Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXII. Jahrgang.

Mit 5 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1877.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Analytische und synthetische Geometrie.

I.

Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes.

Von

Dr. H. A. Lorentz

in Arnheim.

(Auszug aus des Verfassers Inauguraldissertation.)

Erste Mittheilung.

§ 1. Bei den ersten Arbeiten über die Undulationstheorie des Lichtes war es der nächstliegende Zweck, überhaupt nachzuweisen, dass das Licht aus einer Fortpflanzung von Transversalschwingungen besteht. Nachdem aber durch die zahlreichen Untersuchungen über Interferenz, Beugung und Polarisation diese Grundidee der Theorie über jeden Zweifel erhoben war, ward es Ziel weiterer Forschung, zu ermitteln, welcher Stoff diese Schwingungen ausführe und welche Kräfte dabei auftreten.

Es besteht nun ein merkwürdiger Gegensatz zwischen der Vollkommenheit der Theorie, soweit es sich blos um die genannte Grundidee handelt, und den geringen Fortschritten, welche man während längerer Zeit in der Untersuchung des Mechanismus der Lichtschwingungen gemacht hat. Namentlich zeigt sich dies in den Bestrebungen der Physiker, um die Erscheinungen der Reflexion und Brechung des Lichtes theoretisch zu erklären.

Als man zuerst die wahre Natur des Lichtes, als eine Fortpflanzung von Transversalschwingungen, erkannte, war man nur mit einem anderweitigen Falle solcher Schwingungen bekannt. Man hatte beobachtet, dass die Theilchen fester elastischer Körper dergleichen Bewegungen ausführen können, und es lag also nahe, dem Lichtäther die charakteristischen Eigenschaften eines solchen Körpers beizulegen. Sobald man aber versuchte, aus dieser Ansicht eine theoretische Erklärung der Eigenschaften des in verschiedenen Fällen reflectirten Lichtes abzuleiten, stiess man auf Schwierigkeiten, welche völlig zu beseitigen bis jetzt nicht gelungen ist.

Unter den bekannten Annahmen über die Eigenschaften des Aethers und über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes entwickelten zuerst Fresnel und Neumann Gleichungen, welche in befriedigender Weise die Beschaffenheit des an isotropen, durchsichtigen Körpern reflectirten Lichtes wiedergeben. Neumann (und Mac-Cullagh) gelang es sogar, seine Theorie auch auf die Krystallreflexion auszudehnen, und Cornu hat mittelst gewisser Abänderungen auch die Fresnel'sche Theorie den dabei auftretenden Erscheinungen angepasst. Allein diese Resultate konnten nur erreicht werden, indem die Bedingungen für die Trennungsfläche zweier Medien mit einer gewissen Willkür gewählt wurden. Werden diese Bedingungen folgerichtig aus der Theorie der elastischen Körper abgeleitet, so ist es, wenn die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes nicht senkrecht zur Einfallsebene steht, nicht einmal möglich, ihnen durch Transversalschwingungen allein, wie sie die genannten Physiker annahmen, zu genügen. Man muss dann auch die Longitudinalschwingungen berücksichtigen, welche in den beiden Medien auftreten.

Ausgehend von der Fresnel'schen Annahme über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes haben wirklich Cauchy und mehrere andere Mathematiker das Problem in dieser Weise behandelt. Mittelst einiger Hilfshypothesen ist es ihnen dabei gelungen, Formeln zu erhalten, welche für isotrope Körper eine genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigen. Wendet man aber die nämlichen Betrachtungen auch für die Krystalle an, so ergeben sich hier Folgerungen, welchen die Beobachtungen widersprechen.

Es ist mir nicht bekannt, dass man jemals versucht hat, im Anschluss an die Neumann'sche Ansicht über die Schwingungsrichtung die Longitudinalschwingungen in Rechnung zu ziehen. Indess habe ich mich vergebens bemüht, dabei durch irgendwelche Nebenannahmen Formeln zu erhalten, welche mit der Erfahrung im Einklange stehen.

§ 2. Während also die bisherige Ansicht über die Natur der Lichtschwingungen keine völlig befriedigende Erklärung der Reflexionserscheinungen liefert, muss jede andere Hypothese, welche weniger Schwierigkeiten bietet, willkommen sein.

Eine solche neue Hypothese wurde unter dem Namen der elektromagnetischen Lichttheorie von Maxwell aufgestellt.* Bei einer theoretischen Untersuchung über die Bewegungserscheinungen der Elektricität kam er zu dem Schlusse, dass in einem nichtleitenden Körper transversal schwingende Bewegungen der Elektricität sich ausbreiten können und dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Schwingungen im

* *Maxwell, Elektricity and Magnetism., II,* S. 383, *Phil. Trans. 1865.*

freien Aether nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muss. Dies führte ihn zu der Annahme, dass in Wirklichkeit das Licht aus dergleichen elektrischen Schwingungen bestehe.

Später hat Helmholtz* in etwas allgemeinerer Weise die Gleichungen entwickelt, welche die Bewegung der Elektricität in isotropen Körpern zu bestimmen gestatten. Es blieben dabei die von Maxwell gewonnenen Resultate der Hauptsache nach bestehen. Ausserdem wies Helmholtz** darauf hin, dass die Theorie der elektrischen Oscillationen auch an der Grenze von zwei gleichartigen isolirenden Medien dieselben Gesetze der Reflexion und Refraction ergiebt, wie wir sie beim Lichte finden, „vorausgesetzt, dass man entweder die magnetische oder die dielektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt".

Dies veranlasste mich, zu untersuchen, ob in allen Fällen die elektromagnetische Lichttheorie zu einer befriedigenden Erklärung der Reflexion führen kann. Vorliegende Mittheilung enthält die Resultate dieser Untersuchung für die partielle Reflexion an nicht leitenden Körpern; später werde ich die Behandlung der totalen und metallischen Reflexion folgen lassen.

Zunächst sollen die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Elektricität entwickelt werden. Dabei folge ich grösstentheils der Arbeit von Helmholtz; nur sind an seine Formeln einige Modificationen anzubringen, um sie auch für krystallisirte Körper anwenden zu können. Es wird diesen Rechnungen immer das elektrostatische Massystem zu Grunde gelegt werden.

§ 3. Die von Faraday gemachte Entdeckung, dass die Capacität eines elektrischen Condensators von der Natur des zwischen den Belegungen befindlichen Nichtleiters abhängt, hat zu der Hypothese geführt, dass unter dem Einflusse einer elektromotorischen Kraft in den Theilchen eines Nichtleiters die beiden Elektricitäten getrennt werden, so dass jedes Theilchen an der einen Seite positiv, an der andern negativ elektrisch wird. Die mathematische Behandlung dieser unter dem Namen der dielektrischen Polarisation bekannten Erscheinung stimmt genau überein mit derjenigen der magnetischen Polarisation.

Wählen wir ein rechtwinkliges Axensystem der x, y, z und betrachten wir ein Element $dx\,dy\,dz$ des nichtleitenden Mediums am Punkte P. Wenn eine dielektrische Polarisation besteht, wird in einigen Punkten dieses Elements freie positive, in anderen freie negative Elektricität vorhanden sein. Liegt nun in dem Punkte (x, y, z) die Elektricitätsmenge

* Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journal 72 (1870).

** Ebendaselbst, S. 68, Anmerkung.

e, so bilden wir die drei Summen Σex, Σey, Σez, über alle Punkte des Elements berechnet. Sind diese Summen $\xi\, dx\, dy\, dz$, $\eta\, dx\, dy\, dz$, $\zeta\, dx\, dy\, dz$, so ist es, da $\Sigma e = 0$ ist, leicht nachzuweisen, dass ξ, η, ζ als die Componenten einer Strecke ϱ zu betrachten sind, welche in Grösse und Richtung nur von der elektrischen Vertheilung, nicht aber von der Wahl des Axensystems abhängt. Diese Strecke giebt uns Grösse und Richtung der dielektrischen Polarisation im Punkte P und wir wollen ξ, η, ζ die Componenten dieser Polarisation nennen.

Es muss nun für jeden nichtleitenden Körper die in einem Punkte P bestehende dielektrische Polarisation ϱ in bestimmmter Weise zusammenhängen mit der elektromotorischen Kraft F, d. h. mit derjenigen Kraft, welche auf die Einheit der positiven Elektricität, in P concentrirt, wirken würde. Aehnlich aber, wie in der Theorie des Magnetismus der Begriff der magnetischen Kraft für das Innere eines magnetischen Körpers einer nähern Definition bedarf, ist dies in unserem Falle, um jede Zweideutigkeit auszuschliessen, für die elektromotorische Kraft nothwendig. Wir wollen darüber folgende Bestimmung treffen. Unter elektromotorischer Kraft verstehen wir die Kraft, welche in dem betrachteten Punkte P wirken würde, wenn rings um denselben eine unendlich kleine cylindrische Höhle in dem Medium gebildet wäre, deren Axe in die Richtung der dielektrischen Polarisation fällt und unendlich gross ist gegen den Radius, während P auf halber Höhe liegt. Wie man sieht, stimmt diese Definition überein mit derjenigen, welche Thomson die polare Definition der magnetischen Kraft nennt.*

Sind nun X, Y, Z die Componenten von F, so nehmen wir an, dass in einem isotropen Nichtleiter

$$1)\qquad \xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z$$

sei, wobei ε eine von der Natur des Stoffes abhängige Grösse ist, welche wir die Constante der dielektrischen Polarisation nennen wollen.

Für einen anisotropen Körper nehmen wir an, dass es in jedem Punkte desselben drei aufeinander senkrechte Richtungen gebe (Hauptrichtungen), so dass, wenn die Axen damit zusammenfallen, gesetzt werden kann

$$2)\qquad \xi = \varepsilon_1 X, \quad \eta = \varepsilon_2 Y, \quad \zeta = \varepsilon_3 Z.$$

Dabei sind aber ε_1, ε_2, ε_3 drei verschiedene Constanten.

Denken wir uns nun den ganzen Raum von homogenen Medien eingenommen, welche im Allgemeinen anisotrop sein, aber die nämlichen Hauptrichtungen (parallel den Axen) haben mögen. Es sind dann in

---

* Vergl. *Thomson, Papers on Electrostatics and Magnetism,* §§ 479, 517; — *Maxwell, Electricity and Magnetism,* §§ 395—400.

jedem Medium die Grössen ε_1, ε_2, ε_3 constant, und nur an der Trennungsfläche S zweier Medien ändern sie sich sprungweise.

Es sei weiter durch irgendwelche Ursachen in den Theilen der Medien eine dielektrische Polarisation hervorgerufen; es soll dann untersucht werden, wie sich diese im Laufe der Zeit ändern muss. Es sind also ξ, η, ζ als Functionen der Lage und der Zeit zu bestimmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es nothwendig, die elektromotorische Kraft zu bestimmen, welche in irgend einem Punkte wirkt. Diese Kraft setzt sich aus verschiedenen Theilen zusammen, welche wir der Reihe nach betrachten wollen.

§ 4. Erstens entspringt eine elektromotorische Kraft aus der elektrostatischen Wirkung der getrennten Elektricitäten. In einem vollkommenen Isolator haben wir in dieser Hinsicht nur die im Innern der Theilchen desselben geschiedenen Elektricitäten zu betrachten. Der Definition des vorhergehenden Paragraphen zufolge kann man bei der Berechnung der elektromotorischen Kraft diese Polarisation ersetzen durch eine gewöhnliche elektrische Ladung, welche über das Innere jedes Mediums mit der Dichtigkeit $-\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$ und über die Trennungsfläche S zweier Medien mit der Flächendichtigkeit $a(\xi-\xi')+b(\eta-\eta')+c(\zeta-\zeta')$ verbreitet ist. In letzterem Ausdrucke sind ξ, η, ζ die Componenten der dielektrischen Polarisation an der ersten, ξ', η', ζ' an der zweiten Seite dieser Fläche, während mit a, b, c die Richtungsconstanten der nach der zweiten Seite gezogenen Normale bezeichnet sind. Ist nun φ_1 die Potentialfunction der erwähnten elektrischen Ladung, so gilt für jeden Punkt im Innern eines Mediums die bekannte Bedingung

$$3)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\,\Delta\varphi_1,^*$$

und an der Fläche S hat man

$$a(\xi-\xi')+b(\eta-\eta')+c(\zeta-\zeta')=$$

$$4)\qquad =\frac{1}{4\pi}\left\{a\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)'\right]+b\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)'\right]+c\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)'\right]\right\}.$$

Es sind in dieser letzten Gleichung wieder, wie wir dies auch im Folgenden immer thun werden, die Werthe der Functionen an der zweiten Seite von S mittelst Accente von den Werthen an der ersten Seite unterschieden.

Der Allgemeinheit wegen wollen wir annehmen, dass ausser der betrachteten *dielektrischen Ladung* noch eine gewöhnliche Ladung vorhanden, welche durch *Leitung* entstanden ist. Um dann die totale

---

* $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

elektrostatische Wirkung zu berechnen, hat man die Dichtigkeiten dieser Ladung zu den oben untersuchten Dichtigkeiten zu addiren. Es sei nun δ die totale Dichtigkeit im Innern eines Mediums, σ die totale Flächendichtigkeit an der Fläche S, und φ die von der totalen Ladung herrührende Potentialfunction. Man hat dann für den ersten Theil der elektromotorischen Kraft

$$5)\qquad X_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

§ 5. Wenn die elektromotorische Kraft im Laufe der Zeit sich ändert, wird dies auch mit der dielektrischen Polarisation der Fall sein; es wird sich dann also die Elektricität in den Theilchen des Mediums in Bewegung befinden. Die Componenten dieser elektrischen Strömung — die wir als dielektrischen Strom bezeichnen wollen — werden gegeben durch die Formeln

$$6)\qquad u_1 = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad v_1 = \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad w_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Besitzt aber das Medium ausser der Fähigkeit der dielektrischen Polarisation auch ein Leitungsvermögen, so besteht im Allgemeinen neben dem dielektrischen Strome auch ein gewöhnlicher Leitungsstrom, der sich mit ersterem zu einem Gesammtstrome zusammensetzt, dessen Componenten wir u, v, w nennen wollen. Es ist nun leicht zu untersuchen, wie sich durch den dielektrischen Strom die dielektrische Ladung und ebenso durch den Leitungsstrom die daneben bestehende gewöhnliche elektrische Ladung ändert. Man erhält durch diese Untersuchung eine Beziehung zwischen den Grössen u, v, w und den Dichtigkeiten δ und σ. Drückt man andererseits δ und σ mittelst der Differentialquotienten von φ aus, so findet man für jeden Punkt im Innern eines Mediums

$$7)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi)$$

und für jeden Punkt der Grenzfläche S

$$8)\qquad \begin{aligned} &a(u-u') + b(v-v') + c(w-w') \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{a\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)'\right] + b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)'\right] + c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)'\right]\right\}. \end{aligned}$$

§ 6. Die Componenten u, v, w der elektrischen Strömung werden im Allgemeinen nicht constant sein. Eine von Augenblick zu Augenblick variirende Strömung ruft aber bekanntlich in jedem Punkte eine elektromotorische Kraft der Induction hervor, und dies ist der zweite Theil von F, den wir zu berücksichtigen haben.

Genaue Messungen der durch galvanische Induction erregten Ströme sind nur ausgeführt worden für den Fall, dass sowohl der inducirende Stromleiter s, als der inducirte σ linear und in sich geschlossen sind.

Ist dann in einem Punkte von σ F_σ die Componente der elektromotorischen Kraft der Induction, nach der Richtung von σ genommen, so wollen wir die Grösse

$$\text{9)} \qquad \mathrm{F} = \int^{\sigma} F_\sigma \, d\sigma$$

die elektromotorische Kraft längs σ nennen. Die Versuche haben für diese Grösse zu folgendem Resultat geführt.

Wenn die Stromintensität i in s sich ändert, die beiden Leiter aber nicht in Bewegung sind, so ist

$$\mathrm{F} = P \frac{di}{dt}, \quad P = -A^2 \int^{\sigma}\!\!\int^{s} \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} ds\, d\sigma.$$

Es erstreckt sich hierbei die Integration über die beiden Leiter, während r der Abstand der Elemente ds und $d\sigma$, und A eine constante Grösse ist.

Betrachten wir jetzt die elektromotorische Kraft f der Induction, welche längs des Elements $d\sigma$ von der Aenderung der Stromstärke im Element ds geweckt wird. Es ist nicht zu gewagt, anzunehmen, dass auch in diesem Falle gesetzt werden dürfe $f = p \frac{di}{dt}$, wo p blos von der Länge und gegenseitigen Lage von ds und $d\sigma$ abhängt. Weiter leuchtet es ein, dass man durch Integration von p über die beiden Strombahnen die Grösse P erhalten muss. Dieser Condition wird, wie Helmholtz gezeigt hat, genügt, wenn man setzt

$$\text{10)} \quad p = -\tfrac{1}{2} A^2 \frac{1}{r} \left[(1+k) \cos(ds, d\sigma) + (1-k) \cos(r, ds) \cos(r, d\sigma)\right] ds\, d\sigma,$$

wo k eine aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante ist.

Da nach 9) $f = F_\sigma d\sigma$, $F_\sigma = \frac{f}{d\sigma}$ ist, lässt sich aus 10) der Werth von F_σ ableiten, der natürlich von der Länge von $d\sigma$ unabhängig wird. Man erhält demnach für die Componente der elektromotorischen Kraft nach der willkürlichen Richtung $d\sigma$ oder h in einem Punkte, dessen Verbindungslinie mit ds r heisst,

$$F_h = -A^2 \frac{dq}{dt}, \quad q = \frac{1}{2r} \left[(1+k) \cos(ds, h) + (1-k) \cos(r, ds) \cos(r, h)\right] i\, ds.$$

Lässt man h der Reihe nach mit den drei Axenrichtungen zusammenfallen, so findet man die Componenten der elektromotorischen Kraft nach diesen Richtungen.

Sind nun über den ganzen Raum elektrische Strömungen (u, v, w) verbreitet und will man die elektromotorische Kraft der Induction in einem Punkte $\mathrm{P}(x, y, z)$ suchen, so betrachte man u, v, w als Functionen der Coordinaten x', y', z' und berechne mittelst der angeführten Formeln zunächst die Wirkung der elektrischen Strömung im Elemente $dx'dy'dz'$ am Punkte $\mathrm{P}'(x', y', z')$. Durch nachherige Integration nach x', y', z'

ergiebt sich dann für den zweiten Theil der elektromotorischen Kraft in P

$$11)\qquad X_2 = -A^2\frac{\partial U}{\partial t},\quad Y_2 = -A^2\frac{\partial V}{\partial t},\quad Z_2 = -A^2\frac{\partial W}{\partial t},$$

und es ist hierbei, wenn der Abstand PP′ mit r angedeutet wird,

$$U = \int\!\!\int\!\!\int\left\{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{u}{r} + \frac{1-k}{2}\cdot\frac{x-x'}{r^3}\,[u(x-x') + v(y-y') + w(z-z')]\right\}dx'dy'dz'$$

oder

$$12)\qquad U = \int\!\!\int\!\!\int\left\{\frac{u}{r} + \frac{1-k}{2}\left[u\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x'} + v\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y'} + w\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z'}\right]\right\}dx'dy'dz',$$

während sich V und W in ähnlicher Weise angeben lassen.

§ 7. Für die weitere Untersuchung muss man einige Eigenschaften der Functionen U, V, W kennen. Es ist bei der Ableitung derselben zu beachten, dass die Stetigkeit der Grössen u, v, w nur an den mehrerwähnten Flächen S eine Unterbrechung erleiden kann. Ausserdem bemerke ich noch im Voraus, dass, wie sich später zeigen wird, die elektrischen Bewegungen sich immer mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, so dass man bei der Untersuchung der von bestimmten Stellen des Raumes ausgehenden Bewegungen jederzeit eine so grosse geschlossene Fläche construiren kann, dass ausserhalb derselben $u = v = w = 0$ ist. Es geht daraus hervor, dass in nachstehender Untersuchung gewisse Integrale „über die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes", in welchen u, v, w vorkommen, verschwinden müssen.

Ausserdem werden wir noch andere Integrale über diese Grenzfläche fortlassen, welche φ und die Differentialquotienten davon enthalten. Dies wird keinen Fehler herbeiführen, wenn nur bei wachsender Entfernung diese Grössen hinreichend stark abnehmen. Jedenfalls werden unsere Resultate nicht von dieser Vernachlässigung beeinflusst, da in allen Fällen, auf welche wir die Theorie anwenden werden, nirgends eine Anhäufung von freier Elektricität auftritt und demzufolge überall $\varphi = 0$ ist.

Bei der Berechnung von U nach der Gleichung 12) wollen wir uns zunächst um den Punkt P eine geschlossene Fläche B gelegt denken und den Werth U' des Integrals über den ausserhalb dieser Fläche liegenden Raum A betrachten. Wir können dann nachher aus U' U erhalten, indem wir die Dimensionen der Fläche sich der Null nähern lassen.

Setzen wir

$$13)\qquad \Psi' = \int\!\!\int\!\!\int\left(u\frac{\partial r}{\partial x'} + v\frac{\partial r}{\partial y'} + w\frac{\partial r}{\partial z'}\right)dx'dy'dz',$$

wobei die Integration sich wieder über den Raum A erstreckt, so ist selbstverständlich

$$14)\qquad U' = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial x} + \iiint \frac{u}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Es soll nun zunächst die Function Ψ' eingehender untersucht werden. Man hat in 13) die Integration auszuführen für jeden der Theile, in welche der Raum A durch die Flächen S zerlegt wird, und nachher zu summiren. Für jeden dieser Theilräume kann man aber das Integral durch einen bekannten Process der partiellen Integration umformen, und es verschwinden hierbei, dem Obengesagten zufolge, die Integrale über die unendliche Grenzfläche des Raumes. Man erhält demnach

$$15)\qquad \begin{aligned} \Psi' = & \iint r\{a(u-u') + b(v-v') + c(w-w')\}\, dS \\ & - \iint r(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\mathrm{B} - \iiint r\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'}\right) dx'\, dy'\, dz'. \end{aligned}$$

Das letzte Integral, das wir mit J bezeichnen wollen, ist hierbei über den Raum A zu nehmen, die beiden ersten dagegen über die Flächen S und B. Es sind weiter α, β, γ die Richtungsconstanten der nach aussen gezogenen Normale an der Fläche B.

Der Gleichung 7) zufolge hat man

$$J = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint r\, \Delta\varphi\, dx'\, dy'\, dz',$$

und wenn man auf das hier vorkommende Integral den Green'schen Satz anwendet, ergiebt sich

$$J = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta r\, dx'\, dy'\, dz' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial r}{\partial \nu}\right) d\mathrm{B}$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint r\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)'\right] dS,$$

wo mit n und ν die Normalen an den Flächen S und B angedeutet sind. Bringt man diesen Werth von J in die Gleichung 15) über und berücksichtigt man dabei die Relation 8), so findet man, dass sich die Integrale über die Flächen S fortheben; es bleibt somit, da $\Delta r = \frac{2}{r}$ ist, $\Psi' = K + H$, wenn

$$K = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx'\, dy'\, dz',$$

$$H = -\iint r(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\mathrm{B} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial r}{\partial \nu}\right) d\mathrm{B}$$

gesetzt wird. Schliesslich ist

$$16)\qquad U' = \frac{1-k}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \iiint \frac{u}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

und man erhält U, wenn man den Grenzwerth dieser Grösse sucht für den Fall, dass die Fläche B unendlich klein wird.

§ 8. Nun lässt sich erstens leicht zeigen, dass in diesem Falle die Grösse $\frac{\partial H}{\partial x}$ sich der Null nähert, so lange wenigstens u, v, w, φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ überall endlich sind. Um zweitens den Grenzwerth von $\frac{\partial K}{\partial x}$ zu erhalten, bemerken wir, dass für eine mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ über den Raum A verbreitete und nach dem Newton'schen Gesetze anziehende Masse K die Potentialfunction und $-\frac{\partial K}{\partial x}$ die eine Componente der Attraction im Punkte P wäre. Der Grenzwerth der letzten Grösse ist folglich die x-Componente der Attraction für den Fall, dass nicht blos der Raum A, sondern der ganze Raum mit einer Masse von der genannten Dichtigkeit gefüllt wäre. Auch in diesem Falle lässt sich bekanntlich die Attraction durch die Differentialquotienten der Potentialfunction angeben. Sei letztere hier Ψ, so hat man

17) $$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx'\, dy'\, dz',$$

wobei jetzt die Integration sich über den ganzen Raum erstreckt, und es ist $Lim \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Den Grenzwerth des letzten Gliedes in der Gleichung 16) kann man in der nämlichen Form angeben, wie dieses Glied selbst, wenn man sich nur wiederum das Integral über den ganzen Raum genommen denkt.

Es wird demnach

18) $$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \int\int\int \frac{u}{r}\, dx'\, dy'\, dz' \\ &\text{und ebenso} \\ V &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \int\int\int \frac{v}{r}\, dx'\, dy'\, dz', \\ W &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \int\int\int \frac{w}{r}\, dx'\, dy'\, dz'. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln lassen sich noch umgestalten durch Substitution der aus 17) gezogenen Werthe von $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{x-x'}{r^3}\, dx'\, dy'\, dz',$$

und wendet man hierauf die partielle Integration nach x' an, wobei wieder das Integral über die unendlich kleine Fläche B verschwindet, so kommt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x'} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx'\, dy'\, dz'.$$

Man hat demnach

$$U = \iiint \left(-\frac{1-k}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x'} + u \right) \frac{1}{r} \, dx' \, dy' \, dz',$$

und es ist also U als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-\frac{1-k}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x'} + u$ verbreiteten Masse zu betrachten. Da nun φ an allen Stellen stetig ist, ist diese Dichte überall endlich und daraus folgt, dass die Function U und ihre Differentialquotienten erster Ordnung überall stetig sind, namentlich auch an den Flächen S, wo die Continuität von u, v, w unterbrochen sein kann. Gleiches gilt von den Functionen V, W mit ihren Differentialquotienten. Weiter muss U der Poisson'schen Gleichung genügen; es ist somit

19)
$$\left\{ \begin{aligned} & \Delta U = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} - 4\pi u \\ & \text{und ebenso} \\ & \Delta V = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} - 4\pi v, \\ & \Delta W = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} - 4\pi w. \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen 18) ergiebt sich noch

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1-k}{2} \Delta \Psi + \iiint \left\{ u \frac{x'-x}{r^3} + v \frac{y'-y}{r^3} + w \frac{z'-z}{r^3} \right\} dx' \, dy' \, dz'$$

und mittelst partieller Integration und einiger Umformung findet man für das hier auftretende Integral $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Da ausserdem nach 17) $\Delta \Psi = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ist, erhält man schliesslich

20)
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

§ 9. Es erübrigt noch, einen dritten Theil der elektromotorischen Kraft zu untersuchen. Es ist nämlich möglich, dass unter dem Einflusse der elektrischen Strömungen in den Theilchen des Mediums eine magnetische Polarisation geweckt wird, deren Aenderung andererseits in jedem Punkte eine elektromotorische Kraft der Induction bedingen wird.

Nimmt man an, dass in Bezug auf die magnetische Polarisation die Hauptrichtungen die nämlichen seien, wie für die dielektrische Polarisation, und also wieder den Axen parallel laufen, so werden, wenn L, M, N die Componenten der magnetischen Kraft G nach den Axenrichtungen sind, die Componenten der magnetischen Polarisation bestimmt durch die Gleichungen

21)
$$\lambda = \vartheta_1 L, \quad \mu = \vartheta_2 M, \quad \nu = \vartheta_3 N.$$

Es sind hierin ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 constante Grössen, welche mit ε_1, ε_2, ε_3 übereinstimmen, wenn man für G eine ähnliche nähere Definition voraussetzt, wie oben für F (§ 3).

Die magnetische Kraft G setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der erste entspringt aus der magnetischen Vertheilung selbst und hat die Componenten

$$22)\qquad -\frac{\partial\chi}{\partial x},\quad -\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad -\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

wenn χ die magnetische Potentialfunction ist. Diese Grösse genügt den bekannten Bedingungen

$$23)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\nu}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\chi$$

und

$$24)\qquad \begin{aligned} &a(\lambda-\lambda')+b(\mu-\mu')+c(\nu-\nu')\\ &=\frac{1}{4\pi}\left\{a\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}-\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)'\right]+b\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}-\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)'\right]+c\left[\frac{\partial\chi}{\partial z}-\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)'\right]\right\},\end{aligned}$$

deren eine an jedem Punkte gilt, wo λ, μ, ν stetig sind, die andere dagegen an den Flächen S, wo dies nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Der zweite Theil von G rührt von den im Medium stattfindenden elektrischen Strömungen her und lässt sich berechnen mittelst des bekannten Biot-Savart'schen Gesetzes, nach welchem die durch ein Stromelement $i\,ds$ in einem um r entfernten Punkte P ausgeübte magnetische Kraft senkrecht steht zu der durch ds und P gelegten Ebene — und zwar nach leicht bestimmbarer Seite dieser Ebene — und gegeben wird durch den Ausdruck

$$\frac{A\,i\,ds\,.\,\sin(r,ds)}{r^2}.$$

Es ist hierbei A die nämliche Constante, welche auch in früheren Gleichungen auftritt.

Will man aus dem angeführten Gesetze die von einer beliebigen Stromvertheilung herrührende magnetische Kraft ableiten, so erweist sich eine nähere Bestimmung des Coordinatensystems als nothwendig. Wir wollen annehmen, dass eine Rotation (über einen rechten Winkel) von der positiven x-nach der positiven y-Axe die nämliche Richtung hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger, wenn man sie von der Seite der positiven z-Axe aus betrachtet. Man findet dann für die Componenten des zweiten Theiles von G

$$25)\qquad A\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right),\quad A\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right),\quad A\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

wo U, V, W wieder die Functionen aus den Gleichungen 18) sind.

Da die Richtigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes nur für geschlossene Ströme streng bewiesen worden ist, ist es nicht überflüssig, hier zu bemerken, dass in unseren späteren Anwendungen die Bewegung der Elektricität mit der einer incompressibeln Flüssigkeit übereinstimmt, und also in ein System geschlossener Ströme zerlegt werden kann.

Es bietet keine Schwierigkeit, schliesslich die von einer Aenderung des magnetischen Zustandes geweckte Induction zu untersuchen. Denn man kann jedes magnetisirte Theilchen, was seine Fernwirkung betrifft, durch einen kleinen Kreisstrom ersetzen, dessen Intensität sich mit dem Momente des betrachteten Theilchens zu gleicher Zeit ändert. Das Resultat, zu welchem man in dieser Weise gelangt, lässt sich folgendermassen ausdrücken. Man setze

$$26)\quad \mathrm{L}=\iiint\frac{\lambda}{r}\,dx'dy'dz',\quad \mathrm{M}=\iiint\frac{\mu}{r}\,dx'dy'dz',\quad \mathrm{N}=\iiint\frac{\nu}{r}\,dx'dy'dz',$$

wo λ, μ, ν als Functionen von x', y', z' zu betrachten sind.

Man hat dann für den dritten Theil der elektromotorischen Kraft

$$27)\quad X_3=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right),\quad Y_3=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),\quad Z_3=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\right).$$

Auch die Grössen L, M, N können nach 26) als Potentialfunctionen betrachtet werden, und zwar von Massen, welche mit den überall endlichen Dichtigkeiten λ, μ, ν ausgebreitet sind. Es geht daraus hervor, dass auch L, M, N, sowie ihre Derivirten erster Ordnung an allen Stellen stetig sein müssen.

§ 10. Aus den Gleichungen 2), 5), 11) und 27) erhalten wir schliesslich

$$28)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\xi}{\varepsilon_1}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-A^2\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right),\\
\frac{\eta}{\varepsilon_2}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-A^2\frac{\partial V}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),\\
\frac{\zeta}{\varepsilon_3}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}-A^2\frac{\partial W}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right.$$

und wenn wir ebenso aus 21), 22) und 25) die Relationen

$$29)\quad \frac{\lambda}{\vartheta_1}=A\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial x},\quad \frac{\mu}{\vartheta_2}=A\left[\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \frac{\nu}{\vartheta_3}=A\left[\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial z}$$

ableiten, haben wir alle zur Bestimmung der elektrischen Bewegungen erforderlichen Gleichungen entwickelt. Es lassen sich indess daraus noch einfachere ableiten. Differenzirt man nämlich die zweite und dritte der Gleichungen 28) resp. nach z und y, so kommt nach Subtraction

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)=A^2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right]+A\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z}\right)-\Delta \mathrm{L}\right\}.$$

Während die Grösse $\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}$ der ersten der Gleichungen 29) entnommen werden kann, findet man aus 26) leicht $\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\chi$ und $\Delta L = -4\pi\lambda$; es wird demnach

$$\text{I)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon_3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\eta}{\varepsilon_2}\right) = \dfrac{1+4\pi\vartheta_1}{\vartheta_1} A \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \text{und ebenso} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon_3}\right) = \dfrac{1+4\pi\vartheta_2}{\vartheta_2} A \dfrac{\partial \mu}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\eta}{\varepsilon_2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{1+4\pi\vartheta_3}{\vartheta_3} A \dfrac{\partial \nu}{\partial t}. \end{cases}$$

Beachtet man weiter 20), so findet man noch aus 28)

$$\text{II)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\varepsilon_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right) = -\Delta\varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

In gleicher Weise wie 28) lassen sich auch die Gleichungen 29) behandeln, wobei 19) und 20) zu berücksichtigen sind. Ausserdem ist in den letzten Gleichungen, wenn wir uns im Weitern auf vollkommen isolirende Medien beschränken, $u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ zu setzen. Man erhält in dieser Weise

$$\text{III)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{\vartheta_3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\mu}{\vartheta_2}\right) = A\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} - 4\pi \dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right], \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\lambda}{\vartheta_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{\vartheta_3}\right) = A\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial t} - 4\pi \dfrac{\partial \eta}{\partial t}\right], \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mu}{\vartheta_2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\lambda}{\vartheta_1}\right) = A\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial t} - 4\pi \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}\right] \end{cases}$$

und

$$\text{IV)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\vartheta_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\vartheta_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\vartheta_3}\right) = -\Delta\chi.$$

Da die Gleichungen 28) und 29) zu beiden Seiten der mehrerwähnten Flächen S gelten und da wir ausserdem die Stetigkeit von U, V, W, L, M, N und ihren Differentialquotienten erster Ordnung nachgewiesen haben, erhält man noch folgende Bedingungen für die Grenze zweier Medien:

$$\text{A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\varepsilon_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\dfrac{\xi}{\varepsilon_1}\right)' + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)', \\ \dfrac{\eta}{\varepsilon_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\dfrac{\eta}{\varepsilon_2}\right)' + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)', \\ \dfrac{\zeta}{\varepsilon_3} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)' + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)'; \end{cases}$$

$$\text{B)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\lambda}{\vartheta_1}+\frac{\partial\chi}{\partial x}&=\left(\frac{\lambda}{\vartheta_1}\right)'+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)',\\ \frac{\mu}{\vartheta_2}+\frac{\partial\chi}{\partial y}&=\left(\frac{\mu}{\vartheta_2}\right)'+\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)',\\ \frac{\nu}{\vartheta_3}+\frac{\partial\chi}{\partial z}&=\left(\frac{\nu}{\vartheta_3}\right)'+\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)'.\end{aligned}\right.$$

Man kann nachweisen,* dass die Gleichungen I) bis IV), A) und B), wenn man ihnen noch die Bedingung hinzufügt, dass in unendlicher Entfernung ξ, η, ζ, λ, μ, ν, φ und χ verschwinden, den Bedingungen 28) und 29) vollkommen aequivalent sind. Wir haben es also weiter mit den Gleichungen I) bis IV), A) und B) zu thun, und da diese nur die Grössen ξ, η, ζ, λ; μ, ν, φ, χ enthalten, haben wir ausserdem nur noch die Formeln zu beachten, welche φ und χ als abhängig von ξ, η, ζ und λ, μ, ν darstellen.

§ 11. Wir wollen zunächst die Bewegung der Elektricität in einem unbegrenzten, homogenen, isotropen Nichtleiter untersuchen. Es sei für diesen Fall ε der gemeinschaftliche Werth von ε_1, ε_2, ε_3, ebenso ϑ der von ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3. Unsere Gleichungen gehen dann in folgende über:

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}&=A\varepsilon\,(1+4\pi\vartheta)\frac{\partial L}{\partial t},\\ \frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}&=A\varepsilon\,(1+4\pi\vartheta)\frac{\partial M}{\partial t},\\ \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}&=A\varepsilon\,(1+4\pi\vartheta)\frac{\partial N}{\partial t};\end{aligned}\right.$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\varepsilon\Delta\varphi+A^2k\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2};$$

$$\text{c)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}&=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\xi}{\partial t}\right],\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}&=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\eta}{\partial t}\right],\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}&=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right];\end{aligned}\right.$$

$$\text{30)}\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\Delta\chi,$$

wobei an die Stelle von λ, μ, ν die Componenten der magnetischen Kraft eingeführt sind.

Die Abhängigkeit der Function φ von ξ, η, ζ wird ausgedrückt durch die Gleichung 3) oder

$$\text{d)}\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi.$$

---

* Helmholtz, a. a. O.

Ebenso hat man für χ die Formel 23), und wenn man daraus mittelst 30) die Grösse $\Delta\chi$ eliminirt, erhält man

$$\text{e)} \qquad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Lassen wir χ, welche Grösse nur in 30) vorkommt, aus der Acht, so haben wir es nur mit den Gleichungen a), b), c), d), e) zu thun.

Man kann daraus noch andere Formeln ableiten, welche nur entweder ξ, η, ζ, oder L, M, N enthalten. Differenzirt man nämlich die zweite und dritte der Gleichungen a) resp. nach z und y, so erhält man nach Subtraction und wenn man die erste der Gleichungen c) berücksichtigt, eine Formel, welche ausser ξ, η, ζ nur noch $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial t^2}$ enthält. Diese Grösse kann aber der Gleichung b) entnommen werden, wenn man daraus zuvor mittelst d) $\Delta\varphi$ wegschafft. Man gelangt in dieser Weise zu folgenden Resultaten. Es werde zur Abkürzung $\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\mathrm{P}$ und

$$\text{31)} \qquad 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2=R^2, \quad 1-\frac{(1+4\pi\vartheta)(1+4\pi\varepsilon)}{k}=S$$

gesetzt, so ist

$$\text{32)} \quad \Delta\xi=R^2\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+S\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \quad \Delta\eta=R^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+S\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \quad \Delta\zeta=R^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+S\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung ergiebt sich auch

$$\text{33)} \qquad \Delta L=R^2\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}, \quad \Delta M=R^2\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}, \quad \Delta N=R^2\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}.$$

§ 12. Die Gleichungen 32) und 33) sind sehr geeignet zur Beurtheilung des Charakters der elektrischen Bewegungen, welche in dem Isolator stattfinden können. Denn die Formeln 32) haben genau die gleiche Gestalt wie diejenigen, welche zur Bestimmung der Verschiebungen ξ, η, ζ in einem festen elastischen Körper dienen, und es muss also die untersuchte elektrische Bewegung mit der Bewegung eines solchen Körpers übereinstimmen. Wie sich nun in elastischen Medien eine Störung des Gleichgewichts vom Erregungscentrum aus mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so muss dies auch in dem Nichtleiter mit einer S t ö r u n g d e s e l e k t r i s c h e n G l e i c h g e w i c h t s der Fall sein. Wie weiter im elastischen Körper eine regelmässige Fortpflanzung transversaler und longitudinaler Schwingungen bestehen kann, müssen auch in dielektrischen Medien transversale und longitudinale e l e k t r i s c h e S c h w i n g u n g e n — d. h. periodische Aenderungen der dielektrischen Polarisation — sich ausbreiten können. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen elektrischen Oscillationen erhält man dann aus den Gleichungen 32)

$$\text{34)} \qquad \mathrm{v}=\frac{1}{R}=\frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}.$$

In gleicher Weise folgt aus 33), dass in einem magnetisirbaren Isolator auch magnetische Oscillationen bestehen können, welche immer transversal sein müssen und sich wieder mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen. Natürlich muss zwischen den gleichzeitig stattfindenden elektrischen und magnetischen Oscillationen ein gewisser Zusammenhang bestehen, der durch die Gleichungen a) bis e) bedingt wird.

§ 13. Ohne bekannten Thatsachen zu widersprechen, darf man nicht blos annehmen, auch die Luft (und der luftleere Raum) besitze noch die Fähigkeit der dielektrischen und magnetischen Polarisation, sondern sogar den für die Luft geltenden Constanten ε_0 und ϑ_0 jeden beliebigen Werth beilegen. Sind nun aber diese Grössen nicht Null, so liefern auch die elektromagnetischen Messungen nicht mehr den wahren Werth der Constante A, den man nur durch Versuche im vollkommen leeren Raume erhalten könnte. Helmholtz zeigt nun, dass, wenn A' der aus den Messungen folgende Werth dieser Constante ist, der wahre Werth gegeben wird durch die Relation

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}},$$

und dass mithin

$$\text{35)} \qquad v = \frac{1}{A'}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}$$

ist. Setzt man hierin $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, so erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalschwingungen in der Luft

$$\text{36)} \qquad v = \frac{1}{A'}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Nun stimmt der aus elektromagnetischen Messungen folgende Werth von $\frac{1}{A'}$ sehr nahe mit der Lichtgeschwindigkeit überein. Diese Coincidenz wird zur Nothwendigkeit erhoben, wenn man annimmt, erstens dass das Licht in der That aus transversalen elektrischen Schwingungen bestehe, und zweitens dass die Constante ε_0 so gross sei, dass der umgekehrte Werth $\frac{1}{\varepsilon_0}$ gegen die Einheit vernachlässigt werden darf und also 36) in $v = \frac{1}{A'}$ übergeht. Die erste Annahme bildet den Ausgangspunkt der von Maxwell aufgestellten elektromagnetischen Lichttheorie. Stimmt man ihr bei, so erweist sich auch die Nebenannahme als nothwendig.* Letztere wird im Folgenden öfter angewandt werden; hier bemerke ich nur noch, das sie auch für jeden andern Nichtleiter, als die Luft, einen

* Helmholtz, a. a. O.

so grossen Werth von ε erheischt, dass $\frac{1}{\varepsilon}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen ist.

§ 14. Da die Betrachtung eines polarisirten Lichtbündels mit ebenen Wellen von besonderer Wichtigkeit ist, gebe ich hier noch diejenige particuläre Lösung der Gleichungen a) bis e) an, welche nach der Maxwell'schen Theorie ein solches Lichtbündel vorstellt. Wenn wir annehmen, dass die Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung resp. der x- und y-Axe parallel seien, besteht diese Lösung aus folgenden Werthen:

$$\eta = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}} + \mathrm{p}\right), \quad N = -4\pi A \mathrm{v}\,.\,\eta, \quad \xi = \zeta = L = M = \varphi = 0,$$

welche, wie man leicht findet, den Gleichungen a) bis e) genügen. Es ist hierbei die Amplitude der elektrischen Schwingungen mit a, die Schwingungsdauer aber mit T bezeichnet.

Beachtet man nun die Beschaffenheit unseres Coordinatensystems (§ 9), so erhält man, da die Fortpflanzung der Schwingungen nach allen Seiten in gleicher Weise vor sich gehen kann, aus den angeführten Gleichungen folgenden Satz:

Bei der Fortpflanzung eines polarisirten Lichtbündels in einem isotropen Isolator tritt nirgends freie Elektricität auf und ist also überall $\varphi = 0$. In jedem Punkte besteht weiter eine magnetische Kraft G, so dass in einem magnetisirbaren Medium die elektrischen Schwingungen von magnetischen begleitet sind. Es steht dabei die Richtung von G senkrecht zu der Ebene, welche die Fortpflanzungsrichtung und die Richtung der dielektrischen Polarisation ϱ enthält (Schwingungsebene), und zwar so, dass eine Drehung (über einen rechten Winkel) von der Richtung von ϱ aus nach der von G den gleichen Sinn hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger, wenn man sie von der Seite der ankommenden Schwingungen aus betrachtet. Endlich ist $G = 4\pi A \mathrm{v}\,.\,\varrho$.

§ 15. Wir wollen jetzt die elektrischen Bewegungen in einem anisotropen homogenen Isolator betrachten. Dabei werden wir noch eine Vereinfachung einführen. Die Beobachtungen haben nämlich gezeigt, dass für alle Körper, mit Ausnahme der magnetischen Metalle, der Quotient $(1 + 4\pi\vartheta):(1 + 4\pi\vartheta_0)$ nur sehr wenig von der Einheit abweicht, und wir werden also nur einen sehr geringen Fehler begehen, wenn wir die Grössen $1 + 4\pi\vartheta_1$, $1 + 4\pi\vartheta_2$, $1 + 4\pi\vartheta_3$ durch den gemeinschaftlichen Werth $1 + 4\pi\vartheta_0$ ersetzen.

Es werden demnach die Gleichungen I) und II)

$$\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial z} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial N}{\partial t}; \end{aligned}\right.$$

$$\beta)\qquad \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial z}=-\Delta\varphi+A^2k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

während die Formeln c), d), e) des § 11 auch hier ungeändert bestehen bleiben. Wir wollen nun untersuchen, ob und in welcher Weise den Bewegungsgleichungen α), β), c), d), e) durch eine Fortpflanzung transversaler Schwingungen mit ebenen Wellen genügt werden kann.

Es seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Fortpflanzungsrichtung (d. h. die Wellennormale) mit den positiven Halbaxen bildet, und ebenso sei die Richtung der elektrischen Schwingungen durch die Grössen p, q, r gegeben. Es ist dann zu setzen

$$37)\qquad \xi=pa\cos\psi,\quad \eta=qa\cos\psi,\quad \zeta=ra\cos\psi,$$

wobei zur Abkürzung

$$\psi=\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{lx+my+nz}{\mathrm{v}}+\mathrm{p}\right)$$

gesetzt ist und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bedeutet.

Bringt man die Werthe von ξ, η, ζ in α) über, so kann man daraus L, M, N ableiten; es ist dabei zu beachten, dass wir eine particuläre Lösung suchen, welche einen Schwingungszustand vorstellt, und also constante Glieder bei Seite lassen müssen. In dieser Weise finden wir

$$38)\qquad L=\frac{1}{A(1+4\pi\vartheta_0)\mathrm{v}}\left(\frac{qn}{\varepsilon_2}-\frac{rm}{\varepsilon_3}\right)a\cos\psi$$

u. s. w., wodurch auch den Bedingungen e) genügt wird.

Die Gleichung d) wird befriedigt durch

$$39)\qquad \varphi=-2T\mathrm{v}(pl+qm+rn)a\sin\psi,$$

und es folgt dann weiter aus β) und c), wenn wir den oft vorkommenden Factor $4\pi A^2(1+4\pi\vartheta_0)$ mit B bezeichnen,

$$40)\qquad \frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}pl+\frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}qm+\frac{1+4\pi\varepsilon_3}{\varepsilon_3}rn=4\pi A^2k\mathrm{v}^2(pl+qm+rn);$$

$$41)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{p}{\varepsilon_1}-l\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[p-l(pl+qm+rn)],\\
&\frac{q}{\varepsilon_2}-m\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[q-m(pl+qm+rn)],\\
&\frac{r}{\varepsilon_3}-n\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[r-n(pl+qm+rn)].
\end{aligned}\right.$$

Ist nun die Fortpflanzungsrichtung durch l, m, n gegeben, so hat man zwischen v, p, q, r die Beziehungen 40), 41) und

$$42)\qquad p^2+q^2+r^2=1.$$

Da indess die Gleichungen 41), der Reihe nach mit l, m, n multiplicirt und dann addirt, $0=0$ geben, enthalten 40), 41) und 42) nur vier von einander unabhängige Bedingungen zur Bestimmung von v, p, q, r.

Die Lösung dieser Gleichungen wird sehr einfach durch die Annahme, dass man die Grössen $\frac{1}{\varepsilon_1}$, $\frac{1}{\varepsilon_2}$, $\frac{1}{\varepsilon_3}$ gegen die Einheit vernachlässigen dürfe. Hierdurch wird 40)

$$pl + qm + rn = A^2 k \mathrm{v}^2 (pl + qm + rn),$$

und es muss also entweder $\mathrm{v}^2 = \frac{1}{A^2 k}$ oder

$$pl + qm + rn = 0 \tag{43}$$

sein. Wir halten uns an die letzte Gleichung, welche zu Transversalschwingungen führt, während die erste für einen Bewegungszustand gilt, welche den Longitudinalschwingungen in isotropen Medien entspricht.

Bringt man den Werth 43) in 41) über, so enthalten diese Gleichungen noch immer zwei Bedingungen zwischen v, p, q, r und lassen sich also durch zwei aus ihnen abgeleitete Formeln ersetzen. Man eliminire nun zunächst die Grössen $\frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3}$ und $B\mathrm{v}^2$; es kommt dann

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{\varepsilon_1}, & \frac{q}{\varepsilon_2}, & \frac{r}{\varepsilon_3} \\ l, & m, & n \\ p, & q, & r \end{vmatrix} = 0. \tag{44}$$

Addirt man weiter die Formeln 41), der Reihe nach mit p, q, r multiplicirt, so erhält man

$$B\mathrm{v}^2 = \frac{p^2}{\varepsilon_1} + \frac{q^2}{\varepsilon_2} + \frac{r^2}{\varepsilon_3}, \tag{45}$$

welche Gleichung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit giebt, sobald man aus 42), 43), 44) p, q, r bestimmt hat.

Die entwickelten Gleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Man setze

$$B\varepsilon_1 = R_1^2, \quad B\varepsilon_2 = R_2^2, \quad B\varepsilon_3 = R_3^2 \tag{46}$$

und construire ein Ellipsoid (Polarisationsellipsoid) mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} = 1.$$

Legt man dann durch den Mittelpunkt dieser Fläche eine den Wellen parallele Ebene und sucht man die Richtungsconstanten p, q, r der Axen der hierdurch entstehenden Ellipse E, so wird man gerade auf die Gleichungen 42), 43), 44) geführt. Berechnet man ausserdem die Länge des in der Richtung (p, q, r) gezogenen halben Durchmessers des Ellipsoids und stellt man den Werth desselben mit der Gleichung 45) zusammen, so gewinnt man folgenden Satz:

In einem anisotropen Medium können sich im Allgemeinen in einer gegebenen Richtung nur zwei Wellensysteme mit transversalen elektrischen Schwingungen fortpflanzen. Es muss nämlich die Richtung der elektrischen Schwingungen entweder mit der einen oder mit der andern Axenrichtung der Ellipse E zusammenfallen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jedes Wellensystems wird dabei durch den umgekehrten Werth der zugehörigen Halbaxe von E gegeben.

Einen genau analogen Satz hat man für die Schwingungen elastischer Körper abgeleitet und man hat diesen benützt, um die Doppelbrechung des Lichtes zu erklären.* Dabei musste indess angenommen werden, dass in einem polarisirten Lichtbündel die Schwingungsrichtung senkrecht zur Polarisationsebene stehe. Wenn wir nun in gleicher Weise annehmen, dass in einem solchen Lichtbündel die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen, werden wir auch aus dem abgeleiteten Satze die Doppelbrechung theoretisch ableiten können. In der That bleiben alle Schlüsse, welche man aus dem erwähnten Satze gezogen hat, in der elektromagnetischen Lichttheorie ungeändert bestehen; man hat sie nur gleichsam in die Sprache dieser Theorie zu übersetzen. So wird z. B. Nichts geändert an der Ableitung der Wellenfläche und an der Anwendung derselben, um zu einer gegebenen Wellenebene den zugehörigen Lichtstrahl zu finden.**

§ 16. Es erübrigt noch, die bei einer Fortpflanzung von Schwingungen auftretende elektromotorische Kraft F und die magnetische Kraft G zu untersuchen. Was erstere betrifft, findet man leicht aus den Gleichungen $X=\frac{\xi}{\varepsilon_1}$, $Y=\frac{\eta}{\varepsilon_2}$, $Z=\frac{\zeta}{\varepsilon_3}$, dass F senkrecht steht zu derjenigen Diametralebene des Polarisationsellipsoids, welche mit der Richtung der dielektrischen Polarisation ϱ conjugirt ist. Nun fällt aber letztere Richtung mit einer Axe der Ellipse E zusammen, und daraus folgt durch eine einfache geometrische Betrachtung, dass die Richtung von F in die Schwingungsebene fällt, d. h. in die Ebene, welche die Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung enthält. Man kann dann aber weiter F in zwei Componenten F_{v} und F_ϱ resp. nach diesen beiden Richtungen zerlegen. Dabei ist dann

$$F_\varrho = pX + qY + rZ = p\frac{\xi}{\varepsilon_1} + q\frac{\eta}{\varepsilon_2} + r\frac{\zeta}{\varepsilon_3} = \varrho\left(\frac{p^2}{\varepsilon_1}+\frac{q^2}{\varepsilon_2}+\frac{r^2}{\varepsilon_3}\right)$$

oder nach 45)

47) $$F_\varrho = B\mathrm{v}^2\varrho.$$

Ist weiter β der Winkel, den die Richtung von F mit der von ϱ bildet, so wird

48) $$F_{\mathrm{v}} = F_\varrho \,tg\,\beta,$$

---

* Beer, Einleitung in die höhere Optik, S. 236.

** Dass die elektromagnetische Lichttheorie die Doppelbrechung erklären kann, hat zuerst Maxwell gezeigt. *Electr. and Magn.*, §§ 794—797.

wobei wir den Winkel β so rechnen wollen, dass diese Componente positiv ist, wenn ihre Richtung übereinstimmt mit derjenigen, nach welcher sich die Wellen fortpflanzen.

Die Grösse β hat noch eine andere Bedeutung. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass in der Schwingungsebene senkrecht zur elektromotorischen Kraft die Richtung des Lichtstrahles liegt, so dass β auch der Winkel ist, den dieser mit der Wellennormale bildet. Für den Beweis sehe man z. B. V. v. Lang's „Einleitung in die theoretische Physik", §§ 207 und 209, wo der Zusammenhang des Lichtstrahls mit der Ergänzungslinie entwickelt wird, einer Linie, welche in Richtung mit der elektromotorischen Kraft übereinstimmt.

Was schliesslich die magnetische Kraft G betrifft, bemerke ich nur, dass ihre Componenten noch immer, wie bei isotropen Medien, durch die Gleichungen c) gegeben werden und dass folglich das am Ende des § 14 Gesagte auch noch für anisotrope Körper gelten muss.

§ 17. Wir untersuchen jetzt die Erscheinungen der Reflexion und Refraction, welche eintreten, wenn die sich ausbreitende Lichtbewegung auf die Grenzfläche zweier Medien trifft. Zuvor wollen wir die dazu erforderlichen Grenzbedingungen durch unsere Hypothesen über ε und ϑ noch etwas vereinfachen.

Aus den Gleichungen A) folgt zunächst für jede beliebige Richtung h, wenn F_h die Componente der elektromotorischen Kraft in dieser Richtung ist,

$$49)\qquad F_h + \frac{\partial \varphi}{\partial h} = F'_h + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)'.$$

Nimmt man hierin für h erstens die Normale n der Grenzfläche mit den Richtungsconstanten a, b, c, so wird die Gleichung

$$50)\qquad a\frac{\xi}{\varepsilon_1} + b\frac{\eta}{\varepsilon_2} + c\frac{\zeta}{\varepsilon_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = a\frac{\xi'}{\varepsilon'_1} + b\frac{\eta'}{\varepsilon'_2} + c\frac{\zeta'}{\varepsilon'_3} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)'.$$

Man kann diese Gleichung ersetzen durch eine andere Relation, welche man erhält, wenn man aus ihr mittelst 4) — wo $\varphi_1 = \varphi$ ist — $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$ und $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)'$ wegschafft; es kommt dann

$$51)\qquad \begin{aligned} a\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\xi + b\frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\eta + c\frac{1+4\pi\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\zeta = a\frac{1+4\pi\varepsilon'_1}{\varepsilon'_1}\xi' \\ + b\frac{1+4\pi\varepsilon'_2}{\varepsilon'_2}\eta' + c\frac{1+4\pi\varepsilon'_3}{\varepsilon'_3}\zeta'. \end{aligned}$$

Dieser Gleichung hat man dann noch 4) hinzuzufügen.

Nun kann man aber — der Hypothese über ε (§ 13) gemäss — für 51) schreiben

52) $$a\xi + b\eta + c\zeta = a\xi' + b\eta' + c\zeta'$$

und demzufolge für 4)

53) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)',$$

und wenn wir nun im Folgenden diese Gleichungen anwenden, wird jedenfalls die Abweichung unserer Resultate von der Wirklichkeit sehr klein $\left(\text{von der Ordnung } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ sein.

Für irgend eine Richtung in der Grenzfläche ist $\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)'$ und also nach 49)

54) $$F_h = F'_h.$$

In gleicher Weise geben die Formeln B) und 24), wenn man das § 15 über ϑ Gesagte berücksichtigt, für jede beliebige Richtung h

55) $$G_h = G'_h.$$

Es sind demnach an der Trennungsfläche zweier Medien mit den nämlichen Hauptrichtungen folgende Grössen stetig: a) φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ [53)], b) die Componente der dielektrischen Polarisation senkrecht zur Grenzfläche [52)], c) die Componente von F nach jeder Richtung in der Grenzfläche [54)] und d) die Componente von G nach jeder beliebigen Richtung [55)].

§ 18. Es seien nun die beiden Medien durch eine ebene Fläche von einander getrennt, welche im Weitern zur yz-Ebene eines Coordinatensystems gewählt werden möge; letzteres genüge dabei wieder der Bedingung des § 9. In dem ersten Medium, an der negativen Seite der yz-Ebene, pflanze sich nun ein unbegrenztes Bündel polarisirten Lichtes gegen die Grenzfläche hin fort. Wir wollen dann untersuchen, ob den Grenzbedingungen genügt werden kann durch reflectirte und gebrochene Transversalschwingungen, welche sich resp. im ersten und zweiten Medium gleichfalls mit ebenen Wellen ausbreiten. Dies gelingt, wie sich zeigen wird, wirklich, wenn nur erstens alle Wellennormalen in der Einfallsebene liegen, zweitens die Sinus der Winkel, welche sie mit der Normale der Grenzfläche bilden, den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen proportional sind, und drittens die verschiedenen Lichtbündel an der Trennungsfläche gleiche Phase haben. Die beiden ersten Bedingungen sind mit den bekannten Reflexions- und Brechungsgesetzen identisch.*

* Da nach den Formeln 34) und 45) v nicht von der Schwingungsdauer abhängt, ist die elektromagnetische Lichttheorie in ihrer jetzigen Gestalt nicht im Stande, die Dispersion des Lichtes zu erklären. An die angeführten Gleichungen muss demnach eine von der Wellenlänge l abhängige Correction angebracht wer-

Wählen wir die Einfallsebene zur xz-Ebene, so lässt sich die Richtung, nach welcher sich bei einem Lichtbündel die Wellen fortpflanzen, durch den Winkel α bestimmen, den sie mit der x-Axe bildet. Wir wollen dabei eine Drehung von der positiven x- nach der positiven z-Axe als positiv betrachten, und annehmen, dass für jedes Lichtbündel α positiv sei. Natürlich ist dieser Winkel für das einfallende oder für ein durchgelassenes Wellensystem spitz, für ein reflectirtes dagegen stumpf.

Bei jedem Lichtbündel giebt es weiter eine Richtung in der Wellenebene, so dass die dielektrische Polarisation entweder in diese Richtung fällt und dann positiv, oder in die entgegengesetzte und dann negativ ist. Wir bestimmen diese Richtung durch den Winkel ω (das Azimuth), den sie mit der y-Axe bildet, und zwar wird hierbei positiv genannt diejenige Drehung von der y-Axe aus, welche, von der Seite der ankommenden Wellen betrachtet, entgegengesetzten Sinn hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger.

Ist nun für irgend ein Lichtbündel ϱ die dielektrische Polarisation, so sind die Componenten derselben nach den Axenrichtungen

$$-\sin\alpha\,.\,\varrho\sin\omega, \quad \varrho\cos\omega, \quad \cos\alpha\,.\,\varrho\sin\omega,$$

und nach dem Satze des § 14 die Componenten der magnetischen Kraft

$$4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha\,.\,\varrho\cos\omega, \quad 4\pi A\mathrm{v}\,.\,\varrho\sin\omega, \quad -4\pi a\mathrm{v}\cos\alpha\,.\,\varrho\cos\omega.$$

Weiter ist

$$\varrho = a\cos\psi, \quad \psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right),$$

wo mit a die Amplitude bezeichnet ist. Die Grössen p, welche die Phaes bestimmen, sind, wie bereits bemerkt, für alle Lichtbündel gleich, und da dies auch mit den Grössen $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{v}}$ der Fall ist, werden an der Trennungsfläche (für $x = 0$) auch die Functionen ψ einander gleich. Dies bietet den Vortheil, dass man die aus den Grenzbedingungen folgenden Gleichungen durch $\cos\psi$ dividiren und somit in denselben die Grössen ϱ durch die Amplituden a ersetzen kann. Was letztere betrifft, wollen wir noch annehmen, dass die Amplitude im einfallenden Lichte $= 1$ sei; für

---

den, und es ist nach Maxwell wahrscheinlich, dass diese nur für $l = \infty$ verschwindet, so dass für diesen Fall die Formeln 34) und 45) genau sind. Für solche Lichtstrahlen mit unendlicher Wellenlänge ergiebt sich dann weiter zwischen dem Brechungsexponenten eines Mediums und seiner Constanten der dielektrischen Polarisation eine Beziehung, welche zuerst durch Maxwell theoretisch abgeleitet und durch spätere Versuche verschiedener Physiker bestätigt worden ist. — Streng genommen kann nun auch die in dieser Mittheilung entwickelte Theorie der Reflexion nur für Strahlen mit unendlich grosser Wellenlänge gelten. So weit unsere Erfahrung reicht, darf man aber die Formeln C), D), E), F) des § 19 auch für andere Lichtstrahlen anwenden.

ein reflectirtes Lichtbündel wollen wir sie mit a, für ein gebrochenes mit a' andeuten. Ueberhaupt mögen die auf das zweite Medium bezüglichen Grössen mittelst Accente von den Grössen im ersten Medium unterschieden werden; ebenso, wo nöthig, die Bestimmungsstücke des einfallenden Lichtes von denjenigen des reflectirten Lichtes mittelst des Index 0.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass wir, da bei Transversalschwingungen überall $\varphi = 0$ ist, nach dem vorhergehenden Paragraphen nur die Stetigkeit von ξ, Y, Z, L, M, N zu berücksichtigen haben.

§ 19. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir zunächst den Fall, dass beide Medien isotrop sind. Es kann dann nur ein reflectirtes und ebenso nur ein gebrochenes Wellensystem auftreten und den Grenzbedingungen kann genügt werden, erstens wenn überall die elektrischen Schwingungen senkrecht zu der Einfallsebene, zweitens wenn sie überall dieser Ebene parallel gerichtet sind.

Im ersten Falle ist für jedes Lichtbündel $\omega = 0$, und man kann für das einfallende, reflectirte und gebrochene Licht setzen

$$\begin{array}{lll}
\eta_0 = \varrho_0, & L_0 = 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho_0, & N_0 = -4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho_0, \\
\eta = \varrho, & L = 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho, & N = 4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho, \\
\eta' = \varrho', & L' = 4\pi A \mathrm{v}' \sin\alpha' \,.\, \varrho', & N' = -4\pi A \mathrm{v}' \cos\alpha' \,.\, \varrho',
\end{array}$$

wobei α und α' Einfalls- und Brechungswinkel sind und für das reflectirte Licht der Winkel zwischen Fortpflanzungsrichtung und x-Axe $= 180^0 - \alpha$ gesetzt ist.

Da weiter überall $\xi = \zeta = M = 0$ ist, haben wir nur die Continuität von Y, L, N auszudrücken. Für Y hat man im ersten Medium $\frac{\eta_0 + \eta}{\varepsilon}$, im zweiten $\frac{\eta'}{\varepsilon'}$. Ersetzt man nun an der Trennungsfläche ϱ_0, ϱ, ϱ' durch 1, a, a', so erhält man aus der Stetigkeit von Y und N folgende Gleichungen:

$$\text{56)} \qquad \frac{1+a}{\varepsilon} = \frac{a'}{\varepsilon'}, \quad (1-a)\mathrm{v} \cos\alpha = a'\mathrm{v}' \cos\alpha'.$$

Die Continuität von L führt zu einer Relation, welche vermöge der Annahme $(1+4\pi\vartheta):(1+4\pi\vartheta') = 1$ und der daraus folgenden Proportion $\varepsilon:\varepsilon' = \mathrm{v}'^2:\mathrm{v}^2$ mit der ersten der Gleichungen 56) identisch ist. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun a und a' bestimmen; eine leichte Rechnung ergiebt

$$a = -\frac{\varepsilon'\mathrm{v}' \cos\alpha' - \varepsilon \mathrm{v} \cos\alpha}{\varepsilon'\mathrm{v}' \cos\alpha' + \varepsilon \mathrm{v} \cos\alpha}$$

oder, wenn man auch das Brechungsgesetz berücksichtigt,

$$\text{C)} \qquad a = -\frac{\mathrm{v} \cos\alpha' - \mathrm{v}' \cos\alpha}{\mathrm{v} \cos\alpha' + \mathrm{v}' \cos\alpha} = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}$$

und

D) $$a' = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha'}(1+a).$$

Liegt zweitens die Schwingungsrichtung in der Einfallsebene, so ist für jedes Lichtbündel $\omega = 90^0$ und man kann die drei Wellensysteme vorstellen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= -\sin\alpha \,.\, \varrho_0, & \zeta_0 &= \cos\alpha \,.\, \varrho_0, & M_0 &= 4\pi A \mathrm{v} \,.\, \varrho_0,\\
\xi &= -\sin\alpha \,.\, \varrho, & \zeta &= -\cos\alpha \,.\, \varrho, & M &= 4\pi A \mathrm{v} \,.\, \varrho,\\
\xi' &= -\sin\alpha' \,.\, \varrho', & \zeta' &= \cos\alpha' \,.\, \varrho', & M' &= 4\pi A \mathrm{v}' \,.\, \varrho'.
\end{aligned}$$

Hier ist überall $\eta = L = N = 0$ und man hat nur die Stetigkeit von ξ, Z, M zu berücksichtigen, woraus man, ähnlich wie oben, drei Gleichungen erhält. Die beiden ersten sind

56) $$(1+a)\sin\alpha = a' \sin\alpha', \quad \frac{(1-a)\cos\alpha}{\varepsilon} = \frac{a' \cos\alpha'}{\varepsilon'},$$

während die dritte, welche aus der Continuität von M hervorgeht, mit der ersten identisch ist. Aus 57) folgt aber durch eine ähnliche Umformung wie oben

E) $$a = \frac{\sin\alpha \cos\alpha - \sin\alpha' \cos\alpha'}{\sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha' \cos\alpha'} = \frac{tg(\alpha - \alpha')}{tg(\alpha+\alpha')},$$

F) $$a' = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}(1+a).$$

Aus den hier entwickelten Resultaten* lässt sich durch weitere Rechnung ableiten, wie für eine beliebige einfallende Lichtbewegung die Reflexion und Brechung stattfinden müssen. Die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung erhellt aber daraus, dass, wie bekannt, die Gleichungen C) und E) durch die Versuche über die Reflexion des polarisirten Lichtes bestätigt worden sind, wenn man nämlich noch annimmt, dass in einem Bündel polarisirten Lichtes die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen. Aus dieser bereits früher (§ 15) eingeführten Annahme folgt dann noch, dass das Azimuth ω eines Lichtbündels auch den Winkel vorstellt, den seine Polarisationsebene mit der Einfallsebene bildet.

§ 20. Schliesslich wollen wir noch den Uebergang des Lichtes aus einem isotropen in ein anisotropes Medium betrachten. Es giebt hierbei im Allgemeinen zwei gebrochene Wellensysteme, welche dem Brechungsgesetze genügen, und sobald die Richtung des einfallenden Lichtes gegeben ist, erhält man die Richtungen der gebrochenen Bündel mittelst einer aus der Theorie der Doppelbrechung bekannten Construction; zu gleicher Zeit werden dann für jedes dieser Bündel die Grössen v', ω' und β (§ 16) bekannt. Während nun gewöhnlich die beiden gebrochenen

* Wie bereits § 2 erwähnt wurde, hat Helmholtz zuerst auf dieselben hingewiesen.

Lichtbündel auftreten, kann in besonderen Fällen nur eins derselben entstehen, und es soll zunächst untersucht werden, wie das einfallende Licht polarisirt sein muss, damit dies der Fall sei.

Da an der Grenze ξ, Y, Z, L, M, N stetig sein müssen, haben wir für jedes Lichtbündel die Werthe dieser Grössen anzugeben. Die Werthe von ξ, L, M, N bieten nach dem § 18 Gesagten keine Schwierigkeit. Was Y und Z betrifft, folgt aus der Gleichung 47) für ein isotropes Medium (wo $F_v = 0$ ist) $Y = B\mathrm{v}^2\eta$, $Z = B\mathrm{v}^2\zeta$. Für ein isotropes Medium sind die Componenten von F_ϱ leicht anzugeben; hier liefert aber auch F_v eine Componente nach der z-Axe, deren Werth leicht zu finden ist. In dieser Weise erhält man folgende Gleichungen, welche der Reihe nach das einfallende, das reflectirte und das einzige gebrochene Wellensystem vorstellen,

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi_0 = -\sin\alpha\,.\,\varrho_0\sin\omega_0, & Y_0 = B\mathrm{v}^2.\,\varrho_0\cos\omega_0, & Z_0 = B\mathrm{v}^2\cos\alpha\,.\,\varrho_0\sin\omega_0, \\ L_0 = 4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha\,.\,\varrho_0\cos\omega_0, & M_0 = 4\pi A\mathrm{v}.\,\varrho_0\sin\omega_0, & N_0 = -4\pi A\mathrm{v}\cos\alpha\,.\,\varrho_0\cos\omega_0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi = -\sin\alpha\,.\,\varrho\sin\omega, & Y = B\mathrm{v}^2.\,\varrho\cos\omega, & Z = -B\mathrm{v}^2\cos\alpha\,.\,\varrho\sin\omega, \\ L = 4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha\,.\,\varrho\cos\omega, & M = 4\pi A\mathrm{v}.\,\varrho\sin\omega, & N = 4\pi A\mathrm{v}\cos\alpha\,.\,\varrho\cos\omega, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi' = -\sin\alpha'.\,\varrho'\sin\omega', & Y' = B\mathrm{v}'^2.\,\varrho'\cos\omega', & Z' = B\mathrm{v}'^2\varrho'(\cos\alpha'\sin\omega' \\ & & \qquad + \sin\alpha'\,tg\,\beta), \\ L' = 4\pi A\mathrm{v}'\sin\alpha'.\,\varrho'\cos\omega', & M' = 4\pi A\mathrm{v}'.\,\varrho'\sin\omega', & N' = -4\pi A\mathrm{v}'\cos\alpha'.\,\varrho'\cos\omega'. \end{array}\right.$$

Es muss nun an der Grenze der beiden Medien $\xi_0 + \xi = \xi'$ u. s. w. sein. Ersetzt man dabei wieder ϱ_0, ϱ, ϱ' durch 1, a, a', so erhält man folgende Gleichungen:

$$58)\quad (\cos\omega_0 + a\cos\omega)\ \sin^2\alpha = a'\cos\omega'\sin^2\alpha',$$

$$59)\quad (\sin\omega_0 + a\sin\omega)\ \sin\alpha = a'\sin\omega'\sin\alpha',$$

$$60)\quad (\cos\omega_0 - a\cos\omega)\sin\alpha\cos\alpha = a'\cos\omega'\sin\alpha'\cos\alpha',$$

$$61)\quad (\sin\omega_0 - a\sin\omega)\sin^2\alpha\cos\alpha = a'(\sin\omega'\cos\alpha' + tg\,\beta\sin\alpha')\sin^2\alpha'.$$

Die drei ersten von diesen Gleichungen sind aus der Stetigkeit von L, M, N, die vierte dagegen aus der von Z abgeleitet. Die Continuität von ξ führt wieder zu 59) und die von Y zu 58), so dass man nur den angegebenen Gleichungen zu genügen hat. Berechnet man aus denselben die vier Unbekannten ω_0, ω, a, a', so giebt die erste Grösse an, wie das einfallende Licht polarisirt sein muss, damit nur das eine gebrochene Lichtbündel auftrete. Aus den Werthen von ω, a, a' folgt dann weiter, wie für diese erste Hauptschwingungsrichtung des einfallenden Lichtes die Reflexion und Brechung vor sich gehen.

Nimmt man zweitens an, es entstehe nur das andere gebrochene Lichtbündel, so findet man in gleicher Weise die zweite Hauptschwingungsrichtung des einfallenden Lichtes und die dazu gehörigen Formeln für die Reflexion und Brechung. Um dann schliesslich das Problem für eine beliebige Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes zu lösen, hat man nur die Oscillationen nach den beiden Hauptschwingungsrichtungen zu zerlegen und jede der beiden Componenten gesondert zu behandeln.

Um nun die Gleichungen 58) bis 61) zu lösen, eliminire man aus 58) und 60) $a\cos\omega$, aus 59) und 61) $a\sin\omega$, und dividire die hierdurch entstehenden Gleichungen ineinander; es kommt dann

$$\text{G)}\qquad tg\,\omega_0 = tg\,\omega'\cos(\alpha-\alpha') + \frac{\sin^2\alpha'\,tg\,\beta}{\cos\omega'\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Ebenso erhält man, wenn man mit der Wegschaffung von $\cos\omega_0$ und $\sin\omega_0$ anfängt,

$$\text{H)}\qquad tg\,\omega = -tg\,\omega'\cos(\alpha+\alpha') + \frac{\sin^2\alpha'\,tg\,\beta}{\cos\omega'\sin(\alpha-\alpha')}$$

oder, wenn man G) beachtet,

$$\text{H}')\qquad tg\,\omega = -tg\,\omega_0\frac{\cos(\alpha+\alpha')}{\cos(\alpha-\alpha')} + \frac{2\sin 2\alpha\sin^2\alpha'\,tg\,\beta}{\sin 2(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha')\cos\omega'}.$$

Nachdem hierdurch ω_0 und ω bekannt sind, können a und a' aus 58) und 60) bestimmt werden. Man findet dann für das reflectirte Licht

$$\text{J)}\qquad a = -\frac{\cos\omega_0}{\cos\omega}\cdot\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Zerlegt man die Schwingungen im einfallenden und reflectirten Lichte in eine Componente, welche in, und eine zweite, welche senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, und ist die Amplitude der ersten Componente für das einfallende Licht S, für das zurückgeworfene R_s, so ist $S = \cos\omega_0$, $R_s = a\cos\omega$, und statt J) kann man setzen

$$\text{J}')\qquad R_s = -S\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Es sind hiermit alle zur Lösung eines Problems über die Krystallreflexion erforderlichen Gleichungen entwickelt.

§ 21. Wie bereits § 1 bemerkt wurde, ist es zuerst Neumann gelungen, aus theoretischen Gründen Formeln abzuleiten, welche die Erscheinungen der Reflexion an Krystallen erklären können. Die Richtigkeit dieser Formeln ist durch die Beobachtungen verschiedener Physiker, namentlich durch die genauen Messungen von Seebeck bestätigt worden. Um die Uebereinstimmung unserer Theorie mit der Erfahrung nachzuweisen, haben wir somit nur zu zeigen, dass die oben abgeleiteten Gleichungen mit den von Neumann entwickelten identisch sind.

Am Ende seiner Abhandlung* behandelt Neumann den Fall, dass nur eins der gebrochenen Bündel auftritt. Er giebt dann folgende Gleichungen, welche gelten, wenn nur derjenige Lichtstrahl entsteht, den er den ordentlich gebrochenen nennt:

* Abhandlungen der Berliner Akademie, 1835; S. 144, 145.

$$62)\quad \begin{cases} tg\,a' = -\,tg\,x'\cos(\varphi-\varphi') + \dfrac{\sin^2\varphi'\,tg\,q'}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}, \\ tg\,\delta' = -\dfrac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\,tg\,a' + \dfrac{2\sin 2\varphi\,\sin^2\varphi'\,tg\,q'}{\sin 2(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\cos x'}, \\ R_s = -\dfrac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,S. \end{cases}$$

Es sind hierin φ, φ', x', a', δ' die Grössen, welche wir mit α, α', ω', ω_0 und ω bezeichnet haben. Weiter ist q' der Winkel, den der gebrochene Strahl mit der Wellennormale bildet, und ist also mit unserem Winkel β (§ 16) identisch. Hieraus geht hervor, dass die Gleichungen 62) von G), H') und J') nur durch einige Zeichen verschieden sind, und vollkommen damit übereinstimmen, wenn man x' durch $-x'$ ersetzt. Dieser Unterschied kann nur von den verschiedenen, über die Wahl des Zeichens gemachten Annahmen herrühren. Aus dem gleichen Grunde erklärt es sich, dass auch die Neumann'schen Gleichungen für den Fall, dass nur der ausserordentlich gebrochene Lichtstrahl entsteht, nur in einigen Zeichen von G), H') und J') abweichen.

Um indess die Uebereinstimmung beider Theorien über jeden Zweifel zu erheben, wollen wir nachweisen, warum sie nothwendig zu den nämlichen Resultaten führen müssen. Wie bekannt, leitet Neumann drei Relationen ab aus der Stetigkeit der Verschiebungen der Aethertheilchen an der Grenze zweier Medien, während er eine vierte Gleichung aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft gewinnt. Denkt man sich die Lichtbündel begrenzt, so kann dieses Princip — wie es Fresnel und Neumann anwandten — für den Fall, dass nur ein gebrochenes Lichtbündel entsteht, folgendermassen ausgedrückt werden:

$$63)\qquad b_0^2\,d\,H_0 = b^2\,d\,H + b'^2\,d'H'.$$

Es sind hierin b_0, b, b' die Amplituden der Aetherschwingungen, d und d' die Dichtigkeiten des Aethers in den beiden Medien und H_0, H, H' die Volumen, welche aus den drei Lichtbündeln ausgeschnitten werden durch je zwei Ebenen, welche der Wellenebene parallel und um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen von einander entfernt sind. Hierbei wird das gebrochene Bündel schräg durchschnitten, da die beschreibenden Linien der begrenzenden Cylinderfläche die Richtung des Lichtstrahles haben. Bildet nun diese Richtung mit der Normale der Trennungsfläche einen Winkel γ, so führt eine einfache geometrische Betrachtung zu der Proportion

$$H_0 : H : H' = \sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha'\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Da weiter Neumann $d = d'$ setzt, geht die Gleichung 63) über in

$$64)\qquad (b_0^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha = b'^2\sin\alpha'\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Man kann nun $\cos\gamma$ ausdrücken in den früher von uns eingeführten Grössen. Dazu ziehe man aus dem Mittelpunkte M einer Kugel die drei Strahlen MA, MB, MC der Reihe nach in der Richtung der Normale zur Trennungsfläche, der Wellennormale und des gebrochenen Lichtstrahles. Aus dem sphärischen Dreieck ABC findet man dann leicht, wenn man das § 18 Gesagte berücksichtigt,

$$\cos\gamma = \cos\alpha' \cos\beta + \sin\alpha' \sin\beta \sin\omega'$$

und hierdurch wird 64)

65) $$(b_0^2 - b^2) \sin\alpha \cos\alpha = b'^2 (\sin\alpha' \cos\alpha' + \sin^2\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Bei der Theorie von Neumann haben weiter die Aetherschwingungen die nämliche Richtung, wie in der hier entwickelten Theorie die magnetische Kraft G. Es lässt sich nun zeigen, dass wir, wenn wir in unseren Gleichungen die Componenten von G durch die Verschiebungen der Aethertheilchen ersetzen, gerade zu den von Neumann angewandten Formeln gelangen. Denn die Gleichungen 58), 59), 60), welche die Stetigkeit von L, M, N ausdrücken, müssen dann in diejenigen übergehen, welche Neumann aus der Continuität der Verschiebungen ableitet. Was ferner die Gleichung 61) anbetrifft, wollen wir an ihre Stelle eine andere setzen, welche man erhält, wenn man 58) mit 60), 59) mit 61) multiplicirt und die Resultate addirt; es kommt dann nämlich

$$(1 - a^2) \sin^3\alpha \cos\alpha = a'^2 (\sin^3\alpha' \cos\alpha' + \sin^4\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Nun kann bei jedem Lichtbündel die magnetische Kraft vorgestellt werden durch einen Ausdruck, wie $g \cos\psi$, und es besteht dann nach § 14 zwischen den Amplituden g_0, g, g' die Relation

$$g_0 : g : g' = \sin\alpha : a \sin\alpha : a' \sin\alpha',$$

und demzufolge wird obige Gleichung

$$(g_0^2 - g^2) \sin\alpha \cos\alpha = g'^2 (\sin\alpha' \cos\alpha' + \sin^2\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Treten nun an die Stelle von L, M, N die Verschiebungen der Aethertheilchen, so hat man g_0, g, g' durch b_0, b, b' zu ersetzen und man erhält dann gerade die Gleichung 65).

Da also die Verschiebungen der Aethertheilchen in der einen Theorie und die Componenten der magnetischen Kraft in der andern in ganz gleicher Weise bestimmt werden, müssen beide auch nothwendig zu denselben Resultaten führen. Was dann aber die Wahl zwischen den beiden Theorien betrifft, glaube ich, dass man entschieden der elektromagnetischen Lichttheorie den Vorrang einräumen muss. Denn bei der aus ihr folgenden Lösung des Reflexionsproblems sind alle Bedingungen der Aufgabe berücksichtigt, während Neumann seine Gleichungen nur erhalten konnte, indem er einige Bedingungen (nämlich die Continuität des Druckes im Aether) aus der Acht liess.

II.

Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche.

Von

Dr. S. Günther,

Gymnasialprofessor in Ansbach.

Was auf dem durch die Ueberschrift angedeuteten Gebiete bisher geschah, bezog sich fast ausschliesslich auf specielle Fälle. Die einzige Arbeit, welche sich ein universelleres Ziel setzte, ist die von Oettinger[1]), allein auch in ihr sind die vorzunehmenden Operationen nicht sowohl wirklich ausgeführt, als vielmehr blos bezeichnet. Freilich liesse sich dies Verfahren entsprechend vervollkommnen, allein dann müsste die Summation des eingliedrig-periodischen Kettenbruches als bereits bekannt vorausgesetzt werden; dies erscheint aber principiell unstatthaft, denn es muss umgekehrt aus der ganz allgemeinen Summenformel jener Ausdruck als Corollar folgen. So elegant sich überdies Oettinger's Relation ausnimmt, wenn der Kettenbruch zugleich mit der Periode abschliesst, so complicirt gestaltet sich die Sache im allgemeinen Falle. Eine nochmalige Discussion dieser Frage wird deshalb gewiss am Platze sein.

Gegeben ist ein Kettenbruch, der aus zwei Theilen besteht. Der erste Theil ist rein periodisch, der zweite enthält nur eine kleinere Anzahl von Theilbrüchen der Periode. Für den Werth dieses Kettenbruches ist ein independenter Ausdruck herzustellen.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir den Begriff „independent" fixiren. In gewissem Sinne ist ja jeder endliche Kettenbruch unmittelbar independent als Quotient zweier Determinanten gegeben; hierauf kann es also natürlich nicht ankommen, vielmehr setzen wir fest:

In der zu eruirenden Schlussformel darf (abgesehen vom Summen- und Productzeichen) kein anderes Symbol vorkommen, als Determinanten, deren Grad höchstens der Gliederanzahl der Periode gleich ist.

Um diese Aufgabe zu lösen, wäre es nun wohl anscheinend das Natürlichste, den Kettenbruch durch irgend eine der bekannten Transformationen in eine (endliche) Reihe zu verwandeln und diese nachher zu summiren. Das würde jedoch auf sehr verwickelte Rechnungen führen und wir ziehen deshalb den umgekehrten Weg vor, dessen Verfolgung uns ohne alle Kunstgriffe unmittelbar zu dem gewünschten Ziele leiten wird. Dieses indirecte Verfahren besteht in Folgendem:

Wir betrachten statt des absteigenden einen in der nämlichen Weise gebildeten aufsteigenden Kettenbruch. Ist dessen Periode n-gliedrig, so möge die Anzahl der überhaupt vorhandenen Theilbrüche

$$np+q$$

sein; hier ist n eine beliebige ganze positive Zahl, q desgleichen $\gtreqless n$.

Ein solcher aufsteigender Kettenbruch ist etwa der nachstehende:

$$M=\dfrac{\beta_1+\dfrac{\beta_2+\cdots+\dfrac{\beta_n+\dfrac{\beta_1+\dfrac{\beta_2+\cdots+\dfrac{\beta_n+\cdots+\dfrac{\beta_1+\dfrac{\beta_2+\cdots+\dfrac{{}^*\beta_n+\dfrac{\beta_1+\cdots+\dfrac{\beta_q}{\alpha_q}}{\alpha_1}}{\alpha_{n(p)}{}^*}}{\alpha_2}}{\alpha_1}}{\alpha_n}}{\alpha_2}}{\alpha_1}}{\alpha_n}}{\alpha_2}}{\alpha_1}$$

Bekanntlich ist derselbe gleich dem Aggregate

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{\beta_n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+\frac{\beta_1}{\alpha_1{}^2\alpha_2\ldots\alpha_n}+\cdots+\frac{\beta_n}{\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\ldots\alpha_n{}^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\beta_1}{\alpha_1{}^p\alpha_2{}^{p-1}\ldots\alpha_n{}^{p-1}}+\cdots+\frac{\beta_n}{\alpha_1{}^p\alpha_2{}^p\ldots\alpha_n{}^p}+\frac{\beta_1}{\alpha_1{}^{p+1}\alpha_2{}^p\ldots\alpha_n{}^p}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\beta_q}{\alpha_1{}^{p+1}\ldots\alpha_q{}^{p+1}\alpha^p{}_{q+1}\ldots\alpha_n{}^p},$$

und dies lässt sich leicht summiren. Wir bekommen durch entsprechende Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
M= &\ \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left[1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^p\right]\\
&+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{\beta_q}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\left[1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^p\right]\\
&+\frac{\beta_{q+1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{q+1}}\left[1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^{p-1}\right]\\
&+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{\beta_n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\left[1+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)^{p-1}\right];
\end{aligned}$$

---

* Der eingeklammerte Index deutet an, dass man hier den $(np)^{\text{ten}}$ Partialbruch des aufsteigenden Kettenbruches vor sich hat und dass dann nur noch q Partialbrüche nachfolgen.

bringt man die hier auftretenden geometrischen Progressionen auf ihren geschlossenen Ausdruck, so ergiebt sich

$$M=\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_q}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}\right)\frac{1-(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{p+1}}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)^p(1-\alpha_1\ldots\alpha_n)}$$

$$+\left(\frac{\beta_{q+1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{q+1}}+\cdots+\frac{\beta_n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)\frac{1-(\alpha_1\ldots\alpha_n)^p}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{p-1}(1-\alpha_1\ldots\alpha^n)}$$

$$\text{I)}\qquad \equiv\sum_{i=1}^{i=q}\frac{\beta_i}{\alpha_1\ldots\alpha_i}\cdot\frac{1-(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{p+1}}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)^p(1-\alpha_1\ldots\alpha_n)}$$

$$+\sum_{k=q+1}^{k=n}\frac{\beta_k}{\alpha_{q+1}\ldots\alpha_k}\cdot\frac{1-(\alpha_1\ldots\alpha_n)^p}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{p-1}(1-\alpha_1\ldots\alpha_n)}.$$

Wenn wir wollen, können wir auch an Stelle der Summenzeichen Determinanten einführen, wodurch M eine allerdings elegante, zugleich aber auch weit weniger übersichtliche Gestalt erhält. Es ist nämlich dann mit Berücksichtigung einer bekannten Formel[2])

$$\text{II)}\qquad M=\frac{1}{\prod\limits_{k_1=1}^{k_1=q}a_{k_1}\left[1-\prod\limits_{k_2=1}^{k_2=n}a_{k_2}\right]\left(\prod\limits_{k_3=1}^{k_3=n}a_{k_3}\right)^p}\times$$

$$\left[\left[1-\left(\prod_{k_4=1}^{k_4=n}a_{k_4}\right)^{p+1}\right]\cdot\begin{vmatrix}\beta_1 & -1 & 0 & \ldots 0\\ \beta_2 & \alpha_2 & -1 & \ldots 0\\ \beta_3 & 0 & \alpha_3 & \ldots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \beta_q & 0 & 0 & \ldots\alpha_q\end{vmatrix}+\prod_{k_5=1}^{k_5=q}a_{k_5}\left[1-\left(\prod_{k_6=1}^{k_6=n}a_{k_6}\right)^p\right]\cdot\begin{vmatrix}\beta_{q+1} & -1 & 0 & \ldots 0\\ \beta_{q+2} & \alpha_{q+2} & -1 & \ldots 0\\ \beta_{q+3} & 0 & \alpha_{q+3} & \ldots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \beta_n & 0 & 0 & \ldots\alpha_n\end{vmatrix}\right].$$

In der Praxis wird man selbstverständlich bei I) bleiben.

Die bisherige Arbeit war lediglich Vorbereitung; um zu unserem eigentlichen Thema zu gelangen, verwandeln wir den aufsteigenden Kettenbruch in einen absteigenden. Wenn wir noch aus naheliegender Ursache die beiden ersten Theilzähler, sowie auch den ersten Theilnenner dieses letzteren mit β_n multipliciren, erhalten wir

$$M=\frac{\beta_1\beta_n}{\alpha_1\beta_n-}\,\frac{\alpha_1\beta_2\beta_n}{\alpha_2\beta_1+\beta_2-}\,\frac{\alpha_2\beta_1\beta_3}{\alpha_3\beta_2+\beta_3-}\cdots-\frac{\alpha_n\beta_1\beta_{n-1}}{\alpha_1\beta_n+\beta_1-}\,\frac{\alpha_1\beta_n\beta_2}{\alpha_2\beta_1+\beta_2-N},$$

unter N einen nach dem zu Tage tretenden Bildungsgesetz fortschreitenden Kettenbruch von

$$np+q-n-2$$

Gliedern verstanden.

Untersuchen wir jetzt den Bau dieses Kettenbruches näher. Abgesehen vom ersten Theilbruche ist derselbe offenbar wieder periodisch, und zwar ist die Periode ebenfalls n-gliedrig. Hieraus fliesst der Satz:

Jeder rein-periodische aufsteigende Kettenbruch ist einem unperiodischen absteigenden Kettenbruche gleich, und zwar ist die Gliederanzahl der Periode in beiden Fällen die gleiche.

Der resultirende absteigende Kettenbruch hat sonach folgende Zusammensetzung: Der erste Theilbruch ist $\frac{\beta_1 \beta_n}{\alpha_1 \beta_n}$, hierauf folgen np Theilbrüche der Form $\frac{\alpha_i \beta_{i-1} \beta_{i+1}}{\alpha_{i+1} \beta_i + \beta_{i+1}}$, und diesen wiederum $(q-1)$ Theilbrüche der nämlichen Form. Dieser letzte nicht periodische Theil unsers Kettenbruches weist als ersten und schliessenden Partialbruch die nachstehenden auf:

$$\frac{\alpha_2 \beta_1 \beta_3}{\alpha_3 \beta_2 + \beta_3} \text{ und } \frac{\alpha_q \beta_{q-1} \beta_{q+1}}{\alpha_{q+1} \beta_q + \beta_{q+1}}.$$

Hierdurch ist der vorgelegte Kettenbruch in all seinen Theilen bestimmt; der Werth K, welchen die eigentliche Periode sammt dem $(q-1)$-gliedrigen Anhang besitzt, kann leicht gefunden werden. Denn es ist dem Obigen zufolge

$$M = \frac{\beta_1 \beta_n}{\alpha_1 \beta_n - K},$$

woraus sich, M als bekannt vorausgesetzt,

$$\text{III)} \qquad K = \alpha_1 \beta_n - \frac{1}{M} \beta_1 \beta_n$$

berechnet.

Freilich gilt dies zunächst nur für einen Kettenbruch von ganz specieller Zusammensetzung. Um aber von ihm zum allgemeineren überzugehen, brauchen wir die beiden lediglich derart miteinander in Beziehung zu setzen, wie dies bei der Methode der unbestimmten Coefficienten mit den Constanten zweier Potenzreihen geschieht.

Die hier angedeutete Zurückführung ist unmittelbar geleistet, sobald es gelungen ist, die $2n$ Unbekannten

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$$

vermittelst des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \beta_n \beta_2 &= b_1, \\
\alpha_2 \beta_1 \beta_3 &= b_2, \\
\alpha_3 \beta_2 \beta_4 &= b_3, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\alpha_{n-2} \beta_{n-3} \beta_{n-1} &= b_{n-2}, \\
\alpha_{n-1} \beta_{n-2} \beta_n &= b_{n-1}, \\
\alpha_n \beta_{n-1} \beta_1 &= b_n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \beta_1 + \beta_2 &= a_1, \\
\alpha_3 \beta_2 + \beta_3 &= a_2, \\
a_4 \beta_3 + \beta_4 &= \alpha_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} & \vdots & & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-2} & + \beta_{n-1} & = a_{n-2}, \\ \alpha_n & \beta_{n-1} & + \beta_n & = a_{n-1}, \\ \alpha_1 & \beta_n & + \beta_1 & = a_n \end{array}$$

als Functionen der willkürlich gegebenen Grössen

$$a_1,\ a_2 \ldots a_n;\quad b_1,\ b_2 \ldots b_n$$

darzustellen.

Lösen wir nunmehr das System auf. Durch Benützung der ersten n Gleichungen ergiebt sich sofort

$$\alpha_k = \frac{b_k}{\beta_{k-1}\beta_{k+1}} \quad (k = 1, 2 \ldots n),$$

wobei für $(n+1)$ natürlich 1 zu setzen ist. Führt man sodann diese Werthe von α in die übrigen Gleichungen ein, so kann man die β leicht recurrirend berechnen. Indem man nämlich die Substitutionen, z. B. für β_i, allenthalben vornimmt, findet man successive

$$\beta_i = \frac{b_{i-1}}{a_{i-2} - \beta_{i-1}}, \quad \beta_{i-1} = \frac{b_{i-2}}{a_{i-3} - \beta_{i-2}}, \quad \beta_{i-2} = \frac{b_{i-3}}{a_{i-4} - \beta_{i-3}} \ldots,$$

und hieraus durch Zusammenfügung

$$\beta_i = \cfrac{b_{i-1}}{a_{i-2} - \cfrac{b_{i-2}}{a_{i-3} - \cdots - \cfrac{b_2}{a_1 - \cfrac{b_1}{a_n - \cfrac{b_n}{a_{n-1} - \cdots - \cfrac{b_{i+1}}{a_i - \cfrac{b_i}{a_{i-1}}}}}}}}.$$

Drückt man endlich diesen Kettenbruch independent aus, so erhält man

$$\text{IV)}\quad \beta_i = b_{i-1} \frac{\begin{vmatrix} a_{i-3} & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{i-3} & a_{i-4} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & b_1 & a_n & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_i & a_{i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i-2} & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{i-3} & a_{i-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_i & a_{i-1} \end{vmatrix}}$$

und weiterhin

$$\text{V)}\quad \alpha_i = \frac{b_i}{b_{i-2}\,.\,b_i}\cdot\frac{\begin{vmatrix} a_{i-3} & 1 & \dots 0 & 0 \\ b_{i-4} & a_{i-4} & \dots 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots a_{i-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots b_{i-1} & a_{i-2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{i-1} & 1 & \dots 0 & 0 \\ b_{i-2} & a_{i-2} & \dots 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots a_{i+1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots b_{i+1} & a_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i-4} & 1 & \dots 0 & 0 \\ b_{i-4} & a_{i-5} & \dots 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots a_{i-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots b_{i-2} & a_{i-3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{i-2} & 1 & \dots 0 & 0 \\ b_{i-2} & a_{i-3} & \dots 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots a_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots b_i & a_{i-1} \end{vmatrix}}.$$

Hiermit sind die Grössen α und β definitiv in a und b ausgedrückt; setzt man also die gefundenen Werthe oben ein, so ist ganz allgemein der Kettenbruch

$$K \equiv \cfrac{b_1}{a_1 - \dots - \cfrac{b_n}{a_n - \cfrac{b_1}{a_1 - \dots - \cfrac{b_n}{a_n - \dots - \cfrac{b_1}{a_1 - \dots - \cfrac{b_n}{a_{n(p)} - \cfrac{b_1}{a_1 - \dots - \cfrac{b_{q-1}}{a_{q-1}}}}}}}}}$$

summirt. Die Formeln I) [oder II)], III), IV) und V) stellen in ihrer Gesammtheit die völlig abgeschlossene Lösung des Problems dar, welches wir uns eingangs gestellt hatten, und zwar erscheint im Resulate, entsprechend der oben formulirten Bedingung, keine Determinante von höherem als n^{ten} Grade. Will man statt des „negativen" Kettenbruches den „positiven" zum Vorwurf nehmen, so hat man nur sämmtliche b — mit Ausnahme von b_1 — negativ zu setzen.

In manchen Fällen wird selbsverständlich das obige System von $2n$ Gleichungen eine einfachere Lösung gestatten. Ist z. B. $n=2$, so hat man das System

$$\alpha_1\beta_2\beta_2 = b_1, \qquad \alpha_2\beta_1 + \beta_2 = a_1,$$
$$\alpha_2\beta_1\beta_1 = b_2, \qquad \alpha_1\beta_2 + \beta_1 = a_2$$

aufzulösen und findet

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{\beta_2^{\,2}}, \quad \alpha_2 = \frac{b_2}{\beta_1^{\,2}},$$
$$b_2 + \beta_1\beta_2 = a_1\beta_1, \quad b_1 + \beta_1\beta_2 = a_2\beta_2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Auflösung einer quadratischen Gleichung

$$\beta_1 = \frac{a_1 a_2 + \sqrt{(b_1 - b_2 + a_1 a_2)^2 + 4 a_1 a_2 b_2} + (b_1 - b_2)}{2 a_2},$$
$$\beta_2 = \frac{a_1 a_2 + \sqrt{(b_1 - b_2 + a_1 a_2)^2 + 4 a_1 a_2 b_2} - (b_1 - b_2)}{2 a_1},$$

und dann

$$\alpha_1 = \frac{4\,a_1^2 b_1}{[a_1 a_2 + \sqrt{(b_1 - b_2 + a_1 a_2)^2 + 4\,a_1 a_2 b_2} - (b_1 - b_2)]^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{4\,a_2^2 b_2}{[a_1 a_2 + \sqrt{(b_1 - b_2 + a_1 a_2)^2 + 4\,a_1 a_2 b_2} + (b_1 - b_1)]^2}.$$

Unser q kann in diesem Falle nur einen der beiden Werthe 1 oder 2 annehmen; setzen wir es $= 1$, so wird nach I)

$$M = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1 - (\alpha_1 \alpha_2)^{p+1}}{(\alpha_1 \alpha_2)^p (1 - \alpha_1 \alpha_2)} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{1 - (\alpha_1 \alpha_2)^p}{(\alpha_1 \alpha_2)^{p-1} (1 - \alpha_1 \alpha_2)};$$

setzen wir es dagegen $= 2$, so erhalten wir

$$M = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{1 - (\alpha_1 \alpha_2)^{p+1}}{(\alpha_1 \alpha_2)^p (1 - \alpha_1 \alpha_2)} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{1 - (\alpha_1 \alpha_2)^{p+1}}{(\alpha_1 \alpha_2)^p (1 - \alpha_1 \alpha_2)}.$$

Bereits jetzt erkennen wir die unseres Wissens zuerst von Kahl[3]) wahrgenommene Thatsache, dass beim zweigliedrig-periodischen Kettenbruch in der Bildungsweise des $(2p)^{\text{ten}}$ und $(2p+1)^{\text{ten}}$ Näherungswerthes ein Unterschied nicht stattfindet. Führen wir die angedeuteten Substitutionen durch, so resultirt jene independente Formel, welche wir schon früher[4]) mit Hilfe einer Determinantentransformation abgeleitet haben.

1) Oettinger, Ueber die Näherungswerthe von Kettenbrüchen und ihre Anwendung auf Darstellung der Quadratwurzeln, Archiv d. Math. u. Phys. 43. Thl.

2) Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875, S. 184.

3) *Id.*, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Thl.

4) Kahl, Ueber einen Kettenbruch von zweigliedriger Periode, *ibid.* 19. Thl.

III.

Ueber lineare Constructionen von ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. Axel Harnack

in Darmstadt.

Die bekannte Erzeugungsweise einer ebenen Curve dritter Ordnung durch zwei involutorische Strahlsysteme, welche in halb perspectivischer Lage projectivisch auf einander bezogen sind, kann zu einer wirklichen Construction der Curve aus drei Paaren correspondirender Punkte in sehr einfacher Weise benutzt werden, wie dies von Schröter (Mathematische Annalen Bd. V, S. 50 und Bd. VI, S. 85) des Näheren ausgeführt ist. Diese Construction zeichnet sich vor allen übrigen dadurch aus, dass zur Bestimmung beliebig vieler Punkte der Curve keine anderen Linien gezogen werden als solche, durch deren Durchschnitte jedesmal neue Curvenpunkte geliefert werden.

In einem früheren Aufsatze (Math. Ann. Bd. IX, S. 7) habe ich gezeigt, nach welchem Kriterium hierbei entschieden werden kann, ob eine durch drei Paare correspondirender Punkte gegebene Curve ein Oval besitzt oder nicht, und welchem der beiden Züge jeder dieser Punkte, sowie jeder andere neu construirte angehört.

Im Folgenden soll die Aufgabe behandelt werden, diese Erzeugungsweise auch zur Construction des syzygetischen Büschels von Curven dritter Odnung zu verwerthen. Bei dieser Betrachtungsweise werden sich zugleich die bekannten, zuerst von Cremona aufgestellten Sätze über anharmonische Relationen im Curvenbüschel aus einfachen Lagenbeziehungen ergeben, welche sich auf die Repräsentation conjugirt imaginärer Punkte und Linien durch die Doppelelemente von cyklisch-projectivischen Punktreihen gründen. (F. Klein, Göttinger Nachrichten 1872, S. 373.)

Nimmt man auf einer Geraden drei reelle Punkte (1, 2, 3) an und bestimmt ferner in irgend einem beliebigen Punkte M der Ebene drei

Gerade (p_1, p_2, p_3) derart, dass ihre Durchschnitte mit der Geraden 123 harmonisch gelegen sind zu je einem der drei gegebenen Punkte in Bezug auf die beiden anderen, so giebt es eine zweifach unendliche Schaar von Curven dritter Ordnung, für welche diese drei reellen Punkte Wendepunkte und diese drei reellen Linien harmonische Polaren sind. Die sechs beweglichen imaginären Wendepunkte liegen auf zwei festen imaginären Geraden, welche durch den Punkt M gehen, und zu einem solchen Systeme von sechs imaginären Wendepunkten, welches vollständig durch die Annahme eines Wendepunktes bestimmt ist, gehört ein syzygetischer Curvenbüschel. Nimmt man dagegen einen beliebigen Punkt x in der Ebene an und betrachtet alle Curven, welche durch denselben gehen, so erhält man einen Büschel, dessen vollständiges Schnittpunktsystem dadurch gefunden wird, dass man die drei gegebenen Wendepunkte mit dem Punkte x verbindet und auf diesen Linien die vierten harmonischen Punkte in Bezug auf jeden der Wendepunkte und die Durchschnitte mit der entsprechenden Polaren bestimmt. Durch zweimalige Anwendung dieses Verfahrens ergeben sich sechs weitere Punkte, welche auf einem Kegelschnitte gelegen sind.

I. Es werde nun zunächst der Büschel betrachtet, welcher dadurch entsteht, dass der Punkt x auf die harmonische Polare p_1 verlegt wird.* Heisst dieser Punkt jetzt O_1, so liefern die Verbindungslinien $2O_1$ und $3O_1$ auf den Polaren p_3 und p_2 die Punkte O_3 und O_2, und die Linien $1O_1$, $2O_2$, $3O_3$ sind drei Tangenten aller Curven des Büschels, während die Punktepaare 1 und O_1, 2 und O_2, 3 und O_3 drei Paare von correspondirenden Punkten für sämmtliche Curven des Büschels darstellen. Durch einen weitern Punkt x wird eine einzelne Curve innerhalb des Büschels individualisirt und in zwei correspondirenden Punkten muss die erzeugende Involution jetzt dargestellt werden können.

Zieht man den Strahl $1x$ und bestimmt auf demselben zu x den vierten harmonischen Punkt y in Bezug auf den Punkt 1 und den Durchschnitt des Strahles mit p_1, so wird auf der Linie O_1y der mit x correspondirende Punkt x' gelegen sein. Derselbe wird also gefunden, wenn auch der Strahl $2x$ gezeichnet und zu x der vierte harmonische Punkt z in Bezug auf den Punkt 2 und den Durchschnitt des Strahles mit p_2 construirt wird. Die Linien O_1y und O_2z schneiden sich im Punkte x'. Demnach sind vier Paare correspondirender Punkte gewonnen, aus denen drei von einander unabhängige zur oben angedeuteten Construction verwandt werden können.

Die drei reellen Wendetangenten der Curve correspondiren beziiglich mit den Strahlen $1O_1$, $2O_2$, $3O_3$ und können demzufolge gefunden werden. Um insbesondere die beiden Paare von correspondirenden Punkten, welche mit einem der Wendepunkte in einer Geraden, d. h. also auf den Doppelelementen der involutorischen Strahlbüschel gelegen sind, zu erhalten, kann man den Satz zu Hilfe nehmen, dass die kreuzweise Verbindung zweier solcher Punkte, die mit 1 auf einer Geraden liegen, mit dem Punktepaare 2, O_2 oder 3, O_3 zu zwei correspondirenden Curvenpunkten führt, welche sich mit 3, bezüglich mit 2 auf einer Geraden befinden. Sind demnach in einem Wendepunkte die Doppelelementstrahlen und die zugehörigen Curvenpunkte gefunden, so folgen dieselben für die anderen Wendepunkte durch lineare Construction.

Einer besondern Erwähnung bedarf noch der Fall, in welchem der gegebene Punkt x in den Durchschnitt M der drei harmonischen Polaren hineinrückt. Alsdann entsteht eine Curve mit isolirtem Doppelpunkte, die einzige nicht zerfallene Curve vom Geschlechte $p=0$, welche im Büschel enthalten ist. Der Strahl $1M$ bildet jetzt, ebenso wie O_1M in O_1, ein Doppelelement des involutorischen Systems in 1, und mithin lässt sich auch hier das zweite Doppelelement construiren. Die projectivische Zuordnung innerhalb der Büschel ist durch das Strahlenpaar $1(23, O_2O_3)$ und $O_1(2O_3, 3O_2)$ nach wie vor festgelegt.

Ausser dieser einen Curve mit Doppelpunkt gehören zum betrachteten Büschel noch drei zerfallene Curven dritter Ordnung. Die eine derselben besteht aus den drei Linien $1O_1$, $2O_2$, $3O_3$, die zweite aus den Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$, während die dritte, wie bereits erwähnt wurde, aus der Wendelinie 123 und dem Kegelschnitte zusammengesetzt ist, welcher die drei gegebenen Tangenten in den Punkten O_1, O_1, O_3 berührt. Durch diese Curven sind acht weitere Doppelpunkte des Büschels gegeben, von denen indess die drei Punkte O_1, O_2, O_3 je zweifach zählen. Die beiden auf der Geraden 123 befindlichen Doppelpunkte liegen äquianharmonisch zu den drei Wendepunkten.

II. Wir heben nun aus der zweifach unendlichen Schaar von Curven, von welchen wir ausgingen, einen syzygetischen Curvenbüschel dadurch heraus, dass wir das reelle Fundamentaldreieck construiren, welches solch einem Büschel zu Grunde liegt. Zu dem Zwecke nehme man auf der Polaren p_1 einen beliebigen Punkt a an, verbinde denselben mit den Punkten 2 und 3, und verlängere diese Linien, bis sie die Polaren p_3 und p_2 bezüglich in den Punkten c und b schneiden. Nach einem bekannten Dreieckssatze geht die Linie bc auch durch den Punkt 1, und abc ist das gesuchte reelle Fundamentaldreieck.

Die Durchschnitte von bc und p_1, ca und p_2, ab und p_3 seien bezüglich durch I, II, III bezeichnet, so dass die Punkte $1\,II\,III$, $2\,III\,I$, $3\,I\,II$ auf einer Geraden liegen. Auf den Dreiecksseiten ab, bc, ca

befinden sich je zwei conjugirt imaginäre Wendepunkte, jedesmal harmonisch zu den Punkten $3, III$; $1, I$; $2, II$; und diese Wendepunkte haben die Eigenschaft, dass zweimal je drei derselben auf éiner Geraden gelegen sind, welche durch M geht. Werden die drei Linien, welche diesen Punkt mit den drei reellen Wendepunkten verbinden, durch q_1, q_2, q_3 bezeichnet, so bilden die ebengenannten beiden Wendelinien die Doppelelemente einer elliptischen Involution, welche durch p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3 dargestellt ist.

Man denke sich nun auf ab die Involution construirt, welche die Punkte $3, III$ zu Doppelelementen hat: einem variabelen Punkte x entspreche in dieser Involution der Punkt y. Wir projiciren diesen Punkt y von 1 aus auf die Linie ac und verbinden den so erhaltenen Projectionspunkt mit M. Dieser Strahl schneidet die Linie ab in einem Punkte, welcher z genannt und dem Punkte x zugeordnet werden soll. Durch dieses Verfahren entstehen auf ab zwei einander projectivisch zugeordnete Punktreihen, deren zusammenfallende Elemente durch die beiden imaginären Wendepunkte dargestellt werden.

Insbesondere sind einander zugeordnet auf

	ab	bc	ca
den Punkten	a, b, III	b, c, I	c, a, II
die Punkte	III, a, b	I, b, c	$II, c, a.$

Der Staudt'schen Festsetzung entsprechend, müssen auch hier je zwei conjugirt imaginäre Wendepunkte durch den Sinn unterschieden werden, in welchem die cyklisch-projectivischen Reihen durchlaufen werden. Mithin sind die drei Wendepunkte, welche auf einer durch M gehenden Geraden sich befinden, durch die Reihen

$$abIII,\ bcI,\ caII \text{ und } baIII,\ cbI,\ acII$$

repräsentirt; das heisst: durch eine jede der beiden Richtungen, in welcher das Dreieck abc beschrieben werden kann, wird eine der beiden conjugirt imaginären Wendelinien durch M vorgestellt.

In einer Geraden liegen:

mit 1: $abIII$ und $acII$, sowie $baIII$ und $caII$,
mit 2: bcI und $baIII$, sowie cbI und $abIII$,
mit 3: $caII$ und cbI, sowie $acII$ und bcI.

Wir wollen nun die Wendepunkte nach bekanntem Schema benennen:

$$\begin{array}{lccc} \text{auf } bc \text{ mit} & 1 & w'_2 & w'_3, \\ \text{auf } ca \text{ mit} & w''_1 & 2 & w''_3, \\ \text{auf } ab \text{ mit} & w'''_1 & w'''_2 & 3. \end{array}$$

Da die beiden conjugirt imaginären Wendepunkte auf ab die zusammenfallenden Elemente der projectivischen Punktreihen bilden, so ist das

Doppelverhältniss $(a\,b\,III\,w'''_1)$ gleich dem Doppelverhältniss $(III\,a\,b\,w'''_1)$. Mithin sind im Strahlenbüschel M die beiden conjugirt imaginären Wendelinien äquianharmonisch zu den drei Polaren p_1, p_2, p_3, oder, wie sich aus der linearen Transformation allgemein ergiebt: In jeder Ecke eines syzygetischen Dreiecks sind die beiden Dreiecksseiten äquianharmonisch gelegen zu den drei harmonischen Polaren der auf der Gegenseite des Dreiecks befindlichen Wendepunkte.

Nimmt man für die Darstellung der cyclisch-projectivischen Punktreihen auch die Durchschnitte der Dreiecksseiten mit den Linien q_1, q_2, q_3 zu Hilfe, wobei zu berücksichtigen ist, dass jedesmal q_1 und q_2 harmonisch gelegen ist zu q_3 und p_3 u. s. w., so erhält man auf den drei Seiten ab, bc, ca cyklische Punktreihen, vorgestellt durch:

$$\begin{array}{ccc} 3\,q_2\,q_1 & 1\,q_3\,q_2 & 2\,q_1\,q_3, \\ q_2\,q_1\,3 & q_3\,q_2\,1 & q_1\,q_3\,2. \end{array}$$

Denn projicirt man den Durchschnitt von q_2 und ab vom Punkte 1 aus auf ac, so ist, wie sich aus harmonischen Relationen ergiebt, dieser Punkt zugleich der Schnittpunkt der Linien ac und q_3. Demnach folgt, wenn diese cyclisch-projectivischen Punktreihen von M aus betrachtet und auf die Linie 123 projicirt werden, dass auf einer Wendelinie die beiden Dreiecksecken zu den drei Wendepunkten äquianharmonisch gelegen sind.

Der auf ab gelegenen Punktreihe

$$w'''_1\, w'''_2\, a\, 3\, b\, q_1\, q_2\, III$$

entspricht also die Reihe

$$w'''_1\, w'''_2\, III\, q_2\, a\, 3\, q_1\, b.$$

(Unter $q_1\,q_2$ sind die Durchschnitte dieser Linien mit ab zu verstehen.) Es ist mithin das Doppelverhältniss

$$(w'''_1\, w'''_2\, 3\, b) = (w'''_1\, w'''_2\, q_2\, a) = (w'''_1\, w'''_2\, q_1\, III)$$

und ebenso

$$(w'''_1\, w'''_2\, 3\, a) = (m'''_1\, w'''_2\, q_2\, III) = (w'''_1\, w'''_2\, q_1\, b),$$

das heisst: diese Doppelverhältnisse sind zufolge des ersten in jeder Reihe befindlichen sämmtlich äquianharmonisch.

Werden vom Punkte 1 aus die vier Punkte $w'''_1\, w'''_2\, 3\, b$ betrachtet, und die vier Punkte $w'''_1\, w'''_2\, q_1\, b$ auf die Gerade p_2 projicirt, so folgen die beiden Cremona'schen Sätze: Die vier durch einen Wendepunkt gehenden Wendelinien und die vier auf einer Polaren gelegenen Dreiecksecken besitzen äquianharmonische Doppelverhältnisse.

Da ferner das Doppelverhältniss $(w'''_1\, w'''_2\, 3\, III)$ harmonisch ist, so sind auch $(w'''_1\, w'''_2\, q_2\, b)$ und $(w'''_1\, w'''_2\, q_1\, a)$ harmonisch. Mithin sind die conjugirt imaginären Wendepunkte auch in Staudt'scher Weise, nämlich als Doppelelemente involutorischer Punktreihen, dargestellt, von denen immer drei Paare zusammengehöriger Punkte auf jeder Dreiecksseite ohne Weiteres angegeben werden können. Diese Darstellung lässt sich nun zur Lösung der Aufgabe benutzen: Sobald eine Tangente von einem der reellen Wendepunkte gegeben ist, beliebig viele Punkte der zugehörigen Curve zu construiren. Aus Annahme einer solchen Tangente vom Punkte 1 folgt sofort der Berührungspunkt O_1 auf der harmonischen Polaren p_1, sowie die Punkte O_2 und O_3 als Berührungspunkte einer von 2 und einer von 3 ausgehenden Tangente. Es handelt sich also nunmehr darum, in den correspondirenden Punkten 1 und 0_1 die erzeugenden involutorischen Strahlbüschel herzustellen. Der in der ersten Aufgabe gegebenen reellen Lösung entsprechend, wird man jetzt den Strahl zu bestimmen suchen, welcher in 1 mit dem Strahle bc correspondirt.

Auf der Linie bc liegen die beiden Wendepunkte w'_2 und w'_3. Zieht man die Linie $O_1w'_2$, ferner $2w'_3$, welche noch im Punkte w'''_1 die Curve schneidet, so bestimmen die Linien $O_1w'_2$ und $O_2w''_1$ und ebenso $O_1w'_3$ und $O_2w'''_2$ durch ihren Durchschnitt je einen imaginären Curvenpunkt, und die reelle Verbindungsgerade derselben ist die gesuchte Linie im Punkte 1.

Um diese Linie zu erhalten, betrachte man die involutorischen Strahlbüschel in O_1 und O_2, deren Doppelelemente durch die imaginären Linien $O_1w'_2$ und $O_1w'_3$, sowie $O_2w'''_1$ und $O_2w'''_2$, welche kreuzweise zum Durchschnitt gebracht werden sollen, gegeben sind. Die Linie O_1O_2 schneidet die Seite ab im Punkte 3, die Seite bc in einem Punkte, welcher mit x bezeichnet werden soll. Mithin correspondirt mit der Linie O_1O_2 im involutorischen Strahlbüschel O_2 die Linie O_2III, während im Strahlbüschel O_1 der nämlichen Linie ein Strahl O_1y entspricht, wenn unter y ein Punkt verstanden wird, welcher in der involutorischen Punktreihe $1, I$; q_3, c; q_2, b dem Punkte x zugeordnet ist. Bringt man nun den Strahl O_1y zum Durchschnitte mit O_2III, so ist die Verbindung dieses Punktes mit dem Punkte 1 der gesuchte mit bc correspondirende Strahl, auf welchem sich die beiden conjugirt imaginären, mit den Wendepunkten w'_2 und w'_3 correspondirenden Curvenpunkte befinden.

Auf diese Weise ist das involutorische Strahlsystem im Punkte 1 durch zwei Paare reeller Strahlen repräsentirt; im Punkte O_1 ist ein solches durch die Doppelelemente $O_1 1$ und p_1 festgelegt. Die eindeutige halb perspectivische Zuordnung zwischen den beiden Systemen ist durch drei entsprechende Strahlenpaare gegeben. Da indess bei dieser Zuordnung imaginäre Linien im System O_1 zu berücksichtigen sind, so ist es für eine Construction von Vortheil, auch in den Wendepunkten 2 und 3 die involutorischen Strahlsysteme zu construiren. Auf den Doppelelementen derselben, welche stets reell sind, können die correspondirenden Punkte, von denen immer mindestens je ein Paar reell ist, mit Benutzung der für dieselben auf S. 40 angegebenen Relation gefunden werden. Eine einfache Construction, zu deren Ausführung alle Elemente reell sind, ergiebt sich ferner durch Anwendung der von Schröter (a. a. O. S. 65) erdachten „Maschine", welche sich nach Festlegung eines beliebigen, durch die Punkte O_1 und 1 gehenden Kreises und nach Bestimmung der Wendetangente im Punkte 1 (involutorisch zugeordnet dem Strahle $1\,O_1$) vollständig und eindeutig zusammensetzen lässt.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber die Lichtmühle.

Unter den Erscheinungen, welche in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gezogen haben, ist vorzugsweise die Lichtmühle zu erwähnen, welche von Herrn Crookes, dem Entdecker des Thalliums, entdeckt wurde. In der geschickten Hand von Dr. Geissler in Bonn hat sie eine handliche Form angenommen und kann jetzt auch versendet werden.

Nach mehreren Modificationen besteht sie jetzt aus einem horizontalen Kreuze von Aluminiumdraht, welches mit einem Glas- oder Achathütchen sich auf einer stählernen, rundlich polirten Spitze dreht. Eine von oben darüber, aber ohne Berührung, angebrachte Glasröhre mit becherförmiger Erweiterung nach unten verhindert das Abfallen von der Spitze. Die Flügel sind 25 bis 30^{mm} lang und jeder trägt an dem Ende radial eine senkrechte runde Scheibe von dünnem Aluminiumblech von 10 bis 15^{mm} Durchmesser, deren eine Seite schwarz angestrichen oder berusst, deren andere Seite aber glänzend geblieben ist. Die schwarzen und glänzenden Seiten sind an jedem Flügel in derselben Weise angebracht. Das Ganze befindet sich in einer Glaskugel von 70 bis 80^{mm} Durchmesser, welche mit der Quecksilberluftpumpe möglichst luftleer gemacht ist. Wie das Rädchen in diese Kugel hineingebracht ist, und wie diese Kugel nachher luftleer gemacht und durch Zuschmelzen luftleer erhalten wird, ist Sache des Herrn Dr. Geissler und wird nicht leicht einem weniger Geschickten gelingen. Dieses kleine Rädchen dreht sich nun unter dem Einflusse von Licht in dem Sinne, dass die schwarzen Seiten rückwärts gehen, gerade als wenn ein Druck auf dieselben ausgeübt werde. Schon das Licht einer Stearinkerze ist hinreichend, das stillstehende Rädchen in Bewegung zu setzen, und im Sonnenlichte ist die Bewegung so rasch, dass man die Umdrehungen nicht mehr zählen, selbst die einzelnen Theile des Apparates nicht mehr deutlich unterscheiden kann. Es ist nun zunächst ganz unbezweifelt, dass hier ein ponderirender Körper eine Bewegung angenommen hat, welche wir Massenbewegung nennen, und dass diese Bewegung durch das Glas und das Vacuum hindurchgedrungen ist. Das Vacuum Geissler's ist bekanntlich so vollkommen, dass eine elektrische Entladung durch dasselbe nicht mehr stattfindet, wohl aber gehen noch Strahlen hindurch. Da man eine Bewegung nicht ohne eine Unterlage denken kann, so muss man annehmen, dass das Vacuum kein absolutes sei, und es ist auch leicht einzusehen, dass durch blosse fortwährende Theilung logisch niemals ein Nichts entstehen könne. In jedem Falle bleibt in dem Vacuum die Spannung der Quecksilberdämpfe und ein ausgekochtes Barometer muss ein noch vollkommeneres Vacuum haben, als die Quecksilberluftpumpe macht, weil hier die Luft nicht durch Theilung, sondern vollständig entfernt wird. Im Barometervacuum sehen wir deutlich die Destillation des Quecksilbers, indem die leere Stelle der Röhre oft mit Quecksilberkügelchen bedeckt ist. Nimmt man den sogenannten Lichtäther als den Träger dieser Bewegung an, so muss man ihm Materialität zuerkennen; dann aber würde er ponderiren und sich in unserer Atmosphäre stofflich vorfinden. Die Annahme eines Lichtäthers scheint darnach überflüssig, sowie auch noch nicht der kleinste Beweis für die Existenz eines Dinges vorhanden ist, welches eine unsichere Stellung zwischen Kraft und Stoff einnimmt.

Unsere Aufgabe ist jetzt, die Erscheinungen der Lichtmühle auf die Mechanik, und zwar speciell auf die Mechanik des Lichtstrahls zurückzuführen.

Der Lichtstrahl, qualitativ absolut identisch mit Wärmestrahl, hat eine geradlinige Bewegung, jedoch, wie man annimmt, in der Art, dass die Molecule des lichtfortpflanzenden Mittels sich in allen Richtungen einer Ebene bewegen, welche senkrecht auf der Richtung des Strahles steht. Diese Vibrationen geschehen nach den Gesetzen der Pendelbewegung, so dass das schwingende Molecul die grösste Geschwindigkeit besitzt, wenn es in seiner Ruhelage ist, dass die Bewegung von dort an nach der Seite abnimmt, bis sie Null wird, wo dann das Molecul umkehrt und denselben Weg nach der andern Seite vollbringt. Bei dem Pendel ist die Schwerkraft das beschleunigende und hemmende Princip, bei dem Strahl die Elasticität des Mittels. Die absolute Grösse der Oscillationsamplituden liegt weit unter den Grenzen unserer Messung, sie ist als unendlich klein im physikalischen Sinne zu betrachten. Man würde von ihrer Existenz gar keine Kenntniss haben, wenn nicht gewisse Erscheinungen des polarisirten Lichtsrahls eine ganz entschiedene Verschiedenheit in zwei senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen zeigten. Infolge dessen erschien es am natürlichsten, wie Beer (Einleitung in die höhere Optik, S. 61) sagt, alle Lichtphänomene durch Transversaloscillationen zu erklären. Der Erfolg zeigte, dass dies auf eine sehr befriedigende Weise geschehen könnte, und die Lichtmühle ist die erste optische Erscheinung, wobei man mit dieser Ansicht nicht auskommt.

In Betreff der Fortpflanzung des Lichtstrahls nahm man an, dass das transversal schwingende Molecul in seiner Ebene bleibe, aber dennoch dem nächst anstossenden Molecul seine ganze Bewegung übertrage und dann selbst wieder in den Zustand der Ruhe zurücktrete. Die Geschwindigkeit dieser Uebertragung, welche man die Geschwindigkeit des Lichtes nennt, findet bekanntlich im Weltraum mit 42000 geographischen Meilen (15 auf 1 Grad) in der Secunde statt. Für die Annahme, dass das schwingende Molecul die Ebene seiner Ruhelage nicht verlasse, sondern sich nur transversal auf die Richtung des Strahles bewege, waren vorzüglich die Ansichten von Fresnel massgebend, welcher, als der Ausbilder der Vibrationstheorie, deren Grund von Huyghens, Descartes und Euler gelegt wurde, angesehen werden kann. Derselbe sagt (Pogg. 22, 73): „Nachdem ich die Möglichkeit solcher Vibrationen in einem Fluidum gezeigt habe, bleibt mir nur noch übrig zu erklären, wie es geschehen könne, dass die Molecule keine merklichen Oscillationen anders, als in der Fläche der Wellen senkrecht auf den Strahlen erleiden. Hierzu braucht man nur zwischen den Moleculen ein solches Abstossungsgesetz anzunehmen, dass die Kraft, welche sich der gegenseitigen Annäherung zweier Flüssigkeiten widersetzt, weit grösser sei, als die, welche das Verschieben einer Schicht gegen die andere hemmt."

Ferner vergleicht er in Uebereinstimmung mit Young die Lichtwelle mit den Schwingungen eines ausgespannten Seiles von unendlicher Länge, wo ebenfalls keine Verschiebungen der Länge nach, sondern nur nach der Seite vorkommen.

Schwerd formulirt diesen Satz in seinen Bewegungserscheinungen (S. 6 unter § 24) dahin: „Die Oscillationsbewegungen stehen senkrecht auf der Richtung, nach welcher sich die Wellen fortpflanzen, und liegen daher in der Oberfläche der Wellen."

Beer sagt in seinem oben citirten klassischen Werke S. 60: „Es sind nun drei Fälle als möglich denkbar; es können im Besondern die Oscillationen nur transversale oder nur longitudinale, oder, was der allgemeinste Fall wäre, aus beiden Arten von Schwingungen resultiren. Die Seitlichkeit des polarisirten Lichtes lässt sich unmöglich aus longitudinalen Schwingungen allein erklären, wohl aber aus transversalen. Jedenfalls müssen wir daher die Existenz der letzteren im polarisirten Lichte unterstellen. In Betreff der longitudinalen Schwingungen, welche die transversalen möglicherweise noch begleiten, kann man erstlich die Annahme machen, dass sie beim Durchstrahlen eines Kalkspathes vernichtet werden; alsdann bestünde das polarisirte Licht blos aus transversalen Schwingungen" etc.

Im Verfolge werden die longitudinalen Schwingungen von Beer auch nicht mehr der Betrachtung unterzogen. Es lässt sich also allgemein sagen, dass die heutigen Lehrbücher der Optik nur transversale Schwingungen annehmen, mit denen aber die Erscheinungen der Lichtmühle nicht zu erklären sind.

Das Licht geht unter allen Umständen von einem leuchtenden Körper aus, und dazu wird jeder Körper, wenn er auf eine gewisse Temperatur erhitzt wird. Es zeigt sich dann, dass dieser Körper sich in allen Dimensionen ausdehnt und ein grösseres Volum einnimmt. Alle amorphen Körper dehnen sich nach allen Richtungen gleichmässig aus und unter den krystallinischen die regulär krystallisirten. Diejenigen Krystalle, welche sich nicht gleichmässig ausdehnen, üben auch auf den Lichtstrahl eine polarisirende Wirkung aus. Wir können deshalb hier von ihnen absehen und die gleichmässige Ausdehnung als die Regel annehmen. Letztere kann man sich nur dadurch erklären, dass die kleinsten Theilchen grössere Schwingungen machen, und zwar gleichgrosse nach allen Richtungen des Raumes. Sie müssen demnach kleine Kugelinhalte ausfüllen, von denen die Ruhelage der Mittelpunkt ist. Die äusseren Theile eines Körpers schwingen alsdann mit Halbkugeln nach aussen, ins Freie, und ebenso nach innen. Die Cohäsion und Elasticität ist in diesem Falle die Ursache der vibratorischen Bewegung. Die äusseren Theile stossen mit ihren Halbkugeln gegen das lichtvermittelnde Medium vor und verdichten dasselbe vor sich, ganz in derselben Weise, wie eine schwingende Saite die Luft verdichtet. Diese Verdichtung kann aber nicht bleiben, sondern pflanzt sich auf die angrenzenden Molecule, wie die Schallwelle, fort, und so immer weiter. Nachdem die ganze Bewegung auf ein angrenzendes Theilchen übertragen ist, kehrt das stossende Theilchen wieder in die Ruhe zurück, bis eine neue Welle von dem leuchtenden Körper es zu derselben Bewegung wieder nöthigt. Wir ersehen daraus, dass der Lichtstrahl nothwendig neben den transversalen Schwingungen auch longitudinale haben müsse, wenn wir dem leuchtenden Körper eine Bewegung nach aussen zuschreiben, die aber nothwendig aus seiner Ausdehnung gefolgert werden muss.

Eine Erklärung ist für die transversalen Schwingungen niemals gegeben worden, sondern sie werden in allen Lehrbüchern als Dogma vorangestellt. Gleichwohl fand es jeder neu in die Wissenschaft Eintretende sehr auffallend, warum die Molecule des Aethers oder der Luft, die man als in allen Richtungen gleich beschaffen ansehen musste, seitwärts auswichen, wenn sie gerade aus gestossen wurden. Von dem leuchtenden Körper hat man es aber niemals als eine berechtigte Eigenthümlichkeit angesehen, dass er auf seiner Oberfläche nur transversale Schwingungen mache. Der Vergleich des polarisirten Strahles mit der Welle am gespannten Seile war auch eigentlich ganz falsch, denn das Seil musste seitlich angeschlagen werden, wenn es transversale Schwingungen annehmen sollte. Zupfte man aber in der Richtung des Seiles an seinem Ende, so entstanden nur longitudinale Schwingungen.

Licht- und Wärmestrahl sind nur quantitativ von einander verschieden. Die ultrarothen Wärmestrahlen werden am wenigsten gebrochen, haben die kleinste Zahl Schwingungen in der Secunde, aber die grösste Amplitude und die grössten longitudinalen Schwingungen. Dies ergiebt sich aus der Wärmewirkung der unsichtbaren Strahlen. Bekanntlich liegt der grösste Wärmeeffect im Spectrum jenseits des Roth im Dunkeln. Der Lichtstrahl ist nicht hell und kann in einem dunkeln Zimmer bei reiner Luft von der Seite nicht gesehen werden. Ebenso wenig ist der Wärmestrahl warm, wie das Nichtverbrennen des Spinnenfadens im Focus des Objectivs beweist. Aber beide Arten von Strahlen gehen in gemeine Wärme über, wenn sie auf eine nicht durchlassende und nicht reflectirende Substanz stossen. Die ganze Summe der Bewegung verwandelt sich dann in gemeine Wärme und lässt sich in Calorien (1 Gramm Wasser um 1^0 C.) angeben. Das Licht lässt sich nicht messen, weil es nicht auf die Dauer bestehen kann. Sein einziges Mass ist die durch sein Verschwinden entstehende gemeine Wärme. Selbst das allerschwächste Licht des Phosphors, des Johanniswurmes, der faulenden Fische, des Mondes kann nicht anders, als in Wärme übergehen, die aber so wenig beträgt, dass sie von den empfindlichsten Instrumenten nicht einmal angezeigt wird. Bei keinem Lichte ist man sicher, dass es nicht dunkle Wärmestrahlen enthalte. Die dunklen Wärmestrahlen im weissen Sonnenlichte gehen durch das Prisma, dagegen die Wärmestrahlen eines Ofens, rothglühender Kohlen können durch Glas aufgehalten werden. Ein Photometer in demselben Sinne wie ein Calorimeter ist deshalb unmöglich, und was man bis jetzt so genannt hat, ist nur ein Vergleich zweier Lichtstärken gewesen, von denen die eine als normal angesehen wurde. Wenn demnach ein gemischter Strahl auf einer undurchsichtigen und berussten Fläche vollkommen verschwindet, so verwandelt sich die ganze Summe der Bewegung in gemeine Wärme, wenn diese Fläche unbeweglich ist. Ist sie aber beweglich, so erleidet sie von der longitudinalen Bewegung des lichtfortpflanzenden Mittels einen kleinen Stoss, der sich als Massenbewegung zu erkennen giebt; dagegen der grösste Theil der Bewegung und die ganze transversale Bewegung geht in gemeine Wärme über. In der Lichtmühle finden nun beide Wirkungen statt: die Flügel erwärmen sich von der schwarzen Seite her, und diese letzteren gehen rückwärts. Die auf den Flügeln frei werdende Wärme ist also um diejenige Summe vermindert, welche in der Massenbewegung auftritt und die nach der Formel $\frac{mc^2}{2}$ ausgedrückt werden könnte, wenn sie messbar wäre.

Dass der mechanische Effect ein so verschwindend kleiner ist, so dass seine Existenz erst jetzt gleichsam durch einen Zufall entdeckt wurde, erklärt sich aus der Natur des Lichtstrahls. Jede Fortpflanzung einer Welle beruht auf einer Uebertragung der Bewegung, während die fortpflanzende Flüssigkeit an Ort und Stelle bleibt und nur eine kleine Schwingung um ihre Ruhelage macht. So tanzt der auf der Wasserwelle schwimmende Kork, ohne fortzurücken, und ebenso bleibt die Luft, welche den Schall vermittelt, an Ort und Stelle, mit Ausnahme einer kleinen vorübergehenden Längsverschiebung. Bei dem Lichte ist dies noch bedeutender. Die Wellenlänge des rothen Strahles beträgt $0{,}00069^{\mathrm{mm}}$, es gehen also 1450 Wellen auf 1^{mm}; beim violetten Strahl von der Wellenlänge 0,000396 gehen 2530 Wellen auf 1^{mm}. Die Vorwärtsbewegung der wägbaren lichttragenden Substanz beträgt deshalb bei dem rothen Strahl $\frac{1}{1450}$ und bei dem violetten $\frac{1}{2530}{}^{\mathrm{mm}}$; dann kehrt das Molecul wieder um. Es ist ganz überflüssig, den Effect zu berechnen, den $\frac{1}{100}$ Milligramm mit der Geschwindigkeit des Lichtes von 42000 Meilen hervorbringen würde, wenn wir sehen, dass die Meteorite mit einer Geschwindigkeit von nur 7 bis 8 Meilen in der Secunde in den verdünntesten Schichten unserer Atmosphäre weissglühend werden und die Silicate zum Schmelzen kommen. Es wird also von jeder Lichtwelle, welche auf der berussten Fläche verschwindet, ein kleiner Stoss ausgeübt; da aber in der Secunde beim rothen Lichte 448 Billionen Wellen, beim violetten 776 Billionen ankommen, so addiren sich diese einzelnen Stösse zu einem Gesammteffect, der als Massenbewegung in der Lichtmühle hervortritt.

Wir haben nun noch zu untersuchen, welche Rolle der luftleere oder luftverdünnte Raum in dieser Erscheinung spielt. Dass hierbei der Widerstand gegen die Bewegung vermindert wird, bietet sich von selbst dar, doch ist dies wahrscheinlich nicht Alles.

Eine im luftleeren Raume angeschlagene Saite macht grössere Excursionen und schwingt länger, als im lufterfüllten Raume. Da sie durch Schallwellen keine Bewegung verlieren kann, so muss die ganze Summe der mitgetheilten Bewegung in der Substanz der Saite selbst in Wärme übergehen, die dann durch Ausstrahlung verloren geht. In gleicher Art wird ein leuchtendes Molecul im luftverdünnten Raume grössere Bewegung nach aussen machen, als in dichter Luft.

Wird eine Luftmasse mechanisch verdünnt, so kühlt sie sich ab, weil die übrig bleibenden Theilchen einen grössern Raum durchlaufen müssen, um den Raum gleichmässig auszufüllen. Die dazu nothwendige lebendige Kraft nimmt sie von ihrer eigenen Wärme, um dieselbe in Massenbewegung umzusetzen, und daher die Temperaturverminderung. Hat die Temperatur sich wieder durch Aufnahme von Wärme aus den Wänden ausgeglichen, so ist die Anzahl der Vibrationen bei gleicher Temperatur mit vorher dieselbe geblieben, dagegen die Geschwindigkeit der einzelnen Molecule hat im Verhältniss des Raumes zugenommen. Es bewegen sich also die Molecule in einem luftverdünnten Raume weit rascher, als in einem lufterfüllten, und können auch eine empfangene Bewegung rascher abführen. Die Luftverdünnung hat also die Wirkung, dass sie eine andere Vertheilung der bewegenden Kraft in transversale und longitudinale Schwingungen veranlasst, und dass ein grösserer Theil der Bewegung auf die longitudinalen verwendet wird. Diese beiden Bedingungen, Verminderung oder Aufhebung des Widerstandes, und die grössere Stosskraft der Lichtwellen bedingen die Bewegung der Lichtmühle.

Es lässt sich die Ansicht vertheidigen, dass die äusseren Theile des leuchtenden Körpers nicht gerade in Halbkugeln, sondern in Spitzkugeln oder Halbellipsoiden schwingen, weil die seitlichen Schwingungen durch die gleichartigen Bewegungen des Moleculs eingeschränkt werden, während sie gegen den leeren Raum kein so grosses Hinderniss finden, also sich weiter in ihn hinein ausdehnen können. Es wird dadurch wahrscheinlich, dass die dunkeln Wärmestrahlen, welche vom Prisma am wenigsten gebrochen werden, die grösste Summe der Bewegung im longitudinalen Sinne besitzen und deshalb am geradesten durch dasselbe hindurchdringen. Früher habe ich die grössere Wärmewirkung der ultrarothen Wärmestrahlen durch entsprechende Erweiterung der transversalen Schwingungen zu erklären versucht; ich finde es selbst aber natürlicher, diese Wirkung den longitudinalen Schwingungen beizulegen, da deren Existenz durch die Erscheinungen der Lichtmühle als feststehend angesehen werden darf. Die geringere Brechbarkeit deutet auf eine grössere Stosskraft.

Es ist bekannt, welche eigenthümliche Wirkung die Sonnenstrahlen auf die Haut in verdünnter Luft ausüben. Die Besteiger hoher Alpen haben immer das Bedürfniss empfunden, das Gesicht durch Schleier oder Anstriche gegen den unmittelbaren Anprall der Sonnenstrahlen zu schützen. Der mehrtägige Aufenthalt in einer Meereshöhe von 6000 — 8000 Fuss in ganz schneefreien Theilen der Schweiz hatte die Wirkung, dass sich eine dünne Epidermis vom ganzen Gesichte ablöste. Die Wirkung der Strahlen giebt sich durch einen deutlichen Schmerz zu erkennen, der bis zur Entzündung gehen kann.

Eine zweite sehr eigenthümliche Erscheinung bei der Lichtmühle machte eine andere Erklärung nöthig. War das Instrument der Sonne ausgesetzt und man entzog plötzlich das Licht durch Bedeckung oder einen Schirm, so hörte die Bewegung nach einiger Zeit auf und fing dann im entgegengesetzten Sinne an, so dass die schwarzen Flächen vorwärts gingen. Die Erklärung ergiebt sich ganz ungezwungen aus unserer Ansicht. Durch die Beleuchtung wurden Strahlen auf der schwarzen Seite der Flügel in Wärme umgesetzt, und die Flügel erwärmten sich und wegen ihrer Dünne durch die ganze Masse. Nach Entfernung der Lichtquelle strahlten sie wieder aus, und zwar vorzugsweise auf der schwarzen Seite alle Flügel zugleich. Das Ausstrahlen ist eine Schwingung nach aussen und Uebertragung dieser Bewegung an ein strahlvermittelndes Medium, hier die verdünnte Luft. Der nach aussen schwingende Theil der Flügel wird nun durch Cohäsion und Elektricität wieder zurückgezogen und diese Wirkung ist gegenseitig. Wenn nun der schwingende Theil der Flügel einen Theil seiner Bewegung als Strahl abgegeben hat, so kann er nicht mehr auf seine ursprüngliche Stelle zurückkehren, sondern bleibt etwas vor derselben stehen, und die Cohäsion bewirkt, dass der Flügel sich ihm nähern muss, wenn dies möglich ist. Der Mittelpunkt dieser Bewegung ist etwas nach vorn verschoben, weil ein Theil der Bewegung in dieser Richtung verloren gegangen ist. Sobald sich die Flügel durch Ausstrahlung mit der Umgebung ins Gleichgewicht gestellt haben, hört die Bewegung auf. Man kann daraus schliessen, dass, wenn man eine stillstehende Lichtmühle mit einer kälteren Hülle umgiebt, ebenfalls diese vorwärtsgehende Bewegung eintreten müsse; ferner, dass jeder von oben beschienene Körper schwerer, und jeder nach oben ausstrahlende Körper leichter erscheinen müsse, als er an sich ist, und es muss dem Versuche überlassen bleiben, den Druck des Sonnenlichtes auf eine gegebene schwarze Fläche nach absolutem Gewichte zu bestimmen.

Endlich füllt die neue Theorie der Lichtmühle noch eine Lücke aus, die Allen aufgestossen war, welche die Materialität des Weltäthers anerkennen mussten. Dieser als ponderabler Stoff musste den um die Centralkörper kreisenden Planeten einen Widerstand leisten, und wenn dieser auch noch so klein war, so musste er sich in einer grossen Reihe von Jahren merkbar machen und die Planeten den Sonnen näher bringen. Bei den Kometen von regelmässigem Umlauf hatte man schon bemerkt, dass die späteren Umläufe immer etwas früher vollendet wurden, als die früheren. Bei der aufgelösten Form der Kometen war dies erklärlich, was bei den massigen Planeten noch nicht bemerkt werden konnte. Auf unserer Erde deuten die Erscheinungen der Eiszeit darauf hin, dass die Erde früher viel kälter gewesen sei als jetzt, was am einfachsten auf eine grössere Entfernung von der Sonne gedeutet werden kann. Durch den Widerstand des Weltäthers hat sie sich nun allmälig in ihre gegenwärtige Lage herangeschraubt und es ist ungewiss, ob sie schon in jene Lage gekommen sei, wo die abstossende Kraft der Sonnenstrahlen dem Widerstand des Weltäthers gleich geworden ist. Wir müssen nothwendig annehmen, dass die Dichte des Weltäthers überall dieselbe sei, dagegen muss die abstossende Kraft der Sonne im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung zunehmen. Es muss deshalb für jeden Weltkörper, der um eine leuchtende Sonne kreist, eine Entfernung geben, wo diese beiden Wirkungen sich geradezu aufheben, wo also der Weltkörper auf eine unendliche Dauer in derselben Entfernung um seinen Centralkörper kreisen kann. Für die entfernteren Planeten mit dem geringern specifischen Gewichte, also grössern Volum, kann dies Verhältniss der Ausgleichung beider Wirkungen auch an jener Stelle stattgefunden haben, wo sie sich befinden. Es ist denkbar und wahrscheinlich, dass die Planeten sich nach dem abnehmenden specifischen Gewichte von der Sonne ab durch die beiden Wirkungen des Widerstandes und der Stosskraft der Sonnenstrahlen in der Zeit ordnen mussten; denn die dichteren Planeten (Mercur, Venus, Erde), welche einen kleineren Querschnitt darbieten, mussten der Sonne näher rücken, um eine den Widerstand des Weltäthers ausgleichende Menge Sonnenstrahlen zu empfangen, und in der That sind auch die Planeten annähernd nach diesem Princip geordnet, wobei die Unsicherheit in der Bestimmung des specifischen Gewichts der entfernteren Planeten nicht ausser Acht zu lassen ist.

Bedenkt man, dass das Licht einer Stearinkerze die Flügel der Lichtmühle in Bewegung setzt, dass ein brennender Magnesiumdraht sie in rasche Rotation setzt, so muss das volle Sonnenlicht auf die eine Halbkugel der Erde, die im Querschnitt eine Kreisfläche von $2\frac{1}{3}$ Million Quadratmeilen darbietet, einen ganz ansehnlichen Druck ausüben, und da die Erde sich ebenfalls im Vacuum bewegt, so ist sie in gewissem Sinne auch als eine Lichtmühle anzusehen, die aber von der Sonne nicht die Drehung um ihre Axe, sondern die ewige Fortdauer ihres Planetenlaufes empfängt.

In Betreff der Ausführung der Lichtmühle dürfte es sich empfehlen, statt der Form des Schaufelrades die der Windmühle zu versuchen, weil bei letzterer alle Flügel zugleich in demselben Sinne wirken und die Rückseite gar nicht den Strahlen ausgesetzt ist, während bei dem Schaufelrade nur der Ueberschuss einer schwarzen Seite gegen eine glänzende oder weisse zur Wirkung kommt.

Die Ansicht von Neesen (Pogg. 156, 144), dass die Erscheinungen der Lichtmühle durch Luftströmungen erklärt werden können, ist ganz unhaltbar, weil Luftströmungen, durch Wärme veranlasst, nur aufwärts und abwärts gehen können, aber nicht horizontal im Kreise herum.

Poggendorff sagt in seinen Annalen (156, 491), dass es für die obwaltende Frage entscheidend wäre, wenn man das Instrument in das vollkommenere Vacuum von Geissler, Andrews und Gassiot versetzen könne. „In diesem Vacuum dürfte das Instrument nicht in Rotation kommen und wird es sicher auch nicht.“ Diese Prophezeihung ist natürlich nicht eingetroffen, und dies ist weniger zu verwundern, als dass Poggendorff sie überhaupt gewagt hat, da er ein von Geissler angefertigtes und mit dessen „vollkommenerem“ Vacuum versehenes Instrument in Händen hatte, wie er selbst auf S. 489 berichtet.

Bonn. Prof. Dr. Mohr.

II. Ueber die Theilbarkeit der dekadischen Zahlen.

Jede dekadische Zahl lässt sich in der Form darstellen:

$$A = a.10 + a_0,$$

wenn a_0 die Ziffer an der Stelle der Einer, und a die aus den anderen Ziffern in der gegebenen Aufeinanderfolge gebildete Zahl bedeutet. Ist nun n irgend eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl, in Bezug welcher ein Kennzeichen der Theilbarkeit von A gesucht werden soll, so kann man setzen:

$$1)\qquad \frac{A}{n} = \frac{1}{m}\left(\frac{10ma + ma_0}{n}\right).$$

Nach den für n gemachten Voraussetzungen kann m stets so gewählt werden, dass $10m$ bei der Division durch n den Rest $n-1$ lässt, dass also

$$a.10m:n = qa + \frac{(n-1)a}{n} \quad \text{oder} \quad 10ma:n = (q+1)a - \frac{a}{n}$$

wird, wodurch der Ausdruck für $\frac{A}{n}$ in den folgenden übergeht:

$$2)\qquad \frac{A}{n} = \frac{1}{m}\left[(q+1)a - \frac{a - ma_0}{n}\right].$$

Hieraus folgt, dass $A:n$ eine ganze Zahl, also A durch n theilbar ist, wenn $\frac{a - ma_0}{n}$ eine ganze Zahl darstellt.

Setzt man in dieser Gleichung 2) beispielsweise $m = 9$, so ergiebt sich ein Kennzeichen der Theilbarkeit für 7 und 13, denn es ist

$$\frac{A}{7} = \tfrac{1}{9}\left[\frac{90a + 9a_0}{7}\right] = \tfrac{1}{9}\left[13a - \frac{a - 9a_0}{7}\right]$$

und

$$\frac{A}{13} = \tfrac{1}{9}\left[\frac{90a + 9a_0}{13}\right] = \tfrac{1}{9}\left[7a - \frac{a - 9a_0}{13}\right],$$

d. h.:

> Eine Zahl ist durch 7 und 13 theilbar, wenn die aus allen Ziffern, mit Ausschluss der an der Stelle der Einer befindlichen, gebildete Zahl, vermindert um die neunfache Ziffer an der Einerstelle, durch 7 und 13 theilbar ist.

Für $n = 17$ hat man $m = 5$ zu setzen; für $n = 19$ ist $m = 17$, für $n = 23$ ist $m = 16$, für $n = 29$ ist $m = 26$, für $n = 31$ ist $m = 3$ etc.*

---

* Für 7 giebt Herr Henrici in seinem „Lehrbuch für den Rechenunterricht" an: „Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die doppelte letzte Ziffer von den vorhergehenden Ziffern als Zahl abgezählt einen Rest ergiebt, der durch 7 theilbar ist." — Dies folgt aus Gleichung 2), wenn darin $m = 2$ gesetzt wird.

Dieses Kennzeichen kann selbstverständlich wieder auf die erhaltene Differenz, und zwar so oft angewendet werden, bis man die möglichst kleinste Zahl erhält.

Es kann aber in der Gleichung 1) die Grösse m auch stets so gewählt werden, dass $10m$ bei der Division durch n den Rest 1 lässt, dass also $10m'a:n=pa+\frac{a}{n}$ wird, wodurch die Gleichung 1) in folgende übergeht:

$$3)\qquad \frac{A}{n}=\frac{1}{m'}\left[pa+\frac{a+m'a_0}{n}\right].$$

Aus dieser ergiebt sich, dass A durch n theilbar ist, wenn $\frac{a+m'a_0}{n}$ eine ganze Zahl darstellt. Darnach hat man, wenn $m'=5$ genommen wird, für $n=7$:

Eine Zahl ist durch 7 theilbar, wenn die aus allen Ziffern, mit Ausschluss der an der Stelle der Einer befindlichen, gebildete Zahl, vermehrt um die fünffache Ziffer an der Einerstelle, durch 7 theilbar ist.

Für $n=13$ ist $m=4$ zu setzen etc.

