglich wird

$$x' - x = \cos\vartheta\left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta - \frac{p}{4}\cot^2\vartheta\right)\right\}$$

$$= \cos\vartheta\left\{\frac{p}{4}\left(\frac{5}{3}\cot^2\vartheta + 2\right) - \frac{2}{3}\sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta\right\}.$$

Wenn nun der Körper in der beschriebenen Stellung nie in Ruhe sein kann, sondern sich drehen soll, so daß der Winkel PTM wächst, so muß der Ausdruck in der Klammer für jeden beliebigen Wert von ϑ positiv sein.

Das ist dann der Fall, wenn

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 ph < \tfrac{5}{6}p^2$$

oder
$$h < \tfrac{15}{8}p.]$$

Satz 7.

Gegeben ist ein Segment eines Rotationsparaboloids, das leichter als eine Flüssigkeit ist, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht und dessen Achse AM größer als $\frac{3}{4}p$ ist, doch so, daß $AM:\frac{1}{2}p < 15:4$; wird das Segment in die Flüssigkeit gebracht, so daß seine Grundfläche vollständig eintaucht, so bleibt es nie in solcher Lage, daß die Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit gerade in einem Punkte berührt.

Der Körper befinde sich in solcher Lage, daß genau ein Punkt der Grundfläche (B) die Oberfläche der Flüssigkeit berührt. Die Ebene durch B und die Achse AM schneide den Körper in dem Parabelsegment BAB' und die Flüssigkeitsoberfläche in der Parabelsehne BQ.

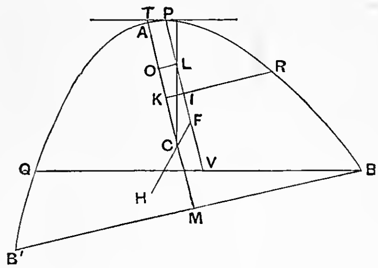
C sei der Schwerpunkt des Segments, so daß $AC = 2\,CM$; auf CA tragen wir CK ab, so daß

$$AM : CK = 15 : 4.$$

Es folgt
$$CK < \tfrac{1}{2}p.$$

Auf CA tragen wir CO gleich $\frac{1}{2}p$ ab. In K errichten wir auf AM das Lot KR, das die Parabel in R trifft.

PT, in P berührend, sei die zu BQ parallele Tangente der Parabel, und PV der BQ halbierende Durchmesser, d. h. die Achse des Teils des Körpers außerhalb der Flüssigkeit.



Wie im vorigen Satze beweisen wir nun

$$PV \geqq \tfrac{3}{2} PJ$$

und $$PJ \leqq 2\,JV.$$

Es sei F der Schwerpunkt des außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Teils des Körpers; wir verlängern die Verbindungslinie FC bis zum Schwerpunkte H des eintauchenden Teils.

Wir fällen von O auf PV das Lot OL, und wie vorher steht, da $CO = \frac{1}{2}p$, CL auf der Tangente PT senkrecht.

Die Parallelen zu CL durch H, F stehen auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht, und somit ist wie vorher der Satz bewiesen.

Der Beweis ist derselbe, wenn der Punkt J nicht auf VP, sondern auf der Verlängerung von VP liegt.

Satz 8.

Gegeben ist ein Körper von der Form eines Segments eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht und dessen Achse AM größer als $\frac{3}{4}p$ ist, doch so, daß $AM : \frac{1}{2}p < 15 : 4$, und dessen spezifisches Gewicht zu dem einer Flüssigkeit ein kleineres Verhältnis hat als $(AM - \frac{3}{4}p)^2 : AM^2$; wird nun der Körper in die Flüssigkeit gebracht, so daß seine Grundfläche die Flüssigkeit nicht berührt und seine Achse gegen die Vertikale geneigt ist, so kehrt der Körper nicht in die Lage zurück, bei der seine Achse vertikal ist, und bleibt in keiner anderen Lage, außer in der, in welcher seine Achse mit der Flüssigkeitsoberfläche einen gewissen noch anzugebenden Winkel bildet.

Die Strecke am sei gleich der Achse AM gemacht und auf am werde der Punkt c so gewählt, daß $ac = 2\,cm$. Auf ca tragen wir co gleich $\frac{1}{2}p$ ab, und or gleich $\frac{1}{2}ao$ auf oc.

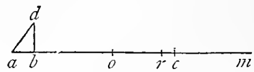
Es sei $X + Y$ eine Strecke, die der folgenden Proportion genügt

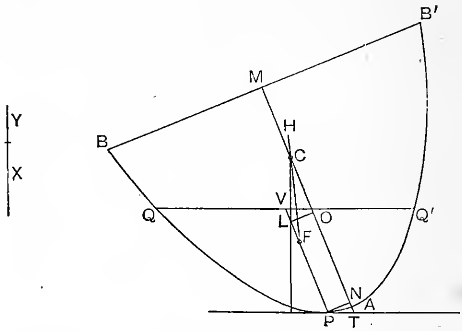
$$(\text{spez. Gew. des Körpers}) : (\text{spez. Gew. der Flüssigkeit}) = (X+Y)^2 : am^2 \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha),$$

und es sei $X = 2\,Y$.

Nun ist $$ar = \tfrac{3}{2}\,ao = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{2}{3}\,am - \tfrac{1}{2}\,p\right)$$
$$= am - \tfrac{3}{4}\,p$$
$$= AM - \tfrac{3}{4}\,p.$$

Folglich ist nach der Voraussetzung
$$(X + Y)^2 : am^2 < ar^2 : am^2,$$
woraus folgt $$X + Y < ar$$
und $$X < ao.$$





Auf oa tragen wir ob gleich X ab und errichten in b auf ab das Lot bd, dessen Länge sich ergibt aus
$$bd^2 = \tfrac{1}{2}\,co \cdot ab \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$
Wir ziehen ad.

Nun werde der Körper unter beliebiger Neigung seiner Achse gegen die Vertikale in die Flüssigkeit gebracht. Durch AM werde die zur Flüssigkeitsoberfläche senkrechte Ebene gelegt, und diese Ebene schneide das Paraboloid in der Parabel BAB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in der Parabelsehne QQ'.

Wir ziehen die zu QQ' parallele Tangente PT, die in P berühre; PV sei der QQ' in V halbierende Durchmesser (oder die Achse des eintauchenden Teils des Körpers) und PN die Ordinate von P.

Auf AM tragen wir AO gleich ao ab und OC gleich oc auf OM und von O fällen wir das Lot OL auf PV.

I. Angenommen, der Winkel OTP sei größer als der Winkel dab.

Somit ist $$PN^2 : NT^2 > db^2 : ba^2.$$
Aber $$PN^2 : NT^2 = p : 4\,AN$$
$$= co : NT$$
und $$db^2 : ba^2 = \tfrac{1}{2}\,co : ab, \quad \text{nach } (\beta).$$

Folglich $NT < 2\,ab$

oder $AN < ab$,

woraus folgt $NO > bo$ (da $ao = AO$)

$> X$.

Nun ist $(X+Y)^2 : am^2$

$=$ (spez. Gew. des Körpers) : (spez. Gew. der Flüssigkeit)

$=$ (eintauchender Teil) : (ganzer Körper)

$= PV^2 : AM^2$,

so daß $X + Y = PV$.

Aber $PL\,(= NO) > X$

$> \frac{2}{3}(X+Y)$, da $X = 2\,Y$,

$> \frac{2}{3} PV$

oder $PV < \frac{3}{2} PL$

und daher $PL > 2\,LV$.

Auf PV werde der Punkt F so gewählt, daß $PF = 2\,FV$, d. h. daß F der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers ist.

Ferner ist $AC = ac = \frac{2}{3} am = \frac{2}{3} AM$, und folglich ist C der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Wir verlängern FC bis zum Schwerpunkte H des außerhalb der Flüssigkeit befindlichen Teils des Körpers.

Da nun $CO = \frac{1}{2} p$, so steht CL auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht; daher tun es auch die Parallelen zu CL durch F und H. Aber auf den eintauchenden Teil wirkt eine Kraft aufwärts durch F und auf den Rest des Körpers eine andere durch H abwärts.

Daher bleibt der Körper nicht in Ruhe, sondern dreht sich so, daß der Winkel MTP kleiner wird.

II. Angenommen, der Winkel OTP sei kleiner als der Winkel dab. In diesem Falle haben wir statt der obigen Ergebnisse die folgenden

$AN > ab$,

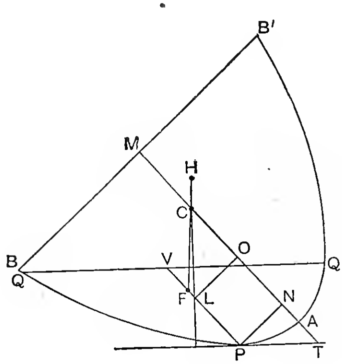
$NO < X$.

Ferner

$PV > \frac{3}{2} PL$

und daher

$PL < 2\,VL$.



Wir machen PF gleich $2\,FV$, so daß F der Schwerpunkt des eintauchenden Teils ist.

Wie vorher verfahrend, beweisen wir in diesem Falle, daß der Körper sich so dreht, daß der Winkel MTP *wächst.*

III. Ist der Winkel MTP dem Winkel dab gleich, so treten Gleichungen an die Stelle der erhaltenen Ungleichheiten, und L ist selbst der Schwerpunkt des eintauchenden Teils. Daher wirken alle Kräfte in einer Geraden, dem Lote CL; somit herrscht Gleichgewicht, und der Körper bleibt in der beschriebenen Stellung.

[Mit den oben angewandten Bezeichnungen haben wir

$$x' - x = \cos\left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}(h-k)\right\},$$

und eine Gleichgewichtslage erhalten wir, wenn wir den Ausdruck in der Klammer gleich Null setzen. Wir haben dann

$$\frac{p}{4}\cot^2\vartheta = \frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}.$$

Es läßt sich leicht verifizieren, daß der dieser Gleichung genügende Winkel ϑ gerade der von Archimedes definierte ist. Denn es war

$$\frac{3}{2}X = PV = k,$$

woraus sich ergibt

$$ab = \frac{2}{3}h - \frac{p}{2} - \frac{2}{3}k = \frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}.$$

Ferner war $$bd^2 = \frac{p}{4}\cdot ab.$$

Es folgt

$$\cot^2 dab = \frac{ab^2}{db^2} = \frac{4}{p}\left\{\frac{2}{3}(h-k) - \frac{p}{2}\right\}.]$$

Satz 9.

Gegeben ist ein Körper von der Form eines Segments eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht und dessen Achse AM größer als $\frac{3}{4}p$ ist, doch so, daß $AM:\frac{1}{2}p < 15:4$, und dessen spezifisches Gewicht zu dem einer Flüssigkeit ein größeres Verhältnis hat als $\{AM^2 - (AM - \frac{3}{4}p)^2\}:AM^2$; wird nun der Körper in die Flüssigkeit gebracht, so daß seine Grundfläche ganz innerhalb der Flüssigkeit liegt und seine Achse gegen die Vertikale geneigt ist, so kehrt der Körper nicht in die Lage zurück, bei der seine Achse *vertikal ist, und bleibt in keiner anderen Lage außer in der, in welcher seine Achse mit der Flüssigkeitsoberfläche einen Winkel bildet, der dem im vorigen Satze beschriebenen gleich ist.*

Wir machen am gleich AM und nehmen auf am den Punkt c so an, daß $ac = 2\,cm$. Auf ca tragen wir co gleich $\frac{1}{2}p$ ab und ar auf ac, so daß $ar = \frac{3}{2}ao$.

Die Strecke $(X + Y)$ genüge der Proportion

$$\text{(spez. Gewicht des Körpers)} : \text{(spez. Gewicht der Flüssigkeit)} = \{am^2 - (X+Y)^2\} : am^2,$$

und es sei $\quad X = 2\,Y.$

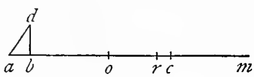
Nun ist
$$\begin{aligned} ar &= \tfrac{3}{2}ao \\ &= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{2}{3}am - \tfrac{1}{2}p\right) \\ &= AM - \tfrac{3}{4}p. \end{aligned}$$

Folglich haben wir nach der Voraussetzung

$$(am^2 - ar^2) : am^2 < \{am^2 - (X+Y)^2\} : am^2,$$

woraus folgt

$$X + Y < ar$$



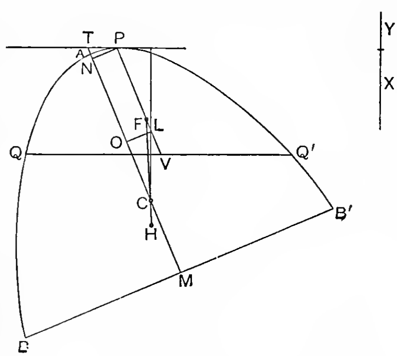
und somit

$$X < ao.$$

Wir tragen ob gleich X auf oa ab und errichten in b auf ba das Lot bd, dessen Länge sich aus der folgenden Beziehung ergibt

$$bd^2 = \tfrac{1}{2}co \cdot ab.$$

Wir ziehen ad.



Nun werde der Körper in die aus der Figur ersichtliche Lage gebracht, wobei seine Achse AM gegen die Vertikale geneigt ist. Die auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht stehende Ebene durch AM schneide den Körper in der Parabel BAB' und die Oberfläche der Flüssigkeit in QQ'.

PT sei die zu QQ' parallele Tangente, PV der QQ' halbierende Durchmesser (oder die Achse des Teils des Paraboloids außerhalb der Flüssigkeit), PN die Ordinate von P.

I. Wir nehmen an, der Winkel MTP sei größer als der Winkel dab. AM werde wie vorher in C und O so geteilt, daß

$AC = 2\,CM$, $OC = \frac{1}{2}p$, und demnach sind AM, am gleichmäßig geteilt. Wir fällen auf PV das Lot OL.

Dann haben wir wie im vorigen Satze

$$PN^2 : NT^2 > db^2 : ba^2,$$

woraus folgt $$co : NT > \tfrac{1}{2}\,co : ab;$$

also $$AN < ab.$$

Es folgt $$NO > bo$$
$$> X.$$

Da nun wiederum das spezifische Gewicht des Körpers sich zu dem der Flüssigkeit verhält wie der eintauchende Teil des Körpers zum ganzen, so haben wir

$$\{AM^2 - (X+Y)^2\} : AM^2 = (AM^2 - PV^2) : AM^2$$

oder $$(X+Y)^2 : AM^2 = PV^2 : AM^2.$$

D. h. $$X + Y = PV.$$

Und $$PL \text{ (oder } NO) > X$$
$$> \tfrac{2}{3}\,PV,$$

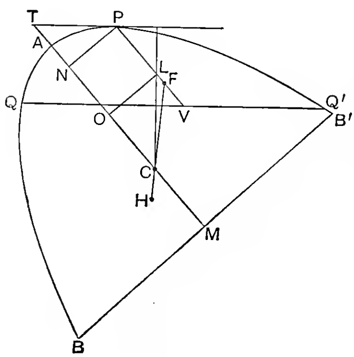
so daß $$PL > 2\,LV.$$

Auf PV nehmen wir F so an, daß $PF = 2\,FV$. Dann ist F der Schwerpunkt des Teils des Körpers über der Flüssigkeit.

Ebenso ist C der Schwerpunkt des ganzen Körpers. Wir ziehen die Verbindungslinie FC und verlängern sie bis zum Schwerpunkte H des eintauchenden Teils.

Da nun $CO = \frac{1}{2}p$, so steht CL auf PT und der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht, und die auf den eintauchenden Teil des Körpers wirkende Kraft wirkt nach oben längs der Parallelen zu CL durch H, während das Gewicht des Restes längs der Parallelen zu CL durch F nach unten wirkt.

Daher bleibt der Körper nicht in seiner Lage, sondern dreht sich so, daß der Winkel MTP kleiner wird.



II. Genau wie im vorigen Satze beweisen wir, wenn der Winkel MTP kleiner als der Winkel dab ist, daß dann der Körper nicht in seiner Stellung bleibt, sondern sich so dreht, daß der Winkel MTP wächst.

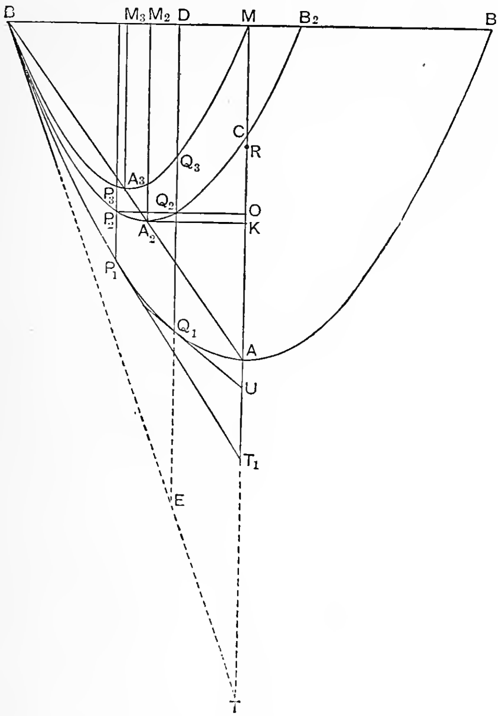
III. Ist der Winkel MTP dem Winkel dab gleich, so bleibt der Körper in dieser Lage, weil L und F zusammenfallen und alle Kräfte längs der einen Geraden CL wirken.

Satz 10.

Gegeben ist ein Körper von der Form eines Segments eines Rotationsparaboloids, dessen Grundfläche zur Achse senkrecht ist und dessen Achse AM eine solche Länge hat, daß $AM : \frac{1}{2}p > 15 : 4$; der Körper werde so in eine Flüssigkeit von größerem spezifischen Gewicht gebracht, daß sich seine Grundfläche ganz oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche befindet; es sollen die Gleichgewichtslagen ermittelt werden.

(Einleitung.)

Das Segment des Paraboloids werde von einer durch seine Achse AM gelegten Ebene in dem Parabelsegment BAB_1 geschnitten, dessen Grundlinie BB_1 ist.



Wir teilen AM in C so, daß $AC = 2\,CM$, und tragen CK auf CA ab, so daß

$$AM : CK = 15 : 4 \quad \ldots \ldots \quad (\alpha),$$

woraus sich wegen der Voraussetzung ergibt

$$CK > \tfrac{1}{2}p.$$

Auf CA werde CO gleich $\frac{1}{2}p$ abgetragen und auf AM der Punkt R so gewählt, daß $MR = \frac{3}{2}\,CO$.

Dann ist $$\begin{aligned} AR &= AM - MR \\ &= \tfrac{3}{2}(AC - CO) \\ &= \tfrac{3}{2} AO. \end{aligned}$$

Wir ziehen die Verbindungslinie BA und errichten auf AM das Lot KA_2, das BA in A_2 trifft; wir halbieren BA in A_3 und ziehen zu AM die Parallelen A_2M_2, A_3M_3, die BM bezüglich in M_2, M_3 treffen.

Mit A_2M_2, A_3M_3 als Achsen beschreiben wir Parabelsegmente, die dem Segment BAB_1 ähnlich sind. (Mittels ähnlicher Dreiecke folgt, daß BM die Grundlinie des Segments mit der Achse A_3M_3 und BB_2 die des Segments mit der Achse A_2M_2 ist, wo $BB_2 = 2BM_2$.)

Die Parabel BA_2B_2 geht dann durch C.

[Denn $$\begin{aligned} BM_2 : M_2M &= BM_2 : A_2K \\ &= A_2M_2 : AK \\ &= KM : AK \\ &= (CM + CK) : (AC - CK) \\ &= \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{15}\right) AM : \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{15}\right) AM \\ &= 9 : 6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta) \\ &= MA : AC. \end{aligned}$$

Daher liegt C auf der Parabel BA_2B_2 wegen der Umkehrung des Satzes 4 der *Quadratur der Parabel*.]

Wird nun in O auf AM das Lot errichtet, so schneidet dieses die Parabel BA_2B_2 in zwei Punkten, etwa Q_2, P_2. Durch Q_2 werde parallel zu AM die Gerade $Q_1Q_2Q_3D$ gezogen, die die Parabeln BAB_1, BA_3M bezüglich in Q_1, Q_3 und BM in D schneidet; $P_1P_2P_3$ sei die entsprechende Parallele zu AM durch P_2. Die Tangenten der äußeren Parabel in P_1, Q_1 mögen die Verlängerung von MA bezüglich in T_1, U treffen.

Da nun die drei Parabelsegmente ähnlich und ähnlich gelegen sind, da ferner ihre Grundlinien in dieselbe Gerade fallen und einen gemeinsamen Endpunkt haben, und da $Q_1Q_2Q_3D$ ein allen drei Segmenten gemeinsamer Durchmesser ist, so folgt

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = (B_2B_1 : B_1B) \cdot (BM : MB_2)^{1)}.$$

---

[1]) Dieses Ergebnis wird ohne Beweis als richtig angenommen, zweifellos weil es eine leichte Folgerung aus Satz 5 der *Quadratur der Parabel* ist. Es läßt sich folgendermaßen beweisen.

Da AA_2A_3B eine Gerade ist und $AN = AT$ mit den gewöhnlichen Bezeichnungen (wo PT die Tangente in P und PN die Ordinate ist), so folgt

Nun gilt $B_2 B_1 : B_1 B = MM_2 : BM$ (durch Division mit 2)

$= 2 : 5$, wegen der obigen Gleichung (β).

Ferner haben wir $BM : MB_2 = BM : (2\,BM_2 - BM)$

$= 5 : (6 - 5)$, wegen (β),

$= 5 : 1$.

Es folgt $Q_1 Q_2 : Q_2 Q_3 = 2 : 1$

oder
$$\left.\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= 2\, Q_2 Q_3 . \\ P_1 P_2 &= 2\, P_2 P_3 . \end{aligned}\right\}$$
Ähnlich

Ferner gilt, da
$$MR = \tfrac{3}{2}\, CO = \tfrac{3}{4} p,$$
$$AR = AM - MR$$
$$= AM - \tfrac{3}{4} p .$$

(Formulierung der zu beweisenden Sätze.)

Wird das Segment des Paraboloids so in die Flüssigkeit gebracht, daß seine Grundfläche sich ganz über der Oberfläche befindet, so ergeben sich die folgenden Gleichgewichtslagen:

(I.) *wenn*

(*spez. Gew. d. Körpers*) : (*spez. Gew. d. Flüssigkeit*) $\geqq AR^2 : AM^2$

$[\geqq (AM - \tfrac{3}{4}p)^2 : AM^2]$,

so ist der Körper im Gleichgewicht, wenn seine Achse AM *vertikal ist;*

(II.) *wenn*

(*spez. Gew. d. Körpers*) : (*spez. Gew. d. Flüssigkeit*) $< AR^2 : AM^2$

aber $> Q_1 Q_3{}^2 : AM^2$,

so befindet sich der Körper nicht in einer solchen Lage im Gleichgewicht, bei der seine Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche gerade in

---

zunächst mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, daß die Tangente der äußeren Parabel in B auch Tangente der beiden anderen Parabeln in demselben Punkte B ist.

Trifft nun $DQ_3Q_2Q_1$ die Tangente BT in E, so haben wir nach dem angeführten Satze
$$EQ_3 : Q_3 D = BD : DM,$$
woraus folgt
$$\left.\begin{aligned} EQ_3 : ED &= BD : BM. \\ EQ_2 : ED &= BD : BB_2 \\ EQ_1 : ED &= BD : BB_1 . \end{aligned}\right\}$$
Ähnlich ergibt sich

und

Die beiden ersten Proportionen sind äquivalent mit
$$EQ_3 : ED = BD \cdot BB_2 : BM \cdot BB_2$$
und
$$EQ_2 : ED = BD \cdot BM : BB_2 . BM.$$
Durch Subtraktion ergibt sich
$$Q_2 Q_3 : ED = BD \cdot MB_2 : BM \cdot BB_2 .$$
Ähnlich
$$Q_1 Q_2 : ED = BD \cdot B_2 B_1 : BB_2 \cdot BB_1 .$$
Daraus folgt
$$Q_1 Q_2 : Q_2 Q_3 = (B_2 B_1 : B_1 B) \cdot (BM : MB_2).$$

einem Punkte berührt, sondern in einer Lage, bei der seine Grundfläche die Oberfläche in keinem Punkte berührt und seine Achse mit der Oberfläche einen Winkel bildet, der größer als U ist;

(III, *a*) *wenn*

$$(\textit{spez. Gew. d. Körpers}) : (\textit{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) = Q_1 Q_3{}^2 : AM^2,$$

so befindet sich der Körper dauernd in der Lage in Ruhe, bei der die Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche gerade in einem Punkte berührt und die Achse mit der Oberfläche einen Winkel gleich U bildet;

(III. *b*) *wenn*

$$(\textit{spez. Gew. d. Körpers}) : (\textit{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) = P_1 P_3{}^2 : AM^2,$$

so bleibt der Körper in Ruhe, wenn seine Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche gerade in einem Punkte berührt und seine Achse gegen die Oberfläche unter einem Winkel gleich T_1 *geneigt ist;*

(IV.) *wenn*

$$(\textit{spez. Gew. d. Körpers}) : (\textit{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) > P_1 P_3{}^2 : AM^2$$
$$\textit{aber} < Q_1 Q_3{}^2 : AM^2,$$

so bleibt der Körper in einer Lage in Ruhe, bei der seine Grundfläche mehr eintaucht;

(V.) *wenn*

$$(\textit{spez. Gew. d. Körpers}) : (\textit{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) < P_1 P_3{}^2 : AM^2,$$

so ist der Körper in einer Lage im Gleichgewicht, bei der seine Achse gegen die Oberfläche der Flüssigkeit unter einem kleineren Winkel als T_1 *geneigt ist, doch so, daß die Grundfläche die Oberfläche in keinem Punkte berührt.*

(Beweise.)