Eine weitere Verallgemeinerung dieser Methode für die Aufsuchung eines Kennzeichens der Theilbarkeit ergiebt sich, wenn man A in der Form schreibt:

$$A=A'10^\mu+A_0,$$

wobei A_0 die aus den μ letzten, und A' die aus den übrigen Ziffern gebildete Zahl bedeutet. So ergiebt sich beispielsweise für $\mu=3$

$$\frac{A}{7}=\frac{A'.10^3+A_0}{7}=143A'-\frac{A'-A_0}{7} \text{ und } \frac{A}{13}=\frac{A'.10^3+A_0}{13}=77A'-\frac{A'-A_0}{13},$$

welche zwei Gleichungen somit als Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7 und 13 ergeben:

Eine Zahl ist durch 7 und 13 theilbar, wenn die Differenz zwischen der Zahl, welche aus allen Ziffern mit Ausschluss der drei letzten gebildet ist, und jener aus diesen drei letzten Ziffern, durch 7 und 13 theilbar ist.

Dieses Kennzeichen führt auf die bekannte Theilbarkeitsregel für 7 und 13; denn zerlegt man A' wieder in $A''10^3+A_1$ (wo A'' und A_1 in Bezug auf A' dasselbe bedeuten, wie vorhin A' und A_0 in Bezug auf A), so erhält man

$$\frac{A'-A_0}{7}=\frac{A''10^3+A_1-A_0}{7}=143A''-\frac{A''-A_1+A_0}{7},$$

also

$$\frac{A}{7}=\alpha+\frac{A''-A_1+A_0}{7},$$

wenn $143(A'-A'')$ kurz mit α bezeichnet wird; setzt man diese Zerlegung fort, so erhält man schliesslich für $A:7$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{A}{7}=\alpha'\pm\frac{A_0-A_1+A_2-A_3+\cdots}{7}=\alpha'\pm\frac{(A_0+A_2+\ldots)-(A_1+A_3+\ldots)}{7}$$

und ebenso für 13; also die bekannten Theilbarkeitsregeln für 7 und 13.

Diese hier angedeutete fortgesetzte Zerlegung bei Gleichung 3) in Anwendung gebracht, liefert für $n=3$ oder 9 (wobei $m=1$ zu setzen ist) die bekannte Theilbarkeitsregel (mit der Ziffersumme) für diese beiden Zahlen; ebenso Gleichung 2) die von 11.

Es werde nun vorausgesetzt, A sei nicht durch n theilbar, also auch $a-ma_0$ nicht durch n, so entsteht die Frage: Wie hängen die beiden bei $A:n$ und $(a-ma_0):n$ erhaltenen Reste zusammen?

Zu diesem Zwecke stelle man die aus A abgeleitete Zahl $a-ma_0$, welche fortan mit B bezeichnet werden soll, in folgender Form dar:

$$B=\frac{A-a_0}{10}-ma_0 \text{ oder } B=\frac{A-(10m+1)a_0}{10},$$

woraus

$$\frac{10B}{n}=\frac{A-(10m+1)a_0}{n}$$

folgt; da aber nach dem Obigen

$$10m:n=q+\frac{n-1}{n}, \text{ also } 10m+1=n(q+1),$$

somit $\frac{(10m+1)a_0}{n}$ gleich der ganzen Zahl $(q+1)a_0$ ist, so ergiebt sich für $\frac{10B}{n}$ der Ausdruck

$$\frac{10B}{n}=\frac{A}{n}-(q+1)a_0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der bei der Division von $10B$ durch n verbleibende Rest derselbe, wie der bei $A:n$ erhaltene ist; bezeichnet man daher diesen mit R_0 und den bei $B:n$ erscheinenden mit R_1, so besteht (wenn g eine ganze Zahl bedeutet) zwischen R_1 und R_0 die Beziehung

$$4)\qquad \frac{10R_1}{n}=g+\frac{R_0}{n} \text{ oder } R_1=\frac{R_0+ng}{10},$$

in welcher Gleichung für g jene der Zahlen 0, 1, 2, .. 9 zu setzen ist, welche R_0+ng durch 10 theilbar macht, da ja sowohl R_0 als R_1 ganze Zahlen sind; dass g aber nicht grösser als 9 werden darf, folgt daraus, dass $R_1<n$ sein muss, und da sodann stets nur eine dieser einziffrigen Zahlen für g gesetzt, der Gleichung 4) genügt, so ist durch diese R_1 durch R_0, oder umgekehrt eindeutig bestimmt.

Geht man von der Gleichung 3) aus, so ergiebt sich für die aus A abgeleitete Zahl:

$$B' = \frac{A - a_0}{10} + m' a_0 \text{ oder } B' = \frac{A + (10m' - 1) a_0}{10}.$$

Da nun aber nach dem Vorigen $10m' : n = p + \frac{1}{n}$, also $10m' - 1 = np$ ist, so wird

$$\frac{10B'}{n} = \frac{A}{n} + p a_0.$$

Durch diese Gleichung wird ersichtlich, dass der bei der Division von $10B'$ durch n verbleibende Rest derselbe ist, wie jener bei $A : n$, woraus, wenn der bei $B : n$ erhaltene mit R'_1 bezeichnet wird, folgt:

$$R'_1 = \frac{R_0 + ng'}{10},$$

in welcher Gleichung g' abermals eine der Zahlen 0, 1, 2, ... 9 ist, so, dass $R_0 + ng'$ durch 10 theilbar wird. Aus den bei 4) gemachten Bemerkungen ergiebt sich $g' = g$, also auch $R'_1 = R_1$, d. h.:

Die nach Gleichung 2) und 3) abgeleiteten Zahlen lassen bei der Division durch n dieselben Reste.

Somit gilt die Gleichung 4) für beide Fälle; dieselbe giebt R_1 nur von R_0 und n (somit auch von m und m') abhängig an, jedoch unabhängig von den Ziffern der gegebenen Zahl, welche also sowohl ihrem Zahlenwerthe, als auch ihrer Anzahl nach beliebig genommen werden können, wenn nur diese Zahl bei der Division durch n den Rest R_0 lässt. Es kann also diese Gleichung unabhängig von der gegebenen Zahl einer weiteren Betrachtung unterzogen werden.

Wegen $R_1 < n$ ist die Anzahl der Werthe, welche die Gleichung 4) nach einander liefert, wenn man in derselben für R_0 stets den eben erhaltenen Werth von R_1 setzt, eine begrenzte, und höchstens gleich $n - 1$; denn sobald sich irgend einer der Reste dieser Reihe wiederholt, müssen auch alle folgenden in der früher dagewesenen Ordnung wiederkehren. Es ergiebt sich nun diesbezüglich:

Die Anzahl der von einander verschiedenen Reste, welche man bei der Division der aus A nach einander nach Gleichung 2) oder 3) abgeleiteten Zahlen durch n erhält, ist stets gleich der Anzahl der periodischen Ziffern, welche der Bruch $\frac{1}{n}$, in einen Decimalbruch verwandelt, liefert.

Denn die der Ordnung nach erscheinenden Reste der Reihe sind ($g_0, g_1, \ldots$ für g gesetzt):

$$R_0, \quad R_1 = \frac{R_0 + ng_0}{10}, \quad R_2 = \frac{R_1 + ng_1}{10} = \frac{R_0 + ng_0 + ng_1 10}{10^2}, \ldots$$

$$\ldots R_m = \frac{R_0 + n(g_0 + g_1 10 + \ldots + g_{m-1} 10^{m-1})}{10^m}.$$

Ist nun R_m der erste wiederkehrende Rest, also $R_m = R_0$, so hat man die Gleichung

$$5)\qquad \frac{R_0(10^m - 1)}{n} = g_0 + g_1 10 + g_2 10^2 + \ldots + g_{m-1} 10^{m-1}.$$

Da nun bekanntlich $\frac{10^m - 1}{n}$ die Anzahl der periodischen Ziffern von $\frac{1}{n}$ giebt, so ist obiger Satz bewiesen; zugleich sieht man:

Die Werthe, welche in die Gleichung 4) für g nacheinander zu setzen sind, wenn man aus derselben die aufeinander folgenden Reste ableiten will, sind die Ziffern der Periode, welche $\frac{R_0}{n}$, in einen Decimalbruch verwandelt, liefert.

Die Gleichung 4) bietet also ein Mittel dar, die Zifferanzahl der Periode, sowie die einzelnen Ziffern derselben zu erhalten, welche $\frac{R_0}{n}$ in einen Decimalbruch verwandelt, geben muss. Aufgabe hierbei ist, jene zwischen 0 und 9 liegenden ganzzahligen Werthe für g zu finden, welche der Gleichung 4) genügen, wenn R_0 und R_1 ganze, zwischen 1 und $n-1$ liegende Zahlen sind.

So ergeben sich z. B.

	die einzelnen Reste:	die zugehörigen g:
für $n = 7$	1 5 4 6 2 3,	7 5 8 2 4 1;
„ $n = 13$	1 4 3 12 9 10,	3 2 9 6 7 0

etc.

Bemerkenswerth ist ferner folgende Eigenschaft der Reste R_0, R_1, R_2, ... R_{m-1} einer Reihe:

Die Summe der von einander verschiedenen Reste einer Reihe ist stets ein Vielfaches des Theilers n.

Denn da $R_m = R_0$ ist, so hat man

$$\sum_0^{m-1} R = R_1 + R_2 + \ldots + R_m = \frac{R_0 + n g_0}{10} + \frac{R_1 + n g_1}{10} + \ldots + \frac{R_{m-1} + n g_{m-1}}{10}$$

oder

$$6)\qquad \sum_0^{m-1} R = \frac{\sum_0^{m-1} R}{10} + \frac{n \sum_0^{m-1} g}{10}, \text{ also } \frac{\sum_0^{m-1} R}{n} = \frac{\sum_0^{m-1} g}{9}.$$

Da aber aus Gleichung 5) folgt

$$\frac{n\,(g_0 + g_1 10 + \ldots + g_{m-1} 10^{m-1})}{10_m - 1} = R_0$$

und R_0 eine ganze Zahl ist, so muss (n nicht 3 oder 9 vorausgesetzt, für welche die Periode einziffrig ist) $\sum\limits_0^{m-1} g_i 10^i$ durch 9 theilbar sein, also auch $\sum\limits_0^{m-1} g$; somit ist $\dfrac{\sum\limits_0^{m-1} g}{9}$ eine ganze Zahl, folglich wegen Gleichung 6) auch $\dfrac{\sum\limits_0^{m-1} R}{n}$, daher $\sum\limits_0^{m-1} R$ ein Vielfaches von n.

Auch der folgende Satz verdient erwähnt zu werden:

Ergänzen sich irgend zwei Reste einer Reihe zu n (zum Theiler), ist also etwa $R_0 + R_p = n$, so findet dies auch für $R_1 + R_{p+1}$, $R_2 + R_{p+2}$, ... statt.

Denn aus den Gleichungen $R_1 = \dfrac{R_0 + n g_0}{10}$ und $R_{p+1} = \dfrac{R_p + n g_p}{10}$ folgt:

$$\frac{10(R_1 + R_{p+1})}{n} = g_0 + g_p + \frac{R_0 + R_p}{n}.$$

Wegen $R_0 + R_p = n$ reducirt sich die rechte Seite auf die ganze Zahl $g_0 + g_p + 1$, daher muss auch die linke Seite der Gleichung ganzzahlig sein, weshalb (da die Reste kleiner als n sein müssen, und 10 prim gegen n ist) auch $R_1 + R_{p+1} = n$ sein muss, wodurch obiger Satz bewiesen ist. Weil aber jetzt die linke Seite der in Rede stehenden Gleichung den Werth 10 erhält, so muss $g_0 + g_p = 9$ sein, was somit den Satz liefert:

Wenn sich je zwei Reste einer Reihe zu n ergänzen, so ergänzen sich die zugehörigen Werthe von g stets zu 9.

Aus dem obigen Satze folgt auch noch, dass zwei Reste einer Reihe sich nur dann zu n ergänzen können, wenn die Anzahl aller verschiedenen Reste eine gerade ist. Da aber dann diese m Reste $\frac{m}{2}$ Paare bilden und jedes Paar zur Summe n giebt, so muss die Summe aller Reste $\frac{m}{2} \cdot n$ sein; ebenso muss dann auch wegen der analogen Eigenschaft der Werthe g in Bezug auf 9 die Summe aller g sein: $\frac{m}{2} \cdot 9$.

Wien, 27. Februar 1876.

Johann Hann,
Prof. a. d. Handelsakademie.

III. Noch einige Bemerkungen über Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.

Herr Lüroth hat die Freundlichkeit gehabt, meine offene Frage nach dem Fehler in Bertrand's Beweis (diese Zeitschrift Bd. XX, S. 454) in einer verständlichen Weise zu beantworten (diese Zeitschrift Bd. XXI, S. 294).

Obwohl ich sachlich gegen Das, was Herr Lüroth vorbringt, wenig einzuwenden habe, giebt mir seine Darstellung doch Anlass zu einigen Bemerkungen, die indessen nicht eigentlich als Entgegnungen aufgefasst werden wollen.

In erster Linie habe ich einen Irrthum zu berichtigen. Herr Lüroth sagt zur Einleitung, ich habe „zum Beweise der Parallelentheorie die Bertrand'sche Methode benützt, in welcher der Winkel definirt ist als der von den beiden Schenkeln begrenzte Ausschnitt der Ebene." Dies ist ein zweifacher Irrthum, wie schon ein oberflächlicher Blick in meine Arbeit Jedem zeigen muss, der sich dafür interessirt. Meine Definition des Winkels ist ganz unabhängig von dem Begriffe der Ebene; vielmehr definire ich diese als das Erzeugniss eines um einen Schenkel gedrehten rechten Winkels. Ebenso unabhängig ist meine Parallelentheorie von dem Bertrand'schen Beweise, den Herr Lüroth widerlegt. Denn dieser Beweis ist mir erst durch diese Widerlegung bekannt geworden. Ich hatte bisher den von Herrn Baltzer in der ersten Auflage seiner Elemente (II, S. 12) gegebenen Beweis auf Grund der demselben beigefügten Anmerkung für den Bertrand'schen gehalten, und meine Bemerkung, dass gegen meinen Beweis derselbe Einwand erhoben werden könne, wie gegen den Bertrand'schen, bezieht sich nur auf den von Herrn Baltzer gegebenen Beweis und meine Frage ist nur veranlasst durch die sonderbare Bemerkung, mit welcher Herr Baltzer in der 3. Auflage die von ihm früher gegebene Darstellung als eine mangelhafte verwirft und zugleich als die Bertrand'sche bezeichnet.

Mir selbst ist zur Zeit das Werk von Bertrand nicht zugänglich und kann ich darum nicht selbst mich überzeugen, ob Bertrand seiner Theorie zwei wesentlich verschiedene Unterlagen gegeben hat, die von Herrn Baltzer reproducirte und die von Herrn Lüroth widerlegte, oder ob Einer der Herren diesem Geometer einen Beweis zuschiebt, den er gar nicht gegeben hat. Soviel aber kann ich sagen, dass mein Beweis mit demjenigen, den Herr Lüroth als den Bertrand'schen widerlegt und den ich selbst noch aus anderen Gründen verwerfen muss, ganz und gar Nichts gemein hat.

Um nun zunächst zu zeigen, dass der Beweis, den ich bisher für den Bertrand'schen gehalten habe, von Herrn Lüroth's Widerlegung nicht berührt wird, genügt es, denselben einfach so hierher zu setzen, wie ich ihn in meiner Quelle (Baltzer, Elemente II, S. 12 der 1. Aufl.) gefunden habe:

„6. I. Der von parallelen Geraden eingeschlossene Streifen (bande) hat zur Ebene das Verhältniss 0!*

Beweis. Macht man auf der Geraden KL die Strecken MN, NO, OP, ... einander gleich, und zieht durch die Punkte M, N, O, P, ... die Geraden AB, CD, EF, GH, ..., welche mit KL gleiche oder um 180^0 sich unterscheidende Winkel bilden, so sind die Geraden AB, CD, EF, GH, ... parallel (5), und die zwischen AB und CD, CD und EF, EF und GH enthaltenen Streifen congruent. Von einer endlichen Anzahl Streifen, wie der zwischen AB und CD enthaltene, wird aber die Ebene ebenso wenig ausgefüllt, als von derselben Anzahl Strecken wie MN die Gerade, auf der die Strecken liegen. Daher übersteigt das Verhältniss der Ebene zu dem Streifen jede gegebene Zahl, und das Verhältniss des Streifens zur Ebene verschwindet."

„II. Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie auch die andere.

Beweis. AB und CD sind parallel, AB wird von EF in G geschnitten. Der Winkel FGB hat zur Ebene ein endliches Verhältniss (3) und kann deshalb nicht ganz in dem zwischen AB und CD liegenden Streifen enthalten sein, dessen Verhältniss zur Ebene verschwindet (I). Also wird auch CD von EF geschnitten."

Damit ist die Sache eigentlich erschöpft, denn nun folgen die übrigen Sätze ohne Herbeiziehung des Unendlichen.

Diese Darstellung ist offenbar ganz unabhängig von dem Schlusse $a < b$, weil $na < nb$, und also auch unberührt von Herrn Lüroth's Widerlegung, welche sich lediglich auf die Berechtigung dieses Schlusses bezieht. Sie beruht aber auf demselben Grundgedanken, auf den sich mein etwas einfacherer Beweis stützt, dass nämlich ein Theil der Ebene, welcher zu dieser ein endliches Verhältniss habe, nicht in einem verhältnissmässig kleineren Theile derselben ganz liegen könne.

---

* Hierzu bemerkt Herr Baltzer in einer Anmerkung: „Dieser Satz ist zur Grundlage der Parallelentheorie von Bertrand gemacht worden", und als Quelle wird citirt Bertrand's *Développement nouveau de la partie élém. des Mathém., Genève 1778, II,* S. 19.

Wenn Herr Lüroth nicht blos den letzten Absatz auf S. 454 des citirten Bandes, worin sich mein Aufsatz befindet, gelesen, sondern etwas weiter oben begonnen hätte, so hätte ihm nicht entgehen können, dass er eine ganz andere Frage beantwortet hat, als diejenige, welche ich gestellt habe, und dass mithin die Beantwortung meiner Frage noch aussteht.

Der Aufsatz des Herrn Lüroth giebt mir aber noch zu einer andern Bemerkung Anlass. Der angefochtene Beweis für die Behauptung, dass ein Winkel nicht in einem Streifen liegen könne, stützt sich auf eine Definition, welche Herr Lüroth als bekannt voraussetzt, ohne die aber das von Herrn Lüroth gegebene geometrische Beispiel für die Unzulässigkeit des Bertrand'schen Schlusses nicht blos völlig unverständlich ist, sondern zu Consequenzen führen würde, die allen Grössenbegriffen widersprechen.

Diese Definition kann etwa so ausgesprochen werden: „Werden in den Endpunkten der Strecke BC nach einer Seite derselben die Senkrechten BA, CD auf BC errichtet, so ist der durch diese und BC begrenzte Streifen kleiner als der Winkel EFG, wenn er ganz in dessen Fläche fällt, sobald BC mit einem Schenkel und einer seiner Scheitel B oder C mit dem Scheitel F des Winkels zur Deckung gebracht wird." Würde aber ein Streifen bei anderer Lage ganz in der Fläche eines Winkels liegen, so ist die Frage, ob er grösser oder kleiner als derselbe, so lange offen gelassen, bis entschieden, ob ein ihm congruenter bei jener Lage in der Winkelfläche liegt oder nicht.

Es wird also stillschweigend die Möglichkeit zugelassen, dass, wenn auch der Streifen kleiner ist wie der Winkel, doch dieser bei passender Verschiebung ganz in dessen Fläche liegen könne.

Es fragt sich nun, ob eine solche Definition überhaupt wissenschaftlich berechtigt ist. Nach meiner Meinung darf, wenn jene Möglichkeit zugegeben wird, der Ausdruck grösser oder kleiner für Winkel und Streifen gar nicht gebraucht werden, noch weniger aber irgend eine für Grössen sonst zulässige Schlussfolgerung aus einem solchen grösser oder kleiner gezogen werden. Denn $A > B$ heisst nur: „B ist gleich einem Theile von A", und setzt voraus, dass das Ganze nicht dem Theile gleich sein könne. Mache ich andere Voraussetzungen, so habe ich es mit einem andern Begriffe zu thun, und dann ist nicht blos der Schluss: $a < b$, weil $na < nb$, nicht berechtigt, sondern überhaupt gar kein Schluss, zu dem Grössenbeziehungen berechtigen. Der Fehler Bertrand's liegt demnach weniger in der Form des Schlusses, als in der Definition.

Die Frage, ob überhaupt Grössenbeziehungen bei unendlich ausgedehnten Dingen, wie Streifen und Winkelflächen möglich sind, hängt nach meiner Meinung nur davon ab, ob eine Definition des grösser und gleich möglich ist, die auf sie anwendbar, ohne mit der üblichen Definition im Widerspruche zu stehen. Dies gilt allerdings nicht von der Definition: „A ist grösser als B, wenn B einem Theile von A congruent ist.“ Denn zieht man durch die Punkte A, C der Geraden AE die Parallelen AB, CD, so ist die Winkelfläche DCE nur ein Theil der Winkelfläche BAE, und doch derselben congruent. Definiren wir aber: „A ist grösser als B, wenn das Verhältniss $\frac{A}{B} > 1$, und A ist gleich B, wenn $\frac{A}{B} = 1$ ist“, so ist die ursprüngliche Definition aufrecht erhalten und doch der Widerspruch mit jener Thatsache aufgehoben, da $\frac{BAE}{DCE} = \frac{BACD}{DCE} + \frac{DCE}{DCE} = 1$, weil $BACD$ in DCE unendlich oft aufgetragen werden kann, also $\frac{BACD}{DCE} = 0$ ist.

Ob aber darum diese Definition auf Winkelflächen, Streifen u. dergl. anwendbar ist, hängt immer noch von der Frage ab: „Kann A ganz in B liegen, wenn bei irgend einer Lage $\frac{A}{B} > 1$ ist?“ Für mein Anschauungs- und Denkvermögen ist diese Frage unbedingt mit Nein zu beantworten. Doch das kann ein subjectiver Mangel meines Anschauungs- oder Denkvermögens sein und ich möchte mit diesem Nein nicht das kategorische „Mangelhaft“ des Herrn Baltzer ebenso kategorisch widerlegen. Denn rein „formal“ oder „logisch“ kann ja wohl die Berechtigung zu diesem „Nein“ nicht nachgewiesen werden. Die Ueberzeugung von der Unmöglichkeit dieses logischen Nachweises ist der Hauptgrund, warum ich die Bertrand'sche Definition des Winkels nicht blos nicht adoptirt, sondern auch öffentlich als unwissenschaftlich bekämpft habe. Denn es scheint mir unwissenschaftlich zu sein, dass man von einem Dinge sagt, es sei grösser als ein anderes, und doch zugleich die Möglichkeit zulässt, dass es ganz darin liegen könne.

So lange aber nicht wirklich ein A nachgewiesen worden, das thatsächlich ganz in einem B liegen kann, obgleich bei irgend einer Lage $\frac{A}{B} > 1$ ist, so bleibt doch die Wahrscheinlichkeit, dass dies unmöglich, mindestens so gross, als z. B. die, dass alle Materie dem Newton'schen Gesetze unterworfen ist, und man wird wohl so lange berechtigt sein, diese Unmöglichkeit als eine allgemeine Eigenschaft der räumlichen Gebilde anzunehmen, bis sie durch eine Thatsache widerlegt ist, und meine ursprüngliche Frage war nur die Frage nach einer solchen Thatsache.

Das geometrische Beispiel des Herrn Lüroth dürfte vielleicht geeignet sein, in Bezug auf diese Frage einer genaueren Prüfung unterzogen zu werden. Denn der Streifen $RSTV$ liegt ganz in dem Sector RMQ, welcher dem Sector PMR congruent ist; dieser ist aber nach der Bertrand'schen Definition kleiner als der Streifen $PMSR$, also auch kleiner als der ihm congruente $RSTV$. Es fragt sich also nur, ob nicht alle vier Gebilde als gleich anzusehen sind, wenn man definirt: $A=B$, wenn $\frac{A}{B}=1$ ist.

Mannheim, im October 1876. J. C. Becker

Berichtigung.

Im XXI. Jahrgange Heft 6, S. 452 Z. 14 v. o. ist zu lesen: „Luftwellen von endlicher Schwingungsweite schon" etc.

IV.

Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit, welche der Anziehung des ellipsoidischen Kernes, sowie der ihrer eigenen Masse unterworfen ist.

Von

J. Hagen, *S. J.*

In dem „Jahresberichte über die höhere Schule in Opladen für das Schuljahr 1872—73" ist vom dortigen Rector Herrn Dr. A. Giesen eine beachtenswerthe Abhandlung veröffentlicht worden unter dem Titel: „Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit." Der Verfasser kleidet das zu behandelnde Problem in folgende Worte:

„Ueber einem beliebigen festen Körper ist eine homogene Flüssigkeit ausgebreitet, welche nur der Anziehung des gedachten festen Körpers, sowie der Gravitation ihrer Theilchen gegen einander unterworfen ist. Bei einer nach den Gesetzen der Hydrostatik zu bestimmenden Gestalt ihrer Oberfläche wird dann die Flüssigkeit sich im Gleichgewichte befinden und es werde noch vorausgesetzt, dass in diesem Gleichgewichtszustande kein Theil der Oberfläche des festen Körpers von der Flüssigkeit unbedeckt bleibe. Es fragt sich, wann dieses Gleichgewicht ein stabiles sei."

Die Lösung des Problems zerfällt in drei Theile: Im ersten Theile wird eine Gleichung aufgestellt, welche bei beliebiger Gestalt des festen Kernes das allgemeine Kriterium der Stabilität bildet, welche aber in dieser Allgemeinheit einer eingehenden Discussion nicht zugänglich ist. Im zweiten Theile setzt der Verfasser als festen Kern eine homogene Kugel, im dritten endlich ein homogenes Rotationsellipsoid mit kleinen Excentricitäten voraus und gelangt schliesslich zu folgendem interessanten Resultate:

„Die Oberfläche der Flüssigkeit nimmt im Gleichgewichtszustande je nach der Gestalt des festen Körpers wiederum die Gestalt einer Kugel oder (wenigstens in erster Annäherung) eines dem festen Körper concentrischen und coaxialen Rotationsellipsoids von geringer Excentricität an. In beiden Fällen ist das Gleichgewicht sicher ein stabiles, wenn die Dichtigkeit des festen Körpers grösser ist als diejenige der denselben bedeckenden Flüssigkeit; wenn dagegen die Dichtigkeit der Flüssigkeit diejenige des festen Körpers übertrifft, so ist das Gleichgewicht im Allgemeinen als ein labiles zu bezeichnen. Wenn endlich die Dichtigkeit des festen Körpers derjenigen der Flüssigkeit gerade gleichkommt oder wenn gar kein fester Körper vorhanden ist, man also eine blosse isolirte Flüssigkeitsmasse hat, so ist das Gleichgewicht der Flüssigkeit, deren Oberfläche im Gleichgewichtszustande in diesen beiden Fällen sphärisch wird, auch noch ein stabiles."

In der vorliegenden Abhandlung soll nun dasselbe Problem angewendet werden auf ein dreiaxiges Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten. Ich werde mich hierbei sowohl in der Bezeichnung, als auch in der Reihenfolge der Entwickelungen möglichst genau an die Abhandlung Giesen's anschliessen, verweise aber, was die Ableitung der für das allgemeine Kriterium der Stabilität aufzustellenden Gleichung betrifft, auf den angeführten „Jahresbericht".

---

§ 1. Als allgemeines Kriterium für die Stabilität des Gleichgewichts einer homogenen über einen beliebigen Körper ausgebreiteten Flüssigkeit stellt Giesen die Gleichung auf

$$1)\qquad W - W_0 = \tfrac{1}{2}\varrho \int \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) N^2 ds + \tfrac{1}{2}\varrho^2 \int N\,ds \int \frac{N\,ds}{r}.$$

Hierin bezeichnet W_0 das Potential des ganzen Systems auf sich selbst in seiner Gleichgewichtslage, W hingegen das Potential des Systems auf sich selbst, nachdem die Flüssigkeit durch eine kleine, sonst aber beliebige virtuelle Bewegung aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben worden ist. ϱ bezeichnet die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit, r die gegenseitige Entfernung zweier Punkte des Systems, V das Potential des Systems auf einen beliebigen Punkt des Raumes, n die nach aussen gekehrte Normale der Flüssigkeitsoberfläche in ihrer Gleichgewichtslage, $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$ bezieht sich auf den Fusspunkt der Normale n, endlich bezeichnet N die normale Entfernung des Elements ds der ursprünglichen Flüssigkeitsoberfläche von der neuen Oberfläche, die sie infolge der erwähnten virtuellen Verschiebung angenommen hat, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die neue Oberfläche an der betrachteten Stelle ausserhalb oder innerhalb der ursprünglichen Oberfläche liegt. Die Integrationen erstrecken sich über die ganze Oberfläche der Flüssigkeit in ihrer Gleichgewichtslage.

Die im Allgemeinen willkürliche Function N unterliegt den beiden Bedingungen, erstens, dass sie einen sehr kleinen Werth besitze, zweitens, dass sie die Gleichung erfülle

$$\int N\,ds = 0,$$

wo die Integration sich über die ursprüngliche Flüssigkeitsoberfläche erstreckt.

Ueber die Bedeutung der Gleichung 1) drückt sich Giesen also aus: „Diese Gleichung bestimmt nun die Aenderung des Potentials des Systems auf sich selbst bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung, wie sie durch die willkürliche Function N charakterisirt ist. Wenn daher der Werth von $W - W_0$, welchen sie ergiebt, in einem speciellen Falle für alle zulässigen Annahmen der willkürlichen Function N stets negativ ausfällt, so ist offenbar in diesem Falle das Potential des Systems auf sich selbst in der Gleichgewichtslage ein Maximum und daher das Gleichgewicht stabil. Kann dagegen der Werth von $W - W_0$ für bestimmte Annahmen über N auch positiv werden, so ist das Potential des Systems auf sich selbst in der Gleichgewichtslage weder ein Maximum, noch ein Minimum, und wäre endlich $W - W_0$ für alle zulässigen Annahmen über N positiv, so wäre das Potential des Systems auf sich selbst in der Gleichgewichtslage ein Minimum; in beiden Fällen wäre das Gleichgewicht im Allgemeinen als ein labiles zu bezeichnen."

Das erste Glied der Gleichung 1) ist, wie Giesen bemerkt, unter allen Umständen negativ, wogegen das Zeichen des zweiten Gliedes im Allgemeinen sich nicht bestimmen lässt. Giesen betrachtet N als die Dichtigkeit einer über der ursprünglichen Flüssigkeitsoberfläche ausgebreiteten Masse und $\int \frac{N\,ds}{r}$ als ihr Potential, was ihm den Vortheil bietet, die für letzteres schon fertig vorliegende Reihenentwickelung nach Kugelfunctionen sofort in Anwendung bringen zu können. Eine entsprechende Reihenentwickelung für N leitet er sodann ab aus der bekannten Formel

$$-4\pi N = \left(\frac{\partial U_a}{\partial n}\right) - \left(\frac{\partial U_i}{\partial n}\right),$$

wenn U_a das Potential der Massenvertheilung für einen äussern, U_i das für einen innern Punkt bedeutet.

Ich werde im Folgenden denselben Weg einschlagen, mich aber dabei nicht der gewöhnlichen Kugelfunctionen, sondern der Lamé'schen Functionen bedienen.

§ 2. Was nun vor Allem die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche in ihrer Gleichgewichtslage betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass die Oberfläche einer homogenen, über einem dreiaxigen Ellipsoid von kleinen

Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung wieder als ein dreiaxiges Ellipsoid von kleinen Excentricitäten betrachtet werden kann.

Giesen stellt als angenäherten Ausdruck für das Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoids in einem äussern Punkte die Formel auf:

$$V_a = M \cdot \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \frac{e_1^2 + e_2^2}{r^3} + \frac{3}{10} \frac{e_1^2 x^2 + e_2^2 y^2}{r^5} \right\}.$$

wenn M die Masse des Ellipsoids bedeutet und die Gleichung der Oberfläche lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ferner

$$e_1^2 = a^2 - c^2, \quad e_2^2 = b^2 - c^2$$

ist. In dieser Formel sind erst jene Glieder vernachlässigt worden, welche die vierten und höheren Potenzen der linearen Excentricitäten enthalten. Da aber im Folgenden mehrere Formeln aus dem „Handbuche der Kugelfunctionen" von Heine zur Verwendung kommen werden, ist es bequemer, als Gleichung des Ellipsoids die folgende zu nehmen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

und, an Stelle der Grössen e_1^2, e_2^2, x bei Giesen, hier zu setzen $-c^2$, $-b^2$, z. Hiernach ergiebt sich für das Potential des Ellipsoids in einem äussern Punkte die Formel

$$2) \qquad V_a = M \cdot \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{10} \frac{b^2 + c^2}{r^3} - \frac{3}{10} \frac{b^2 y^2 + c^2 z^2}{r^5} \right\}$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte des Ellipsoids bezeichnet.

Der Grad der Annäherung soll hier, wie bei Giesen, der sein, dass nur jene Glieder beibehalten werden, welche von derselben Ordnung sind, wie die Quadrate der linearen Excentricitäten, während alle Glieder der höheren Ordnung vernachlässigt werden.

Zunächst soll die Frage beantwortet werden, unter welchen Bedingungen eine über dem Ellipsoid ausgebreitete homogene Flüssigkeit wieder als ein Ellipsoid von kleiner Excentricität betrachtet werden kann, und dann soll mit Hilfe der gefundenen Bedingungen die Formel 2) umgeformt werden. Die Flüssigkeitsoberfläche vorläufig als ein dem festen Kerne coaxiales Ellipsoid vorausgesetzt, seien

$$\lambda_0^2, \; \lambda_0^2 - b_0^2, \; \lambda_0^2 - c_0^2 \text{ und } \lambda^2, \; \lambda^2 - b^2, \; \lambda^2 - c^2$$

bezüglich die Quadrate der Halbaxen des Kernes und der Flüssigkeitsoberfläche. Die Dichtigkeiten des Kernes und der Flüssigkeit seien ϱ_0 und ϱ, die Volumina beider K und F. Das äussere Potential V_a des ganzen Systems ist dann die Summe der Potentiale zweier Ellipsoide von den Halbaxen λ, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ und der Dichtigkeit ϱ, resp. λ_0, $\sqrt{\lambda_0^2-b_0^2}$, $\sqrt{\lambda_0^2-c_0^2}$ und $(\varrho_0-\varrho)$. Es wird also

$$M = (F+K)\varrho + K(\varrho_0-\varrho),$$

folglich

$$V_a = \frac{(F+K)\varrho + K(\varrho_0-\varrho)}{r} + \tfrac{1}{10}\frac{(F+K)\varrho(b^2+c^2)+K(\varrho_0-\varrho)(b_0^2+c_0^2)}{r^3}$$
$$-\tfrac{3}{10}\frac{(F+K)\varrho(b^2y^2+c^2z^2)+K(\varrho_0-\varrho)(b_0^2y^2+c_0^2z^2)}{r^5}.$$

Für Punkte der Flüssigkeitsoberfläche ist näherungsweise

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{b^2}{\lambda^2}\right)+\frac{z^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{c^2}{\lambda^2}\right)=1,$$

also

$$\frac{r^2}{\lambda^2}+\frac{b^2y^2+c^2z^2}{\lambda^4}=1$$

oder

$$3)\qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\tfrac{1}{2}\,\frac{b^2y^2+c^2z^2}{\lambda^4}\right).$$

Setzt man nun diesen Ausdruck in das erste Glied der Formel für V_a, während in den übrigen beiden r einfach durch λ zu ersetzen ist, so muss, wenn die Flüssigkeit überhaupt im Gleichgewicht sein soll, das Potential des Systems für alle Punkte der Oberfläche einen constanten Werth haben, was aber nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten von y^2 und z^2 einzeln verschwinden. Dies liefert zwei Bedingungsgleichungen, von denen die erste lautet

$$\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{\lambda^5}[(F+K)\varrho+K(\varrho_0-\varrho)]-\tfrac{3}{10}\frac{1}{\lambda^5}[(F+K)\varrho b^2+K(\varrho_0-\varrho)b_0^2]=0$$

oder kürzer

$$4)\qquad (F+K)\varrho b^2+K(\varrho_0-\varrho)b_0^2=\tfrac{5}{3}(F\varrho+K\varrho_0)\,b^2.$$

Die zweite Bedingungsgleichung erhält man aus dieser, wenn man b^2 und b_0^2 bezüglich durch c^2 und c_0^2 ersetzt. Diese beiden Bedingungen liefern nun für die Excentricitätsquadrate die Werthe

$$b^2=\frac{3}{5+\dfrac{2(F+K)}{K\left(\dfrac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)}}\,b_0^2,\qquad c^2=\frac{3}{5+\dfrac{2(F+K)}{K\left(\dfrac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)}}\,c_0^2,$$

welche immer reell, im Allgemeinen auch klein sind, so dass in der That die vorausgesetzte Gleichgewichtsgestalt der Flüssigkeit eine mögliche ist. Unter gewissen Umständen jedoch können die beiden Nenner verschwinden. Bezeichnet man dieselben vorübergehend mit N und nimmt N als Ordinaten, hingegen $\frac{F}{K}$ als Abscissen und construirt die gerade Linie

$$N = 5 - \frac{2}{1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}} \left(1 + \frac{F}{K}\right)$$

für verschiedene Werthe des Quotienten $\varrho_0 : \varrho$ von Null bis Unendlich, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Behauptungen: So lange $\varrho_0 > \varrho$ ist, haben b^2 und c^2 dasselbe Zeichen wie b_0^2 und c_0^2, d. h. die Flüssigkeitsoberfläche besitzt mit dem Kern gleichartige Krümmung. Für $\varrho_0 = \varrho$ geht die Oberfläche in die Kugel über. Denkt man sich aber die Dichtigkeit der Flüssigkeit über die des festen Kernes hinaus zunehmend, und zwar bis zum $\frac{5}{3}$-fachen derselben, so erhält man für die Flüssigkeitsoberfläche wieder ein Ellipsoid, das aber mit dem Kerne ungleichartige Krümmung besitzt. Wird nun $\varrho > \frac{5}{3}\varrho_0$ und ist das Volumen der Flüssigkeit hinlänglich gross, so wachsen die Excentricitäten in demselben Sinne bis zu einem gewissen Maximum an, das indessen immer noch von derselben Ordnung ist, wie b_0^2 und c_0^2. Denkt man sich aber, während $\varrho > \frac{5}{3}\varrho_0$ ist, den Quotienten $F : K$ vom Werthe $\frac{3}{2}$ an immer mehr abnehmend, so erhält man bei einem gewissen Werthe desselben für die Oberfläche kein Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten mehr. Nimmt endlich das Volumen der Flüssigkeit noch mehr ab, so nimmt letztere die Gestalt eines Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten an, welches nun mit dem Kerne gleichartige Krümmung besitzt. Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die Flüssigkeitsoberfläche für den Fall, dass gar kein fester Kern vorhanden, also $K = 0$ ist, die Gestalt einer Kugel annimmt.

Mittels der beiden Bedingungen 4) lässt sich nun Gleichung 2) folgendermassen schreiben:

$$5) \qquad V_a = (F\varrho + K\varrho_0) \cdot \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{6} \frac{b^2 + c^2}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{b^2 y^2 + c^2 z^2}{r^5} \right\}.$$

§ 3. Es handelt sich jetzt um die Frage, unter welchen Bedingungen die erwähnte Gleichgewichtslage der Flüssigkeit eine stabile sei. Vor Allem sollen für die in Gleichung 1) auftretenden Grössen

$$\int \frac{N\,ds}{r} \text{ und } N$$

Reihenentwickelungen aufgestellt werden, die nach Lamé'schen Functionen fortschreiten.

Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, den bei Ellipsoiden gebräuchlichen Polarcoordinaten λ, θ, ψ und den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν bestehen dann folgende Beziehungen:

$$x = \lambda \cos\theta \qquad = \frac{\lambda\mu\nu}{bc},$$

$$y = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sin\theta\cos\psi = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z=\sqrt{\lambda^2-c^2}\sin\theta\sin\psi=\frac{\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}},$$
$$0<\theta<\pi,\quad 0<\psi<2\pi,$$
$$0<\nu<b<\mu<c<\lambda<\infty.$$

Zur Abkürzung sollen noch die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$p^2=\frac{b^2}{\lambda^2},\quad q^2=\frac{c^2}{\lambda^2},$$

$$\varepsilon=\int_b^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad \zeta=\int_0^\nu\frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

$$\varepsilon_{(\mu=c)}=\omega,\quad \zeta_{(\nu=b)}=\tilde{\omega}.$$

Die Coordinaten, die sich auf einen ausserhalb oder innerhalb der Flüssigkeitsoberfläche gelegenen Punkt beziehen, sollen mit Accenten versehen werden, alle übrigen beziehen sich auf Punkte der Oberfläche selbst.

Bezeichnet nun U_a das Potential einer beliebigen Massenvertheilung auf der Oberfläche eines Ellipsoids in einem ausserhalb, U_i dasselbe in einem innerhalb dieser Oberfläche gelegenen Punkte, so ist (vergl. Heine's Handbuch der Kugelfunctionen):

$$6)\quad \begin{cases} U_a=\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\sum\limits_{s=0}^{s=2n} k_s^n\,\mathrm{E}_s^n(\mu')\,\mathrm{E}_s^n(\nu')\dfrac{\mathrm{F}_s^n(\lambda')}{\mathrm{F}_s^n(\lambda)},\\ U_i=\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\sum\limits_{s=0}^{s=2n} k_s^n\,\mathrm{E}_s^n(\mu')\,\mathrm{E}_s^n(\nu')\dfrac{\mathrm{E}_s^n(\lambda')}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)},\end{cases}$$

wenn die k in beiden Gleichungen dasselbe System von Constanten bezeichnen und nur von der Massenvertheilung abhängen. Die Functionen E und F sind die Particularintegrale einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung und zerfallen nach ihrer Rationalität in je vier Classen. Bezeichnet man diese vier Classen für die E mit K, L, M, N (die beizufügenden Indices werden eine Verwechselung mit früheren Bezeichnungen verhüten), so ist

$$K_s^n(\lambda)=\sum_{r=0} g_r^s\,\lambda^{n-2r},$$
$$\mathrm{L}_s^n(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-b^2}\sum_{r=0} g_r^s\,\lambda^{n-1-2r},$$
$$\mathrm{M}_s^n(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-c^2}\sum_{r=0} g_r^s\,\lambda^{n-1-2r},$$
$$\mathrm{N}_s^n(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}\sum_{r=0} g_s^r\,\lambda^{n-2-2r}.$$

Die obere Grenze von r ist so zu wählen, dass die Exponenten von λ nur nicht negativ werden. Ferner ist

$$F_s^n(\lambda) = E_s^n(\lambda) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{[E_s^n(\lambda)]^2 \sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}}.$$

Die den E, F, k, g beigefügten n und s sind selbstverständlich nicht Exponenten, sondern Indices. Die g sind bestimmte reelle Constanten, nur g_0 ist willkürlich und kann hier $= 1$ gesetzt werden, da k willkürlich bleibt Da die vorliegende Untersuchung sich nur auf reelle Verschiebungen der Flüssigkeit erstreckt, so mögen die k so beschaffen sein, dass sämmtliche Glieder in den Reihen 6) reell sind.

§ 4. Aus den für das Potential einer beliebigen Massenvertheilung über einer ellipsoidischen Fläche aufgestellten Formeln lässt sich die Reihenentwickelung für die Dichtigkeit ϱ dieser Masse ableiten durch die bekannte Formel

$$-4\pi\varrho = \left(\frac{\partial U_a}{\partial n} - \frac{\partial U_i}{\partial n}\right)_{\lambda' = \lambda},$$

wenn mit n, wie früher, die nach aussen gekehrte Normale bezeichnet wird.

Diese Formel reducirt sich aber auf die einfachere

$$\text{7)} \qquad \varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda'} - \frac{\partial U_i}{\partial \lambda'}\right)\frac{\partial \lambda'}{\partial n}\right]_{\lambda' = \lambda},$$

weil $\frac{\partial U}{\partial \mu'}$ und $\frac{\partial U}{\partial \nu'}$ eine Aenderung des Potentials in der Tangentialebene der Fläche bezeichnen, also beim Durchgange durch diese Fläche keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden.

Zunächst soll der in 7) auftretende Differentialquotient $\frac{\partial \lambda'}{\partial n}$ entwickelt werden. Werden die Neigungen der äussern Normale zu den Axen der x, y, z bezüglich mit α, β, γ bezeichnet, so hat man

$$\text{8)} \qquad \frac{\partial \lambda'}{\partial n} = \frac{\partial \lambda'}{\partial x'}\cos\alpha + \frac{\partial \lambda'}{\partial y'}\cos\beta + \frac{\partial \lambda'}{\partial z'}\cos\gamma.$$

Für λ' hat man aber nach 3) den Ausdruck

$$\lambda' = r'\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{\lambda'^4}\right)$$

oder mit derselben Genauigkeit

$$\lambda' = r'\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{r'^4}\right).$$

Hieraus findet man

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x'} = \frac{x'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{r'^4}\right),$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial y'} = \frac{y'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{r'^4} + \frac{b^2}{r'^2}\right),$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial z'} = \frac{z'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{b^2 y'^2 + c^2 z'^2}{r'^4} + \frac{c^2}{r'^2}\right),$$

oder mit demselben Grade der Annäherung

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda'}{\partial x'} = \dfrac{x'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\,\dfrac{p'^2 y'^2 + q'^2 z'^2}{r'^2}\right), \\ \dfrac{\partial \lambda'}{\partial y'} = \dfrac{y'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\,\dfrac{p'^2 y'^2 + q'^2 z'^2}{r'^2} + p'^2\right), \\ \dfrac{\partial \lambda'}{\partial z'} = \dfrac{z'}{r'}\left(1 - \tfrac{3}{2}\,\dfrac{p'^2 y'^2 + q'^2 z'^2}{r'^2} + q'^2\right). \end{cases}$$

Für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ findet man die genäherten Werthe

$$\cos\alpha = \frac{x}{\lambda^2}\,\frac{1}{N},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\lambda^2}\left(1 + \frac{b^2}{\lambda^2}\right)\frac{1}{N},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\lambda^2}\left(1 + \frac{c^2}{\lambda^2}\right)\frac{1}{N},$$

wenn vorübergehend gesetzt wird

$$\frac{1}{N} = 1 : \sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{\lambda^4}\left(1 + 2\,\frac{b^2}{\lambda^2}\right) + \frac{z^2}{\lambda^4}\left(1 + 2\,\frac{c^2}{\lambda^2}\right)} = \lambda^2 : \sqrt{r^2 + 2\,(p^2 y^2 + q^2 z^2)}$$
$$= \frac{\lambda^2}{r}\left(1 - \frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2}\right),$$

folglich

$$10)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{r}\left(1 - \dfrac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2}\right), \\ \cos\beta = \dfrac{y}{r}\left(1 - \dfrac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2} + p^2\right), \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{r}\left(1 - \dfrac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2} + q^2\right). \end{cases}$$

Aus 9) und 10) ergiebt sich nun, wenn man die Accente sogleich weglässt,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}\cos\alpha = \frac{x^2}{r^2}\left(1 - \tfrac{5}{2}\,\frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}\cos\beta = \frac{y^2}{r^2}\left(1 - \tfrac{5}{2}\,\frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2} + 2p^2\right),$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z}\cos\gamma = \frac{z^2}{r^2}\left(1 - \tfrac{5}{2}\,\frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2} + 2q^2\right)$$

und hieraus wiederum mit Rücksicht auf 8)

$$\left(\frac{\partial \lambda'}{\partial n}\right)_\lambda = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2}.$$

Bei dem immer angestrebten Grade der Annäherung darf man aber hierin r durch λ ersetzen und erhält dann schliesslich nach Einführung der Polarcoordinaten θ und ψ die einfache Formel

$$11)\quad \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial n}\right)_\lambda = 1 - \tfrac{1}{2}\,(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2.$$

Es bleiben jetzt noch die in Gleichung 7) auftretenden Grössen $\frac{\partial U_a}{\partial \lambda'}$ und $\frac{\partial U_i}{\partial \lambda'}$ für $\lambda' = \lambda$ zu bilden. Man findet

$$\left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda'}\right)_{\lambda'=\lambda} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu) \left[\frac{\frac{\partial E_s^n(\lambda)}{\partial \lambda}}{E_s^n(\lambda)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}\, E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)}\right],$$

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial \lambda'}\right)_{\lambda'=\lambda} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu) \frac{\frac{\partial E_s^n(\lambda)}{\partial \lambda}}{E_s^n(\lambda)},$$

also durch Subtraction

$$12)\quad \left(\frac{\partial U_a}{\partial \lambda'} - \frac{\partial U_i}{\partial \lambda'}\right)_{\lambda'=\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)}\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu).$$

Die Substitution von 11) und 12) in 7) liefert endlich, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[1+\tfrac{1}{2}(p_2+q^2)\right]$$

ist, für die Dichtigkeit ϱ den Ausdruck

$$\varrho = \frac{1}{4\pi\lambda^2}\left[1+\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right]$$
$$\times\left[1-\tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2\right] \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)}\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu),$$

während die Gleichungen 6) für das Potential dieser Massenbelegung in Bezug auf Punkte der Oberfläche den Ausdruck liefern:

$$U_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu).$$

Durch Aenderung der willkürlichen Constanten k lassen sich diese beiden Formeln auch folgendermassen schreiben:

$$13)\quad \begin{cases} \varrho = \left[1+\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right] \\ \times\left[1-\tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2\right] \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)}\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu), \\ U_0 = 4\pi\lambda^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu). \end{cases}$$

§ 5. Diese beiden Doppelsummen finden weiter unten ihre Anwendung auf einen Fall, wo die gesammte über der ellipsoidischen Fläche ausgebreitete Masse verschwindet, wo also nach der jetzigen Bezeichnung

$$\int \varrho\, ds = 0$$

wäre, wenn die Integration über die ganze Fläche hin erstreckt wird. Es folgt hieraus, dass die nach n genommenen Summen in 13) erst bei $n = 1$ beginnen dürfen. Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich aus der Betrachtung eines sehr weit entfernten Punktes. Da nämlich

$$F_s^n(\lambda') < \frac{1}{E_s^n(\lambda')} \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}},$$

also F sowohl mit wachsendem λ', als auch mit wachsendem n sehr klein wird, so reducirt sich die Doppelsumme für U_a in 6) auf ihr erstes Glied

$$U_a = k_0^0\, E_0^0(\mu)\, E_0^0(\nu)\, \frac{F_0^0(\lambda')}{F_0^0(\lambda)} = \frac{k_0^0}{F_0^0(\lambda)}\, F_0^0(\lambda'),$$

wo

$$F_0^0(\lambda') = \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}} = \frac{1}{\lambda'} \quad \text{(für ein sehr grosses } \lambda'\text{)}.$$

Andererseits wird aber auch

$$U_\alpha = \frac{M}{\lambda'},$$

unter M die Masse der Belegung verstanden. Da $M = 0$ vorausgesetzt ist, so wird $U_a = 0$ (noch bevor $\lambda' = \infty$ geworden ist), woraus folgt, dass $k_0^0 = 0$ zu setzen ist.

Es soll hier sogleich noch ein genäherter Ausdruck für das Oberflächenelement eines dreiaxigen Ellipsoids abgeleitet werden. Bezeichnet man mit $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ vorübergehend zwei unendlich kleine Strecken, die ein Punkt der Oberfläche beschreibt, dessen θ, resp. ψ sich bezüglich um $d\theta$ und $d\psi$ ändern, so stehen beide auf einander senkrecht. Es ist

$$d\sigma_1^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta^2,$$

$$d\sigma_2^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2\right] d\psi^2,$$

also

$$d\sigma_1^2 . d\sigma_2^2 = (\lambda^2 - b^2 \cos\theta^2 \cos\psi^2 - c^2 \cos\theta^2 \sin\psi^2)$$
$$\times (\lambda^2 \sin\theta^2 - b^2 \sin\theta^2 \sin\psi^2 - c^2 \sin\theta^2 \cos\psi^2)\, d\theta^2\, d\psi^2$$

oder mit der immer angestrebten Genauigkeit

$$= \lambda^4 [1 - (p^2 \sin\psi^2 + q^2 \cos\psi^2) - (p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2) \cos\theta^2] \sin\theta^2\, d\theta^2\, d\psi^2,$$

also

$$d\sigma_1 . d\sigma_2 = [1 - \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2) \sin\theta^2]\, \lambda^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

oder mit derselben Genauigkeit

14) $$ds = [1 - \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)].[1 + \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2) \sin\theta^2]\, \lambda^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

§ 6. Nach diesen Entwickelungen über das Potential und die Dichtigkeit einer beliebigen über einer ellipsoidischen Fläche ausgebreiteten

Masse sollen nun die in der Gleichung 1) vorkommenden Grössen einzeln bestimmt werden.

Zunächst ist $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$ darzustellen. Für das Potential des ganzen Systems in einem äussern Punkte ergab Gleichung 5):

$$V_a = (\mathrm{F}\varrho + K\varrho_0)\left\{\frac{1}{r} + \tfrac{1}{6}\frac{b^2+c^2}{r^3} - \tfrac{1}{2}\frac{b^2y^2+c^2z^2}{r^5}\right\}.$$

Nun überzeugt man sich leicht, dass bei dem hier angestrebten Grade der Genauigkeit eine Differentiation nach der Normalen auf eine solche nach r hinauskommt. Denn es ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dn},$$

$$\frac{dr}{dn} = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial r}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial r}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\left(1 - \frac{p^2y^2+q^2z^2}{r^2}\right) + \frac{y^2}{r^2}\left(1 - \frac{p^2y^2+q^2z^2}{r^2} + p^2\right)$$

$$+ \frac{z^2}{r^2}\left(1 - \frac{p^2y^2+q^2z^2}{r^2} + q^2\right) = 1.$$

Es ist nun

$$\frac{\partial V_a}{\partial r} = -(\mathrm{F}\varrho + K\varrho_0)\left\{\frac{1}{r^2} + \tfrac{1}{2}\frac{b^2+c^2}{r^4} - \tfrac{3}{2}\frac{b^2y^2+c^2z^2}{r^6}\right\}.$$

Um diesen Ausdruck für Punkte der Oberfläche darzustellen, hat man im ersten Gliede für $\frac{1}{r}$ den Ausdruck 3), in den übrigen aber einfach λ für r zu setzen und erhält so

$$\left(\frac{\partial V_a}{\partial n}\right) = -\frac{\mathrm{F}\varrho + K\varrho_0}{\lambda^2}\left\{1 + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2) - \tfrac{1}{2}\left(p^2\frac{y^2}{\lambda^2} + q^2\frac{z^2}{\lambda^2}\right)\right\}$$

oder mit derselben Genauigkeit

$$= -\frac{\mathrm{F}\varrho + K\varrho_0}{\lambda^2}\left[1 + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right].\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(p^2\frac{y^2}{\lambda^2} + q^2\frac{z^2}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mathrm{F}\varrho + K\varrho_0}{\lambda^2}\left[1 + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right].\left[1 - \tfrac{1}{2}(p^2\cos\psi^2 + q^2\sin\psi^2)\sin\theta^2\right].$$

Ferner ist

$$\mathrm{F} = \tfrac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2} - \tfrac{4}{3}\pi\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2-b_0^2}\sqrt{\lambda_0^2-c_0^2}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\lambda^3\left[1 - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right] - \tfrac{4}{3}\pi\lambda_0^3\left[1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2+q_0^2)\right],$$

$$K = \tfrac{4}{3}\pi\lambda_0^3\left[1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2+q_0^2)\right],$$

also schliesslich

$$\text{15)}\quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = -\tfrac{4}{3}\lambda\pi\varrho\left\{1 + \frac{\varrho_0-\varrho}{\varrho}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3\left[1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2+q_0^2) + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right]\right\}$$

$$\times\left[1 - \tfrac{1}{2}(p^2\cos\psi^2 + q^2\sin\psi^2)\sin\theta^2\right].$$

Es sind jetzt ferner

$$N \quad\text{und}\quad \int\frac{N\,ds}{r}$$

darzustellen. Die ganz willkürliche Function N lässt sich, wie schon in § 1 angedeutet ist, als Dichtigkeit und

$$\int \frac{N\,ds}{r}$$

als das Potential einer über der Flüssigkeitsoberfläche ausgebreiteten Masse betrachten und somit kann man unmittelbar die Formeln 13) zur Darstellung der beiden Functionen benutzen und setzen

$$N = [1 + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)]$$
$$\times [1 - \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2]\,\sigma \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\,F_s^n(\lambda)} E_s^n(\mu)\,E_s^n(\nu),$$

$$\int \frac{N\,ds}{r} = 4\pi\lambda^2\sigma \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\,E_s^n(\nu).$$

Hierin bilden die k dasselbe System willkürlicher Constanten, σ ist als kleiner Factor zugesetzt, weil N in allen Punkten der Oberfläche klein bleiben muss; endlich sind auch die Glieder, deren $n=0$ ist, weggelassen, weil nach § 1

$$\int N\,ds = 0$$

sein soll, also nach § 5 $k_0{}^0 = 0$ zu setzen ist.

§ 7. Setzt man nun die für

$$ds,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right),\quad N,\quad \int \frac{N\,ds}{r}$$

gefundenen Ausdrücke in die Gleichung 1) ein, so erhält man

$$W - W_0 = -\tfrac{2}{3}\varrho^2\sigma^2\lambda^3\pi$$
$$\times \Bigg\{ [1 + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)](1+\tau) \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\,F_s^n(\lambda)} E_s^n(\mu)\,E_s^n(\nu)\right)^2$$
$$\times [1 - (p^2\cos\psi^2 + q^2\sin\psi^2)\sin\theta^2]\sin\theta\, d\theta\, d\psi \tag{16}$$
$$- 3\lambda \int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\,F_s^n(\lambda)} E_s^n(\mu)\,E_s^n(\nu)\right)$$
$$\times \left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n\, E_s^n(\mu)\,E_s^n(\nu)\right)\sin\theta\, d\theta\, d\psi \Bigg\},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3 [1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)] = \tau.$$

Da es im Folgenden nur auf die Bestimmung derjenigen Grössen ankommt, welche von den Factoren p^2 und q^2 frei sind, so können wir den Factor

$$[1-(p^2\cos\psi^2+q^2\sin\psi^2)\sin\theta^2]$$

vor das Integral setzen und ihn mit dem andern

vereinigen zu dem neuen $\begin{matrix}[1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)]\\(1+vp^2+wq^2),\end{matrix}$

in welchem v und w positive oder negative echte Brüche bedeuten, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen.

§ 8. Bevor die Gleichung 16) für den vorliegenden Zweck geeignet umgestaltet werden kann, müssen folgende zwei Sätze vorausgeschickt werden:

1. Es ist

$$J_1=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}\frac{k_s^n}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)}\,\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu)\right)^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}\left(\frac{k_s^n}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)}\right)^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu))^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

2. Es ist

$$J_2=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}\frac{k_s^n}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)}\,\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu)\right)$$

$$\times\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}k_s^n\,\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu)\right)\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}\frac{(k_s^n)^2}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu))^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Zunächst soll bewiesen werden, dass in den beiden Doppelintegralen J_1 und J_2 alle jene Producte verschwinden, die nicht denselben Index n haben. Zu diesem Zwecke mögen die von Heine angewandten Zeichen C und S eingeführt werden zur Bezeichnung der Kugelfunctionen

$$\begin{matrix}C_m^n(\theta,\psi)=\mathrm{P}_m^n(\cos\theta)\cos m\psi\\ S_m^n(\theta,\psi)=\mathrm{P}_m^n(\cos\theta)\sin m\psi\end{matrix}\qquad(m\leqq n).$$

Setzt man statt θ und ψ die elliptischen Coordinaten μ und ν ein, so sollen $C(\theta,\psi)$ und $S(\theta,\psi)$ bezüglich übergehen in $C[\mu,\nu]$ und $S[\mu,\nu]$. Zugleich erinnere man sich, dass

$$17)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}C_m^n\,C_v^u\,d\psi=0,\\&\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}C_m^n\,S_v^u\,d\psi=0,\end{aligned}\right.$$

$$\text{17)} \qquad \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} S_m^n S_v^u \, d\psi = 0,$$

wenn für die erste und dritte Gleichung die Bedingung erfüllt ist, dass nicht zugleich $u = n$ und $v = m$ ist, während die zweite auch dann noch giltig bleibt.

Denkt man sich nun die Lamé'schen Producte durch Kugelfunctionen ersetzt mittels der bekannten Beziehungen

$$\text{18)} \qquad \left\{ \begin{aligned} K_s^n(\mu) K_s^n(\nu) &= \sum_m \alpha_m^s \, C_{2m}^n \quad [\mu, \nu], \\ L_s^n(\mu) L_s^n(\nu) &= \sum_m \beta_m^s \, C_{2m+1}^n [\mu, \nu], \\ M_s^n(\mu) M_s^n(\nu) &= \sum_m \gamma_m^s \, S_{2m+1}^n [\mu, \nu], \\ N_s^n(\mu) N_s^n(\nu) &= \sum_m \delta_m^s \, S_{2m}^n \quad [\mu, \nu], \end{aligned} \right.$$

worin die α, β, γ, δ gewisse Constanten bezeichnen, auf deren Bestimmung es hier nicht ankommt, so erkennt man mittels 17), dass

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)} E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu) \right)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi \\ &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} \sum_{r=0}^{r=2n} \frac{k_s^n \, k_r^n}{E_s^n(\lambda) F_s^n(\lambda) \; E_r^n(\lambda) F_r^n(\lambda)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E_s^n(\mu) E_s^n(\nu)\, E_r^n(\mu)\, E_r^n(\nu) \sin\theta \, d\theta \, d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{s=0}^{s=2n} \frac{k_s^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)} E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu) \right) \\ &\qquad \times \left(\sum_{s=0}^{s=2n} k_s^n \, E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu) \right) \sin\theta \, d\theta \, d\psi \\ &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=2n} \sum_{r=0}^{r=2n} \frac{k_s^n \, k_r^n}{E_s^n(\lambda)\, F_s^n(\lambda)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E_s^n(\mu)\, E_s^n(\nu)\; E_r^n(\mu)\, E_r^n(\nu) \sin\theta \, d\theta \, d\psi. \end{aligned}$$

Weiter soll jetzt bewiesen werden, dass in den beiden Doppelintegralen J_1 und J_2 alle jene Producte verschwinden, in denen die unteren Indices s und r verschieden sind.

Zunächst ist zu beachten, dass die in den beiden Integralen in einander multiplicirten E_s und E_r immer derselben Classe angehören, weil nach 17) alle jene Producte verschwinden, in denen die Indices m und v der C, resp. S verschieden sind, und auch jene, in denen überhaupt ein C mit einem S multiplicirt auftritt. Zur weitern Beweisführung dient der bekannte Satz, dass

$$\int_0^{\tilde{\omega}}\int_0^{\omega}(\mu^2-\nu^2)\, \mathrm{E}_s^n(\mu)\, \mathrm{E}_s^n(\nu)\, \mathrm{E}_r^n(\mu)\, \mathrm{E}_r^n(\nu)\, d\zeta\, d\varepsilon = 0,$$

wenn die E_s und E_r derselben Classe angehören und r von s verschieden ist.

Um dieses Integral mit dem in J_1 und J_2 vorkommenden vergleichen zu können, führe man für ζ und ε die Polarcoordinaten θ und ψ ein und setze also

$$\sin\theta\, d\theta\, d\psi \text{ statt } (\mu^2-\nu^2)\, d\zeta\, d\varepsilon,$$

wodurch auch die oberen Grenzen $\tilde{\omega}$ und ω beide sich in $\frac{\pi}{2}$ verwandeln. Es ist also

$$19)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{E}_s^n(\mu)\, \mathrm{E}_s^n(\nu)\, \mathrm{E}_r^n(\mu)\, \mathrm{E}_r^n(\nu)\, \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 0,$$

wenn r und s verschieden sind.

Es kommt jetzt ersichtlich darauf an, das in J_1 und J_2 vorkommende Doppelintegral auf die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu reduciren, sowohl für ψ, als für θ. Man denke sich wieder die Producte $\mathrm{E}(\mu)\,.\,\mathrm{E}(\nu)$ nach 18) bezüglich durch die C und S ersetzt, und man wird mit Hilfe von 17) sofort erkennen, dass die Veränderlichen θ und ψ nur in den Quadraten $[C(\theta,\psi)]^2$ und $[S(\theta,\psi)]^2$ auftreten können, mit alleiniger Ausnahme des Factors $\sin\theta$ im Oberflächenelement. Betrachtet man nun in dem Doppelintegral nur die Integration nach ψ und bezeichnet es mit

$$\int_0^{2\pi} A\, d\psi,$$

so kann man setzen

$$\int_0^{2\pi} A\, d\psi = \int_0^{\pi} A\, d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} A\, d\psi.$$

Setzt man im zweiten Theile $\pi+\psi$ an Stelle von ψ, so erhält man den ersten, also ist

$$\int_0^{2\pi} A\, d\psi = 2\int_0^{\pi} A\, d\psi.$$

Es ist weiter

$$2\int_0^{\pi} A\,d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,d\psi + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A\,d\psi.$$

Setzt man im zweiten Theile $\pi - \psi$ an Stelle von ψ, so erhält man wieder den ersten, also ist

$$\int_0^{2\pi} A\,d\psi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\,d\psi.$$

Betrachtet man aber jetzt nur die Integration nach θ und bezeichnet den zuletzt gefundenen Ausdruck mit

$$4\int_0^{\pi} B \sin\theta\,d\theta,$$

so kann man setzen

$$4\int_0^{\pi} B \sin\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} B \sin\theta\,d\theta + 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} B \sin\theta\,d\theta.$$

Setzt man im zweiten Theile $\pi - \theta$ statt θ, so erhält man den ersten, also ist

$$4\int_0^{\pi} B \sin\theta\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} B \sin\theta\,d\theta.$$

Man kann also in dem in J_1 und J_2 auftretenden Doppelintegrale als obere Grenzen von θ und ψ einfach $\frac{\pi}{2}$ setzen, wenn man zugleich das Integral mit 8 multiplicirt. Dadurch erhält man aber das Integral 19), welches verschwindet, so oft r und s verschieden sind. Dadurch sind nun die beiden in diesem Paragraphen aufgestellten Sätze bewiesen.

Statt $\sin\theta\,d\theta\,d\psi$ möge Kürze halber ds_1 gesetzt werden, ebenso statt

$$\frac{k_s^n}{\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)}$$

einfach h_s^n, wobei zu beachten ist, dass k und h immer zugleich reell oder rein imaginär sind, da $\mathrm{E}(\lambda)$ und $\mathrm{F}(\lambda)$ stets reell bleiben.

Durch alle diese in §§ 7 und 8 besprochenen Umwandlungen nimmt Gleichung 16) folgende Gestalt an:

$$W - W_0 = -$$

$$\tfrac{2}{3}\varrho^2\sigma^2\lambda^3\pi \sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=2n}\left[1+\tau-3\lambda\,\mathrm{E}_s^n(\lambda)\,\mathrm{F}_s^n(\lambda)+(1+\tau)(vp^2+nvq^2)\right]\int(h_s^n\,\mathrm{E}_s^n(\mu)\,\mathrm{E}_s^n(\nu))^2 ds_1\,,$$

worin die Integration sich über eine Kugelfläche vom Halbmesser $= 1$ erstreckt.

§ 9. Um über das Vorzeichen dieses Ausdruckes entscheiden zu können, ist es nöthig, die Grösse $\lambda\,\mathrm{E}(\lambda)\,\mathrm{F}(\lambda)$ genauer zu untersuchen. Bezeichnet $\varDelta$ eine unbestimmte Grösse von der Ordnung der Excentricitätsquadrate, so wird sich herausstellen, dass

$$\lambda\,\mathrm{E}^n(\lambda)\,\mathrm{F}^n(\lambda) = \frac{1}{2n+1} + \varDelta^2.$$

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass

$$\mathrm{E}^n(\lambda) = \lambda^n + \varDelta^2.$$

Es sind nämlich alle in den E vorkommenden Coefficienten g_r bekanntlich von derselben oder noch niedrigerer Ordnung, wie p^2 oder q^2, mit Ausnahme des ersten g_0, der oben $=1$ angenommen wurde. Entwickelt man nun noch die Factoren $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$, $\sqrt{\lambda^2-b^2}\,\sqrt{\lambda^2-c^2}$ nach Potenzen der Excentricitätsquadrate, so ist sofort klar, dass

$$\mathrm{E}^n(\lambda) = \lambda^n + \varDelta^2.$$

Nun ist aber

$$\mathrm{F}^n(\lambda) = \mathrm{E}^n(\lambda)\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{[\mathrm{E}^n(\lambda)]^2\sqrt{\lambda^2-b^2}\,\sqrt{\lambda^2-c^2}},$$

ferner ist

$$\frac{1}{[\mathrm{E}^n(\lambda)]^2} = (\lambda^n+\varDelta^2)^{-2} = \frac{1}{\lambda^{2n}} + \varDelta^2$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\,\sqrt{\lambda^2-c^2}} = \frac{1}{\lambda^2} + \varDelta^2,$$

also

$$\mathrm{F}^n(\lambda) = \mathrm{E}^n(\lambda)\int_\lambda^\infty\left(\frac{1}{\lambda^{2n+2}} + \varDelta^2\right)d\lambda = \mathrm{E}^n(\lambda)\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{\lambda^{2n+1}} + \varDelta^2\right).$$

Dafür lässt sich aber auch schreiben

$$\frac{\mathrm{E}^n(\lambda)}{(2n+1)\lambda\,.\,(\lambda^n+\varDelta^2)^2} + \varDelta^2 = \frac{1}{(2n+1)\,.\,\lambda\,\mathrm{E}^n(\lambda)} + \varDelta^2,$$

woraus folgt

$$\lambda\,\mathrm{E}^n(\lambda)\,\mathrm{F}^n(\lambda) = \frac{1}{2n+1} + \varDelta^2,$$

wie oben behauptet war.

Bezeichnet also u_n irgend eine endliche, weiter nicht zu bestimmende Grösse, so erhält man schliesslich für die Zunahme des Potentials des ganzen Systems auf sich selbst die Formel:

$$
\text{20)} \qquad W - W_0 = -\tfrac{2}{3}\varrho^2\sigma^2\lambda^3\pi
$$

$$
\times \left\{ \begin{aligned}
& [\tau + (1+\tau-u_1)(vp^2+wq^2)] \int \sum_{s=0}^{s=2} (h_s^1\, \mathrm{E}_s^1(\mu)\, \mathrm{E}_s^1(\nu))^2\, ds_1 \\
+ & [\tfrac{2}{5} + \tau + (1+\tau-u_2)(vp^2+wq^2)] \int \sum_{s=0}^{s=4} (h_s^2\, \mathrm{E}_s^2(\mu)\, \mathrm{E}_s^2(\nu))^2\, ds_1 \\
+ & [\tfrac{4}{7} + \tau + (1+\tau-u_3)(vp^2+wq^2)] \int \sum_{s=0}^{s=6} (h_s^3\, \mathrm{E}_s^3(\mu)\, \mathrm{E}_s^3(\nu))^2\, ds_1 + \ldots \\
+ & \left[\frac{2(n-1)}{2n+1} + \tau + (1+\tau-u_n)(vp^2+wq^2)\right] \int \sum_{s=0}^{s=2n} (h_s^n\, \mathrm{E}_s^n(\mu)\, \mathrm{E}_s^n(\nu))^2\, ds_1 + \ldots
\end{aligned} \right\}
$$

Obwohl u mit s sich ändert, ist es doch der Einfachheit wegen vor das Summenzeichen gesetzt worden, da es auf den Werth der mit p^2 und q^2 multiplicirten Grössen nicht ankommt, und es genügt, wenn dieselben nur endlich bleiben. Die Integrationen erstrecken sich über eine Kugelfläche mit dem Halbmesser $=1$, endlich bezeichnet τ den folgenden Ausdruck:

$$
\tau = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3 [1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) + \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)].
$$

§ 10. Die Gleichung 20) giebt nun die Bedingungen an, unter welchen eine über einem dreiaxigen Ellipsoid von kleinen Excentricitäten ausgebreitete Flüssigkeit im stabilen Gleichgewichte ist, wenn sie selbst ebenfalls die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten annimmt. Da nur reelle Verschiebungen der Flüssigkeit in Betracht kommen, so müssen die Grundzahlen der in den Summen vorkommenden Quadrate reell sein (vergl. die Entwickelung für N in § 6), woraus folgt, dass sämmtliche Integrale in 20) positiv sind. Da aber die Glieder von der Ordnung p^2 und q^2 keinen Einfluss auf die Zeichen der vor den Integralen stehenden Factoren haben, da ferner τ positiv ist, wenn $\varrho_0 > \varrho$, negativ, wenn $\varrho_0 < \varrho$, so folgt, dass die Differenz $W - W_0$ für jede reelle Erschütterung der Flüssigkeit negativ wird, wenn $\varrho_0 > \varrho$, hingegen positiv oder negativ, wenn $\varrho_0 < \varrho$, je nach der Art der erwähnten Erschütterung. Ist aber $\varrho_0 = \varrho$ oder ist $\lambda_0 = 0$, so ist auch $\tau = 0$ und, weil die Flüssigkeitsoberfläche nach den Erörterungen in § 2 in diesen beiden Fällen die Kugelgestalt annimmt, auch $p^2 = q^2 = 0$, so dass $W - W_0$ für jede reelle Erschütterung negativ wird. Hieraus ergiebt sich nun folgendes Resultat:

Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit kleiner als die des festen Kernes, so ist das Potential des Systems auf sich selbst in der oben definirten Gleichgewichtslage ein Maximum, also das Gleichgewicht stabil. Ist dagegen die Dichtigkeit der Flüssigkeit grösser als die des festen Kernes, so ist das Potential des Systems auf sich selbst in der erwänten Gleichgewichtslage weder ein Maximum, noch ein Minimum, das Gleichgewicht also im Allgemeinen labil. Ist endlich die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich der des Kernes oder ist gar kein Kern vorhanden, in welchen beiden Fällen die Gleichgewichtslage der Flüssigkeit die Kugelgestalt ist, so ist das Potential des Systems auf sich selbst in dieser Lage wieder ein Maximum, das Gleichgewicht also ebenfalls stabil.

Dass es für den Fall, wo $\varrho_0 < \varrho$ ist, solche Erschütterungen der Flüssigkeit giebt, für welche $W - W_0$ positiv wird, erkennt man sofort, wenn man dieselben derartig voraussetzt, dass N nur durch Lamé'sche Functionen erster Ordnung ausgedrückt wird, wenn man also setzt

$$N = [1 + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)]\,[1 - \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2]\,\sigma \sum_{s=0}^{s=2} h_s^1\, \mathrm{E}_s^1(\mu)\, \mathrm{E}_s^1(\nu),$$

$$h^2 = h^3 = \ldots = 0.$$

Denn in diesem Falle reducirt sich die Reihe für $W - W_0$ auf ihr erstes Glied, welches sicher positiv ist. Will man eine derartige Erschütterung geometrisch untersuchen, so hat man zu setzen

$$K^1(\mu) = \mu, \quad \mathrm{L}^1(\mu) = \sqrt{\mu^2 - b^2}, \quad \mathrm{M}^1 = \sqrt{\mu^2 - c^2}, \quad \mathrm{N}^1 = 0,$$

also

$$\begin{aligned} N &= [1 + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)]\,[1 - \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2]\,\sigma \\ &\quad \times [h_0 \mu\nu + h_1 \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\nu^2 - b^2} + h_2 \sqrt{\mu^2 - c^2}\sqrt{\nu^2 - c^2}] \\ &= \sigma[1 - \tfrac{1}{2}(p^2 \cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2)\sin\theta^2] \\ &\quad \times [A\cos\theta + B(1 + \tfrac{1}{2}p^2)\sin\theta\cos\psi + C(1 + \tfrac{1}{2}q^2)\sin\theta\sin\psi], \end{aligned}$$

wenn man den Factor $[1 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)]$ in die Constanten legt und des Folgenden wegen $B(1 + \frac{1}{2}p^2)$ und $C(1 + \frac{1}{2}q^2)$ statt B und C schreibt. Aus § 3 erhält man aber

$$\cos\theta = \frac{x}{\lambda}, \quad \sin\theta\cos\psi = \frac{y}{\lambda}(1 + \tfrac{1}{2}p^2), \quad \sin\theta\sin\psi = \frac{z}{\lambda}(1 + \tfrac{1}{2}q^2),$$

also

$$N = \sigma\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{b^2 y^2 + c^2 z^2}{\lambda^4}\right]\cdot\left[A\frac{x}{\lambda} + B(1 + p^2)\frac{y}{\lambda} + C(1 + q^2)\frac{z}{\lambda}\right],$$

also mit Zuhilfenahme von 3)

$$N = \sigma\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{b^2 y^2 + c^2 z^2}{\lambda^4}\right]^2\cdot\left[A\frac{x}{r} + B(1 + p^2)\frac{y}{r} + C(1 + q^2)\frac{z}{r}\right]$$

oder mit derselben Genauigkeit

$$= \sigma\left[1 - \frac{p^2 y^2 + q^2 z^2}{r^2}\right]\cdot\left[A\frac{x}{r} + B(1 + p^2)\frac{y}{r} + C(1 + q^2)\frac{z}{r}\right],$$

folglich nach 10)

$$N = \sigma\,[A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma] = \sigma\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cos\delta,$$

wenn α, β, γ, wie früher, die Neigungen der äusseren Normale zu den Axen der x, y, z, und δ den Winkel bedeuten, welchen diese Normale mit einer gewissen constanten Richtung bildet, deren Neigungen zu denselben Axen die folgenden drei Cosinus besitzen:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Es folgt nun aus diesem für N gefundenen Ausdrucke, dass durch die Lamé'schen Functionen erster Ordnung eine derartige Verschiebung der Flüssigkeit ausgedrückt wird, bei welcher alle Punkte der ursprünglichen ellipsoidischen Oberfläche parallel einer beliebigen, aber constanten Richtung um die gleiche Strecke $\sigma\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ verschoben werden.

Ist also in diesem Falle $\varrho > \varrho_0$, so wird die Flüssigkeit die oben angenommene Gleichgewichtslage verlassen. Ist aber $\varrho = \varrho_0$ oder ist $\lambda_0 = 0$, so wird offenbar das Gleichgewicht auch nach einer derartigen Verschiebung fortbestehen, wie vor derselben, es wird also gegen eine solche Verschiebung indifferent sein, und in der That weist auch die Gleichung 20) für $W - W_0$ den Werth Null auf.

Anmerkung. Schliesslich soll noch auf folgende zwei Punkte aufmerksam gemacht werden:

1. Aus den im § 2 gemachten Bemerkungen erkennt man, dass die Flüssigkeit im stabilen Gleichgewichte mit dem festen Kerne immer gleichartige Krümmung besitzt und dass das Gleichgewicht labil wird, sobald Flüssigkeit und Kern ungleichartig gekrümmt sind. Zugleich wird man sich erinnern, dass immer eine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur mit kleinen Excentricitäten für die Flüssigkeit existirt, so lange $\frac{\varrho_0}{\varrho} > \frac{3}{5}$ ist, dass dies aber für $\frac{\varrho_0}{\varrho} < \frac{3}{5}$ nicht mehr allgemein der Fall ist. Wie also der Grenzwerth $\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{3}{5}$ für die Gleichgewichtsfiguren überhaupt eine Bedeutung hat, so findet dies auch statt in Bezug auf die Stabilität des Gleichgewichtes. So lange nämlich $\frac{\varrho_0}{\varrho} > \frac{3}{5}$, bleibt auch der absolute Werth von

$$\tau = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3 [1 - \tfrac{1}{2}(p^0{}_2 + q_0^2) + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)]$$

stets kleiner als $\frac{2}{5}$, da man den Ausdruck

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3 [1 - \tfrac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2) + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)]$$

immer kleiner als 1 annehmen kann. Daraus folgt aber, dass in der Gleichung 20) sämmtliche Glieder mit Ausnahme des ersten stets negativ sind. Schliesst man also bei den zu betrachtenden Erschütterungen der Flüssigkeit diejenigen aus, welche durch Lamé'sche Functionen erster Ordnung dargestellt werden und also nach dem Obigen in einer parallelen Verschiebung aller Oberflächentheile um eine gleiche Strecke bestehen, so bleibt unter der Voraussetzung, dass

$$\tfrac{3}{5} < \frac{\varrho_0}{\varrho} < 1,$$

das Potential des Systems auf sich selbst für alle anderen Erschütterungen ein Maximum, das Gleichgewicht also in Bezug auf dieselben stabil.

2. Die Uebereinstimmung der Gleichung 20) mit den beiden von Giesen für die Kugel und das Rotationsellipsoid aufgestellten Gleichungen erkennt man sofort, wenn man bedenkt, dass nach den beiden in § 8 aufgestellten Sätzen

$$\int \sum_{s=0}^{s=2n} (h_s^n \, \mathrm{E}_s^n(\mu) \, \mathrm{E}_s^n(\nu))^2 \, ds_1 = \int \left(\sum_{s=0}^{s=2n} h_s^n \, \mathrm{E}_s^n(\mu) \, \mathrm{E}_s^n(\nu) \right)^2 ds_1$$

und dass

$$\sum_{s=0}^{s=2n} h_s^n \, \mathrm{E}_s^n(\mu) \, \mathrm{E}_s^n(\nu)$$

mit einer gewöhnlichen Kugelfunction n^{ter} Ordnung identisch ist. Der von Giesen eingeführten Grösse λ entsprechen hier u und v, deren Summe kleiner ist als 1, ebenso entspricht der unbestimmten Constanten v_n bei Giesen hier u_n.

V.

Ueber die Fundamentalwerthe des allgemeinen hypergeometrischen Integrals.

Von

A. Radicke,

Lehrer an der Realschule zu Bromberg.

In seiner Abhandlung über die Gauss'sche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (Abh. d. Soc. d. Wissensch. zu Göttingen, 1857) hat Riemann die Function, welche die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe löst, in die Theorie der Functionen complexer Variablen eingeführt und mit Rücksicht darauf, dass die verschiedenen Particularlösungen jener Differentialgleichung auch in Form von bestimmten Integralen dargestellt werden können, welche die unabhängige Variable der Differentialgleichung als Parameter enthalten, am Schlusse darauf hingewiesen, dass die Eigenschaften jener Function auch aus ihrer Integralform hergeleitet werden können. Durch eine Abhandlung von Herrn Pochhammer „Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung" (Crelle's Journ. Bd. 71), namentlich aber durch die im folgenden Bande (S. 255) befindlichen Bemerkungen zu dieser Abhandlung von Herrn Fuchs ist ein Theil dieser Frage, soweit es sich nämlich um die Eindeutigkeit und Stetigkeit der einzelnen Zweige der Function handelt und so lange nicht der Punkt ∞ als Grenze der Integrale in Betracht kommt, erledigt worden. Es fehlt noch die Herleitung der Relationen, die zwischen den einzelnen Integralen bestehen, oder mit anderen Worten die Herleitung einer den Fundamentalsystemen des Herrn Fuchs entsprechenden Gruppirung der in Rede stehenden Functionen aus ihrer Integralform, wozu, wie sich ergeben wird, der Punkt ∞ als Grenze nothwendig ist. Diese Lücke auszufüllen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

1.

Das Integral

$$1)\qquad \int_{z_0}^{z_1} U\,dz,$$

in welchem U das Product

$$(z-a_0)^{\alpha_0}(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n}$$

und $a_0 a_1 \ldots a_n$, $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n$, z_0 und z_1 beliebige complexe Grössen bedeuten, ist unendlich vieldeutig, weil die zu integrirende Function für den Anfangswerth z_0 unendlich viele Werthe hat und weil der Integrationsweg völlig willkürlich ist. Durch Annahme eines bestimmten Integrationsweges, der freilich durch keinen der singulären Punkte $a_0 a_1 \ldots a_n$ oder ∞ hindurchführen darf, kann die zweite Ursache der Vieldeutigkeit beseitigt werden, und durch Fixirung eines bestimmten Anfangswerthes von U für z_0 auch die erste, wenn nicht z_0 mit einem der singulären Punkte zusammenfällt. Allein gerade diesen Fall werden wir im Folgenden vorzugsweise zu behandeln haben, und deshalb bemerken wir von vornherein, dass das Integral 1) nach Festsetzung eines bestimmten Integrationsweges, wenn z_0 einer der singulären Punkte $a_0 a_1 \ldots a_n$ oder ∞ ist, nur bis auf einen willkürlichen constanten Factor bestimmt ist. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, zu untersuchen, welche Beziehungen zwischen zwei Integralen 1) bestehen, wenn verschiedene Integrationswege zwischen denselben Grenzen z_0 und z_1 gewählt werden. Zu diesem Zwecke stellen wir zuvörderst einige Sätze auf, die aus der Theorie der Functionen complexer Variablen oder aus der Theorie der bestimmten Integrale entweder unmittelbar bekannt sind oder sich leicht herleiten lassen.

2.

I. Wenn $a_\varkappa$ untere oder obere Grenze des Integrals

$$\int U\,dz$$

ist, so hat dasselbe nur einen Sinn, wenn $\alpha_\varkappa + 1 > 0$ ist. Dies ist gleichzeitig die Bedingung dafür, dass dasselbe Integral, auf einem unendlich kleinen um $z = a_\varkappa$ beschriebenen Kreise genommen, verschwindet. Bezeichnen wir nämlich zuerst den mit dem endlichen Radius r um $z = a$ beschriebenen Kreis durch $\mathfrak{A}$, und die im Punkte $a + re^{i\vartheta}$ beginnende Integration über denselben dadurch, dass wir $(\mathfrak{A})_\vartheta$ dem Integrationszeichen hinzufügen, so wird in

$$J = \int\limits_{(\mathfrak{A})_\vartheta} (z-a)^\alpha\,dz$$

die Integration dadurch ausgeführt werden, dass man

$$z = a + re^{it}$$

setzt und in Bezug auf t von ϑ bis $\vartheta + 2\pi$ integrirt. Man erhält so

$$J = ir^{\alpha+1}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} e^{i(\alpha+1)t}\,dt,$$

und da das letzte Integral den Werth

$$\frac{e^{i(\alpha+1)(\vartheta+2\pi)}-e^{i(\alpha+1)\vartheta}}{i(\alpha+1)}=e^{i\vartheta(\alpha+1)}\frac{e^{2\pi i\alpha}-1}{i(\alpha+1)}$$

hat, so ergiebt sich

$$J=\frac{r^{\alpha+1}e^{i\vartheta(\alpha+1)}}{\alpha+1}\cdot(e^{2\pi i\alpha}-1).$$

Für $\alpha=-1$ wird $J=\frac{0}{0}$, und nach dessen gehöriger Bestimmung, wie es sein muss, gleich $2\pi i$; ist α gleich irgend einer andern positiven oder negativen ganzen Zahl, so verschwindet J für jedes endliche r, wie ebenfalls bekannt. In beiden Fällen ist also das vorliegende Integral von $re^{i\vartheta}$, d. h. dem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkte der Integrationscurve, unabhängig. Für beliebige, nicht ganzzahlige Werthe von α dagegen hängt J im Allgemeinen von $re^{i\vartheta}$ ab, verschwindet aber für unendlich abnehmende r, wenn $\alpha+1>0$ ist.

Da nun der Ausdruck $\frac{U}{(z-a_\varkappa)^{\alpha_\varkappa}}$ für $z=a_\varkappa$ endlich ist, so wird das Integral 1) ebenfalls, wie oben behauptet wurde, unter der Bedingung $\alpha_\varkappa+1>0$ verschwinden, wenn als Integrationsweg der um $z=a_\varkappa$ mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis genommen wird.

Es wird im Folgenden stets angenommen werden, dass die Bedingungen

$$\alpha_0+1>0\;\ldots\;\alpha_n+1>0\quad\text{und}\quad s+1<0,$$

wo $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=s$ gesetzt ist, erfüllt sind, so dass das Integral $\int U\,dz$ einerseits einen endlichen Werth behält, wenn einer der $n+2$ singulären Punkte $a_0\,a_1\ldots a_n$ oder ∞ als untere oder obere Grenze gewählt wird, andererseits verschwindet, wenn um einen dieser Punkte auf einem unendlich kleinen Kreise integrirt wird.

II. **Die Umformung der Integrationswege.** Es bezeichne L eine geschlossene Curve, die keinen singulären Punkt umgiebt, und $L_{\varkappa,\lambda,\iota\ldots}$ eine solche, die nur die singulären Punkte $a_\varkappa\,a_\lambda\,a_\iota\ldots$ umschliesst. Wenn ferner L oder $L_{\varkappa,\lambda,\iota\ldots}$ Integrationscurve ist und die Integration in dem auf der Curve liegenden Punkte z_0 beginnen soll, so wird dies durch das Zeichen L^0 resp. $L^0_{\varkappa,\lambda,\iota\ldots}$ angedeutet werden. Endlich soll keine der Curven L durch einen singulären Punkt selbst hindurchgehen. Dann ist

a) $$\int_{(L^0)}U\,dz=0,$$

so dass statt einer Integrationscurve, die keinen singulären Punkt umgiebt, irgend eine andere genommen werden kann, für die dasselbe gilt.

b) Das Integral

$$\int_{(L^0_\varkappa)}U\,dz$$

ist von der Form der Curve L_x unabhängig, so lange der Anfangspunkt z_0 ungeändert bleibt und keine anderen singulären Punkte in die Curve eintreten. Dies ergiebt sich leicht aus dem vorhergehenden Satze, da die beiden im Punkte z_0 zusammenhängenden geschlossenen Curven in einem continuirlichen Zuge, die eine direct, die andere invers durchlaufen werden können und beide zusammen keinen singulären Punkt einschliessen. Wenn also der Integralwerth für verschiedene einen singulären Punkt umgebende Curven ungeändert bleiben soll, so muss der Anfangswerth z_0 für alle derselbe sein. — Für zwei Punkte $L^0{}_x$ und L'_x, die beide nur einen singulären Punkt a_x umschliessen, aber verschiedene Anfangswerthe z_0 und z_1 haben, findet man die Beziehung

$$\int\limits_{(L^0{}_x)} U\,dz - e^{2\pi i a_x}\int\limits_{(L'_x)} U\,dz = (1-e^{2\pi i a_x})\int_{z_0}^{z_1}\Big| U\,dz,$$

welche für ein ganzzahliges a_x in die bekannte, für solche Functionen U giltige Formel übergeht, deren Zweige in der Umgebung von a_x monodrom sind.

Da nun, wenn wir z_1 unendlich nahe an a_x rücken lassen und für L'_x den unendlich kleinen um a_x beschriebenen Kreis wählen, das zweite Integral linker Hand nach Satz I verschwindet, so ergiebt sich die wichtige Formel

$$\int\limits_{(L^0{}_x)} U\,dz = (1-e^{2\pi i a_x})\int_{z_0}^{a_x}\Big| U\,dz,$$

nach welcher jedes auf einer beliebigen, einen singulären Punkt umschliessenden Curve genommene Integral in ein auf gerader Linie genommenes Integral, multiplicirt mit einem constanten Factor, transformirt werden kann.

c) Es sei $r'r''\ldots r^{(i)}$ eine beliebige, aus den Zahlen 0, 1, 2 … n entnommene Gruppe von i Zahlen, so fragt es sich, welche Umformungen der Integrationsweg des Integrals

$$\int\limits_{(L^0{}_{r',r'',\ldots r^{(i)}})} U\,dz$$

zulässt. Offenbar kann für $L^0{}_{r',r'',\ldots r^{(i)}}$ wie vorher jeder andere Weg gewählt werden, der nur z_0 zum Anfangs- und Endpunkte hat und dieselben singulären Punkte umschliesst, also z. B. der folgende Weg: die von z_0 nach $a_{r'}$ gezogene Gerade, der um $a_{r'}$ mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis, die von $a_{r'}$ nach z_0 zurückführende Gerade, die von z_0 nach $a_{r''}$ gezogene Gerade, der um $a_{r''}$ beschriebene unendlich kleine Kreis, die von $a_{r''}$ nach z_0 zurückführende Gerade u. s. w. Durch Benutzung dieses Weges, des Satzes I und des schon mehrfach angewendeten Satzes, dass die Function U durch directe Umgehung des Punktes $a_\varkappa$ den Factor $e^{2\pi i a_\varkappa}$ annimmt, ergiebt sich dann

$$\int\limits_{(L^0_{r', r'', \dots r^{(i)}})} U\,dz = \sum_1^i {}_\lambda\, C_\lambda \int\limits_{z_0}^{a_{r^{(\lambda)}}} \Big| \, U\,dz\,,$$

wo die i Constanten C von den Exponenten $\alpha_{r'}\,\alpha_{r''}\dots\alpha_{r^{(i)}}$ abhängig sind. Die Umformung des gegebenen Integrationsweges ist hier so bewerkstelligt, dass nur i Verbindungslinien der $i+1$ Punkte $z_0\,a_{r'}\,a_{r''}\dots a_{r^{(i)}}$ und i Kreisperipherien übrig bleiben. Denselben Bedingungen genügen aber ausser der angegebenen noch verschiedene andere Umformungen des gegebenen Weges $L^0_{r', r'', \dots r^{(i)}}$. Wir erhalten dieselben, wenn wir um $a_{r'}\,a_{r''}\dots a_{r^{(i)}}$ Kreise mit hinreichend kleinem Radius beschreiben und, indem wir auf jedem derselben einen beliebigen Punkt resp. durch $\mathfrak{a}_{r'}\,\mathfrak{a}_{r''}\dots\mathfrak{a}_{r^{(i)}}$ bezeichnen, zwischen den $i+1$ Punkten $z_0\,\mathfrak{a}_{r'}\,\mathfrak{a}_{r''}\dots\mathfrak{a}_{r^{(i)}}$ i je zwei verbindende Linien ziehen, ohne dass eine geschlossene Figur entsteht. Alsdann wird es immer möglich sein, die beiden Ufer jener i Linien und die Peripherien der i Kreise in einem continuirlichen, in z_0 beginnenden und schliessenden Zuge zu durchlaufen. (Näheres über die Begründung dieser Behauptung s. in Nr. 4.) Werden dann die Kreise mit unendlich kleinem Radius genommen, so dass die Punkte $\mathfrak{a}$ mit den Punkten a zusammenfallen, so ergiebt sich eine der vorigen analoge Gleichung, auf deren rechter Seite i Integrale stehen, deren Grenzen sich, wie vorher angegeben, aus den Punkten $z_0\,a_{r'}\,a_{r''}\dots a_{r^{(i)}}$ zusammensetzen.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn die Summe der Exponenten $\alpha_{r'}\,\alpha_{r''}\dots\alpha_{r^{(i)}}$ eine ganze Zahl ist, das über die Curve $L^0_{r', r'', \dots r^{(i)}}$ genommene Integral vom Anfangspunkte z_0 unabhängig wird, weil dann die zu integrirende Function für das von z_0 ausgehende und das nach z_0 zurückführende Integral denselben constanten Factor hat. In diesem Falle kann also eine Zusammenziehung der gegebenen Curve $L^0_{r', r'', \dots r^{(i)}}$ ohne Rücksicht auf den Punkt z_0 stattfinden.

3.

Vermittelst der gewonnenen Resultate lässt sich bereits die am Schlusse von Nr. 1 gestellte Frage beantworten. Irgend zwei beliebige von z_0 nach z_1, aber durch keinen singulären Punkt hindurch führende Wege bilden, wenn wir den einen in umgekehrter Richtung nehmen, eine geschlossene Curve $L^0_{r', r'', \dots r^{(i)}}$. Verstehen wir also unter g und h zwei beliebige der Grössen $z_0\,a_0\,a_1\dots a_n$, so ergiebt sich, dass die Differenz zweier verschiedener Werthe des Integrals 1) sich stets ausdrücken lässt durch eine Summe von Integralen der Form

$$\int_g^h U\,dz,$$

jedes multiplicirt mit einer Constanten, die ihrerseits die Form $e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\beta}$ hat, wo α und β auf einfache Weise von den Exponenten α_0 $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ abhängen. Es versteht sich, dass die Hinzuziehung des Punktes ∞ für g oder h hier noch nicht nothwendig ist, so lange es sich nur um endliche Integrationswege handelt.

Erwägen wir ferner, dass jedes zwischen den Grenzen z_0 und z_1 genommene Integral in zwei andere zerlegt werden kann, die beide zur untern Grenze irgend einen singulären Punkt haben, so finden wir, dass wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit uns auf die Betrachtung derjenigen Integrale beschränken können, deren untere Grenze a_r ist ($r = 0, 1, 2, \ldots n$). Wir nennen im Folgenden, indem wir uns an analoge, theils von Herrn Carl Neumann, theils von Herrn Pochhammer eingeführte Bezeichnungen anschliessen, das Integral

$$\text{I)} \qquad \int_{a_r}^{z} U\,dz$$

das „allgemeine hypergeometrische Integral" und die Integrale

$$\text{II)} \qquad \int_{a_\varkappa}^{a_\lambda} U\,dz,$$

wo $a_\varkappa$ und a_λ irgend zwei der $n+2$ Punkte $a_0\, a_1 \ldots a_n$ oder ∞ bedeuten, die „Fundamentalwerthe" des allgemeinen hypergeometrischen Integrals. Dann können wir den gefundenen Satz zunächst folgendermassen aussprechen:

> „Irgend zwei auf verschiedenen Integrationswegen genommene Integrale I) unterscheiden sich von einander durch einen linearen homogenen Ausdruck der Fundamentalwerthe mit constanten Coefficienten" (wobei zunächst vom Punkte ∞ als Grenze abzusehen ist).

Die Coefficienten dieses linearen homogenen Ausdrucks sind durch die Integrationswege bestimmt. Ist also kein bestimmter Weg vorgeschrieben, so involvirt das allgemeine hypergeometrische Integral willkürliche Constante, deren Anzahl, wie man leicht erkennt, mit der Anzahl der von einander unabhängigen Fundamentalwerthe II) übereinstimmt. Um diese Anzahl zu bestimmen, ist es nothwendig, zu untersuchen, ob zwischen den Fundamentalwerthen Relationen bestehen, und welche dieses sind.

4.

Indem wir uns die unabhängige Veränderliche, wie gewöhnlich, auf einer Kugelfläche mit unendlich grossem Radius beweglich denken und den Punkt ∞ von jetzt ab durch a_{n+1} bezeichnen, erhalten wir vermittelst Nr. 2 die Gleichung

$$\text{III)} \qquad \int\limits_{(L^0_{0,1,2,\dots n+1})} U\,dz = 0,$$

welche besteht, weil die hier angewendete geschlossene Integrationscurve auf der einen Seite keinen singulären Punkt einschliesst. Es wird in der That im Folgenden gestattet sein, den Punkt $\infty = a_{n+1}$ ebenso, wie die endlichen singulären Punkte zu behandeln, da nach den gemachten Voraussetzungen das betrachtete Integral einerseits den Punkt ∞ als Grenze erhalten darf, andererseits verschwindet, wenn auf einem unendlich kleinen um ∞ genommenen Kreise oder auch auf einem unendlich grossen um den Nullpunkt beschriebenen Kreise integrirt wird.

Die Curve $L^0_{0,1,2,\dots n+1}$ kann nun, ebenfalls nach Nr. 2, beliebig, d. h. ohne Rücksicht auf den Punkt z_0, zusammengezogen werden, wenn kein singulärer Punkt überschritten wird. Um diese Zusammenziehung so zu bewerkstelligen, dass die Gleichung III) die gesuchten Relationen zwischen den Fundamentalwerthen des allgemeinen hypergeometrischen Integrals liefert, beschreiben wir zunächst um jeden der $n+2$ Punkte $a_0\, a_1 \dots a_{n+1}$ Kreise mit kleinem Radius, bezeichnen auf jedem derselben einen beliebigen Punkt durch $\mathfrak{a}_\varkappa$ und haben nun zwischen diesen letzteren solche Verbindungslinien zu ziehen, dass deren beiderseitige Ufer im Verein mit den äusseren Seiten der Kreisperipherien in einem continuirlichen Zuge durchlaufen werden können. Es wird dies beispielsweise erreicht werden durch die $n+1$ Verbindungslinien $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_{n+1}$ oder durch die $n+1$ Verbindungslinien, die wir aus den vorigen erhalten, wenn wir die Punkte in irgend einer andern Reihenfolge nehmen, oder auch durch die $n+1$ Verbindungslinien $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_{n+1}$ u. s. w. Allein es kommt hier darauf an, alle möglichen Arten ins Auge zu fassen, durch welche jene $n+2$ Punkte auf die verlangte Art, d. h. so, dass mit Zuhilfenahme der Kreise ein continuirlicher Zug entsteht, mit einander verbunden werden können. Mit Rücksicht hierauf lässt sich zeigen, dass die Anzahl jener Verbindungslinien nicht mehr und nicht weniger als $n+1$ betragen darf; denn zunächst müssen dieselben so gewählt werden, dass nicht drei oder mehr als drei eine geschlossene Figur bilden, weil es sonst nicht möglich wäre, ohne Ueberschreitung der Grenze in einem continuirlichen Zuge von der einen Seite derselben auf die andere zu gelangen. Nun lehrt eine einfache geometrische Betrachtung, dass man zwischen ν gegebenen Punkten nicht ν oder mehr je zwei verbindende Linien ziehen kann, ohne dass mindestens eine geschlossene Figur entsteht. Hieraus ergiebt sich für unsern Fall, dass die Anzahl der Verbindungslinien höchstens $n+1$ betragen darf. Aber diese Zahl muss auch erreicht werden, weil bei einer kleinern Anzahl die Punkte $\mathfrak{a}_\varkappa$ in einzelne getrennte Gruppen zerfallen müssten, so dass wieder der verlangte continuirliche Zug nicht möglich wäre. Nachdem wir so gefunden, dass die Anzahl $n+1$ für die zu zeichnenden Verbindungslinien zugleich nothwendig und hinreichend ist, erkennen wir noch leicht, dass dieselben nicht beliebig sein können, sondern so gewählt werden müssen, dass keine geschlossene Figur entsteht. Denn in diesem Falle würden wieder getrennte Gruppen von Punkten auftreten, was aber nicht sein darf.

Wir wollen im Folgenden ein System von $\nu-1$ Linien, die zwischen ν Punkten so gezogen sind, dass keine geschlossene Figur entstanden ist, „ein zu jenen ν Punkten gehöriges vollständiges Liniensystem"* nennen, und nun die Integration über die beiden Ufer eines zu den $n+2$ singulären Punkten der Function U gehörigen vollständigen Liniensystems und die zugehörigen Kreisperipherien wirklich ausführen. Es ist klar, dass die zu integrirende Function auf den beiden Ufern derselben Verbindungslinie sich nur durch einen constanten Factor unterscheidet, welcher die Form $e^{2\pi i \alpha}$ hat, worin α einen linearen homogenen Ausdruck der Exponenten $\alpha_\varkappa$ mit den Coefficienten $+1$ oder -1 bedeutet. Zur Erläuterung soll die Zerlegung des Integrals für einen bestimmten Integrationsweg, der aus den beiden Ufern des vollständigen Liniensystems $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, . . $\mathfrak{a}_n\mathfrak{a}_{n+1}$ und den Peripherien der Kreise $\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_{n+1}$ bestehen und im Punkte $\mathfrak{a}_0$ beginnen mag, wirklich ausgeführt werden. Wir finden zunächst

$$\left.\begin{array}{l}
\qquad\qquad\displaystyle\int_{\mathfrak{a}_0}^{\mathfrak{a}_1} U\,dz + \int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{a}_2} U\,dz + \ldots + \int_{\mathfrak{a}_n}^{\mathfrak{a}_{n+1}} U\,dz \\
\displaystyle + \int_{(\mathfrak{A}_{n+1})} U\,dz + e^{-2\pi i s}\int_{\mathfrak{a}_{n+1}}^{\mathfrak{a}_n} U\,dz + e^{-2\pi i s}\int_{(\mathfrak{A}_n)} U\,dz + e^{-2\pi i (s-\alpha_n)}\int_{\mathfrak{a}_n}^{\mathfrak{a}_{n-1}} U\,dz \\
+ \ldots \\
\displaystyle + e^{-2\pi i(\alpha_1+\alpha_0)}\int_{(\mathfrak{A}_1)} U\,dz + e^{-2\pi i \alpha_0}\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{a}_0} U\,dz + e^{-2\pi i \alpha_0}\int_{(\mathfrak{A}_0)} U\,dz
\end{array}\right\} = 0.$$

Lassen wir nun die Punkte $\mathfrak{a}_\varkappa$ unendlich nahe an die entsprechen den Punkte $a_\varkappa$ rücken, so dass die über die Kreise $\mathfrak{A}_\varkappa$ genommenen Integrale verschwinden, und ziehen wir die zwischen denselben Grenzen genommenen Integrale derselben Function U zusammen, so geht die Gleichung in folgende über:

* Eine andere charakteristische Eigenschaft eines vollständigen Liniensystems, die ebenfalls als Definition benutzt werden könnte, ist die, dass man vermittelst desselben von jedem der ν gegebenen Punkte zu jedem andern, aber nur auf einem Wege, gelangen kann.

$$\text{IV)}\quad (1-e^{-2\pi i\alpha_0})\int_{a_0}^{a_1} U\,dz + (1-e^{-2\pi i(\alpha_0+\alpha_1)})\int_{a_1}^{a_2} U\,dz + \dots$$
$$+ (1-e^{-2\pi i(\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n)})\int_{a_n}^{\infty} U\,dz = 0,$$

so dass zwischen den $n+1$ Fundamentalwerthen

$$\int_{a_0}^{a_1} U\,dz \quad \int_{a_1}^{a_2} U\,dz \dots \int_{a_n}^{\infty} U\,dz$$

eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Gleiches gilt offenbar von irgendwelchen $n+1$ Fundamentalwerthen, wenn nur ihre Integrationswege ein zu den $n+2$ Punkten $a_0\, a_1 \dots a_{n+1}$ gehöriges vollständiges Liniensystem bilden.

Die Gleichung IV) oder die ihr analogen Gleichungen gehen in lineare homogene Gleichungen von einem niedrigeren Grade über, wenn einer oder mehrere der Coefficienten verschwinden; und dies tritt offenbar ein, wenn einer der Exponenten $\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ oder die Summe einiger von ihnen eine positive oder negative ganze Zahl ist. Des Folgenden wegen hebe ich den Fall besonders hervor, wenn die Summe zweier Exponenten, z. B. $\alpha_\varkappa + \alpha_\lambda$, eine ganze Zahl ist. Alsdann ist offenbar das auf dem Wege $L^0_{\varkappa,\lambda}$ genommene Integral von dem Anfangswerthe z_0 unabhängig, und hieraus folgt, dass das zwischen den Grenzen $a_\varkappa$ und a_λ genommene Fundamentalintegral linear homogen durch $n-1$ andere Integrale ausgedrückt werden kann, deren Wege ein vollständiges Liniensystem bilden, welches zu den nach Ausschluss von $a_\varkappa$ und a_λ noch übrig bleibenden n singulären Punkten gehört.

5.

Nach Nr. 4 können durch n Fundamentalwerthe, deren Integrationswege keine geschlossene Figur involviren, alle übrigen linear homogen mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden. Ein System von solchen n Fundamentalwerthen, welche dieser Bedingung genügen, wird nach Herrn Fuchs ein Fundamentalsystem genannt. Der am Schlusse von Nr. 3 gefundene Satz geht nun aber in folgenden über:

„Das allgemeine hypergeometrische Integral von a_r bis z ist gleich dem auf einem beliebig vorgeschriebenen Wege zwischen denselben Grenzen genommenen Integral, vermehrt um einen linearen homogenen, mit willkürlichen constanten Coefficienten versehenen Ausdruck der n Werthe eines Fundamentalsystems."

Bezeichnen wir die Werthe eines solchen Systems durch $w_1, w_2, \dots w_n$ und den auf einem bestimmten Wege von a_r bis z genommenen Integralwerth durch

$$\int_{a_r}^{z} \Big| U\,dz,$$

wobei aber zu bemerken, dass die zwischen a_r und z gezogene gerade Linie als Integrationsweg natürlich nur gewählt werden darf, wenn auf derselben kein anderer singulärer Punkt liegt, so ist

$$\text{V)} \qquad \int_{a_r}^{z} U\,dz = \int_{a_r}^{z} \Big| U\,dz = \sum_{1}^{n}{}_i C_i w_i,$$

wo die C willkürliche Constante bedeuten.

Die Fundamentalwerthe sind, wie ihre Definition lehrt, von den $2n+2$ Grössen $a_0 a_1 \ldots a_n$, $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n$ abhängig. Betrachten wir nun die $2n+1$ Grössen $a_1 \ldots a_n$, $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n$ als constant, dagegen a_0 als variabeln Parameter, den wir im Folgenden durch u bezeichnen, so sind die Fundamentalwerthe Functionen von u, deren Eigenschaften wir zu untersuchen haben.

Aus den Abhandlungen der Herren Fuchs und Pochhammer ergeben sich zunächst für die Fundamentalwerthe des allgemeinen hypergeometrischen Integrals, als Functionen von u aufgefasst, mit Rücksicht auf ihre Eindeutigkeit und Stetigkeit, folgende fünf Sätze, wenn wir noch der Kürze halber das zwischen den Grenzen $a_\varkappa$ und a_λ genommene Integral von $U\,dz$ durch $(\varkappa, \lambda)$ bezeichnen, wo den Zahlen $\varkappa$ und λ im Allgemeinen die Werthe $0, 1, 2, \ldots n+1$ beigelegt werden können, wenn noch berücksichtigt wird, dass alsdann $a_0 = u$ und $a_{n+1} = \infty$ ist:

1. Jedes Integral $(\varkappa, \lambda)$, wo weder $\varkappa$, noch λ gleich 0 sein darf, ist um $u = a_i$ eindeutig und stetig, wenn i weder gleich $\varkappa$, noch gleich λ, noch gleich $n+1$ ist.

2. Jedes Integral $(\varkappa, \lambda)$, wo $\varkappa$ und λ weder gleich 0, noch gleich $n+1$ sein dürfen, ist nach Division durch u^{α_0} um $u = \infty$ eindeutig und stetig.

3. Jedes Integral $(0, \varkappa)$, wo $\varkappa$ weder gleich 0, noch gleich $n+1$ sein darf, ist um $u = a_\varkappa$ nach Division durch $(u - a_\varkappa)^{\alpha_0 + \alpha_\varkappa + 1}$ eindeutig und stetig.

4. Das Integral $(0, n+1)$ ist um $u = \infty$ nach Division mit

$$u^{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1}$$

eindeutig und stetig.

5. Das Integral $(\varkappa, \lambda)$ ist für die beiden Punkte $a_\varkappa$ und a_λ, ebenso das Integral $(0, \varkappa)$ für irgend einen Punkt a_i, wo i nicht gleich $\varkappa$ und nicht gleich $n+1$ sein darf, im Allgemeinen logarithmisch unendlich.

Nun sei unter einem zum Punkte $a_\varkappa$ gehörigen „algebraischen" Fundamentalsysteme ein solches verstanden, dessen einzelne n Elemente entweder an sich oder nach Division mit irgend einer Potenz von $u-a_x$ um $u=a_x$ eindeutig und stetig sind. Alsdann finden wir ein zum Punkte a_1 gehöriges algebraisches Fundamentalsystem auf folgende Weise:

Nach den vorangeschickten Sätzen sind zunächst unter den Fundamentalwerthen alle diejenigen um $u=a_1$ eindeutig und stetig, welche zur untern und obern Grenze irgend zwei der n Punkte

$$a_2\, a_3 \ldots a_n\, a_{n+1}$$

haben. Von allen diesen Integralen dürfen aber nach den in Nr. 4 gemachten Auseinandersetzungen zu einem Fundamentalsystem höchstens $n-1$ hinzugenommen werden, und zwar solche, deren Integrationsbahnen ein zu den n Grenzpunkten gehöriges vollständiges Liniensystem bilden, also z. B. die $n-1$ Integrale

$$(2,3) \quad (3,4) \;\ldots\; (n,\; n+1).$$

Der Integrationsweg des n^{ten} Integrals muss vor Allem die Bedingung erfüllen, mit den $n-1$ ersten Wegen keine geschlossene Figur zu bilden. Darnach könnte irgend eines der Integrale $(0,x)$ oder $(1,x)$, oder endlich das Integral $(0,1)$ gewählt werden. Die ersten beiden sind aber nach Satz 5 auszuschliessen, da das Fundamentalsystem ein algebraisches werden soll. Hiernach bleibt als n^{tes} Integral des gesuchten Fundamentalsystems $(0,1)$ übrig; damit dieses aber von den $n-1$ ersten unabhängig, also durch dieselben nicht linear homogen ausdrückbar sei, ist nach der am Schlusse von Nr. 4 gemachten Bemerkung noch die Bedingung zu erfüllen nöthig, dass die Summe der beiden zu n und a_1 gehörigen Exponenten, also $\alpha_0+\alpha_1$, keine ganze Zahl sei.

In derselben Weise werden die zu den übrigen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme gebildet, wobei die Bedingungen hinzukommen, dass

$$\alpha_0+\alpha_2 \quad \alpha_0+\alpha_3 \;\cdots\; \alpha_0+\alpha_n$$

und

$$\alpha_0-s=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$$

keine ganzen Zahlen seien. In Bezug auf den Unendlichkeitspunkt ist noch zu merken, dass hier auch die $n-1$ ersten Integrale nicht unmittelbar, sondern erst nach Division mit der Potenz u^{α_0} um $u=\infty$ eindeutig und stetig sind.

Wir erhalten hiernach folgende $n+1$ algebraische Fundamentalsysteme:

$$\begin{array}{lllll}
(0,1) & (2,3) & (3,4) & \ldots & (n,\; n+1) \\
(0,2) & (3,4) & (4,5) & \ldots & (n+1,\; 1) \\
(0,3) & (4,5) & (5,6) & \ldots & (1,\; 2) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(0,n) & (n+1,\; 1) & (1,2) & \ldots & (n-2,\; n-1) \\
(0,\; n+1) & (1,2) & (2,3) & \ldots & (n-1,\; n).
\end{array}$$

Je n in einer Horizontalreihe befindliche Fundamentalwerthe bilden ein Fundamentalsystem, und zwar die in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Reihe stehenden das zum Punkte $a_\varkappa$ gehörige. Ferner ist, abgesehen von dem in der letzten Reihe befindlichen, zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentalsystem, das erste Integral in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Horizontalreihe nach Division mit der Potenz $(u-a_\varkappa)^{\alpha_0+\alpha_\varkappa+1}$, jedes andere dagegen ohne Weiteres um $u=a_\varkappa$ eindeutig und stetig. Von den in der letzten Reihe stehenden ist das erste nach Division mit $u^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n+1}$, die übrigen nach Division mit u^{α_0} um $u=\infty$ eindeutig und stetig. Statt der letzten $n-1$ Integrale jeder Horizontalreihe können $n-1$ andere zwischen denselben Grenzen ausgewählt werden, wenn nur auch die Integrationswege dieser keine geschlossene Figur enthalten. Endlich sind die für die Existenz der algebraischen Fundamentalsysteme neu hinzukommenden Bedingungen die, dass keine der Summen $\alpha_0+\alpha_1$, $\alpha_0+\alpha_2$, ... $\alpha_0+\alpha_n$ und $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ eine ganze Zahl sei.

6.

Zum Schlusse sei es mir noch gestattet, als Beispiel den Fall $n=2$ hervorzuheben, weil derselbe auf die bekannten, namentlich von Euler und Jacobi behandelten Integrale führt, welche der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe Genüge leisten. Es ergeben sich zunächst die drei zu den Punkten $a_1\, a_2\, \infty$ gehörigen algebraischen Fundamentalsysteme

$$(2,3)=\int_{a_2}^{\infty} U\,dz,\qquad (0,1)=\int_{u}^{a_1} U\,dz,$$

$$(3,1)=\int_{\infty}^{a_1} U\,dz,\qquad (0,2)=\int_{u}^{a_2} U\,dz,$$

$$(1,2)=\int_{a_1}^{a_2} U\,dz,\qquad (0,3)=\int_{u}^{\infty} U\,dz.$$

Um aber Uebereinstimmung mit der gebräuchlichen Form dieser Integrale zu erzielen, setzen wir

$$a_1=0,\qquad a_2=1,\qquad z=\frac{1}{t},$$

$$\alpha_0=-\alpha,\quad \alpha_1=\alpha-\gamma,\quad \alpha_2=\gamma-\beta-1.$$

Dann geht $U\,dz$ über in

$$-t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-ut)^{-\alpha}\,dt,$$

welchen Ausdruck wir kurz durch $-V\,dt$ bezeichnen wollen. Die drei Fundamentalsysteme werden nun folgende:

$$(2,3)=\int\limits_0^1 V\,dt,\quad (0,1)=\int\limits_\infty^{\frac{1}{u}} V\,dt,$$

$$(1,3)=\int\limits_0^\infty V\,dt,\quad (0,2)=\int\limits_1^{\frac{1}{u}} V\,dt,$$

$$(1,2)=\int\limits_1^\infty V\,dt,\quad (0,3)=\int\limits_0^{\frac{1}{u}} V\,dt.$$

Aus den in Nr. 5 aufgestellten Eigenschaften des allgemeinen hypergeometrischen Integrals ergiebt sich nun, dass die beiden ersten Integrale nach Division mit u^0, resp. $u^{1-\gamma}$, in der Umgebung des Punktes $u=0$, die beiden folgenden nach Division mit u^0, resp. $(u-1)^{\gamma-\alpha-\beta}$, in der Umgebung von $u=1$, und endlich die beiden letzten Integrale nach Division mit $u^{-\alpha}$, resp. $u^{-\beta}$, in der Umgebung von $u=\infty$ eindeutig und stetig sind. Ferner folgt, dass sich durch je zwei ein Fundamentalsystem bildende Integrale die übrigen linear homogen mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.

Dies sind aber die charakteristischen Eigenschaften der Zweige der Riemann'schen Function P, die wir hier aus ihrer Integralform hergeleitet haben. In der That, wenn man noch in den zuletzt aufgestellten Integralen β statt α, β' statt β, $1-\alpha'$ statt γ und γ' statt $\gamma-\alpha-\beta$ setzt, so dass zwischen den neu eingeführten vier Grössen die Relation $\alpha'+\beta+\beta'+\gamma'=1$ besteht, so stimmen die Fundamentalwerthe

$$(2,3)\quad (0,1)\quad (1,3)\quad (0,2)\quad (1,2)\quad (0,3)$$

der Reihe nach mit den Riemann'schen Functionen

$$P^{\alpha}\quad P^{\alpha'}\quad P^{\gamma}\quad P^{\gamma'}\quad P^{\beta}\quad P^{\beta'}$$

bis auf einen willkürlichen constanten Factor überein.

VI.

Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Von

Professor A. Weiler

in Mannheim.

Die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung

$$f(z\,x_1\,x_2\ldots x_n\,p_1\,p_2\ldots p_n)=0$$

ist wesentlich abhängig von der Methode, nach welcher ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen von linearer Form integrirt wird. Die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0$$

hat bekanntlich $n-1$ verschiedene Lösungen φ. Das System von k partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0,\quad \sum_{i=1}^{i=n} b_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0\;\ldots\;\sum_{i=1}^{i=n} c_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0$$

hat höchstens $n-k$ gemeinsame Lösungen. Wenn in der That $n-k$ gemeinsame Lösungen vorhanden sind, so nennt man das System ein vollständiges.

Die Methode von Jacobi zur Integration eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen geht von der Voraussetzung aus, dass gewisse besondere Eigenschaften vorhanden sind, welche nicht jedes vollständige System hat. Ich habe eine andere Methode zur Integration des vollständigen Systems aufgestellt (vergl. Jahrg. 1875 dieser Zeitschr., S. 87), welche, unabhängig von dieser besondern Form des Systems, auf den folgenden Satz gegründet ist: „Wenn zwei partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, und zwei Lösungen der zweiten Gleichung als neue Veränderliche in die erste eingeführt werden, so ist der Quotient der den neuen Veränderlichen entsprechenden Coefficienten der transformirten Gleichung gleichfalls eine Lösung der zweiten Gleichung. Wenn also die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} b_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0$$

ein vollständiges System bilden und

$$\varphi = \beta_1, \quad \varphi = \beta_2$$

Lösungen der zweiten Gleichung sind, so ist auch der Quotient

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_2}{dx_i} : \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_1}{dx_i}$$

eine Lösung der zweiten Gleichung." Durch diesen Satz ist die allgemeine Eigenschaft des vollständigen Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen vortheilhaft ausgedrückt.

Als Clebsch eine Darstellung meiner Methode zur Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung

$$f(z\, x_1 x_2 \dots x_n\, p_1 p_2 \dots p_n) = 0$$

gab (Crelle'sches Journal Jahrg. 1865), nahm er Umgang von diesem Satze. Clebsch hat nur solche Systeme integriren wollen, welche die bekannte Jacobi'sche Form haben. Die Folge davon war, dass er, um zu den von mir gefundenen Resultaten zu gelangen, der Methode eine verwickelte und unvortheilhafte Gestalt geben musste. Clebsch ging eben — und er hat dies in seiner Abhandlung unzweideutig ausgesprochen — von der Ansicht aus, die Vervollkommnung der Methode zur Integration der allgemeinen Gleichung $f=0$ werde sich folgerichtig als eine Fortentwickelung der Jacobi'schen Methode erweisen. Nun hat auch Herr Mayer in den Mathemat. Annalen Bd. IX eine Darstellung meiner Methode gegeben, welche frei ist von jenem Mangel der von Clebsch gegebenen Darstellung. Herr Mayer hat in der That von dem oben ausgesprochenen Satze Gebrauch gemacht und giebt meine Methode innerhalb gewisser Grenzen in ihrer wahren Gestalt.

Ich habe schon erwähnt, dass die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung $f(z\, x_1 x_2 \dots x_n\, p_1 p_2 \dots p_n) = 0$ zurückgeführt wird auf die Integration von simultanen partiellen Differentialgleichungen, welche die lineare Form haben. Die Jacobi'sche Methode stützt den Beweis des Satzes, dass die zu integrirenden Gleichungen vollständige Systeme bilden, auf den algebraischen Zusammenhang zwischen den Coefficienten dieser Gleichungen. Ohne auf die algebraische Form der Coefficienten Rücksicht zu nehmen, habe ich diese Eigenschaft der linearen partiellen Differentialgleichungen aus einer andern Betrachtung hergeleitet (vergl. § 3 meiner Abhandlung 1875). Ich setze die Kenntniss des Verfahrens voraus, wonach man aus einem vollständigen Integral der Gleichung $f=0$ das allgemeine Integral dieser Gleichung herleitet. In gleicher erste unverändert bei; anstatt der zweiten setze ich diejenige Gleichung, welche durch die Elimination des Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}$ entsteht, und schreibe also die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0, \quad \sum_{i=2}^{i=n} b_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0.$$

Die zweite Gleichung hat die Lösung $\varphi = x_1$. Ich bestimme eine zweite Lösung $\varphi = \beta_2$, durch Integration und es ergeben sich weitere Lösungen dieser Gleichung nach der obigen Regel. Da

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{dx_1}{dx_i} = a_1$$

ist, so erhält man

$$\beta_3 = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_2}{dx_i}, \quad \beta_4 = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_3}{dx_i} \quad \text{u. s. w.}$$

Die $n-2$ Lösungen $\beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{n-1}$ setze ich als neue Veränderliche anstatt $x_2 x_3 \ldots x_{n-1}$ in die erste Gleichung ein. Aus den Coefficienten der transformirten Gleichung fällt dann die Veränderliche x_n von selbst hinaus. Durch die Integration dieser Gleichung erhält man die Lösung des vollständigen Systems.

Ich schreibe nun drei partielle Differentialgleichungen, welche ein vollständiges System bilden, welche also $n-3$ gemeinsame Lösungen haben, in der bekannten Abkürzung:

$$A(\varphi) = 0, \quad B(\varphi) = 0, \quad C(\varphi) = 0.$$

Wenn $\varphi = \gamma_1$, $\varphi = \gamma_2$ Lösungen der dritten Gleichung sind, so kann man nicht behaupten, dass in allen Fällen die Quotienten

$$B(\gamma_2) : B(\gamma_1), \quad A(\gamma_2) : A(\gamma_1)$$

gleichfalls Lösungen der dritten Gleichung seien. Man kann leicht zeigen, dass $n-3$ gemeinsame Lösungen vorhanden sein können, ohne dass diese Quotienten die erwähnte Eigenschaft haben.

Wir denken uns die beiden Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ als lineare Verbindungen zweier anderen Gleichungen $A'(\varphi) = 0$, $B'(\varphi) = 0$, welche in der That die Eigenschaft haben, dass die Quotienten

$$B'(\gamma_2) : B'(\gamma_1), \quad A'(\gamma_2) : A'(\gamma_1)$$

Lösungen der Gleichungen $C(\varphi) = 0$ sind, und das System der Gleichungen

$$A'(\varphi) = 0, \quad B'(\varphi) = 0, \quad C(\varphi) = 0$$

habe $n-3$ gemeinsame Lösungen. Es bestehen die identischen Gleichungen

$$A(\varphi) = A'(\varphi) + b\, B'(\varphi),$$
$$B(\varphi) = B'(\varphi) + a\, A'(\varphi),$$

und es ist offenbar, dass jene $n-3$ Lösungen auch dem ursprünglichen System entsprechen. Wenn aber die unbestimmten Coefficienten b und a nicht gerade von solcher Beschaffenheit sind, dass sich die Quotienten

$$b\,B'(\gamma_1):A'(\gamma_1),\quad a\,A'(\gamma_1):B'(\gamma_1)$$

als Lösungen der Gleichung $C(\varphi)=0$ darstellen, so können auch die Quotienten

$$B(\gamma_2):B(\gamma_1),\quad A(\gamma_2):A(\gamma_1)$$

nicht als Lösungen der Gleichung $C(\varphi)=0$ angesehen werden.

Wenn der Quotient $B(\gamma_2):B(\gamma_1)$ nicht eine Lösung der Gleichung $C(\varphi)=0$ ist, so giebt es eine lineare Verbindung $B'(\varphi)=0$ der Gleichungen $A(\varphi)=0$ und $B(\varphi)=0$, welche die Eigenschaft besitzt, dass der Quotient $B'(\gamma_2):B'(\gamma_1)$ eine Lösung der Gleichung $C(\varphi)=0$ ist. Man kann diese lineare Verbindung leicht herstellen, wenn eine dritte Lösung $\varphi=\gamma_3$ der Gleichung $C(\varphi)=0$ bekannt ist, welche nicht zugleich eine Lösung des Systems darstellt. Man giebt nämlich der linearen Verbindung die Lösung $\varphi=\gamma_3$, indem man $B(\gamma_3)A(\varphi)-A(\gamma_3)B(\varphi)=0$ setzt. Die Gleichungen $B'(\varphi)=0$ und $C(\varphi)=0$ haben die $n-2$ Lösungen des Systems; ausserdem haben sie die gemeinsame Lösung $\varphi=\gamma_3$. Aus dem Vorhandensein von $n-1$ gemeinsamen Lösungen folgt sofort die verlangte Eigenschaft der Gleichung $B'(\varphi)=0$, wonach sich der Quotient $B'(\gamma_2):B'(\gamma_1)$ als eine Lösung der Gleichung $C(\varphi)=0$ darstellt.

Um die Integration des vollständigen Systems

$$A(\varphi)=0,\quad B(\varphi)=0,\quad C(\varphi)=0$$

auszuführen, behalte ich nur die erste Gleichung unverändert bei. Die beiden anderen Gleichungen ersetze ich durch diejenigen Gleichungen, welche durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{dx_1}$ entstehen. Auch von diesen beiden behalte ich nur die erste bei und ersetze die andere durch diejenige Gleichung, welche durch die Elimination von $\frac{d\varphi}{dx_2}$ entsteht. Die partiellen Differentialgleichungen haben dann die folgende Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0,\quad \sum_{i=2}^{i=n} b_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0,\quad \sum_{i=3}^{i=n} c_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0.$$

Die zweite Gleichung hat die Lösung $\varphi=x_1$, die dritte Gleichung die Lösungen $\varphi=x_1$ und $\varphi=x_2$. Diese beiden Gleichungen haben also die gemeinsame Lösung $\varphi=x_1$, welche nicht eine Lösung des Systems ist. Wir nehmen an, es sei durch Integration die Lösung $\varphi=\gamma_3$ der dritten Gleichung bestimmt worden. Man erhält dann weitere Lösungen dieser Gleichung in der Form

$$\gamma_1 = \frac{1}{b_2}\sum_{i=2}^{i=n} b_i \frac{d\gamma_3}{dx_i}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{b_2}\sum_{i=2}^{i=n} b_i \frac{d\gamma_4}{dx_i} \quad \text{u. s. w.}$$

Die $n-3$ Lösungen $\gamma_3 \gamma_4 \ldots \gamma_{n-1}$ setze man als neue Veränderliche anstatt $x_3 x_4 \ldots x_{n-1}$ in die zweite Gleichung ein. Aus den Coefficienten der transformirten Gleichung fällt dann die Veränderliche x_n von selbst hinaus. Ich bestimme durch Integration eine Lösung $\varphi = \beta_2$ der transformirten Gleichung. Da auch $\varphi = x_1$ als eine solche bekannt ist, so ergeben sich weitere Lösungen dieser Gleichung in der Form

$$\beta_3 = \frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_2}{dx_i}, \quad \beta_4 = \frac{1}{a_1}\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_3}{dx_i} \quad \text{u. s. w.}$$

Die $n-3$ Lösungen $\beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{n-2}$ der zweiten Gleichung führe ich als neue Veränderliche anstatt $x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$ in die erste Gleichung ein. Aus den Coefficienten der transformirten Gleichung fallen die Veränderlichen x_{n-1} und x_n von selbst weg. Durch die Integration dieser Gleichung erhält man die Lösung des vollständigen Systems.

Wenn das vollständige System aus mehr als drei partiellen Differentialgleichungen besteht, so kommen zu den bisherigen nicht noch weitere Rücksichten hinzu. Die Verallgemeinerung des hier eingeschlagenen Integrationsverfahrens ergiebt sich ohne Weiteres.

In § 3 meiner Abh. 1875 habe ich S. 278 Z. 2 den folgenden Satz ausgesprochen: „Wenn m partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, so bilden auch je i von diesen m partiellen Differentialgleichungen ein vollständiges System, und haben deshalb $m-i$ gemeinsame Lösungen.“ In dieser Allgemeinheit ausgesprochen ist der Satz allerdings nicht richtig. Dies erhellt aus den vorstehenden Betrachtungen. Dass derselbe für die in der dort behandelten Aufgabe vorliegenden Systeme richtig ist, folgt aus den weiteren Aufstellungen des erwähnten Paragraphen.

§ 2. Ueber den algebraischen Ausdruck der Beziehungen, welche zwischen den Coefficienten der partiellen Differentialgleichungen eines vollständigen Systems bestehen.

Wir nehmen an, die partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} b_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0$$

bilden ein vollständiges System, und schreiben dieselben abkürzend

$$A(\varphi) = 0, \quad B(\varphi) = 0.$$

Die $n-1$ Lösungen der Gleichung $B(\varphi) = 0$ bezeichnen wir mit $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$ und setzen dieselben als neue Veränderliche in $A(\varphi) = 0$ ein. Die Gleichung $A(\varphi) = 0$ geht dann über in

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} A(\beta_i)\frac{d\varphi}{d\beta_i}=0.$$

Theilt man diese Gleichung durch $A(\beta_1)$, macht man also den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{d\beta_1}$ zur Einheit, so erhalten die übrigen Coefficienten der transformirten Gleichung die Form $\frac{A(\beta_i)}{A(\beta_1)}$, und sind dann, auf Grund jener allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems, als Lösungen der Gleichung $B(\varphi)=0$ zu betrachten. Diese Bemerkung setzt uns in den Stand, jene Eigenschaft des vollständigen Systems durch Bedingungsgleichungen auszudrücken, welche zwischen den Coefficienten der beiden partiellen Differentialgleichungen bestehen.

Man erhält sehr einfache Bedingungsgleichungen, wenn man zu dieser Eigenschaft des Systems noch eine weitere Eigenschaft hinzufügt. Wir nehmen an, die Gleichung $A(\varphi)=0$ habe einen Factor erhalten von solcher Art, dass $A(\beta_1)$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$ ist. Man kann dann sagen, dass jeder Coefficient $A(\beta_i)$ der transformirten Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} A(\beta_i)\frac{d\varphi}{d\beta_i}=0$$

eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$ sei, und man hat die identische Gleichung $B(A(\beta_i))=0$, welche immer richtig ist, wenn man anstatt i eine der Zahlen $1, 2 \ldots n-1$ setzt.

Bezeichnen wir die $n-1$ Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ mit $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ und führen dieselben als neue Veränderliche in die Gleichung $B(\varphi)=0$ ein, so geht dieselbe über in

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} B(\alpha_i)\frac{d\varphi}{d\alpha_i}=0.$$

Theilt man diese Gleichung durch $B(\alpha_1)$, macht man man also den Coefficienten von $\frac{d\varphi}{d\alpha_1}$ zur Einheit, so erhalten die übrigen Coefficienten der transformirten Gleichung die Form $\frac{B(\alpha_i)}{B(\alpha_1)}$ und sind dann als Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ zu betrachten. Wir nehmen aber ferner an, die Gleichung $B(\varphi)=0$ habe einen Factor erhalten von solcher Art, dass $B(\alpha_1)$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ ist. Es sind dann alle Coefficienten $B(\alpha_i)$ der transformirten Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} B(\alpha_i)\frac{d\varphi}{d\alpha_i}=0$$

einzeln genommen als Lösungen der Gleichung $A(\varphi)=0$ zu betrachten. Man hat die identische Gleichung $A(B(\alpha_i))=0$, in welcher man anstatt i jede der Zahlen $1, 2\ldots n-1$ setzen darf.

Wir haben jetzt eine identische Gleichung aufgestellt, welche von den unbekannten Lösungen α_i abhängig ist, während die obige von den unbekannten Lösungen β_i abhängt. Selbstverständlich behält die eine und die andere dieser Gleichungen ihre Giltigkeit, wenn man anstatt α_i und β_i die den Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen setzt, welche wir mit dem Buchstaben φ bezeichnet haben. Es bestehen also die identischen Gleichungen

$$B(A(\varphi)) = 0, \quad A(B(\varphi)) = 0,$$

in welchen φ irgend eine der $n-2$ den Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen ist. Sehr leicht eliminirt man die Unbekannte φ. Man schreibt in dieser Absicht die Gleichung

$$B(A(\varphi)) - A(B(\varphi)) = 0,$$

welche vor den beiden obigen dadurch ausgezeichnet ist, dass sie nur partielle Differentialquotienten der ersten Ordnung von φ enthält. In der That heben sich alle diejenigen Glieder dieser Gleichung gegenseitig auf, in welchen partielle Differentialquotienten der zweiten Ordnung von φ vorkommen. Ferner besitzt die vorliegende Gleichung die merkwürdige Eigenschaft, dass die Coefficienten von $\frac{d\varphi}{dx_i}$ einzeln genommen identisch gleich Null sind. Dies als richtig angenommen, sieht man sofort, dass zwischen den Coefficienten der Gleichung $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ n Bedingungsgleichungen bestehen von der Form

$$B(a_i) - A(b_i) = 0,$$

da man anstatt i jede der Zahlen $1, 2 \ldots n$ setzen darf.

Der Beweis des obigen Satzes, dass in der Gleichung $B(A(\varphi)) - A(B(\varphi)) = 0$ die Coefficienten von $\frac{d\varphi}{dx_i}$ einzeln genommen identisch gleich Null sind, kann leicht geführt werden. Wir haben erwähnt, dass diese Gleichung eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung ist, welcher alle die den Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen genügen. Wollte man annehmen, dass ihre Coefficienten die angegebene Eigenschaft nicht haben, so könnte sie nichts Anderes sein, als eine lineare Verbindung der Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$, und wäre als solche identisch mit $aA(\varphi) + bB(\varphi) = 0$. Es genügen aber der Gleichung $B(A(\varphi)) - A(B(\varphi)) = 0$ nicht blos die den Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen, sondern auch jede Lösung $\varphi = \beta_i$, welche der Gleichung $B(\varphi) = 0$ allein entspricht, weil nach dem Obigen $B(A(\beta_i)) = 0$ ist, und ebenso genügt derselben auch jede Lösung $\varphi = \alpha_i$, welche der Gleichung $A(\varphi) = 0$ allein entspricht, weil nach dem Obigen $A(B(\alpha_i)) = 0$ ist. Soll der Gleichung $aA(\varphi) + bB(\varphi) = 0$ die Lösung $\varphi = \beta_i$ entsprechen, so muss $a = 0$ sein; soll derselben die Lösung $\varphi = \alpha_i$ entsprechen, so muss $b = 0$

sein. Es muss also gleichzeitig $a=0$ und $b=0$ sein, und damit ist die obige Behauptung bewiesen, wonach die Gleichung $B(A(\varphi))-A(B(\varphi))\doteq 0$ die Eigenschaft hat, dass jeder Coefficient von $\frac{d\varphi}{dx_i}$ einzeln genommen identisch gleich Null ist.

Es handelt sich freilich um eine besondere Classe vollständiger Systeme, wenn demselben die obigen Bedingungsgleichungen entsprechen. Dies vollständige System ist dadurch ausgezeichnet, dass jedesmal, wenn $\varphi=\beta_i$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi)=0$ ist, auch $\varphi=A(\beta_i)$ eine Lösung dieser Gleichung, und wenn $\varphi=\alpha_i$ eine Lösung der Gleichung $A(\varphi)=0$ ist, auch $\varphi=B(\alpha_i)$ eine Lösung dieser Gleichung darstellt. Clebsch hat das vollständige System der Gleichungen $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$, welche die Bedingungsgleichungen $B(a_i)-A(b_i)=0$ identisch erfüllen, ein Jacobi'sches System genannt. Ein vollständiges System von mehr als zwei partiellen Differentialgleichungen wird nach Clebsch ein Jacobi'sches genannt, wenn je zwei Gleichungen des Systems eben diese Bedingungsgleichungen erfüllen.

Man kann jedes vollständige System der Gleichungen $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$ in ein Jacobi'sches umwandeln, indem man denselben gewisse Factoren giebt. Dieser Satz folgt unmittelbar aus der allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems. Selbstverständlich darf man die beiden Gleichungen $A(\varphi)=0$, $B(\varphi)=0$ durch beliebige lineare Verbindungen ersetzen, bevor man dieselben durch die erwähnte Multiplication in ein Jacobi'sches System überführt. Wenn das vollständige System aus mehr als zwei partiellen Differentialgleichungen besteht, so kann man nicht mehr beliebige lineare Verbindungen davon durch Factoren in ein Jacobi'sches System umwandeln. Man muss dann die partiellen Differentialgleichungen nach einer bestimmten Regel in lineare Verbindungen bringen, um ein Jacobi'sches System zu erhalten. Im 65. Bande des Crelle'schen Journals hat Clebsch gezeigt, wie man diese linearen Verbindungen, welche Jacobi'sche Systeme darstellen, in ihrer allgemeinsten Form anschreiben kann. Es ist im vorigen Paragraphen das vollständige System von drei und mehr partiellen Differentialgleichungen erwähnt worden, in welchem je zwei Gleichungen für sich genommen ein vollständiges System bilden. Wenn das vollständige System diese Eigenschaft hat, so kann man dasselbe auch wieder in ein Jacobi'sches umwandeln, indem man jeder Gleichung einen Factor giebt.

Wenn die partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0,\quad \sum_{i=1}^{i=n} b_i\frac{d\varphi}{dx_i}=0$$

ein vollständiges System bilden, welches nicht zugleich ein Jacobisches ist, so gestalten sich die Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Coefficienten bestehen, weniger einfach. Man kann dieselben aus den für das Jacobi'sche System giltigen Bedingungsgleichungen herleiten. Giebt man allen Coefficienten a_i den Factor a, und allen Coefficienten b_i den Factor b, so geht das vollständige System in ein Jacobi'sches über. Man hat daher die Bedingungsgleichungen

$$b B(a a_i) - a A(b b_i) = 0,$$

in welchen an die Stelle von i nacheinander die Zahlen $1, 2 \ldots n$ zu setzen sind. Eliminirt man die unbestimmten Factoren a und b, so behält man $n-2$ Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Coefficienten des vollständigen Systems bestehen.

§ 3. Betrachtung des Falles, in welchem die Eigenschaft des Jacobi'schen Systems mit Vortheil verwendet wird.

Wenn die partiellen Differentialgleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ ein vollständiges System bilden, so eliminiren wir den partiellen Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx_1}$ und behalten die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0, \quad \sum_{i=2}^{i=n} b_i \frac{d\varphi}{dx_i} = 0$$

Wir bestimmen (vergl. § 1) durch Integration eine Lösung $\varphi = \beta_2$ der zweiten Gleichung. Die weiteren Lösungen ergeben sich in der Form

$$\beta_3 = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_2}{dx_i}, \quad \beta_4 = \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^{i=n} a_i \frac{d\beta_3}{dx_i} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Lösungen führen wir als neue Veränderliche in die erste Gleichung ein und erhalten alsdann durch die Integration der transformirten Gleichung eine Lösung des Systems.

Wir nehmen jetzt an, es sei aus irgend einem Grunde versagt, die Elimination von $\frac{d\varphi}{dx_1}$ auszuführen. Man müsste dann zwei Lösungen $\varphi = \beta_1$, $\varphi = \beta_2$ der Gleichung $B(\varphi) = 0$ durch Integration bestimmen, um weitere Lösungen auf Grund der allgemeinen Eigenschaft vollständiger Systeme daraus ableiten zu können. Man fände $\beta_3 = \frac{A(\beta_2)}{A(\beta_1)}$ u. s. w. Wir gehen aber von der Voraussetzung aus, dass der in dem vorigen Paragraphen besprochene Fall vorliege, dass nämlich die Gleichungen $A(\varphi) = 0$ und $B(\varphi) = 0$ ein Jacobi'sches System bilden. Man braucht dann doch nur eine Lösung $\varphi = \beta_1$ der Gleichung $B(\varphi) = 0$ durch Integration zu bestimmen Denn in dem Jacobi'schen System ist auch $\beta_2 = A(\beta_1)$ eine Lösung der Gleichung $B(\varphi) = 0$.

Um die allgemeine partielle Differentialgleichung $f(z\, x_1\, x_2 \ldots x_n\, p_1\, p_2 \ldots p_n) = 0$ zu integriren, habe ich dieselbe in § 2 meiner Abh. 1875 in der

Form $\varphi_1 = c_1$ geschrieben, wo c_1 irgend eine der in der Gleichung $f = 0$ vorkommenden Beständigen ist. Es handelt sich darum, $n-1$ ähnliche Gleichungen

$$\varphi_2 = c_2, \ \varphi_3 = c_3 \ldots \varphi_n = c_n$$

anzugeben, um sagen zu können, die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \ldots p_n$ seien als Function der Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \ldots x_n$ bestimmt. Zur Bestimmung der Functionen $\varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_n$ habe ich die partiellen Differentialgleichungen aufgestellt:

$$(\varphi_1 \varphi) = 0, \ (\varphi_2 \varphi) = 0 \ \ldots \ (\varphi_{n-1} \varphi) = 0,$$

wobei ich mich der folgenden Abkürzung bediene:

$$(\varphi_k \varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) \frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_k}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) \right),$$

und weiter abkürzend

$$\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) = \frac{d\varphi_k}{dz} p_i + \frac{d\varphi_k}{dx_i}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) = \frac{d\varphi}{dz} p_i + \frac{d\varphi}{dx_i}$$

setze. Es ist $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$, ferner $\varphi = \varphi_3$ eine Lösung des Systems $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$, ferner $\varphi = \varphi_4$ eine Lösung des Systems $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$, $(\varphi_3 \varphi) = 0$ u. s. w.

Für den Fall, dass die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ nicht vorkommt, sind diese Systeme identisch mit denjenigen, welche Jacobi für diesen Fall aufgestellt hat. Dass dieselben, in dieser Beschränkung genommen, die Bedingungsgleichung $A(B(\varphi)) - B(A(\varphi)) = 0$ erfüllen, hat Jacobi sehr einfach bewiesen. Setzt man anstatt $A(\varphi) = 0$, $B(\varphi) = 0$ die Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$, so schreibt sich die Bedingungsgleichung in der Form:

$$(\varphi_1 (\varphi_2 \varphi)) - (\varphi_2 (\varphi_1 \varphi)) = 0.$$

Man weiss, dass sich die partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von φ gegenseitig aufheben, dass also nur partielle Differentialquotienten der ersten Ordnung von φ vorkommen. Mit Rücksicht darauf, dass $(\varphi_1 \varphi) = -(\varphi \varphi_1)$ ist, schreibt sich die Bedingungsgleichung in der Form:

$$(\varphi_1 (\varphi_2 \varphi)) + (\varphi_2 (\varphi \varphi_1)) = 0.$$

In seiner Beweisführung geht Jacobi von der folgenden Gleichung aus:

$$(\varphi (\varphi_1 \varphi_2)) + (\varphi_1 (\varphi_2 \varphi)) + (\varphi_2 (\varphi \varphi_1)) = 0.$$

Man kann leicht nachweisen, dass dieselbe eine identische ist; denn es heben sich hier nicht allein alle partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von φ gegenseitig auf, sondern ebenso auch die partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von φ_1 und φ_2. Da überhaupt keine Glieder vorhanden sind, welche frei sind von den Differentialquotienten der zweiten Ordnung, so sieht man ein, dass sich alle Glieder ohne Ausnahme gegenseitig aufheben. Man bemerke noch, dass $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$, dass also $(\varphi_1 \varphi_2) = 0$ eine identische Gleichung ist. Daraus folgt, dass die vorliegende identische Gleichung in die oben verlangte übergeht:

$$(\varphi_1(\varphi_2 \varphi)) - (\varphi_2(\varphi_1 \varphi) = 0.$$

In § 4 meiner Abh. 1875 habe ich einen andern Beweis des Satzes gegeben, dass die Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$ ein Jacobi'sches System bilden, welcher unabhängig ist von der Kenntniss der obigen Bedingungsgleichung. Ich habe S. 282 die zu integrirende Gleichung

$$\varphi_1 = \psi_1(z\, x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}\, p_1 p_2 \ldots p_n) + a p_{n+1} = c_1$$

geschrieben und alsdann zur Bestimmung von $\varphi = \varphi_2$ die folgende Gleichung erhalten:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right) \frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) \right) = 0.$$

Wenn man nun von der Annahme ausgeht, dass $\frac{d\varphi_2}{dp_{n+1}} = 0$ sei, so geht diese Gleichung über in:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right) \frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) \right) - a \left(\frac{d\varphi}{dx_{n+1}}\right) = 0,$$

und führt für den Fall, dass die abhängige Veränderliche z in φ_1 fehlt, folgerichtig zu dem ausgesprochenen Satze. Wenn aber die abhängige Veränderliche z in φ_1 vorkommt, dann ist diese Schlussfolgerung unzulässig; denn es ist dann auch φ als Function von z zu betrachten, und deshalb muss

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_{n+1}}\right) = \frac{d\varphi}{dz} p_{n+1} + \frac{d\varphi}{dx_{n+1}}$$

gesetzt werden. Da dann die Coefficienten der Gleichung nicht frei von p_{n+1} sind, so ist die Annahme $\frac{d\varphi_2}{dp_{n+1}} = 0$ nicht berechtigt. Diesen Umstand habe ich in meiner Abh. 1875 nicht beachtet, und angenommen, dass die Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$ und $(\varphi_2 \varphi) = 0$ auch in der allgemeinen Aufgabe ein Jacobi'sches System bilden, was nicht richtig ist.

Herr Mayer hat in seiner Abhandlung S. 370 gezeigt, dass die Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$ und $(\varphi_2 \varphi) = 0$ nicht mehr ein Jacobi'sches System bilden, wenn auch die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ vorkommt. Zunächst hat Herr Mayer gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung der Ausdruck

$$(\varphi(\varphi_1 \varphi_2)) + (\varphi_1(\varphi_2 \varphi)) + (\varphi_2(\varphi \varphi_1))$$

nicht identisch gleich Null ist. Es heben sich zwar alle diejenigen Glieder gegenseitig auf, welche die partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung von $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2$ enthalten. Aber es sind jetzt auch solche Glieder vorhanden, in welchen nur partielle Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen; und diese sind es, welche sich nicht aufheben. Dieselben sind mit je einem der Factoren $\frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{d\varphi_1}{dz}$, $\frac{d\varphi_2}{dz}$ verbunden, und die mit $\frac{d\varphi}{dz}$ multiplicirten Glieder sind ausgedrückt durch:

$$-\frac{d\varphi}{dz}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi_2}{dp_i}-\frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\right)=-\frac{d\varphi}{dz}\,(\varphi_1\varphi_2).$$

Aehnlich gestalten sich die mit $\frac{d\varphi_1}{dz}$ und die mit $\frac{d\varphi_2}{dz}$ multiplicirten Glieder, und man findet die identische Gleichung

$$(\varphi(\varphi_1\varphi_2))+(\varphi_1(\varphi_2\varphi))+(\varphi_2(\varphi\varphi_1))$$
$$+\frac{d\varphi}{dz}(\varphi_1\varphi_2)+\frac{d\varphi_1}{dz}(\varphi_2\varphi)+\frac{d\varphi_2}{dz}\,(\varphi\varphi_1)=0.$$

Mit Rücksicht auf die identische Gleichung $(\varphi_1\varphi_2)=0$ geht dieselbe über in:

$$(\varphi_1(\varphi_2\varphi))+\frac{d\varphi_1}{dz}(\varphi_2\varphi)=(\varphi_2(\varphi_1\varphi))+\frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_1\varphi).$$

Das Jacobi'sche System ist an die folgende Gleichung gebunden:

$$(\varphi_1(\varphi_2\varphi)=(\varphi_2(\varphi_1\varphi)).$$

Man sieht nun, dass dieselbe nicht besteht, wenn φ_1 und φ_2 nicht unabhängig von z sind.