(I.) Da $AM > \frac{3}{4} p$, und

$$(\text{spez. Gew. d. Körpers}) : (\text{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) \geqq (AM - \tfrac{3}{4} p)^2 : AM^2,$$

so folgt aus Satz 4, daß der Körper sich im stabilen Gleichgewicht befindet, wenn seine Achse vertikal ist.

(II.) In diesem Falle ist

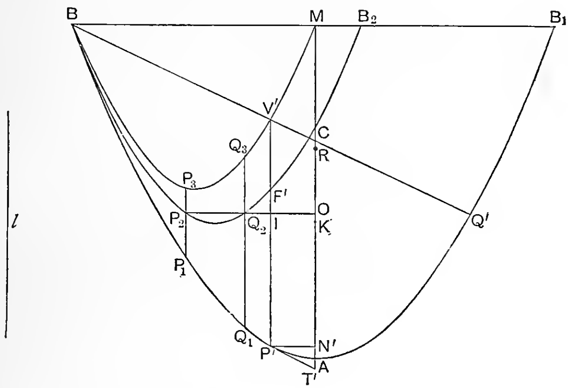
$$(\text{spez. Gew. d. Körpers}) : (\text{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) < AR^2 : AM^2$$
$$\text{aber} > Q_1 Q_3{}^2 : AM^2.$$

Wir wollen annehmen, das Verhältnis der spezifischen Gewichte sei gleich

$$l^2 : AM^2,$$

wo $l < AR$ aber $> Q_1 Q_3$ ist.

Wir legen zwischen die beiden Parabeln BAB_1 und BP_3Q_3M eine Strecke $P'V'$, die gleich l und parallel zu AM[1]) ist; $P'V'$ schneide die mittlere Parabel in F'.



Durch denselben Beweis wie vorher erhalten wir

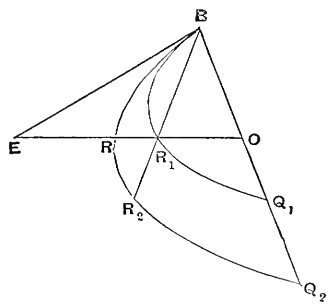
$$P'F' = 2\,F'V'.$$

$P'T'$, die Tangente der äußeren Parabel in P', schneide MA in T', und $P'N'$ sei die Ordinate von P'.

---

[1]) Archimedes gibt für diese Aufgabe keine Lösung, doch läßt sie sich folgendermaßen ergänzen.

Es seien BR_1Q_1, BRQ_2 zwei ähnliche und ähnlich gelegene Parabelsegmente, deren Grundlinien in derselben Geraden liegen, und BE sei die gemeinsame Tangente in B.



Angenommen, die Aufgabe sei gelöst, und die Gerade ERR_1O, parallel zu den Achsen, treffe die Parabeln in R, R_1 und BQ_2 in O, während der Abschnitt RR_1 gleich l ist.

Dann haben wir wie gewöhnlich

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1 = BO \cdot BQ_2 : BQ_1 \cdot BQ_2$$

und

$$ER : EO = BO : BQ_2 = BO \cdot BQ_1 : BQ_1 \cdot BQ_2.$$

Durch Subtraktion folgt

$$RR_1 : EO = BO \cdot Q_1Q_2 : BQ_1 \cdot BQ_2$$

oder

$$BO \cdot OE = l \cdot \frac{BQ_1 \cdot BQ_2}{Q_1Q_2}\text{, was bekannt ist.}$$

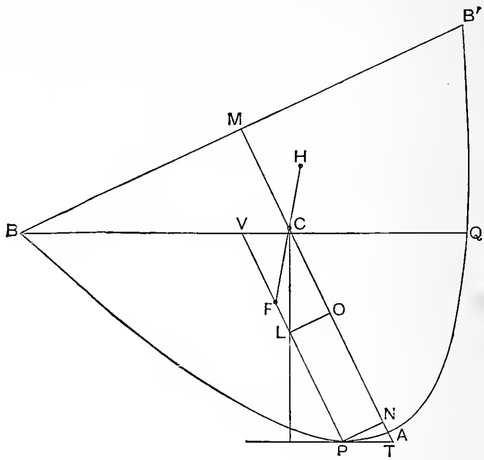
Das Verhältnis $BO : OE$ ist auch bekannt. Folglich läßt sich BO^2 oder OE^2 und damit O finden.

Wir ziehen BV' und verlängern sie bis zum Schnittpunkt Q' mit der äußeren Parabel. OQ_2P_2 treffe $P'V'$ in J.

Da nun in den zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Parabelsegmenten, deren Grundlinien BM, BB_1 in einer Geraden liegen, BV' und BQ' denselben Winkel mit den Grundlinien bilden, so folgt

$$BV' : BQ' = BM : BB_1 \text{ [1]}$$
$$= 1 : 2,$$

so daß
$$BV = V'Q'.$$



Das Paraboloidsegment werde nun, wie beschrieben, in die Flüssigkeit gebracht, so daß seine Achse gegen die Vertikale geneigt ist und seine Grundfläche die Oberfläche gerade in einem Punkte B berührt. Der Körper werde mit der durch die Achse senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche gelegten Ebene geschnitten, und diese Ebene schneide den Körper in dem Parabelsegment BAB' und die Flüssigkeitsoberfläche in BQ.

---

[1] Um das zu beweisen, denken wir uns in der Figur auf der vorigen Seite BR_1 bis zum Schnittpunkt R_2 mit der äußeren Parabel verlängert. Wie vorher haben wir

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1,$$
$$ER : EO = BO : BQ_2,$$

woraus folgt
$$ER_1 : ER = BQ_2 : BQ_1.$$

Da R_1 ein Punkt innerhalb der äußeren Parabel ist, so folgt ebenso

$$ER : ER_1 = BR_1 : BR_2.$$

Folglich
$$BQ_1 : BQ_2 = BR_1 : BR_2.$$

Wir nehmen die Punkte C, O wie vorher auf AM an. Wir ziehen die zu BQ parallele Tangente, die die Parabel in P berührt und AM in T schneidet; PV sei der Durchmesser, der BQ halbiert (d. h. die Achse des eintauchenden Teils des Körpers).

Dann gilt

$$\begin{aligned} l^2 : AM^2 &= (\text{spez. Gew. d. Körpers}) : (\text{spez. Gew. d. Flüssigkeit}) \\ &= (\text{eintauchender Teil}) : (\text{ganzer Körper}) \\ &= PV^2 : AM^2, \end{aligned}$$

woraus folgt $$P'V' = l = PV.$$

Somit sind die Segmente $BP'Q'$, BPQ in den beiden Figuren kongruent.

Folglich $$\sphericalangle PTN = \sphericalangle P'T'N'$$

und $$AT = A'T', \quad AN = A'N', \quad PN = P'N'.$$

Nun ist in der ersten Figur

$$P'J < 2\,JV'.$$

Wird daher in der zweiten Figur OL senkrecht zu PV gezogen, so gilt

$$PL < 2\,LV.$$

Wir nehmen F auf LV so an, daß $PF = 2\,FV$, d. h. so, daß F der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers ist. C ist der Schwerpunkt des ganzen Körpers. Wir ziehen FC und verlängern sie bis zum Schwerpunkte H des Teils außerhalb der Flüssigkeit. Da nun $CO = \frac{1}{2}p$, so steht CL auf der Tangente in P und auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht. Wir beweisen also wie vorher, daß der Körper nicht in der Lage bleibt, bei der B die Oberfläche berührt, sondern sich dreht, so daß der Winkel PTN wächst.

In der Gleichgewichtslage muß also die Achse AM mit der Flüssigkeitsoberfläche einen Winkel bilden, der größer ist als der Winkel U, den die Tangente in Q_1 mit AM bildet.

(III. *a*) In diesem Falle gilt

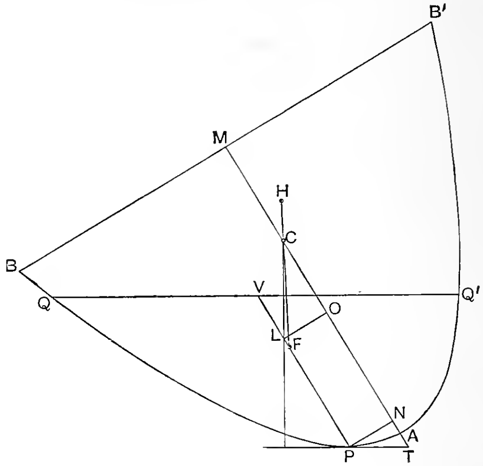
(spez. Gew. des Körpers) : (spez. Gew. der Flüssigkeit) $= Q_1 Q_3{}^2 : AM^2$.

Das Paraboloidsegment werde so in die Flüssigkeit gebracht, daß seine Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche nirgends berührt und seine Achse gegen die Vertikale geneigt ist.

Die zur Oberfläche senkrechte Ebene durch AM schneide das Paraboloid in der Parabel BAB' und die Flüssigkeitsoberfläche in QQ'. PT sei die zu QQ' parallele Tangente, PV der QQ' halbierende Durchmesser, PN die Ordinate von P.

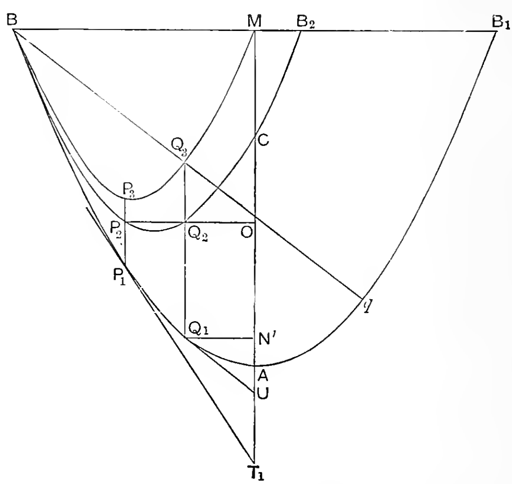
Wir teilen AM wie vorher in C und O.

In der anderen Figur sei $Q_1 N'$ die Ordinate von Q_1. Wir ziehen BQ_3 und verlängern sie bis zum Schnittpunkt q mit der



äußeren Parabel. Dann ist $BQ_3 = Q_3 q$, und die Tangente $Q_1 U$ ist parallel zu Bq. Nun gilt

$$Q_1 Q_3^2 : AM^2 = (\text{spez. Gew. des Körpers}) : (\text{spez. Gew. der Flüssigkeit})$$
$$= (\text{eintauchender Teil}) : (\text{ganzer Körper})$$
$$= PV^2 : AM^2.$$



Folglich $Q_1 Q_3 = PV$, und die Paraboloidsegmente QPQ' und $BQ_1 q$ haben gleichen Rauminhalt. Die Grundfläche des einen geht durch B, die des anderen durch Q, einen Punkt, der näher als B an A liegt.

Es folgt, daß der Winkel zwischen QQ' und BB' kleiner ist als der Winkel $B_1 Bq$.

Folglich $\sphericalangle U < \sphericalangle PTN$,

woraus folgt $AN' > AN$;

also ist $N'O$ (oder $Q_1 Q_2$) $< PL$,

wo OL auf PV senkrecht steht.

Da $Q_1 Q_2 = 2\, Q_2 Q_3$, so folgt

$$PL > 2\, LV.$$

Daher liegt F, der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers, zwischen P und L, während CL wie vorher auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht steht.

Verlängern wir FC bis zum Schwerpunkte H des Teils des Körpers außerhalb der Flüssigkeit, so sehen wir, daß der Körper sich so drehen muß, daß der Winkel PTN abnimmt, bis die Grundfläche gerade in einem Punkte B die Flüssigkeitsoberfläche berührt.

Wenn das der Fall ist, so haben wir ein Segment BPQ, das dem Segment $BQ_1 q$ kongruent ist, der Winkel PTN ist gleich dem Winkel U, und AN ist gleich AN'.

Daher ist in diesem Falle $PL = 2\, LV$, und die Punkte F, L fallen zusammen, so daß F, C, H alle in einer vertikalen Geraden liegen.

Daher ist das Paraboloid in der Lage im Gleichgewicht, bei der ein Punkt B der Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche berührt und die Achse mit der Oberfläche einen Winkel gleich U bildet.

(III. *b*) In dem Falle, wo

(spez. Gew. des Körpers) : (spez. Gew. der Flüssigkeit) $= P_1 P_3{}^2 : AM^2$,

können wir ebenso beweisen, wenn der Körper so in die Flüssigkeit gebracht wird, daß seine Achse gegen die Vertikale geneigt ist und seine Grundfläche die Oberfläche der Flüssigkeit nirgends berührt, daß dann der Körper eine Lage annimmt und darin verbleibt, bei der die Grundfläche gerade in einem Punkte die Oberfläche berührt und die Achse gegen sie unter einem Winkel gleich T_1 geneigt ist (in der Figur auf S. 397).

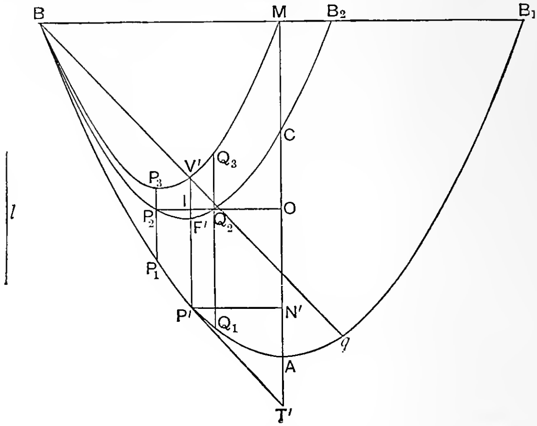
(IV.) In diesem Falle gilt

(spez. Gew. des Körpers) : (spez. Gew. der Flüssigkeit) $> P_1 P_3{}^2 : AM^2$

aber $< Q_1 Q_3{}^2 : AM^2$.

Das Verhältnis sei gleich $l^2 : AM^2$, so daß l größer als $P_1 P_3$ aber kleiner als $Q_1 Q_3$ ist.

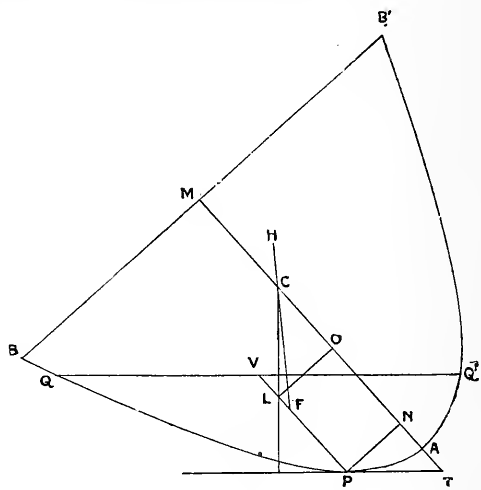
$P'V'$ legen wir zwischen die Parabeln BP_1Q_1, BP_3Q_3 so, daß $P'V'$ gleich l und parallel zu AM ist, und $P'V'$ schneide die mittlere Parabel in F' und OQ_2P_2 in J.



Wir ziehen die Verbindungslinie BV' und verlängern sie bis zum Schnittpunkte q mit der äußeren Parabel.

Dann ist wie vorher $BV' = V'q$ und demnach die Tangente $P'T'$ in P' parallel zu Bq. Es sei $P'N'$ die Ordinate von P'.

1. Das Segment werde nun zuerst unter solcher Neigung seiner Achse gegen die Vertikale in die Flüssigkeit gebracht, daß seine Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche nirgends berührt.



Die zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte Ebene durch AM schneide das Paraboloid in der Parabel BAB' und die Flüssigkeitsoberfläche in QQ'. PT sei die zu QQ' parallele Tangente, PV der QQ' halbierende Durchmesser. Wir teilen AM wie vorher in C, O und fällen von O auf PV das Lot OL.

Dann haben wir wie vorher $PV = l = P'V'$. Somit sind die Segmente $BP'q$, QPQ' des Paraboloids raumgleich, und es folgt, daß der Winkel zwischen QQ' und BB' kleiner ist als der Winkel B_1Bq.

Folglich $\quad \sphericalangle P'T'N' < \sphericalangle PTN$,

und daher $\quad AN' > AN$,

so daß $\quad NO > N'O$,

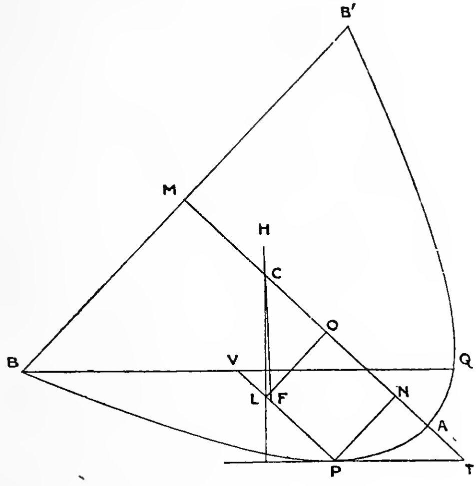
d. h. $\quad PL > P'J$

$\quad > P'F'$, *a fortiori.*

Somit ist $PL > 2\,LV$, so daß F, der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers, zwischen L und P liegt, während CL auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht steht.

Verlängern wir nun FC bis zum Schwerpunkte H des Teils des Körpers außerhalb der Flüssigkeit, so beweisen wir, daß der Körper nicht in seiner Lage bleibt, sondern sich so dreht, daß der Winkel PTN abnimmt.

2. Sodann werde das Paraboloid so in die Flüssigkeit gebracht, daß seine Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche gerade in einem Punkte B berührt, und dann werde dasselbe Verfahren angewandt.



Es ist $PV = P'V'$, und die Segmente BPQ, $BP'q$ sind kongruent; folglich

$$\sphericalangle PTN = \sphericalangle P'T'N'.$$

Es folgt $\quad AN = AN', \quad NO = N'O,$

und daraus $\quad P'J = PL$

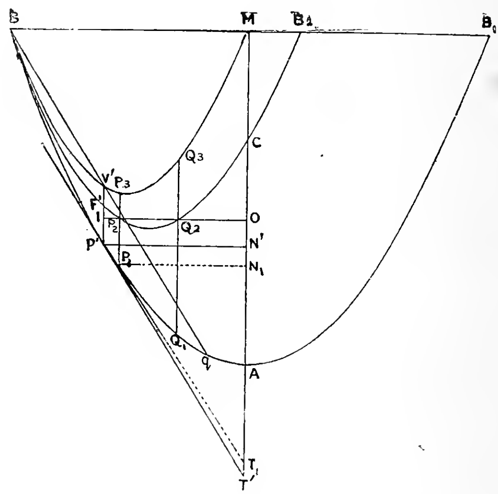
und schließlich $\quad PL > 2\,LV.$

Daher liegt F wieder zwischen P und L, und wie vorher dreht sich das Paraboloid so, daß der Winkel PTN abnimmt, d. h. daß mehr von der Grundfläche eintaucht.

(V.) In diesem Falle ist

(spez. Gew. des Körpers) : (spez. Gew. der Flüssigkeit) $< P_1P_3{}^2 : AM^2$.

Ist nun das Verhältnis gleich $l^2 : AM^2$, so folgt $l < P_1P_3$. Wir legen $P'V'$ gleich l zwischen die Parabeln BP_1Q_1 und BP_3Q_3, parallel zu AM. $P'V'$ schneide die mittlere Parabel in F' und OP_2 in J.



Wir ziehen die Verbindungslinie BV' und verlängern sie bis zum Schnittpunkte q mit der äußeren Parabel. Dann ist wie vorher $BV' = V'q$ und die Tangente $P'T'$ parallel zu Bq.

1. Das Paraboloid werde so in die Flüssigkeit gebracht, daß seine Grundfläche die Oberfläche gerade in einem Punkte berührt.

Die zur Flüssigkeitsoberfläche senkrechte Ebene durch AM schneide das Paraboloid in der Parabel BAB' und die Flüssigkeitsoberfläche in BQ.

Nach dem gewöhnlichen Verfahren finden wir

$$PV = l = P'V',$$

und die Segmente BPQ, $BP_1 q$ sind kongruent.

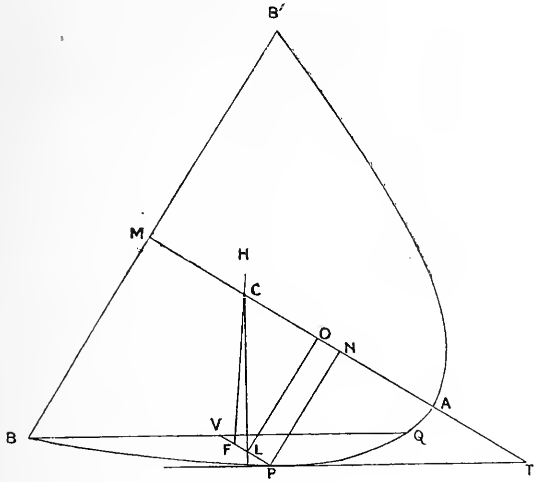
Folglich $\sphericalangle PTN = \sphericalangle P'T'N'$

und $AN = AN'$, $N'O = NO$.

Folglich $PL = P'J$,

woraus folgt $PL < 2\,LV$.

Also liegt F, der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers, zwischen L und V, während CL auf der Flüssigkeitsoberfläche senkrecht steht.



Verlängern wir FC bis zum Schwerpunkte H des Teils außerhalb der Flüssigkeit, so beweisen wir wie gewöhnlich, daß kein Gleichgewicht herrscht, sondern daß der Körper sich so dreht, daß der Winkel PTN wächst, so daß also die Grundfläche die Flüssigkeitsoberfläche nirgends berührt.

2. In der Gleichgewichtslage bildet jedoch die Achse mit der Flüssigkeitsoberfläche einen Winkel, der kleiner als T_1 ist.

Der Körper werde in eine solche Lage gebracht, daß der Winkel PTN nicht kleiner als T_1 ist.

Dann ergibt dasselbe Verfahren wie vorher $PV = l = P'V'$.

Und, da $\sphericalangle T \geqq \sphericalangle T_1$,

$$AN \leqq AN_1,$$

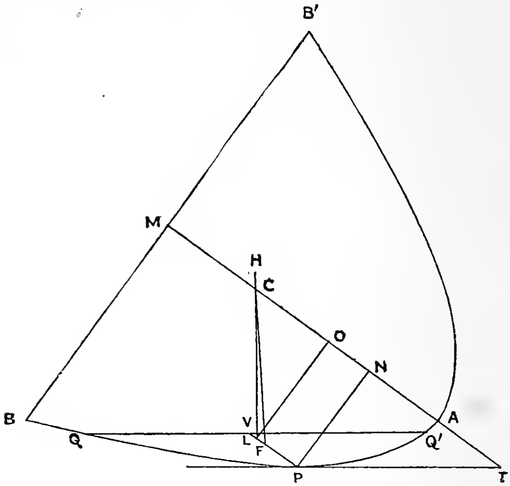
und folglich $NO \geqq N_1 O$, wo $P_1 N_1$ die Ordinate von P_1 ist.

Folglich $PL \geqq P_1 P_2$.

Aber $P_1 P_2 > P'F'$.

Daher $PL > \frac{2}{3} PV$,

so daß F, der Schwerpunkt des eintauchenden Teils des Körpers, zwischen P und L liegt.



Daher dreht sich der Körper so, daß der Winkel PTN abnimmt, bis dieser Winkel kleiner als T_1 wird.

[Wenn wie vorher x, x' bezüglich die Entfernungen des Punktes T von den Orthogonalprojektionen der Punkte C, F auf TP bedeuten, so haben wir

$$x' - x = \cos\vartheta \left\{\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}(h-k)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo $h = AM$, $k = PV$.

Berührt die Grundfläche BB' die Flüssigkeitsoberfläche in einem Punkte B, so haben wir ferner, wie in der Note am Ende von Satz 6,

$$\sqrt{ph} = \sqrt{pk} + \frac{p}{2}\cot\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und $$h - k = \sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta - \frac{p}{4}\cot^2\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Um also die Beziehung zwischen h und dem Winkel ϑ zu finden, den die Achse des Paraboloids in der Gleichgewichtslage mit der Flüssigkeitsoberfläche bildet, unter der Bedingung, daß die Grundfläche die Oberfläche gerade in B berührt, eliminieren wir k und setzen den Ausdruck in (1) gleich null; also wird

$$\frac{p}{4}(\cot^2\vartheta + 2) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta - \frac{p}{4}\cot^2\vartheta\right) = 0$$

oder

$$5\,p\cot^2\vartheta - 8\sqrt{ph}\cdot\cot\vartheta + 6\,p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die beiden Werte für ϑ ergeben sich aus den Gleichungen

$$5\sqrt{p}\cot\vartheta = 4\sqrt{h} \pm \sqrt{16\,h - 30\,p} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Das untere Zeichen entspricht dem Winkel U, das obere dem Winkel T_1 in dem Archimedischen Satze, was sich folgendermaßen verifizieren läßt.

In der ersten Figur bei Archimedes (S. 397 oben) haben wir

$$AK = \tfrac{2}{5}h,$$

$$M_2D^2 = \tfrac{3}{5}p\cdot OK = \tfrac{3}{5}p\left(\tfrac{2}{3}h - \tfrac{2}{5}h - \tfrac{1}{2}p\right)$$

$$= \frac{3}{5}p\left(\frac{4}{15}h - \frac{p}{2}\right).$$

Schneiden sich BM und $P_1P_2P_3$ in D', so folgt

$$\left.\begin{matrix} M_3D \\ M_3D' \end{matrix}\right\} = M_2D \pm M_3M_2$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}p\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)} \pm \frac{1}{10}\sqrt{ph}$$

und

$$\left.\begin{matrix} MD \\ MD' \end{matrix}\right\} = MM_2 \mp M_2D$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{ph} \mp \sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}.$$

Nun ergibt sich aus der Parabeleigenschaft

$$\cot U = 2\,MD/p,$$

$$\cot T_1 = 2\,MD'/p,$$

so daß wir erhalten

$$\frac{p}{2}\cot\left\{\begin{matrix} U \\ T_1 \end{matrix}\right\} = \frac{2}{5}\sqrt{ph} \mp \sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}$$

oder

$$5\sqrt{p}\cot\left\{\begin{matrix} U \\ T_1 \end{matrix}\right\} = 4\sqrt{h} \mp \sqrt{16\,h - 30\,p},$$

was mit dem obigen Ergebnis (5) übereinstimmt.

Um das entsprechende Verhältnis der spezifischen Gewichte oder k^2/h^2 zu finden, müssen wir mit Hilfe der Gleichungen (2) und (5) k durch h und p ausdrücken.

Wenn wir in die Gleichung (2) den in (5) enthaltenen Wert von $\cot\vartheta$ einsetzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\sqrt{k} &= \sqrt{h} - \tfrac{1}{10}\left(4\sqrt{h} \pm \sqrt{16\,h - 30\,p}\right)\\ &= \tfrac{3}{5}\sqrt{h} \mp \tfrac{1}{10}\sqrt{16\,h - 30\,p},\end{aligned}$$

woraus wir durch Quadrieren erhalten

$$k = \tfrac{13}{25}\,h - \tfrac{3}{10}\,p \mp \tfrac{3}{25}\sqrt{h(16\,h - 30\,p)} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Das untere Zeichen entspricht dem Winkel U, das obere dem Winkel T_1, und um die Archimedischen Ergebnisse zu verifizieren, haben wir einfach zu zeigen, daß die beiden Werte von k bezüglich gleich Q_1Q_3, P_1P_3 sind.

Nun ist leicht einzusehen, daß

$$\begin{aligned}Q_1Q_3 &= h/2 - MD^2/p + 2\,M_3D^2/p,\\ P_1P_3 &= h/2 - MD'^2/p + 2\,M_3D'^2/p.\end{aligned}$$

Setzen wir also die oben gefundenen Werte für MD, MD', M_3D, M_3D' ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{matrix}Q_1Q_3\\ P_1P_3\end{matrix}\right\} = \frac{h}{2} + \frac{3}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right) - \frac{7}{50}\,h \pm \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3h}{5}\left(\frac{4h}{15} - \frac{p}{2}\right)}$$

$$= \tfrac{13}{25}\,h - \tfrac{3}{10}\,p \pm \tfrac{3}{25}\sqrt{h(16\,h - 30\,p)},$$

und das sind die oben in (6) angegebenen Werte von k.]

Archimedes' Methode,
mechanische Sätze behandelnd — an Eratosthenes.

„Archimedes grüßt Eratosthenes.

Bei einer früheren Gelegenheit sandte ich Dir einige der von mir gefundenen Lehrsätze, wobei ich nur die Sätze aufschrieb und Dich aufforderte, die vorläufig nicht angegebenen Beweise zu finden. Die Sätze der Dir zugeschickten Theoreme waren folgende.

1. Wenn in ein senkrechtes Prisma mit parallelogrammatischer Grundfläche ein Zylinder eingeschrieben wird, der seine Grundflächen in den einander gegenüberliegenden Parallelogrammen[1]) und seine Seiten [d. h. vier Erzeugende] in den übrigen Ebenen (Flächen) des Prismas hat, und wenn durch den Mittelpunkt des Kreises, der die Grundfläche des Zylinders ist, und (durch) eine Seite des Quadrats in der gegenüberliegenden Ebene eine Ebene gelegt wird, so wird diese Ebene von dem Zylinder ein Segment abschneiden, das von zwei Ebenen und dem Mantel begrenzt wird, nämlich von der konstruierten Ebene und der, worin die Grundfläche des Zylinders liegt, und der zwischen den genannten Ebenen liegenden Mantelfläche; und das von dem Zylinder abgeschnittene Segment ist $\frac{1}{6}$ des ganzen Prismas.

2. Wenn in einen Würfel ein Zylinder eingeschrieben wird, der seine Grundflächen in gegenüberliegenden Parallelogrammen[2]) hat und mit seinem Mantel die übrigen vier Ebenen (Flächen) berührt, und wenn in den Würfel ein anderer Zylinder eingeschrieben wird, der seine Grundflächen in anderen Parallelogrammen hat und mit seinem Mantel die übrigen vier Ebenen (Flächen) berührt, so ist der von den Zylindermänteln begrenzte Körper, der in beiden Zylindern enthalten ist, $\frac{2}{3}$ des ganzen Würfels.

Diese Sätze sind von den früher entdeckten wesentlich verschieden; denn wir verglichen die damals behandelten Körper,

---

[1]) Die Parallelogramme sind offenbar *Quadrate*.

[2]) d. h. Quadraten.

Konoide und Sphäroide und ihre Segmente, hinsichtlich des Rauminhaltes mit Kegeln und Zylindern: aber noch keiner dieser Körper wurde einem von Ebenen begrenzten Körper gleich gefunden; von den gegenwärtigen Körpern, die von zwei Ebenen und Zylindermänteln begrenzt sind, wird jedoch jeder einem der von Ebenen begrenzten Körper gleich gefunden. Die Beweise dieser Sätze habe ich also in diesem Buche ausgearbeitet und schicke sie Dir jetzt.

Da ich aber, wie ich schon sagte, in Dir einen ernsthaften Gelehrten, einen Philosophen von hervorragender Bedeutung und, bei vorkommender Gelegenheit, einen Bewunderer mathematischer Forschung sehe, so habe ich es angebracht gefunden, in demselben Buche eine eigentümliche Methode niederzulegen und Dir auseinanderzusetzen, wodurch es Dir möglich sein wird, eine Anregung zur Untersuchung einiger mathematischer Fragen mit Hilfe der Mechanik zu gewinnen. Dieses Verfahren ist nach meiner Überzeugung auch für den Beweis der Sätze selbst nicht weniger nützlich; denn gewisse Dinge sind mir zuerst durch eine mechanische Methode klar geworden, mußten aber nachher geometrisch bewiesen werden, weil ihre Behandlung nach der genannten Methode keinen wirklichen Beweis liefert. Denn es ist offenbar leichter, wenn wir durch die Methode vorher einige Kenntnis von den Fragen gewonnen haben, den Beweis zu finden, als ihn ohne vorläufige Kenntnis zu finden. Das ist ein Grund, weshalb wir in dem Falle der Sätze, deren Beweis Eudoxus zuerst gefunden hat, nämlich daß der Kegel der dritte Teil des Zylinders und die Pyramide des Prismas ist, die dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben, Demokrit keinen geringen Anteil des Verdienstes zuerkennen müssen, der zuerst über die genannte Figur[1]) den Ausspruch getan hat, obwohl er ihn nicht bewiesen hat.[2]) Ich bin selbst

---

[1]) *περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος*, im Singular. Möglicherweise hat Archimedes an den Fall der Pyramide als den allgemeineren gedacht, der den des Kegels einschließt. Oder vielleicht ist mit „Figur“ „Figurtypus“ gemeint.

[2]) Diese Sätze waren immer Eudoxus zugeschrieben worden, und auch bei Archimedes findet sich ein Bericht dieses Inhalts (*Über Kugel und Zylinder,* Vorrede zu Buch I). Es stellt sich nun heraus, daß Eudoxus sie zwar zuerst wissenschaftlich bewiesen, daß aber Demokrit ihre Gültigkeit zuerst ausgesprochen hat. Ich habe an anderer Stelle (*The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Bd. III, S. 368) eine Vermutung über den wahrscheinlichen Verlauf von Demokrits Argumentation ausgesprochen, die sich nach Archimedes' Ansicht nicht bis zu einem Beweise der Sätze erhebt; aber es wird gut sein, diese Vermutung auch hier anzuführen. Plutarch spricht an einer wohlbekannten Stelle (*De Comm. Not. adv. Stoicos* XXXIX. 3) davon,

in der Lage, den jetzt zu veröffentlichenden Lehrsatz nach derselben Methode früher gefunden zu haben, und ich beschloß daher, die Methode schriftlich auseinanderzusetzen, teils weil ich bereits davon gesprochen habe[1]) und nicht in den Ruf kommen möchte, als hätte ich leere Worte geäußert, teils auch weil ich überzeugt bin, dadurch der Mathematik keinen geringen Dienst zu leisten; denn ich denke, mancher meiner Zeitgenossen oder Nachfolger wird

---

daß Demokrit in der Naturphilosophie (*φυσικῶς*) die folgenden Fragen aufgeworfen habe: „Wenn ein Kegel mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird [und es ist klar, daß eine der Grundfläche unendlich benachbarte Ebene gemeint ist], was haben wir von den Flächen der Schnitte zu denken? Sind sie gleich oder ungleich? Denn sind sie ungleich, so werden sie den Kegel unregelmäßig machen, da er dann viele stufenartige Einschnitte und Unebenheiten hat; sind sie aber gleich, so sind die Schnitte gleich, und der Kegel scheint die Eigenschaft des Zylinders zu haben und aus gleichen, nicht ungleichen, Kreisen zusammengesetzt zu sein, was ganz widersinnig ist." Der Ausdruck „zusammengesetzt aus gleichen . . . Kreisen" (*ἐξ ἴσων συγκείμενος . . . κύκλων*) zeigt, daß Demokrit bereits die Vorstellung hatte, daß ein Körper die Summe von unendlich vielen parallelen Ebenen oder unendlich dünnen Blättern ist, die einander unendlich nahe liegen: eine äußerst wichtige Antizipation desselben Gedankens, der bei Archimedes zu so fruchtbaren Ergebnissen geführt hat. Wenn wir uns nun eine Vorstellung von Demokrits Schluß für die Pyramide machen wollen, so scheint es, daß er wohl bemerkt haben wird, wenn zwei Pyramiden von gleicher Höhe und mit gleichen dreieckigen Grundflächen bezüglich von Ebenen geschnitten werden, die zur Grundfläche parallel sind und die Höhen in demselben Verhältnis teilen, daß dann die entsprechenden Schnitte der beiden Pyramiden gleich sind, woraus er geschlossen haben wird, daß die Pyramiden gleich sind, weil sie die Summen derselben unendlichen Anzahlen gleicher ebener Schnitte oder unendlich dünner Blättchen sind. (Das wäre eine teilweise Antizipation von Cavalieris Satz, daß die Flächen- oder Rauminhalte von zwei Figuren gleich sind, wenn zwei in derselben Höhe durch sie gelegte Schnitte, welches auch die Höhe sein mag, immer bezüglich gleiche Strecken oder Flächen ergeben.) Und Demokrit wird zweifellos gesehen haben, daß die drei Pyramiden, in die ein Prisma von derselben Grundfläche und gleicher Höhe wie die ursprüngliche Pyramide geteilt werden kann (wie bei Euklid XII. 7), zu je zweien dieser Gleichheitsbedingung genügen, so daß die Pyramide der dritte Teil des Prismas ist. Die Erweiterung auf eine Pyramide mit polygonaler Grundfläche war leicht. Und Demokrit wird den Satz für den Kegel (offenbar ohne strengen Beweis) ausgesprochen haben als natürliche Schlußfolgerung aus dem Ergebnis des unendlichen Anwachsens der Seitenzahl in einem regelmäßigen Vieleck, das die Grundfläche einer Pyramide bildet.

[1]) Vgl. die Vorrede zur *Quadratur der Parabel.*

mit Hilfe der Methode, wenn sie einmal bekannt ist, imstande sein, andere Sätze zu finden, die mir noch nicht eingefallen sind.

Zuerst will ich nun den Satz auseinandersetzen, der mir zuerst mittels der Mechanik klar geworden ist, nämlich daß

> *jedes Segment eines Schnittes eines rechtwinkligen Kegels (d. i. einer Parabel) vier Drittel des Dreiecks ist, das dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe hat,*

und darauf will ich jeden der anderen durch dieselbe Methode gefundenen Sätze angeben. Am Ende des Buches gebe ich dann die geometrischen Beweise der Sätze, deren Wortlaut ich Dir schon mitgeteilt habe.

Hilfssätze.

1. Wenn von einer Größe eine andere Größe weggenommen wird, und wenn derselbe Punkt zugleich der Schwerpunkt der ganzen Größe und der weggenommenen ist, so ist derselbe Punkt der Schwerpunkt des Restes.

2. Wenn von einer Größe eine andere Größe weggenommen wird, die nicht denselben Schwerpunkt hat, so findet man den Schwerpunkt des Restes, indem man die Verbindungslinie der Schwerpunkte der ganzen Größe und des weggenommenen Teils [nach der Seite hin, wo der Schwerpunkt des Ganzen liegt] verlängert und auf ihr eine Strecke abträgt, die sich zu dem Abstande zwischen den genannten Schwerpunkten verhält wie das Gewicht der weggenommenen Größe zu dem Gewicht des Restes. [*Über das Gleichgewicht von Ebenen*, I. 8.]

3. Wenn die Schwerpunkte einer beliebigen Anzahl von Größen auf derselben Geraden liegen, so wird auch der Schwerpunkt der aus allen zusammengesetzten Größe auf derselben Geraden liegen. [Vgl. *Ebenda*, I. 5].

4. Der Schwerpunkt einer Strecke ist der Mittelpunkt der Strecke. [Vgl. *Ebenda*, I. 4.]

5. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Punkt, in dem die von den Ecken des Dreiecks nach den Mittelpunkten der (Gegen-) Seiten gezogenen Geraden sich schneiden. [*Ebenda*, I. 13, 14.]

6. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Punkt, in dem die Diagonalen sich schneiden. [*Ebenda*, I. 10.]

7. Der Schwerpunkt eines Kreises ist der Punkt, der auch der Mittelpunkt [des Kreises] ist.

8. Der Schwerpunkt eines Zylinders ist der Mittelpunkt der Achse.

9. Der Schwerpunkt eines Prismas ist der Mittelpunkt der Achse.

10. Der Schwerpunkt eines Kegels ist der Punkt, der die Achse so teilt, daß der Abschnitt an der Spitze dreimal so groß ist wie der Rest.[1])

Außerdem benutze ich noch den folgenden Satz:

Wenn in zwei Reihen von Größen die der ersten Reihe der Ordnung nach denen der zweiten proportional sind und ferner die Größen der ersten Reihe entweder alle oder einige von ihnen zu denen einer dritten Reihe in einem beliebigen Verhältnisse stehen, und die Größen der zweiten Reihe in demselben Verhältnis zu den entsprechenden Größen einer vierten Reihe, dann hat die Summe der Größen der ersten Reihe zu der Summe der aus der dritten Reihe ausgewählten Größen dasselbe Verhältnis wie die Summe der Größen der zweiten Reihe zu der Summe der (entsprechend) aus der vierten Reihe ausgewählten Größen. [*Über Konoide und Sphäroide*, Satz 1.]"

Satz 1.

Es sei ABC ein von der Geraden AC und der Parabel ABC begrenztes Parabelsegment, und D sei der Mittelpunkt von AC. Man ziehe die Gerade DBE parallel zur Achse der Parabel und ziehe AB, BC.

Dann wird das Segment ABC $\frac{4}{3}$ des Dreiecks ABC sein.

Durch A ziehe man AKF parallel zu DE, und die Parabeltangente in C schneide DBE in E und AKF in F.

Man verlängere CB bis zum Schnittpunkte K mit AF und CK bis H, so daß KH gleich CK wird.

Man denke sich CH als Wagebalken mit dem Mittelpunkt K.

MO sei irgend eine zu ED parallele Gerade; sie treffe CF, CK, CA in M, N, O und die Kurve in P.

---

[1]) Die Aufgabe, den Schwerpunkt eines Kegels zu finden, ist in keinem erhaltenen Werke des Archimedes gelöst. Sie kann entweder in einer besonderen Abhandlung, etwa in der verlorenen *περὶ ζυγῶν*, gelöst sein oder in einem größeren mechanischen Werke, von dem die erhaltenen Bücher *Über das Gleichgewicht von Ebenen* nur einen Teil bildeten.

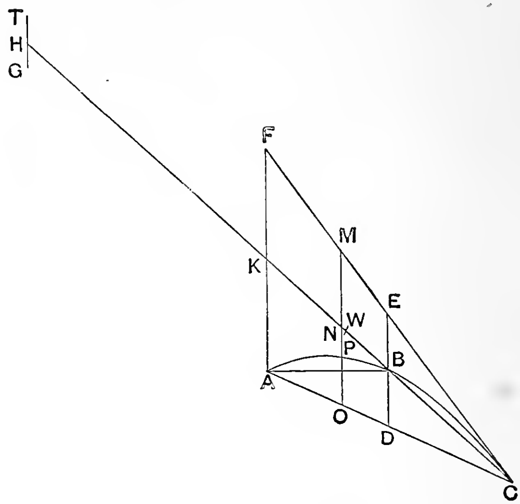
Da nun CE eine Tangente der Parabel ist und CD die Ordinate, so folgt

$$EB = BD;$$

„denn das ist in den Elementen [der Kegelschnitte] bewiesen".[1])

Da FA, MO zu ED parallel sind, so folgt

$$FK = KA, \qquad MN = NO.$$



Nach der „in einem Hilfssatze bewiesenen" Parabeleigenschaft gilt nun

$$MO : OP = CA : AO \quad \text{[Vgl. } \textit{Quadratur der Parabel}, \text{ Satz 5]}$$
$$= CK : KN \quad \text{[Eukl. VI. 2]}$$
$$= HK : KN.$$

Man nehme eine Strecke TG gleich OP und bringe sie mit ihrem Schwerpunkte nach H, so daß $TH = HG$; da nun N der Schwerpunkt der Strecke MO ist, und

$$MO : TG = HK : KN,$$

so folgt, daß TG in H und MO in N sich in Bezug auf K das Gleichgewicht halten. [*Über das Gleichgewicht von Ebenen*, I. 6, 7].

Ähnlich folgt für alle anderen Strecken, die zu DE parallel sind und den Parabelbogen treffen, daß (1) der Abschnitt zwischen

---

[1]) d. h. in den Werken von Aristaeus und Euklid über Kegelschnitte. Vgl. den ähnlichen Ausdruck in *Über Konoide und Sphäroide*, Satz 3, und *Quadratur der Parabel*, Satz 3.

FC, AC mit dem Mittelpunkt auf KC und (2) eine dem Abschnitte zwischen der Kurve und AC gleiche und mit ihrem Schwerpunkte nach H gebrachte Strecke sich um K das Gleichgewicht halten.

Folglich ist K der Schwerpunkt des ganzen Systems, das besteht aus (1) allen den von FC und AC begrenzten Strecken wie MO, die so wie in der Figur liegen, und (2) allen den nach H gelegten Strecken, die den von der Kurve und AC begrenzten Strecken wie PO gleich sind.

Da nun das Dreieck CFA aus allen den parallelen Strecken wie MO zusammengesetzt ist

und das Segment CBA aus allen den Strecken innerhalb der Kurve wie PO,

so folgt, daß das Dreieck, so wie es in der Figur liegt, sich in Bezug auf K im Gleichgewicht befindet mit dem Segment CBA, das mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht ist.

Man teile KC in W so, daß $CK = 3\,KW$; dann ist W der Schwerpunkt des Dreiecks ACF; „denn das ist in den Büchern über das Gleichgewicht bewiesen“ (ἐν τοῖς ἰσορροπικοῖς).

[Vgl. *Über das Gleichgewicht von Ebenen*, I. 15.]

Folglich ist $\triangle ACF : (\text{Segment } ABC) = HK : KW$
$= 3 : 1.$

Daher Segment $ABC = \frac{1}{3} \triangle ACF.$

Aber $\triangle ACF = 4 \triangle ABC.$

Folglich Segment $ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC.$

„Die hier ausgesprochene Tatsache ist nun durch das Gesagte nicht wirklich bewiesen; aber es deutet darauf hin, daß der Schluß richtig ist. Da wir also sehen, daß der Satz nicht bewiesen ist, aber zugleich vermuten, daß das Ergebnis richtig ist, so brauchen wir einen geometrischen Beweis, den ich gefunden und bereits veröffentlicht habe.“[1])

---

[1]) Das Wort, von dem τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν abhängt, heißt im griechischen Texte τάξομεν, eine Lesart, die zweifelhaft erscheint und sicher schwer zu übersetzen ist. Heiberg übersetzt τάξομεν „wir werden unten anbringen“, ich halte es jedoch in Übereinstimmung mit Th. Reinach (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, 30. November 1907, S. 918) für fraglich, ob Archimedes wirklich noch einmal als Anhang einen Beweis vollständig ausgearbeitet hat, der, wie er sagt, bereits veröffentlicht war (d. i. wahrscheinlich in der *Quadratur der Parabel*). τάξομεν bedeutet, wenn überhaupt korrekt, doch wohl „wir werden anweisen“, „vorschreiben“ oder „bestimmen“.

Satz 2.

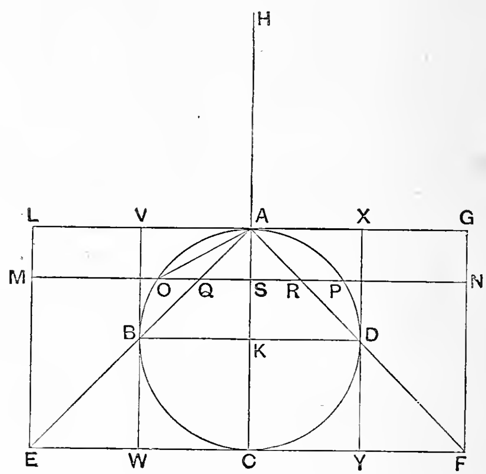
Mittels derselben Methode können wir die folgenden Sätze untersuchen:

(1) *Jede Kugel ist (was ihren Rauminhalt anlangt) viermal so groß wie der Kegel, dessen Grundfläche einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe dem Radius der Kugel gleich ist; und*

(2) *der Zylinder, dessen Grundfläche einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist, ist anderthalbmal so groß wie die Kugel.*

(1) Es sei $ABCD$ ein größter Kreis der Kugel und AC, BD zu einander senkrechte Durchmesser.

Mit BD als Durchmesser werde in der zu AC senkrechten Ebene ein Kreis beschrieben und über diesem Kreise als Grund-



fläche der Kegel mit der Spitze A konstruiert. Der Mantel dieses Kegels werde verlängert und mit der durch C parallel zu seiner Grundfläche gelegten Ebene geschnitten; der Schnitt ist ein Kreis mit dem Durchmesser EF. Über diesem Kreise als Grundfläche werde ein Zylinder errichtet, dessen Höhe und Achse AC ist; CA werde bis H verlängert, so daß AH gleich CA wird.

Man betrachte CH als Wagebalken; A ist sein Mittelpunkt.

In der Ebene des Kreises $ABCD$ ziehen wir irgend eine zu BD parallele Gerade MN. Sie schneide den Kreis in O, P, den Durchmesser AC in S und die Geraden AE, AF in Q, R. A verbinden wir mit O.

Durch MN legen wir die zu AC senkrechte Ebene.

Diese Ebene schneidet den Zylinder in einem Kreise mit dem Durchmesser MN, die Kugel in einem Kreise mit dem Durchmesser OP und den Kegel in einem Kreise mit dem Durchmesser QR.

Da nun $MS = AC$ und $QS = AS$, so folgt

$$\begin{aligned} MS \cdot SQ &= CA \cdot AS \\ &= AO^2 \\ &= OS^2 + SQ^2. \end{aligned}$$

Und da $HA = AC$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} HA : AS &= CA : AS \\ &= MS : SQ \\ &= MS^2 : MS \cdot SQ \\ &= MS^2 : (OS^2 + SQ^2), \text{ nach dem Obigen,} \\ &= MN^2 : (OP^2 + QR^2) \end{aligned}$$

$= ($Kreis, Durchm. $MN) : ($Kreis, Durchm. $OP +$ Kreis, Durchm. $QR)$.

Das heißt

$HA : AS =$ (Schnittkreis des Zylinders) : (Schnittkreis der Kugel + Schnittkreis des Kegels).

Daher ist der Schnittkreis des Zylinders, so wie er liegt, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Schnittkreis der Kugel zusammen mit dem des Kegels, wenn die beiden letzten Kreise mit ihren Schwerpunkten nach H verlegt sind.

Ähnliches gilt für die drei entsprechenden Schnitte in einer Ebene, die auf AC senkrecht steht und durch irgend eine andere in dem Parallelogramm LF gelegene und zu EF parallele Gerade geht.

Behandeln wir in derselben Weise alle die Gruppen von je drei Kreisen, in denen die zu AC senkrechten Ebenen den Zylinder, die Kugel und den Kegel schneiden und aus denen diese drei Körper zusammengesetzt sind, so folgt, daß der Zylinder in der Lage, in der er ist, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit der Kugel und dem Kegel zusammengenommen, wenn beide mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.

Da K der Schwerpunkt des Zylinders ist, so folgt

$HA : AK =$ (Zylinder) : (Kugel + Kegel AEF).

Aber HA ist gleich $2\,AK$;

folglich Zylinder $= 2$ (Kugel + Kegel AEF).

Nun ist aber Zylinder $= 3$ (Kegel AEF); [Euklid XII, 10]

folglich Kegel $AEF = 2$ (Kugel).

Aber da $EF = 2\,BD$, so ist

$$\text{Kegel } AEF = 8\,(\text{Kegel } ABD);$$

folglich

$$\text{Kugel} = 4\,(\text{Kegel } ABD).$$

(2) Durch B, D ziehe man VBW, XDY parallel zu AC; und man denke sich den Zylinder, der AC zur Achse und die Kreise mit VX, WY als Durchmessern zu Grundflächen hat.

Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Zylinder } VY &= 2\,(\text{Zylinder } VD) \\ &= 6\,(\text{Kegel } ABD) \qquad \text{[Eukl. XII, 10]} \\ &= \tfrac{3}{2}\,(\text{Kugel}), \text{ nach dem Obigen.} \end{aligned}$$

Q. e. d.

„Durch diesen Satz, daß eine Kugel viermal so groß ist wie der Kegel, dessen Grundfläche einem größten Kreise und dessen Höhe dem Radius der Kugel gleich ist, bin ich darauf gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß wie ihr größter Kreis ist; denn von der Tatsache ausgehend, daß jeder Kreis gleich einem Dreieck ist, dessen Grundlinie der Umfang und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist, dachte ich mir, daß ebenso jede Kugel gleich einem Kegel ist, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe dem Radius gleich ist.[1])"

Satz 3.