Wenn zwei partielle Differentialgleichungen ein vollständiges System bilden, so kann man dasselbe in ein Jacobi'sches umwandeln, indem man denselben gewisse Factoren giebt (vergl. § 2). Es sollen nun die Factoren a und b von solcher Art bestimmt werden, dass die Gleichungen $a(\varphi_1\varphi)=0$ und $b(\varphi_2\varphi)=0$ ein Jacobi'sches System bilden. Wir verfolgen in dieser Absicht den von Jacobi eingeschlagenen Weg. Man hat zunächst die identische Gleichung

$$a(\varphi_1, b(\varphi_2\varphi))=b(\varphi_2, a(\varphi_1\varphi)).$$

Wenn man die Differentiation der Producte durch partielle Differentiationen ersetzt, so geht die Gleichung über in:

$$ab(\varphi_1(\varphi_2\varphi))+a(\varphi_2\varphi)(\varphi_1 b)=ab(\varphi_2(\varphi_1\varphi))+b(\varphi_1\varphi)(\varphi_2 a).$$

Nach dem Obigen besteht auch die identische Gleichung

$$(\varphi_1(\varphi_2\varphi))+\frac{d\varphi_1}{dz}(\varphi_2\varphi)=(\varphi_2(\varphi_1\varphi))+\frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_1\varphi).$$

Wenn man dieselbe mit ab multiplicirt und von der andern Gleichung abzieht, so erhält man

$$a(\varphi_2\varphi)\left((\varphi_1 b)-b\frac{d\varphi_1}{dz}\right)=b(\varphi_1\varphi)\left((\varphi_2 a)-a\frac{d\varphi_2}{dz}\right).$$

Diese Gleichung soll für jede beliebige Function φ eine identische sein. Man erhält daher zur Bestimmung von a und b die beiden Gleichungen

$$(\varphi_1 b) = b\frac{d\varphi_1}{dz}, \quad (\varphi_2 a) = a\frac{d\varphi_2}{dz}.$$

Man kann nun leicht nachweisen, dass die Gleichungen $(\varphi_1\varphi) = 0$ und $(\varphi_2\varphi) = 0$ durch einen und denselben Factor a in ein Jacobi'sches System übergeführt werden können. Unter der Annahme $a = b$ hat man zur Bestimmung von a die beiden Gleichungen

$$(\varphi_1 a) = a\frac{d\varphi_1}{dz}, \quad (\varphi_2 a) = a\frac{d\varphi_2}{dz}.$$

Es besteht ferner die identische Gleichung

$$(\varphi_1(\varphi_2 a)) + \frac{d\varphi_1}{dz}(\varphi_2 a) = (\varphi_2(\varphi_1 a)) + \frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_1 a).$$

Setzt man die aus den vorstehenden Gleichungen genommenen Werthe $(\varphi_1 a)$ und $(\varphi_2 a)$ ein, so geht diese Gleichung über in:

$$\left(\varphi_1,\, a\frac{d\varphi_2}{dz}\right) = \left(\varphi_2,\, a\frac{d\varphi_1}{dz}\right).$$

Indem man die Differentiation der Producte durch partielle Differentiationen ersetzt, erhält man:

$$a\left(\varphi_1\,\frac{d\varphi_2}{dz}\right) + \frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_1 a) = a\left(\varphi_2\,\frac{d\varphi_1}{dz}\right) + \frac{d\varphi_1}{dz}(\varphi_2 a),$$

und mit Rücksicht auf die obigen Werthe $(\varphi_1 a)$ und $(\varphi_2 a)$ die Gleichung:

$$\left(\varphi_1\,\frac{d\varphi_2}{dz}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\,\varphi_2\right) = 0, \text{ oder auch } \frac{d(\varphi_1\varphi_2)}{dz} = 0.$$

Nach der Voraussetzung ist identisch $(\varphi_1\varphi_2) = 0$, und es ist daher auch die vorliegende Gleichung als eine identische anzusehen. Ich habe hiermit nachgewiesen, dass die Gleichungen $(\varphi_1\varphi) = 0$ und $(\varphi_2\varphi) = 0$ durch einen und denselben Factor a in ein Jacobi'sches System übergeführt werden, und dass dieser Factor den beiden folgenden Gleichungen entspricht:

$$(\varphi_1 a) = a\frac{d\varphi_1}{dz}, \quad (\varphi_2 a) = a\frac{d\varphi_2}{dz}.$$

Auf Grund dieses Satzes kann man, wenn ausser $\varphi = \varphi_2$ noch die Lösung $\varphi = \alpha_2$ der Gleichung $(\varphi_1\varphi) = 0$ bekannt ist, aus derselben weitere Lösungen dieser Gleichung ableiten. Man erhält zunächst die Lösungen $x = a(\varphi_2\alpha_2)$ und $y = a(\varphi_2, a(\varphi_2\alpha_2))$. Den unbestimmten Factor a kann man leicht eliminiren. Die zuletzt erwähnte Lösung schreibe man in der Form:

$$y = a^2(\varphi_2(\varphi_2\alpha_2)) + a(\varphi_2\alpha_2)(\varphi_2 a),$$

welche, weil $(\varphi_2 a) = a\dfrac{d\varphi_2}{dz}$ ist, übergeht in:

$$y = a^2(\varphi_2(\varphi_2\alpha_2)) + a^2\frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_2\alpha_2).$$

Es ist jede Function von x und y, also auch $\varphi = \dfrac{y}{x^2}$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1\varphi) = 0$. Dies ist die von dem unbestimmten Factor a befreite Lösung

$$\alpha_3 = \frac{(\varphi_3(\varphi_3\alpha_2)) + \frac{d\varphi_2}{dz}(\varphi_2\alpha_2)}{(\varphi_2\alpha_2)^2}.$$

Die Priorität dieses Resultats gehört Herrn Mayer, da mir derselbe schon im Mai 1876 brieflich davon Mittheilung gemacht hat. Herr Mayer ist auf einem andern Wege zu diesem Resultat gelangt. Er bedient sich zu diesem Zwecke jener Transformation, durch welche Jacobi die abhängige Veränderliche aus der Gleichung $f = 0$ wegbringt, andererseits aber die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um eine vermehrt.

§ 4. Wie man die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in den partiellen Differentialgleichungen der zu integrirenden Systeme vermindert.

Zur Bestimmung der Functionen $\varphi_2\,\varphi_3 \,.\, .\, \varphi_n$ hat man die $n-1$ partiellen Differentialgleichungen

$$(\varphi_1\varphi) = 0, \quad (\varphi_2\varphi) = 0 \;\ldots\; (\varphi_{n-1}\varphi) = 0,$$

und es ist abkürzend

$$(\varphi_k\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_k}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right),$$

ferner

$$\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) = \frac{d\varphi_k}{dz}p_i + \frac{d\varphi_k}{dx_i}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right) = \frac{d\varphi}{dz}p_i + \frac{d\varphi}{dx_i}$$

gesetzt worden. Jede der $n-1$ partiellen Differentialgleichungen hat die $2n+1$ unabhängigen Veränderlichen $z\,x_1 x_2 \ldots x_n\, p_1 p_2 \ldots p_n$. Man kann aber andere Gleichungen an deren Stelle setzen, welche beziehungsweise nur $2n$, $2n-2$, $2n-4 \ldots 4$ unabhängige Veränderliche haben. Dies soll nun gezeigt werden.

Es ist $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$1) \qquad (\varphi_1\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0,$$

in welcher die oben erwähnten $2n+1$ unabhängigen Veränderlichen vorkommen. Man kann die Veränderliche p_1 mit Hilfe der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ aus den Coefficienten eliminiren. Die Lösungen der transformirten Gleichung sind dann unabhängig von p_1, und man darf daher $\frac{d\varphi}{dp_1} = 0$ setzen. Zur Bestimmung von φ_2 hat man dann eine partielle Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen.

Es ist ferner $\varphi = \varphi_3$ eine Lösung des Systems der Gleichungen $(\varphi_1\varphi) = 0$, $(\varphi_2\varphi) = 0$. Wir bezeichnen mit φ_2^1 diejenige Function, in welche die Function φ_2 übergeht, wenn die Veränderliche p_1 mit Hilfe der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ eliminirt wird, und erhalten alsdann die identische Gleichung

$$(\varphi_2\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\left(\frac{d\varphi_2^1}{dx_i}\right) + \frac{d\varphi_2^1}{dc_1}\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \left(\frac{d\varphi_2^1}{dp_i} + \frac{d\varphi_2^1}{dc_1}\frac{d\varphi_1}{dp_i}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right],$$

welche mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d\varphi_2^1}{dp_1} = 0$, dass ferner $\frac{d\varphi}{dp_1} = 0$ ist, übergeht in:

$$(\varphi_2\varphi) = \sum_{i=2}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_2^1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_2^1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)$$
$$+ \frac{d\varphi_2^1}{dc_1}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right).$$

Indem wir die üblichen Abkürzungen einführen, entsteht:

$$(\varphi_2\varphi) = (\varphi_2^1\varphi) + \frac{d\varphi_2^1}{dc_1}(\varphi_1\varphi).$$

An die Stelle der Gleichung $(\varphi_2\varphi) = 0$ setzen wir eine lineare Verbindung der Gleichungen $(\varphi_2\varphi) = 0$, $(\varphi_1\varphi) = 0$. Wir schreiben die neue Gleichung

$$2) \qquad (\varphi_2^1\varphi) = \sum_{i=2}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_2^1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_2^1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0,$$

in welcher die $2n-1$ unabhängigen Veränderlichen $z x_2 x_3 \ldots x_n p_2 p_3 \ldots p_n$ vorkommen. Eliminirt man die Veränderliche p_2 mit Hilfe der Gleichung $\varphi_2^1 = c_2$ aus den Coefficienten der Gleichung 2), so findet man die Lösungen unabhängig von p_2, und man darf daher $\frac{d\varphi}{dp_2} = 0$ setzen. Die Gleichung $(\varphi_2^1\varphi) = 0$ hat dann nur $2n-2$ unabhängige Veränderliche. Zur Bestimmung von φ_3 aber hat man das System der Gleichungen $(\varphi_1\varphi) = 0$, $(\varphi_2^1\varphi) = 0$.

Es ist ferner $\varphi = \varphi_4$ eine Lösung des Systems der Gleichungen

$$(\varphi_1\varphi) = 0, \quad (\varphi_2\varphi) = 0, \quad (\varphi_3\varphi) = 0.$$

Wir bezeichnen mit φ_3^2 diejenige Function, in welche die Function φ_3^1 übergeht, wenn die Veränderliche p_2 mit Hilfe der Gleichung $\varphi_2^1 = c_2$ eliminirt wird. Der Anwendung der fortlaufenden Zahlen in dem oberen Index von φ steht Nichts im Wege, weil Exponenten von φ in diesen Untersuchungen nicht vorkommen. Wir erhalten die identische Gleichung:

$$(\varphi_3\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\left(\frac{d\varphi_3^2}{dx_i}\right) + \frac{d\varphi_3^2}{dc_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right) + \frac{d\varphi_3^2}{dc_1}\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\right)\frac{d\varphi}{dp_i}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{d\varphi_3^2}{dp_i} + \frac{d\varphi_3^2}{dc_2}\frac{d\varphi_2}{dp_i} + \frac{d\varphi_3^2}{dc_1}\frac{d\varphi_1}{dp_i}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right],$$

welche mit Rücksicht darauf, dass $\frac{d\varphi_3^2}{dp_1}=0$, $\frac{d\varphi_3^2}{dp_2}=0$, dass auch $\frac{d\varphi}{dp_1}=0$, $\frac{d\varphi}{dp_2}=0$ angenommen werden darf, übergeht in:

$$(\varphi_3\varphi)=\sum_{i=3}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_3^2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_3^2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)$$
$$+\frac{d\varphi_3^2}{dc_2}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)$$
$$+\frac{d\varphi_3^2}{dc_1}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right).$$

Indem wir die üblichen Abkürzungen einführen, entsteht:

$$(\varphi_3\varphi)=(\varphi_3^2\varphi)+\frac{d\varphi_3^2}{dc_2}(\varphi_2\varphi)+\frac{d\varphi_3^2}{dc_1}(\varphi_1\varphi).$$

An die Stelle der Gleichung $(\varphi_3\varphi)=0$ setzen wir eine lineare Verbindung der drei Gleichungen $(\varphi_3\varphi)=0$, $(\varphi_2\varphi)=0$, $(\varphi_1\varphi)=0$. Wir schreiben die neue Gleichung:

$$3)\qquad (\varphi_3^2\varphi)=\sum_{i=3}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_3^2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_3^2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)=0,$$

welche nur $2n-3$ unabhängige Veränderliche hat. Eliminirt man noch die Veränderliche p_3 mit Hilfe der Gleichung $\varphi_3^2=c_3$ aus den Coefficienten dieser Gleichung, so ergeben sich die Lösungen unabhängig von p_3 und man darf $\frac{d\varphi}{dp_3}=0$ setzen. Man behält demnach eine partielle Differentialgleichung mit $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen. Zur Bestimmung von φ_4 aber hat man das System der Gleichungen

$$(\varphi_1\varphi)=0,\quad (\varphi_2^1\varphi)=0,\quad (\varphi_3^2\varphi)=0.$$

Schliesslich ist $\varphi=\varphi_n$ eine Lösung des Systems der Gleichungen

$$(\varphi_1\varphi)=0,\quad (\varphi_2\varphi)=0\ \ldots\ (\varphi_{n-1}\varphi)=0.$$

Anstatt $(\varphi_{n-1}\varphi)=0$ gebrauchen wir die neue Gleichung

$$n-1)\quad (\varphi_{n-1}^{n-2}\varphi)=\sum_{i=n-1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_{n-1}^{n-2}}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i}-\frac{d\varphi_{n-1}^{n-2}}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right)=0,$$

wo φ_{n-1}^{n-2} diejenige Function bezeichnet, welche man aus der Function φ_{n-1}^{n-3} durch die Elimination der Veränderlichen p_{n-2} vermittelst der Gleichung $\varphi_{n-2}^{n-3}=c_{n-2}$ herleitet. Nachdem man noch die Veränderliche p_{n-1} mit Hilfe der Gleichung $\varphi_{n-1}^{n-2}=c_{n-1}$ aus den Coefficienten dieser Gleichung eliminirt hat, darf man $\frac{d\varphi}{dp_{n-1}}=0$ setzen und man behält eine partielle Differentialgleichung mit nur vier unabhängigen Veränderlichen. Zur Bestimmung von φ_n aber hat man das System der Gleichungen

$$(\varphi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2^1 \varphi) = 0 \ \dots \ (\varphi_{n-1}^{n-2} \varphi) = 0.$$

Nachdem man die Functionen $\varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_n$ aufgefunden hat, kann man die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ als Function der Veränderlichen $z x_1 x_2 \dots x_n$ darstellen, und man findet das vollständige Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \dots + p_n\, dx_n.$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit dem vollständigen System von n partiellen Differentialgleichungen mit je zwei unabhängigen Veränderlichen:

$$\frac{d\varphi}{dz} p_1 + \frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} p_2 + \frac{d\varphi}{dx_2} = 0 \ \dots \ \frac{d\varphi}{dz} p_n + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

In § 3 meiner Abh. 1875 habe ich das vollständige Integral in der Form $\psi = c$ geschrieben, und nachgewiesen, dass ψ eine Lösung der $n-1$ partiellen Differentialgleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0 \dots (\varphi_{n-1} \varphi) = 0$ ist. Man kann daher $n-1$ der zuerst erwähnten partiellen Differentialgleichungen durch diese letzteren ersetzen und demgemäss die Function ψ als eine Lösung des Systems der folgenden n Gleichungen betrachten:

$$(\varphi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2^1 \varphi) = 0 \ \dots \ (\varphi_{n-1}^{n-2} \varphi) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} p_n + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Die letzte kann auch durch die Gleichung

$$n) \qquad (\varphi_n^{n-1} \varphi) = \left(\frac{d\varphi_n^{n-1}}{dx_n}\right) \frac{d\varphi}{dp_n} - \frac{d\varphi_n^{n-1}}{dp_n} \left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right) = 0$$

ersetzt werden, wo φ_n^{n-1} diejenige Function bezeichnet, in welche die Function φ_n^{n-2} übergeht, wenn die Veränderliche p_{n-1} vermittelst der Gleichung $\varphi_{n-1}^{n-2} = c_{n-1}$ eliminirt wird. Nachdem man noch die Veränderliche p_n vermittelst der Gleichung $\varphi_n^{n-1} = c_n$ aus den Coefficienten der vorliegenden eliminirt hat, darf man $\frac{d\varphi}{dp_n} = 0$ setzen und man hat wieder jene einfachere Gleichung $\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right) = 0$ mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen. Die Gleichung $(\varphi_n^{n-1} \varphi) = 0$ hat aber vor dieser Gleichung den Vorzug, dass sie jenen Operationen des vorigen Paragraphen zugänglich ist, durch welche ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen in ein Jacobi'sches System umgewandelt wird.

§ 5. Reduction des Systems der $i+1$ partiellen Differentialgleichungen auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2i$ unabhängigen Veränderlichen.

In § 5 meiner Abh. 1875 habe ich die zu integrirenden Systeme auf Systeme von je zwei partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt.

Diese Reduction beruht darauf, dass bei der Integration eines Systems die Resultate Verwendung finden, zu welchen die Integration des vorhergehenden Systems geführt hat. Ich habe die Reduction abermals ausgeführt, weil ich noch eine Vervollkommnung daran habe anbringen können. Sodann ist der Inhalt des § 5 meiner Abh. 1875 vielleicht deshalb schwerer verständlich, weil ich in diese Reduction noch andere Betrachtungen eingeflochten habe, welche jetzt davon gesondert in den §§ 4 und 6 enthalten sind.

Es ist $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$1)\qquad (\varphi_1\varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0,$$

welche $2n$ unabhängige Veränderliche hat, nachdem man die Veränderliche p_1 vermittelst $\varphi_1 = c_1$ aus den Coefficienten eliminirt hat.

Ferner ist $\varphi = \varphi_3$ eine Lösung des Systems

$$(\varphi_1\varphi) = 0,\quad (\varphi_2{}^1\varphi) = 0.$$

Im vorigen Paragraphen haben wir die Gleichung aufgestellt

$$2)\qquad (\varphi_2{}^1\varphi) = \sum_{i=2}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_2{}^1}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_2{}^1}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0,$$

welche $2n-2$ unabhängige Veränderliche hat, nachdem man die Veränderliche p_2 vermittelst $\varphi_2{}^1 = c_2$ aus den Coefficienten eliminirt hat. Es ist $\varphi = x_1$ eine Lösung dieser Gleichung. Hat man noch eine Lösung $\varphi = \beta_2$ durch Integration bestimmt, so erhält man die weiteren Lösungen vermittelst der Gleichung 1), in welche sie eingesetzt werden sollen. Die weiteren Lösungen sind $\beta_3 = \frac{(\varphi_1\beta_2)}{(\varphi_1 x_1)}$, $\beta_4 = \frac{(\varphi_1\beta_3)}{(\varphi_1 x_1)}$ u. s. w. Nachdem man die Lösungen $x_1\,\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2n-2}$ der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1\varphi) = 0$ eingesetzt hat, erhält man aus der transformirten Gleichung, welche gleichfalls $2n-2$ unabhängige Veränderliche hat, die Lösung $\varphi = \varphi_3$ des vorliegenden Systems.

Es ist ferner $\varphi = \varphi_4$ eine Lösung des Systems der drei Gleichungen

$$(\varphi_1\varphi) = 0,\quad (\varphi_2{}^1\varphi) = 0,\quad (\varphi_3{}^2\varphi) = 0.$$

Die Lösungen der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ dürfen als bekannt vorausgesetzt werden, weil $\varphi_3{}^2$ als Function davon bestimmt worden ist. Es handelt sich daher nur um die Integration der zwei Gleichungen $(\varphi_1\varphi) = 0$, $(\varphi_3{}^2\varphi) = 0$. Wir haben im vorigen Paragraphen die Gleichung aufgestellt:

$$3)\qquad (\varphi_3{}^2\varphi) = \sum_{i=3}^{i=n}\left(\left(\frac{d\varphi_3{}^2}{dx_i}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \frac{d\varphi_3{}^2}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)\right) = 0,$$

welche $2n-4$ unabhängige Veränderliche hat, nachdem man die Veränderliche p_3 vermittelst der Gleichung $\varphi_3{}^2 = c_3$ aus den Coefficienten eliminirt hat. Die Lösungen der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ sind $x_1\,\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2n-2}$

Die Lösung $\varphi = x_1$ entspricht auch der Gleichung $(\varphi_3{}^2\varphi) = 0$, und die Lösung $\varphi = \beta_2$ wird durch die Function $\varphi_3{}^2$ ersetzt. Die übrigen $2n - 4$ Lösungen führen wir als neue Veränderliche in die Gleichung 3) ein. Die transformirte Gleichung hat $2n - 4$ unabhängige Veränderliche und liefert die den Gleichungen 2) und 3) gemeinsamen Lösungen. Eine solche ist $\varphi = x_1$. Hat man noch eine Lösung $\varphi = \gamma_2$ durch Integration bestimmt, so findet man weitere den Gleichungen 2) und 3) gemeinsame Lösungen mit Hilfe der Gleichung 1), in welche sie eingesetzt werden sollen. Die weiteren Lösungen sind $\gamma_3 = \dfrac{(\varphi_1 \gamma_2)}{(\varphi_1 x_1)}$, $\gamma_4 = \dfrac{(\varphi_1 \gamma_3)}{(\varphi_1 x_1)}$ u. s. w. Nachdem man die Lösungen $x_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_{2n-4}$ als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$ eingeführt hat, erhält man aus der transformirten Gleichung, welche gleichfalls $2n - 4$ unabhängige Veränderliche hat, die den drei Gleichungen 1), 2), 3) gemeinsame Lösung $\varphi = \varphi_4$.

Die Lösungen der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ brauchen nicht vollzählig bekannt zu sein. Man kann schon mit einer einzigen ausreichen. Die übrigen Lösungen der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ erhält man mit Hilfe der Gleichung $(\varphi_3{}^2\varphi) = 0$, in welche sie eingesetzt werden sollen. Die Vervollkommnung, welche ich der Methode geben kann, beruht darauf, dass ich die Unterscheidung mache, ob ausser $\varphi_3{}^2$ mindestens zwei weitere Lösungen $\beta_3 \beta_4$ der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ bekannt sind, oder ob nur eine weitere Lösung β_3 vorliegt. Indem ich den ersten Fall voraussetze, wonach zwei weitere Lösungen $\beta_3 \beta_4$ bekannt sind, erhalte ich auf Grund der allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems die weiteren Lösungen $\beta_5 = \dfrac{(\varphi_3{}^2\beta_4)}{(\varphi_3{}^2\beta_3)}$, $\beta_6 = \dfrac{(\varphi_3{}^2\beta_5)}{(\varphi_3{}^2\beta_3)}$ u. s. w. Nachdem man so die Lösungen der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ aufgestellt hat, kann man die Function φ_4 auf dem oben vorgeschriebenen Wege bestimmen.

Wenn aber ausser $\varphi_3{}^2$ nur eine weitere Function β_3 der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ vorliegt, so führt die allgemeine Eigenschaft des vollständigen Systems nicht mehr zum Ziele. In diesem Falle ist die Eigenschaft des Jacobi'schen Systems unentbehrlich, wenn das vorliegende System ohne weitere Integration auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt werden soll. Man findet nach § 3 eine weitere Lösung der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ in der Form $\beta_4 = (\varphi_3{}^1\beta_3)$ für den Fall, dass die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ nicht vorkommt. Wenn auch die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ vorkommt, so erhält man eine weitere Lösung der Gleichung $(\varphi_2{}^1\varphi) = 0$ in der Form:

$$\beta_4 = \frac{(\varphi_3{}^1(\varphi_3{}^1\beta_3)) + \dfrac{d\beta_3}{dz}(\varphi_3{}^1\beta_3)}{(\varphi_3{}^1\beta_3)^2}.$$

Mit Rücksicht auf § 4 erhält man $(\varphi_3{}^1\beta_3) = (\varphi_3{}^2\beta_3)$; denn wir haben dort die Gleichung aufgestellt $(\varphi_3{}^1\varphi) = (\varphi_3{}^2\varphi) + \dfrac{d\varphi_3{}^2}{dc_2}(\varphi_2{}^1\varphi)$. Setzt man

$\varphi = \beta_3$, so hat man die vorstehende, weil $(\varphi_2^1 \beta_3) = 0$ ist. Dagegen darf man nicht $(\varphi_3^1(\varphi_3^2 \beta_3)) = (\varphi_3^2(\varphi_3^2 \beta_3))$ setzen. Ferner muss man, um den Differentialquotienten $\frac{d\beta_3}{dz}$ herzustellen, die willkürliche Beständige c_2 in β_3 durch die Function φ_2^1 ersetzen. Nachdem man zwei Lösungen der Gleichung $(\varphi_2^1 \varphi) = 0$ aufgefunden hat, kann man die übrigen Lösungen wieder vermittelst der allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems herstellen und man findet alsdann die Function φ_4 auf dem oben vorgeschriebenen Wege.

Der Verallgemeinerung dieses Verfahrens stehen keine weiteren Schwierigkeiten entgegen. Es ist $\varphi = \varphi_5$ eine gemeinsame Lösung der vier Gleichungen

$$(\varphi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2^1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_3^2 \varphi) = 0, \quad (\varphi_4^3 \varphi) = 0.$$

Wir dürfen von der Annahme ausgehen, dass die den Gleichungen $(\varphi_2^1 \varphi) = 0$, $(\varphi_3^2 \varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen bekannt sind, weil φ_4^3 als Function dieser Lösungen bestimmt worden ist. Es handelt sich daher nur um die Integration der zwei Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_4^3 \varphi) = 0$. Die Gleichung $(\varphi_4^3 \varphi) = 0$ hat bekanntlich $2n - 6$ unabhängige Veränderliche, nachdem man die Veränderliche p_4 vermittelst der Gleichung $\varphi_4^3 = c_4$ aus den Coefficienten eliminirt hat. Die den Gleichungen $(\varphi_2^1 \varphi) = 0$, $(\varphi_3^2 \varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen sind $x_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots \gamma_{2n-4}$. Die Lösung x_1 entspricht auch der Gleichung $(\varphi_4^3 \varphi) = 0$, und die Lösung γ_2 wird durch die Function φ_4^3 ersetzt. Die übrigen $2n - 6$ Lösungen führe man als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_4^3 \varphi) = 0$ ein. Die transformirte Gleichung hat $2n - 6$ unabhängige Veränderliche und liefert die den Gleichungen 2), 3), 4) gemeinsamen Lösungen. Eine solche Lösung ist $\varphi = x_1$. Nachdem man eine zweite Lösung $\varphi = \delta_2$ dieser Art durch die Integration bestimmt hat, findet man die weiteren Lösungen mit Hilfe der Gleichung 1), in welche sie eingesetzt werden sollen. Die weiteren Lösungen sind $\delta_3 = \frac{(\varphi_1 \delta_2)}{(\varphi_1 x_1)}$, $\delta_4 = \frac{(\varphi_1 \delta_3)}{(\varphi_1 x_1)}$ u. s. w. Nachdem man die Lösungen $x_1 \delta_2 \delta_3 \ldots \delta_{2n-6}$ als neue Veränderliche in die Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$ eingeführt hat, erhält man aus der transformirten Gleichung, welche gleichfalls $2n - 6$ unabhängige Veränderliche hat, die den vier Gleichungen 1), 2), 3), 4) gemeinsamen Lösungen $\varphi = \varphi_5$.

Wenn die den Gleichungen $(\varphi_2^1 \varphi) = 0$, $(\varphi_3^2 \varphi) = 0$ gemeinsamen Lösungen nicht in der hinreichenden Anzahl vorhanden sind, so findet man die weiteren Lösungen vermittelst der Gleichung $(\varphi_4^3 \varphi) = 0$, in welche sie eingeführt werden sollen. Wenn ausser φ_4^3 mindestens zwei weitere Lösungen $\gamma_3 \gamma_4$ des Systems der Gleichungen 2) und 3) bekannt sind, so kann man die übrigen Lösungen aus der allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems in der Form $\gamma_5 = \frac{(\varphi_4^3 \gamma_4)}{(\varphi_4^3 \gamma_3)}$, $\gamma_6 = \frac{(\varphi_4^3 \gamma_5)}{(\varphi_4^3 \gamma_3)}$

u. s. w. herleiten. Wenn aber ausser φ_4^3 nur die eine weitere Lösung γ_3 vorliegt, so ist man auf die Eigenschaft des Jacobi'schen Systems angewiesen. Für den Fall, dass die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ nicht vorkommt, erhält man eine weitere den Gleichungen 2) und 3) gemeinsame Lösung in der Form $\gamma_4 = (\varphi_3{}^1 \gamma_3)$. Wenn auch die abhängige Veränderliche z in der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ vorkommt, so findet man eine weitere Lösung in der Form:

$$\gamma_4 = \frac{(\varphi_4{}^1(\varphi_4{}^1 \gamma_3)) + \frac{d\gamma_3}{dz}(\varphi_4{}^1 \gamma_3)}{(\varphi_4{}^1 \gamma_3)^2}.$$

In diesen Lösungen darf man $(\varphi_4{}^1 \gamma_3) = (\varphi_4{}^3 \gamma_3)$ setzen, mit Rücksicht auf § 4, weil $(\varphi_3{}^1 \gamma_3) = 0$, $(\varphi_2{}^1 \gamma_3) = 0$ ist. Dagegen darf man nicht $(\varphi_4{}^1(\varphi_4{}^3 \gamma_3)) = (\varphi_4{}^3(\varphi_4{}^3 \gamma_3))$ setzen. Ferner muss man, um den Differentialquotienten $\frac{d\gamma_3}{dz}$ herzustellen, die willkürlichen Beständigen c_2, c_3 in γ_3 durch die Functionen $\varphi_2{}^1$, $\varphi_3{}^1$ ersetzen. Nachdem man die den Gleichungen 2) und 3) gemeinsamen Lösungen hergestellt hat, findet man die Function φ_5 auf dem oben vorgeschriebenen Wege.

§ 6. Ueber eine Eigenschaft der reducirten Systeme, und die Reduction des Herrn Mayer.

Zur Bestimmung von $\varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_n$ haben wir die partiellen Differentialgleichungen aufgestellt:

$$(\varphi_1 \varphi) = 0, \quad (\varphi_2 \varphi) = 0 \; \dots \; (\varphi_{n-1} \varphi) = 0,$$

welche neben der gesuchten Function φ die $2n+1$ unabhängigen Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \dots x_n\, p_1 p_2 \dots p_n$ enthalten. Es ist $\varphi = \varphi_2$ eine Lösung der Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $\varphi = \varphi_3$ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$ u. s. w., und endlich φ_n eine gemeinsame Lösung der Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0 \dots (\varphi_{n-1} \varphi) = 0$.

Vermittelst der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ haben wir in § 4 die Veränderliche p_1 eliminirt, und es bleiben in der Gleichung $(\varphi_1 \varphi) = 0$ noch $2n$ unabhängige Veränderliche übrig. Sobald man die Function φ_2 aufgefunden hat, kann man auch die Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$ anschreiben. Zwischen den Gleichungen $(\varphi_1 \varphi) = 0$, $(\varphi_2 \varphi) = 0$ haben wir (vergl. § 4) den partiellen Differentialquotienten von φ nach x_1 eliminirt. Die neue Gleichung $(\varphi_2{}^1 \varphi) = 0$ hat dann eine unabhängige Veränderliche weniger als die Gleichung $(\varphi_2 \varphi) = 0$, weil x_1 in der Eigenschaft einer unbestimmten Beständigen darin vorkommt. Ferner haben wir mit Hilfe von $\varphi_2{}^1 = c_2$ die Veränderliche p_2 eliminirt. An die Stelle der eliminirten Veränderlichen p_2 ist eine unbestimmte Beständige, der Parameter c_2 in die partielle Differentialgleichung eingegangen. Die transformirte

Gleichung hat nur noch $2n-2$ unabhängige Veränderliche; aber es sind an die Stelle der weggefallenen zwei Veränderlichen zwei Parameter getreten. Man kann dies leicht verallgemeinern. Sobald die Function φ_{i+1} aufgefunden ist, kann man auch die Gleichung $(\varphi_{i+1}\varphi)=0$ anschreiben. Man setzt an deren Stelle die Gleichung $(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$, welche nicht mehr $2n$, sondern nur noch $2n-2i$ unabhängige Veränderliche hat; aber es sind nun an die Stelle der weggefallenen $2i$ Veränderlichen ebensoviel Parameter getreten.

Wenn man die den $i+1$ Gleichungen $(\varphi_1\varphi)=0$, $(\varphi_2{}^1\varphi)=0\ldots(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$ gemeinsamen Lösungen bestimmen soll, so kann der folgende Weg eingeschlagen werden: Man setzt die $2n-2i-1$ Lösungen der letzten Gleichung $(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$ als neue Veränderliche in die vorletzte Gleichung ein. Es darf dabei nicht übersehen werden, dass der Parameter x_i der Gleichung $(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$ in der vorhergehenden Gleichung die Stelle einer Veränderlichen einnimmt. Aus diesem Grunde hat die vorletzte Gleichung nach erfolgter Transformation ebensoviel unabhängige Veränderliche, als die letzte Gleichung. Indem man die Rechnung in dieser Weise fortsetzt, indem man also die Lösungen der transformirten Gleichung jedesmal als neue Veränderliche in die vorhergehende Gleichung einsetzt, erhält schliesslich auch die erste Gleichung $(\varphi_1\varphi)=0$ $2n-2i$ Veränderliche, ebensoviel als die letzte Gleichung. Anders verhält es sich mit der Anzahl der Parameter. Aus der allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Systems folgt, dass die vorletzte Gleichung, nachdem man die erwähnte Transformation ausgeführt hat, einen Parameter weniger enthält als die letzte Gleichung; denn mit Hilfe von $2n-2i-1$ Lösungen der letzten Gleichung eliminiren sich nicht ebensoviel, sondern alle $2n-2i$ Veränderlichen dieser Gleichung. Ebenso folgt, dass die erste Gleichung des Systems $(\varphi_1\varphi)=0$ nach erfolgter Transformation i Parameter weniger enthält als die letzte Gleichung $(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$. Indem ich das System der $i+1$ partiellen Differentialgleichungen auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen zurückführe, wird die Anzahl der in diesen Gleichungen vorkommenden Parameter um $i-1$ kleiner als in der Gleichung $(\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$. Ich habe damit eine wichtige Eigenschaft der reducirten Systeme nachgewiesen.

Die Vereinfachungen, mit welchen sich die vorstehenden Betrachtungen beschäftigen, lassen noch eine andere Deutung zu. Wenn das System der $i+1$ partiellen Differentialgleichungen

$$(\varphi_1\varphi)=0,\quad(\varphi_2{}^1\varphi)=0\ \ldots\ (\varphi^i{}_{i+1}\varphi)=0$$

vorliegt, so kann man die Veränderlichen $p_1\,p_2\ldots p_{i+1}$ vermittelst der Gleichungen $\varphi_1=c_1$, $\varphi_2=c_2\ldots\varphi_{i+1}=c_{i+1}$ eliminiren und das allgemeine Integral jeder einzelnen partiellen Differentialgleichung ist eine endliche Gleichung zwischen den $2n-i$ Veränderlichen $z\,x_1\,x_2\ldots x_n\,p_{i+2}$

$\dots p_n$ des Systems. Ich habe vorhin gezeigt, wie man, wenn das allgemeine Integral der letzten Gleichung bekannt ist, mit dessen Hilfe eine weitere Veränderliche aus allen übrigen partiellen Differentialgleichungen eliminiren kann. In der Elimination dieser Veränderlichen findet die partielle Differentialgleichung, deren allgemeines Integral bekannt ist, ihre Verwerthung. Die Anzahl der partiellen Differentialgleichungen, deren gemeinsame Lösung bestimmt werden soll, ist um die Einheit kleiner geworden; aber die eigentliche Vereinfachung der Aufgabe besteht darin, dass die gesuchte Function neben den i unbestimmten Parametern $c_2 c_3 \dots c_{i+1}$ nicht mehr jene $2n-i$ Veränderlichen des ursprünglichen Systems, sondern eine Veränderliche weniger enthält. Indem ich die Anzahl der partiellen Differentialgleichungen, welche anfänglich $i+1$ ist, auf zwei zurückführe, gebe ich der Aufgabe eine wesentliche Vereinfachung, da nun von den Veränderlichen des ursprünglichen Systems $i-1$ aus der gesuchten Function eliminirt sind.

Es könnte befremden, dass ich in der Reduction bei einem System von zwei partiellen Differentialgleichungen stehen bleibe, während doch die Mayer'sche Reduction jedesmal nur eine einzige partielle Differentialgleichung giebt. Der Grund davon liegt nicht in einer Unvollkommenheit meiner Reduction, sondern darin, dass die beiden Reductionen ganz verschiedene Grundlage haben. Demgemäss sind auch die reducirten Systeme in dem einen und in dem andern Falle von verschiedener Art. Um das Verhältniss klarzustellen, ist es unumgänglich, dass man sich das durch die Mayer'sche Reduction erzielte Resultat vergegenwärtige.

Ich muss auf den wesentlichen Unterschied hinweisen, dass die Mayer'sche Reduction nicht wie die obige zu einer Elimination der Parameter führt. Während oben die gesuchte Function durch eine wesentlich einfachere ersetzt wird, bleibt sie hier unverändert dieselbe, wie vor der Reduction. Daher kann auch, was ich schon in § 7 meiner Abh. 1875 ausgesprochen habe, die obige Reduction in keinem Falle durch die Mayer'sche ersetzt werden. Der Umstand, dass die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in dem von mir reducirten System gewöhnlich kleiner ist als in dem andern, kann nicht als der wesentliche Unterschied angesehen werden, da derselbe nur zufällig eintritt.

Berichtigungen zu meinen Abhandlungen 1875.

S. 83, Z. 7 v. o. anstatt $f+uf_2$ lies: f_1+uf_2.
S. 85, Z. 1 v. o. anstatt zwischen 1 und $n+2$ lies: von 1 bis $n+2$.
S. 271, Z 7 v. o. anstatt 1858 lies: 1859.
S. 283, Z. 10 v. o. anstatt $(\varphi_2\varphi_1)$ lies: $(\varphi_2\varphi)$.

S. 285, Z. 7 v. u. anstatt $\frac{d\varphi}{dp_1}$ lies: $\frac{d\varphi_1}{dp_1}$.

S. 288, Z. 14 v. o. anstatt $i=1$ lies: $i-1$.

S. 288, Z. 6 bis 5 v. u. zu streichen. Statt dessen lies: $n)$ $(\varphi_n\,\varphi) = -\frac{d\varphi_n}{dp_n}\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right) = 0.$

S. 292, Z. 7 bis 9 v. o. bis zum Punkt zu streichen. Statt dessen lies: Durch die Verallgemeinerung dieses Verfahrens hat Herr Mayer drei und mehr partielle Differentialgleichungen, welche ein vollständiges System bilden, durch eine einzige ersetzt.

S. 298, Z. 4 bis 3 v. u. zu streichen. Statt dessen lies: erfülle, wenn man ein vollständiges Integral der Gleichung 2) aufgefunden hat, darf nicht vorausgesetzt werden.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Ableitung des elastischen Stosses zweier Atome aus mechanischen Principien.

In seiner „Geschichte des Materialismus" macht F. A. Lange* der neueren Atomistik den Vorwurf, dass die Unveränderlichkeit ihrer Atome die Möglichkeit eines elastischen Stosses derselben ausschliesse. Es sei bekannt, dass jeder elastische Körper während des Stosses Formveränderungen erleide; sollten daher auch die Atome, wie die neuere Theorie der Gase fordert, ihre Bewegung nach den Gesetzen des elastischen Stosses auf einander übertragen, so dürften sie nicht unveränderlich sein. — Der Fehler dieses Schlusses liegt einfach darin, dass Lange die Atome unter die Körper rechnet. Was von einem Körper, einer Atomverbindung, gilt, braucht deshalb noch nicht von den einzelnen Atomen zu gelten.

Der gegentheilige Beweis, dass zwei (unveränderliche) Atome beim Zusammentreffen ihre Bewegung nach den Gesetzen des elastischen Stosses auf einander übertragen müssen, lässt sich, wie folgt, führen.

Wir benützen dazu ausser dem Satze, dass eine Bewegung nur aufgehoben werden könne durch eine gleichgrosse ihr entgegengesetzte, noch das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Der erste Satz umfasst bei seiner Anwendung auf die Bewegung zweier Atome folgende zwei Theile:

I. *a)* In jedem Augenblicke kann von einem Atom auf das andere nur eine Bewegung übergehen, welche die Richtung ihrer Verbindungslinie hat;

I. *b)* Die Summen der gleichgerichteten Componenten der Bewegungsgrössen bleiben constant.

Dazu kommt also noch:

II. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

---

* a. a. O., 2. Buch S. 202

Da wir den Stoss zweier Atome, nicht zweier Körper, behandeln, wird kein Theil der Energie der sichtbaren Bewegung sich in solche der unsichtbaren Bewegung verwandeln.

Die Massen beider Atome seien m_1 und m_2, ihre Orte zur Zeit t mögen in Bezug auf drei rechtwinklige Axen die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 haben. Die Componenten ihrer augenblicklichen Geschwindigkeiten seien u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2.

Vor dem Zusammenstoss beider Atome seien die Componenten ihrer constanten Geschwindigkeiten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2, nach demselben A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2.

Nach I. *a)* ist nun

1) $$\left(\frac{du_1}{dt}i+\frac{dv_1}{dt}k+\frac{dw_1}{dt}l\right)dt=0,$$

wenn die Werthe der Richtungscosinusse i, k, l der Gleichung

$$i(x_1-x_2)+k(y_1-y_2)+l(z_1-z_2)=0$$

genügen. Eliminirt man aus beiden Gleichungen l, so zerfällt die resultirende Gleichung in folgende:

$$\frac{du_1}{dt}(z_1-z_2)-\frac{dw_1}{dt}(x_1-x_2)=0,$$

$$\frac{dv_1}{dt}(z_1-z_2)-\frac{dw_1}{dt}(y_1-y_2)=0.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für u_2, v_2, w_2; daher

$$\frac{d}{dt}\{(u_1-u_2)(z_1-z_2)-(w_1-w_2)(x_1-x_2)\}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\{(v_1-v_2)(z_1-z_2)-(w_1-w_2)(y_1-y_2)\}=0.$$

Beide Atome kommen sich beim Zusammentreffen unendlich nahe; deshalb erhalten wir durch Integration

$$(u_1-u_2)(z_1-z_2)-(w_1-w_2)(x_1-x_2)=0,$$
$$(v_1-v_2)(z_1-z_2)-(w_1-w_2)(y_1-y_2)=0,$$

woraus durch nochmalige Integration folgt:

$$\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}=Const.,\quad \frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}=const.$$

Liegt nun der Anfangspunkt des Coordinatensystems in dem Orte des Zusammentreffens der Atome, so sind ihre Coordinaten in einer endlichen Zeit vor und nach dem Zusammenstosse den gleichnamigen Geschwindigkeitscomponenten proportional, also

α) $$\frac{A_1-A_2}{a_1-a_2}=\frac{B_1-B_2}{b_1-b_2}=\frac{C_1-C_2}{c_1-c_2}=p.$$

Nach I. *b)* ist

$$2)\quad \frac{d}{dt}(m_1 u_1 + m_2 u_2)\,dt = 0, \quad \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2)\,dt = 0, \quad \frac{d}{dt}(m_1 w_1 + m_2 w_2)\,dt = 0,$$

also

$$\beta)\quad m_1 A_1 + m_2 A_2 = m_1 a_1 + m_2 a_2, \quad m_1 B_1 + m_2 B_2 = m_1 b_1 + m_2 b_2, \quad m_1 C_1 + m_2 C_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert

$$3)\quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{m_1}{2}(u_1^2+v_1^2+w_1^2) + \frac{m_2}{2}(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\right\} dt = 0,$$

oder nach vollzogener Integration

$$\gamma)\quad \begin{aligned} &m_1(A_1^2+B_1^2+C_1^2) + m_2(A_2^2+B_2^2+C_2^2) \\ &= m_1(a_1^2+b_1^2+c_1^2) + m_2(a_2^2+b_2^2+c_2^2). \end{aligned}$$

Eliminirt man aus den sieben Gleichungen α), β) und γ) die Grössen A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, so erhält man zur Bestimmung von p

$$p^2 = 1.$$

Diese Gleichung stellt uns vor die Alternative, ob wir die Atome als durchdringlich oder undurchdringlich annehmen wollen.

Die Lösung $p = +1$ würde nämlich liefern:

$$A_1 = a_1, \quad B_1 = b_1, \quad C_1 = c_1, \quad A_2 = a_2, \quad B_2 = b_2, \quad C_2 = c_2.$$

Beide Atome würden, ihre Durchdringlichkeit vorausgesetzt, vor und nach dem Zusammentreffen stets dieselben constanten Geschwindigkeiten beibehalten.

Setzen wir dagegen ihre Undurchdringlichkeit voraus, so erhalten wir für $p = -1$:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} - a_1, & A_2 &= 2\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} - a_2, \\ B_1 &= 2\frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} - b_1, & B_2 &= 2\frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} - b_2, \\ C_1 &= 2\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - c_1, & C_2 &= 2\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - c_2. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bahnen beider Atome vor und nach ihrem Zusammentreffen liegen also in derselben Ebene. Wählen wir diese zur XY-Ebene, so ist

$$z_1 = z_2 = 0, \quad w_1 = w_2 = 0, \quad \text{desgl.} \quad C_1 = C_2 = c_1 = c_2 = 0.$$

Die momentane Verbindungslinie beider Atome behält vor und nach dem Stosse dieselbe Richtung. Jede zu ihr senkrechte Gerade hat die Richtungscosinusse

$$\frac{\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}}{a_1-a_2} \text{ und } \frac{\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}}{b_2-b_1}.$$

Da nun

$$\frac{A_1-a_1}{a_1-a_2}+\frac{B_1-b_1}{b_2-b_1}=0 \text{ und } \frac{A_2-a_2}{a_1-a_2}+\frac{B_2-b_2}{b_2-b_1}=0,$$

so wird die zu letzterer Richtung parallele Geschwindigkeitscomponente jedes Atoms durch den Stoss nicht geändert.

Diese bekannten Gesetze werden auch für den Stoss zweier in derselben Ebene bewegten Kugeln gelten, so lange nicht die besondere Art der Atomverbindung eine theilweise Umsetzung der Energie der sichtbaren Bewegung in solche der unsichtbaren zur Folge hat.

Berlin. Dr. Gust. Lübeck.

V. Ueber einige bestimmte Integrale.

Setzt man

$$\varphi(x)=-\int_0^x \frac{\log(1-u)}{u}\,du=-\int_0^1 \frac{\log(1-xv)}{v}\,dv,$$

so ist bekanntlich

$$\log x\,.\,\log(1-x)=\varphi(1)-\varphi(x)-\varphi(1-x),$$

welche Gleichung sich auch leicht durch Differentiation nach x verificiren lässt. In der vorstehenden Gleichung setze man rechts:

$$-\varphi(x)=\int_0^1 \frac{\log[1-xv]}{v}\,dv,$$

$$-\varphi(1-x)=\int_0^1 \frac{\log[1-(1-x)v]}{v}\,dv,$$

also durch Addition der Integrale

$$-\varphi(x)-\varphi(1-x)=\int_0^1 \frac{\log[1-xv][1-(1-x)v]}{v}\,dv$$

$$=\int_0^1 \frac{\log[1-v-x(1-x)v^2]}{v}\,dv.$$

Es folgt so

$$\log(x).\log(1-x)=\varphi(1)+\int_0^1 \frac{\log[1-v-x(1-x)v^2]}{v}\,dv.$$

Führt man rechts w statt v mittels der Gleichung

$$v=\frac{4w}{(1+w)^2}$$

ein, so erhält man

$$\log x.\log(1-x)=\varphi(1)-4\int_0^1\left[\frac{1}{w}-\frac{2}{1+w}\right]\log(1+w)\,dw$$

$$+\int_0^1 \frac{\log[1+2w^2(8x-8x^2-1)+w^4]}{w(1+w)}(1-w)\,dw.$$

Nun ist

$$\int_0^1 \frac{\log(1+w)}{w}\,dw=\frac{\varphi(1)}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+w)}{1+w}\,dw=\frac{(\log 2)^2}{2}.$$

Die obige Gleichung wird hierdurch

$$\log x.\log(1-x)=4(\log 2)^2-\varphi(1)$$

1) $$+\int_0^1 \frac{\log[1+2w^2(8x-8x^2-1)+w^4]}{w(1+w)}(1-w)\,dw.$$

Die Annahme $x=\sin^2 z$ giebt $1-8x(1-x)=1-2(\sin 2z)^2=\cos 4z$. Für diesen Werth von x geht die Gleichung 1) über in

$$4\log\sin z\,.\,\log\cos z=4(\log 2)^2-\varphi(1)$$

2) $$+\int_0^1 \frac{\log[1-2w^2\cos 4z+w^4]}{w(1+w)}(1-w)\,dw.$$

Man kann sich dieser Gleichung bedienen, um ein bekanntes Integral herzuleiten, indem man das von Poisson gegebene Resultat

$$\int_0^\pi \log(1-2p\cos t+p^2).dt=0,\quad -1\leqq p<1,$$

zu Grunde legt. Setzt man $t = nz$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so nimmt die von Poisson gegebene Gleichung die Form

$$3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{n}} \log(1-2p\cos nz+p^2)\,dz=0,\quad -1\leqq p\leqq 1,$$

an. Substituirt man in dem Integrale

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin z\,.\,\log\cos z\,dz$$

den auf der rechten Seite der Gleichung 2) stehenden Ausdruck, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichung 3),

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin z\,.\,\log\cos z\,dz=\pi\,(\log 2)^2-\frac{\pi}{4}\varphi(1),$$

oder, da $\varphi(1)=\frac{\pi^2}{6}$,

$$4)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin z\,.\,\log\cos z\,dz=\frac{\pi}{4}\left[(\log 2)^2-\frac{\pi^2}{24}\right].$$

Nimmt man in der Gleichung 1)

$$8x(1-x)-1=\cos 4z \quad\text{oder}\quad 4x(1-x)=(\cos 2z)^2,$$

so ist

$$x=\frac{(\cos z\pm\sin z)^2}{2},\quad 1-x=\frac{(\cos z\mp\sin z)^2}{2},$$

$$\begin{aligned}\log x\,.\,\log(1-x)&=[2\log(\cos z+\sin z)-\log 2][2\log(\cos z-\sin z)-\log 2]\\&=4\log(\cos z+\sin z)\,.\,\log(\cos z-\sin z)-2\log 2\,.\,\log\cos 2z+(\log 2)^2.\end{aligned}$$

Hierdurch geht die Gleichung 1) über in

$$5)\qquad \begin{aligned}&4\log(\cos z+\sin z)\,.\,\log(\cos z-\sin z)=2\log 2\,.\,\log\cos 2z+3(\log 2)^2\\&-\varphi(1)+\int_0^1\frac{\log[1+2w^2\cos 4z+w^4]}{w(1+w)}(1-w)\,dw.\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich auch aus der Gleichung 2) durch Vertauschung von z mit $\frac{\pi}{4}-z$ ableiten. Für $p=-1$ und $n=4$ giebt die Gleichung 3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} log(2\cos 2z)\,dz = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man leicht aus 5)

$$6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} log(\cos z + \sin z)\,.\,log(\cos z - \sin z)\,.\,dz = \frac{\pi}{16}\left[(log\,2)^2 - \frac{\pi^2}{6}\right].$$

Die unter 4) und 6) bemerkten Integrale findet man angeführt im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", Band 6 S. 193.

Göttingen. Prof. Enneper.

VII.

Versuch einer mathematischen Darstellung der Flüssigkeitswellen.

Von

Dr. ARNOLD GIESEN.

I. Theil.

Ebene Wellen in einer nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit.

1. Eine in horizontaler Richtung unbegrenzte incompressible Flüssigkeit sei in verticaler Richtung durch eine Ebene begrenzt, welche um h von der Oberfläche derselben absteht. Die Flüssigkeit sei nur der Schwere unterworfen und auf ihre Oberfläche wirke ein constanter Druck. Der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten werde in einem Punkte der ursprünglichen horizontalen Oberfläche genommen, die x- und y-Axe seien horizontal, die z-Axe dagegen vertical im Sinne der Schwere, also von der Oberfläche nach dem Boden der Flüssigkeit gerichtet. Die anfänglichen Coordinaten eines Theilchens seien x_0, y_0, z_0, diejenigen in irgend einem Zeitpunkte der Bewegung x, y, z. Die Verschiebungen nach den Coordinatenaxen seien ξ, η, ζ, so dass also

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta.$$

Die Flüssigkeit sei von ebenen, der yz-Ebene parallelen Wellen durchzogen. Die Verschiebung η der Theilchen sei gleich Null, so dass also die Bahnen derselben ebene Curven sind. Die Verschiebungen ξ und ζ setzen wir als partielle Differentialquotienten einer und derselben Function voraus:

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{\partial U}{\partial z},$$

hierbei unter U eine Function der beiden Variabeln x und z verstanden, der wir, mit t die Zeit und mit δ die Oscillationsdauer der Flüssigkeitstheilchen bezeichnend, versuchsweise die nachstehende Form geben:

$$U = e^{\pm kz} f(x) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{2\pi}{\delta} t.$$

2. Die erste Gleichung, der die Verschiebungen ξ, η, ζ genügen müssen, falls sie eine mögliche Bewegung der Flüssigkeit darstellen sollen, ist die sogenannte Continuitätsgleichung, welche speciell für den Fall einer tropfbaren Flüssigkeit besagt, dass die Dichtigkeit jedes Theilchens während der Bewegung fortwährend dieselbe bleibt, oder dass die cubische Dilatation, resp. Compression verschwindet, indem tropfbare Flüssigkeiten als incompressibel angesehen werden.

Wir werden in der ganzen folgenden Untersuchung die Verschiebungen ξ, η, ζ als klein von der ersten Ordnung voraussetzen und alle Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen. Um die oben angeführte Bedingung in einer für unsern Fall zweckmässigen Weise auszudrücken, verfahren wir folgenderweise. Wir denken uns in dem ursprünglichen Ruhezustande der Flüssigkeit einen beliebigen Punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ und das an diesen Punkt anstossende Elementarparallelepiped, dessen von A ausgehende, den Axen parallele Kanten AB, AC, AD bezüglich die Längen dx_0, dy_0, dz_0 haben mögen. Wir haben dann für die Coordinaten der Punkte A, B, C, D also folgende Werthe:

$A)$	$x_0,$	$y_0,$	$z_0,$
$B)$	$x_0 + dx_0,$	$y_0,$	$z_0,$
$C)$	$x_0,$	$y_0 + dy_0,$	$z_0,$
$D)$	$x_0,$	$y_0,$	$z_0 + dz_0.$

Zur Zeit t im Laufe der Bewegung seien die ursprünglichen in den Eckpunkten des gedachten Parallelepipedes befindlichen Theile in irgendwelche neue Lagen gekommen; wir können dann diese noch immer wegen der verschwindenden Kleinheit der gedachten Bewegungen als Eckpunkte eines neuen, allerdings nicht mehr rechtwinkligen Parallelepipeds betrachten, das genau dieselbe Flüssigkeitsmenge enthält, welche früher in dem gedachten Elementarparallelepiped enthalten war. Eben wegen der Kleinheit der Bewegungen weichen aber die Winkel des neuen Parallelepipeds nur wenig von rechten Winkeln ab, und sind daher A', B', C', D' die neuen Lagen der Punkte A, B, C, D, so ist das Volumen v des neuen Parallelepipeds mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung $v = A'B' . A'C' . A'D'$. Es seien nun die Verschiebungen von A, wie oben, ξ, η, ζ, dann sind diejenigen von

$$
\begin{array}{llll}
B) & \xi + \dfrac{\partial \xi}{\partial x_0} dx_0, & \eta + \dfrac{\partial \eta}{\partial x_0} dx_0, & \zeta + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_0} dx_0, \\[2ex]
C) & \xi + \dfrac{\partial \xi}{\partial y_0} dy_0, & \eta + \dfrac{\partial \eta}{\partial y_0} dy_0, & \zeta + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y_0} dy_0, \\[2ex]
D) & \xi + \dfrac{\partial \xi}{\partial z_0} dz_0, & \eta + \dfrac{\partial \eta}{\partial z_0} dz_0, & \zeta + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z_0} dz_0.
\end{array}
$$

Addiren wir diese Verschiebungen von A, B, C, D zu den entsprechenden Coordinaten dieser Punkte, so erhalten wir die Coordinaten der fraglichen

Theilchen in ihren neuen Lagen zur Zeit t oder die Coordinaten der Punkte A', B', C', D'. Sie sind

$$
\begin{array}{llll}
A') & x_0+\xi, & y_0+\eta, & z_0+\zeta, \\
B') & x_0+dx_0+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x_0}dx_0, & y_0+\eta+\frac{\partial \eta}{\partial x_0}dx_0, & z_0+\zeta+\frac{\partial \zeta}{\partial x_0}dx_0, \\
C') & x_0+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial y_0}dy_0, & y_0+dy_0+\eta+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}dy_0, & z_0+\zeta+\frac{\partial \zeta}{\partial y_0}dy_0, \\
D') & x_0+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial z_0}dz_0, & y_0+\eta+\frac{\partial \eta}{\partial z_0}dz_0, & z_0+dz_0+\zeta+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}dz_0.
\end{array}
$$

Hieraus folgt nun sogleich weiter für die Längen der Kanten $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ des verschobenen Parallelepipeds

$$
\begin{aligned}
A'B' &= dx_0\sqrt{\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_0}\right)^2}, \\
A'C' &= dy_0\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y_0}\right)^2+\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y_0}\right)^2}, \\
A'D' &= dz_0\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial z_0}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial z_0}\right)^2+\left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Nun sind aber die Differentialquotienten von ξ, η, ζ, ebenso wie diese Grössen selbst, sehr klein von der ersten Ordnung; die vorstehenden Ausdrücke werden daher bei Ausserachtlassung der Grössen zweiter Ordnung einfach

$$A'B' = dx_0\left(1+\frac{d\xi}{dx_0}\right),\quad A'C' = dy_0\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}\right),\quad A'D' = dz_0\left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right).$$

Weiter haben wir demgemäss für das Volumen des verschobenen Parallelepipeds

$$v = A'B'.A'C'.A'D' = dx_0\,dy_0\,dz_0\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\right)\left(1+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}\right)\left(1+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right)$$

oder wieder bei Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung

$$v = dx_0\,dy_0\,dz_0\left\{1+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right)\right\}.$$

Das Volumen v_0 des Elementarparallelepipeds im ursprünglichen Ruhezustande ist $v_0 = dx_0\,dy_0\,dz_0$. Man hat daher für den Quotienten $\frac{v-v_0}{v_0}$ oder die cubische Dilatation, resp. Compression

$$\frac{v-v_0}{v_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}$$

oder mit demselben Grade der Genauigkeit

$$\frac{v-v_0}{v_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Für tropfbare Flüssigkeiten muss nun die cubische Dilatation oder Compression verschwinden, für diese wird also die Continuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0.$$

Durch Einsetzung der angenommenen Werthe für ξ, η, ζ geht mithin die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

oder nach Substitution der angenommenen Formel für U

$$\frac{d^2 f}{d x^2}+k^2 f=0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Form der Function f. Ihr Integral giebt

$$f=C \sin k x+C' \cos k x,$$

unter C und C' die beiden Integrationsconstanten verstanden. Der Continuitätsgleichung wird, wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, auch genügt, wenn wir allgemein setzen:

$$\begin{aligned}U= & e^{kz}\ (a_1 \sin kx+b_1 \cos kx) \sin \frac{2\pi}{\delta} t\\ & +e^{kz}\ (a_2 \sin kx+b_2 \cos kx) \cos \frac{2\pi}{\delta} t\\ & +e^{-kz}(a'_1 \sin kx+b'_1 \cos kx) \sin \frac{2\pi}{\delta} t\\ & +e^{-kz}(a'_2 \sin kx+b'_2 \cos kx) \cos \frac{2\pi}{\delta} t.\end{aligned}$$

Wir wollen indess zunächst, um eine einfache fortschreitende Welle zu erhalten, nur setzen

$$1)\qquad U=(c_1 e^{kz}+c_2 e^{-kz}) \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t+kx\right),$$

welcher Ausdruck aus dem vorstehenden allgemeinen durch die Annahmen

$$a_1=0,\ \ b_1=c_1,\ \ a_2=c_1,\ \ b_2=0,\ \ a'_1=0,\ \ b'_1=c_2,\ \ a'_2=c_2,\ \ b'_2=0$$

sich ergiebt. Derselbe ergiebt für die Verschiebungen nachstehende Ausdrücke:

$$\xi=\frac{\partial U}{\partial x}=k(c_1 e^{kz}+c_2 e^{-kz}) \cos \left(\frac{2\pi}{\delta} t+kx\right),$$

$$\eta=\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

* Diese Gleichung ist schon in einem früheren Aufsatze des Verfassers (Jahrg. 1876 dieser Zeitschrift S. 58) zur Anwendung gekommen. Die hier nachträglich mitgetheilte Ableitung derselben möge also auch in jenem Aufsatze berücksichtigt werden.

$$\zeta = \frac{\partial U}{\partial z} = k(c_1 e^{kz} - c_2 e^{-kz}) \sin\left(\frac{2\pi}{\delta} t + kx\right).$$

Wir müssen nun noch die Gleichung bilden, welche das Gleichgewicht der Druckkräfte und der verlorenen Kräfte ausdrückt. Die Componenten der letzteren sind, auf die Masseneinheit bezogen:

$$-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad 0, \quad -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + g.$$

Nun ist aber

$$-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nach dem d'Alembert'schen Princip muss nun in jedem Augenblicke Gleichgewicht bestehen zwischen den an der Flüssigkeit wirkenden verlorenen Kräften und den Widerstands- oder Druckkräften. Wenn also in irgend einem Momente an der Flüssigkeit äussere Kräfte angebracht würden, deren Componenten durch die vorhergehenden Ausdrücke dargestellt sind, und die Flüssigkeitstheilchen zugleich in diesem Momente ihre Geschwindigkeit plötzlich verlören, so würde die Flüssigkeitsmasse in der Gestalt, welche sie in diesem Moment gerade besitzt, im Gleichgewicht verharren. Die vorhergehenden Ausdrücke sind nun die partiellen, nach x, y, z genommenen Differentialquotienten des folgenden Ausdruckes:

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 U + gz,$$

und wir haben daher für den hydrostatischen Druck p, unter ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit verstanden, die Gleichung

$$p = \varrho\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 U + gz\right] + Const.$$

Für die Constante setzen wir p_0 und für x und z ihre Werthe $x_0 + \xi$, $z_0 + \zeta$. Da k von derselben Ordnung ist wie ξ und ζ, so können wir die Glieder $k\xi$ und $k\zeta$ als kleine von der zweiten Ordnung ausser Acht lassen, also kx und kz einfach durch kx_0 und kz_0 ersetzen. Demnach wird der hydrostatische Druck in dem Punkte, dessen anfängliche Coordinaten x_0, y_0, z_0 waren:

$$2)\quad \begin{aligned} p = p_0 + \varrho g z_0 + \varrho\Big[&\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 (c_1 e^{kz_0} + c_2 e^{-kz_0}) \\ &+ gk(c_1 e^{kz_0} - c_2 e^{-kz_0})\Big] \sin\left(\frac{2\pi}{\delta} t + kx_0\right). \end{aligned}$$

3. Die Constanten lassen sich nun folgendermassen bestimmen. Für die augenblickliche Oberfläche der Flüssigkeit, d. h. für die Theilchen, welche im Ruhezustande die z-Coordinate Null besassen, muss p constant sein. Dies liefert sofort die Gleichung

$$3)\quad \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 (c_1 + c_2) + gk(c_1 - c_2) = 0, \quad \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 = -gk\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}.$$

Eine weitere Gleichung findet sich durch die Bedingung, dass die am Boden befindlichen Flüssigkeitstheilchen stets mit dem Boden in Berührung bleiben müssen, so dass also für diese die Verschiebung ζ zu jeder Zeit verschwinden muss. Hieraus folgt

$$4)\qquad c_1 e^{kh} - c_2 e^{-kh} = 0, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{e^{-kh}}{e^{kh}}.$$

Mittels der letzten Gleichung nehmen die obigen Ausdrücke für die Verschiebungen nachstehende Gestalt an, indem wir statt $c_1 k e^{kh}$ einfach $-c$ schreiben:

$$\begin{aligned} \xi &= -c\left[e^{-k(h-z)} + e^{+k(h-z)}\right] \cos\left(\frac{2\pi}{\delta} t + kx\right), \\ \eta &= \quad 0, \\ \zeta &= -c\left[e^{-k(h-z)} - e^{+k(h-z)}\right] \sin\left(\frac{2\pi}{\delta} t + kx\right). \end{aligned}$$

Mittels der Gleichung 4) können wir nun auch Gleichung 3) in folgender Weise umgestalten:

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 = gk\frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}.$$

Zur weitern Umformung führen wir in diese Formeln die Wellenlänge λ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der Wellenbewegung ein mittels der Gleichungen

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \delta v,$$

deren erstere man erhält durch Erwägung, dass ξ und ζ sich nicht ändern dürfen, wenn man $x + \lambda$ für x setzt. Somit erhalten wir

$$5)\qquad \begin{aligned} \xi &= -c\left[e^{+\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x), \\ \eta &= \quad 0, \\ \zeta &= \quad c\left[e^{+\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x), \\ v &= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}}}. \end{aligned}$$

Für die Function U erhalten wir jetzt folgende Formel:

$$6)\qquad U = -\frac{c\lambda}{2\pi}\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x).$$

Endlich kommt jetzt für den hydrostatischen Druck in jenem Punkte, welcher vor der Bewegung die Coordinaten x_0, y_0, z_0 besass, wenn wir Kürze wegen zunächst das Zeichen k beibehalten,

$$p = p_0 + \varrho g z_0 + \varrho g k \left[\frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}\left(c_1 e^{kz_0} + \frac{c_1 e^{kh}}{e^{-kh}} e^{-kz_0}\right) + c_1 e^{kz_0} \right.$$
$$\left. - \frac{c_1 e^{kh}}{e^{-kh}} e^{-kz_0}\right] \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x_0)$$

oder nach einfacher Ausrechnung

$$p = p_0 + \varrho g z_0 - 2\varrho g c \frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}z_0} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z_0}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x).$$

Die Constante p_0 drückt den Druck auf der Oberfläche aus, während c und λ von dem ursprünglichen Erregungszustande abhängen. Da sich also für den Druck ein bestimmter reeller Werth ergiebt, so folgt daraus, dass die vorausgesetzte Bewegung den Gesetzen der Hydrodynamik entspricht. Es erübrigt noch die Vergleichung derselben mit der Erfahrung.

4. Am einfachsten gestalten sich die vorstehenden Resultate, wenn man annimmt, dass h gegen z sehr gross sei. Die Grösse $e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}$ kann dann bei Betrachtung jener Theilchen, die sehr weit vom Boden der Flüssigkeit entfernt sind, vernachlässigt werden, und wenn man dann noch setzt

$$c e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} = C,$$

so hat man folgende Gleichungen für die Verschiebungen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Function U und den Druck, indem wir zur Unterscheidung die im Vorhergehenden gebrauchten Zeichen mit Accenten versehen:

$$\xi' = -Ce^{-\frac{2\pi}{\lambda}z} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x), \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = Ce^{-\frac{2\pi}{\lambda}z} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x),$$

$$v' = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

$$U' = -\frac{\lambda C}{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x),$$

$$p' = p_0 + \varrho g z_0.$$

Die durch vorstehende Gleichungen dargestellte Bewegung können wir folgendermassen charakterisiren: Da man sogleich erhält

$$\xi'^2 + \zeta'^2 = C^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}z},$$

so sieht man, dass die Bahnen der einzelnen Theilchen verticale, auf der Wellenebene senkrecht stehende Kreise sind, deren Radien

$$R = Ce^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}$$

in geometrischer Reihe abnehmen wenn die Tiefe der Theilchen in ihrer Ruhelage unter dem ursprünglichen Niveau der Flüssigkeit in arithmetischer Reihe zunimmt.

Jedes Theilchen bewegt sich in seinem Kreise gleichförmig. Denn es ist

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,r\,R\right)^2.$$

Die Bahngeschwindigkeit ist also von der Zeit unabhängig. Sie ist ferner proportional dem Radius, wie vorauszusehen war, da die Oscillationsdauer ϑ als constant vorausgesetzt wurde.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit r der Wellenbewegung ist von der Natur der Flüssigkeit unabhängig, dagegen der Quadratwurzel aus der Wellenlänge proportional.

5. Im allgemeinen Falle, wo die Flüssigkeit in einer geringen Tiefe durch eine horizontale Ebene begrenzt ist und die Bewegung durch die Gleichungen 5) dargestellt wird, hat man

$$\frac{\xi^2}{c^2\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}+e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right]^2}+\frac{\zeta^2}{c^2\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}-e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right]^2}=1.$$

Die Bahnen der Theilchen sind daher verticale, auf der Wellenebene senkrecht stehende Ellipsen, deren horizontale und verticale Halbaxen resp. die Werthe haben

$$c\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}+e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right],\quad c\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}-e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right].$$

Die horizontale Axe ist offenbar stets grösser als die verticale. Beide kommen für kleine z, also für Theilchen, die der Oberfläche nahe liegen, einander desto näher, die Bahnen werden also für diese Theilchen desto näher kreisförmig, je grösser $\frac{h}{\lambda}$, also je grösser die Tiefe der Flüssigkeit im Vergleich zur Wellenlänge ist. Schon wenn $h=\lambda$, kommen die Bahnen der an der Oberfläche gelegenen Theilchen dem Kreise sehr nahe. Ihre Axen verhalten sich dann nämlich wie

$$(e^{2\pi}+e^{-2\pi}):(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$$

oder wie

$$\left(535{,}5+\frac{1}{535{,}5}\right):\left(535{,}5-\frac{1}{535{,}5}\right).$$

Die horizontale Axe sowohl, als die verticale nehmen von der Oberfläche nach dem Boden zu fortwährend ab. Für die letzte ist dies von selbst klar, für die erste ergiebt es sich sofort, wenn man ihren Ausdruck nach z differentiirt:

$$\frac{2\pi c}{\lambda}\left[-e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}+e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right].$$

Dieser Differentialquotient ist nämlich offenbar für $z < h$, also für die ganze Flüssigkeitsmasse stets negativ. Am Boden erreicht die horizontale Axe der Bahnellipse den Werth $2c$, während die verticale verschwindet, die Theilchen bewegen sich also dort in gerader Linie hin und her. Für $h=\lambda$ z. B. verhalten sich die grossen Axen der Bahnellipsen an der Oberfläche und am Boden wie 535,5:2 oder wie 267,7:1.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist für eine einigermassen beträchtliche Tiefe der Flüssigkeit sehr nahe dieselbe, wie in einer in verticaler Richtung unbegrenzten Flüssigkeit, also proportional der Quadratwurzel aus der Wellenlänge. Für eine Flüssigkeit von sehr geringer Tiefe ist sie kleiner.

6. Zwei Wellen der betrachteten Art, welche nach gleicher Richtung fortschreiten und gleiche Wellenlänge besitzen, setzen sich zu einer neuen fortschreitenden Welle von derselben Richtung zusammen. Wenn die gegebenen Wellenbewegungen bestimmt sind durch die Functionen U und U', so wird die resultirende Wellenbewegung in gleicher Weise von der Function $U+U'$ abhängen. Es werde z. B. gesetzt, unter k die Grösse $\frac{2\pi}{\lambda}$ und unter φ den Phasenunterschied verstanden:

$$U = -\frac{c}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt+x),$$

$$U' = -\frac{c'}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt+x+\varphi),$$

so ist

$$U+U' = -\frac{C}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt+x+\Phi),$$

wobei C und Φ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$c + c'\cos k\varphi = C\cos k\Phi, \quad c'\sin k\varphi = C\sin k\Phi,$$

woraus für C und Φ folgt

$$C^2 = c^2 + c'^2 + 2cc'\cos k\varphi, \quad tg\, k\Phi = \frac{c'\sin k\varphi}{c + c'\cos k\varphi}.$$

Der Ausdruck $U+U'$ hat ganz dieselbe Form, wie jeder der beiden U und U' einzeln, die resultirende Welle unterscheidet sich von den einzelnen nur durch Amplitude und Phase.

Wenn $k\varphi\left(\text{oder } \frac{2\pi}{\lambda}\varphi\right) = \pi$ oder ein ungerades Vielfaches von π ist, wenn daher φ oder der Phasenunterschied ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, so ist die Amplitude der resultirenden Welle gleich der Differenz der Amplituden der einzelnen; wenn dagegen der Phasenunterschied ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, so ist die resultirende Amplitude an jeder Stelle der Flüssigkeit die Summe der beiden einzelnen Amplituden.

Zwei nach entgegengesetzter Richtung fortschreitende Wellen der betrachteten Art von gleicher Wellenlänge und Oscillationsamplitude geben eine stehende Schwingung. Hat man z. B.

$$U = -\frac{c}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + x),$$

$$U' = -\frac{c}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - x + \varphi),$$

so ist

$$U + U' = -\frac{2c}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \cos k(x - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Die Ausschläge, welche dieser Function entsprechen, sind:

$$\xi = 2c\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \sin k(x - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\zeta = 2c\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \cos k(x - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Das Verhältniss $\xi : \zeta$ ist von t unabhängig, d. h. die Bahn jedes Theilchens ist geradlinig. Die Neigung der Bahn ändert sich aber mit x und z.

Ueber die Richtung der beiden durch U und U' bestimmten Wellen giebt folgende Betrachtung Aufschluss. Für die erstere ist

$$\frac{d\xi}{dt} = +\, ckv\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + x),$$

$$\zeta = +\, c\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + x),$$

für die zweite dagegen

$$\frac{d\xi'}{dt} = -\, ckv\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - x + \varphi),$$

$$\zeta' = +\, c\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - x + \varphi).$$

Da nun $\frac{d\xi}{dt}$ und ζ immer gleiche, dagegen $\frac{d\xi'}{dt}$ und ζ' immer ungleiche Zeichen haben, so folgt, dass die erste Welle in der Richtung der positiven, die zweite dagegen in der Richtung der negativen x-Axe fortschreitet.

7. Aus Functionen von der Form 6) setzt sich nun auch die oben angegebene allgemeine Formel für U zusammen, so dass alle in der betrachteten Art enthaltenen Bewegungen sich aus einer Reihe einzelner Oscillationen der Art, wie sie durch die Gleichung 6) dargestellt wird, zusammensetzen lassen.

Die im Vorhergehenden betrachteten Bewegungen sind auch dann in derselben Weise möglich, wenn die Flüssigkeit nur nach der Fortpflanzungsrichtung (d. h. nach der x-Axe) unbegrenzt ist, seitlich dagegen durch zwei verticale, mit dieser (also auch mit der xz-Ebene) parallelen Ebenen begrenzt ist (also in einer unendlich langen Wellenrinne).

II. Theil.

Cylindrische Wellen in einer nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit.

1. Ueber die Flüssigkeit, ihre Begrenzung, die Kräfte, die auf sie einwirken, ferner über die Lage des Coordinatensystems gelten dieselben Voraussetzungen, wie im I. Theile.

Die Verschiebungen der Theilchen nach den drei Axen seien aber die partiellen Differentialquotienten der Function

$$U = e^{\pm kz} f(r) \begin{Bmatrix} sin \\ cos \end{Bmatrix} \frac{2\pi}{\delta} t,$$

wo wieder t die Zeit, δ die Oscillationsdauer, r aber die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von der z-Axe oder der Axe der cylindrischen Wellen bedeutet.

2. Die Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

nimmt nun nachstehende Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

oder nach Substitution des für U angenommenen Ausdruckes

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + k^2 f = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung kann in folgender Form dargestellt werden:

$$f = C_1 P\left(-\frac{k^2 r^2}{4}\right) + C_2 Q\left(-\frac{k^2 r^2}{4}\right),$$

unter C_1 und C_2 die beiden Integrationsconstanten und unter P und Q zwei durch folgende Reihen definirte Functionen verstanden:

$$P(u) = 1 + \frac{u}{(1!)^2} + \frac{u^2}{(2!)^2} + \frac{u^3}{(3!)^2} + \cdots,$$

$$Q(u) = P(u) \,.\, l(2\sqrt{-u}) - \left[\frac{1}{(1!)^2} u + \frac{1+\frac{1}{2}}{(2!)^2} u^2 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(3!)^2} u^3 + \ldots\right].$$

Hiernach wird die Continuitätsgleichung auch erfüllt, wenn wir setzen

$$1) \quad \begin{aligned} U = {} & P \sin M (a_1 e^{kz} + a'_1 e^{-kz}) + P \cos M (a_2 e^{kz} + a'_2 e^{-kz}) \\ & + Q \sin M (b_1 e^{kz} + b'_1 e^{-kz}) + Q \cos M (b_2 e^{kz} + b'_2 e^{-kz}), \end{aligned}$$

unter M den Ausdruck $\frac{2\pi}{\delta} t$ verstanden und als Argument der Functionen P und Q die Grösse $-\frac{k^2 r^2}{4}$ betrachtet.

Für den Druck in irgend einem Punkte der Flüssigkeit erhalten wir, wie im I. Theile,

$$p=\varrho\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 U+gz\right]+Const.,$$

und da $z=z_0+\zeta$, ferner kz nahe gleich kz_0, endlich

$$\zeta=P\sin M.k(a_1e^{kz}-a'_1e^{-kz})+P\cos M.k(a_2e^{kz}-a'_2e^{-kz})$$
$$+Q\sin M.k(b_1e^{kz}-b'_1e^{-kz})+Q\cos M.k(b_2e^{kz}-b'_2e^{-kz}),$$

so folgt, die *Const.* wieder mit p_0 bezeichnet:

$$\text{2)}\quad \begin{aligned} p=p_0+\varrho g z_0+\varrho\Big\{&P\sin M\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2(a_1e^{kz_0}+a'_1e^{-kz_0})+gk(a_1e^{kz_0}-a'_1e^{-kz_0})\right]\\ &+P\cos M\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2(a_2e^{kz_0}+a'_2e^{-kz_0})+gk(a_2e^{kz_0}-a'_2e^{-kz_0})\right]\\ &+Q\sin M\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2(b_1e^{kz_0}+b'_1e^{-kz_0})+gk(b_1e^{kz_0}-b'_1e^{-kz_0})\right]\\ &+Q\cos M\left[\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2(b_2e^{kz_0}+b'_2e^{-kz_0})+gk(b_2e^{kz_0}-b'_2e^{-kz_0})\right]\Big\}.\end{aligned}$$

3. Die Constanten sind nun wie im I. Theile zu bestimmen. Für $z_0=0$ muss der Druck constant werden. Dies wird der Fall sein, wenn man hat

$$-\frac{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2}{gk}=\frac{a_1-a'_1}{a_1+a'_1}=\frac{a_2-a'_2}{a_2+a'_2}=\frac{b_1-b'_1}{b_1+b'_1}=\frac{b_2-b'_2}{b_2+b'_2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass folgende Proportion erfüllt sein muss:

$$a_1:a'_1=a_2:a'_2=b_1:b'_1=b_2:b'_2.$$

Hierdurch erhält man für U und ζ

$$U=\quad P\sin M(a_1e^{kz}+a'_1e^{-kz})+c_1P\cos M(a_1e^{kz}+a'_1e^{-kz})$$
$$+c_2Q\sin M(a_1e^{kz}+a'_1e^{-kz})+c_3Q\cos M(a_1e^{kz}+a'_1e^{-kz}),$$
$$\zeta=\quad kP\sin M(a_1e^{kz}-a'_1e^{-kz})+c_1kP\cos M(a_1e^{kz}-a'_1e^{-kz})$$
$$+c_2kQ\sin M(a_1e^{kz}-a'_1e^{-kz})+c_3kQ\cos M(a_1e^{kz}-a'_1e^{-kz}).$$

Zwischen a_1 und a'_1 besteht aber noch die Gleichung

$$\text{3)}\qquad \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2=-gk\frac{a_1-a'_1}{a_1+a'_1}.$$

Es ist jetzt noch die Bedingung auszudrücken, dass ζ für $z_0=h$ verschwinde. Dies giebt

$$\text{4)}\qquad a_1e^{kh}-a'_1e^{-kh}=0,\quad \frac{a_1}{a'_1}=\frac{e^{-kh}}{e^{kh}}.$$

Hieraus folgt, unter α, β, α_1, β_1 vier Constanten verstanden,

$$U=\alpha\ P\sin M(e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)})+\beta\ P\cos M(e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)})$$
$$+\alpha_1Q\sin M(e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)})+\beta_1Q\cos M(e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)})$$

oder, anders geordnet,

$$U=\left[e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)}\right]\{(\alpha P+\alpha_1Q)\sin M+(\beta P+\beta_1Q)\cos M\}.$$

Gleichung 3) nimmt infolge von 4) die Gestalt an

$$5)\qquad \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 = gk\frac{e^{kh}-e^{-kh}}{e^{kh}+e^{-kh}}.$$

Die Grösse k hängt also ganz in derselben Weise von δ und h ab, wie bei ebenen Wellen.

Für die Verschiebungen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\xi = -\tfrac{1}{2}k^2 x\left[e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)}\right]\left\{\left(\alpha\frac{dP}{du}+\alpha_1\frac{dQ}{du}\right)\sin M + \left(\beta\frac{dP}{du}+\beta_1\frac{dQ}{du}\right)\cos M\right\},$$

$$\eta = -\tfrac{1}{2}k^2 y\left[e^{k(h-z)}+e^{-k(h-z)}\right]\left\{\left(\alpha\frac{dP}{du}+\alpha_1\frac{dQ}{du}\right)\sin M + \left(\beta\frac{dP}{du}+\beta_1\frac{dQ}{du}\right)\cos M\right\},$$

$$\zeta = -k\left[e^{k(h-z)}-e^{-k(h-z)}\right]\left\{(\alpha P+\alpha_1 Q)\sin M + (\beta P+\beta_1 Q)\cos M\right\}.$$

Die Bahn jedes Theilchens liegt also in einer Ebene, welche durch dasselbe und die z-Axe gelegt werden kann.

Für den hydrostatischen Druck erhält man mit Benutzung von 5)

$$p = p_0 + \varrho g z_0 + 2\varrho g k\left[(\alpha P+\alpha_1 Q)\sin M + (\beta P+\beta_1 Q)\cos M\right]\frac{e^{kz_0}-e^{-kz_0}}{e^{kh}+e^{-kh}},$$

wo wieder p_0 den constanten Druck auf der ursprünglichen Oberfläche darstellt.

4. Genäherte Darstellung der obigen Gleichungen für Punkte, die von der Wellenaxe weit entfernt sind.

Die zu Grunde gelegte Differentialgleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d^2(f\sqrt{r})}{dr^2} + \left(k^2+\frac{1}{4r^2}\right)f\sqrt{r} = 0.$$

Da für sehr grosse r der Quotient $\frac{1}{4r^2}$ gegen k^2 vernachlässigt werden kann, so hat man also für solche:

$$\frac{d^2(f\sqrt{r})}{dr^2} + k^2 f\sqrt{r} = 0$$

oder

$$f\sqrt{r} = C_1\sin kr + C_2\cos kr$$

oder

$$f = C_1\frac{\sin kr}{\sqrt{r}} + C_2\frac{\cos kr}{\sqrt{r}}.$$

Im Vorhergehenden sind also, um die Gesetze der Wellenbewegung für sehr grosse Entfernungen von der Erregungsaxe zu erhalten, für die Grössen $P\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right)$ und $Q\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right)$ blos $\frac{\sin kr}{\sqrt{r}}$ und $\frac{\cos kr}{\sqrt{r}}$ zu setzen. Es wird dann

$$U = [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] \left\{ (\alpha \sin kr + \alpha_1 \cos kr) \sin \frac{2\pi}{\delta} t + (\beta \sin kr + \beta_1 \cos kr) \cos \frac{2\pi}{\delta} t \right\} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Um indess zunächst eine einfache fortschreitende Welle zu erhalten, setze man $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = 0$. Es wird dann

$$U = [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] \frac{\alpha_1}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right). \tag{6}$$

Setzt man $\alpha_1 k = -c$, so wird

$$U = -\frac{c}{k\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right),$$

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}] \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right),$$

$$p = p_0 + \varrho g z_0 + \varrho \left\{ -\left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2 \frac{c}{k\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] + g \frac{c}{\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}] \right\} \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right)$$

oder mit Benutzung der Gleichung 5) (vergl. I. Thl. 2.)

$$p = p_0 + \varrho g z_0 - 2\varrho g \frac{c}{\sqrt{r}} \frac{e^{kz_0} - e^{-kz_0}}{e^{kh} + e^{-kh}} \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right). \tag{7}$$

Da nach Obigem die Bahnebene jedes Theilchens durch die z-Axe geht, so erhält man den horizontalen Ausschlag $\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ durch Differentiation von U nach dem Radius r, also

$$\sigma = -\frac{c}{\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right) - \frac{1}{2kr} \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right) \right\},$$

also näherungsweise für sehr grosse r

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{c}{\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}] \cos \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right), \\ \zeta &= \frac{c}{\sqrt{r}} [e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}] \sin \left(\frac{2\pi}{\delta} t + kr \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Führt man, wie im 1. Theile, die Wellenlänge λ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ein, so wird, da für sehr grosse r in erster Annäherung $\frac{1}{\sqrt{r+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$ ist:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \delta v.$$

Dies eingesetzt in obige Formeln, liefert, wenn man zugleich statt $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_0 + \sigma}}$ einfach $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$ setzt:

$$6') \quad U = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt+r),$$

$$7') \quad p = p_0 + \varrho g z_0 - 2\varrho g \frac{c}{\sqrt{r_0}} \frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}z_0} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z_0}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}} \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt+r),$$

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h}}}.$$

$$8') \quad \begin{aligned} \sigma &= -\frac{c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt+r), \\ \zeta &= \frac{c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)} - e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(h-z)}\right] \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt+r). \end{aligned}$$

5. Diese Formeln stimmen nun mit den für ebene Wellen aufgestellten bis auf den Factor $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$ überein. Die Amplituden nehmen also bei cylindrischen Wellen ab proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung von der Axe der Erregung, um für unendliche Entfernungen ganz zu verschwinden, während dieselben bei ebenen Wellen in gleicher Tiefe überall constant bleiben.

Im Uebrigen führt die weitere Discussion ganz zu denselben Resultaten, wie im I. Theile Nr. 4 und 5; man erhält die betreffenden Formeln aus den dortigen, indem man einfach überall $\frac{c}{\sqrt{r_0}}$ statt c und $\frac{C}{\sqrt{r_0}}$ statt C schreibt und x durch r, ebenso ξ durch σ ersetzt. Man gelangt also namentlich zu dem Resultat, dass in Flüssigkeiten von sehr grosser Tiefe die Bahnen aller Theilchen, welche nicht in der Nähe des Bodens liegen, Kreise sind, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben werden, dass für Flüssigkeiten von geringerer Tiefe alle Bahnen Ellipsen sind, deren Axen mit wachsender Entfernung von der Wellenaxe abnehmen, aber so, dass in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit alle Bahnen in gleicher Tiefe einander ähnlich sind.

6. Lässt man von derselben Erregungsaxe zwei Wellen von gleicher Richtung und Wellenlänge, aber verschiedener Amplitude und Phase ausgehen, die durch die Functionen

$$U = -\frac{c}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt+r),$$

$$U' = -\frac{c'}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt+r+\varphi)$$

bestimmt sind, so bilden sie eine neue Welle von derselben Gestalt, aber verschiedener Amplitude und Phase, und zwar ist diese durch die Function

$$U + U' = -\frac{C}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + r + \Phi)$$

charakterisirt, wo C und Φ durch dieselben Gleichungen, wie im I. Thl., Nr. 6, definirt sind. Es findet also für den Fall, dass der Phasenunterschied φ ein Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, das an der citirten Stelle über die Amplitude der resultirenden Welle Gesagte sofort auch hier seine Anwendung.

Setzt man in U' die Constante $c' = c\sqrt{-1}$, so erhält die durch diese Function bestimmte Welle allerdings imaginäre Amplituden, genügt aber dennoch sämmtlichen hydrodynamischen Bedingungen. Kehrt man aber für dieselbe die Richtung von r um, ersetzt also r durch $-r$, so erhält man eine cylindrische Welle mit reellen Amplituden, deren Richtung der Richtung der durch U bestimmten Welle entgegengesetzt ist. Sie ist bestimmt durch die Function

$$U'' = -\frac{c}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - r + \varphi).$$

Die **Richtung** der beiden Wellenbewegungen erhellt folgendermassen: Für die erste ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = +\frac{ckv}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + r),$$

$$\zeta = +\frac{c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + r),$$

für die zweite durch U'' bestimmte dagegen

$$\frac{d\sigma''}{dt} = -\frac{ckv}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - r + \varphi),$$

$$\zeta'' = +\frac{c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt - r + \varphi).$$

Da nun $\frac{d\sigma}{dt}$ und ζ immer gleiche, $\frac{d\sigma''}{dt}$ und ζ'' immer ungleiche Zeichen haben, so folgt, dass die durch U bestimmte Welle sich von der Axe fortbewegt, während die zweite sich derselben nähert. Offenbar wachsen die Amplituden mit zunehmender Annäherung an die Wellenaxe.

Durch Superposition der beiden Wellen entsteht eine **stehende Schwingung**, welche bestimmt ist durch die Function

$$U + U'' = -\frac{2c}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \sin k(r - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Dann ist näherungsweise für grosse r

$$\sigma = \frac{2c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \sin k(r - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\zeta = \frac{2c}{\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + \tfrac{1}{2}\varphi) \cos k(r - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Das Verhältniss $\sigma : \zeta$ ist von t unabhängig, die Bahn jedes Theilchens ist also geradlinig, die Neigung derselben ändert sich aber mit r und z. An gewissen Stellen sind die Bahnen zu jeder Zeit vertical, an anderen horizontal.

7. Auch hier kann, wie am Schlusse des I. Theiles, die Bemerkung gemacht werden, dass alle durch Gleichung 1) dargestellten Bewegungen sich aus einer Reihe einfacher Schwingungen, wie sie durch Gleichung 6′) bestimmt sind, zusammensetzen lassen.

8. Lässt man von zwei parallelen Erregungsaxen zwei Wellen von gleicher Richtung, Wellenlänge und Amplitude, aber verschiedener Phase ausgehen, die durch die Functionen

$$U = -\frac{c}{k\sqrt{r_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + r),$$

$$U' = -\frac{c}{k\sqrt{r'_0}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k(vt + r' + \varphi)$$

charakterisirt sind, wo $r^2 = x^2 + y^2$, $r'^2 = (x - 2a)^2 + y^2$ sein möge, so bilden sie durch Superposition eine neue Welle, die bestimmt ist durch

$$U + U' = -\frac{c}{k}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right]\left[\frac{\sin k(vt + r)}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin k(vt + r' + \varphi)}{\sqrt{r'_0}}\right].$$

Es ist dann

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial r'}\,\frac{\partial r'}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial U}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U'}{\partial r'}\,\frac{\partial r'}{\partial y},$$

$$\zeta = c\left[e^{k(h-z)} - e^{-k(h-z)}\right]\left[\frac{\sin k(vt + r)}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin k(vt + r' + \varphi)}{\sqrt{r'_0}}\right].$$

Untersuchen wir nun die Punkte, wo die Verticalausschläge ζ zu jeder Zeit gleich Null sind. Der Ausdruck in der letzten Klammer kann geschrieben werden

$$\sin kvt\left(\frac{\cos kr}{\sqrt{r_0}} + \frac{\cos k(r' + \varphi)}{\sqrt{r'_0}}\right) + \cos kvt\left(\frac{\sin kr}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin k(r' + \varphi)}{\sqrt{r'_0}}\right).$$

Soll dieser Ausdruck für jedes t verschwinden, so müssen die Coefficienten von $\sin kvt$ und $\cos kvt$ einzeln Null sein. Dies liefert zwei Gleichungen, welche quadrirt und addirt weiter geben

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} + \frac{2}{\sqrt{r_0 r'_0}} \cos k(r_0 - r'_0 - \varphi) = 0,$$

woraus folgt, dass nothwendig $r_0 = r'_0$ und zugleich $k(r_0 - r'_0 - \varphi) = \pm(2n + 1)\pi$ sein müsse, wenn n eine ganze Zahl bedeutet. Man erkennt dies sofort, wenn man aus den Seiten $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$ und $\frac{1}{\sqrt{r'_0}}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\pi - k(r_0 - r'_0 - \varphi)$ ein Dreieck construirt, dessen dritte Seite

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} + \frac{2}{\sqrt{r_0 r'_0}} \cos k(r_0 - r'_0 - \varphi)\right\}}$$

nur dann verschwinden kann, wenn $r_0 = r'_0$ und zugleich $k(r_0 - r'_0 - \varphi) = \pm(2n+1)\pi$ ist. Da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, so folgt $\varphi = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$. Wenn also der Phasenunterschied ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, so sind die Verticalausschläge ζ gleich Null für alle, aber auch nur jene Punkte, für welche $r_0 = r'_0$, d. h. welche auf der Symmetrie-Ebene beider Wellen liegen.

Betrachten wir endlich noch die Bewegung auf der genannten Symmetrie-Ebene, und zwar zunächst für den Fall, dass $\varphi = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, wo also $k\varphi = \pm(2n+1)\pi$. Es wird jetzt $\frac{\partial U}{\partial r} = -\left(\frac{\partial U'}{\partial r'}\right)_{r'=r}$. Ferner, da jetzt $x = a$ wird, $\frac{\partial r}{\partial x} = -\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)_{r'=r}$ und $\frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)_{r'=r}$. Daraus folgt $\xi_{r'=r} = 2\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$ und $\eta_{r'=r} = 0$. Es sind also die Ausschläge senkrecht zur Symmetrie-Ebene doppelt so gross, als die Ausschläge, welche in derselben Richtung von jeder einzelnen Welle herrühren; in der Symmetrie-Ebene dagegen finden weder Vertical- noch Horizontalausschläge statt. Es ergiebt sich hieraus auch, dass es in grösseren Entfernungen von den beiden Wellenaxen keinen Punkt giebt, der fortwährend in Ruhe bliebe.

Es sei jetzt aber der Phasenunterschied $\varphi = 0$. Es wird dann $\zeta_{r'=r}$ doppelt so gross, als bei der einfachen Cylinderwelle. Da ferner $\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial U'}{\partial r'}\right)_{r'=r}$, so folgt $\xi_{r'=r} = 0$, $\eta_{r'=r} = 2\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$. Es ist also senkrecht zur Symmetrie-Ebene kein Ausschlag vorhanden, während in der Symmetrie-Ebene sowohl die Vertical- wie Horizontalausschläge doppelt so gross sind, als die in denselben Richtungen erfolgenden Ausschläge der einfachen Wellen. Nimmt man also die Gerade, in welcher sich die Symmetrie-Ebene und die Ebene der beiden Erregungsaxen schneiden, zur Axe einer dritten Welle, die durch die Function

$$U'' = -\frac{2c}{k\sqrt[4]{a^2 + r''^2}}\left[e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}\right] \sin k\left(vt + \sqrt{a^2 + r''^2}\right)$$

bestimmt ist, wo r'' die Entfernung von dieser Axe bedeutet, so bringt sie in der genannten Symmetrie Ebene dieselbe Bewegung hervor, wie die beiden ersten Wellen zusammengenommen.

VIII.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. Biehringer,

Professor an der königl. Industrieschule zu Nürnberg.

(Fortsetzung.)

Schifffahrtscurven.

Nr. 25. Wir wollen als weitere Anwendung unserer allgemeinen Resultate in Nr. 15 die Bewegung eines Schiffes verfolgen, das unter dem Einflusse der Umdrehung der Erde steht, insofern es die Umdrehungsgeschwindigkeit des Ausgangspunktes beizubehalten sucht, und das sich beim Wegfallen dieses Einflusses auf einer Loxodrome bewegt. Die Form der Erde sei zunächst noch die einer beliebigen Rotationsfläche; die ursprüngliche Geschwindigkeit des Schiffes auf der Loxodrome des Ausgangspunktes sei constant und $=v$; letzteres bilde mit den nach Osten gerichteten Parallelkreisen stets den Winkel α. Das Coordinatensystem sei wie in Nr. 19 gewählt. Zunächst wollen wir die Resultate in Nr. 15 den neuen Verhältnissen anpassen.

Um das $z=z'_t$ zu bestimmen, hat man $\sqrt{dz^2+df^2}=v\,.\,\sin\alpha\,.\,dt$. Daraus folgt

$$\partial z_t=\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{1+\partial f_z^2}}$$

und

$$1)\qquad t=\frac{1}{v\sin\alpha}\int^{\bullet}\sqrt{1+\partial f_z^2}\,dz.$$

Die letzte Gleichung ist nach z aufzulösen. Wäre v nicht constant, so hätte es unter dem Integralzeichen zu bleiben.

Es ist weiter $d\varphi'$ der Nr. 15 $=\dfrac{v\,dt.\cos\alpha}{f}$ und $\varphi'_t=v\cos\alpha\displaystyle\int^{\bullet}\frac{1}{f}\,dt$, mithin

$$2)\qquad \varphi=\int^{\bullet}\frac{P}{f}\,dt+v\cos\alpha\int^{\bullet}\frac{1}{f}\,dt=\int^{\bullet}\omega\,dt+v\cos\alpha\int^{\bullet}\frac{1}{f}\,dt.$$

In 2) ist statt z der Werth aus 1) zu setzen. Zu diesen Gleichungen kommt noch

3) $$\varphi = f_z.$$

Die Constanten der Integrale sollen wieder dadurch bestimmt werden, dass für $t=0$ $z=z'$ gleich dem z-Werthe des Ausgangspunktes zu setzen ist. Wie die windschiefe Fläche φ_z erhalten werden kann, wurde schon öfters erwähnt.

Ueberlegt man, dass das Fortschreiten auf der Loxodrome dem Fortschreiten auf dem Meridian mit der Geschwindigkeit $r \sin\alpha$ entspricht und dass der z-Werth in beiden Fällen derselbe ist, so wird klar, dass die erste Gleichung in Nr. 24 in die erste Gleichung der jetzigen Nummer übergeht, wenn man $\theta = 90^0$ und $r \sin\alpha$ statt des r setzt. Auch das ψ könnte man aus gleichen Gründen und unter denselben Voraussetzungen, wie oben, einführen und dadurch die Gleichungen $z = \sqrt{f^2+z^2}.\sin(\psi+\mu)$ etc. zur Anwendung bringen. Bei den Gleichungen für φ ist eine solche Umänderung möglich, wenn man wieder $\theta = 90^0$ und $\omega = \omega + \frac{r\cos\alpha}{f}$ setzt.

Um nun die obigen Resultate der oben bestimmten Schiffscurve anzupassen, dürfen wir nur, ähnlich der Nr. 20,

$$\frac{p}{f} = \frac{p - f\omega}{f} = \omega\frac{f'-f}{f} = \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{f'-f}{f}$$

setzen.

Nehmen wir die Erde als Kugel an, so wird

3) $$\varrho = \sqrt{r^2 - z^2}$$

und nun können auch z und φ unmittelbar bestimmt werden. Wir sind jedoch mit Rücksicht auf die eben angedeutete Zurückführung der Aufgabe dieser Nummer auf die der Nr. 24 im Stande, die Resultate sofort anzugeben; denn darnach muss die letztere Aufgabe aus der der Nr. 22 hervorgehen, wenn man $v\sin\alpha$ statt v, d. h. in beiden Fällen die Geschwindigkeit auf dem Meridian setzt und $\omega + \frac{v\cos\alpha}{f}$ statt ω, oder $\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{f'-f}{f} + \frac{v\cos\alpha}{f}$ statt $\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot\frac{f'-f}{f}$, also $\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot f' + v\cos\alpha$ statt $\frac{2\pi}{24.60.60}\cdot f'$, d. h. in beiden Fällen die Geschwindigkeit auf dem Anfangskreise setzt. Man erhält dadurch unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen und Bestimmungen:

1) $$z = r\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right)$$

und, weil $f' = r\cos\beta$ ist, nach geringen Umformungen

$$2)\quad \varphi = \frac{1}{v \sin\alpha}\left(\frac{2r\pi\cos\beta}{24.60.60} + v\cos\alpha\right) Log \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{vt\sin\alpha}{2r}\right)} - \frac{2\pi t}{24.60.60}.$$

Auch die dortige Reihe liesse sich auf analoge Weise den jetzigen Verhältnissen anpassen. Die besonderen Fälle sind leicht zu übersehen. Ebenso kann auf einfache Weise das t eliminirt und die Gleichung der windschiefen Fläche φ_z erhalten werden. Für die Bewegung nach Süden ist β negativ zu nehmen.

Da sich in der Gleichung für φ sofort zwei Theile unterscheiden lassen, von denen der eine mit dem Factor $cotang\,\alpha$ der φ-Aenderung entspricht, die nur durch die Bewegung auf der Loxodrome entstehen würde, und der andere mit dem Factor $\frac{2\pi}{24.60.60}$ der φ-Aenderung zukommt, die die Drehung der Erde bei einer Bewegung längs des Meridians mit der Geschwindigkeit $v\sin\alpha$ veranlasst, so giebt dieser Theil, multiplicirt mit dem f des entsprechenden t- oder z-Werthes, die Ablenkung in Längenmass auf dem zugehörigen Parallelkreise, welche die Umdrehung der Erde bewirkt. Sowohl die φ-Aenderung, als die Ablenkung in Längenmass durch den Einfluss der Erdrotation könnten aus den Resultaten in Nr. 22 erhalten werden, wenn man $v\sin\alpha$ statt v setzt. Aus diesem Grunde können auch die dortigen Zahlenresultate hierher übertragen werden, wenn man $v\sin\alpha = 10^m$ setzt. Hier tritt zu diesem noch die Abhängigkeit der Ablenkung von dem α hinzu und ist bei gleichem $v\sin\alpha$ die Ablenkung um so grösser, je näher α dem 90. Grade, und um so kleiner, je näher es dem 0. oder 180. Grade liegt. Im ersten Falle nähert sich die Loxodrome mehr dem Meridian, im andern Falle mehr dem Parallelkreise. Bei α und $180-\alpha$ ist die Ablenkung unter sonst gleichen Umständen dieselbe; ausserdem noch für den nämlichen Werth von $v\sin\alpha$ oder der stets gleichen Projection von v auf den Meridian, mögen v und α einzeln sonst irgendwelche Werthe haben.

Die anderen Eigenschaften der wirklichen Bewegung und der Bahn derselben sind begreiflicherweise von denen in Nr. 22 verschieden, weil hier nicht mehr die Ablenkungscurve zugleich die wirkliche Bahn vorstellt. Die Parallelkreise werden von der Curve bei

$$\partial z_t = v\sin\alpha \,.\, \cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right) = 0$$

berührt Dies geschieht demnach bei $\alpha = 0$ oder dann, wenn die Loxodrome in den Parallelkreis übergeht. Ist das nicht der Fall, so geschieht es bei $\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta = \frac{2n+1}{2}.\pi$, wo n irgend eine ganze Zahl vorstellt. Setzt man nun aber $n > 0$ oder $\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ in die zweite Gleichung ein, so sieht man, dass φ imaginär wird und dass daher bei der nördlichen und südlichen Bewegung $\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta$ höchstens $=\frac{\pi}{2}$ sein darf. Für den Grenzwerth von t oder für $t=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).\frac{r}{v\sin\alpha}$ wird $z=r$ und $\varphi=\infty$. Die Curve läuft demnach nach Norden und Süden in unendlich vielen Windungen um die Rotationsaxe, trifft diese erst bei $z=r$ und ist erst da senkrecht zur Axe gerichtet. — Eine Berührung des Meridians tritt bei

$$\partial\varphi_t=\left(\frac{2r\pi\cos\beta}{24.60.60}+v\cos\alpha\right).\frac{1}{r\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta\right)}-\frac{2\pi}{24\ 60\ 60}$$

$$=\frac{2r\pi\left(\cos\beta-\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta\right)\right)+v\cos\alpha.24.60.60}{24.60.60.r\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta\right)}=0$$

ein. Daraus ergiebt sich

$$\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta\right)=\cos\beta+\frac{v\cos\alpha.24.60.60}{2r\pi}.$$

Nehmen wir nun die Bewegung in nordöstlicher Richtung, also β und α spitz an, so ist ersichtlich, dass hier die letzte Gleichung nicht stattfinden kann; denn der Bogen links ist von $t=0$ an grösser als β, also sein $\cos$ kleiner als $\cos\beta$, während die rechte Seite doch grösser als $\cos\beta$ ist; ausserdem rückt nach dem Vorausgegangenen $\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta$ nie über $\frac{\pi}{2}$ hinaus. Es ergiebt sich daher, dass bei der nordöstlichen Bewegung ie die Berührung eines Meridians eintritt. Wird anfänglich eine nordwestliche Bewegung angenommen, so ist α stumpf zu setzen und wird das zweite Glied rechts in der letzten Gleichung negativ. Der eben angedeutete Widerspruch ist demnach hier nicht vorhanden und tritt eine Berührung des Meridians bei

$$t=\frac{r}{v\sin\alpha}\left(\arccos\frac{2r\pi\cos\beta+v\cos\alpha.24.60.60}{2r\pi}-\beta\right)$$

ein. $\arccos$ ist wegen der erwähnten Grenzen von t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ anzunehmen und muss noch mindestens $=\beta$ sein. Weitere Betrachtungen werden in einem analogen Falle der nächsten Nummer folgen. Aus der Natur der Verhältnisse ist ersichtlich, dass φ für diesen Werth ein Minimum ist. — Für die südöstliche Bewegung ist β negativ und α spitz anzunehmen. Eine ähnliche Betrachtung wie die obige zeigt, dass hier wieder ein Meridian berührt wird. Der zugehörige t-Werth ist derselbe, wie im letzten Falle. Endlich ergiebt sich noch, dass bei der südwestlichen Bewegung wieder keine Wendung eintreten kann. Dieselben Resultate werden erhalten, wenn man berücksichtigt, dass eine Wendung nur möglich ist, wenn $v.\cos\alpha$ in unseren Breiten auf der Nordseite des Ausgangspunktes westlich, auf der Südseite östlich liegt und diese Geschwindigkeit durch den entgegengesetzt wirkenden Einfluss der Erdrotation aufgehoben wird. Bei der südlichen Bewegung findet der Durchgang durch den Aequator bei $z = 0$ oder bei $t = \frac{r\beta}{v\sin\alpha}$ statt. Ein vollständiger Umlauf ist vollzogen, wenn $\varphi = 2\pi$ wird oder wenn seine Werthe um 2π differiren.

Der Winkel, welchen die Curve an irgend einer Stelle mit dem Parallelkreise bildet, findet sich entweder aus

$$tang\,\delta = \frac{dm}{dp} = \frac{dz\sqrt{1 + \partial f_z^2}}{f\,d\varphi},$$

oder aus $tang\,\delta$ = der Geschwindigkeit längs des Meridians, dividirt durch die Geschwindigkeit längs des Parallelkreises, also

$$tang\,\delta = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha + \frac{2r\pi}{24.60.60}\left(\cos\beta - \cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)\right)}.$$

Endlich ist noch die wirkliche Geschwindigkeit an irgend einer Stelle oder

$$c = \sqrt{v^2\sin^2\alpha + \left[v\cos\alpha + \frac{2r\pi}{24.60.60}\left(\cos\beta - \cos\left(\frac{vt}{r} + \beta\right)\right)\right]^2} = \frac{v\sin\alpha}{\sin\delta}.$$

Es ist nicht schwierig, zu untersuchen, wie sich diese Grössen in besonderen Fällen verhalten.

Lässt man in den Gleichungen der Bewegungscurve auch negative Werthe von t zu und vergleicht die vier Curven, welche an irgend einer Stelle der Erdoberfläche zu den Winkeln α und $180 - \alpha$ nord- und südwärts gehören, so ergiebt sich, dass die beiden nördlichen Curven für die positiven und negativen t-Werthe einerseits, und die beiden südlichen andererseits symmetrisch gegen die Ablenkungscurve der Nr. 22 liegen, wenn die Geschwindigkeit auf dem Meridian $v\sin\alpha$ beträgt. Ferner ist ersichtlich, dass die Theile der nördlichen Bewegungen zu positivem t und die Theile der südlichen Bewegungen zu negativem t symmetrisch gegen den Meridian zu $t = 0$ liegen, wenn die nordöstliche und südöstliche, dann die nordwestliche mit der südwestlichen Bewegung zusammengenommen werden. Das gleiche Verhältniss findet für die nördlichen Bewegungen zu negativem t und die südlichen Bewegungen zu positivem t statt. Endlich ergiebt sich noch, dass, wenn die nordöstliche mit der südwestlichen, und die nordwestliche mit der südöstlichen Bewegung und dazu noch die Theile der Curven verglichen werden, die zu positivem t bei der einen und zu negativem t bei der andern Curve gehören, die zusammengenommenen Theile symmetrisch gegen die Loxodromen zu den α und $180-\alpha$ liegen. Diese Resultate ergeben sich unmittelbar, wenn man die Gleichungen der vier Curven anschreibt und berücksichtigt, dass $tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}$ etc. ist.

Wären keine Bewegungswiderstände vorhanden, so wäre in dem Obigen die Curve gefunden, welche ein Schiff beschreiben müsste, das unter dem Winkel α gegen die Parallelkreise zu steuern sucht. Es würde die besagte Bahn vollständig zurücklegen, wenn das Wasser ebenfalls die Bewegung mit der entsprechenden Geschwindigkeit hätte, die es durch die Umdrehung der Erde erlangen kann, sobald es vom Aequator nach den Polen hin abfliesst. Umgekehrt können wir für diese Voraussetzungen auch das α bestimmen, das eingehalten werden muss, damit das Schiff von einem bestimmten Punkte zu einem andern solchen Punkte gelangt. Nennen wir die geographische Breite des Endpunktes β' und die Differenz zwischen den geographischen Längen des Ausgangs- und Endpunktes φ', wo φ' zwischen 0 und 360^0 liegt und positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem der Endpunkt durch eine östliche oder westliche Fahrt erreicht werden soll, so erhalten wir aus der Gleichung für z die Bedingungsgleichung

$$\beta'=\frac{vt}{r}\sin\alpha+\beta$$

und aus der Gleichung für φ die andere

$$\varphi'+2n\pi=\frac{1}{v\sin\alpha}\left(\frac{2r\pi\cos\beta}{24.60.60}+v\cos\alpha\right)Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta'}{2}\right)}-\frac{2\pi t}{24.60.60}.$$

Das n ist hierbei 1, 2, 3 etc. zu setzen, je nachdem ausser dem φ' noch 1, 2, 3, ... Umläufe um die Erde gemacht werden sollen. Man erhält demnach zwei Bedingungsgleichungen für v, t und α, so dass wieder eine dieser Grössen beliebig gewählt und dazu jede der beiden anderen Grössen bestimmt werden kann. Nimmt man an, dass die Geschwindigkeit v, wie etwa bei Dampfschiffen, eine durch bestehende Verhältnisse vorgeschriebene Grösse hat, so ergiebt sich aus der ersten Bedingungsgleichung

$$t=\frac{r(\beta'-\beta)}{r\sin\alpha};$$

aus der zweiten Bedingungsgleichung ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass $Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta'}{2}\right)}$ mit M bezeichnet wird,

$$\varphi' + 2n\pi = \frac{1}{v \sin\alpha}\left(\frac{2r\pi \cos\beta}{24.60.60} + v\cos\alpha\right).M - \frac{2r\pi}{24.60.60}\cdot\frac{\beta'-\beta}{v \sin\alpha}.$$

Die letzte Gleichung geht, wenn $\frac{2r\pi}{24.60.60.v}(M\cos\beta - \beta' + \beta) = N$ und $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$ gesetzt wird, über in

$$\varphi' + 2n\pi = M\operatorname{cotg}\alpha + N\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$$

und ergiebt

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{M(\varphi'+2n\pi) \pm N\sqrt{M^2 - N^2 + (\varphi'+2n\pi)^2}}{M^2 - N^2}.$$

Es kann sich nun treffen, dass die Wurzel für $n=0$ imaginär wird; dies ist ein Beweis dafür, dass bei dem grossen Einflusse der Erdrotation die gegebene Strecke nicht unmittelbar zurückgelegt werden kann. Man wird dann nacheinander $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzen müssen, bis endlich ein positiver Werth des Radicanden zum Vorschein kommt. In diesem Falle hätte das Schiff die entsprechende Anzahl von Erdumsegelungen zu machen, bis es an sein Ziel gelangen kann. Natürlich setzen wir hierbei voraus, dass dazwischen liegende Länder keine Hindernisse bereiten. Sonst ergiebt sich noch, dass, weil n immer grösser genommen werden kann, endlich ein reeller Werth zum Vorschein kommen muss und dass darüber hinaus noch beliebig viele andere Werthe von n angegeben werden können, die reelle Werthe von α liefern. Da $N^2 - M^2$ der Minimalwerth von φ ist, der bei $\cos\alpha = \frac{-M}{N}$ eintritt, so drückt die Bedingung des Reellseins für α oder $(\varphi'+2n\pi)^2 > N^2 - M^2$ nichts Anderes aus, als dass das $\varphi'+2n\pi$ zwischen dem Anfangs- und Endpunkte nie kleiner genommen werden kann, als dieser kleinste φ-Werth, der bei gegebenem v überhaupt möglich ist. Hat v einen sehr grossen Werth, so ist es, wie aus der Gleichung für N ersichtlich ist, eher möglich, direct von einem Punkte zu einem andern zu gelangen, ohne vorher ganze Umläufe machen zu müssen. Für α erhält man endlich zwei Werthe, von welchen jedoch nur der eine, und zwar der mit dem untern Vorzeichen der Wurzel, zu gebrauchen ist. Die Gründe hierfür, sowie eine Construction des Ausdruckes werden bei einer analogen Aufgabe der nächsten Nummer folgen.

Nr. 26. Die oben bestimmte Curve für die Schiffsbewegung tritt zwar wegen der vorhandenen Bewegungswiderstände in Wirklichkeit nicht ein, man muss aber doch annehmen, dass der Einfluss der Erddrehung auf den Lauf des Schiffes nicht ohne Einfluss ist. Abgesehen natürlich von noch anderen störenden Einflüssen, wird schon deshalb ein Schiff, dessen Cours ohne Rücksicht auf diese Verhältnisse bestimmt wird, nicht genau an der verlangten Stelle ankommen, sondern auf der nördlichen Hemisphäre eine seitliche Ablenkung nach rechts und auf der südlichen eine solche nach links erleiden. Die wirkliche Curve, welche das Schiff unter dem dreifachen Einflusse der eigenen Bewegung, der Rotation der Erde und der vorhandenen Bewegungswiderstände des Wassers beschreibt, ist keine Loxodrome. Ihre Gleichungen sind ohne Beiziehung mechanischer Resultate im Allgemeinen nicht herstellbar; mit Hilfe derselben lassen sich jedoch unter gewissen Voraussetzungen auf einfache Weise nicht blos die Curve, sondern auch die Grössen bestimmen, welche für die Schifffahrt von Bedeutung sind. Wird nämlich die Längenaxe des Schiffes stets unter einem gewissen Winkel α gegen die Parallelkreise gestellt und hat das Schiff längs dieser Richtung infolge der auf ihm thätigen Triebkräfte eine Geschwindigkeit v, so tritt zu dieser Geschwindigkeit eine solche in der Richtung der Parallelkreise hinzu, welche von dem Einflusse der Erdrotation herrührt, und erhält dadurch das Schiff eine Bewegung, die nicht genau mit der Richtung seiner Längenaxe zusammenfällt. Durch diese etwas seitwärts gerichtete Bewegung wird ein Widerstand des Wassers hervorgerufen, der nicht von den eigenen Triebkräften des Schiffes, sondern von der Geschwindigkeit, resp. von der diese Geschwindigkeit ersetzenden Kraft des Schiffes überwunden werden muss, die von der Erdrotation herrührt. Dieser Widerstand wächst mit der seitlichen Geschwindigkeit und wird bald so gross, dass er eine Vermehrung der letztgenannten Geschwindigkeit verhindert und die letzterwähnte Kraft zwingt, ihre Wirkung einzig und allein zur Ueberwindung dieses Widerstandes zu verwenden.

Bezeichnen wir mit u die seitliche, durch die Erde hervorgerufene Geschwindigkeit in der Richtung des jeweiligen Parallelkreises, mit F den lothrechten, längs des Kieles hinlaufenden Querschnitt des Theiles des Schiffes, der unter Wasser ist, und mit C den Widerstandscoefficienten im Meerwasser, so ist $F.\sin\alpha$ die Projection des F auf den Meridian und $C.F.\sin\alpha.u^3$ die zur Ueberwindung des seitlichen Widerstandes nothwendige Arbeit in einer Secunde. Geleistet wird diese Arbeit von der im Schiffe thätigen Kraft K, welche durch die Erdrotation veranlasst wird und mit dem Schiffe ebenfalls um u in der Richtung des Parallelkreises vorrückt, also den Effect $K.u$ erzielt. Gemäss den obigen Bemerkungen muss die letztgenannte Wirkung nur zur Ueberwindung des seitlichen Widerstandes verwendet werden, daher die Gleichung gelten

$$K.u = C.F.\sin\alpha.u^3, \text{ woraus sich } u = \sqrt{\frac{K}{F\sin\alpha}} \text{ ergiebt.}$$

Um das K zu bestimmen, überlegen wir, dass in unseren Breiten bei der Bewegung nach Norden die Geschwindigkeitsänderung vermöge der Erddrehung

$$= \frac{(f_z - f_{z+dz}).2\pi}{24.60.60\,dt} = \frac{-\partial f_t.2\pi}{24.60.60}, \text{ also } K = \frac{Q}{g}.\frac{-\partial f_t.2\pi}{24.60.60}$$

ist. Q stellt hierbei das Gewicht des Schiffes, g die Beschleunigung der Schwere vor. Man erhält demnach

$$u = \sqrt{\frac{-2Q\pi\,\partial f_t}{CF.\sin\alpha.24.60.60}}.$$

Bei der Bewegung nach Süden ist die Beschleunigung des K in der ersten Periode $= \frac{\partial f_t.2\pi}{24.60\ 60}$ anzunehmen und daher auch in der Formel für u ∂f_t statt $-\partial f_t$ zu setzen; nach der Ueberschreitung des Aequators muss sie wieder $= \frac{-\partial f_t.2\pi}{24.60.60}$ angenommen werden. In den letzten Fällen ist nämlich zu beachten, dass u mit K oder ∂f_t sein Vorzeichen und seine Richtung wechseln soll, und dass dies nach der Formel zwischen u und K nicht geschieht, indem ein negativer Werth des Radicanden das u imaginär machen würde. Es muss daher einestheils die Aenderung des Vorzeichens des u selbstständig vorgenommen und anderntheils dafür gesorgt werden, dass der Radicand immer positiv bleibt und also u nicht imaginär wird.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Bewegungscurve über, so ist zunächst zu erwähnen, dass, weil die Erdrotation auf die Bewegung längs des Meridians oder längs der z-Axe keinen Einfluss hat, diese Bewegung also nur durch $v\sin\alpha$ bedingt wird, die Gleichung für z unverändert bleibt. Es ist demnach, wie in Nr. 25, von unseren nördlichen Breiten aus

$$1)\qquad z = r\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right) \text{ oder } z = r\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha - \beta\right),$$

je nachdem die Bewegung nach Norden oder Süden vor sich geht. Die Worte Süden und Norden sind hier und in der Folge nur zu verwechseln, wenn der Ausgangspunkt auf der Südhälfte der Erde liegt. Im Zusammenhang damit steht, dass für die nördliche oder südliche Bewegung

$$2)\qquad f = r\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right) \text{ oder } f = r\cos\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha - \beta\right)$$

zu setzen ist. ∂f_t findet sich demnach im ersten Falle $=$ $-v\sin\alpha.\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right)$, im zweiten Falle $= -v\sin\alpha.\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right)$.

Nach den Bemerkungen, die oben über das u gemacht wurden, folgt hieraus als Werth des u für die nördliche Bewegung $=$ $\sqrt{\frac{2\pi Qv\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta\right)}{24.60.60.g.C.F}}$, dagegen für die südliche Bewegung vor Ueberschreitung des Aequators $= \sqrt{\frac{2\pi Qv\sin\left(\beta - \frac{vt}{r}\sin\alpha\right)}{24.60.60.g.C.F}}$ und nach Ueberschreitung des Aequators $= \sqrt{\frac{2\pi Qv\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha - \beta\right)}{24.60.60.g.C.F}}$.

Schreitet man nun zur Bestimmung des φ vor, so erhält man für die Bewegung nach Norden die Differentialgleichung

$$\partial \varphi_t = \frac{v \cos \alpha + u}{f}.$$

Für die Bewegung nach Süden wird

$$\text{im ersten Abschnitte } \partial \varphi_t = \frac{v \cos \alpha - u}{f},$$

$$\text{„ zweiten „ } \partial \varphi_t = \frac{v \cos \alpha + u}{f}.$$

Verfolgen wir zunächst die erste dieser Gleichungen weiter, so ergiebt sich ferner

$$\partial \varphi_t = \frac{v \cos \alpha}{r \cos\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)} + \sqrt{\frac{2 \pi Q v}{24.60.60.g.C.F}} \cdot \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)}}{r \cos\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)}$$

und daraus, weil

$$\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx = \tfrac{1}{2} Log \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} - arctang \sqrt{\sin x}$$

ist und bei $t = 0$, $\varphi = 0$ sein soll

$$3) \qquad \varphi = cotang\, \alpha \,.\, Log \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{v t}{2 r} \sin \alpha\right)}$$

$$+ \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2 \pi Q}{24.60.60.g.C.F.v}} \left[\tfrac{1}{2} Log \frac{\left(1 + \sqrt{\sin\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)}\right)(1 - \sqrt{\sin \beta})}{\left(1 - \sqrt{\sin\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)}\right)(1 + \sqrt{\sin \beta})} \right.$$

$$\left. - arctang \sqrt{\sin\left(\frac{v t}{r} \sin \alpha + \beta\right)} + arctang \sqrt{\sin \beta} \right].$$

Die entsprechenden Formeln für die Bewegung nach Süden finden sich aus den gegebenen Anhaltspunkten auf analoge Weise; es wird vor Erreichung des Aequators

$$\varphi = cotang\, \alpha \,.\, Log \frac{tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} - \frac{v t}{2 r} \sin \alpha\right)}$$

$$+ \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2 \pi Q}{24.60.60.g.C.F.v}} \left[\tfrac{1}{2} Log \frac{\left(1 + \sqrt{\sin\left(\beta - \frac{v t}{r} \sin \alpha\right)}\right)(1 - \sqrt{\sin \beta})}{\left(1 - \sqrt{\sin\left(\beta - \frac{v t}{r} \sin \alpha\right)}\right)(1 + \sqrt{\sin \beta})} \right.$$

$$\left. - arctang \sqrt{\sin\left(\beta - \frac{v t}{r} \sin \alpha\right)} + arctang \sqrt{\sin \beta} \right]$$

und nach Ueberschreitung des Aequators

$$\varphi = colang\,\alpha\,.\,Log\,\frac{lang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{lang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{vt}{2r}\sin\alpha\right)}$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2\pi Q}{24.60.60.g.C.F.v}}\left[\tfrac{1}{2}\,Log\,\frac{\left(1+\sqrt{\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha-\beta\right)}\right)(1-\sqrt{\sin\beta})}{\left(1-\sqrt{\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha-\beta\right)}\right)(1+\sqrt{\sin\beta})}\right.$$

$$\left.-\,arclang\sqrt{\sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha-\beta\right)}+arclang\sqrt{\sin\beta}\right].$$

Ausser den oben gegebenen Anhaltspunkten, welche die unbestimmten Integrale ergeben, ist im letzten Falle noch zu beachten, dass der letzte φ-Werth sich an den vorausgegangenen anschliessen und daher am Aequator oder für $t=\frac{r\beta}{v\sin\alpha}$ der Ausdruck in der eckigen Klammer in beiden Fällen $\frac{1}{2}\,Log\,\frac{1-\sqrt{\sin\beta}}{1+\sqrt{\sin\beta}}+arclang\sqrt{\sin\beta}$ liefern muss.

Von den besonderen Fällen bieten nur die Interesse dar, für welche $\beta=0$ oder $\alpha=0$ ist. Im ersten Falle gehen die Formeln auf der nördlichen und die zwei Formeln auf der südlichen Halbkugel in einander über. Im zweiten Falle wird $z=r\cos\beta$ und $\varphi=\frac{0}{0}$. Eine directe Untersuchung dieses Falles zeigt, dass hier K, sowie u in unserem obigen Sinne $=0$ sind, und dass, weil der Widerstand des Wassers durch die Triebkraft des Schiffes überwunden wird, $\partial\varphi_t=\frac{v}{r\cos\beta}$ constant, also $\varphi=\frac{vt}{r\cos\beta}$ ist. Auf denselben Werth führt das erste Glied in der Gleichung für φ, wenn $\alpha=0$ gesetzt wird; das zweite Glied dieser Gleichung ist hier ohne Umänderung gar nicht zu gebrauchen, weil z. B. die Grösse F keine sachgemässe Bedeutung mehr hat und ein anderer Querschnitt an ihre Stelle tritt.

Aehnlich, wie in Nr. 25, ist der φ-Werth aus zwei Theilen zusammengesetzt, von welchen der erste Theil die φ-Aenderung bestimmt, die blos durch die Bewegung auf der Loxodrome entsteht. Der andere Theil giebt die Ablenkung, die durch die gemeinsame Wirkung der Erdrotation und des Wasserwiderstandes erzeugt wird. Letzterer Theil, multiplicirt mit dem f-Werthe der Endstelle, bestimmt die Ablenkung in Längenmass. Aus der Formel für φ ist unmittelbar ersichtlich, in welcher Abhängigkeit diese Ablenkungen von α, v, Q und F stehen.

Es soll nun, um einige Anhaltspunkte über die vorhandenen Werthsverhältnisse zu gewinnen, ein Zahlenbeispiel auf Grund der Resultate durchgeführt werden, welche uns in dieser Beziehung zur Verfügung stehen. Nach **Navier** kann der Schiffswiderstand $= 8{,}1 . F . u^2$ Kilogramm gesetzt werden. Dabei sind F und u auf Meter zu beziehen. Unser C ist also dann $= 8{,}1$. Bezeichnet weiter b die Höhe eines Cylinders, dessen Grundfläche F ist und der mit dem verdrängten Wasser gleichen Cubikinhalt hat, wird endlich 1,027 als das specifische Gewicht des Meerwassers angenommen, so ist $Q = F . b . 1{,}027 . 1000$ Kilogr. und

$$\frac{2\pi Q}{24\ 60.60.g.C.F} = \frac{2\pi . b . 1027}{24\ 60.60.9{,}81.8{,}1} = 0{,}0009399\, b.$$

Nebenbei bemerkt, kann b von vornherein bestimmt werden, wenn der Tiefgang des Schiffes und die anderen fraglichen Dimensionen bekannt sind. Der Factor des zweiten Gliedes in der Gleichung für φ geht dadurch über in $\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{0{,}0009399\, b}{v}}$.

Als besonderer Fall werde ein Schiff verfolgt, bei welchem $b = 10^m$ und die Geschwindigkeit $v = 5^m$ sei; dasselbe soll sich vom Aequator bis zum 80. Grade nördlicher oder südlicher Breite ungehindert nach unseren Voraussetzungen bewegen können. Alsdann ist

$$\frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta = \frac{vt}{r}\sin\alpha = 80^0,$$

und wird der Werth des zweiten Gliedes des φ-Werthes gleich

$$\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{0{,}0009399}{5}}\left[\tfrac{1}{2}\, Log\frac{1+\sqrt{\sin 80^0}}{1-\sqrt{\sin 80^0}} - arctang\sqrt{\sin 80^0}\right]$$
$$= \frac{1}{\sin\alpha} . 0{,}08676748.$$

Um noch dafür zu sorgen, dass der letzte Werth, welcher die Ablenkung von der Loxodromenbahn repräsentirt, sehr gross, also $\sin\alpha$ sehr klein wird, setzen wir voraus, dass das Schiff eine halbe Erdumsegelung machen soll; dann bestimmt sich aus dem Werthe der Loxodrome oder aus

$$\varphi = cotang\,\alpha . Log\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}-\frac{vt}{2r}\right)},\ \text{d. h. hier}\ \pi = cotang\,\alpha . Log\frac{1}{tang\, 5^0},$$

$\alpha = 37^0\, 47'\, 34{,}5''$ und wird die Ablenkung $\frac{1}{\sin\alpha} . 0{,}08676748 = 8^0\, 6'\, 45''$.

In Längenmass würde dieselbe betragen $r\cos 80^0 . 0{,}14159 = 156524^m$ $= 21{,}12074$ Meilen. Es ist dies ein Resultat, das dem Anscheine nach unter den gegebenen Verhältnissen nicht ausser dem Bereich der Möglichheit liegt. Sowohl dieses Ergebniss, als eine allgemeinere Betrachtung der Werthverhältnisse des zweiten Theiles des Ausdrucks für φ liefern den Beweis, dass in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit dieser zweite Theil den ersten nicht so beträchtlich übertrifft, dass, wie in Nr. 25, meist nur durch einen oder mehrere Umläufe von einer Stelle zu einer zu gelangen ist; die sich in Bezug auf ihre geographische Breite um einen nicht allzukleinen Betrag unterscheidet.

Ausserdem können in Bezug auf numerische Bestimmungen noch folgende Bemerkungen gemacht werden. Nicht nur der Factor von $cotang\,\alpha$, sondern auch der Klammernfactor von $\frac{1}{sin\,\alpha}$ in der Gleichung für φ können als Functionen betrachtet werden, welche nur von den geographischen Breiten der Ausgangs- und Endstellen, oder von β und β' abhängig sind.

Berechnet man die Factoren

$$Log\,\frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\,Log\,\frac{1+\sqrt{sin\,\beta}}{1-\sqrt{sin\,\beta}} - arctang\sqrt{sin\,\beta}$$

stets vom Aequator an und legt die erhaltenen Werthe in zwei Tabellen an, so lassen sich mit Hilfe derselben die Werthe der Factoren von $cotang\,\alpha$ und $\frac{1}{sin\,\alpha}$ der genannten Gleichung in allen anderen Fällen unmittelbar bestimmen. Zu dem Klammernfactor von $\frac{1}{sin\,\alpha}$ kann sogar auch der von dem Fahrzeuge unabhängige Werth $\sqrt{\frac{2\,\pi.}{24.60.60.g.C}}$ oder $\sqrt{\frac{2\,\pi\,s}{24.60.60.g.C}}$ genommen werden, welch letzterer Werth bei unseren Annahmen $\sqrt{0{,}0009399}$ beträgt. Von vornherein kann bezüglich dieser Factoren erwähnt werden, dass sie beide positiv sind, mit der geographischen Breite wachsen, und dass Letzteres bei dem zweiten Factor in erhöhtem Grade der Fall ist. Es sind nämlich beide Factoren bei $\beta=0$ ebenfalls Null; ihre Ableitungen in Bezug auf β, oder $\frac{1}{cos\,\beta}$ und $\sqrt{0{,}0009399}\,.\,\frac{\sqrt{sin\,\beta}}{cos\,\beta}$ sind innerhalb der hier vorhandenen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ positiv und wachsen von Null an, endlich wächst die letzte Ableitung verhältnissmässig stärker als die erste. Für Intervalle von 10 zu 10^0 sind die Werthe der Factoren in nachfolgender Tabelle niedergelegt; der erste Werth entspricht dem Factor von $cotang\,\alpha$, der zweite dem von $\frac{1}{sin\,\alpha}$:

0^0:	0	0
10^0:	0,1754259	0,0014985
20^0:	0,3563785	0,0043100
30^0:	0,5493061	0,0081517
40^0:	0,7629100	0,0130850
50^0:	1,0106830	0,0195010
60^0:	1,3169580	0,0280034
70^0:	1,7354150	0,0402234
80^0:	2,4362460	0,0613533
90^0:	∞	∞.

Es ist klar, dass diese Tabelle sich auch graphisch darstellen und sich zwei entsprechende Curven zeichnen lassen, welche für geometrische Constructionen die bezüglichen Werthe unmittelbar ergeben.

Setzen wir, ähnlich wie in Nr. 25, den Factor von $cotang\,\alpha$ im Allgemeinen $= M$, und zwar für die geographische Breite $\beta = M_\beta$ und die entsprechenden Werthe des Factors von $\frac{1}{sin\,\alpha} = N$ und N_β, so kann mit Berücksichtigung dessen, dass $tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$ ist, und in Hinblick auf die Gleichungen des φ in verschiedenen Fällen Folgendes gesetzt werden:

1. bei der Bewegung nach Norden, oder allgemeiner, bei der Bewegung gegen den, dem Ausgangspunkte nächstliegenden Pol hin, $M = M_{\beta'} - M_\beta$ und $N = N_{\beta'} - N_\beta$;
2. bei der Bewegung nach dem Aequator zu, und zwar bevor derselbe passirt wird, $M = M_\beta - M_{\beta'}$, $N = N_{\beta'} - N_\beta$;
3. bei der letzten Bewegung und nach dem Passiren des Aequators $M = M_\beta + M_{\beta'}$, $N = N_{\beta'} - N_\beta$.

Die Werthe von M und N lassen sich also in allen Fällen mit Hilfe der oben zum Theil bestimmten Tabellen durch Addition oder Subtraction leicht finden. Ob β oder β' nördliche oder südliche Breiten vorstellen, darauf ist in den Formeln des 1., 2. und 3. Satzes weiter keine Rücksicht zu nehmen und nur festzuhalten, dass β' dem Endpunkte und β dem Ausgangspunkte zugehört. So wenig übersichtlich sich die Formeln für M und N in den drei Fällen auf den ersten Anblick gestalten so einfach lassen sie sich bei näherer Betrachtung übersehen. Das M wird nämlich in allen drei Fällen positiv und ist, wenn Ausgangs- und Endpunkt auf einer Seite des Aequators liegen, $M_{\beta'} - M_\beta$ oder $M_\beta - M_{\beta'}$ zu setzen, je nachdem $M_{\beta'} > M_\beta$ oder $M_\beta > M_{\beta'}$ ist, d. h. immer gleich dem grössern weniger dem kleinern; ferner ist es, wenn die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, $= M_\beta + M_{\beta'}$, d. h. gleich der Summe der Werthe anzunehmen. Das N ist stets gleich dem

N des Endpunktes minus dem N des Ausgangspunktes; es wird demnach im 1. Falle positiv, im 2. Falle negativ, im 3. Falle positiv, Null oder negativ, je nachdem die geographische Breite des Ausgangspunktes grösser, gleich oder kleiner als die Breite des Endpunktes auf der andern Seite des Aequators ist. Da durch das Glied mit N die Ablenkung des Schiffes von der Loxodromenbahn bestimmt wird, so sieht man wieder, dass auf unserer Erdhälfte bei den Bewegungen nach Norden oder Süden, bei spitzem oder stumpfem Werth von α, die Ablenkung nach rechts und nach Ueberschreitung des Aequators nach links stattfindet. Die Ablenkung ist endlich um so grösser, je näher der eine Endpunkt der Bahn dem Aequator und der andere Endpunkt dem Pole liegt, um so kleiner, je weniger sich die geographischen Breiten dieser Punkte unterscheiden, mögen sie beide auf der einen oder auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen. Wie mit Hilfe der Tabelle die Ablenkung selbst bestimmt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach Berechnung des M und N in der oben angegebenen Weise lässt sich die Bahn des Schiffes und der Ort desselben zu jeder Zeit durch die Gleichungen

$$\beta' = \frac{vt}{r}\sin\alpha + \beta, \quad z = r\sin\beta', \quad f = r\cos\beta', \quad \varphi = M.\,cotang\,\alpha + \frac{N}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{b}{v}}$$

bestimmen. Die M und N sind den aufeinanderfolgenden β'-Werthen gemäss zu bestimmen. Die drei letzten Gleichungen bestimmen die Bahn unabhängig von der Zeit t. Ausserdem sind diese Gleichungen sehr geeignet, um rückwärts auf t, α, v etc. zu schliessen, wenn β', β, φ gegeben sind.

An die letzte Gleichung lässt sich eine sehr einfache Construction knüpfen, welche den Bogenwerth des φ, den Bogenwerth der Ablenkung und letztere noch in ihrer wirklichen Länge bestimmt. Nimmt man als Längeneinheit etwa den Meter und zeichnet im hundertmal kleinern Massstabe, so können M und N den ihren Zahlenwerthen entsprechenden Centimetermengen gleichgesetzt werden. $M\,cotang\,\alpha$ repräsentirt nun die dem α anliegende Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete M ist. Verlängert man in diesem Dreieck die beiden Schenkel von α über die Spitze hinaus und zeichnet für den so erhaltenen Winkel α ein neues rechtwinkliges Dreieck, in welchem $\sqrt{N.\frac{Nb}{v}}$, d. h. die mittlere Proportionale zu N und die vierte Proportionale zu N, b und v die gegenüberliegende Kathete ist, und dessen Hypotenuse in der Verlängerung der Kathete $M\,cotang\,\alpha$ liegt, so ist diese Hypotenuse plus der letztgenannten Kathete gleich dem Bogenwerthe von φ. Die genannte Hypotenuse allein giebt den Bogenwerth des Ablenkungswinkels. Um die Ablenkung in wirklichem Längenmass zu erhalten, dürfte der Bogenwerth des Ablenkungswinkels nur in dem Verhältnisse von 1 zu der Meteranzahl, welche dem Radius des Parallelkreises des Endpunktes der Bahn entspricht, vergrössert werden. Sonst ist noch zu erwähnen, dass die genannte Construction so lange in Giltigkeit bleibt, als die Glieder der Gleichung für φ gleiche Vorzeichen haben. Im andern Falle ist das zweite Dreieck nicht in den Scheitelwinkel von α, sondern in den letzteren selbst, und zwar in sonst unveränderter Weise hineinzulegen. Die fragliche Hypotenuse des zweiten Dreiecks und die Kathete $M\, cotang\, \alpha$ des ersten werden dann von selbst subtrahirt und das φ kommt unmittelbar als Differenz zum Vorschein. Wäre der Winkel α stumpf, so hätte man die fraglichen rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel $180-\alpha$ zu zeichnen. Wir werden später wieder Gelegenheit erhalten, auf die eben bestimmten Figuren zurückzukommen.

Was die Schlüsse betrifft, die in Nr. 25 aus der Gleichung für z in Bezug auf die Form der Curven entnommen wurden, so bleiben diese auch in unserem jetzigen Falle bestehen, weil die Gleichung für z hier die nämliche ist und auch der erste Theil des Werthes für φ keine Aenderung erlitten hat. Eine Berührung des Meridians ist an die Bedingung $\partial \varphi_t = \frac{v\, cos\, \alpha \pm u}{f}$ geknüpft. Nehmen wir zuerst die Bewegung nach Norden, so geht die letzte Bedingung über in

$$v\, cos\, \alpha + \sqrt{\frac{2\pi Q v\, sin\left(\frac{vt}{r}\, sin\, \alpha + \beta\right)}{24.60.60\, g.C.F}}$$
$$= v\, cos\, \alpha + \sqrt{0{,}0009399\, b\, v\, sin\left(\frac{vt}{r}\, sin\, \alpha + \beta\right)} = 0.$$

Dieser Gleichung kann nie genügt werden, wenn α spitz ist oder wenn die Bewegung in nordöstlicher Richtung vor sich geht. In diesem Falle findet also keine Berührung eines Meridians statt. Anders wird die Sache, wenn α stumpf ist oder wenn die Bewegung in nordwestlicher Richtung vor sich geht. Die Berührung und damit ein Minimum des φ-Werthes tritt hier ein, bei $t = \frac{r}{v\, sin\, \alpha}\left(arcsin\, \frac{v\, cos^2 \alpha}{0{,}0009399\, b} - \beta\right)$.

Dabei darf jedoch $\frac{v\, cos^2 \alpha}{0{,}0009399\, b}$ den Werth 1 nicht überschreiten. Für diese Grenze findet sich $cos\, \alpha = -\sqrt{\frac{0{,}0009399\, b}{v}}$, also in unserem obigen Zahlenbeispiele, wo $b = 10^m$ und $v = 5^m$ gesetzt wurde, $\alpha = 92^0\, 29'\, 6''$. Der zugehörige Werth von z in diesem Grenzfalle wäre $= r$ oder die Berührung fände am Pol statt. Würde α grösser genommen werden, so gäbe es keinen hierher gehörigen t-Werth mehr und fände eine Berührung eines Meridians nicht mehr statt. Letztere kann demnach in unserem besondern Falle nur dann eintreten, wenn Winkel α zwischen 90^0 und $92^0\,29'\,26''$ liegt. Ausser dieser Bedingung muss aber noch eine andere erfüllt sein; es muss nämlich t positiv oder $arcsin\,\frac{v\,cos^2\alpha}{0{,}0009399\,b}$ mindestens $=\beta$ werden. Diese Bedingung verlangt, dass β oder die geographische Breite des Ausgangspunktes bei gegebenem v, b und α nicht ausser einer gewissen Grenze liegt, die in unserem Zahlenbeispiele für $\alpha = 92^0$ gleich $40^0\,23'\,8''$ ist. Ist die geographische Breite des Ausgangspunktes grösser als diese Grenze, so giebt es selbst dann, wenn α die obengenannte Bedingung erfüllt, kein Minimum von φ; ist sie gleich dieser Grenze, so tritt die Berührung bei $t=0$ oder am Ausgangspunkte ein; ist sie kleiner als diese Grenze, so erfolgt später die fragliche Berührung. Wäre in diesem Falle auch noch ein Endpunkt zu berücksichtigen, dessen Breite β' ist, so läge die Berührung zwischen beiden Endpunkten der Bahn, oder fiele mit dem eigentlichen Endpunkte zusammen, oder läge jenseits dieses Punktes, je nachdem β' grösser, gleich oder kleiner als dieser letzte Grenzwerth ist. Das nämliche Resultat ergiebt sich, wenn man den fraglichen t-Werth in die Gleichung für z einsetzt. Durch Substitution der zusammengehörigen Werthe von α und β in die Gleichung für φ erhält man das φ des Berührungspunktes unter der Voraussetzung, dass die Bewegung vom Aequator ausgeht. Es beträgt in unserm Beispiele oder für $\alpha = 92^0$, $\beta = 40^0\,23'\,8''$, $v=5$, $b=10$, das $\varphi = -27'\,48''$, ist also sehr klein. Noch weniger würde sich ergeben, wenn der Ausgangspunkt zwischen dem Aequator und dem Berührungspunkte läge.

Wird die Bewegung nach Süden genommen, so hat bei einer Berührung des Meridians vor dem Aequator $v\,cos\,\alpha - u = 0$ oder $v\,cos\,\alpha - \sqrt{0{,}0009399\,b\,v\,sin\left(\beta - \frac{vt}{r}\,sin\,\alpha\right)} = 0$ zu sein. Dieser Bedingung kann nicht genügt werden, wenn α stumpf ist, d. h. wenn die Bewegung in südwestlicher Richtung vor sich geht. In diesem Falle tritt also wenigstens bis zum Aequator keine Berührung eines Meridians ein. Dagegen kann die Bedingung erfüllt werden, wenn α spitz ist oder wenn die Bewegung in südöstlicher Richtung stattfindet. Hier findet diese Berührung bei $t = \frac{r}{v\,sin\,\alpha}\left(\beta - arcsin\,\frac{v\,cos^2\alpha}{0{,}0009399\,b}\right)$ statt. Das t ist wieder nur möglich unter der Bedingung, dass $\frac{v\,cos^2\alpha}{0{,}0009399\,b} \overline{\gtrless}\, 1$, also $cos\,\alpha < \sqrt{\frac{0{,}0009399\,b}{v}}$ ist. In unserem obigen Zahlenbeispiele darf α nicht unter $87^0\,30'\,54''$ liegen. Weil ferner t noch positiv sein soll, darf $arcsin\,\frac{v\,cos^2\alpha}{0{,}0009399\,b}$ höchstens $=\beta$ sein. Das bekannte Zahlenbeispiel würde bei $\alpha = 88^0$ als höchste Grösse, wie oben, $40^0\,23'\,8''$ ergeben. Ist die geographische Breite β kleiner als diese Grenze, so giebt es selbst dann, wenn α innerhalb der oben angegebenen Grenzen liegt, keine Berührung oder hier kein Maximum von φ. Ueberhaupt lassen sich die Bemerkungen über die Lage dieser Stelle und ihr Verhalten in Bezug auf β und β', welche im entsprechenden Falle der nördlichen Bewegung oben angegeben wurden, hierher übertragen, wenn kleiner statt grösser oder umgekehrt gesetzt, das Gleich aber unverändert gelassen wird.

Nach Ueberschreitung des Aequators ist die bewusste Bedingung $v \cos\alpha + \sqrt{0{,}0009399\, b\, v \sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha - \beta\right)} = 0$. Sie kann nicht erfüllt werden, wenn α spitz ist oder die Bewegung anfänglich in südöstlicher Richtung stattfindet. Sie giebt für α stumpf oder für die Bewegung in südwestlicher Richtung $t = \frac{r}{r \sin\alpha}\left(\arcsin\frac{v\cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b} + \beta\right)$, also unter der Bedingung $\frac{v\cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b} \overline{<} 1$ stets einen Werth; es findet also dann stets eine Berührung eines Meridians oder hier ein Minimum von φ statt. Die letztgenannte Bedingung geht hier in $\cos\alpha \overline{>} -\sqrt{\frac{0{,}0009399\, b}{v}}$ über und α darf in unserm Zahlenbeispiel nur zwischen 90^0 und $92^0\,29'\,26''$ liegen. Wird der erhaltene t-Werth in die Gleichung für z eingesetzt, so sieht man, dass die Berührung bei

$$z = r \sin\left(\frac{vt}{r}\sin\alpha - \beta\right) = r \sin\left(\arcsin\frac{v\cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b}\right),$$

also bei einer südlichen geographischen Breite von $\arcsin\frac{v\cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b}$, in unserem besondern Falle und für $\alpha = 92^0$ bei $40^0\,23'\,8''$ stattfindet. Weil wir den Ausgangspunkt auf der andern Hemisphäre angenommen haben, so ist nur in Bezug auf den Endpunkt zu beachten, dass, wenn β' auf der jenseitigen Hemisphäre liegt und kleiner, gleich oder grösser als der letztgenannte Werth ist, das Minimum nicht mehr auf der zurückzulegenden Strecke liegt, oder mit dem Endpunkte zusammenfällt, oder noch auf dem Wege liegt. Im Anschluss an die Bewegung vor dem Aequator lässt sich bemerken, dass in dem Falle, wo α spitz ist, also ein Minimum vor dem Aequator liegt, kein besonderer Werth mehr nach dem Aequator kommt, und dass die Verhältnisse umgekehrt sind, wenn α stumpf ist. Für den Ausgangspunkt auf dem Aequator fände sich wieder für das φ des Berührungspunktes in unserem Zahlenbeispiele $= -27'\,48''$.

Es sind nun noch einige andere Fragen leicht zu beantworten. Die Zeit, welche das Schiff braucht, um von der Ausgangs- zur Endstelle zu gelangen, findet sich für die nördliche Bewegung $t = \frac{(\beta' - \beta) r}{v \sin \alpha}$, für die südliche Bewegung vor dem Aequator $= \frac{(\beta - \beta') r}{v \sin \alpha}$ und über den Aequator hinüber $= \frac{(\beta + \beta') r}{v \sin \alpha}$. Die Geschwindigkeit ist an irgend einer Stelle $c = \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + (v \cos \alpha \pm u)^2} = \frac{v \sin \alpha}{\sin \delta}$. Das u hat die nämliche Bedeutung, wie oben, und tritt auf die eben daselbst bestimmte Weise mit $+$ oder $-$ ein; δ bezeichnet den Winkel der Bahn mit dem Parallelkreise. Am Aequator ist diese Geschwindigkeit $= v$. Die wirklich durchlaufene Strecke ist

$$s = \int_0^t \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + (v \cos \alpha \pm u)^2}\, dt.$$

Der Winkel δ findet sich durch $\operatorname{tang} \delta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha \pm u}$. Für die Stelle am Aequator wird $\delta = \alpha$. Es könnte auf den ersten Anblick überraschen, dass für $t = 0$ weder $c = v$, noch $\delta = \alpha$ wird; indessen ist zu berücksichtigen, dass unsere Entwickelung den Anlauf des Schiffes nicht enthält und die Voraussetzung gemacht wurde, dass sich der stabile Zustand, d. h. der, wo die von der Erdrotation herrührende Kraft blos zur Ueberwindung des Wasserwiderstandes und nicht auch zu einer Vermehrung der seitlichen Geschwindigkeit verwendet wird, bald einstellt. Für praktische Bestimmungen und grössere zu durchfahrende Strecken ist diese Annahme gewiss statthaft. Sollte auch der Anlauf und in entsprechender Weise der Endlauf berücksichtigt werden, so müssten für diese Abschnitte besondere Formeln hergeleitet, der Endzustand des erstern gleich dem Anfangszustande unsers obigen Falles und der Anfangszustand des letzten Abschnittes dem Endzustande dieses Falles angepasst werden. Ausserdem könnte man diese beiden Uebergangsperioden noch dadurch umgehen und unseren Resultaten eine strenge Giltigkeit verschaffen, wenn man die Ausgangs- und Endstelle an die Punkte verlegen würde, wo der Bewegungszustand ein constanter ist. — Von Interesse ist das Resultat bei der südöstlichen Bewegung, in welchem ein Maximum von φ eintritt. In diesem Falle findet sich δ zuerst stumpf, wird dann 90^0 und am Aequator gleich dem spitzen Winkel α. Während der Zeit des Anlaufs verwandelt sich demnach der nahe an 90^0 liegende Winkel α durch den Einfluss der Erdrotation in einen stumpfen Winkel δ der Bahn, dann tritt in der Folge der Einfluss der Rotation, zum Theil aufgehoben durch den Wasserwiderstand, so zurück, dass mehr und mehr die Geschwindigkeit $v \cos \alpha$ überwiegt und endlich die anfängliche südwestliche Bewegung in die beabsichtigte südöstliche übergeht. Wenn α über die oben bezeichnete

Grenze hinausfällt, also in unserem Zahlenbeispiele unter $87^0 30' 54''$ liegt, so bleibt die Bewegung bis zum Aequator stets eine südöstliche.