Mit dieser Methode können wir auch den Satz untersuchen:

Ein Zylinder, dessen Grundfläche dem größten Kreise eines Sphäroids und dessen Höhe der Achse des Sphäroids gleich ist, ist anderthalbmal so groß wie das Sphäroid;

und wenn das erkannt ist, so ist klar:

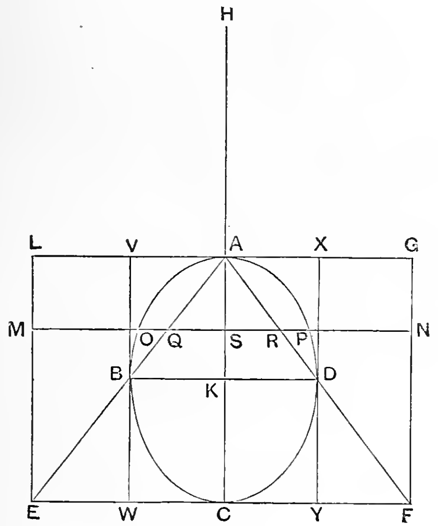
Wenn ein Sphäroid mit der im Mittelpunkt auf der Achse senkrecht stehenden Ebene geschnitten wird, so ist die Hälfte des Sphäroids das Doppelte des Kegels, der dieselbe Grundfläche und Achse wie das Segment (d. h. die Hälfte des Sphäroids) hat.

---

[1]) Archimedes hat demnach die Aufgabe, den Rauminhalt der Kugel zu bestimmen, vor der, ihre Oberfläche zu finden, gelöst und das Ergebnis der zweiten Aufgabe aus dem der ersten erschlossen. In dem Buche I *Über Kugel und Zylinder* ist die Oberfläche jedoch unabhängig gefunden (Satz 33) und *vor* dem Rauminhalt, der im Satze 34 ermittelt wird: eine weitere Illustration der Tatsache, daß die Reihenfolge der Sätze in den Schriften der griechischen Geometer, in der sie schließlich ausgearbeitet sind, sich nicht notwendig an die Reihenfolge der Auffindung anschließt.

Eine Ebene durch die Achse eines Sphäroids schneide dessen Oberfläche in der Ellipse $ABCD$, deren Durchmesser (d. h. Achsen) AC, BD sind; der Mittelpunkt sei K.

Mit BD als Durchmesser konstruieren wir in der zu AC senkrechten Ebene einen Kreis; den Kegel mit diesem Kreise als Grundfläche und der Spitze A denken wir uns verlängert und mit der durch C parallel zu seiner Grundfläche gelegten Ebene geschnitten; der Schnitt ist ein Kreis in einer zu AC senkrechten Ebene mit dem Durchmesser EF.



Wir denken uns den Zylinder, der den letzten Kreis zur Grundfläche und AC zur Achse hat; CA verlängern wir bis H, indem wir AH gleich CA machen.

HC werde als Wagebalken gedacht; A ist sein Mittelpunkt.

In dem Parallelogramm LF ziehen wir irgend eine zu EF parallele Gerade MN, die die Ellipse in O, P und AE, AF, AC bezüglich in Q, R, S trifft.

Wird nun durch MN die zu AC senkrechte Ebene gelegt, so schneidet sie den Zylinder in einem Kreise mit dem Durchmesser MN, das Sphäroid in einem Kreise mit dem Durchmesser OP und den Kegel in einem Kreise mit dem Durchmesser QR.

Da $HA = AC$, so gilt

$$\begin{aligned} HA : AS &= CA : AS \\ &= EA : AQ \\ &= MS : SQ. \end{aligned}$$

Folglich
$$HA : AS = MS^2 : MS \cdot SQ.$$

Aber wegen der Ellipseneigenschaft gilt

$$\begin{aligned} AS \cdot SC : SO^2 &= AK^2 : KB^2 \\ &= AS^2 : SQ^2; \end{aligned}$$

folglich
$$\begin{aligned} SQ^2 : SO^2 &= AS^2 : AS \cdot SC \\ &= SQ^2 : SQ \cdot QM, \end{aligned}$$

und demnach
$$SO^2 = SQ \cdot QM.$$

Addieren wir auf beiden Seiten SQ^2, so haben wir

$$SO^2 + SQ^2 = SQ \cdot SM.$$

Daher haben wir nach dem Obigen

$$\begin{aligned} HA : AS &= MS^2 : (SO^2 + SQ^2) \\ &= MN^2 : (OP^2 + QR^2) \end{aligned}$$

$=$ (Kreis, Durchm. MN) : (Kreis, Durchm. OP + Kreis, Durchm. QR).

Das heißt

$HA : AS =$ (Schnittkreis des Zylinders) : (Schnittkreis des Sphäroids + Schnittkreis des Kegels).

Daher ist der Schnittkreis des Zylinders, so wie er liegt, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit den Schnittkreisen des Sphäroids und des Kegels zusammengenommen, wenn die beiden letzten Kreise mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.

Ähnliches gilt für die drei entsprechenden Schnitte in einer zu AC senkrechten Ebene, die durch irgend eine andere zu EF parallele Gerade in dem Parallelogramm LF geht.

Behandeln wir ebenso alle die Gruppen von je drei Kreisen, in denen die zu AC senkrechten Ebenen den Zylinder, das Sphäroid und den Kegel schneiden, und aus denen diese Körper zusammengesetzt sind, so folgt, daß der Zylinder, dort wo er liegt, sich im Gleichgewicht befindet mit dem Sphäroid und dem Kegel zusammengenommen, wenn beide mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.

Da K der Schwerpunkt des Zylinders ist, so folgt also

$HA : AK =$ (Zylinder) : (Sphäroid + Kegel AEF).

Es ist aber $\quad HA = 2\,AK;$

folglich $\quad$ Zylinder $= 2$ (Sphäroid + Kegel AEF).

Andrerseits ist

Zylinder $= 3$ (Kegel AEF); [Eukl. XII, 10]

folglich Kegel $AEF = 2$ (Sphäroid).

Aber, da $EF = 2\,BD$, so ist

Kegel $AEF = 8$ (Kegel ABD);

folglich Sphäroid $= 4$ (Kegel ABD)

und Hälfte des Sphäroids $= 2$ (Kegel ABD).

Durch B, D ziehen wir VBW, XDY parallel zu AC; und wir denken uns den Zylinder, der AC zur Achse und die Kreise mit den Durchmessern VX, WY zu Grundflächen hat.

Dann ist Zylinder $VY = 2$ (Zylinder VD)

$= 6$ (Kegel ABD)

$= \frac{3}{2}$ (Sphäroid), nach dem Obigen.

Q. e. d.

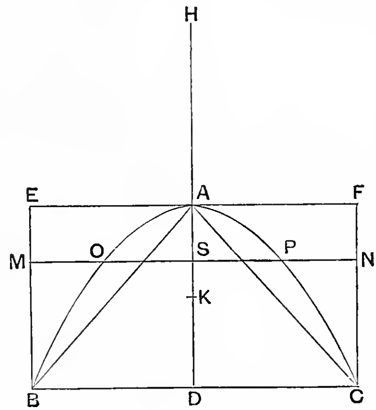
Satz 4.

Jedes Segment eines rechtwinkligen Konoids (d. h. eines Rotationsparaboloids), abgeschnitten durch eine zur Achse senkrechte Ebene, ist anderthalbmal so groß wie der Kegel, der dieselbe Grundfläche und Achse wie das Segment hat.

Das läßt sich nach unserer Methode folgendermaßen untersuchen.

Ein Rotationsparaboloid werde von einer Ebene durch die Achse in der Parabel BAC geschnitten, und es werde noch mit einer zweiten Ebene geschnitten, die auf der Achse senkrecht steht und die erste Ebene in BC schneidet. Wir verlängern DA, die Achse des Segments, bis H, indem wir HA gleich AD machen.

Es sei HD ein Wagebalken; A ist sein Mittelpunkt.



Die Grundfläche des Segments ist der Kreis mit dem Durchmesser BC in der zu AD senkrechten Ebene; wir denken uns (1) den Kegel, der den letzten Kreis zur Grundfläche und A als Spitze hat, und (2) den Zylinder mit demselben Kreis als Grundfläche und AD als Achse.

In dem Parallelogramm EC sei irgend eine zu BC parallele Gerade MN gezogen, und durch

MN sei die zu AD senkrechte Ebene gelegt; diese Ebene schneidet den Zylinder in einem Kreise mit dem Durchmesser MN und das Paraboloid in einem Kreise mit dem Durchmesser OP.

Da nun BAC eine Parabel ist und BD, OS Ordinaten, so gilt

$$DA : AS = BD^2 : OS^2$$

oder

$$HA : AS = MS^2 : OS^2.$$

Folglich haben wir

$$HA : AS = (\text{Kreis, Radius } MS) : (\text{Kreis, Radius } OS)$$
$$= (\text{Schnittkreis des Zylinders}) : (\text{Schnittkreis des Paraboloids}).$$

Daher ist der Schnittkreis des Zylinders in seiner wirklichen Lage in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Schnittkreise des Paraboloids, wenn der letzte Kreis mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht wird.

Ähnliches gilt für die beiden entsprechenden Kreisschnitte in einer zu AD senkrechten Ebene, die durch irgend eine andere zu BC parallele Gerade in dem Parallelogramm geht.

Nehmen wir wie gewöhnlich alle Kreise, die den ganzen Zylinder und das ganze Segment bilden, und behandeln sie in derselben Weise, so finden wir, daß der Zylinder an der Stelle, wo er liegt, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit dem Segment, das mit seinem Schwerpunkt nach H gebracht ist.

Der Mittelpunkt K von AD ist der Schwerpunkt des Zylinders; daher gilt

$$HA : AK = (\text{Zylinder}) : (\text{Segment}).$$

Folglich $\quad$ Zylinder $= 2$ (Segment).

Und $\quad$ Zylinder $= 3$ (Kegel ABC); $\quad$ [Eukl. XII, 10]

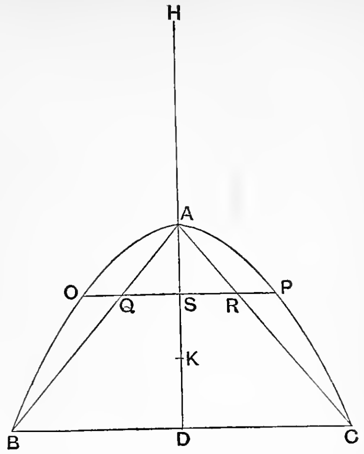
folglich $\quad$ Segment $= \frac{3}{2}$ (Kegel ABC).

Satz 5.

Der Schwerpunkt eines Segments eines rechtwinkligen Konoids (d. h. eines Rotationsparaboloids), abgeschnitten durch eine zur Achse senkrechte Ebene, liegt auf der geraden Linie, die die Achse des Segments ist, und teilt diese so, daß der am Scheitel liegende Abschnitt doppelt so groß wie der Rest ist.

Das läßt sich durch die Methode folgendermaßen untersuchen.

Ein Rotationsparaboloid werde von einer Ebene durch die Achse in der Parabel BAC geschnitten; und es werde noch mit einer zweiten Ebene geschnitten, die auf der Achse senkrecht steht und die erste Ebene in BC schneidet.



Wir verlängern DA, die Achse des Segments, bis H, indem wir HA gleich AD machen; DH denken wir uns als Wagebalken; A ist sein Mittelpunkt.

Die Grundfläche des Segments ist der Kreis mit dem Durchmesser BC in der zu AD senkrechten Ebene; wir denken uns den Kegel mit diesem Kreis als Grundfläche und der Spitze A, so daß AB, AC Erzeugende des Kegels sind.

In der Parabel sei irgend eine Doppelordinate OP gezogen, die AB, AD, AC bezüglich in Q, S, R trifft.

Aus der Eigenschaft der Parabel folgt

$$\begin{aligned} BD^2 : OS^2 &= DA : AS \\ &= BD : QS \\ &= BD^2 : BD \cdot QS. \end{aligned}$$

Folglich ist $$OS^2 = BD \cdot QS$$

oder $$BD : OS = OS : QS,$$

woraus folgt $$BD : QS = OS^2 : QS^2.$$

Aber $$\begin{aligned} BD : QS &= AD : AS \\ &= HA : AS. \end{aligned}$$

Daher gilt $$\begin{aligned} HA : AS &= OS^2 : QS^2 \\ &= OP^2 : QR^2. \end{aligned}$$

Wird nun durch OP die zu AD senkrechte Ebene gelegt, so schneidet sie das Paraboloid in einem Kreise mit dem Durchmesser OP und den Kegel in einem Kreise mit dem Durchmesser QR.

Wir sehen daher, daß

$HA : AS =$ (Kreis, Durchm. OP) : (Kreis, Durchm. QR)
$=$ (Schnittkreis des Paraboloids) : (Schnittkreis des Kegels);

und der Schnittkreis des Paraboloids befindet sich in seiner wirklichen Lage in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Schnittkreise des Kegels, wenn dieser mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht wird.

Ähnliches gilt für die beiden Kreisschnitte in jeder zu AD senkrechten Ebene, die durch irgend eine andere Ordinate der Parabel geht.

Behandeln wir ebenso alle die Kreisschnitte, aus denen das ganze Paraboloidsegment und der Kegel zusammengesetzt sind, so sehen wir, daß das ganze Paraboloidsegment in seiner wirklichen Lage sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit dem Kegel, der mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht ist.

Da nun A der Schwerpunkt des ganzen Systems in der eben beschriebenen Anordnung ist, und H der Schwerpunkt eines Teils, nämlich des Kegels, so liegt der Schwerpunkt des Restes, nämlich des Segments, in einem Punkte K auf der Verlängerung von HA derart, daß die Proportion gilt

$$HA : AK = (\text{Segment}) : (\text{Kegel}).$$

Aber $\quad$ Segment $= \frac{3}{2}$ (Kegel). $\quad$ [Satz 4]

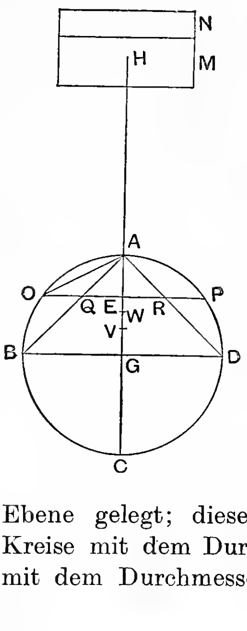
Daher $\quad HA = \frac{3}{2} AK;$

das heißt: K teilt AD so, daß $AK = 2\,KD$ ist.

Satz 6.

Der Schwerpunkt einer Halbkugel [liegt auf der geraden Linie, die] ihre Achse ist, und teilt die genannte Gerade so, daß der der Oberfläche der Halbkugel anliegende Teil zu dem übrigbleibenden das Verhältnis 5 : 3 *hat.*

Eine Kugel werde von einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene in dem Kreise $ABCD$ geschnitten; AC, BD seien aufeinander senkrechte Durchmesser dieses Kreises und durch BD werde die zu AC senkrechte Ebene gelegt.



Die letzte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem Durchmesser BD. Wir denken uns den Kegel, der den letzten Kreis zur Grundfläche und A zur Spitze hat.

Wir verlängern CA bis H, indem wir AH gleich CA machen, und betrachten HC als Wagebalken, dessen Mittelpunkt A ist.

In dem Halbkreise BAD werde irgend eine zu BD parallele Gerade OP gezogen, die AC in E und die beiden Erzeugenden des Kegels AB, AD bezüglich in Q, R schneidet; wir ziehen AO.

Durch OP werde die zu AC senkrechte Ebene gelegt; diese Ebene schneidet die Halbkugel in einem Kreise mit dem Durchmesser OP und den Kegel in einem Kreise mit dem Durchmesser QR.

Nun gilt $HA : AE = AC : AE$

$$= AO^2 : AE^2$$
$$= (OE^2 + AE^2) : AE^2$$
$$= (OE^2 + QE^2) : QE^2$$

= (Kreis, Durchm. OP + Kreis, Durchm. QR) : (Kreis, Durchm. QR).

Daher befinden sich die Kreise mit den Durchmessern OP, QR in ihrer wirklichen Lage in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Kreise vom Durchmesser QR, wenn dieser letzte Kreis mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht ist.

Da nun der Schwerpunkt der beiden Kreise mit den Durchmessern OP, QR an der Stelle, wo sie sind, ...

[Hier befindet sich eine Lücke; aber der Beweis läßt sich leicht an der Hand des entsprechenden, aber schwierigeren Falles in Satz 8 vervollständigen.

Wir gehen zu diesem Zwecke von der Stelle aus, wo die beiden Kreise mit den Durchmessern OP, QR, so wie sie liegen, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befinden mit dem Kreise vom Durchmesser QR, wenn er mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht ist.

Eine ähnliche Beziehung gilt für alle anderen Gruppen von Kreisschnitten in anderen Ebenen, die durch Punkte von AG gehen und auf AG senkrecht stehen.

Nehmen wir alle Kreise, die bezüglich die Halbkugel BAD und den Kegel ABD ausmachen, so finden wir:

die Halbkugel BAD und der Kegel ABD zusammengenommen befinden sich an den Stellen, wo sie sind, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit einem Kegel gleich ABD, der seinen Schwerpunkt in H hat.

Der Zylinder $M + N$ sei dem Kegel ABD gleich.

Da nun der Zylinder $M + N$ mit seinem Schwerpunkte in H die Halbkugel BAD und den Kegel ABD an den Stellen, wo sie sind, im Gleichgewicht hält, so sei M der Teil des Zylinders, der mit seinem Schwerpunkte in H den Kegel ABD (allein) dort, wo er ist, im Gleichgewicht hält; dann ist N der Teil des Zylinders, der, mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht, die Halbkugel (allein) dort, wo sie ist, im Gleichgewicht hält.

Nun ist der Schwerpunkt des Kegels ein Punkt V, so daß $AG = 4\,GV$ ist; da also M in H mit dem Kegel im Gleichgewicht ist, so gilt $M : (\text{Kegel}) = \frac{3}{4} AG : HA = \frac{3}{8} AC : AC$,

woraus folgt $M = \frac{3}{8}(\text{Kegel})$.

Aber es ist $M + N = (\text{Kegel})$; folglich $N = \frac{5}{8}(\text{Kegel})$.

Nun befinde sich der Schwerpunkt der Halbkugel in W, irgendwo auf AG.

Da N in H der Halbkugel allein das Gleichgewicht hält, so gilt

$$(\text{Halbkugel}) : N = HA : AW.$$

Aber die Halbkugel BAD ist zweimal so groß wie der Kegel ABD; [*Über Kugel und Zylinder* I. 34 und Satz 2 oben]

und $N = \frac{5}{8}(\text{Kegel})$, wie oben gezeigt.

Folglich ist

$$2 : \tfrac{5}{8} = HA : AW$$
$$= 2\,AG : AW$$

oder $AW = \frac{5}{8} AG$, so daß W AG derart teilt, daß

$$AW : WG = 5 : 3.]$$

Satz 7.

Nach derselben Methode können wir auch den Satz untersuchen:

[*Jedes Segment einer Kugel hat*] *zu dem Kegel mit derselben Grundfläche und Achse* [*dasselbe Verhältnis wie die Summe aus dem Radius der Kugel und der Höhe des Restsegments zu der Höhe des Restsegments.*]

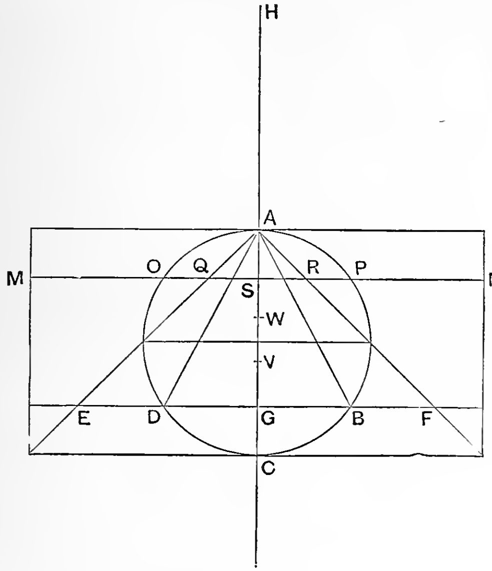
[Hier befindet sich eine Lücke; aber was fehlt, ist nur die Konstruktion, und diese läßt sich leicht aus der Figur entnehmen. BAD ist das Kugelsegment, dessen Volumen mit dem eines Kegels mit derselben Grundfläche und Höhe verglichen werden soll.]

Die durch MN senkrecht zu AC gelegte Ebene schneidet den Zylinder in einem Kreise mit dem Durchmesser MN, das Kugelsegment in einem Kreise mit dem Durchmesser OP und den Kegel über der Grundfläche EF in einem Kreise mit dem Durchmesser QR.

Ebenso wie vorher [vgl. Satz 2] können wir beweisen, daß der Kreis mit dem Durchmesser MN an der Stelle, wo er ist, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit den beiden Kreisen mit den Durchmessern OP, QR, wenn diese Kreise verschoben und mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.

Dasselbe kann von allen Gruppen von je drei Kreisen bewiesen werden, in denen der Zylinder, das Kugelsegment und der Kegel mit der gemeinsamen Höhe AG von irgend einer zu AC senkrechten Ebene geschnitten werden.

Da nun diese Kreisgruppen bezüglich den ganzen Zylinder, das ganze Kugelsegment und den ganzen Kegel ausmachen, so folgt, daß der Zylinder an der Stelle, wo er ist, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit der Summe aus dem Kugelsegment und dem Kegel, wenn beide mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.



Wir teilen AG in W, V so, daß

$$AW = WG, \quad AV = 3\,VG.$$

Daher ist W der Schwerpunkt des Zylinders und V der des Kegels.

Da sich nun die Körper wie beschrieben im Gleichgewicht befinden, so gilt

$$(\text{Zylinder}) : (\text{Kegel } AEF + \text{Kugelsegment } BAD) = HA : AW.$$

. . . .

[Der Rest des Beweises fehlt; aber er läßt sich leicht folgendermaßen ergänzen.

Wir haben

$$(\text{Kegel } AEF + \text{Segment } BAD) : (\text{Zylinder}) = AW : AC$$
$$= AW \cdot AC : AC^2.$$

Aber $\quad (\text{Zylinder}) : (\text{Kegel } AEF) = AC^2 : \tfrac{1}{3} EG^2$

$$= AC^2 : \tfrac{1}{3} AG^2.$$

Daher folgt *ex aequali*

$$(\text{Kegel } AEF + \text{Segment } BAD) : (\text{Kegel } AEF)$$
$$= AW \cdot AC : \tfrac{1}{3} AG^2$$
$$= \tfrac{1}{2} AC : \tfrac{1}{3} AG,$$

und daraus folgt wieder

$$(\text{Segment } BAD):(\text{Kegel } AEF) = (\tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{3}AG):\tfrac{1}{3}AG.$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } AEF):(\text{Kegel } ABD) &= EG^2:DG^2\\ &= AG^2:AG\cdot GC\\ &= AG:GC\\ &= \tfrac{1}{3}AG:\tfrac{1}{3}GC.\end{aligned}$$

Folglich haben wir *ex aequali*

$$\begin{aligned}(\text{Segment } BAD):(\text{Kegel } ABD) &= (\tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{3}AG):\tfrac{1}{3}GC\\ &= (\tfrac{3}{2}AC - AG):GC\\ &= (\tfrac{1}{2}AC + GC):GC.\end{aligned}$$

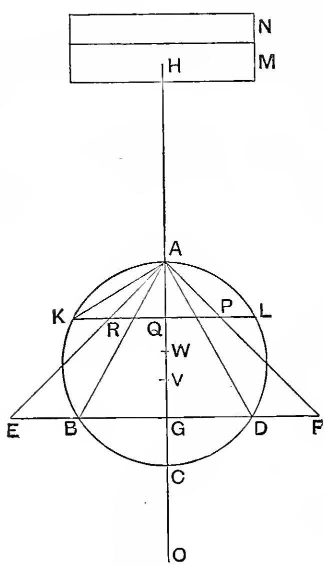
Q. e. d.]

Satz 8.

In ähnlicher Weise können wir den Satz untersuchen, daß *jedes Segment eines Sphäroids, abgeschnitten durch eine zur Achse senkrechte Ebene, zu dem Kegel, der dieselbe Grundfläche und Achse hat, dasselbe Verhältnis hat wie die Summe aus der Halbachse des Sphäroids und der Achse des Restsegments zur Achse des Restsegments.*

Satz 9.

[Die Formulierung des Satzes, die Voraussetzung und einige Worte der Konstruktion fehlen. Der Satz selbst läßt sich jedoch mit Hilfe des Satzes 10 ergänzen, mit dem er identisch sein muß, mit dem Unterschied, daß er sich auf ein Kugel- statt auf ein Sphäroidsegment bezieht.



Der Satz würde also lauten:

Der Schwerpunkt irgend eines Kugelsegments liegt auf der Geraden, welche die Achse des Segments ist, und teilt diese Gerade so, daß der dem Scheitel anliegende Abschnitt zu dem Restabschnitt dasselbe Verhältnis hat wie die Summe aus der Achse des Segments und der vierfachen Achse des Restsegments zu der Summe aus der Achse des Segments und der doppelten Achse des Restsegments.

Heibergs Figur entspricht dem Falle eines Segments, das größer als die Halbkugel ist. Das untersuchte Segment ist BAD. Voraussetzung und Konstruktion sind aus der Figur von selbst ersichtlich.]

Wir verlängern AC bis H und O, indem wir HA gleich AC und CO gleich dem Radius der Kugel machen; HC werde als Wagebalken angesehen; sein Mittelpunkt ist A.

In der das Segment abschneidenden Ebene beschreiben wir um den Mittelpunkt G einen Kreis, dessen Radius (GE) gleich AG ist; wir konstruieren den Kegel, der diesen Kreis zur Grundfläche und A zur Spitze hat. AE, AF sind Erzeugende dieses Kegels.

Durch irgend einen Punkt Q auf AG ziehen wir parallel zu EF die Gerade KL, die das Segment in K, L und AE, AF in R, P trifft; wir verbinden A mit K.

Nun gilt

$$\begin{aligned} HA : AQ &= CA : AQ \\ &= AK^2 : AQ^2 \\ &= (KQ^2 + QA^2) : QA^2 \\ &= (KQ^2 + PQ^2) : PQ^2 \end{aligned}$$

$=$ (Kreis, Durchm. KL $+$ Kreis, Durchm. PR) : (Kreis, Durchm. PR).

Wir denken uns einen dem Kreise mit dem Durchmesser PR gleichen Kreis mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht; daher befinden sich die Kreise mit den Durchmessern KL, PR an den Stellen, wo sie sind, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Kreise vom Durchmesser PR, der mit seinem Schwerpunkte nach H gebracht ist.

Ähnliches gilt für die entsprechenden Kreisschnitte in irgend einer anderen zu AG senkrechten Ebene.

Nehmen wir daher alle Kreisschnitte, aus denen bezüglich das Kugelsegment ABD und der Kegel AEF zusammengesetzt sind, so finden wir, daß das Kugelsegment ABD und der Kegel AEF an den Stellen, wo sie sind, dem Kegel AEF das Gleichgewicht halten, wenn angenommen wird, daß dieser Kegel mit seinem Schwerpunkt nach H gebracht ist.

Der Zylinder $M + N$ sei dem Kegel AEF gleich, der A zur Spitze und den Kreis mit dem Durchmesser EF zur Grundfläche hat.

Wir teilen AG in V so, daß $AG = 4\,VG$; daher ist V der Schwerpunkt des Kegels AEF; „denn das ist früher bewiesen worden.“ [1])

---

[1]) Vgl. die Anmerkung zu S. 417 oben.

Der Zylinder $M + N$ werde mit einer zur Achse senkrechten Ebene derart geschnitten, daß der Zylinder M (allein), mit seinem Schwerpunkt nach H gebracht, dem Kegel AEF das Gleichgewicht hält.

Da $M + N$, in H aufgehängt, dem Kugelsegment ABD und dem Kegel AEF an den Stellen, wo sie sind, das Gleichgewicht hält, während M, auch in H, sich mit dem Kegel AEF in seiner wirklichen Lage im Gleichgewicht befindet, so folgt, daß N in H sich mit dem Kugelsegment ABD in seiner wirklichen Lage im Gleichgewicht befindet.

Nun gilt

$$(\text{Kugelsegment } ABD) : (\text{Kegel } ABD) = OG : GC;$$

„denn das ist bereits bewiesen“ [vgl. *Über Kugel und Zylinder* II. 2 Zusatz und Satz 7 *vorher*].

Und es ist

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } ABD) &: (\text{Kegel } AEF)\\ = (\text{Kreis, Durchm. } BD) &: (\text{Kreis, Durchm. } EF)\\ &= BD^2 : EF^2\\ &= BG^2 : GE^2\\ &= CG \cdot GA : GA^2\\ &= CG : GA.\end{aligned}$$

Folglich haben wir *ex aequali*

$$(\text{Kugelsegment } ABD) : (\text{Kegel } AEF) = OG : GA.$$

Auf AG nehmen wir den Punkt W so an, daß die Proportion gilt

$$AW : WG = (GA + 4\,GC) : (GA + 2\,GC).$$

Dann haben wir umgekehrt

$$GW : WA = (2\,GC + GA) : (4\,GC + GA)$$

und, *componendo*,

$$GA : AW = (6\,GC + 2\,GA) : (4\,GC + GA).$$

Es ist aber

$$GO = \tfrac{1}{4}(6\,GC + 2\,GA) \quad [\text{denn } GO - GC = \tfrac{1}{2}(CG + GA)]$$

und
$$CV = \tfrac{1}{4}(4\,GC + GA);$$

daher
$$GA : AW = GO : CV$$

oder
$$OG : GA = CV : WA.$$

Aus dem Obigen folgt

$$(\text{Kugelsegment } ABD) : (\text{Kegel } AEF) = CV : WA.$$

Da nun der Zylinder M mit seinem Schwerpunkte in H sich in Bezug auf A mit dem Kegel AEF im Gleichgewicht befindet, dessen Schwerpunkt in V liegt, so gilt

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } AEF):(\text{Zylinder } M) &= HA:AV \\ &= CA:AV;\end{aligned}$$

und da der Kegel $AEF = M + N$, so haben wir *dividendo* und *invertendo*

$$(\text{Zylinder } M):(\text{Zylinder } N) = AV:CV.$$

Folglich, *componendo*,

$$\begin{aligned}(\text{Kegel } AEF):(\text{Zylinder } N) &= CA:CV\text{[1]} \\ &= HA:CV.\end{aligned}$$

Aber vorher war bewiesen

$$(\text{Kugelsegment } ABD):(\text{Kegel } AEF) = CV:WA,$$

folglich haben wir, *ex aequali*,

$$(\text{Kugelsegment } ABD):(\text{Zylinder } N) = HA:AW.$$

Und es ist oben bewiesen worden, daß der Zylinder N in H sich in Bezug auf A mit dem Segment ABD an der Stelle, wo es ist, im Gleichgewicht befindet; da nun H der Schwerpunkt des Zylinders N ist, so ist W der Schwerpunkt des Kugelsegments ABD.

Satz 10.

In derselben Weise können wir den Satz untersuchen:

Der Schwerpunkt irgend eines Segments eines Sphäroids liegt auf der geraden Linie, die die Achse des Segments ist, und teilt diese Gerade so, daß der dem Scheitel des Segments anliegende Abschnitt zu dem Rest sich verhält, wie die Summe aus der Achse des Segments und der vierfachen Achse des Restsegments zu der Summe aus der Achse des Segments und der doppelten Achse des Restsegments.

[Der Beweis dieses Satzes ist nicht angegeben, aber er folgt aus dem des vorangehenden Satzes wie der Beweis des Satzes 3 aus dem von Satz 2.]

Satz 11.

Nach dieser Methode läßt sich ferner auch der Satz untersuchen:

[*Ein Segment eines stumpfwinkligen Konoids* (*d. h. eines Rotationshyperboloids*)] *hat zu dem Kegel, der dieselbe Grundfläche hat wie das*

[1]) Archimedes gelangt zu diesem Ergebnisse auf einem ziemlichen Umwege, denn er hätte es sofort *convertendo* erhalten können. Vgl. Euklid X. 14.

Segment und gleiche Höhe, dasselbe Verhältnis wie die Summe aus der Achse des Segments und dem dreifachen „Achsenzusatz“ (d. i. die halbe Hauptachse des hyperbolischen Schnitts durch die Achse des Hyperboloids oder, mit anderen Worten, der Abstand zwischen dem Scheitel des Segments und der Spitze des Asymptotenkegels) zu der Summe aus der Achse des Segments und dem doppelten „Zusatz“[1]) [das ist im Satz 25 des Buches *Über Konoide und Sphäroide* bewiesen], „und ebenso viele andere Sätze, die ich auslassen will, da die Methode durch die vorangehenden Beispiele klar gemacht ist, um nun noch die Beweise der oben genannten Sätze mitzuteilen.“

Satz 12.

Wird in ein senkrechtes Prisma mit quadratischen Grundflächen ein Zylinder eingeschrieben, der seine Grundflächen in den einander gegenüberliegenden Quadraten hat und mit seinem Mantel die übrigen vier Parallelogramme berührt, und wird durch den Mittelpunkt des Kreises, der die Grundfläche des Zylinders ist, und eine Seite des gegenüberliegenden Quadrats eine Ebene gelegt, so ist die durch diese Ebene abgeschnittene Figur $\frac{1}{6}$ des ganzen Prismas.

„Das läßt sich durch die Methode untersuchen, und wenn es so dargestellt ist, will ich zum Beweise durch geometrische Erörterungen übergehen.“

[Die Behandlung nach der mechanischen Methode ist in den beiden Sätzen 12, 13 enthalten. Satz 14 gibt eine andere Lösung, die, obwohl nichts Mechanisches enthaltend, doch noch von der Art ist, die Archimedes nicht als beweiskräftig ansieht, da sie annimmt, daß der Körper wirklich aus parallelen ebenen Schnitten und eine Hilfsparabel wirklich aus parallelen in ihr liegenden Geraden *zusammengesetzt* ist. Satz 15 brachte den strengen geometrischen Beweis.]

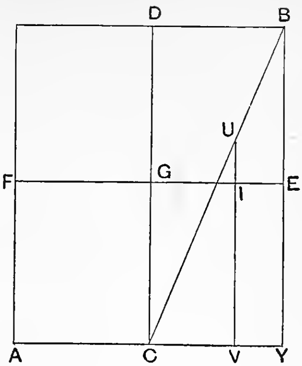
Einem senkrechten Prisma werde, wie angegeben, ein Zylinder eingeschrieben.

Das Prisma werde mit der durch die Achse des Prismas und Zylinders gehenden Ebene geschnitten, die auf der Ebene senkrecht steht, die den Teil des Zylinders abschneidet; diese Ebene

---

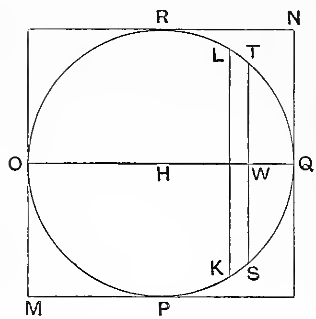
[1]) Im Texte steht in der letzten Zeile „dreifach“ (τριπλασίαν) statt „doppelt“. Vor den letzten Zeilen findet sich eine beträchtliche Lücke; vielleicht ist ein Satz über den Schwerpunkt eines Segments eines Rotationshyperboloids ausgefallen.

ergebe als Schnitt das Parallelogramm AB und schneide die das Zylinderstück abschneidende Ebene (die auf AB senkrecht steht) in der Geraden BC.



Es sei CD die Achse des Prismas und Zylinders, EF stehe darauf im Mittelpunkte senkrecht, und durch EF werde die zu CD senkrechte Ebene gelegt; diese Ebene schneidet das Prisma in einem Quadrat und den Zylinder in einem Kreise.

MN sei das Quadrat und $OPQR$ der Kreis, und der Kreis berühre die Seiten des Quadrats in O, P, Q, R [F, E in der ersten Figur sind bezüglich mit O, Q identisch]. H sei der Mittelpunkt des Kreises.



KL sei der Schnitt der durch EF senkrecht zur Achse des Zylinders gelegten Ebene und der das Zylinderstück abschneidenden Ebene; KL wird von OHQ halbiert [und geht durch den Mittelpunkt von HQ].

Es werde irgend eine auf HQ senkrechte Sehne des Kreises, etwa ST, gezogen, die HQ in W trifft; durch ST werde die zu OQ senkrechte Ebene gelegt und auf beiden Seiten der Ebene des Kreises $OPQR$ verlängert.

Diese Ebene schneidet den Halbzylinder, der den Halbkreis PQR zum Schnitt und die Achse des Prismas zur Höhe hat, in einem Parallelogramm, von dem eine Seite gleich ST und eine andere eine Erzeugende des Zylinders ist; und sie schneidet auch das abgeschnittene Zylinderstück in einem Parallelogramm, von dem eine Seite gleich ST und die andere mit UV (in der ersten Figur) gleich und parallel ist.

UV ist parallel zu BY und schneidet von GE in dem Parallelogramm DE das Stück EJ ab, das gleich QW ist.

Da nun EC ein Parallelogramm ist und VJ parallel zu GC, so folgt

$$\begin{aligned} EG : GJ &= YC : CV \\ &= BY : UV \\ &= (\square \text{ im Halbzylinder}) : (\square \text{ im Zylinderstück}). \end{aligned}$$

Und es ist $EG = HQ$, $GJ = HW$, $QH = OH$, folglich
$OH : HW =$ ($\square$ im Halbzylinder) : ($\square$ im Zylinderstück).

Das Schnittparallelogramm des Zylinderstücks denken wir uns verschoben und so nach O gebracht, daß O sein Schwerpunkt ist; OQ sei ein Wagebalken mit dem Mittelpunkt H.

Da nun W der Schwerpunkt des Parallelogramms im Halbzylinder ist, so folgt aus dem Obigen, daß das Parallelogramm im Halbzylinder an der Stelle, wo es ist, mit seinem Schwerpunkt in W, sich in Bezug auf H im Gleichgewicht befindet mit dem Parallelogramm im Zylinderstück, wenn dieses mit seinem Schwerpunkt nach O gebracht wird.

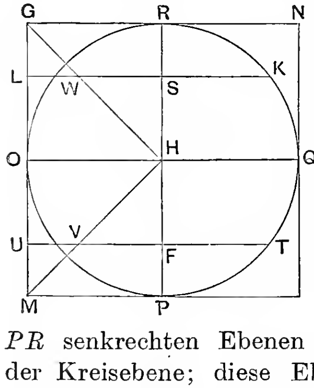
Ähnliches folgt für die anderen Parallelogrammschnitte in irgend welchen zu OQ senkrechten Ebenen, die durch andere zu OQ senkrechte Sehnen in dem Halbkreise PQR gehen.

Nehmen wir alle Parallelogramme, die bezüglich den Halbzylinder und das Zylinderstück ausmachen, zusammen, so folgt, daß der Halbzylinder, an der Stelle, wo er ist, sich in Bezug auf H mit dem abgeschnittenen Zylinderstück im Gleichgewicht befindet, wenn dieses mit seinem Schwerpunkte nach O gebracht ist.

Satz 13.

Das zur Achse senkrechte Parallelogramm (Quadrat) MN werde mit dem Kreise $OPQR$ und seinen Durchmessern OQ, PR nochmals besonders gezeichnet.

Wir ziehen die Geraden HG, HM und legen durch sie die Ebenen, die auf der Ebene des Kreises senkrecht stehen, und verlängern sie auf beiden Seiten dieser Ebene.



Dadurch entsteht ein Prisma mit dem dreieckigen Schnitt GHM, dessen Höhe der Achse des Zylinders gleich ist; dieses Prisma ist $\frac{1}{4}$ des dem Zylinder umgeschriebenen ursprünglichen Prismas.

Zu OQ parallel ziehen wir in gleichen Abständen die Geraden LK, UT, die den Kreis in K, T, RP in S, F, und GH, HM in W, V schneiden.

Durch LK, UT legen wir die zu PR senkrechten Ebenen und verlängern sie auf beiden Seiten der Kreisebene; diese Ebenen ergeben als Schnitte des Halbzylinders PQR und des Prismas GHM vier Parallelogramme, in denen die Höhen der Achse des Zylinders und die anderen Seiten bezüglich den Strecken KS, TF, LW, UV gleich sind . . . .

[Der Rest des Beweises fehlt, aber wie Zeuthen[1]) sagt, das erhaltene Ergebnis und die Beweisführung lassen sich aus dem Obigen sicher erschließen.

Archimedes wünscht zu beweisen, daß der Halbzylinder PQR an der Stelle, wo er ist, und das Prisma GHM an der Stelle, wo es ist, sich in Bezug auf H als festen Punkt das Gleichgewicht halten.

Er hat zuerst zu beweisen, daß die Elemente: (1) das Parallelogramm mit der Seite $= KS$ und (2) das Parallelogramm mit der Seite $= LW$ an den Stellen, wo sie sind, sich in Bezug auf S das Gleichgewicht halten, oder mit anderen Worten, daß die Strecken SK und LW an den Stellen, wo sie sind, sich in Bezug auf S im Gleichgewicht befinden.

Nun ist

$$(\text{Radius des Kreises } OPQR)^2 = SK^2 + SH^2$$

oder

$$SL^2 = SK^2 + SW^2.$$

Folglich ist

$$LS^2 - SW^2 = SK^2$$

und demnach

$$(LS + SW) \cdot LW = SK^2,$$

woraus folgt

$$\tfrac{1}{2}(LS + SW) : \tfrac{1}{2} SK = SK : LW.$$

Und $\frac{1}{2}(LS + LW)$ ist der Abstand des Schwerpunktes von LW vom Punkte S, während $\frac{1}{2} SK$ der Abstand des Schwerpunktes von SK vom Punkte S ist.

Daher halten sich SK und LW an den Stellen, wo sie sind, in Bezug auf S das Gleichgewicht.

Ähnliches gilt für die entsprechenden Parallelogramme.

Nehmen wir *alle* parallelogrammatischen Elemente in dem Halbzylinder und dem Prisma, so finden wir:

Der Halbzylinder PQR und das Prisma GHM befinden sich an den Stellen, wo sie sind, in Bezug auf H im Gleichgewicht.

Aus diesem Ergebnisse und dem des Satzes 12 können wir sofort das Volumen des abgeschnittenen Zylinderstücks ableiten. Denn in Satz 12 ist gezeigt, daß das Zylinderstück, mit seinem Schwerpunkt nach O gebracht, sich (in Bezug auf H) mit dem Halbzylinder an der Stelle, wo er ist, im Gleichgewicht befindet. Nach Satz 13 können wir für den Halbzylinder an der Stelle, wo er ist, das Prisma GHM einsetzen, das in Bezug auf

[1]) Zeuthen in *Bibliotheca Mathematica* VII_3, 1906—7, SS. 352—3.

RP in die entgegengesetzte Lage gebracht ist. Der Schwerpunkt des Prismas in dieser Lage ist also ein Punkt (etwa Z) auf HQ, so daß $HZ = \frac{2}{3} HQ$.

Denken wir uns also das Prisma in seinem Schwerpunkt angehängt, so haben wir

$$\begin{aligned}(\text{Zylinderstück}) : (\text{Prisma}) &= \tfrac{2}{3} HQ : OH \\ &= 2 : 3;\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}(\text{Zylinderstück}) &= \tfrac{2}{3} (\text{Prisma } GHM) \\ &= \tfrac{1}{6} (\text{ursprüngl. Prisma}).\end{aligned}$$

Anmerkung. Dieser Satz löst offenbar die Aufgabe, den Schwerpunkt eines Halbzylinders oder mit anderen Worten eines Halbkreises zu finden.

Denn das Dreieck GHM an der Stelle, wo es ist, und der Halbkseis PQR an der Stelle, wo er ist, halten sich in Bezug auf H im Gleichgewicht.

Ist nun X der Punkt auf HQ, der der Schwerpunkt des Halbkreises ist, so gilt

$$\tfrac{2}{3} HO \cdot (\triangle\, GHM) = HX \cdot (\text{Halbkreis } PQR),$$

oder

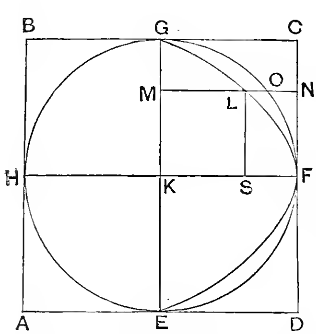
$$\tfrac{2}{3} HO \cdot HO^2 = HX \cdot \tfrac{1}{2} \pi \cdot HO^2;$$

d. h.

$$HX = \frac{4}{3\pi} \cdot HQ. \,]$$

Satz 14.

Es sei ein senkrechtes Prisma mit quadratischen Grundflächen gegeben, von denen eine $ABCD$ ist; dem Prisma werde ein Zylinder eingeschrieben, seine Grundfläche sei der Kreis $EFGH$, der die Seiten des Quadrats $ABCD$ in E, F, G, H berührt.



Durch den Mittelpunkt und die der Seite CD entsprechende Seite der $ABCD$ *gegenüberliegenden* Quadratfläche werde die Ebene gelegt; diese Ebene schneidet ein Prisma ab, das gleich $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Prismas ist und von drei Parallelogrammen und zwei Dreiecken begrenzt wird, wobei die Dreiecke entgegengesetzte Flächen bilden.

Dem Halbkreise EFG werde die Parabel eingeschrieben, die FK zur Achse hat und durch G, E

geht; wir ziehen parallel zu KF die Gerade MN, die GE in M, die Parabel in L, den Halbkreis in O und CD in N trifft.

Dann ist $$MN \cdot NL = NF^2;$$
„denn das ist klar". [Vgl. Apollonius, *Kegelschnitte*, I, 11.]

[Der Parameter ist offenbar gleich GK oder KF.]

Daher ist $$MN : NL = GK^2 : LS^2.$$

Durch MN werde die zu EG senkrechte Ebene gelegt; sie ergibt als Schnitte: (1) mit dem von dem ganzen Prisma abgeschnittenen Prisma ein rechtwinkeliges Dreieck, von dem eine Kathete MN ist, während die andere in N auf der Ebene $ABCD$ senkrecht steht und der Achse des Zylinders gleich ist und die Hypotenuse in der den Zylinder schneidenden Ebene liegt, und (2) mit dem abgeschnittenen Zylinderstück ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete MO ist, während die andere die in O auf der Ebene KN senkrecht stehende Erzeugende des Zylinders ist und die Hypotenuse in der den Zylinder schneidenden Ebene liegt.

Da nun
$$\begin{aligned} MN : NL &= GK^2 : LS^2 \\ &= MN^2 : LS^2, \end{aligned}$$
so folgt
$$\begin{aligned} MN : ML &= MN^2 : (MN^2 - LS^2) \\ &= MN^2 : (MN^2 - MK^2) \\ &= MN^2 : MO^2. \end{aligned}$$

Aber das Schnittdreieck (1) des Prismas hat zu dem (2) des Zylinderstücks das Verhältnis $MN^2 : MO^2$.

Folglich
$$\begin{aligned} &(\triangle \text{ im Prisma}) : (\triangle \text{ im Zylinderstück}) \\ &\quad = MN : ML \\ &\quad = (\text{Strecke im Rechteck } DG) : (\text{Strecke in der Parabel}). \end{aligned}$$

Wir nehmen nun alle entsprechenden Elemente in dem Prisma, dem Zylinderstück, dem Rechteck DG und der Parabel EFG; und es folgt
$$\begin{aligned} &(\text{alle } \triangle\text{e im Prisma}) : (\text{alle } \triangle\text{e im Zylinderstück}) \\ &\quad = (\text{alle Strecken im } \square\, DG) \\ &\qquad : (\text{alle Strecken zwischen der Parabel und } EG). \end{aligned}$$

Aber das Prisma ist aus den Dreiecken im Prisma zusammengesetzt, das Zylinderstück aus den Dreiecken in ihm, das Rechteck DG aus den in ihm liegenden Parallelen zu KF und das

Parabelsegment aus den Parallelen zu KF, die zwischen dem Parabelbogen und EG liegen; folglich haben wir

$$(\text{Prisma}):(\text{Zylinderstück}) = (\square\, DG):(\text{Parabelsegment } EFG).$$

Aber $$\square\, DG = \tfrac{3}{2}(\text{Parabelsegment } EFG);$$

„denn das ist in meiner früheren Abhandlung bewiesen".

[*Quadratur der Parabel.*]

Folglich ist

$$\text{Prisma} = \tfrac{3}{2}(\text{Zylinderstück}).$$

Setzen wir nun das Zylinderstück $= 2$, so ist das Prisma 3 und das ursprüngliche Prisma, das dem Zylinder umgeschrieben ist, ist 12 (da es das Vierfache des anderen Prismas ist); folglich ist das

$$\text{Zylinderstück} = \tfrac{1}{6}(\text{ursprüngl. Prisma}).$$

Q. e. d.

[Dieser und der folgende Satz sind besonders interessant durch die Tatsache, daß die Parabel als Hilfskurve eingeführt wird, einzig zu dem Zwecke der analytischen Zurückführung der gesuchten Kubatur auf die bekannte Quadratur der Parabel.]

Satz 15.

Es sei ein senkrechtes Prisma mit quadratischen Grundflächen gegeben und ein ihm eingeschriebener Zylinder, der seine Grundfläche in dem Quadrat $ABCD$ hat und dessen Seiten in E, F, G, H berührt; der Zylinder werde von der Ebene geschnitten, die durch EG und diejenige Seite des $ABCD$ gegenüberliegenden Quadrats geht, die der Seite CD entspricht.

Diese Ebene schneidet von dem Prisma ein Prisma und von dem Zylinder ein Stück ab.

Es läßt sich beweisen, daß dieses durch die Ebene abgeschnittene Zylinderstück $\frac{1}{6}$ des ganzen Prismas ist.

Wir wollen jedoch zuerst beweisen, daß es möglich ist, dem Zylinderstück körperliche Figuren ein- und umzuschreiben, die aus Prismen von gleicher Höhe und mit ähnlichen dreieckigen Grundflächen zusammengesetzt sind, derart, daß die umgeschriebene Figur die eingeschriebene um weniger als jede beliebige Größe übertrifft . . . .

Es ist aber bewiesen worden, daß

(das durch die schiefe Ebene abgeschnittene Prisma)
$< \frac{3}{2}$ (dem Zylinderstück eingeschr. Figur).

Nun ist

(abgeschnittenes Prisma) : (eingeschr. Figur)
$= \square\, DG$: ($\square$e in dem Parabelsegment);

daher

$\square\, DG < \frac{3}{2}$ ($\square$e in dem Parabelsegment),

was unmöglich ist, da „an anderer Stelle bewiesen ist", daß das Parallelogramm DG $\frac{3}{2}$ des Parabelsegments ist.

Folglich ist . . . .
. . . . nicht größer.
. . . .