In ähnlicher Weise, wie in Nr. 25, kann man in den Formeln unserer jetzigen Nummer negative Werthe von t zulassen und die vier Curven vergleichen, welche zu demselben Ausgangspunkte und zu den Winkeln α und $180-\alpha$ gehören und sich nach Norden und Süden erstrecken. Hier zeigt sich mit Berücksichtigung dessen, dass

$$tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)} \text{ etc.}$$

ist, Folgendes: Die Curve der nordöstlichen Bewegung für positive t-Werthe fällt mit der Curve der südwestlichen Bewegung für negative t-Werthe zusammen; ebenso die Curve der nordwestlichen Bewegung für positive t-Werthe mit der südöstlichen für negative t-Werthe. Ganz das gleiche Verhalten findet bis zum Aequator zwischen den Theilen der südöstlichen Bewegung für positive t und den Theilen der nordwestlichen Bewegung für negative t, endlich zwischen den nämlichen Theilen der südwestlichen und nordöstlichen Bewegung statt. Man erhält deshalb, wenn t eliminirt gedacht wird, auf der Nordhälfte der Erde nur zwei Curven, welche allen Verhältnissen entsprechen und so lange dieselbe Form behalten, als v, b und α oder $180-\alpha$ dieselben sind. Der durch den Ausgangspunkt in nordwestlicher oder südöstlicher Richtung gehende Zweig berührt unter der Bedingung, dass $\frac{v \cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b} < 1$ ist, einen Meridian in der von β unabhängigen geographischen Breite $= arcsin \frac{v \cos^2\alpha}{0{,}0009399\, b}$. Sowie diese Berührung, so ist die Form der Curve überhaupt von dem β des Ausgangspunktes unabhängig, indem unter sonst gleichen Umständen für dieselben β'- oder z-Werthe sich die φ-Werthe nur um eine constante Differenz $\varphi'-\varphi''$ unterscheiden und also durch eine Drehung in diesem Betrage zum Decken gebracht werden können. Die Curve für einen bestimmten Ausgangspunkt kann man deshalb erhalten, wenn man die für irgend einen andern solchen Punkt bestimmt und dann so lange um die Axe dreht, bis sie durch den gegebenen Punkt geht. — Die Curve der Bewegungen in nördlicher Richtung und auf der nördlichen Hemisphäre durch negative t-Werthe auch auf die südliche Hemisphäre auszudehnen, ist ohne Weiteres nicht möglich; es müssten zu dem Ende noch weitere Aenderungen in den Radicanden des Factors von $\frac{1}{\sin\alpha}$ der Gleichung für φ vorgenommen werden. Jedoch lässt sich behaupten, dass die oben betrachteten Theile der Curve auf der andern Hemisphäre sich an die Theile der Curve für die negativen t-Werthe auf der nördlichen Hemisphäre anschliessen müssen. Es wird also die Curve für

$180 - \alpha$ auf der Südseite und für positive t die Fortsetzung des Theiles der Curve bilden, welche auf der Nordseite liegt, der nördlichen Bewegung, dem Winkel α und den negativen t-Werthen entspricht. In dem gleichen Verhältnisse stehen die Curven zu α auf der Südseite und zu $180 - \alpha$ auf der Nordseite. Sonst gilt in Bezug auf diese Zweige der Südseite und die Bestimmung ihrer Form durch v, b, α und $180 - \alpha$ das Nämliche, was in Bezug auf die Curven der Nordseite erwähnt wurde. Nimmt man als Ausgangspunkt einen Punkt des Aequators, also $\beta = 0$, so liegen die nördlichen und südlichen Theile für die nämlichen v, t, α und $180 - \alpha$ symmetrisch gegen den Aequator.

Schliesslich wollen wir noch an die Lösung der Aufgabe gehen, den Cours zu bestimmen, welchen ein Schiff einhalten muss, um von einer gegebenen Stelle an eine andere zu gelangen. β, β', φ' sollen die Bedeutungen haben, welche ihnen in der analogen Aufgabe der Nr. 25 beigelegt wurden; M, N, b und v sind dieselben Werthe, welche oben näher bestimmt wurden. Wir haben zur Lösung unserer Aufgabe die Gleichung $\varphi' = M . cotg\,\alpha + N\sqrt{\frac{b}{v}}$ zu benützen. Es könnte hier statt φ' wieder $\varphi' \pm 2n\pi$ eingesetzt werden, jedoch ist dies weder durch praktische Fälle, noch durch die Werthe geboten, welche die rechte Seite annehmen kann und die hier nicht, wie in Nr. 25, die dem φ' gesteckten Grenzen 0 und $\pm 2\pi$ überschreiten können. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$cotang\,\alpha = \frac{vM\varphi' \pm N\sqrt{b(vM^2 - bN^2 + v\varphi'^2)}}{vM^2 - bN^2}.$$

Weil in concreten Fällen N im Vergleich zu M klein ist und v und b nicht viel differiren, so ist die Bedingung des Reellseins hier immer erfüllt. Die gefundenen Wurzeln bleiben unverändert, wenn N negativ ist; es liegt deshalb die Vermuthung nahe, dass von den Vorzeichen $\pm$ das eine zu dem Falle gehört, wo N positiv, das andere zu dem Falle, wo N negativ ist. Um die fragliche Entscheidung zu treffen, bestimmen wir den Werth von $sin\,\alpha$ aus der Gleichung und aus dem gefundenen Werthe von $cotang\,\alpha$. Derselbe ist

$$sin\,\alpha = \sqrt{\frac{b}{v}} . \frac{vM^2 - bN^2}{-bN\varphi' \mp M\sqrt{b(vM^2 - bN^2 + v\varphi'^2)}}.$$

Nun liegt aber α bei unserer Winkelzählung stets zwischen 0 und 180°, folglich hat dieser Werth positiv zu sein; die findet, wenn φ', b, N positiv sind, nur dann statt, wenn im Nenner $+M\sqrt{b(vM^2 - bN^2 + v\varphi'^2)}$ genommen wird. Es ist deshalb in allen Fällen dieser Wurzelwerth und folglich

$$cotang\,\alpha = \frac{vM\varphi' - N\sqrt{b(vM^2 - bN^2 + v\varphi'^2)}}{vM^2 - bN^2}$$

zu setzen. Diese Formel reicht zur Bestimmung des α vollständig aus.

Für $N = 0$ oder beim Wegfallen der Wirkung der Erdrotation, oder bei einer Fahrt zwischen zwei Punkten, die nach beiden Seiten hin gleichweit vom Aequator abstehen, erhält man $cotang\,\alpha = \frac{\varphi'}{M}$, also die Formel für die Bewegung auf der Loxodrome. Sonst ist noch Folgendes zu bemerken. Es wird $cotang\,\alpha = 0$, also $\alpha = 90^0$, wenn $v M \varphi' = N \sqrt{b(vM^2 - bN^2 + v\varphi'^2)}$ ist. Hieraus folgt $\varphi' = N \sqrt{\frac{b}{v}}$ oder die Längendifferenz des Ausgangs- und Endpunktes der Fahrt, welche vorhanden sein muss, wenn der Cours des Schiffes rein nördlich oder südlich genommen werden soll. Beispielsweise findet sich für $\beta' = 40^0$, $\beta = 20^0$, $b = 10^m$, $v = 5^m$ das $\varphi' = 43'$. Werden β und β' vertauscht, so wird $\varphi' = -43'$. Nehmen wir also den Ausgangspunkt etwa auf der nördlichen Hemisphäre an, so ist rein nördlich oder südlich zu segeln, wenn der Endpunkt zu 40^0 geographischer Breite auf der nördlichen oder südlichen Hemisphäre und um $43'$ östlich liegt. Die gleiche Richtung ist einzuhalten, wenn der Ausgangspunkt 40^0 Breite hat und etwa auf der nördlichen Hemisphäre liegt, der Endpunkt aber sich 20^0 nördlich oder südlich vom Aequator und $43'$ westlich von dem erstgenannten Punkte befindet. Bei positivem N, also bei einer Fahrt von geringerer zu grösserer Breite und der Lage dieser Breiten auf einer oder zwei Hemisphären, dann bei $\varphi > N \sqrt{\frac{b}{v}}$ wird α spitz und ist demnach in nord- oder südöstlicher Richtung vorwärts zu gehen; bei negativem N, mithin bei einer Fahrt von grösserer nach geringerer Breite, diesseits oder jenseits des Aequators, und bei $\varphi < N \sqrt{\frac{b}{v}}$, ausserdem noch bei positivem N und $\varphi < N \sqrt{\frac{b}{v}}$, wird α stumpf und hat man eine nordwestliche oder südwestliche Richtung einzuhalten.

Besonderes Interesse bietet noch der Fall, in welchem $\varphi' = 0$ ist, d. h. Ausgangs und Endpunkt auf demselben Meridian liegen. Hier wird $cotang\,\alpha = -N \sqrt{\frac{b}{vM^2 - bN^2}}$, also α stumpf bei einer Fahrt von kleiner nach grösserer Breite und spitz im entgegengesetzten Falle. Eine Vertauschung von β und β', die jedoch daran Nichts ändert, dass Anfangs- und Endpunkt vor- wie nachher auf einer Seite oder auf verschiedenen Seiten des Aequators bleiben, führt zu Werthen von α, die sich zu 180^0 ergänzen. Werden mit diesen Vertauschungen noch solche Aenderungen vorgenommen, dass Punkte, die anfänglich auf verschiedenen Hemisphären liegen, auf eine gebracht werden und umgekehrt, so tritt wegen des verschiedenen Verhaltens von M eine weitere Aenderung ein. In unserm obigen Zahlenbeispiele $\beta'=40^0$, $\beta=20^0$, $b=10^m$, $v=5^m$ findet sich, wenn noch β und β' auf einer Seite des Aequators liegen, $\alpha=91^0 44' 57''$, und wenn β und β' vertauscht werden, $\alpha=88^0 15' 3''$. Oben wurde gefunden, dass für $b=10^m$ und $v=5^m$ die bezüglichen Grenzwerthe von α, bei welchen noch eine Berührung eines Meridians eintritt, 90^0 und $92^0 29' 16''$, dann 90^0 und $87^0 30' 54''$ sind; wir können deshalb schliessen, dass auch in unseren jetzigen Fällen solche Berührungen vorhanden sind. Um zu ermitteln, ob diese innerhalb der Breiten von 40^0 und 20^0 liegen, erhält man für den Berührungspunkt $\beta''=arcsin\,\frac{v\cos^2\alpha}{0{,}0009399\,b}=29^0 42' 44''$, also ungefähr die Mitte. Die grösste westliche Ausbeugung bei einer Fahrt von 20 bis 40^0 nach dem nächstliegenden Pole zu ergiebt sich aus $\varphi=M\,cotg\,\alpha+N\sqrt{\frac{b}{v}}\cdot\frac{1}{sin\,\alpha}$, als circa $1{,}6'$ oder $c.\ 2507^m$; die grösste östliche Ausbeugung bei derselben Fahrt in entgegengesetzter Richtung ist ebenso gross.

Als allgemeineres Zahlenbeispiel soll noch die Umkehrung eines früheren Falles dieser Nummer angeführt werden. Es sei $\varphi\doteq 188^0 6' 45''$, $\beta=0$, $\beta'=80^0$, $v=5^m$, $b=10^m$; alsdann findet sich $\alpha=37^0 47' 35''$. Sucht man den Winkel, der ohne Rücksicht auf die Umdrehung der Erde etc. bei den gegebenen Grössen eingehalten werden müsste, so ergiebt sich aus $cotang\,\alpha=\frac{\varphi'}{M}$: $\alpha=36^0 34' 37''$. Die Differenz der Course beträgt demnach $1^0 12' 58''$. Um diesen Betrag wäre mehr gegen Norden oder Süden zu segeln, wenn die Erddrehung in Verbindung mit dem Wasserwiderstande berücksichtigt würde. Unter welchen Umständen diese Coursdifferenz ein Maximum oder Minimum, ist auf einfache Verhältnisse nicht zurückzuführen. Null wird sie, wie schon erwähnt wurde, dann, wenn $N=0$ ist, d. h. wenn Ausgangs- und Endpunkt auf beiden Seiten des Aequators in gleichen Breiten liegen. — Sollte der Cours nicht auf die Ostrichtung der Parallelkreise, sondern auf die Meridiane bezogen werden, so dürfte man nur $cotang\,\alpha=tang\,\gamma$ setzen, wo γ diesen neuen Cours bezeichnet. Dieses γ fände sich positiv, wenn es auf der Ostseite, und negativ, wenn es auf der Westseite des Meridians läge.

Mit Hilfe der oben berührten Figur, welche den φ-Werth bestimmt, und mit Rücksichtnahme auf den Umstand, dass M in den gewöhnlichen Fällen grösser als $N\sqrt{\frac{b}{v}}$ ist, lässt sich auf Grund einer Vergleichung der verschiedenen Fälle eine sehr einfache Construction angeben, welche die obige Aufgabe löst, d. h. den Winkel α oder den Cours des Schiffes in allen Fällen giebt, mögen Anfangs- und Endpunkt irgendwo auf der Erdoberfläche liegen, mögen die allgemeinen oder die besonderen

Fälle vorhanden sein. Man nehme zu dem Ende ein ebenes rechtwinkliges Axensystem, markire die Richtung der $+X$-Axe als Ost- und die der $+Y$-Axe als Nordrichtung — die $-X$-Axe liegt dann von selbst nach Westen und die der $-Y$-Axe nach Süden —, bestimme auf die früher angegebene Weise M und N zu den Breiten β' und β des End- und Ausgangspunktes, beschreibe um den Ursprung des Systems mit dem Radius $N\sqrt{\frac{b}{v}}$ einen Kreis, trage ebenfalls vom Ursprung aus auf der x-Axe die Längendifferenz φ' der beiden Punkte in Bogenmass auf, und zwar auf der $+$ oder $-X$-Axe, je nachdem der Endpunkt östlicher oder westlicher als der Ausgangspunkt liegt, errichte in dem so erhaltenen Endpunkte eine Senkrechte zur X-Axe $= M$ nach der Seite der $+Y$-Axe hin, wenn das Ziel eine nördlichere Lage, und nach der Seite der $-Y$-Axe, wenn es eine südlichere Lage als die Ausgangsstelle hat, und ziehe endlich von dem nicht in der x-Axe liegenden Endpunkte des M an den vorhin genannten Kreis eine Tangente. Von den zwei hier möglichen Tangenten ist die an die östliche Hälfte des Kreises zu nehmen, wenn unabhängig von nördlicher oder südlicher Lage die Breite des Endpunktes grösser als die des Ausgangspunktes, also $\beta' > \beta$, und die an die westliche Hälfte, wenn der andere Fall stattfindet, also $\beta' < \beta$ ist. Erwägt man noch, dass in dem ersten dieser beiden Fälle N positiv ist und der Berührungsradius nach Osten, nach der Seite der $+X$-Axe hin, liegt, und dass in dem andern Falle das N negativ ist und die Berührung, sowie der Berührungsradius sich der $-X$-Axe zuwendet, so ist schon durch das Vorzeichen von N in einer leicht merkbaren Weise angedeutet, ob die Tangente zur Kreishälfte der $+X$-Axe oder die zur Kreishälfte der $-X$-Axe zu nehmen ist. Der gesuchte Winkel α ist nun derjenige, den die Richtung der $+X$-Axe mit der Richtung der Tangente bildet, welche von ihrem Schnittpunkte mit der x-Axe aus nach dem nicht in dieser Axe liegenden Endpunkte von M geht. Es ist übrigens nicht einmal nothwendig, in praktischen Fällen diesen Winkel zu messen; denn giebt man der Coordinatenebene eine horizontale Lage, bringt den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Axe in die Gerade, welche die Längenrichtung des Schiffes bestimmt, weist mit Hilfe des Compasses der $+Y$-Axe die wirkliche Nord- und der $+X$-Axe die wirkliche Ostrichtung an, so giebt die schon erwähnte Richtung der Tangente von dem genannten Schnittpunkte aus nach dem Endpunkte von M hin unmittelbar die Richtung an, welche das Schiff einzuhalten hat, um von dem gegebenen Ausgangspunkte nach dem verlangten Endpunkte zu gelangen. Dass bei dieser Gelegenheit auch zum Vorschein kommt, wie sich das φ' aus der Summe oder Differenz der φ-Werthe zusammensetzt, welche theils durch eine Fahrt auf der Loxodrome, theils durch den Einfluss der Erddrehung entstehen, ist an und für sich klar.

Noch unmittelbarer lässt sich unsere Aufgabe mit Hilfe einer Karte in Mercator's Projection lösen, in welcher bekanntlich die φ-Werthe der verschiedenen Punkte der Erdoberfläche als geographische Längen und die M-Werthe derselben als Breiten figuriren. Hier kann die fragliche Figur sofort in die Karte gezeichnet werden, und ist nur die Tabelle für N nothwendig. Das Auftragen von φ' und M fällt auf dieser Karte weg, weil der Ausgangs- und Endpunkt der Fahrt schon ohnedem eine dem M und φ der frühern Figur entsprechende Lage haben; es ist daher nur der Kreis mit dem Radius $N\sqrt{\frac{b}{v}}$ um den Ausgangspunkt zu ziehen und von dem Endpunkte aus an diesen Kreis die oben näher bestimmte Tangente zu legen. Alles Weitere wurde schon oben bemerkt.

Am angemessensten ist es, bei den geometrischen Constructionen auch die Tabelle des N zu beseitigen. Dies kann geschehen, wenn man auf irgend einer Geraden der obigen Karte von einem bestimmten Punkte derselben aus und nach der nämlichen Richtung hin die Werthe von N_β für alle Werthe des β zwischen 0 und 90^0 aufträgt. Dabei ist natürlich den Werthen dieselbe Längeneinheit zu Grunde zu legen, welche φ und M auf der Karte haben, und an jede Endstelle der zugehörige Breitengrad zu setzen. In diesem Falle kann man auch das $N\sqrt{\frac{b}{v}}$ sehr schnell und auf eine Weise erhalten, die sich leicht aus der nachfolgenden Beschreibung ergiebt. Man nehme auf der Masslinie des N irgendwo die Strecke $AB = 1$ an, ziehe durch B einen beliebigen Halbstrahl und mache auf diesen $BC + CD = v + b$ (v und b können mit ihren Masszahlen, wie schon erwähnt wurde, sofort auf irgend eine Längeneinheit bezogen werden), ziehe CA und durch D eine Parallele zu CA, bis sie AB in E schneidet, dann wird $AE = \frac{b}{v}$. Hierauf beschreibe man über BE einen Halbkreis, ziehe senkrecht zu BE die Halbsehne AF und verbinde endlich B mit F. Die Halbsehne AF ist $= \sqrt{\frac{b}{v}}$. Will man nun irgend ein $N\sqrt{\frac{b}{v}} = (N_{\beta'} - N_\beta)\sqrt{\frac{b}{v}}$ erhalten, so giebt die Masslinie des N unmittelbar $N_{\beta'} - N_\beta$; durch den einen Endpunkt, etwa durch den von $N_{\beta'} = G$, ziehe man dann eine Parallele zu AF, und durch den Endpunkt H des N_β eine Parallele zu BF, bis sie die Parallele durch G in J schneidet. GJ wird nun $= N\sqrt{\frac{b}{v}}$ oder gleich dem verlangten Radius. Man könnte natürlich auch A in G und B nach H hin annehmen und dadurch die Construction vereinfachen. Ausserdem ist noch zu bemerken, dass, weil Dreieck ABF für dieselben b und v unverändert bleibt, die Parallelen $G'J'$ zu GJ durch Punkte G', die zwischen G und H liegen, die Werthe von $N\sqrt{\frac{b}{v}}$ für die Zwischenstationen geben, deren Breiten durch G' oder durch die zugehörigen Breitenwerthe des N zwischen N_β und $N_{\beta'}$ bestimmt werden.

Um etwaige Hindernisse auf der Fahrt vermeiden zu können, ist es noch nothwendig, die Bahn zu bestimmen, welche das Schiff bei bestimmtem Cours und bei gegebenen b- und v-Werthen beschreibt. Die algebraische Lösung, bei welcher nach gefundenem α die β-Werthe, resp. die zugehörigen M- und N-Werthe neben α in die Gleichung für φ einzusetzen und die letzteren Werthe zu bestimmen wären, ist etwas umständlich und liefert wenig übersichtliche Resultate. Ist daher nur auf die Vermeidung von Hindernissen Rücksicht zu nehmen, so wird man auf die eben beschriebene Weise die φ-Werthe zu den vorher gefundenen α, b, v und den β-Werthen alle Hindernisse oder deren Grenzen bestimmen, die auf oder zwischen zwei Loxodromenfahrten liegen, von welchen die eine zu α gehört und die andere zwischen dem Anfangs- und Endpunkte der Fahrt liegt; stimmen nun diese gefundenen φ-Werthe mit den wirklichen φ-Werthen dieser Stellen auf der Erdoberfläche überein oder liegt er innerhalb der Grenzen dieser letzteren φ-Werthe, so ist ein anderer Cours zu bestimmen und die Prüfung auf's Neue zu wiederholen. Im andern Falle kann der Cours unverändert bleiben. Ein anderer Ausweg wäre der, dass man vor Bestimmung des α unter der Annahme der Fahrt auf einer Loxodrome zwischen Anfangs- und Endpunkt, wie sie der Karte in Mercator's Projection unmittelbar entnommen werden kann, die Hindernisse markirt, welche auf oder in der Nähe, und zwar auf der Nordhälfte der Erde rechts, auf der Südhälfte links dieser Bahn liegen, solche Werthe von β und φ' annimmt, welche sich ausserhalb des nächsten Hindernisses befinden, dazu den Winkel α bestimmt und von da an auf dieselbe Art weiter vorgeht.

Einfacher und übersichtlicher gestattet unsere geometrische Lösung, die Schiffsbahn und das, was damit zusammenhängt, unter den gegebenen Verhältnissen zu bestimmen. Man denke sich zu dem Ende eine Karte in Mercator's Projection, um den Ausgangspunkt den oben erwähnten Kreis mit dem Radius $GJ = N\sqrt{\frac{b}{v}}$ beschrieben, vom Endpunkte aus die die Richtungslinie bestimmende Tangente und den Berührungsradius gezogen. Trägt man nun auf diesen Radius vom Mittelpunkte aus die oben bezeichneten Zwischenwerthe $G'J'$ etc. auf, zieht durch die Endpunkte Parallele zu der Tangente, ebenso die Parallellinien, welche die Breitenkreise zu den entsprechenden β- oder M-Werthen vorstellen, und sucht die Durchschnitte je zweier dieser Linien, welche zu denselben β-Werthen gehören, so lassen sich beliebig viele Punkte der Bahn und damit letztere selbst bestimmen. Vereinfacht wird diese Zeichnung, wenn die Breitenkreise auf der Karte selbst schon gezeichnet sind und wenn man einen rechten Winkel und ein Lineal zum parallelen Verschieben zu Hilfe nimmt. Auf dem einen Schenkel des Winkels können ausserdem noch zur Vereinfachung von einem gegebenen Punkte aus die Werthe des N_β von 0 bis 90^0 sammt den entsprechenden β-Werthen aufgetragen sein. Man zeichne nun zuerst das oben beschriebene Dreieck GHJ so in die Karte, dass J mit dem Ausgangspunkte und G mit dem Berührungspunkte der bekannten Tangente des Endpunktes zusammenfällt; hierauf lege man den eingetheilten Schenkel des rechten Winkels so an GH oder an die Tangente, dass G unter dem Endpunkte des N_β und H unter dem von $N_{\beta'}$ zu liegen kommt; endlich verschiebe man mit Hilfe des Lineals den Winkel so, dass seine getheilte Linie auf den Mittelpunkt J zu rückt und die Linie JH nacheinander durch alle N-Werthe zwischen $N_{\beta'}$ und N_β oder G und H geht. Bestimmt man für jeden solchen Zwischenpunkt den Durchschnitt des eingetheilten Lineals mit der Linie des Parallelkreises, die zu den entsprechenden β- oder M_β-Werthen gehört, so erhält man die verlangte Curve.

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass auf diese Operationen nicht blos jeder Praktiker eingeübt werden kann, sondern dass auch ohne theoretische Schwierigkeiten Apparate construirt werden können, mit welchen die oben beschriebenen geometrischen Constructionen ganz oder theilweise ausgeführt werden können.

Nach Festlegung der Curve ist sofort ersichtlich, ob sich auf der vorausbestimmten Bahn Hindernisse der Fahrt vorfinden oder nicht. Im ersten Falle muss die Umschiffung derselben auf ähnliche Art näher bestimmt werden, wie es oben im zweiten Falle der algebraischen Lösung bereits angedeutet wurde.

Nr. 27. Ausser den oben berücksichtigten Einflüssen könnte noch der von Meeresströmungen beachtet werden. Um für die hierher gehörigen Bestimmungen die nöthigen Anhaltspunkte zu gewinnen, seien $V_{\varphi,\psi}$ und $\Omega_{\varphi,\psi}$ die Functionen der geographischen Längen und Breiten φ und ψ der Punkte auf der Erdoberfläche, welche die Geschwindigkeit V der Strömung an diesen Orten und den Winkel Ω bestimmen, den die Strömung mit den bezüglichen Parallelkreisen bildet. Der eine Schenkel des Ω soll, wie bei α, nach Osten gerichtet sein und der Winkel mit α gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, je nachdem beide auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten der Parallelkreise liegen. Halten wir die früheren Voraussetzungen und Bestimmungen in Bezug auf v, α, u etc. fest, so sind zu den früheren Geschwindigkeiten in der Richtung der Meridiane und Parallelkreise nur noch die hinzuzunehmen, welche die Strömung verursacht. Man erhält demzufolge für die Geschwindigkeit längs der Meridiane, auf welche die Erddrehung keinen Einfluss hat, die Gleichung

$$1)\qquad r\,\partial\psi_t = v\sin\alpha + V\sin\Omega$$

und für die Geschwindigkeit längs der Parallelkreise

$$r\cos\psi\,\partial\varphi_t = v\cos\alpha \pm u + V.\cos\Omega$$

oder nach den Bestimmungen in Nr. 26), nach welchen ist

$$u = \sqrt{\frac{Q.2\pi.-\partial f_t}{CF.\sin\alpha.24\,60.60}} = \sqrt{\frac{\pm 0{,}0009399\,b.r\sin\psi.\partial\psi_t}{\sin\alpha}},$$

$$2)\quad r\cos\psi\,\partial\varphi_t = v\cos\alpha + V.\cos\Omega \pm \sqrt{\frac{\pm 0{,}0009399\,b.r\sin\psi.\partial\psi_t}{\sin\alpha}}.$$

In welcher Weise die Entscheidung über das Vorzeichen des u zu treffen ist, wurde bereits früher angegeben. Eliminirt man aus der Gleichung 1) und 2) das φ, so erhält man die Differentialgleichung zur Bestimmung des ψ und mit dem ψ aus $z = r\sin\psi$ und $f = r\cos\psi$ das z und f. Das φ kann hierauf mit Hilfe des gefundenen ψ-Werthes aus 1) oder 2) bestimmt werden.

Von allen verschiedenen Voraussetzungen, welche in Bezug auf V und Ω gemacht werden können, soll nur noch die etwas weiter verfolgt werden, wo V und Ω constante Grössen sind, also in der Periode zwischen zwei Coursbestimmungen Geschwindigkeit und Richtung der Meeresströmung gegen die Parallelkreise dieselben bleiben. Für diesen Fall findet sich aus Gleichung 1)

$$\psi = \frac{v\sin\alpha + V\sin\Omega}{r}.t+\beta \quad\text{und}\quad z = r\sin\left(\frac{v\sin\alpha + V\sin\Omega}{r}.t+\beta\right).$$

Aus Gleichung 2) erhält man

$$\partial\varphi_t = \frac{v\cos\alpha + V\cos\Omega}{r\cos\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)} \pm \frac{1}{r\cos\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)}$$
$$\times\sqrt{\frac{\pm 0{,}0009399\,b\sin\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)(v\sin\alpha+V\sin\Omega)}{\sin\alpha}}$$

und daraus

$$\varphi = \frac{v\cos\alpha+V\cos\Omega}{v\sin\alpha+V\sin\Omega}\,Log\,\frac{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}-\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{2r}t\right)}$$

$$\pm\sqrt{\frac{0{,}0009399\,b}{(v\sin\alpha+V\sin\Omega)\sin\alpha}}\left[\tfrac{1}{2}\,Log\,\frac{\left(1+\sqrt{\pm\sin\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)}\right)(1-\sqrt{\pm\sin\beta})}{\left(1-\sqrt{\pm\sin\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)}\right)(1+\sqrt{\pm\sin\beta})}\right.$$
$$\left.-\,arctang\sqrt{\pm\sin\left(\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{r}t+\beta\right)} + arctang\sqrt{\pm\sin\beta}\right].$$

Durch die Werthe von z, f und φ ist die Bahn des Schiffes vollständig bestimmt und kann der Ort desselben zu jeder Zeit gefunden werden. Für $V=0$ erhält man die Gleichungen der Nr. 26.

Berücksichtigen wir wieder, dass $\frac{v \sin\alpha + V \sin\Omega}{r} . t + \beta$ die geographischen Breiten der späteren Orte des Schiffes bestimmt und dass für solche gegebene Breiten der *Log* und der Klammernfactor dieselben Werthe von M und N ergeben, wie sie in der vorhergehenden Nummer ermittelt wurden, so können wir wieder den Weg des Schiffes durch die Gleichungen

$$\beta' = \frac{v \sin\alpha + V \sin\Omega}{r} . t + \beta, \quad z = r \sin\beta', \quad f = r \cos\beta'$$

und

$$\varphi = \frac{v \cos\alpha + V \cos\Omega}{v \sin\alpha + V \sin\Omega} . M \pm N \sqrt{\frac{b}{\sin\alpha\,(v \sin\alpha + V \sin\Omega)}}$$

bestimmen und daran ähnliche Bemerkungen wie früher knüpfen.

Ebenso kann man auch den Winkel φ aus der letzten Gleichung ohne Schwierigkeit construiren und sein Bogenmass als eine bestimmte Länge erhalten. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{v \cos\alpha + V \cos\Omega}{v \sin\alpha + V \sin\Omega} = \tan g\,\gamma$ $=$ der Tangente des Winkels der mittleren Geschwindigkeit zu v und V oder gleich der Tangente des Loxodromenwinkels dieser mittleren Geschwindigkeit mit dem Parallelkreise und $(v \sin\alpha + V \sin\Omega) \sin\alpha = p =$ der Projection der Meridiangeschwindigkeit $v \sin\alpha + V \sin\Omega$ auch die Richtung des v ist, also sich $\varphi = M \tan g\,\gamma \pm \sqrt{\frac{b\,N}{p}} . N$ setzen und endlich die Construction so gestalten lässt, dass die zwei Theile des φ-Werthes in der Figur unmittelbar addirt oder subtrahirt werden.

Entsprechend den bezüglichen Untersuchungen der Curve in Nr. 26, liessen sich hier Betrachtungen über die Form der jetzigen Curven und über einige andere Beziehungen einschalten. Mehrere der dortigen Resultate, wie die für t, c und s, sind sofort übertragbar, wenn man $v \sin\alpha + V \sin\Omega$ statt $v \sin\alpha$ und $v \cos\alpha + V \cos\Omega$ statt $v \cos\alpha$ setzt. Diese allgemeineren Resultate könnten dann noch auf eine ziemliche Anzahl besonderer und nicht uninteressanter Fälle angewendet werden. Wir wollen jedoch nicht weiter auf diese Untersuchungen eingehen, weil sie uns zu weit führen würden. Der hierbei einzuhaltende Weg ist bereits in Nr. 26 vorgezeichnet.

Die umgekehrte Aufgabe, den Cours zu bestimmen, welchen ein Schiff unter den jetzigen Verhältnissen einhalten muss, um von einer gegebenen Stelle an eine andere zu gelangen, bietet viele grössere Schwierigkeiten dar, als im vorausgegangenen Falle. Die algebraische Lösung führt auf eine Gleichung vom sechsten Grade und auch auf geometrischem Wege scheint man nicht leicht zum Ziele gelangen zu können. Wird übrigens berücksichtigt, dass die Annahme der Unveränderlichkeit der Werthe von V und Ω stets nur eine Annäherung sein wird, und dass der Werth des zweiten Gliedes in der Gleichung für φ wegen der Kleinheit des N nicht beträchtlich sein kann, ja vielleicht kleiner ist, als der aus der eben bezeichneten Annahme erwachsende Fehler, so wird für die Praxis unter den gegebenen Verhältnissen von dem Einflusse der Erddrehung Umgang genommen werden und dieser Aufgabe nur die Gleichungen

$$\varphi = \frac{v\cos\alpha + V\cos\Omega}{v\sin\alpha + V\sin\Omega}.M \text{ und } \beta' = \frac{v\sin\alpha + V\sin\Omega}{r}.t + \beta$$

zu Grunde gelegt werden können. Von diesen Gleichungen kann die erstere, weil β', φ und M als gegebene Grössen anzunehmen sind, zur Bestimmung des gesuchten α und die andere zur Bestimmung des φ verwendet werden. Die algebraische Lösung bietet nun keine besonderen Schwierigkeiten mehr dar, aber auch keinen besonders einfachen Ausdruck; dagegen gestaltet sich die directe geometrische Lösung sehr einfach und lässt unmittelbar nicht unwichtige Resultate ersehen, wenn man sich die Construction so wie früher in eine Karte mit Mercator's Projection eingetragen denkt. Es kann hierbei den Werthen v und V irgend eine gemeinsame Längeneinheit zu Grunde gelegt werden, welche von der der φ- und M-Werthe verschieden ist. Das rechtwinklige Dreieck zu φ und M giebt an dem Schenkel φ unmittelbar den Loxodromenwinkel γ oder die Richtung der mittlern Geschwindigkeit, welche das Schiff einzuhalten hat, um an die verlangte Stelle zu gelangen. Trägt man nun an den Anfangspunkt des φ unter dem Winkel Ω mit der Ostrichtung des φ, und zwar nach dem nächsten Pole oder nach dem Aequator hin, je nachdem Ω positiv oder negativ ist, die Geschwindigkeit V der Strömung und durchschneidet von dem Endpunkte des V aus die Richtung der mittlern Geschwindigkeit mit der eigenen Geschwindigkeit v des Schiffes, so bestimmt die Richtung von dem Endpunkte des V aus nach dem genannten Schnittpunkte hin den verlangten Cours des Schiffes. Es ist nun möglich, dass v die mittlere Geschwindigkeit nicht schneidet; alsdann ist beim Vorhandensein unserer Strömung an die verlangte Stelle nicht direct zu gelangen. Dies tritt ein, wenn bei $\gamma > \Omega$ $v < V\sin(\gamma - \Omega)$ und bei $\gamma < \Omega$, $v < V\sin(\Omega - \gamma)$ ist. Ist $v > V\sin(\gamma - \Omega)$ oder $V\sin(\Omega - \gamma)$, und $v < V$, so giebt es zwei mögliche Course; von diesen ist jedoch im Allgemeinen nur der mit Vortheil zu verwenden, der mit der Richtung der mittlern Geschwindigkeit einen spitzen Winkel bildet; der andere bewirkt zwar auch die mittlere Richtung, jedoch einen kleinern Werth der mittlern Geschwindigkeit. Nur in dem Falle dürfte der letztere Werth zur Geltung gelangen, wenn nahezu mit demselben eine Windströmung zusammentrifft, die zum Treiben des Schiffes verwendet werden könnte. Von $v=V$ an giebt es überhaupt nur einen zutreffenden Cours.

Statt des v könnte in der letzten Aufgabe auch α als gegeben angenommen und dieser Winkel an den Endpunkt des V in entsprechender Weise angetragen werden, bis sein Endschenkel die Richtung der mittlern Geschwindigkeit schneidet. Das Stück dieses Schenkels zwischen diesem Schnittpunkte und dem Endpunkte des V giebt das gesuchte v. Diese Lösung ist nicht ohne praktische Bedeutung, indem es sich bei einer vorhandenen Windströmung, deren Richtung durch α bestimmt sein soll, selbst für ein Dampfschiff darum handeln kann, dasselbe zum Segeln zu benützen und eventuell durch die Wirkung des Dampfes so zu ergänzen, dass die nothwendige Geschwindigkeit v zum Vorschein kommt. In solchen Fällen, wo die erste oder die zweite Art der Lösung zulässig ist, lässt sich sogar sehr einfach die Entscheidung treffen, welche von beiden Lösungen schneller zum Ziele führt; denn das Stück auf der Richtung der mittlern Geschwindigkeit vom Ausgangspunkte bis zum Schnittpunkte mit v giebt die Grösse der mittlern Geschwindigkeit, und es zeigt sich also bei der Construction der Lösungen in derselben Figur unmittelbar, zu welcher Lösung die grössere mittlere Geschwindigkeit gehört.

Tritt an die Stelle der Kugel eine beliebige Rotationsfläche, so erhält man zur Bestimmung des z die Gleichung

$$(v\sin\alpha+V\sin\Omega)^2\,dt^2=dz^2+df^2,\quad\text{daraus}\quad \partial z_t=\frac{v\sin\alpha+V\sin\Omega}{\sqrt{1+\partial f_z^{\,2}}},$$

also

$$t=\frac{1}{v\sin\alpha+V\sin\Omega}\int\sqrt{1+\partial f_z^{\,2}}\,dz;$$

mit Worten: die Zeit, in welcher das Meridianstück zwischen den Parallelkreisen des Anfangs- und Endpunktes durchlaufen wird, ist gleich der Länge dieses Stückes, dividirt durch die mittlere Geschwindigkeit längs des Meridians. Die Umdrehung der Erde ist, wie bekannt, auf diese Geschwindigkeit ohne Einfluss.

Das φ wird wieder aus

$$\partial\varphi_t=\frac{v\cos\alpha+V\cos\Omega\pm u}{f}$$

gefunden, wobei hier ist

$$u=\sqrt{\frac{\varrho.2\pi.\mp\partial f_t}{C.F.\sin\alpha.g.24.60.60}}=\sqrt{\frac{\mp 0{,}0009399\,b.\partial f_t}{\sin\alpha}}.$$

In welchen Fällen $+u$ und $-\partial f_t$, oder $-u$ und $+\partial f_t$ zu nehmen ist, wurde schon in Nr. 26 angegeben. Es wird demnach

$$\varphi=(v\cos\alpha+V\cos\Omega)\int\frac{1}{f}\,dt\pm\sqrt{\frac{0{,}0009399\,b}{\sin\alpha}}\int\frac{\sqrt{\mp\partial f_t}}{f}\,dt.$$

Um integriren zu können, wäre die Gleichung für t nach z aufzulösen und der Werth von z und ∂z_t in f und ∂f_z einzusetzen. Der erste Theil giebt den Winkel φ zur constanten Geschwindigkeit $v \cos\alpha + V \cos\Omega$ längs des Parallelkreises, oder das φ zu dem Loxodromenwinkel γ, der zweite Theil die Ablenkung durch die Umdrehung der Erde unter dem Einflusse des Wasserwiderstandes. Letzterer lässt erkennen, wodurch die Grösse dieser Ablenkung bedingt wird. Multiplicirt man diesen Theil mit dem f der Endstelle, so erhält man die Ablenkung in Längenmass.

Einfach kann auch die Gleichung der windschiefen Fläche der φ und z erhalten werden. Es folgt aus

$$\partial \varphi_z = \frac{v \cos\alpha + V \cos\Omega \pm u}{f} . \partial t_z = \frac{v \cos\alpha + V\cos\Omega \pm u}{f} . \frac{\sqrt{1+\partial f_z^2}}{v \sin\alpha + V \sin\Omega},$$

$$\varphi = \frac{v \cos\alpha + V\cos\Omega}{v \sin\alpha + V \sin\Omega} \int \frac{\sqrt{1+\partial f_z^2}}{f} dz$$

$$\pm \sqrt{\frac{0{,}00093996}{\sin\alpha(v \sin\alpha + V \sin\Omega)}} \int \frac{\sqrt{\mp \partial f_z \sqrt{1+\partial f_z^2}}}{f} dz.$$

Setzt man in den Resultaten für t und φ das $V=0$, so ergeben sich die hierher gehörigen allgemeinen Resultate der Nr. 26. Sind, wie zu Anfang dieser Nummer, V und Ω nicht constant, so können die dortigen allgemeinen Gleichungen auf eine beliebige Rotationsfläche anwendbar gemacht werden, wenn man den Meridian nicht durch z und f, sondern durch ψ und r bestimmt. Es bleibt dann die Gleichung 1) unverändert und ist nur r als Function von φ zu denken; endlich ist in Gleichung 2) ∂f_t nicht $= - r \sin\psi . \partial\psi_t$, sondern $= (- r \sin\psi + \cos\psi \times \partial r_\psi)\, \partial\psi_t$ anzunehmen. Alles Uebrige bleibt unverändert.

Kleinere Mittheilungen.

VI. Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Functionenlehre.

Nach Analogie der bekannten Betrachtungen, durch welche die verschiedenen Entwickelungsmethoden der Functionen nach Potenzen, Cylinder- und Kugelfunctionen etc. unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht sind, und gewissermassen an denselben Grundgedanken anlehnend, lassen sich auch die nachstehenden Ueberlegungen anstellen, die mich vor einigen Jahren zu einem allgemeinen Satze über stetige Functionen führten, welcher hiermit anspruchslos — als ein Curiosum — mitgetheilt werde.

Die Gleichung:

$$1)\qquad \sum_{a=0}^{a=n-1} \frac{1}{x^{2^a} - x^{-2^a}} = \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}} - \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^{2^n}-1}$$

wird leicht für $n=1$ als eine identisch richtige erkannt und dann durch Schluss von n auf $n+1$ auch allgemein vollends bewiesen. Wird $x = e^{i\vartheta}$ gesetzt und mit $2i$ multiplicirt, so nimmt die vorstehende merkwürdige, wenn auch von Charakter sehr specielle Summenformel die Gestalt an:

$$2)\qquad \sum_{a=0}^{a=n-1} \frac{1}{\sin(2^a\vartheta)} = \frac{\sin\left(\frac{2^n-1}{2}\vartheta\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{2^n\vartheta}{2}},$$

in welcher ich sie in Boole's „*Calculus of finite differences*“ angeführt finde. Beiläufig sei erwähnt, dass man sowohl durch Sonderung des Reellen und des Imaginären, als auch durch Differenziren hieraus noch weitere interessante Summenformeln ableiten könnte.

Lässt man in 1) nun n ohne Ende wachsen, so sind die Fälle $\operatorname{mod} x < 1$ und $\operatorname{mod} x > 1$ zu unterscheiden, in welchen x^{2^n} sich der Grenze 0, resp. ∞ nähert. Während für $\operatorname{mod} x = 1$ die Reihe divergent wird (jedoch für $x=1$ selbst die Gleichung noch in gewissem Sinne ihre

Richtigkeit behält), erhalten wir in den zwei anderen Fällen eine sehr gut, nämlich quadratisch convergirende Reihe, d. h. eine solche, deren Summe in der Grenze schliesslich mit jedem weiter berücksichtigten Gliede auf die doppelte Zahl von Decimalen genau gefunden wird, und zwar ergeben sich als Werthe dieser Summe:

$$3)\qquad \sum_{a=0}^{a=\infty}\frac{1}{x^{2^a}-x^{-2^a}}=\begin{cases}-\dfrac{x}{1-x} & \text{für } mod.\,x<1,\\[2ex] \dfrac{1}{1-x} & \text{für } mod.\,x>1.\end{cases}$$

Mit Rücksicht darauf, dass alle ungeraden Zahlen, mit den Potenzen der 2 multiplicirt, nothwendig alle ganzen Zahlen überhaupt, und zwar eine jede nur **einmal**, liefern müssen, könnte dies auch durch beiderseitige Entwickelung in geometrische Reihen leicht verificirt werden.

Versucht man, noch andere Functionen, als die rechter Hand in 3) stehenden, nach Gliedern von der Form

$$\frac{1}{x^n-x^{-n}} \text{ oder auch } \frac{1}{x^n+x^{-n}},\ \frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\ \frac{x^n}{1-x^n}$$

und Aehnliches zu entwickeln, so stellt sich in der Regel ein zahlentheoretisches Bildungsgesetz für die Coefficienten heraus, und nicht, wie hier, ein arithmetisches. Der Werth des Coefficienten irgend eines Gliedes nämlich erscheint dabei meistens gesetzmässig abhängig von der Anzahl und Beschaffenheit der Primzahltheiler, in welche die Stellenzahl dieses Gliedes zerlegt werden kann. Indem ich eben dergleichen Entwickelungen aufsuchte, mit denen, wie ich vernommen, auch Herr Kronecker sich beschäftigte, war ich — unter Benutzung der bekannten Möbius'schen* Umkehrungsmethode — u. A. auch zu der Formel 3) gelangt.

Beim Anblick der rechter Hand in 3) stehenden Ausdrücke ist es nun ein naheliegender Gedanke, hieraus eine Entwickelung für die reciproke Differenz zweier Zahlen abzuleiten und diese mittelst des Fundamentalsatzes der einwerthig stetigen Functionen zu verwerthen.

Durch die Annahme $x=\frac{z}{\zeta}$ ergiebt sich einerseits als die gedachte Entwickelung:

$$4)\qquad \frac{1}{\zeta-z}=\begin{cases}\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=\infty}\frac{(z\zeta)^{2^a}}{\zeta^{2^{a+1}}-z^{2^{a+1}}} & \text{für } mod.\,z<mod.\,\zeta,\\[3ex] \dfrac{1}{\zeta}\displaystyle\sum_{a=0}^{a=\infty}\qquad\text{,,} & \text{,, } mod.\,z>mod.\,\zeta.\end{cases}$$

* Crelle's Journal, Bd. 9 S. 105 — eine Methode, die Herr Bertrand wohl mit Unrecht Herrn Tschebitscheff zuschreibt (vergl. dessen *Traité de calc. diff.*, S. 334—336).

Der Riemann'schen Functionenlehre liegt andererseits bekanntlich der Satz zum Grunde: Wenn eine Function $f(z)$ in einem Gebiete T überall eindeutig endlich* und stetig ist, so ist für jeden Punkt z des Gebietes:

$$5)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

wenn das Integral im positiven Sinne über die Begrenzung von T ausgedehnt gedacht wird.

Ist T die Fläche eines concentrischen Kreisringes, ist nämlich die Function stetig zwischen irgend zwei mit den Radien R und $r \gtreqless R$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreisen, so hat man insbesondere die Laurent'sche Verallgemeinerung des Cauchy'schen Satzes:

$$6)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_R\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\int\limits_r\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\right\},$$

worin die Integrale beide im Sinne der positiven Drehungsrichtung erstreckt zu denken sind über die Peripherien der Kreise, deren Halbmesser sich an ihrem Zeichen angemerkt finden.

Diese letztere Form 6) des Satzes ist diejenige, von der wir Gebrauch machen wollen. Ist die Function auch innerhalb des Kreises (vom Radius) r stetig, so fällt das zweite Integral weg und verschwinden auch die Glieder, in die wir dasselbe noch zerlegen werden.

Im ersten Integral ist nun $mod.\,z < mod.\,\zeta$, im zweiten umgekehrt. Wir können deshalb im ersten Integral die obere, im zweiten die untere Entwickelung 4) substituiren. So kommt:

$$7)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{a=0}^{a=\infty} z^{2^a-1}\int\limits_R\frac{\zeta^{2^a}f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{2^{a+1}}-z^{2^{a+1}}}-\sum_{a=0}^{a=\infty} z^{2^a}\int\limits_r\frac{\zeta^{2^a-1}f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{2^{a+1}}-z^{2^{a+1}}}\right\}.$$

Nun aber kann man auf die Brüche, mit welchen rechter Hand unter dem Integralzeichen $f(z)$ multiplicirt erscheint, die Partialbruchzerlegung anwenden.

Die Wurzeln der Nennergleichung:

$$8)\qquad \psi(\zeta)=\zeta^{2^{a+1}}-z^{2^{a+1}}=0$$

sind hier durchweg von einander verschieden und werden dargestellt durch:

$$9)\qquad \zeta_h=z\,e^{\frac{h\pi i}{2^a}}\quad \text{für } h=1,2,3,\ldots 2^{a+1};$$

somit ergiebt sich nach bekanntem Schema:

* Das erste Attribut kann als selbstverständlich gelten, das zweite ist streng genommen in dem dritten mit eingeschlossen.

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{\zeta^{2^a}}{\psi(\zeta)} = \dfrac{1}{2^{a+1}z^{2^a-1}} \sum\limits_{h=1}^{h=2^{a+1}} \dfrac{(-1)^h e^{\frac{h\pi i}{2^a}}}{\zeta-\zeta_h}, \\ \dfrac{\zeta^{2^a-1}}{\psi(\zeta)} = \dfrac{1}{2^{a+1}z^{2^a}} \sum\limits_{h=1}^{h=2^{a+1}} \dfrac{(-1)^h}{\zeta-\zeta_h}, \end{cases}$$

und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in 7) folgt:

$$11)\quad f(z) = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} \frac{(-1)^h}{2\pi i} \left\{ e^{\frac{h\pi i}{2^a}} \int\limits_R \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-\zeta_h} - \int\limits_r \frac{f(z)\, d\zeta}{\zeta-\zeta_h} \right\}.$$

Die Zahlenörter der Grössen ζ_h, welche sämmtlich denselben Modul wie z haben, liegen nun auf der durch den Punkt z um den Nullpunkt gehenden Kreislinie, folglich jedenfalls innerhalb des Ringgebietes T.

Die Gleichung 6) gilt daher auch, wenn wir diese Argumente ζ_h an Stelle von z treten lassen, und mit Rücksicht hierauf erhalten wir folgende beiden Ausdrücke für $f(z)$:

$$12)\quad \begin{aligned} f(z) &= \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} (-1)^h e^{\frac{h\pi i}{2^a}} f(\zeta_h) \\ &+ \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} \frac{(-1)^h \left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}} - 1\right)}{2\pi i} \int\limits_r \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-\zeta_h}, \end{aligned}$$

$$13)\quad \begin{aligned} f(z) &= \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \qquad \text{„} \int\limits_R \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-\zeta_h} \\ &+ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (-1)^h f(\zeta_h). \end{aligned}$$

Eine bedeutende Vereinfachung tritt bei 12) ein in dem schon erwähnten Falle, wo die Function auch auf der innern Kreisfläche stetig ist, also in eine Mac-Laurin'sche Reihe entwickelt werden kann. In analoger Weise könnte 13) vereinfacht werden durch die Annahme, dass in der Entwickelung von $f(z)$ nur negative Potenzen vorkämen; doch will ich hier zunächst nur den erstern Fall weiter verfolgen.

Wegen des Verschwindens der um r genommenen Integrale geht nach Einsetzung der Werthe 9) der ζ_h die Gleichung 12) über in:

$$14)\quad f(z) = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} (-1)^h e^{\frac{h\pi i}{2^a}} f\left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}} . z\right).$$

Die Formel 14) ist nun das Theorem, um dessen Herleitung es mir vorerst zu thun war. Dasselbe stellt eine Entwickelung der Function $f(z)$ in eine stets convergente und nur einfach unendliche (genauer: dreieckig anwachsende) Doppelreihe vor; es leistet, umgekehrt, die Summation dieser Doppelreihe und erscheint, äusserlich betrachtet, als eine

Beziehung zwischen denjenigen Functionswerthen, deren Argumente sich wie die 2^{ten} Wurzeln der Einheit zu einander verhalten.

Die Richtigkeit der Formel 14) lässt sich auf zwei Arten nachträglich darthun.

Eine erste Art, dieselbe zu verificiren, führt weniger rasch zum Ziele, gestattet dafür aber interessante Einblicke in mögliche Vertheilungs- resp. Anordnungsweisen der Zahlen. Ihr liegt der Gedanke zum Grunde, die Brüche $\frac{h}{2^a}$ in 14) sämmtlich zu reduciren und diejenigen Glieder zusammenzusuchen, für welche dieselben sich als gleich herausstellen. Da ich mich des weitläufigen Druckes der Formeln halber hier begnügen will, den Gang dieser Untersuchung nur im Allgemeinen zu skizziren, so sei lediglich bemerkt, dass man zu dem genannten Zwecke zunächst die Glieder mit geradem Stellenzeiger h zu trennen hat von denen mit ungeradem Stellenzeiger (welche dieses erste Mal ein negatives Vorzeichen besitzen werden). In ersteren ist selbstverständlich $\frac{1}{2}h$ als neue Summationsvariable einzuführen; nach Kürzung der Brüche mit 2 ist dann derselbe Process* der Trennung der geradstelligen von den ungeradstelligen Gliedern fortschreitend weiter anzuwenden, wofür eine Recursionsformel sich leicht ergiebt. Es entsteht so eine dreifache Summe, in welcher jedoch die eine Summation als einer geometrischen Reihe vom Quotienten $\frac{1}{2}$ sofort effectuirt werden kann. Nachdem dieses bewerkstelligt, erscheint die Gleichung nunmehr direct als eine identische.

Die zweite ist zugleich die kürzeste Art, die Formel 14) zu beweisen; ich theile dieselbe bei der Begründung eines noch umfassenderen Satzes implicite mit, zu welchem jene sich noch ausdehnen lässt.

Zunächst bemerke ich, dass für eine nur nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ (mit Ausschluss der nullten) entwickelbare Function $f(z)$ dem Satze 14) der folgende entspricht:

$$15) \qquad f(z)=\sum_{a=0}^{a=\infty}\frac{1}{2^{a+1}}\sum_{h=1}^{h=2^{a+1}}(-1)^h f\left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}}.z\right),$$

wie dies schon ein Blick auf 13) vermuthen liess.

Die Giltigkeit der beiden Sätze 14) und 15) reicht aber sogar noch weiter, als aus der hier angegebenen Herleitungsweise hervorzugehen scheint. Dieselben erstrecken sich nämlich auch auf solche Functionen, die nach positiven sowohl, als negativen Potenzen von z sich entwickeln lassen gemäss dem Schema:

---

* Für diese und ähnliche Operationen mit Summenausdrücken findet man bequeme Schemata in meinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende", Leipzig 1873, S. 294—356.

16)
$$f(z) = \sum_{c=-\infty}^{c=+\infty} \gamma_c z^c,$$

nur muss bei 14) das Glied mit z^{-1}, bei 15) das mit z^0 fehlen.

Ist bei einer Function 16) sowohl

$$\gamma_{-1} = 0, \text{ als auch } \gamma_0 = 0,$$

so gelten gleichzeitig beide Theoreme. Sind aber diese beiden Bedingungen nicht erfüllt, ist also $f(z)$ überhaupt nur innerhalb einer den Nullpunkt concentrisch-umschliessenden Ringfläche stetig, so sind die Reihen 14) und 15) für jedes diesem Gebiete angehörige z dennoch unbedingt convergent. Nur sind ihre Summen alsdann nicht $= f(z)$ selbst, sondern jetzt gleich dieser von dem Term $\gamma_{-1} z^{-1}$ bezüglich $\gamma_0 z^0$ befreiten Function. Bequemer als durch Discussion der noch in 12) und 13) verbliebenen Integrale wird man sich hiervon durch das weiter unten eingeschlagene Beweisverfahren überzeugen.

In dem Bestreben, diese Ergebnisse nochmals zu verallgemeinern, gelangt man endlich leicht zu dem für jede Function 16) geltenden Satze:

17)
$$f(z) - \gamma_k z^k = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} (-1)^h e^{-\frac{hk\pi i}{2^a}} f\left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}} . z\right),$$

in welchem unter k jede ganze Zahl verstanden werden kann, und welcher für $k = -1$ und 0 die beiden angeführten Sätze wiedergiebt.

Was nun die Bedeutung dieses Theorems 17) betrifft, so erscheint es jedenfalls merkwürdig, dass man so, ohne zu differenziren und ohne für das Argument der Function irgend specielle Werthe zu setzen, jedes beliebige Glied aus der Reihenentwickelung derselben gewissermassen herausschälen kann.

Man könnte auch dieses Glied in 17) isoliren und das Ergebniss ansehen als eine Entwickelung der natürlichen Potenz z^k nach solchen Ausdrücken, die eine willkürliche Function f enthalten.

Behufs Beweises nehme man in 17) für $f(z)$ sowohl, als für $f\left(e^{\frac{h\pi i}{2^a}} z\right)$ unmittelbar die Reihenentwickelungen, in welche diese Functionen sich der Annahme 16) gemäss nach Potenzen von z entwickeln lassen.

Macht man hierbei die Summation nach c zur erstangezeigten, was der unbedingten Convergenz wegen gestattet ist, so ergiebt sich rechter Hand als Coefficient von $\gamma_c z^c$:

18)
$$A_c = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{2^{a+1}} B_a, \quad \text{wo} \quad B_a = \sum_{h=1}^{h=2^{a+1}} (-1)^h e^{\frac{h(c-k)\pi i}{2^a}}$$

bedeutet. Der Ausdruck von B_a ist aber lediglich eine geometrische Progression, und zwar ist die Summe derselben (die wir auch von 0 bis $2^{a+1} - 1$ nehmen können):

19) $$B_a = \frac{1 - e^{2(c-k)\pi i}}{1 + e^{\frac{(c-k)\pi i}{2^a}}}.$$

Dieselbe ist gleich 0 für alle a und c, ausgenommen diejenigen, für welche

20) $$\frac{c-k}{2^a} = 2m + 1$$

eine ungerade ganze Zahl ist. Für dergleichen Werthsysteme dagegen wird

21) $$B_a = 2^{a+1},$$

wie man sowohl durch Bestimmung des wahren Werthes des alsdann in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Bruches 19), als auch direct aus 18) findet.

Nun aber überzeugt man sich leicht, dass es zu jeder von 0 verschiedenen ganzen Zahl $c-k$ stets eine und gerade nur eine natürliche Zahl a giebt, welche die Bedingung 20) erfüllt (für alle ungeraden $c-k$ ist es die: $a=0$). Denn aus jeder geraden Zahl kann man durch hinreichend lange fortgesetztes Halbiren schliesslich einen ungeradzahligen Quotienten ableiten; wenn aber ein bestimmtes 2^a eine ungerade Anzahl Mal in $c-k$ aufgeht, so muss jede niedrigere Potenz der 2 in $c-k$ eine gerade Anzahl Mal aufgehen, dagegen $c-k$ durch jede höhere Potenz der 2 getheilt einen irreducibeln Bruch liefern.

Da sonach alle übrigen Glieder von A_c den Factor 0 erhalten, so wird der Coefficient von $\gamma_c z^c$ bei jedem von k verschiedenen c — unter a jenes eine dazu gehörige verstanden —:

$$A_c = \frac{1}{2^{a+1}} \cdot 2^{a+1} = 1.$$

Bei $c=k$ dagegen muss die mit B_a bezeichnete Grösse immerfort verschwinden und folglich auch $A_k = 0$ sein, welche Ausnahme lediglich darauf beruht, dass die Bedingung 20) für $c-k=0$ (allein) durch keine natürliche Zahl a erfüllbar ist.

Hiermit ist nun die Gleichung 17) in der That als eine Identität erwiesen.

Die Modification zu discutiren, welche in unserem Theorem eintreten würde, wenn man noch rechter Hand in 17) das Argument $e^{\frac{h\pi i}{2^a}} . z$ durch $e^{\frac{hl\pi i}{2^a}} . z$ ersetzte — unter l abermals eine ganze Zahl verstanden —, will ich dem Leser überlassen.

Würde man auch noch die 2 durchweg durch n ersetzen und statt des Zählers 1 hinter dem ersten Summenzeichen $\varphi(a)$ schreiben, wo die übrigens willkürliche Function φ nur die eine Bedingung zu erfüllen hätte, dass durch ihre Einführung die Convergenz nicht gestört wird (wie dies z. B. der Fall ist, wenn sie für kein ganzes a unendlich wird), so ergäbe sich eine Reihe, deren Glieder auf eine eigene gesetzmässige Weise (und theilweise unter Elision von solchen) aus denen von 16) hervorgehen.

Endlich dürfte es nicht undankbar sein, zu untersuchen, welche Summenwerthe solchen der rechten Seite von 17) analog gebauten Reihen zukommen, in denen die dortigen Exponentialfactoren durch andere — z. B. mehrfach — periodische Functionen vertreten werden.

Januar 1876. ERNST SCHRÖDER.

VII. Ueber einige bisher noch nicht allgemein gelöste Probleme der Zinseszins- und Rentenrechnung.*

Bekanntlich besteht für den Endwerth E, welchen ein zu P Procent ganzjährig auf Zinseszinsen angelegtes Capital A bei einer am Ende eines jeden Jahres erfolgenden Zulage r nach n Jahren erhält, die Relation:

$$1)\qquad E=A(1+p)^n+\frac{r\,[(1+p)^n-1]}{p},$$

so dass die Frage, bei gegebenem A, E, n, r den Zinsfuss $P=100p$ zu bestimmen, dem ersten Anscheine nach für $n>4$ nicht allgemein beantwortet werden kann. Es genügen übrigens, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist, einige einfache Transformationen von 1), um dessen ungeachtet eine alle praktisch wichtigen Specialfälle umfassende Lösung dieser Aufgabe zu gewinnen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Beziehung 1) zunächst in der Form:

$$E\left\{\frac{np}{(1+p)^n-1}\right\}-A\left\{\frac{np\,(1+p)^n}{(1+p)^n-1}\right\}=nr$$

und ersetzen die Quotienten:

$$\frac{np}{(1+p)^n-1}=f(n,p),\qquad \frac{np\,(1+p)^n}{(1+p)^n-1}=np+f(n,p)$$

durch die ihnen äquivalenten unendlichen Reihen:

$$\begin{aligned}f(n,p)=1&-\left(\frac{n-1}{2}\right)p+\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{6}\right)p^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{12}\right)p^3\\&-\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{12}\right)\left(\frac{n^2-19}{30}\right)p^4+\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{12}\right)\left(\frac{n^2-9}{20}\right)p^5\\&+\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{12}\right)\left(\frac{2n^4-145n^2+863}{2520}\right)p^6-\dots\\&=1+u_1p+u_2p^2+u_3p^3+\dots,\end{aligned}$$

$$np+f(n,p)=1+(u_1+n)\,p+u_2p^2+u_3p^3+\dots,$$

deren Substitution in 1) offenbar die Gleichung:

* Vgl. hiermit die im II. Jahrg. des Centralblattes für das gesammte Forstwesen seither publicirten Abhandlungen des Verfassers: „Ueber zwei fundamentale Probleme der Zinseszins-Rechnung“ und: „Ueber eine Reihe neuer Fundamentalformeln der Zinseszins- und Rentenrechnung“.

$$p-\frac{(n+1)(n-1)(E-A)}{6\{(n-1)E+(n+1)A\}}p^2+\frac{(n+1)(n-1)(E-A)}{12\{(n-1)E+(n+1)A\}}p^3-\dots$$
$$-\frac{2(E-A)u_k}{(n-1)E+(n+1)A}p^k-\dots=\frac{2\{E-(A+nr)\}}{(n-1)E+(n+1)A}$$

bedingt. Ihre Auflösung nach p führt schliesslich zu folgendem Resultat: Setzt man der Kürze wegen

$$(n+1)A=\overline{A},\quad (n-1)E=\overline{E},\quad (n+1)(n-1)(E-A)=P,$$

so erscheint die fragliche Unbekannte p als eine Function des Quotienten:

$$\text{2)}\qquad \frac{2\{E-(A+nr)\}}{(n-1)E+(n+1)A}=U$$

und lässt sich allgemein durch eine convergente unendliche Reihe von der Gestalt:

$$\begin{aligned}p=U&+\tfrac{1}{6}\left(\frac{U}{\overline{E}+\overline{A}}\right)PU+\tfrac{1}{36}(\alpha_1\overline{E}-\beta_1\overline{A})\left(\frac{U}{\overline{E}+\overline{A}}\right)^2PU\\ \text{3)}\qquad &+\tfrac{1}{1080}(\alpha_2\overline{E}^2-2\beta_2\overline{A}\,\overline{E}+\gamma_2\overline{A}^2)\left(\frac{U}{\overline{E}+\overline{A}}\right)^3PU\\ &+\tfrac{1}{6480}(\alpha_3\overline{E}^3-3\beta_3\overline{A}\,\overline{E}^2+3\gamma_3\overline{A}^2\overline{E}-\delta_3\overline{A}^3)\left(\frac{U}{\overline{E}+\overline{A}}\right)^4PU+\dots\end{aligned}$$

wiedergeben, wobei die lediglich von n abhängigen Coefficienten α_1, β_1; α_2, β_2, γ_2 etc. dem Schema:

$$\text{4)}\quad\left\{\begin{array}{c}\alpha_1=2n-1,\quad \beta_1=2n+1,\\ \alpha_2=(2n-1)(11n-7),\ \beta_2=7(2n+1)(2n-1),\ \gamma_2=(2n+1)(11n+7);\\ \alpha_3=(2n-1)^2(13n-11),\quad \beta_3=(2n+1)(2n-1)(19n-11),\\ \gamma_3=(2n+1)(2n-1)(19n+11),\quad \delta_3=(2n+1)^2(13n+11)\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

zu entnehmen sind.

Für $A=0$ ergiebt sich aus 3) ausserdem die interessante Formel:

$$\text{5)}\qquad p=F\left\{\frac{2(E-nr)}{(n-1)E}\right\}=F(\varepsilon_n)$$

$$\begin{aligned}&=\varepsilon_n+\tfrac{1}{6}(n+1)\varepsilon^2_n+\tfrac{1}{36}(n+1)(2n-1)\varepsilon^3_n+\tfrac{1}{1080}(n+1)(2n-1)(11n-7)\varepsilon^4_n\\ &+\tfrac{1}{6480}(n+1)(2n-1)^2(13n-11)\varepsilon^5_n\\ &+\tfrac{1}{90720}(n+1)(2n-1)(3n-1)(50n^2-89n+41)\varepsilon^6_n+\dots,\end{aligned}$$

welche als die analoge Lösung der Relation:

$$\text{6)}\qquad r\frac{(1+p)^n-1}{p}=E$$

anzusehen ist. Ihre Richtigkeit kann indirect dadurch controlirt werden, dass die den Substitutionen $n=2$, resp. $n=3$ correspondirenden Specialisirungen von 5):

$$p=F(\varepsilon_2)=F\left\{\frac{2(E-2r)}{E}\right\},\ \text{resp.}\ p=F(\varepsilon_3)=F\left(\frac{E-3r}{E}\right)$$

mit den praktisch brauchbaren Wurzeln der Gleichungen:

$$r(2+p)=E, \text{ beziehungsweise } r(3+3p+p^2)=E$$

coincidiren müssen, was im Hinblick auf die Identitäten

$$p=\frac{E}{r}-2=\frac{\varepsilon_2}{1-\frac{1}{2}\varepsilon_2}=\varepsilon_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^2+\tfrac{1}{4}\varepsilon_2^3+\tfrac{1}{8}\varepsilon_2^4+\ldots$$

und

$$p=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{\tfrac{9}{4}+\frac{E-3r}{r}}=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\left\{1+\tfrac{4}{3}\left(\frac{\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\varepsilon_3+\tfrac{2}{3}\varepsilon_3^2+\tfrac{5}{9}\varepsilon_3^3+\tfrac{13}{27}\varepsilon_3^4+\tfrac{35}{81}\varepsilon_3^5+\tfrac{32}{81}\varepsilon_3^6+\ldots$$

in der That der Fall ist.

Was ferner die praktische Brauchbarkeit unserer allgemeinen Reihe 3) anbelangt, so ist ihre Convergenz eine so bedeutende, dass bereits der durch Summation ihrer drei ersten Glieder erhaltene Näherungswerth von p, p', im Verein mit der aus 1) entspringenden Correctur:

$$7)\qquad \Delta p=\frac{p'\{(Ep'+r)-(Ap'+r)(1+p')^n\}}{np'(Ap'+r)(1+p')^{n-1}-r\{(1+p')^n-1\}}$$

genügt, um p gemeiniglich bis auf sechs Decimalstellen genau zu bestimmen.

Als Beleg hierfür mögen folgende drei Beispiele dienen:

a) $A=10000,\ r=500,\ n=15,\ E=31578.56,$ —

$$p'+\Delta p=0.0467649+0.0029261+0.0002978+0.000011056$$
$$=0.049999856\ldots\quad(p=0.05);$$

b) $A=25000,\ r=950,\ n=32,\ E=121683.05,$ —

$$p'+\Delta p=0.0288364+0.0029817+0.0005736+0.000108613$$
$$=0.03250031\ldots\quad(p=0.0325);$$

c) $A=70000,\ r=1500,\ n=50,\ E=386825.88,$ —

$$p'+\Delta p=0.0214723+0.0027011+0.0006506+0.000176756$$
$$=0.02500075\ldots\quad(p=0.025).$$

Hingegen müssen, um bei Anwendung der Gleichung 5) eine analoge Genauigkeit zu erzielen, neben der ihr entsprechenden Ergänzungsformel

$$8)\qquad \Delta p=\frac{p'\{Ep'-r[(1+p')^n-1]\}}{r\{np'(1+p')^{n-1}-[(1+p')^n-1]\}}$$

sämmtliche in 5) angegebenen Summanden zur Darstellung von p' in Anspruch genommen werden, wie dies aus den Specialisirungen:

d) $A=0,\ r=200,\ n=10,\ E=2457.64,$ —

$$p'=0.0413803+0.0031393+0.0004114+0.0000584+0.0000088$$
$$+0.0000014=0.0449996,\quad(p=0.045);$$

e) $A=0,\ r=400,\ n=25,\ E=19090.84,$ —

$$p'=0.0396824+0.0068237+0.0022114+0.0007839+0.0002977$$
$$+0.0001179=0.0499170,\quad(p=0.05);$$

f) $A = 0,\ r = 750,\ n = 87,\ E = 172513,$ —

$$p' = 0.0144597 + 0.0030666 + 0.0012785 + 0.0005854 + 0.0002878 + 0.0001478 = 0.0198258, \quad (p = 0.02)$$

sofort ersichtlich wird.

Da übrigens die Coefficienten von $\varepsilon^2_n,\ \varepsilon^3_n \dots \varepsilon^6_n$ lediglich von n abhängen, so würde die Anfertigung einer von $n = 3$ bis $n = 100$ reichenden Tabelle ihrer Briggischen Logarithmen genügen, um die praktische Brauchbarkeit von 5) noch über jene von 3) zu erhöhen.

Versuchen wir es ferner, im Anschluss an 1) auch die bekannte Relation

$$9) \qquad A(1+p)^n - \frac{r[(1+p)^n - 1]}{p} = E$$

allgemein unter den durch die Praxis bezüglich $A,\ r,\ n,\ p,\ E$ gegebenen Einschränkungen nach p aufzulösen, so zeigt sich, dass für $E > A$ eine einfache Vertauschung von $+r$ mit $-r$ in 2) und 7) eine befriedigende Erledigung dieses Problems ermöglicht und nur der Fall $E < A$ die Aufstellung einer neuen Formel für p erheischt. Zu diesem Zwecke dividiren wir 9) durch $(1+p)^n$ und gelangen so nach Entwickelung der Ausdrücke

$$(1+p)^{-n}, \quad \frac{1-(1+p)^{-n}}{p}$$

zu der für $0 < p < 1$ jederzeit convergirenden Reihe:

$$p - \frac{(n+1)}{3}\left\{\frac{3E+(n+2)r}{2E+(n+1)r}\right\}p^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{3.4}\left\{\frac{4E+(n+3)r}{2E+(n+1)r}\right\}p^3 - \dots$$
$$+ (-1)^{k-1}\frac{(n+1)\dots(n+k-1)}{3.4\dots(k+1)}\left\{\frac{(k+1)E+(n+k)r}{2E+(n+1)r}\right\}p^k + \dots$$
$$= \frac{2(E+nr-A)}{n\{2E+(n+1)r\}},$$

deren Reversion direct auf folgende Gleichung für p führt:

$$10) \qquad p = \Phi\left\{\frac{2(E+nr-A)}{n[2E+(n+1)r]}\right\} = \Phi(V)$$
$$= V + \tfrac{1}{3}(n+1)\left\{\frac{3E+(n+2)r}{2E+(n+1)r}\right\}V^2$$
$$+ \tfrac{1}{36}(n+1)\frac{\{24(2n+1)E^2+6(n+2)(5n+3)Er+(n+1)(n+2)(5n+7)r^2\}}{\{2E+(n+1)r\}^2}V^3 + \dots$$

Dieselbe verwandelt sich für $E = 0$ in

$$11) \qquad p = \Phi\left\{\frac{2(nr-A)}{(n+1)nr}\right\} = \Phi(\eta_n)$$
$$= \eta_n + \tfrac{1}{3}(n+2)\eta^2_n + \tfrac{1}{36}(n+2)(5n+7)\eta^3_n + \tfrac{1}{270}(n+2)(17n^2+44n+29)\eta^4_n$$
$$+ \tfrac{1}{6480}(n+2)(193n^3+708n^2+885n+374)\eta^5_n$$
$$+ \tfrac{1}{45360}(n+2)(655n^4+3068n^3+5523n^2+4490n+1384)\eta^6_n + \dots$$

und liefert in dieser Gestalt unter Zuhilfenahme der Formel

$$12)\qquad \varDelta p=\frac{p'(1+p')\{(r-Ap')(1+p')^n-r\}}{r\{(1+p')[(1+p')^n-1]-np'\}}$$

eine allen Anforderungen der Praxis genügende allgemeine Beantwortung der Frage, zu welchem Zinsfusse man ein gegebenes Capital A auf Zinseszinsen anlegen müsse, um sich hierdurch den Bezug einer Jahresrente r für n Jahre zu sichern. So erhalten wir z. B. für

a) $$A=10000,\ r=963.42,\ n=15:$$

$$p'=0.0385026+0.0084005+0.0022102+0.0006246+0.0001830 \\ +0{,}0000547=0.0499756,\quad (p=0.05);$$

b) $$A=45000,\ r=2005.84,\ n=50:$$

$$p'=0.0216200+0.0081020+0.0037515+0.0018821+0.0009833 \\ +0.0005258=0.0368647,\quad \varDelta p=0.0006297,$$

d. h. $p'+\varDelta p=0.0374944$, während der wahre Werth von p dem Decimalbruche 0.0375 entspricht.

Um übrigens das Resultat 11) auch einer algebraischen Controle zu unterwerfen, setzen wir in demselben $n=1$, resp. $n=2$ und vergleichen seine diesen Substitutionen entsprechenden Specialisirungen:

$$p=\Phi\left(\frac{r-A}{r}\right)=\Phi(\eta_1),\ \text{resp.}\ p=\Phi\left(\frac{2r-A}{3r}\right)=\Phi(\eta_2)$$

mit den hier allein zulässigen Wurzeln der beiden Relationen

$$A(1+p)-r=0,\ \text{beziehungsweise}\ A(1+p)^2-\frac{r[(1+p)^2-1]}{p}=0.$$

Die Auflösung der letzteren nach p liefert dann der Reihe nach

$$p=\frac{r-A}{A}=\frac{\eta_1}{1-\eta_1}=\eta_1+\eta_1^2+\eta_1^3+\eta_1^4+\cdots,$$

resp.

$$p=\frac{r}{2A}\left(1+\sqrt{1+\frac{4A}{r}}\right)-1=\tfrac{1}{4}\left(\frac{1+3\sqrt{1-\frac{4}{3}\eta_2}}{1-\frac{3}{2}\eta_2}\right)-1$$
$$=\eta_2+\tfrac{4}{3}\eta_2^2+\tfrac{17}{9}\eta_2^3+\tfrac{74}{27}\eta_2^4+\tfrac{326}{81}\eta_2^5+\tfrac{482}{81}\eta_2^6+\cdots,$$

durch welche Transformationen die Richtigkeit von 11) für beide Fälle nachgewiesen erscheint.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen sei endlich noch eine kurze Besprechung der Gleichungen

$$13)\qquad E=\frac{r[(1+p)^{an}-1]}{(1+p)^a-1},$$

resp.

$$14)\qquad A=\frac{r[(1+p)^{an}-1]}{(1+p)^{an}[(1+p)^a-1]}$$

gestattet, welche die den Beziehungen 1) und 9) entspringenden Specialprobleme 5) und 11) gleichfalls als besondere Fälle in sich schliessen und bekanntlich den Nachwerth E, resp. Vorwerth A einer in gleichen

Intervallen von je a Jahren n-mal hintereinander eingehenden Rente r bei dem Zinsfusse $P=100p$ angeben. Indem wir nämlich in 13) statt $(1+p)^a$, in 14) statt $(1+p)^{an}$ eine neue Unbekannte y einführen, gewinnen wir zur Ermittelung der letzteren die Relationen:

$$y=\frac{E-r}{E}+\frac{r}{E}y^n,\quad \text{resp.}\quad y=\frac{r}{A+r}+\frac{A}{A+r}y\sqrt[n]{y},$$

welche sich augenscheinlich unter die allgemeinere $y=u+vy^\mu$ subsumiren lassen und in Hinblick auf die mit Hilfe des Reversionstheorems von **Lagrange** für den Briggischen Logarithmus von y ableitbare Reihe

$$\begin{aligned}log\, y = log\, u + 0.4342945\, u^{\mu-1}v \Big\{1+\frac{2\mu-1}{2}u^{\mu-1}v+\frac{(3\mu-1)(3\mu-2)}{2.3}(u^{\mu-1}v)^2+\ldots\\ +\frac{[(k+1)\mu-1][(k+1)\mu-2]\ldots[(k+1)\mu-k]}{2.3\ldots(k+1)}(u^{\mu-1}v)^k+\ldots\Big\}\end{aligned}$$

für die Function $log(1+p)$ der Reihe nach die Formeln

$$\begin{aligned}log(1+p)=\frac{1}{a}log\left(\frac{E-r}{E}\right)+\frac{0.4342945\,r}{aE}\left(\frac{E-r}{E}\right)^{n-1}\Big[1+\frac{2n-1}{2}\Big\{\frac{r(E-r)^{n-1}}{E^n}\Big\}\\ +\frac{(3n-1)(3n-2)}{2.3}\Big\{\frac{r(E-r)^{n-1}}{E^n}\Big\}^2+\ldots\\ +\frac{[(k+1)n-1][(k+1)n-2]\ldots[(k+1)n-k]}{2.3\ldots(k+1)}\Big\{\frac{r(E-r)^{n-1}}{E^n}\Big\}^k+\ldots\Big],\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}log(1+p)=\frac{1}{an}log\left(\frac{r}{A+r}\right)+\frac{0.4342945\,A\sqrt[n]{r}}{an(A+r)^{\frac{n+1}{n}}}\Big[1+\frac{n+2}{2}\Big\{\frac{A\sqrt[n]{r}}{n(A+r)^{\frac{n+1}{n}}}\Big\}\\ +\frac{(n+3)(2n+3)}{2.3}\Big\{\frac{A\sqrt[n]{r}}{n(A+r)^{\frac{n+1}{n}}}\Big\}^2+\ldots\\ +\frac{[n+(k+1)][2n+(k+1)]\ldots[kn+(k+1)]}{2.3\ldots(k+1)}\Big\{\frac{A\sqrt[n]{r}}{n(A+r)^{\frac{n+1}{n}}}\Big\}^k+\ldots\Big]\end{aligned}\tag{16}$$

bedingen. Es ist also auch in diesen beiden ziemlich complicirten Fällen eine allgemeine Bestimmung von p bis zu jeder beliebigen Genauigkeit möglich.

Wien. Dr. O. Simony.

VIII. Ueber einige bestimmte Integrale.

I. Vertauscht man in den Gleichungen

$$\frac{a}{a^2+u^2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{a}{a^2+(n+u)^2}+\frac{a}{a^2+(n-u)^2}\right]=\pi\left[1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-2na\pi}\cos 2nu\pi\right],$$

$$\frac{u}{a^2+u^2}+\sum\left[\frac{n+u}{a^2+(n+u)^2}-\frac{n-u}{a^2+(n-u)^2}\right]=2\pi\sum e^{-2na\pi}\sin 2nu\pi$$

a und u resp. mit $\frac{a}{2}$, $\frac{u}{2}$, dividirt auf beiden Seiten durch 2, so folgt

$$1)\quad \frac{a}{a^2+u^2}+\sum\left[\frac{a}{a^2+(2n+u)^2}+\frac{a}{a^2+(2n-u)^2}\right]=\pi\left[\tfrac{1}{2}+\sum e^{-na\pi}\cos nu\pi\right],$$

$$2)\quad \frac{u}{a^2+u^2}+\sum\left[\frac{2n+u}{a^2+(2n+u)^2}+\frac{2n-u}{a^2+(2n-u)^2}\right]=\pi\sum e^{-na\pi}\cos nu\pi.$$

Es ist allgemein

$$3)\quad \int\limits_0^\infty f(v)\,dv=\int\limits_0^2 f(v)\,dv+\int\limits_2^4 f(v)\,dv+\int\limits_4^6 f(v)\,dv+\ldots=\sum_{r=0}^{r=\infty}\int\limits_{2r}^{2r+2} f(v)\,dv.$$

Für $v=2r+w$ folgt

$$\int\limits_{2r}^{2r+2} f(v)\,dv=\int\limits_0^2 f(2r+w)\,dw$$

oder, wenn man das rechts stehende Integral in zwei Integrale mit den Grenzen (0, 1) und (1, 2) zerlegt,

$$\int\limits_{2r}^{2r+2} f(v)\,dv=\int\limits_0^1 f(2r+w)\,dw+\int\limits_1^2 f(2r+w)\,dw.$$

In dem ersten Integral rechts setze man $w=u$, im zweiten $w=2-u$. Da die Grenzen der beiden Integrale in Beziehung auf u 0 und 1 sind, so lassen sich die Integrale vereinigen. Es folgt so

$$\int\limits_{2r}^{2r+2} f(w)\,dw=\int\limits_0^1 [f(2r+u)+f(2r+2-u)]\,du.$$

Die Gleichung 3) wird hierdurch

$$\int\limits_0^\infty f(v)\,dv=\sum_{r=0}^{r=\infty}\int\limits_0^1 [f(2r+u)+f(2r+2-u)]\,du$$

oder auch

$$4)\quad \int\limits_0^\infty f(v)\,dv=\int\limits_0^1\left[f(u)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\{f(2n+u)+f(2n-u)\}\right]du.$$

Diese Gleichung, mit den Gleichungen 1) und 2) combinirt, führt leicht zu einigen allgemeinen Resultaten.

Nimmt man

$$f(v)=\frac{a\,\varphi(\cos\pi v)}{a^2+v^2},$$

so ist nach 1)

$$f(u)+\sum\{f(2n+u)+f(2n-u)\}$$
$$=\varphi(\cos\pi u).\left[\frac{a}{a^2+u^2}+\sum\left\{\frac{a}{a^2+(2n+u)^2}+\frac{a}{a^2+(2n-u)^2}\right\}\right]$$
$$=\pi\,\varphi(\cos\pi u).\left[\tfrac{1}{2}+\sum e^{-na\pi}\cos nu\pi\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\,\varphi(\cos\pi u).\frac{1-e^{-2a\pi}}{1-2e^{-a\pi}\cos u\pi+e^{-2a\pi}}.$$

Für die obige Annahme für $f(v)$ giebt die Gleichung 4)

$$5)\quad \int\limits_0^\infty \frac{a\,\varphi(\cos\pi v)}{a^2+v^2}\,dv=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1\varphi(\cos\pi u)\frac{1-e^{-2a\pi}}{1-2e^{-a\pi}\cos u\pi+e^{-2a\pi}}\,du$$
$$=\pi\int\limits_0^1\varphi(\cos\pi u)\left[\tfrac{1}{2}+\sum e^{-na\pi}\cos nu\pi\right]du.$$

Man setze im Integral links $v=aw$, im Integral rechts $\pi u=x$. Wird ferner zur Vereinfachung $a\pi=b$ gesetzt, so vereinfacht sich die Gleichung 5) in folgende:

$$6)\quad \int\limits_0^\infty\frac{\varphi(\cos bw)}{1+w^2}\,dw=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi\varphi(\cos x)\frac{1-e^{-2b}}{1-2e^{-b}\cos x+e^{-2b}}\,dx$$
$$=\int\limits_0^\pi\varphi(\cos x)\left[\tfrac{1}{2}+\sum e^{-nb}\cos nx\right]dx.$$

Wendet man rechts das von Jacobi (Crelle's Journ. T. XV, S. 3) aufgestellte Theorem

$$\int\limits_0^\pi\varphi(\cos x)\cos nx\,dx=\frac{1}{1.3\ldots(2n-1)}\int\limits_0^\pi\varphi^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx$$

an, so erhält man aus der Gleichung 9) die bemerkenswerthe Relation

$$7)\quad \int\limits_0^\infty\frac{\varphi(\cos bw)}{1+w^2}\,dw=\tfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi\varphi(\cos x)\,dx$$
$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-nb}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int\limits_0^\pi\varphi^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx.$$

Zu ähnlichen Gleichungen, wie die Gleichungen 5) und 6), giebt die Annahme

$$8)\quad f(v)=\frac{v\,\varphi(\sin\pi v)}{a^2+v^2}$$

Veranlassung, wenn $\varphi(z)$ eine ungerade Function von z, also $\varphi(-z) = -\varphi(z)$ ist. Setzt man den Werth von $f(v)$ aus 8) in 4) ein, so folgt nach 2)

$$
9)\quad \begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{v\,\varphi(\sin\pi v)}{a^2+v^2}\,dv &= \pi\int_0^1 \varphi(\sin\pi u)\,\frac{e^{-a\pi}\sin u\pi}{1-2e^{-a\pi}\cos u\pi + e^{-2a\pi}}\,du \\
&= \pi\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-na\pi}\int_0^1 \varphi(\sin\pi u)\sin n u\pi\,du.
\end{aligned}
$$

Führt man wieder links w statt v durch $v = aw$ ein, setzt ferner rechts $\pi u = x$ und zur Vereinfachung $a\pi = b$, so giebt die Gleichung 9)

$$
10)\quad \begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{w\,\varphi(\sin bw)}{1+w^2}\,dw &= \int_0^\pi \varphi(\sin x)\,\frac{e^{-b}\sin x}{1-2e^{-b}\cos x + e^{-2b}}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nb}\int_0^\pi \varphi(\sin x)\sin n x\,dx.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung 10) lässt sich auch aus der Gleichung 6) durch Differentiation nach b herleiten. Es ist dann rechts durch partielle Integration folgende Umformung auszuführen:

$$
\int_0^\pi \varphi(\cos x)\,n\cos n x\,dx = \int_0^\pi \varphi(\cos x)\,\frac{d\sin n x}{dx}\,dx = \int_0^\pi \varphi'(\cos x)\sin x\sin n x\,dx.
$$

Setzt man darauf einfach $\varphi(\sin x)$ statt $\varphi'(\cos x)\sin x = \varphi'(\sqrt{1-\sin^2 x}) \times \sin x$, so ergiebt sich wieder die Gleichung 10).

Es ist im Vorhergehenden stillschweigend angenommen, dass die Functionen, welche unter den Integralzeichen vorkommen, innerhalb der jedesmaligen Integrationsgrenzen endlich und stetig bleiben.

Die Gleichung 9) giebt noch zu dem besondern Falle $a = 0$ Veranlassung, wobei natürlich die Entwickelung nach Potenzen von $e^{-a\pi}$ wegfällt. Es ist dann

$$
\int_0^\infty \frac{\varphi(\sin\pi v)}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \varphi(\sin\pi u)\,\frac{\cos\frac{u\pi}{2}}{\sin\frac{u\pi}{2}}\,du
$$

oder, links $\pi v = w$, rechts $\pi u = x$ gesetzt,

$$11)\qquad \int_0^\infty \frac{\varphi(\sin w)}{w}\,dw = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(\sin x)\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

Das Integral rechts zerlege man in zwei Integrale mit den Grenzen $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Darauf setze man im ersten dieser Integrale $x = z$, im zweiten $x = \pi - z$. Die Gleichung 11) geht dann über in

$$12)\qquad \int_0^\infty \frac{\varphi(\sin w)}{w}\,dw = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin z)\left[\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} + \frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{z}{2}}\right]dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(\sin z)}{\sin z}\,dz.$$

Um nur eine Anwendung der obigen allgemeinen Gleichungen zu erwähnen, nehme man in 6)

$$13)\qquad \varphi(\cos x) = e^{q\cos x}\cos(q\sin x).$$

Man findet dann leicht

$$14)\qquad \frac{d^m\varphi(\cos x)}{dq^m} = e^{q\cos x}\cos(mx + q\sin x).$$

Es sei nun

$$15)\qquad F(q) = \int_0^\pi e^{q\cos x}\cos(q\sin x)\cos nx\,dx.$$

Differenzirt man m-mal nach q und setzt dann $q = 0$, so folgt nach 13) und 14)

$$F^{(m)}(0) = \int_0^\pi \cos mx\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & m \gtrless n, \\ \frac{\pi}{2} & m = n. \end{cases}$$

Entwickelt man also nach dem Satze von Maclaurin $F(q)$ nach Potenzen von q, so ist wegen der vorstehenden Gleichung

$$F(q) = \frac{q^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(0) = \frac{q^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2}.*$$

---

* Für den Fall, dass $n = 0$, ist in 15) $F^{(m)}(0) = 0$, ausgenommen $m = 0$. Es ist $F(0) = \pi$, also $F(q) = F(0) = \pi$.

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 21) giebt

$$\int_0^\pi e^{q\cos x}\cos(q\sin x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{q^n}{1.2\ldots n}.$$

Setzt man also in 6) den Werth von $\varphi(\cos x)$ aus 13), so giebt diese Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{e^{q\cos bw}\cos(q\sin bw)}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n e^{-nb}}{1.2\ldots n}\right] = \frac{\pi}{2}e^{qe^{-b}}.$$

II. Im „*Journal des Mathématiques*“ finden sich *t. XIX* (2ᵉ *série, Année* 1874) einige bestimmte Integrale ohne Beweis aufgestellt, welche sich auf ziemlich einfache Art herleiten lassen.

Es sei $a<1$, die Gleichung

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = \sin y \tag{16}$$

giebt

$$\cos x = a\sin^2 y \pm \cos y\,.\sqrt{1-a^2\sin^2 y} \tag{17}$$

und

$$\sqrt{1-2a\cos x+a^2} = \sqrt{1-a^2\sin^2 y} \pm a\cos y.$$

Die vorstehende Gleichung differentiirt und durch a dividirt giebt

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\,\frac{dx}{dy} = \frac{-a\sin y\cos y}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}} \mp \sin y.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die Gleichung 16), so folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-a\cos y}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}} \pm 1.$$

Die Maxima und Minima von $\frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}$ ergeben sich aus

$$\cos x.(1-2a\cos x+a^2) - a\sin^2 x = (\cos x - a)(1-a\cos x) = 0.$$

Da $a<1$, so ist $\cos x = a$ zu nehmen, welchem Werthe von $\cos x$ ein Maximum des obigen Ausdruckes entspricht. Für $\cos x = a$ ist nach 16) $\sin y = 1$, also $y = \frac{\pi}{2}$. Dem Intervalle von $x=0$ bis $\cos x = a$ entspricht aus 17) die Wurzel

$$\cos x = a\sin^2 y + \cos y.\sqrt{1-a^2\sin^2 y},$$

dann sind 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Grenzen von y. Dem Intervall von $\cos x = a$ bis $x=\pi$ von x entspricht aus 17) die Wurzel

$$\cos x = a\sin^2 y - \cos y\sqrt{1-a^2\sin^2 y},$$

es sind dann $\frac{\pi}{2}$ und 0 die Grenzen von y. Setzt man also

$$\int_0^\pi H\,dx = \int_0^a H\,dx + \int_a^\pi H\,dx,$$

wo

$$H = \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x + a^2}\right),$$

so findet man mittels der Gleichungen 17) und 18)

$$\int_0^\pi \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 y)\left[\frac{-a\cos y}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}}+1\right]dy$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \varphi(\sin^2 y)\left[\frac{-a\cos y}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}}-1\right]dy$$

oder einfach

$$19)\qquad \int_0^\pi \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 y)\,dy.$$

Für $a=\frac{1}{b}$, wo $b>1$, giebt die vorstehende Gleichung

$$\int_0^\pi \varphi\left(\frac{b^2\sin^2 x}{1-2b\cos x+b^2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin^2 y)\,dy$$

oder, $\varphi(z)=\psi\left(\frac{z}{b^2}\right)$ gesetzt,

$$\int_0^\pi \psi\left(\frac{\sin^2 x}{1-2b\cos x+b^2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi\left(\frac{\sin^2 y}{b^2}\right)dy.$$

Nimmt man wieder φ statt ψ und a statt b, so folgt für $a>1$ die Gleichung

$$20)\qquad \int_0^\pi \varphi\left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(\frac{\sin^2 y}{a^2}\right)dy.$$

Die in 19) und 20) enthaltenen Relationen rühren von Liouville her (*l. c.* S. 55).

Auf S. 423 findet sich folgendes Resultat von Besge angemerkt.

Es sei a eine positive oder negative Quantität, dem absoluten Werthe nach kleiner wie die Einheit, ferner sei die Function $f(t)$ nach Potenzen von t entwickelbar, dann ist

$$21)\quad \int_0^\pi \frac{f(e^{xi})+f(e^{-xi})}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\,dx = 2\int_0^\pi \frac{f(a\sin^2 x)}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}\,dx.$$

Setzt man

$$\frac{f(e^{xi})+f(e^{-xi})}{2} = f(0)+\frac{\cos x}{1}f'(0)+\frac{\cos 2x}{1.2}f''(0)+\ldots$$

und legt die Gleichung (Jacobi in Crelle's Journal T. XV, S. 7)

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\,dx = a^n\int_0^\pi \frac{(\sin x)^{2n}}{\sqrt{1-a^2\sin 2x}}\,dx$$

zu Grunde, so erhält man unmittelbar die Gleichung 21). Nimmt man in 21) $a=\frac{1}{b}$, wo $b>1$, dividirt auf beiden Seiten durch b, so folgt, wenn rechts $\sin x = b\sin z$ gesetzt wird,

$$\int_0^\pi \frac{f(e^{xi})+f(e^{-xi})}{\sqrt{1-2b\cos x+b^2}}\,dx = 2\int_0^\pi \frac{f(b\sin^2 z)}{\sqrt{1-b^2\sin^2 z}}\,dz.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 21) auch für $a>1$ giltig ist.

Bei dieser Gelegenheit sei eine Relation zwischen zwei Integralen angemerkt, welche unmittelbar Folge einer häufig behandelten Substitution ist.

Es seien a und b reelle, positive Quantitäten. Die Wurzeln der Gleichung

$$ax+\frac{b}{x}=z$$

bezeichne man durch x_1 und x_2, so dass also

$$x_1+x_2=\frac{z}{a},\quad x_1x_2=\frac{b}{a}.$$

Die Gleichung zwischen x und z giebt dann

$$\int_0^\infty \varphi\left(ax+\frac{b}{x}\right)f(x)\,dx = \int_{2\sqrt{ab}}^\infty \varphi(z)\,\frac{x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)}{\sqrt{z^2-4ab}}\,dz.$$

Macht man für $f(x)$ eine der Annahmen $\frac{1}{x}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $\frac{\log x}{x}$, so ergeben sich leicht einige bekannte Resultate.

Göttingen. Prof. Enneper.

Aufruf

zur

Errichtung eines Standbildes für Carl Friedrich Gauss.

Am 30. April 1777 ist **Carl Friedrich Gauss**, der Fürst der Mathematiker, in der Stadt Braunschweig geboren. Die Pflege der Mathematik, dieser ältesten, sich ewig verjüngenden Wissenschaft, lag in unserem deutschen Vaterlande, das einen Copernicus, Keppler, Leibnitz hervorgebracht hatte, gegen Ende des vorigen Jahrhunderts fast ganz darnieder, als Gauss im Alter von 24 Jahren durch sein unsterbliches Werk, die *Disquisitiones arithmeticae*, den Ruhm der deutschen Wissenschaft auf diesem Felde wiederherstellte und zugleich in die Reihe der grössten Denker aller Völker und Zeiten eintrat. Den so errungenen Platz des ersten Mathematikers hat Gauss durch eine Reihe der tiefsinnigsten Werke, wunderbar reich an glänzenden Entdeckungen und unübertrefflich hinsichtlich der Strenge der Methoden, bis an sein Lebensende behauptet. Seine Schöpfungen haben ein neues Zeitalter in der Mathematik, der Astronomie und der Physik begründet, und unübersehbar sind die Verzweigungen, durch welche seine Geistesarbeit in die verwandten Wissenschaften und durch manche Zwischenstufen hindurch endlich in unser tägliches Leben eingegriffen hat. Mit seinem jüngeren Freunde Wilhelm Weber hat er thatsächlich den ersten elektrischen Telegraphen hergestellt und zu den Diensten gezwungen, welche das lebende Geschlecht mit dankbarer Bewunderung erfüllen.

In Erinnerung jenes denkwürdigen Tages, dessen hundertste Wiederkehr demnächst bevorsteht, blickt das Auge der gebildeten Welt auch auf die Stätte, von welcher aus diese geistige Sonne ihren Lauf begonnen hat. In der Stadt Braunschweig befindet sich noch das unscheinbare, mit einer Gedenktafel versehene Haus, in welchem Gauss geboren wurde; hier erregten schon die Alles überragenden Geistesgaben des Knaben die allgemeine Aufmerksamkeit, hier fand der in beschränkten, kleinbürgerlichen Verhältnissen heranwachsende Jüngling in dem Herzog Carl Wilhelm Ferdinand einen verständnissvollen hochherzigen Förderer seines Strebens, einen väterlichen Freund, der, die kleinlichen Lebenssorgen abwendend, die freie Entfaltung seiner reichen Anlagen in den für die geistige Entwickelung wichtigsten Lebensjahren ermöglichte. Die *Disquisitiones arithmeticae*, welche hier vollendet und von hier aus mit Unterstützung des Herzogs veröffentlicht wurden, sind diesem voll Dankbarkeit gewidmet. Erst der Heldentod des Fürsten zerstörte das schöne Verhältniss, welches Gauss am engsten mit seiner Vaterstadt verknüpfte; im darauf folgenden Jahre, dem einunddreissigsten seines Lebens, folgte er einem Rufe der Universität Göttingen. Stets aber bewahrte er der ersten Heimath, dem Ausgangspunkte seiner Ruhmeslaufbahn, der Stätte, an welcher er durch die Berechnung der Ceresbahn seinen Weltruf begründet hatte, ein Andenken voll aufrichtiger Pietät.

Die Stadt Braunschweig gedenkt den hundertjährigen Geburtstag ihres berühmten Sohnes feierlich zu begehen. Um sein Andenken zu ehren, haben sich Bewohner der Stadt vereinigt und das unterzeichnete Comité beauftragt, für die Herstellung eines Standbildes zu wirken, welches die hohe Gestalt des grossen Denkers den Nachkommen überliefern soll. Wir wenden uns vertrauensvoll an alle Bewunderer von Carl Friedrich Gauss und fordern sie auf, sich an unserem Unternehmen zu betheiligen, in der sichern Hoffnung, schon am Tage der Säcularfeier den Grundstein zu dem Denkmale legen zu können.

Beiträge zu dessen Herstellung bitten wir an die Braunschweigische Bank, sonstige Mittheilungen unter der Adresse des unterzeichneten Comités abzusenden.

Braunschweig, im December 1876.

Das Comité für Herstellung eines Gauss-Standbildes.

Der Ehrenpräsident: Dr. jur. **Trieps**, Wirkl. Geheimrath. Der Vorsitzende: Dr. jur. **Caspari**, Oberbürgermstr.

Bode, Handelsgerichtsdirector. Dr. phil. **Dedekind**, Professor. **Gebhard**, Stadtrath. **Gebhard**, Oberlehrer. **Griepenkerl**, Kammerdirector. **Grotrian**, Geh. Kammerrath. **Howaldt**, Professor. **J. Landauer. Meyer**, Polizeidirector. **Otto**, Landsyndicus. **Rittmeyer**, Stadtrath. Dr. phil. **Scheffler**, Oberbaurath. **Schottelius**, Ober-Postdirector. Dr. phil. **Sommer**, Director des Collegii Carolini und Professor. **Theodor Steinway. Tappe**, Stadtbaurath. **Uhde**, Professor. **G. Westermann**, Commerzienrath.

IX.

Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes.

Von

H. A. Lorentz.

Zweite Mittheilung.

§ 1. In einer früheren Mittheilung* habe ich, mit Zugrundelegung der Maxwell'schen Hypothese über die Natur der Lichtschwingungen, die Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes an nichtleitenden Körpern behandelt. Es wurde dabei immer vorausgesetzt, dass auch gebrochene Wellen entstehen. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, da bekanntlich das Licht total reflectirt werden kann, und ich werde jetzt untersuchen, wie sich in diesem Falle der Vorgang der Reflexion gestaltet. Dabei werde ich mich auf isotrope Medien beschränken.

In § 19 der erwähnten Mittheilung sind Bewegungszustände untersucht worden, welche sowohl den Bewegungsgleichungen der Elektricität in den beiden Medien, als auch den Bedingungen, welche an der Grenzebene derselben (der yz-Ebene) gelten, genügen. War das Licht z. B. in der Einfallsebene polarisirt, so konnte man für die einfallende, reflectirte und gebrochene Bewegung der Reihe nach setzen

$$\eta_0 = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right),$$

$$\eta = a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right),$$

$$\eta' = a'\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'}\cos\alpha' - \frac{z}{\mathrm{v}'}\sin\alpha' + \mathrm{p}\right),$$

während $a = -\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}$, $a' = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'}(1+a)$ war.

---

* Diese Zeitschrift, Bd. XXII S. 1.

Es sei nun der Brechungsexponent $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}'} = \frac{1}{n}$, so dass $\sin\alpha' = n \sin\alpha$ gesetzt werden kann. Ist dann $n > 1$, so findet totale Reflexion statt, sobald $\sin\alpha > \frac{1}{n}$ wird. In diesem Falle wird $\sin\alpha' > 1$ und $\cos\alpha'$ imaginär, nämlich $\cos\alpha' = i\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}$. Dennoch werden obige Ausdrücke noch immer den Bewegungsgleichungen und den Grenzbedingungen genügen, wenn man nur die allgemein giltigen Sätze über complexe Grössen berücksichtigt.

Den Werthen von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ zufolge werden zunächst a und a' complexe Grössen; wir setzen also

1) $$a = b + ci, \quad a' = b' + c'i,$$

wo b, c, b', c' reell sind. Während nun die Gleichung für das einfallende Licht ungeändert bleibt, hat man für das reflectirte Licht zu schreiben

2) $$\eta = (b + ci) \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}} \cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right)$$

und für das gebrochene Licht

$$\eta' = (b' + c'i) \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'} \sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}\,.\,i - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right)$$

oder, wenn man $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right) = \chi$ und $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{\mathrm{v}'} \sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1} = r$ setzt,

3) $$\begin{aligned} \eta' = {} & \tfrac{1}{2}\{b'(e^{rx} + e^{-rx}) \cos\chi - c'(e^{rx} - e^{-rx}) \sin\chi\} \\ & + i\,.\,\tfrac{1}{2}\{b'(e^{rx} - e^{-rx}) \sin\chi + c'(e^{rx} + e^{-rx}) \cos\chi\}. \end{aligned}$$

Die Werthe von η_0, η und η' nebst den zugehörigen Werthen der magnetischen Kraft, welche leicht anzugeben sind, bilden noch immer eine Lösung der Gleichungen des Problems. Nun sind aber sowohl die Bewegungsgleichungen, als auch die Grenzbedingungen linear und homogen in Bezug auf die Functionen ξ, η, ζ, L, M, N, φ und ihre Differentialquotienten. Daraus geht hervor, dass, wenn eine Lösung dieser Gleichungen aus einem System complexer Grössen besteht, auch die reellen oder imaginären Theile für sich den Gleichungen genügen werden. Wir erhalten in dieser Weise zwei Lösungen, nämlich

a) $$\left\{\begin{aligned} \eta_0 &= \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}} \cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right), \\ \eta &= b \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}} \cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right), \\ \eta' &= \tfrac{1}{2}\Big\{b'(e^{rx} + e^{-rx}) \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right) \\ &\qquad - c'(e^{rx} - e^{-rx}) \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right)\Big\} \end{aligned}\right.$$

und

$$
\text{b)}\quad \begin{cases} \eta_0 = 0, \\ \eta = c \cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right), \\ \eta' = \frac{1}{2}\Big\{b'(e^{rx} - e^{-rx})\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right) \\ \qquad + c'(e^{rx} + e^{-rx})\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right)\Big\}. \end{cases}
$$

In dem zweiten System ist hierbei an die Stelle von p eine andere Grösse p′ gesetzt, was natürlich erlaubt ist.

Aus den particulären Lösungen a) und b) lassen sich beliebig viele andere Lösungen ableiten. Ist aber das einfallende Licht, also η_0 gegeben, so darf man nur noch die Werthe b), mit einer willkürlichen Constante C multiplicirt, zu den Werthen a) addiren. Um nun zu entscheiden, welche der verschiedenen Lösungen, die man in dieser Weise erhält, mit der Wirklichkeit übereinstimmt, bemerken wir, dass, bei dem Uebergange des Lichtes aus dem ersten in das zweite Medium, in letzterem jedenfalls kein Schwingungszustand entstehen kann, wobei die Amplitude bei wachsender Entfernung von der Grenze immer grösser wird. Da nun im zweiten Medium x positiv ist, müssen dann alle Glieder, welche e^{rx} enthalten, verschwinden, und dies ist nur möglich, wenn $p' = p - \frac{1}{4}T$ und $C = 1$ gesetzt wird. Dadurch finden wir für die reflectirten und gebrochenen Schwingungen

$$
\text{4)}\quad \begin{aligned} \eta &= b\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right) \\ &\quad + c\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right), \end{aligned}
$$

$$
\text{5)}\quad \eta' = b'e^{-rx}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right) + c'e^{-rx}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right).
$$

Von diesen Gleichungen stimmt wirklich die erste mit den von Fresnel abgeleiteten Resultaten überein. Die zweite aber zeigt, dass zwar im zweiten Medium kein gebrochenes Lichtbündel auftritt, dass aber dennoch auch in dieses Medium die Lichtbewegung eindringt, aber mit stark abnehmender Amplitude. Denn wenn l die Wellenlänge im zweiten Medium ist, hat man $rx = 2\pi\frac{x}{l}\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$ und man ersieht hieraus, dass nur dort, wo x einer geringen Anzahl von Wellenlängen gleich ist, η' einen merklichen Werth haben kann.

In ganz gleicher Weise lässt sich auch der Fall behandeln, dass das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist; man erhält dabei ähnliche Gleichungen wie oben.

Die hier abgeleiteten Resultate stimmen im Wesentlichen überein mit denjenigen, welche Eisenlohr im 104. Bande von Pogg. Ann. (S. 350 und 360) entwickelt hat.

§ 2. Die Untersuchung der totalen Reflexion hat uns nun zu einem Bewegungszustande im zweiten Medium geführt, der völlig verschieden ist von der gewöhnlich auftretenden Wellenbewegung. Es können in einem Problem mehrere dieser Bewegungszustände zu gleicher Zeit vorkommen. Es kann z. B. die eingedrungene Bewegung durch ein drittes Medium — dessen Grenzfläche mit dem zweiten der ersten Grenzfläche parallel ist — gestört werden und zu einer ähnlichen reflectirten Bewegung Anlass geben. Letztere kann dann wieder bei Entfernung von der spiegelnden Fläche nicht immer intensiver werden, so dass in den Ausdrücken für dieselbe keine Factoren wie e^{-rx} auftreten dürfen.

Die Lösung von Problemen dieser Art wird einfacher, wenn man von einer andern particulären Lösung der Bewegungsgleichungen ausgeht. Bisher stellte diese immer unmittelbar ein polarisirtes Lichtbündel mit ebenen Wellen vor. War z. B. das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so setzten wir für irgend einen der Bewegungszustände (vergl. erste Mittheilung, § 19)

$$6)\qquad \eta = a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha-\frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha+\mathrm{p}\right),$$
$$L = 4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha.\eta,\quad N = -4\pi A\mathrm{v}\cos\alpha.\eta,$$

wobei α für eine einfallende oder durchgelassene Bewegung spitz, für eine reflectirte aber stumpf war. An die Stelle von 6) wollen wir nun complexe Grössen setzen, wobei die goniometrische Function durch eine exponentiale ersetzt ist, und zwar so, dass man 6) erhält, wenn man nur die reellen Theile nimmt. Diesen Anforderungen wird durch folgende Grössen genügt:

$$7)\qquad [\eta] = a e^{\pm i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha-\frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha+\mathrm{p}\right)},$$
$$[L] = 4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha.[\eta],\quad [N] = -4\pi A\mathrm{v}\cos\alpha.[\eta],$$

wodurch, wie man leicht findet, die Bewegungsgleichungen ebensowohl befriedigt werden, wie durch 6). Man kann nun bei irgend einem Problem zunächst für jedes Lichtbündel Ausdrücke wie 7) nehmen, darin Alles so bestimmen, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden, und schliesslich überall nur die reellen Theile nehmen. Es kann nun, wie wir sahen, für ein Lichtbündel $\cos\alpha$ imaginär werden, und zwar kann diese Grösse für ein gebrochenes Bündel die Gestalt ki, für ein reflectirtes die Gestalt $-ki$ annehmen, wenn k positiv ist. Im ersten Falle erscheint dann im reellen Theile von 7) ein Factor wie $e^{\pm rx}$, im zweiten Falle ein Factor $e^{\mp rx}$ (r positiv). Die Bedingung, dass die Amplitude bei wachsender Entfernung von der brechenden oder reflectirenden Fläche nicht immer zunehmen darf, wird also jedenfalls erfüllt, wenn man in 7) das untere Zeichen nimmt.

Wir werden im Folgenden die symbolischen Werthe wie 7) durch die Klammern [] von den wirklichen Werthen unterscheiden, welche man erhält, wenn man von den symbolischen Werthen nur den reellen Theil nimmt.

Mittelst des hier geschilderten Verfahrens lassen sich nun die partielle und die totale Reflexion in ganz gleicher Weise behandeln. Man wähle nämlich für die verschiedenen Lichtbündel Ausdrücke wie 7), bestimme dann a und a' aus den Grenzbedingungen und nehme endlich nur die reellen Theile. Ist dabei $\cos a'$ reell, so gelangt man zu den in der ersten Mittheilung entwickelten Resultaten, im Gegenfalle zu den Gleichungen für die totale Reflexion. Es versteht sich von selbst, dass diese Methode auch für den Fall anwendbar ist, dass das Licht eine zur Einfallsebene senkrechte Polarisation hat.

§ 3. Da die Genauigkeit der Fresnel'schen Formeln für das total reflectirte Licht durch die Versuche von Jamin und Quincke bestätigt worden ist, haben wir nur noch zu untersuchen, ob auch die Ergebnisse der Theorie für das bei der totalen Reflexion ins zweite Medium eindringende Licht mit den Beobachtungen im Einklange stehen. Dass wirklich dieses Eindringen stattfindet, hat bereits Newton durch folgenden bekannten Versuch nachgewiesen. Es werden zwei gleichschenklige, rechtwinklige Glasprismen, von welchen das eine eine leicht convex gewölbte Hypotenusenfläche hat, mit den Hypotenusenflächen aneinander gedrückt. Lässt man dann ein Lichtbündel auf die eine Kathetenfläche des ersten Prismas fallen, so wird das eingedrungene Licht durch die Hypotenusenfläche reflectirt und tritt durch die andere Kathetenfläche aus. Ist nun bei der inneren Reflexion der Einfallswinkel grösser als der Grenzwinkel, so wird dennoch an der Stelle, wo der Abstand der beiden Prismen am kleinsten ist, das Licht nur partiell reflectirt und auch theilweise durchgelassen. Sieht man also gegen diese Stelle hin, so erscheint sie im reflectirten Licht dunkel in der Mitte der hell glänzenden Hypotenusenfläche, im durchgelassenen Lichte dagegen hell auf dunklem Grunde. Es geht daraus hervor, dass auch bei den Einfallswinkeln der totalen Reflexion die Lichtbewegung eine sehr dünne Luftschicht durchsetzen und so in das zweite Glasstück übergehen kann.

Quincke hat diese Erscheinung zum Gegenstande ausführlicher Untersuchungen gemacht. In einer ersten Versuchsreihe* bestimmte er die grösste Tiefe, bis zu welcher das Licht bei der totalen Reflexion einzudringen vermag, und welche durch den Abstand der beiden Prismenflächen am Rande des erwähnten hellen oder dunklen Fleckes gegeben wird. Da dieser Abstand von der Intensität des einfallenden Lichtes abhängt, besteht der Werth dieser Messungen für unsere Theorie nicht in den absoluten Zahlenwerthen, welche sie ergeben, sondern vielmehr

* Pogg. Ann. 127, S. 1.

darin, dass sie angeben, welchen Einfluss verschiedene Umstände auf das Phänomen haben. Hierüber fand nun Quincke Folgendes:

a) die Tiefe, bis zu welcher das Licht eindringt, nimmt mit wachsendem Einfallswinkel ab;

b) bei Einfallswinkeln, welche den Grenzwinkel nur wenig übersteigen, breitet sich das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht, bei grösseren Einfallswinkeln das in dieser Ebene polarisirte am weitesten in das zweite Medium aus;

c) die erwähnte Tiefe nimmt mit wachsender Wellenlänge zu. Demzufolge erscheint der Rand des centralen Fleckens im reflectirten Lichte violett, im durchgelassenen Lichte röthlich gefärbt;

d) bringt man zwischen die Prismen einen andern durchsichtigen Stoff (Wasser, Terpentin), der weniger lichtbrechend als das Glas ist, so dringt das Licht hierin um so tiefer ein, je mehr sich der Brechungsexponent dieses Stoffes dem des Glases nähert.

§ 4. Die Erklärung des beschriebenen Versuches ergiebt sich aus der Betrachtung der wiederholten Reflexionen, welche die Lichtbewegung an den Hypotenusenflächen der beiden Prismen erleidet. Dies ist bereits von Stokes gezeigt worden.* Da indess dieser Physiker über keine genauen Messungen zu verfügen hatte, möge eine eingehendere Prüfung der Theorie an den späteren Versuchen von Quincke hier eine Stelle finden. Dies erscheint um so weniger überflüssig, als nicht jede Theorie hier zu den nämlichen Resultaten führt. Denn es würden nach der älteren Undulationstheorie auch die Longitudinalschwingungen, welche man in die Rechnung aufnehmen muss, eine Rolle spielen können, während nach der Maxwell'schen Theorie solche Schwingungen nicht auftreten.

Man denke sich eine dünne Schicht eines durchsichtigen Mediums, zu beiden Seiten begrenzt durch die nämliche Glassorte mit dem Brechungsexponenten n (>1) gegen den zwischenliegenden Stoff. Es sei dabei für die erste Grenzfläche $x=0$, für die zweite $x=d$, also d die Dicke der Schicht. Ist weiter der Winkel, den ein Lichtstrahl mit der Normale der Grenzebenen bildet, im Glase α, im zwischenliegenden Medium α', so ist $\sin\alpha' = n \sin\alpha$, welche Gleichung zu einem complexen Werthe von α' führen kann.

Es sei nun für das einfallende Licht im ersten Glasstücke (vgl. § 2)

$$[q_0] = e^{-\iota\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)},$$

wobei mit q_0 die dielektrische Polarisation angedeutet ist. Wir wollen dabei annehmen, es sei das einfallende Licht entweder in, oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt; diese beiden Fälle lassen sich füg-

* *Cambridge Phil. Trans., vol. VIII, part 5, 1848.*

lich zugleich behandeln. Es seien, wenn die Amplitude des einfallenden Lichtes $=1$ ist, die Amplituden des reflectirten und gebrochenen Lichtes a und a' bei dem Uebergange aus Glas in das zwischenliegende Medium, m und m' dagegen beim umgekehrten Uebergang. Man hat dann nach den Formeln der ersten Mittheilung für die beiden Hauptfälle resp.

$$a = -\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad a = \frac{tg(\alpha - \alpha')}{tg(\alpha + \alpha')},$$

während für beide Fälle

8) $$m = -a, \quad a'm' = 1 - a^2$$

ist.

Die einfallende Bewegung spaltet sich an der ersten Grenzfläche ($x=0$) in eine reflectirte und eine durchgelassene Bewegung, bei welcher die dielektrische Polarisation gegeben wird durch die Gleichungen

$$[q_1] = a e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)},$$

$$[r_1] = a' e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'}\cos\alpha' - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)}.$$

Die letzte Bewegung breitet sich gegen die zweite Grenzfläche hin aus und veranlasst dort eine durchgelassene Bewegung im zweiten Glasstücke

$$[q'_1] = a'm' e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right)}$$

und eine reflectirte Bewegung in der Zwischenschicht

$$[r'_1] = a'm e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}'}\cos\alpha' - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}''\right)}.$$

Die Grössen p' und p'' lassen sich hier bestimmen durch die Bedingung, dass an der zweiten Grenzfläche, also für $x=d$, die Exponenten in $[r_1]$, $[q'_1]$ und $[r'_1]$ einander gleich werden müssen. Daraus folgt

$$p' = p - \frac{d}{v'}\cos\alpha' + \frac{d}{v}\cos\alpha, \quad p'' = p - 2\frac{d}{v'}\cos\alpha'.$$

Aus r'_1 entsteht wieder an der ersten Trennungsfläche eine durchgelassene Bewegung q_2 im ersten Glasstücke und ein reflectirter Schwingungszustand r_2 in der Zwischenschicht. Dabei ist

$$[q_2] = a'mm' e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}''\right)}$$

und

9) $$[r_2] = a'm^2 e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'}\cos\alpha' - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}''\right)} = m^2 e^{2i\gamma}[r_1],$$

wenn

10) $$\gamma = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{v'}\cos\alpha' = 2\pi\frac{d}{l}\cos\alpha'$$

gesetzt wird. Es ist hierbei l die Wellenlänge in der dünnen Schicht.

Man muss nun mit r_2 in ganz gleicher Weise verfahren, wie oben mit r_1. Nach 9) müssen aber die symbolischen Ausdrücke für die aus r_2 entstehenden Bewegungen sich von den symbolischen Werthen der aus r_1 entstehenden nur durch den Factor $m^2 e^{2i\gamma}$ unterscheiden. Schreitet man in dieser Weise fort, so erhält man für die totale reflectirte Bewegung im ersten Glasstücke

$$[Q] = [q_1] + [q_2](1 + m^2 e^{2i\gamma} + m^4 e^{4i\gamma} + \ldots) = [q_1] + \frac{[q_2]}{1 - m^2 e^{2i\gamma}}.$$

Man setze nun zur Abkürzung

$$\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right) = \psi;$$

es ist dann $[q_1] = a e^{-i\psi}$, $[q_2] = a' m m' e^{-i(\psi - 2\gamma)}$, und man findet, wenn man 8) berücksichtigt,

A) $$[Q] = a \cdot \frac{1 - e^{2i\gamma}}{1 - a^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi}.$$

Ebenso hat man für die totale durchgelassene Bewegung im zweiten Glasstücke

$$[Q'] = [q'_1](1 + m^2 e^{2i\gamma} + m^4 e^{4i\gamma} + \ldots) = \frac{[q'_1]}{1 - m^2 e^{2i\gamma}}$$

und setzt man hier

$$\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \frac{d}{\mathrm{v}}\cos\alpha + \mathrm{p}\right) = \psi',$$

so wird dies

B) $$[Q'] = \frac{(1 - a^2) e^{i\gamma}}{1 - a^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi'}.$$

Die hier eingeführten Grössen ψ und ψ' sind jederzeit reell und hängen nicht ab von der Lage der Polarisationsebene im einfallenden Lichte.

§ 5. Um aus den symbolischen Ausdrücken A) und B) die wirkliche Lichtbewegung abzuleiten, muss nur der reelle Theil genommen werden. Während man dadurch für kleinere Einfallswinkel auf die bekannten Interferenzphänomene (Newton'sche Ringe) zurückkommt, verhält sich die Sache anders, sobald der Einfallswinkel den Grenzwinkel übersteigt. Dann wird γ imaginär, so dass man setzen kann

11) $$\gamma = i\gamma', \quad \gamma' = 2\pi \frac{d}{l}\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}.$$

Weiter wird a eine complexe Grösse. Setzt man

12) $$a = b + ci,$$

so findet man leicht für die beiden Hauptfälle, dass das Licht in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, resp.

13) $$b = \frac{1 + n^2 \cos 2\alpha}{n^2 - 1}, \qquad c = -\frac{2n\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n^2 - 1},$$

14) $$b = \frac{\cos^2\alpha - n^2(n^2\sin^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha + n^2(n^2\sin^2\alpha - 1)}, \qquad c = -\frac{2n\cos\alpha\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{\cos^2\alpha + n^2(n^2\sin^2\alpha - 1)},$$

woraus für beide Fälle

15) $$b^2 + c^2 = 1$$

folgt.

Setzt man nun in A) und B)

$$a \cdot \frac{1-e^{2i\gamma}}{1-a^2 e^{2i\gamma}} = B + Ci, \quad \frac{(1-a^2)e^{i\gamma}}{1-a^2 e^{2i\gamma}} = D + Ei,$$

so ergiebt eine leichte Rechnung

$$16) \quad B = \frac{b(e^{2\gamma'}-1)^2}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}}, \quad C = \frac{c(e^{2\gamma'}+1)(e^{2\gamma'}-1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}},$$

$$17) \quad D = \frac{2c^2e^{\gamma'}(e^{2\gamma'}+1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}}, \quad E = -\frac{2bce^{\gamma'}(e^{2\gamma'}-1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}}.$$

Hieraus kann man noch ableiten, wenn man 15) berücksichtigt,

$$18) \quad B^2+C^2 = \frac{(e^{2\gamma'}-1)^2}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}}, \quad D^2+E^2 = \frac{4c^2e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'}-1)^2+4c^2e^{2\gamma'}}$$

und

$$19) \quad \frac{E}{D} = -\frac{B}{C}.$$

Die Gleichungen A) und B) werden schliesslich

$$[Q] = (B+Ci)e^{-i\psi}, \quad [Q'] = (D+Ei)e^{-i\psi'},$$

und hieraus folgt für die wirkliche Bewegung

$$20) \quad Q = \sqrt{B^2+C^2}\cos(\psi-\delta), \quad Q' = \sqrt{D^2+E^2}\cos(\psi'-\delta'),$$

wenn man

$$21) \quad \begin{aligned} \sin\delta &= \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}, & \cos\delta &= \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}, \\ \sin\delta' &= \frac{E}{\sqrt{D^2+E^2}}, & \cos\delta' &= \frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}} \end{aligned}$$

setzt. Fügt man diesen Gleichungen noch die Relation 19) hinzu, und beachtet man, dass c negativ ist und folglich E und B gleiche, D und C entgegengesetzte Zeichen haben, so findet man

$$22) \quad \delta' = \delta + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Grössen δ und δ' bestimmen die Phase, die Grössen $\sqrt{B^2+C^2}$ und $\sqrt{D^2+E^2}$ die Amplituden des gespiegelten und durchgelassenen Lichtes.

§ 6. Ueber die letzten Grössen ist zunächst zu bemerken, dass die Quadrate derselben die Intensität der beiden Lichtbündel angeben, auf die des einfallenden Lichtes als Einheit bezogen. Man hat also für diese Intensitäten $J = B^2+C^2$, $J' = D^2+E^2$, und demzufolge nach 18) $J+J' = 1$, was als eine erste Bestätigung der Theorie zu betrachten ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$23) \quad e^{2\gamma'} = q,$$

so ist

$$24) \quad J = \frac{1}{1+4c^2\frac{q}{(q-1)^2}}.$$

Wenn nun die Dicke der Schicht von 0 ab wächst bis zu einem Werthe, der als unendlich gross gegen die Wellenlänge angesehen werden darf, so nimmt nach 11) γ' von 0 bis ∞, also q von 1 bis ∞ zu. Man findet dann leicht, dass J allmälig wächst von 0 bis 1. Zu gleicher Zeit muss dann J' abnehmen von 1 bis 0, und hieraus erklärt sich die Erscheinung des centralen Fleckes bei dem erwähnten Versuche.

Die am Rande des Fleckes beobachtete Färbung ist eine Folge davon, dass für violettes Licht l kleiner und demzufolge bei gleichem d γ', q und J grösser sind als für rothes Licht.* Es muss also das violette Licht am meisten reflectirt, das rothe Licht am meisten durchgelassen werden. Dass diese Färbung besonders am Rande des Fleckes sichtbar sein muss, erklärt sich aus dem Umstande, dass für $d = 0$ J und J' für alle Farben gleich sind.

Ich habe beispielsweise für einige Fälle die Intensität des reflectirten und durchgelassenen Lichtes berechnet. Es ist dabei angenommen worden, dass das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist und dass der Abstand der beiden Glasstücke ein Viertel der Wellenlänge beträgt, welche in der Luft zu der Fraunhofer'schen Linie D gehört. Ich erhielt dann folgende Resultate:

a) Flintglas — Luft — Flintglas:

gelbes Licht (Linie D), $n = 1{,}6160$, Grenzwinkel $= 38^0\,14'$, $\alpha = 45^0$,
$J = 0{,}611$, $J' = 0{,}389$;

b) bei der nämlichen Combination:

blaues Licht (Linie F), $n = 1{,}628$, Grenzwinkel $= 37^0\,54'$, $\alpha = 45^0$,
$J = 0{,}731$, $J' = 0{,}269$.

Die Vergleichung dieser Resultate bestätigt das oben über den Einfluss der Wellenlänge Gesagte.

c) $\alpha = 70^0$, alles Uebrige wie bei *a)*, $J = 0{,}933$, $J' = 0{,}067$.

Dies stimmt überein mit § 3*a*.

d) Flintglas — Terpentin — Flintglas:

gelbes Licht (Linie D), $n = 1{,}0911$, Grenzwinkel $= 66^0\,25'$, $\alpha = 70^0$,
$J = 0{,}279$, $J' = 0{,}721$.

Die Vergleichung von *d)* mit *c)* bestätigt das § 3*d* angegebene Resultat von Quincke.

§ 7. Unter übrigens gleichen Umständen ist die Amplitude und Phase des reflectirten und durchgelassenen Lichtes für die beiden Haupt-

---

* Eigentlich wäre hierbei zu berücksichtigen, dass, zufolge der Dispersion, auch c sich mit der Wellenlänge ändert. Allein diese Aenderung übt jedenfalls auf J einen viel kleineren Einfluss aus, als die von q.

fälle, welche wir in Bezug auf die Polarisation des Lichtes unterschieden haben, nicht die nämliche. Wir wollen nun mittels der Indices p und s andeuten, ob das Licht in oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, so dass z. B. für den ersten Fall die Amplituden und Phasen der beiden entstehenden Lichtbündel mit $\sqrt{B^2_p + C^2_p}$, $\sqrt{D^2_p + E^2_p}$, δ_p, δ'_p bezeichnet werden.

Ist nun das einfallende Licht in beliebiger Weise linear polarisirt, so zeigen, der hervorgehobenen Verschiedenheit zufolge, die reflectirten und durchgelassenen Strahlen elliptische Polarisation. Mittels des Babinet'schen Compensators ist man dann im Stande, im reflectirten Lichte das Amplitudenverhältniss $k = \sqrt{\frac{B^2_s + C^2_s}{B^2_p + C^2_p}}$ und den Phasenunterschied $\delta_s - \delta_p$, und ebenso im durchgelassenen Lichte die Grössen $k' = \sqrt{\frac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p}}$ und $\delta'_s - \delta'_p$ zu bestimmen.

Quincke hat wirklich in verschiedenen Fällen diese Messungen ausgeführt.* Den Phasenunterschied Δ gab er dabei in Viertel-Wellenlängen an, so dass $\Delta = \frac{2}{\pi}(\delta_s - \delta_p)$ und $\Delta' = \frac{2}{\pi}(\delta'_s - \delta'_p)$ ist.

Aus den Gleichungen des § 5 lassen sich Formeln zur Berechnung von k, k', Δ, Δ' ableiten. Zunächst findet man leicht aus 18)

$$k'^2 = \frac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p} = \frac{1 + 4c^2_p \frac{q}{(q-1)^2}}{\frac{c^2_p}{c^2_s} + 4c^2_p \frac{q}{(q-1)^2}}.$$

Es sei nun G der Grenzwinkel der totalen Reflexion $\left(\sin G = \frac{1}{n}\right)$ und H der Polarisationswinkel beim Uebergang aus dem Glase in das zwischenliegende Medium $\left(tg\, H = \frac{1}{n}\right)$, so hat man nach 13) und 14)

$$c_p = -2\frac{n^2}{n^2-1}\cos\alpha\sqrt{\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}, \quad c_s = c_p \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha+H)\sin(\alpha-H)}$$

und dies giebt, wenn noch

$$\tau = 16\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^2 \frac{q}{(q-1)^2}$$

gesetzt wird,

$$25)\quad k'^2 = \frac{1 + \tau\cos^2\alpha\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}{\left[\frac{\sin(\alpha+H)\sin(\alpha-H)}{\sin^2 H}\right]^2 + \tau\cos^2\alpha\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}.$$

---

* Pogg. Ann. 127, S. 199.

Zur Berechnung von q erhält man aus 23) und 11), wenn man

$$4\pi n \frac{d}{l} \log e = s$$

setzt, welche Grösse vom Einfallswinkel unabhängig ist,

$$\log q = s \sqrt{\sin(\alpha + G) \sin(\alpha - G)}.$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 21)

$$\sin \tfrac{1}{2}\pi \Delta' = \sin(\delta'_s - \delta'_p) = \frac{E_s D_p - E_p D_s}{\sqrt{(D^2_p + E^2_p)(D^2_s + E^2_s)}} = k' \frac{E_s D_p - E_p D_s}{D^2_s + E^2_s},$$

worin die Werthe von D_p, D_s, E_p, E_s zu substituiren sind. Nach einiger Umformung findet man hierdurch

$$26) \quad \sin \tfrac{1}{2}\pi \Delta' = -2n^2 \sin^2 \alpha . k' . \frac{q+1}{q-1} . \frac{\cos\alpha \sqrt{\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}}{1 + \tau \cos^2\alpha \sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}.$$

Untersucht man das Licht, welches am äussersten Rande des centralen Fleckes durchgelassen wird, so wird man ohne erheblichen Fehler für k' den Grenzwerth nehmen können, welchem diese Grösse zustrebt bei fortwährend wachsendem Abstande der Glasstücke. Für $d = \infty$ und $\gamma' = \infty$ hat man aber $\tau = 0$, und also für den Fleckenrand

$$27) \qquad k' = \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha + H)\sin(\alpha - H)}.$$

Für das reflectirte Licht will ich nur k angeben. Aus 18) folgt

$$28) \quad k = \sqrt{\frac{B^2_s + C^2_s}{B^2_p + C^2_p}} = \frac{c_p}{c_s}\sqrt{\frac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p}} = \frac{\sin(\alpha+H)\sin(\alpha-H)}{\sin^2 H} k',$$

wobei k' sich auf das bei gleichdicker Zwischenschicht durchgelassene Licht bezieht.

§ 8. Quincke hat zunächst aus seinen Messungen abgeleitet, dass die Grössen Δ und Δ', welche den Phasenunterschied im reflectirten und durchgelassenen Lichte angeben, genau um 2, also um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden sind.

Nach der oben entwickelten Theorie ist $\delta'_p = \delta_p + \frac{1}{2}\pi$, $\delta'_s = \delta_s + \frac{1}{2}\pi$, mithin $\Delta = \Delta'$. Dass nach Quincke diese Grössen nicht gleich, sondern um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden sind, rührt lediglich davon her, dass er den Phasenunterschied im reflectirten Lichte Null nennt, wenn er nach unseren Formeln eine halbe Wellenlänge beträgt.

Lässt man die Dicke der Zwischenschicht fortwährend zunehmen, so nähert sich Δ' dem Werthe, den man bei dem Lichte beobachtet, das den Rand des Fleckes durchsetzt hat; Δ dagegen wird der Phasenunterschied beim gewöhnlichen, total reflectirten Lichte. Diese beiden Werthe müssen folglich gleich sein oder, bei den Angaben von Quincke, um 2 differiren. Auch dies wird durch die Messungen bestätigt, so dass die Theorie in richtiger Weise den Zusammenhang angiebt zwischen Δ beim gewöhnlichen total reflectirten Lichte und Δ' für den Rand des Fleckes. Da nun, wie bekannt, was die erste Grösse betrifft, die Beobachtungen mit der Theorie im Einklange stehen, muss dies auch in Bezug auf die zweite Grösse der Fall sein. Wir haben uns also mit dem Phasenunterschied des am Fleckenrande durchgelassenen Lichtes nicht weiter zu beschäftigen.

Für eine Anzahl Fälle hat Quincke k' gemessen für Licht, das den Rand, und k' und Δ' für Licht, das die Mitte des centralen Fleckes durchsetzt hat. Ich habe aus den Formeln des vorhergehenden Paragraphen diese Grössen für einige Fälle berechnet. Dabei habe ich, was die Mitte des Fleckes betrifft, zunächst aus dem Werthe von k' für den ersten Einfallswinkel $\log s$ berechnet und damit dann die übrigen gesuchten Grössen. Die Resultate dieser Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, deren Nummern mit denen der entsprechenden Tabellen in der Abhandlung von Quincke übereinstimmen.

XIa.

Flintglas — Luft.

$n = 1{,}6160$, $G = 38^0\,14'$, $H = 31^0\,45'$;
$\log s = 0{,}59051$.

α.	Mitte				Rand	
	k'		Δ'		k'	
	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
40° 3′	1,589	1,589	− 0,399	− 0,381	2,049	2,019
41 18	1,507	1,499	− 0,394	− 0,433	1,817	1,745
43 8	1,378	1,352	− 0,470	− 0,492	1,557	1,453
46 52	1,120	1,075	− 0,526	− 0,556	1,132	1,083
51 10	0,883	0,846	− 0,596	− 0,566	0,889	0,839
63 1	0,562	0,538	− 0,463	− 0,447	0,581	0,535

XIIa.

Flintglas — Wasser.

$n = 1{,}2096$, $G = 55^0\,46'$, $H = 39^0\,35'$;
$\log s = 0{,}00930$.

α.	Mitte				Rand	
	k'		Δ'		k'	
	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
56° 2′	1,027	1,027	− 0,063	− 0,063	1,358	1,441
57 13	1,023	1,025	− 0,065	− 0,067	1,359	1,350
63 1	1,013	1,007	− 0,106	− 0,091	1,031	1,046

XIVa.
Crownglas — Luft.

$n = 1,5149$, $G = 41^0\,19'$, $H = 33^0 26'$;
$\log s = 9,52214$.

α.	Mitte k' beobachtet.	Mitte k' berechnet.	Mitte Δ' beobachtet.	Mitte Δ' berechnet.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
42° 22′	1,008	1,008	− 0,047	− 0,054	2,000	2,016
43 41	0,993	1,007	− 0,047	− 0,058	1,663	1,750
45	1,216	1,007	− 0,270	− 0,062	1,394	1,545
49 37	1,031	1,002	− 0	− 0,072	1,077	1,097
58 3	0,968	0,983	− 0,025	− 0,118	0,738	0,729
70 6	0,941	0,895	− 0,117	− 0,199	0,552	0,523

Die Messungen für die Mitte des Fleckes für $\alpha = 45^0$ scheinen hier mit bedeutenden Fehlern behaftet zu sein.

XIIIa.
Flintglas — Terpentin.

$n = 1,0911$, $G = 66^0 25'$, $H = 42^0 30'$.

α.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
66° 49′	1,115	1,175
68 26	1,080	1,118
69 28	1,037	1,085

XVa.
Crownglas — Wasser.

$n = 1,1339$, $G = 61^0 52'$, $H = 41^0 25'$.

α.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
62° 26′	1,220	1,257
64 26	1,137	1,164
71 13	0,957	0,954

Schliesslich hat **Quincke** bei den beiden Flintglasprismen nebst dem durchgelassenen Lichte auch das am nämlichen Punkte der Luftschicht reflectirte Licht untersucht. Da wir bereits über Δ' gesprochen haben, habe ich nur noch k', Δ und k berechnet.

XIc.

Flintglas — Luft.

n, *G* und *H* wie bei XIa.

α.	Durchgelassen				Reflectirt	
	k'		Δ'		k	
	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
38° 50′	1,437	1,389	− 0,237	− 0,300	0,583	0,583
51 10	0,937	0,866	− 0,499	− 0,523	0,960	1,032

Es wurde hierbei zunächst aus dem Werthe von k für den ersten Einfallswinkel die Dicke der Schicht berechnet und dadurch gefunden

$$log\left(4\,\pi\,\frac{d}{l}\right) = 0{,}56288.$$

Im Ganzen genommen scheinen mir die berechneten Werthe in den obigen Tabellen eine befriedigende Uebereinstimmung mit den beobachteten zu zeigen. Zwar sind die Abweichungen etwas grösser als die bei den Versuchen über das gewöhnliche total reflectirte Licht vorkommenden, allein ich glaube dies der grösseren Schwierigkeit der hier betrachteten Messungen zuschreiben zu dürfen.

X.

Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften der ebenen Curven.

Von

F. Schur

in Berlin.

In seiner „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven" hat Cremona versucht, die Eigenschaften der Curven, welche Steiner in seiner Abhandlung „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" ausgesprochen hat, durch rein geometrische Methoden zu beweisen. Die Theorie der Polaren jedoch, welche, wie Cremona selbst sagt, ihm das vorzüglichste Hilfsmittel für seine Untersuchungen geboten, hat er keineswegs durch geometrische Methoden begründet. Diese Betrachtungen beruhen im Gegentheil auf der Umformung algebraischer Ausdrücke. In den folgenden Zeilen soll nun der Versuch gemacht werden, die Polareigenschaften der ebenen Curven auf geometrischem Wege zu begründen. Wenn dieser Versuch auch nicht in dem Grade gelungen ist, dass man mit seiner Hilfe die Theorie der ebenen Curven von Grund aus durch rein geometrische Betrachtungen aufbauen könnte, wenn auch noch einige Fundamentalsätze der Algebra entlehnt werden müssen, so ist doch die Anwendung der Algebra in der Geometrie durch ihn auf ein kleineres Feld eingeschränkt. In diesem Sinne bitte ich die folgenden Untersuchungen aufzunehmen.

Die Methode, deren wir uns zur Ableitung der Polareigenschaften bedienen wollen, ist in der Analysis mit vielem Vortheil angewendet worden. Wir setzen nämlich die Polareigenschaften der Curven n^{ter} Ordnung als bekannt voraus und leiten aus ihnen diejenigen der Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ab. Da nun die Polarentheorie der Curven zweiter Ordnung hinreichend begründet ist (vergl. Steiner, System. Entw.; Schroeter, Theorie der Kegelschnitte; Staudt, Geometrie der Lage etc. etc.), so kennen wir hiernach die Polareigenschaften der Curven dritter Ordnung, vierter Ordnung u. s. f. Nach der Natur der Polareigenschaften der Curven zweiter Ordnung werden wir uns zuerst auf die ersten und letzten Polaren beschränken müssen. Aus ihnen lassen sich aber die anderen Polaren unschwer ableiten.

Ehe ich jedoch zu meinem eigentlichen Thema übergehe, will ich noch einige allgemeinere Eigenschaften der ebenen Curven vorausschicken. Obgleich die Art ihrer Ableitung nicht neu ist, kann ich sie doch an dieser Stelle nicht fortlassen, um deutlich zu zeigen, inwieweit sich meine Untersuchungen auf algebraische Sätze stützen.

I. Folgende drei Fundamentalsätze entlehnen wir der analytischen Geometrie:

1. Durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ von einander unabhängige Punkte geht immer eine und nur eine Curve C_n. Geht durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte mehr als eine C_n, so geht durch diese Punkte eine einfache Unendlichkeit derselben, d. h. durch jeden weiteren Punkt geht immer eine und im Allgemeinen nur eine solche C_n.

2. Eine C_m und eine C_n schneiden sich in $m.n$ Punkten.

3. Sind die Punkte einer Geraden so auf einander bezogen, dass jedem Punkte derselben einmal m Punkte und das andere Mal n Punkte eindeutig entsprechen, so fallen $m+n$ Punkte mit einem ihrer entsprechenden zusammen. Fallen mehr Punkte mit ihren entsprechenden zusammen, so fällt jeder Punkt mit einem seiner entsprechenden zusammen.

II. Aus diesen Sätzen ergeben sich durch rein geometrische Betrachtungen viele allgemeine Eigenschaften der ebenen Curven, von denen wir zunächst die für uns nöthigen ableiten wollen.

1. Durch $\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ Punkte und einen weiteren beliebigen Punkt geht nach I, 1 nur eine C_n. Die sämmtlichen durch $\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ Punkte gehenden C_n bilden daher eine einfache Unendlichkeit. Durch die übrigen $\{n^2-(\frac{1}{2}n(n+3)-1)\}=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkte, die zwei dieser Curven nach I, 2 noch gemein haben, müssen auch alle übrigen gehen, da durch jeden derselben eine einfache Unendlichkeit von Curven C_n gehen muss, die auch durch die gegebenen $\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ Punkte gehen. Sie müssen daher mit den durch die $\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ gegebenen Punkte gehenden C_n identisch sein, da auch diese nur eine einfache Unendlichkeit bilden. Wir sehen daher, dass durch die n^2 Schnittpunkte zweier C_n eine einfache Unendlichkeit von solchen Curven geht. Man nennt diesen Complex ein Curvenbüschel n^{ter} Ordnung. Die n^2 Punkte, durch welche alle Curven des Büschels gehen, heissen die Basispunkte desselben. Ein Büschel n^{ter} Ordnung ist hiernach erstens durch $\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ seiner Basispunkte und zweitens durch zwei der ihm angehörenden Curven bestimmt.

2. Liegen von den n^2 Schnittpunkten zweier C_n $\{np-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\}$ auf einer C_p, so liegen deren noch $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ auf C_p und die übrigen $n(n-p)$ Schnittpunkte auf einer C_{n-p}. Denn unter den übrigen

$n(n-p)+\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Schnittpunkten der beiden C_n giebt es offenbar $n(n-p)$, welche nicht auf C_p liegen. Legen wir nun durch $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)$ dieser Punkte eine C_{n-p}, so enthält die Curve $[C_p+C_{n-p}]$ $\{\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)+np-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\}=\{\frac{1}{2}n(n+3)-1\}$ der Schnittpunkte der beiden C_n, sie muss also nach II, 1 auch alle übrigen enthalten; d. h. es liegen noch $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ dieser Punkte auf C_p und die übrigen auf C_{n-p}.

3. Haben die Büschel (M_n, N_n) und (M'_n, N'_n) eine Curve C_n gemeinsam, so haben auch die Büschel (M_n, N'_n) und (M'_n, N_n), sowie (M_n, M'_n) und (N_n, N'_n) je eine C_n gemeinsam. Fassen wir nämlich die Curven M_n und M'_n zu einer Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung zusammen und ebenso N_n und N'_n, so liegen von den $4n^2$ Schnittpunkten dieser beiden C_{2n} die $2n^2$ Schnittpunkte von resp. M_n und N_n, M'_n und N'_n nach Voraussetzung auf einer C_n; dasselbe muss daher nach II, 2 auch für die übrigen $2n^2$ Schnittpunkte der C_{2n} gelten, d. h. die Schnittpunkte von resp. M_n und N'_n, M'_n und N_n müssen auf einer C_n liegen, *q. e. d.*

4. Sind drei Curven K_n, L_n, M_n gegeben, so kann man drei andere Curven K_n, Λ_n, M_n so finden, dass sie durch einen gegebenen Punkt P gehen und den resp. Büscheln (L_n, M_n), (K_n, M_n), (K_n, L_n) angehören. Nun haben die Büschel (L_n, M_n) und (K_n, M_n) oder, was dasselbe ist, die Büschel (L_n, K_n) und (K_n, Λ_n) die Curve M_n gemeinsam, folglich haben nach II, 3 auch die Büschel (K_n, L_n) und (K_n, Λ_n) eine C_n gemein. Diese ist offenbar M_n, da P im Allgemeinen kein Basispunkt von (K_n, L_n) ist. Die Curven K_n, Λ_n, M_n gehören daher demselben Büschel an. In derselben Weise gehören zu einem zweiten Punkte P' drei Curven K'_n, Λ'_n, M'_n eines Büschels. Nun haben die Büschel (K_n, K'_n) und (Λ_n, Λ'_n) die Curve M_n gemeinsam, folglich haben auch die Büschel (K_n, Λ_n) und (K'_n, Λ'_n) eine Curve C_n gemeinsam. Der Complex der auf diese Weise durch drei Curven und je zwei Punkte eindeutig bestimmten Curven heisst ein Curvennetz n^{ter} Ordnung; alle diese Curven bilden offenbar eine doppelte Unendlichkeit. Durch jeden Punkt gehen die Curven eines Büschels und je zwei solche Büschel haben eine C_n gemeinsam. Offenbar ist ein solches Netz auch bestimmt durch zwei Büschel, welche eine C_n gemeinsam haben.

Haben umgekehrt beliebig viel Büschel n^{ter} Ordnung die Eigenschaft, dass je zwei derselben eine C_n gemeinsam haben, jedoch so, dass diese Büschel nicht alle dieselbe Curve gemein haben, so gehören sie demselben Netz an, d. h. sie sind durch zwei derselben, $(K_n L_n)$ und $(K_n M_n)$ in der eben angegebenen Weise bestimmt. Denn ist P ein Basispunkt irgend eines dieser Büschel, $(S_n T_n)$, so gehen durch P nach Voraussetzung zwei Curven, welche $(S_n T_n)$ und resp. $(K_n L_n)$, $(K_n M_n)$ angehören. Durch diese ist aber das Büschel $(S_n T_n)$ bestimmt.

5. Ein Strahlenbüschel S und ein zu ihm projectivisches Curvenbüschel n^{ter} Ordnung erzeugen eine Curve $(n+1)^{ter}$ Ordnung. Denn jedem Schnittpunkte einer beliebigen Geraden G mit einem Strahl C_1 entsprechen n Schnittpunkte von G mit der C_1 entsprechenden C_n, und einem Schnittpunkte von G mit einer Curve C_n entspricht der Schnittpunkt der dieser C_n entsprechenden C_1 mit G. Es müssen daher nach I, 3 auf G $(n+1)$ Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Diese sind offenbar Punkte des Erzeugnisses der beiden Büschel. Da dieses also mit jeder Geraden $(n+1)$ Punkte gemein hat, so ist es eine Curve C_{n+1}. Sie geht offenbar durch die Basispunkte der beiden Büschel und berührt den Strahl C'_1 in S, welcher der durch S gehenden Curve C_n entspricht. Denn irgend ein anderer durch S gehender Strahl schneidet die C_{n+1} in S und den Punkten, in denen er von der ihm entsprechenden C_n geschnitten wird. Fällt daher dieser Strahl mit C'_1 zusammen, so fällt einer dieser Punkte mit S zusammen.

6. Ist S ein Punkt einer Curve C_{n+1}, so lassen sich auf dieser noch $\frac{1}{2}n(n+1)$ Punkte σ willkürlich so wählen, dass sie zu den Basispunkten eines Büschels n^{ter} Ordnung gehören, welches mit einem Strahlenbüschel in S die gegebene Curve C_{n+1} erzeugt. Ziehen wir nämlich durch S einen Strahl C_1, so schneidet dieser die C_{n+1} in noch n Punkten α. Durch diese n Punkte und durch die erwähnten $\frac{1}{2}n(n+1)$ Punkte, also durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte ist eine Curve C_n bestimmt; und zwar nur eine solche Curve, obwohl diese $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte von einander nicht unabhängig sind. Denn gingen durch dieselben zwei Curven C_n, so lägen von den Schnittpunkten zweier C_n die n Punkte α auf einer Geraden; die übrigen, also auch die $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürlich auf C_{n+1} gewählten Punkte σ müssten daher nach II, 2 auf einer Curve C_{n-1} liegen. Eine solche ist aber schon durch $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) = \{\frac{1}{2}n(n+1)-1\}$ Punkte bestimmt, sie kann also nicht durch einen weiteren beliebig auf C_{n+1} gewählten Punkt gehen. Die Curve C_n ist also in der That eindeutig bestimmt. In derselben Weise suchen wir zu einem zweiten Strahle durch S, C'_1, eine Curve C'_n. Diese beiden Curven bestimmen ein Büschel. Zwei Curven desselben, C_n und C'_n, mögen den resp. Strahlen C_1 und C'_1 entsprechen. Ferner entspreche der durch einen Punkt P von C_{n+1} gehenden Curve C''_n dieses Büschels in S der Strahl $SP = C''_1$. Dann ist die projectivische Verwandtschaft zwischen den beiden Büscheln vollständig hergestellt. Diese erzeugen daher nach II, 5 eine C'_{n+1}. Diese ist jedoch mit der gegebenen C_{n+1} identisch. Denn gingen durch die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Punkte σ, die $2n$ Punkte α und α', den Punkt S und P, welche sämmtlich beiden Curven gemeinschaftlich sind, zwei Curven C_{n+1}, so lägen von den Schnittpunkten zweier C_{n+1} die n Punkte α' und der Punkt S auf einer Geraden. Die übrigen Schnittpunkte müssten daher auf einer C_n liegen. Nun bestimmen aber, wie oben gezeigt, die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Punkte

σ und die n Punkte α bereits eine C_n eindeutig; diese kann daher nicht durch den willkürlich auf C_{n+1} gewählten Punkt P gehen.

III. Nach diesen einleitenden Betrachtungen gehen wir nunmehr zur Entwickelung der Polarentheorie selbst über. Die Polareigenschaften der Curven zweiter Ordnung lassen sich etwa in folgender Weise verallgemeinern:

1. Die erste Polare eines Punktes P in Bezug auf eine Curve C_n ist eine Curve P_{n-1} $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die C_n in den Berührungspunkten aller $n(n-1)$ von P an C_n gehenden Tangenten schneidet.

Hat die C_n Doppelpunkte, so gehen die ersten Polaren aller Punkte durch diese Doppelpunkte.

2. Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden bilden ein Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist diese Gerade Tangente, so ist der Berührungspunkt derselben nach III, 1 ein Basispunkt des ihr zugehörenden Büschels.