Und

(alle Prismen in dem abgeschnittenen Prisma)
: (alle Prismen in der umgeschriebenen Figur)
= (alle $\square$e im $\square\, DG$)
: (alle $\square$e in der dem Parabelsegment umgeschr. Figur);

folglich

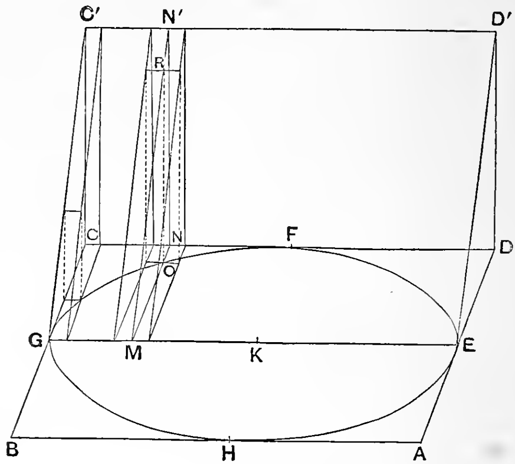
(abgeschnittenes Prisma) : (dem Zylinderstück umgeschr. Figur.)
= ($\square\, DG$) : (dem Parabelsegment umgeschr. Figur).

Aber das von der schiefen Ebene abgeschnittene Prisma ist $> \frac{3}{2}$ der dem Zylinderstück umgeschriebenen körperlichen Figur
. . . .

[Die Darstellung dieses geometrischen Beweises zeigt große Lücken, aber die Art der Anwendung der Exhaustionsmethode und der Parallelismus zwischen dieser und anderen Anwendungen sind klar. Das erste Bruchstück zeigt, daß dem Zylinderabschnitt aus Prismen zusammengesetzte Körper um- und eingeschrieben worden sind.

Die parallelen Dreiecksflächen dieser Prismen waren zu GE in der Figur des Satzes 14 senkrecht; sie teilten GE in gleiche Teile von der erforderlichen Kleinheit; jeder Schnitt des Zylinderstückes mit einer solchen Ebene war eine einem um- und einem eingeschriebenen senkrechten Prisma gemeinsame Dreiecksfläche. Die Ebenen führen auch zu Prismen in dem Prisma, das durch dieselbe schiefe Ebene wie das Zylinderstück abgeschnitten wird und auf GD als Grundfläche steht.

Die Anzahl der Teile, in die GE durch die parallelen Ebenen zerfiel, wurde hinreichend groß gewählt, um sicher zu stellen, daß die umgeschriebene Figur die eingeschriebene um weniger als eine kleine gegebene Größe übertraf.



Der zweite Teil des Beweises begann mit der Annahme, daß das Zylinderstück $> \frac{2}{3}$ des abgeschnittenen Prismas sei; und das wurde als unmöglich nachgewiesen mittels der Hilfsparabel und der in Satz 14 verwendeten Proportion

$$MN : ML = MN^2 : MO^2.$$

Wir können den fehlenden Beweis folgendermaßen ergänzen.[1])

In der Figur sind dargestellt: (1) das erste dem Zylinderstück umgeschriebene Elementarprisma, (2) zwei an der Ordinate OM liegende Elementarprismen, von denen das linke umgeschrieben, das rechte (dem anderen gleich) eingeschrieben ist, (3) die entsprechenden Elementarprismen, die Teile des abgeschnittenen Prismas ($CC'GEDD'$) bilden, das $\frac{1}{4}$ des Originalprismas ist.

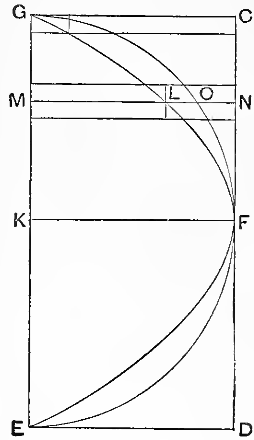
In der zweiten Figur sieht man Elementarrechtecke, die der Hilfsparabel um- und eingeschrieben sind; diese Rechtecke entsprechen genau den in der ersten Figur dargestellten um- und eingeschriebenen Elementarprismen (die Länge von GM ist in

[1]) Es muß erwähnt werden, daß dies schon Th. Reinach in seiner Übersetzung der Abhandlung getan hat („Un Traité de Géométrie inédit d'Archimède" in der *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 30. Nov. und 15. Dez. 1907); ich ziehe jedoch meine Ergänzung vor.

beiden Figuren dieselbe, und die Breiten der Elementarrechtecke sind den Höhen der Elementarprismen gleich); ähnlich sind die entsprechenden Elementarrechtecke dargestellt, die Teile des Rechtecks GD bilden.

Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, daß GE in eine gerade Anzahl gleicher Teile geteilt sei, so daß GK eine ganze Zahl dieser Teile enthält.

Zur Abkürzung wollen wir jedes der beiden Elementarprismen, von denen OM eine Kante ist, mit „El.-Pr. (O)", und jedes der beiden Elementarprismen, denen die Fläche MNN' gemeinsam ist, mit „El.-Pr. (N)" bezeichnen. Ähnlich wollen wir die entsprechenden Abkürzungen „El.-R. (L)" und „El.-R. (N)" für die entsprechenden Elemente benutzen, die sich auf die Hilfsparabel beziehen, wie sie in der zweiten Figur zu sehen sind.



Nun ist leicht zu sehen, daß der Überschuß der aus allen umgeschriebenen Prismen bestehenden Figur über die aus allen eingeschriebenen bestehende zweimal so groß wie das umgeschriebene Endprisma ist, das an FK anliegt, d. h. zweimal „El.-Pr. (N)"; und da wir die Höhe dieses Prismas so klein machen können, wie wir wollen, indem wir GK in genügend kleine Teile teilen, so folgt, daß ein- und umgeschriebene aus Elementarprismen zusammengesetzte körperliche Figuren konstruiert werden können, die sich um weniger als jede gegebene körperliche Figur unterscheiden.

(1) Wenn möglich, werde angenommen, daß

$$(\text{Zylinderstück}) > \tfrac{2}{3}\,(\text{abgeschnittenes Prisma})$$

oder
$$(\text{abgeschnittenes Prisma}) < \tfrac{3}{2}\,(\text{Zylinderstück}).$$

Es sei

$$(\text{abgeschn. Prisma}) = \tfrac{3}{2}\,(\text{Zylinderstück} - X).$$

Wir konstruieren um- und eingeschriebene Figuren, aus Elementarprismen zusammengesetzt, so daß

$$(\text{umgeschr. Figur}) - (\text{eingeschr. Figur}) < X.$$

Folglich ist

$$(\text{eingeschr. Figur}) > (\text{umgeschr. Figur} - X)$$

und *a fortiori*
$$> (\text{Zylinderstück} - X).$$

Es folgt, daß

$$(\text{abgeschn. Prisma}) < \tfrac{3}{2}\,(\text{eingeschr. Figur}).$$

Betrachten wir nun die Elementarprismen in dem abgeschnittenen Prisma und die in der eingeschriebenen Figur, so haben wir

$$\begin{aligned}\text{El.-Pr. }(N):(\text{El.-Pr. }(O) &= MN^2 : MO^2\\ &= MN : ML \quad [\text{wie in Satz 14}]\\ &= \text{El.-R. }(N) : \text{El.-R. }(L).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum\{\text{El.-Pr. }(N)\} : \sum\{\text{El.-Pr. }(O)\} = \sum\{\text{El.-R. }(N)\} : \sum\{\text{El.-R. }(L)\}.$$

(In Wirklichkeit befinden sich im ersten und dritten Gliede zwei Prismen und Rechtecke mehr als bezüglich im zweiten und vierten; aber das macht nichts aus, da man sich das erste und dritte Glied mit dem gemeinsamen Faktor $\frac{n}{n-2}$ multipliziert denken kann, ohne die Richtigkeit der Proportion zu beeinträchtigen. Vgl. den oben auf S. 417 erwähnten Satz aus *Über Konoide und Sphäroide*).

Daher gilt

$$\begin{aligned}&(\text{abgeschn. Prisma}) : (\text{eingeschr. Figur im Zylinderstück})\\ &= (\text{Rechteck } GD) : (\text{eingeschr. Figur in der Parabel}).\end{aligned}$$

Aber es ist oben bewiesen worden, daß

$$(\text{abgeschn. Prisma}) < \tfrac{3}{2}\,(\text{eingeschr. Figur im Zylinderstück});$$

folglich

$$(\text{Rechteck } GD) < \tfrac{3}{2}\,(\text{eingeschr. Figur in der Parabel})$$

und *a fortiori*

$$(\text{Rechteck } GD) < \tfrac{3}{2}\,(\text{Parabelsegment}),$$

was unmöglich ist, da

$$(\text{Rechteck } GD) = \tfrac{3}{2}\,(\text{Parabelsegment}).$$

Daher ist das Zylinderstück *nicht* größer als $\frac{2}{3}$ des abgeschnittenen Prismas.

(2) In der zweiten Lücke muß der Anfang der nächsten *reductio ad absurdum* gestanden haben, durch die die andere mögliche Annahme zunichte gemacht wird, daß das Zylinderstück $< \frac{2}{3}$ des abgeschnittenen Prismas ist.

In diesem Falle ist unsere Annahme

$$(\text{abgeschn. Prisma}) > \tfrac{3}{2}\,(\text{Zylinderstück});$$

und wir schreiben aus Elementarprismen zusammengesetzte Figuren um und ein, so daß

(abgeschn. Prisma) $> \frac{3}{2}$ (umgeschr. Figur des Zylinderstücks).

Wir betrachten nun die Elementarprismen in dem abgeschnittenen Prisma und in der umgeschriebenen Figur und erhalten aus denselben Gründen wie oben

(abgeschn. Prisma) : (umgeschr. Figur des Zylinderstücks)
$=$ (Rechteck GD) : (umgeschr. Figur der Parabel),

woraus folgt

(Rechteck GD) $> \frac{3}{2}$ (umgeschr. Figur der Parabel)

und *a fortiori*

(Rechteck GD) $> \frac{3}{2}$ (Parabelsegment),

was unmöglich ist, da

(Rechteck GD) $= \frac{3}{2}$ (Parabelsegment).

Daher ist das Zylinderstück *nicht* kleiner als $\frac{2}{3}$ des abgeschnittenen Prismas.

Aber es ist auch bewiesen worden, daß es nicht größer ist; daher (Zylinderstück) $= \frac{2}{3}$ (abgeschn. Prisma)
$= \frac{1}{6}$ (ursprüngl. Prisma).]

Satz 16.

[Dieser Satz, der verloren ist, wird die mechanische Behandlung der zweiten von den beiden in der Vorrede zu der Abhandlung erwähnten speziellen Aufgaben enthalten haben, nämlich die Aufgabe der Kubatur des von zwei Zylindern begrenzten Körpers, die beide demselben Würfel eingeschrieben sind, so daß ihre Grundflächen in zwei Gegenflächen des Würfels liegen und ihre Mäntel die anderen vier Flächen berühren.

Zeuthen hat gezeigt, wie die mechanische Methode auf diesen Fall angewandt werden kann.[1])

In der Figur ist $VWXY$ der Schnitt des Würfels mit einer Ebene (der des Papiers), die durch die Achse BD des einen der dem Würfel eingeschriebenen Zylinder geht und zu zwei Gegenflächen parallel ist.

Dieselbe Ebene ergibt den Kreis $ABCD$ als Schnitt des anderen eingeschriebenen Zylinders, dessen Achse auf der Ebene des Papiers senkrecht steht und der sich auf beiden Seiten der

[1]) Zeuthen in *Bibliotheca Mathematica* VII_3, 1906/7, SS. 356—7.

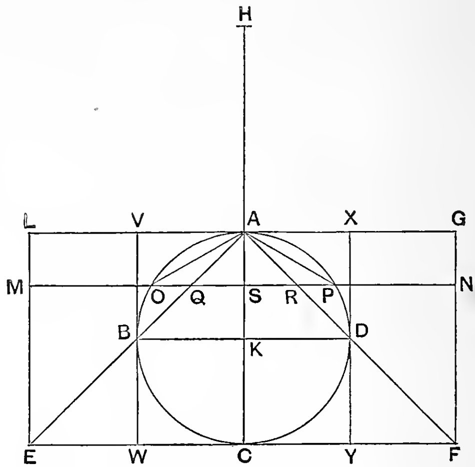
Ebene bis zu einer Entfernung ausdehnt, die dem Radius des Kreises oder der halben Kante des Würfels gleich ist.

AC ist der zu BD senkrechte Durchmesser des Kreises.

Wir ziehen die Geraden AB, AD und verlängern sie, bis sie die Tangente des Kreises in C in den Punkten E, F treffen.

Dann ist $$EC = CF = CA.$$

Wir ziehen die in A berührende Tangente LG und vervollständigen das Rechteck $EFGL$.



Von A ziehen wir die geraden Linien nach den vier Ecken des Quadrats, in dem die zu AK senkrechte Ebene durch BD den Würfel schneidet. Diese Geraden treffen verlängert die Ebene der A gegenüberliegenden Würfelfläche in vier Punkten, die die vier Ecken eines Quadrats bilden, dessen Seiten gleich EF oder der doppelten Würfelkante sind, und wir haben somit eine Pyramide mit A als Spitze und dem letzten Quadrat als Grundfläche.

Wir vervollständigen das Prisma (Parallelepiped) mit derselben Grundfläche und Höhe wie die Pyramide.

Wir ziehen in dem Parallelogramm LF irgend eine zu EF parallele Gerade MN und legen durch MN die zu AC senkrechte Ebene.

Diese Ebene schneidet:

(1) den von den beiden Zylindern eingeschlossenen Körper in einem Quadrat, dessen Seite gleich OP ist,

(2) das Prisma in einem Quadrat, dessen Seite gleich MN ist, und

(3) die Pyramide in einem Quadrat, dessen Seite gleich QR ist.

Wir verlängern CA bis H, indem wir HA gleich AC machen, und denken uns HC als Wagebalken.

Nun haben wir, wie in Satz 2, da $MS = AC$, $QS = AS$,

$$\begin{aligned} MS \cdot SQ &= CA \cdot AS \\ &= AO^2 \\ &= OS^2 + SQ^2. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} HA : AS &= CA : AS \\ &= MS : SQ \\ &= MS^2 : MS \cdot SQ \\ &= MS^2 : (OS^2 + SQ^2), \text{ nach dem Obigen,} \\ &= MN^2 : (OP^2 + QR^2) \end{aligned}$$

$= (\text{Quadrat, Seite } MN) : (\text{Quadr., S. } OP + \text{Quadr., S. } QR)$.

Daher befindet sich das Quadrat mit der Seite MN an der Stelle, wo es ist, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit den Quadraten mit den Seiten OP, QR, wenn diese mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht sind.

Indem wir ebenso mit den quadratischen Schnitten in anderen zu AC senkrechten Ebenen verfahren, beweisen wir schließlich, daß das Prisma an der Stelle, wo es ist, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit dem von den beiden Zylindern eingeschlossenen Körper und der Pyramide, wenn beide mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht sind.

Nun liegt der Schwerpunkt des Prismas in K.

Daher gilt

$$HA : AK = (\text{Prisma}) : (\text{Körper} + \text{Pyramide})$$

oder

$$2 : 1 = (\text{Prisma}) : (\text{Körper} + \tfrac{1}{3}\text{ Prisma}).$$

Folglich ist

$$2\,(\text{Körper}) + \tfrac{2}{3}\,(\text{Prisma}) = (\text{Prisma}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (\text{von den Zylindern eingeschl. Körper}) &= \tfrac{1}{6}\,(\text{Prisma}) \\ &= \tfrac{2}{3}\,(\text{Würfel}). \end{aligned}$$

Q. e. d.

Zweifellos ist Archimedes auch zu dem strengen geometrischen Beweis nach der Exhaustionsmethode übergegangen und hat ihn durchgeführt.

Wie von Prof. C. Juel bemerkt (Zeuthen a. a. O.), ist der Körper in dem vorliegenden Satze aus 8 Zylinderstücken von der Art des in dem vorangehenden Satze behandelten zusammengesetzt. Da die beiden Sätze jedoch für sich aufgestellt sind, so wird Archimedes sie sicher auch getrennt bewiesen haben.

In diesem Falle hätte man AC in eine sehr große Anzahl gleicher Teile zu teilen und durch die Teilpunkte die zu AC senkrechten Ebenen zu legen. Diese Ebenen schneiden den Körper und auch den Würfel VY in Quadraten. Somit können wir dem Körper die erforderlichen aus Elementarprismen zusammengesetzten körperlichen Figuren ein- und umschreiben, die sich um weniger als jede gegebene körperliche Größe unterscheiden; die Prismen haben quadratische Grundflächen und ihre Höhen sind die kleinen Abschnitte von AC. Das Elementarprisma in der ein- und umgeschriebenen Figur, dessen Grundfläche dem Quadrat OP^2 gleich ist, entspricht in dem Würfel einem Elementarprisma, dessen Grundfläche die Würfelkante zur Seite hat; und da das Verhältnis der Elementarprismen $OS^2 : BK^2$ ist, können wir dieselbe Hilfsparabel benutzen und den Beweis in genau derselben Weise durchführen wie im Satz 15.]

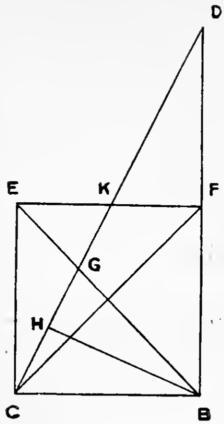
Stomachion (Fragmente).

„Da das sogenannte Stomachion eine Anzahl von Untersuchungen über die Umlegung der Figuren enthält, aus denen es besteht, so habe ich es für nötig gehalten, bezüglich seiner Teile zunächst auseinanderzusetzen, in wieviel solcher Teile es geteilt ist und wem (welcher Figur) jeder von ihnen ähnlich ist; sodann habe ich erörtert, welche Arten von Winkeln, zu je zweien zusammengenommen, zwei rechte Winkel ergeben, in der Absicht, die verschiedenen Möglichkeiten klar zu machen, wie sich die aus ihnen gebildeten Figuren zusammenlegen lassen, (und zu zeigen,) ob die in den Figuren vorkommenden Seiten (bezüglich) in einer Geraden liegen oder ob sie von ihr so wenig abweichen, daß es dem Auge unmerklich ist — denn solche Dinge erfordern eine eingehende Prüfung — und wenn die Abweichung so klein und daher dem Auge unmerklich ist, so sind die Figuren (die) zusammengelegt (diese unmerkliche Abweichung zeigen) in dieser Hinsicht nicht zu vernachlässigen.

Es ist möglich, eine große Anzahl verschiedener Figuren (aus denselben Elementen) zusammenzusetzen, weil ein Teil an die Stelle eines anderen gelegt werden kann, der mit ihm gleich und gleichwinklig ist . . . . Manchmal werden zwei Figuren zusammen einer einzelnen Figur gleich und ähnlich sein, oder zwei Figuren zusammen werden zwei (anderen) Figuren zusammen gleich und ähnlich sein, und demnach werden sich mehrere (verschiedene) Figuren durch Umlegung (der Teile) bilden lassen. Wir wollen zunächst einen für unseren Zweck nützlichen Satz vorausschicken.“

Es sei $EFBC$ ein Quadrat und K der Mittelpunkt von EF. Wir ziehen die Strecke CK und verlängern sie bis zum Schnittpunkte D mit der Verlängerung von BF. Die Verbindungslinie BE treffe CK in G.

Da $$EK = KF,$$
so ist $$DF = EC = FB.$$



Folglich ist $CF > FD$,

so daß $\sphericalangle FDC > \sphericalangle FCD$;

und es ist $\sphericalangle FBG = \sphericalangle FCB$.

Daher ergibt sich durch Addition

$$\sphericalangle CGB > \sphericalangle GCB$$

[Eukl. I. 32]

und $CB > BG$.

Wird nun CG in H halbiert und H mit B verbunden, so ist der Winkel CHB stumpf; denn in den Dreiecken CHB, GHB sind zwei Seiten CH, HB bezüglich gleich den beiden Seiten GH, HB, und die dritte Seite CB ist größer als die dritte Seite GB; folglich

$$\sphericalangle CHB > \sphericalangle GHB;$$

und demnach ist der Winkel CHB stumpf, während der Winkel GHB spitz ist . . . .

. . . .

[Hier befindet sich eine Lücke, und das nächste Bruchstück fügt zu dem oben erhaltenen Ergebnisse nichts hinzu.

Wir gehen nun zu dem von H. Suter in einer arabischen Handschrift (Berlin Mf. 258 und Mq. 559, Bodleiana 960) entdeckten und in den *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* IX_3 (1899) S. 491 ff. veröffentlichten Fragment über.]

„Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur Stomachion in vierzehn Figuren, die zu ihr ein (rationales) Verhältnis haben."

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm (Quadrat); wir halbieren BC in E, ziehen EF rechtwinklig zu BC, ziehen die Diagonalen AC, BF, FC, halbieren BE in G und ziehen GH rechtwinklig zu BE.

Sodann werde ein Lineal in die Richtung von G nach A gebracht und an ihm entlang GK gezogen.

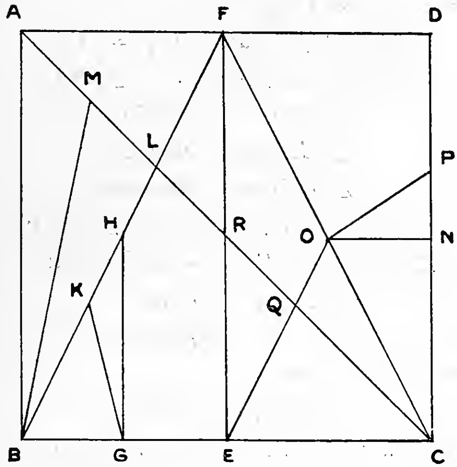
BF, AC mögen sich in L schneiden, und AL werde in M halbiert; wir ziehen BM.

Dann ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt.

Sodann werde CD in N und FC in O halbiert; wir verbinden O mit N und E; ein Lineal werde durch die Punkte B, O gelegt und an ihm entlang OP bis zum Schnittpunkte P mit DN gezogen.

AC schneide EO in Q und EF in R. Dann ist auch das Rechteck FC in sieben Teile geteilt, jedoch in anderer Weise als AE.

Wir haben zu beweisen, daß alle vierzehn Teile zu dem ganzen Quadrat in rationalen Verhältnissen stehen.



I. Wir nehmen zuerst das Rechteck $FECD$.

$$\triangle DFC = \tfrac{1}{2} \text{ (Rechteck)}$$
$$= \tfrac{1}{4} \text{ (Quadrat)},$$

und
$$\triangle CNO = \tfrac{1}{4} \triangle DFC$$
$$= \tfrac{1}{16} \text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da PO verlängert durch B gehen würde (nach Voraussetzung), während ON zu BC, einer Seite des Dreiecks PBC, parallel ist, so gilt
$$BC : NO = CP : NP.$$

Aber
$$BC = 4\,NO;$$

folglich
$$CP = 4\,NP;$$

folglich
$$\triangle CNO = 3 \triangle PNO.$$

Aber wir haben bewiesen, daß $\triangle CNO = \frac{1}{16}$ (Quadrat); folglich
$$\triangle PNO = \tfrac{1}{48} \text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da
$$\triangle CDF = \tfrac{1}{4} \text{ (Quadrat)}$$

und
$$\triangle CNO + \triangle PNO = (\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{48}) \text{ (Quadrat)},$$

so folgt durch Subtraktion
$$\text{Viereck } DPOF = \tfrac{1}{6} \text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nun würde die Verlängerung von NO durch R gehen, so daß OR zu CE parallel wäre;

folglich $$EC:OR = EQ:QO$$
$$= CQ:QR. \qquad \text{[Eukl. VI. 4]}$$

Da $EC = 2\,RO$, so folgt
$$EQ = 2\,QO \quad \text{und} \quad CQ = 2\,QR;$$
folglich $$\triangle EQC = 2\triangle COQ = 2\triangle EQR.$$

Ferner ist $$\triangle EFC = 2\triangle ERC,$$
während $$\triangle EFC = \tfrac{1}{4}\text{ (Quadrat)};$$
folglich $$\triangle ERC = \tfrac{1}{8}\text{ (Quadrat)}.$$

Aber $$\triangle ERC = 3\triangle ERQ = 3\triangle COQ;$$
folglich $$\triangle ERQ = \triangle COQ = \tfrac{1}{24}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad (4), (5)$$

Ferner ist $$\triangle ECQ = 2\triangle COQ$$
$$= \tfrac{1}{12}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Da $FR = ER$, so folgt
$$\triangle FRC = \triangle ERC.$$

Subtrahieren wir von beiden das Dreieck COQ, so haben wir
$$\text{Viereck } FRQO = \triangle EQC$$
$$= \tfrac{1}{12}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

II. Wir gehen nun zu dem Rechteck AE über.

Da LF, EO parallel sind und $FR = RE$, so folgt
$$\triangle FLR = \triangle EQR = \tfrac{1}{24}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da $BG = GE$, so ist
$$\triangle BEF = 4\triangle BGH.$$

Aber $$\triangle BEF = \tfrac{1}{4}\text{ (Quadrat)},$$
folglich $$\triangle BGH = \tfrac{1}{16}\text{ (Quadrat)}.$$

Nach Voraussetzung geht die Verlängerung von GK durch A; folglich
$$AB:HG = BK:KH.$$

Und $$AB = 2\,GH, \text{ so daß}$$
$$BK = 2\,KH.$$

Folglich $$\triangle KGH = \tfrac{1}{3}\triangle BGH$$
$$= \tfrac{1}{48}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Und es ist $$\triangle BKG = 2\triangle KGH$$
$$= \tfrac{1}{24}\text{ (Quadrat)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Da $BL = 2\,LF$ (da $AB = 2\,FR$), so folgt

$$\triangle ABL = 2\,\triangle ALF$$

und $$\triangle ALF = 2\,\triangle FLR.$$

Aber $$\triangle FLR = \tfrac{1}{24}\,(\text{Quadrat});$$

folglich $$\triangle ALF = \tfrac{1}{12}\,(\text{Quadrat}) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Es folgt, daß $$\triangle ABL = \tfrac{1}{6}\,(\text{Quadrat}),$$

und, da M der Mittelpunkt von AL ist,

$$\triangle ABM = \triangle BML$$
$$= \tfrac{1}{12}\,(\text{Quadrat}) \quad \ldots\ldots \quad (5), (6)$$

Es bleibt das Fünfeck $LREGH$ übrig; und dieses Fünfeck ist $=$ Viereck $HGEF - \triangle LRF$

$$= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\,(\text{Quadrat}) - \tfrac{1}{24}\,(\text{Quadrat})$$
$$= \tfrac{7}{48}\,(\text{Quadrat})$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}\right)\,(\text{Quadrat}), \text{ wie Archimedes es ausdrückt} \quad \ldots \quad (7)$$

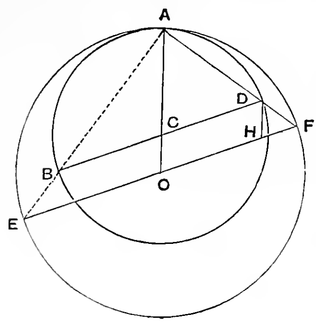
Somit ist das Rechteck AE in 7 Teile geteilt und das ganze Quadrat in 14 Teile, von denen jeder zu dem ganzen Quadrat in rationalem Verhältnis steht.