3. Da die Büschel von ersten Polaren, die je zwei Geraden zugehören, die erste Polare des Schnittpunktes dieser beiden Geraden gemein haben müssen, so bilden alle diese Polaren nach II, 4 ein Curvennetz $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Zugleich ist ersichtlich, dass dieses Netz mit den Punkten der Ebene in collinearer Verwandtschaft steht. Denn jedem Punkte entspricht nur eine Curve und jeder Curve entspricht nur ein Punkt, da die Tangenten an C_n in den Schnittpunkten einer ersten Polare mit C_n sich nach III, 1 in einem Punkte schneiden müssen; ferner entsprechen den Punkten einer Geraden die Curven eines Büschels und umgekehrt. Die ersten Polaren, die durch einen Punkt Q gehen, bilden daher ein Büschel, dem die Punkte einer Geraden entsprechen. Diese Gerade nennen wir die gerade oder letzte Polare von Q in Bezug auf C_n.

Aus ihrer Definition folgt dann der Satz: Geht die erste Polare eines Punktes P durch Q, so geht die gerade Polare von Q durch P, und umgekehrt.

4. Die erste Polare eines Punktes P von C_n geht durch P; geht umgekehrt die erste Polare von P durch P selbst, so ist P ein Punkt von C_n. Dasselbe gilt daher nach III, 3 auch von der geraden Polare.

5. Die ersten Polaren des Punktes P einer Geraden G in Bezug auf alle C_n, welche durch dieselben n Punkte von G gehen, schneiden diese Gerade ebenfalls in denselben $(n-1)$ Punkten. Das Analoge gilt daher von den geraden Polaren.

6. Die ersten Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Curven C_n eines Büschels bilden ein zu diesem projectivisches Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, ebenso die geraden Polaren ein zu ihm projectivisches Strahlenbüschel.

IV. Wir setzen also voraus, dass diese Eigenschaften der ersten Polaren für eine Curve C_n bewiesen wären, und wollen jetzt hieraus die Definition der ersten Polaren in Bezug auf eine Curve C_{n+1} ableiten.

1. Ist P ein Punkt von C_{n+1}, so lassen sich nach II, 6 auf C_{n+1} immer n^2 Punkte so bestimmen, dass sie Basispunkte eines Büschels von Curven C_n sind, welches mit einem zu ihm projectivischen Strahlenbüschel in P die Curve C_{n+1} erzeugt. Nach III, 6 entspricht dann dem Punkte P in Bezug auf dieses Büschel von Curven C_n ein zu ihm und daher auch zu dem Strahlenbüschel in P projectivisches Büschel von Curven P_{n-1}. Es erzeugt daher mit diesem Strahlenbüschel eine Curve P_n, welche wir die erste Polare von P in Bezug auf C_{n+1} nennen. Offenbar ist diese Polare eindeutig bestimmt. Denn irgend einem Strahl durch P müssen immer solche Curven C_n entsprechen, welche durch die n Punkte gehen, die dieser Strahl mit C_{n+1} ausser P gemein hat. Allen diesen Curven C_n müssen aber nach III, 5 solche erste Polaren für P entsprechen, welche durch dieselben $(n-1)$ Punkte dieses Strahles gehen. Diese eindeutig bestimmte Curve P_n geht offenbar durch P und berührt in P die Curve C_{n+1}. Denn der Curve C_n, welche durch P geht, entspricht nach II, 5 in P die Tangente an C_{n+1} in diesem Punkte; da nun die erste Polare von P in Bezug auf diese C_n ebenfalls durch P geht, so ist die Tangente von C_{n+1} in P auch Tangente von P_n in P.

P_n geht ferner durch alle Berührungspunkte der von P an C_{n+1} gelegten Tangenten. Denn ist T ein solcher Berührungspunkt, so berührt auch die PT entsprechende C_n PT in T; die Polare P_{n-1} des Punktes P in Bezug auf diese Curve muss daher nach III, 1 auch durch T gehen; T ist folglich ein Punkt von P_n. Umgekehrt sind alle Schnittpunkte T von P_n mit C_{n+1} Berührungspunkte der von P an C_{n+1} gelegten Tangenten. Denn durch T muss dann sowohl die PT entsprechende C_n, als auch die Polare P_{n-1} von P in Bezug auf diese C_n gehen. PT ist daher nach III, 1 Tangente an diese C_n und deshalb auch an C_{n+1}.

2. Schneidet eine Gerade die C_{n+1} in den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$, so entspricht jedem dieser Punkte nach dem Vorigen eine erste Polare $P_n^{a_k}$. Ist nun P ein Schnittpunkt von $P_n^{a_1}$ und $P_n^{a_2}$, so wollen wir zeigen, dass auch alle übrigen $P_n^{a_k}$ durch diesen Punkt gehen müssen. Schneiden nämlich die Geraden P_{a_1} und P_{a_2} die C_{n+1} noch in den resp. Punkten $b_1 \ldots b_n$, $b'_1 \ldots b'_n$, so geht offenbar nach III, 5 die erste Polare von a_1 in Bezug auf alle durch $b_1 \ldots b_n$ gehenden C_n durch P. Es geht daher auch umgekehrt die gerade Polare von P in Bezug auf alle durch $b_1 \ldots b_n$ gehenden Curven C_n durch a_1, und ebenso die gerade Polare von P in Bezug auf alle durch $b'_1 \ldots b'_n$ gehenden C_n durch a_2. Folglich ist $a_1 a_2$ gerade Polare von P in Bezug auf alle durch die $2n$ Punkte $b_1 \ldots b_n$, $b'_1 \ldots b'_n$ gehenden Curven C_n. Nun kann man nach II, 6 auf C_{n+1}

$\frac{1}{2}n(n+1)$ Punkte willkürlich so wählen, dass sie zu den Basispunkten eines Büschels n^{ter} Ordnung gehören, welches mit einem Strahlenbüschel in a_k die C_{n+1} erzeugt. Es ist aber $\frac{1}{2}n(n+1)-2n=\frac{1}{2}n(n-3)$. Diese Zahl ist für $\{n=2\}$ — für $\{n=1\}$ brauchen wir sie nicht — gleich (-1); diesen Fall wollen wir noch besonders betrachten. Für $\{n=3\}$ ist sie Null und für alle grösseren Werthe von n grösser als Null. Wir können daher, ausgenommen wenn $\{n=2\}$, die $2n$ Punkte $b_1 \dots b_n$, $b'_1 \dots b'_n$ immer als Basispunkte eines Büschels n^{ter} Ordnung betrachten, welches mit einem Strahlenbüschel in a_k die C_{n+1} erzeugt. Da nun a_k ein Punkt der Geraden $a_1 a_2$, so muss nach dem Vorigen und nach III, 3 die erste Polare von a_k in Bezug auf alle diese durch $b_1 \dots b_n$, $b'_1 \dots b'_n$ gehenden Curven C_n durch P gehen. P ist daher ein Basispunkt des Büschels von ersten Polaren P_{n-1}, welches mit dem Strahlenbüschel in a_k die $P_n^{a_k}$ erzeugt, d. h. P ist ein Punkt dieser Polaren $P_n^{a_k}$ selbst, *q. e. d.* Was nun den Fall $\{n=2\}$, also die Curve C_3 betrifft, so gelten folgende Schlüsse: Legt man durch die Punkte $b_1 b_2$, $b'_1 b'_2$ irgend eine Curve C_2, so schneidet diese C_3 in zwei weiteren Punkten $b''_1\, b''_2$, welche mit a_3 auf einer Geraden liegen müssen. Denn von den neun Schnittpunkten der beiden Curven dritter Ordnung C_3 und der, welche aus C_2 und der Geraden $a_1 a_2 a_3$ besteht, liegen sechs, nämlich $b_1 b_2$, $b'_1 b'_2$, $a_1 a_2$ auf einer Curve zweiter Ordnung; also müssen die übrigen, nämlich $a_3\, b''_1\, b''_2$, auf einer Geraden liegen. Die vier Punkte $b_1 b_2$, $b'_1 b'_2$ sind also in der That Basispunkte eines Büschels zweiter Ordnung, welches mit einem Strahlenbüschel in a_3 die C_3 erzeugt. Ist dies bewiesen, so gelten dieselben Schlüsse wie vorhin.

Es entspricht also jeder Geraden ein Büschel von Curven P_n. Ist diese Gerade Tangente, so ist ihr Berührungspunkt ein Basispunkt des ihr entsprechenden Büschels. Denn nach IV, 1 müssen alle $P_n^{a_k}$ durch die Berührungspunkte der von a_k an C_{n+1} gelegten Tangenten gehen.

3. Ist s ein beliebiger Punkt von C_{n+1} und $s-a_1 \dots a_n$ eine feste, $s-b_1 \dots b_n$ eine bewegliche Transversale durch s, dann haben offenbar die Büschel $(P_n^{a_1}, P_n^{a_2} \dots)$ und $(P_n^{b_1}, P_n^{b_2} \dots)$ die Curve P_n^s gemeinsam; es haben daher nach II, 3 die Büschel $(P_n^{a_1}, P_n^{b_1})$ und $(P_n^{a_2}, P_n^{b_2})$ ebenfalls eine C_n gemein. Lassen wir nun die bewegliche Gerade $s-b_1 \dots b_n$ mit $s-a_1 \dots a_n$ zusammenfallen, so gehen die Büschel $(P_n^{a_1}, P_n^{b_1})$ und $(P_n^{a_2}, P_n^{b_2})$ offenbar in diejenigen über, welche den Tangenten in resp. a_1 und a_2 an C_{n+1} zugehören. Da nun die Gerade $s-a_1 a_2$ ganz beliebig, also auch die Punkte a_1 und a_2 auf C_{n+1} ganz beliebig waren, so erhalten wir folgenden Satz: Die Büschel, welche irgend zwei Tangenten an C_{n+1} angehören, haben je eine C_n gemeinsam; d. h. nach II, 4: Die Büschel, welche allen Tangenten an C_{n+1} entsprechen, gehören demselben Netz an. Da nun in diesen Büscheln alle den Punkten von C_{n+1}

entsprechenden P_n enthalten sind, so folgt, dass alle Polaren demselben Netz angehören. Es haben daher je zwei Büschel, welche irgend zwei Geraden entsprechen, eine C_n gemeinsam.

Die Geraden der Ebene lassen sich nun auf dieses Netz folgendermassen collinear beziehen: Wir ordnen dem Strahlenbüschel in einem Punkte s von C_{n+1} das Büschel von Curvenbüscheln zu, welches diesen Strahlen in Bezug auf C_{n+1} entspricht; offenbar ist dies möglich, da alle diese Curvenbüschel dieselbe Curve P_n^s gemein haben, und jedem Strahl eindeutig ein bestimmtes Curvenbüschel entspricht und umgekehrt. Dasselbe thun wir für einen zweiten Punkt s' von C_{n+1}. Dann ist offenbar die collineare Verwandtschaft zwischen dem Netz und der Ebene hergestellt, da dem Strahle ss' in beiden Büscheln dasselbe Curvenbüschel $(P_n^s, P_n^{s'})$ entspricht. Um das Büschel zu finden, das irgend einer Geraden entspricht, brauchen wir nur zwei Strahlen sP und $s'P$ diese Gerade beschreiben zu lassen; die Curven C_n, welche die diesen beiden Geraden entsprechenden Büschel jedesmal gemein haben, bilden das verlangte Büschel. Da nun der Punkt P $(n+1)$-mal die C_{n+1} trifft, so muss dieses Büschel mit dem Büschel identisch sein, welches von den diesen $(n+1)$ Punkten entsprechenden P_n gebildet wird. Durch die collineare Verwandtschaft, welche zwischen den Geraden der Ebene und den Büscheln des Netzes hergestellt ist, wird aber bedingt, dass die Büschel, die den durch einen Punkt gehenden Geraden entsprechen, dieselben C_n gemein haben. Wir sehen also, dass allen Geraden, die durch einen Punkt P gehen, in Bezug auf C_{n+1} Büschel entsprechen, die dieselbe P_n gemein haben; diese P_n nennen wir die erste Polare von P in Bezug auf C_{n+1}.

Sie enthält offenbar die Berührungspunkte der von P an C_{n+1} gehenden Tangenten. Denn sie muss dem Büschel angehören, das solch einer Tangente entspricht; sie muss daher durch die Basispunkte dieses Büschels, also auch durch den Berührungspunkt dieser Tangente gehen. Umgekehrt sind alle Schnittpunkte T von P_n mit C_{n+1} Berührungspunkte der von P an C_{n+1} gehenden Tangenten. Denn T ist dann offenbar Basispunkt des der Geraden TP entsprechenden Büschels, da P_n^t ebenfalls durch T gehen muss. Es müssen also die ersten Polaren aller übrigen Schnittpunkte von PT mit C_{n+1} durch T gehen. PT ist daher nach IV, 1 in der That Tangente an C_{n+1} in T.

Hat die C_{n+1} Doppelpunkte, so muss die erste Polare jedes Punktes durch die Doppelpunkte gehen, da dies nach III, 1 für jeden Punkt der C_{n+1} gilt.

4. Durch einen Punkt Q geht offenbar ein ganzes Büschel des Polarnetzes von C_{n+1}. Allen diesen Polaren entsprechen die Punkte einer Geraden; diese Gerade nennen wir die gerade oder letzte Polare von Q

in Bezug auf C_{n+1}. Dass der Satz III, 3 auch für sie gilt, folgt aus ihrer Definition.

5. Dass einem Punkte von C_{n+1} eine Polare entspricht, welche durch ihn selbst geht, haben wir gesehen. Geht umgekehrt die Polare von P durch P selbst, so muss P ein Punkt von C_{n+1} sein. Denn auf einer Geraden durch P entsprechen offenbar jedem Punkte a derselben einmal die n Schnittpunkte der ersten Polare von a mit dieser Geraden, und das andere Mal der Schnittpunkt der geraden Polare von a mit ihr. Nach I, 3 müssen daher auf dieser Geraden $(n+1)$ Punkte mit einem ihrer entsprechenden zusammenfallen. Da bereits die $(n+1)$ Schnittpunkte dieser Geraden mit C_{n+1} diese Eigenschaft haben, so muss P einer dieser Punkte sein.

6. Daraus, dass zwischen den Punkten der Ebene und dem Polarnetz von C_{n+1} eine collineare Verwandtschaft besteht, folgt, dass die Punkte einer Geraden projectivisch bezogen sind auf das ihnen entsprechende Büschel von ersten Polaren. Lassen wir nun eine C_{n+1} so variiren, dass sie mit einer Geraden G immer dieselben $(n+1)$ Punkte a_k gemein hat, so entspricht der Geraden G für jede C_{n+1} ein Büschel von Curven P_n. Sind C_{n+1} und C'_{n+1} irgend zwei dieser Curven, so sind offenbar auch die beiden Büschel, welche G in Bezug auf jede dieser Curven entsprechen, projectivisch auf einander bezogen; zwischen den Punkten der Geraden G ist daher eine derartige Beziehung hergestellt, dass jedem Punkte b derselben einmal die n Schnittpunkte der Polaren P'_n entsprechen, welche der P_n, die durch b geht, zugehört, und das andere Mal die n Schnittpunkte der P_n, welche der P'_n, die durch b geht, zugehört. Auf G können daher nach I, 3, wenn nicht jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfallen soll, höchstens $2n$ Punkte mit einem ihrer entsprechenden zusammenfallen. Nun gehen aber die ersten Polaren jedes der $(n+1)$ festen Punkte a_k auf G in Bezug auf alle diese C_{n+1} durch dieselben n festen Punkte von G. Denn diese bestehen aus diesem festen Punkte a_k selbst und den Schnittpunkten der ersten Polaren P_{n-1} von a_k in Bezug auf die durch die übrigen n festen Punkte gehenden C_n. Diese letzteren $(n-1)$ Punkte variiren aber nach III, 5 nicht. Wir sehen also, dass auf G $n(n+1)$ Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Es muss daher jeder Punkt mit einem seiner entsprechenden zusammenfallen, da $n+1>2$. Hieraus folgt, dass die Polaren eines Punktes P von G in Bezug auf C_{n+1} und C'_{n+1} die Gerade G in denselben n Punkten schneiden müssen. Hiermit ist also der Satz III, 5 auch für C_{n+1} bewiesen.

7. Wir gehen jetzt dazu über, die Giltigkeit des Satzes III, 6 auch für Curvenbüschel $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nachzuweisen. Wir müssen hierzu noch einen Hilfssatz beweisen.

Liegen nämlich die $(n+1)^2$ Schnittpunkte zweier Curven C_{n+1} und C'_{n+1} auf einer Curve C_{2n+1}, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte mit C_{2n+1} resp. auf zwei Curven C_n und C'_n. Denn legen wir durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ der $n(n+1)$ Punkte, die C_{n+1} noch mit C_{2n+1} gemein hat, eine Curve C_n, so liegen von den Schnittpunkten der beiden Curven $(2n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung C_{2n+1} und $(C'_{n+1}+C_n)$ $(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+3) = (2n+1)(n+1)-\frac{1}{2}n(n-1)$ auf C_{n+1}. Also müssen nach II, 2 noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ dieser Punkte auf C_{n+1} liegen und die übrigen, d. s. die weiteren $n(n+1)$ Schnittpunkte von C_{2n+1} mit C'_{n+1}, auf einer Curve C'_n. Nun liegen von den Schnittpunkten der beiden Curven $\{C_{n+1}+C'_n\}$ und $\{C'_{n+1}+C_n\}$ $(n+1)^2+2n(n+1)=\frac{1}{2}(2n+1)(2n+4)-1+n(n-1)$ auf C_{2n+1}; folglich müssen auch alle übrigen auf C_{2n+1} liegen, d. h. die n^2 Schnittpunkte von C_n und C'_n liegen ebenfalls auf C_{2n+1}. Hieraus folgt unser Hilfssatz: „Liegen die $(n+1)^2$ Basispunkte eines Büschels von Curven C_{n+1} auf einer C_{2n+1}, so liegen die übrigen $n(n+1)$ Schnittpunkte der Curven C_{n+1} mit C_{2n+1} auf Curven C_n, die einem Büschel angehören, dessen Basispunkte ebenfalls auf C_{2n+1} liegen." Schneidet nun eine Gerade C_1 eine Curve C_{n+1} in den Punkten $a_1 \dots a_{n+1}$ und man verbindet einen Punkt P mit $a_1 \dots a_{n+1}$ durch gerade Linien, so schneiden diese $(n+1)$ Geraden die C_{n+1} in noch $n(n+1)$ Punkten, die nach II, 2 auf einer C_n liegen. Aus IV, 6 folgt, dass dem Punkte P in Bezug auf C_{n+1} und $\{C_n+C_1\}$ dieselbe erste Polare P_n zugehört; und zwar schneiden sich C_n und P_n in allen n Punkten, die sie mit C_1 gemein haben, da die erste Polare durch alle Doppelpunkte der Fundamentalcurve geht. Lassen wir nun die C_{n+1} ein ganzes Büschel beschreiben, so beschreiben offenbar auch die speciellen Curven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus den $(n+1)$ sich in P schneidenden Geraden bestehen, ein Büschel, da sie in P $(n+1)^2$ Punkte gemein haben. Dieses Büschel ist aber auf das erstgenannte projectivisch bezogen, da jeder Curve des einen nur eine Curve des andern entspricht und umgekehrt. Diese Büschel $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen daher nach I, 3 eine Curve der $(2n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus C_1 und einer C_{2n+1} besteht. Auf dieser C_{2n+1} liegen nun auch die $(n+1)^2$ Basispunkte des zu Grunde gelegten Büschels. Die übrigen $n(n+1)$ Schnittpunkte jeder C_{n+1} mit C_{2n+1} liegen also nach unserem Hilfssatze auf Curven C_n, die demselben Büschel angehören. Wir erhalten also folgenden Satz: Die Reihe von ersten Polaren, welche einem Punkte P in Bezug auf die Curven eines Büschels $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen, schneiden eine beliebige Gerade in denselben Punktgruppen, in denen diese von einem zu dem Fundamentalbüschel projectivischen Büschel von Curven C_n geschnitten wird. Daraus folgt aber unmittelbar, dass auch diese ersten Polaren ein Büschel von Curven P_n bilden. Denn legen wir die Gerade C_1 durch den Schnittpunkt zweier Curven P_n, so müssen durch ihn auch zwei Curven des zugehörigen Büschels von Curven C_n gehen und deshalb alle C_n; gehen aber alle C_n durch diesen Punkt, so müssen es nach dem eben bewiesenen Satze auch alle P_n. Es folgt ferner, dass das Büschel von Curven P_n zu dem Büschel von Curven C_{n+1} projectivisch ist, da es zu jedem der Büschel von Curven C_n perspectivisch, also auch projectivisch ist.

Dass die geraden Polaren von P in Bezug auf das Büschel von Curven C_{n+1} ein Strahlenbüschel bilden, folgt hieraus leicht. Denn schneiden sich die geraden Polaren von P in Bezug auf zwei Curven C_{n+1} in Q, so müssen nach dem eben bewiesenen Satze alle ersten Polaren von Q durch P gehen, folglich auch alle geraden Polaren von P durch Q.

V. Nachdem wir so alle Prämissen, auf die sich unsere Definition der ersten Polare in Bezug auf eine C_{n+1} stützte, bewiesen haben, können wir nunmehr alle Polareigenschaften, die sich von denen der Curven zweiter Ordnung übertragen lassen, auch für Curven beliebiger Ordnung als bewiesen erachten. Mit diesen sind jedoch die Polareigenschaften der Curven höherer Ordnung keineswegs abgeschlossen. Schon zwischen der ersten und letzten Polare eines Punktes P in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung ergiebt sich ein merkwürdiger und neuer Zusammenhang.

1. Schneidet nämlich die gerade Polare P_1 eines Punktes P in Bezug auf eine C_3 diese Curve in den Punkten a_1, a_2, a_3, so schneiden die Geraden Pa_1, Pa_2, Pa_3 die C_3 in noch sechs Punkten, die nach II, 2 auf einer C_2 liegen. Die erste und gerade Polare in Bezug auf C_3 und $\{P_1 + C_2\}$ sind offenbar identisch. Die erste Polare P_2 von P in Bezug auf C_3 geht daher durch die Schnittpunkte von C_2 mit P_1. Die übrigen Punkte, die C_2 mit P_2 gemein hat, sind offenbar die Berührungspunkte der von P an C_2 gelegten Tangenten. Dies sind aber wiederum die Schnittpunkte von C_2 mit P_1, da P_1 auch Polare von P in Bezug auf C_2. Denn P muss auf der ersten Polare von a_k in Bezug auf C_3 liegen, d. h. auf der Polare von a_k in Bezug auf einen Kegelschnitt, welcher durch die beiden anderen Schnittpunkte von Pa_k mit C_3 geht. Wir sehen also, dass C_2 und P_2 in den Schnittpunkten von C_2 mit P_1 je zwei zusammenfallende Punkte gemein haben, d. h. sie berühren sich in diesem Punkte. Daraus folgt aber, dass P_1 auch Polare von P in Bezug auf P_2 ist, d. h. die gerade Polare eines Punktes P in Bezug auf eine C_3 ist auch gerade Polare dieses Punktes in Bezug auf die erste Polare von P für C_3.

2. Diese Eigenschaft lässt sich in analoger Weise für höhere Curven beweisen, wenn wir nach unserer Methode dieselbe für eine Curve C_n als bewiesen annehmen, also voraussetzen, dass die gerade Polare von P in Bezug auf eine C_n auch gerade Polare von P in Bezug auf die erste Polare von P für C_n sei. Schneidet die gerade Polare P_1 von P in Bezug auf eine C_{n+1} diese Curve in den Punkten $a_1 \ldots a_{n+1}$, so verbinden

wir alle diese Punkte durch gerade Linien mit P. Die übrigen $n(n+1)$ Schnittpunkte dieser Geraden mit C_{n+1} liegen dann auf einer C_n. Die erste Polare P_n von P in Bezug auf C_{n+1} und $\{P_1+C_n\}$ ist dann dieselbe und geht durch die Schnittpunkte von P_1 mit C_n. Die übrigen $n(n-1)$ Schnittpunkte, die sie mit C_n gemein hat, sind offenbar die Berührungspunkte der von P an C_n gehenden Tangenten, d. h. die Schnittpunkte von C_n mit der ersten Polare P_{n-1} von P in Bezug auf C_n. Nun ist ferner P_1 auch gerade Polare von P für C_n; denn die ersten Polaren von a_k für C_n müssen durch P gehen. P_1 ist daher auch gerade Polare von P für P_{n-1} und deshalb auch für $\{P_1+P_{n-1}\}$. Denn die erste Polare irgend eines Punktes Q von P_1 in Bezug auf $\{P_1+P_{n-1}\}$ muss durch diesen Punkt selbst, durch die $(n-1)$ Schnittpunkte von P_1 mit P_{n-1} und durch die Berührungspunkte der von ihm an P_{n-1} gelegten Tangenten gehen; sie muss daheraus P_1 und der ersten Polare von Q für P_{n-1} bestehen, d. h. sie muss durch P gehen. Nun gehören offenbar C_n, P_n und $(P_{n-1}+P_1)$ demselben Büschel an. Da nun die gerade Polare von P für zwei dieser Curven, nämlich für C_n und $(P_{n-1}+P_1)$, P_1 ist, so muss sie es nach III, 6 auch für alle Curven des Büschels sein, also auch für P_n, was zu beweisen war. Da wir nun den erwähnten Satz für C_3 bewiesen haben, so gilt er hiernach auch für alle höheren Curven.

VI. Sind wir einmal im Besitze einer Definition der ersten und geraden Polare in Bezug auf eine Curve beliebiger Ordnung, so lässt sich aus ihr leicht eine Definition aller übrigen Polaren ableiten.

1. Offenbar gehört dem Punkte P in Bezug auf seine erste Polare P_{n-1} für C_n ebenfalls eine erste Polare P_{n-2} zu, wie wir dies schon bei Curven dritter Ordnung gesehen haben. Wir nennen sie die zweite Polare von P in Bezug auf C_n. In Bezug auf diese Curve P_{n-2} gehört dem Punkte P ebenfalls eine erste Polare P_{n-3} zu; sie heisse die dritte Polare von P in Bezug auf C_n. In dieser Weise können wir offenbar weiter gehen und gelangen so allgemein zur r^{ten} Polare P_{n-r} des Punktes P in Bezug auf C_n; sie ist die erste Polare von P in Bezug auf die $(r-1)^{\text{te}}$ Polare von P für C_n.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass die s^{te} Polare von P in Bezug auf die r^{te} Polare von P für C_n identisch ist mit der $(r+s)^{\text{ten}}$ Polare von P für C_n. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare ist offenbar nichts Anderes, als die bereits erwähnte gerade Polare von P. Denn letztere ist, wie bewiesen, auch gerade Polare von P_{n-1}, also auch von P_{n-2}, P_{n-3}, $\ldots P_3$, P_2. Wir haben daher für die erste und $(n-1)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes P folgenden Satz: Geht die erste Polare von P in Bezug auf eine C_n durch Q, so geht die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare von Q durch P und umgekehrt.

2. Dieser Satz lässt sich leicht verallgemeinern. Wir bedürfen jedoch zu seinem Beweise noch folgendes Hilfssatzes (Cremona, Ebene

Curven, Zusatz zu Nr. 69c): Die erste Polare von o_1, $P_{n-2}^{o_1 o_2}$, in Bezug die erste Polare von o_2, $P_{n-1}^{o_2}$, in Bezug auf eine C_n ist identisch mit der ersten Polare $P_{n-2}^{o_2 o_1}$ von o_2 in Bezug auf die erste Polare $P_{n-1}^{o_1}$ von o_1 in Bezug auf C_n. Zum Beweise dieses Satzes ziehe man durch o_2 eine beliebige Gerade C_1; dann sei G_n das Büschel von n Geraden, die von o_1 nach den Schnittpunkten von C_n mit C_1 gezogen sind. Die übrigen $n(n-1)$ Schnittpunkte von C_n mit G_n liegen dann auf einer C_{n-1}. Da C_n dem Büschel $(G_n, C_1 + C_{n-1})$ angehört, so gehört die erste Polare $P_{n-1}^{o_2}$ von o_2 in Bezug auf C_n dem Büschel an, welches durch die ersten Polaren von o_2 in Bezug auf G_n und $(C_1 + C_{n-1})$ bestimmt wird. Die Polare von o_2 in Bezug auf G_n besteht offenbar aus $(n-1)$ in o_1 zusammenlaufenden Geraden. Denn ausser der Geraden $o_1 o_2$ können von o_2 an G_n keine weiteren Tangenten gezogen werden, da im Allgemeinen keine der Geraden, aus denen G_n besteht, mit $o_1 o_2$ zusammenfällt. Es sind daher in $o_2 o_1$ $n(n-1)$ Tangenten an G_n vereinigt und in o_1 ihre $n(n-1)$ Berührungspunkte; d. h. die erste Polare von o_2 in Bezug auf G_n hat in o_1 einen $(n-1)$-fachen Punkt, besteht folglich aus $(n-1)$ sich in o_1 schneidenden Geraden G_{n-1}. Die erste Polare von o_2 in Bezug auf $(C_1 + C_{n-1})$ besteht, da o_2 auf C_1 liegt, aus C_1 und der ersten Polare P_{n-2} von o_2 in Bezug auf C_{n-1}. $P_{n-1}^{o_2}$ geht daher durch die Schnittpunkte von G_{n-1} mit $\{C_1 + P_{n-2}\}$. Ist daher $P_{n-1}^{o_2}$ gegeben, so erhalten wir P_{n-2}, wenn wir die Schnittpunkte von C_1 mit $P_{n-1}^{o_2}$ mit o_1 durch gerade Linien verbinden und durch die übrigen $(n-1)(n-2)$ Schnittpunkte von G_{n-1} und $P_{n-1}^{o_2}$ die P_{n-2} legen. Wir sehen daher, dass o_1 in Bezug auf $P_{n-1}^{o_2}$ dieselbe erste Polare besitzt, wie in Bezug auf $(C_1 + P_{n-2})$, d. h. $P_{n-2}^{o_2 o_1}$ geht durch die $(n-2)$ Schnittpunkte von C_1 mit P_{n-2}. Die Polare von o_1 in Bezug auf C_n, also $P_{n-1}^{o_1}$, geht offenbar durch die $(n-1)$ Schnittpunkte von C_1 mit C_{n-1}. Da nun o_2 auf C_1 liegt, so geht die erste Polare $P_{n-2}^{o_1 o_2}$ von o_2 in Bezug auf die $P_{n-1}^{o_1}$ durch dieselben $(n-2)$ Punkte von C_1 wie die erste Polare P_{n-2} von o_2 in Bezug auf C_{n-1}; d. h. $P_{n-2}^{o_1 o_2}$ und $P_{n-2}^{o_2 o_1}$ gehen durch dieselben $(n-2)$ Punkte von C_1. Da nun C_1 eine ganz beliebige Gerade durch o_2 war, so haben $P_{n-2}^{o_1 o_2}$ und $P_{n-2}^{o_2 o_1}$ unendlich viel Punkte gemein, sie fallen also zusammen.

Bezeichnen wir nun analog mit $P_{n-s}^{o_1 o_2 \ldots o_s}$ die erste Polare von o_1 in Bezug auf die erste Polare von o_2 .. in Bezug auf die erste Polare von o_s in Bezug auf C_n, so erkennt man durch successive Anwendung des eben bewiesenen Satzes leicht, dass auch $P_{n-s}^{o_1 o_2 \ldots o_s}$ unabhängig von der Reihenfolge der Indices $o_1 o_2 \ldots o_s$ immer dieselbe Curve C_{n-s} bleibt. Lassen wir nun p der Punkte o in einen Punkt P zusammenfallen und die übrigen q derselben in einen Punkt Q, so ergiebt sich hieraus folgender Satz: Die p^{te} Polare von P in Bezug auf die q^{te} Polare von Q in Bezug auf C_n ist identisch mit der q^{ten} Polare von Q in Bezug auf die p^{te} Polare von P in Bezug auf C_n.

3. Nehmen wir nun an, es wäre für die r^{te} Polare von P der Satz bewiesen: „Geht die r^{te} Polare eines Punktes P in Bezug auf eine C_n durch Q, so geht die $(n-r)^{te}$ Polare von Q in Bezug auf C_n durch P", so folgt mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes, dass die $(r+1)^{te}$ Polare die analoge Eigenschaft besitzt. Denn geht die $(r+1)^{te}$ Polare von P, also die erste Polare von P in Bezug auf die r^{te} Polare von P durch Q, so geht offenbar nach III, 3 die $(n-r-1)^{te}$ Polare von Q in Bezug auf die r^{te} Polare von P durch P. Diese aber ist identisch mit der r^{ten} Polare von P in Bezug auf die $(n-(r+1))^{te}$ Polare von Q. Da diese also durch P selbst geht, so ist P nach III, 4 ein Punkt der $(n-(r+1))^{ten}$ Polare von Q in Bezug auf C_n, was zu beweisen war. Da wir nun für $\{r=1\}$ unsern Satz bewiesen haben, so gilt er hiernach allgemein.

Aus dieser Fundamentaleigenschaft der r^{ten} Polare lassen sich aber alle übrigen Eigenschaften derselben unschwer ableiten.

Im September 1876.

XI.

Anzahl der Lösungen für die allgemeinste Gleichung ersten Grades mit vier Unbekannten.

Von

Karl Weihrauch,

Professor in Dorpat.

Die allgemeinste Gleichung mit vier Unbekannten und nicht theilfremden, jedoch positiven Coefficienten ist offenbar dann vorhanden, wenn sowohl je drei, als auch je zwei der Coefficienten gemeinsame Theiler besitzen, die unter einander wieder relativ prim sind. Wird der grösste gemeinsame Theiler einer Combination zur dritten Classe, in welcher das k^{te} Element fehlt, durch b_k, der grösste gemeinsame Theiler einer Combination zur zweiten Classe, in welcher das i^{te} und k^{te} Element fehlen, durch c_{ik} bezeichnet, und sind die übrig bleibenden Bestandtheile der Coefficienten durch a_k vorgestellt, so hat man als allgemeinste Gleichung

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{k=4} A_k x_k = M \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{r} x_1 a_1 b_2 b_3 b_4 c_{23} c_{24} c_{34} \\ + x_2 a_2 b_1 b_3 b_4 c_{13} c_{14} c_{34} \\ + x_3 a_3 b_1 b_2 b_4 c_{12} c_{14} c_{24} \\ + x_4 a_4 b_1 b_2 b_3 c_{12} c_{13} c_{23} \end{array}\right\} = M.$$

Sei

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4 = A, \\ b_1 b_2 b_3 b_4 = B, \\ c_{23} c_{24} c_{34} = u, \\ c_{12} c_{13} c_{14} = v, \\ uv = C = \Pi c_{ik}, \end{array}\right.$$

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l} M = p\,ABw + m, \\ m \overset{=}{<} ABw \\ \quad > 0. \end{array}\right.$$

Setzt man analog dem Verfahren, welches in dieser Zeitschrift [Jahrg. XX, S. 314, hier immer durch (III) citirt] entwickelt wurde,

4) $$m + h_k A_k \equiv 0 \pmod{b_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$
$$h_k \begin{smallmatrix} \geqq 0 \\ < b_k, \end{smallmatrix}$$

5) $$x_k = -h_k + b_k y_k, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

6) $$\frac{m + h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4}{B} = \mu,$$

so wird die Anzahl der Auflösungen von 1) identisch mit der von

7) $$\left.\begin{array}{l} y_1 a_1 c_{23} c_{24} c_{34} \\ + y_2 a_2 c_{13} c_{14} c_{34} \\ + y_3 a_3 c_{12} c_{14} c_{24} \\ + y_4 a_4 c_{12} c_{13} c_{23} \end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{k=4} B_k y_k = pAC + \mu = pP + \mu.$$

In dieser nun weiter zu untersuchenden Gleichung ist der kleinste gemeinsame Dividuus der Coefficienten B_k gleich P gesetzt worden, in Analogie mit den früher bei den Gleichungen ohne gemeinsame Theiler der Coefficienten eingehaltenen Verfahren [s. diese Zeitschrift XX, 2, S. 97, hier immer durch (I) citirt].

Wird $y_1 = r$ gesetzt, so entsteht

8) $$B_2 y_2 + B_3 y_3 + B_4 y_4 = pP + \mu - rB_1$$

und man hat unter Anwendung der nämlichen Bezeichnungsweise für die Anzahl der Lösungen, wie in (I)

9) $$f_4(pP + \mu) = \sum_{r=1} f_3(pP + \mu - rB_1)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=pP:B_1} f_3(pP + \mu - rB_1) + f_4(\mu).$$

Um $f_3(pP + \mu - rB_1)$ zu bestimmen, löse ich nach (III) die Congruenzen

10) $$\left\{\begin{array}{l} \mu - rB_1 + k_r B_2 \equiv 0 \pmod{c_{12}}, \\ \mu - rB_1 + l_r B_3 \equiv 0 \pmod{c_{13}}, \\ \mu - rB_1 + m_r B_4 \equiv 0 \pmod{c_{14}}, \end{array}\right.$$

wobei die Bedingung einzuhalten ist, dass die $k, l, m \geqq 0$, aber kleiner als der betreffende Modul seien. Durchläuft r die natürliche Zahlenreihe, so stimmen die c_{12} ersten k mit den Gliedern der Zahlenreihe von 0 bis $c_{12} - 1$ in irgendwelcher Ordnung überein und kehren dann immer in der Distanz c_{12} wieder; dasselbe gilt von den l und m in Bezug auf c_{13} und c_{14}. Nach der Distanz $c_{12} c_{13} c_{14} = v$ treffen also die nämlichen Werthe von k, l und m wieder zusammen, so dass

11) $$k_{r+tv} = k_r, \quad l_{r+tv} = l_r, \quad m_{r+tv} = m_r.$$

Ist

12) $$\frac{\mu - rB_1 + k_r B_2 + l_r B_3 + m_r B_4}{v} = \pi_r,$$

so erkennt man sofort, dass

13) $$\pi_{r+tv} = \pi_r - B_1 t.$$

Setzt man nun in 8)

14) $$y_2 = -k_r + c_{12} z_2, \quad y_3 = -l_r + c_{13} z_3, \quad y_4 = -m_r + c_{14} z_4,$$

so geht 8) über in

15) $$a_2 c_{34} z_2 + a_3 c_{24} z_3 + a_4 c_{23} z_4 = pAu + \pi_r$$

und man hat

16) $$f_3(pP + \mu - rB_1) = f_3(pAu + \pi_3).$$

Die Gleichung 15) hat keine gemeinsamen Theiler in den Coefficienten; sie kann also sofort nach (I) behandelt werden.

Solcher Gleichungen sind $\frac{pP}{B_1}$ vorhanden, da r alle Werthe von 1 bis $\frac{pP}{B_1}$ durchlaufen muss; theilt man dieselben der Reihenfolge nach in p Classen von je $\frac{P}{B_1} = \frac{A}{a_1} . v$ Gleichungen, so werden die Absolutglieder der h^{ten} Classe $(h = 1, 2, \dots p)$

$$pAu + \pi_r, \quad r = (h-1)\frac{A}{a_1} v + 1 \text{ bis } r = \frac{hA}{a_1} v$$

oder mit Rücksicht auf 13)

$$pAu + \pi_r - \frac{(h-1)A}{a_1} B_1, \quad r = 1, 2, \dots \frac{A}{a_1} v,$$

d. h.

$$Au(p-h+1) + \pi_r, \quad r = 1, 2, \dots \frac{A}{a_1} v.$$

Mithin

17) $$\begin{aligned} f_4(M) = f_4(pP+\mu) &= f_4(\mu) + \sum_{r=1}^{r=pP:B_1} f_3(pP + \mu - rB_1) \\ &= f_4(\mu) + \sum_{h=1}^{h=p} \sum_{r=1}^{r=\frac{A}{a_1}v} f_3(Au(p-h+1) + \pi_r), \end{aligned}$$

Die Gleichungen der h^{ten} Classe ordne ich nun der Reihenfolge nach in $\frac{A}{a_1}$ Gruppen von je v; es werden die Absolutglieder der i^{ten} Gruppe $\left(i = 1, 2, \dots \frac{A}{a_1}\right)$

$$Au(p-h+1) + \pi_r, \quad r = (i-1)v + 1 \text{ bis } r = iv$$

oder mit Rücksicht auf 13)

$$Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1, \quad r = 1, 2, \dots v.$$

Aus 17) wird dann

18) $$f_4(M) = f_4(\mu) + \sum_{h=1}^{h=p} \sum_{r=1}^{r=v} \sum_{i=1}^{i=A:a_1} f_3(Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1).$$

Bestimme ich nach (I) die Anzahl der Auflösungen für die Gleichung

19) $a_2 c_{34} z_2 + a_3 c_{24} z_3 + a_4 c_{23} z_4 = Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1$,

so sind die dort gebrauchten Bezeichnungen p, P, Q, m zu ersetzen durch

$$a_1(p-h+1),\quad \frac{Au}{a_1},\quad a_2 c_{34} + a_3 c_{24} + a_4 c_{23},\quad \pi_r - (i-1)B_1$$

und man erhält

$$\text{20)}\quad \begin{aligned} &f_3(Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1)\\ &= f_3(\pi_r - (i-1)B_1) + \frac{(p-h+1)^2 A a_1 u}{2}\\ &+ (p-h+1)a_1\left(\pi_r - (i-1)B_1 - \frac{a_2 c_{34} + a_3 c_{24} + a_4 c_{23}}{2}\right). \end{aligned}$$

Führt man hier zuerst die Summation nach i aus, so entsteht

$$\text{21)}\quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=A:a_1} f_3(Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1) = \sum_{i=1}^{i=A:a_1} f_3(\pi_r - (i-1)B_1)\\ &+ \frac{A^2 u (p-h+1)^2}{2} + A(p-h+1)\left(\pi_r - \frac{(A-a_1)u}{2} - \frac{a_2 c_{34} + a_3 c_{24} + a_4 c_{23}}{2}\right). \end{aligned}$$

Bevor die Summation nach r hin vollzogen wird, mag $\sum_{r=1}^{r=v} \pi_r$ bestimmt werden.

Aus 12) findet man

$$\text{22)}\quad \sum_{r=1}^{r=v} \pi_r = \mu - \frac{B_1(v+1)}{v} + \frac{B_2}{v}\sum_1^v k_r + \frac{B_3}{v}\sum_1^v l_r + \frac{B_4}{v}\sum_1^v m_r,$$

also nach dem früher über k, l und m Bemerkten

$$\text{23)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^v k_r = \frac{v}{c_{12}}\sum_1^{c_{12}} k_r = \frac{v(c_{12}-1)}{2},\\ &\sum_1^v l_r = \frac{v(c_{13}-1)}{2},\quad \sum_1^v m_r = \frac{v(c_{14}-1)}{2}, \end{aligned} \right.$$

oder

$$\text{24)}\quad \sum_{r=1}^{r=v} \pi_r = \mu - \frac{B_1(v+1)}{2} + \frac{B_2(c_{12}-1) + B_3(c_{13}-1) + B_4(c_{14}-1)}{2}.$$

Daraus

$$\text{25)}\quad \begin{aligned} &\sum_{r=1}^{r=v}\sum_{i=1}^{i=A:a_1} f_3(Au(p-h+1) + \pi_r - (i-1)B_1) = \sum_{r=1}^{r=v}\sum_{i=1}^{i=A:a_1} f_3(\pi_r - (c-1)B_1)\\ &+ \frac{A^2 C (p-h+1)^2}{2} + A(p-h+1)\left[\mu - \frac{AC}{2} - \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{2}\right], \end{aligned}$$

wenn die r nicht enthaltenden Theilsätze mit v multiplicirt und einige einfache Reductionen ausgeführt werden. Man hat ferner

$$\sum_{h=1}^{h=p}(p-h+1)^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$
$$\sum_{h=1}^{h=p}(p-h+1)=\frac{p(p+1)}{2}.$$

Die Summation nach h ergiebt also, wenn nach Potenzen von p geordnet wird,

$$\text{22)}\quad \begin{aligned} f_4(M)=f_4(\mu)+\frac{P^2p^3}{6C}+\frac{Pp^2}{2C}\left(\mu-\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{2}\right)\\ +p\left(\frac{P}{2C}\left(\mu-\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{2}\right)-\frac{P^2}{6C}+\sum_{r=1}^{r=v}\sum_{i=0}^{i=q-1}f_3(\pi_r-iB_1)\right),\end{aligned}$$

wo noch $A:a_1=q$ gesetzt wurde.

Die Coefficienten von p^3 und p^2 sind symmetrisch hinsichtlich der B_k, der von p wird es ebenfalls sein müssen. Hält man diesen Gesichtspunkt fest, so lassen sich die noch weiter erforderlichen Rechnungen stark reduciren; man braucht nämlich bei der Bestimmung dieses Coefficienten nur die Theilsätze beizubehalten, die μ^2, μB_1, B_1^2, $B_1 B_2$ enthalten; die fehlenden werden im Resultat nach dem Princip der Symmetrie ergänzt. In dieser Weise will ich bei der Bestimmung der noch übrigen Doppelsumme vorgehen.

In dieser Zeitschrift (s. XX, 2, S. 115) ist als Anzahl der Lösungen für die Gleichung $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3=\mathrm{A}$ die Formel aufgestellt worden

$$\text{28)}\quad f_3(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{A}(\mathrm{A}-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3))-\mu'(\mu'-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3))}{2\Pi}+f_3,$$

wenn (bei Abwesenheit von gemeinsamen Theilern)

$$\text{29)}\quad \Pi=\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\quad \mathrm{A}\equiv\mu'\,(mod\,\Pi),\quad \mu'\begin{array}{l}>0,\\ \overline{<}\,\Pi.\end{array}$$

Für die Gleichung

$$\text{30)}\quad a_2c_{34}z_2+a_3c_{24}z_3+a_4c_{23}z_4=\pi_r-iB_1$$

hätte man also

$$\text{31)}\quad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{A}=\pi_r-iB_1,\\ \Pi=a_2a_3a_4c_{23}c_{24}c_{34}=qu,\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=a_2c_{34}+a_3c_{24}+a_4c_{23},\\ \mu'=\varphi_{r,i},\end{array}\right.$$

wenn

$$\text{32)}\quad \left|\begin{array}{l} \pi_r-iB_1\equiv\varphi_{r,i}\ (mod\,qu),\\ \varphi_{r,i}\begin{array}{l}>0,\\ \overline{<}\,qu.\end{array}\end{array}\right.$$

Da $\varphi_{r,i}$ nur vom Modul qu, d. h. von B_2, B_3, B_4 abhängig erscheint, so kann man im Hinblick auf das oben ausgesprochene Princip sofort abgekürzt schreiben

$$33)\quad \begin{aligned} f_3(\pi_r - i B_1) &= \frac{(\pi_r - i B_1)(\pi_r - i B_1 - a_2 c_{34} - \ldots)}{2 q u} - \ldots \\ &= \frac{\pi^2_r - 2 \pi_r i B_1 + i^2 B_1^2 - a_2 c_{34} \pi_r + a_2 c_{34} B_1 i - \ldots}{2 q u} - \ldots . \end{aligned}$$

Mithin

$$34)\quad \begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=v} \sum_{i=0}^{i=q-1} f_3(\pi_r - i B_1) &= \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=v} \pi^2_r}{2u} - \frac{B_1 \sum\limits_{r=1}^{r=v} \pi_r . \sum\limits_{i=0}^{i=q-1} i}{q u} \\ &+ \frac{B_1^2 v \sum\limits_{i=0}^{i=q-1} i^2}{2 q u} - \frac{a_2 c_{34} \sum\limits_{r=1}^{r=v} \pi_r}{2u} + \frac{a_2 c_{34} B_1 v \sum\limits_{i=0}^{i=q-1} i}{2 q u} - \ldots . \end{aligned}$$

Aus

$$35)\quad \pi_r = \frac{\mu - B_1 r + k_r B_2 + \ldots}{v}$$

fand sich schon früher

$$36)\quad \sum_{r=1}^{r=v} \pi_r = \mu - \frac{B_1(v+1)}{2} + \frac{B_2(c_{12}-1)}{2} + \ldots .$$

Man erhält

$$37)\quad \pi^2_r = \frac{\mu^2 + B_1^2 r^2 - 2 \mu B_1 r - 2 B_1 B_2 r k_r - \ldots}{v^2},$$

also

$$38)\quad \sum_{r=1}^{r=v} \pi^2_r = \frac{\mu^2 v + B_1^2 \sum\limits_{r=1}^{r=v} r^2 - 2 \mu B_1 \sum\limits_{r=1}^{r=v} r - 2 B_1 B_2 \sum\limits_{r=1}^{r=v} r k_r - \ldots}{v^2}.$$

Es wird

$$39)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{r=1}^{r=v} r^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}, \quad \sum_{r=1}^{r=v} r = \frac{v(v+1)}{2}, \\ &\sum_{i=0}^{i=q-1} i^2 = \frac{q(q-1)(2q-1)}{6}, \quad \sum_{i=0}^{i=q-1} i = \frac{q(q-1)}{2}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man diese Werthe in 34) ein, indem man nur die früher genannten Werthe berücksichtigt, so kommt, wenn Alles auf P, C, B_1 und B_2 reducirt wird, schliesslich zum Vorschein

$$40)\quad \begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=v} \sum_{i=0}^{i=q-1} f_3(\pi_r - i B_1) = \frac{1}{C} \Bigg[& \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu B_1}{2} - \frac{\mu P}{2} + \frac{B_1^2}{12} + \frac{B_1 P}{4} + \frac{P^2}{6} \\ & + B_1 B_2 \left(\frac{c_{12}(v+1) - v}{4} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=v} r k_r}{v} \right) \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Ergänzt man zur Symmetrie und setzt zu diesem Zwecke vor den letzten Theilsatz einfach ein Summenzeichen, so entsteht

$$\sum_{r=1}^{r=v}\sum_{i=0}^{i=q-1} f_3(\pi_r - i B_1) = \frac{1}{C}\left[\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu(B_1+B_2+B_3+B_4)}{2} - \frac{\mu P}{2}\right.$$

41)
$$+\frac{B_1^2+B_2^2+B_3^2+B_4^2}{12} + \frac{P(B_1+B_2+B_3+B_4)}{4} + \frac{P^2}{6}$$

$$\left. + \sum B_1 B_2 \left(\frac{c_{12}(v+1)-v}{4} - \sum_{r=1}^{r=v} \frac{r k_r}{v}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{C}\left[\tfrac{1}{2}\left(\mu - \frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{2}\right)^2 - \frac{B_1^2+B_2^2+B_3^2+B_4^2}{24}\right.$$

42)
$$-\frac{P}{2}\left(\mu - \frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{2}\right) + \frac{P^2}{6}$$

$$\left. + \sum B_1 B_2 \left(\frac{(c_{12}-1)(v+1)}{4} - \sum_{r=1}^{r=v} \frac{r k_r}{v}\right)\right].$$

Es fallen also in 27) die Theilsätze des Coefficienten von p, welche P enthalten, ganz weg.

Einer Untersuchung bedarf noch der Ausdruck $\sum_1^v r k_r$. Da die k immer nach c_{12} Gliedern wiederkehren, so hat man, wenn $v : c_{12} = \sigma$,

$$\frac{\sum_{r=1}^{r=v} r k_r}{v} = \frac{1}{v}\sum_{s=0}^{s=\sigma-1}\sum_{r=1}^{r=c_{12}} (s c_{12} + r) k_r$$

43)
$$= \frac{1}{v}\sum_{r=1}^{r=c_{12}} \frac{c_{12}\sigma(\sigma-1)}{2} k_r + \frac{\sum_{r=1}^{r=c_{12}} r k_r}{c_{12}}$$

$$= \frac{(v-c_{12})(c_{12}-1)}{4} + \frac{\sum_{r=1}^{r=c_{12}} r k_r}{c_{12}}.$$

Ich werde in einer späteren Abhandlung beweisen, dass es nicht möglich ist, die Summe $\sum_{r=1}^{r=c_{12}} r k_r$ allgemein durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung darzustellen.

Der Ausdruck $\sum r k_r$ soll in einer etwas andern Weise gefasst werden, um dann das Gesammtresultat hinzustellen.

Es war ursprünglich

44)
$$\mu - r B_1 + k_r B_2 \equiv 0 \pmod{c_{12}}.$$

Sucht man nun aus den Congruenzen

45)
$$\left\{\begin{aligned} \mu - B_1 + h_{12} B_2 &\equiv 0 \pmod{c_{12}}, \\ B_1 &\equiv e_{12} B_2 \pmod{c_{12}}, \end{aligned}\right.$$

wo h_{12} und $e_{12} \geqq 0$, aber $< c_{12}$ sein müssen, so erkennt man in den k_r die Reste der arithmetischen Reihe $h_{12} + (r-1) e_{12}$, $r = 1, 2, \ldots c_{12}$ nach dem Modul c_{12}, oder $\sum\limits_{r=1}^{r=c_{12}} r k_r$ kann genommen werden, wenn man die Reste jener Reihe mit dem zugehörigen Index multiplicirt und die Producte addirt; ich nenne den ganzen Ausdruck eine Restproductensumme und will später eine Theorie dieser schon durch die Rolle, welche sie in der hier behandelten Aufgabe spielen, merkwürdigen Summen geben, wobei Reductionsformeln für grosse Moduli, bei denen die Rechnung sonst sehr umständlich wird, entwickelt werden, nebst Tabellen für eine Anzahl von Moduln, die für die gewöhnlichsten Fälle ausreichen. Jene Summen mögen durch $(h_{12}, e_{12})_{c_{12}}$ bezeichnet werden. Scheinbar verstösst der Ausdruck $B_1 B_2 (h_{12}, e_{12})_{c_{12}}$ gegen das Princip der Symmetrie. Ich werde später zeigen, dass, falls

$$46) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu - B_2 + h_{21} B_1 \equiv 0 \ (mod\, c_{12}), \\ B_2 \equiv e_{21} B_1 \ (mod\, c_{12}), \end{array} \right.$$

auch stets $(h_{21}, e_{21})_{c_{12}} = (h_{12}, e_{12})_{c_{12}}$ ist, wodurch die Symmetrie wieder hergestellt ist.

Das Endresultat mag hier übersichtlich zusammengestellt werden.

Es sei gegeben

$$\left. \begin{array}{l} x_1 a_1 b_2 b_3 b_4 c_{23} c_{24} c_{34} \\ + x_2 a_2 b_1 b_3 b_4 c_{13} c_{14} c_{34} \\ + x_3 a_3 b_1 b_2 b_4 c_{12} c_{14} c_{24} \\ + x_4 a_4 b_1 b_2 b_3 c_{12} c_{13} c_{23} \end{array} \right\} = M,$$

wo die b und c immer grösste gemeinschaftliche Theiler bedeuten,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = A, \quad c_{12} c_{13} c_{14} c_{23} c_{24} c_{34} = C, \quad AC = P,$$

$$M = pP + m, \quad m \begin{array}{l} > 0, \\ \leqq P, \end{array}$$

$$m + h_k A_k \equiv 0 \ (mod\, b_k), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$h_k \begin{array}{l} \geqq 0, \\ < b_k, \end{array}$$

$$\mu = \frac{m + h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4}{b_1 b_2 b_3 b_4},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 c_{24} c_{23} c_{34} = B_1, & a_2 c_{13} c_{14} c_{34} = B_2, \\ a_3 c_{12} c_{14} c_{24} = B_3, & a_4 c_{12} c_{13} c_{23} = B_4. \end{array} \right.$$

$f_4(\mu) =$ Anzahl der Lösungen der Gleichung $B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4 = \mu$,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mu - B_i + h_{ik} B_k \equiv 0 \ (mod\, c_{ik}), & B_i \equiv e_{ik} B_k \ (mod\, c_{ik}), & \\ i = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, 4, & & \begin{array}{l} h_{ik} \\ e_{ik} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \geqq 0, \\ < c_{ik}, \end{array} \right. \\ i < k, & & \end{array} \right.$$

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = S_1,$$
$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2 = S_2.$$

Dann gilt für die Lösungsanzahl $f_4(M)$ der ursprünglichen Gleichung die Formel

$$f_4(M)=f_4(\mu)+\frac{1}{C}\left[\frac{P^2p^3}{6}+\frac{Pp^2}{2}\left(\mu-\frac{S_1}{2}\right)+p\left[\frac{\left(\mu-\frac{S_1}{2}\right)^2}{2}-\frac{S_2}{24}\right.\right.$$
44)
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=i+1}^{k=4}B_iB_k\left(\frac{c^2_{ik}-1}{4}-\frac{(h_{ik},e_{ik})_{c_{ik}}}{c_{ik}}\right)\right]\right].$$

Man übersieht sofort, dass für $b_k=1$, $c_{ik}=1$, d. h. für eine Gleichung mit theilfremden Coefficienten, genau das in (I) abgeleitete Resultat zum Vorschein kommt.

Ein Zahlenbeispiel mag den Schluss bilden.

Es sei gegeben

$$130x_1+84x_2+330x_3+693x_4=360449,$$

$$\begin{array}{lll} b_1=3, & c_{34}=1, & a_1=13,\\ b_2=1, & c_{24}=5, & a_2=2,\\ b_3=1, & c_{23}=1, & a_3=1,\\ b_4=2, & c_{14}=1, & a_4=3,\\ & c_{13}=7, & \\ & c_{12}=11, & \end{array}$$

$$A=78,\quad b_1b_2b_3b_4=6,\quad C=385,\quad P=30030,$$

$$M=2P+89,\quad p=2,\quad m=89,$$

$$89+130h_1\equiv 0\ (mod\,3),\qquad h_1=1,\ h_2=0,\ h_3=0,\ h_4=1,$$

$$89+693h_4\equiv 0\ (mod\,2),\qquad A_1h_1+A_2h_2+A_3h_3+A_4h_4=823,$$

$$\mu=\frac{89+823}{6}=152,$$

$$B_1=65,\quad B_2=14,\quad B_3=55,\quad B_4=231,$$

$$S_1=365,\quad S_2=60807,$$

$$65x_1+14x_2+55x_3+231x_4=\mu=152,$$

ergiebt $f_4(\mu)=0$.

$$152-65+14h_{12}\equiv 0\ (mod\,11),\quad 65\equiv 14e_{12}\ (mod\,11),\quad h_{12}=4,\quad e_{12}=7,$$
$$152-65+55h_{13}\equiv 0\ (mod\,7),\quad 65\equiv 55e_{13}\ (mod\,7),\quad h_{13}=3,\quad e_{13}=5,$$
$$152-14+231h_{24}\equiv 0\ (mod\,5),\quad 14\equiv 231e_{24}\ (mod\,5),\quad h_{24}=2,\quad e_{24}=4,$$

$$h_{14}=h_{23}=h_{34}=0,\quad e_{14}=e_{23}=e_{34}=0,$$

$$\mu=\frac{S_1}{2}=-\frac{61}{2},$$

$$f_4(360449)=\frac{30030^2.2^3}{6.385}-\frac{30030.2^2.61}{2.385.2}+\frac{2}{385}\left(\frac{61^2}{2.2^2}-\frac{60807}{24}\right.$$
$$\left.+65.14\left(\frac{11^2-1}{4}-\frac{(4,7)_{11}}{11}\right)+65.55\left(\frac{7^2-1}{4}-\frac{(3,5)_7}{7}\right)+14.231\left(\frac{5^2-1}{4}-\frac{(2,4)_5}{5}\right)\right).$$

Zur Bildung von $(4, 7)_{11}$ hat man

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Reihe:	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74
Reste:	4	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8

Producte: $4+0+21+12+50+36+14+72+45+10+88=352$,

$$(4, 7)_{11}=352.$$

Für $(3, 5)_7$

	1	2	3	4	5	6	7
Reihe:	3	8	13	18	23	28	33
Reste:	3	1	6	4	2	0	5

Producte: $3+2+18+16+10+0+35=84=(3, 5)_7$.

Für $(2, 4)_5$

	1	2	3	4	5
Reihe:	2	6	10	14	18
Reste:	2	1	0	4	3

Producte: $2+2+0+16+15=35=(2, 4)_5$.

Setzt man diese Werthe oben ein, so entsteht

$$f_4(360449)=3118325.$$

XII.

Ueber einige Anwendungen der elliptischen Functionen auf sphärische Kegelschnitte.

Von

Prof. Enneper

in Göttingen.

Für confocale ebene Kegelschnitte bestehen bekanntlich die beiden folgenden Sätze:

Wenn von einem beliebigen Punkte einer Ellipse an eine confocale Ellipse zwei Tangenten gezogen sind, so ist der Ueberschuss der Summe dieser Tangenten über den zwischen ihren Berührungspunkten enthaltenen Bogen der Ellipse constant.

Wenn von einem beliebigen Punkte einer Hyperbel an eine mit ihr confocale Ellipse Tangenten gezogen werden, so ist die Differenz der Tangenten gleich der Differenz der Ellipsenbogen, bestimmt durch die Berührungspunkte der Tangenten und den Schnittpunkt mit der Hyperbel.

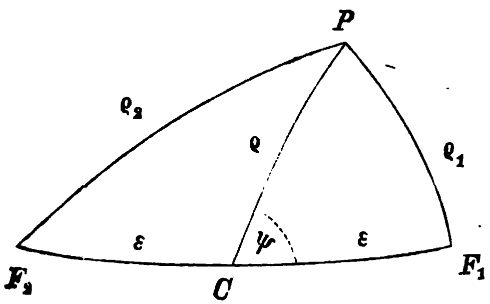
Sehr einfache geometrische Beweise dieser Sätze findet man in dem bekannten Werke von Salmon: Analytische Geometrie der Kegelschnitte, deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler. (Artikel 262 und 263). Wendet man analytische Betrachtungen an, so lassen sich die beiden Sätze durch Anwendung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung auf Ellipsen- und Hyperbelbogen ohne Weitläufigkeit herleiten.

Nicht so einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn an Stelle der ebenen Kegelschnitte sphärische Ellipsen und Hyperbeln treten. Die Bogenlängen dieser Curven erscheinen bekanntlich in Form von elliptischen Integralen dritter Gattung. Die Anwendung des Additionstheorems für derartige Integrale führt leicht zu sehr ausgedehnten und complicirten Rechnungen, deren Umgehung durch Anwendung möglichst symmetrischer Formeln im Folgenden versucht ist. Der leichteren Uebersicht halber mögen einige Formeln vorausgeschickt werden, welche sich auf sphärische Kegelschnitte beziehen.

I. Den geraden Linien der Ebene entsprechen auf einer Kugelfläche Bogen grösster Kreise, ist also von der Distanz zweier Punkte auf der Kugelfläche die Rede, so wird als Mass derselben der Bogen des Kreises angenommen, dessen Ebene die beiden Punkte und den Mittelpunkt der Kugelfläche enthält. Analog wie in der Ebene sei eine sphärische Ellipse oder Hyperbel durch die Bedingung bestimmt, dass die Summe oder Differenz der Distanzen eines Punktes der Curve von zwei festen Punkten der Kugelfläche constant ist.

Es seien F_1 und F_2 zwei feste Punkte der Kugelfläche, $F_1F_2 = 2\varepsilon$ die Distanz derselben, C die Mitte des Bogens F_1F_2, so dass

$$CF_1 = CF_2 = \varepsilon.$$



Ein Punkt P der Kugelfläche sei durch die Bedingung bestimmt, dass $PF_1 \pm PF_2$ constant ist. Der Punkt P werde mit den Punkten F_1, C und F_2 durch Bogen verbunden. Man setze

$$PF_1 = \varrho_1, \quad PF_2 = \varrho_2, \quad PC = \varrho.$$

Ferner sei $\angle PCF_1 = \psi$. Die beiden sphärischen Dreiecke PCF_1 und PCF_2 geben

$$\cos\varrho_1 = \cos\varrho\cos\varepsilon + \sin\varrho\sin\varepsilon\cos\psi,$$
$$\cos\varrho_2 = \cos\varrho\cos\varepsilon - \sin\varrho\sin\varepsilon\cos\psi.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen folgt

$$\cos\varrho\cos\varepsilon = \frac{\cos\varrho_1 + \cos\varrho_2}{2} = \cos\frac{\varrho_2+\varrho_1}{2}\cos\frac{\varrho_2-\varrho_1}{2},$$

$$\sin\varrho\cos\varepsilon\cos\psi = \frac{\cos\varrho_1 - \cos\varrho_2}{2} = \sin\frac{\varrho_2+\varrho_1}{2}\sin\frac{\varrho_2-\varrho_1}{2}.$$

Bedeutet α eine Constante, so ist für die sphärische Ellipse $\varrho_2+\varrho_1 = 2\alpha$, für die Hyperbel $\varrho_2 - \varrho_1 = 2\alpha$. In beiden Fällen geben die vorstehenden Gleichungen

$$\left(\frac{\cos\varrho\cos\varepsilon}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varrho\sin\varepsilon\cos\psi}{\sin\alpha}\right)^2 = 1$$

oder

$$1) \qquad \cot^2\varrho = \frac{\cos^2\psi}{\tang^2\alpha} + \frac{\sin^2\psi}{\dfrac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\alpha} - 1}.$$

Für die Ellipse ist $\varepsilon < \alpha$, für die Hyperbel dagegen ist $\varepsilon > \alpha$.

Es sei r der Radius der Kugelfläche, der Mittelpunkt derselben sei der Anfangspunkt orthogonaler Coordinaten. Die Axe der z möge den Punkt C enthalten, der Bogen F_1CF_2 liege in der xz-Ebene. Für einen Punkt (x, y, z) der Kugelfläche finden dann folgende Gleichungen statt:

$$2)\qquad \frac{x}{r} = \sin\varrho\cos\psi,\quad \frac{y}{r} = \sin\varrho\sin\psi,\quad \frac{z}{r} = \cos\varrho,$$

wo ϱ der Winkel ist, welchen der Radius vector des Punktes mit der z-Axe bildet, und ψ der Winkel ist, welchen die Projection des Radius vectors auf die xy-Ebene mit der x-Axe einschliesst. Für eine sphärische Ellipse oder Hyperbel findet zwischen ϱ und ψ die Gleichung 1) statt.

Für die Ellipse setze man in 1)

$$3)\qquad \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\alpha} - 1 = \tang^2\beta,\quad \text{d. i.}\quad \cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Die Gleichung 1) nimmt dann folgende Form an:

$$4)\qquad \cot^2\varrho = \frac{\cos^2\psi}{\tang^2\alpha} + \frac{\sin^2\psi}{\tang^2\beta}.$$

Statt des Winkels ψ führe man einen Winkel φ mittelst der Gleichung ein:

$$5)\qquad \cot\psi = \frac{\tang\alpha}{\tang\beta}\tang\varphi.$$

Die Gleichung 4) geht hierdurch über in

$$6)\qquad \tang^2\varrho = \tang^2\alpha\sin^2\varphi + \tang^2\beta\cos^2\varphi.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 5) und 6) nehmen die Gleichungen 2) folgende Formen an:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{\tang\alpha\sin\varphi}{\sqrt{1+\tang^2\alpha\sin^2\varphi+\tang^2\beta\cos^2\varphi}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\varphi}},\\ \frac{y}{r} &= \frac{\tang\beta\cos\varphi}{\sqrt{1+\tang^2\alpha\sin^2\varphi+\tang^2\beta\cos^2\varphi}} = \frac{\sin\beta\cos\alpha\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\varphi}},\\ \frac{z}{r} &= \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2\alpha\sin^2\varphi+\tang^2\beta\cos^2\varphi}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\varphi}}.\end{aligned}\right.$$

Durch diese Gleichungen ist ein Punkt der sphärischen Ellipse in Function des Winkels φ bestimmt. Definirt man die excentrische Anomalie für die Kugelfläche ganz analog wie bei einer ebenen Ellipse, so ist φ das Complement der excentrischen Anomalie. Da $\varepsilon < \alpha$, so ist infolge der Gleichung 3) auch $\beta < \alpha$.

Bezeichnet man durch ds das Bogenelement der sphärischen Ellipse, so geben die Gleichungen 7)

$$8)\qquad \frac{1}{r}\,\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2\beta\sin^2\varphi}}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\beta\sin^2\varphi}.$$

Man setze

$$9)\qquad \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = k^2,\quad k^2+k'^2=1,$$

oder

$$10)\qquad \sin\beta = k'\sin\alpha,\quad \cos\beta = \sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}.$$

Nimmt man ferner $\varphi = am\,w$, so nimmt die Gleichung 8) die Form an

$$11)\qquad \frac{1}{r}\frac{ds}{dw}=\frac{\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\,\frac{\Delta^2 am\, w}{1+k^2\,tang^2\alpha\,\sin^2 am\, w}.$$

Setzt man endlich $\alpha = am\,(a, k')$, also, für $i=\sqrt{-1}$,

$$12)\quad \sin\alpha=\frac{\sin am\, a\, i}{i\cos am\, a\, i},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\cos am\, a\, i},\quad \sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}=\frac{\Delta am\, a\, i}{\cos am\, a\, i},$$

so wird die Gleichung 11)

$$13)\qquad \frac{1}{r}\frac{ds}{dw}=\frac{\sin am\, a\, i\,\Delta am\, a\, i}{i\cos am\, a\, i}\,\frac{\Delta^2 am\, w}{1-k^2\sin^2 am\, a\, i\,\sin^2 am\, w}.$$

Durch Integration in Beziehung auf w nimmt die rechte Seite der vorstehenden Gleichung die bekannte Form eines elliptischen Integrals dritter Gattung an, welches sich leicht auf die von Legendre betrachtete Normalform reduciren lässt.

Die Gleichungen 7) lassen sich durch die beiden folgenden bekannten Gleichungen ersetzen, welche die sphärische Ellipse als Durchschnitt der Kugelfläche mit einer elliptischen Kegelfläche definiren, deren Spitze im Mittelpunkt der Kugelfläche liegt:

$$14)\qquad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$15)\qquad \frac{x^2}{tang^2\alpha}+\frac{y^2}{tang^2\beta}=z^2.$$

Die berührende Ebene zur Kegelfläche im Punkte (x, y, z) schneidet die Kugelfläche in einem grössten Kreise, welcher gleichzeitig die sphärische Ellipse im Punkte (x, y, z) berührt. Sind X, Y, Z die laufenden Coordinaten, so ergiebt sich mittelst der Gleichung 15)

$$\frac{Xx}{tang^2\alpha}+\frac{Yy}{tang^2\beta}=Zz$$

als Gleichung der Ebene des bemerkten Kreises. Substituirt man für x, y, z ihre Werthe aus 7), so folgt

$$16)\qquad \frac{X\sin\varphi}{tang\,\alpha}+\frac{Y\cos\varphi}{tang\,\beta}=Z.$$

Durch diese Gleichung ist die sphärische Tangente im Punkte (x, y, z) der Ellipse bestimmt.

II. Es sei (x_1, y_1, z_1) ein Punkt einer zweiten sphärischen Ellipse, welche mit der ersten concentrisch ist und deren Brennpunkte auf dem Bogen F_1F_2 liegen. Analog wie die Gleichungen 7) hat man

$$17)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{x_1}{r}&=\frac{tang\,\alpha_1\sin\varphi_1}{\sqrt{1+tang^2\alpha_1\sin^2\varphi_1+tang^2\beta_1\cos^2\varphi_1}},\\
\frac{y_1}{r}&=\frac{tang\,\beta_1\cos\varphi_1}{\sqrt{1+tang^2\alpha_1\sin^2\varphi_1+tang^2\beta_1\cos^2\varphi_1}},\\
\frac{z_1}{r}&=\frac{1}{\sqrt{1+tang^2\alpha_1\sin^2\varphi_1+tang^2\beta_1\cos^2\varphi_1}},
\end{aligned}\right.$$

wo φ_1 ein variabeler Winkel ist. Fallen die Brennpunkte beider Ellipsen zusammen, d. h. sind dieselben confocal, so folgt nach 3)

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}.$$

Durch Quadrirung dieser Gleichung folgt

$$\frac{1+tang^2\alpha_1}{1+tang^2\alpha} = \frac{1+tang^2\beta_1}{1+tang^2\beta}$$

oder

$$(1+tang^2\beta)\,tang^2\alpha_1 - (1+tang^2\alpha)\,tang^2\beta_1 = tang^2\alpha - tang^2\beta.$$

Diese Gleichung durch $(1+tang^2\beta)\,tang^2\alpha$ dividirt, giebt

$$\left(\frac{tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha}\right)^2 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\left(\frac{tang\,\beta_1}{tang\,\beta}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha},$$

d. i. nach 10)

$$\left(\frac{tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha}\right)^2 - k'^2\left(\frac{tang\,\beta_1}{tang\,\beta}\right)^2 = k^2.$$

Die vorstehende Gleichung lässt sich ersetzen durch die beiden folgenden:

18) $$\frac{tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha} = \frac{\Delta\, am\, b}{\cos am\, b}, \quad \frac{tang\,\beta_1}{tang\,\beta} = \frac{1}{\cos am\, b}.$$

Lässt man $am\,b$ variiren, so geben die Gleichungen 17) und 18) alle confocalen sphärischen Ellipsen, zu der Ellipse bestimmt durch die Gleichungen 14) und 15).

Liegt der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der sphärischen Tangente zur ersten Ellipse im Punkte (x, y, z), so muss die Gleichung 16) bestehen für $X = x_1$, $Y = y_1$, $Z = z_1$. Wegen der Gleichungen 17) erhält man

19) $$\frac{tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha}\sin\varphi\sin\varphi_1 + \frac{tang\,\beta_1}{tang\,\beta}\cos\varphi\cos\varphi_1 = 1,$$

d. i. nach 18)

20) $$\Delta\, am\, b\sin\varphi\sin\varphi_1 + \cos\varphi\cos\varphi_1 = \cos am\, b.$$

Nimmt man zur Vereinfachung $\varphi_1 = am\,u$, so giebt die vorstehende Gleichung für φ die beiden Werthe $am(u+b)$ und $am(u-b)$. Legt man also vom Punkte (x_1, y_1, z_1) an die erste Ellipse zwei sphärische Tangenten, so ergeben sich aus 7) die Contactpunkte für $\varphi = am(u+b)$ und $\varphi = am(u-b)$. Ist s die Länge des zwischenliegenden Bogens, so giebt die Gleichung 11)

$$\frac{s}{r} = \frac{\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\int_{u-b}^{u+b}\frac{\Delta^2 am\, w}{1+k^2 tang^2\alpha\sin^2 am\, w}\,dw$$

oder

$$\frac{s}{r}=\frac{2\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\int_0^b\frac{\Delta^2 am\,w}{1+k^2\,tang^2\alpha\,\sin^2 am\,w}\,dw$$

$$+\frac{\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\left[\int_0^{u+b}-\int_0^u-\int_0^b\right]$$

$$+\frac{\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\left[\int_0^{u}-\int_0^{u-b}-\int_0^b\right].$$

Die Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Integrale dritter Gattung giebt

$$\frac{s}{r}=\frac{2\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\int_0^b\frac{\Delta^2 am\,w}{1+k^2\,tang^2\alpha\,\sin^2 am\,w}\,dw$$

$$-\,arctang\,\frac{\dfrac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am(u+b)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am(u+b)}$$

$$-\,arctang\,\frac{\dfrac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am(u-b)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am(u-b)}$$

oder kürzer

$$21)\qquad \frac{s}{r}=\frac{2\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\int_0^b\frac{\Delta^2 am\,w}{1+k^2\,tang^2\alpha\,\sin^2 am\,w}\,dw,$$

$$-\,arctang\,\theta,$$

wo

$$22)\qquad arctang\,\theta=arctang\,\frac{\dfrac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am(u+b)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am(u+b)}$$

$$+\,arctang\,\frac{\dfrac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am(u-b)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am(u-b)}.$$

Die Nenner auf den rechten Seiten der Gleichung 22) lassen sich noch etwas vereinfachen mittelst der Gleichung

$$k'^2+k^2\cos am\,u\cos am\,b\cos am(u\pm b)=\Delta am\,u\,\Delta am\,b\,\Delta am(u\pm b).$$

Man wende auf die rechte Seite von 22) die Relation an

$$arctang\,\sigma+arctang\,\tau=arctang\,\frac{\sigma+\tau}{1-\sigma\tau},$$

so dass die bemerkte Gleichung die Form annimmt

$$\theta = \frac{\sigma + \tau}{1 - \sigma\tau}.$$

Entwickelt man $\sin am(u \pm b)$ und $\cos am(u \pm b)$, so ergiebt sich, dass Zähler und Nenner von θ durch $1 + k^2 \operatorname{tang}^2\alpha \sin^2 am u$ theilbar sind. Mit Weglassung dieses gemeinschaftlichen Factors findet man

$$23)\quad \theta = \frac{\frac{2k^2 \operatorname{tang}\alpha \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tang}^2\alpha}}{\cos\alpha} \sin am b \cos am b \, \Delta am b \sin^2 am u}{(1 + k^2 \operatorname{tang}^2\alpha \sin^2 am b)^2 + H k^2 \sin^2 am u},$$

$$H = \operatorname{tang}^2\alpha \cos^2 am b \, \Delta^2 am b - \sin^2 am b (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)(1 + k^2 \operatorname{tang}^2\alpha).$$

Man setze nach 12) $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang} am a i}{i}$. Es ist dann

$$\frac{2 \operatorname{tang}\alpha \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tang}^2\alpha}}{\cos\alpha} \sin am b \cos am b \, \Delta am b$$
$$= \frac{2}{i} \sin am a i \cos am a i \, \Delta am a i \sin am b \cos am b \, \Delta am b$$
$$= \frac{\sin^2 am(ai + b) - \sin^2 am(ai - b)}{2i} (1 - k^2 \sin^2 am a i \sin^2 am b)^2,$$
$$H = -(\sin^2 am a i \cos^2 am b \, \Delta^2 am b + \sin^2 am b \cos^2 am i \, \Delta^2 am a i)$$
$$= -\frac{\sin^2 am(ai + b) + \sin^2 am(ai - b)}{2} (1 - k^2 \sin^2 am a i \sin^2 am b)^2.$$

Die Gleichung 23) lässt sich hierdurch auf folgende Form bringen:

$$i\theta = k^2 \frac{[\sin^2 am(ai + b) - \sin^2 am(ai - b)] \sin^2 am u}{2 - k^2[\sin^2 am(ai + b) + \sin^2 am(ai - b)] \sin^2 am u}.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$24)\quad \begin{cases} M = 1 - k^2 \sin^2 am(ai + b) \sin^2 am u, \\ N = 1 - k^2 \sin^2 am(ai - b) \sin^2 am u, \end{cases}$$

so ist einfacher

$$25)\quad i\theta = \frac{N - M}{N + M}.$$

Durch die vorstehende Gleichung ist der Werth von θ in der Gleichung 21) auf seine einfachste Form gebracht.

Es seien wieder (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) zwei Punkte der beiden confocalen Ellipsen; die Länge des Verbindungsbogens werde durch λ bezeichnet, so dass

$$\cos\lambda = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r^2}.$$

Mittelst der Gleichungen 7) und 17) giebt die vorstehende Gleichung

$$\cos\lambda \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha \sin^2\varphi + \operatorname{tang}^2\beta \cos^2\varphi} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha_1 \sin^2\varphi_1 + \operatorname{tang}^2\beta_1 \cos^2\varphi_1}$$
$$= \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha_1 \sin\varphi \sin\varphi_1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\beta_1 \cos\varphi \cos\varphi_1 + 1$$

oder

$$tang^2\lambda\,(tang\,\alpha\,tang\,\alpha_1\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1+tang\,\beta\,tang\,\beta_1\,cos\,\varphi\,cos\,\varphi_1+1)^2$$
$$=(tang\,\alpha\,sin\,\varphi-tang\,\alpha_1\,sin\,\varphi_1)^2+(tang\,\beta_1\,cos\,\varphi_1-tang\,\beta\,cos\,\varphi)^2$$
$$+(tang\,\alpha\,tang\,\beta_1\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi_1-tang\,\alpha_1\,tang\,\beta\,sin\,\varphi_1\,cos\,\varphi)^2.$$

Setzt man für $tang\beta$, $tang\alpha_1$ und $tang\beta_1$ ihre Werthe aus 10) und 18), so folgt

$$tang^2\lambda\left[tang^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1+\frac{k'^2\,sin^2\alpha\,cos\,\varphi\,cos\,\varphi_1}{1-k'^2\,sin^2\alpha}+cos\,am\,b\right]^2$$

26)
$$=tang^2\alpha\,(sin\,\varphi\,cos\,am\,b-sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b)^2$$
$$+\frac{k'^2\,sin^2\alpha}{1-k'^2\,sin^2\alpha}(cos\,\varphi_1-cos\,\varphi\,cos\,am\,b)^2$$
$$+\frac{k'^2\,sin^4\alpha}{cos^2\alpha\,(1-k'^2\,sin^2\alpha)}(sin\,\varphi\,cos\,\varphi_1-cos\,\varphi\,sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b)^2.$$

Zwischen den Winkeln φ und φ_1 finde die Gleichung 20) statt. Setzt man für $cos\,am\,b$ seinen Werth, nämlich

$$cos\,am\,b=\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1+cos\,\varphi\,cos\,\varphi_1,$$

so folgt

$$sin\,\varphi\,cos\,am\,b-sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b=(sin\,\varphi\,cos\,\varphi_1-cos\,\varphi\,sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b)\,cos\,\varphi,$$
$$cos\,\varphi_1\,cos\,\varphi\,cos\,am\,b=(sin\,\varphi\,cos\,\varphi_1-cos\,\varphi\,sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b)\,sin\,\varphi.$$

Mittelst dieser Gleichungen transformire man die rechte Seite der Gleichung 26). Im Factor von $tang^2\lambda$ setze man nach 20)

$$cos\,\varphi\,cos\,\varphi_1=cos\,am\,b-\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1,$$

so dass

$$tang^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1+\frac{k'^2\,sin^2\alpha\,cos\,\varphi\,cos\,\varphi_1}{1-k'^2\,sin^2\alpha}+cos\,am\,b$$
$$=\frac{cos\,am\,b\,cos^2\alpha+k^2\,sin^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1}{(1-k'^2\,sin^2\alpha)\,cos^2\alpha}.$$

Die Gleichung 26) lässt sich hierdurch auf folgende Form bringen:

$$tang^2\lambda\,[cos\,am\,b+k^2\,tang^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,\varphi\,sin\,\varphi_1]^2$$
$$=tang^2\alpha\,(1-k'^2\,sin^2\alpha)(1-k^2\,sin^2\varphi)(sin\,\varphi\,cos\,\varphi_1-cos\,\varphi\,sin\,\varphi_1\,\Delta am\,b)^2.$$

Man setze $\varphi_1=am\,u$. Für $\varphi=am(u+b)$ sei $\lambda=\lambda_1$, für $\varphi=am(u-b)$ sei $\lambda=\lambda_2$. Die Werthe von λ_1 und λ_2 sind dann bestimmt durch

$$tang\,\lambda_1=\frac{sin\,\alpha\,cos\,\alpha\sqrt{1-k'^2\,sin^2\alpha}\,sin\,am\,b\,\Delta am\,u\,\Delta am(u+b)}{cos\,am\,b\,cos^2\alpha+k^2\,sin^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,am\,u\,sin\,am(u+b)},$$
$$tang\,\lambda_2=\frac{sin\,\alpha\,cos\,\alpha\sqrt{1-k'^2\,sin^2\alpha}\,sin\,am\,b\,\Delta am\,u\,\Delta am(u-b)}{cos\,am\,b\,cos^2\alpha+k^2\,sin^2\alpha\,\Delta am\,b\,sin\,am\,u\,sin\,am(u-b)}.$$

Es sind λ_1 und λ_2 die sphärischen Tangenten, gezogen vom Punkte (x_1, y_1, z_1) an die Ellipse, bestimmt durch die Gleichungen 14) und 15). Bezeichnet man die Längen dieser Tangenten zwischen dem Punkte (x_1, y_1, z_1) und den Contactpunkten durch T_1 und T_2, so ist

27) $$\frac{t_1}{r}=\lambda_1,\quad\frac{t_2}{r}=\lambda_2.$$

Bildet man aus den Gleichungen für $tang\lambda_1$ und $tang\lambda_2$ den Werth von $tang(\lambda_1+\lambda_2)$, entwickelt $\sin am(u\pm b)$ und $\Delta am(u\pm b)$, so lässt sich in $tang(\lambda_1+\lambda_2)$ Zähler und Nenner durch $\cos^2\alpha+k^2\sin^2\alpha\sin^2 am u$ dividiren. Man findet

$$tang(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}\sin am b\cos am b\,\Delta am b\,\Delta^2 am u}{H_1+H_2 k^2\sin^2 am u},$$

$$H_1=\cos^2\alpha\cos^2 am b-\sin^2\alpha\sin^2 am b(1-k'^2\sin^2\alpha)\Delta^2 am b,$$

$$H_2=\sin^2\alpha\,\Delta^2 am b-\sin^2 am b\cos^2 am b\cos^2\alpha(1-k'^2\sin^2\alpha).$$

Setzt man wieder nach 12) $\sin\alpha=\frac{tang\, am\, a i}{i}$, so ist

$$H_1(1-k^2\sin^2 am a i\sin^2 am b)^2=\frac{\cos^2 am(ai+b)+\cos^2 am(ai-b)}{2\cos^4 am a i},$$

$$H_2(1-k^2\sin^2 am a i\sin^2 am b)^2$$
$$=-\frac{\sin^2 am(ai+b)\cos^2 am(ai-b)+\sin^2 am(ai-b)\cos^2 am(ai+b)}{2\cos^4 am a i}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 24) und 25) ist nun

$$(H_1+H_2k^2\sin^2 am u)(1-k^2\sin^2 am a i\sin^2 am b)^2$$
$$=\frac{M\cos^2 am(ai-b)+N\cos^2 am(ai+b)}{2\cos^4 am a i}.$$

Es ist ferner wegen 24) und 25)

$$[\sin^2 am(ai+b)-\sin^2 am(ai-b)]\,\Delta^2 am u$$
$$=M\cos^2 am(ai-b)-N\cos^2 am(ai+b).$$

Die obige Gleichung für $tang(\lambda_1+\lambda_2)$ lässt sich nun schreiben

$$28)\qquad tang(\lambda_1+\lambda_2)=\frac{1}{i}\,\frac{M\cos^2 am(ai-b)-N\cos^2 am(ai-b)}{M\cos^2 am(ai-b)+N\cos^2 am(ai+b)}.$$

Setzt man

$$29)\qquad \theta_1=\frac{1}{i}\,\frac{M\cos^2 am(ai-b)-N\cos^2 am(ai+b)}{M\cos^2 am(ai-b)+N\cos^2 am(ai+b)},$$

so ist nach 28)

$$30)\qquad \lambda_1+\lambda_2=arctang\,\theta_1.$$

Die Gleichungen 25) und 29) geben

$$31)\qquad \frac{\theta+\theta_1}{1-\theta\theta_1}=\frac{1}{i}\,\frac{\cos^2 am(ai-b)-\cos^2 am(ai+b)}{\cos^2 am(ai-b)+\cos^2 am(ai+b)}.$$

Aus 27) und 30) folgt
$$\frac{t_1+t_2}{r}=arctang\,\theta_1.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung 21) ab, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 12) und 31)

$$\frac{s-t_1-t_2}{r}=\frac{2}{i}\,tang\, am\, a i\,\Delta am\, a i\int_0^b\frac{\Delta^2 am w}{1-k^2\sin^2 am a i\sin^2 am w}dw$$
$$-arctang\left[\frac{1}{i}\,\frac{\cos am^2(ai-b)-\cos^2 am(ai+b)}{\cos^2 am(ai-b)+\cos^2 am(ai+b)}\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von u unabhängig, d. h. unabhängig von der Lage des Punktes (x_1, y_1, z_1) auf dem Umfange der confocalen Ellipse. Die vorstehende Gleichung giebt unmittelbar den ersten der zu Anfang bemerkten Sätze.

III. Ist in der Gleichung 1) $\varepsilon > \alpha$, so ist durch dieselbe eine sphärische Hyperbel bestimmt. Da diese Curve in Verbindung mit einer confocalen Ellipse betrachtet werden soll, so setze man in 1) α_1 und ε_1 statt α und ε. Ferner werde ein Punkt der Hyperbel durch (x_1, y_1, z_1) bezeichnet, so dass also

$$32)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1}{r} = \sin\varrho\cos\psi, \quad \frac{y_1}{r} = \sin\varrho\sin\psi, \quad \frac{z_1}{r} = \cos\varrho, \\ &\cot^2\varrho = \frac{\cos^2\psi}{\tan^2\alpha_1} - \frac{\sin^2\psi}{1-\frac{\cos^2\varepsilon_1}{\cos^2\alpha_1}}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man

$$33)\quad 1-\frac{\cos^2\varepsilon_1}{\cos^2\alpha_1} = \tan^2\beta_1, \quad \cos^2\varepsilon_1 = (1-\tan^2\beta_1)\cos^2\alpha_1,$$

so geben die Gleichungen 32) für x_1, y_1, z_1 folgende Werthe:

$$34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1}{r} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{D}}, \quad \frac{y_1}{r} = \frac{\sin\psi}{\sqrt{D}}, \quad \frac{z_1}{r} = \frac{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{\tan^2\alpha_1} - \frac{\sin^2\psi}{\tan^2\beta_1}}}{\sqrt{D}}, \\ &D = 1 + \frac{\cos^2\psi}{\tan^2\alpha_1} - \frac{\sin^2\psi}{\tan^2\beta_1}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die beiden folgenden ersetzen:

$$35)\quad \left\{\begin{aligned} &x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2, \\ &\frac{x_1^2}{\tan^2\alpha_1} - \frac{y_1^2}{\tan^2\beta_1} = z_1^2. \end{aligned}\right.$$

Ist die Hyperbel confocal mit der Ellipse, bestimmt durch die Gleichungen 14) und 15), so hat man $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Die Gleichungen 3) und 33) geben dann

$$\cos^2\varepsilon = (1-\tan^2\beta_1)\cos^2\alpha_1 = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

oder mit Rücksicht auf 10)

$$1-\tan^2\beta_1 = (1+\tan^2\alpha_1)\frac{\cos^2\alpha}{1-k'^2\sin^2\alpha}.$$

Wegen $\tan^2\beta = \dfrac{k'^2\sin^2\alpha}{1-k'^2\sin^2\alpha}$ erhält man hieraus

$$\left(\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta}\right)^2 = \frac{1}{k'^2}\left[k^2 - \left(\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha}\right)^2\right].$$

Diese Gleichung lässt sich ersetzen durch

$$36)\quad \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha} = k\sin am\, b, \quad \frac{\tan\beta_1}{\tan\beta} = \frac{k\cos am\, b}{k'}.$$

Für den Durchschnitt der Ellipse und Hyperbel ist in den Gleichungen 14), 15) und 35) $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Setzt man unter dieser Voraussetzung die Werthe von x, y, z in die zweite Gleichung 35), so giebt dieselbe

$$\left(\frac{tang\,\alpha}{tang\,\alpha_1}\right)^2 sin^2\varphi - \left(\frac{tang\,\beta}{tang\,\beta_1}\right)^2 cos^2\varphi = 1.$$

Hieraus folgt $\varphi = am\,b$. Für den Schnittpunkt der beiden confocalen Curven ist also in den Gleichungen 7) $\varphi = am\,b$.

Es sei wieder k durch die Gleichung 9) bestimmt. Setzt man in 34)

$$tang\,\psi = \frac{tang\,\beta_1}{tang\,\alpha_1} \frac{k'}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi_1}},$$

so lassen sich die Werthe von x_1, y_1, z_1 auf folgende Formen bringen:

$$37)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{tang\,\alpha_1 \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi_1}}{\sqrt{D_1}}, \quad \dfrac{y_1}{r} = \dfrac{k'\,tang\,\beta_1}{\sqrt{D_1}}, \quad \dfrac{z_1}{r} = \dfrac{k\,cos\,\varphi_1}{\sqrt{D_1}}, \\ D_1 = (1 - k^2 sin^2\varphi_1)\,tang^2\alpha_1 + k'^2\,tang^2\beta_1 + k^2 cos^2\varphi_1. \end{array} \right.$$

Der Punkt (x_1, y_1, z_1) der Hyperbel liege auf der sphärischen Tangente zur Ellipse im Punkte (x, y, z). Die Gleichung 16) muss dann für $X = x_1$, $Y = y_1$, $Z = z_1$ bestehen. Wegen der Gleichungen 37) erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha} sin\,\varphi \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi_1} + k' \frac{tang\,\beta_1}{tang\,\beta} cos\,\varphi = k\,cos\,\varphi_1,$$

d. i. nach 36)

$$38)\qquad sin\,am\,b\; sin\,\varphi\; \Delta(\varphi_1) + cos\,am\,b\; cos\,\varphi = cos\,\varphi_1.$$

Für $\varphi_1 = am\,u$ giebt die vorstehende Gleichung $\varphi = am(b+u)$ und $\varphi = am(b-u)$. Legt man von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) der Hyperbel an die confocale Ellipse zwei sphärische Tangenten, so sind die Contactpunkte durch die Gleichungen 7) für $\varphi = am(b+u)$ und $\varphi = am(b-u)$ bestimmt. Die Ellipsenbogen zwischen diesen Contactpunkten und dem Schnittpunkte beider Curven bezeichne man durch s_1 und s_2. Die Gleichung 11) giebt

$$\frac{s_1}{r} = \frac{sin\,\alpha \sqrt{1 - k'^2 sin^2\alpha}}{cos\,\alpha} \int_b^{b+u} \frac{\Delta^2 am\,w}{1 + k^2\,tang^2\alpha\; sin^2 am\,w}\,dw,$$

$$\frac{s_2}{r} = \frac{sin\,\alpha \sqrt{1 - k'^2 sin^2\alpha}}{cos\,\alpha} \int_{b-u}^{b} \frac{\Delta^2 am\,w}{1 + k^2\,tang^2\alpha\; sin^2 am\,w}\,dw.$$

Hieraus folgt

$$\frac{s_2 - s_1}{r} = \frac{sin\,\alpha \sqrt{1 - k'^2 sin^2\alpha}}{cos\,\alpha} \left[\int_0^b - \int_0^u - \int_0^{b-u}\right]$$

$$- \frac{sin\,\alpha \sqrt{1 - k'^2 sin^2\alpha}}{cos\,\alpha} \left[\int_0^{b+u} - \int_0^b - \int_0^u\right].$$

Die Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Integrale dritter Gattung giebt

$$
39)\quad \begin{aligned}\frac{s_2-s_1}{r} &= arctang\,\frac{\frac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am\,(b+u)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am\,(b+u)}\\
&- arctang\,\frac{\frac{k^2\,tang\,\alpha\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}\sin am\,b\,\sin am\,u\,\sin am\,(b-u)}{1+k^2\,tang^2\alpha-k^2\,tang^2\alpha\cos am\,b\cos am\,u\cos am\,(b-u)}.\end{aligned}
$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat dieselbe Form wie die rechte Seite der Gleichung 22) für $arctang\,\theta$.

Setzt man die Werthe von x, y, z und x_1, y_1, z_1 in

$$\cos\mu = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r^2},$$

so folgt zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$\cos\mu = \frac{tang\,\alpha\sin\varphi\,tang\,\alpha_1\,\varDelta(\varphi_1)+tang\,\beta\cos\varphi\,k'\,tang\,\beta_1+k\cos\varphi_1}{\sqrt{tang^2\alpha\sin^2\varphi+tang^2\beta\cos^2\varphi+1}\,\sqrt{tang^2\alpha_1\,\varDelta^2(\varphi_1)+k'^2\,tang^2\beta_1+k^2\cos^2\varphi_1}}.$$

Aus dieser Gleichung leitet man ohne Schwierigkeit die folgende ab:

$$\begin{aligned}&tang^2\mu\,[tang\,\alpha\,tang\,\alpha_1\sin\varphi\,\varDelta(\varphi_1)+k'\,tang\,\beta\,tang\,\beta_1\cos\varphi+k\cos\varphi_1]^2\\
&\quad=[k\,tang\,\alpha\sin\varphi\cos\varphi_1-tang\,\alpha_1\,\varDelta(\varphi_1)]^2\\
&\quad+[k'\,tang\,\beta_1-k\,tang\,\beta\cos\varphi\cos\varphi_1]^2\\
&\quad+[k'\,tang\,\alpha\,tang\,\beta_1\sin\varphi-tang\,\beta\,tang\,\alpha_1\cos\varphi\,\varDelta(\varphi_1)]^2.\end{aligned}$$

Setzt man für $tang\,\beta$, $tang\,\alpha_1$, $tang\,\beta_1$ ihre Werthe aus 10) und 36), so folgt

$$\begin{aligned}&tang^2\mu\left[tang^2\alpha\sin am\,b\sin\varphi\,\varDelta(\varphi_1)+\frac{k'^2\sin^2\alpha\cos am\,b\cos\varphi}{1-k'^2\sin^2\alpha}+\cos\varphi_1\right]^2\\
&\quad=tang^2\alpha\,[\sin\varphi\cos\varphi_1-\sin am\,b\,\varDelta(\varphi_1)]^2\\
&\quad+\frac{k'^2\sin^2\alpha}{1-k'^2\sin^2\alpha}[\cos am\,b-\cos\varphi\cos\varphi_1]^2\\
&\quad+\frac{k'^2\sin^4\alpha}{(1-k'^2\sin^2\alpha)\cos^2\alpha}[\sin\varphi\cos am\,b-\cos\varphi\sin am\,b\,\varDelta(\varphi_1)]^2.\end{aligned}$$

In die beiden ersten Quadrate auf der rechten Seite setze man nach 38)

$$\cos\varphi_1=\sin\varphi\sin am\,b\,\varDelta(\varphi_1)+\cos\varphi\cos am\,b.$$

Mittelst derselben Gleichung setze man im Factor von $tang^2\mu$

$$\cos\varphi\cos am\,b=\cos\varphi_1-\sin\varphi\sin am\,b\,\varDelta(\varphi_1).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von $tang\,\mu$ nimmt dann die Form an

$$\begin{aligned}&tang^2\mu\,[(1-k'^2\sin^2\alpha)\sin am\,b\sin\varphi\,\varDelta(\varphi_1)+\cos^2\alpha\cos am\,b\cos\varphi]^2\\
&=\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1-k'^2\sin^2\alpha)\,\varDelta^2(\varphi)\,[\sin\varphi\cos am\,b-\cos\varphi\sin am\,b\,\varDelta(\varphi_1)]^2.\end{aligned}$$

Nimmt man in der vorstehenden Gleichung $\varphi_1=am\,u$, so sei $\mu=\mu_1$ für $\varphi=am(b+u)$ und $\mu=\mu_2$ für $\varphi=am(b-u)$. Man erhält so

$$tang\,\mu_1 = \frac{sin\,\alpha\; cos\,\alpha \sqrt{1-k'^2\,sin^2\alpha}\;\varDelta am\,b\; sin\,am\,u\;\varDelta am\,(b+u)}{cos^2\alpha\; cos\,am\,u + k^2\,sin^2\alpha\; sin\,am\,b\;\varDelta am\,u\; sin\,am\,(b+u)},$$

$$tang\,\mu_2 = \frac{sin\,\alpha\; cos\,\alpha \sqrt{1-k'^2\,sin^2\alpha}\;\varDelta am\,b\; sin\,am\,u\;\varDelta am\,(b-u)}{cos^2\alpha\; cos\,am\,u + k^2\,sin^2\alpha\; sin\,am\,b\;\varDelta am\,u\; sin\,am\,(b-u)}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen findet man, dass in $tang(\mu_2-\mu_1)$ Zähler und Nenner durch $cos^2\alpha\; cos^2 am\,u + sin^2\alpha\;\varDelta^2 am\,u$ theilbar ist. Mit Weglassung dieses Factors folgt

$$tang(\mu_2-\mu_1) = \frac{2k^2\,sin\,\alpha\; cos\,\alpha\sqrt{1-k'^2\,sin^2\alpha}\; sin\,am\,b\; cos\,am\,b\;\varDelta am\,b\; sin^2 am\,u}{(cos^2\alpha + k^2\,sin^2\alpha\; sin^2 am\,b)^2 + H'k^2\,sin^2 am\,u},$$

$$H' = sin^2\alpha\; cos^2\alpha\; cos^2 am\,b\;\varDelta^2 am\,b - sin^2 am\,b(1-k'^2\,sin^2\alpha).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich der rechten Seite der Gleichung 23), wenn Zähler und Nenner durch $cos^2\alpha$ dividirt wird. Da nun in 39) die rechte Seite die Form von $arc\,tang\,\theta$ hat, so ist

$$40)\qquad \frac{s_2-s_1}{r} = \lambda_2-\lambda_1.$$

Legt man von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) zwei Tangenten an die Ellipse, bestimmt durch die Gleichungen 14) und 15), bezeichnet die Längen dieser Tangenten zwischen dem Punkte (x_1, y_1, z_1) und den Contactpunkten durch t_1 und t_2, so finden die Gleichungen statt

$$\frac{t_1}{r} = \lambda_1,\quad \frac{t_2}{r} = \lambda_2.$$

Die Gleichung 40) wird hierdurch $s_2 - s_1 = t_2 - t_1$, welche Gleichung das zweite der zu Anfang dieser Note bemerkten Theoreme enthält.

IV. In den Gleichungen 34) und 35) setze man einfach x, y, z statt x_1, y_1, z_1; ferner α und β statt α_1 und β_1. Führt man den Winkel φ mittelst der Gleichung

$$tang\,\psi = \frac{tang\,\beta}{tang\,\alpha}\cos\varphi$$

ein und setzt

$$\frac{cot^2\beta - 1}{cot^2\beta + cot^2\alpha} = k^2,\quad \frac{1+cot^2\alpha}{cot^2\beta + cot^2\alpha} = k'^2,$$

so lässt sich ein Punkt einer sphärischen Hyperbel, enthalten in den Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad \frac{x^2}{tang^2\alpha} - \frac{y^2}{tang^2\beta} = z^2,$$

auf folgende Art durch φ ausdrücken:

$$\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{1-k'^2\,cos^2\alpha}}{\sqrt{1+k^2\,cot^2\alpha\; sin^2\varphi}},$$

$$\frac{y}{r} = \frac{k'\cos\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1+k^2\,cot^2\alpha\; sin^2\varphi}},$$

$$\frac{z}{r}=\frac{\cot\alpha\sqrt{1-k'^2\cos^2\alpha}\,\sin\varphi}{\sqrt{1+k^2\cot^2\alpha\sin^2\varphi}}.$$

Wird das Bogenelement der sphärischen Hyperbel durch ds bezeichnet, so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\frac{1}{r}\,\frac{ds}{d\varphi}=\frac{\cos\alpha\sqrt{1-k'^2\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}\;\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+k^2\cot^2\alpha\sin^2\varphi}.$$

Nimmt man hierin $\varphi=am\,w$ und $\frac{\pi}{2}-\alpha$ statt α, so fällt die vorstehende Gleichung mit der Gleichung 11) zusammen, woraus der bekannte Satz folgt, dass die Bogen von sphärischen Ellipsen und Hyperbeln sich gegenseitig durch einander ausdrücken lassen.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ueber ein bestimmtes Integral.

In dieser Zeitschrift (Jahrgang 1867, S. 302 flgg.) hat Herr Matthiessen, veranlasst durch eine Arbeit des Herrn Enneper, folgende Aufgabe behandelt:

Wenn die Gleichung

$$1)\quad 0=f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

nur solche Wurzeln hat, deren reelle Theile gleiches Vorzeichen haben, soll der Werth des Integrals

$$2)\qquad J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_0+A_1z^2+\ldots+A_{n-1}z^{2n-2}}{(z^2+z_1^2)(z^2+z_2^2)\ldots(z^2+z_n^2)}\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z^2)}{\Phi(z^2)}\,dz,$$

wo die A constant sind, gefunden werden.

Herr Matthiessen hat die Lösung dieser Aufgabe auf diejenige eines Systems linearer Gleichungen zurückgeführt; da er dasselbe indessen nicht allgemein hergeleitet, sondern sich damit begnügt hat, die Formeln für ein beliebiges n aus speciellen Fällen zu abstrahiren, so sei es gestattet, hier noch einmal auf jene Aufgabe zurückzukommen.

Um zunächst die zu integrirende Function durch die a auszudrücken, hat man

$$3)\qquad \begin{aligned}\Phi(z^2)=f(iz).f(-iz)&=(z^n-a_{n-2}z^{n-2}+a_{n-4}z^{n-4}-\ldots)^2\\&\quad+(a_{n-1}z^{n-1}-a_{n-3}z^{n-3}+\ldots)^2.\end{aligned}$$

Um ferner den Werth des Integrals zu bestimmen, zerlege man entweder die zu integrirende Function in Partialbrüche, oder auch man integrire auf imaginärem Wege um den auf einer Seite der x-Axe liegenden Theil der xy-Ebene; dann folgt

$$4)\qquad J=2\int_0^{\infty}\frac{F(z^2)}{\Phi(z^2)}\,dz=\pi\,.\sum_1^n{}_h\,\frac{F(-z^2_h)}{z_h\,\Phi'(-z^2_h)},$$

falls die reellen Theile aller Wurzeln von $f(z)=0$ **positiv**; sind sie dagegen alle **negativ**, so ist $-\pi$ zu setzen. Der Fall gleicher Wurzeln sei vorläufig ausgeschlossen.

Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, die Factoren der einzelnen Δ, welche symmetrische Functionen der Wurzeln von $f(z)=0$ sind, durch die Coefficienten der Gleichung auszudrücken; dies Ziel kann auf **zwei** Wegen bequem erreicht werden.

Es sei J_r der Factor von Δ_r im Ausdruck für J, also

$$5)\qquad J_r=2\int_0^\infty \frac{z^{2r}}{\Phi(z^2)}\,dz=(-1)^r.\pi\sum_1^n{}_h \frac{z_h^{2r-1}}{\Phi'(-z_h^2)};$$

derartige Summen können bekanntlich (vergl. **Baltzer**) als Verhältniss zweier Determinanten dargestellt werden:

$$\frac{(-1)^{r+n-1}.J_r}{\pi}=\begin{vmatrix} z_1^0 & z_1^2\ldots z_1^{2n-4} & z_1^{2r-1}\\ z_2^0 & z_2^2\ldots z_2^{2n-4} & z_2^{2r-1}\\ \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\\ z_n^0 & z_n^2\ldots z_n^{2n-4} & z_n^{2r-1}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} z_1^0 & z_1^2\ldots z_1^{2n-4} & z_1^{2n-2}\\ z_2^0 & z_2^2\ldots z_2^{2n-4} & z_2^{2n-2}\\ \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\\ z_n^0 & z_n^2\ldots z_n^{2n-4} & z_n^{2n-2}\end{vmatrix}.$$

Hier ist sowohl der Zähler, als der Nenner durch

$$\Delta=\Sigma\pm z_1^0 z_2^1 z_3^2\ldots z_n^{n-1}$$

ohne Rest theilbar: das Resultat ist eine symmetrische Function der z_h und durch folgenden Satz (dessen Beweis durch Determinantenumformung leicht geführt wird)* zu bestimmen:

Wenn $\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}$ ganze positive Zahlen (oder auch $\alpha_0=0$) und zwar $\alpha_0<\alpha_1<\ldots\alpha_{n-1}$; wenn ferner $\beta_1,\beta_2,\beta_3\ldots$ diejenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten ganzen Zahlen sind, welche mit den α zusammen die Zahlenreihe $0,1,2,\ldots\alpha_{n-1}$ ausfüllen; wenn endlich die Determinante

$$6)\qquad \begin{vmatrix} a_{\beta_1} & a_{\beta_1-1} & a_{\beta_1-2}\ldots\\ a_{\beta_2} & a_{\beta_2-1} & a_{\beta_2-2}\ldots\\ a_{\beta_3} & a_{\beta_3-1} & a_{\beta_3-2}\ldots\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{vmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\ldots)$$

gesetzt wird – wobei $a_n=1$, $a_{n+h}=0$, $a_{-h}=0$ —: so ist das Determinantenverhältniss

$$7)\qquad \frac{\Sigma\pm z_1^{\alpha_0}z_2^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_{n-1}}}{\Sigma\pm z_1^0 z_2^1\ldots z_n^{n-1}}=(-1)^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots\alpha_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}}.(\beta_1,\beta_2\ldots\beta_{\alpha_{n-1}-n+1}).$$

Daraus folgt für unsern Fall

---

* Vergl. **Borchardt's** Journal f. d. reine und angewandte Mathematik, Bd. 81 S. 281 flg.

$$8)\quad \begin{cases} J_0 = -\pi \cdot \dfrac{(2,4,6\ldots 2n-4)}{a_0\cdot(1,3,5\ldots 2n-3)}, \\ J_r = -\pi \cdot \dfrac{(1,3,5\ldots 2r-3, 2r+1\ldots 2n-5)}{(1,3,5\ldots 2n-5, 2n-3)}, \\ (r=1,2,3\ldots n-1). \end{cases}$$

Das gefundene Resultat lässt sich auch so aussprechen:

Setzt man

$$9)\quad P = (0,2,4\ldots 2n-2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ldots a_{-n+1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots a_{-n+3} \\ a_4 & a_3 & a_2 & \ldots a_{-n+5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots a_{n-1} \end{vmatrix}$$

(wo $a_n = 1$, $a_{n+h} = 0 = a_{-h}$), so ist

$$10)\quad J_r = (-1)^{n+r}\frac{\pi}{P}\cdot\frac{dP}{da_{2r-n+1}} \text{ für } r = 0,1,2\ldots n-1,$$

wo die Differentiation nur nach den Elementen der letzten Colonne von P durchzuführen ist. Endlich wird

$$11)\quad J = \frac{(-1)^n\cdot\pi}{P}\begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots a_{-n+2} & A_0 \\ a_2 & a_1 & \ldots a_{-n+4} & -A_1 \\ a_4 & a_3 & \ldots a_{-n+6} & A_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots a_n & (-1)^{n-1}A_{n-1} \end{vmatrix};$$

der Ausdruck erhält das entgegengesetzte Zeichen, wenn die reellen Theile aller Wurzeln von $f(z)=0$ negativ sind.

Der zweite Weg, dieses Resultat zu erweisen, ist folgender: Die identischen Gleichungen

$$z_h^{-1}f(z_h) = 0,\quad f(z_h) = 0,\quad z_h f(z_h) = 0, \ldots z_h^{n-2}f(z_h) = 0$$

dividire man durch $\Phi'(-z^2_h)$ und summire in Bezug auf h von 1 bis n; weil bekanntlich

$$\sum_h^n \frac{z_h^{2r}}{\Phi'(-z^2_h)} = 0 \text{ für } r = 0,1,2,\ldots n-2,$$

dagegen

$$= (-1)^{n-1} \text{ für } r = n-1,$$

so fallen die Glieder mit geraden Potenzen der z_h fort: es folgt das Matthiessen'sche System von linearen Gleichungen, und durch Auflösung desselben ergeben sich die Formeln 10) und 11).

Bei der Herleitung des Resultats war vorausgesetzt, dass $f(z)=0$ keine gleichen Wurzeln habe, nachträglich können wir jetzt diese Voraussetzung aufgeben. Man hat nämlich nach dem vorher angeführten Satze

$$\Pi_{h,k}(z_h+z_k)=\Pi_{h,k}\frac{z^2_h-z^2_k}{z_h-z_k}=\frac{\Sigma\pm z_1^0 z_2^2 z_3^4\ldots z_n^{2n-2}}{\Sigma\pm z_1^0 z_2^1 z_3^2\ldots z_n^{n-1}}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1,3,5,\ldots 2n-3),$$

wo für h und k je zwei verschiedene Nummern von 1 bis n zu setzen sind und Π das Product aller so gebildeten Ausdrücke bedeutet. Daher ist

$$P=0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung $f(z)=0$ entgegengesetzt gleiche oder verschwindende Wurzeln habe.* Diese Fälle sind aber durch die Voraussetzung ausgeschlossen, dass die reellen Theile aller Wurzeln von $f(z)=0$ gleiches Vorzeichen haben [welche auch für das Bestehen von 4) nothwendig ist]; wir können daher folgern: Wenn nur die Bedingung stehen bleibt, dass die reellen Theile aller Wurzeln von $f(z)=0$ dasselbe Vorzeichen haben (also auch keiner derselben verschwindet), so ist die Gleichung 11) auch richtig, wenn beliebige Gruppen gleicher Wurzeln von $f(z)=0$ vorhanden sind; denn weder auf der linken, noch auf der rechten Seite von 11) bringt das Gleichwerden einiger Wurzeln eine Unstetigkeit hervor. Uebrigens ist es nicht schwer, dasselbe durch Rechnung nachzuweisen.

Aber noch ein anderes merkwürdiges Resultat liefern die Gleichungen 10). Weil nämlich, falls alle a reell, die J_r nothwendig positive Grössen sind, folgt der Satz:

Wenn die Coefficienten von $f(z)$ reell und die reellen Theile aller Wurzeln von $f(z)=0$ positiv sind, so ist nothwendig, dass

$$(-1)^{n+r}\frac{1}{P}\frac{dP}{da_{2r-n+1}}>0 \text{ für } r=0,1,2,\ldots n-1;$$

alle diese Grössen müssen dagegen negativ sein, wenn sämmtliche Wurzeln negative reelle Theile haben.

Insterburg. KOSTKA.

X. Eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf den Punktraum.

Der tetraedrale Complex habe die Ausnahmepunkte A_1, A_2, A_3, A_4, so besteht er aus allen Geraden p, für welche das Doppelverhältniss $(S_1^p S_2^p S_3^p S_4^p)$ der Schnittpunkte von p mit den Tetraederebenen A_1 $(=A_2A_3A_4)$, A_2, A_3, A_4 einen bestimmten Werth k hat.

---

* Für reelle Coefficienten von $f(z)$ konnte dies auch daraus geschlossen werden, dass $P=0$ die Resultante der Gleichungen

$$z^n-a_{n-2}z^{n-2}+a_{n-4}z^{n-4}-\ldots=0,$$
$$a_{n-1}z^{n-1}-a_{n-3}z^{n-3}+a_{n-5}z^{n-5}-\ldots=0$$

ist, deren linke Seiten in 3) auftreten. Vergl. auch *l. c.* S. 287.

Wie schon Herr Reye* erkannt hat, lässt sich dieser Complex in folgender Weise einfach erzeugen: Seien d_1 in A_2 durch den Punkt A_1 und d_2 in der Ebene A_1 durch A_2 gehend zwei Strahlen derart, dass die Punkte A_3, A_4 mit den Schnittpunkten D_1, D_2 von d_1 und d_2 mit $A_3 A_4$ das Doppelverhältniss $(A_3 A_4 D_1 D_2) = k$ ergeben, so gehört die lineare Congruenz mit den Directricen d_1, d_2 dem Complex vollständig an; denn es ist stets $(A_3 A_4 D_1 D_2) = (S_4^p S_3^p S_2^p S_1^p) = (S_1^p \ldots S_4^p)$. Wenn dann D_1 und D_2 in $A_3 A_4$ projectivische Punktreihen mit den Doppelpunkten $A_3 A_4$ beschreiben, so entstehen ∞^1 solcher Congruenzen, deren Gesammtheit der tetraedrale Complex ist.**

Der Punkt P, welcher p entspricht, soll nun der Schnitt der Geraden $A_1 S_1^p$ und $D_1 S_3^p$ sein. Zu jedem p gehört alsdann im Allgemeinen nur ein P und umgekehrt. Ist nämlich P gegeben, so giebt $A_1 P$ den Punkt S_1^p, damit d_2 und D_2; sodann giebt k den Punkt D_1, $D_1 p$ liefert S_3^p, welcher mit S_1^p den Strahl p bestimmt.

Die Richtigkeit folgender Sätze ergiebt sich nun unmittelbar: Beschreibt p ein Büschel von Complexgeraden, dessen Scheitel in der Ebene A_i liegt, so beschreibt der entsprechende Punkt eine dazu projectivische Reihe durch den Punkt A_i. — Den linearen Congruenzen d_1, d_2 entsprechen die Ebenen $A_1 d_1$, welche das Büschel von der Scheitelkante $A_1 A_2$ bilden.

Allen Strahlen durch einen der Punkte A_i entspricht ebendieser Punkt. Den Kanten $A_i A_k$ entsprechen alle ihre Punkte, d. h.: Bei der Abbildung treten die Tetraederkanten als Ausnahmestrahlen auf, indem jeder alle ihre Punkte entsprechen. — Für die Strahlen in den Ebenen A_i bleibt der entsprechende Punkt eindeutig bestimmt, er liegt in A_i; es ist alsdann der Durchstosspunkt S_i durch die Gleichung $(S_1 S_2 S_3 S_4) = k$ bestimmt.

Jedem Punkte des Raumes entspricht im Allgemeinen nur ein Complexstrahl, speciell einem Punkte in A_i auch ein Strahl in A_i, einem Punkte in $\mathrm{A}_i \mathrm{A}_k$ die beiden Büschel von Complexgeraden durch ihn und den A_i alle durch sie gehenden Strahlen: Die Complexausnahmepunkte sind auch Ausnahmepunkte für die Abbildung, indem jedem das Bündel entspricht, dessen Scheitel er selbst ist. Den Punkten in den Tetraederkanten (Complexdoppelstrahlen) entsprechen je ∞^1 Complexgerade, welche zwei Büschel bilden.

---

* Vergl. Reye, Die Geometrie der Lage, II, 1868.

** Sind das Tetraeder A, resp. A, und eine Complexgerade p gegeben, so erhält man zunächst ein Paar solcher Directricen. Das Büschel in der Ebene $A_3 p$ vom Scheitel S_3^p gehört dem Complex an und liefert alle die Paare d_1, d_2. — Diese Erzeugung ist in sechsfacher Weise möglich.

Die Ebenen pP, bestimmt durch die Complexstrahlen und ihre entsprechenden Punkte, ergeben das Bündel vom Scheitel A_1.

Es folgen hier die Formeln für den Uebergang von den Coordinaten z_i des Punktes P zu denen p_{ik} des entsprechenden Complexstrahls, und umgekehrt:

$$1)\qquad \begin{aligned} p_{12} &= z_1 z_2, & p_{34} &= (k-1)\, z_3 z_4, \\ p_{13} &= z_1 z_3, & p_{42} &= -k\; z_4 z_2, \\ p_{14} &= z_1 z_4, & p_{23} &= z_2 z_3; \end{aligned}$$

$$2)\qquad z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = p_{12} p_{13} : p_{12} p_{23} : p_{13} p_{23} : p_{14} p_{23}.$$

Die Coordinaten beziehen sich auf das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Dass infolge der Gleichungen 1) nur Gerade des Complexes zu Punkten abgebildet werden, wird dadurch ersichtlich, dass die Identität aus den Liniencoordinaten

$$P = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

und die Complexgleichung

$$\Omega = p_{13} p_{42} + k p_{14} p_{23} = 0$$

beim Uebergang von den p_{ik} zu den z ohne Weiteres erfüllt werden.

Es sollen nun Gebilde aus Complexstrahlen und deren Bilder betrachtet werden, vor Allem der Complexkegelschnitt. — Seien p'_{34}, p'_{42}, p'_{23} und p''_{13}, p''_{14}, p''_{34} (die anderen p'_{ik}, resp. p''_{ik} je gleich Null) zwei Strahlen in A_1 und A_2. Sie schneiden sich, wenn $p''_{13} p'_{42} + p''_{14} p'_{23} = 0$. Soll eine Gerade p beide treffen, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_{12} p'_{34} + p_{13} p'_{42} + p_{14} p'_{23} &= 0, \\ p_{12} p''_{34} + p_{42} p''_{13} + p_{23} p''_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man nach 1) die p_{ik} durch die z, so entstehen im Wesentlichen als Bilder der Congruenzen, welche die speciellen linearen Complexe p', p'' mit dem tetraedralen gemein haben, zwei Ebenen durch A_1 und A_2. Ihr Schnitt entspricht dem Complexkegelschnitt in der Ebene $p'p''$. Die Ebenen sind

$$\begin{aligned} p'_{34} z_2 + p'_{42} z_3 + p'_{23} z_4 &= 0, \\ p''_{34} z_1 + p''_{14} z_3 - k p''_{13} z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Für die Coordinaten der Schnittlinie ergiebt sich $\pi^*_{13} = p^*_{42} = -p'_{42} p''_{34}$ etc.; sie erfüllen die Gleichung des tetraedralen Complexes.

Den ∞^3 Complexkegelschnitten entsprechen die ∞^3 Complexgeraden selbst.

Um den Complexkegel abzubilden, nehme man zwei Strahlen p'_{13}, p'_{23}, p'_{34} durch A_3 und p''_{14}, p''_{34}, p''_{42} durch A_4. Sie sollen sich schneiden, so ist $p'_{13} p''_{42} + p''_{14} p'_{23} = 0$. Soll der Complexstrahl p wieder beide treffen, so erfüllen die z zwei Gleichungen zweiten Grades und es ist der Ort des Punktes P der Schnitt von zwei Kegeln aus A_3 und A_4, enthaltend die Erzeugenden $A_3 . A_1$, A_2, A_4 und $A_4 . A_1$, A_2, A_3. Diese Kegel schneiden sich ausser in $A_3 A_4$ noch in einer Raumcurve dritter Ordnung durch alle die A_i, d. h.:

Den Complexkegeln entsprechen Raumcurven dritter Ordnung durch die vier Punkte A.

Irgend zwei Punkte einer solchen Curve entsprechen zweien Erzeugenden des Complexkegels. Legen wir durch diese eine Ebene, so enthält sie einen Complexkegelschnitt, der die beiden Erzeugenden zu Tangenten hat und dem somit die Verbindungslinie der genannten Punkte der Raumcurve entspricht. Hieraus folgt:

Die ∞^3 Curven dritter Ordnung, welche Bilder der Complexkegel sind, stimmen mit den Reye'schen Ordnungscurven überein.

Das Bild der Congruenz $2m^{\text{ten}}$ Grades, die ein Complex vom m^{ten} Grade aus dem tetraedralen schneidet, ist eine Fläche von $2m^{\text{ter}}$ Ordnung, wie die Formeln 1) zeigen. Die Kegel des Complexes m^{ten} Grades aus den Punkten A_i gehören der Congruenz an, ihnen entsprechen die Punkte A_i:

Dem Schnitte des tetraedralen Complexes mit einem Complex vom m^{ten} Grade entspricht eine Fläche von der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die vier Punkte A_i zu m-fachen Punkten hat. — Der Tangentialkegel in A_1 an die Fläche ist selbst der Complexkegel für diesen Punkt.

Den Schnitten mit den ∞^5 linearen Complexen des Raumes entsprechen alle Flächen zweiten Grades durch die A_i. Unter diesen Complexen sind ∞^4 specielle, ihnen entsprechen die ∞^4 von den Flächen, deren eine Erzeugung je dem tetraedralen Complex angehört und auf denen je ∞^1 Ordnungscurven liegen.

Den ∞^3 speciellen linearen Complexen, deren Directricen das Tetraeder unter dem Doppelverhältnisse k treffen, entsprechen Kegel zweiter Ordnung, deren Spitzen die Bildpunkte der Directricen sind.

Unter den vorigen Complexen giebt es ∞^2, deren Directricen singuläre Linien des tetraedralen Complexes sind; diese Directricen sind entweder in den Ebenen A_i, oder sie gehen durch die Punkte A_i. Die Schnitte der ersteren mit dem tetraedralen Complex bilden sich als je zwei Ebenen, A_i und eine durch A_i, ab. — Für eine Directrix durch A_i dagegen erhält man stets eine Kegelfläche mit A_i als Spitze und den in A_i zusammenstossenden Tetraederkanten als Erzeugenden.

Die Directricen für weitere ∞^1 Complexe gehen in A_i durch A_k; sie führen auf Ebenen, von denen die eine A_i ist, die andere durch $A_i A_k$ geht.

Fällt die Directrix endlich mit einer der sechs Complexdoppelkanten zusammen, so ist das Bild begreiflicherweise das durch die Kante gehende Tetraederflächenpaar.

Der Regelschaar vierter Ordnung von Complexgeraden, welche zwei beliebige Raumgerade treffen,* entspricht eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, wieder durch die Punkte A_i gehend. Schneiden sich die Raumgeraden, so zerfällt diese Curve in einen Complexstrahl und eine Ordnungscurve. Der erstere ist eine Secante der letzteren. — Rücken die Geraden einander unendlich nahe, so tritt keine Veränderung ein; dasselbe gilt für den Fall, dass die eine oder beide von den Geraden dem tetraedralen Complex angehören, ausgenommen den Fall, dass sie unendlich nahe Complexgerade sind, indem alsdann der Complexstrahl eine Tangente der Ordnungscurve ist.

In der Folge sollen einfache Gebilde des Punktraumes auf den tetraedralen Complex abgebildet werden. Einer Fläche n^{ter} Ordnung entsprechen Gerade, deren Coordinaten den Gleichungen genügen

$$\alpha) \qquad p_{13}p_{42} + k p_{14}p_{23} = 0,$$

$$\beta) \qquad f\{p_{12}p_{13}, p_{12}p_{23}, p_{13}p_{23}, p_{14}p_{23}\}^n = 0.$$

Diese Congruenz vierten Grades ist nun stets reducibel. Die Geraden $p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$ erfüllen die Ebene A_1 und gehören einfach zählend zum Complex α), n-fach zu β), also ebenfalls n-fach zählend zu der Congruenz. Dasselbe gilt für die Geraden $p_{12} = p_{23} = p_{42} = 0$, $p_{13} = p_{23} = p_{34} = 0$ und $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$. Diese letzteren Geraden ergeben die Ebenen A_2, A_3 als Congruenzen erster Ordnung (nullter Classe) und A_4 als eine solche erster Classe, d. h.:

Einer Fläche n^{ter} Ordnung des Punktraumes, die durch keinen der Punkte A_i geht, entspricht im Complex als irreducibles Gebilde eine Congruenz von der $3n^{\text{ten}}$ Ordnung und der n^{ten} Classe.

Ist die Fläche eine Ebene, so wird die entsprechende Congruenz durch den Complex ausgeschnitten:

$$a p_{12}p_{13} + b p_{12}p_{23} + c p_{13}p_{23} + d p_{14}p_{23} = 0.$$

Er besitzt A_1, A_2, A_3 als Ausnahmeebenen, ferner A_4, $x_1 = x_3 = b x_2 + d x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = c x_3 + d x_4 = 0$ als Ausnahmepunkte, ist somit [(11) (22)] Nr. 29.** — Die Congruenz ist von der dritten Ordnung und erster Classe.

Für Ebenen durch A_1, A_2 oder A_3 zerfällt der obige quadratische Complex in zwei lineare, deren Directricen je eine Tetraederkante und eine Gerade in der gegenüberliegenden Tetraederfläche sind. Für Ebenen durch A_4 dagegen geht der Complex über in [(222)] Nr. 41, dessen

---

* Vergl. *Cremona, Istituto di Bologna 1868, t. II, Serie 2ª.*
Hier entsteht Nr. 11, für unendlich nahe Raumgerade Nr. 12. — Die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Raumgeraden mit den Ebenen A_i gehören der Regelschaar an; die entsprechenden Punkte sind leicht zu construiren, so dass man sofort acht Curvenpunkte erhält.

** Vergl. meine Dissertation, Math. Ann. VII, S. 188.

Gerade einen Kegel zweiter Classe aus A_4 tangiren. (Der Kegel hat die Tangentialebenen A_1, A_2, A_3.) In diesem letztern Falle ist der irreducible Theil der Congruenz von der zweiten Ordnung.

Den Ebenen durch die Tetraederkanten $A_i A_k$ entsprechen lineare Congruenzen, die dem Complex angehören (s. den Anfang).

Eine beliebige Raumgerade, die auf den Complex abgebildet werden soll, sei der Schnitt der beiden Ebenen

$$a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 = 0, \quad b_1 z_1 + b_3 z_3 + b_4 z_4 = 0.$$

Der irreducible Theil des Schnittes der entsprechenden Complexe mit dem tetraedralen kann nach Umformung mit Hilfe von $P = 0$ in der Form geschrieben werden:

$$\begin{gathered} p_{13} p_{42} + k p_{14} p_{23} = 0, \\ a_2 p_{12} + a_3 p_{13} + a_4 p_{14} = 0, \\ b_1 p_{12} + b_3 p_{23} - \frac{b_4}{k} p_{42} = 0. \end{gathered}$$

Die irreducible Regelfläche, die einer Geraden des Punktraumes entspricht, ist vom zweiten Grade. — Ihre Construction ist sehr einfach. Die obenstehenden linearen Complexe sind specielle, ihre Directricen sind δ_1 in A_1 und δ_2 in A_2 mit den Coordinaten

$$\begin{aligned} p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0, \quad & p_{34} : p_{42} : p_{23} = \quad a_2 : a_3 : a_4, \\ p_{12} = p_{23} = p_{42} = 0, \quad & p_{13} : p_{14} : p_{34} = -\frac{b_4}{k} : b_3 : b_1. \end{aligned}$$

Wählt man M_1 auf δ_1, zieht $M_1 A_4$, welche Gerade $A_2 A_3$ in M^*_1 schneiden möge, construirt M^*_4 so, dass $(M^*_1 A_3 A_2 M^*_4) = k$, so gehört die Transversale aus M_1 zu δ_2 und $A_1 M^*_4$ zur Regelschaar.

Die eben abgebildete Regelschaar trifft das Tetraeder A_i in vier Punkten vom Doppelverhältniss $\frac{a_3 b_4}{a_4 b_3}$. Sobald dasselbe zu k wird, so schneiden sich δ_1 und δ_2 in der Kante $A_3 A_4$, womit neuerdings erwiesen ist, dass den Punkten einer Complexgeraden ein Complexkegelschnitt entspricht.

Trifft die Raumgerade eine Tetraederkante, so geht je eine von den Geraden δ durch ein A_i. Wenn aber A_i auf der Geraden liegt, so zerfällt die entsprechende Fläche zweiten Grades in zwei Büschel in derselben Ebene durch A_i; der Scheitel des einen ist A_i, der des andern liegt in A_i. — Befindet sich die abzubildende Raumgerade endlich in A_i, so umhüllen die entsprechenden Complexgeraden einen Kegelschnitt in A_i; zu ihm gehören drei Tetraederkanten als Tangenten.

Nachdem die Bilder von ∞^3 Curven dritter Ordnung durch die Punkte A_i bereits bekannt sind, ist es von Interesse, das Bild einer solchen Curve zu kennen für den Fall, dass sie keine Ordnungscurve ist. Alsdann lässt sie sich als Schnitt der Kegel darstellen

$$a x_2 x_3 + b x_3 x_4 + c x_4 x_2 = 0,$$
$$d x_1 x_2 + e x_2 x_4 + f x_4 x_2 = 0.$$

Die entsprechende Regelfläche lässt sich nach einfacher Umformung schreiben:

$$p_{13} p_{42} + k p_{14} p_{23} = 0,$$
$$(b d - a f) p_{13} + c d p_{12} - a e p_{23} = 0,$$
$$d p_{12} + f p_{14} - \frac{e}{k} p_{42} = 0.$$

Sie wird also aus dem tetraedralen Complex durch zwei specielle lineare ausgeschnitten, deren Directricen d_1 durch A_4 und d_2 in A_2 sind. Dem geometrischen Uebergang von einem Punkte zur entsprechenden Geraden zufolge müssen alle Geraden der Regelschaar die Ebene A_1 auf dem Kegelschnitte $a x_2 x_3 + b x_3 x_4 + c x_4 x_2 = 0$ treffen. Damit sind für die Regelfläche drei Leitcurven bekannt:

Irgend einer Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die vier Punkte A_i geht, entspricht eine Regelfläche dritten Grades, deren doppelte Leitgerade durch A_4 geht und deren einfache in A_2 liegt.

Zürich. Dr. A. Weiler.

XI. Ueber das Elasticitätspotential und einen dasselbe betreffenden Satz.

In meiner früheren Arbeit* habe ich die Grundzüge des allgemeinen Problems des Gleichgewichts der Systeme gegeben, welche man continuirliche Systeme nennen könnte. Um den Nutzen dieser Untersuchungen zu zeigen, will ich sie auf die Aufgaben anwenden, die sich in der Natur darbieten. Ich behandle zunächst die festen Körper, indem ich mir die Flüssigkeiten und Gase zu einer späteren Arbeit aufbewahre. Vor Allem aber muss ich (was ich in der unten genannten Arbeit nicht genügend gethan habe) die Weise präcisiren, in welcher die inneren Kräfte $\left(f = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\,\frac{\psi}{R}, \ldots\right)$ der Moleküleinheit von den Massen $\left(\varepsilon = \frac{m}{\Sigma m}, \ldots\right)$, von den gegenseitigen Entfernungen $\left(R = \left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} r, \ldots\right)$ der vier Punkte, welche diese Einheit bilden und von der Dichte (ϱ) des Körpers abhängen, zu welchem jene gehört. Man wird hierauf mit Hilfe der Formel $(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} f$ die allgemeinen Gesetze der Atomkräfte aufstellen können und so die Ergänzung zu meiner früheren Abhandlung, von welcher ich die Definitionen und Bezeichnungen beibehalte, und gleichzeitig die Einleitung zum vorliegenden Aufsatze haben.

---

* Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik (diese Zeitschrift Jahrgang XXI, S. 116).

Da die Grösse ψ, welche in den Ausdruck der Kraft f **eintritt,** gleich $lim(\varphi r)$ ist, so kann sie nur von $\varepsilon, \ldots, R, \ldots$ und ϱ abhängen, weil dies die einzigen Grössen sind, welche nicht verschwinden, **wenn** das continuirliche Element ($\varrho\, dx\, dy\, dz = \Sigma m$) in unbestimmter **Weise** abnimmt. Wenn also F eine Function von $\varepsilon, \ldots, R, \ldots$ und ϱ **ist,** so kann man im Allgemeinen für die inneren Kräfte der Moleculareinheit

$$f = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial R}$$

setzen, woraus für die Atomkräfte folgt

$$1) \qquad (\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} f = (\Sigma m)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}.$$

Wir suchen hierauf eine solche Form der Function F, dass die Atomkräfte 1) nicht von der Dichtigkeit ϱ abhängen. Zu diesem Zwecke muss man ausdrücken, dass die Ableitung von F nach ϱ genommen gleich Null ist. Diese Bedingung hat die Form der partiellen Differentialgleichung

$$3\varrho\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varrho} + \Sigma R\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial R} = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$\mathrm{F} = F\left(\frac{R}{\varrho^{1/3}}, \frac{R'}{\varrho^{1/3}}, \ldots\right) = F\left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{1/3}}, \frac{r'}{(\Sigma m)^{1/3}}, \ldots\right\}$$

für die Atomkraft 1) den Ausdruck

$$2) \qquad (\Sigma m)\frac{\partial F}{\partial r}$$

giebt, der von der Dichte ϱ unabhängig ist.

Dieses Gesetz 2) der Atomwirkungen nehme ich zum Ausgangspunkte meiner Untersuchungen über die Elasticität der festen Körper. Diese Wahl wird übrigens durch den Umstand gerechtfertigt, dass in diesen Untersuchungen die Summe $\sum(\Sigma m)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}dr$ ein exactes Differential der Function $(\Sigma m)\,\mathrm{F}$ sein soll und die letztere Bedingung nur stattfindet, wenn sich das Gesetz der Atomwirkungen durch Formel 2) ausdrückt.

Wir setzen den festen Körper im natürlichen Zustande vor seiner Deformation voraus und stellen uns die Aufgabe, sein **Elasticitätspotential** zu finden, d. h. die Arbeit, welche während der Deformation dieses festen Körpers von der Volumeneinheit seines Elementes im Punkte $M(x, y, z)$ geleistet wird.

Betrachtet man diesen Körper als ein Atomsystem, das den Kräften 2) unterworfen ist, so muss, da die Summe der virtuellen Arbeiten dieser Kräfte, d. h. $\sum(\Sigma m)\frac{\partial F}{\partial r}\delta r = \varrho\, dx\, dy\, dz \sum\frac{\partial F}{\partial r}\delta r$, die Summe der virtuellen Arbeiten der Atomkräfte eines Moleküls ist, das Integral

$$\delta V = \iiint \varrho\, dx\, dy\, dz \sum\frac{\partial F}{\partial r}\delta r$$

gleich Null sein, wenn der Körper sich im Gleichgewichtszustande befindet, den man seinen natürlichen Zustand nennt. Hieraus folgt, dass die actuellen Werthe der Atomkräfte gleich Null sind, denn man hat die Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial r'}=0, \ldots \tag{3}$$

Aber da der Körper vollkommen elastisch sein soll, so muss sein natürliches Gleichgewicht stabil sein, und dies findet nur statt, wenn der Werth des Zuwachses

$$\delta^2 V=\sum\frac{\partial(\delta V)}{\partial r}\delta r$$

kleiner als Null ist. In der That, ertheilt man dem Körper eine unendlich kleine Deformation und überlässt ihn dann sich selbst, so beginnt er, wenn er vollkommen elastisch ist, um seine Gleichgewichtslage zu schwingen. Da der Zuwachs $\delta^2 V$ alsdann die doppelte während dieser Schwingungen geleistete Arbeit repräsentirt, so hat man bekanntlich, wenn u, v, w die Projectionen der Verrückung des Punktes M in der Zeit t auf die Coordinatenaxen und $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$ die Componenten der Geschwindigkeit dieses Punktes im Augenblick seines Durchganges durch die Gleichgewichtslage sind,

$$\delta^2 V=\int\!\!\int\!\!\int\varrho\, dx\, dy\, dz\left[\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left.-\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)_0^2\right\}\right].$$

Aber da die Geschwindigkeit des Punktes M in der Lage, die der Gleichgewichtslage am entferntesten ist, gleich Null und beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage ein Maximum ist, so hat der Zuwachs $\delta^2 V$ in der That negatives Zeichen.

Wir suchen jetzt einen andern Ausdruck für denselben Zuwachs durch Auflösung des Differentials $\sum\frac{\partial(\delta V)}{\partial r}\delta r$. Man kann sich leicht überzeugen, dass $\delta^2 V$ sich folgendermassen gestaltet:

$$\delta^2 V=\int\!\!\int\!\!\int\varrho\, dx\, dy\, dz\left\{\Sigma r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2+2\,\Sigma r r'\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial r'}\,\frac{\delta r}{r}\,\frac{\delta r'}{r'}\right\},$$

und dass es nie positiv wird, wenn alle Wurzeln s der Gleichung*

---

* Um nicht die gewöhnlichen Grenzen der Praxis zu überschreiten, beschränke ich mich in diesen Untersuchungen auf die Betrachtung des Falles, in welchem der Zuwachs $\delta^2 V$ nicht Null ist. Im allgemeinen Falle müsste man voraussetzen, dass nur der Zuwachs $\delta^{2n} V$ sich von Null unterscheidet, während alle vorhergehenden Null sind. $\frac{1}{(2n)!}\delta^{2n} V$ repräsentirt dann das Elasticitätspotential der festen Körper. Um die Bedingungen der vollkommenen Elasticität dieser Körper

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - s, & \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'}, & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} - s, & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial r'\, \partial r'''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'''}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r'\partial r'''}, & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial r'''^2} - s \end{vmatrix} = 0$$

negativ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt und finden die Gleichungen 3) statt, so stellt der Ausdruck

$$5) \qquad \frac{\varrho}{2}\left\{\Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2 + 2\Sigma r r' \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'}\, \frac{\delta r}{r}\, \frac{\delta r'}{r'}\right\}$$

das Elasticitätspotential eines vollkommen elastischen Körpers dar, wenn angenommen wird, dass dieser Körper vor seiner Deformation sich im natürlichen Zustande befand.

Derselbe Ausdruck 5) repräsentirt auch das Elasticitätspotential eines unvollkommen elastischen Körpers, und in diesem Falle sind die Gleichungen 3) allein nothwendig und hinreichend.

Bestehen die Ungleichungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} < 0, \ldots,$$

so sind die Wurzeln der Gleichung 4) stets negativ, wenn man hat

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r''} = 0, \ldots,$$

weil in diesem Falle jene Gleichung die Form annimmt

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - s\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} - s\right) \ldots \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r'''^2} - s\right) = 0.$$

Der Ausdruck 5) geht dann über in den Ausdruck

$$6) \qquad \frac{\varrho}{2}\, \Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2,$$

der das Elasticitätspotential eines solchen elastischen Körpers darstellt, in welchem die Atomkräfte durch die Gleichung ausgedrückt sind

$$(\Sigma m)\, \frac{\partial \Sigma F\left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{1/3}}\right\}}{\partial r} = \frac{\Sigma m}{(\Sigma m)^{1/3}}\, F'\left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{1/3}}\right\}.$$

---

zu finden, könnte man mit Nutzen die schöne Methode, die Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabeln zu bestimmen, anwenden, welche wir Herrn Zmurko verdanken und welche in seinen Arbeiten enthalten ist: „Beitrag zur Theorie des Grössten und Kleinsten der Functionen mehrerer Variabeln nebst einigen Erörterungen über die combinatorische Functionsdeterminante", von Lorentz Zmurko (Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften Bd. XXVII, Wien 1866), und auch *„Przyczynek do teoryi najwiekszości i najmiejszości funkiyj wielu zuneunych", napisat Wawrzyniec Zmurko (Pamiętnik Towarzystiva Nauk Scistych w Paryżii T. I, Paryż 1871).*

Man kann den Potentialen 5) und 6) noch die bekannten Formen geben, indem man die Verhältnisse $\frac{\delta r}{r}, \frac{\partial r'}{r'}, \ldots$ als Functionen von u, v, w darstellt. Zu diesem Zwecke genügt es zu bemerken, dass diese Verhältnisse aus Formel 2) des citirten Aufsatzes erhalten werden, indem man in dieser Formel δx, δy, δz durch u, v, w und a, b, c durch a, b, c — a', b', c', — ... ersetzt. Dann hat man

$$\frac{\delta r}{r} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial z} + bc\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + ca\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + ab\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\delta r'}{r} = a'^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b'^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c'^2 \frac{\partial w}{\partial z} + b'c'\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + c'a'\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + a'b'\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

. . . .

Setzt man diese Werthe von $\frac{\delta r}{r}, \frac{\delta r'}{r'}, \ldots$ in die Ausdrücke 5) und 6) ein und bedenkt, dass die bezüglichen Verrückungen der Volumeneinheit des Elements, d. h. $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$, für alle Glieder der Summen Σ dieselben Werthe haben, so kann man sich durch sehr einfache Rechnungen überzeugen, dass das Potential 5) die Form des homogenen Polynoms zweiten Grades in Bezug auf die Verrückungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ mit den 21 verschiedenen Coefficienten

$$a_{1,1} = \frac{\varrho}{2}\left(\Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} a^4 + 2\,\Sigma r r' \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'} a^2 a'^2\right), \ldots$$

$$2a_{1,2} = \varrho \left\{\Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} a^2 b^2 + \Sigma r r' \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial r'} (a^2 b'^2 + a'^2 b^2)\right\}, \ldots$$

annimmt, während das Potential 6), welches auch ein Polynom zweiten Grades in Bezug auf dieselben Verrückungen wird, nur 15 von diesen Coefficienten besitzt, nämlich

$$a_{1,1} = \frac{\varrho}{2}\, \Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} a^4, \ldots, \quad 2a_{1,2} = \varrho\, \Sigma r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} a^2 b^2, \ldots$$

Da also das Elasticitätspotential eine Function der bezüglichen Verrückungen ist, so repräsentiren seine partiellen Ableitungen nach diesen Verrückungen die Drucke (N_i, T_i) auf die Oberflächeneinheit der drei ebenen Elemente, die sich im Punkte M des Körpers rechtwinklig schneiden. Und diese Drucke (N_i, T_i), welche immer in Bezug auf die bezüglichen Verrückungen linear sind, besitzen 21 verschiedene Coefficienten, wenn wir das Potential 5) differentiiren, aber nur 15, wenn wir das Potential 6) differentiiren.

Endlich ist es sehr leicht zu erkennen, dass im Falle vollkommener Elasticität die Coefficienten $a_{1,1}, \ldots, a_{1,2}, \ldots$ des Potentials 5) denselben Bedingungen genügen, wie die ihnen entsprechenden Grössen $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial r'}, \ldots$, und dass diese Coefficienten die Gleichungen

$$a_{2,3} = a_{4,4}, \quad a_{3,1} = a_{5,5}, \quad a_{1,2} = a_{6,6},$$
$$a_{5,6} = a_{1,4}, \quad a_{4,6} = a_{2,5}, \quad a_{3,6} = a_{7,5}$$

erfüllen müssen, wenn man vom Potential 5) zum Potential 6) übergehen will.

Fasst man also alle vorhergehenden Resultate zusammen, so gelangt man zu folgendem Satze: Wenn man den vollkommen elastischen Körper als ein Atomsystem betrachtet, welches den Kräften unterworfen ist, die sich als partielle Differentialquotienten der Function

$$7) \qquad \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, F\left(\frac{r}{(\Sigma m)^{1/3}}, \frac{r'}{(\Sigma m)^{1/3}}, \ldots\right)$$

nach $r, r', \ldots$ ausdrücken, so kann sein Elasticitätspotential dargestellt werden durch ein homogenes Polynom zweiten Grades in Bezug auf die bezüglichen Verrückungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots$$

mit 21 verschiedenen Coefficienten $a_{1,1}, \ldots, 2a_{1,2}, \ldots$, die so gewählt sind, dass alle Wurzeln s der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - s, & a_{1,2}, & \ldots & a_{1,6} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} - s, & \ldots & a_{2,6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,6}, & a_{2,6}, & \ldots & a_{6,6} - s \end{vmatrix} = 0$$

negativ sind. Und wenn man voraussetzt, dass die Atomkräfte sich durch die partiellen Differentialquotienten der Function

$$8) \qquad \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, \Sigma F \left\{\frac{r}{(\Sigma m)^{1/3}}\right\}$$

ausdrücken, so reducirt sich die Anzahl der Coefficienten auf 15 mittelst der Gleichungen

$$a_{2,3} = a_{4,4}, \quad a_{3,1} = a_{5,5}, \quad a_{1,2} = a_{6,6},$$
$$a_{5,6} = a_{1,4}, \quad a_{4,6} = a_{2,5}, \quad a_{3,6} = a_{4,5}.$$

Aus diesem Satze folgt:

1. dass die Hypothese von Green, durch welche er das Potential mit 21 Coefficienten erhalten hat, völlig mit den Principien der Mechanik conform ist, und ferner, dass sie allgemeiner ist, als die

von Cauchy, weil der Begriff der Kräftefunction 7) allgemeiner ist, als der der Kräftefunction 8);*

2. dass die Hypothese von Green nothwendig, aber nicht hinreichend ist, um die vollkommene Elasticität zu definiren; denn im letztern Falle müssen die 21 Coefficienten noch den Bedingungen genügen, welche wir in unserem Satze bezeichnet haben. Diese Bedingungen sind, wie es mir scheint, noch von keinem Geometer bemerkt worden.

Warschau, im Januar 1876. W. Gosiewski.

Preisaufgaben
der
mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

I. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke-schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein

---

* Besonders Herr Barré de Saint-Venant bekämpft die Hypothese von Green. (Siehe §§ 71, 72 und 75 des V. Anhangs am Ende des Werkes: „*Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines ... Première section De la résistance des corps solides, par Navier ... Troisième édition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant.*“ *T. I, Fasc. II. Paris 1864.*) Aber seine Idee ist, wie es mir scheint, besonders aus dem Umstande entsprungen, dass es nicht gelungen ist, die Resultate Green's zu erhalten, wenn man von den Wirkungen zwischen materiellen Punkten längs der Verbindungslinien von je zweien ausgeht. Da ich das Gegentheil bewiesen habe, so glaube ich, dass alle Widerlegungen dieser Art nicht mehr zulässig sind.

können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)$$
$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots,$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störung der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter", abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radius vectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns" ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radius vector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen

Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von Hansen angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark.

5. Für das Jahr 1880.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämmtlicher Thiere — mit Ausnahme der sogenannten Protozoen — in ähnlicher Weise aus einigen wenigen Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an der Entwickelung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäss weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch gewisse secundäre Momente (etwa die Lagenverhältnisse der späteren Organe) bedingt sei. In Anbetracht der grossen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

eine auf eigene Untersuchungen gegründete Kritik der Lehre von der Homologie der Keimblätter.

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1877 Geheimer Rath Prof. Dr. Roscher) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

XIII.

Beitrag zu den Grundlagen der Invariantentheorie.

Von

W. VELTMANN,

Rector in Remagen.

---

1. In Bd. 62 von Crelle's Journal hat Herr Aronhold eine „fundamentale Begründung der Invariantentheorie" versucht, die von den Bedingungen ausgeht, unter welchen zwei homogene Functionen durch lineare Substitution in einander transformirt werden können. Herr Aronhold sucht zunächst nachzuweisen, dass diese Bedingungen durch Gleichsetzung absoluter Invarianten beider Functionen dargestellt werden können. Gegen die Zulässigkeit der Schlüsse aber, durch welche er zu diesem Resultate gelangt, lassen sich zum Theil sehr wesentliche Bedenken geltend machen.

Herr Aronhold nimmt an (S. 284), dass für die beiden Functionen p^{ter} Ordnung $F(x_1, \dots x_n)$ und $F'(\xi_1, \dots \xi_n)$ die Transformationsbedingungen auf die Form

$$\text{I)} \qquad PQ' + P_1 Q'_1 + P_2 Q'_2 + \dots = 0$$

gebracht seien, wo die P Functionen der Coefficienten $a_1 \dots a_m$ von $F(x_1, \dots x_n)$, die Q' Functionen der Coefficienten a' von $F'(\xi_1, \dots \xi_n)$ sind und $PQ' + \dots$ in den a sowohl, wie in den a' homogen und in beiden von demselben Grade ist.

Weitere besondere Eigenschaften hat Herr Aronhold von den Transformationsbedingungen an dieser Stelle nicht vorausgesetzt, resp. nachgewiesen. Die Anzahl derselben setzt er $= m - n^2$. Da dies jedoch streng genommen nur auf Grund eines förmlichen Beweises geschehen kann, so wollen wir sie unbestimmt lassen und $= m - q$ setzen. Die Transformationsbedingungen können wir dann andeuten durch

$$\text{II)} \qquad \begin{aligned} (a, a')_1 \quad &= 0, \\ (a, a')_2 \quad &= 0, \\ &\vdots \\ (a, a')_{m-q} &= 0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen können von den $2m$ Grössen a und a' eine Anzahl $= m+q$ willkürlich angenommen werden, worauf sich dann die übrigen $m-q$ bestimmen lassen. Nimmt man statt der Gleichungen II) ebenso viele von einander unabhängige lineare Verbindungen derselben, so können diese vollständig die ursprünglichen Gleichungen 2) vertreten; sie sind ebenfalls nothwendige und genügende Transformationsbedingungen von der Art, wie Herr Aronhold sie voraussetzt. Dass daher irgend eine der Transformationsbedingungen, z. B. die Gleichung I), irgendwelche von den Grössen a und a' nicht enthalte, hat man anzunehmen gar keinen Grund.

Aus der Gleichung I) folgt

$$P = -\frac{P_1 Q'_1 + P_2 Q'_2 + \cdots}{Q'}$$

und der hier rechts stehende Ausdruck ist nun derjenige, welcher, mit Π' bezeichnet, den Gegenstand der Erörterungen in § 3 bildet. Die Gleichung S. 288

$$D\varrho\sigma(\Pi') = \Sigma\left(\frac{d a'_{\alpha\beta\ldots}}{d x_1^{(\varrho)}}\, x_1^{(\sigma)} + \ldots + \frac{d a'_{\alpha\beta\ldots}}{d x_n^{(\varrho)}}\, x_n^{(\sigma)}\right)\frac{d(\Pi')}{d a'_{\alpha\beta\ldots}}$$

würde auch dann gelten, wenn man für Π' irgend eine beliebige andere Function der a' setzte. Dass aber der Ausdruck rechts und also auch der links $=0$ gesetzt werden kann, hat zur Voraussetzung die besondere Beschaffenheit der Function Π', sowie den Umstand, dass die a' in einer gewissen Weise von den a abhängen. Es ist nämlich nicht vorausgesetzt und kann nach dem vorhin über die Transformationsbedingungen Gesagten an dieser Stelle auch nicht vorausgesetzt werden, dass die in Π' enthaltenen a und a' von den übrigen unabhängig sind, d. h. dass ihre Anzahl nicht grösser als q ist.

Die Gleichung 9) in § 3 ist also keine für ganz beliebige Werthe der a' giltige; sie ist nicht identisch in den a'. Diese nicht vorhandene identische Natur der Gleichung 9) in § 3 liegt aber den Folgerungen in § 4 zu Grunde. Wenn nämlich die Function Π' auf die Form gebracht ist, dass in

$$\Pi' = -\left(P_1 \frac{Q'_1}{Q'} + P_2 \frac{Q'_2}{Q'} + \ldots\right)$$

die $P_1, P_2 \ldots$ von einander linear unabhängig (also etwa lauter verschiedene Producte der a, multiplicirt mit numerischen Coefficienten) sind, mithin beliebige Werthverhältnisse annehmen können, und wenn nun Π' der Gleichung 9), § 3, identisch genügte, so müsste allerdings, wie Herr Aronhold behauptet, auch jeder der Quotienten $\frac{Q'_1}{Q'}$ diese Eigenschaft haben. Diese Behauptung stützt sich also auf eine unzulässige Voraussetzung und Herr Aronhold hat demnach nicht bewiesen, dass die Transformationsbedingungen sich auf die Form

$$\Pi' = \Pi$$

bringen lassen, wo Π, resp. Π' eine absolute Invariante ist. Damit verlieren dann zugleich die weiteren Herleitungen ihre Grundlage.

Ich werde hier von dem Satze, dass die Bedingungen der Transformation zweier Functionen in einander in ihrer einfachsten Form Gleichungen zwischen absoluten Invarianten sind, dass man also durch jene Transformationsbedingungen auf die absoluten Invarianten, sowie auf die Invarianten überhaupt geführt wird, eine wirkliche Begründung geben. Dieselbe wird eine derartige sein, dass damit zugleich das Verfahren gegeben ist, sämmtliche von einander unabhängige absolute Invarianten einer Function oder eines Functionensystems zu ermitteln. Vorher soll jedoch eine Frage behandelt werden, welche hinsichtlich der Zahl dieser Invarianten von entscheidender Bedeutung ist, die Frage nämlich, ob, wenn zwei Functionen in einander transformirt werden können, dies nur durch ganz bestimmte oder durch theilweise willkürliche Substitutionen geschehen kann. Diese Frage ist von Herrn Christoffel in Bd. 68 und von Herrn Aronhold in Bd. 69 von Crelle's Journal erörtert worden. Die dort gegebenen Beweise lassen jedoch nicht deutlich erkennen, welches die Ausnahmefälle sind, wo jene Unbestimmtheit der Substitutionscoefficienten stattfindet. Ich werde hier diese Frage in einer Weise erledigen, dass sich vollständig übersehen lässt, welche Ausdehnung diese Ausnahmefälle haben, indem ich nämlich eine partielle Differentialgleichung herleite, in deren Integral sie sämmtlich enthalten sind.

2. Der einfachste Fall einer nur auf bestimmte Weise möglichen Transformation ist derjenige von n von einander unabhängigen linearen Functionen der Variabeln $x_1, \ldots x_n$. Sollen n solche in n andere transformirt werden, so kann die Transformation nur auf eine Weise geschehen. Wenn dagegen die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen geringer ist, so findet Unbestimmtheit statt. Sollen z. B. k Functionen, wo $k < n$:

$$\begin{array}{c} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n \end{array}$$

in ebenso viele andere

$$\begin{array}{c} b_{11} x'_1 + \ldots + b_{1n} x'_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k x'_1 + \ldots + b_{kn} x'_n \end{array}$$

durch die Substitution

$$x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \ldots + \alpha_{1n} x'_n$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha_{n1} x'_1 + \ldots + \alpha_{nn} x'_n$$

transformirt werden, so bestimmen sich die Coefficienten α aus den Gleichungen

$$a_{11} \alpha_{1i} + \ldots + a_{1n} \alpha_{ni} = b_{1i}$$
$$\vdots$$
$$a_{k1} \alpha_{1i} + \ldots + a_{kn} \alpha_{ni} = b_{ki},$$

wo $i = 1$ bis n zu setzen. Die Zahl dieser Gleichungen ist kn und es bleiben also von den n^2 Coefficienten eine Anzahl $= n(n-k)$ unbestimmt.

Gleiches gilt auch für die Transformation solcher Functionen in sich selbst. In obigen Gleichungen hat man dann für die b die a selbst zu setzen. Ist nun $k = n$, so sind sämmtliche Substitutionscoefficienten bestimmt. Wenn dagegen die Zahl kleiner als n ist, so findet ganz dieselbe Unbestimmtheit statt, wie bei der Transformation in ebenso viele andere Functionen.

3. Mit $F_n^{\,p}(a, x)$, $F_n^{\,p}(b, x)$ etc. bezeichne ich homogene Functionen p^{ter} Ordnung von $x_1, \ldots x_n$. Die Glieder seien lexikographisch geordnet und dann die Coefficienten a oder b etc. der Reihe nach mit den Indices $1, \ldots m$ versehen, wo also $m = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p}$ ist. Entsprechend der Transformation einer Function in eine andere werde ich auch von der Transformation der einen Coefficientenreihe in die andere sprechen.

Die Coefficientenreihe $a_1, \ldots a_m$ sei in $b_1; \ldots b_m$ transformirbar durch die Substitution

$$x_i = \alpha_{i1} x'_1 + \ldots + \alpha_{in} x'_n \tag{1}$$

und $b_1, \ldots b_m$ in $c_1, \ldots c_m$ durch

$$x_i = \beta_{i1} x'_1 + \ldots + \beta_{in} x'_n. \tag{2}$$

Bezeichnungen:

$$\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = A, \quad \Sigma \pm \beta_{11} \ldots \beta_{nn} = B,$$
$$\frac{dA}{d\alpha_{ij}} = A_{ij}, \quad \frac{dB}{d\beta_{ij}} = B_{ij}.$$

Dann ist $a_1, \ldots a_m$ in $c_1, \ldots c_m$ transformirbar durch die combinirte Substitution

$$x_1 = (\alpha_{11}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1}) x'_1 + \ldots + (\alpha_{11}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{nn}) x'_n$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$x_n = (\alpha_{n1}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{n1}) x'_1 + \ldots + (\alpha_{n1}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{nn}) x'_n.$$

4. Es seien n von einander unabhängige lineare Functionen der Variabeln $x_1, \ldots x_n$ gegeben, die der Kürze wegen mit $y_1, \ldots y_n$ bezeichnet sein mögen. Jede Function beliebiger Ordnung von $x_1, \ldots x_n$ lässt sich darstellen als Function der linearen Ausdrücke y. Setzt man nämlich ($i = 1$ bis n):

$$x_i = k_{i1} y_1 + \ldots + k_{in} y_n,$$

so lassen sich die k so bestimmen, dass die Ausdrücke rechts identisch $= x_i$ werden.

Eine Function kann jedoch die besondere Beschaffenheit haben, dass sie sich auch als eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken darstellen lässt. Solche Functionen, sowie ihre Coefficientenreihen sollen als anormale von den übrigen, normalen, unterschieden werden.

Wenn von zwei Functionen gleicher Ordnung von $x_1, \ldots x_n$ eine sich in die andere transformiren lässt und eine von beiden ist eine anormale, oder es sind beide solche, so kann die Transformation immer durch theilweise willkürliche Substitutionen geschehen. Die $n-1$ oder weniger linearen Functionen, als Function, von welcher sich eine der beiden Functionen darstellen lässt, können nämlich durch theilweise willkürliche Substitutionen in sich selbst transformirt werden. Jede solche Transformation stellt aber auch eine Transformation der betreffenden Function in sich selbst dar. Letztere kann daher auf unendlich vielfache Weise in sich selbst transformirt und deshalb auch durch Combination der theilweise willkürlichen Substitution mit der ursprünglichen auf ebenso vielfache Weise in die andere verwandelt, resp. aus der andern erhalten werden.

Das Umgekehrte, dass, wenn eine Function sich theilweise willkürlich in eine andere verwandeln lässt, wenigstens eine von beiden anormal sein müsse, gilt jedoch nicht. Es wird sich vielmehr zeigen, dass auch gewisse andere Functionen diese Eigenschaft haben.

Bei der Transformation einer normalen Function in eine andere ebensolche kann die Substitutionsdeterminante nicht $= 0$ sein; denn wäre sie dies, so würden die für x_1 bis x_n substituirten linearen Ausdrücke und somit auch die transformirte Function von weniger als n linearen Functionen abhängig sein, d. h. die transformirte Function wäre eine anormale. Bei normalen Functionen ist deshalb die Transformirbarkeit immer eine gegenseitige; die transformirte Function lässt sich rückwärts in die ursprüngliche verwandeln. Wenn zwei normale Functionen in eine dritte ebensolche transformirbar sind oder durch Transformation daraus erhalten werden können, so sind sie unter sich transformirbar. Zwei in einander transformirbare Functionen oder Coefficientenreihen sind collinear. Eine normale Function bildet mit allen zu ihr collinearen ein collineares Gebiet.

5. Die Functionen F in 3. seien normal, die Determinanten A und B also nicht $= 0$. Die Substitution 2) sei die inverse von 1), also

$$\beta_{ij} = \frac{A_{ji}}{A}.$$

Dann ist die combinirte Substitution 3) diese:

4) $$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \ldots \quad x_n = x'_n.$$

Die Reihe $c_1, \ldots c_m$ ist also mit $a_1, \ldots a_m$ identisch; die Function $F_n^{\mathfrak{L}}(a, x)$ ist in sich selbst transformirt.

6. Variiren wir jetzt die Substitution 1), so dass also die a sich um Differentialgrössen ändern. Die Substitution 2) dagegen sei dieselbe wie in 5., nämlich die inverse der ungeänderten 1). Dann werden auch die Coefficienten der Substitution 3) von den vorigen, durch 4) gegebenen, um Differentialgrössen verschieden sein. Man kann dieselben also darstellen durch

5) $$\begin{array}{cccc} 1 + \xi_{11}\,dx & \xi_{12}\,dx & \ldots & \xi_{1n}\,dx, \\ \xi_{21}\,dx & 1 + \xi_{22}\,dx & \ldots & \xi_{2n}\,dx \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \xi_{n1}\,dx & \xi_{n2}\,dx & \ldots & 1 + \xi_{nn}\,dx, \end{array}$$

wo die ξ endliche Grössen, dx unendlich klein.

7. Nehmen wir nun an, in 6. sei durch die variirte Substitution 1) dieselbe Reihe $b_1, \ldots b_m$ aus $a_1, \ldots a_m$ erhalten worden, wie in 5. durch die ungeänderte 1). Dann muss auch durch die Substitution nach dem System 5) aus $a_1, \ldots a_m$ dieselbe Reihe $c_1, \ldots c_m$ erhalten werden, wie durch 4). Denn diese Reihe entsteht das eine wie das andere Mal, indem man eine und dieselbe Reihe $b_1, \ldots b_m$ durch eine und dieselbe Substitution, nämlich die inverse der ungeänderten 1), transformirt. Da nun durch 4) die ursprüngliche Reihe $a_1, \ldots a_m$ in sich selbst transformirt wird, so muss sie auch durch 5) in sich selbst transformirt werden. Die Frage also, ob eine Reihe $a_1, \ldots a_m$ durch zwei unendlich wenig von einander verschiedene Substitutionen in eine andere $b_1, \ldots b_m$ transformirt werden kann, ist hier auf die zurückgeführt, ob eine Function durch eine zu der Substitution 4) benachbarte Substitution in sich selbst transformirt werden kann. Diese Frage aber lässt sich jetzt so fassen: Wenn in $F_n^{\mathfrak{L}} a, x$ die Substitution

6) $$\begin{array}{l} x_1 = x_1 + (\xi_{11}\,x_1 + \ldots + \xi_{1n}\,x_n)\,dx \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = x_n + (\xi_{n1}\,x_1 + \ldots + \xi_{nn}\,x_n)\,dx \end{array}$$

vorgenommen wird, können dann die ξ so gewählt werden, dass $F_n^{\mathfrak{L}}(a, x)$ ungeändert bleibt?

Bezeichnen wir die Function $F_n^{\mathfrak{L}}(a, x)$ jetzt mit f und setzen wir die Werthe der x aus 6) in dieselbe ein, so ist die Bejahung der Frage an die Bedingung geknüpft:

$$
7)\quad \begin{aligned}
&\frac{df}{dx_1}(\xi_{11}x_1+\dots+\xi_{1n}x_n)\\
+&\frac{df}{dx_2}(\xi_{21}x_1+\dots+\xi_{2n}x_n)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
+&\frac{df}{dx_n}(\xi_{n1}x_1+\dots+\xi_{nn}x_n)=0.
\end{aligned}
$$

Die Grössen ξ müssen sich also so wählen lassen, dass die Function dieser Partialgleichung genügt. Die Integration derselben wird bekanntlich auf diejenige des simultanen Systems

$$
\begin{aligned}
&dx_1 : dx_2 \dots : dx_n\\
=(\xi_{11}x_1+\dots+\xi_{1n}x_n):(\xi_{21}x_1&+\dots+\xi_{2n}x_n)\dots:(\xi_{n1}x_1+\dots+\xi_{nn}x_n)
\end{aligned}
$$

zurückgeführt. Dessen Integral lässt sich unter der Form

$$\frac{s_2^{w_2}}{s_1^{w_1}}=\gamma_2,\quad \frac{s_3^{w_3}}{s_1^{w_1}}=\gamma_3,\ \dots\ \frac{s_n^{w_n}}{s_1^{w_1}}=\gamma_n$$

darstellen, wo die s lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind, deren Coefficienten, sowie auch die w, in einer bestimmten Weise von den ξ abhängen, während die γ willkürliche Constanten sind. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Gleichung n^{ten} Grades, deren Wurzeln die $\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}\dots$ sind, keine gleichen Wurzeln hat. Das allgemeine Integral von 7) ist dann

$$8)\qquad f=F\left(\frac{s_2^{w_2}}{s_1^{w_1}},\ \dots\ \frac{s_n^{w_n}}{s_1^{w_1}}\right),$$

wo F eine willkürliche Function. Wegen der Willkürlichkeit der ξ lässt sich nun schon vermuthen, dass auch die w, sowie die Coefficienten der linearen Ausdrücke s ganz beliebige Werthe erhalten können, so dass also allgemein jede Function $F_n^{\,p}(a,x)$, welche sich auf die Form F in 8) bringen lässt, durch theilweise willkürliche Substitutionen in sich selbst transformirt werden kann. Um dies jedoch streng zu begründen, wollen wir von der Gleichung 8) ausgehen und die Bedingungen aufsuchen, unter welchen dieselbe ein Integral von 7) ist. Es sei also

$$
\begin{aligned}
&s_1=\delta_{11}x_1+\dots+\delta_{1n}x_n\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&s_n=\delta_{n1}x_1+\dots+\delta_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

und die Coefficienten δ, sowie die w sollen nun so bestimmt werden, dass 8) der Gleichung 7) genügt. Wegen der Willkürlichkeit von

F muss jeder der Quotienten in F der Gleichung 7) genügen. Wenn also irgend einer derselben $\frac{s_m^{w_m}}{s_1^{w_1}}$ ist und in Gleichung 7)

$$\xi_{\nu 1} x_1 + \ldots + \xi_{\nu n} x_n = t_\nu$$

gesetzt wird, so muss für $\nu = 1$ bis $\nu = n$

$$\Sigma \frac{w_m s_1^{w_1} s_m^{w_m - 1} \frac{d s_m}{d x_\nu} - w_1 s_m^{w_m} s_1^{w_1 - 1} \frac{d s_1}{d x_\nu}}{s_1^{2 w_1}} t_\nu = 0$$

oder ohne die herausfallenden Factoren

$$\Sigma \left(w_m s_1 \frac{d s_m}{d x_\nu} - w_1 s_m \frac{d s_1}{d x_\nu} \right) t_\nu = 0$$

sein. Hieraus folgt

$$\frac{\frac{1}{w_m} s_m}{\frac{1}{w_1} s_1} = \frac{\Sigma \frac{d s_m}{d x_\nu} t_\nu}{\Sigma \frac{d s_1}{d x_\nu} t_\nu},$$

was bedeutet

$$\frac{\frac{1}{w_m} (\delta_{m1} x_1 + \ldots + \delta_{mn} x_n)}{\frac{1}{w_1} (\delta_{11} x_1 + \ldots + \delta_{1n} x_n)} =$$

$$\frac{\delta_{m1} (\xi_{11} x_1 + \ldots + \xi_{1n} x_n) + \delta_{m2} (\xi_{21} x_1 + \ldots + \xi_{2n} x_n) + \cdots + \delta_{mn} (\xi_{n1} x_1 + \ldots + \xi_{nn} x_n)}{\delta_{11} (\xi_{11} x_1 + \ldots + \xi_{1n} x_n) + \delta_{12} (\xi_{21} x_1 + \ldots + \xi_{2n} x_n) + \cdots + \delta_{1n} (\xi_{n1} x_1 + \ldots + \xi_{nn} x_n)}.$$

Sollen diese beiden Quotienten identisch gleich sein in Bezug auf die Variabeln x, so müssen die Zähler dasselbe constante Verhältniss haben, wie die Nenner; es muss also, wenn man dieses Verhältniss v nennt, für alle m von 1 bis n

$$9) \quad \begin{aligned} \frac{v}{w_m} \delta_{m1} &= \delta_{m1} \xi_{11} + \ldots + \delta_{mn} \xi_{n1} \\ &\vdots \\ \frac{v}{w_m} \delta_{mn} &= \delta_{m1} \xi_{1n} + \ldots + \delta_{mn} \xi_{nn} \end{aligned}$$

sein, oder

$$10) \quad \begin{aligned} 0 &= \delta_{m1} \left(\xi_{11} - \frac{v}{w_m} \right) + \delta_{m2} \xi_{21} + \ldots + \delta_{mn} \xi_{n1}, \\ 0 &= \delta_{m1} \xi_{12} + \delta_{m2} \left(\xi_{22} - \frac{v}{w_m} \right) + \ldots + \delta_{mn} \xi_{n2}, \\ &\vdots \\ 0 &= \delta_{m1} \xi_{1n} + \delta_{m2} \xi_{2n} + \ldots + \delta_{mn} \left(\xi_{nn} - \frac{v}{w_m} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nach $\frac{v}{w_m}$ und den δ aufzulösen. Die Determinante der Coefficienten der δ gleich 0 gesetzt, giebt die Gleichung n^{ten} Grades für $\frac{v}{w_m}$:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}-\frac{v}{w_m} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22}-\frac{v}{w_m} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn}-\frac{v}{w_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Deren n Wurzeln sind die verschiedenen Werthe von $\frac{v}{w_m}$ für $m=1$ bis $m=n$ und indem man dieselben in 10) einsetzt, erhält man hieraus auch die den verschiedenen w entsprechenden Coefficienten δ der linearen Functionen s_1 bis s_n.

Wenn man die Gleichungen 9) für die verschiedenen m aufstellt, so kann man sie auf folgende Weise gruppiren:

Aus der ersten entstehen

$$\frac{v}{w_1}\delta_{11} = \delta_{11}\xi_{11} + \dots + \delta_{1n}\xi_{n1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{v}{w_n}\delta_{n1} = \delta_{n1}\xi_{11} + \dots + \delta_{nn}\xi_{n1},$$

aus der zweiten

$$\frac{v}{w_1}\delta_{12} = \delta_{11}\xi_{12} + \dots + \delta_{1n}\xi_{n2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{v}{w_n}\delta_{n2} = \delta_{n1}\xi_{12} + \dots + \delta_{nn}\xi_{n2}$$

u. s. w., aus der letzten

$$\frac{v}{w_1}\delta_{1n} = \delta_{11}\xi_{1n} + \dots + \delta_{1n}\xi_{nn}$$
$$\vdots$$
$$\frac{v}{w_n}\delta_{nn} = \delta_{n1}\xi_{1n} + \dots + \delta_{nn}\xi_{nn}.$$

In diesen Gleichungen kann man nun auch die δ und die w als gegeben annehmen und dann aus der ersten Gruppe ξ_{11} bis ξ_{n1}, aus der zweiten ξ_{12} bis ξ_{n2} u. s. w. bestimmen, vorausgesetzt, dass die Determinante der δ nicht $=0$ ist. Wählt man also die δ dieser Bedingung gemäss, die w aber ganz beliebig, während v ebenfalls willkürlich ist, so ist die Gleichung 8) immer ein Integral von 7).

Der Fall, wo die Determinante der $\delta=0$, ist also hierbei ausgeschlossen. In diesem Falle aber sind die $s_1, \ldots s_n$ nicht von einander unabhängig; die Function F in 8) ist also eine anormale und hat daher nach 4. die fragliche Eigenschaft.

Demnach lässt sich also jede in der Form F in Gleichung 8), wo die Coefficienten δ der einzelnen s, sowie die w ganz beliebige Grössen sind, darstellbare homogene ganze Function durch theilweise willkürliche Substitutionen in sich selbst verwandeln. Dieselbe Unbestimmtheit findet daher auch statt bei der Transformation einer solchen Function in eine andere. Als Beispiel möge folgende binäre Function dritten Grades

$$(2x_1+x_2)^2(x_1+2x_2)=4x_1^3+12x_1^2x_2+9x_1x_2^2+2x_1x_2^3$$

angeführt werden, welche die Form $F\left(\frac{s_2^{w_2}}{s_1^{w_1}}\right)$ hat für

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1+2x_2, \\ s_2 &= 2x_1+x_2, \\ w_1 &= -1, \\ w_2 &= 2. \end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich in sich selbst transformiren durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}\left(4\lambda-\frac{1}{\lambda^2}\right)x'_1+\tfrac{2}{3}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda^2}\right)x'_2, \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{\lambda^2}-\lambda\right)x'_1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{4}{\lambda^2}-\lambda\right)x'_2, \end{aligned}$$

wo λ eine ganz willkürliche Grösse ist. Die Determinante dieser Substitution ist $=\frac{9}{\lambda}$, also nie $=0$, was sie auch nicht sein kann, da obige Function eine normale ist.

Wenn die ξ in Gleichung 7) so gewählt sind, dass das gewöhnliche Integrationsverfahren eine Gleichung zur Bestimmung der w liefert, deren Wurzeln nicht alle verschieden sind, so erhält das allgemeine Integral eine andere Form, als die durch die Gleichung 8) gegebene. Die Constanten dieses Integrals kann man dann ebenso, wie oben mit den δ und w der Gleichung 8) geschehen, so bestimmen, dass der Gleichung 7) genügt wird. In der so erhaltenen allgemeinen Form sind möglicherweise auch ganze homogene Functionen enthalten, so dass also die durch F in Gleichung 8) dargestellten δ nicht die einzigen sind, welche sich auf unendlich vielfache Weise in sich selbst transformiren lassen. Es ist jedoch für den vorliegenden Zweck ohne wesentliches Interesse, dies näher zu untersuchen. Man übersieht nach dem Bisherigen, dass die Fälle, wo die Substitution theilweise willkürlich ist, ziemlich ausgedehnt sind, dass aber im Allgemeinen diese Willkürlichkeit nicht stattfindet.

8. Von allen zu einem bestimmten collinearen Gebiete gehörigen normalen Functionen ist jede in sämmtliche übrigen und nur in diese transformirbar. Das zu lösende Problem der Transformationsbedingungen ist demnach jetzt folgendes: Es sind die Bedingungen aufzustellen, unter welchen zwei normale Coefficientenreihen $a_1, \dots a_m$ und $b_1, \dots b_m$ zu demselben collinearen Gebiete gehören.

Die Reihe $a_1, \dots a_m$ möge in $b_1, \dots b_m$ transformirbar sein durch die Substitution

$$11) \qquad x_i = \alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{in} x_n .$$

Die $b_1, \dots b_m$ seien unmittelbar in den a und den α_{ij} ausgedrückt durch die Gleichungen

$$12) \qquad \begin{aligned} b_1 &= \alpha_1^{\underline{1}} a_1 + \dots + \alpha_m^{\underline{1}} a_m \\ &\vdots \\ b_m &= \alpha_1^{\underline{m}} a_1 + \dots + \alpha_m^{\underline{m}} a_m , \end{aligned}$$

wo die $\alpha_j^{\underline{i}}$ Functionen der α_{ij} vom p^{ten} Grade sind.

Man eliminire aus diesen Gleichungen die α_{ij} und so viele von den a, als sich daraus eliminiren lassen. Es mögen also etwa ausser sämmtlichen α_{ij} auch noch $a_{q+2}, a_{q+3}, \dots a_m$ eliminirt werden. Die resultirende Gleichung sei

$$13) \qquad \begin{aligned} \varphi_0(a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_m) + a_{q+1}\varphi_1(a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_m) + \dots \\ \dots + a_{q+1}^h \varphi_h(a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_m) = 0, \end{aligned}$$

wo also die φ Functionen der $b_1, \dots b_m$ und $a_1, \dots a_q$ sind, während von den übrigen a nur a_{q+1} in der Gleichung vorkommt.

Man gebe nun den $a_1, \dots a_q$ ganz beliebige Werthe. Für $b_1, \dots b_m$ aber nehme man irgend eine normale Reihe, jedoch keine solche von der besondern Beschaffenheit, dass $\varphi_h(a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_m) = 0$ wird. Die übrigen a bestimmen sich dann aus den Gleichungen 13) und 12). Aus 13) erhält man eine Anzahl $= h$ Werthe von $q+1$ und dann aus 12) zu jedem von diesen ein oder mehrere Systeme von Werthen der $a_{q+2}, \dots a_m$. Und zwar erhält man alle diejenigen Werthsysteme von $a_{q+1}, \dots a_m$, welche mit den angenommenen Werthen von $a_1, \dots a_q$ eine zu $b_1, \dots b_m$ collineare Reihe bilden. Die so erhaltenen Reihen $a_1, \dots a_m$ sind sämmtlich normal, da die Gleichungen 12) aus einer anormalen Reihe $a_1, \dots a_m$ nur eine anormale Reihe $b_1, \dots b_m$ liefern können, letztere aber normal vorausgesetzt ist.

Die gewählte Reihe $b_1, \dots b_m$ gehört einem bestimmten collinearen Gebiete an. Setzt man für $b_1, \dots b_m$ irgend eine andere Reihe aus demselben Gebiete, während $a_1, \dots a_q$ unverändert bleiben, so ergeben sich wieder für die übrigen a sämmtliche Werthsysteme, welche mit $a_1, \dots a_q$ eine zu der jetzigen $b_1, \dots b_m$ collineare Reihe bilden. Nun sind aber die beiden Reihen $b_1, \dots b_m$ zu einander collinear, mithin ist jede zu einer von beiden collineare Reihe es auch zu der andern. Die zu $b_1, \dots b_m$ collinearen $a_1, \dots a_m$, in welchen $a_1, \dots a_q$ die angenommenen Werthe haben, sind also für beide Reihen der b ganz dieselben, und da sie sämmtlich aus den Gleichungen 13) und 12) erhalten werden, so liefern diese Gleichungen für beide Reihen $b_1, \dots b_m$ die nämlichen Werthsysteme von $a_{q+1}, \dots a_m$. Ebendasselbe gilt für alle Reihen $b_1, \dots b_m$ des betreffenden collinearen Gebietes.

Insbesondere erhält man demnach auch für sämmtliche Reihen $b_1, \dots b_m$ aus diesem collinearen Gebiete die nämlichen Werthe von a_{q+1}; für alle diese Reihen sind daher die Quotienten

$$14) \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_h}, \dots \frac{\varphi_{h-1}}{\varphi_h}$$

constant.

Umgekehrt, wenn irgend eine Reihe $b'_1, \dots b'_m$ in 13) eingesetzt, für diese Quotienten dieselben Werthe liefert, wie die ursprüngliche Reihe $b_1, \dots b_m$, so gehört $b'_1, \dots b'_m$ zu demselben Gebiete, wie $b_1, \dots b_m$. Denn sie giebt dieselben Werthe von a_{q+1}, mithin auch von $a_{q+2}, \dots a_m$; es sind also $b_1, \dots b_m$ und $b'_1, \dots b'_m$ zu denselben Reihen $a_1, \dots a_m$ und deshalb auch zu einander collinear. Für alle zu den ursprünglichen $b_1, \dots b_m$ collinearen Reihen und nur für diese haben demnach die Quotienten 14) dieselben Werthe, wie für jene $b_1, \dots b_m$. Wenn wir also diese Werthe mit $c_0, c_1, \dots c_{h-1}$ bezeichnen, so sind die Gleichungen

$$15) \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_h} = c_0, \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_h} = c_1, \quad \dots \quad \frac{\varphi_{h-1}}{\varphi_h} = c_{h-1}$$

die nothwendigen und genügenden Bedingungen dafür, dass die jetzt als variabel betrachteten $b_1, \dots b_m$ demjenigen collinearen Gebiete angehören, welches durch die ursprünglichen Werthe von $b_1, \dots b_m$ gegeben ist.

Um aus diesem Gebiete in ein anderes überzugehen, lässe man die Grössen $a_1, \dots a_q$ unverändert, so dass also die Functionen φ als Functionen von $b_1, \dots b_m$ ihre Form nicht ändern. Für $b_1, \dots b_m$ aber nehme man irgend eine Reihe aus dem andern Gebiete. Wenn dann nicht $\varphi_h(a_1, \dots a_q, b_1, \dots b_m) = 0$ wird und für die Constanten $c_0, \dots c_{h-1}$ die neuen Werthe von $\frac{\varphi_0}{\varphi_h}, \dots \frac{\varphi_{h-1}}{\varphi_h}$ genommen werden, so folgt ganz auf dieselbe Weise, wie vorhin, dass die Gleichungen 15) die nothwendigen und genügenden Bedingungen dafür sind, dass die als variabel betrachteten $b_1, \dots b_m$ dem durch die ursprünglichen Werthe derselben bestimmten collinearen Gebiete angehören.

Da der Fall $\varphi_h = 0$, für welchen Vorstehendes nicht gilt, nur bei den ganz besonderen Reihen $b_1, \dots b_m$ stattfindet, welche der Gleichung $\varphi_h = 0$ bei constanten $a_1, \dots a_q$ genügen, so sind die Gleichungen 15) als die allgemeinen Bedingungsgleichungen zu betrachten dafür, dass die Reihe $b_1, \dots b_m$ einem collinearen Gebiete angehört, welches durch die Constanten $c_0, \dots c_{h-1}$ bestimmt ist. Ob diese Constanten ganz beliebig gewählt werden können oder ob es Werthe derselben giebt, bei welchen keine Reihen $b_1, \dots b_m$ den Gleichungen 15) genügen, ist hier eine gleichgiltige Frage.

Aus den Gleichungen 15) erhält man nun sofort die Bedingungen für die Transformation zweier Reihen $a_1, \dots a_m$ und $b_1, \dots b_m$ in einander. Bezeichnen wir die Functionen φ in 15) mit $\varphi(b)$ oder $\varphi(a)$, je nachdem sie die $b_1, \dots b_m$ oder statt derselben die $a_1, \dots a_m$ (die constanten, oben mit $a_1, \dots a_q$ bezeichneten Grössen kommen nicht mehr in Betracht) enthalten, so sind die Gleichungen

$$16)\quad \begin{array}{cc} \dfrac{\varphi_0(a)}{\varphi_h(a)} = c_0, & \dfrac{\varphi_0(b)}{\varphi_h(b)} = c_0 \\ \vdots & \\ \dfrac{\varphi_{h-1}(a)}{\varphi_h(a)} = c_{h-1}, & \dfrac{\varphi_{h-1}(b)}{\varphi_h(b)} = c_{h-1} \end{array}$$

die Bedingungen dafür, dass beide Reihen $a_1, \dots a_m$ und $b_1, \dots b_m$ dem durch die Constanten $c_0, c_1, \dots c_{h-1}$ bestimmten collinearen Gebiet angehören. Dass sie also überhaupt zu ein und demselben Gebiet gehören, ist durch die Gleichungen bedingt

$$17)\quad \begin{array}{c} \dfrac{\varphi_0(a)}{\varphi_h(a)} = \dfrac{\varphi_0(b)}{\varphi_h(b)} \\ \vdots \\ \dfrac{\varphi_{h-1}(a)}{\varphi_h(a)} = \dfrac{\varphi_{h-1}(b)}{\varphi_h(b)}. \end{array}$$

Diese Gleichungen werden nicht alle von einander unabhängig sein. Reducirt man dieselben auf ein System von einander unabhängiger Gleichungen, so kann deren Anzahl nur $= m - n^2$ sein. Aus den Gleichungen 12) kann man nämlich, da nach früher (in 7.) Bewiesenem bei gegebenen a und b die α_{ij} nicht theilweise willkürlich sind, n^2 Gleichungen auswählen, aus welchen sich, nachdem man die darin vorkommenden b, sowie sämmtliche a willkürlich, jedoch normal angenommen hat, die α_{ij} bestimmen lassen, worauf sich dann aus den übrigen $m - n^2$ Gleichungen die noch fehlenden b ergeben. In Uebereinstimmung damit muss also auch die Zahl der erhaltenen, von einander unabhängigen Transformationsbedingungen eine solche sein, dass darin n^2 von den b

und sämmtliche a willkürlich angenommen werden können; sie muss daher $m - n^2$ sein.

9. $a_1, \ldots a_m$ seien jetzt die Coefficienten mehrerer Functionen $F_n^{p_1}(a,x)$, $F_n^{p_2}(a,x)$ etc. von $x_1, \ldots x_n$, beziehendlich von der p_1^{ten}, p_2^{ten} Ordnung etc. in einer bestimmten Reihenfolge, etwa nach den Functionen geordnet, während in jeder von diesen die Glieder lexikographisch auf einander folgen. $b_1, \ldots b_m$ sei die ebenso geordnete Reihe der Coefficienten entsprechender Functionen $F_n^{p_1}(b,x)$, $F_n^{p_2}(b,x)$ etc. Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter welchen durch eine für alle Functionen gleiche Substitution die Reihen $a_1, \ldots a_m$ und $b_1, \ldots b_m$, welche beide für sämmtliche Functionen normal vorausgesetzt werden, in einander transformirt werden können.

Das Verfahren hierzu unterscheidet sich in Nichts von dem in 8. für eine Function angewandten und die Zahl der Transformationsbedingungen ist auch hier $= m - n^2$. Jedoch ist jetzt

$$m = \frac{n(n+1)\ldots(n+p_1-1)}{1.2\ldots p_1} + \frac{n(n+1)\ldots(n+p_2-1)}{1.2\ldots p_2} + \ldots$$

Die Functionen der beiden Systeme sind einander paarweise zugeordnet; die Zahl dieser Paare sei ν. Unter den Transformationsbedingungen können Gleichungen vorkommen, welche die Coefficienten aus beliebig vielen Paaren enthalten. Sie lassen sich aber immer so umformen, dass keine derselben zu mehr als zwei Paaren gehört. Um nämlich die Gleichungen in dieser Form zu erhalten, stelle man zunächst die Collineationsbedingungen für je ein Paar auf. Setzt man $\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p} = (n,p)$, so ist die Zahl derselben $= (n,p_1) + (n,p_2) + \ldots + (n,p_\nu) - \nu n^2$. Ferner stelle man die Bedingungen auf für die Identität der Substitutionen im ersten und zweiten Paare, im zweiten und dritten Paare etc. bis im $\nu - 1^{\text{ten}}$ und ν^{ten} Paare. Die Anzahl ist jedes Mal n^2. Für die beiden ersten Paare z. B. ist die Zahl der sämmtlichen Collineationsbedingungen $(n,p_1) + (n,p_2) - n^2$, die Zahl der zu je einem der beiden Paare gehörigen $= (n,p_1) + (n,p_2) - 2n^2$, die Zahl derjenigen also, welche die Coefficienten aus beiden enthalten, $= n^2$.

Das gesammte System der Collineationsbedingungen besteht also dann aus $(n,p_1) + \ldots + (n,p_\nu) - \nu n^2$ Gleichungen für je ein Paar und $(\nu - 1)n^2$ für je zwei aufeinander folgende Paare, was zusammen $(n,p_1) + \ldots + (n,p_\nu) - n^2$ giebt. Ausnahmen von diesen Zahlenbestimmungen finden in manchen Fällen statt, wo Functionen erster und zweiter Ordnung vorkommen.

10. Irgend eine der Transformationsbedingungen für ein oder mehrere Functionenpaare sei

$$\frac{\varphi(a)}{\chi(a)} = \frac{\varphi(b)}{\chi(b)}.$$

Die Transformation der a in die b geschehe durch die Substitution

$$x_i = \alpha_{i1} x'_1 + \ldots + \alpha_{in} x'_n.$$

Beide gebrochene Functionen in der Gleichung seien von gemeinsamen Factoren in Zähler und Nenner frei. Setzt man rechts statt der b die Werthe in den a und den α_{ij}, so fallen die a heraus; $\varphi(b)$ und $\chi(b)$ erhalten also dann einen gemeinsamen Factor, der sämmtliche α enthält. Dieser gemeinsame Factor kann aber auch nur die α, keine a enthalten, da sonst $\varphi(a)$ und $\chi(a)$ von höherem Grade wären, als die nicht gemeinsamen Factoren von $\varphi(b)$ und $\chi(b)$ und deshalb selbst noch einen gemeinsamen Theiler haben müssten. Man kann daher setzen

$$18)\qquad \begin{aligned} \varphi(b) &= R.\varphi(a), \\ \chi(b) &= R.\chi(a), \end{aligned}$$

wo R eine Function der α ist. Zugleich folgt hieraus, dass die Functionen φ und χ in den a oder b von demselben Grade sind, da sonst $\varphi(b)$ und $\chi(b)$ in den α nicht von demselben Grade werden, mithin auch nicht denselben Factor R liefern könnten.

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass R eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist. Dieser Beweis möge indess in einer allgemeineren Weise geführt werden.

11. Homogene Grundfunctionen von $x_1, \ldots x_n$ resp. von der p_1^{ten}, p_2^{ten} etc. Ordnung seien $F_1, F_2, \ldots.$ Die Coefficienten von F_1 seien a_1, $a_2, \ldots$, die von F_2 seien $b_1, b_2, \ldots.$ Man transformire die Functionen durch lineare Substitutionen, welche entweder für alle verschieden oder auch für beliebige unter denselben die nämlichen sein können. Die Substitution in F_1 sei

$$19_1)\qquad x_i = \alpha_{i1} x'_1 + \ldots + \alpha_{in} x'_n,$$

in F_2

$$19_2)\qquad x_i = \beta_{i1} x'_1 + \ldots + \beta_{in} x'_n$$

u. s. w. Die Coefficienten der transformirten Functionen $F'_1, F'_2, \ldots$ seien $a'_1, a'_2, \ldots, b'_1, b'_2, \ldots, ---$.

Eine durch $f(a, b, \ldots)$ bezeichnete Function sei in den Coefficienten a von F_1 vom q_1^{ten}, in den b der F_2 vom q_2^{ten} Grade u. s. f. homogen. Wenn nun die Function f die den obigen Gleichungen 18) entsprechende Eigenschaft hat, dass

$$20)\qquad f(a', b', \ldots) = \psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, ---) . f(a, b, \ldots),$$

wo ψ eine Function sämmtlicher Substitutionscoefficienten ist, so soll bewiesen werden, dass diese Function ψ einem Producte von Potenzen der Substitutionsdeterminanten gleich ist.

Da F_1 in den x, mithin auch die a' in den α vom p_1^{ten}, und da ferner f in den a' vom q_1^{ten} Grade ist, so ist $f(a', b', \ldots)$ und somit auch

ψ in den α vom $p_1 q_1^{\text{ten}}$ Grade. Ebenso ist ψ in den β vom $p_2 q_2^{\text{ten}}$ Grade etc. homogen.

Transformiren wir nun rückwärts, d. h. setzen wir in den transformirten Functionen für die x' die Werthe, welche sich durch Auflösung der Gleichungen 19) ergeben. Setzen wir also in F'_1

$$x'_j = (A_{1j} x_1 + \ldots + A_{nj} x_n) \frac{1}{A},$$

in F'_2

$$x'_j = (B_{1j} x_1 + \ldots + B_{nj} x_n) \frac{1}{B}$$

u. s. w., wo

$$A = \Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}, \quad B = \Sigma \pm \beta_{11} \ldots \beta_{nn} \text{ u. s. w.},$$

$$A_{ij} = \frac{dA}{d\alpha_{ij}}, \quad B_{ij} = \frac{dB}{d\beta_{ij}} \text{ u. s. w.}$$

Die Functionen F_1, F_2 etc. sind dadurch wieder in sich selbst transformirt. Bezeichnet man also die neuen Coefficienten mit $a''_1, a''_2, \ldots, b''_1, b''_2, \ldots$, so sind diese mit den ursprünglichen $a_1, \ldots, b_1, \ldots$, und daher auch die Function $f(a'', b'', \ldots)$ mit $f(a, b, \ldots)$ identisch. Nun ist aber

$$f(a'', b'', \ldots) = \psi\left(\frac{A_{11}}{A}, \ldots, \frac{B_{11}}{B}, \ldots, \cdots\right) . f(a', b', \ldots),$$

wo $\psi\left(\frac{A_{11}}{A}, \ldots, \frac{B_{11}}{B}, \ldots, \cdots\right)$ aus $\psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, \cdots)$ entsteht, indem man $\frac{A_{ji}}{A}$ an die Stelle von α_{ij}, $\frac{B_{ji}}{B}$ an die Stelle von β_{ij} etc. setzt. Wegen 20) ist also

$$f(a'', b'', \ldots) = \psi\left(\frac{A_{11}}{A}, \ldots, \frac{B_{11}}{B}, \ldots, \cdots\right) . \psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, \cdots) . f(a, b, \ldots)$$

oder, weil $f(a'', b'', \ldots)$ mit $f(a, b, \ldots)$ identisch ist,

$$\psi\left(\frac{A_{11}}{A}, \ldots, \frac{B_{11}}{B}, \ldots, \cdots\right) . \psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, \cdots) = 1.$$

Da der erste Factor links in den $\frac{A_{ji}}{A}$ vom $p_1 q_1^{\text{ten}}$, in den $\frac{B_{ji}}{B}$ vom $p_2 q_2^{\text{ten}}$ Grade ist etc., so kann man diese Gleichung so schreiben:

$$21) \qquad \frac{\psi(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots, \cdots) . \psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, \cdots)}{A^{p_1 q_1} B^{p_2 q_2} \ldots} = 1.$$

Da eine Determinante mit n^2 von einander unabhängigen Elementen keine Theiler hat, so müssen hier beide Factoren des Zählers Producte aus den Determinanten A, B etc. sein, welche ausserdem nur noch mit constanten Grössen multiplicirt sein können. Es sei also

$$22) \quad \psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, \cdots) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1}, & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^{\alpha_0} \begin{vmatrix} \beta_{11}, & \ldots & \beta_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \beta_{n1}, & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}^{\beta_0} \cdots . l,$$

wo t ein constanter Factor. Da nun $\psi(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots, ---)$ aus $\psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, ---)$ entsteht, indem man α_{ij} durch A_{ji}, β_{ij} durch B_{ji} etc. ersetzt, so ist

$$\psi(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots, ---) = \begin{vmatrix} A_{11}, & \ldots & A_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ A_{1n}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}^{\alpha_0} \begin{vmatrix} B_{11}, & \ldots & B_{n1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ B_{1n}, & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}^{\beta_0} \ldots . t$$

oder, weil $\Sigma \pm A_{11}, \ldots A_{nn} = A^{n-1}$, $\Sigma \pm B_{11}, \ldots B_{nn} = B^{n-1}$ etc.,

$$23)\qquad \psi(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots, ---) = A^{(n-1)\alpha_0} B^{(n-1)\beta_0} \ldots . t.$$

Setzt man aus 22) und 23) in Gleichung 21) ein, so wird diese

$$\frac{A^{n\alpha_0} B^{n\beta_0} \ldots . t^2}{A^{p_1 q_1} B^{p_2 q_2} \ldots} = 1,$$

woraus folgt

$$\alpha_0 = \frac{p_1 q_1}{n}, \quad \beta_0 = \frac{p_2 q_2}{n}, \ ---, \ t = \pm 1.$$

Nach Gleichung 22) ist also dann

$$\psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, ---) = \pm A^{\frac{p_1 q_1}{n}} B^{\frac{p_2 q_2}{n}} \ldots.$$

Die Entscheidung zwischen den beiden Zeichen erhält man, indem man jede der Functionen F in sich selbst transformirt durch die Substitution $x_1 = x'_1, \ldots x_n = x'_n$. In den Determinanten A, B etc. werden dann die Elemente der Diagonale $=1$, die übrigen $=0$. Es wird also jetzt

$$\psi(\alpha_{11}, \ldots, \beta_{11}, \ldots, ---) = \pm 1$$

und aus Gleichung 20), wo jetzt $f(a', b', \ldots)$ mit $f(a, b, \ldots)$ identisch ist, ergiebt sich dann, dass das Pluszeichen genommen werden muss. Die Gleichung 20) wird demnach jetzt

$$24)\quad f(a', b', \ldots) = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1}{n}} (\Sigma \pm \beta_{11} \ldots \beta_{nn})^{\frac{p_2 q_2}{n}} \ldots . f(a, b, \ldots).$$

12. Wenn in 11. sämmtliche Grundfunctionen F_1, F_2, ... durch ein und dieselbe Substitution, etwa 19_1), transformirt werden, so sind die beiden Functionensysteme F_1, F_2, ... und F'_1, F'_2, ... collinear. Sämmtliche Systeme von normalen Functionen, die zu einem bestimmten collinear sind, bilden ein collineares Gebiet. Die Function f der Coefficienten ist in diesem Falle, sowie auch wenn sie nur die Coefficienten einer Function, etwa F_1, enthält, eine gewöhnlich sogenannte Invariante. In ersterem Falle, dem einer simultanen Invariante mehrerer Functionen, wird die Gleichung 24)

$$25)\qquad f(a', b', \ldots) = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots}{n}} . f(a, b, \ldots)$$

und im zweiten

$$26)\qquad f(a') = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1}{n}} f(a).$$

Den Gleichungen 18) und dem in 11. Bewiesenen zufolge sind die von gemeinsamen Factoren befreiten Zähler und Nenner der gebrochenen Functionen, welche in den Collineationsbedingungen eines oder mehrerer Functionenpaare vorkommen, solche Invarianten. Die gebrochenen Functionen selbst sind, als in einem bestimmten Gebiete ganz unveränderlich, absolute Invarianten. Dieselben sind, nach dem oben zur Gleichung 18) Bemerkten, in den Coefficienten vom nullten Grade.

Die Collineationsbedingungen der beiden Functionensysteme F_1, F_2, ... und F'_1, F'_2, ... seien angedeutet durch die Gleichungen

$$
27)\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{f_1(a,b,\ldots)}{\chi_1(a,b,\ldots)} = \dfrac{f_1(a',b',\ldots)}{\chi_1(a',b',\ldots)} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \\
\dfrac{f_h(a,b,\ldots)}{\chi_h(a,b,\ldots)} = \dfrac{f_h(a',b',\ldots)}{\chi_h(a',b',\ldots)},
\end{array}
$$

wo die gebrochenen Functionen in Zähler und Nenner von gemeinsamen Factoren frei sind und deshalb die Nenner nicht mehr als gleich betrachtet werden können. Die Functionen links sind absolute Invarianten von $F_1, F_2, \ldots$ und es existirt keine andere ebensolche, die von denselben unabhängig wäre. Denn wäre z. B. $\dfrac{f_0(a,b,\ldots)}{\varphi_0(a,b,\ldots)}$ eine solche, so würde die Gleichung bestehen

$$
\frac{f_0(a,b,\ldots)}{\chi_0(a,b,\ldots)} = \frac{f_0(a',b',\ldots)}{\chi_0(a',b',\ldots)}.
$$

Diese Gleichung würde dann von den Gleichungen 27) unabhängig sein und es wären also diese nicht die nothwendigen und genügenden Collineationsbedingungen.

In den Gleichungen 27) kann man den gleichen Nenner leicht wiederherstellen, ohne nicht invariante Functionsbedingungen hineinzubringen; man nehme nur als gemeinsamen Nenner links, sowie rechts nöthigenfalls das Product sämmtlicher Nenner. Die gebrochenen Functionen bleiben dabei vom nullten Grade und es werden deshalb sämmtliche Zähler wieder von gleichem Grade mit den Nennern. Die Gleichungen seien in dieser Form

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{f^{1}_{\smile}(a,b,\ldots)}{f^{0}_{\smile}(a,b,\ldots)} = \dfrac{f^{1}_{\smile}(a',b',\ldots)}{f^{0}_{\smile}(a',b',\ldots)} \\
\vdots \\
\dfrac{f^{h}_{\smile}(a,b,\ldots)}{f^{0}_{\smile}(a,b,\ldots)} = \dfrac{f^{1}_{\smile}(a',b',\ldots)}{f^{0}_{\smile}(a',b',\ldots)}.
\end{array}
$$

Wenn man hier rechts die $a', b', \ldots$ durch ihre Werthe in den $a, b, \ldots$ und den α_{ij} ersetzt, so erscheint in allen Zählern und dem Nenner, da dieselben Invarianten von gleichem Grade sind, eine und dieselbe Potenz, etwa die ε^{te}, der Substitutionsdeterminante A. Man kann daher setzen

$$
29)\qquad
\begin{aligned}
f^{\underline{0}}(a', b', \ldots) &= A^{\varepsilon}.\, f^{\underline{0}}(a, b, \ldots),\\
f^{\underline{1}}(a', b', \ldots) &= A^{\varepsilon}.\, f^{\underline{1}}(a, b, \ldots)\\
&\;\;\vdots\\
f^{\underline{h}}(a', b', \ldots) &= A^{\varepsilon}.\, f^{\underline{h}}(a, b, \ldots).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen können statt 28) als Collineationsbedingungen dienen; durch Elimination von A erhält man letztere daraus wieder. Ausser $f^{\underline{0}}$, $f^{\underline{1}}, \ldots f^{\underline{h}}$ existirt nun keine von diesen unabhängige Invariante des gegebenen Functionensystems. Denn gäbe es eine solche, etwa $f^{\underline{r}}(a, b, \ldots)$, so würde man setzen können

$$f^{\underline{r}}(a', b', \ldots) = A^{\vartheta}.\, f^{\underline{r}}(a, b, \ldots),$$

wo ϑ der Exponent der dem Grade von $f^{\underline{r}}$ entsprechenden Determinantenpotenz. Diese Gleichung würde dann von 29) unabhängig sein und es wären daher wieder 29) oder 28) nicht die nothwendigen und genügenden Transformationsbedingungen.

Man hat demnach in dem auf mehrere Functionen ganz in derselben Weise wie auf eine anwendbaren Eliminationsverfahren, welches in 8. angegeben wurde, ein Mittel, sämmtliche Invarianten und absolute Invarianten eines Functionensystems zu erhalten. Aus den Coefficienten der resultirenden Gleichung lassen sich dieselben in der angegebenen Weise darstellen.

Die Covarianten sind eine besondere Art von Invarianten. Wenn nämlich die Function f in Gleichung 25) ausser den Coefficienten der Grundfunctionen auch die Variablen $x_1, \ldots x_n$ enthält, so ist an deren Stelle $x'_1, \ldots x'_n$ zu setzen, hierfür aber wieder aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \ldots + \alpha_{1n} x'_n\\
&\;\;\vdots\\
x_n &= \alpha_{n1} x'_1 + \ldots + \alpha_{nn} x'_n
\end{aligned}
$$

sich ergebende Werthe in den $x_1, \ldots x_n$ und den α_{ij} zu substituiren. Ganz dasselbe Resultat erhält man aber, wenn man die Variablen $x_1, \ldots x_n$ als Coefficienten einer zu den Grundfunctionen hinzuzufügenden linearen Function von n neuen Variablen $y_1, \ldots y_n$:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

betrachtet, welche nach der Substitution

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\varDelta_{11} y'_1 + \ldots + \varDelta_{1n} y'_n) \cdot \frac{1}{\varDelta} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_n &= (\varDelta_{n1} y'_1 + \ldots + \varDelta_{nn} y'_n) \cdot \frac{1}{\varDelta}
\end{aligned}
$$

transformirt wird. Die Buchstaben $\varDelta$, $\varDelta_{11}$ etc. haben hier die frühere Bedeutung. Man hat dann, dem allgemeinen Falle in 11. entsprechend, eine Transformation mehrerer Functionen nach verschiedenen Substitutionen. Die Determinante der Substitution für die y ist $= \varDelta^{-1}$ und wenn also die Function f in den x vom q^{ten} Grade ist, so wird die Gleichung 25) jetzt

$$f(a', b', \ldots, x'_1, \ldots x'_n) = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots - q}{n}} \cdot f(a, b, \ldots, x_1, \ldots x_n).$$

Die Covariante erscheint demnach in der That als simultane Invariante eines Systems, welches aus den Grundfunctionen und der linearen Hilfsfunction $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ besteht.

Aehnlich verhält es sich mit den zugehörigen Formen. Die Function f in Gleichung 25) enthält dann noch n Grössen $u_1, \ldots u_n$, deren neue Werthe $u'_1, \ldots u'_n$ sich aus denselben durch die Gleichungen bestimmen

$$
\begin{aligned}
u'_1 &= \alpha_{11} u_1 + \ldots + \alpha_{n1} u_n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
u'_n &= \alpha_{1n} u_1 + \ldots + \alpha_{nn} u_n.
\end{aligned}
$$

Ganz dieselben Werthe von $u'_1, \ldots u'_n$ erhält man aber, wenn man $u_1, \ldots u_n$ als Coefficienten einer linearen Function

$$u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n$$

betrachtet, diese Function durch die Substitution

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\alpha_{11} y'_1 + \ldots + \alpha_{1n} y'_n) \varDelta \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_n &= (\alpha_{n1} y'_1 + \ldots + \alpha_{nn} y'_n) \varDelta
\end{aligned}
$$

transformirt und die neuen Coefficienten $= u'_1, \ldots u'_n$ setzt. Diese Substitution ist von derjenigen zur Bestimmung der neuen Coefficienten der Grundfunctionen ebenfalls verschieden und ihre Determinante ist $= \varDelta^2$. Wenn also die Function f in den $u_1, \ldots u_n$ vom k^{ten} Grade ist, so tritt an die Stelle der Gleichung 25) jetzt folgende:

$$f(a', b', \ldots, u'_1, \ldots u'_n) = (\Sigma \pm \alpha_{11}, \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + 2k}{n}} \cdot f(a, b, \ldots, u_1, \ldots u_n).$$

Für eine Zwischenform endlich $f(a', b', \ldots, x', u')$, welche die $x_1, \ldots x_n$ im q^{ten} und die $u_1, \ldots u_n$ im k^{ten} Grade enthält, würde die Gleichung diese sein:

$$f(a', b', \ldots, x', u') = (\Sigma \pm \alpha_{11}, \ldots \alpha_{nn})^{\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots - q + 2k}{n}} . f(a, b, \ldots, x, u).$$

13. Setzt man in Gleichung 25)

$$f(a', b', \ldots) = f', \quad f(a, b, \ldots) = f,$$

$$\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} = A, \quad \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots}{n} = r,$$

so wird dieselbe

$$f' = A^r . f$$

und es ist, wenn das Zeichen Σ sich auf die Werthe $1, 2, \ldots n$ von g bezieht:

$$\Sigma \frac{df'}{d\alpha_{ig}} \alpha_{jg} = r A^{r-1} f . \Sigma \frac{dA}{d\alpha_{ig}} \alpha_{jg},$$

also, da A eine Determinante ist,

$$\Sigma \frac{df'}{d\alpha_{ig}} \alpha_{jg} = r A^r f$$

oder

$$\Sigma \frac{df'}{d\alpha_{ig}} \alpha_{jg} = 0,$$

je nachdem i und j zwei gleiche Zahlen von 1 bis n oder verschieden sind. Für

$$\Sigma \frac{df'}{d\alpha_{ig}} \alpha_{jg}$$

kann man aber, wenn man die Gleichung S. 288 Z. 2 der Aronhold'schen Abhandlung darauf anwendet, der dort gebrauchten Bezeichnung gemäss $D_{ij}(f')$ setzen. Es ist daher

$$D_{11}(f') = D_{22}(f') = \ldots = D_{nn}(f') = r A^r f$$

und bei verschiedenen i und j

$$D_{ij}(f') = 0$$

oder, da diese Gleichungen für jede Transformation der Grundfunctionen, also auch für die Transformation derselben in sich selbst gelten,

$$D_{11}(f) = D_{22}(f) = \ldots = D_{nn}(f) = r . f,$$
$$D_{ij}(f) = 0,$$

welches die bekannten, auch von Herrn Aronhold abgeleiteten Differentialgleichungen sind, denen sämmtliche Invarianten genügen. Die Grösse r ist dabei für Invarianten von verschiedenem Grade verschieden.

Wenn φ eine Invariante von demselben Grade in den $a_1, \ldots, b_1, \ldots, \cdots$ ist wie f, so ist $f : \varphi$ eine absolute Invariante. Es ist also $f' : \varphi'$ von den α unabhängig, und daher stets, auch für $i = j$,

$$\Sigma \frac{d(f' : \varphi')}{d\alpha_{ig}} . \alpha_{jg} = 0.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung kann man wieder setzen $D_{ij}(f' : \varphi')$ und es ist somit

$$D_{ij}(f':\varphi') = 0$$

oder

$$D_{ij}(f:\varphi) = 0.$$

Herr Aronhold hat die hierin enthaltenen n^2 Gleichungen herleiten wollen, ohne invariante Eigenschaften von f und φ dabei zu Grunde zu legen, was nicht gelingen konnte. Der Gang seiner Beweisführung ist von dem Gedanken geleitet, auf eine naturgemässe Weise von den Transformationsbedingungen zu den Invarianten und deren Eigenschaften zu gelangen. Eben dies leistet aber das von mir hier angewendete Verfahren. Auch hier wird von den Collineationsbedingungen ausgegangen. Durch Elimination erhält man aus denselben eine Gleichung von der Form

$$A_0 + A_1 a_{q+1} + \dots + A_{h-1} a_{q+1}^{h-1} + a_{q+1}^h = 0$$

und die Coefficienten dieser einen Gleichung erweisen sich auf dem directesten und natürlichsten, weil dem Ausgangspunkte genau entsprechenden Wege, nämlich durch fortwährende Anwendung der Collineationsbeziehungen, als Functionen, in welchen sämmtliche von einander unabhängige absolute Invarianten enthalten sind.

XIV.

Ueber eine Methode der Berechnung der sechs Cardinalpunkte eines centrirten Systems sphärischer Linsen.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—8.)

Die mathematischen Betrachtungen des dioptrischen Problems: für den Gang der Lichtstrahlen durch ein System beliebig vieler centrirter sphärischer Linsenflächen von verschiedenem Brechungsvermögen unter der Annahme, dass die Lichtstrahlen sehr wenig von der Richtung der Axe des Systems abweichen, einen Ausdruck zu finden, haben durch die Arbeiten von Gauss, Helmholtz und Neumann zu so einfachen, eleganten Resultaten geführt, dass neue Discussionen über dies Problem fast überflüssig erscheinen. Da jedoch die Methoden der Berechnung der sechs Cardinalpunkte $F_1 F_2$, $H_\alpha H_\beta$, $K_\alpha K_\beta$ zum Theil erheblich von einander abweichen, so erscheint es, namentlich im Interesse ophthalmologischer Studien, wünschenswerth, zu dem angedeuteten Ziele auf möglichst einfachem und kurzem Wege zu gelangen. Wir wollen im Folgenden eine Methode entwickeln, welche zu einer überraschend einfachen Beziehung zwischen den Abscissen der sechs Cardinalpunkte eines beliebigen centrirten Systems lichtbrechender sphärischer Flächen führt. Diese Beziehung findet ihren Ausdruck in der Formel

$$f = F_1 \frac{F_2 . F_3 . F_4 \dots F_m}{(F_2 - d_1)(F_3 - d_2)(F_4 - d_3) \dots (F_m - d_{m-1})},$$

wo m die Anzahl der brechenden Flächen, f den Abstand des ersten Hauptpunktes vom ersten Hauptbrennpunkte, F_1 den Abstand des ersten Hauptbrennpunktes vom Scheitel der vordersten Fläche, ferner F_2, F_3, ... die Abstände der partiellen Bildpunkte des ersten Hauptbrennpunktes von der zweiten, dritten, ... m^{ten} Fläche, endlich d_1, d_2, d_3, ... d_{m-1} die gegenseitigen Abstände der Flächen von einander bezeichnen. Wenn weiter φ, Φ und δ dasselbe für den zweiten Hauptpunkt und den zweiten Hauptbrennpunkt bedeuten, wie f, F und d für die ersten, so ist ganz analog

$$\varphi = \Phi_1 \frac{\Phi_2 . \Phi_3 . \Phi_4 \ldots \Phi_\mu}{(\Phi_2 - \delta_1)(\Phi_3 - \delta_2)(\Phi_4 - \delta_3) \ldots (\Phi_\mu - \delta_{\mu-1})}.$$

Die Grössen $F_1, F_2, \ldots$, sowie $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sind gewisse noch näher zu bezeichnende, homolog gebildete continuirliche Brüche, deren Glieder ähnliche Functionen der Krümmungsradien der Flächen, der Brechungsindices der aufeinander folgenden Schichten, sowie der gegenseitigen Abstände der Flächen von einander darstellen.

Gauss geht in seinen „dioptrischen Untersuchungen" aus von der Gleichung eines Lichtstrahles, welcher in einer beliebigen Richtung in das Linsensystem einfährt, mit Zugrundelegung von rechtwinkligen Raumcoordinaten.

Der Lichtstrahl, welcher nach der Annahme sehr wenig von der Richtung der Axe des Systems abweicht, kann im Uebrigen entweder in einem Axenschnitte liegen, also die Axe schneiden, oder er kann die Axe kreuzen. Die Ausdrücke gewinnen aber offenbar an Einfachheit, wenn man den Gang eines Lichtstrahles betrachtet, welcher in einem Axenschnitte liegt. Es lässt sich nun in der That jeder die Axe kreuzende Lichtstrahl ersetzen durch einen andern, welcher die Axe schneidet. Wir können uns nämlich jeden Lichtstrahl vorstellen als einen unendlich dünnen Lichtkegel PD (Fig. 1), welcher von einem leuchtenden Punkte P ausfährt. Es sei XX_1 die Axe des ganzen Systems brechender Flächen, S der Scheitel, C der Krümmungsmittelpunkt der ersten Fläche, welche in D von dem Lichtkegel getroffen wird. Ziehen wir durch den leuchtenden Punkt P die Centrale PC und beschreiben mit dem Lichtstrahl PD auf der Fläche einen Kreis DAB, welcher sich in der Zeichnung als eine Gerade projicirt, so werden offenbar alle Lichtstrahlen, welche von P ausgehend diesen Kreis treffen, nach der Brechung in einen und denselben Punkt der Centralen PC, etwa in P_1 convergiren oder auch aus einem rückwärts in derselben gelegenen Punkte P_2 divergiren. Es genügt also zur Betrachtung des Weges eines Lichtstrahles PD, für ihn einen andern Strahl PA oder PB zu substituiren, welcher erhalten wird, indem man durch P und die Axe des Systems eine beliebige Ebene legt. Die Lichtkegel PA und PB convergiren nach der Brechung gegen denselben Punkt der Centrale PC und schneiden die Axe XX_1.

Es möge nun der Axenschnitt PXX_1 die brechende Fläche in dem als sehr klein angenommenen Bogen AS_1SB schneiden. Ferner sei S Coordinatenanfangspunkt, x und y die Coordinaten des leuchtenden Punktes P, x_1 und y_1 die Coordinaten des Bildpunktes P_1, r_1 der Krümmungsradius, n_1 der Brechungsindex des hinter der Fläche liegenden

Mediums, derjenige des vor derselben liegenden Mediums gleich der Einheit gesetzt, so ist bekanntlich für jeden Lichtstrahl PA oder PA_1

$$\frac{r_1}{(n_1-1)x} - \frac{n_1 r_1}{(n_1-1)x_1} = 1,$$

wobei immer der Krümmungsradius derjenigen Flächen als positiv betrachtet werden soll, welche dem leuchtenden Punkte ihre convexe Seite zukehren. Wird die erste Brennweite mit f, die zweite mit φ bezeichnet, so ist

$$\frac{f}{x} - \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Für seitwärts gelegene conjugirte Punkte P und P_1 ist ferner

$$y : y_1 = (x + r_1) : (x_1 + r_1)$$

und wegen

$$\frac{r_1}{x} - \frac{n_1 r_1}{x} = n_1 - 1, \quad 1 + \frac{r_1}{x} = n_1\left(1 + \frac{r_1}{x_1}\right) = \frac{\varphi}{f}\left(1 + \frac{r_1}{x_1}\right)$$

gelten ebenfalls die Relationen

$$f\frac{y}{x} = \varphi\frac{y_1}{x_1},$$

$$\frac{y}{y_1} = \frac{f-x}{f} = \frac{\varphi}{\varphi + x_1} = \frac{x - f + \varphi}{x_1 - f + \varphi}.$$

Da diese Formeln die Grösse des Bogens AS_1 als Argument nicht enthalten, so folgt daraus, dass jeder vom leuchtenden Punkte P ausstrahlende, die brechende Fläche treffende unendlich dünne Lichtkegel nach der Brechung in einen und denselben Punkt convergirt, welcher in der Centrale PC oder im Axenschnitte PXX_1 liegt; ferner, dass, wenn der leuchtende Punkt in der Axe des Systems liegt, dasselbe für den Bildpunkt stattfinden muss.

Dieser Deduction zufolge kann also der Einfachheit wegen das System rechtwinkliger Raumcoordinaten immer auf ein ebenes reducirt werden. Wir betrachten nun allgemein den Gang eines Lichtstrahles oder unendlich dünnen Lichtkegels durch ein beliebiges centrirtes System brechender Flächen. Ein beliebiger convergirender oder divergirender Lichtkegel wird auch nach dem Durchgange durch sämmtliche brechende Medien wieder in einen einzigen Punkt convergiren, welcher mit dem leuchtenden oder dem Convergenzpunkte der einfahrenden Strahlen in demselben Axenschnitte liegt. Ein jeder Lichtstrahl wird dabei so viele Brechungen erleiden, als brechende Flächen vorhanden sind.

Es existiren nun bekanntlich in jedem derartigen System zwei sogenannte Hauptebenen, welche nach Gauss dadurch charakterisirt sind, dass der ausfahrende Lichtstrahl in seiner Verlängerung die zweite Hauptebene in einem Punkte schneidet, welcher homothetisch ist mit dem Punkte, in welchem der einfahrende Strahl die erste Hauptebene trifft. Die Hauptebenen stehen senkrecht zur Axe und mit dem Namen homothetische Punkte werden solche Punktpaare bezeichnet, welche in demselben Axenschnitte liegen und gleiche Abstände von der Axe haben. In Fig. 2 ist der Weg eines von G_1 ausgehenden Strahles $G_1 A_1 B_1 C_1 D_1 G_2$; $G_1 A_1$ trifft die Hauptebene H_α in H_3, $G_2 D_1$ die zweite Hauptebene H_β in H_4. Tritt ein anderer Strahl bei D parallel der Axe ein, so gelangt er auf dem Wege $DCBA$ zum Hauptbrennpunkte F_1 und die homothetischen Punkte der Hauptebenen sind $H_1 H_2$. Wenn demnach ein in einem Axenschnitte in das System einfahrender Lichtkegel in einen Punkt der ersten Hauptebene convergirt, so divergirt der ausfahrende Lichtkegel aus dem homothetischen Punkte der zweiten Hauptebene. Einige Physiker, wie Helmholtz und Wüllner, pflegen deshalb auch die eine Hauptebene das Bild der andern zu nennen und aus dieser Eigenschaft die Lage oder die Abscissen der beiden Hauptpunkte H_α und H_β mittelst der dioptrischen Formeln abzuleiten. Werden nämlich die Abscissen von Licht- und Bildpunkt, ebenso die Hauptbrennweiten f und φ des Systems von den Hauptebenen abgerechnet, so gelten ebenfalls die oben angeführten Formeln. Ist demnach $x = 0$, also der leuchtende Punkt in der ersten Hauptebene gelegen, so ist auch $x_1 = 0$, also der Bildpunkt in der zweiten Hauptebene. Ebenso ergiebt sich aus den übrigen Relationen, dass für $x = 0$ oder $x_1 = 0$ jedesmal $y_1 = +y$ folgt; also umgekehrt, dass, wenn in den dioptrischen Formeln $y_1 = y$ gesetzt wird, man die Gleichungen für f und φ erhalten muss. Wir stützen die Herleitung unseres Theorems auf die Definition der Hauptebenen von Gauss. Dasselbe lässt sich so formuliren:

Sind $S_1, S_2, S_3, \ldots S_m$ die Scheitelpunkte der centrirten sphärischen Begrenzungsflächen, welche $m+1$ Medien von abwechselnder optischer Dichtigkeit von einander scheiden, so lassen sich die beiden Hauptbrennweiten darstellen durch die Relation

$$f = F_1 S_1 \frac{F_2 S_2 \times F_3 S_3 \times F_4 S_4 \times \ldots \times F_m S_m}{(F_2 S_2 - d_1)(F_3 S_3 - d_2)(F_4 S_4 - d_3) \ldots (F_m S_m - d_{m-1})}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir den Gang eines Lichtstrahles, welcher vom ersten Hauptbrennpunkte F_1 ausgehend, bei A in das System einfährt, den Weg $F_1 ABCD$ (Fig. 2) beschreibt und an der Grenze des Systems parallel mit der Axe ausfährt. Der Durchschnittspunkt H_1 des parallel mit der Axe ausfahrenden Strahles mit dem Focalstrahl ist ein Punkt der ersten Hauptebene.

Es seien $d_1, d_2, d_3, \ldots$ die Abstände der Scheitel oder die Dicken der Schichten, y die Ordinate des Punktes A und $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ die partiellen Elevationen des Strahles von einer brechenden Fläche zur andern. Ferner seien F_1, F_2, F_3, F_4 die partiellen Brennpunkte der Strahlenelemente $F_1 A$, AB, BC, CD und f die erste Hauptbrennweite $F_1 H_\alpha$, so ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken folgende Relationen:

1) $\quad y : F_2 S_1 = \eta_1 : d_1$ oder $(y + \eta_1) : F_2 S_2 = \eta_1 : d_1$,

$$2)\qquad (y+\eta_1)\quad : F_2 S_2 = \eta_2 : d_2 = \quad (y+\eta_1+\eta_2)\quad : F_3 S_3,$$
$$3)\qquad (y+\eta_1+\eta_2) : F_3 S_3 = \eta_3 : d_3 = (y+\eta_1+\eta_2+\eta_3) : F_4 S_4.$$

Bei mehr als vier brechenden Flächen ist das Gesetz dieser Proportionen leicht zu übersehen. Aus denselben folgt weiter

$$4)\qquad \frac{d_1}{\eta_1} = \frac{d_2}{\eta_2} \cdot \frac{F_2 S_2}{(F_3 S_3 - d_2)},$$

$$5)\qquad \frac{d_2}{\eta_2} = \frac{d_3}{\eta_3} \cdot \frac{F_3 S_3}{(F_4 S_4 - d_3)}.$$

Nach 1) ist

$$\frac{f}{F_1 S_1} = \frac{y+\eta_1+\eta_2+\eta_3}{y} = \frac{d_1}{\eta_1} \cdot \frac{y+\eta_1+\eta_2+\eta_3}{(F_2 S_2 - d_1)}.$$

Substituiren wir nun successive die Gleichungen 4) und 5) in die letztere, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{f}{F_1 S_1} &= \frac{d_1}{\eta_1} \cdot \frac{y+\eta_1+\eta_2+\eta_3}{F_2 S_2 - d_1} \\
&= \frac{F_2 S_2}{F_2 S_2 - d_1} \cdot \frac{d_2}{\eta_2} \cdot \frac{y+\eta_1+\eta_2+\eta_3}{F_3 S_3 - d_2} \\
&= \frac{F_2 S_2 \,.\, F_3 S_3}{(F_2 S_2 - d_1)(F_3 S_3 - d_2)} \cdot \frac{d_3}{\eta_3} \cdot \frac{y+\eta_1+\eta_2+\eta_3}{F_4 S_4 - d_3}.
\end{aligned}$$

Schliesst die Reihe mit η_3, so ist gemäss 3)

$$\frac{f}{F_1 S_1} = \frac{F_2 S_2 \,.\, F_3 S_3 \,.\, F_4 S_4}{(F_2 S_2 - d_1)(F_3 S_3 - d_2)(F_4 S_4 - d_3)}.$$

Ist φ die zweite Hauptbrennweite $\Phi_1 H_\beta$ und bezeichnet man die Argumente jetzt in umgekehrter Reihenfolge von rechts nach links fortschreitend mit den griechischen Buchstaben und den Indices 1, 2, 3, …, so ist analog für m Flächen

$$\frac{\varphi}{\Phi_1 \Sigma_1} = \frac{\Phi_2 \Sigma_2 \times \Phi_3 \Sigma_3 \times \Phi_4 \Sigma_4 \times \ldots \times \Phi_\mu \Sigma_\mu}{(\Phi_2 \Sigma_2 - \delta_1)(\Phi_3 \Sigma_3 - \delta_2)(\Phi_4 \Sigma_4 - \delta_3) \ldots (\Phi_\mu \Sigma_\mu - \delta_{\mu-1})}.$$

Die allgemeinen Ausdrücke $F_x S_x$ und $\Phi_\xi \Sigma_\xi$ lassen sich nun in einem einzigen Kettenbruche darstellen. Es sei M_1 das erste vor S_1 gelegene Medium, M_2 das zweite zwischen S_1 und S_2 gelegene, M_3 das dritte u. s. f.; ferner n_1 das Brechungsverhältniss von M_1 in M_2, n_2 dasjenige von M_2 in M_3 u. s. f., sodann die Krümmungshalbmesser der auf einander folgenden Flächen $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Bezeichnen wir ferner die Brennweiten der einzelnen Flächen mit f_1 und φ_1, f_2 und φ_2 u. s. f. die laufenden Abscissen von Licht- und Bildpunkt von den Scheiteln der einzelnen Flächen abgerechnet, mit x und x_1, so ergeben sich folgende Relationen:

$$\frac{r_1}{(n_1-1)x} - \frac{n_1 r_1}{(n_1-1)x_1} = \frac{f_1}{x} - \frac{\varphi_1}{x_1} = 1,$$

$$\frac{r_2}{(n_2-1)x} - \frac{n_2 r_2}{(n_2-1)x_1} = \frac{f_2}{x} - \frac{\varphi_2}{x_1} = 1,$$

$$\frac{r_3}{(n_3-1)x} - \frac{n_3 r_3}{(n_3-1)x_1} = \frac{f_3}{x} - \frac{\varphi_3}{x_1} = 1 \text{ u. s. f.}$$

Setzen wir wiederum die Zahl von vier Flächen voraus, so ist für irgend einen leuchtenden Punkt F_1 der Axe

$$F_1 S_1 = x = \cfrac{f_1}{1 + \cfrac{\varphi_1}{-d_1 + F_2 S_2}} = \cfrac{f_1}{1 + \cfrac{\varphi_1}{-d_1 + \cfrac{f_2}{1 + \cfrac{\varphi_2}{-d_2 + \dots + \cfrac{\varphi_4}{F_5 S_4}}}}}.$$

Ist $F_5 S_4 = \infty$, so ist F_1 erster Hauptbrennpunkt und der Kettenbruch schliesst mit $f_4 = F_4 S_4$. Man findet aus demselben weiter

$F_3 S_3$ aus den drei letzten Gliedern,

$F_2 S_2$ aus den fünf letzten Gliedern,

$F_1 S_1$ aus den sieben letzten Gliedern, also gleich dem ganzen Kettenbruche.

Löst man den Kettenbruch nach $F_5 S_4$ auf, so erhält man

$$F_5 S_4 = \cfrac{-\varphi_4}{1 - \cfrac{f_4}{d_3 - \cfrac{\varphi_3}{1 - \dots - \cfrac{f_1}{F_1 S_1}}}}.$$

Ist $F_1 S_1 = \infty$, so ist F_5 gleich Φ_1 zweiter Hauptbrennpunkt, $F_5 S_4$ wird $\Phi_1 \Sigma_1$ und der Kettenbruch schliesst mit $-\varphi_1 = \Phi_4 \Sigma_4$. Man findet weiter

$\Phi_3 \Sigma_3$ aus den drei letzten Gliedern,

$\Phi_2 \Sigma_2$ aus den fünf letzten Gliedern,

$\Phi_1 \Sigma_1$ gleich dem ganzen Kettenbruche.

Es lassen sich demnach die Hauptbrennweiten eines beliebigen Systems mit leichter Mühe berechnen, ohne dass man erst die Hauptebenen für die einzelnen Schichten sucht. Beispielsweise ist für eine einfache Linse

$$f = F_1 S_1 \frac{F_2 S_2}{F_2 S_2 - d_1}, \quad F_2 S_2 = f_2, \quad F_1 S_1 = \frac{f_1 (f_2 - d_1)}{f_2 + \varphi_1 - d_1},$$

ebenso

$$\varphi = \Phi_1 \Sigma_1 \frac{\Phi_2 \Sigma_2}{\Phi_2 \Sigma_2 - \delta_1}; \quad \Phi_2 \Sigma_2 = -\varphi_1, \quad \Phi_1 \Sigma_1 = \frac{-\varphi_2 (\varphi_1 - d_1)}{f_2 + \varphi_1 - d_1}.$$

Demnach sind die absoluten Werthe der Brennweiten

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 + \varphi_1 - d_1}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{f_2 + \varphi_1 - d_1}.$$

Es ist nun leicht zu übersehen, dass das im Vorhergehenden bewiesene Theorem nicht blos für ein System, sondern auch für Combinationen von Systemen gilt, von welchen die Hauptbrennweiten und die Oerter der Hauptebene bekannt sind. Sind für ein einzelnes System die Hauptbrennweiten f und φ, und rechnet man die Abscissen x und x_1

zweier conjugirten Punkte von den Hauptpunkten H_α und H_β ab, so ist nämlich auch hier

$$\frac{f}{x}-\frac{\varphi}{x_1}=\frac{f}{FH_\alpha}-\frac{\varphi}{\Phi H_\beta}=1.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel nachzuweisen, betrachten wir die Verhältnisse bei zwei conjugirten Punkten P und P_1, welche seitwärts von der Axe liegen. P sei der leuchtende Punkt, der Weg eines Lichtstrahls (Fig. 3) $PH_1H_2\Phi_1P_1$, der eines zweiten $PF_1H_3H_4P_1$. Ferner sei $PF=Y$, $FF_1=\xi$, $S_1A_1=y$, $P_1\Phi=Y_1$, $\Phi\Phi_1=\xi_1$, $S_4A=y$, so finden folgende Gleichungen statt:

6) $Y_1:y=f:\ F_1S_1$, 8) $-Y:y=\xi:F_1S_1$,

7) $Y:y_1=\varphi:(-\Phi_1\Sigma_1)$, 9) $Y_1:y_1=\xi_1:\Phi_1\Sigma_1$.

Aus 6) und 8) folgt

10) $$-Y:Y_1=\xi:f,$$

aus 7) und 9)

11) $$Y:Y_1=\varphi:\xi_1.$$

Demzufolge ist

$$\xi\xi_1=-f\varphi,$$

und da $\xi=x-f$, $\xi_1=x_1+\varphi$, so erhält man wie früher

$$\frac{f}{x}-\frac{\varphi}{x_1}=\frac{f}{FH_\alpha}-\frac{\varphi}{\Phi H_\beta}=1.$$

Bezeichnen wir nun die Hauptbrennweiten der aufeinander folgenden Systeme mit f_1 und φ_1, f_2 und φ_2 u. s. f., die Hauptpunkte mit $H_{\alpha,1}$ und $H_{\beta,1}$, $H_{\alpha,2}$ und $H_{\beta,2}$, $H_{\alpha,3}$ und $H_{\beta,3}$ u. s. f., nehmen der Einfachheit wegen vier einzelne Systeme an und den Abstand des dritten Hauptpunktes vom zweiten gleich D_1, des fünften vom vierten gleich D_2, des siebenten vom sechsten gleich D_3, so ist nach dem Vorigen für laufende Abscissen x und x_1 oder PH_α und ΦH_β je zweier conjugirter Punkte

$$\frac{f_1}{x}-\frac{\varphi_1}{x_1}=\frac{f_1}{FH_\alpha}-\frac{\varphi_1}{\Phi H_\beta}=1,$$

$$\frac{f_2}{x}-\frac{\varphi_2}{x_1}=\frac{f_2}{FH_\alpha}-\frac{\varphi_2}{\Phi H_\beta}=1 \text{ u. s. f.}$$

Für einen leuchtenden, vor der Hauptebene $H_{\alpha,1}$ liegenden Punkt F_1 ist alsdann

$$F_1H_{\alpha,1}=\cfrac{f_1}{1+\cfrac{\varphi_1}{-D_1+\cfrac{f_2}{1+\ldots+\cfrac{\varphi_4}{F_5H_{\beta,4}}}}}.$$

Ist $F_5H_{\beta,4}$ gleich ∞, so ist F_1 erster Hauptbrennpunkt und die erste Hauptbrennweite

$$F=F_1H_{\alpha,1}\frac{F_2H_{\alpha,2}\,.\,F_3H_{\alpha,3}\,.\,F_4H_{\alpha,4}}{(F_2H_{\alpha,2}-D_1)(F_3H_{\alpha,3}-D_2)(F_4H_{\alpha,4}-D_3)}.$$

Ebenso findet man die zweite Hauptbrennweite Φ, indem man den Kettenbruch nach $F_5 H_{\beta,4}$ auflöst und $F_1 H_{\alpha,1}$ gleich ∞ setzt. Für eine Combination von zwei Systemen ist

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_2 + \varphi_1 - D_1}, \quad \Phi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{f_2 + \varphi_1 - D_1}.$$

Da für ein System von zwei Flächen $\varphi_1 = n_1 f_1$ und $\varphi_2 = n_2 f_2$ ist, so folgt aus den Gleichungen für f und φ die Relation

$$\varphi = n_1 n_2 f.$$

Ist also für eine einfache Linse die Verzögerung des Lichtes aus dem ersten äusseren Medium in das dritte oder letzte äussere gleich N, so ist $\Phi = Nf$. Dass diese Beziehung auch für eine Combination von Systemen gilt, also $\Phi = NF$ ist, lässt sich auf folgende Art erweisen, indem wir von einer Fläche zum System, vom System zu Combinationen fortschreiten. Ist für mehrere hinter einander liegende Flächen

$$\frac{f_1}{x} - \frac{\varphi_1}{x_1} = \frac{f_1}{x} - \frac{n_1 f_1}{x_1} = 1,$$
$$\frac{f_2}{x} - \frac{\varphi_2}{x_1} = \frac{f_2}{x} - \frac{n_2 f_2}{x_1} = 1, \text{ u. s. f.}$$

und combiniren wir zunächst zwei Flächen, rechnen die laufenden Abscissen x und x_1 bei den Einzelflächen von ihren Scheiteln, bei dem System von den beiden Hauptpunkten ab, so ist

$$\frac{f_1 f_2}{(f_2 + \varphi_1 - d_1)\,x} - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{(f_2 + \varphi_1 - d_1)\,x_1} = \frac{f_1 f_2}{M_1 x} - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{M_1 x_1} = 1.$$

Fügen wir die dritte Fläche hinzu und setzen $f_3 + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{M_1} - D_2 = M_2$, wo D_2 den Abstand der dritten Fläche vom zweiten Hauptpunkte bezeichnet, so wird

$$\frac{f_1 f_2 f_3}{M_1 M_2 x} - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{M_1 M_2 x_1} = 1 \text{ u. s. f.},$$

bei a Flächen

$$\frac{f_1 f_2 \ldots f_a}{M_1 M_2 \ldots M_{a-1} x} - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_a}{M_1 M_2 \ldots M_{a-1} x_1} = \frac{F_1}{x} - \frac{N_1 F_1}{x_1} = 1;$$

bei b Flächen eines zweiten Systems

$$\frac{F_2}{x} - \frac{N_2 F_2}{x_1} = 1 \text{ u. s. f.}$$

Für k Systeme ist demzufolge

$$\Phi = N_1 N_2 \ldots N_k F.$$

Was nun die Construction des Bildpunktes und die Berechnung seiner Coordinaten anbelangt, so ist erstere zwar nach der in Fig. 3 angedeuteten Weise und die Berechnung der Coordinaten durch die Formeln 10) und 11) hinreichend einfach und bestimmt, jedoch die gegenseitige Lage von Licht- und Bildpunkt oder der conjugirten Punkte nicht so scharf angedeutet, wie dies bei einer einfachen brechenden Fläche der Fall ist. Hier liegen die conjugirten Punkte jedes Mal in einer und derselben Centrale der Fläche. Es ist deshalb wünschenswerth, für Systeme einen oder zwei Punkte in der Axe zu bezeichnen, gegen welche conjugirte Punkte ähnlich gelegen sind. Es lassen sich nun in der That immer zwei solche feste Punkte angeben, ebenso wie es zwei Hauptpunkte giebt. Man nennt dieselben die Knotenpunkte des Systems. Aus 10) und 11) ergiebt sich

$$\frac{Y}{Y_1}=\frac{f-x}{f}=\frac{\varphi}{x_1+\varphi}=\frac{x-f+\varphi}{x_1-f+\phi}.$$

Weiter ist wegen der Beziehung

$$\frac{f}{x}-\frac{\varphi}{x_1}=1$$

$$\frac{\varphi-f}{x}-\frac{\varphi}{f}\,\frac{(\varphi-f)}{x_1}=\frac{\varphi}{f}-1,\quad 1+\frac{\varphi-f}{x}=\frac{\varphi}{f}\left(1+\frac{\varphi-f}{x_1}\right),$$

also

$$\frac{Y}{Y_1}=\frac{\varphi x}{f x_1}.$$

Verbindet man den leuchtenden Punkt (Y, x) mit dem ersten Hauptpunkte H_α, den Bildpunkt (Y_1, x_1) mit dem zweiten H_β, so ist für den Fall, dass die beiden Grenzmedien gleiche optische Dichtigkeiten besitzen, $\varphi=f$ und somit $Y:x=Y_1:x_1$, d. h. die beiden Verbindungslinien PH_α und P_1H_β sind einander parallel und es kann diese Eigenschaft der Hauptpunkte unter diesen besonderen Umständen zur Construction des conjugirten Punktes P_1 benutzt werden. Sind aber φ und f von einander verschieden, so sind PH_α und P_1H_β nicht mehr einander parallel. In diesem Falle giebt es in der Axe zwei andere Punkte K_α und K_β von der Eigenschaft, dass P_1K_α mit P_1K_β stets parallel ist. Um ihre Lage zu bestimmen, bezeichnen wir der Kürze wegen F_1K_α mit f_1 und Φ_1K_β mit φ_1. Alsdann ist mit Berücksichtigung von 10) und 11)

$$\frac{-Y}{Y_1}=\frac{-f_1+\xi}{\varphi_1+\xi_1}=\frac{\xi}{f},$$

$$-ff_1+f\xi=\varphi_1\xi+\xi\xi_1=\varphi_1\xi-\varphi f,$$

$$\text{12)}\qquad f(\varphi-f_1)=\xi(\varphi_1-f).$$

Ebenso ist

$$\frac{-Y}{Y_1}=\frac{-f_1+\xi}{\varphi_1+\xi_1}=\frac{-\varphi}{\xi_1},$$

$$\varphi\varphi_1+\varphi\xi_1=f_1\xi_1-\xi\xi_1=f_1\xi_1+\varphi f,$$

$$\text{13)}\qquad \varphi(\varphi_1-f)=-\xi_1(\varphi-f_1).$$

Da ξ und ξ_1 variable Grössen sind, so giebt jede dieser beiden Gleichungen die Relationen

$$f_1=\varphi,\quad \varphi_1=f.$$

Es ist zuweilen noch von dem „imaginären" Brechungsindex eines dioptrischen Systems die Rede, wie man die Bestimmung eines solchen z. B. bei der Krystalllinse des menschlichen Auges mehrfach versucht hat. Wenn nämlich die Oerter der Cardinalpunkte eines Systems aus gegebenen Elementen bestimmt sind, so kann die Frage gestellt werden, ob ein solches System durch eine einfache homogene Linse ersetzt werden kann, welche dieselbe Dicke hat und bei welcher die Krümmungsradien der vordersten und hintersten Fläche mit denen des Systems übereinstimmen. Wir wollen kurz die Bedingung herleiten, unter welcher diese Annahme gestattet ist, und angeben, wie der imaginäre Brechungsindex gefunden wird, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Aus der Betrachtung von Fig. 3 ergiebt sich, dass es ausser den sechs sogenannten Cardinalpunkten noch zwei feste Punkte B_α und B_β giebt, in welchen die Axe von den Linien $D_1 A_1$ und DA geschnitten wird. Sie mögen die imaginären Brennpunkte der hintersten und vordersten Fläche des Systems genannt werden. Denkt man sich nämlich das System homogen, so müssten zwei Lichtstrahlen PD und $P_1 D_1$ innerhalb desselben auf diesen Wegen fortlaufen, wie es bei einer einfachen Linse thatsächlich der Fall ist. Die Punkte B_α und B_β sind feste Punkte und entsprechen den Punkten F_2 und Φ_2 bei einer einfachen Linse. Es ist zufolge 6) und 7)

$$B_\alpha S_4 : B_\alpha S_1 = Y_1 : y = f : \ F_1 S_1,$$
$$B_\beta S_1 : B_\beta S_4 = Y \ : y_1 = \varphi : (-\Phi_1 \Sigma_1).$$

Ist D die Dicke des Systems, so ist, wenn wir die äusseren Medien als gleichartig voraussetzen,

$$B_\alpha S_4 = D \frac{f}{f - F_1 S_1} = \frac{-r_2 n}{n-1},$$

wo r_2 den Krümmungsradius der hinteren Fläche, n den imaginären Brechungsindex bezeichnet. Ebenso findet man

$$B_\beta S_1 = D \frac{\varphi}{\varphi - \Phi_1 \Sigma_1} = \frac{-r_1 n}{n-1},$$

wo r_1 den Krümmungsradius der vorderen Fläche bezeichnet. Aus den beiden Gleichungen folgt

$$14)\qquad r_2 : r_1 = \frac{f}{f - F_1 S_1} : \frac{\varphi}{\varphi - \Phi_1 \Sigma_1} = a_2 : a_1,$$

$$15)\qquad \frac{n}{n-1} = -\frac{D}{r_2} \cdot \frac{f}{f - F_1 S_1} = -\frac{D}{r_1} \cdot \frac{\varphi}{\varphi - \Phi_1 \Sigma_1}.$$

Gemäss 14) müssen also die beiden Krümmungsradien der Begrenzungsflächen sich verhalten wie die Abstände der Hauptpunkte von denselben. Findet diese Relation statt, so liefert die Gleichung 15) den imaginären Brechungsindex. Allgemein ist

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2 N_0 (N_1 - N_2)}{a_1 N_2 (N_1 - N_0)}.$$

Um die Anwendung der Formeln an einem speciellen Falle zu zeigen, wählen wir die Verhältnisse bei der Krystalllinse des menschlichen Auges. Helmholtz theilt in seiner physiologischen Optik* seine Messungen an zwei todten Linsen mit, aus denen folgende Angaben die Mittel sind:

Krümmungshalbmesser der vorderen Linsenfläche	$r_1 =$	$9{,}513^{mm}$,
„ „ hinteren „	$r_2 =$	5,875,
Abstand des I. Hauptpunktes von der Vorderfläche	$a_1 =$	2,534,
„ „ II. „ „ „ Hinterfläche	$a_2 =$	1,522,
Abstand der Hauptpunkte von einander	$\lambda =$	0,201,
Dicke der Linse	$D =$	4,257,
Brennweite in der Glaskörpersubstanz	$\varphi =$	50,789,
Brechungsindex der Glaskörpersubstanz		1,3382,
Imaginärer Brechungsindex der Linse	$n =$	1,4466.

Aus vorstehenden Angaben folgt

$$a_2 : a_1 = 0{,}601\,, \quad r_2 : r_1 = 0{,}618.$$

Da diese Verhältnisse nahezu einander gleich sind, so lässt sich ein mittlerer Brechungsindex für die Krystalllinse finden; es ist

$$\frac{n}{n-1} = \frac{4{,}257\,.\,50{,}789}{9{,}513\,.\,1{,}522} = 14{,}933,$$

$$n = 14{,}933 : 13{,}933 = 1{,}07175.$$

Das totale Brechungsvermögen der Linse ist demnach gleich 1,07175 ×1,3382 oder 1,4342. Helmholtz giebt dafür den Werth 1,4466 und v. Zehender in seinem vortrefflichen Werke** über Dioptrik des menschlichen Auges den Werth 1,4400. Berechnet man die Cardinalpunkte der als homogen betrachteten Linse aus dem imaginären Index 1,4342, so findet man

	a_1	a_2	φ	λ
berechnet	2,502	1,545	51,559	0,210,
beobachtet	2,534	1,522	50,789	0,201.

Der imaginäre Brechungsindex der Krystalllinse ist im Allgemeinen grösser als der der Kernsubstanz, wofür die Messungen ergeben haben nach Brewster 1,3999, Chossat 1,420, Krause 1,4564. Die Ursache dieser grössern Collectivkraft ist in dem Umstande zu suchen, dass die Niveauflächen der nach innen wachsenden Indices auch an Krümmung zunehmen. Die negative optische Kraft der äusseren concav-convexen Zerstreuungslinsen compensirt einen Theil der positiv optischen Kraft des Kernes. Diese Compensation ist um so stärker, je höher der Index der Schalen; die Collectivkraft der ganzen Linse wäre also geringer, wenn der Index der äusseren Schichten ebenso gross wäre, als der des Kernes.***

* Allgem. Encyclopädie der Physik, Bd. IX.

** Anl. zum Studium der Dioptrik des menschlichen Auges, Erlangen 1856, S. 64—70.

*** Vergl. Hermann, Grundriss der Physiologie (1874), S. 323, und Helmholtz, Physiol. Optik, S. 72 flgg.

Um dies an einem concreten Falle deutlicher zu zeigen, bezeichnen wir die Dicken der einzelnen Schichten wieder mit d, die Krümmungshalbmesser mit r, die absoluten Indices mit N, die relativen mit n und nehmen an, dass die Krümmungshalbmesser dem Abstande vom Centrum der Linse proportional seien. Wir legen unserer Rechnung folgende Daten zu Grunde:

$$\begin{array}{llll}
 & & N_0 = 1{,}3365, & \\
r_1 = 9{,}513^{\mathrm{mm}}, & d_1 = 0{,}71, & N_1 = 1{,}3967, & \Delta_1 = 0{,}0602, \\
r_2 = 6{,}4, & d_2 = 0{,}71, & N_2 = 1{,}4077, & \Delta_2 = 0{,}0110, \\
r_3 = 3{,}2, & d_3 = 1{,}417, & N_3 = 1{,}4120, & \Delta_3 = 0{,}0043, \\
r_4 = -2{,}0, & d_4 = 0{,}71, & N_4 = 1{,}4077, & \Delta_4 = -0{,}0043, \\
r_5 = -4{,}0, & d_5 = 0{,}71, & N_5 = 1{,}3967, & \Delta_5 = -0{,}0110, \\
r_6 = -5{,}875, & & N_6 = 1{,}3365, & \Delta_6 = -0{,}0602.
\end{array}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{array}{lll}
n_1 = 1{,}0450, & f_1 = 211{,}40, & \varphi_1 = 220{,}91, \\
n_2 = 1{,}0079, & f_2 = 810{,}13, & \varphi_2 = 816{,}53, \\
n_3 = 1{,}0030, & f_3 = 1066{,}67, & \varphi_3 = 1069{,}87, \\
n_4 = 0{,}9970, & f_4 = 666{,}67, & \varphi_4 = 664{,}67, \\
n_5 = 0{,}9922, & f_5 = 512{,}82, & \varphi_5 = 508{,}82, \\
n_6 = 0{,}9569, & f_6 = 136{,}31, & \varphi_6 = 130{,}43.
\end{array}$$

Hieraus erhält man ferner als erste Hauptbrennweite

$$f = 53{,}091 \frac{74{,}797 \,.\, 83{,}766 \,.\, 92{,}591 \,.\, 107{,}91 \,.\, 136{,}31}{74{,}087 \,.\, 83{,}056 \,.\, 91{,}174 \,.\, 107{,}20 \,.\, 135{,}60} = 55{,}550,$$

$$a_1 = f - F_1 S_1 = 55{,}550 - 53{,}091 = 2{,}459,$$

$$n = 1{,}4236.$$

Als zweite Hauptbrennweite erhält man

$$\varphi = 53{,}913 \frac{96{,}686 \,.\, 121{,}16 \,.\, 149{,}93 \,.\, 174{,}64 \,.\, 220{,}72}{95{,}976 \,.\, 120{,}45 \,.\, 148{,}51 \,.\, 173{,}93 \,.\, 220{,}01} = 55{,}532,$$

$$a_2 = \varphi - \Phi_1 \Sigma_1 = 55{,}532 - 53{,}913 = 1{,}619, \quad \lambda = 0{,}179,$$

$$n = 1{,}4296.$$

Die Abweichung der für n berechneten Werthe von einander rührt davon her, dass $a_2 : a_1 > r_2 : r_1$ ist. Im Mittel ist also der imaginäre Brechungsindex der Krystalllinse $= 1{,}4266$, wogegen der für die Kernsubstanz angenommene nur 1,4120 beträgt.

Berechnet man die dioptrischen Elemente aus folgenden Daten:

$$\begin{array}{lll}
 & & N_0 = 1{,}3365, \\
r_1 = 9{,}513^{\mathrm{mm}}, & d = 4{,}257, & N_1 = 1{,}4236, \\
r_2 = -5{,}875, & & N_2 = 1{,}3414,
\end{array}$$

so erhält man in Uebereinstimmung mit den obigen

$$f = 55{,}55, \quad [\varphi = 55{,}79], \quad a_1 = 2{,}459, \quad a_2 = 1{,}619, \quad \lambda = 0{,}179.$$

XV.

Gestalt eines um einen Centralkörper rotirenden homogenen Flüssigkeitsringes.

Von

Dr. Arnold Giesen.

(Hierzu Taf. II, Fig. 4—6.)

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

Bekanntlich ist einer der zu unserem Sonnensystem gehörigen Planeten, der Saturn, mit einem System von Ringen versehen, welche ihn nahe in der Ebene des Aequators frei umgeben. Die Annahme, diese Ringe hielten sich blos durch die Cohäsion ihrer Theilchen im Gleichgewichte, wobei dann natürlich vorausgesetzt werden muss, dass dieselben aus einer festen Masse bestehen, ist wohl unbedingt zu verwerfen; befriedigen kann nur eine solche Lösung des Problems, welche zeigt, dass die Ringe infolge ihrer Gestalt und ihrer Rotation um den Hauptplaneten unter dem Einflusse der auf ihre Theilchen wirkenden Attractions- und Centrifugalkräfte nach den Gesetzen der Hydrostatik im Gleichgewichte sind, sei es, dass dieselben noch jetzt in einem flüssigen Zustande sich befinden, wie man vielfach gemuthmasst hat, sei es, dass sie in früheren Epochen wenigstens sich in einem solchen befunden haben.

Das einfachste Problem über die sich hier darbietenden Fragen dürfte folgendermassen lauten: Um einen Centralkörper rotirt ein homogener Flüssigkeitsring, dessen Halbmesser im Vergleiche mit den Dimensionen seines Querschnittes und des Centralkörpers sehr gross ist. Man fragt, ob derselbe sich dadurch ins Gleichgewicht setzen könne, dass sein Querschnitt eine elliptische Gestalt annimmt.

Zur Behandlung dieses Problems ist es erforderlich, das innere Potential eines elliptischen Ringes zu kennen. Es wird sich im folgenden Paragraphen zeigen, dass in erster Annäherung der veränderliche, d. h.

von den Coordinaten abhängige Theil des innern Potentials eines Ringes von beliebigem Querschnitte und sehr grossem Halbmesser zusammenfällt mit dem veränderlichen Theile des innern Potentials eines unbegrenzten Cylinders von gleichem Querschnitte. Die constanten Theile beider Potentialfunctionen sind verschieden, und zwar ist die Constante im Potential des unbegrenzten Cylinders unendlich gross; indessen sind die Werthe der Constanten für den in Rede stehenden Zweck überhaupt ohne Belang. Man kann daher in erster Annäherung den von den Coordinaten abhängigen Theil des innern Potentials des elliptischen Ringes von grossem Halbmesser ersetzen durch denjenigen des Potentials eines unendlichen elliptischen Cylinders von gleichem Querschnitte. Dieses letztere Potential lässt sich aber z. B. aus dem Potential eines Ellipsoids ableiten, indem man nur die eine Axe desselben als unendlich gross anzunehmen braucht.

Die Gleichgewichtsbedingung, dass die Summe aus dem Potential des Centralkörpers und dem Potential des Ringes und der Kräftefunction für die Centrifugalkraft auf der ganzen Ringoberfläche constant sein muss, löst sich dann in zwei Gleichungen auf. Davon sagt die erste, dass für den Gleichgewichtszustand die Winkelgeschwindigkeit des Ringes in seiner Rotation um den Centralkörper gleichkommen müsse der Winkelgeschwindigkeit eines in einem Abstande gleich dem Ringhalbmesser in kreisförmiger Bahn um den Hauptplaneten sich bewegenden fingirten Satelliten. Die zweite Gleichung giebt das Axenverhältniss der Querschnittsellipse, und zwar liefert sie hierfür zwei reelle positive Werthe, so lange die Winkelgeschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht übersteigt; über diese Grenze hinaus werden jene Werthe imaginär. Daraus folgt, dass es in der That für jede Winkelgeschwindigkeit, die unter einer gewissen Grenze liegt, zwei mögliche Gleichgewichtsfiguren mit elliptischem Querschnitte für den Flüssigkeitsring giebt; über jenen Grenzwerth der Winkelgeschwindigkeit hinaus dagegen ist keine Gleichgewichtsfigur mit elliptischem Querschnitte mehr möglich. Von den beiden bei kleiner Winkelgeschwindigkeit möglichen elliptischen Gleichgewichtsquerschnitten kommt der eine dem Kreise nahe, während der andere sehr flach ist. Bei den Saturnringen scheint der letzte Fall verwirklicht, indem allen Beobachtungen zufolge die Dicke derselben im Vergleich mit ihrer Breite sehr klein ist.

§ 2. Vergleichung des Potentials eines Ringes mit demjenigen eines unendlich langen Cylinders von gleichem Querschnitte.

Wir betrachten zunächst einen Ring von unendlich kleinem Querschnitte dq. Das Coordinatensystem (Fig. 4) wählen wir folgendermassen. Durch die Axe des Ringes und den angezogenen Punkt legen wir eine

Ebene, die wir zur xz-Ebene nehmen; der Durchschnittspunkt derselben mit dem Ringe sei der Ursprung. Die positive x-Axe nehmen wir in der Verlängerung des nach dem Ursprunge gezogenen Radius des Ringes, die y-Axe legen wir in die Tangente desselben und endlich die z-Axe senkrecht zur Ringebene. Der Radius eines Ringelements bilde mit der x-Axe den Winkel φ, der Radius des Ringes sei R; dann drückt sich das Ringelement aus durch $R\,dq\,d\varphi$. Die Entfernung des angezogenen Punktes von demselben Ringelemente sei r. Wir fällen vom angezogenen Punkte auf die Ringebene eine Senkrechte, deren Fusspunkt natürlich in der x-Axe liegt; die Entfernung dieses Fusspunktes von dem Ringelemente sei t. Der angezogene Punkt habe die Coordinaten x, o, z; ϱ sei die Dichtigkeit das Ringes und v sein Potential. Wir haben nun offenbar nach einander

$$v = 2\varrho R\,dq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{r} = 2\varrho R\,dq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{z^2+t^2}}$$

$$= 2\varrho R\,dq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2+(R+x)^2-2R(R+x)\cos\varphi}}$$

$$= 2\varrho R\,dq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{z^2+R^2+(R+x)^2+2R(R+x)-4R(R+x)\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}}$$

$$= 2\varrho R\,dq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)-4R(R+x)\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}}.$$

Wir führen in das letzte Integral eine neue Variable χ ein mittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \chi;$$

dann kommt sogleich

$$v = 4\varrho R\,dq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)-4R(R+x)\sin\chi^2}}$$

$$= \frac{4\varrho R\,dq}{\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-\dfrac{4R(R+x)}{x^2+z^2+4R(R+x)}\sin\chi^2}}$$

$$= \frac{4\varrho R\,dq}{\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)}} F'(k),$$

unter $F'(k)$ das vollständige elliptische Integral der ersten Art verstanden, dessen Modulus k sich durch nachstehende Gleichung bestimmt:

$$k^2 = \frac{4R(R+x)}{x^2+z^2+4R(R+x)}.$$

Wir setzen nun voraus, dass x und z gegen R sehr klein seien. Je mehr dieses der Fall ist, desto mehr nähert sich der Modulus k der Einheit; und da nun annähernd für einen der Einheit sehr nahe kommenden Modulus gesetzt werden kann

$$F'(k) = \log\frac{4}{k'},$$

unter k' den complementären Modulus verstanden, der in unserem Falle durch die Gleichung bestimmt wird

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{x^2+z^2}{x^2+z^2+4R(R+x)},$$

so hat man annähernd nach dem Obigen für das Potential v, wofern x und z gegen R sehr klein sind,

$$v = \frac{4\varrho R\,dq}{\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)}}\log\frac{4\sqrt{x^2+z^2+4R(R+x)}}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

oder auch

$$v = \frac{2\varrho\,dq}{\sqrt{1+\frac{x}{R}+\frac{x^2+z^2}{4R^2}}}\left\{\log(8R) + \log\sqrt{1+\frac{x}{R}+\frac{x^2+z^2}{4R^2}} - \log\sqrt{x^2+z^2}\right\}.$$

Je kleiner nun x und z gegen R sind, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck dem folgenden:

$$v = 2\varrho\,dq\log(8R) - 2\varrho\,dq\log\sqrt{x^2+z^2}$$

oder

$$v = 2\varrho\,dq\log(8R) - 2\varrho\,dq\log\xi,$$

unter ξ die Entfernung des angezogenen Punktes von dem nächsten Punkte des Ringes verstanden. Dieses ist eine angenäherte Formel für das Potential eines Ringes von unendlich kleinem Querschnitte dq, die mit desto grösserer Genauigkeit gilt, je näher der angezogene Punkt dem Ringe liegt, je kleiner also ξ ist.

Denken wir uns jetzt einen Ring von endlichem Querschnitte Q, dessen Dimensionen gegen den Halbmesser des Ringes sehr klein seien. Wir denken uns den Querschnitt Q in Elemente dQ zerlegt und den Ring in eine grosse Anzahl Elementarringe, deren Querschnitte eben die Elemente dQ seien. R sei der (variable) Radius des zum Elemente dQ gehörigen Elementarringes und ξ die Entfernung des angezogenen Punktes von demselben. Dann kommt für das Potential V des Ringes in Punkten, die demselben sehr nahe liegen, also besonders in allen inneren Punkten,

$$V = 2\varrho\int\log(8R)\,dQ - 2\varrho\int\log\xi\,dQ.$$

Unter R_0 einen gewissen mittleren Ringhalbmesser verstanden, kann man hierfür auch schreiben

$$V = 2\varrho Q \log(8 R_0) - 2\varrho \int \log \xi \, dQ.$$

Diese Formel lässt Folgendes erschliessen: Für einen im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnittes sehr grossen Ringhalbmesser besteht das Potential des Ringes in erster Annäherung für alle inneren und solche äusseren Punkte, welche dem Ringe sehr nahe liegen, aus zwei Theilen; der erste ist constant, d. h. von den Coordinaten des angezogenen Punktes unabhängig, er hängt vielmehr nur vom Querschnitte und dem Ringhalbmesser ab, und der zweite allein ist veränderlich, indem derselbe nur vom Querschnitte und der Lage des angezogenen Punktes, nicht vom Ringhalbmesser abhängt. Lässt man den Ringhalbmesser ins Unbegrenzte wachsen, so wächst der constante Theil seines innern Potentials auch ins Unbegrenzte, während der letzte von den Coordinaten abhängige Theil sich nicht ändert. Man kann demnach das innere Potential eines Ringes von grossem Halbmesser, abgesehen von dem constanten Theile desselben, auch ersetzen durch das Potential eines unendlich langen Cylinders von gleichem Querschnitte; die constanten Glieder beider Potentialfunctionen sind zwar verschieden, und zwar ist dasjenige für den unendlichen Cylinder selbst unendlich; die von den Coordinaten des angezogenen Punktes abhängigen Theile derselben indessen fallen in erster Annäherung und desto genauer, je grösser der Ringhalbmesser ist, zusammen.

§ 3. Potential eines unendlich langen elliptischen Cylinders für innere Punkte.

Um das Potential eines unendlich langen elliptischen Cylinders für innere Punkte zu finden, gehen wir aus vom Potential eines Ellipsoids, dessen eine Axe wir dann ins Unbegrenzte wachsen lassen. Das Ellipsoid habe die Halbaxen a, b, c, welche resp. in die x, y, z-Axe fallen sollen. Dann ist das Potential U desselben in einem innern Punkte (x, y, z):

$$U = D - Ax^2 - By^2 - Cz^2,$$

wo zu setzen

$$D = abc\varrho\pi \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}},$$

$$A = abc\varrho\pi \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)^3(b^2+t)(c^2+t)}},$$

$$B = abc\varrho\pi \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)^3(c^2+t)}},$$

$$C = abc\varrho\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)^3}}.$$

Wir denken uns nun die Axe $2b$ über alle Grenzen wachsend, wodurch das Ellipsoid in einen unendlich langen elliptischen Cylinder übergeht. Ein gegen die Seiten desselben senkrechter Schnitt ist dann xz-Ebene und die Halbaxen dieses Schnittes sind resp. die x- und z-Axe, während eine in seinem Mittelpunkte auf demselben errichtete Senkrechte y-Axe ist. In dem Ausdrucke für B setzen wir im Nenner des Integranden (b^2+t) vor das Wurzelzeichen, bringen ferner überall den Factor b vor den Integralzeichen dadurch weg, dass wir unter den Wurzelzeichen im Nenner der Integranden $1+t:b^2$ statt b^2+t schreiben. Setzt man nun $b=\infty$ in obigen Formeln, so gehen dieselben offenbar in folgende über, da im Radical $1+t:b^2$ jetzt $=1$ zu setzen ist:

$$D = ac\varrho\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(c^2+t)}}, \quad A = ac\varrho\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)^3(c^2+t)}},$$

$$B = ac\varrho\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(b^2+t)\sqrt{(a^2+t)(c^2+t)}}, \quad C = ac\varrho\pi \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(c^2+t)^3}}.$$

Der Coefficient B muss wegen des Factors b^2+t im Nenner offenbar verschwinden, wie vorauszusehen war; D muss, wie aus den Erörterungen in § 2 folgt, unendlich gross werden. Es bestätigt sich das Letztere auch leicht direct; denn setzt man $a^2+t=s^2$, so erhält man sogleich für D

$$D = 2ac\varrho\pi \int\limits_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^2-(a^2-c^2)}} = 2ac\varrho\pi \left[\log(s+\sqrt{s^2-(a^2-c^2)})\right]_a^\infty,$$

also offenbar $=\infty$.

Die Substitutionen $a^2+t=s^2$ und $c^2+t=s^2$ verwandeln resp. die Coefficienten A und C in die folgenden:

$$A = 2ac\varrho\pi \int\limits_a^\infty \frac{ds}{s^2\sqrt{s^2-(a^2-c^2)}}, \quad C = 2ac\varrho\pi \int\limits_c^\infty \frac{ds}{s^2\sqrt{s^2+(a^2-c^2)}}.$$

Um nun ein Integral von der Form $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+m}}$ zu entwickeln, setze man $1:x^2=y$, also $x^2=1:y$, $dx=-\frac{\sqrt{y}}{2y^2}dy$, dann erhält man für dasselbe

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1+my}} = -\frac{\sqrt{1+my}}{m}.$$

Geht man also wieder auf die ursprüngliche Variable x zurück, so kommt

$$\int^{s}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+m}}=-\frac{\sqrt{x^2+m}}{mx}.$$

Also erhält man nach dem Obigen

$$A=2ac\varrho\pi\left[\frac{\sqrt{s^2-(a^2-c^2)}}{(a^2-c^2)s}\right]_a^\infty,\quad C=2ac\varrho\pi\left[\frac{\sqrt{s^2+(a^2-c^2)}}{-(a^2-c^2)s}\right]_c^\infty$$

oder endlich

$$A=2ac\varrho\pi\left[\frac{1}{a^2-c^2}-\frac{c}{a(a^2-c^2)}\right]=\frac{2\varrho\pi c}{a+c},$$

$$C=2ac\varrho\pi\left[-\frac{1}{a^2-c^2}+\frac{a}{c(a^2-c^2)}\right]=\frac{2\varrho\pi a}{a+c}.$$

Hiernach haben wir für das Potential eines unendlich langen elliptischen Cylinders endlich

$$U=D-\frac{2\varrho c\pi}{a+c}x^2-\frac{2\varrho a\pi}{a+c}z^2$$

oder

$$U=D-\frac{2\varrho ac\pi}{a+c}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{c}\right).$$

Die Constante D ist unendlich gross und also auch das Potential selbst. Sein veränderlicher Theil und infolge dessen seine Differentialquotienten oder die Componenten der von dem unendlichen Cylinder ausgeübten Anziehung bleiben aber endlich. Derselbe Ausdruck muss nun dem in § 2 Gesagten zufolge bis auf die Constante auch das innere Potential eines elliptischen Ringes von grossem Halbmesser darstellen. Legen wir also durch den angezogenen (innern) Punkt einen Querschnitt des Ringes und nehmen seine beiden Axen $2a$ und $2c$ resp. zur x- und z-Axe (die y-Axe also auf dem besagten Querschnitte senkrecht), so wird das Potential V des Ringes in dem innern Punkte (x, o, z) annähernd durch folgende Formel dargestellt:

$$V=\mathfrak{C}-\frac{2\varrho ac\pi}{a+c}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{z^2}{c}\right).$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{C}$ eine vom Ringhalbmesser abhängige, nicht näher bekannte Constante, welche mit jenem Halbmesser ins Unendliche wächst.

§ 4. Aufstellung und Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen.

Ein Flüssigkeitsring von elliptischem Querschnitte rotire um einen Centralkörper von der Masse C, so dass die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen. Man braucht offenbar blos die Verhältnisse eines Querschnittes des Ringes zu betrachten. Den Mittelpunkt des betrachteten Ringquerschnittes nehme man zum Ursprunge (Fig. 5), seine in die Ringebene fallende Axe $2a$ zur x-Axe, und zwar sei deren positiver Theil vom Centralkörper abgewandt; die auf der Ringebene senkrechte Axe $2c$

sei zur z-Axe genommen und die Normale des Querschnittes in dessen Mittelpunkt zur y-Axe. Die Entfernung vom Mittelpunkte des Centralkörpers sei t; dann können wir für sein Potential W, falls derselbe nicht sehr stark von der Kugelform abweicht und der Ringhalbmesser R sehr gross ist, in einem Punkte (x, o, z) des betrachteten Ringquerschnittes setzen

$$W = \frac{C}{t} = \frac{C}{\sqrt{z^2 + (R+x)^2}} = \frac{C^2}{R}\left[1 + \frac{2x}{R} + \frac{x^2+z^2}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{C}{R}\left[1 - \frac{x}{R} - \frac{x^2+z^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{R^2} + \dots\right].$$

Vernachlässigen wir die folgenden Glieder, wozu wir wegen der Grösse von R und der Kleinheit von x und z berechtigt sind, so können wir also für das Potential des Centralkörpers setzen

$$W = \frac{C}{R}\left[1 - \frac{x}{R} + \frac{2x^2 - z^2}{2R^2}\right].$$

Die Centrifugalkraft ist für alle Punkte des betrachteten Querschnittes nach der x-Axe gerichtet, und zwar ist ihr Werth, auf die Masseneinheit bezogen, unter ϑ die Winkelgeschwindigkeit des Ringes und unter s die Entfernung von seiner Axe verstanden,

$$\vartheta^2 s = \vartheta^2(R+x).$$

Die Componenten derselben sind also die partiellen Derivirten des Ausdruckes

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2(R+x)^2.$$

Für das Potential V des Ringes haben wir endlich nach § 3

$$V = \mathfrak{C} - \frac{2\varrho\pi a c}{a+c}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c}\right).$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Punkte des Umfanges des betrachteten Ringquerschnittes ist nun, unter f die Attractionsconstante verstanden,

$$f(W+V) + \tfrac{1}{2}\vartheta^2(R+x)^2 = Const.$$

Wenn diese Gleichgewichtsbedingung für den Umfang eines Querschnittes erfüllt ist, so muss sie der vollkommenen Symmetrie wegen für die ganze Ringoberfläche erfüllt sein. Dieselbe kann dem Gesagten zufolge so entwickelt werden:

$$\frac{Cf}{R}\left(1 - \frac{x}{R} + \frac{2x^2 - z^2}{2R^2}\right) + \mathfrak{C}f - \frac{2\varrho\pi a c f}{a+c}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c}\right) + \frac{\vartheta^2}{2}(R^2 + 2Rx + x^2)$$
$$= Const.$$

Die Gleichung des Ringquerschnittes ist aber

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth $z^2 = c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ in die vorhergehende Gleichung ein, so wird dieselbe

$$\frac{Cf}{R}\left(1-\frac{c^2}{2R^2}-\frac{x}{R}+\frac{\left(2+\frac{c^2}{a^2}\right)x^2}{2R^2}\right)+\mathfrak{C}f-\frac{2\varrho\pi a c^2 f}{a+c}-\frac{2\varrho\pi c(a-c)f}{a(a+c)}x^2$$
$$+\frac{\vartheta^2}{2}(R^2+2Rx+x^2)=Const.$$

Das Bestehen dieser Gleichung erfordert das Verschwinden der Coefficienten von x und x^2; wir haben demnach als nöthige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen des rotirenden Ringes

$$-\frac{Cf}{R^2}+\vartheta^2 R = 0,$$

$$-\frac{2\varrho\pi f c(a-c)}{a(a+c)}+\frac{\left(2+\frac{c^2}{a^2}\right)}{2}\frac{Cf}{R^3}+\tfrac{1}{2}\vartheta^2=0.$$

Die erste Gleichung giebt die Grösse der erforderlichen Winkelgeschwindigkeit; sie sagt aus, dass im Mittelpunkte eines Ringquerschnittes die Centripetalacceleration gleich der vom Centralkörper ausgehenden Anziehung sein müsse, oder dass der Ring mit derselben Geschwindigkeit rotiren müsse, mit der ein Satellit im Mittelpunkte seines Querschnittes sich bewegen müsste, falls dessen Bahn kreisförmig sein sollte. Mit Hilfe des von der ersten Gleichung gelieferten Werthes $\vartheta^2 = Cf : R^3$ geht dann die zweite über in folgende:

$$\frac{2\varrho\pi f c(a-c)}{a(a+c)}+\tfrac{1}{2}\left(2+\frac{c^2}{a^2}\right)\vartheta^2+\tfrac{1}{2}\vartheta^2=0$$

oder

$$-\frac{c(a-c)}{a(a+c)}+\left(3+\frac{c^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\vartheta^2}{4\varrho\pi f}=0$$

oder

$$\frac{ac(a-c)}{(a+c)(3a^2+c^2)}=\frac{\vartheta^2}{4\varrho\pi f}.$$

Setzen wir das Axenverhältniss $\frac{c}{a}$ des Ringquerschnittes gleich p, so können wir endlich schreiben

1) $$\frac{p(1-p)}{(1+p)(3+p^2)}=\frac{\vartheta^2}{4\varrho\pi f}.$$

Diese Gleichung bestimmt das Axenverhältniss p der Querschnittsellipse des Ringes. Da sie in Beziehung auf p kubisch ist, so liefert sie für p drei Werthe, auf deren Discussion es zunächst ankommt. Wir denken uns den Ausdruck auf der linken Seite der vorigen Gleichung als Ordinate einer Curve, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten p und q:

$$q=\frac{p(1-p)}{(1+p)(3+p^2)}.$$

Offenbar ist die Curve von der vierten Ordnung. Die Ordinate q verschwindet für die Werthe 0 und 1 der Abscisse p; in diesen Punkten schneidet also die Curve die Abscissenaxe. Für $p=-1$ wird $q=\infty$ und für $p=\infty$ wird $q=0$; jeder Abscisse p entspricht ein einziger, stets reeller Werth der Ordinate und die Curve hat also eine der Abscisse -1 entsprechende, zur Ordinatenaxe parallele Linie, sowie die Abscissenaxe zu Asymptoten. In dem Intervalle 0 bis $+1$ der Werthe der Abscisse p ist die Ordinate q positiv, in dem Intervalle $+1$ bis $+\infty$ ist sie negativ; in dem Intervalle 0 bis -1 ist q ebenso negativ und in dem Intervalle -1 bis $-\infty$ ist q wieder positiv. Demnach lässt sich die Gestalt der Curve im Allgemeinen übersehen (Fig. 6).

In dem Intervalle 0 bis $+1$ erreicht die (positive) Ordinate q der Curve einen Maximalwerth, auf dessen Bestimmung es besonders ankommt. Man findet

$$\frac{dq}{dp}=\frac{p^4-2p^3-4p^2-6p+3}{(1+p)^2(3+p^2)^2},$$

die Abscisse des gesuchten Maximalpunktes ist also die zwischen 0 und 1 liegende positive Wurzel der Gleichung

$$p^4-2p^3-4p^2-6p+3=0,$$

für welche man findet $p=0{,}386$ (der genauere Werth ist $p=0{,}38550673$). Die zugehörige Ordinate wird dann $q=0{,}0543$.

Die Entscheidung über die Natur der Wurzeln der Gleichung 1) ergiebt sich hiernach sofort; die Wurzeln dieser Gleichung sind nämlich die Abscissen der Punkte, in denen eine in dem stets positiven Abstande $\vartheta^2:4\pi\varrho f$ zur Abscissenaxe gezogene Parallele die betrachtete Curve schneidet. Daraus folgt sogleich, dass die Gleichung 1) stets eine negative Wurzel hat, welche aber für unsern Zweck ausser Betracht fällt; ausserdem hat dieselbe noch zwei positive Wurzeln, wenn $\vartheta^2:4\pi\varrho f<0{,}0543$, und zwar ist die eine dieser Wurzeln kleiner und die andere grösser als 0,386. Ist $\vartheta^2:4\pi\varrho f=0{,}0543$, so fallen beide positive Wurzeln in den einen Werth 0,386 zusammen, und ist endlich $\vartheta^2:4\pi\varrho f>0{,}0543$, so hat die Gleichung 1) keine positiven reellen Wurzeln mehr. Dies führt zu folgendem Resultate für unser Problem:

So lange die Rotationsgeschwindigkeit des Flüssigkeitsringes so klein ist, dass $\vartheta^2:4\pi\varrho f<0{,}0543$ ist, so sind zwei Gleichgewichtsfiguren mit elliptischem Querschnitte für den Ring möglich; bei jeder liegt die längere Axe des Querschnittes in der Ringebene, während die kürzere auf ihr senkrecht steht. Die eine der beiden Gleichgewichtsfiguren des Querschnittes ist sehr stark abgeplattet, indem ihr Axenverhältniss unter 0,386 liegt und mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit fortwährend und bis zur Grenze Null abnimmt; die andere ist mehr kreisförmig, indem ihr Axenverhältniss über 0,386 liegt und mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit sich der Grenze 1 nähert. Ist $\vartheta^2:4\pi\varrho f$ gerade gleich 0,0543, so ist nur noch eine elliptische Querschnittsfigur für den Ring möglich, deren Axenverhältniss gleich 0,386 ist. Uebersteigt endlich $\vartheta^2 : 4\pi\varrho f$ den Werth 0,0543, so ist ein Gleichgewicht des Ringes bei elliptischem Querschnitte nicht mehr möglich.

§ 5. Schlussbemerkungen über das System der Saturnringe.

I. Nach den Formeln des § 4 ist

$$\frac{\vartheta^2}{4\pi\varrho f} = \frac{1}{4\pi\varrho} \cdot \frac{C}{R^3} = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{\varrho} \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

unter σ die Dichtigkeit und unter r den Halbmesser des Centralkörpers verstanden. Es muss also nach Obigem weiter sein

$$\frac{\sigma}{\varrho} < 3 \cdot 0{,}0543 \left(\frac{R}{r}\right)^3.$$

Für den innersten der Saturnringe ist ungefähr $R:r = 2$, es müsste also sein $\sigma:\varrho < 1{,}3$. Indessen kann die auseinandergesetzte Theorie nur unter manchen Einschränkungen auf die Saturnringe angewendet werden aus Gründen, die in III näher besprochen werden.

II. Die Saturnringe umgeben den Planeten nahe in der Ebene des Aequators; es ist dies eine Folge der stark abgeplatteten Gestalt des Saturn, durch welche, wenn die besagte Lage der Ringe nicht statt hätte, an denselben sofort ein Kräftepaar hervorgerufen würde, welches die Ringe in pendelartigen Schwingungen um die Ebene des Aequators als Mittellage bewegen würde. Analytische Entwickelungen hierüber müssen wir hier übergehen.

III. Es käme nun aber bei dieser Untersuchung noch ein anderer Umstand zur Sprache, nämlich die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichtes des betrachteten Flüssigkeitsringes. Vor Allem sind zwei Arten von Verschiebungen zu unterscheiden, in Bezug auf welche die Natur des Gleichgewichtes zu untersuchen wäre; zur ersten gehören jene, durch welche der Massenmittelpunkt des Ringes verschoben wird, während die Theile desselben ihre relative Lage beibehalten; bei der zweiten Art von Verschiebungen bleibt der Massenmittelpunkt in Ruhe, die Theile aber ändern ihre relative Lage. Wir beschränken indessen die folgende Untersuchung auf die erste Art von Verschiebungen, und betrachten auch hier nur den speciellen Fall, wo letztere in der Ringebene liegen.

Wir denken uns den Flüssigkeitsring wie in § 2 in Elementarringe von unendlich kleinem Querschnitte zerlegt. Die Natur des Gleichgewichts ist dann bei den hier in Betracht kommenden Verschiebungen für den Elementarring dasselbe, wie für den ganzen Flüssigkeitsring. Bezeichnet R wieder den Radius eines Elementarringes, δ die unendlich kleine Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte desselben und φ den Winkel (R, δ), so ist das Potential v des Elementarringes in Bezug auf diesen Punkt, wenn wir die früheren Bezeichnungen in § 2 beibehalten,

$$v = R\varrho\, dQ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 + \delta^2 - 2R\delta\cos\varphi}}$$

$$= \varrho\, dQ \int_0^{2\pi} \left\{1 - 2\frac{\delta}{R}\cos\varphi + \frac{\delta^2}{R^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

$$= \varrho\, dQ \int_0^{2\pi} \left\{1 + \frac{\delta}{R}\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{R^2} + \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{R^2}\cos\varphi^2 + \ldots\right\} d\varphi$$

$$= \varrho\, dQ \left\{2\pi + \frac{1}{2}\pi\frac{\delta^2}{R^2} + \ldots\right\},$$

also ein Minimum für $\delta = 0$. Daraus folgt, dass die Anziehung, welche ein unendlich wenig vom Mittelpunkte des Ringes entfernter Körper erleidet, vom Mittelpunkte ab gerichtet ist, woraus sich sofort weiter ergiebt, dass das Gleichgewicht des Ringes in Beziehung auf solche Verschiebungen, welche die Lage seines Schwerpunktes ändern, labil ist, so dass, wenn durch irgend eine Störung, wie sie beim Saturn schon durch die Anziehung seiner Trabanten nicht fehlen könnte, der Mittelpunkt des Ringes sich noch so wenig vom Mittelpunkte des Centralkörpers entfernte, jener durch die auf den Ring wirkenden Kräfte nicht wieder in diesen zurückgeführt, sondern im Gegentheil immer weiter von demselben entfernt würde, wodurch der Ring sich also dem Centralkörper von der einen Seite her immer mehr nähern müsste, bis er zuletzt mit demselben zusammenfliessen würde.

Eine solche Labilität des Gleichgewichts kann in Wirklichkeit selbstverständlich in der Natur nicht vorhanden sein; es fragt sich daher, wie im System der Saturnringe die Stabilität des Gleichgewichts bewirkt ist. Es lassen sich indessen bis jetzt fast nur Vermuthungen hierüber aufstellen, und es sollen daher im Folgenden nur einige Momente angeführt werden, welche in dieser Beziehung von besonderem Einflusse zu sein scheinen. 1. Es sind mehrere Ringe vorhanden, welche gegenseitig auf einander anziehend wirken, worauf bei der vorhin angedeuteten vereinfachten Fassung des Problems keine Rücksicht genommen wurde. 2. Die Mittelpunkte der einzelnen Ringe scheinen den Beobachtungen gemäss sowohl unter einander, als mit demjenigen des Saturn nicht ganz genau zusammenzufallen. 3. Die Ringe scheinen weder ganz genau in einer Ebene zu liegen, noch auch eine ganz regelmässige kreisförmige Gestalt zu besitzen. 4. Endlich sind vielleicht auch die stark abgeplattete Gestalt des Saturn und die Anziehungen, welche von seinem ganzen Gefolge von Trabanten ausgehen, von besonderem Einflusse auf den Gleichgewichtszustand und die Bewegungen des Ringsystems.

Möglicherweise werden vielleicht gerade durch die erwähnten Umstände in dem Ringsystem periodische Bewegungen hervorgerufen, durch welche die Schwerpunkte der einzelnen Ringe dem Schwerpunkte des gesammten Systems in kürzeren oder längeren Zeiträumen bald etwas mehr genähert, bald wieder etwas mehr von demselben entfernt werden, und vielleicht sind es gerade solche periodische Schwankungen, welche verhindern, dass die durch die Anziehung der äusseren Massen hervorgebrachten Störungen je eine solche Grösse erlangen, die den Bestand des Ganzen bedrohen könnte.

Die theoretischen Fragen, welche sich hieran knüpfen, sind indess noch lange nicht als sämmtlich gelöst zu betrachten, wie auch andererseits die hierzu erforderlichen Beobachtungsdata noch bei weitem nicht in der nöthigen Vollständigkeit vorzuliegen scheinen, und es ist wohl jedenfalls die vollständige Erforschung des Systems der Saturnringe sowohl für die beobachtende Astronomie wie für die mathematische Theorie als eine sehr schwierige Aufgabe zu bezeichnen.

XVI.

Untersuchung der höheren Variationen einfacher Integrale.

Von

G. Erdmann,

Gymnasiallehrer in Berlin.

---

§ 1. Die von Jacobi,* Hesse** u. A. entwickelte Theorie der zweiten Variation, welche ich hier kurz voranschicken will, besteht in Folgendem.

Ich setze

$$V=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')\,dx$$

und suche das Maximum oder Minimum von V, wobei ich die Grenzwerthe von y als gegeben ansehe und mit y_0, y_1 bezeichne. Dann erhalte ich die Differentialgleichung

$$1)\qquad \varphi'(y)-\frac{d}{dx}\varphi'(y')=0.$$

Die Differentialgleichung habe die Integrationsconstanten c_1 und c_2; ich setze

$$\frac{\partial y}{\partial c_1}=r_1,\quad \frac{\partial y}{\partial c_2}=r_2,$$

$$u=\gamma_1 r_1+\gamma_2 r_2,$$

wo γ_1 und γ_2 zwei Constanten sind. Die Differentialquotienten von u nach x bezeichne ich mit u' und u''; die Werthe, welche u für $x=x_0$ und $x=x_1$ annimmt, seien u_0 und u_1. Setze ich ferner

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m\,\partial y'^n}\varphi(x, y, y')=a_{mn},$$

so ergiebt die Differentiation von 1) nach den Integrationsconstanten

$$2)\qquad \left(a_{20}-\frac{d a_{11}}{dx}\right)u-\frac{d a_{02}}{dx}u'-a_{02}u''=0.$$

---

* Crelle's Journ. Bd. 17.

** Crelle's Journ. Bd. 54, S. 255 flgg.

§ 2. Ich setze ferner

$$a_{20}z^2 + 2a_{11}zz' + a_{02}z'^2 = Q, \tag{3}$$

wo z eine beliebige Function von x und z' ihren Differentialquotienten bezeichnet. Dann kann ich den Ausdruck Q mit Hilfe der Gleichung 2) transformiren. Setze ich nämlich

$$z = gu, \tag{4}$$

wo g eine Function von x bezeichnet, und subtrahire die mit g^2u multiplicirte Gleichung 2) von 3), so erhalte ich

$$Q = a_{02}g'^2u^2 + \frac{d}{dx}\left[a_{11}g^2u^2 + a_{02}g^2uu'\right]. \tag{5}$$

Giltig ist diese Transformation, so lange u nicht verschwindet; verschwindet dagegen u, so ist die Substitution 4) nur erlaubt, wenn zugleich z verschwindet.

§ 3. Die Formel für die zweite Variation von V heisst

$$\begin{aligned}\delta^2 V &= \int_{x_0}^{x_1}\left[a_{20}\,\delta y^2 + 2a_{11}\,\delta y\,\delta y' + a_{02}\,\delta y'^2\right]dx \\ &+ \int_{x_0}^{x_1}\left[a_{10}\,\delta^2 y + a_{01}\,\delta^2 y'\right]dx.^*\end{aligned} \tag{6}$$

Das zweite Integral verschwindet, wie man sieht, wenn man durch Theile integrirt und 1) berücksichtigt. Setze ich jetzt $\delta y = \varepsilon z$, wo ε eine constante unendlich kleine Grösse bezeichnet, so folgt aus § 2

$$\delta^2 V = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} a_{02}\,g'^2u^2\,dx. \tag{7}$$

Diese Transformation ist giltig, wenn u zwischen x_0 und x_1 nicht verschwindet. Für die Grenzwerthe x_0 und x_1 selbst darf u unbeschadet der Giltigkeit von 7) verschwinden, da für diese Werthe δy und somit auch z gleich 0 wird.

§ 4. Um nun die in u enthaltenen Constanten γ_1 und γ_2 zu bestimmen, betrachte ich c_1 und c_2 so als Functionen einer dritten Grösse c, dass $r_1\frac{dc_1}{dc} + r_2\frac{dc_2}{dc}$ für $x = x_0$ stets gleich 0 bleibt; dann setze ich $\gamma_1 = \frac{dc_1}{dc}$ und $\gamma_2 = \frac{dc_2}{dc}$ und habe $u = \frac{dy}{dc}$. Alsdann verschwindet u für $x = x_0$, ebenso wie die höheren Differentialquotienten von y nach c. Zwischen x_0 und x_1 wird jedoch u nicht verschwinden, wenn $\frac{r_2}{r_1}$ nicht denselben Werth annimmt

* Ueber die Nothwendigkeit, alle diese Glieder zu berücksichtigen, s. §§ 13 und 14.

wie für $x = x_0$. Wenn wir ausserdem annehmen, dass a_{02} stets grösser als 0 bleibt,* so wird auch $\delta^2 V$, wie 7) zeigt, für alle möglichen Werthe von δy grösser als 0 sein, und es wird somit ein Minimum stattfinden. Nur wenn $\frac{r_2}{r_1}$ zwar nicht zwischen x_0 und x_1, aber für $x = x_1$ selbst denselben Werth annimmt, wie für $x = x_0$, also wenn $u_1 = 0$, kann $\delta^2 V$ auch zum Verschwinden gebracht werden, wenn man nämlich g gleich einer Constanten setzt, was sonst nicht zulässig ist, da $\delta y_1 = 0$ werden muss. In diesem Falle also sind die höheren Variationen zu untersuchen. Dabei ist $\delta y = \varepsilon u$ zu setzen, da nur für diesen Werth von δy die zweite Variation von V verschwindet, für alle anderen aber grösser als 0 bleibt.

§ 5. Ich habe für die dritte Variation von V, wie sich aus 6) ergiebt:

$$\delta^3 V = \int_{x_0}^{x_1} [a_{30}\,\delta y^3 + 3a_{21}\,\delta y^2\,\delta y' + 3a_{12}\,\delta y\,\delta y'^2 + a_{03}\,\delta y'^3]\,dx$$

$$8) \qquad + 3\int_{x_0}^{x_1} [a_{20}\,\delta y\,\delta^2 y + a_{11}\,(\delta y\,\delta^2 y' + \delta y'\,\delta^2 y) + a_{02}\,\delta y'\,\delta^2 y']\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [a_{10}\,\delta^3 y + a_{01}\,\delta^3 y']\,dx.$$

Setze ich allgemein

$$9) \qquad a_{20}\,up + a_{11}(up' + u'p) + a_{02}\,u'p' = P,$$

wo p eine beliebige Function von x ist, so ergiebt die Subtraction der mit p multiplicirten Gleichung 2) von 9), wenn ich $\frac{da_{mn}}{dx}$ mit a'_{mn} bezeichne:

$$10) \qquad \begin{aligned} P &= a'_{11}\,up + a'_{02}\,u'p + a_{02}\,u''p + a_{11}\,up' + a_{11}\,u'p + a_{02}\,u'p', \\ P &= \frac{d}{dx}[a_{11}\,up + a_{02}\,u'p]. \end{aligned}$$

§ 6. Setze ich ferner

$$11) \qquad \Omega_2 = \int_{x_0}^{x_1} [a_{20}\,u^2 + 2a_{11}\,uu' + a_{02}\,u'^2]\,dx,$$

$$12) \qquad \Omega_3 = \int_{x_0}^{x_1} [a_{30}\,u^3 + 3a_{21}\,u^2u' + 3a_{12}\,uu'^2 + a_{03}\,u'^3]\,dx,$$

so habe ich, wenn ich $\frac{d^2 y}{dc^2}$ mit v bezeichne:

---

* Ist a_{02} stets kleiner als 0, so gelten natürlich ganz die entsprechenden Betrachtungen.

$$\Omega_3 = \frac{d\Omega_2}{dc} - 2\int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{20}\, u v + a_{11}(u v' + u' v) + a_{02}\, u' v']\, dx.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist von der Form P; nach 10) habe ich also, da nach § 4 $u_0 = 0$ und $v_0 = 0$:

13) $$\Omega_3 = \frac{d\Omega_2}{dc} - 2\, a_{11}\, u_1 v_1 - 2\, a_{02}\, u'_1 v_1.\text{*}$$

Aus Gleichung 11) wird nach § 2, da $g = 1$ zu setzen ist:

$$\Omega_2 = a_{11}\, u_1^2 + a_{02}\, u_1 u'_1,$$

folglich geht 13) über in

14) $$\Omega_3 = a_{21}\, u_1^3 + 2 a_{12}\, u_1^2 u'_1 + a_{03}\, u_1 u'^2_1 + a_{02}\, u_1 v'_1 - a_{02}\, u'_1 v_1$$

oder, da $u_1 = 0$:

15) $$\Omega_3 = - a_{02}\, u'_1 v_1.$$

§ 7. Setze ich jetzt in 8) $\delta y = \varepsilon u$, so erhält das erste der in dieser Gleichung enthaltenen Integrale die Form Ω_3; der unter dem zweiten Integralzeichen stehende Ausdruck erhält die Form P, verschwindet also nach 10), da $\delta^2 y$ für die Grenzen verschwindet; das dritte Integral verschwindet gleichfalls, und wir erhalten gemäss 15)

$$\delta^3 V = - \varepsilon^3 a_{02}\, u'_1 v_1.$$

Da a_{02} nach unserer Voraussetzung stets grösser als 0 ist, so muss entweder u'_1 oder v_1 verschwinden, wenn ein Minimum stattfinden soll. Verschwindet eine dieser beiden Grössen, so ist die vierte Variation zu untersuchen.

§ 8. Es folgt aus 8)

$$\delta^4 V = \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{40}\, \delta y^4 + 4 a_{31}\, \delta y^3 \delta y' + 6 a_{22}\, \delta y^2 \delta y'^2 + 4 a_{13}\, \delta y\, \delta y'^3 + a_{04}\, \delta y'^4]\, dx$$

$$+ 6 \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{30}\, \delta y^2 \delta^2 y + a_{21}\, \delta y^2 \delta^2 y' + 2 a_{21}\, \delta y\, \delta y'\, \delta^2 y$$
$$+ a_{12}\, \delta y'^2 \delta^2 y + 2 a_{12}\, \delta y\, \delta y'\, \delta^2 y' + a_{03}\, \delta y'^2 \delta^2 y']\, dx$$

$$+ 3 \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{20}\, \delta^2 y^2 + 2 a_{11}\, \delta^2 y\, \delta^2 y' + a_{02}\, \delta^2 y'^2]\, dx$$

$$+ 4 \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{20}\, \delta y\, \delta^3 y + a_{11}\, \delta y'\, \delta^3 y + a_{11}\, \delta y\, \delta^3 y' + a_{02}\, \delta y'\, \delta^3 y']\, dx$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} [a_{10}\, \delta^4 y + a_{01}\, \delta^4 y']\, dx.$$

* Hierbei ist in den Functionen a_{11}, a_{02} natürlich $x = x_1$ zu setzen.

Hier ist wiederum $\delta y = \varepsilon u$ zu setzen. Da alsdann das letzte und nach § 5 auch das vorletzte Integral verschwindet, so folgt mit Berücksichtigung von 12)

$$16)\qquad \delta^4 V = \varepsilon^4 \frac{d\Omega_3}{dc} + 3\int_{x_0}^{x_1} K\, dx,$$

wo

$$17)\left\{\begin{aligned} K = \varepsilon^2[a_{30}\, u^2(2\delta^2 y - \varepsilon^2 v) + a_{21}\, u^2(2\delta^2 y' - \varepsilon^2 v') \\ + 2a_{21}\, uu'(2\delta^2 y - \varepsilon^2 v) + 2a_{12}\, uu'(2\delta^2 y' - \varepsilon^2 v') + a_{12}\, u'^2(2\delta^2 y - \varepsilon^2 v) \\ + a_{03}\, u'^2(2\delta^2 y' - \varepsilon^2 v')] + a_{20}\,\delta^2 y^2 + 2a_{11}\,\delta^2 y\,\delta^2 y' + a_{02}\,\delta^2 y'^2. \end{aligned}\right.$$

Die Differentiation von 2) nach c ergiebt

$$18)\qquad \left\{\begin{aligned} (a_{30} - a'_{21})\, u^2 - 2a'_{12}\, uu' - (a_{12} + a'_{03})\, u'^2 - 2a_{12}\, uu'' \\ - 2a_{03}\, u'u'' + (a_{20} - a'_{11})\, v - a'_{02}\, v' - a_{02}\, v'' = 0. \end{aligned}\right.$$

Ich setze jetzt $2\delta^2 y - \varepsilon^2 v = q$ und subtrahire die mit $\varepsilon^2 q$ multiplicirte Gleichung 18) von 17); ich erhalte

$$19)\qquad K = \varepsilon^2 \frac{dL}{dx} + M,$$

wo

$$20)\qquad \begin{aligned} L &= a_{21}\, u^2 q + 2a_{12}\, uu'q + a_{03}\, u'^2 q + a_{11}\, vq + a_{02}\, v'q, \\ M &= a_{20}\,(\delta^2 y^2 - \varepsilon^2 qv) + a_{11}\,(2\,\delta^2 y\,\delta^2 y' - \varepsilon^2 vq' - \varepsilon^2 v'q) \\ &\qquad + a_{02}\,(\delta^2 y'^2 - \varepsilon^2 v'q'), \end{aligned}$$

$$21)\qquad M = a_{20}\,(\delta^2 y - \varepsilon^2 v)^2 + 2a_{11}\,(\delta^2 y - \varepsilon^2 v)(\delta^2 y' - \varepsilon^2 v') + a_{02}(\delta^2 y' - \varepsilon^2 v')^2.$$

Die Differentiation von 14) ergiebt ferner, da $u_1 = 0$:

$$22)\qquad \frac{d\Omega_3}{dc} = -a_{02}\, u'_1\, \frac{d^3 y_1}{dc^3}.$$

Es folgt aus den Gleichungen 16) bis 22)

$$23)\left\{\begin{aligned} \delta^4 V = -\varepsilon^4 a_{02}\, u'_1 \frac{d^3 y_1}{dc^3} - 3\,(\varepsilon^4 a_{21}\, u_1^2 v_1 + 2\varepsilon^4 a_{12}\, u_1 u'_1 v_1 + \varepsilon^4 a_{03} u'^2_1 v_1 \\ + \varepsilon^4 a_{11}\, v_1^2 + \varepsilon^4 a_{02} v_1 v'_1) + 3\int_{x_0}^{x_1} M\, dx. \end{aligned}\right.$$

§ 9. Die Untersuchung der vierten Variation ist nach § 7 nur dann nöthig, wenn entweder v_1 oder u'_1 verschwindet. Nehmen wir an, dass $v_1 = 0$, so können wir

$$24)\qquad \delta^2 y - \varepsilon^2 v = \varepsilon^2 h u$$

setzen, da $\delta^2 y$ und v für die Grenzwerthe verschwinden, und erhalten nach § 2

$$\int_{x_0}^{x_1} M\, dx = \varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} h'^2 u^2\, dx,$$

und 23) geht über in

25) $$\delta^4 V = -\varepsilon^4 a_{02} u'_1 \frac{d^3 y_1}{d c^3} + \varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} h'^2 u^2\, dx.$$

Wegen der Beliebigkeit von $\delta^2 y$ kann $h =$ einer Constanten gesetzt werden. Es kann also das Integral in der Gleichung 25) zum Verschwinden gebracht werden, während es für andere Werthe von h stets positiv ist. $\delta^4 V$ wird daher positiv sein, wenn $u'_1 \frac{d^3 y_1}{d c^3}$ negativ ist, und in diesem Falle wird ein Minimum stattfinden. Ist dagegen obiger Ausdruck positiv, so kann $\delta^4 V$ für geeignete Werthe von $\delta^2 y$ negativ werden, und es wird kein Minimum stattfinden. Verschwindet $u'_1 \frac{d^3 y_1}{d c^3}$, so kann die vierte Variation zum Verschwinden gebracht werden.

§ 10. Wenn die dritte Variation dadurch zum Verschwinden gebracht wird, dass u'_1, nicht aber v_1 verschwindet, so lässt sich die Substitution 24) nicht anwenden, da h für $x = x_1$ unendlich werden müsste. u verschwindet für $x = x_0$ und für $x = x_1$, zwischen diesen Werthen aber nicht. Da u_0 nach § 4 identisch gleich 0 ist, so bleibt es 0, wenn ich c sich ändern lasse; dagegen wird u_1 in diesem Falle von 0 verschieden, da $\frac{d u_1}{d c} = v_1$ unserer Voraussetzung zufolge nicht verschwindet. Es wird also möglich sein, der Constanten c eine solche Aenderung zu ertheilen, dass der entsprechende Ausdruck für u weder für $x = x_1$, noch für einen zwischen x_0 und x_1 liegenden Werth verschwindet. Bezeichne ich den so entstandenen Werth von c mit (c) und die entsprechenden Werthe von u, v und M mit (u), (v) und (M), so habe ich, wenn ich $\delta^2 y - \varepsilon^2 (v) = \varepsilon^2 (h)(u)$ setze, nach § 2

26) $$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} (M)\, dx &= \varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} (h)^2 (u)^2\, dx + \varepsilon^4 (h_1)^2 \left[a_{11} (u_1)^2 + a_{02} (u_1)(u_1)'\right] dx \\ &= \varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} (h)^2 (u)^2\, dx + \varepsilon^4 (v_1)^2 \left[a_{11} + a_{02} \cdot \frac{(u_1)'}{(u_1)}\right].\end{aligned}$$

Um den Werth von $\int_{x_0}^{x_1} M\, dx$ zu finden, suche ich die Grenze, der sich $\int_{x_0}^{x_1} (M)\, dx$ annähert, wenn (c) sich der Grenze c nähert. Die Grenze, der sich dann das auf der rechten Seite von 26) stehende Integral nähert, ist jedenfalls grösser als Null; beachte ich ferner, dass $\frac{(u_1)'}{(u_1)}$, als Bruch, dessen Zähler und Nenner verschwindet, sich der Grenze $\frac{du'_1}{dc} : \frac{du_1}{dc} = \frac{v'_1}{v_1}$ nähert, so habe ich

27) $$\int_{x_0}^{x_1} M\,dx > \varepsilon^4 [a_{11} v_1^2 + a_{02} v_1 v'_1].$$

Da u'_1 nach unserer Voraussetzung verschwindet, so folgt aus 23) und 27), dass $\delta^4 V > 0$, dass also ein Minimum stattfindet.