Buch der Hilfssätze.

Satz 1.

Berühren sich zwei Kreise in A, und sind BD, EF parallele Durchmesser in ihnen, so ist ADF eine gerade Linie.

[Der Beweis im Text bezieht sich nur auf den besonderen Fall, wo die Durchmesser auf dem Radius nach dem Berührungspunkte senkrecht stehen, aber er läßt sicht durch eine kleine Änderung dem allgemeineren Falle leicht anpassen.]



Es seien O, C die Mittelpunkte der Kreise; man ziehe die Verbindungslinie OC und verlängere sie bis A. DH werde parallel zu AO gezogen und treffe OF in H.

Da nun

$$OH = CD = CA$$

und

$$OF = OA,$$

so erhalten wird durch Subtraktion

$$HF = CO = DH.$$

Folglich $\sphericalangle HDF = \sphericalangle HFD.$

Die beiden Dreiecke CAD, HDF sind also gleichschenklig, und die dritten Winkel ACD, DHF in beiden sind gleich.

Folglich sind auch die Basiswinkel des einen denen des anderen gleich und

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DFH.$$

Addieren wir zu beiden den Winkel CDF, so folgt

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle CDF = \sphericalangle CDF + \sphericalangle DFH$$
$$= (\text{zwei rechte Winkel}).$$

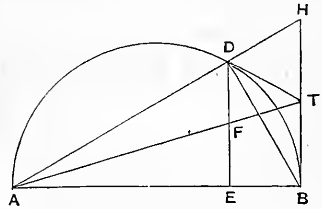
Also ist ADF eine gerade Linie.

Derselbe Beweis gilt, wenn die Kreise sich von außen berühren.[1])

Satz 2.

Es sei AB der Durchmesser eines Halbkreises und die Tangenten an ihn in B und einem beliebigen anderen Punkte D mögen sich in T schneiden. Fällt man von D auf AB das Lot DE, und schneiden sich AT, DE in F, so ist

$$DF = FE.$$



Wir verlängern AD bis zum Schnittpunkte H mit der Verlängerung von BT. Dann ist der Winkel ADB im Halbkreise ein rechter; folglich ist auch der Winkel BDH ein rechter. TB, TD sind gleich.

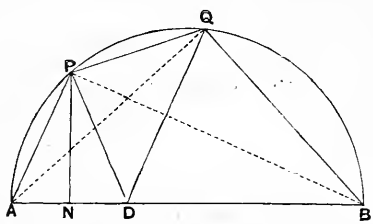
Folglich ist T der Mittelpunkt des Halbkreises über BH als Durchmesser, der durch D geht; somit

$$HT = TB.$$

Da nun DE und HB parallel sind, so folgt $DF = FE$.

Satz 3.

Es sei P irgend ein Punkt auf einem Kreissegment, dessen Grundlinie AB ist, und PN stehe senkrecht auf AB. D werde auf AB so angenommen, daß $AN = ND$. Ist nun der Bogen PQ gleich dem Bogen PA, und verbindet man B mit Q, so sind BQ, BD einander gleich.[2])



Wir ziehen PA, PQ, PD, DQ.

Da die Bogen PA, PQ gleich sind, so ist

$$PA = PQ.$$

---

[1]) Pappus benutzt das Ergebnis dieses Satzes im Zusammenhang mit dem ἄρβηλος (S. 214, ed. Hultsch) und beweist ihn für den Fall, wo die Kreise sich von außen berühren (S. 840).

[2]) Das Segment in der Figur der Handschrift scheint ein Halbkreis gewesen zu sein, obwohl der Satz ebenso für ein beliebiges Segment gilt. Aber der Fall, wo das Segment ein Halbkreis ist, bringt den Satz in engen Zusammenhang mit einem Satze in Ptolemaeus' μεγάλη σύνταξις, I. 10 (S. 39, ed. Heiberg; vgl. die Reproduktion in Cantors *Geschichte der Mathematik* I (3. Aufl. 1907) S. 417). Ptolemaeus' Absicht ist, durch eine Gleichung die

Andrerseits, da $AN = ND$ und die Winkel bei N rechte sind,

$$PA = PD.$$

Folglich

$$PQ = PD$$

und

$$\sphericalangle PQD = \sphericalangle PDQ.$$

Da nun A, P, Q, B auf einem Kreise liegen, so gilt

$$\sphericalangle PAD + \sphericalangle PQB = (2 \text{ rechte Winkel}),$$

woraus folgt $\sphericalangle PDA + \sphericalangle PQB = (2 \text{ rechte Winkel})$

$$= \sphericalangle PDA + \sphericalangle PDB.$$

Daher

$$\sphericalangle PQB = \sphericalangle PDB;$$

und da die Teilwinkel PQD und PDQ gleich sind,

$$\sphericalangle BQD = \sphericalangle BDQ$$

und

$$BQ = BD.$$

Satz 4.

Ist AB der Durchmesser eines Halbkreises und N irgend ein Punkt auf AB, und werden innerhalb des ersten Halbkreises die Halbkreise mit den Durchmessern AN, BN beschrieben, so ist die

---

Längen der Sehne eines Bogens und der Sehne des halben Bogens miteinander zu verknüpfen. Er verfährt im wesentlichen folgendermaßen. AP, PQ seien gleiche Bogen, AB der Durchmesser durch A; wir ziehen die Geraden AP, PQ, AQ, PB, QB. Auf BA tragen wir BD gleich BQ ab. Nun fällen wir das Lot PN, und es ist bewiesen, daß $PA = PD$ und $AN = ND$. Dann ist

$$AN = \tfrac{1}{2}(BA - BD) = \tfrac{1}{2}(BA - BQ) = \tfrac{1}{2}\left(BA - \sqrt{BA^2 - AQ^2}\right).$$

Mittels ähnlicher Dreiecke folgt

$$AN : AP = AP : AB$$

oder

$$AP^2 = AB \cdot AN$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(AB - \sqrt{AB^2 - AQ^2}\right) \cdot AB.$$

Hierin ist AP durch AQ und den bekannten Durchmesser AB ausgedrückt. Dividieren wir durch AB^2, so zeigt sich, daß der Satz einen geometrischen Beweis für die Formel $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$ darstellt.

Der Fall, wo das Segment ein Halbkreis ist, erinnert ferner an die von Archimedes am Anfang des zweiten Teiles von Satz 3 der *Kreismessung* angewandte Methode. Dort wird für die obige Figur bewiesen

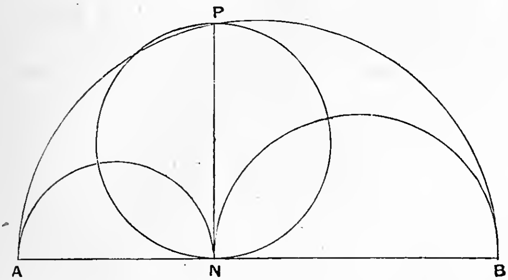
$$(AB + BQ) : AQ = BP : PA$$

oder, wenn wir die beiden ersten Glieder der Proportion durch AB dividieren,

$$(1 + \cos\alpha)/\sin\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

von den Peripherien der drei Halbkreise eingeschlossene Figur „ein von Archimedes sogenannter ἄρβηλος“[1]*; und seine Fläche ist gleich dem Kreise mit PN als Durchmesser, wo PN auf AB senkrecht steht und den ursprünglichen Halbkreis in P trifft.*

Denn
$$AB^2 = AN^2 + NB^2 + 2\,AN \cdot NB$$
$$= AN^2 + NB^2 + 2\,PN^2.$$



Aber Kreise (oder Halbkreise) verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien (oder Durchmesser).

Folglich

(Halbkreis über AB) = (Summe der Halbkreise über AN, NB) + 2 (Halbkreis über PN).

Das bedeutet: der Kreis mit dem Durchmesser PN ist gleich der Differenz zwischen dem Halbkreise über AB und der Summe der Halbkreise über AN, NB, d. h. gleich der Fläche des ἄρβηλος.

Satz 5.

AB sei der Durchmesser eines Halbkreises, C irgend ein Punkt auf AB, CD senkrecht auf AB und innerhalb des ersten Halbkreises beschreibe man die Halbkreise mit den Durchmessern AC, CB. Werden dann die zwei Kreise beschrieben, die CD auf verschiedenen Seiten und je zwei von den Halbkreisen berühren, so sind diese Kreise gleich.

Der eine Kreis berühre CD in E, den Halbkreis über AB in F und den Halbkreis über AC in G.

Wir ziehen den Durchmesser EH des Kreises, der demnach auf CD senkrecht steht und deshalb zu AB parallel ist. Wir ziehen die Verbindungslinien FH, HA, FE, EB.

---

[1]) ἄρβηλος bedeutet wörtlich „Schustermesser“. Vgl. die den Bemerkungen zum *Liber Assumptorum* beigefügte Note im Kap. II der Einleitung.

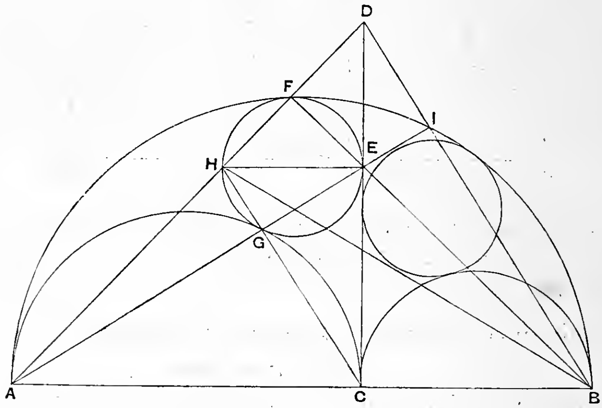
Dann sind nach Satz 1 FHA, FEB gerade Linien, da EH, AB parallel sind.

Aus demselben Grunde sind AGE, CGH gerade Linien.

Die Verlängerung von AF treffe CD in D und die Verlängerung von AE den äußeren Halbkreis in J.

Wir ziehen BJ, JD.

Da nun die Winkel AFB, ACD rechte sind, so haben die Strecken AD, AB die Eigenschaft, daß die Lote auf jede vom Endpunkte der anderen sich im Punkte E schneiden. Wegen der



Dreieckseigenschaften steht also AE auf der Geraden senkrecht, die B mit D verbindet.

Aber AE steht senkrecht auf BJ.

Folglich ist BJD eine gerade Linie. Da nun die Winkel bei G und J rechte sind, so ist CH parallel zu BD.

Folglich $$AB:BC = AD:DH$$
$$= AC:HE,$$
so daß $$AC \cdot CB = AB \cdot HE.$$

Ebenso können wir beweisen, wenn d der Durchmesser des anderen Kreises ist, daß
$$AC \cdot CB = AB \cdot d.$$

Somit ist $d = HE$, und die Kreise sind gleich.[1])

---

[1]) Die Eigenschaft, auf der dieses Ergebnis beruht, nämlich
$$AB:BC = AC:HE,$$
kommt als Zwischenstufe in einem Satze des Pappus vor (S. 230, ed. Hultsch), der beweist, daß in der obigen Figur
$$AB:BC = CE^2:HE^2.$$

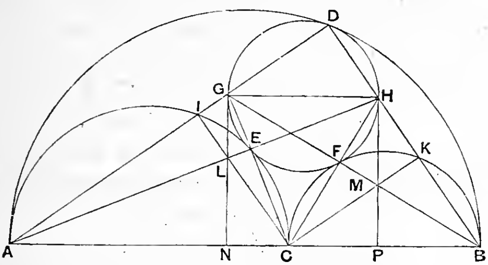
[Die folgende von einem arabischen Scholiasten Alkauhi stammende Verallgemeinerung dieses Satzes sei hier angeführt. Wenn wir statt des einen Punktes C auf AB zwei Punkte C, D haben und über den Durchmessern AC, BD die Halbkreise beschreiben, und wenn wir statt des Lotes auf AB in C die Chordale der beiden Halbkreise nehmen, so sind die auf verschiedenen Seiten der Chordale liegenden und diese sowie je zwei von den Halbkreisen berührenden Kreise gleich. Der Beweis ist ähnlich und bietet keine Schwierigkeit.]

Satz 6.

Der Durchmesser AB eines Halbkreises sei in C so geteilt, daß $AC = \frac{3}{2} CB$ [oder in irgend einem anderen Verhältnis]. Über den Durchmessern AC, BC beschreiben wir die Halbkreise innerhalb des ersten Halbkreises und denken uns den Kreis beschrieben, der alle drei Halbkreise berührt. Ist GH der Durchmesser dieses Kreises, so ist die Beziehung zwischen GH und AB zu finden.

Es sei GH der zu AB parallele Durchmesser des Kreises, und der Kreis berühre die Halbkreise über AB, AC, CB bezüglich in D, E, F.

Wir ziehen die Verbindungslinien AG, GD, BH, HD. Dann sind nach Satz 1 AGD, BHD gerade Linien.



Aus demselben Grunde sind AEH, CEG gerade Linien, und ebenso BFG, CFH.

AD treffe den Halbkreis über AC in J und BD den Halbkreis über CB in K. Wir ziehen die Geraden CJ, CK, die AE, BF bezüglich in L, M treffen mögen, und die Verlängerungen von GL, HM mögen AB bezüglich in N, P treffen.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht einzusehen. Denn da der Winkel CEH ein rechter ist, und EG auf CH senkrecht steht, so gilt

$$CE^2 : EH^2 = CG : GH$$
$$= AC : HE.$$

Nun schneiden sich in dem Dreieck AGC die Lote von A, C auf die Gegenseiten in L. Folglich muß wegen der Dreieckseigenschaften GLN auf AC senkrecht stehen.

Ebenso steht HMP auf CB senkrecht.

Da ferner die Winkel bei J, K, D rechte sind, ist CK zu AD und CJ zu BD parallel.

Folglich
$$AC:CB = AL:LH$$
$$= AN:NP$$
und
$$BC:CA = BM:MG$$
$$= BP:PN.$$
Es folgt also
$$AN:NP = NP:PB$$
oder AN, NP, PB befinden sich in stetiger Proportion.[1])

Nun ist in dem Falle, wo $AC = \frac{3}{2}CB$,
$$AN = \tfrac{3}{2}NP = \tfrac{9}{4}PB,$$
woraus sich ergibt
$$BP:PN:NA:AB = 4:6:9:19.$$
Folglich
$$GH = NP = \tfrac{6}{19}AB.$$

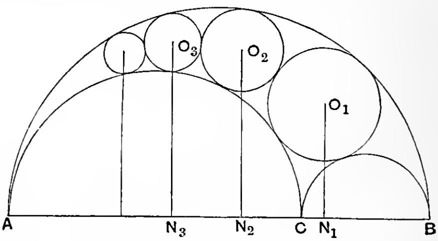
Ähnlich läßt sich GH finden, wenn $AC:CB$ gleich irgend einem anderen gegebenen Verhältnis ist.[2])

---

[1]) Diese nämliche Eigenschaft findet sich beiläufig bei Pappus (S. 226) als Zwischenstufe in dem Beweise des unten angeführten „alten Satzes".

[2]) Ist allgemein $AC:CB = \lambda:1$, so haben wir
$$BP:PN:NA:AB = 1:\lambda:\lambda^2:(1+\lambda+\lambda^2)$$
und
$$GH:AB = \lambda:(1+\lambda+\lambda^2).$$

Es dürfte von Interesse sein, den Inhalt des von Pappus (S. 208) aufgestellten und nach einigen Hilfssätzen bewiesenen „alten Satzes" hier an-



zuführen. Von drei Halbkreisen über AB, AC, CB als Durchmessern werde ein ἄρβηλος gebildet und eine Reihe von Kreisen beschrieben, von denen der erste alle drei Halbkreise berührt, während der zweite den ersten berührt und zwei von den Halbkreisen, die ein Ende des ἄρβηλος bilden, der dritte den zweiten und dieselben beiden Halbkreise und so fort. Die

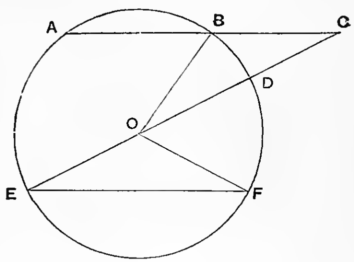
Satz 7.

Wird ein Kreis einem Quadrat um- und ein anderer eingeschrieben, so ist der umgeschriebene Kreis das Doppelte des eingeschriebenen.

Das Verhältnis des umgeschriebenen zu dem eingeschriebenen Kreise ist gleich dem des Quadrats über der Diagonale zu dem Quadrat selbst, d. h. gleich dem Verhältnis $2:1$.

Satz 8.

Ist AB eine Sehne eines Kreises, dessen Mittelpunkt O ist, und wird AB bis C so verlängert, daß BC gleich dem Radius ist, trifft ferner CO den Kreis in D und verlängert zum zweitenmal in E, so ist der Bogen AE das Dreifache des Bogens BD.



Wir ziehen die zu AB parallele Sehne EF und verbinden O mit B und F.

Da die Winkel OEF, OFE gleich sind, so ist

$$\sphericalangle COF = 2 \sphericalangle OEF$$
$$= 2 \sphericalangle BCO, \text{ da } AC \parallel EF,$$
$$= 2 \sphericalangle BOD, \text{ da } BC = BO.$$

Folglich

$$\sphericalangle BOF = 3 \sphericalangle BOD,$$

so daß der Bogen BF dreimal so groß wie der Bogen BD ist.

Somit ist der Bogen AE, der dem Bogen BF gleich ist, dreimal so groß wie der Bogen BD.[1])

Durchmesser der aufeinanderfolgenden Kreise seien d_1, d_2, d_3, ... ihre Mittelpunkte O_1, O_2, O_3, ... und O_1N_1, O_2N_2, O_3N_3 .... die Lote von den Mittelpunkten auf AB. Dann wird bewiesen, daß

$$O_1N_1 = d_1,$$
$$O_2N_2 = 2\,d_2,$$
$$O_3N_3 = 3\,d_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$O_nN_n = n\,d_n.$$

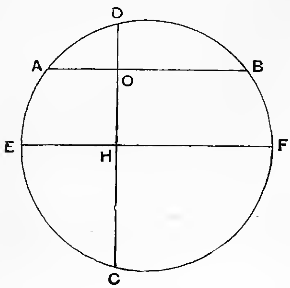
[1]) Dieser Satz liefert eine Methode, die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, d. h. eines Kreisbogens, auf eine Aufgabe von der Art zurückzuführen, die unter dem Namen νεύσεις bekannt sind. Es sei AE der in drei gleiche Teile zu teilende Bogen und ED der durch E gehende Durchmesser des Kreises, von dem AE ein Bogen ist. Um nun einen Bogen zu finden, der gleich einem Drittel von AE ist, haben wir nur *durch A eine Gerade ABC zu ziehen, die den Kreis zum zweitenmal in B und die Verlängerung von ED in C trifft, so daß BC gleich dem Radius des Kreises ist.* Eine Diskussion dieser und anderer νεύσεις findet sich im Kapitel V der Einleitung

Satz 9.

Schneiden sich in einem Kreise zwei nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehnen AB, CD rechtwinklig, so gilt

$$(\textit{Bogen } AD) + (\textit{Bogen } CB) = (\textit{Bogen } AC) + (\textit{Bogen } DB).$$

Die Sehnen mögen sich in O schneiden, und es werde der zu AB parallele Durchmesser EF gezogen, der CD in H schneidet.



Dann steht EF auf CD im Mittelpunkte H senkrecht, und es ist

$$(\text{Bogen } ED) = (\text{Bogen } EC).$$

Ferner sind EDF, ECF Halbkreise, während

$$(\text{Bogen } ED) = (\text{Bogen } EA) + (\text{Bogen } AD).$$

Folglich ist

$$(\text{Summe der Bogen } CF,\ EA,\ AD) = (\text{ein Halbkreisbogen}).$$

Und die Bogen AE, BF sind gleich.

Folglich

$$(\text{Bogen } CB) + (\text{Bogen } AD) = (\text{ein Halbkreisbogen}).$$

Daher ist der Rest des Umfanges, die Summe der Bogen AC, DB auch gleich einem Halbkreise, und der Satz ist bewiesen.

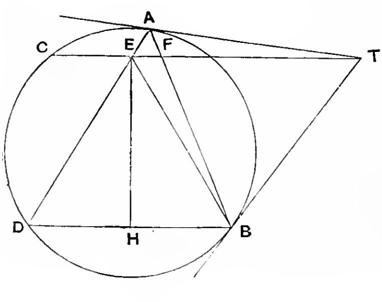
Satz 10.

Es seien TA, TB zwei Tangenten an einen Kreis, während TC den Kreis schneidet. BD sei die zu TC parallele Sehne durch B, und AD treffe TC in E. Wird dann von E auf BD das Lot EH gefällt, so halbiert es BD in H.

AB treffe TC in F und B werde mit E verbunden.

Nun ist der Winkel TAB gleich dem Winkel in dem gegenüberliegenden Abschnitt, d. h.

$$\sphericalangle TAB = \sphericalangle ADB$$
$$= \sphericalangle AET, \text{ da } ET \parallel DB.$$



Daher haben die Dreiecke EAT, AFT einen Winkel gleich und einen anderen (bei T) gemeinsam. Somit sind sie ähnlich, und

$$FT : AT = AT : TE.$$

Folglich

$$ET \cdot TF = AT^2$$
$$= BT^2.$$

Es folgt, daß die Dreiecke EBT, BFT ähnlich sind.

Folglich
$$\sphericalangle TEB = \sphericalangle TBF$$
$$= \sphericalangle TAB.$$

Aber der Winkel TEB ist gleich dem Winkel EBD, und es ist bewiesen, daß der Winkel TAB gleich dem Winkel EDB ist.

Somit
$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle EBD,$$
und die Winkel bei H sind rechte.

Es folgt
$$BH = HD.$$ [1]

Satz 11.

Schneiden sich zwei Sehnen AB, CD eines Kreises rechtwinklig in einem Punkte O, der nicht der Mittelpunkt ist, dann ist
$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = (\textit{Durchmesser})^2.$$

Wir ziehen den Durchmesser CE und die Verbindungslinien AC, CB, AD, BE.

Dann ist der Winkel CAO gleich dem Winkel CEB in demselben Kreisabschnitt, und die Winkel AOC, EBC sind rechte; daher sind die Dreiecke AOC, EBC ähnlich und
$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle ECB.$$

---

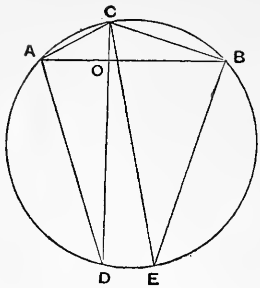
[1] Die Figur dieses Satzes erinnert auffallend an die Figur einer von Pappus (SS. 836—838) unter seinen Hilfssätzen zum ersten Buche der Abhandlung des Apollonius *Über Berührungen* (περὶ ἐπαφῶν) angegebenen Aufgabe. Die Aufgabe lautet: *Gegeben ist ein Kreis und zwei Punkte E, F* (von denen jedoch keiner, wie in diesem Falle, der Mittelpunkt der durch E, F gelegten Sehne des Kreises zu sein braucht); *durch E, F sollen bezüglich zwei Sehnen AD, AB mit einem gemeinsamen Endpunkte A gelegt werden, so daß DB zu EF parallel ist.* Die Analysis verläuft folgendermaßen. Angenommen, die Aufgabe sei gelöst, d. h. BD parallel zu FE. BT, die Tangente in B, schneide die Verlängerung von EF in T. (T ist im allgemeinen nicht der Pol von AB, so daß TA im allgemeinen nicht die Tangente in A ist.)

Dann ist
$$\sphericalangle TBF = \sphericalangle BDA$$
$$= \sphericalangle AET.$$

Daher liegen A, E, B, T auf einem Kreise, und es ist
$$EF \cdot FT = AF \cdot FB.$$

Aber da der Kreis ADB und der Punkt F gegeben sind, so ist das Rechteck $AF \cdot FB$ gegeben. Ferner ist EF gegeben. Also ist FT bekannt.

Um also die Konstruktion auszuführen, haben wir nur die Länge von FT aus den Daten zu bestimmen, EF bis T zu verlängern, so daß FT die festgestellte Länge bekommt, die Tangente TB zu ziehen und dann durch B zu EF die Parallele BD. DE, BF schneiden sich dann auf dem Kreise in A und sind die gesuchten Sehnen.



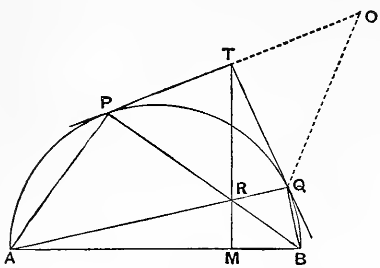
Es folgt, daß die zugehörigen Bogen und daher auch die Sehnen AD, BE gleich sind.