§ 11. Unsere Resultate lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Bleibt a_{02} zwischen den Integrationsgrenzen grösser als 0, lassen sich ferner c_1 und c_2 so als Functionen von c bestimmen, dass u_0 identisch gleich 0 und $u_1 = 0$ wird, so ist (§ 4) die zweite Variation positiv, kann aber auch zum Verschwinden gebracht werden, und um zu entscheiden, ob ein Minimum stattfindet, müssen die höheren Variationen untersucht werden.

Die dritte Variation verschwindet nur dann, wenn eine der Grössen v_1 und u'_1 verschwindet (§ 7). Verschwindet v_1, so findet (§ 9) ein Minimum nur dann statt, wenn u'_1 und $\frac{d^3 y_1}{dc^3}$ verschiedenes Zeichen haben. Ist eine dieser beiden Grössen gleich Null, so kann die sonst positive vierte Variation durch geeignete Werthe von $\delta^2 y$ auch zum Verschwinden gebracht werden. — Verschwindet u'_1, nicht aber v_1, so findet stets ein Minimum statt.

§ 12. Es mag noch bemerkt werden, dass der Fall $v_1 = \frac{d^3 y_1}{dc^3} = 0$, in welchem, wie wir gesehen haben, alle vier Variationen verschwinden, stets dann eintritt, wenn der Ausdruck $\frac{r_2}{r_1}$ keine der Integrationsconstanten mehr enthält. Ist nämlich

28) $$\frac{r_2}{r_1} = f(x),$$

so wird die Bedingung

$$\frac{dy_0}{dc} = \frac{\partial y_0}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dc} + \frac{\partial y_1}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dc} = 0$$

erfüllt sein, wenn ich $c_2 = c$ und $c_1 = -cf(x_0)$ setze. Dann wird, weil $f(x_0) = f(x_1)$:

29) $$\frac{dy_1}{dc} = -f(x_1)\frac{\partial y_1}{\partial c_1} + \frac{\partial y_1}{\partial c_2},$$

was vermöge 28) identisch 0 ist. Wir haben somit, wenn wir 29) nach c differentiiren, auch $v_1 = 0$ und $\frac{d^3 y_1}{dc^3} = 0$.

§ 13. Die Nothwendigkeit, bei Untersuchungen, wie ich sie soeben angestellt habe, die höheren Variationen von y, also $\delta^2 y$ etc. zu berücksichtigen, ist vielfach bestritten worden. Und in der That verschwinden, wie wir §§ 1 und 7 gesehen haben, die mit $\delta^2 y$ und $\delta^2 y'$ behafteten Glieder in den Ausdrücken für $\delta^2 V$ und für $\delta^3 V$. Bei Untersuchung der vierten Variation dagegen werden diese Glieder von Einfluss. Ich betrachte, um dies zu zeigen, den Fall, dass v_1 und $\frac{d^3 y_1}{dc^3}$ verschwinden. Würden wir in Gleichung 21) $\delta^2 y = \delta^2 y' = 0$ setzen, so würde gemäss § 2 $\int\limits_{x_0}^{x_1} M\,dx > 0$ sein, es müsste denn sein, dass (was ein ganz specieller Fall wäre) $\frac{v}{u}$ eine Constante ist. Abgesehen von diesem letztern Falle wäre somit zufolge 23) $\delta^4 V > 0$, während nach § 11 $\delta^4 V$ für geeignete Werthe von $\delta^2 y$ auch verschwinden könnte. Dass aber das Erstere falsch ist, lässt sich an dem Beispiel der kürzesten Linie auf der Kugeloberfläche zeigen.

§ 14. Sind ϑ und ω Polarcoordinaten, so hat die Curve dieses Problems, der grösste Kreis, die Gleichung

$$\vartheta = arctang\,(c_1 \cos\omega + c_2 \sin\omega).$$

Wir haben für diesen Fall, indem wir ω als unabhängige, ϑ als abhängige Variable betrachten, $\frac{r_2}{r_1} = tg\,\omega$; ist also der Anfangspunkt der Curve $\omega = 0$, so wird die Untersuchung der höheren Variationen nothwendig, wenn für den Endpunkt $\omega = \pi$ ist, d. h. wenn wir einen Halbkreis haben. Nach § 12 verschwinden $\frac{d^2 \vartheta_1}{dc^2}$ und $\frac{d^3 \vartheta_1}{dc^3}$, wir haben also hier den im vorigen Paragraphen angenommenen Fall. — Die Bedingung $u_0 = 0$ wird erfüllt, wenn wir $c_2 = c$ setzen und c_1 als von c unabhängig ansehen. Dann ist leicht ersichtlich, dass $\frac{d^2 \vartheta}{dc^2} : \frac{d\vartheta}{dc}$ keine Constante ist. Während also die drei ersten Variationen zum Verschwinden gebracht werden können, müsste nach § 13 die vierte Variation, wenn die Glieder mit $\delta^2 \vartheta$, $\delta^2 \vartheta'$ vernachlässigt werden dürften, grösser als 0 sein, d. h. jede Aenderung der Curve müsste eine Vergrösserung ihrer Länge zur Folge haben. Dies ist thatsächlich nicht der Fall; denn man kann den Halbkreis um seinen Durchmesser drehen, wobei seine Länge dieselbe bleibt, ganz in Uebereinstimmung mit § 11, nach welchem in unserem Falle $\delta^4 V$ auch zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn man der zweiten Variation der abhängigen Variabeln die geeigneten, von Null verschiedenen Werthe ertheilt.

Berlin, 26. Dec. 1876.

Kleinere Mittheilungen.

XII. Ueber das Gleichgewicht einer schweren Flüssigkeit, welche gegen einen festen Punkt hin angezogen wird.

(Hierzu Taf. II, Fig. 7—13.)

Man denke sich eine tropfbare, schwere Flüssigkeit, deren Theilchen gegen einen Punkt P, proportional irgend einer ungeraden, reciproken Potenz n der Entfernung r von demselben, angezogen werden, wobei $n \geqq 3$ angenommen, also $n=1$ ausgeschlossen wird; diese Anziehung, auf die Masseneinheit bezogen, sei $c:r^n$. Die z-Axe sei durch den Punkt P gelegt, der Schwere entgegengesetzt; die x- und y-Axe seien horizontal und im ursprünglichen Niveau der Flüssigkeit gelegen. Die Entfernung des Punktes P von der ursprünglichen Flüssigkeitsoberfläche, diese als unbegrenzt vorausgesetzt, sei z_0. Es ist dann $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$. Die Componenten der auf ein Flüssigkeitstheilchen (x, y, z) wirkenden Anziehungskraft sind dann ferner

$$-\frac{c}{r^n}\cdot\frac{x}{r},\quad -\frac{c}{r^n}\cdot\frac{y}{r},\quad -\frac{c}{r^n}\cdot\frac{z-z_0}{r};$$

sie sind also die partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes

$$\frac{c}{n-1}\cdot\frac{1}{r^{n-1}},$$

wofür wir kurz $k:r^{n-1}$ setzen wollen, und wobei k positiv ist für Anziehung, negativ für Abstossung. Die Kräftefunction für unsere Aufgabe ist also, wenn g die Schwere bedeutet,

$$-gz+\frac{k}{r^{n-1}}$$

und die Gleichung der Flüssigkeitsoberfläche

$$-gz+\frac{k}{r^{n-1}}=C \text{ oder auch } (C+gz)r^{n-1}-k=0,$$

oder

$$(C+gz)\left[x^2+y^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}-k=0.$$

Offenbar ist dieselbe eine Rotationsfläche (um die z-Axe), welche sich dem ursprünglichen Niveau asymptotisch anschliesst. Schreibt man ihre Gleichung

$$C+gz=\frac{k}{r^{n-1}},$$

so ist ersichtlich, da bei der angenommenen Wahl des Coordinatensystems für die unendlich fernen, im ursprünglichen Niveau liegenden Punkte derselben $z=0$ und $r=\infty$ ist, dass $C=0$ sein muss. Also ist ihre Gleichung einfacher

$$1)\qquad z[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{\frac{n-1}{2}}-\frac{k}{g}=0.$$

Ihre Meridiancurve in der zx-Ebene hat zur Gleichung

$$z[x^2+(z-z_0)^2]^{\frac{n-1}{2}}-\frac{k}{g}=0;$$

sie hat die x-Axe zur einzigen reellen geradlinigen Asymptote.

Untersuchen wir die Gestalt dieser Curve etwas näher. Die Ordinaten ihrer Schnittpunkte mit der z-Axe ergeben sich aus der Gleichung

$$2)\qquad z(z-z_0)^{n-1}-\frac{k}{g}=0.$$

Setzen wir k im Folgenden als positiv voraus; für ein negatives k lässt sich die Untersuchung in ganz ähnlicher Weise führen. Setzen wir dann

$$\varphi(z)=z(z-z_0)^{n-1}-\frac{k}{g}$$

und construiren φ als Ordinate einer Curve, deren Abscisse z ist. Da (für ungerade n)

$$\varphi(+\infty)=+\infty,\quad \varphi(z_0)=-\frac{k}{g},\quad \varphi(0)=-\frac{k}{g},\quad \varphi(-\infty)=-\infty$$

ist, so liegt stets eine Wurzel z' der Gleichung 2) zwischen $+\infty$ und z_0 oder auch zwischen $+\infty$ und 0. Wenn z_0 negativ ist, so muss offenbar für $z=0$ bis $z=+\infty$ die Function $\varphi(z)$ fortwährend wachsen, während dieselbe für negative z stets negativ bleibt (wobei zu beachten ist, dass $n-1$ gerade ist); also kann in diesem Falle die Gleichung 2) nur die einzige reelle, positive Wurzel z' haben. Sei zweitens z_0 positiv. Wir finden

$$\varphi'(z)=(z-z_0)^{n-2}(nz-z_0),$$

woraus folgt, dass die Curve φ nur in zwei Punkten eine horizontale Tangente hat, nämlich für $z=z_0$ und $z=z_0:n$. Da auch jetzt $\varphi(z)$ für negative z immer negativ bleibt, so kann dieselbe nur in einer der drei durch Fig. 7, 8 und 9 dargestellten Weisen verlaufen, da zudem klar ist, dass sie für $z=z_0:n$ einen Maximalpunkt und für $z=z_0$ einen Minimalpunkt haben muss und dass $\varphi(z)$ in letzterem negativ ist. Die Gleichung 2) hat daher ausser der positiven Wurzel z' ($>z_0$) noch zwei andere, verschiedene reelle Wurzeln zwischen 0 und z_0, wenn $\varphi\left(\frac{z_0}{n}\right)>0$

ist, oder zwei zusammenfallende, wenn $\varphi\left(\frac{z_0}{n}\right)=0$ ist; wenn endlich $\varphi\left(\frac{z_0}{n}\right)<0$ ist, so hat die Gleichung 2) zwischen 0 und z_0 keine reellen Wurzeln. Nun ist aber

$$\varphi\left(\frac{z_0}{n}\right)=\frac{z_0}{n}\left(\frac{z_0}{n}-z_0\right)^{n-1}-\frac{k}{g},$$

also hat offenbar die Gleichung 2) zwei reelle positive Wurzeln z'' und z''' (diese nach ihrer Grösse absteigend geordnet gedacht) zwischen 0 und z_0, wenn

$$z_0>\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{\frac{k(n-1)}{g}}$$

ist; ist z_0 dem rechts stehenden Ausdrucke gleich, so sind die beiden Wurzeln gleich, und zwar $=z_0:n$, und ist endlich

$$z_0<\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{\frac{k(n-1)}{g}},$$

so sind dieselben imaginär. Da ferner $\varphi\left(\frac{z_0}{n}\right)$ für wachsende z_0 sehr schnell wächst, während $\varphi(z_0)$ constant $\left(=-\frac{k}{g}\right)$ bleibt, so erhellt ferner, dass mit wachsendem z_0 die beiden Wurzeln z' und z'' einander (und z_0) immer näher rücken, während z''' mehr und mehr sich der Null nähert. Die Schnittpunkte der Meridiancurve der Flüssigkeitsoberfläche mit der z-Axe sind hiernach ihrer Anzahl und Lage nach bekannt; für negative z_0 ist einer vorhanden, sein z' ist stets positiv; für positive z_0 ist einer vorhanden, wenn

$$z_0<\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{\frac{k(n-1)}{g}}$$

ist; sein z' ist grösser als z_0; ist für positive z_0 weiter

$$z_0=\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{\frac{k(n-1)}{g}},$$

so sind zwei zusammenfallende Schnittpunkte vorhanden, für die $z=z_0:n$ ist, und ein dritter, für welchen $z'>z_0$ ist; ist endlich z_0 positiv und $>\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{\frac{k(n-1)}{g}}$, so sind drei Schnittpunkte vorhanden, zwischen 0 und $z_0:n$, zwischen $z_0:n$ und z_0 und endlich zwischen z_0 und ∞. Nach dem Obigen erhellt ferner zugleich noch, dass, wenn drei reelle Wurzeln vorhanden sind, $\varphi(z)$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und z''' negativ, zwischen z''' und z'' positiv, zwischen z'' und z' wieder negativ, endlich zwischen z' und $+\infty$ wieder positiv ist. Wenn nur die eine reelle Wurzel z' vorhanden ist, so ist $\varphi(z)$ von $-\infty$ bis z' negativ, von z' bis $+\infty$

positiv. Stellen wir nun die Gleichung der betrachteten Meridiancurve so dar

$$x^2 = \sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{k}{g z}} - (z - z_0)^2$$

und vergleichen damit die andere Gleichung

$$-\frac{\varphi}{z} = \frac{k}{g z} - z (z - z_0)^{n-1}.$$

Die erstere zeigt, dass für ein positives k die Coordinate z nur positive Werthe annehmen darf, wenn x reell werden soll, so dass wir negative z nicht ferner zu berücksichtigen brauchen. Nach dem vorher über das Zeichen von φ Gesagten muss nun, falls die Meridiancurve drei Schnittpunkte mit der z-Axe gemein hat,

$$\frac{k}{g z} - (z - z_0)^{n-1} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{k}{g z} > (z - z_0)^{n-1}$$

sein innerhalb des Intervalles von 0 bis z''' und zwischen z'' und z'; offenbar muss also innerhalb derselben beiden Intervalle auch die Ungleichung bestehen

$$\sqrt[\frac{n-1}{2}]{\frac{k}{g z}} > (z - z_0)^2$$

(da die beiden Seiten beider Ungleichungen positiv sind). Daraus folgt, dass x innerhalb beider Intervalle zwei entgegengesetzt gleiche reelle Werthe hat, während es ausserhalb derselben überall imaginär bleibt. Wenn die Meridiancurve nur in einem Punkte die z-Axe schneidet, so hat x ebenso zwei entgegengesetzt gleiche reelle Werthe in dem Intervalle $z = 0$ bis $z = z'$, während es ausserhalb desselben imaginär bleibt. Hiernach lässt sich die Gestalt der Meridiancurve unserer Flüssigkeitsoberfläche für die verschiedenen Lagen des Punktes P übersehen. Vergl. Fig. 10—13.

Das zu einzelnen dieser Curven gehörige Oval bezieht sich auf das Gleichgewicht eines isolirten, den Punkt P umgebenden Flüssigkeitstropfens. Für abstossende Kräfte, also ein negatives k, erhält man eine ähnliche Gestaltenreihe.

Die Bedingungen dieses Problems sind annähernd erreicht, wenn auf eine schwere magnetische oder diamagnetische Flüssigkeit ein Magnetpol wirkt; letzterer inducirt dann in ersterer einen solchen Magnetismus, dass die Anziehung zwischen ihm und den Flüssigkeitstheilchen in erster Annäherung der reciproken fünften Potenz ihrer Entfernungen proportional gesetzt werden kann. Die Flüssigkeit erhebt oder senkt sich dann den Versuchen Plücker's zufolge in der That in Flächen, deren Meridiancurven mit den betrachteten wenigstens im Allgemeinen übereinkommen.

Dr. Arnold Giesen.

XIII. Ueber das Mariotte'sche Gesetz.

Ich stelle mir in diesem Artikel die Aufgabe, das Mariotte'sche Gesetz theoretisch zu entwickeln, oder besser, ein solches Gesetz der Atomkräfte aufzustellen, dass das diesen Kräften unterworfene Atomsystem gegen seine Umgebung mit einem Drucke wirkt, welcher dem Mariotte'schen Gesetze genügt.

Dieses Problem war, wenigstens meines Wissens, noch nicht in genügender Weise gelöst, trotz der bedeutenden Anstrengungen der Geometer. Der Grund hierfür ist die Ungenauigkeit in der Definition des Druckes überhaupt gewesen. Ich halte diese Genauigkeit für wiederhergestellt durch die Reihe der Ideen, die ich in meinen früheren Arbeiten entwickelt habe, und demnach bietet, infolge des Zusammenhanges, der sich hieraus zwischen den Drucken einerseits und den Atomkräften andererseits ergiebt, das Problem, welches ich soeben behandeln will, keine Schwierigkeiten mehr.

§ 1.

Wir stellen zunächst die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts eines continuirlichen Systems wieder auf, wobei wir von den die Masse angreifenden Kräften absehen, d. h. wir setzen im Innern des Körpers

$$1)\quad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=0,\quad \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}=0,\quad \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}=0$$

und auf der Oberfläche

$$2)\quad \begin{cases} m_1N_1+m_2T_3+m_3T_2+X=0,\\ m_1T_3+m_2N_2+m_3T_1+Y=0,\\ m_1T_2+m_2T_1+m_3N_3+Z=0. \end{cases}$$

Wir nehmen ferner die anderen Benennungen und Bezeichnungen wieder auf, die ich in meine vorhergehenden Arbeiten eingeführt habe*:

$$N_1=\Sigma\lambda r a^2,\quad N_2=\Sigma\lambda r b^2,\quad N_3=\Sigma\lambda r c^2,$$
$$T_1=\Sigma\lambda r bc,\quad T_2=\Sigma\lambda r ca,\quad T_3=\Sigma\lambda r ab;$$
$$a^2+b^2+c^2=1;$$
$$m=\varepsilon\Sigma m,\ldots,\quad r=\left(\frac{\Sigma m}{\varrho}\right)^{1/3}R,\ldots,\quad \Sigma m=\varrho\,dx\,dy\,dz;$$
$$\lambda\,dx\,dy\,dz=(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3}f,\quad f=\frac{dF}{dR},\quad \lambda\,dx\,dy\,dz=(\Sigma m)\frac{dF}{dr},$$

wo F eine Function von vier Constanten ε, von sechs Variabeln R und einer Variabeln ϱ darstellt.

Die erste der Gleichungen 1) kann, mit x multiplicirt, auf die Form gebracht werden

---

* Dieselbe Zeitschrift Bd. 21, S. 116 und Bd. 23, S. 267: „Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik" und „Ueber das Elasticitätspotential etc."

$$\frac{d(N_1 x)}{dx} + \frac{d(T_3 x)}{dy} + \frac{d(T_2 x)}{dz} = N_1.$$

Multiplicirt man sie hierauf mit $dx\,dy\,dz$, um sie im ganzen Umfange des Körpers zu integriren, und führt diese Integration aus, so findet man ohne Schwierigkeiten

$$\int (m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2)\, x\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_1\, dx\, dy\, dz,$$

wo das einfache Integral über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen ist. Aber für diese Oberfläche gilt jetzt die erste der Gleichungen 2), folglich hat man auch

$$-\int X x\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_1\, dx\, dy\, dz.$$

Die analogen Gleichungen

$$-\int Y y\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int N_2\, dx\, dy\, dz \quad \text{und} \quad -\int Z z\, d\omega = \int N_3\, dx\, dy\, dz$$

werden auf dieselbe Weise erhalten, indem man von den beiden anderen Gleichungen ausgeht und sie resp. mit y und z multiplicirt. Diese drei Gleichungen geben, Glied für Glied addirt, die eine Gleichung

$$4)\qquad -\int (Xx + Yy + Zz)\, d\omega = \int\!\!\int\!\!\int (N_1 + N_2 + N_3)\, dx\, dy\, dz,$$

welche uns als Ausgangspunkt bei der Aufstellung des Mariotte'schen Gesetzes dienen wird.

§ 2.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, dass, wenn es sich um das Gleichgewicht eines Gases handelt, die äusseren Drucke sich auf einen einzigen Druck p reduciren, der auf der ganzen Oberfläche des Körpers normal und gleichmässig ist. Man hat also in diesem Falle

$$-X = m_1 p, \quad -Y = m_2 p, \quad -Z = m_3 p,$$

und das erste Glied der Gleichung 4) wird einfach

$$p\int (m_1 x + m_2 y + m_3 z)\, d\omega = 3pV,$$

wo V das Volumen des Körpers bezeichnet. Das zweite Glied derselben Gleichung erhält unter Anwendung der Formeln 3), wie man sich leicht überzeugen kann, die Form des Integrals

$$\int\!\!\int\!\!\int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR},$$

woraus folgt

$$3pV = \int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR}$$

oder besser

$$5)\qquad p = \tfrac{1}{3}\, \frac{\int\!\!\int\!\!\int (\Sigma m) \sum R \frac{dF}{dR}}{V}.$$

Besitzt das betrachtete System die Eigenschaft eines dem Mariotte-schen Gesetze folgenden Gases, so muss die Summe $\sum R\frac{dF}{dR}$ constant sein. Wir setzen also

$$\sum R\frac{dF}{dR} = k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon', \tag{6}$$

wo k eine positive Constante bezeichnet, und suchen hierauf eine Function F, welche die partielle Differentialgleichung 6) befriedigt und sich zu gleicher Zeit auf ähnliche Weise ausdrückt, sowohl in Bezug auf alle sechs Variabeln R, als auch in Bezug auf die vier Constanten ε.

Man sieht sehr leicht, dass nur die Function

$$F = k\,log.nep.(R^{\varepsilon\varepsilon'}R'^{\varepsilon\varepsilon''}\ldots) \tag{7}$$

dieser doppelten Bedingung genügt.

Die Atomkräfte $(\Sigma m)\left(\frac{\varrho}{\Sigma m}\right)^{1/3} f$, 3), werden also in einem permanenten Gase durch die Formel ausgedrückt

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\frac{k}{r};$$

der gegen die Begrenzung ausgeübte Druck p, 5), hat den Werth

$$-\frac{1}{3}\frac{\iiint(\Sigma m)k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon'}{V},$$

und die Componenten der Drucke 3) im Innern des Gases sind

$$N_1 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' a^2,\quad N_2 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' b^2,\quad N_3 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' c^2,$$
$$T_1 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' bc,\quad T_2 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' ca,\quad T_3 = \varrho k\,\Sigma\varepsilon\varepsilon' ab.$$

Wenn man nur voraussetzt, dass die Function F ϱ nicht explicite enthält, so wird die Summe $\sum R\frac{dF}{dR}$ auch von der Dichte ϱ unabhängig sein und der Druck p, 5), dem Volumen des Körpers umgekehrt proportional bleiben; dies ist dann also das verallgemeinerte Mariotte'sche Gesetz. In diesem Falle bleibt der Zähler in der Formel 5) constant, wenn der Körper nach allen Richtungen gleichmässig zusammengedrückt oder ausgedehnt wird. Unter anderen Umständen wird dieser Zähler variabel und der Druck p folgt nicht mehr genau dem Mariotte'schen Gesetz.

Warschau. W. Gosiewski.

XIV. Näherungsmethode zur Construction eines regelmässigen Polygons von n Seiten und zur Theilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Theile.

(Hierzu Taf. II, Fig. 14.)

Diese Methode gewährt, obwohl sie in einzelnen Fällen durch bereits bekannte Constructionen an Genauigkeit erheblich übertroffen wird, eine für die Praxis vollkommen ausreichende Genauigkeit, und empfiehlt sich durch ihre Allgemeinheit und Einfachheit. Ich entnehme dieselbe einer kleinen Broschüre, welche ein Herr F. v. A. vor einigen Jahren versandte, in der Meinung, die oben bezeichneten Aufgaben, sowie einige andere, damit zusammenhängende (natürlich auch Rectification und Quadratur des Kreises!) genau gelöst zu haben. Der Autor bediente sich der Spirale $r=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$, um seine Methode abzuleiten; dieselbe beruht indess einfach auf der Bemerkung, dass, wenn die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks gleich 1 gesetzt wird, woraus für die halbe Seite

$$a=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}=0{,}57735$$

folgt, dann

$$2(a+1)=3{,}1547,$$

also annähernd gleich π ist. Die Anwendung lässt sich in dem Satze aussprechen:

Ist S die Spitze eines über dem Durchmesser AB eines Kreises beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, O der Mittelpunkt des Kreises, und T der Punkt, in welchem die Verlängerung von SO den Kreis schneidet, so wird auf der durch T gezogenen Tangente durch die Verlängerungen der Seiten SA und SB eine Strecke A_1B_1 abgeschnitten, welche annähernd gleich der halben Peripherie des Kreises (also dem Bogen AB) ist. — Ferner schneidet jede durch S gezogene Secante den Halbkreis ATB und die Tangente in zwei Punkten X und X_1, die so beschaffen sind, dass der Bogen XT annähernd gleich der Strecke X_1T ist.

Der Beweis für den zweiten Theil des Satzes müsste geführt werden (Fig. 14), indem man ($\angle XST=\alpha$, $\angle XOT=\varphi$ gesetzt) zwischen den Gleichungen

$$\frac{XT}{2r\pi}=\frac{\varphi}{360},\quad X_1T=ST\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha$$

die Winkel α und φ eliminirte, auf Grund der aus der Figur nach einiger Rechnung sich ergebenden Beziehung

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{3}}.$$

Da dies im Allgemeinen nicht möglich ist, so kann man wenigstens für specielle Werthe von φ den annähernden Werth von π ermitteln auf Grund der Gleichung

$$\pi = \frac{180^0}{\varphi} \cdot \frac{(1+\sqrt{3}) \sin\varphi}{\sqrt{3}+\cos\varphi}.$$

Um hiernach in den gegebenen Kreis ein regelmässiges $2n$-Eck zu construiren, theile man die Strecke $A_1 B_1$ in n gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte mit S und ziehe durch die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien und des Halbkreises AFB die Durchmesser.

Um einen gegebenen Winkel in n gleiche Theile zu theilen, halbire man ihn wiederholt, bis die Theile $< 30^0$ sind. Ist α einer dieser Theile, so trage man ihn als Winkel $X_1 S T$ in die Figur ein und theile $X_1 T$ in n gleiche Theile. Die der Zahl der Halbirungen entsprechenden Vielfachen dieser Theile sind die gesuchten Theile des Winkels.

Waren in Mecklenburg. V. Schlegel.

XVII.

Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in ihren verschiedenen Breiten und Jahreszeiten.

Von

CHR. WIENER

in Carlsruhe.

Aus dem VII. Heft der Verhandlungen des naturwissenschaftl. Vereins zu Carlsruhe 1876.

(Hierzu Taf. III—V.)

Die Bestimmung der Stärke der Sonnenbestrahlung der Erde ist, wenn man von einem etwaigen Wechsel in dem Ausstrahlungsvermögen der Sonne absieht, eine rein mathematische Aufgabe. Ihre Lösung bildet die Grundlage zur Bestimmung der Temperaturverhältnisse auf der Erde, wobei noch die nicht sicher bekannte und wechselnde Schwächung der Strahlen durch die Atmosphäre, das Absorptions- und Reflexionsvermögen des Bodens gegen die Sonnenstrahlen, die wechselnde Neigung und Höhe des Bodens u. A. in Rechnung gezogen werden müsste.

Ueber diesen Gegenstand haben, soviel mir bekannt, gearbeitet: Halley, sodann Lambert* in ausgedehnter Weise, mit Berücksichtigung eines mittleren Einflusses der Atmosphäre und des Bodens, Poisson** in einer mathematisch sehr vollendeten Weise, ohne jedoch Schlüsse in Bezug auf unsere Frage zu ziehen, endlich Meech***, welcher mehrere Tabellen giebt, dabei aber in Bezug auf die jährliche Bestrahlung nur die für das ganze Jahr, nicht aber für Abschnitte desselben berechnet hat.

Im Folgenden beabsichtige ich den rein mathematischen Theil der Aufgabe zu behandeln, nämlich die Stärke der Sonnenbestrahlung der Erde unter verschiedenen Breitegraden zu bestimmen, und zwar zu den verschiedenen Zeiten des Tages, an den verschiedenen Tagen des Jahres

---

* Pyrometrie, Berlin 1779.

** *Theorie de la chaleur, Paris 1853;* S. 473 flgg.

*** *On the relative intensity of the heat and light of the sun etc. Smithsonian contributions. Vol. 9. Washington 1857.*

und in verschiedenen Abschnitten des Jahres, in ausgedehnterer Weise als es, soviel mir bekannt, bis jetzt geschah. Insbesondere werde ich mehr Abschnitte des Jahres wählen, als die von den Tag- und Nachtgleichen und den Sonnenwenden begrenzten, welche Lambert ins Auge fasste.

Bestimmung der Menge der Sonnenstrahlen, welche in einem Zeitelement gegen ein Element der Erdoberfläche gestrahlt werden.

Sei W die Menge der Sonnenstrahlen (oder Wärmestrahlen, wenn es sich um Wärme handelt), welche innerhalb eines ganzen Tages gegen ein Element der Erdoberfläche gestrahlt würden, wenn dies Element stets senkrecht auf den auffallenden Strahlen stände, so ist die in dem Zeittheilchen dt auftreffende Strahlenmenge dw, wenn der Einfallswinkel der Strahlen (ihr Winkel mit der Normalen zur Fläche) $= \varepsilon$ ist,

$$1)\qquad dw = W \cos\varepsilon \frac{dt}{2\pi},$$

wobei dt und die Zeit des Tages von 24 Stunden durch den zugehörigen Bogen des Stundenkreises, also letztere durch 2π, ausgedrückt sind. Indem wir von den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche absehen, also das Flächenelement uns horizontal denken, stimmt ε mit der Zenithdistanz der Sonne überein. Um diese zu bestimmen, überträgt man die betreffenden Linien des Erdellipsoids durch Parallelverschiebung nach dem Mittelpunkte der Erdkugel. Derjenige Meridian, dessen Ebene den Sonnenmittelpunkt S' enthält, sei der Kreis APQ (Taf. III, Fig. 1) mit dem Mittelpunkt M, der Pol sei P, der Aequator AQ, S der Endpunkt des nach der Sonne S' gerichteten Halbmessers, Z der Punkt, welcher dem fraglichen Flächenelement entspricht, so dass der Halbmesser MZ gleichgerichtet ist mit der aufwärtsgehenden Normalen zum Flächenelemente. Ferner ist $DZCE$ der durch Z gehende Parallelkreis, $\sphericalangle AMD = \beta$ seine Breite und $\sphericalangle AMS = \delta$ die Declination der Sonne.

In dem sphärischen Dreieck SPZ ist nun die Seite $ZS = \varepsilon$ das Mass des Einfallswinkels ZMS, $PS = 90^0 - \delta$, $PZ = 90^0 - \beta$. Der Winkel $SPZ = t$ ist der Stundenwinkel in dem fraglichen Zeitpunkte. Daher gilt

$$\cos\varepsilon = \sin\delta \sin\beta + \cos\delta \cos\beta \cos t.$$

Dieser Werth, in die Gleichung 1) eingeführt, liefert

$$2)\qquad dw = \frac{W\,dt}{2\pi}(\sin\delta \sin\beta + \cos\delta \cos\beta \cos t).$$

Veränderung der Intensität der Bestrahlung während eines Tages.

Aus der Formel 2) ergiebt sich $dw : dt$ als die Intensität der Sonnenbestrahlung, d. i. als die in der (durch Bogen ausgedrückten) Zeiteinheit auftreffende Stahlenmenge; ebenso ist bei senkrecht auffallenden

Strahlen $W:2\pi$ die Intensität der Bestrahlung; daher die verhältnissmässige Intensität der Bestrahlung im ersteren Falle

$$y=\frac{dw}{dt}:\frac{W}{2\pi}=\cos\varepsilon=\sin\delta\sin\beta+\cos\delta\cos\beta\cos t.$$

Nimmt man für einen Tag δ als unveränderlich gleich der Declination der Sonne am Mittag an, so ist für denselben Punkt der Erde y nur mit t veränderlich. Um die Zeiten t_1 des Sonnenauf- und Unterganges zu bestimmen, setzt man in der letzten Gleichung $y=0$ und erhält dadurch

$$3)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos t_1 &= -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta,\\ t_1 &= \pm\arccos(-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\beta),\\ \sin t_1 &= \pm\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2\beta}. \end{aligned}\right.$$

Darin bedeutet t_1 den halben Tagesbogen DC. Es gelten diese Formeln nur dann, wenn die Dauer des Tages kleiner als 24 Stunden oder $t_1<\pi$ ist, also nicht für diejenigen Punkte innerhalb der Polarkreise, für welche die Sonne innerhalb 24 Stunden nicht untergeht, weil dann nicht $y=0$ wird; für letztere Punkte ist unveränderlich $t_1=\pi$. Die Gleichung zwischen y und t stellt eine Cosinus- oder Sinuslinie dar (Fig. 2). Die Axe derselben (welche die Wendepunkte enthält) ist parallel der t-Axe und hat die Ordinate $\sin\delta\sin\beta$. Sie wird von der Curve geschnitten für $t=\pm\frac{\pi}{2}$ oder für 6 Uhr Vormittags und Nachmittags. y ist ein Maximum für $t=0$ oder für Mittag, ein Minimum für $t=\pi$ oder für Mitternacht; das letztere kann aber nur innerhalb der Polarkreise wirklich eintreten. Es schien mir nicht nothwendig, Tabellen über y mitzutheilen; ich habe aber in der Fig. 2, wenn $\sigma=23^\circ 27' 21''$ die mittlere Schiefe der Ecliptik bedeutet, die Curven gezeichnet für

$$\delta=0 \text{ und } \beta=0,\ \sigma,\ 50^\circ,\ 90^\circ-\sigma,\ 90^\circ;$$
$$\delta=\sigma \text{ und } \beta=0,\ \pm\sigma,\ \pm 50^\circ,\ 90^\circ-\sigma,\ 90^\circ;$$

also für die Tag- und Nachtgleiche ($\delta=0$) und die Sonnenwende ($\delta=\sigma$), sowie für den Aequator ($\beta=0$), die Wendekreise ($\pm\sigma$), einen mittleren Parallelkreis ($\pm 50^\circ$), den Polarkreis ($90^\circ-\sigma$) und den Pol (90°). Man bemerkt, wie auf der Axe der t die Tagesbogen von 12 und 24 Stunden, sowie von Werthen zwischen 0 und 24 abgeschnitten werden. Die Curven $\delta=0$, $\beta=\sigma$ und diejenigen $\delta=\sigma$, $\beta=0$ stimmen vollkommen überein, sowie überhaupt die Function y in Bezug auf δ und β symmetrisch ist.

Stärke der Bestrahlung an einem Tage zu verschiedenen Zeiten des Jahres.

Unter „Stärke der Bestrahlung" innerhalb einer gewissen Zeit sei die in dieser Zeit auf ein Flächenelement auffallende Menge von Strahlen verstanden. Dieselbe steht in umgekehrtem Verhältnisse zu dem Quadrate der Entfernung von der Sonne, so dass, wenn W die Bestrahlungsstärke innerhalb eines Tages bei senkrechter Bestrahlung für den mittleren Abstand der Sonne von der Erde (gleich der halben grossen Axe a der Erdbahn) bedeutet, an einem Tage bei der mittleren Entfernung r diese Bestrahlungsstärke $= W\frac{a^2}{r^2}$ ist. Um in diesem Falle die Bestrahlungsstärke w eines Punktes der Erdoberfläche innerhalb eines Tages zu bestimmen, setzt man in der Gleichung 2) $W\frac{a^2}{r^2}$ an die Stelle von W und integrirt dann zwischen den Grenzen $t = -t_1$ und $t = +t_1$; dadurch erhält man

$$4)\qquad w = \frac{W}{\pi}\frac{a^2}{r^2}(\sin\delta\sin\beta\, t_1 + \cos\delta\cos\beta\sin t_1),$$

worin t_1 ein Absolutwerth ist; oder mit Berücksichtigung der Gleichung 3)

$$4\,a)\qquad w = \frac{W}{\pi}\frac{a^2}{r^2}\cos\delta\cos\beta(-\cos t_1 \,.\, t_1 + \sin t_1).$$

Gilt W für einen mittleren Sonnentag, w aber jedenfalls für eine ganze Umdrehung der Erde in Bezug auf die Sonne, oder für einen wahren Sonnentag, so muss der Ausdruck 4) noch mit dem Verhältnisse der Dauer des wahren zu der des mittleren Sonnentages vervielfacht werden. Da aber der Unterschied beider höchstens 30 Sec. (am 21. Dec.) oder $\frac{1}{2880}$ des ganzen Tages und verhältnissmässig ebenso gross der Fehler von w ist, und da ferner später bei der Bestimmung der Bestrahlung in Abschnitten des Jahres diese Ungleichheit in anderer Weise ausgeglichen wird, so wurde vorerst hierauf keine Rücksicht genommen.

Ich habe nun Tabellen für $\frac{w}{W}$ oder für die verhältnissmässige Stärke der Bestrahlung an einem Tage für die Breitengrade von 10 zu 10^0 und für 5 verschiedene Declinationen zu 16 nahezu gleichweit von einander abstehenden Zeitpunkten des Jahres berechnet, nämlich für die Zeiten, in welchen die Länge der Sonne ein Vielfaches von $\frac{1}{4}$ R, also 0, $22\frac{1}{2}$, 45, $67\frac{1}{2}$, 90, $112\frac{1}{2}$, ... 360^0 ist. Halley und Lambert haben ebenfalls Tabellen berechnet, aber weniger ausgedehnte und ohne Berücksichtigung des wechselnden r; Meech mit Berücksichtigung von r mit anderer Einheit. Bei der Berechnung entnehme ich für die gewählten Längen und die zugehörigen Declinationen das Datum und das Verhältniss $r:a$ aus dem *Nautical Almanac*, vom Frühlingsanfang 1874 bis dahin 1875. In der Tabelle sind die Längen und die 5 wiederkehrenden Declinationen der Sonne angegeben; unter „Datum" steht die bürgerliche mittlere Sonnenzeit, so dass z. B. März 20,776 den 20. März 1874 bedeutet, und zwar 0,776 Tage nach Beginn des Tages oder 6 Uhr 37,4 Min. Nachmittags; unter „verflossene Zeit" ist die jedesmal seit Frühlingsanfang 1874 verflossene Zeit in mittleren Sonntagen angegeben (die Abweichung der letzten Zahl 365,238 von der Länge des tropischen

Jahres = 365,242 Tagen rührt von den im betrachteten Jahre stattfindenden Störungen her); sodann ist $lg(r:a)$ zugefügt. Ausser den Breiten von 10 zu 10 Grad sind noch diejenigen beigesetzt, für welche in dem betreffenden Zeitpunkte gerade der Tag oder die Nacht 24 Stunden lang wird. (S. umstehende Tabelle.)

Die Formel 4) ist in zweierlei Weise durch Curven dargestellt, einmal indem δ, das anderemal indem β als unveränderlich angesehen wurde. Die ersteren Curven, welche die (w, β) heissen mögen, sind in Fig. 3 gezeichnet, indem β als Abscissen, $w:W$ als Ordinaten aufgetragen wurden; sie zeigen die Abhängigkeit der täglichen Bestrahlungsstärke von der geographischen Breite für die fünf verschiedenen Declinationen und zwar gerade für die fünf erst angeführten Tage der Tabelle. Die zweiten Curven (w, Zeit) sind in Taf. IV, Fig. 4 dargestellt, indem die verflossene Zeit der Tabelle als Abscisse und $w:W$ als Ordinate aufgetragen wurde, und zwar für jeden der 19 betrachteten Breitengrade; sie zeigen die Abhängigkeit der täglichen Bestrahlungsstärke von der Zeit im Jahre.

Es ergiebt sich nun aus der Formel 4), dass die Curven (w, β) der Fig. 3 in zwei verschiedene Stücke a und b zerfallen. $a)$ Für diejenigen Werthe von β und δ, für welche $t_1 = \pi$ unveränderlich ist, also für diejenige Zone der Erde, in welcher an einem Tage die Sonne nicht untergeht, wird

$$5)\qquad w = W\frac{a^2}{r^2}\sin\delta\sin\beta;$$

$b)$ ausserdem ist t_1 mit δ und β veränderlich und es gilt 4) in seiner allgemeinen Gestalt. Für $a)$ ist die Curve eine Sinuslinie, für $b)$ von einer weniger einfachen Gestalt.

Um die Maxima und Minima zu bestimmen, sucht man für a aus 5)

$$6)\qquad \frac{dw}{d\beta} = W\frac{a^2}{r^2}\sin\delta\cos\beta,$$

was zu 0 wird für $\beta = 90^0$.

Für b entwickelt man aus 4)

$$\frac{dw}{d\beta} = \frac{W}{\pi}\,\frac{a^2}{r^2}\left(\sin\delta\cos\beta\, t_1 + \sin\delta\sin\beta\frac{dt_1}{d\beta} - \cos\delta\sin\beta\sin t_1 \right.$$
$$\left. + \cos\delta\cos\beta\cos t_1\frac{dt_1}{d\beta}\right),$$

oder vermöge der Gleichung 3)

$$7)\qquad \frac{dw}{d\beta} = \frac{W}{\pi}\,\frac{a^2}{r^2}\,(\sin\delta\cos\beta\, t_1 - \cos\delta\sin\beta\sin t_1),$$

was zu 0 wird für

$$8)\qquad tg\,\delta\,.\,t_1 = tg\,\beta\sin t_1,$$

oder vermöge 3) für

$$8\text{a})\qquad tg\,\delta\arccos(-tg\,\delta\, tg\,\beta) = tg\,\beta\sqrt{1 - tg^2\delta\, tg^2\beta}.$$

Tabelle der verhältnissmässigen Stärke $w:W$ der Sonnenbestrah-

Datum . . .	1874. März 20,776	Apr. 12,606	Mai 5,728	Mai 29,100	Juni 21,610	Juli 15,224	Aug. 7,760	Aug. 31,122
Verfloss. Zeit .	0,000 m. S. T.	22,830	45,952	69,324	92,834	116,448	139,984	163,346
Länge d. Sonne	0°	22½	45	67½	90	112½	135	157½
Decl. d. Sonne	0°	+8°45′45″	+16. 20. 57	+21. 34. 43	+23. 27. 28	+21. 34. 43	+16. 20. 57	+8. 45. 45
$lg(r:a)$ . . .	9,99854	0,00138	0,00390	0,00600	0,00709	0,00707	0,00594	0,00387
Breite	**Nr. 0.**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
+90°	0,00000	0,15137	0,27637	0,35776	0,38529	0,35600	0,27390	0,14965
+80	0,05564	0,15137	0,27216	0,35223	0,37944	0,35059	0,26974	0,14965
+70	0,10960	0,18777	0,26805	0,33619	0,36206	0,33453	0,26565	0,18565
+60	0,16023	0,22745	0,28943	0,33423	0,35038	0,33258	0,28683	0,22486
+50	0,20599	0,26232	0,31051	0,34307	0,35413	0,34138	0,30774	0,25934
+40	0,24548	0,28893	0,32553	0,34781	0,35484	0,34610	0,32263	0,28564
+30	0,27752	0,30966	0,33253	0,34532	0,34880	0,34363	0,32956	0,30613
+20	0,30114	0,32009	0,33067	0,33456	0,33479	0,33292	0,32772	0,31645
+10	0,31559	0,32112	0,31971	0,31531	0,31259	0,31876	0,31685	0,31747
0	0,32046	0,31261	0,29981	0,28793	0,28262	0,28652	0,29714	0,30905
−10	0,31559	0,29483	0,27171	0,25318	0,24568	0,25194	0,26928	0,29147
−20	0,30114	0,26881	0,23614	0,21219	0,20300	0,21115	0,23403	0,26525
−30	0,27752	0,23397	0,19434	0,16645	0,15615	0,16563	0,19260	0,23131
−40	0,24548	0,19282	0,14789	0,11784	0,10634	0,11726	0,14657	0,19068
−50	0,20599	0,14636	0,09881	0,06902	0,05898	0,06868	0,09793	0,14469
−60	0,16023	0,09636	0,05007	0,02440	0,01671	0,02428	0,04963	0,09526
−70	0,10960	0,04553	0,00834				0,00826	0,04501
−80	0,05564	0,00230						0,00227
−90	0,00000							
+81°14′15″		0,14961						0,14790
+73 39 3			0,26513				0,26281	
+68 25 17				0,33269		0,33105		
+66 32 32					0,35344			
−66 32 32					0,00000			
−68 25 17				0,00000		0,00000		
−73 39 3			0,00000				0,00000	
−81 14 15		0,00000						0,00000

Aus 6) und 7) ergiebt sich zunächst, dass an den Grenzstellen beider Curvenstücke, für welche $t_1 = \pi$ ist, $dw:d\beta$ für beide übereinstimmt, dass also beide Curvenstücke mit einer gemeinschaftlichen Tangente in einander übergehen. Ferner wird nach 4) und 7) in der Curve b für $t_1 = 0$ sowohl $w = 0$, als $dw:d\beta = 0$; oder die Curve b geht, an der Stelle der Tageslänge $= 0$, berührend in die Abscissenaxe (der β) über. Die Curve für den Frühlingsanfang (20. März) lässt $t_1 = 0$ nicht zu, sondern besitzt constant $t_1 = \frac{1}{2}\pi$; hier wird $w = 0$ für $\beta = 90^0$; es ist aber nicht zugleich $dw:d\beta = 0$, oder diese Curve berührt nicht die Abscissenaxe. Die übrigen Werthe von β, welche der Gleichung 8a) genügen, müssen durch Probiren und Interpoliren gefunden werden.

Die Ergebnisse, welche aus den gewonnenen Gleichungen gezogen werden können, sind folgende:

ng der Erde während eines Tages im Jahre 1874—1875.

Sept. 23,722 1[illegible],446 150 0 0,00122	Oct. 16,038 209,262 202½ — 8. 45. 45 9,99840	Nov. 7,562 231,786 225 — 16. 20. 57 9,99581	Nov. 29,853 254,077 247½ — 21. 34. 43 9,99388	Dec. 21,953 276,177 270 — 23. 27. 27 9,99278	1875. Jan. 13,043 298,267 292½ — 21. 34. 43 9,99282	Feb. 4,181 320,405 315 — 16. 20. 57 9,99391	Feb. 26,479 342,703 337½ — 8. 45. 45 9,99580	März 21,014 365,238 360° 0 9,99850
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
0,00000								0,00000
0,05496	0,00233						0,00236	0,05565
0,10826	0,04616	0,00866				0,00873	0,04671	0,10962
0,15826	0,09769	0,05199	0,02580	0,01784	0,02592	0,05245	0,09886	0,16026
0,20347	0,14838	0,10260	0,07300	0,06300	0,07333	0,10350	0,10516	0,20603
0,24248	0,19506	0,15356	0,12462	0,11359	0,12521	0,15492	0,19784	0,24553
0,27412	0,23731	0,20180	0,17604	0,16678	0,17686	0,20358	0,24006	0,27757
0,29745	0,27202	0,24521	0,22442	0,21684	0,22547	0,24737	0,27528	0,30120
0,31172	0,29891	0,28214	0,26778	0,26243	0,26903	0,28462	0,30249	0,31565
0,31654	0,31694	0,31132	0,30453	0,30188	0,30595	0,31407	0,32074	0,32052
0,31172	0,32557	0,33198	0,33347	0,33389	0,33504	0,33490	0,32947	0,31565
0,29745	0,32452	0,34836	0,35384	0,35759	0,35549	0,34638	0,32841	0,30120
0,27412	0,31394	0,34529	0,36523	0,37257	0,36693	0,34834	0,31771	0,27757
0,24248	0,29293	0,33802	0,36786	0,37902	0,36958	0,34101	0,29644	0,24553
0,20347	0,26595	0,32243	0,36284	0,37826	0,36454	0,32528	0,26914	0,20603
0,15826	0,23060	0,30058	0,35349	0,37426	0,35514	0,30317	0,23387	0,16026
0,10826	0,19037	0,27833	0,35557	0,38674	0,35722	0,28078	0,19310	0,10962
0,05496	0,15347	0,28261	0,37263	0,40529	0,37437	0,28510	0,15531	0,05565
0,00000	0,15347	0,28697	0,37838	0,41155	0,38015	0,28950	0,15531	0,00000
	0,00000						0,00000	
		0,00000				0,00000		
			0,00000		0,00000			
				0,00000				
				0,37753				
			0,35186		0,35850			
		0,27536				0,27779		
	0,15168						0,15350	

1. Innerhalb der Zone, in welcher die Sonne nicht untergeht, erhält innerhalb eines Tages der Pol die stärkste Sonnenbestrahlung. So ist diese am Tage der Sonnenwende des nördlichen Sommers (21. Juni) am Nordpol $= 0{,}385$, während sie am Polarkreise ($\beta = +66^{\circ}33'$) nur 0,353 beträgt.

2. Innerhalb der Zone mit Tag und Nacht innerhalb 24 Stunden, also zwischen den Parallelkreisen mit gerade noch 24 St. Tag und denen mit 24 St. Nacht, findet ein Minimum der Bestrahlung in der Nähe des ersteren Parallelkreises und ein Maximum zwischen demselben und dem Aequator statt. So liegt für den 21. Juni ($\delta = +23^{\circ}27'28''$) das Minimum bei $\beta = +61^{\circ}52'16''$ und es beträgt dann hier die verhältnissmässige Stärke der Bestrahlung $w : W = 0{,}35015$, während das Maximum bei $\beta = +43^{\circ}33'34''$ liegt, wofür $w : W = 0{,}35525$ wird.

3. Die stärkste Bestrahlung, die überhaupt ein Punkt der Erde an einem Tage empfängt, ist die der Pole an den Tagen der Sonnenwende, und zwar ist sie für den Südpol am 21. Dec. $= 0{,}412$ und für den Nordpol am 21. Juni $= 0{,}385$. Die anderen Maxima an denselben Tagen sind nur 0,380 und 0,355 für $\beta = -$ und $+ 43^0\,33'\,34''$.

4. Dieses Uebergewicht des Poles dauert etwa durch 28 Tage (entnommen aus Fig. 4) vor und nach der Sonnenwende, so dass der Nordpol in den 56 Tagen vom 25. Mai bis zum 19. Juli und der Südpol vom 25. November bis zum 17. Januar eine stärkere tägliche Bestrahlung erhält als irgend ein anderer Punkt der Erde. Zu den anderen Zeiten liegt der Punkt der stärksten Bestrahlung in der Nähe des Aequators, indem er an den vier angegebenen Tagen vom Pol auf die Breite von ungefähr $\pm 36^0$ überspringt, sich dann dem Aequator nähert, wo er zu den Zeiten der Tag- und Nachtgleichen anlangt; für ihn ist dann die Bestrahlungsstärke am 20. März $= 0{,}320$ und am 23. September $= 0{,}317$.

5. Die Curven (w, Zeit), Fig. 4, für jede Breite innerhalb der gemässigten Zonen haben das Ansehen von Sinuslinien, deren Maxima und Minima nahezu an den Tagen der Sonnenwende liegen. In Breiten zwischen 0 und etwa 45^0 ändert sich die Bestrahlungsstärke in der Nähe des längsten Tages langsamer als in der Nähe des kürzesten; in Breiten zwischen etwa 45^0 und $66^0\,37'$ findet das Umgekehrte statt. Für die Breiten innerhalb der kalten Zonen verschwindet die Curve für die Zeit der dauernden Nacht. In den Grenzpunkten, in denen die Curve die Abscissenaxe trifft ($w = 0$), geschieht dies berührend. Denn in der Gleichung 4) können β und δ ohne Aenderung der Richtigkeit mit einander vertauscht werden, daher auch in 7). Letztere Gleichung liefert aber $dw : d\beta = 0$ für $t_1 = 0$; daher ist auch $dw : d\delta = 0$ für $t_1 = 0$ oder nach 4) für $w = 0$. Bezeichnen wir für einen Augenblick mit z (Zeit) die Abscissen unserer Curven, so folgt aus $dw : d\delta = 0$ (für $w = 0$) auch $dw : dz = 0$, weil $dz : d\delta$ nie Null werden kann, indem zu einer Aenderung $d\delta$ von δ immer eine Aenderung dz der Zeit z gehört, die nicht gegen $d\delta$ verschwindet. Wenn aber für $w = 0$ auch $dw : dz = 0$ wird, so berührt die Curve die Axe der z.

6. Die Tagesbestrahlung auf dem Aequator besitzt eine doppelte Periode, indem zwei Maxima mit 0,32 zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen und zwei Minima mit 0,28 und 0,30 zu Zeit der Sonnenwenden stattfinden. Aehnliches gilt für die benachbarten Parallelkreise bis zur Breite von etwa $\pm 12^0$, für welche die Bestrahlungsstärke während ihres ganzen Sommerhalbjahres fast unverändert bleibt.

7. Die Gleichung 4a) zeigt, dass in zwei Fällen von gleicher Tageslänge ($2t_1$) sich die Bestrahlungsstärken innerhalb eines Tages wie die Producte $\cos\delta \cos\beta$ verhalten. $\cos\delta \cos\beta$ drückt aber, wie leicht zu er-

kennen, die Differenz der Sinus der Sonnenhöhen um Mittag und um 6 Uhr aus.* Von der Veränderung von r ist dabei abgesehen.

Stärke der Bestrahlung im ganzen Jahre und innerhalb verschiedener Abschnitte desselben.

Die Bestrahlungsstärke innerhalb eines Abschnittes des Jahres ist für die verschiedenen Punkte desselben Parallelkreises nicht dieselbe, sowohl weil zu den übereinstimmenden Tageszeiten dieser Punkte nicht dieselbe Declination der Sonne stattfindet, als auch besonders, weil in dem allgemeinen Falle, dass jener Zeitraum eine ganze Anzahl von Tagen und noch einen Bruchtheil eines solchen enthält, dieser Bruchtheil für die verschiedenen Punkte verschiedene Tageszeiten in sich fasst. So fallen z. B. zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche in einen Zeitraum von 36 Stunden für den einen Punkt eines Parallelkreises zwei Tage und eine Nacht, für einen andern ein Tag und zwei Nächte. Die Bestrahlungsstärke im ersten Falle ist dann nahezu doppelt so gross als die im zweiten; und ausserdem kommen alle zwischenliegenden Fälle vor.

Will man nun für einen Punkt eines Parallelkreises die wirkliche Bestrahlungsstärke bestimmen, wie es Poisson that, so kommt man auf sehr verwickelte doppelt periodische Functionen. Man kann sich eine Vorstellung von denselben machen, wenn man sich in Fig. 4 zu jeder Abscisse, welche die Zeit ausdrückt, mit Berücksichtigung nicht nur des Datums, sondern auch der Tageszeit die Intensität der augenblicklichen Bestrahlung nach Fig. 2 aufträgt. Man erhält dann getrennte Curvenstücke, welche nahezu Sinuslinien sind (nicht genau wegen der Veränderung der Declination innerhalb eines Tages), und welche durch Theile der Abscissenaxe von einander getrennt werden, die der Dauer der Nächte entsprechen. Die Bestrahlungsstärke in einem gewissen Zeitraume wäre dann durch den Flächenraum ausgedrückt, welcher zwischen den Grenzordinaten, der Curve und der Abscissenaxe liegt. Die dazu nöthige Integration ist eine sehr verwickelte, und Poisson zog auch aus seinen Formeln keine Schlüsse.

Nun bietet die Verschiedenheit der Bestrahlungsstärke für verschiedene Punkte desselben Parallelkreises physikalisch oder meteorologisch kein Interesse, wohl aber das Mittel für alle Punkte desselben Parallelkreises. Dieses Mittel erhält man für jedes unendlich kleine Zeittheilchen dt einfach als die durch die Formel 4) gegebene Bestrahlungsstärke w innerhalb eines ganzen Tages bei unveränderlich gedachter Declination δ, multiplicirt mit dem Verhältnisse der Zeiten $dt:2\pi$. Denn liegen n gleiche Flächenelemente entlang des Parallelkreises, so ist die Summe

* Lambert, Pyrometrie, S. 312.

der während einer Umdrehung, oder der Zeit 2π, auf alle fallenden Strahlenmengen $= w.n$, die in der Zeit dt im Ganzen auffallenden Strahlenmengen $= n.w\frac{dt}{2\pi}$, der Antheil, welcher davon bei gleichförmiger Vertheilung oder im Mittel auf jedes Element kommt, $= w\frac{dt}{2\pi}$, wie angegeben. Zu demselben Ergebnisse würde man gelangen, wenn man sich in jedem Zeittheilchen eine ganze Umdrehung ausgeführt dächte.

Bezeichne nun

a die halbe grosse,

b die halbe kleine Axe,

$e = 0{,}0168$ die verhältnissmässige Excentricität der Erdbahn, so dass

$$b:a = \sqrt{1-e^2};$$

λ die Länge der Sonne, gezählt vom Frühlingspunkte an;

T die Länge des tropischen Jahres, also die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt, $= 365{,}242$ mittleren Sonnentagen;

σ die Schiefe der Ecliptik, im Jahre 1874 im Mittel $= 23^\circ 27' 21''$;

J die Stärke der Sonnenbestrahlung eines Flächenelements in einem Jahre im Abstande a von der Sonne, bei stets senkrecht auffallenden Strahlen;

i die mittlere Stärke der Sonnenbestrahlung eines Flächenelements der Erde von der Breite β während eines Abschnittes des Jahres, in welchem λ von 0 zu λ wächst, das Mittel genommen für alle Punkte desselben Parallelkreises;

di diese Bestrahlungsstärke während des Zeitelements $d\tau$ und während der Zunahme von λ um $d\lambda$, bei einem Abstande der Erde von der Sonne $= r$;

W' die Stärke der Sonnenbestrahlung eines Flächenelements in der Zeit $d\tau$, im Abstande r von der Sonne bei stets senkrecht auffallenden Strahlen.

Dann ist offenbar

$$W' = J\frac{d\tau}{T}\frac{a^2}{r^2}.$$

Nun verhalten sich nach dem ersten Kepler'schen Gesetze die Flächen, welche vom Radius vector der Erdbahn beschrieben werden, wie die dazu nothwendigen Zeiten, oder

$$d\tau : T = \tfrac{1}{2}r^2\,d\lambda : ab\pi,$$

wodurch sich die vorhergehende Gleichung umwandelt in

$$8') \qquad W' = J\frac{a}{2b\pi}\,d\lambda = \frac{J\,d\lambda}{2\pi\sqrt{1-e^2}}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 4) mit $(dt : 2\pi) = (d\tau : 1\ \text{Tag})$, so wird, wie wir vorhin sahen, $w\,dt : 2\pi$ gleich der mittleren Bestrahlungsstärke eines Flächenelements der Erde in dem Zeittheilchen dt oder $d\tau$, also $=di$, und nach den Bedeutungen von W und W' wird $W\frac{a^2}{r^2}(d\tau : 1\,\text{Tag}) = W'$.

Dadurch erhält man, wenn man für W' seinen Werth setzt,

$$9)\qquad di = \frac{J\,d\lambda}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}(\sin\delta\sin\beta\, t_1 + \cos\delta\cos\beta\sin t_1).$$

In dieser Formel müssen behufs der Integration δ und t_1 durch λ ausgedrückt werden. Bekanntlich ist

$$\sin\delta = \sin\sigma\sin\lambda,$$

daher

$$\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda},$$

$$tg\delta = \frac{\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}.$$

Der Absolutwerth von t_1 ist für den Fall, dass die Sonne nicht 24 Stunden im Tage über dem Horizont steht, aus den Gleichungen 3) bestimmt durch

$$9\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned} t_1 &= \arccos\left(-\frac{tg\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\right),\\ \sin t_1 &= \frac{1}{\cos\beta}\sqrt{\frac{\cos^2\beta-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}};\end{aligned}\right.$$

für den Fall dagegen, dass die Sonne innerhalb des Tages nicht untergeht, ist $t_1 = \pi$.

Demnach müssen zwei Fälle unterschieden werden. Für die 24stündige Tageshelle erhält man, indem man die Werthe von δ und von $t_1 = \pi$ in 9) einführt,

$$di = \frac{J\,d\lambda}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\sin\sigma\sin\lambda,$$

und indem man zwischen den Grenzen $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ integrirt,

$$10)\qquad i(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{J}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\sin\sigma(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2),$$

und zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = \lambda$

$$10\text{a})\qquad i(0, \lambda) = \frac{J}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\sin\sigma(1-\cos\lambda).$$

Für den Fall der nicht 24stündigen Tageshelle führen wir die oben angesetzten Werthe von δ und t_1 in 9) ein und erhalten

$$11)\qquad di = \frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}d\lambda\left\{\sin\beta\sin\sigma\sin\lambda\arccos\left(-\frac{tg\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\sigma\sin^2\lambda}\right\}.$$

Zur Integration dieses Ausdrucks wendet man zunächst auf den ersten Theil die partielle Integration an. Es ergiebt sich dann

$$\int d\lambda \sin\lambda \arccos\left(-\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}\right) = -\cos\lambda \arccos\left(-\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}\right)$$

$$+\int d\lambda \cos\lambda \left\{\frac{tg\beta \sin\sigma \cos\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{(1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.(-2\sin^2\sigma \sin\lambda \cos\lambda)\right\} : \sqrt{1-\frac{tg^2\beta \sin^2\sigma \sin^2\lambda}{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}$$

$$= -\cos\lambda \arccos\left(-\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}\right)$$

$$+ tg\beta \sin\sigma \int \frac{d\lambda \cos^2\lambda}{(1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda)\sqrt{1-\frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\beta}\sin^2\lambda}}.$$

Integrirt man nun die Gleichung 11) zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \lambda$, und beachtet bei Einführung des eben gefundenen Ausdrucks, dass $\sin^2\sigma \cos^2\lambda = 1 - \sin^2\sigma \sin^2\lambda - \cos^2\sigma$, so erhält man

$$i(0,\lambda) = \frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\left\{\sin\beta \sin\sigma \left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda \arccos\left(-\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}\right)\right]\right.$$

$$\text{12)} \quad + \sin\beta\, tg\beta \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\beta}\sin^2\lambda}} + \cos\beta \int_0^\lambda d\lambda \sqrt{1-\frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\beta}\sin^2\lambda}$$

$$\left. - \sin\beta\, tg\beta \cos^2\sigma \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{(1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda)\sqrt{1-\frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\beta}\sin^2\lambda}}\right\}.$$

Die noch unentwickelten Integrale sind elliptische, der Reihe nach der ersten, zweiten und dritten Gattung, zu deren Berechnung wir uns auf Legendre's Werk über elliptische Functionen* stützen werden, das durch seine Tabellen zur Auswerthung besonders geeignet ist. Die Integrale sind schon auf die Normalformen gebracht und es ist nach Legendre's Bezeichnung

die Amplitude $\varphi = \lambda$,

der Modul $k = \sin\vartheta = \frac{\sin\sigma}{\cos\beta}$,

der Parameter $n = -\sin^2\sigma$.

ϑ ist der Winkel des Moduls, und da $k < 1$ vorausgesetzt wird, ist die Formel 12) ohne Umformung nur brauchbar für $\sin\sigma < \cos\beta$ oder $\beta < 90^0 - \sigma$, d. i. in der Zone zwischen beiden Polarkreisen.

Legendre giebt nur Tafeln für die unvollständigen Integrale erster und zweiter Gattung ($F\varphi$, $E\varphi$) und für die vollständigen dieser Gattungen

---

* *Legendre, Traité des fonctions elliptiques; 3 vol., Paris 1825—1828.*

$\left(F\frac{\pi}{2}=F',\ E\frac{\pi}{2}=E'\right)$. Zur Berechnung der unvollständigen Integrale dritter Gattung $(\Pi(n,k,\varphi)=\Pi(\alpha,\varphi))$ werden zweckmässig die stark convergirenden Reihen der Jacobi'schen oder Thetafunctionen angewendet. Unsere Integrale dritter Gattung sind logarithmische (Leg. III, S. 138), da $n=-k^2 \sin^2\alpha$ gesetzt, einen reellen Werth von α liefert. Führt man hierin die Werthe ein, so erhält man nämlich

$$-\sin^2\sigma=-\frac{\sin^2\sigma}{\cos^2\beta}\sin^2\alpha,$$

also $\alpha=90^0-\beta$. Es ist nun (III, S. 139)

$$\cot\alpha\,\varDelta\alpha[\Pi(\alpha,\varphi)-F\varphi]+(\varepsilon F\alpha-E\alpha)F\varphi=\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)},$$

worin

$$\varDelta\alpha=\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},\quad \varepsilon=\frac{E'}{F'}=\frac{E'}{K},$$

$$\Theta x=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,$$

$$q=e^{-\pi\frac{K'}{K}},\quad e=2{,}71828\ldots,$$

$K'=F'k'$ das vollständige Integral erster Gattung mit dem complementären Modul $k'=\sin\vartheta'$, für welchen $\vartheta'=90^0-\vartheta$; sodann

$$x=\frac{\pi F\varphi}{2K},\quad a=\frac{\pi F\alpha}{2K}.$$

Diese Werthe in die oben angeschriebene Gleichung für die elliptischen Integrale dritter Gattung eingeführt, liefern

$$tg\beta\cos\sigma\,\Pi(\alpha,\lambda)=\left[tg\beta\cos\sigma-\left(\frac{E'}{F'}F\alpha-E\alpha\right)\right]F\lambda+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in 12) ein, so erhält man die für Punkte zwischen den Polarkreisen oder für, absolut genommen, $\beta<90^0-\sigma$ giltige Formel

$$\begin{aligned}i(0,\lambda)=\frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Bigg\{&\sin\beta\sin\sigma\left[\frac{\pi}{2}-\cos\lambda\arccos\left(-\frac{tg\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\right)\right]\\ &-\tfrac{1}{2}\sin\beta\cos\sigma\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}\\ &+\sin\beta\left[tg\beta\sin^2\sigma+\cos\sigma\left(\frac{E'}{F'}F\alpha-E\alpha\right)\right]F\lambda+\cos\beta E\lambda\Bigg\}.\end{aligned}\tag{13}$$

Für $\lambda=\frac{\pi}{2}$ werden die Integrale vollständig, und es wird

$$\begin{aligned}i\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Bigg\{&\frac{\pi}{2}\sin\beta\sin\sigma+\sin\beta\,tg\beta\sin^2\sigma F'\\ &+\sin\beta\cos\sigma(E'F\alpha-F'E\alpha)+\cos\beta E'\Bigg\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Formen wir nun die Gleichung 12) um, so dass sie für Punkte innerhalb der Polarkreise oder für, absolut genommen, $\beta>90^0-\sigma$ brauchbar wird. Führt man den Hilfswinkel φ ein und setzt

$$k \sin\lambda = \sin\varphi, \quad k = \frac{1}{c},$$

so wird $c = \frac{\cos\beta}{\sin\sigma}$, was für $\beta > 90^0 - \sigma$ kleiner als die Einheit ist. Es ergiebt sich dann

$$k \cos\lambda\, d\lambda = \cos\varphi\, d\varphi, \quad \cos\lambda = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda} = \cos\varphi,$$

so dass bei dem elliptischen Integrale erster Gattung wird

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda}} = \frac{c\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}.$$

Bei demjenigen zweiter Gattung dagegen erhält man

$$d\lambda \sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda} = \frac{c \cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}$$

oder, wenn man beachtet, dass

$$\cos^2\varphi = \frac{c^2 - 1}{c^2} + \frac{1}{c^2}(1 - c^2 \sin^2\varphi),$$

$$d\lambda \sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda} = \frac{c^2 - 1}{c} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} + \frac{1}{c} d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}.$$

Dadurch ist das elliptische Integral zweiter Gattung in eines erster und eines zweiter Gattung zerlegt.

Bei demjenigen dritter Gattung wird

$$\frac{d\lambda}{(1 - \sin^2\sigma \sin^2\lambda)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda}} = \frac{c\, d\varphi}{(1 - \cos^2\beta \sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}.$$

Es ist nun der Parameter

$$n' = -\cos^2\beta = -c^2 \sin^2\alpha' = -\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\sigma} \sin^2\alpha',$$

woraus $\alpha' = \sigma$ folgt. Da hiernach α' ein reeller Werth, ist das elliptische Integral wieder ein logarithmisches.

Ist c' der complementäre Modul zu c, so setzt man

$$c = \sin\vartheta, \quad c' = \sin\vartheta';$$

also

$$\vartheta' = 90^0 - \vartheta;$$

dann bestimmt man

$$K = F'c = F', \quad K' = F'c', \quad E'c = E', \quad \varepsilon = \frac{E'}{F'},$$

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad x' = \frac{\pi F\varphi}{2F'}, \quad a' = \frac{\pi F\alpha'}{2F'},$$

$$\cot\alpha' \Delta\alpha' = \cot\sigma \sqrt{1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\sigma} \sin^2\sigma} = \cot\sigma \sin\beta,$$

wobei

$$F\varphi = F(c, \varphi), \quad F\alpha' = F(c, \alpha').$$

Führt man diese Werthe in der vorhin gegebenen Formel für das elliptische Integral dritter Gattung (Leg. III, S. 139) ein, so erhält man, wenn

$$\Pi(-c^2 \sin^2\alpha', c, \varphi) = \Pi(\alpha', \varphi),$$

$$\cot\sigma\sin\beta\,\Pi(\alpha',\varphi)=\left[\cot\sigma\sin\beta-\left(\frac{E'}{F'}F\alpha'-E\alpha'\right)\right]F\varphi+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(x'-a')}{\Theta(x'+a')}.$$

Dieser und die vorhergehenden Ausdrücke in 12) eingeführt, liefern

$$\begin{aligned}i(0,\lambda)=\frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Bigg\{&\sin\beta\sin\sigma\left[\frac{\pi}{2}-\cos\lambda\arccos\left(-\frac{tg\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\right)\right]\\&+\sin\beta\,tg\beta\frac{\cos\beta}{\sin\sigma}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}+\cos\beta\left[\frac{\cos^2\beta-\sin^2\sigma}{\sin\sigma\cos\beta}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\right.\\&\left.+\frac{\sin\sigma}{\cos\beta}\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\right]\\&-\sin\beta\,tg\beta\cos^2\sigma\frac{\cos\beta}{\sin\sigma}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1-\cos^2\beta\sin^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i(0,\lambda)=\frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Bigg\{&\sin\beta\sin\sigma\left[\frac{\pi}{2}-\cos\lambda\arccos\left(-\frac{tg\beta\sin\sigma\sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma\sin^2\lambda}}\right)\right]\\&-\tfrac{1}{2}\sin\beta\cos\sigma\log\frac{\Theta(x'-a')}{\Theta(x'+a')}\\&+\cos\sigma\left[\cot\sigma\cos^2\beta+\sin\beta\left(\frac{E'}{F'}F\alpha'-E\alpha'\right)\right]F\varphi+\sin\sigma\,E\varphi\Bigg\}.\end{aligned}\tag{15}$$

Diese Gleichung gilt für die Punkte innerhalb der Polarkreise oder für, absolut genommen, $\beta>90^0-\sigma$. Die Grenzen sind durch die Gleichung der früheren Substitution von φ mit einander verbunden, nämlich durch

$$k\sin\lambda=\frac{\sin\sigma}{\cos\beta}\sin\lambda=\sin\varphi;$$

als untere Grenzen gehören daher $\varphi=0$ und $\lambda=0$ zusammen. Der grösste mögliche Werth $\sin\varphi=1$ bestimmt die höchsten erreichbaren Grenzen von φ und λ, nämlich

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \sin\lambda_1=\frac{\cos\beta}{\sin\sigma}.$$

Weil $\beta>90^0-\sigma$, also $\cos\beta<\sin\sigma$, so ist $\sin\lambda_1<1$, $\lambda_1<\frac{\pi}{2}$. Für diese obere Grenze, welche in 15) nicht überschritten werden darf, werden die Integrale vollständig und die Formel 15) geht über in

$$\begin{aligned}i(0,\lambda_1)=\frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}}\Bigg\{&\frac{\pi}{2}\sin\beta\sin\sigma(1-2\cos\lambda_1)+\cos\sigma\cot\sigma\cos^2\beta\,F'\\&+\cos\sigma\sin\beta(E'F\alpha'-F'E\alpha')+\sin\sigma\,E'\Bigg\}.\end{aligned}\tag{16}$$

Für die obere Grenze $\lambda>\lambda_1$, welche wir vorerst nicht über $\frac{\pi}{2}$ gehen lassen, bemerkt man, dass t_1 constant gleich π wird. Denn in der

Grenze, welche durch $\sin\lambda_1 = \frac{\cos\beta}{\sin\sigma}$ bezeichnet ist, wird nach 9a) $t_1 = \pi$. Wir haben deswegen für die zwischen λ_1 und λ $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ liegende Bestrahlung die Formel 10) anzuwenden und erhalten

$$i(\lambda_1, \lambda) = \frac{J}{2\pi\sqrt{1-e^2}} \sin\beta \sin\sigma (\cos\lambda_1 - \cos\lambda).$$

Fügt man diesen Werth zu dem der Gleichung 16) hinzu, so ergiebt sich

$$\text{17)} \quad \begin{aligned} i(0, \lambda) = \frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}} \Big\{ & \frac{\pi}{2} \sin\beta \sin\sigma (1 - 2\cos\lambda) + \cos\sigma \cot\sigma \cos^2\beta F' \\ & + \cos\sigma \sin\beta (E' F\alpha' - F' E\alpha') + \sin\sigma E' \Big\}, \end{aligned}$$

worin $\lambda_1 < \lambda \leqq \frac{\pi}{2}$.

Setzt man in 17) $\lambda = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\text{18)} \quad \begin{aligned} i\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{J}{2\pi^2\sqrt{1-e^2}} \Big\{ & \frac{\pi}{2} \sin\beta \sin\sigma + \cos\sigma \cos^2\beta F' \\ & + \cos\sigma \sin\beta (E' F\alpha' - F' E\alpha') + \sin\sigma E' \Big\}. \end{aligned}$$

Somit sind alle Fälle für den Zeitraum zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{\pi}{2}$, also für das astronomische Frühjahr (21. März bis 21. Juli) und den zugehörigen Quadranten der Erdbahn erledigt. Man bemerkt, dass die Formeln für $\beta < 90^0 - \sigma$ und für $\beta > 90^0 - \sigma$, nämlich 13) und 14) einerseits und 15) und 18) andererseits, nur darin von einander abweichen, dass die darin vorkommenden elliptischen Integrale andere Module, andere Parameter und andere Coefficienten besitzen, dass man aber die sich entsprechenden von diesen Grössen dadurch von einander ableiten kann, dass man β und $90^0 - \sigma$ mit einander vertauscht.

Wir haben bisher λ sich zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ bewegen lassen. In Bezug auf beliebig grosse λ ist nun zunächst der Satz wichtig, dass jedes elliptische Integral zwischen den Grenzen der Amplitude λ (oder φ) von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gleich demjenigen ist zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, gleich demjenigen zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ u. s. w. Diese Grösse ist das vollständige Integral. Drückt G ein beliebiges elliptisches Integral aus und G' das vollständige, so ist also

$$G\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = G\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \ldots G\left(n\frac{\pi}{2}, (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = G',$$

worin n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Sodann gilt der Satz von der Periodicität, welcher gestattet, ein Integral mit einer beliebigen Amplitude auf eine ganze Anzahl vollständiger Integrale und ein Integral mit einer zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Amplitude zurückzuführen, und welchen man durch die Formel ausdrücken kann, worin $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$,

$$G(0, n\pi \pm \lambda) = 2nG' \pm G(0, \lambda).$$

Beide Sätze gelten natürlich auch für eine Summe von elliptischen Integralen mit gemeinschaftlichen Grenzen, wovon jedes mit einem unveränderlichen Factor versehen sein kann, oder es gelten die beiden letzten Formeln auch, wenn wir unter G die Summe der drei letzten Glieder der rechten Seite der Gleichung 12) verstehen. Diese Gleichung schreibt sich dann, wenn man noch nach 9a) die Bezeichnung t_1 des halben Tagesbogens einführt, wo dann $\pi - t_1$ den halben Nachtbogen bezeichnet, also

$$t_1 = \arccos\left(-\frac{tg\beta \sin\sigma \sin\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\sigma \sin^2\lambda}}\right)$$

und ausserdem

$$2\pi^2\sqrt{1-c^2} = f$$

setzt,

$$i(0, \lambda) = \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\, t_1\right] + G\right\}.$$

Hierin sei $\lambda < \frac{\pi}{2}$; für ein λ im zweiten Quadranten, das mit $\lambda_2 = \pi - \lambda$ bezeichnet werde, bleibt t_1 ungeändert, und es wird

$$i(0, \pi - \lambda) = \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} + \cos\lambda\, t_1\right] + 2G' - G\right\}.$$

Im dritten Quadranten kehrt sich das Zeichen von $\sin\lambda$ um, und an die Stelle von t_1 tritt nach 9a) $\pi - t_1$; daher

$$i(0, \pi + \lambda) = \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} + \cos\lambda\,(\pi - t_1)\right] + 2G' + G\right\}.$$

Im vierten Quadranten wird

$$i(0, 2\pi - \lambda) = \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\,(\pi - t_1)\right] + 4G' - G\right\}.$$

Für die Zahlenrechnung ist es am zweckmässigsten, die Zuwachse von i in den vier Quadranten zu berechnen. Dafür ergiebt sich zunächst, wenn man $\lambda = 0$ setzt, wofür $t_1 = \frac{\pi}{2}$ wird,

$$i(0, \pi) = \frac{J}{f}\{\sin\beta \sin\sigma\pi + 2G'\},$$

$$i(0, 2\pi) = \frac{J}{f}\, 4G',$$

und durch Subtraction

$$i(\pi, 2\pi) = \frac{J}{f}\{-\sin\beta \sin\sigma\pi + 2G'\}.$$

Diese Ergebnisse mit den vorhergehenden verglichen, liefern

$$19)\left\{\begin{aligned} i(0, \lambda) = i(\pi - \lambda, \pi) &= \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\, t_1\right] + G\right\}, \\ i(\pi, \pi + \lambda) = i(2\pi - \lambda, 2\pi) &= \frac{J}{f}\left\{-\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\,(\pi - t_1)\right] + G\right\}. \end{aligned}\right.$$

Für südliche Breiten oder negative β werden die bisherigen Formeln leicht anwendbar gemacht. Man bemerkt, dass durch Umkehrung des Vorzeichens von β in Gleichung 12) weder die einzelnen elliptischen Integrale, noch ihre Vorzeichen, demnach nicht G und G' eine Aenderung erleiden. Es ist daher nur nöthig, in 9a) und 19) $-\beta$ einzuführen. Dadurch wird t_1 zu $\pi - t_1$ und die Bestrahlungsstärke i' wird

$$20)\left\{\begin{aligned} i'(0, \lambda) = i'(\pi - \lambda, \pi) &= \frac{J}{f}\left\{-\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\,(\pi - t_1)\right] + G\right\}, \\ i'(\pi, \pi + \lambda) = i'(2\pi - \lambda, 2\pi) &= \frac{J}{f}\left\{\sin\beta \sin\sigma\left[\frac{\pi}{2} - \cos\lambda\, t_1\right] + G\right\}. \end{aligned}\right.$$

Aus Vergleichung von 19) und 20) folgt, dass

$$i'(0, \lambda) = i'(\pi - \lambda, \pi) = i(\pi, \pi + \lambda) = i(2\pi - \lambda, 2\pi),$$
$$i'(\pi, \pi + \lambda) = i'(2\pi - \lambda, 2\pi) = i(0, \lambda) = i(\pi - \lambda, \pi),$$

oder dass der Zuwachs der Sonnenbestrahlung für einen Punkt von nördlicher Breite von unserm Frühlingsanfange ($\lambda = 0$) an ebenso gross ist, als der Zuwachs der Sonnenbestrahlung für einen Punkt von der gleichen südlichen Breite von unserm Herbstanfange an, wenn in beiden Fällen die Länge der Sonne um gleichviel zunimmt; sowie auch, wenn beim nördlichen Punkte von unserem Herbstanfange und beim südlichen von unserem Frühlingsanfange an gezählt wird.

Mit den entwickelten Formeln habe ich nun die verhältnissmässige Stärke der Sonnenstrahlen $i : J$ berechnet und zwar einerseits für die astronomischen Vierteljahre, gelegen zwischen einer Tag- und Nachtgleiche und der darauf folgenden Sonnenwende, also zwischen den Werthen der Sonnenlänge λ von 0, 90, 180, 270, 360°, und andererseits für die beiden nahezu gleichen Abschnitte jener Zeiträume, in deren Grenzpunkten die Sonnenlänge λ die Werthe 45, 135, 225, 315° besitzt. Dadurch erhält man die Bestrahlungsstärke in zwei verschiedenartigen Vierteljahren. Von den schon bezeichneten astronomischen haben das Frühlings- und das Sommervierteljahr gleiche Bestrahlungsstärke, und ebenso das Herbst- und Wintervierteljahr. Mehr Interesse in Bezug auf die Bestrahlung liefern die durch die letztgenannten Werthe der Sonnenlänge getrennten Vierteljahre, welche wir die meteorologischen* nennen wollen. Nahezu

* In der Meteorologie wurde bisher gewöhnlich der Winter aus dem December, Januar, Februar, und entsprechend jede andere Jahreszeit aus drei vollen Monaten gebildet. Doch ist diese Eintheilung von dem meteorologischen Congresse in Wien, 1873, verworfen worden.

in ihrer Mitte befinden sich die Zeitpunkte der Tag- und Nachtgleichen und der Sonnenwenden.

Diese meteorologischen Vierteljahre werden im Zeitraum der obigen Tabelle (S. 346 u. 347) in folgender Weise bestimmt.

Meteorologisches Frühlingsvierteljahr des Nordens und Herbstvierteljahr des Südens:

Im Anfangspunkte: Sonnenlänge $\lambda = 315^0$,
mittlere Declination der Sonne $\delta = -16^0\,20'\,52''$,
Zeitpunkt (1875): Febr. 4,181 bürgerliche Zeit,
nach der Wintersonnenwende 44,228 Tage,
vor der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche 44,833 Tage;
im Endpunkte: Sonnenlänge $\lambda = 45^0$,
mittlere Declination der Sonne $\delta = +16^0\,20'\,52''$,
Zeitpunkt (1874): Mai 5,728 bürgerliche Zeit,
nach der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche 45,952 Tage,
vor der Sommersonnenwende 46,882 Tage;
Dauer: 90,785 Tage.

Meteorologisches Sommervierteljahr des Nordens und Wintervierteljahr des Südens:

Der Anfangspunkt fällt in den Endpunkt des vorhergehenden Vierteljahres.

Im Endpunkte: Sonnenlänge $\lambda = 135^0$,
mittlere Declination der Sonne $\delta = +16^0\,20'\,52''$,
Zeitpunkt (1874): August 7,760 bürgerliche Zeit,
nach der Sommersonnenwende 47,150 Tage,
vor der Herbst-Tag- und Nachtgleiche 46,462 Tage;
Dauer: 94,032 Tage.

Meteorologisches Herbstvierteljahr des Nordens und Frühlingsvierteljahr des Südens:

Anfangspunkt im Endpunkte des vorhergehenden Vierteljahres.

Im Endpunkte: Sonnenlänge $\lambda = 225^0$,
mittlere Declination der Sonne $\delta = -16^0\,20'\,52''$,
Zeitpunkt (1874): November 7,562 bürgerliche Zeit,
nach der Herbst-Tag- und Nachtgleiche 45,340 Tage,
vor der Wintersonnenwende 44,391 Tage;
Dauer: 91,802 Tage.

Meteorologisches Wintervierteljahr des Nordens und Sommervierteljahr des Südens:

Anfangspunkt im Endpunkte des vorhergehenden Vierteljahres.
Endpunkt im Anfangspunkte des meteorolog. Frühlingsvierteljahres.
Dauer 88,619 Tage.

Die folgenden Tabellen wurden nun nach den gegebenen Formeln 13) bis 20) berechnet, indem der geographischen Breite von 0^0 an von

10 zu 10^0 alle positiven und negativen Werthe beigelegt wurden. Dadurch ergeben sich die Columnen 2, 3, 7, 9, aus denen die anderen durch Addition oder Subtraction folgen. Man erhält, wenn (2), (3), ... die Zahlenangaben derselben horizontalen Reihe in der 2., 3., ... Columne bedeuten:

$$(4) = 2(2), \quad 5 = 2(3), \quad 6 = (4) + (5), \quad (8) = (2) - (7),$$
$$(10) = (3) - (9), \quad (11) = (7) + (9), \quad (12) = 2(8); \quad (13) = 2(10).$$

Dabei sei für (7) und (9) zur Vermeidung aller Missverständnisse bemerkt, dass durch die Ueberschrift diejenigen Hälften der astronomischen Vierteljahre bezeichnet sind, welche die Tag- und Nachtgleiche in ihrem einen Grenzpunkte haben.

Die in den Tabellen niedergelegten Rechnungsergebnisse sind durch Curven in Taf. V, Fig. 5 veranschaulicht, indem die Breiten β von -90 durch 0 bis $+90^0$ als Abscissen und die zugehörigen Werthe $i:J$ der verhältnissmässigen Bestrahlungsstärken als Ordinaten aufgetragen wurden. Auf diese Weise ist die Bestrahlungsstärke im ganzen Jahre (Columne 6) dargestellt, die im Sommer- (4) und Winterhalbjahr (5), die im meteorologischen Frühlings- und Herbstvierteljahr (11), welche zusammenfallen, die im meteorologischen nördlichen Sommervierteljahr ($+\beta$ aus 12, $-\beta$ aus 13), zusammenfallend mit dem südlichen Wintervierteljahr, und die im meteorologischen nördlichen Wintervierteljahr ($-\beta$ aus 12, $+\beta$ aus 13), zusammenfallend mit dem südlichen Sommervierteljahr, wobei die beiden letzten Curven in Bezug auf die durch $\beta = 0$ gehende Ordinate symmetrisch werden.

Tabellen der verhältnissmässigen Stärke $i:J$ der Sonnenbestrahlung der Erde während der verschiedenen Abtheilungen des Jahres.

I. Während der astronomischen Jahreszeiten.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Geographische Breite.	Warmes Vierteljahr.	Kaltes Vierteljahr.	Sommer-Halbjahr.	Winter-Halbjahr.	Ganzes Jahr.
0^0	0,07633	0,07633	0,15266	0,15266	0,30532
$\pm 10^0$	0,08078	0,06978	0,16156	0,13956	0,30112
$\pm 20^0$	0,08298	0,06131	0,16596	0,12262	0,28858
$\pm 30^0$	0,08292	0,05124	0,16584	0,10248	0,26832
$\pm 40^0$	0,08067	0,03994	0,16134	0,07988	0,24122
$\pm 50^0$	0,07646	0,02792	0,15292	0,05584	0,20876
$\pm 60^0$	0,07086	0,01598	0,14172	0,03196	0,17368
$\pm 70^0$	0,06593	0,00639	0,13186	0,01278	0,14464
$\pm 80^0$	0,06394	0,00154	0,12788	0,00308	0,13096
$\pm 90^0$	0,06336	0,00000	0,12672	0,00000	0,12672

II. Während der Achteljahre zwischen den Grenzpunkten der astronomischen und der meteorologischen Jahreszeiten.

Geographische Breite.	7.	8.	9.	10.
	Eines astr. warmen Vierteljahrs		Eines astr. kalten Vierteljahrs	
	kältere Hälfte.	wärmere Hälfte.	wärmere Hälfte.	kältere Hälfte.
0°	0,03921	0,03712	0,03921	0,03712
± 10°	0,04025	0,04053	0,03703	0,03275
± 20°	0,04010	0,04288	0,03375	0,02756
± 30°	0,03882	0,04410	0,02954	0,02170
± 40°	0,03633	0,04434	0,02440	0,01554
± 50°	0,03290	0,04356	0,01858	0,00934
± 60°	0,02853	0,04233	0,01243	0,00355
± 70°	0,02377	0,04216	0,00633	0,00006
± 80°	0,01981	0,04413	0,00154	0,00000
± 90°	0,01856	0,04480	0,00000	0,00000

III. Während der meteorologischen Jahreszeiten.

Geographische Breite.	11. Frühlings- oder Herbst-Vierteljahr.	12. Sommer-Vierteljahr.	13. Winter-Vierteljahr.
0°	0,07842	0,07424	0,07424
± 10°	0,07728	0,08106	0,06550
± 20°	0,07385	0,08576	0,05512
± 30°	0,06836	0,08820	0,04340
± 40°	0,06073	0,08868	0,03108
± 50°	0,05148	0,08712	0,01868
± 60°	0,04096	0,08466	0,00710
± 70°	0,03084	0,08432	0,00012
± 80°	0,02135	0,08826	0,00000
± 90°	0,01856	0,08960	0,00000

Die in den Tabellen und in Taf. V, Fig. 5 niedergelegten Ergebnisse sind folgende:

1. Die verhältnissmässige Bestrahlungsstärke im ganzen Jahre besitzt ihr Maximum von 0,305 auf dem Aequator und ihr Minimum von 0,127

in den Polen; zwischen beiden verläuft die Stärkecurve ähnlich wie eine Sinuslinie.

2. Die verhältnissmässige Bestrahlungsstärke im Sommerhalbjahre einer Erdhälfte, z. B. der nördlichen (20. März bis 23. September, zusammenfallend mit dem Winterhalbjahre der andern, der südlichen), hat ihr Maximum von 0,166 in der Breite von etwa $+24^0$, fällt bis zum benachbarten Nordpol auf 0,127 bis zum Aequator auf 0,153 und von da bis zum Südpol auf Null.

3. Die verhältnissmässige Bestrahlungsstärke im meteorologischen Frühlingsvierteljahr (4. Februar bis 5. Mai) und im meteorologischen Herbstvierteljahr (7. August bis 7. November) erreicht ihr Maximum mit 0,078 auf dem Aequator und ihre Minima mit 0,019 in den Polen; die Curve verläuft ähnlich wie eine Sinuslinie.

4. Die verhältnissmässige Bestrahlungsstärke in einem meteorologischen Sommervierteljahr, z. B. dem nördlichen (5. Mai bis 7. August), besitzt ihr Maximum mit 0,090 in dem Nordpol, fällt von da gegen den Aequator und wird zu einem Minimum mit 0,084 in einer Breite von etwa 65^0, steigt dann wieder, wird ein Maximum mit 0,089 bei etwa 35^0, fällt dann, wird auf dem Aequator 0,074 und verschwindet in einer südlichen Breite von $73^0\,39'$, wo der Parallelkreis zu Anfang und zu Ende dieses Vierteljahrs gerade noch von den Sonnenstrahlen berührt wird. Das bemerkenswerthe Ergebniss ist also, dass während des meteorologischen Sommers die Sonnenbestrahlung des Poles stärker ist als diejenige irgend eines andern Punktes der Erde. Wir sahen früher, dass in den 94 Tagen dieser Zeit für den Pol auch die Stärke der täglichen Bestrahlung an 56 Tagen grösser ist, als an irgend einem andern Punkte der Erde.

Vergleichung der Ergebnisse mit den auf anderem Wege oder von anderen Forschern erhaltenen.

Die Stärke der Sonnenbestrahlung in einem Abschnitte des Jahres lässt sich auch einfach durch Addition der Bestrahlungsstärken an den einzelnen Tagen erhalten, oder, was dasselbe ist, durch Bestimmung des Flächeninhalts der Curven in Taf. IV, Fig. 4, bei denen als Ordinaten die Bestrahlungsstärken an den einzelnen Tagen, als zugehörige Abscissen der Zeitabstand des betreffenden Tages von dem Zeitpunkte der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche aufgetragen sind. Ich führte dies auf zwei Arten aus; einmal auf graphischem Wege durch Eintheilung der Fläche für das ganze Jahr in 30 gleich breite Flächenstreifen, indem ich diese als Paralleltrapeze betrachte und die Ordinaten in der Mitte jedes Streifens in der Zeichnung mass, wobei ich eine Zeichnung in halb so grossem Massstabe der Ordinaten als in Fig. 4 benutzt hatte. Ein zweites Mal bestimmte ich die Fläche durch mechanische Quadratur nach dem

Gedanken der Simpson'schen Regel, indem ich die Eintheilung der Fläche in die 32 nicht ganz gleich breiten Streifen beibehielt, für deren Grenzen die Ordinaten berechnet waren (s. die Tabelle S. 346 u. 347).

Sind y_1, y_2, y_3 drei auf einander folgende Ordinaten und x_1, x_2, x_3 die zugehörigen Abscissen, so wird das zugehörige Curvenstück als Parabel angesehen, deren Axe mit den Ordinaten parallel läuft, und welche daher durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist. Die Fläche der zwei Streifen ist dann bekanntlich, wenn diese genau gleich breit sind, $=\frac{1}{6}(x_3-x_1)(y_1+4y_2+y_3)$, sie ist dagegen, wenn ein kleiner Unterschied der Breite stattfindet,

$$f=\tfrac{1}{6}(x_3-x_1)(y_1+4y_2+y_3)+\tfrac{1}{3}(x_1-2x_2+x_3)(y_3-y_1).$$

Nach dieser Formel erhielt ich ebenfalls die Bestrahlungsstärke in Abschnitten des Jahres, ohne mich auf die Zeichnung stützen zu müssen. Später nahm ich die Berechnung der elliptischen Integrale und zwar doppelt vor.

Um einen Massstab für die Genauigkeit der zwei ersten Verfahrungsweisen zu geben, will ich die Ergebnisse für das ganze Jahr zusammenstellen. Zugleich will ich die Zahlen von Lambert und Meech, auf meine Einheit reducirt, zufügen; Lambert hat übrigens nur für die Breiten von 0, 45, 90°, für den Wendekreis und den Polarkreis die Bestrahlungsstärke für das Sommer-, das Winterhalbjahr und das ganze Jahr, Meech nur die für das ganze Jahr, aber für die Breiten von 5 zu 5° gegeben. Lambert erhält für das ganze Jahr und den Aequator 12,05231, Meech setzt diese Stärke bei verschiedenen Massstäben gleich 365,24 oder 12,00 oder 81,50.

Jährliche Bestrahlungsstärke nach verschiedenen Berechnungen, auf dieselbe Einheit reducirt.

Geographische Breite.	Lambert.	Meech.	Wiener graphisch.	Wiener durch mech. Quadr.	Wiener verm. der ellipt. Integr.
0°	0,30532	0,30532	0,304	0,3054	0,30532
10°		0,30109	0,299	0,3012	0,30112
20°	Wendekreis	0,28857	0,288	0,2887	0,28858
30°	0,28241	0,26834	0,267	0,2684	0,26832
40°	45°	0,24121	0,239	0,2410	0,24122
50°	0,22553	0,20877	0,208	0,2088	0,20876
60°	Polarkreis	0,17368	0,173	0,1737	0,17368
70°	0,15259	0,14465	0,145	0,1449	0,14464
80°		0,13093	0,131	0,1307	0,13096
90°	0,12677	0,12672	0,126	0,1267	0,12672

Stärke der Bestrahlung von Theilen der Erdoberfläche während gewisser Abschnitte des Jahres.

Um die Bestrahlungsstärke der von der Sonne beschienenen nördlichen Erdhälfte zu bestimmen, indem wir die Erde als eine Kugel annehmen (was bisher nicht vorausgesetzt war), stelle Fig. 1 (Taf. III) die Erde dar, P den Pol, AQ den Aequator, S den Punkt, in dessen Zenith die Sonne steht, also PS den Meridian von S. Legen wir mit Lambert* von S bis zum Aequator zwei einander unendlich nahe grösste Kreisbogen SB und SB' und schneiden aus dem von ihnen gebildeten Streifen ein Flächenstück $FGG'F'$ durch zwei zu S als Pol gehörige Parallelkreise von unendlich kleinem Abstande aus. Es sei nun der

$$\text{Halbmesser der Erde} = MS = h,$$
$$\sphericalangle\, ASB = \omega, \quad \sphericalangle\, BSB' = d\omega,$$
$$\text{Bogen } SB = h\varphi, \quad \text{Bogen } SF = h\varphi',$$
$$FG = h\, d\varphi',$$

so ist die Fläche

$$FGG'F' = h^2 \sin\varphi'\, d\omega\, d\varphi',$$

der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen für dieses Flächenelement $= \varphi'$ und die im Zeitelement auffallende Strahlenmenge mit Rücksicht auf 8')

$$d^3 i = W' \,.\, h^2 \sin\varphi'\, d\omega\, d\varphi' \,.\, \cos\varphi' = \frac{J\, d\lambda}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\, h^2\, d\omega \sin\varphi' \cos\varphi'\, d\varphi'.$$

Dabei ist in dem für W' und J gegebenen Begriffe das „Flächenelement" durch die „Flächeneinheit" zu ersetzen.

Durch Integration nach φ' zwischen 0 und φ folgt die auf den Streifen BSB' fallende Strahlenmenge

$$d^2 i = \frac{J\, d\lambda}{4\pi\sqrt{1-e^2}}\, h^2 \sin^2\varphi\, d\omega.$$

In dem sphärischen rechtwinkligen Dreiecke BAS ist aber, wenn die Seite AB mit γ bezeichnet wird,

$$\cot\omega = \sin\delta \cot\gamma, \quad \sin\varphi \sin\omega = \sin\gamma;$$

daher

$$\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = \sin\delta \frac{d\gamma}{\sin^2\gamma}, \quad d\omega \sin^2\varphi = \sin\delta\, d\gamma, \quad d^2 i = \frac{J h^2\, d\lambda}{4\pi\sqrt{1-e^2}} \sin\delta\, d\gamma.$$

Integrirt man nun nach γ zwischen den Grenzen $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ und $\gamma = +\frac{\pi}{2}$, so ist die auf das Kugelzweieck der Halbkreise MS und MA fallende Strahlenmenge

$$d i_1 = \frac{J h^2\, d\lambda}{4\sqrt{1-e^2}} \sin\delta.$$

---

* Pyrometrie S. 320.

Ebenso die auf das Kugelzweieck der Halbkreise MS und MC, also $\frac{1}{4}$ der Kugel fallende Strahlenmenge

$$di_2 = \frac{Jh^2\,d\lambda}{4\sqrt{1-e^2}},$$

und die auf die nördliche beleuchtete Erdfläche fallende Strahlenmenge

$$di_1 + di_2 = di = \frac{Jh^2\,d\lambda}{4\sqrt{1-e^2}}(1+\sin\delta) = \frac{Jh^2\,d\lambda}{4\sqrt{1-e^2}}(1+\sin\sigma\sin\lambda).$$

Integrirt man nun noch λ zwischen λ_0 und λ, so wird

$$i(\lambda_0, \lambda) = \frac{Jh^2}{4\sqrt{1-e^2}}[(\lambda-\lambda_0) - \sin\sigma(\cos\lambda - \cos\lambda_0)].$$

Für $\lambda_0 = 0$, $\lambda = \pi$ erhält man die auffallende Strahlenmenge für die nördliche Erdhälfte in ihrem Sommerhalbjahre

$$i_s = \frac{Jh^2}{4\sqrt{1-e^2}}(\pi + 2\sin\sigma),$$

und für $\lambda_0 = \pi$, $\lambda = 2\pi$ die in ihrem Winterhalbjahre

$$i_w = \frac{Jh^2}{4\sqrt{1-e^2}}(\pi - 2\sin\sigma),$$

und in dem ganzen Jahre

$$i' = \frac{Jh^2\pi}{2\sqrt{1-e^2}}.$$

Ebenso gross ergiebt sich die für die südliche Erdhälfte, daher für die ganze Erde und das ganze Jahr

$$i = \frac{Jh^2\pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Letztere Formel kann man auch unmittelbar aus 8') erhalten; dieselbe liefert während der Zunahme von λ um $d\lambda$ durch Multiplication mit der Fläche des grössten Kreises der Erde

$$di = \frac{Jh^2\pi}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\,d\lambda,$$

woraus folgt

$$i(0, \lambda) = \frac{Jh^2\pi}{2\pi\sqrt{1-e^2}}\lambda, \quad i(0, 2\pi) = i = \frac{Jh^2\pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

1. Die auf die ganze Erde fallende Strahlenmenge ist mit der Zunahme der Länge λ der Sonne proportional, sie ist also für alle astronomischen und für alle meteorologischen Vierteljahre dieselbe, gleich $\frac{1}{4}$ derjenigen für's ganze Jahr.

2. Auf die nördliche Erdhälfte fällt in ihrem Sommerhalbjahre die gleiche Strahlenmenge wie auf die südliche in ihrem Sommerhalbjahre. Dasselbe gilt für die Winterhalbjahre, für das ganze Jahr, für die astro-

nomischen und meteorologischen Vierteljahre. Dasselbe gilt auch bei der ellipsoidischen Erdgestalt, da sich früher die Bestrahlungsstärke (für gleiche Flächenelemente) der nördlichen und südlichen Erdhälfte in diesen Zeitabschnitten als übereinstimmend ergab.

3. Die auf die nördliche und südliche Erdhälfte auffallenden Strahlenmengen in ihrem Sommer- und Winterhalbjahre verhalten sich wie

$$(\pi + 2 \sin\sigma) : (\pi - 2 \sin\sigma) = 3{,}93768 : 2{,}34550,$$

oder nahe wie 5:3.

Beachtet man, dass die Erde eine sphäroidische Gestalt besitzt, so entstehen kleine Aenderungen, aber nur in den von ganzen Theilen der Erde aufgenommenen Strahlenmengen. Sei r der Halbmesser des Aequators, r' die halbe Umdrehungsaxe, $p = \frac{r - r'}{r} = \frac{1}{299{,}15}$ (nach Bessel) die Abplattung, c die lineare Excentricität, bestimmt durch $c^2 = r^2 - r'^2 = r^2(2p - p^2)$, so wird die ganze Erde bei der Declination δ der Sonne von einem cylindrischen Strahlenbüschel getroffen, dessen senkrechter Querschnitt eine Ellipse ist mit der grossen Axe $= 2r$ und der kleinen Axe $= 2r''$. Legt man an den durch den Sonnenmittelpunkt gehenden elliptischen Erdmeridian eine Tangente aus dem Sonnenmittelpunkte und fällt auf sie zwei Senkrechte aus den Brennpunkten der Ellipse, so ist der Abstand der Fusspunkte derselben $= 2c \cos\delta$. Die Fusspunkte liegen bekanntlich auf einem Kreise, welcher die grosse Axe der Ellipse zum Durchmesser hat. Daher ist der senkrechte Abstand des Erdmittelpunktes von jener Tangente oder r'' eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete $c \cos\delta$ und dessen Hypotenuse r ist. Demnach gilt

$$r''^2 = r^2 - c^2 \cos^2\delta = r^2(1 - 2p \cos^2\delta + p^2 \cos^2\delta),$$

woraus mit Vernachlässigung von p^2, welches bei unseren Berechnungen auf fünf Decimalstellen keinen Einfluss besitzt,

$$r'' = r(1 - p \cos^2\delta).$$

Nun ist die Fläche des senkrechten Querschnittes des auf die ganze Erde fallenden Strahlenbüschels $= rr''\pi = r^2\pi(1 - p \cos^2\delta)$, des auf die Fläche des Aequators fallenden $= r^2 \sin\delta\,\pi$, des auf die nördliche Erdhälfte fallenden $= \frac{1}{2}\pi r^2(1 - p \cos^2\delta + \sin\delta)$.

Daher fällt im Zeittheilchen $d\tau$ eine Strahlenmenge auf die nördliche Erdhälfte

$$di_1 = \frac{J}{2\pi\sqrt{1 - e^2}} \cdot \tfrac{1}{2}\pi r^2(1 - p \cos^2\delta + \sin\delta) \cdot \delta\lambda;$$

oder wenn man beachtet, dass $\sin\delta = \sin\sigma \sin\lambda$, und wenn man die im ganzen Jahre auf die Erdkugel vom Halbmesser r fallende Strahlenmenge

$$i = \frac{J r^2 \pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

einführt,

$$di_1 = \frac{i.d\lambda}{4\pi}(1 - p + p \sin^2\sigma \sin^2\lambda + \sin\sigma \sin\lambda).$$

Integrirt man zwischen den Grenzen λ_0 und λ, so erhält man

$$i_1(\lambda_0, \lambda) = \frac{i}{4\pi}\left[(1 - p + \tfrac{1}{2} p \sin^2\sigma)(\lambda - \lambda_0) - \tfrac{1}{4} p \sin^2\sigma(\sin 2\lambda - \sin 2\lambda_0)\right.$$
$$\left. - \sin\sigma(\cos\lambda - \cos\lambda_0)\right].$$

Man erhält hieraus den entsprechenden Ausdruck $i_2(\lambda_0, \lambda)$ für die südliche Erdhälfte, indem man das Vorzeichen von σ umkehrt.

Daraus ergiebt sich nun, wenn man auch die Zahlenwerthe einführt, für das Vierteljahr einer warmen astronomischen Jahreszeit jeder Erdhälfte

$$i_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i_1\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = i_2\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = i_2\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$
$$= \frac{i}{4}\left[\tfrac{1}{2}(1 - p + \tfrac{1}{2} p \sin^2\sigma) + \frac{\sin\sigma}{\pi}\right] = i.0{,}15629,$$

für das kalte astronomische Vierteljahr

$$i_1\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = i_1\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = i_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i_2\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$
$$= \frac{i}{4}\left[\tfrac{1}{2}(1 - p + \tfrac{1}{2} p \sin^2\sigma) - \frac{\sin\sigma}{\pi}\right] = i.0{,}09293,$$

daher durch Addition für die ganze Erde und jedes astronomische Vierteljahr

$$(i_1 + i_2)\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = i.0{,}24922,$$

und für die ganze Erde und das ganze Jahr

$$(i_1 + i_2)(0, 2\pi) = i.0{,}99688.$$

Also fallen im ganzen Jahre auf die sphäroidische Erde etwa $\frac{3}{1000}$ der Strahlen weniger, als auf die kugelförmige vom Halbmesser r des Aequators fallen würden.

Andererseits erhält man für das meteorologische Frühlings- oder Herbstvierteljahr jeder Erdhälfte

$$i_1\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{i}{4}\left[\tfrac{1}{2}(1 - p + \tfrac{1}{2} p \sin^2\sigma) - \frac{p \sin^2\sigma}{2\pi}\right] = i.0{,}12459,$$

für das meteorologische Sommervierteljahr jeder Erdhälfte

$$i_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{i}{4}\left[\tfrac{1}{2}(1 - p + \tfrac{1}{2} p \sin^2\sigma) + \frac{p \sin^2\sigma}{2\pi} + \frac{2\sqrt{2}\sin\sigma}{\pi}\right]$$
$$= i.0{,}21423,$$

für das meteorologische Wintervierteljahr jeder Erdhälfte

$$i_1\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)=\frac{i}{4}\left[\tfrac{1}{2}(1-p+\tfrac{1}{2}p\sin^2\sigma)+\frac{p\sin^2\sigma}{2\pi}-\frac{2\sqrt{2}\sin\sigma}{\pi}\right]$$
$$=i\,.\,0{,}03503;$$

daher für das meteorologische Frühlings- oder Herbstvierteljahr der ganzen Erde

$$(i_1+i_2)\left(\frac{7\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)=i\,.\,0{,}24918$$

und für das meteorologische Sommer- oder Wintervierteljahr der ganzen Erde

$$(i_1+i_2)\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)=i\,.\,0{,}24926.$$

XVIII.

Ueber Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen in ähnlich-veränderlichen Systemen.*

Von

R. Müller,

stud. math. in Leipzig.

In jedem einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen System giebt es bekanntlich Curven, die, als Systemcurven betrachtet, sich in sich selbst bewegen und deshalb als Selbsthüllcurven bezeichnet werden können. Bewegt sich ein Systempunkt auf einer Selbsthüllcurve, so beschreiben alle Systempunkte solche Curven, und eine Systemcurve erzeugt während dieser Bewegung eine Bahnfläche, die, als Systemfläche angesehen, sich in sich selbst bewegt und die wir eine Selbsthüllfläche nennen wollen.**

Wir werden nun in dem Folgenden die Gleichungen und einige Eigenschaften der Selbsthüllcurven und Selbsthüllflächen entwickeln und dann noch einige specielle Selbsthüllflächen hervorheben.

Construirt man zu den Selbsthüllflächen in ähnlich-veränderlichen Systemen das Relief, so erhält man eine besondere Gruppe von Selbsthüllflächen in einförmig bewegten collinear-veränderlichen Systemen; alle in dem Folgenden entwickelten Sätze werden sich daher in einfacher Weise auf diese Gruppe von Selbsthüllflächen collinear-veränderlicher Systeme übertragen lassen.

1.

In jedem einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen System bleibt ein im Endlichen liegender Punkt, der Aehnlichkeitspol, und eine durch

* Vergl. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme, 3. Mittheilung, im 20. Bande dieser Zeitschrift.

** Burmester a. a. O.

denselben gehende Gerade, die Aehnlichkeitsgerade, während der ganzen Bewegung fest. Es sei nun

$$f(r, \omega, z) = 0$$

die Gleichung einer Selbsthüllfläche in Cylindercoordinaten, in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Aehnlichkeitspol und dessen z-Axe die Aehnlichkeitsgerade ist. Da jede Selbsthüllfläche sich selbst ähnlich ist, so muss ihre Gleichung ungeändert bleiben, wenn man r und z in demselben Verhältnisse vergrössert und zugleich das Coordinatensystem um die Aehnlichkeitsgerade dreht. Betrachten wir eine unendlich kleine Vergrösserung $1 + d\alpha$, infolge welcher r in $r + r\,d\alpha$ und z in $z + z\,d\alpha$ übergeht, und eine unendlich kleine Drehung $d\beta$, so ändern sich r, ω, z resp. um

$$\delta r = r\,d\alpha, \quad \delta\omega = d\beta, \quad \delta z = z\,d\alpha.$$

Da die Flächengleichung ungeändert bleiben soll, so muss

$$\delta f(r, \omega, z) = 0$$

sein, d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial r} r\,d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\beta + \frac{\partial f}{\partial z} z\,d\alpha = 0.$$

Bezeichnen wir die Constante $\frac{d\beta}{d\alpha}$ mit $\frac{1}{k}$, so geht diese Gleichung über in

$$r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{k}\,\frac{\partial f}{\partial \omega} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

oder

$$r\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial \omega} = z.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung der Selbsthüllflächen. Durch Integration ergiebt sich hieraus die allgemeine Gleichung in der Form

1) $$\log z - k\omega = f(\log r - k\omega)$$

oder

2) $$\frac{r}{z} = \varphi(\log z - k\omega),$$

oder auch

3) $$\frac{z}{r} = \psi(\log r - k\omega).$$

In der That bleiben diese Gleichungen ungeändert, wenn man für r $e^{\lambda}r$, für z $e^{\lambda}z$ und für ω $\omega + \frac{\lambda}{k}$ setzt.*

Aus Gleichung 3) folgt, dass jede Selbsthüllfläche die xy-Ebene nur im Coordinatenanfang oder in einer Anzahl von logarithmischen Spiralen schneidet.

* Vergl. Peterson, Ueber Curven und Flächen, Leipzig 1868, S. 77.

2.

Aus den Gleichungen zweier Selbsthüllflächen desselben Systems

$$\log z - k\omega = f_1(\log r - k\omega), \quad \log z - k\omega = f_2(\log r - k\omega)$$

folgt, da k in beiden Gleichungen dieselbe Grösse bedeutet,

$$F_1(\log r - k\omega) = 0, \quad F_2(\log z - k\omega) = 0,$$

mithin besteht die Durchdringungscurve der beiden Flächen aus einer Anzahl von Curven, deren Gleichungen die Form haben

$$\log r - k\omega = \log a, \tag{4}$$

$$\log z - k\omega = \log b. \tag{5}$$

Da diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man für r $e^{\lambda}r$, für z $e^{\lambda}z$ und für ω $\omega + \frac{\lambda}{k}$ setzt, so repräsentiren sie eine Selbsthüllcurve. **Zwei Selbsthüllflächen desselben ähnlich-veränderlichen Systems schneiden sich also stets in einer Anzahl von Selbsthüllcurven, welche diesem System angehören.** Dieser Satz ergiebt sich übrigens als specieller Fall aus einem analogen, für die W-Flächen geltenden Satze, da die Selbsthüllflächen nur specielle W-Flächen sind.*

Die Gleichungen 4) und 5) enthalten zwei willkürliche Constanten, folglich **giebt es in jedem einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen System eine zweifach unendliche Schaar von Selbsthüllcurven. Dieselben besitzen den Aehnlichkeitspol als asymptotischen Punkt, haben aber sonst keinen Punkt mit einander gemein.**

Aus 4) und 5) folgt

$$z = \frac{b}{a} r. \tag{6}$$

Bezeichnen wir nun den Bogen der durch Gleichung 4) dargestellten logarithmischen Spirale mit s, so ist, wenn für $r=0$ $s=0$ gesetzt wird,

$$s = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} r,$$

also geht 6) über in

$$z = \frac{bk}{a\sqrt{1+k^2}} s.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, folglich **sind alle Selbsthüllcurven eines einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems nach dem Aehnlichkeitspol laufende geodätische**

---

* *Klein et Lie, Sur une certaine famille de courbes et de surfaces, Comptes rendus 1870, I, p. 1278.*

Linien von Cylindern, die bei veränderlichem a durch Gleichung 4) dargestellt werden.

Nach 6) liegt jede Selbsthüllcurve zugleich auf einem Rotationskegel, dessen Spitze der Aehnlichkeitspol und dessen Axe die Aehnlichkeitsgerade ist. Wickeln wir diesen Kegel in eine Ebene ab, setzen also

$$r = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\varrho, \quad \omega = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\vartheta,$$

so geht Gleichung 4) über in

$$\varrho = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{k\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\vartheta}.$$

Die Selbsthüllcurve erscheint also in der Abwickelung als logarithmische Spirale, deren asymptotischer Punkt der Aehnlichkeitspol ist. Diese Eigenschaft liefert ein einfaches Mittel, um die Selbsthüllcurve im Modell darzustellen.

Für $c = 0$ degenerirt die betrachtete Curve zu einer logarithmischen Spirale; überhaupt lassen sich die meisten der für diese geltenden Sätze auf jene übertragen. So liegen z. B. die Krümmungsmittelpunkte der Selbsthüllcurve wieder auf einer solchen Curve.

3.

Die Krümmungslinien der Selbsthüllflächen. Wir werden zeigen, dass die Selbsthüllflächen der einförmig bewegten ähnlich-veränderlichen Systeme zu den wenigen Flächenfamilien gehören, bei denen man die Differentialgleichung der Krümmungslinien allgemein integriren kann. Zu dem Zwecke bedienen wir uns nicht mehr der bisher gebrauchten Cylindercoordinaten, sondern setzen

$$x = e^{ku+v}\cos u, \quad y = e^{ku+v}\sin u, \quad z = e^{ku+f(v)},$$

welche Substitutionen der Flächengleichung 3) identisch genügen. Die Linien der constanten u sind in diesem Falle die Meridiancurven der Fläche* und die Linien der constanten v die Selbsthüllcurven, welche die Fläche erfüllen. Dann ergiebt sich unter Einführung der bekannten Gauss'schen Zeichen:

$$\begin{aligned}
a &= e^{ku+v}(k\cos u - \sin u),\\
b &= e^{ku+v}(k\sin u + \cos u),\\
c &= k e^{ku+f(v)};\\
a' &= e^{ku+v}\cos u,\\
b' &= e^{ku+v}\sin u,\\
c' &= e^{ku+f(v)} f'(v);\\
A &= e^{2ku+v+f(v)}\left[(k\sin u + \cos u) f'(v) - k\sin u\right],\\
B &= e^{2ku+v+f(v)}\left[k\cos u - (k\cos u - \sin u) f'(v)\right],\\
C &= -e^{2ku+2v};
\end{aligned}$$

* Unter Meridiancurve verstehen wir den Schnitt, den eine durch die Aehnlichkeitsgerade gelegte Ebene mit der Fläche bildet.

$$\alpha = e^{ku+v}(k^2 \cos u - 2k \sin u - \cos u),$$
$$\beta = e^{ku+v}(k^2 \sin u + 2k \cos u - \sin u),$$
$$\gamma = k^2 e^{ku+f(v)};$$
$$\alpha' = e^{ku+v}(k \cos u - \sin u),$$
$$\beta' = e^{ku+v}(k \sin u + \cos u),$$
$$\gamma' = k e^{ku+f(v)} f'(v);$$
$$\alpha'' = e^{ku+v} \cos u,$$
$$\beta'' = e^{ku+v} \sin u,$$
$$\gamma'' = e^{ku+f(v)}(f'(v)^2 + f''(v));$$
$$D = e^{3ku+2v+f(v)}[k^2 - (1+k^2) f'(v)],$$
$$D' = k e^{3ku+2v+f(v)}[1 - f'(v)],$$
$$D'' = e^{3ku+2v+f(v)}[f'(v) - f'(v)^2 - f''(v)];$$
$$E = e^{2ku}[(1+k^2)e^{2v} + k^2 e^{2f(v)}],$$
$$F = k e^{2ku}[e^{2v} + e^{2f(v)} f'(v),$$
$$G = e^{2ku}[e^{2v} + e^{2f(v)} f'(v)^2].$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
k^2 - (1+k^2) f'(v) &= D_1, \\
k(1 - f'(v)) &= D'_1, \\
f'(v) - f'(v)^2 - f''(v) &= D''_1; \\
(1+k^2)e^{2v} + k^2 e^{2f(v)} &= E_1, \\
k[e^{2v} + e^{2f(v)} f'(v)] &= F_1, \\
e^{2v} + e^{2f(v)} f'(v)^2 &= G_1,
\end{aligned}$$

so lautet die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$e^{5ku+2v+f(v)}(F_1 D_1 - E_1 D'_1)\,du^2 + e^{5ku+2v+f(v)}(D_1 G_1 - D''_1 E_1)\,du\,dv + e^{5ku+2v+f(v)}(G_1 D'_1 - F_1 D''_1)\,dv^2 = 0,$$

und hieraus ergiebt sich als allgemeine Gleichung der Krümmungslinien der Selbsthüllflächen

$$7) \quad u = \int \frac{D''_1 E_1 - D_1 G_1 \pm \sqrt{(D''E_1 - D_1 G_1)^2 + 4(F_1 D_1 - E_1 D'_1)(F_1 D''_1 - G_1 D'_1)}}{2(F_1 D_1 - E_1 D'_1)}\,dv + Const.$$

4.

Specielle Selbsthüllflächen. Die allgemeinste Selbsthüll-Regelfläche entsteht, wenn sich die Punkte einer Systemgeraden auf Selbsthüllcurven bewegen. Ein Punkt der Geraden wird immer eine logarithmische Spirale in der xy-Ebene beschreiben; die Gleichungen derselben seien in der Form gegeben

$$x_1 = a e^{k\varphi_1} \cos \varphi_1, \quad y_1 = a e^{k\varphi_1} \sin \varphi_1, \quad z_1 = 0.$$

Betrachten wir ferner einen Punkt der Geraden, der sich auf einer Selbsthüllcurve mit den Gleichungen

$$x_2 = \alpha e^{k\varphi_2} \cos\varphi_2, \quad y_2 = \alpha e^{k\varphi_2} \sin\varphi_2, \quad z_2 = \beta e^{k\varphi_2}$$

bewegt, und setzen fest, dass stets

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \gamma$$

sein soll, so ist hierdurch die Regelfläche völlig bestimmt, und die Gleichungen der Erzeugenden sind

$$8) \qquad \beta e^{k\gamma} x + (a\cos\varphi - \alpha e^{k\gamma}\cos(\gamma+\varphi))\, z = a\beta e^{k(\gamma+\varphi)}\cos\varphi,$$

$$9) \qquad \beta e^{k\gamma} y + (a\sin\varphi - \alpha e^{k\gamma}\sin(\gamma+\varphi))\, z = a\beta e^{k(\gamma+\varphi)}\sin\varphi.$$

Setzen wir hierin

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega$$

und eliminiren φ zwischen 8) und 9), so folgt als Gleichung der allgemeinsten Selbsthüll-Regelfläche

$$10) \quad (a - \alpha e^{k\gamma}\cos\gamma)\, z + e^{k\gamma}\sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2 z^2 \sin^2\gamma} = a\beta e^{k\left(\gamma + \omega - \arcsin\frac{\alpha z \sin\gamma}{\beta r}\right)}$$

oder

$$k \arcsin\left(\frac{\alpha\sin\gamma}{\beta}\cdot\frac{z}{r}\right) + \log\left(\frac{a - \alpha e^{\gamma k}\cos\gamma}{\beta e^{k\gamma}}\cdot\frac{z}{r} + \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha\sin\gamma}{\beta}\cdot\frac{z}{r}\right)^2}\right)$$
$$- \log a = k\omega - \log r.$$

Selbstverständlich haben alle Erzeugenden dieser Fläche gegen die Aehnlichkeitsgerade gleichen Neigungswinkel; der Cosinus desselben ist gleich

$$\frac{\beta e^{k\gamma}}{\sqrt{a^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\, e^{2k\gamma}}}.$$

Setzen wir in 10) $a = \infty$, so erhalten wir

$$11) \qquad z = \beta e^{k\left(\gamma + \omega - \arcsin\frac{\alpha z \sin\gamma}{\beta r}\right)}$$

als Gleichung einer Regelfläche, deren Erzeugende parallel zur xy-Ebene sind.

Für $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ geht 10) über in

$$12) \qquad az + \beta r = a\beta e^{k\omega}.$$

Dies ist Gleichung einer Kegelfläche, deren Erzeugende die Aehnlichkeitsgerade schneiden.

Setzt man hierin noch $a = \infty$, so ergiebt sich

$$13) \qquad z = \beta e^{k\omega},$$

d. h. eine Conoidfläche.

Im Falle, dass $a = 0$ ist, repräsentirt 10) einen Rotationskegel.

Um zu entscheiden, wann die durch 10) dargestellte Fläche eine abwickelbare sein wird, differentiiren wir 8) und 9) nach φ und erhalten

$$(-a\sin\varphi + \alpha e^{k\gamma}\sin(\gamma+\varphi))\, z = a\beta e^{k(\gamma+\varphi)}(k\cos\varphi - \sin\varphi),$$
$$(a\cos\varphi - \alpha e^{k\gamma}\cos(\gamma+\varphi))\, z = a\beta e^{k(\gamma+\varphi)}(k\sin\varphi + \cos\varphi),$$

also

$$(k\sin\varphi + \cos\varphi)(-a\sin\varphi + \alpha e^{k\gamma}\sin(\gamma+\varphi))$$
$$= (k\cos\varphi - \sin\varphi)(a\cos\varphi - \alpha e^{k\gamma}\cos(\gamma+\varphi)),$$

d. h.

$$a = \alpha e^{k\gamma \frac{\sin\gamma + k\cos\gamma}{k}}.$$

Die Gleichung der abwickelbaren Selbsthüllflächen hat demnach die Form

$$14)\quad \frac{\alpha}{k} z \sin\gamma + \sqrt{\beta^2 r^2 - \alpha^2 z^2 \sin^2\gamma} = \frac{\alpha\beta}{k}(\sin\gamma + k\cos\gamma) e^{k\left(\omega - \arcsin\frac{\alpha z \sin\gamma}{\beta r}\right)}.$$

Die Rückkehrkante dieser Flächen ist eine Selbsthüllcurve mit den Gleichungen

$$r = \alpha e^{k\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}, \quad z = \beta e^{k\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)},$$

wenn der Einfachheit wegen $\gamma = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird.

Wir betrachten ferner die Fläche

$$\log z - k\omega = \log\left(n \pm \sqrt{p^2 - \left(\frac{r}{e^{k\omega}} - m\right)^2}\right)$$

oder

$$15)\quad (r - m e^{k\omega})^2 + (z - n e^{k\omega})^2 = p^2 e^{2k\omega}.$$

Diese Fläche wird von allen Meridianebenen in Kreisen geschnitten, und die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der Selbsthüllcurve

$$\varrho = m e^{k\omega}, \quad \zeta = n e^{k\omega},$$

für $m = 0$ also auf der z-Axe und für $n = 0$ auf einer logarithmischen Spirale in der xy-Ebene. Die xy-Spur der Fläche besteht aus zwei logarithmischen Spiralen

$$r = (m \pm \sqrt{p^2 - n^2})\, e^{k\omega},$$

die für $p < n$ imaginär werden.

Ein Analogon hierzu bildet die Fläche

$$16)\quad r^2 = z^2\left(a^2 + p^2 - 2ap\cos\frac{\log z - k\omega}{k}\right),$$

welche von allen zur Aehnlichkeitsgeraden senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten wird, deren Mittelpunkte auf einer Selbsthüllcurve liegen.

Die beiden durch 15) und 16) dargestellten Flächen sind specielle Fälle einer allgemeinen Fläche, die entsteht, wenn sich die Punkte eines ähnlich-veränderlichen Kreises auf Selbsthüllcurven bewegen.

Alle Flächen mit der Gleichung

$$17)\quad \log z - k\omega = c(\log r - k\omega),$$

wobei c eine Constante bedeutet, werden von den Meridianebenen in algebraischen Curven geschnitten, von allen zur Aehnlichkeitsgeraden senkrechten Ebenen in logarithmischen Spiralen und von geraden Kreiscylindern, welche die Aehnlichkeitsgerade zur Axe haben, in Curven, die in der Abwickelung als logarithmische Linien erscheinen. Für $c = 2$ ergiebt sich als specieller Fall die Fläche

$$r^2 = z e^{k\omega},$$

die von den Meridianebenen in Parabeln getroffen wird.

Die Fläche

$$18) \qquad z = e^{k\omega}(\log r - k\omega)$$

wird von den Meridianebenen in logarithmischen Linien geschnitten, welche die negative z-Axe zur Asymptote haben.

Setzt man in der Gleichung

$$19) \qquad az = r(k\omega - \log r + b)$$

$r \doteq const.$, so erhält man die Gleichung einer gewöhnlichen Schraubenfläche; die durch 19) dargestellte Fläche wird also von coaxialen Schraubenlinien von verschiedener Neigung erfüllt.

Wir betrachten schliesslich die Fläche

$$20) \qquad z = ar \sin\left(\omega - \frac{1}{k}\log r + b\right).$$

Jeder Cylinder $r = c$ schneidet dieselbe in einer Curve, welche sich in eine Sinoide abwickelt. Diese Curve kann aber auch angesehen werden als die Schnittlinie des Cylinders $r = c$ mit der Ebene

$$z = ar \sin\left(\omega - \frac{1}{k}\log c + b\right)$$

oder

$$z = a \sin\left(b - \frac{1}{k}\log c\right) x + a \cos\left(b - \frac{1}{k}\log c\right) y.$$

Bei variablem c umhüllt diese Ebene einen Kegel

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die betrachtete Fläche hat also die Eigenschaft, dass sie von allen Cylindern $r = c$ in Ellipsen geschnitten wird, deren Ebenen einen Rotationskegel umhüllen und deren Mittelpunkt der Aehnlichkeitspol ist.

XIX.

Ueber die Flächen zweiten Grades, für welche zwei Flächen zweiten Grades zu einander polar sind.

Von

HERMANN THIEME.

Für die Aufgaben, zu zwei Kegelschnitten einer Ebene andere Kegelschnitte und zu zwei Flächen zweiten Grades andere Flächen zweiten Grades zu finden, für welche die gegebenen Curven oder Flächen polar zu einander sind, hat zuerst Steiner Lösungen gegeben, diese uns aber nur in einer kurzen Notiz überliefert.[1]) Später fand die Aufgabe der Ebene eine Lösung durch Herrn Cremona[2]), eine eingehende Behandlung durch Herrn Prof. Rosanes[3]) auf analytischem und durch Herrn Prof. Schroeter[4]) auf synthetischem Wege. Auf dieselbe Frage beziehen sich die Arbeiten der Herren Ruffini[5]), Battaglini[6]) und Siacci[7]). Das Problem für Flächen zweiten Grades ist im Zusammenhange mit den entsprechenden Fragen für eine und zwei Dimensionen von Herrn d'Ovidio[8]) in analytischer Methode behandelt worden.

Das Folgende enthält eine synthetische Lösung des Problems für drei Dimensionen. Um eine möglichst einheitliche Methode der Untersuchung anwenden zu können, behandle ich zunächst die entsprechende Frage für Punktsysteme einer Geraden (§ 1). Dann suche ich die Bedingungen der Lösbarkeit des Problems für drei Dimensionen, construire allgemein die Flächen, welche die Lösung bilden, und leite die in jedem Falle ihnen zukommenden Eigenschaften ab (§ 2). In § 3 behandle ich die Lösung, wenn das den gegebenen Flächen gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole 4, in § 4, wenn es 2, in § 5, wenn es 0 reelle Ecken hat.

---

1) Crelle, Bd. 32 S. 79.

2) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* S. 89.

3) Inaugural-Diss., Breslau 1865.

4) Theorie der Kegelschnitte, 2. Aufl., S. 391 flg.

5) *Memorie della R^a. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena t. 13^o e 14^o.*

6) *Atti della R^a. Accad. de' Lincei di Roma, Sessione del 7 aprile 1872.*

7) *Atti della R^a. Accademia delle Scienze di Torino, v. 7^o, Adunanza del 9 giugno 1872.*

8) *Giornale di Matematiche di Napoli, v. X,* S. 313.

§ 1.

Liegen in einer Geraden g zwei Punktsysteme A und P, und sucht man, wobei ich im Folgenden die Abkürzung „Paar" für Punktpaar gebrauche, zu den Paaren von A die conjugirten Punkte für P, so erhält man eine neue Reihe von Paaren, die ein Punktsystem B bilden; A und B sind gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch. M, das Paar $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, das gleichzeitig ein Paar von A und P ist, ist ein solches auch für B; sind $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ imaginär, so sind die in diesem Falle stets reellen Doppelelemente von A, P und B Paare eines elliptischen Punktsystems M, das eben $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ vertritt; es folgt dies daraus, dass je ein Doppelelement von A mit je einem von B die Doppelelemente von P harmonisch trennt. Sind umgekehrt A und B gegeben und P gesucht, so ist Bedingung der Lösbarkeit dieser Aufgabe, dass A und B gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch sind.

Sind A und B hyperbolisch, ihre Doppelelemente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, so erhält man zwei Lösungen P^1 und P^2:

P^1 bestimmt durch die Paare $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$,
P^2 „ „ „ „ $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$.

Das reelle oder imaginäre Paar M, das A und B gemeinsam ist, ist ebenfalls ein Paar von P^1 und P^2. Die Punktsysteme M, P^1, P^2 stehen in einer bekannten merkwürdigen Beziehung.[1]) Die Doppelelemente eines dieser Punktsysteme bilden das gemeinschaftliche Paar der beiden andern.

Sind A und B elliptisch, so ist M hyperbolisch. Ist $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ ein beliebiges Paar von A und $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$ das für ein gesuchtes P entsprechende Paar von B, so müssen $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_1^\beta$, $\mathfrak{x}_2^\alpha\mathfrak{x}_2^\beta$ Paare von P sein. Die Eigenschaften des vollständigen Vierecks geben die Construction von $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$, wenn das Paar $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ bekannt ist. Hierzu verbinde ich einen Punkt $\mathfrak{o}$ in einer durch g gehenden Ebene mit $\mathfrak{x}_1^\alpha$, $\mathfrak{x}_2^\alpha$ und $\mathfrak{m}_1$, wobei ich $\mathfrak{m}_1$ als das auf der endlichen Strecke $\mathfrak{x}_1^\alpha\mathfrak{x}_2^\alpha$ liegende Doppelelement von M voraussetze, durch Gerade und ziehe durch $\mathfrak{m}_2$ eine Gerade, welche $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{x}_1^\alpha$, $\mathfrak{o}\mathfrak{x}_2^\alpha$ resp. in $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ trifft. Ist $\mathfrak{x}_1^\beta\mathfrak{x}_2^\beta$ gefunden, so schneiden sich $\mathfrak{t}\mathfrak{x}_1^\beta$ und $\mathfrak{s}\mathfrak{x}_2^\beta$ auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$. Verbinde ich $\mathfrak{t}$ mit den Punkten von g, $\mathfrak{s}$ mit den zu ihnen für B conjugirten Punkten, so erhalte ich in $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ projectivische Strahlbüschel von gleichem Drehungssinne, weil B elliptisch ist, und $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ auf derselben Seite von g liegen. Die Strahlbüschel $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ schneiden, da ihre Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ liegen, diese Gerade in zwei ungleichlaufenden projectivischen Punktreihen, die bekanntlich stets zwei entsprechende Punkte gemeinsam haben. Jedes dieser Doppelelemente liefert, mit $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ ver-

1) Schroeter, Kegelschnitte, S. 56 u. 57.

bunden, ein zu $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{x}_2^{\alpha}$ in der geforderten Weise zugeordnetes Paar von B und dadurch ein Punktsystem P. Es giebt also zwei Punktsysteme P^1 und P^2, für welche A und B polar sind.

Die nähere Betrachtung der auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ befindlichen Punktreihen giebt die Eigenschaften von P^1 und P^2. Es schneiden nämlich die Strahlbüschel $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ zwei Punktreihen in involutorischer Lage aus. Dem Strahl $\mathfrak{t}\mathfrak{m}_1$ entspricht $\mathfrak{s}\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{t}\mathfrak{m}_2$ ebenso $\mathfrak{s}\mathfrak{m}_1$; in den Punktreihen auf $\mathfrak{m}_1\mathfrak{o}$ entsprechen sich daher die Punkte $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{r}$ gegenseitig. Da hiernach ein Paar gleicher entsprechender Strecken verkehrt auf einander liegen, so haben die Punktreihen involutorische Lage. Die Doppelelemente $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ des durch diese ungleichlaufenden Punktreihen erzeugten hyperbolischen Punktsystems D liefern durch ihre Verbindungslinien mit $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ die $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{x}_2^{\alpha}$ für P^1 und P^2 zugeordneten Paare von B. Da $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ ein Paar von D ist, liegen $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ harmonisch. Das Punktsystem P^1, welches der auf der endlichen Strecke $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ liegende Punkt $\mathfrak{d}_1$ liefert, ist stets hyperbolisch; denn der durch $\mathfrak{d}_1$ zu $\mathfrak{x}_2^{\alpha}$ gehörige Punkt $\mathfrak{x}_2^{\beta}$ liegt stets auf der endlichen Strecke $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$, der zu $\mathfrak{x}_1^{\alpha}$ gehörige $\mathfrak{x}_1^{\beta}$ ausserhalb derselben, so dass $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{x}_1^{\beta}$ und $\mathfrak{x}_2^{\alpha}\mathfrak{x}_2^{\beta}$ sich nie trennen können. $\mathfrak{d}_2$ liegt auf $\mathfrak{m}_1\infty\mathfrak{r}$; liegt er auf $\mathfrak{m}_1\infty$, so liegen $\mathfrak{y}_1^{\beta}\mathfrak{y}_2^{\beta}$, das zugehörige Paar von B für P^2, auf der Strecke $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{x}_2^{\alpha}$; liegt $\mathfrak{d}_2$ auf $\infty\mathfrak{r}$, so liegen $\mathfrak{y}_1^{\beta}\mathfrak{y}_2^{\beta}$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{x}_2^{\alpha}$. In beiden Fällen trennen sich die Paare $\mathfrak{x}_1^{\alpha}\mathfrak{y}_1^{\beta}$ und $\mathfrak{x}_2^{\alpha}\mathfrak{y}_2^{\beta}$; das durch sie bestimmte Punktsystem P^2 ist elliptisch.

Da die Punkte $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{r}$ harmonisch liegen, so müssen ihre Projectionen von $\mathfrak{t}$ nach g, d. h. die Punkte $\mathfrak{x}_1^{\beta}\mathfrak{y}_1^{\beta}$ zu den Projectionen von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{r}$, zu $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ harmonisch liegen. Da $\mathfrak{x}_1^{\beta}$ und $\mathfrak{y}_1^{\beta}$ für P^1 und P^2 die conjugirten Punkte zu $\mathfrak{x}_1^{\alpha}$ sind, und wir diesen beliebig auf g wählen können, so haben wir den Satz:

Die conjugirten Punkte eines Punktes $\mathfrak{x}$ auf g für P^1 und P^2 sind ein Paar von M.

Ist $\mathfrak{x}$ Doppelelement von P^1, so ist hiernach der conjugirte Punkt für P^2 zu $\mathfrak{x}$ auch der conjugirte Punkt für M, also das andere Doppelelement von P^1. P^1 ist das gemeinschaftliche Paar von P^2 und M. Ebenso gilt P^2 als Paar von P^1 und M.

Aus diesen Beziehungen ist klar, dass P^2 durch M und P^1 bestimmt ist. Suchen wir also zu einem weitern Punktsystem C auf g, für welches M ein Paar ist, für P^1 das polare Punktsystem D, indem wir wieder zu den Paaren von C für P^1 die conjugirten Punkte suchen, so sind C und D auch für P^2 polar.

§ 2.

Für die folgende Untersuchung mögen grosse lateinische Buchstaben Flächen zweiter Ordnung, die entsprechenden grossen griechischen dieselben Flächen als Flächen zweiter Classe, kleine lateinische — Geraden als Punktreihen, kleine griechische als Ebenenbüschel, grosse deutsche — Ebenen, kleine deutsche — Punkte bezeichnen.

Zwei Flächen zweiten Grades oder allgemein zwei räumliche Polarsysteme A und P haben ein gemeinsames Quadrupel harmonischer Pole[1] (M). $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{m}_4$ seien die Ecken des Tetraeders (M), m_{ik} die Kante $\mathfrak{m}_i\mathfrak{m}_k$, $\mathfrak{M}_i$ die $\mathfrak{m}_i$ gegenüberliegende Ebene, μ_{ik} die Kante $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_k)$, so dass $m_{12} = \mu_{34}$ etc. Ist ferner R ein räumliches Polarsystem, so inducire R auf $\mathfrak{M}_i$ das ebene Polarsystem R_i, auf m_{ik} das Punktsystem R_{ik}, im Punkte $\mathfrak{m}_i$ das Polarsystem P_i, in der Kante μ_{ik} das Ebenensystem P_{ik}.

Sucht man zu A für P das Polargebilde, so erhält man ein neues Polarsystem B. Das Tetraeder (M) ist in sich polar, also auch für B ein Quadrupel harmonischer Pole.

Einem Punkte $\mathfrak{x}$ auf m_{ik} entspricht für P polar eine Ebene $\mathfrak{X}$ durch μ_{ik}, $\mathfrak{x}$ bildet mit $(\mathfrak{X}, m_{ik})$ ein Paar von P_{ik}. Dem Punktsystem A_{ik} entspricht polar B_{ik}, und da B_{ik} mit B_{ik} perspectivisch liegt, sind A_{ik} und B_{ik} zu einander polar für P_{ik}. A und B induciren auf den Kanten von (M) gleichzeitig elliptische oder hyperbolische Punktsysteme.

Sind umgekehrt A und B gegeben, so kann man nach Polarsystemen P fragen, für welche A und B polar sind. Unter der Voraussetzung, die hiermit gemacht werde, dass Polarsysteme P, in denen einem reellen Punkte nicht stets eine reelle Polarebene entspricht, von der Untersuchung ausgeschlossen sind, liefert die vorhergehende Betrachtung als nothwendige Bedingung der Lösbarkeit allgemein, dass A_{ik} und B_{ik} gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch sind.

Diese Bedingung giebt bei allgemeiner Lage von A und B nach den drei Graden der Realität von (M) folgende lösbaren Fälle der Aufgabe:

Sind alle Ecken von (M) reell, so müssen A und B sein entweder imaginäre Ellipsoide oder einschaalige Hyperboloide, welche dieselben zwei Paar Kanten von (M) in reellen Punkten schneiden, oder nichtgeradlinige Flächen, welche dasselbe Tripel von Kanten in reellen Punkten treffen, also dieselbe Ecke von M im Innern haben. Sind nur zwei Ecken von M reell, so müssen A und B gleichzeitig geradlinige Flächen sein oder nicht. Sind alle Ecken imaginär, so ist die Aufgabe stets lösbar. Dass die hier angeführten Bedingungen für die Lösbarkeit ausreichend sind, zeigt die nachfolgende Lösung.

In jedem Falle sind von (M) zwei Gegenkanten reell[2]), sie seien m_{12} und m_{34}; an die auf ihnen befindlichen Punktsysteme knüpft sich, wenn die Bedingungen der Lösbarkeit erfüllt sind, die in allen Fällen giltige Lösung.

---

1) Vergl. Beyer, Inaugural-Diss., Breslau 1868.

2) Cremona, Oberflächen, S. 222.

Zunächst construire ich (§ 1) die Punktsysteme P^1_{12}, P^2_{12}, für welche A_{12} und B_{12} reciprok sind, und die ebenso zu A_{34} und B_{34} gehörigen Punktsysteme P^1_{34}, P^2_{34}. Die Flächen, für welche m_{12} und m_{34} conjugirte Gerade und irgend ein Paar jener Punktsysteme, z. B. P^i_{12}, P^k_{34}, die auf m_{12} und m_{34} inducirten Punktsysteme sind, bilden ein Flächenbüschel zweiter Ordnung (P^i_{12}, P^k_{34}). Die Grundcurve von (P^i_{12}, P^k_{34}) zerfällt in vier reelle, punktirt-imaginäre oder völlig imaginäre Geraden. Solcher Flächenbüschel sind im Ganzen vier möglich, ihnen müssen nach S. 380 die gesuchten Flächen P angehören.

Polarisiren wir A für irgend eine Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}), so erhalten wir nicht B, sondern eine Fläche B', welche nach S. 379 mit B die Systeme B_{12}, B_{34}, B_{12}, B_{34}, also vier Gerade, die allerdings nicht reell zu sein brauchen, gemeinsam hat. Wählen wir die Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}) so, dass einem System von Pol $\mathfrak{x}$ und Polare $\mathfrak{X}$ für A ein gleiches System für B entspricht, so sind B' und B identisch.

Ist g die durch $\mathfrak{x}$ gehende Gerade, die m_{12} und m_{34} trifft, und η die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $\mathfrak{X}$, der Polare von $\mathfrak{x}$ für A, und m_{12} und m_{34}, so begegnen g und η den Kanten m_{12} und m_{34} in Paaren von A_{12} und A_{34}. Die Polaren von $\mathfrak{x}$ für (P^i_{12}, P^k_{34}) schneiden sich in einer Geraden η', wo η' die Punkte verbindet, die zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) für P^i_{12} und P^k_{34} conjugirt sind. Die Pole von $\mathfrak{X}$ für (P^i_{12}, P^k_{34}) liegen ebenso auf einer Geraden g', die durch die Punkte geht, die zu (η, m_{12}) und (η, m_{34}) für P^i_{12} und P^k_{34} conjugirt sind. Da nun A_{12} und B_{12} für P^i_{12}, A_{34} und B_{34} für P^k_{34} zu einander polar sind, bilden (g', m_{12}) und (η', m_{12}) ein Paar von B_{12}, (g', m_{34}) und (η', m_{34}) ein Paar von B_{34}. Die Polaren der Punkte auf g' für B gehen also auch durch η'.

Den Punkten auf g' sind dadurch die Ebenen durch η' auf zweifache Weise zugeordnet; einem Punkte $\mathfrak{x}'$ auf g' entspricht erstens $\mathfrak{X}'$, die Polare von $\mathfrak{x}'$ für B, zweitens $\mathfrak{X}''$, die Polare von $\mathfrak{x}$ für diejenige Fläche aus (P^i_{12}, P^k_{34}), für welche $\mathfrak{x}'$ der Pol von $\mathfrak{X}$ ist. Wir erhalten daher in η' zwei projectivische Ebenenbüschel und somit zwei Doppelelemente $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$. Ist $\mathfrak{e}_i$ der Punkt auf g', dem $\mathfrak{E}_i$ zugeordnet ist, so sind Pol und Polare $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ für A, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{X}$ für dieselbe Fläche P aus (P^i_{12}, P^k_{34}), $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{E}_i$ für B. Sucht man also zu $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ für P Polare und Pol, so erhält man $\mathfrak{e}_i$, $\mathfrak{E}_i$, ein System von Pol und Polare von B; A wird durch P dual in B transformirt. Jedes der Doppelelemente $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ bestimmt mit $\mathfrak{x}$ als Pol eine Fläche P im Büschel (P^i_{12}, P^k_{34}). Da wir hiernach in jedem Büschel zwei Flächen der verlangten Art erhalten, gilt der Satz:

Es giebt acht Flächen, für welche zwei Flächen A und B polar zu einander sind.

Unsere Construction dieser Flächen giebt sofort eine Eigenschaft; in den Asymptotenpunkten eines der Punktsysteme $P^i_{\varrho\sigma}$ berühren sich vier Flächen P.

Die nähere Betrachtung der in η' vorhandenen projectivischen Ebenenbüschel liefert eine weitere Eigenschaft der acht Flächen P.

Dem Punkte (g', m_{12}) entspricht für B als Polare die Ebene (η', m_{34}); ferner ist (g', m_{12}) der Pol von $\mathfrak{X}$ für das Ebenenpaar in $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$, das m_{12} als Doppelkante besitzt; die Polare von $\mathfrak{x}$ für diese Fläche ist die Ebene (η', m_{12}); der Ebene (η', m_{34}) in dem durch B bestimmten Ebenenbüschel entspricht also in dem durch $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$ bestimmten Büschel die Ebene (η', m_{12}); ebenso entspricht der Ebene (η', m_{12}) des ersten Büschels im zweiten Büschel die Ebene (η', m_{34}). Da sich hiernach die Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}) in den Büscheln η' gegenseitig entsprechen, fällt ein Paar gleicher Winkel verkehrt in einander und die Ebenenbüschel haben involutorische Lage. Die Doppelelemente dieses Ebenensystems sind $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, sie liegen harmonisch zu den Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}). Da $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ die Polaren eines beliebigen Punktes $\mathfrak{x}$ sind, so erhalten wir den Satz:

Die Polarebenen eines Punktes für zwei Flächen P, die $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$ angehören, schneiden sich in einer m_{12} und m_{34} treffenden Geraden η' und sind zu den Ebenen (η', m_{12}) und (η', m_{34}) harmonisch.

Hierdurch ist zunächst klar, dass zwei solche Flächen, sie seien P' und P'', sich gegenseitig bestimmen. Sucht man also zu einer Fläche R, der (M) ein conjugirtes Tetraeder ist, für P' die Polarfläche Σ, so sind R und Σ auch für P'' polar. Construirt man zu allen Flächen R im Büschel (A, B) für P', also auch für P'', die Polarflächen Σ, so erhält man die Flächen der Schaar (B, A); zugleich ist dadurch (B, A) projectivisch auf (A, B) bezogen. Da (M) für jedes Paar R, Σ sich selbst conjugirt ist, so sind die zu R_{12}, S_{12} und R_{34}, S_{34} gehörigen Punktsysteme P_{12} und P_{34} mit den vier bei A und B gefundenen $P^i{}_{12}$ und $P^k{}_{34}$ identisch (§ 1). Die übrigen sechs Flächen P, für welche R und Σ dual sind, müssen demnach den drei noch übrigen Büscheln $(P^i{}_{12}, P^k{}_{34})$ angehören.

Es sei nun P''' eine dritte Fläche, für die A und B polar sind, und $(P^\varrho{}_{12}, P^\sigma{}_{34})$ das Büschel, dem P''' angehört. Die Polare von $\mathfrak{x}$ für R in (A, B) sei $\mathfrak{X}$, die Pole von $\mathfrak{X}$ für $(P^\varrho{}_{12}, P^\sigma{}_{34})$ liegen auf einer Geraden g', die m_{12} und m_{34} trifft; die Polaren der Punkte von g' für die zu R gehörige Fläche Σ bilden ein Ebenenbüschel, dessen Axe η' ebenfalls m_{12} und m_{34} trifft. Ist g wieder die Gerade, die durch $\mathfrak{x}$ geht und m_{12} und m_{34} begegnet, so müssen, da R und Σ für zwei Flächen in $(P^\varrho{}_{12}, P^\sigma{}_{34})$ polar sind, die Punkte (η', m_{12}) und (η', m_{34}) zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) für $P^\varrho{}_{12}$ und $P^\sigma{}_{34}$ conjugirt sein (S. 381). η' ist also ohne Rücksicht auf R und Σ allein durch $\mathfrak{x}$, $P^\varrho{}_{12}$ und $P^\sigma{}_{34}$ bestimmt, η' bleibt ungeändert, wenn R und Σ variiren.

Die Polaren von $\mathfrak{x}$ für das Büschel (A, B) bilden ein zu (A, B) und (B, A) projectivisches Ebenenbüschel, die Pole der Ebenen dieses Büschels für P''' eine projectivische Punktreihe f. Die Polare eines Punktes $\mathfrak{y}$ auf f für die zugehörige Fläche in (B, A) geht durch η', weil P''' dem Büschel (P^{ϱ}_{12}, P^{σ}_{34}) angehört; durch η' gehen also die Polarebenen aller Punkte auf f für die zugehörigen Flächen in (B, A). Im Allgemeinen erhält man, wenn man zu den Punkten einer zu (B, A) projectivischen Punktreihe für die zugehörigen Flächen die Polaren sucht, eine projectivische Developpable dritter Classe oder eine einzige Ebene; in unserem Falle könnten die Polaren der Punkte von f ein projectivisches Ebenenbüschel oder eine einzige Ebene sein. Hier ist das Letztere der Fall; denn da durch P''' sowohl A in B, als B in A transformirt wird, so muss $\mathfrak{E}$, die Polare von $\mathfrak{x}$ für P''', als eine zwei Punkten von f, den Polen von $\mathfrak{E}$ für B und A, zugeordnete Ebene betrachtet werden. Dies ist aber nicht möglich, wenn sich in η' ein zu f projectivisches Ebenenbüschel befinden soll. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{E}$ allen übrigen Punkten von f, allen Elementen von (B, A) und (A, B) als zugeordnet zu betrachten ist.

Suchen wir daher für R in (A, B) zu $\mathfrak{x}$ die Polare $\mathfrak{X}$, zu $\mathfrak{X}$ für P''' den Pol $\mathfrak{e}$, zu $\mathfrak{e}$ für Σ in (B, A) die Polare $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{E}$ die Polare von $\mathfrak{x}$ für P'''. Sind umgekehrt $\mathfrak{e}$ der Pol von $\mathfrak{X}$ für P''', $\mathfrak{E}$ die Polare von $\mathfrak{x}$ für P''', wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$ wieder Pol und Polare für R sind, so sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ Pol und Polare für Σ. R geht also durch Polarisation für P''' in Σ über. Dies giebt allgemein den Satz:

Eine Fläche im Büschel (A, B) hat für die acht Flächen, für welche A und B polar sind, dieselbe Polarfläche in der Schaar (B, A).