Folglich

$$(AO^2 + DO^2) + (BO^2 + CO^2) = AD^2 + BC^2$$
$$= BE^2 + BC^2$$
$$= CE^2.$$

Satz 12.

Ist AB der Durchmesser eines Halbkreises und sind TP, TQ die Tangenten an ihn von einem Punkte T aus, und schneiden sich die Verbindungslinien AQ, BP in R, dann steht TR auf AB senkrecht.



Die Verlängerung von TR treffe AB in M, P werde mit A, Q mit B verbunden.

Da der Winkel APB ein rechter ist, so gilt

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA$$
$$= \text{(ein rechter Winkel)}$$
$$= \sphericalangle AQB.$$

Addieren wir beiderseits den Winkel RBQ, so wird

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle QBA = \sphericalangle PRQ \text{ (Außenwinkel)}.$$

Aber $\sphericalangle TPR = \sphericalangle PAB$ und

$$\sphericalangle TQR = \sphericalangle QBA$$

in den gegenüberliegenden Kreisabschnitten, folglich

$$\sphericalangle TPR + \sphericalangle TQR = \sphericalangle PRQ.$$

Daraus folgt $TP = TQ = TR$.

[Denn verlängert man PT bis O so, daß $TO = TQ$, so haben wir

$$\sphericalangle TOQ = \sphericalangle TQO.$$

Vorausgesetzt ist, daß

$$\sphericalangle PRQ = \sphericalangle TPR + \sphericalangle TQR.$$

Durch Addition erhalten wir

$$\sphericalangle POQ + \sphericalangle PRQ = \sphericalangle TPR + \sphericalangle OQR.$$

Es folgt, daß in dem Viereck $OPRQ$ je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen gleich zwei rechten sind. Daher liegen

O, P, R, Q auf einem Kreise, und T ist sein Mittelpunkt, da $TP = TO = TQ$.

Folglich $TR = TP$.]

Daher ist $\sphericalangle TRP = \sphericalangle TPR = \sphericalangle PAM$.

Addieren wir zu beiden den Winkel PRM, so folgt

$$\sphericalangle PAM + \sphericalangle PRM = \sphericalangle TRP + \sphericalangle PRM$$
$$= \text{(zwei rechte Winkel)}.$$

Folglich $\sphericalangle APR + \sphericalangle AMR =$ (zwei rechte Winkel),

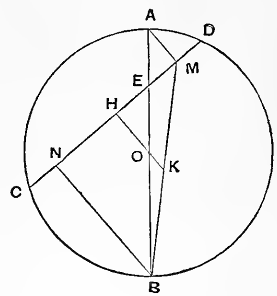
woraus folgt $\sphericalangle AMR =$ (ein rechter Winkel).[1]

Satz 13.

Schneidet ein Durchmesser AB eines Kreises eine beliebige Sehne CD, die kein Durchmesser ist, in E, und stehen AM, BN auf CD senkrecht, so gilt

$$CN = DM.\text{[2]}$$

Es sei O der Mittelpunkt des Kreises und OH senkrecht auf CD. Wir ziehen BM und verlängern HO bis zum Schnittpunkte K mit BM.



Dann ist

$$CH = HD$$

und, da $BO = OA$,

$$BK = KM.$$

Folglich $NH = HM$

und demnach $CN = DM$.

Satz 14.

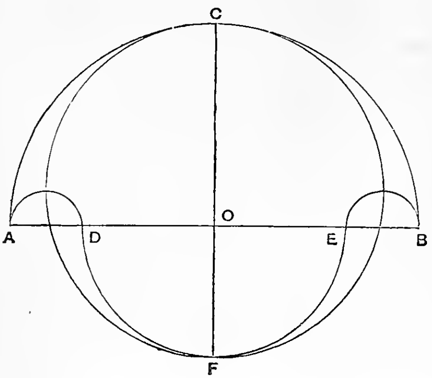
Es sei ACB ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB, und auf AB seien von A, B aus gleiche Strecken AD, BE abgetragen. Mit AD, BE als Durchmessern beschreiben wir Halbkreise auf derselben Seite wie C und mit DE als Durchmesser einen Halbkreis auf der anderen Seite. Das Lot auf AB in O, dem Mittelpunkte des ersten Halbkreises, treffe die einander gegenüberliegenden Halbkreise bezüglich in C, F.

---

[1]) TM ist offenbar die Polare des Schnittpunktes von PQ, AB, da sie die Verbindungslinie der Pole von PQ, AB ist.

[2]) Der Satz ist offenbar richtig, gleichgültig ob M, N auf CD selbst oder auf den Verlängerungen von CD nach beiden Seiten liegen. Pappus beweist ihn für den zweiten Fall in seinem ersten Hilfssatze (S. 788) zum zweiten Buche von Apollonius' νεύσεις.

Dann soll die Fläche der von den Umfängen aller Halbkreise begrenzten Figur („die Archimedes ‚Salinon'[1]) nennt") gleich der Fläche des Kreises mit CF als Durchmesser sein.[2])



Da ED in O halbiert und bis A verlängert ist, so gilt nach Euklid II. 10

$$EA^2 + AD^2 = 2(EO^2 + OA^2);$$

und

$$CF = OA + OE = EA.$$

Folglich

$$AB^2 + DE^2$$
$$= 4(EO^2 + OA^2)$$
$$= 2(CF^2 + AD^2).$$

Aber Kreise (und damit auch Halbkreise) verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien (oder Durchmesser).

Folglich

(Summe der Halbkreise über AB, DE)

$=$ (Kreis über CF) $+$ (Summe der Halbkreise über AD, BE).

Daher

(Fläche des ‚Salinon') $=$ (Fläche des Kreises mit dem Durchmesser CF).

Satz 15.

Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises, AC eine Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks, D der Mittelpunkt des Bogens AC. Wir ziehen CD und verlängern bis zum Schnittpunkt E mit der Ver-

---

[1]) Zur Erklärung dieses Namens siehe die den Bemerkungen über den *Liber Assumptorum* in der Einleitung, Kap. II beigegebene Note. Aus den dort ausführlich angegebenen Gründen halte ich *σάλινον* einfach für die graezisierte Form des lateinischen Wortes *salinum*, „Salzfaß".

[2]) Cantor (*Geschichte der Mathematik*, 3. Aufl. 1907, I. S. 300) vergleicht diesen Satz mit Hippokrates' Versuch, den Kreis mit Hilfe von Möndchen zu quadrieren, führt jedoch aus, daß Archimedes' Absicht der des Hippokrates gerade entgegengesetzt zu sein scheine. Denn während Hippokrates die Fläche eines Kreises durch andere Figuren derselben Art auszudrücken wünschte, war es möglicherweise Archimedes' Absicht, die Fläche von Figuren, die von verschiedenen Kurven begrenzt sind, der eines schon als bekannt angesehenen Kreises gleichzusetzen.

längerung von BA. AC treffe DB in F, und FM sei das Lot von F auf AB. Dann ist

$$EM = (\textit{Radius des Kreises})^{1)}.$$

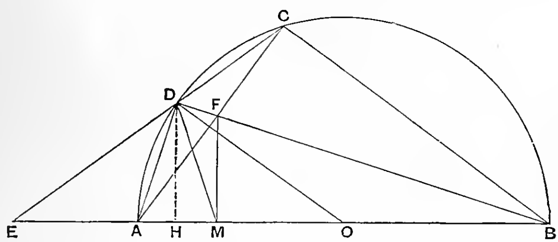
Es sei O der Mittelpunkt des Kreises. Wir ziehen die Geraden DA, DM, DO, CB.

Nun ist $\sphericalangle ABC = \frac{2}{5}$ (rechter Winkel)

und $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \frac{1}{5}$ (rechter Winkel),

woraus folgt $\sphericalangle AOD = \frac{2}{5}$ (rechter Winkel).

Ferner sind die Dreiecke FCB, FMB kongruent.



Folglich sind in den Dreiecken DCB, DMB die Seiten CB, MB gleich, BD ist gemeinsam, während die Winkel CBD, MBD gleich sind; also

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BMD = \tfrac{6}{5} \text{ (rechter Winkel)}.$$

Aber $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD =$ (zwei rechte Winkel)

$$= \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE$$
$$= \sphericalangle BMD + \sphericalangle DMA,$$

so daß $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BCD$

und $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AMD.$

Folglich $AD = MD.$

---

[1]) Pappus gibt (S. 418) einen mit diesem fast identischen Satz unter den zum Vergleich der fünf regelmäßigen Polyeder erforderlichen Hilfssätzen. Er spricht ihn in der Hauptsache folgendermaßen aus. Ist DH die halbe Seite eines einem Kreise eingeschriebenen Fünfecks, während DH auf dem Radius OHA senkrecht steht, und wird HM gleich AH gemacht, so ist OA in M stetig geteilt, so daß OM der größere Abschnitt ist.

Im Beweise wird zunächst gezeigt, daß AD, DM, MO alle gleich sind, wie im obigen Satze.

Dann gilt, da die Dreiecke ODA, DAM ähnlich sind,

$$OA : AD = AD : AM$$

oder, da $AD = OM$, $\quad OA : OM = OM : MA.$

Nun ist in dem Dreieck DMO

$$\sphericalangle MOD = \tfrac{2}{5} \text{ (rechter Winkel)},$$

$$\sphericalangle DMO = \tfrac{6}{5} \text{ (rechter Winkel)}.$$

Somit ist

$$\sphericalangle ODM = \tfrac{2}{5} \text{ (rechter Winkel)} = \sphericalangle MOD;$$

daraus folgt

$$OM = MD.$$

Ferner ist

$$\sphericalangle EDA = \text{(Supplement von } ADC) = \sphericalangle CBA = \tfrac{2}{5} \text{ (rechter Winkel)} = \sphericalangle ODM.$$

Folglich haben wir in den Dreiecken EDA, ODM

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ODM,$$

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle OMD,$$

und die Seiten AD, MD sind gleich.

Daher sind die Dreiecke kongruent und

$$EA = MO.$$

Folglich

$$EM = AO.$$

Überdies ist $DE = DO$; und es folgt, da DE gleich der Seite des eingeschriebenen Sechsecks ist, und DC die Seite des eingeschriebenen Zehnecks, daß EC in D stetig geteilt ist [d. h. $EC : ED = ED : DC$]; „und das ist in dem Buche der Elemente bewiesen". [Euklid XIII. 9: „Legt man die Seiten des demselben Kreise eingeschriebenen Sechsecks und Zehnecks aneinander, so ist die ganze Strecke stetig geteilt, und der größere Abschnitt ist die Seite des Sechsecks."]

Die Rinder-Aufgabe.

Es ist verlangt, die Zahl der Stiere und Kühe von je vier Farben oder acht unbekannte Größen zu finden. Der erste Teil der Aufgabe verknüpft die Unbekannten durch sieben einfache Gleichungen, und der zweite Teil fügt zwei weitere Bedingungen hinzu, denen die Unbekannten zu unterwerfen sind.

Es seien

W, w	bezüglich	die	Zahlen	der	weißen	Stiere	und	Kühe,
X, x	„	„	„	„	schwarzen	„	„	„
Y, y	„	„	„	„	gelben	„	„	„
Z, z	„	„	„	„	gefleckten	„	„	„

Erster Teil.

(I)
$$W = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) X + Y \quad \ldots \ldots \quad (\alpha),$$
$$X = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) Z + Y \quad \ldots \ldots \quad (\beta),$$
$$Z = (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}) W + Y \quad \ldots \ldots \quad (\gamma),$$

(II)
$$w = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4})(X + x) \quad \ldots \ldots \quad (\delta),$$
$$x = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5})(Z + z) \quad \ldots \ldots \quad (\varepsilon),$$
$$z = (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6})(Y + y) \quad \ldots \ldots \quad (\zeta),$$
$$y = (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7})(W + w) \quad \ldots \ldots \quad (\eta).$$

Zweiter Teil.

$$W + X = \text{ein Quadrat} \quad \ldots \ldots \quad (\vartheta),$$
$$Y + Z = \text{eine Dreieckszahl} \quad \ldots \quad (\iota).$$

[Die Stelle, die die Bedingung (ϑ) zum Ausdruck bringt, läßt eine zweifache Auffassung zu. Wörtlich besagen die Zeilen: „Verbanden sich die weißen Stiere der Zahl nach mit den schwarzen, so standen sie fest (*ἔμπεδον*) mit einer Tiefe und Breite von gleichem Maß (*ἰσόμετροι εἰς βάθος εἰς εὖρός τε*); und die weithin sich ausdehnenden Ebenen Thrinakiens waren voll von ihrer Menge“ (wenn man mit Krumbiegel *πλήθους* statt *πλίνθου* liest). Berücksichtigt man, daß, wenn die Stiere so geordnet werden, daß sie eine quadratische *Figur* bilden, ihre Zahl keine *Quadratzahl* zu sein braucht, da ein Stier länger als breit ist, so ist klar, daß eine mögliche Auslegung die wäre, „Quadrat“ als quadratische *Figur* zu nehmen und die Bedingung (ϑ) einfach so zu verstehen, daß

$W + X =$ ein Rechteck (d. h. ein Produkt aus zwei Faktoren).

Die Aufgabe läßt sich also in zwei Formen stellen; diese sind:

(1) die einfachere, bei der für die Bedingung (ϑ) die bloße Forderung eintritt, daß

$W + X =$ ein Produkt aus zwei ganzen Zahlen;

(2) die vollständige Aufgabe, wobei alle Bedingungen einschließlich der Forderung (ϑ) zu erfüllen sind, daß

$W + X =$ eine Quadratzahl.

Die einfachere Aufgabe ist von Jul. Fr. Wurm gelöst worden und werde bezeichnet als

Wurms Aufgabe.

Die Lösung dieser Aufgabe ist (zusammen mit einer Diskussion der vollständigen Aufgabe) von Amthor in der *Zeitschrift für Math. u. Physik* (*Hist. litt. Abteilung*) XXV. (1880), S. 156 ff. angegeben.

Man multipliziere (α) mit 336, (β) mit 280, (γ) mit 126 und addiere die drei Gleichungen; so folgt

$$297\,W = 742\,Y \quad \text{oder} \quad 3^3 \cdot 11\,W = 2 \cdot 7 \cdot 53\,Y \quad \ldots \quad (\alpha').$$

Sodann erhalten wir aus (γ) und (β)

$$891\,Z = 1580\,Y \quad \text{oder} \quad 3^4 \cdot 11\,Z = 2^2 \cdot 5 \cdot 79\,Y \quad \ldots \quad (\beta')$$

und

$$99\,X = 178\,Y \quad \text{oder} \quad 3^2 \cdot 11\,X = 2 \cdot 89\,Y \quad \ldots \quad (\gamma').$$

Multiplizieren wir (δ) mit 4800, (ε) mit 2800, (ζ) mit 1260 und (η) mit 462 und addieren wir die vier Gleichungen, so erhalten wir

$$4657\,w = 2800\,X + 1260\,Z + 462\,Y + 143\,W;$$

und mit Hilfe der Werte in (α'), (β'), (γ') leiten wir ab

$$297 \cdot 4657\,w = 2\,402\,120\,Y$$

oder

$$3^3 \cdot 11 \cdot 4657\,w = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\,Y \quad \ldots \quad (\delta').$$

Daraus ergeben sich mit Hilfe von (η), (ζ), (ε) die Gleichungen

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4657\, y = 13 \cdot 46489\, Y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon'),$$

$$3^3 \cdot 4657\, z = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761\, Y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\zeta')$$

und

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4657\, x = 2 \cdot 17 \cdot 15991\, Y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\eta').$$

Da nun alle Unbekannten ganze Zahlen sein müssen, so sehen wir aus den Gleichungen (α'), (β'), . . . (η'), daß Y durch $3^4 \cdot 11 \cdot 4657$ teilbar sein muß, d. h. wir können setzen

$$Y = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657\, n = 4149387\, n.$$

Daher geben die Gleichungen (α'), (β'), . . . (η') die folgenden Werte für alle Unbekannten, ausgedrückt durch n:

$$\left.\begin{aligned}
W &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657\, n &&= 10366482\, n \\
X &= 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657\, n &&= 7460514\, n \\
Y &= 3^4 \cdot 11 \cdot 4657\, n &&= 4149387\, n \\
Z &= 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657\, n &&= 7358060\, n \\
w &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\, n &&= 7206360\, n \\
x &= 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991\, n &&= 4893246\, n \\
y &= 3^2 \cdot 13 \cdot 46489\, n &&= 5439213\, n \\
z &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761\, n &&= 3515820\, n
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (A)$$

Ist nun $n = 1$, so sind die Zahlen die kleinsten, die den sieben Gleichungen (α), (β), . . . (η) genügen; wir haben sodann einen ganzzahligen Wert für n zu suchen, so daß auch die Gleichung (ι) befriedigt wird. [Die modifizierte Gleichung (ϑ), die verlangt, daß $W + X$ ein Produkt aus zwei Faktoren sei, ist von selbst erfüllt.]

Die Gleichung (ι) fordert

$$Y + Z = \frac{q(q+1)}{2},$$

wo q eine positive ganze Zahl ist.

Setzen wir für Y und Z ihre oben angegebenen Werte, so haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{q(q+1)}{2} &= (3^4 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 \cdot 79) \cdot 4657\, n \\
&= 2471 \cdot 4657\, n \\
&= 7 \cdot 353 \cdot 4657\, n.
\end{aligned}$$

Nun ist q entweder gerade oder ungerade, so daß entweder $q = 2s$ oder $q = 2s - 1$, und aus der Gleichung wird

$$s(2s \pm 1) = 7 \cdot 353 \cdot 4657\, n.$$

Da n keine Primzahl zu sein braucht, setzen wir $n = u \cdot v$, wo u der Faktor von n ist, der in s ohne Rest enthalten ist, und v der Faktor, der in $2s \pm 1$ ohne Rest enthalten ist; wir haben dann die folgenden sechzehn alternativen Paare von simultanen Gleichungen:

$$\begin{array}{lrlrl}
(1) & s = & u, & 2s \pm 1 = & 7 \cdot 353 \cdot 4657\, v, \\
(2) & s = & 7u, & 2s \pm 1 = & 353 \cdot 4657\, v, \\
(3) & s = & 353\, u, & 2s \pm 1 = & 7 \cdot 4657\, v, \\
(4) & s = & 4657\, u, & 2s \pm 1 = & 7 \cdot 353\, v, \\
(5) & s = & 7 \cdot 353\, u, & 2s \pm 1 = & 4657\, v, \\
(6) & s = & 7 \cdot 4657\, u, & 2s \pm 1 = & 353\, v, \\
(7) & s = & 353 \cdot 4657\, u, & 2s \pm 1 = & 7v, \\
(8) & s = & 7 \cdot 353 \cdot 4657\, u, & 2s \pm 1 = & v,
\end{array}$$

Um den kleinsten Wert von n zu finden, der allen Bedingungen der Aufgabe genügt, haben wir aus den verschiedenen positiven ganzzahligen Lösungen dieser Gleichungspaare die besondere auszuwählen, die den kleinsten Wert für das Produkt uv oder n gibt.

Lösen wir die verschiedenen Paare auf und vergleichen die Ergebnisse, so finden wir, daß es das Gleichungspaar

$$s = 7u, \quad 2s - 1 = 353 \cdot 4657\, v$$

ist, das zu der gewünschten Lösung führt; diese Lösung ist

$$u = 117\,423, \qquad v = 1,$$

so daß $\quad n = uv = 117\,423 = 3^3 \cdot 4349,$

woraus folgt $\quad s = 7u = 821\,961$

und $\quad q = 2s - 1 = 1\,643\,921.$

Folglich ist
$$\begin{aligned} Y + Z &= 2471 \cdot 4657\, n \\ &= 2471 \cdot 4657 \cdot 117\,423 \\ &= 1\,351\,238\,949\,081 \\ &= \frac{1\,643\,921 \cdot 1\,643\,922}{2}, \end{aligned}$$

was, wie verlangt, eine Dreieckszahl ist.

Die Zahl in der Gleichung (ϑ), die ein Produkt aus zwei ganzen Zahlen sein soll, ist nun

$$\begin{aligned} W+X &= 2\cdot 3\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)\cdot 4657\,n \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\,n \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\cdot 117423 \\ &= 2^2\cdot 3^4\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\cdot 4349 \\ &= (2^2\cdot 3^4\cdot 4349)\cdot(11\cdot 29\cdot 4657) \\ &= 1409076\cdot 1485583, \end{aligned}$$

was eine Rechteckszahl mit nahezu gleichen Faktoren ist.

Die Lösung ist dann (wenn man für n seinen Wert 117423 einsetzt) die folgende:

$$\begin{aligned} W &= 1\,217\,263\,415\,886 \\ X &= 876\,035\,935\,422 \\ Y &= 487\,233\,469\,701 \\ Z &= 864\,005\,479\,380 \\ w &= 846\,192\,410\,280 \\ x &= 574\,579\,625\,058 \\ y &= 638\,688\,708\,099 \\ z &= 412\,838\,131\,860 \\ \hline \text{und die Summe} &= 5\,916\,837\,175\,686. \end{aligned}$$

Die vollständige Aufgabe.

In diesem Falle sind die sieben ursprünglichen Gleichungen (α), (β), . . . (η) zu befriedigen, und die folgenden weiteren Bedingungen müssen erfüllt werden:

$$W+X = \text{eine Quadratzahl, etwa } p^2,$$

$$Y+Z = \text{eine Dreieckszahl, etwa } \frac{q(q+1)}{2}.$$

Benutzen wir die oben gefundenen Werte (A), so erhalten wir für die erste Bedingung

$$\begin{aligned} p^2 &= 2\cdot 3\cdot(7\cdot 53+3\cdot 89)\cdot 4657\,n \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\,n, \end{aligned}$$

und diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir setzen

$$n = 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\,\xi^2 = 4456749\,\xi^2,$$

wo ξ irgend eine ganze Zahl ist.

Den ersten 8 Gleichungen (α), (β), ... (η), (ϑ) genügen also die folgenden Werte:

$$
\begin{aligned}
W &= 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 53\cdot 4657^2\cdot \xi^2 &&= 46\,200\,808\,287\,018\cdot \xi^2,\\
X &= 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 29\cdot 89\cdot 4657^2\cdot \xi^2 &&= 33\,249\,638\,308\,986\cdot \xi^2,\\
Y &= 3^5\cdot 11^2\cdot 29\cdot 4657^2\cdot \xi^2 &&= 18\,492\,776\,362\,863\cdot \xi^2,\\
Z &= 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 29\cdot 79\cdot 4657^2\cdot \xi^2 &&= 32\,793\,026\,546\,940\cdot \xi^2,\\
w &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23\cdot 29\cdot 373\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 32\,116\,937\,723\,640\cdot \xi^2,\\
x &= 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 17\cdot 29\cdot 15\,991\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 21\,807\,969\,217\,254\cdot \xi^2,\\
y &= 3^3\cdot 11\cdot 13\cdot 29\cdot 46\,489\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 24\,241\,207\,098\,537\cdot \xi^2,\\
z &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\cdot 29\cdot 761\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 15\,669\,127\,269\,180\cdot \xi^2.
\end{aligned}
$$

Es ist nun noch ξ so zu bestimmen, daß die Gleichung (ι) erfüllt wird, d. h. so, daß wird

$$Y + Z = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Setzen wir die angegebenen Werte für Y, Z ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{q(q+1)}{2} &= 51\,285\,802\,909\,803\cdot \xi^2\\
&= 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4657^2\cdot \xi^2.
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren mit 8, setzen

$$2q+1 = t, \quad 2\cdot 4657\cdot \xi = u$$

und erhalten die „Pellsche“ Gleichung

$$t^2 - 1 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot u^2$$

oder

$$t^2 - 4\,729\,494\,u^2 = 1.$$

Von den Lösungen dieser Gleichung ist die kleinste zu wählen, für die u durch $2\cdot 4657$ teilbar ist.

Ist das geschehen, so ist

$$\xi = \frac{u}{2\cdot 4657} \text{ und eine ganze Zahl;}$$

durch Einsetzen des so gefundenen Wertes von ξ in das letzte Gleichungssystem würden wir zur Lösung der vollständigen Aufgabe gelangen.

Es würde zuviel Raum erfordern, wollten wir an die Lösung der „Pellschen“ Gleichung

$$t^2 - 4\,729\,494\,u^2 = 1$$

herangehen; der interessierte Leser sei daher auf Amthors Arbeit selbst verwiesen. Es genüge zu sagen, daß er $\sqrt{4729494}$ in Form eines Kettenbruches bis zur Periode entwickelt, die sich nach 91 Näherungswerten ergibt, und daß er nach einem harten Stück Arbeit zu dem Schluß kommt, daß

$$W = 1598 \; \langle 206541 \rangle,$$

wo $\langle 206541 \rangle$ die Tatsache ausdrückt, daß noch 206 541 Stellen folgen, und daß mit derselben Bezeichnung

$$\text{die Gesamtzahl der Rinder} = 7766 \; \langle 206541 \rangle.$$

Man darf sehr wohl Zweifel hegen, ob Archimedes die vollständige Aufgabe gelöst hat, indem man die enorme Größe der Zahlen und die große Schwierigkeit der Aufgabe berücksichtigt. Um eine Vorstellung von dem Raume zu geben, der erforderlich wäre, um nur die erhaltenen Ergebnisse aufzuschreiben, bemerkt Amthor, daß die großen, siebenstelligen Logarithmentafeln auf jeder Seite 50 Zeilen mit je ungefähr 50 Ziffern, zusammen etwa 2500 Ziffern enthalten; daher würde *eine* von den acht unbekannten Größen $82\frac{1}{2}$ solcher Seiten beanspruchen, und um alle acht Zahlen aufzuschreiben, würde man einen Band von 660 Seiten brauchen!]

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.