Da hiernach A und B vor R und Σ keinen Vorzug haben, können wir auch die letzteren als Ausgangspunkt wählen. Die unendlich vielen Büschel (R, S) und Schaaren (Σ, P) stehen zu den Flächen P in derselben Beziehung wie (A, B) und (B, A).

Dieselbe Schlussfolge, die wir auf dieser und der vorhergehenden Seite anwendeten, um zu zeigen, dass R und Σ für alle Flächen P polar sind, lässt sich benützen, um zu zeigen, dass eine Fläche im Büschel (A, S) zu einer Fläche in (B, P) für die acht Flächen P polar ist. Daraus folgt, dass allen Flächen des Bündels (A, B, S) die Eigenschaft zukommt, für die Flächen P dieselbe Polarfläche zu besitzen. Zieht man noch S' hinzu, die einer weitern Fläche R' in (A, B) polar für die Flächen P zugehört, so ist S' im Allgemeinen nicht eine Fläche des Bündels (A, B, S), und jene Eigenschaft erweitert sich auf alle Flächen des Gebüsches (A, B, S, S').

Ein weiteres Fortschreiten ist nicht möglich; denn für jede der Flächen A, B, S, S' ist (M) ein Quadrupel harmonischer Pole, und umgekehrt alle Flächen, für die (M) ein solches Quadrupel ist, bilden ein Gebüsch, so dass das abgeleitete Gebüsch (A, B, S, S') und das mit (M) gegebene identisch sein müssen.

Dies giebt den allgemeinen Satz:

Eine Fläche R, der (M) ein sich selbst conjugirtes Tetraeder ist, hat für alle Flächen P, für welche A und B polar sind, dieselbe Polarfläche.

Specielle Flächen R sind die Flächen P selbst. Da nun eine Fläche P ihre eigene Polarfläche ist, so gilt der Satz:

Eine Fläche P ist für alle Flächen P ihre eigene Polarfläche.

Aus diesem Satze folgt sofort eine linien-geometrische Eigenschaft der Flächen P. Hat eine dieser Flächen, z. B. P', reelle Punkte, so ist die Polare $\mathfrak{E}$ eines ihrer Punkte $\mathfrak{e}$ für eine andere Fläche, z. B. P'', Tangentialebene von P'; die Verbindungslinien von $\mathfrak{e}$ mit den Punkten der Geraden, in denen P' von $\mathfrak{E}$ geschnitten wird, treffen P' in Punktpaaren, die für P'' conjugirt sind. Im Allgemeinen ist die Singularitätenfläche des Complexes der Geraden, die eine Fläche zweiter Ordnung in Punktpaaren treffen, die für eine andere Fläche zweiter Ordnung conjugirt sind, eine Fläche vierter Ordnung; für die Flächen P' und P'' zerfällt diese in P' und P'' selbst.

Die Flächen, denen (M) ein conjugirtes Tetraeder ist, bilden ein in sich duales System. Man kann seine Flächen zweiter Ordnung auf seine Flächen zweiter Classe eindeutig beziehen; dies ist durch die Flächen P geschehen. Die acht Flächen P repräsentiren darin die sich selbst entsprechenden Elemente.

Mit einem Paare sich für die P entsprechender Flächen, z. B. mit A und B, sind eine Reihe invarianter Gebilde verbunden; diese sind auch für die Flächen P polar. Sucht man zu C, der Polarfläche von A für B, die Polarfläche C' für P, so ist C' die Polarfläche von B für A. Die Fläche zweiter Ordnung, von deren Punkten aus an A Tripel von Tangentialebenen gehen, die für B conjugirt sind, hat für P als Polarfläche den Ort der Ebenen, die für A conjugirte Punkttripel auf B enthalten. Ebenso sind die Flächen, die hieraus durch Vertauschung von A und B hervorgehen, und die durch A und B bestimmten Complexe für P polar.

Den Flächen eines in unserem Gebüsch enthaltenen Bündels zweiter Ordnung entsprechen für die Flächen P die Flächen eines linearen Systems zweiter Classe von zweifacher Unendlichkeit; die Polaren der gemeinsamen Punkte des Bündels zweiter Ordnung sind die gemeinsamen Ebenen des Systems zweiter Classe. Einem Punkte, der den Flächen des Bündels gemeinsam ist, entsprechen für die acht Flächen P acht verschiedene Polaren; diese sind für das System zweiter Classe die gemeinsamen Ebenen. Da man nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ als Grundpunkt eines zum Gebüsch gehörigen Bündels zweiter Ordnung auffassen kann, so gilt der Satz:

Die Polaren eines Punktes $\mathfrak{x}$ für die Flächen P sind die gemeinsamen Ebenen eines linearen Systems zweiter Classe von zweifacher Unendlichkeit; für alle Flächen dieses Systems ist (M) ein sich selbst conjugirtes Tetraeder.

Da die Flächen P in sich dual sind, so gilt auch der duale Satz. Ein specieller Fall von diesem ist:

Die Mittelpunkte der Flächen P sind die Grundpunkte eines Flächenbündels zweiter Ordnung, dessen Flächen (M) als sich selbst conjugirtes Tetraeder besitzen.

Eine Fläche des durch (M) bestimmten Gebüsches ist durch drei Punkte gegeben; die 24 in Bezug auf die Flächen P für drei beliebige Punkte des Raumes genommenen Polaren sind Tangentialebenen derselben Fläche zweiter Classe.

Eine Fläche des Gebüsches ist auch durch eine Gerade g bestimmt; die conjugirten Geraden einer Geraden g für die Flächen P sind acht Gerade einer Fläche zweiten Grades. Diese acht Geraden liegen auf B, wenn g auf A liegt. Die näheren Beziehungen dieser Geraden zum Tetraeder und zu den Flächen A und B geben Aufschluss über die nähere Art der Transformation von A und B in einander; doch wird diese Untersuchung besser für die einzelnen Fälle gesondert geführt.

Mit Hilfe der abgeleiteten Eigenschaften ist es leicht, Systeme von Flächen P zu construiren. Mit dem Tetraeder (M) ist ein Flächengebüsch gegeben; die eindeutige Beziehung zwischen seinen Elementen ist gegeben, sobald eine Fläche P bekannt ist. Dies zeigt, dass durch P und ein zu P conjugirtes Tetraeder (M), über dessen Realität Nichts vorausgesetzt zu sein braucht, die übrigen Flächen P bestimmt sind. Ein System von Flächen P in specieller Lage erhält man, wenn man von den Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades ausgeht.[1])

In geometrischen Untersuchungen im Raume treten sie bei allen Fragen auf, deren entsprechende in der Ebene auf harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte führen. Z. B. ist die Aufgabe, zwei reciproke Räume in polare Lage zu bringen, mit einem solchen System von acht Flächen verknüpft.[2])

§ 3.

Sind alle Ecken, Kanten und Ebenen von (M) reell, so treten die Eigenschaften der Flächen P in grösster Vollständigkeit reell auf.

Eine der in § 2 allgemein construirten Flächen P besitzt, wie (S. 382) nachgewiesen ist, die Eigenschaft, A in B zu transformiren. Einem

---

1) Die Gleichungen dieser acht Flächen sind in der Form $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ enthalten.

2) Vergl. Schroeter, Crelle Bd. 77, S. 120 u. 142.

Punkte $\mathfrak{x}$ auf $m_{\varkappa\lambda}$ entspricht für P als Polare eine Ebene $\mathfrak{X}$ durch $\mu_{\varkappa\lambda}$, und $\mathfrak{X}$ trifft $m_{\varkappa\lambda}$ in dem zu $\mathfrak{x}$ für $P_{\varkappa\lambda}$ conjugirten Punkte. Da nun bei der Transformation $A_{\varkappa\lambda}$ in $\mathsf{B}_{\varkappa\lambda}$ übergeht, und $B_{\varkappa\lambda}$ mit $\mathsf{B}_{\varkappa\lambda}$ perspectivisch liegt, so ist $P_{\varkappa\lambda}$ ein Punktsystem, durch das $A_{\varkappa\lambda}$ und $B_{\varkappa\lambda}$ polar in einander übergehen. Eine Fläche P löst also nicht nur in den bei ihrer Construction zu Grunde gelegten Kanten m_{12} und m_{34} das Problem der Polarität, sondern in allen sechs Tetraederkanten. Die Paare von Punktsystemen, die in den sechs Kanten von (M) das Problem der Polarität lösen, gehören zu je sechs auf achtfache Weise je einer Fläche zweiten Grades an.

Auf Grund dieser Eigenschaft schliesst sich die Discussion der Flächen P bei reellem (M) am einfachsten an die Punktsysteme auf den Kanten an. Zur Bestimmung der P wähle ich die auf den Kanten der Ecke $\mathfrak{m}_1$ liegenden Punktsysteme. Sind $P^1{}_{12}$, $P^1{}_{13}$, $P^1{}_{14}$ die hyperbolischen, $P^2{}_{12}$, $P^2{}_{13}$, $P^2{}_{14}$ die elliptischen Punktsysteme, die das Problem der Polarität auf m_{12}, m_{13}, m_{14} lösen, so bestimmen, da $m_{12}m_{13}m_{14}$ für alle P ein conjugirtes Tripel ist, irgend drei jener Punktsysteme, von denen auf jeder Kante je eins liegt, eine Fläche P. Bezeichnen wir mit $P^{\varrho\sigma\tau}$ die Fläche, welche die Punktsysteme $P^{\varrho}{}_{12}$, $P^{\sigma}{}_{13}$, $P^{\tau}{}_{14}$ inducirt, so sind die acht Flächen:

$$P^{222}\ P^{211}\ P^{121}\ P^{112}\ P^{111}\ P^{122}\ P^{212}\ P^{221}.$$

Die Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ist wirklich mit einer Fläche P des § 2 identisch; denn die Fläche B', in die A durch $P^{\varkappa\lambda\mu}$ übergeht, hat mit B das conjugirte Tetraeder (M) und B_{12}, B_{13}, B_{14} gemeinsam, ist also mit B identisch. $P^{\varkappa\lambda\mu}$ inducirt also auch auf m_{23}, m_{34}, m_{42} Punktsysteme, welche auf diesen das Problem der Polarität lösen, so dass wir zu denselben acht Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ gelangen, wenn wir von einer andern Tetraederkante als $\mathfrak{m}_1$ ausgehen.

Von den Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ist P^{222} ein imaginäres Ellipsoid, weil es auf den Kanten einer Ecke von (M) elliptische Punktsysteme inducirt. P^{211}, P^{121}, P^{112} sind einschaalige Hyperboloide, denn nur diese haben die Eigenschaft, auf zwei Kanten eines conjugirten Tripels hyperbolische, auf der dritten ein elliptisches Punktsystem zu induciren. Die drei Flächen P^{211}, P^{121}, P^{112} schneiden abwechselnd zwei Paar Gegenkanten von (M) in reellen, das dritte Paar in imaginären Punkten, so dass eine von ihnen individualisirt ist, wenn das Paar, das sie nicht reell trifft, angegeben ist. Die analoge Betrachtung zeigt, dass die übrigen vier Flächen nicht-geradlinige Flächen zweiten Grades sind; dabei kann man diese Flächen unter einander dadurch individualisiren, dass man eine Fläche der Ecke von (M) zuordnet, deren Kanten von ihr reell getroffen werden, die also in ihrem Innern liegt, während die übrigen Ecken ausserhalb der Fläche liegen. Unter den Flächen P^{111}, P^{122}, P^{212}, P^{221} können nicht zwei Ellipsoide sein. Zwei solche Flächen haben nämlich stets zwei reelle Punkte einer Kante gemeinsam, die zu den Ecken der Kante harmonisch liegen, so dass eine Ecke stets auf der endlichen, durch die gemeinsamen Punkte begrenzten Strecke liegt. Wären beide Flächen Ellipsoide, so müsste diese Ecke im Innern beider liegen, was unmöglich ist. Dagegen können sowohl vier zweischaalige Hyperboloide, als auch drei zweischaalige Hyperboloide und ein Ellipsoid unter den Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ vorkommen; dies folgt daraus, dass der eine Fall sich aus dem andern durch collineare Transformation herleiten lässt.

Hiernach gilt der Satz:

Ist das gemeinsame Quadrupel (M) harmonischer Pole zweier Flächen zweiten Grades A und B reell, so giebt es ein imaginäres Ellipsoid, drei einschaalige, drei zweischaalige Hyperboloide und ein reelles Ellipsoid oder zweischaaliges Hyperboloid, für die A und B Polarflächen zu einander sind.

Aus dem Verhalten der Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ zum Tetraeder (M) folgt nebenbei, dass keine zwei dieser Flächen als Polargebilde eines reellen räumlichen Polarsystems aufgefasst werden können.

Die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ zerfallen in zwei Gruppen zu je vier:

I) $P^{222}\ P^{211}\ P^{121}\ P^{112}$,

II) $P^{111}\ P^{122}\ P^{212}\ P^{221}$.

I) ist dadurch charakterisirt, dass ihre Flächen auf einem Paar conjugirter Geraden gleichartige, II) dadurch, dass ihre Flächen auf zwei solchen Geraden ungleichartige Punktsysteme induciren. Die Nothwendigkeit dieser Gruppirung zeigt die ganze folgende Untersuchung.

Geht man von einer Fläche I) aus, so erhält man eine Fläche II), indem man das Punktsystem auf einer durch $\mathfrak{m}_1$ gehenden Kante ändert; z. B. erhält man so P^{122} aus P^{222}. Dabei bleiben die Punktsysteme auf zwei Kanten einer Ebene, hier $\mathfrak{M}_2$, ungeändert; dies ist mithin auch für das ganze in $\mathfrak{M}_2$ befindliche Polarsystem der Fall. P^{222} und P^{122} haben also das gleiche Polarsystem in $\mathfrak{M}_2$, infolge dessen auch das gleiche Polarsystem im Punkte $\mathfrak{m}_2$; sie berühren sich in einem imaginären Kegelschnitte der Ebene $\mathfrak{M}_2$. Geht man von P^{112} statt von P^{222} aus, so erhält man die Berührung in einem reellen Kegelschnitte. Diese Eigenschaft besteht auch ersichtlicherweise für zwei Flächen aus I) und II), die nur durch Aenderung der drei Punktsysteme auf m_{12}, m_{13}, m_{14} aus einander hervorgehen. Dies giebt den Satz:

Irgend zwei Flächen aus verschiedenen Gruppen berühren sich in einem einer Tetraederebene angehörigen Kegelschnitte.

Die sämmtlichen Curven, in denen die Ebenen von (M) von den Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ getroffen werden, werden schon allein von den Flächen einer Gruppe ausgeschnitten.

Irgend zwei Flächen derselben Gruppe induciren auf zwei Gegenkanten dieselben Punktsysteme. Bei zwei einschaaligen Hyperboloiden sind diese hyperbolisch, die Verbindungslinien ihrer Asymptotenpunkte liegen ganz auf den Flächen; bei einem einschaaligen Hyperboloid und dem imaginären Ellipsoid sind beide Punktsysteme elliptisch, die Verbindungslinien der Asymptotenpunkte ganz imaginär; bei zwei Flächen der Gruppe II) ist eins der Punktsysteme elliptisch, das andere hyperbolisch, die Verbindungslinien der Asymptotenpunkte punktirt-imaginär, die Flächen berühren sich in den reellen Asymptotenpunkten und haben in den gemeinsamen Tangentialebenen dieser Punkte dieselben Polarsysteme.

Dies lässt sich in den Satz zusammenfassen:

Irgend zwei Flächen derselben Gruppe schneiden sich in vier reellen, punktirt-imaginären oder ganz imaginären Geraden.

Die Schnitte der Tetraederebenen mit den Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ liefern weitere Eigenschaften.

Sind $\mathfrak{x}$, x Pol und Polare für A_i, so sind ihre Polargebilde in Bezug auf die Fläche $P^{\varrho\sigma\tau}$ eine Polare und Polgerade für $\mathfrak{B}_i$; diese treffen $\mathfrak{M}_i$ in Polare und Pol x', $\mathfrak{x}'$ für B_i; da (M) für A, B, $P^{\varrho\sigma\tau}$ gleichzeitig conjugirtes Tetraeder ist, so sind $\mathfrak{x}$, x' und $\mathfrak{x}'$, x auch Pol und Polare für $P_i^{\varrho\sigma\tau}$; $P_i^{\varrho\sigma\tau}$ ist daher ein ebenes Polarsystem, für das A_i und B_i polar sind. Die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ schneiden die Ebenen von (M) in vier harmonisch zugeordneten Kegelschnitten, die für die Schnitte von A und B dieselbe Bedeutung haben, wie die $P^{\varrho\sigma\tau}$ für A und B selbst. Berücksichtigen wir noch die dualen Eigenschaften, so gilt der Satz:

Die Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ lösen die Aufgabe der Polarität für die Flächen A und B, für ihre Polarsysteme in den Ebenen und Ecken von (M) und für ihre Punkt- und Ebenensysteme in den Kanten von (M).

Aus den Eigenschaften der harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte folgt, dass die Asymptotenpunkte der auf den Kanten einer Ebene $\mathfrak{M}_i$ gelegenen hyperbolischen Punktsysteme $P^1{}_{\varrho\sigma}$ die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden. Z. B. geht die Gerade, die einen Asymptotenpunkt von $P^1{}_{12}$ und einen von $P^1{}_{13}$ verbindet, durch einen Asymptotenpunkt von $P^1{}_{23}$. Nimmt man also auf drei durch eine Ecke gehenden Kanten von (M) je einen Asymptotenpunkt und verbindet dieses Tripel durch eine Ebene $\mathfrak{S}$, so trifft $\mathfrak{S}$ die Kanten der Gegenebene in drei Asymptotenpunkten. Theilt man die sechs Asymptotenpunkte der drei Kanten so in zwei Gruppen zu drei, dass keiner Gruppe zwei Punkte derselben Kante angehören, so erhält man zwei Verbindungsebenen der Punkte je einer Gruppe, und diese Ebenen schneiden sich in einer Geraden der Gegenebene. Da man nun die drei Paare von Asymptotenpunkten auf 2.2.2 Arten zu drei so combiniren kann, dass keine zwei derselben Kante einer Gruppe angehören, so erhalten wir acht Verbindungsebenen, von denen jede sechs der zwölf Asymptotenpunkte der Punktsysteme $P^1_{\varrho\sigma}$ enthält. Ein Paar Asymptotenpunkte liegt zu den Ecken der zugehörigen Kante harmonisch, lässt sich also als eine specielle Fläche zweiter Classe auffassen, für welche (M) ein conjugirtes Tetraeder ist. Die betrachteten Verbindungsebenen können daher als die acht gemeinschaftlichen Tangentialebenen der drei Flächen zweiter Classe P^1_{12}, P^1_{13}, P^1_{14} angesehen werden. Es giebt infolge dessen ein zweifach-unendliches System von Flächen zweiter Classe, für die jene acht Ebenen Tangentialebenen und (M) ein conjugirtes Tetraeder ist; specielle Elemente dieses Systems sind die sechs Paare von Asymptotenpunkten auf den Tetraederkanten.

Die duale Betrachtung liefert ebenso acht Punkte, diese sind zu jenen acht Ebenen für die Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ die Pole.

Mit den Punktsystemen auf den Kanten von (M) ist die Construction des Poles $\mathfrak{e}$ einer Ebene $\mathfrak{E}$ für eine Fläche $P^{\varrho\sigma\tau}$ gegeben; man sucht zu den Schnittpunkten von $\mathfrak{E}$ mit den Kanten für die auf diesen inducirten Punktsysteme die conjugirten Punkte und verbindet den so auf je einer Kante erhaltenen Punkt mit der Gegenkante durch eine Ebene; drei durch eine Ecke gehende Verbindungsebenen schneiden sich in einer Geraden, die sechs Verbindungsebenen in $\mathfrak{e}$, dem Pole von $\mathfrak{E}$. Sind $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ Flächen aus verschiedenen Gruppen, so haben sie die Punkte auf den drei Kanten einer Ebene $\mathfrak{M}_i$ gemeinsam, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, die Pole von $\mathfrak{E}$ für $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ liegen mit $\mathfrak{m}_i$ in einer Geraden. Der Satz, dass die conjugirten Punkte eines Punktes $\mathfrak{x}$ auf $m_{\varkappa\lambda}$ für $P^1_{\varkappa\lambda}$ und $P^2_{\varkappa\lambda}$ ein Paar von $\mathfrak{m}_\varkappa\mathfrak{m}_\lambda$ sind, zeigt, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ zu $\mathfrak{m}_i$ und dem Schnittpunkte von $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ mit $\mathfrak{M}_i$ harmonisch liegen. Nehmen wir noch das Resultat der analogen Betrachtung für zwei Flächen derselben Gruppe hinzu, so folgt:

Die Pole einer Ebene $\mathfrak{E}$ für zwei Flächen verschiedener Gruppen liegen zu einer Ecke von (M) und ihrer Polare, für zwei Flächen derselben Gruppe zu einem Gegenkantenpaar harmonisch.

Einen Theil des dualen Satzes erhielten wir schon S. 382.

An die gegenseitige Reproduction der Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$, die übrigens aus dem soeben angeführten Satze sofort folgt, knüpfen sich noch einige Eigenschaften.

Hat eine Fläche, z. B. $P^{\varrho\sigma\tau}$, reelle Punkte und ist $\mathfrak{E}$ eine ihrer Tangentialebenen, so ist $\mathfrak{e}$ der Berührungspunkt und $\mathfrak{e}'$, der Pol von $\mathfrak{E}$ für eine Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$ der andern Gruppe, derjenige Punkt von $P^{\varrho\sigma\tau}$, in dem sie die Gerade $\mathfrak{e}\mathfrak{m}_i$ zum zweiten Male trifft, wenn $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ ihre gemeinschaftliche Curve in $\mathfrak{M}_i$ haben. Umgekehrt trifft jede Gerade durch $\mathfrak{m}_i$ eine der Flächen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in zwei Punkten, die für die andere conjugirt sind. Eine Ebene durch $\mathfrak{m}_i$ schneidet $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten von solcher Lage, dass alle durch $\mathfrak{m}_i$ gehenden Geraden diese Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten treffen; zwei solche Kegelschnitte stehen also in derselben Beziehung, wie zwei harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte.[1]) Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen schneiden die Flächen in vier harmonischen Geraden, von denen allerdings stets ein Paar imaginär ist.

Unter den durch $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ definirten Liniengebilden betrachte ich noch die Congruenz der Geraden, die gleichzeitig dem Reye'schen Complex und dem Complex der Geraden angehören, deren Schnittpunkte mit $P^{\varkappa\lambda\mu}$ für $P^{\varrho\sigma\tau}$ conjugirt sind. Im Allgemeinen ist dies eine Congruenz vierten Grades, welche die singulären Geraden des zweiten Complexes repräsentirt.[2]) In unserem Falle reducirt sie sich auf die Congruenz (1, 0) der durch $\mathfrak{m}_i$ gehenden Geraden und die Congruenz (2, 2) der Geraden, die $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ in ihren gemeinschaftlichen Punkten berühren.

Da der Reye'sche Complex auf den Punktraum abgebildet ist, so ist dies auch mit den singulären Geraden der Fall. Im Allgemeinen erhält man dadurch eine merkwürdige Fläche vierter Ordnung;[3]) in unserem Falle zerfällt diese in die doppelt zu zählende $\mathfrak{M}_i$ und den gemeinsamen Tangentialkegel von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$.

Die analoge Betrachtung für zwei Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ aus derselben Gruppe liefert folgende Resultate:

Eine Ebene durch eine der beiden Kanten, in denen $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ dieselben Punktsysteme induciren, schneidet diese Flächen in harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten; die singulären Geraden der $P^{\varrho\sigma\tau}$ und $P^{\varkappa\lambda\mu}$ harmonisch treffenden Geraden bilden eine Congruenz (1, 1), deren Leitgeraden eben die Kanten sind, in denen beide Flächen dieselben Punktsysteme induciren.

S. 385 hat sich ergeben, dass die conjugirten Geraden einer Geraden r für die acht Flächen $P^{\varrho\sigma\tau}$ auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Sind σ_1 und σ_2 die conjugirten Geraden zu r für zwei Flächen derselben Gruppe, so bilden sie mit dem Paar Gegenkanten, auf denen jene Flächen dieselben Punktsysteme induciren, vier harmonische Gerade einer Regelschaar; denn die Verbindungslinie der Pole einer durch r gehenden Ebene für die Flächen treffen diese Kanten in zwei zu den Polen har-

1) Im Allgemeinen giebt es bei zwei Flächen zweiten Grades nur 16 solcher Ebenen.

2) Voss, Math. Ann. Bd. 10, S. 143.

3) Die Fläche hat vier Doppelpunkte von der speciellen Art, dass eine Generatrix des Tangentialkegels in einem Doppelpunkte in diesem mit der Fläche vier Punkte gemein hat.

monisch liegenden Punkten. Sind σ_1 und σ_3 die conjugirten Geraden für zwei Flächen aus verschiedenen Gruppen $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$, so haben sie in der Ebene $\mathfrak{M}_i$, in der die Berührungscurve von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ und $P^{\varrho\sigma\tau}$ liegt, einen gemeinsamen Punkt; denn der Ebene $(r, \mathfrak{m}_i)$ entspricht für beide Flächen derselbe Punkt in $\mathfrak{M}_i$ als Pol. Die gemeinsame Ebene von σ_1 und σ_3 ist die gemeinsame Polarebene des Punktes $(r, \mathfrak{M}_i)$. Aus der Eigenschaft, dass die Polaren eines beliebigen Punktes von r sich auf $\mathfrak{M}_i$ schneiden und zu $\mathfrak{M}_i$ und der Ebene, die ihren Schnitt mit $\mathfrak{m}_i$ verbindet, harmonisch liegen, folgt, dass σ_1 und σ_3 zu der Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit $\mathfrak{m}_i$ und der Schnittlinie ihrer Ebene mit $\mathfrak{M}_i$ harmonisch liegen. Von den acht zu r conjugirten Geraden gehören die für eine Gruppe von $P^{\varkappa\lambda\mu}$ conjugirten einer Regelschaar, die übrigen der andern Regelschaar einer Fläche zweiten Grades an.

Hieraus folgt der Satz:

Sind A und B geradlinige Flächen, (a_1), (a_2) und (b_1), (b_2) ihre Regelschaaren, so führt eine Gruppe der Flächen $P^{\varkappa\lambda}$ (a_1) in (b_1) und (a_2) in (b_2), die andere Gruppe (a_1) in (b_2) und (a_2) in (b_1) über.

Im Besondern können auf A und B Gerade liegen, welche die Curve (A, B) berühren. Eine auf A liegende Tangente von (A, B) muss durch $P^{\varkappa\lambda\mu}$ in eine auf B liegende übergehen; denn einer Geraden auf A, die B berührt, muss eine Gerade auf B, die A berührt, entsprechen. Hieraus ergiebt sich, dass mit einer Tangente von (A, B) auf A acht Tangenten auf B und damit auch auf A im Ganzen acht vorhanden sind. Es giebt also auf A und B gleichzeitig keine oder acht reelle Tangenten von (A, B).[1]) Da C, die Polarfläche von A für B, durch die Berührungspunkte der auf A liegenden Tangenten geht, so folgt, dass C die Curve (A, B) entweder in 0 oder 8 reellen Punkten schneidet; das Gleiche gilt für die Polarfläche von B für A.

Ist $\mathfrak{a}$ der Punkt, in dem eine auf A liegende Tangente B berührt, $\mathfrak{B}$ die Tangentialebene an A in dem Berührungspunkte einer auf B liegenden Tangente von A, so sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ Pol und Polare für eine Fläche $P^{\varkappa\lambda\mu}$. Legt man durch $\mathfrak{a}$ eine Gerade, die ein Paar Gegenkanten von (M) trifft, so müssen ihre Treffpunkte zu den Schnittpunkten von $\mathfrak{B}$ mit den Kanten für ein Paar Punktsysteme $P^{i}{}_{\varrho\sigma}$ conjugirt sein.[2])

§ 4.

Für die Untersuchung dieses Paragraphen seien vom Tetraeder (M) nur zwei Ecken $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ reell, dann sind weiter $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, m_{12}, m_{34} reell. Da $\mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{m}_4$ imaginär sind, wird m_{34} von A und B stets in

1) Cremona, Oberflächen, S. 223.

2) Vergl. Schroeter, Kegelschnitte, S. 397 flg.

reellen Punkten geschnitten; die Aufgabe ist lösbar, wenn m_{12} von A und B gleichzeitig in reellen Punkten getroffen wird oder nicht. Die Discussion knüpft sich in diesem Falle am einfachsten an die in $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gelegenen Kegelschnitte. $\mathfrak{M}_1$ enthält m_{34}, schneidet also A und B in den reellen Curven A_1 und B_1. Von dem Tripel conjugirter Punkte in $\mathfrak{M}_1$ sind $\mathfrak{m}_2$ und m_{34} Pol und Polare, die übrigen Elemente sind imaginär. Die Flächen P müssen aus demselben Grunde wie in § 3 je einen der Kegelschnitte enthalten, für welche A_1 und B_1 polar sind. In diesem Falle giebt es nur zwei solcher Kegelschnitte, P_1^1 und P_1^2, von denen der eine P_1^1 Ellipse, der andere P_1^2 Hyperbel ist; P_1^1 und P_1^2 berühren sich in zwei reellen Punkten von m_{34}.[1]) Da die Punktsysteme P^1_{12}, P^2_{12} zu $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$ conjugirt sind, lässt sich eine Fläche P bestimmen, wenn man ausser der Bedingung, dass (M) conjugirtes Tetraeder sein soll, von ihr verlangt, dass sie einen Kegelschnitt P^i_1 und ein Punktsystem P^k_{12} enthält. Da auf diese Weise jeder Kegelschnitt P^i_1 zwei Flächen P liefert, erhalten wir als Lösung unserer Aufgabe in diesem Falle vier Flächen. Diese vier Flächen schneiden auch $\mathfrak{M}_2$ in den Kegelschnitten P_2^1 (Ellipse) und P_2^2 (Hyperbel), für welche A_2 und B_2 polar sind. Die Kegelschnitte P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_2^2 gehen durch dieselben Punkte von m_{34}.

Von diesen Flächen sind die beiden, welche das hyperbolische Punktsystem P^1_{12} enthalten, einschaalige Hyperboloide, weil sie auf m_{12} und m_{34} hyperbolische Punktsysteme induciren. Diejenige dieser Flächen, welche durch die Ellipse P_1^1 geht, enthält ihrer Natur nach in der zu $\mathfrak{M}_1$ conjugirten Ebene $\mathfrak{M}_2$ die Hyperbel P_2^2, sie sei hiernach bezeichnet durch P^{12}; das zweite einschaalige Hyperboloid geht ebenso durch P_1^2 und P_2^1 und sei durch P^{21} bezeichnet. Die analog bezeichnete Fläche P^{11} ist Ellipsoid, weil sie zwei conjugirte Ebenen in Ellipsen schneidet, P^{22} zweischaaliges Hyperboloid, weil sie auf m_{12} und m_{34} ungleichartige Punktsysteme inducirt und Hyperbeln enthält. Dies liefert den Satz:

Sind von dem conjugirten Tetraeder zweier Flächen A und B nur zwei Ecken reell, so giebt es zwei einschaalige, ein zweischaaliges Hyperboloid und ein Ellipsoid, für die A und B polar sind.

P^{12}, P^{21} schneiden sich in vier reellen, P^{11}, P^{22} in vier punktirt-imaginären Geraden; eine der Flächen P^{12}, P^{21} berührt P^{11} und P^{22} in je einem Kegelschnitte. Aus diesem Verhalten erkennen wir, dass von den acht Polarsystemen P, die sich bei vollständig reellem Tetraeder (M) ergeben, in jeder Gruppe zwei imaginär geworden sind. Für die Flächen, die reell geblieben sind, gelten alle in § 3 abgeleiteten Eigenschaften. Z. B. besteht der Satz: Sind A und B einschaalige Hyperboloide, (a_1), (a_2) und (b_1), (b_2) die Regelschaaren von A und B, so führen

1) Schroeter, Kegelschnitte, S. 396 flg.

P^{12}, P^{21} (a_1) in (b_1), (a_2) in (b_2) und P^{11}, P^{22} (a_1) in (b_2), (a_2) in (b_1) über. Auch die Eigenschaften der auf A und B liegenden Tangenten von (A, B), deren es in diesem Falle in jeder Regelschaar zwei giebt,[1]) folgen auf dieselbe Weise wie in § 3.

§ 5.

Sind alle Ecken des zu A und B gehörigen Tetraeders (M) imaginär und nur m_{12} und m_{34} reell, so sind A und B stets einschaalige Hyperboloide, die m_{12}, m_{34} in reellen Punkten treffen, und die Aufgabe ist stets lösbar.

Die Lösung des Problems für die Punktsysteme A_{12}, B_{12} und A_{34}, B_{34} liefert in diesem Falle zwei Paare von hyperbolischen Punktsystemen P^1_{12}, P^2_{12} und P^1_{34}, P^2_{34}; die durch sie bestimmten Flächenbüschel (P^i_{12}, P^k_{34}), denen die gesuchten Flächen P angehören sollen, haben also vier reelle Geraden als Schnittcurve. Die Polaren eines Punktes $\mathfrak{x}$ auf A für (P^i_{12}, P^k_{34}) bilden ein Ebenenbüschel; die Axe η' dieses Ebenenbüschels trifft m_{12} und m_{34} und ist durch den Punkt $\mathfrak{x}$ und durch P^i_{12} und P^k_{34} gegeben; durch $\mathfrak{x}$ geht eine Gerade g, und die conjugirten Punkte zu (g, m_{12}) und (g, m_{34}) sind für P^i_{12} und P^k_{34} die Punkte (η', m_{12}) und (η', m_{34}). Die Polare von $\mathfrak{x}$ für eine der gesuchten Flächen P muss B berühren. Je nachdem es nun durch η' reelle oder imaginäre Tangentialebenen an B giebt, liefert das Büschel zwei oder keine reellen Flächen P.

Es zeigt sich, dass nur zwei dieser Büschel reelle Flächen P liefern.

Von zwei Büscheln nämlich, die eins der Punktsysteme $P^i_{\varrho\sigma}$ gemeinsam haben, z. B. von (P^1_{12}, P^1_{34}) und (P^1_{12}, P^2_{34}), kann nur das eine reelle Flächen P enthalten. Die Axen η'_1 und η'_2 der Polarenbüschel von $\mathfrak{x}$ für diese Flächenbüschel haben einen Punkt gemeinsam, den conjugirten Punkt zu (g, m_{12}) für P^1_{12}; die Punkte (η'_1, m_{34}) und (η'_2, m_{34}), die conjugirten Punkte zu (g, m_{34}) für P^1_{34} und P^2_{34}, bilden ein Paar des durch die Paare A_{34} und B_{34} bestimmten Punktsystems.[2]) Die Ebene $\mathfrak{E}$, in der $\eta'_1 \eta'_2 m_{34}$ liegen, schneidet A und B in zwei Kegelschnitten, für welche m_{34} die Polare des Punktes (η'_1, η'_2) ist. Da das durch A_{34} und B_{34} bestimmte Punktsystem elliptisch ist, liegt einer der Punkte (η'_1, m_{34}) und (η'_2, m_{34}) innerhalb, der andere ausserhalb der Schnittcurve von B und $\mathfrak{E}$; es trifft also stets eine und nur eine der Geraden η'_1 und η'_2 diese Schnittcurve oder B selbst in reellen Punkten. Folglich gehen auch nur durch eine der Geraden und stets durch eine reelle Tangentialebenen von B, und nur eins von den Büscheln (P^1_{12}, P^1_{34}) und (P^1_{12}, P^2_{34}) liefert reelle Flächen P. Da dies von zwei beliebigen Büscheln, die auf einer

1) Cremona, Oberflächen, S. 221.
2) Schroeter, Kegelschnitte, S. 57.

Kante ein Punktsystem gemeinsam haben, gilt, so enthalten nur zwei Büschel, sie seien (P^1_{12}, P^1_{34}) und (P^2_{12}, P^2_{34}), reelle Flächen P, und es giebt stets vier und nur vier Flächen, für welche A und B polar zu einander sind. Die Construction zeigt, dass diese vier Flächen einschaalige Hyperboloide sind, von denen zweimal zwei ein räumliches Vierseit gemeinsam haben.

Wir haben hiermit das Resultat:

Wenn von dem conjugirten Tetraeder zweier Flächen zweiten Grades alle Ecken imaginär sind, so giebt es vier einschaalige Hyperboloide, für welche jene Flächen zu einander polar sind.

A und B schneiden sich, wenn die Ecken von (M) imaginär sind, stets in einer reellen Curve (A, B); es giebt vier Gerade auf A, die (A, B) berühren, sie gehören derselben Regelschaar von A an; das Gleiche gilt von B.[1]) Sind $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$ die Punkte, in denen die auf A liegenden Tangenten B berühren, so giebt es unter diesen zwei Paare, deren Verbindungslinien die Kanten m_{12} und m_{34} treffen; diese Paare seien $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$; ebenso seien $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ die Tangentialebenen von A, welche durch die auf B gelegenen Tangenten gehen, und zwar mögen sich $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ in Geraden schneiden, die m_{12} und m_{34} begegnen.

Es muss dann $\mathfrak{B}_k$ für eine und nur eine Fläche P^ϱ die Polare von $\mathfrak{a}_i$ sein; ferner müssen für P^ϱ zwei Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_k$, deren Verbindungslinie dem reellen Gegenkantenpaar begegnet, zwei Ebenen $\mathfrak{B}_\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau$ entsprechen, von deren Schnittlinie dies der Fall ist. Berücksichtigt man dies, so erhält man für die Flächen P^1, P^2, P^3, P^4 folgende Zusammengehörigkeit von Pol und Polare:

Für:	Pol.	Polare.
P^1	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4$
P^2	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_3$
P^3	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$
P^4	$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_1$

Diese Zusammenstellung zeigt sofort die Eigenschaft der gegenseitigen Reproduction der Flächen P.

Da die Tangenten von (A, B) auf A und B nur je einer Regelschaar angehören, so werden A und B durch die Flächen P^ϱ nur so

1) Cremona, Oberflächen, S. 222. Ist C die Polarfläche von A für B, so liefert die Untersuchung der drei geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche m_{12}, m_{34} und je eine der Curven (A, B), (B, C), (A, C) enthalten, einen andern Beweis dieses Satzes.

dual in einander transformirt, dass (a_1) in (b_1) und (a_2) in (b_2) übergehen, wenn (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) wieder die Regelschaaren von A und B bedeuten.

Diese Eigenschaften zeigen, dass von den acht Flächen P, die bei vollständiger Realität von (M) auftreten, in diesem Falle die ganze Gruppe I) reell geblieben ist, wobei allerdings aus dem imaginären Ellipsoid ein einschaaliges Hyperboloid geworden ist. Die Paare P^1, P^2 und P^3, P^4 haben ein reelles, zwei beliebige andere Flächen ein imaginäres Vierseit gemeinsam. In den Complexen der Geraden, die eine Fläche P^i in conjugirten Punkten einer andern P^k treffen, bilden die singulären Geraden wieder Congruenzen (1, 1). Die Leitgeraden dieser Congruenzen sind für die Paare P^1, P^2 und P^3, P^4 reell, nämlich m_{12} und m_{34}, für ein anderes Paar sind die Leitgeraden imaginär, zwei imaginäre Gegenkanten von (M).

Kleinere Mittheilungen.

XV. Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Curven.

Das aus mn Punkten bestehende Schnittpunktsystem einer algebraischen Curve $\varphi = 0$ der m^{ten} Ordnung mit einer solchen $\psi = 0$ der n^{ten} Ordnung bildet bekanntlich ein Punktsystem besonderer Art, sowohl was die Lage der Punkte in der Ebene, als auch ihre Lage auf einer der beiden Curven betrifft. Nur bei specieller Wahl der mn Punkte in der Ebene geht durch sie eine Curve $\psi = 0$ der n^{ten} Ordnung $(n \leq m)$, und es sind weitere Bedingungen zu erfüllen, wenn sich durch dieselben Punkte andere Curven m^{ter} Ordnung, als solche, welche in ψ und eine beliebige Curve $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen, sollen hindurchlegen lassen.

Curven höherer Ordnung μ $(\mu \geq m)$ durch die mn Schnittpunkte zweier gegebenen Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ existiren stets, denn alle in der Form

$$1) \qquad A\varphi + B\psi = 0$$

enthaltenen Curven haben offenbar die verlangte Eigenschaft, welche Werthe auch die Constanten in den Ausdrücken $(\mu - m)^{\text{ter}}$, $(\mu - n)^{\text{ter}}$ Ordnung A, B haben mögen. Es fragt sich, ob umgekehrt die Schaar der Curven 1) identisch ist mit der Gesammtheit der durch die mn Punkte gehenden Curven μ^{ter} Ordnung, oder ob es auch Curven der letzteren Art giebt, welche nicht in die Form 1) gebracht werden können.

Der Satz, welcher aussagt, dass, unter gewissen Bedingungen, die fraglichen Curven sämmtlich der Schaar 1) angehören, ist, wegen seiner vielfachen Anwendungen, von grosser Wichtigkeit. Streng bewiesen ist derselbe, unter Angabe der Giltigkeitsbedingungen, zuerst von Noether (Math. Ann. Bd. 6). Zu einem Beweise kann man auch auf folgendem Wege gelangen.

Die Curven φ und ψ werden als nicht zerfallend vorausgesetzt; ihre Schnittpunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(mn)}$ seien zunächst einfache Punkte für jede der Curven, und es sei $\mu < m + n$.

Die linke Seite von 1) setzt sich zusammen aus den folgenden Ausdrücken μ^{ter} Ordnung, je mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1^{\mu-m}\,\varphi(x),\ x_1^{\mu-m-1}x_2\,\varphi(x),\ \ldots\ x_3^{\mu-m}\,\varphi(x), \\ x_1^{\mu-n}\,\psi(x),\ x_1^{\mu-n-1}x_2\,\psi(x),\ \ldots\ x_3^{\mu-n}\,\psi(x), \end{array}\right.$$

deren Anzahl =

$$\frac{(\mu-m+1)(\mu-m+2)}{2}+\frac{(\mu-n+1)(\mu-n+2)}{2}.$$

Die Ausdrücke 2) sind von einander linear unabhängig; denn wegen $\mu < m+n$ ist es nicht möglich, den Constanten in A und B solche, wenigstens zum Theil von Null verschiedene Werthe zu ertheilen, für welche $A\varphi+B\psi$ identisch verschwindet.

In 1) sind nicht alle in der Ebene möglichen Curven μ^{ter} Ordnung enthalten; den Ausdrücken 2) kann man also eine gewisse Anzahl δ linear unabhängiger Ausdrücke μ^{ter} Ordnung

$$\chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \ldots\ \chi_\delta(x)$$

derart hinzufügen, dass

$$3)\qquad F(x)=\alpha_1\chi_1(x)+\ldots+\alpha_\delta\chi_\delta(x)+A\varphi(x)+B\psi(x)=0$$

die allgemeinste Curve μ^{ter} Ordnung darstellt. Die Form 3) kann man geradezu (für die gegenwärtige Betrachtung) als Normalform ansehen, in welche sich jede Curve μ^{ter} Ordnung bringen lässt.

Die Curven χ bilden für sich eine Schaar

$$4)\qquad \alpha_1\chi_1(x)+\alpha_2\chi_2(x)+\ldots+\alpha_\delta\chi_\delta(x)=0,$$

welche keine Curve enthält, deren Gleichung in der Form $H\varphi+K\psi=0$ darstellbar wäre.

Für die Zahl δ findet man

$$\delta=\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}-\frac{(\mu-m+1)(\mu-m+2)}{2}-\frac{(\mu-n+1)(\mu-n+2)}{2}$$
$$=mn-\frac{(m+n-\mu-1)(m+n-\mu-2)}{2}.$$

Will man aus der $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$-fach unendlichen Schaar aller in der Ebene existirenden Curven μ^{ter} Ordnung diejenigen herausheben, welche durch die mn Punkte gehen, so hat man den Parametern in 3) die Bedingungen

$$F(x^{(1)})=0,\ F(x^{(2)})=0,\ \ldots\ F(x^{(mn)})=0$$

aufzuerlegen, d. h. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\delta$ haben den mn Bedingungsgleichungen

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\chi_1(x^{(1)})\ \ +\alpha_2\chi_2(x^{(1)})\ \ +\ldots+\alpha_\delta\chi_\delta(x^{(1)})\ \ =0, \\ \alpha_1\chi_1(x^{(2)})\ \ +\alpha_2\chi_2(x^{(2)})\ \ +\ldots+\alpha_\delta\chi_\delta(x^{(2)})\ \ =0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\chi_1(x^{(mn)})+\alpha_2\chi_2(x^{(mn)})+\ldots+\alpha_\delta\chi_\delta(x^{(mn)})=0 \end{array}\right.$$

zu genügen.

Durch die mn Punkte gehende Curven μ^{ter} Ordnung, welche nicht der Schaar 1) angehören, giebt es also dann und nur dann, wenn es möglich ist, den Gleichungen 5) zu genügen, durch Werthe der α, die nicht sämmtlich Null sind, wenn also die $mn-\delta+1$ Bedingungsgleichungen

$$6)\qquad \begin{vmatrix} \chi_1(x^{(1)}) & \chi_2(x^{(1)}) & \dots & \chi_\delta(x^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \chi_1(x^{(\delta-1)}) & \chi_2(x^{(\delta-1)}) & \dots & \chi_\delta(x^{(\delta-1)}) \\ \chi_1(x^{(\lambda)}) & \chi_2(x^{(\lambda)}) & \dots & \chi_\delta(x^{(\lambda)}) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda=\delta,\ \delta+1,\ \dots mn)$$

erfüllt sind.

So lange also die mn Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(mn)}$, welche die einfachen Schnittpunkte von φ mit ψ sind, nicht weiteren besonderen Bedingungen genügen, verschieden von denjenigen, welche das Schnittpunktsystem als solches charakterisiren, ist die Gleichung jeder durch δ der mn Punkte gehenden Curve μ^{ter} Ordnung von der Form $H\varphi+K\psi=0$.

Die Zahl der linear unabhängigen Curven μ^{ter} Ordnung, welche durch die mn Punkte gehen, ist mithin

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}-\delta,$$

also $>\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}-mn$, wenn $m+n-\mu>2$; d. h. sie ist grösser, als man nach der Anzahl mn der für die Coefficienten von F gegebenen Bedingungen erwarten sollte. Man hat hier eine Lösung eines speciellen Falles der folgenden Aufgabe:

In der Ebene r Punkte so zu bestimmen, dass sich durch dieselben $t+1-r+\varepsilon$ (statt $t+1-r$) linear unabhängige Curven der gegebenen linearen ∞^t-Schaar

$$f=\beta_1 f_1(x)+\dots+\beta_{t+1}f_{t+1}(x)=0$$

legen lassen.

Von je $r-\varepsilon+1$ der Gleichungen $f(x^{(1)})=0, \dots f(x^{(r)})=0$ muss jede eine Folge der $r-\varepsilon$ übrigen sein, was

$$\varepsilon(t+1-r+\varepsilon)$$

Bedingungen zwischen den $2r$ Coordinaten der r Punkte giebt.

Diese Zahl ist jedoch, dem Obigen zufolge, nicht allgemein giltig. Denn nimmt man für f die Schaar aller Curven μ^{ter} Ordnung und wählt man die Zahlen mn so, dass

$$m+n-2>\mu\geqq m\geqq n,$$

dass ferner

$$mn-\delta\geqq\varepsilon,\quad mn\geqq r,$$

so braucht man nur die Bedingungen dafür auszudrücken, dass die mn Punkte ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden.

Die vorigen Betrachtungen müssen modificirt werden, wenn unter den Schnittpunkten von φ mit ψ mehrfache Punkte vorkommen. Ist $x^{(k)}$

q_h-facher Punkt von φ, r_h-facher Punkt von ψ, so ist die Anzahl der der Lage nach verschiedenen Schnittpunkte

$$mn-(q_1r_1-1)-(q_2r_2-1)-\ldots-(q_hr_h-1),$$

vorausgesetzt, dass nicht Zweige von $\varphi=0$ solche von $\psi=0$ berühren. Diese Zahl darf nicht grösser werden als $\delta-1$, wenn in der Schaar 4) Curven enthalten sein sollen, welche durch sämmtliche Schnittpunkte von φ mit ψ gehen. Wenn solche Curven wirklich existiren, ist ihre Mannigfaltigkeit

$$\delta-1-[mn-(q_1r_1-1)-(q_2r_2-1)-\ldots],$$

d. h. so viele Verhältnisse der α bleiben unbestimmt. Wegen $\delta\leqq mn$ ist diese Zahl

$$\text{höchstens} =(q_1r_1-1)+\ldots+(q_hr_h-1)-1.$$

Man suche jetzt die noch unbestimmt gebliebenen Parameter in der Gleichung $F(x)=0$ der Curve μ^{ter} Ordnung so zu bestimmen, dass F in $x^{(1)}$ einen (q_1+r_1-1)-fachen, in $x^{(2)}$ einen (q_2+r_2-1)-fachen, ... in $x^{(h)}$ einen (q_h+r_h-1)-fachen Punkt erhält. Bezeichnet man zur Abkürzung mit $f_i(x,y)$ einen in x, y homogenen Ausdruck i^{ter} Ordnung, und nimmt man etwa den Punkt $x^{(1)}$ zum Anfangspunkt nicht homogener Coordinaten, so wird

$$\begin{aligned}&A\varphi+B\psi\\ 7)\quad &=(A_0+A_1(x,y)+\ldots+A_{r-2}(x,y)+\ldots)(\varphi_q(x,y)+\varphi_{q+1}(x,y)+\ldots)\\ &+(B_0+B_1(x,y)+\ldots+B_{q-2}(x,y)+\ldots)(\psi_r(x,y)+\psi_{r+1}(x,y)+\ldots).\end{aligned}$$

Sollen nun in F die Terme erster, zweiter, ... $(r+q-2)^{\text{ter}}$ Dimension in x, y fehlen, so giebt dies

$$\frac{(q+r-1)(q+r)}{2}-1$$

neue Bedingungen.

Auf den Punkt $x^{(2)}$ als Anfangspunkt $(x'=0,\ y'=0)$ bezogen, sei

$$A=A'_0+A'_1(x',y')+\ldots,\quad B=B'_0+B'_1(x',y')+\ldots;$$

die neuen Coefficienten werden sich linear aus den ursprünglichen Coefficienten von A, bezw. B zusammensetzen; ohne auf die Art dieser Zusammensetzung näher einzugehen, kann man dieselben, soweit sie hier in Betracht kommen, gegenüber denen in 7) auftretenden, als neue unabhängige Parameter auffassen. Aehnliches gilt für die Coefficienten derjenigen Gleichungsformen der Curve F, welche sich der Reihe nach auf die Punkte $x^{(3)}$, ... $x^{(h)}$ als Anfangspunkte beziehen.

Um die

$$\Sigma\left\{\frac{(q+r-1)(q+r)}{2}-1\right\}$$

neuen Bedingungen zu erfüllen, hat man zu verfügen

1. über die noch unbestimmt gelassenen Verhältnisse der α;
2. über die Parameter in den jedesmaligen Ausdrücken A_0, A_1, ... A_{r-2};
3. über die Parameter in B_0, B_1, ... B_{q-2};

im Ganzen also über höchstens

$$\Sigma(qr-1)-1+\Sigma\frac{r(r-1)}{2}+\Sigma\frac{q(q-1)}{2}=\tfrac{1}{2}\Sigma\{(q+r)^2-(q+r)-2\}-1$$

Parameter. Da diese Zahl kleiner ist als die der Bedingungen, so kann letzteren nur dadurch genügt werden, dass sämmtliche α, A_0, A_1, ... A_{r-2}, B_0, B_1, ... B_{q-2} verschwinden; man wird daher wieder auf die Gleichungsform $H\varphi+K\psi=0$ geführt (vergl. Noether, *l. c.*).

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $\mu \geqq m+n$ sind die Ausdrücke 2) nicht von einander linear unabhängig. Die zwischen ihnen bestehenden Relationen erhält man, wenn

$$\varphi=\Sigma c_{ikh}x_1^i x_2^k x_3^h, \quad \psi=\Sigma \gamma_{rst}x_1^r x_2^s x_3^t,$$

aus den Identitäten

$$x_1^\varrho x_2^\sigma x_3^\tau . \Sigma c_{ikh}x_1^i x_2^k x_3^h . \psi(x)-x_1^\varrho x_2^\sigma x_3^\tau . \Sigma\gamma_{r,s,t}x_1^r x_2^s x_3^t . \varphi(\psi)=0,$$

wo

$$\varrho+\sigma+\tau=\mu-m-n.$$

Von einander unabhängig sind also nur

$$\frac{(\mu-m+1)(\mu-m+2)}{2}+\frac{(\mu-n+1)(\mu-n+2)}{2}-\frac{(\mu-m-n+1)(\mu-m-n+2)}{2}$$

$=\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}-mn$ jener Ausdrücke; an die Stelle der früheren Zahl δ, welche auch $<mn$ sein konnte, tritt die Zahl mn. Die vorigen Sätze bleiben daher giltig.

Kiel, im Juli 1877. Dr. H. Krey.

XVI. Ueber die partielle Summation.

Es bedeuten

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{a-1}\alpha_a\alpha_{a+1}\ldots\alpha_{b-1}\alpha_b\alpha_{b+1}\ldots,$$
$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_{a-1}\beta_a\beta_{a+1}\ldots\beta_{b-1}\beta_b\beta_{b+1}\ldots$$

zwei beliebige Grössenreihen und es sei

$$s_n=\sum_k^n \alpha_m, \quad \text{wo} \quad k<a.$$

Dann ist identisch

$$1)\quad \begin{aligned}\sum_a^b \alpha_n\beta_n &= \sum_a^b (s_n-s_{n-1})\beta_n=\sum_a^b s_n\beta_n-\sum_a^b s_{n-1}\beta_n\\ &=\sum_a^b s_n(\beta_n-\beta_{n+1})+s_b\beta_{b+1}-s_{a-1}\beta_a,\end{aligned}$$

eine Formel, welche die partielle Summation genannt wird.

Sie bleibt richtig, wieviele Grössen $\alpha\beta$ man auch in das Intervall $a\ldots b$ einschalte, und führt daher zur partiellen Integration, wenn man den Uebergang von Summen zu Integralen in der gewöhnlichen Weise ausführt. Man theilt also das Intervall $b-a$ in h Theile $\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_h$ und bestimmt

$$\alpha_n = \delta_n . \varphi(a+\delta_1+\ldots+\delta_n), \quad \beta_n = \psi(a+\delta_1+\ldots+\delta_n)$$

durch die den Theilpunkten entsprechenden Werthe zweier integrabeln Functionen φ und ψ. Nach Substitution dieser Werthe in die obige Formel 1) lässt man die Grössen δ so gegen 0 convergiren, dass ihre Summe gleich $b-a$ bleibt. Da zuletzt noch $\psi(b+\delta)$ mit $\psi(b)$ vertauscht werden muss und man

$$\lim \frac{\psi(a+\delta_1+\ldots+\delta_k)-\psi(a+\delta_1+\ldots+\delta_{k+1})}{\delta_{k+1}} = -\psi'(a+\delta_1+\ldots+\delta_k)$$

zu setzen hat, um zu der gewöhnlichen Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b \varphi\,\psi\,dx = \Big/_a^b\left(\psi\int^x \varphi\,dx\right) - \int_a^b\left(\psi'\int^x \varphi\,dx\right)dx.$$

zu gelangen, so erkennt man, dass diese nur anwendbar, wenn ψ einen Differentialquotienten besitzt.

Ausser für diese bekanntere Anwendung kann man sich aber der partiellen Summation auch zur Ableitung verschiedener anderer Sätze aus der Theorie der bestimmten Integrale und den damit zusammenhängenden Gebieten der Analysis bedienen.

1. Denkt man sich z. B. unter den β Summen von Grössen γ, $\beta_n = \sum_k^n \gamma_m$, wo $k<a$, bestimmt dann wieder α und γ durch diejenigen Werthe zweier integrabeln Functionen φ und f, die den Theilpunkten des Intervalls $b-a$ entsprechen — ganz in der oben angeführten Weise — und geht zur Grenze über, so ergiebt sich der Satz von Herrn Du Bois-Reymond:

$$\int_a^b\left(\varphi\int_a^x f\,dx\right)dx = -\int_a^b\left(f\int_a^x \varphi\,dx\right)dx + \int_a^b f\,dx . \int_a^b \varphi\,dx,$$

für den Herr Thomae in dieser Zeitschr. (20, S. 475) zwei Beweise angegeben.

2. Enthält die Reihe der α keine negativen Werthe — entsprechende Schlüsse gelten auch, wenn sie keine positiven enthält —, so erkennt man aus der Formel 1), dass

$$(s_b - s_{a-1})B > \Sigma\alpha_n\beta_n > (s_b - s_{a-1})\beta,$$

wo $B\beta$ Maximum und Minimum der β_n bedeuten. Der Uebergang zu Integralen führt zu dem bekannten Mittelwerthsatze (φ und ψ integrable Functionen)

$$B\int_a^b \varphi\,dx > \int_a^b \varphi\,\psi\,dx > \beta\int_a^b \varphi\,dx$$

oder, falls ψ stetig,

$$\int\limits_a^b \varphi\,\psi\,dx = \psi_M \int\limits_a^b \varphi\,dx,$$

wo ψ_M ein Mittelwerth der Function ψ ist. Nach der für die a getroffenen Beschränkung darf φ von a bis b keinen Zeichenwechsel erleiden.

3. Es liegt nahe, statt wie unter 2) für die β_n, nun auch für s_n Maximum und Minimum $S\,s$ einzuführen. Dies führt zu dem Mittelwerthsatze des Herrn Du Bois-Reymond (Crelle 69, S. 81), für den Hankel (diese Zeitschr. 14, S. 436) und Herr G. F. Meyer (Math. Ann. 6, S. 313) Beweise gegeben. Steigt die Reihe der β_n nie im Intervalle $a \ldots b$ — und Entsprechendes gilt, wenn sie nie fällt —, so ist

$$S(\beta_a - \beta_b) > \sum_a^{b-1} \alpha_n \beta_n - s_{b-1}\beta_b + s_{a-1}\beta_a > s(\beta_a - \beta_b).$$

Der Grenzübergang zu bestimmten Integralen liefert die Formel

$$S[\psi(a) - \psi(b)] > \int\limits_a^b \varphi\,\psi\,dx - \psi(b)\int^b \varphi\,dx$$

$$+ \psi(a)\int^a \varphi\,dx > s[\psi(a) - \psi(b)]$$

und hieraus das Du Bois'sche Resultat

$$\int\limits_a^b \varphi\,\psi\,dx = \psi(a)\int\limits_a^\mu \varphi\,dx + \psi(b)\int\limits_\mu^b \varphi\,dx,$$

wo $\varphi\,\psi$ integrable Functionen sind, ψ nicht wachsen oder nicht abnehmen darf und μ einen Mittelwerth zwischen a und b bedeutet.

Diese Anwendungen dürften hinreichend zeigen, dass der Satz der partiellen Summation geeignet ist, um in sehr naturgemässer Weise Resultate der Integraltheorie aus den Fundamenten der letzteren abzuleiten.

Dresden. G. Helm.

XVII. Beweis des Euler'schen Bildungsgesetzes für die Näherungswerthe von Kettenbrüchen.

Im Folgenden soll ein Beweis des von Euler gegebenen Bildungsgesetzes für die Näherungswerthe der Kettenbrüche gegeben werden. Während man sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes für specielle Zahlenwerthe leicht überzeugen kann, scheint ein allgemeiner Beweis desselben noch nicht versucht worden zu sein, namentlich nicht ein solcher, welcher, wie der folgende, mit dem Symbol des Gesetzes selbst operirt.

„**Bezeichnet man mit** $[abcd\ldots]$ **die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte** $abcd\ldots$ **dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der echte Kettenbruch** x **mit den Nennern** $a, b, c, d, \ldots$

$$x = \frac{[bcd\ldots]}{[abcd\ldots]}.“$$

Hierin ist unter einem echten Kettenbruche derjenige zu verstehen, dessen Zähler sämmtlich gleich 1 sind. Für ein Product, aus welchem sämmtliche Factoren weggelassen werden, ist 1 zu setzen, und als „gerade Anzahl“ gilt natürlich auch die Null.

Beweis. Bezeichnen wir zur grösseren Bequemlichkeit die successiven Nenner des Kettenbruches mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$, so lässt sich zunächst zeigen, dass der Satz für die ersten 1, 2, 3, 4 Näherungsbrüche gilt. Denn es ist

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_1}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1};$$

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

$$= \frac{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}.$$

Wenn nun der oben angeführte Satz unter der Voraussetzung, dass er bis a_n gilt, auch noch bis a_{n+1} richtig ist, so gilt er allgemein. Es genügt, den Beweis für den Nenner zu führen, da derjenige für den Zähler ganz analog ist.

Man kann zuerst alle Glieder, die in dem Ausdrucke $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ enthalten sind, in zwei Gruppen bringen, deren eine

$$[a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \overline{a_n}]$$

alle Glieder umfasst, welche den letzten Factor a_n enthalten,* während die andere

$$[a_1 a_2 \ldots a_{n-2}]$$

diejenigen Glieder enthält, denen der letzte (und infolge dessen auch der vorletzte) Factor fehlt. Es ist also

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \overline{a_n}] + [a_1 a_2 \ldots a_{n-2}].$$

Setzt man nun $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ oder $\frac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}$ statt a_n, so bleibt die zweite Gruppe offenbar ungeändert. Die erste geht über in

* Derselbe ist zum Zeichen, dass er nicht fehlen darf, mit einem wagerechten Striche versehen.

$$\left[a_1 a_2 \dots a_{n-1} \frac{\overline{a_n a_{n+1}+1}}{a_{n+1}}\right].$$

Also ist

$$\left[a_1 a_2 \dots \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right] = \left[a_1 a_2 \dots a_{n-1} \frac{\overline{a_n a_{n+1}+1}}{a_{n+1}}\right] + \left[a_1 a_2 \dots a_{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{a_{n+1}} \left(\left[a_1 a_2 \dots a_{n-1} \overline{a_n a_{n+1}}\right] + \left[a_1 a_2 \dots a_{n-1}\right]^* + \left[a_1 a_2 \dots a_{n-2} \overline{a_{n+1}}\right]\right).$$

Der erste Summand in der Klammer rechts enthält nun alle Glieder, denen keiner der Factoren a_n, a_{n+1} fehlt; der zweite Summand alle jene, denen beide Factoren a_n und a_{n+1}, der dritte alle jene, denen a_{n-1} und a_n fehlen. Es ist nun leicht zu sehen, dass die drei Summanden zusammen genau den Ausdruck

$$[a_1 a_2 \dots a_{n+1}]$$

repräsentiren. Denn fassen wir die beiden letzten Factoren dieses Ausdrucks, a_n und a_{n+1}, ins Auge, so sind nur folgende Fälle möglich: 1. Keiner dieser beiden Factoren fehlt (erster Summand). 2. Es fehlt a_{n+1}; dann fehlt nothwendig auch a_n, weil nur eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weggelassen wird (zweiter Summand). 3. Es fehlt a_n, nicht aber a_{n+1}; dann fehlt nothwendig auch a_{n-1}, aus demselben Grunde wie vorher (dritter Summand).

Demnach ist in der That

$$\left[a_1 a_2 \dots \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right] = \frac{1}{a_{n+1}} [a_1 a_2 \dots a_{n+1}].$$

Ebenso im Zähler:

$$\left[a_2 a_3 \dots \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right] = \frac{1}{a_{n+1}} [a_2 a_3 \dots a_{n+1}];$$

mithin:

$$\frac{\left[a_2 a_3 \dots \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right]}{\left[a_1 a_2 \dots \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}\right]} = \frac{[a_2 a_3 \dots a_{n+1}]}{[a_1 a_2 \dots a_{n+1}]}.$$

Demnach ist bewiesen, dass der eingangs aufgestellte Satz, wenn für n, so auch für $n+1$ gilt. Nun gilt er für $n=1, 2, 3, 4$, also allgemein.

Waren, Januar 1877. V. Schlegel.

* Der über 1 stehende Strich geht beim Multipliciren auf a_{n-1} nicht über, weil, wenn a_{n-1} verschwindet, ein anderer Factor der letzte wird.

Fig. 1.

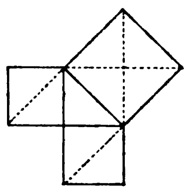


Fig. 2.

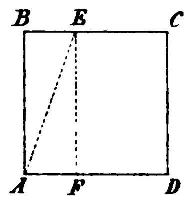


Fig. 3.

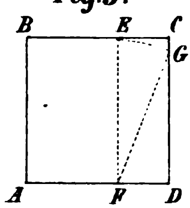


Fig. 4.

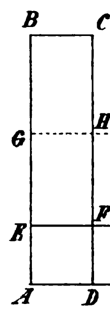


Fig. 5.

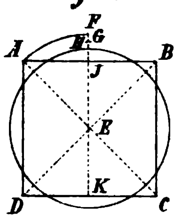
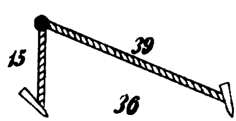
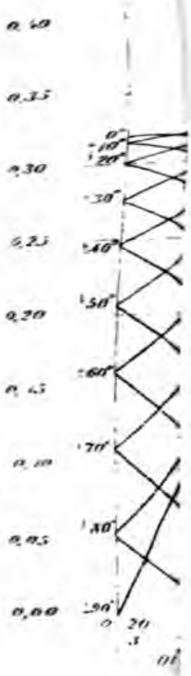


Fig. 6.



 Lithogr. v. Georg Hetz, Dresden.



Zeitschrift für M

Zeit

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXII. Jahrgang.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1877.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Arithmetik und Analysis.

Historisch-literarische Abtheilung.

Gräko-indische Studien.

Von

MORITZ CANTOR.

Dem *Istituto Lombardo* in Mailand vorgelegt am 9. November 1876.

(Hierzu Taf. I, Fig. 1—6.)

Unser Wissen von der griechischen und von der indischen Sprache und Literatur ist ein sehr verschiedenes. Während die griechische Sprache seit dem Zeitalter der Renaissance in reichlich vier Jahrhunderten sich in der europäischen Schulbildung einen gesicherten Platz gewann, so dass Niemand, der überhaupt den Wissenschaften obliegt, ihrer Kenntniss entbehrt, hat die indische Sprache bis heute kaum mehr als ein Jahrhundert lang die Aufmerksamkeit einer beschränkten Anzahl von besonderen Fachgelehrten auf sich gezogen. Während die griechische Literatur in alten, ihrem Datum nach meistens bis auf wenige Jahrzehnte genau festzustellenden Werken vor uns liegt, ist die uns bekannte indische Literatur entweder verhältnissmässig neu, oder die Angaben über ihre Entstehungszeit schwanken um Jahrhunderte. Ein Vergleich zwischen griechischer und indischer Literatur hat durch diese andeutungsweise hervorgehobenen Schwierigkeiten etwas Missliches. Er konnte gleichwohl nicht umgangen werden.

Eine Möglichkeit einer Einwirkung von indischer und griechischer Cultur aufeinander ist nachgewiesen. Schon im XVII. Jahrhundert v. Chr. heisst in einem egyptischen Texte der Affe *kafu* in Uebereinstimmung mit dem indischen Worte *kapi.*[1]) Der Name *tuki*, welchen die Hebräer zu Salomon's Zeiten dem Pfau gaben, ist tamulisch.[2]) Uralte Handelsbeziehungen zwischen Indien und Egypten, ebensolche zwischen Indien und Phönicien sind hiermit gesichert. Unmittelbare Berührung zwischen indischen und griechischen Völkerschaften brachten die Kämpfe des Alexanderzuges im IV. vorchristlichen Jahrhundert mit sich. Von da an vollends bleibt ein Zusammenhang Indiens mit griechischem Herrschaftsgebiete auf asiatischem Boden, aber auch mit dem alexandrinischen Griechenthum und später mit Rom Jahrhunderte hindurch stetig gewahrt.[3]) Apollonius von Tyana weiss um 50 n. Chr. nicht genug von indischer Gelehrsamkeit zu rühmen, und umgekehrt treten griechische Namen nicht selten in indischen Inschriften auf, wenn auch mitunter so verketzert, dass der Scharfsinn zu bewundern ist, der in dem Turamaya einen König Ptolemaios wiederzuerkennen im Stande war.

Hat aber der philosophische Satz, dass Alles, was möglich sei, auch Wirklichkeit besitze, irgendwo allgemeine Geltung, so ist es in der Geschichte der Bildungseinflüsse miteinander feindlich oder freundlich verkehrender Völker. Man konnte *a priori* behaupten: Griechen und Inder müssen aufeinander gewirkt haben! Ist nun diese Wirkung auch in der mathematischen Literatur nachweisbar? ist insbesondere die Richtung, in welcher, wenn auch nicht ausschliesslich, doch vornehmlich, die Belehrung stattfand, dieselbe ostwestliche, welche fast immer sich nachweisen lässt, als verfolgte das Licht der Bildung die gleiche Bahn, in welcher die Sonne am Himmel sich zu bewegen scheint, oder haben wir hier den Beweis vor uns, dass auch diese Regel nicht ohne Ausnahme sei? Diese Fragen werden heute nicht zum ersten Male aufgeworfen, und wenn uns nicht Alles täuscht, muss man zur richtigen Beantwortung die Fragen selbst theilen. Man muss genau untersuchen, auf welchen Gebieten der angewandten, wie der reinen Mathematik Aehnlichkeiten zwischen griechischen und indischen Schriften vorhanden sind, man muss das Alter der betreffenden Schriften vergleichen, man muss in Erwägung ziehen, ob die Aehnlichkeiten der Art sind, dass wir sie durch Uebertragung, nicht durch selbstständige Neuerfindung zu erklären haben.

Zu einer solchen umfassenden Bearbeitung des schwierigen Gegenstandes aufzufordern, ist die Absicht dieses Aufsatzes. Wir wollen zu dem Endzwecke Weniges über Aehnlichkeiten der Astronomie und Astrologie, sowie über den rechnenden Theil der Mathematik zusammentragen, etwas ausführlicher bei geometrischen Dingen verweilen, wo wir besonders einige Bemerkungen zu machen haben werden, welche unseres Wissens noch nicht angestellt worden sind.

Dass wir Astronomie und Astrologie hier in einem Athemzuge vereinigen, darf den heutigen Astronomen nicht beleidigen. Die Zeit, zu welcher auch die Astrologie auf den Namen einer Wissenschaft Anspruch erhob, reicht recht tief herab, und während dieser ganzen Zeit war sie der Astronomie nahe verwandt, setzte dieselbe sogar bis zu einem gewissen Grade voraus.[4]) Sternbeobachtungen, Kenntniss der einzelnen Sterne musste jedenfalls das Früheste sein, denn ohne sie war es unmöglich, an einen Einfluss dieses oder jenes besondern Sternes, an eine

Bedeutung dieser oder jener Sterngruppirung zu denken. Dann aber hat die jüngere verlockendere Schwester mehr Bewerber gefunden, als die ältere ernstere, und beispielsweise sind von einem indischen Schriftsteller des VI. Jahrhunderts, von Varâhamihira,[5]) astrologische Werke erhalten geblieben und stehen zum Vergleiche zu Gebot, während sein astronomisches Werk verloren gegangen ist.[6])

Gerade bei Varâhamihira hat schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts Pater Pons die Wörter *horâ* und *kendra* gefunden, welche er mit ὥρη und κέντρον verglich.[7]) Allerdings heisst *kendra* nicht überall, wo es vorkommt, Kreismittelpunkt. In dem *Sûrya Siddhânta*, einem von Varâhamihira benutzten,[8]) also ihm vorausgehenden astronomischen Werke, kommt *kendra* auch in der Bedeutung der Entfernung eines Planeten von einem Störungsmittelpunkte vor.[9]) Vielleicht darf daran erinnert werden, dass die Entfernung aus einem Mittelpunkte, d. h. der Halbmesser, bei Euklid ἡ ἐκ κέντρου genannt wird und dass in griechischen Handschriften sogar ein und dasselbe Abkürzungszeichen (ein mit einem Mittelpunkte versehener kleiner Kreis) bald κύκλος, bald κέντρον gelesen werden muss,[10]) so dass ein mehrfacher Sinn des Wortes *kendra* mit der Abstammung aus dem Griechischen wohl vereinbar ist.[10a]) Freilich ist die griechische Sprache mit der indischen so altverwandt, dass der Gleichklang von Wörtern nicht immer durch eine Entlehnung erklärt werden muss. Hier scheint jedoch diese Nothwendigkeit vorzuliegen. Das griechische κέντρον bedeutet ursprünglich einen Stachel, woraus der durch Einbohren eines Stachels bezeichnete Punkt sich ohne Zwang ergiebt; das indische *kendra* dagegen soll ableitungslos sein. Aehnlich verhält es sich mit dem Namen der Minute, *liptà* oder *liptikâ*,[11]) welches indisch in der Luft schweben soll, während das griechische λεπτόν, der Bruchtheil, ursprünglich das Geschabte, keinerlei Schwierigkeit macht. Noch unzweifelhafter aus dem Griechischen übernommen sind bei Varâhamihira[7]) die schon 1827 von Whish bemerkten Namen der Sternbilder des Thierkreises, sind Wörter wie *trikoṇa* = τρίγωνος, *jâmitra* = διάμετρον, *hibuka* = ὑπογεῖον u. s. w.

Es erscheint dadurch erwiesen, dass griechische Einschaltungen in dem *Sûrya Siddhânta* und mit noch grösserer Sicherheit in den Schriften des Varâhamihira vorkommen. Damit wird keineswegs geleugnet, dass vorher schon eine indische Astronomie vorhanden gewesen sei. Im Gegentheil, deren Annahme ist allgemein verbreitete Ueberzeugung, und nur darin herrscht Verschiedenheit der Ansichten, dass die Einen jene älteste indische Astronomie an Ort und Stelle entstanden sein lassen, während Andere ihr einen chinesischen, noch Andere, denen wir uns anschliessen möchten, ihr einen babylonischen Ursprung zuweisen. Von dorther stammen auch wohl die Sexagesimalbrüche der Inder ebenso, wie der Griechen, so dass, um es gleich hier zu bemerken, aus dieser griechisch-indischen Gemeinschaft Schlüsse auf Uebertragung nicht gezogen werden dürfen.

Wann ist jenes ältere Werk, der *Sûrya Siddhânta*, geschrieben? Wir müssen auf diese Frage dieselbe Antwort ertheilen, welche uns so oft wiederkehrt, wenn es um indische Chronologie sich handelt: Wir wissen es nicht genau. Die Angabe nämlich, jenes Werk gehöre dem IV., V. Jahrhundert an,[12]) beruht wohl nur auf der Erwägung, dass man mindestens ein bis zwei Jahrhunderte vor Varâhamihira zurückgehen und doch wieder unterhalb dem Jahr 200 bleiben müsse. Jene obere Grenze wurde durch eine überaus geistreiche Vermuthung gewonnen. *Sûrya*, die Sonne, offenbarte (so heisst es am Anfang des Werkes) ihre Satzung dem *Asura Maya*, dem Dämon Maya, welcher die Offenbarung niederschrieb. In diesem dämonischen Vater der Astronomie erkannte nun Weber[13]) den Namen Turamaya, d. h. Ptolemaios, natürlich in diesem Falle keinen König, sondern den alexandrinischen Astronomen dieses Namens im II. Jahrhundert n. Chr. Die scheinbar übermässige Kühnheit dieser Muthmassung wird bedeutend gemildert durch den Umstand, dass vielfache indische Ueberlieferung nach Griechenland, genauer gesprochen nach Alexandrien hinüberdeutet, wo es um die Grundlegung der Wissenschaft von dem gestirnten Himmel sich handelt.

Varâhamihira schöpfte die Namen der Sternbilder aus den astrologischen Schriften des Yavaneçvarâcârya, d. h. des ionischen Meisters; denn dass die Yavana Ionier, d. h. Griechen sind, ist ebenso sicher, wie die Uebereinstimmung von *Romaka Pura* mit Rom. Die Stadt der Ionier, *Yavana Pura*, zwischen Lanka und Romakapura etwa in der Mitte gelegen, ist nichts Anderes, als Alexandrien,[14]) und Pauliça der Astronom, welcher bei Albîrûnî, einem arabischen Schriftsteller aus dem Jahre 1031, den Namen Paulus al Yûnânî führt, ist mit Paulus Alexandrinus identificirt worden.[15]) Auch der Persönlichkeit des ionischen Meisters oder, wie er mitunter heisst, des alten ionischen Meisters ist mit Glück nachgespürt worden, indem eine Handschrift mit seiner Persönlichkeit noch eine andere hochinteressante verbindet, die des Mînarâja, offenbar „eines der alten mythischen Heroen der westländischen Sagenwelt, sei es der Manes der Egypter oder der Minos der Griechen“.[16])

Fassen wir diese Angaben, welche auf Vollständigkeit keinen Anspruch erheben,[17]) zusammen, so ergiebt sich, dass jedenfalls in einer Zeit, welche etwa mit dem Jahre 200 n. Chr. beginnt, alexandrinische Astronomie und Astrologie nach Indien gedrungen ist und dort Aufnahme gefunden hat; dass zugleich auch altgriechische Sagen, welche auf die genannten Wissensgebiete sich beziehen, mit eingewandert sein können, wenn sie nicht schon bei früherer Gelegenheit ihre Verbreitung nach Osten fanden. Wir erachten es keineswegs als mit diesen Ergebnissen im Widerspruche, dass auch schon vor dem II. Jahrhundert alexandrinische Sternkunde nach Indien sich verbreitet haben kann, nur ist diese Möglichkeit bis heute nicht quellenmässig zu erhärten.

Wie verhält es sich mit der reinen Mathematik? Mathematiker in dem Sinne, welchen wir mit dem Worte verbinden, haben bisher in der indischen Literatur nicht nachgewiesen werden können. Diejenigen Schriftsteller, deren Werke vornehmlich als „indische Mathematik" studirt werden und wurden,[18]) Âryabhaṭa (geb. 476 n. Chr.), Brahmagupta (geb. 598), Bhâskarâcârya (geb. 1114) waren Astronomen und haben nur einzelne Capitel ihrer astronomischen Lehrbücher den rein mathematischen Hilfskenntnissen gewidmet. Es ist kaum denkbar, dass diese Schriftsteller, deren Aeltester dem Varâhamihira fast gleichzeitig war, mit den griechischen Quellen, welche diesem zu Gebote standen, unbekannt gewesen sein sollen; es ist noch weniger denkbar, dass sie, mit denselben bekannt, sie gar nicht auf sich wirken liessen, mögen auch jene griechischen Schriften mehr astrologischen als astronomischen Inhalts gewesen sein, mögen dagegen die genannten indischen Schriftsteller selbst ihrer unbestreitbar hohen Begabung gemäss sich dem griechischen Einflusse nicht ganz passiv hingegeben haben. Es ist somit auch wieder eine zum Voraus zu vermuthende, nur auf Bestätigung angewiesene Folgerung, dass griechische Mathematik ihre Spuren in jene indischen Werke hineingetragen habe.

Für die Arithmetik und Algebra freilich einen solchen bestätigenden Nachweis zu führen, ist bis jetzt so wenig gelungen, dass man mit gutem Grunde gezweifelt hat, ob ein Inder hierin überhaupt irgend Etwas von einem Griechen lernen konnte. Dass quadratische Gleichungen bei Indern und bei Griechen aufgelöst worden sind, dass Quadrat- und Cubikzahlen bei Brahmagupta summirt werden[19]) und nach denselben Formeln bei Archimed[20]) und Epaphroditus, dass sogenannte Brunnenaufgaben bei Bhaskara so gut wie in heronischen Schriften vorkommen,[21]) das sind freilich Aehnlicheiten; aber sie sind zu gering an Zahl, auch nicht charakteristisch genug, um als Beweise von Uebertragungen angewandt zu werden.

Auffallender ist allerdings eine von Woepcke, dem von Orientalisten und Mathematikern gleich beklagten Gelehrten, hervorgehobene Thatsache.[22]) In einem nicht mathematischen, auch nicht astronomischen oder astrologischen Buche, in dem Lalitavistara, wird von einer Prüfung erzählt, welcher der jugendliche Buddha sich unterwerfen musste. Bei dieser Gelegenheit erweist sich derselbe als so geübter Rechner, dass er im Stande ist, die Zahl der Elementartheilchen anzugeben, welche neben einander gelegt die Länge einer *Yôdjana*, d. h. eines Stadions einnehmen. Woepcke hat mit Recht darauf aufmerksam gemacht, dass diese Aufgabe zu sehr mit der von Archimed in seiner sogenannten „Sandeszahl" behandelten übereinstimmt und an sich eine zu absonderliche ist, als dass hier nicht an eine Uebertragung gedacht werden müsste. Woepcke hebt ferner zur Bestätigung hervor, dass bei Archimed ebenso, wie in dem Lalitavistara, unter den Maassen, welche benutzt werden, der Mohnsamen, der Finger und das Stadion genannt werden. Diesen Bemerkungen entnimmt er alsdann die Folgerung, der Lalitavistara sei unzweifelhaft die ältere Quelle und bei Archimed demgemäss ein indischer Einfluss nachgewiesen. „Das Alter der Lalitavistara," sagt dagegen der Verfasser der Vorlesungen über indische Literaturgeschichte,[23]) „ist keineswegs irgendwie derart fixirt, dass nicht ebenso gut das umgekehrte Verhältniss richtig sein könnte."

Wir sehen also leider, dass Woepcke's Obersatz anfechtbar ist. Wir bedauern es, denn wir möchten gern seiner Folgerung uns anschliessen. Die Art und Weise, in welcher Archimed seine Abhandlung beginnt, steht der nicht im Wege: „Manche Leute glauben, König Gelon, die Zahl des Sandes sei von unbegrenzter Grösse. Ich meine nicht des um Syrakus und sonst noch in Sicilien befindlichen, sondern auch dessen auf dem ganzen festen Lande, dem bewohnten und unbewohnten. Andere giebt es wieder, welche diese Zahl zwar nicht für unbegrenzt annehmen, sondern nur, dass noch keine so grosse Zahl jemals genannt sei, welche seine Menge übertreffe." Darin kann man das Zugeständniss finden, dass ähnliche Fragen schon mehr der Untersuchung unterworfen worden seien, und Archimed selbst beansprucht auch nur Zweierlei für sich: er will geometrische Beweise, welche auf den Inhalt einer Kugel sich beziehen, anwenden; er will sich einer Zahlengruppirung bedienen, die er selbst früher erfand, und von Beidem ist in dem Lalitavistara keine Spur zu finden. Ein Widerspruch ist demnach hier nicht vorhanden. Dagegen treffen so manche allgemeine Erwägungen mit Woepcke's Annahme zusammen. Das Volk, welches seiner ganzen geistigen Anlage nach zu Zahlenspeculationen hinneigte, welches nach allgemeiner Ueberzeugung die Positionsarithmetik erfand,[24]) welches in der Algebra sich zu einer Höhe erhob, die von europäischen Gelehrten erst 600 Jahre später, im XVIII. Jahrhundert erreicht wurde, scheint uns auch in frühester Zeit weit eher die Rolle des Lehrers als des Schülers gespielt zu haben; zugleich erklärt sich so das nicht abzuleugnende, aber immerhin fast räthselhafte Vorkommen nicht ganz unbedeutender algebraischer Kenntnisse bei den Griechen in verhältnissmässig früher Zeit. Wir wollen freilich eine Schwierigkeit nicht verheimlichen, welche uns aufstiess. Die Massvergleichungen des Lalitavistara enthalten vorwiegend die Verhältnisszahl 7. Ist das indisch?[26]) Griechisch ist es allerdings ebenso wenig. Höchstens wissen wir aus Herodot, dass die Babylonier neben der Elle von 6 Handflächenbreiten sich auch der Königselle von 7 solchen Breiten bedienten.

Alles in Allem müssen wir uns mit der Hoffnung begnügen, es werde späteren Forschern besser gelingen, einen indisch-griechischen Einfluss auf arithmetisch-algebraischem Gebiete über allen Zweifel zu erheben, der heute als möglich erscheint, für welchen nach unserem Gefühle die Vermuthung spricht, der aber noch keineswegs gesichert ist.

In Bezug auf Geometrie sprechen allgemeine Gründe wieder für die Annahme eines Einflusses in entgegengesetzter Richtung. Auch die entschiedensten Verfechter indischer Originalität in der Geometrie, wie Hankel, sehen sich genöthigt, zuzugeben,[27]) dass von constructiven strengen Beweisen bei den Indern keine Rede sei. Rechnung ist das grosse Hilfsmittel, welches sie anwenden, wo nur immer die Möglichkeit sich bietet; die geometrische Grundlage wird dabei ganz aus den Augen gelassen, erst am Schlusse wieder gewonnen. Soll dagegen durchaus das Geometrische einmal geometrisch bewiesen werden, so begnügen sie sich mit einer Berufung an das Auge des Schülers: Sieh'! sagen sie zu ihm, und dieses Sehen muss genügen, Congruenzen, aber auch Aehnlichkeiten als wahr erkennen zu lassen. Wir vermögen es nicht einzusehen, wie auf diesem letzteren Wege geometrische Entdeckungen gemacht werden wollten, noch weniger wie durch Rechnung Abgeleitetes bei einem so algebraisch denkenden Volke in Vergessenheit gerathen konnte. Wir sind gewohnt, in Dingen, wo das Gemüthsleben, wo die Religion, und sei es als abergläubischer Auswuchs des religiösen Gefühls, mit der Wissenschaft in Conflict geräth, Rückschritte vollzogen zu sehen. Die Geschichte der Astronomie bietet Beispiele zu Dutzenden. Aber einen Rückschritt in der leidenschaftslosesten, in der religiös neutralsten Wissenschaft, in der Geometrie, wie er in Indien von Brahmagupta bis zu Bhâskarâcârya sich zeigt, vermögen wir nur dann zu begreifen, wenn es sich der grossen Hauptsache nach um Fremdländisches, nicht naturgemäss auf heimischem Boden Erwachsenes handelte.

Wir sind keineswegs die Ersten, welche die indische Geometrie in dieser Weise ganz oder doch zum grossen Theil aus Alexandrien eingeführt wissen wollen. Henri Th. Martin hat in seinen, an anderem Orte bereits ihrem ganzen Werthe nach von uns gewürdigten Untersuchungen über Heron von Alexandrien die gleiche Behauptung ausgesprochen.[28]) Er hat zu diesem Zwecke sich der Hauptsache nach auf die Benennung „Scheitellinie" berufen, welche wie bei den Egyptern und von diesen abhängig bei Heron von Alexandrien und den Römern auch bei den Indern auftritt;[29]) auf das Vorkommen der rechtwinkligen Dreiecke 3, 4, 5 und 5, 12, 13, sowie des schiefwinkligen Dreiecks 13, 14, 15; auf die Formel $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ für den Inhalt eines Sehnenvierecks, welche unter Annahme der einen Seite $d=0$ in die heronische Formel für den Inhalt irgend eines Dreiecks übergeht, und deren Kenntniss auch in der auf das Viereck bezüglichen Form er bei Heron glaubt voraussetzen zu müssen.

Hankel hat dagegen eingewandt,[30]) ein Wort für Scheitellinie sei eine so natürliche Bezeichnung, dass sie wohl an zwei Orten selbstständig auftreten könne. Das Können wird Niemand bezweifeln; eigenthümlich bleibt es aber immer, dass nur auf egyptischem und indischem Boden, soviel wir bis heute wissen, nur bei rechnenden Geometern das Können sich zum Sein verwirklicht hat.

Etwas gegründeter, aber auch nicht stichhaltig sind die Einwürfe, die sich auf die drei rationalen Dreiecke beziehen. Wer den pythagoräischen Lehrsatz kannte und die Formeln $c_1 = \alpha^2 - \beta^2$, $c_2 = 2\alpha\beta$, $h = \alpha^2 + \beta^2$ zur Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke besass, der musste durch $\alpha = 2$, $\beta = 1$ und durch $\alpha = 3$, $\beta = 2$ zu jenen ersteren Dreiecken 3, 4, 5 und 5, 12, 13 gelangen. Den konnte das Dreieck 3, 4, 5 durch Wahl eines dreimal kleineren Massstabes oder durch Vervielfachung jeder Seite mit 3 zu einem Dreiecke 9, 12, 15 führen. Dieses letztere an der gemeinschaftlichen Kathete 12 mit dem Dreiecke 5, 12, 13 zusammensetzend, fand er das Dreieck 13, 14, 15. Immerhin tritt also dabei die Nothwendigkeit auf, dass erstlich der pythagoräische Satz an sich bekannt war, zweitens die Formel für rationale rechtwinklige Dreiecke, drittens die Methode der Zusammensetzung solcher Dreiecke zu einem neuen. Alle drei Voraussetzungen treffen, wie man weiss, für die Alexandriner zu. Von den beiden ersteren ist diese Wahrheit längst bekannt und anerkannt, die letztere ist wohl von uns zuerst bei Heron von Alexandrien nachgewiesen worden,[31]) dessen aneinanderhängende rechtwinklige Dreiecke, *τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα*, nicht wohl anders verstanden werden können. Es ist wahr, alle drei Dinge finden sich auch auf indischem Boden wieder. Sollen wir hier abermals ganz ähnlich geartete Denkvermögen annehmen, welche an zwei Orten selbstständig bis zu Einzelheiten genau gleiche Betrachtungen anstellten? Hankel selbst hat so schön nachgewiesen,[32]) dass die Formel für den Vierecksinhalt bei Brahmagupta höchst wahrscheinlich nur für Trapeze und Tetragone aufgestellt ist, dass es eine zufällige Erscheinung bildet, wenn sie allgemein für jedes Sehnenviereck richtig ist. Er hat in den Trapezen Vierecke erkannt, welche eben durch gewisse vier aneinanderhängende rechtwinklige Dreiecke gebildet werden, in den Tetragonen solche Figuren, welche heute gleichseitige Paralleltrapeze genannt sind. Müssen wir erst noch hervorheben, dass gerade dieses Tetragon das *τραπέζιον ἰσοσκελὲς* des Heron ist,[33]) vor ihm schon die Lieblingsfigur egyptischer Feldmessung war?

Nicht schwerer als die bisherigen Einwürfe Hankel's fällt bei uns die Behauptung ins Gewicht, mit welcher er seine Polemik abschliesst[34]): „Viel eher mag es als Beweis für die gänzliche Unabhängigkeit der indischen Geometrie von Heron dienen, dass sich des Letztern Satz über die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks $(\frac{1}{3}+\frac{1}{10})a^2$ bei den Indern nirgends findet, und doch scheint es unzweifelhaft, dass, wenn sie jemals mit der heronischen Geometrie in irgend einer Weise bekannt gemacht worden wären, sie vor Allem diese Formel bemerkt haben würden." Es sei für künftige Zwecke hier vorweg bemerkt, dass der Kern der Formel $\varDelta=(\frac{1}{3}+\frac{1}{10})a^2$ darin liegt, dass in ihr $\frac{1}{4}\sqrt{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$, d. h. $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$ gesetzt ist. Es kommt also nur darauf an, diesen Näherungswerth in Indien als gebräuchlich nachzuweisen, um Hankel's Wunsch zu erfüllen. Wieviel kannte aber Hankel, kannten wir Alle bis vor Kurzem von indischer Geometrie, um apodiktisch auszusprechen: dieser oder jener Satz findet sich nirgends! Wir brauchen nur an unzweifelhafte Schüler der heronischen Geometrie zu erinnern, an Epaphroditus, an Nipsus, an den Anonymus von Chartres, an Gerbert; bei diesen Allen findet sich der Satz vom Inhalte des gleichseitigen Dreiecks nicht. Würde man daraus schliessen können, die römische, die mittelalterliche Geometrie habe sich unabhängig von Heron entwickelt? Da liegt es doch, scheint uns, näher, Das zu beachten, was vorhanden ist, als nicht Vorhandenem nachzuseufzen.

Bezüglich der griechischen und indischen Geometrie waren die falschen Näherungsformeln der Egypter und der heronischen Schriften sammt ihrer Schüler für Dreiecks- und Vierecksinhalte zu berücksichtigen, welche bei Brahmagupta auftreten[35]) und auf welche von Martin nur im Vorbeigehen,[36]) von seinem Gegner gar nicht aufmerksam gemacht worden ist, — Formeln, mit welchen in geistigem Zusammenhange auch eine für den Kubikinhalt von Körpern steht,[37]) gleichfalls jedem Leser Heron's durchaus geläufig.

Da musste man die Flächenräume, welche bei Brahmagupta gemessen werden sollen, selbst ins Auge fassen, durch die Commentatoren in mannigfachster Weise mittelst Hilfslinien in einfachere Figuren zerlegt, ganz so, wie es bei Heron von Alexandrien Gewohnheit ist.

Da war auf das besondere Capitel „Schattenausmessung" hinzuweisen, welches bei Brahmagupta sich findet,[38]) und welches bis zu Gerbert's Geometrie und darüber hinaus als wesentlicher Bestandtheil gräcisirender Feldmesskunst wiederkehrt.

Die Beispiele von Uebereinstimmung griechischer und indischer Geometrie haben sich uns bereits gehäuft, während wir nur von solchen Dingen sprachen, welche auch unseren Vorgängern bekannt sein mussten. Seit 1875 hat sich aber das indisch-geometrische Material bedeutend vermehrt. Ein jüngerer deutscher Gelehrter, Dr. G. Thibaut aus Heidelberg, gegenwärtig Professor an dem Collegium zu Benares, hatte den glücklichen Gedanken, Spuren indischer Geometrie in einer Classe von Werken zu verfolgen, welche zu diesem Zwecke einer Durchsicht noch nicht unterworfen worden waren, wenn auch Burnell schon darauf hingewiesen hatte.[39]) Der indische Ritus, peinlich genauen Vorschriften folgend, kann der geometrischen Regeln nicht entbehren. Wenn der Altar nicht genau in der anbefohlenen Gestalt erbaut ist, wenn eine Kante nicht rechtwinklig zur andern steht, wenn in der Orientirung ein Fehler stattfand, so nimmt die Gottheit das ihr dargebrachte Opfer nicht an, ein dem Inder schrecklicher Gedanke, da für ihn jedes Opfer ein förmlicher Vertrag mit der betreffenden Gottheit, eine Art von Tauschgeschäft ist und er somit auf Erfüllung seines bei dem Opfer gehegten Wunsches sich nicht die geringste Rechnung machen kann, sofern seine Gabe verschmäht wurde. Die rituellen Vorschriften, soweit sie auf die Opfer überhaupt sich beziehen, sind in den sogenannten Kalpasûtras enthalten, und zu jedem Kalpasûtra scheint als Unterabtheilung ein Çulvasûtra gehört zu haben, welcher eben jene geometrischen Vorschriften lehrte.

Thibaut hat drei solche Çulvasûtras vergleichender Untersuchung unterzogen,[40]) deren Verfasser als Baudhâyana, Âpastamba und Kâtyâyana benannt sind, und hat sich, wie wir gleich hier hervorheben müssen, bei dieser Gelegenheit als ein so gewandter Mathematiker und Rechner insbesondere bewährt, dass die Geschichte unserer Wissenschaft hoffen darf, durch ihn ebenso überraschende, als zuverlässige Bereicherungen zu erwerben, wenn er, der selbst gestellten Aufgabe auch jenseits des zuerst gesteckten Zieles treu bleibend, überhaupt nach mathematischen Spuren in nicht-astronomischen Schriften der Sanskrit-Literatur sich umzusehen fortfährt.

Wir sagten bereits, dass die Gestalt des Altars von wesentlicher Bedeutung sei. Sie hat allerdings im Laufe der Zeiten gewechselt, Formen annehmend, welche für jeden nicht indischen Geist an das Lächerliche streifen. Welcher Europäer kann sich hineindenken, einen Altar in der Figur eines Falken oder irgend eines andern Vogels, eines Wagenrades u. s. w. zu errichten? Dabei treten jedoch zwei mathematische Gesetze auf, jedes eine besondere Gruppe von Aufgaben erzeugend.[41])

Wird ein Altar von gegebener Gestalt vergrössert, so muss die Gestalt selbst in allen ihren Verhältnissen dieselbe bleiben. Man muss also verstehen: 1. eine geometrische Figur zu bilden, einer gegebenen ähnlich und zu derselben in gegebenem Grössenverhältnisse stehend.

Die Fläche des Altars von normaler Grösse ist ohne Rücksicht auf seine Gestalt stets dieselbe. Was man also gleichfalls zu leisten hat, ist: 2. eine geometrische Figur in eine andere ihr flächengleiche zu verwandeln.

In Bezug auf das erste Gesetz möge an ein Analogon erinnert werden, welches die griechische Sage gleichfalls mit der Errichtung eines religiösen Bauwerkes verbindet. Unsere Leser errathen schon, dass wir von der Verdoppelung des Würfels reden. Eratosthenes erzählt uns, König Minos habe für Glaukos ein Grabmal in Würfelgestalt errichten lassen, und als er erfuhr, jede Seite des Würfels sei nur 100 Fuss lang, habe er dem Baumeister den Befehl ertheilt, welchen der Tragödiendichter Euripides in die Worte kleidete:

„Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft.
Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht!"

Eine ganz ähnliche Aufgabe, fährt Eratosthenes fort, sei den Deliern gestellt worden, als sie bekümmert waren, wie eine ausgebrochene Seuche beseitigt werden könne. Des Orakels Spruch wies sie an, sie müssten den Altar des Apollon in gleich bleibender Gestalt verdoppeln, und nun schickten sie zu den bei Plato in der Akademie gebildeten Geometern mit der Bitte, nähere Vorschriften zur Ausführung des Anbefohlenen zu entwerfen. Von diesen Sagen hat die eine jüngere ein ziemlich genau zu bestimmendes Alter. Sie fällt zwischen Plato (429 bis 348) und Eratosthenes (276—194) näher an Jenen, mithin etwa in die zweite Hälfte des IV. Jahrhunderts. Die ältere Sage aber, jedenfalls vor Euripides (485—406) und somit mindestens ein Jahrhundert vor dem Alexanderzuge griechisches Eigenthum, geht bis auf das Heroenzeitalter zurück, bis auf jenen König Minos, dem wir oben vielleicht eine Stelle in der mythischen Astronomie der Inder zuweisen mussten.

Die Inder begnügten sich, soviel aus Thibaut's gegenwärtigen Forschungen zu entnehmen ist, mit der leichteren Aufgabe, nur die Aehnlichkeit der oberen Fläche des Altars zu wahren, und bedurften, da Flächen im quadratischen Verhältnisse einer Seite stehen, nur der Ausziehung von Quadratwurzeln, sei es, dass dieselben durch Rechnung ermittelt, sei es durch Zeichnung erhalten wurden. Hätte die körperliche Aehnlichkeit erzielt werden wollen, so hätte die rechnende Ausführung den Indern des VII. Jahrhunderts wenigstens keine Schwierigkeit bereitet, da Brahmagupta mit der Ausziehung der Kubikwurzel bekannt war.[42]) Es ist also eine wohl aufzuwerfende Frage, ob nicht auch Spuren der schwierigeren Aufgabe in Indien zu finden sein möchten? Ohne Material zur Bejahung dieser Frage sehen wir zu, wie die Ausziehung der Quadratwurzel in den Çulvasûtras nach den beiden angedeuteten Methoden vollzogen wird.

Was die Rechnung betrifft, so geben Baudhâyana und Âpastamba[43]) den Näherungswerth $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$. Thibaut hat versucht, die Rechnung wiederherzustellen, mit deren Hilfe dieser

Werth gefunden wurde. Er meint, die Inder hätten sich eine Liste der doppelten Quadrate aller aufeinander folgender ganzer Zahlen, etwa von 1 bis 20, angefertigt und daneben sei stets die dem Ergebnisse zunächstliegende ganze Quadratzahl geschrieben worden, so dass der Anfang der Liste, einige Zwischenglieder und der Schluss etwa so ausgesehen haben mögen:

$$\begin{array}{ll}
2\times 1^2 = 2\,, & 4 = 2^2,\\
2\times 2^2 = 8\,, & 9 = 3^2,\\
2\times 3^2 = 18\,, & 16 = 4^2,\\
\ldots & \ldots\\
2\times 8^2 = 128, & 121 = 11^2,\\
2\times 9^2 = 162, & 169 = 13^2,\\
\ldots & \ldots\\
2\times 12^2 = 288, & 289 = 17^2,\\
\ldots & \ldots\\
2\times 20^2 = 800, & 784 = 28^2.
\end{array}$$

Aus dieser Liste erkannte man, dass nahezu $2\times 12^2 = 17^2$ war, woraus $\sqrt{2} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}$ folgte. Um Etwas war freilich dieser Wurzelwerth zu gross. Die 17 Längeneinheiten gaben ein Quadrat von 289 Flächeneinheiten, während nur 288 entstehen sollten. Die eine Flächeneinheit, welche wieder wegzunehmen war, konnte nun fast genau in Gestalt eines rechtwinkligen Stückes gedacht werden, welches aus den Vierunddreissigsteln von 33 Quadratchen (das Eckquadratchen gehört dem waagrechten und dem senkrechten Schenkel gleichzeitig zu) zusammengesetzt ist. Das heisst: es ist schon viel genauer $2\times 12^2 = \left(17 - \frac{1}{34}\right)^2$ oder $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} = \frac{577}{408}$.

Wir können dem Philologen, der eine so sehr mathematische Denkweise sich anzueignen wusste, nur unsere beglückwünschende Anerkennung aussprechen. Auf zwei Dinge müssen wir aber doch aufmerksam machen. Erstlich dass hier die Quadratwurzel durch Stammbrüche dargestellt ist, eine egyptisch-griechische Gewohnheit, zweitens dass das rechtwinklige Flächenstück, um welches das Quadrat von 17 verkleinert wird und dann wieder als Quadrat erscheint, eine der griechischen Geometrie angehörende Figur ist und z. B. bei Heron den Namen Gnomon führt.[44])

Die zeichnende Herstellung der Quadratwurzel bedient sich, wie nicht anders zu erwarten steht, des pythagoräischen Lehrsatzes Bemerkenswerth dabei ist, dass in dem indischen Wortlaute von einem rechtwinkligen Dreieck keine Rede ist, sondern dass die Hypotenuse als Diagonale eines Rechtecks gedacht wird, und dass ferner unterschieden wird, ob jenes Rechteck gleichseitig, ob nicht, mit anderen Worten, ob es sich um die Quadratwurzel aus 2 oder aus einer andern Zahl handelt, die construirt werden soll.

„Das Seil, quer über das gleichseitige Rechteck gespannt, bringt ein Quadrat von doppelter Fläche hervor.“[45])

„Das Seil, quer über ein längliches Rechteck gespannt, bringt beide Flächen hervor, welche die Seile längs der grösseren und kleineren Seite gespannt hervorbringen.“[46])

Das ist der ungefähre Wortlaut bei Baudhâyana. Einen Beweis sucht man vergeblich. Für den ersten Fall meint Thibaut, es dürfte indischem Geiste entsprochen haben, die Quadrate der beiden Katheten je durch eine Diagonale zu halbiren, das Quadrat der Hypotenuse durch Ziehen beider Diagonalen zu viertheilen, wodurch die Identität der sämmtlichen so entstehenden Dreiecke von selbst hervortrete (Taf. 1, Fig. 1), also auch die Identität von je 4 derselben zusammengenommen. Den zweiten Fall dagegen erkennt man, wie Baudhâyana ausdrücklich sagt,[47]) an den Rechtecken, deren Seiten aus 3 und 4, aus 12 und 5, aus 15 und 8, aus 7 und 24, aus 12 und 35, aus 15 und 36 Längeneinheiten bestehen.

Wir gestatten uns wieder drei, wie wir glauben, nicht unwichtige Bemerkungen. Die erste hat eigentlich Thibaut schon dahin gemacht, dass das letzte von Baudhâyana erwähnte rationale rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 15 und 36 dasselbe sei, welches er als zweites unter dem Namen des Dreiecks mit den Katheten 12 und 5 bereits genannt hat. Spricht sich, fragen wir daran anknüpfend, in dieser Tautologie ein tiefes Verständniss des behandelten Gegenstandes aus?

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf das Theilen des pythagoräischen Lehrsatzes in zwei gesonderte Sätze. Eine allgemeine geometrische Wahrheit zunächst an vielen Unterfällen zu prüfen, beziehungsweise zu erhärten, das ist durchaus griechisch! Gerade von der Bekanntschaft mit der griechisch-mathematischen Literatur aus hat z. B. S. Günther den Beweis der alten Pythagoräer für den nach ihrem Meister genannten Lehrsatz neu zu erfinden versucht,[48]) und sein Versuch stimmt bis in die Einzelheiten mit jener Theilung in zwei Fälle, welche Baudhâyana uns kennen lehrt, und mit dem Vorschlage Thibaut's zum Beweise des ersten Falles überein, während es der Versicherung nicht bedarf, dass schon nach Zeit und Ort beider Veröffentlichungen weder Thibaut eine Ahnung von Günther's Arbeit haben konnte, noch umgekehrt Günther von der Thibaut's.

Endlich drittens können wir, die vorige Bemerkung verstärkend, auf eine Analogie aufmerksam machen, welche uns unmöglich Sache des Zufalls allein zu sein scheint. Auch in der Geometrie des Heron von Aexandrien tritt der pythagoräische Lehrsatz zuvor bei der Berechnung der Diagonale eines Rechtecks auf, ehe noch von Dreiecken die Rede ist. Auch dort wird in zwei einander unmittelbar folgenden Beispielen unterschieden zwischen der Diagonale des gleichseitigen und des ungleichseitigen Rechtecks![49])

Die Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes bei den Verfassern der Çulvasûtras besteht theils in Additionen, theils in Subtractionen von Quadraten, so dass Summe und Rest wieder in Quadratform erscheinen. Die beiden Figuren (Fig. 2 und 3) genügen, um den heutigen Leser ins Klare darüber zu setzen, dass das eine Mal $AE^2 = AB^2 + BE^2$, das andere Mal $DG^2 = AB^2 - DF^2$ sein wird.[50]) Sollen bei der Addition gleiche Quadrate in grösserer Anzahl zusammengefasst werden, d. h. soll ein Quadrat gefunden werden, welches ein ganzes Vielfaches eines andern sei, so wird Schritt für Schritt weiter gegangen, zuerst ein doppeltes, dann ein dreifaches, ein vierfaches Quadrat u. s. w. ermittelt, ja es stehen für alle diese Fälle besondere Namen der einzelnen Aufgaben zu Gebote.[51])

Eine zweite Gruppe von Aufgaben lehrt, wie wir sagten, eine Figur in eine andere ihr gleichflächige zu verwandeln. Hier sei zuerst der Verwandlung eines Rechteckes in ein Quadrat gedacht, welche dadurch überaus interessant ist, dass sie nur den pythagoräischen Lehrsatz als bekannt voraussetzt, dagegen von der euklidischen[52]) Anwendung des Satzes von der Senkrechten aus einem Peripheriepunkte des Kreises auf dessen Durchmesser ganz absieht. Baudhâyana verfährt nämlich wie folgt:[53]) Das Rechteck $ABCD$ (Fig. 4) soll in ein Quadrat verwandelt werden. Man schneidet das kleine Quadrat $AEFD$ ab, welches jetzt noch um das Rechteck $EBCF$ zu vergrössern ist. Letzteres wird durch GH halbirt und die Hälfte $GBCH$ als $FIKD$ an das Quadrat $AEFD$ angelegt. Somit ist das ursprüngliche Rechteck $ABCD$ in ein Gnomon $AGHFIK$ verwandelt, d. h. in den Unterschied der beiden Quadrate $AGLK$ und $FHLI$. Die Differenz zweier Quadrate als Quadrat zu zeichnen hat man aber gelernt, und so ist keine Schwierigkeit mehr vorhanden, die gewünschte Umwandelung zu vollenden.

Weitaus bedeutsamer für die Zwecke unserer Untersuchung sind jedoch unter dieser Gruppe von Aufgaben diejenigen, welche sich auf die gegenseitige Umwandelung eines Quadrates und eines Kreises ineinander beziehen. Von diesen Aufgaben ist die eine schon längst der aufmerksamsten Beachtung aller Historiker sicher gewesen. Quadratur des Kreises ist der Kunstausdruck, dessen man sich bedient, wenn ein Quadrat gefunden werden soll, einem gegebenen Kreise gleichflächig, sei es, dass man durch Rechnung, sei es durch Zeichnung die Seite des gesuchten Quadrates sich verschaffen will. Die entgegengesetzte Aufgabe: einen einem gegebenen Quadrate gleichflächigen Kreis zu construiren, hat man bisher, wenn überhaupt, nur sehr im Vorbeigehen besprochen.

Uns ist auch in der That nur eine Construction zur Lösung dieser Aufgabe bisher bekannt gewesen, von welcher wir als von der Construction Albrecht Dürer's an anderem Orte gehandelt haben.[54]) Es will scheinen, als werde künftighin der Geschichtsschreiber der Mathematik auch mit dieser zweiten Aufgabe sich beschäftigen müssen, für welche wir den Namen der Rundmachung des Quadrates vorschlagen. Wir bemerken ferner, dass im Folgenden jedesmal r den Halbmesser, d den Durchmesser des Kreises, α die Seite, δ die Diagonale des gleichflächigen Quadrates bedeuten soll.

Die Çulvasûtras[55]) enthalten folgende Vorschrift zur Rundmachung des Quadrates (Fig. 5). Die Diagonalen AC, BD des Quadrates werden gezogen und durch deren Durchschnittspunkt E die Gerade KF parallel zu den Seiten AD und BC des Quadrates. Von E als Mittelpunkt aus wird mit EA als Halbmesser der Bogen AF beschrieben bis zum Durchschnitte mit KF. Das über das Quadrat hinausreichende Stück FI wird in den Punkten G, H in drei gleiche Theile getheilt, so ist EH der Halbmesser des um E als Mittelpunkt zu beschreibenden gesuchten Kreises.

Für die Quadratur des Kreises dagegen liefert sowohl Baudhâyana, als Âpastamba, als Kâtyâyana die Regel $\alpha = \frac{13}{15}d$, während Baudhâyana vereinzelt auch noch $\alpha = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}\right)d$ angiebt.

Sonderbare Construction, sonderbare Regeln! Ob es wohl möglich ist, eine Spur zu finden, welche uns dem Ursprung jener Dinge etwas näher bringt? Vielleicht.

Die Regel Baudhâyana's für die Quadratur des Kreises mit der Construction zur Rundmachung des Quadrates zu identificiren, ist schon Thibaut gelungen, wie anerkennend hervorgehoben werden muss. Jene Construction giebt $d = \alpha + \frac{1}{3}(\delta - \alpha)$ oder, da $\delta = \alpha . \sqrt{2}$, auch $d = \frac{\alpha}{3}(2 + \sqrt{2})$, beziehungsweise $\alpha = \frac{3d}{2+\sqrt{2}}$. Nun war aber als in Indien bekannter Näherungswerth oben nachgewiesen $\sqrt{2} = \frac{577}{408}$ und durch Einsetzung dieses Werthes wird $\alpha = \frac{1224}{1393}d$ oder, in Brüche mit kleineren Benennungen zerlegt, welche eine leichtere Rechnung zulassen, sehr nahezu $\alpha = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}\right)d$, wie Baudhâyana vorschreibt.[56])

Wir haben soeben gesehen, dass eine Uebersetzung der Construction zur Rundmachung des Quadrates in eine Rechnungsvorschrift nichts Anderes erfordert, als die Kenntniss eines Näherungswerthes für $\sqrt{2}$. Dass immer und überall derselbe Näherungswerth für diese Wurzelgrösse in Gebrauch gewesen sein sollte, ist weder wahrscheinlich, noch wahr. Wir wissen z. B., dass mittelalterliche Juden $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ rechneten.[57]) Ueberlegen wir nun, welchen Näherungswerth von $\sqrt{2}$ der Erfinder der Construction zur Rundmachung des Quadrates wohl gebraucht haben mag? Das Stück FI wird bei dieser Construction in drei gleiche Theile getheilt; das liegt am Nächsten, sofern FI selbst gleich drei Längeneinheiten war. Dasselbe FI ist genau $=\frac{\delta-\alpha}{2}=\alpha\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Benutzen wir nun einen Augenblick das Aehnlichkeitszeichen $\sim$ in der Bedeutung „annähernd gleich“, so ergiebt sich $\alpha\frac{\sqrt{2}-1}{2}\sim 3$, $\alpha+6\sim\alpha\sqrt{2}$, also durch Quadrirung $\alpha^2+12\alpha+36\sim 2\alpha^2$ oder $\alpha^2-12\alpha\sim 36$, d. h. $\alpha\sim 6+\sqrt{72}\sim 14$, da ganzzahlige Längenmasse genommen werden müssen, wenn ein bequemer Näherungswerth der Rechnung zu Grunde gelegen haben soll. Daraus finden wir weiter wegen $\frac{\delta-\alpha}{2}=3$, $\delta=6+\alpha=20$ und $\sqrt{2}=\frac{\delta}{\alpha}$ $=\frac{20}{14}=\frac{10}{7}$.

Nun ist aber $\frac{10}{7}$ nicht blos ein ganz erträglicher Näherungswerth für $\sqrt{2}$, welcher bei $\alpha=14$, $\delta=20$ uns das verlangte $FI=3$ liefert; die ganze Construction nimmt unter dieser Voraussetzung einen überraschend bekannten Charakter an. Jetzt ist nämlich $d=2EH=16$, d. h. $=\frac{16}{20}\delta=\frac{8}{10}\delta$, genau dieselbe Vorschrift, welche sich im Occident bis zu Albrecht Dürer erhalten hat!

Wir verhehlen uns freilich nicht, dass unserer Auffassung ein gefährlicher Einwurf droht. Wenn die Dürer'sche Construction auf $\alpha=14$, $d=16$ beruht, so folgt aus ihr, wegen $\alpha^2=\frac{\pi}{4}d^2$, dass $\pi=\frac{49}{16}=3\frac{1}{16}$ sein muss, während, als wir früher uns mit der Dürer'schen Construction beschäftigten,[54]) wir in ihr den Werth $\pi=3\frac{1}{8}$ wiedererkennen wollten, der schon bei Vitruvius auftritt und den inzwischen Max Curtze bei einer grössern Anzahl von Praktikern aufgefunden hat. Dass zwei Werthe von π in einer und derselben Construction stecken sollten, das ist doch wohl kaum glaublich. Gleichwohl scheint uns das kaum Glaubliche hier der Fall zu sein. Vitruvius benutzt nämlich $\pi=3\frac{1}{8}$ nicht zur Quadratur, sondern zur Rectification des Kreises. Es liesse sich also ganz gut denken, dass die Dürer'sche Construction ursprünglich so entstanden wäre, wie wir es oben gezeigt haben. Man sah eben, dass $d=\alpha$ zu klein, $d=\delta$ zu gross war, und wählte $d=\alpha+\frac{\delta-\alpha}{3}$, angeleitet durch die Möglichkeit, bei $\frac{\delta-\alpha}{2}=3$ mit lauter ganzzahligen Längenmaassen zu thun zu haben. Den Ort der Entstehung denken wir uns in Alexandrien, die Zeit sehr frühe. Die Aufgabe der Rectification war in Griechenland die bedeutend spätere. Erst zur Zeit des **Archimedes** können wir sie gegenwärtig mit Bestimmtheit nachweisen. Wie, wenn man erst dieser Aufgabe zu Liebe das alte Recept $d = \frac{8}{10}\delta$ zur Grundlage neuer Rechnungen machte? Inzwischen war die geometrisch geführte Rechnung mit Irrationalgrössen zum vollen Eigenthum der alexandrinischen Geometer geworden, und ohne Näherungswerth konnte $\delta = \alpha\sqrt{2}$, $d^2 = \frac{32}{25}\alpha^2$, $\alpha^2 = \frac{25}{8}r^2$ gesetzt werden, woraus das vitruvische $\pi = 3\frac{1}{8}$ folgte.

Wir kommen zu der den drei Çulvasûtras gemeinschaftlichen Vorschrift, die Quadratur des Kreises mittelst der Gleichung $\alpha = \frac{13}{15}d$ zu vollziehen. Wir glauben keinem Widerspruche ausgesetzt zu sein, wenn wir annehmen, $\frac{13}{15}$ könne nichts Anderes hier sein, als der alexandrinische Näherungswerth für $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dessen **Heron** bei der Inhaltsberechnung des gleichseitigen Dreiecks sich bediente und dessen Benutzung also jetzt auch in Indien nachgewiesen ist!

Wie freilich die Formel $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}.d$ zu erklären sei, dafür giebt es so verschiedene Möglichkeiten, dass wir deren mindestens zwei aussprechen müssen. Aus $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}d$ folgt $\pi = 3$, d. h. der Werth der Verhältnisszahl des Kreisumfanges zum Durchmesser, den wir bei anderer Gelegenheit als babylonisch nachgewiesen haben,[58]) der aber auch, was wir damals übersehen haben, auf indischem Boden bis zu **Brahmagupta** sich erhalten hat.[59]) Die andere Auffassungsweise besteht darin, dass $\frac{1}{2}\sqrt{3}d$ leicht ersichtlich die Höhe des über dem Durchmesser gezeichneten gleichseitigen Dreiecks ist. Ist auch auf griechischem Boden bisher keine Spur zu finden, dass ein solches Dreieck bei Quadraturversuchen angewandt worden wäre, so ist doch ein eigenthümlicher Zusammenhang vorhanden, auf welchen aufmerksam gemacht werden muss, auf den wir auch früher schon halb unbewusst hingedeutet haben.[60]) **Heron** von Alexandrien berechnet nämlich den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks als $(\frac{1}{3} + \frac{1}{10})a^2$, dessen Höhe aber nicht, wie man vermuthen sollte, als $(\frac{2}{3} + \frac{1}{5})a$, sondern subtractiv, indem er von der Seite $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{30}$, also zusammen $\frac{2}{15}$ abzieht.[61]) Subtractiv sprechen aber auch die Çulvasûtras: „Theile (den Durchmesser) in 15 Theile und nimm 2 weg; das (was übrig bleibt) ist ungefähr die Seite des Quadrates.“

Wir haben die Schwierigkeiten und Zweifel, welche unsere Hypothesen keineswegs alle aus dem Wege räumen, nicht verschwiegen. Wir sind auch weit entfernt von der Anmassung, in unseren Meinungen sofort anzuerkennende historische Thatsachen zu sehen. Wir geben im Voraus zu, es sei möglich, andere und bessere Erklärungen zu finden. Das Einzige, was wir nicht preisgeben, weil es allzu augenscheinlich von allen Seiten zu Tage tritt, ist der Zusammenhang zwischen Alexandrinischem und Indischem auch in den die Kreisrechnung betreffenden Capiteln.

Wir wenden uns zu einem letzten Gegenstande und, wie wir ankündigend zu behaupten wagen, zu einem hochwichtigen und interessanten. Es handelt sich um die Orientirung der Altäre und um ihre genau rechtwinklige Herstellung. Das erste und wichtigste Geschäft[62]) besteht in der Absteckung des *prâci*, d. h. der ostwestlichen Linie. Wer erinnert sich dabei nicht sofort an den *decumanus*[63]) der römischen Agrimensoren? Wie in den Çulvasûtras die Absteckung dieser ostwestlichen Linie mit Hilfe astronomischer Beobachtungen gelehrt wird, hat Thibaut bis jetzt noch nicht veröffentlicht. Dagegen findet sich eine Vorschrift dazu im *Sûrya Siddhânta*,[64]) und diese deckt sich vollständig mit der bei Vitruvius erhaltenen,[65]) die zweimalige Benutzung eines Schattennehmers am Vormittage und Nachmittage desselben Tages in Zeitpunkten, zu welchen der Schatten des Apparates genau gleich lang ist, voraussetzend.

Von dem *prâci* ausgehend werden nun rechte Winkel abgesteckt, und zwar mit Hilfe eines Seiles. Die Länge des *prâci*, d. h. also der ostwestlichen Abmessung des Heiligthums, sei 36 *padas*. An beiden Endpunkten desselben wird je ein Pflock in den Boden eingeschlagen.[66]) An diese Pflöcke befestigt man die Enden eines Seiles von 54 Padas Länge, in welches zuvor 15 Padas von einem Ende entfernt ein Knoten geschlungen wurde. Spannt man nun das Seil auf dem Erdboden, indem man den Knoten festhält, so entsteht ein rechter Winkel am Ende des *prâci*. Die Richtigkeit des Verfahrens leuchtet ein, indem (Fig. 6) die Entfernung 36 der beiden Pflöcke von einander und die Seilabschnitte 15 und 39 in der That ein rechtwinkliges Dreieck bilden, in kleinsten Zahlen ausgedrückt das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 5, 12, 13. Solche Seilspannung zur Erreichung desselben Zweckes, d. h. zur Erlangung eines rechten Winkels finden wir auch anderwärts.

Seilspannung ist es, deren Heron sich im § 25 seiner Dioptrik[67]) bedient, wenn verlangt wird, die auf dem Felde mit Ausnahme von zwei oder drei durch Grenzsteine gesicherten Punkten verloren gegangene Umfriedigung eines Grundstückes mit Hilfe des vorhandenen Planes wiederherzustellen.

Seilspannung war die Thätigkeit, von welcher die Harpedonapten, die Seilspanner,[68]) ihren Namen entlehnten; sie, denen gegenüber Demokritos sich rühmte:[69]) „Im Construiren von Linien nach Massgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich Keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Seilspanner der Egypter." Sie waren offenbar die Gehilfen der Tempelbaumeister, wenn nicht diese Baumeister selbst. Ihnen lag es ob, mit Hilfe eines zwischen zwei Pflöcken anzuspannenden Seiles die genaue Rechtwinkligkeit des Gebäudes herzustellen.

Dass aber hiermit keine leere Hypothese vorgetragen ist, bestätigen egyptische Texte, auf welche uns unser Freund Aug. Eisenlohr hin-wies, als wir ihm die eben erörterte Meinung gesprächsweise darlegten. Einer dieser Texte, die Gründung des Tempels zu Edfu betreffend, ist Gegenstand der Forschung zweier unserer bewährtesten Egyptologen gewesen. Von Dümichen's Resultaten hat für uns nur das Eine Wichtigkeit, dass die Gründung jenes Tempels am 23. August 237 v. Chr. stattfand.[70]) Dem Aufsatze von Brugsch über Bau und Maasse des Tempels von Edfu entnehmen wir die Schilderung der Grundsteinlegung, wie sie auf Tempelwänden von Dendera, von Theben, von Esne und von Edfu vielfach abgebildet ist:[71])

„Das Hauptbild zeigt uns stets den König in seiner Eigenschaft als Stellvertreter des Gottes Thoth in höchstem Schmucke, in Gesellschaft der Bibliotheksgöttin Safeχ, der Herrin der Grundsteinlegung. Jede der genannten Personen hält in der rechten Hand eine Art von Keule, mittelst welcher sie einen langen Pflock in den Erdboden einschlägt. Beide Pflöcke befinden sich im Innern eines kreisförmig gelegten, an seinen beiden Enden zusammengeknüpften Strickes, der, wie es den Anschein hat, durch die Pflöcke stramm angezogen wird, so dass er ungefähr in der Mitte der Länge beider Hölzer gleichsam frei schwebt."

Die Handlung selbst wird als Ausspannung des Strickes (*pet keser*) bezeichnet, und dem König werden dabei Worte in den Mund gelegt, welche also heissen:

„Ich habe gefasst den Holzpflock (*nebi*) und den Stiel des Schlägels (*semes*), ich halte den Strick (*χa*) gemeinschaftlich mit der Göttin Safeχ. Mein Blick folgt dem Gange der Gestirne. Wenn mein Auge an dem Sternbilde des grossen Bären angekommen ist und erfüllt ist der mir bestimmte Zeitabschnitt der Zahl der Uhr, so stelle ich auf die Eckpunkte Deines Gotteshauses."

Es ist gewiss überflüssig, auch nur eine Silbe als weitere Erklärung beizufügen. Der egyptische und der indische Text ergänzen sich allzu augenscheinlich und dienen mit den Worten des Demokritos zum Beweise, dass jenes Seilspannen zur Zeit des Weisen von Abdera, also mindestens schon in der Mitte des V. Jahrhunderts v. Chr., in Egypten heimisch war Wie alt sind dem gegenüber die Çulvasûtras?

Wir haben diese Frage mit Absicht erst jetzt, am Schlusse unserer Betrachtungen gestellt. Eine befriedigende Antwort bleiben Die uns schuldig, von denen allein wir sie zu fordern das Recht haben. Von Kâtyâyana sagt Weber:[72]) „Die Bildung des Wortes durch das Affix *âyana* führt uns wohl in die Zeit ausgebildeter Schulen (*ayana*)? Wie dem auch sei, damit gebildete Namen finden sich in den Brâhmaṇa selbst nur selten vor, resp. nur in den spätesten Theilen derselben, und bekunden daher im Allgemeinen schon stets eine späte Zeit." Das Gleiche, wie für Kâtyâyana, gilt selbstverständlich auch für Baudhâyana, und von einem Träger eines derartig gebildeten Namens, von Âçvalâyana, wird sogar die Zeitgenossenschaft mit dem Grammatiker Pâṇini behauptet, welcher vielleicht erst 140 n. Chr. lebte.[73]) Und auch Thibaut[74]) weiss sich über die völlige Unbestimmtheit, wann die Çulvasûtras in ihrer heutigen Gestalt entstanden sein mögen, nur dadurch hinauszusetzen, dass er den Inhalt der Vorschriften für unzweifelhaft viel älter hält als die Schriften, in denen er sie auffand; dass er viele der Regeln für durch Tradition überkommen erklärt, was schon aus ihrer sprachlichen Form sich ergebe; dass er, wenn er sich auch nicht ausdrücklich dahin ausspricht, von vornherein diese Summe geometrischen Wissens in Indien einheimisch glaubt.

Wir können natürlich diesem Urtheile, soweit es auf sprachliche Gründe sich stützt, Nichts entgegenhalten. Sachlich meinen wir es widerlegt zu haben. Die Uebereinstimmungen zwischen indischer und griechischer Geometrie treten an zu vielen Stellen hervor, als dass wir an zwei ganz selbstständige Entwickelungen denken dürften. Wir müssten eine gewisse Abhängigkeit annehmen, selbst wenn auf benachbarten Gebieten keine solche nachgewiesen wäre. Dann bleibt aber die einzige Frage die: hat die griechische Geometrie wesentliche Bestandtheile aus der indischen übernommen, oder die indische aus der griechischen, und wie diese Frage zu beantworten sei, sind wir am Wenigsten im Zweifel. Wir haben bei Beginn der Untersuchungen über speciell geometrische Dinge erkannt, dass Gründe allgemeiner Natur hier für den westöstlichen Einfluss sprechen. Wir haben dann gezeigt, dass Einzelheiten, für welche wir eine Uebertragung annehmen, auf griechisch-egyptischem Boden jedenfalls sehr alt sind, während ihre Nachweisbarkeit in Indien ganz zweifelhaften Datums ist. Wir dürfen hoffen, dass diese Gründe vereinigt stark genug sein mögen, unsere Ansicht als die richtige erscheinen zu lassen, welche wir schliesslich in folgende Sätze kleiden:

Indische und griechische, insbesondere alexandrinische Mathematik haben sich nicht ganz unabhängig von einander entwickelt. Unser heutiges Wissen berechtigt uns zu der Vermuthung, dass die Inder Lehrer der Griechen in arithmetischen und algebraischen Dingen gewesen sein können; dass sie jedenfalls Schüler der Griechen in astronomischen, beziehungsweise astrologischen und in geometrischen Dingen waren.

Anmerkungen.

1) Albr. Weber, Akademische Vorlesungen über indische Literaturgeschichte. 2. Aufl. Berlin 1876. S. 3 Note 2. — Wir citiren dieses Werk künftig einfach: Weber, Literaturgeschichte.

2) *Burnell, Elements of South-Indian Palaeography. Mangalore 1874.* S. 5 Note 1.

3) Weber, Literaturgesch. S. 269 flgg. — Herm. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. S. 176—178.

4) Dieser gewiss richtige Gedanke ist von A. H. Sayce mit Bezug auf uralte babylonische Sterndeutung ausgesprochen worden.

5) Varâhamihira † 587 n. Chr. gemäss einer Angabe von Âmarâja. Seine Blüthe setzt Bhaṭṭa Utpala nach 505. Vergl. *Bhâu Dâjî, On the age and authenticity of the works of Aryabhaṭa, Varâhamihira, Brahmegupta, Bhaṭṭotpala and Bhaskarâchârya* in dem *Journal of the Asiatic Society, New Series I (London 1865) pag. 392—418.*

6) Vergl. *Journal of the American-Oriental Society, Vol. VI (New-Haven 1860) pag. 317* in der Uebersetzung des Sûrya Syddhânta durch Burgess mit Anmerkungen von Whitney. Diese hochwichtige Abhandlung, welche S. 141 — 498 des genannten Bandes erfüllt, citiren wir künftig einfach als Sûrya Siddhânta.

7) Weber, Literaturgeschichte, S. 272.

8) Sûrya Siddhânta, S. 421.

9) Sûrya Siddhânta, S. 202. Ebenda S. 215 die Angabe, *kendra* werde namentlich bei den Commentatoren für Kreismittelpunkt gebraucht. Ebenda S. 178 *hora* = ὥρα.

10) *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae ed. Hultsch* (Berlin 1864). *Praefatio pag. XVIII.*

10a) Eine höchst merkwürdige Analogie bietet auch das bekannte Rechenbuch des Johannes Widmann von Eger, in welchem die Stelle vorkommt: „Das centrum das ist die Zal die do ist von centruȝ biss in winckel."

11) Sûrya Siddhânta, S. 158.

12) Weber, Literaturgeschichte, S. 266.

13) Indische Studien Bd. II S. 243 in einem Aufsatze von Albr. Weber: Zur Geschichte der indischen Astrologie.

14) *Journal of the Asiatic Society Vol. XX (London 1863) pag. 386* in einem Aufsatze ven Kern.

15) Weber in den Indischen Studien Bd. II S. 247. Nach Schoell, Geschichte der griechischen Literatur, *ed.* Pinder (Berlin 1830), Bd. III S. 334, schrieb Paulus Alexandrinus eigener Angabe gemäss im Jahre 378 n. Chr. eine Einleitung in die Astrologie: *Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀποτελεσματικήν.*

16) Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, philologisch-historische Classe, Bd. IV (1852) S. 18 u. 19, in einer Abhandlung von Brockhaus: Ueber die Algebra des Bhaskara.

17) So hat z. B. Schiaparelli in dem Sûrya Siddhânta Ansichten des Herakleides Ponticos *(Opinioni degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* in den *Memorie del R. Istituto Lombardo, Tomo X°),* bei Aryabhaṭa vielleicht gar platonische, jedenfalls mit höchster Wahrscheinlichkeit griechische Meinungen *(Precursori di Copernico nell' Antichità Cap. V)* nachzuweisen versucht, von denen hier bei der gebotenen Kürze nicht gehandelt werden konnte.

18) Vergl. den in unserer Anmerkung 5 citirten Aufsatz von Bhâu Dâjî.

19) Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst (Leipzig 1875), S. 123 und 127.

20) Die Stelle, welche uns bei der Abfassung unserer in der vorigen Anmerkung genannten Schrift aus dem Gedächtnisse geschwunden war, findet sich in dem Buche von den Schneckenlinien Satz 10 (*ed.* Nizze S. 125 flg.).

21) Agrimensoren, S. 58—59.

22) *Journal Asiatique, Sixième Série Tome I (Paris 1863) pag. 252 sq.* in Woepcke's Abhandlung: *Mémoire sur la propagation des chiffres Indiens.*

23) Weber, Literaturgeschichte, S. 274 Note 280, mit Berufung auf Indische Studien VIII, 325—326, und *Reinaud, Mémoire sur l'Inde,* S. 303.

24) Daran wird Nichts geändert, mögen die Gobarziffern, wie **Woepcke** behauptet, Anfangsbuchstaben indischer Zahlwörter aus dem II. Jahrhundert n. Chr. sein oder, wie Burnell in dem Anmerkung 2 genannten Werke S. 47—48 annimmt, von nicht alphabetischen Zahlzeichen aus Höhleninschriften derselben Epoche abstammen.

25) Wir haben vielfache Beweise dafür in unseren Römischen Agrimensoren geliefert.

26) Nur einmal begegnet die Verhältnisszahl 7 uns in der Gleichung 1 *dhâtaka* = 14 *valla* bei Bhaskara. Vergl. *Colebrooke, Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit (London 1817), pag. 2.*

27) Hankel (in dem Anmerkung 3 citirten Werke), S. 205—209. Vor Hankel traten für die durchgängige Originalität indischer Mathematik namentlich Libri und Arneth ein.

28) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des inscriptions et belles lettres, Série I, Sujets divers d'érudition, T. IV (Paris 1854), pag. 164—176.*

29) Colebrooke (so citiren wir künftig immer das in Anmerkung 26 genannte Werk), S. 72.

30) Hankel, S. 210.

31) Agrimensoren (das in Anmerkung 19 genannte Buch), S. 40 und Note 77.

32) Hankel, S. 212—215.

33) Agrimensoren, S. 42.

34) Hankel, S. 211.

35) *Colebrooke, pag. 295: The product of half the sides and countersides is the gross area of a triangle and tetragon.*

36) *Martin (l. c.* Anmerkung 28), *pag. 176: Dans cequi reste de ces compilations grecques, on remarque des expressions bizarres et des propositions inexactes qui ne viennent pas d'Héron mais sans doute des arpenteurs egyptiens. Tout cela se retrouve dans les compilations de Brahmegupta et des Indiens postérieurs.*

37) *Colebrooke, pag. 312: The area deduced from the moieties of the sums of the sides at top and at bottom, being multiplied by the depth, is the practical measure of the content. Half the sum of the areas at top and at bottom, multiplied by the depth, gives the gross content.*

38) *Colebrooke, pag. 317: Section IX. Measure by shadow.*

39) *Burnell, Catalogue of a collection of Sanscrit manuscripts, pag. 29.*

40) *The Śulvasútras by G. Thibaut, Ph. D. Anglo-Sanskrit Professor, Banáras College. Reprinted from the Journal, Asiatic Society of Bengvl, Part. I for 1875. Calcutta 1875.* Wir citiren diese Abhandlung kurzweg als: Thibaut.

41) *Thibaut, pag. 5: The aeea of every chiti whatever its shape might be — falcon with curved wings, wheel, praüga, tortoise etc. — had to be equal to 7½ square purushas. On the other hand, when at the second construction of the altar one square purusha had to be added to the seven and a half constituting the first chiti, and when for the third construction two square purushas more were required the shape of the whole, the relative proportions of the single parts had to remain unchanged.*

42) Colebrooke, S. 279—280.

43) Thibaut, S. 13—15.

44) Heron (*ed.* Hultsch, Berlin 1864), S. 20—21 in der 58. u. 59. Definition

45) Thibaut, S. 7.

46) Thibaut, S. 8.

47) Thibaut, S. 9.

48) Ziele und Resultate der neueren mathematischen Forschung, von Dr. Siegmund Günther (Erlangen 1876), S. 41 flg

49) Heron (*ed.* Hultsch, Berlin 1864), S. 51—52. Allerdings soll nicht verschwiegen werden, dass die Cap. 8 und 9, von welchen hier die Rede ist, nur einem Pariser Codex anzugehören scheinen. Vielleicht hängt mit dem hier erörterten Gegenstande auch der sonderbare § 12 des Epaphroditus (vergl. Agrimensoren, S. 209) zusammen: *Si fuerit trigonus paralelogramus hortogonius* u. s. w., wo die Diagonale eines Rechtecks gesucht wird?

50) Thibaut, S. 18.

51) Thibaut, S. 16. Die Seite des 2-, 3-, 10-, 40mal so grossen Quadrates heisst *dvikaraṇi, trikaraṇi, daçakaraṇi, catvariṅçatkaraṇi.*

52) Euklid's Elemente, Buch II Satz 14.

53) Thibaut, S. 19.

54) Agrimensoren, S. 88.

55) Thibaut, S. 26—28.

56) $\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}=\frac{9785}{11136}$ ist etwas grösser als $\frac{1224}{1393}$; nämlich ersterer Bruch ist $=0{,}878681\ldots$, letzterer $=0{,}878679$; der Unterschied beträgt also nur zwei Einheiten der sechsten Decimalstelle. Will man aus $\alpha=\frac{9785}{11136}d$ die Verhältnisszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser berechnen, so findet man $\pi=3{,}0883\ldots$.

57) Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, von Dr. Siegmund Günther (Leipzig 1876), S. 304 Note **.

58) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XX, historisch-literarische Abtheilung S. 163—165.

59) Colebrooke, S. 308

60) Agrimensoren, S. 40.

61) Heron (*ed.* Hultsch, Berlin 1864), S. 58: *Τριγώνου δὲ ἰσοπλεύρου τὴν κάθετον εὑρεῖν· ποίει οὕτως· ὕφελε ἀεὶ τὸ ι′′ λ′′ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὸ λοιπὸν ἔσται ὁ ἀριθμὸς τῆς καθέτου.*

62) Thibaut, S. 9—10.

63) Agrimensoren, S. 66.

64) Sûrya Siddhânta, S. 239.

65) Agrimensoren, S. 67.

66) Vergl. auch Albr. Weber in den Indischen Studien X, 364 u. XIII, 283 flgg.

67) Agrimensoren, S. 25.

68) Zu welchen entsetzlichen Deutungsversuchen das unglückliche Wort *ἁρπεδονάπται* bisher herhalten musste, vergl. *Thesaurus Graecae linguae ed. Dindorf,* Paris 1831—1856, Bd. I, 2 S. 2032.

69) Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides (Leipzig 1870), S. 12. Die Stelle selbst stammt aus Clem. Alex. Stromata I, S. 357 (*ed.* Pott).

70) Zeitschrift für egyptische Sprache und Alterthumskunde, herausgeg. von Lepsius, Bd. VIII (Leipzig 1870), S. 7.

71) Zeitschr. f. egypt. Sprache u. s. w. VIII, S. 154 - 156. Abbildungen sind im Druck veröffentlicht bei *Brugsch, Recueil de monuments egyptiens* (Leipzig 1862), *T. I pl. 81, fig. 4,* und bei *Mariette, Denderah: déscription générale du grand temple de cette ville (Paris 1870), T. 1 pl. 20.* Vergl. auch Brugsch, Demotisches Wörterbuch (Leipzig 1867), S. 327.

72) Weber, Literaturgeschichte, S. 58.

73) Weber, Literaturgeschichte, S. 236.

74) Thibaut, S. 44—45.

Recensionen.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VIII. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1875.

Da sich dieses Referat in allen Aeusserlichkeiten genau an das im 21. Bande (Heft 1) über den 74er Jahrgang des „Bullettino“ niedergelegte anschliesst, so können wir uns sofort zur Besprechung der einzelnen Abhandlungen wenden.

1) *Luigi Lodi, Intorno ai vita ed ai lavori del prof. Geminiano Riccardi*, S. 1—15.

Der Verfasser, Bibliothekar zu Modena, hebt im Eingange hervor, dass die Söhne dieser Stadt von altersher um die mathematischen Wissenschaften sich wohlverdient gemacht hätten; unter den von ihm namhaft gemachten Persönlichkeiten heben wir als allgemeiner bekannt hervor: Guarini, dessen geometrische Leistungen Chasles der Vergessenheit entriss, Barozzi, Herausgeber des Proclus, Montanari, den Entdecker des veränderlichen Sternes *R* Hydrae, und den berühmten Optiker Amici. Würdig reiht sich diesen Vorläufern der wackere Riccardi (21. Februar 1794 bis 17. August 1854) an, von dessen Leben und Wirken Herr Lodi uns einen sichtlich treuen und liebevollen Bericht erstattet. Auf der gelehrten Schule der Vaterstadt gebildet, studirte Riccardi zuerst hier, später aber zu Bologna, und erwarb sich daselbst das doppelte Diplom eines Licentiaten der Ingenieurwissenschaft und eines Doctors der Mathematik. Als im Jahre 1815 Franz IV. die modenesische Universität wieder ins Leben treten liess, erhielt Jener die Professur der allgemeinen Physik, wozu nach Ruffini's Tode diejenige der angewandten Mathematik und zehn Jahre später eine Lectur an der neu errichteten Genieschule trat.* Später übernahm Riccardi auch

* Es soll nicht verschwiegen werden, dass bei dieser Gelegenheit über die Lehrkörper, die Besetzungsverhältnisse etc. der verschiedenen, dem kleinen Herzogthum angehörigen Lehranstalten mehrere recht interessante Nachweisungen gegeben werden.

noch das Fach der Hydraulik. Seine Lehrthätigkeit und vor Allem sein didaktisches Talent muss nach Herrn Lodi's Angaben sehr bedeutend gewesen sein; literarisch arbeitete er viel, ohne jedoch zum Publiciren geneigt zu sein, so dass ausser einer Anzahl von handschriftlich vorhandenen Lehrbüchern und einer Menge sonstiger ungedruckter Arbeiten nur verschiedene seiner in der modenesischen Akademie gehaltenen Vorträge in die Oeffentlichkeit kamen. Dieselben bethätigen fast durchweg eine kritisch-vergleichende Richtung. So untersucht er die Principien, nach welchen Ampère und Brunacci die Differentialrechnung behandelten, er bringt die Methoden von Bernoulli, Euler und Cauchy betreffs der Partialbruchzerlegung in gegenseitige Beziehung, er kritisirt die Behandlungsweise verschiedener Autoren in der Lehre von den virtuellen Geschwindigkeiten. Aber auch physikalische, bio- und bibliographische, ja selbst ökonomische Artikel finden sich vor. Bedenkt man, dass der auf drei Lehrstühlen thätige Mann zudem als Präsident verschiedener Commissionen und als Schulaufsichtsrath in Anspruch genommen ward, dass er einen äusserst ausgebreiteten Briefwechsel mit Gelehrten aller Länder führen musste, so wird man seine vielseitige literarische Thätigkeit bewundernswerth und es erklärlich finden, dass er fast sämmtlicher italienischer Akademien auswärtiges oder wirkliches Mitglied war.

Riccardi hinterliess einen Sohn, der zur Zeit als Professor der Geodäsie an der nämlichen Hochschule wirkt und als Verfasser einer trefflichen mathematischen Bibliographie in den weitesten Kreisen bekannt ist.

2) *Catalogo dei lavori del prof. Geminiano Riccardi,* S. 16—35.

Gedruckt sind ausser einem physikalischen Werke nur 17 Zeitschriftartikel. Hingegen weist die Liste der Ungedruckten nicht weniger als 29 Pièçen auf, von denen allerdings sehr viele, und zwar gerade solche, deren Titel unser Interesse besonders erregen, als nicht mehr vorhanden angesehen werden müssen.

3) *Due scritti inediti del prof. Geminiano Riccardi,* S. 36—50.

Die erste der beiden hier wörtlich reproducirten Abhandlungen ist ein Referat über eine Biographie Legendre's, welche, von einem gewissen F. M. herrührend, im Jahrgang 1833 der „*Bibliothèque universelle*" abgedruckt ist. Der anonyme Autor hatte sich vorgenommen, nach fünf Seiten hin Legendre's Wirksamkeit zu schildern, indem er fünf Capitel normirt: Attraction der Ellipsoide, elliptische Functionen, vermischte analytische und mechanische Probleme, Astronomie und Geodäsie, Zahlentheorie. Riccardi nimmt diese Eintheilung an, glaubt aber in jedem einzelnen Abschnitte dem Verfasser einige Lücken nachweisen zu können. So ist von Plana's Verdiensten um das Anziehungsproblem gar keine Rede, während doch dieser Mathematiker die von Legendre nur aufgestellte Differentialgleichung

$$y'' + (g + fx^{-2})\, y = 0$$

erstmalig auflösen lehrte. Im zweiten Abschnitte wird Legendre geradezu als alleiniger Schöpfer der Lehre von den elliptischen Integralen hingestellt, während doch vor ihm Fagnano und gleichzeitig mit ihm Bidone eine erfolgreiche Thätigkeit in dieser Disciplin entfalteten. Bei Punkt 3 meint Riccardi, wenn man auch von der Nichterwähnung einer grossen Anzahl italienischer Forscher absehen wollte, so hätte doch unter allen Umständen davon gesprochen werden müssen, dass Brunacci in der Legendre'schen Begründung der Variationsrechnung einen bedeutenden Fehler nachgewiesen habe. In den beiden letzten Abtheilungen endlich wird getadelt, dass F. M. die bezüglichen Verdienste eines Oriani und Libri gänzlich ausser Acht liess. — Man sieht, dass Riccardi sehr energisch den Ruhm seiner Landsleute zu wahren wusste.

Die zweite Notiz ist von verwandtem Charakter. Von dem belgischen Geometer Pagani war ein Theorem über die Zusammensetzung von beliebig vielen Kräften angegeben worden, welches eine Verallgemeinerung eines Leibnitz'schen Satzes sein wollte. Ganz im Gegentheil zeigt aber Riccardi, dass Leibnitz bereits den allgemeinst denkbaren Fall in Betracht gezogen habe, insofern er für n Kräfte den Anfangs- und Endpunkt der resultirenden Kraft bestimmte, während Pagani lediglich die Bedingung des Gleichgewichts aufsucht. Dieses Verdienst Leibnitz's hatten Johann Bernoulli und Lagrange bereits ganz richtig erkannt, nicht minder der Italiener Bordoni, während eine ganze Reihe französischer Mathematiker (Querret, Sarrus, Bobillier, ja selbst Chasles) die irrige Anschauung Pagani's zu der ihren machten. Aus der ganzen Erzählung ergiebt sich die Moral, dass nur eifriges geschichtliches Studium vor derartigen Verirrungen behüten könne.

Noch deutlicher spricht dafür der nun folgende Aufsatz.

4) *B. Boncompagni, Intorno ad una proprietà de' numeri dispari,* S. 51—62.

Durch Summirung einer arithmetischen Reihe überzeugt man sich von der Richtigkeit nachstehender Relation:

$$n(n-1) + 1 + n(n-1) + 3 + \ldots + n(n-1) + 2n - 1 = n^3.$$

Dieselbe scheint zuerst bei Nicomachus, wie auch bei'm Scholiasten Jamblichus vorzukommen; ebenso kennt sie Boëthius. War sie bisher lediglich als Thatsache ohne Beweis gegeben worden, so erhielt sie einen solchen in dem 1557 erschienenen Werke des Maurolycus: „*Arithmeticorum libri duo*“. Dieser selbstredend nach unseren heutigen Begriffen schwer verständliche Beweis ward von Fontana im Jahre 1808 in eine andere Form umgegossen. Jedenfalls also hätte die ohnehin ziemlich einfache Sache als etwas Bekanntes mit allem Rechte gelten können.

Als aber im Jahre 1837 Sir Rowan Hamilton das längst bekannte Sätzchen als „Turner's Eigenschaft der ungeraden Zahlen" der *British Association* vorlegte, machte dasselbe grosses Aufsehen. Adhémar reichte später eine den nämlichen Gegenstand behandelnde Note der Pariser Akademie ein, und selbst ein Physiker, Wheatstone, verliess auf einen Augenblick seine Berufsarbeiten, um — natürlich wieder selbstständig — den nicht eben unbekannt zu nennenden Satz zu erfinden. Von deutschen Bemühungen in dieser Sache spricht Herr Boncompagni nicht.

Damit man aber nicht etwa meine, an Deutschland sei jenes wichtige Factum unbeachtet vorübergegangen, sei Folgendes angeführt. Im ersten Hefte seines Archives (S. 59 flgg.) berichtet Grunert darüber, später discutirt Hellerung die Formel (*ibid.* S. 318 flgg.) und bemerkt, dass sich dieselbe schon bei Kästner* finde, und schliesslich theilt Bretschneider (*ibid.* S. 415 flgg.) eine hübsche Verallgemeinerung mit.

Einige Lectüre der griechischen Arithmetiker kann sonach Demjenigen, der eine neue algebraische Entdeckung gemacht zu haben glaubt, keinenfalls schaden.

5) *L. Am. Sédillot, Sur les emprunts que nous avons faits à la science arabe, et en particulier de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wéfâ de Bagdad astronome du Xme siècle, Lettre à D. B. Boncompagni,* S. 63—78.

Dieser wesentlich polemisch gefärbte Brief enthält — abgesehen von Klagen über die Ungeschicklichkeit der Etymologen im Entziffern arabischer Wortverstümmelungen — den authentischen Text eines vom Schreiber dem Längenbureau vorgelegten Memorials. Dasselbe soll die seit langen Jahren schwebende Streitfrage, ob bereits Abul Wafa oder erst Tycho Brahe die unter dem Namen der Variation bekannte (dritte) Ungleichheit der Mondesbahn als solche erkannt habe, definitiv in einem für Ersteren günstigen Sinne entscheiden. Der Fragepunkt selbst ist kurz dieser: Nachdem früher ganz allgemein Abul Wafa's Priorität anerkannt war, stellte zuerst Biot, an den sich dann Bertrand, Chasles und Leverrier anschlossen, die Ansicht auf, gewisse Kunstwörter, welche bisher als Bezeichnung der Bahnoctanten gedeutet waren, bezögen sich lediglich auf die Sextanten, so dass also des Arabers Anomalie mit derjenigen des Ptolemaeus (Evection) identisch und Abul Wafa selbst nur als ein unvollständiger Bearbeiter des Almagestes anzusehen sei. Der Orientalist Munk glaubte für diese Auffassung in dem Werke des Astronomen Geber eine Stütze zu finden. Dem gegenüber glaubt Sédillot mit Rücksicht auf eine bessere Textinterpretation den

* In der That trifft man das Theorem, welches freilich hier nur in der untergeordneten Rolle eines Rechnungsbeispiels erscheint, in Kästner's „Anfangsgr. d. Anal. endl. Grössen", Göttingen 1794; S. 576.

Nachweis führen zu können, dass Abul Wafa's Werk ein ganz originales sei, dass alle wissenschaftlichen Astronomen mit jenen Terminis die Octanten bezeichneten und nur bei den Sterndeutern eine abweichende irrige Benutzung derselben angetroffen werde. Auch sei es als ein höchst auffälliger Umstand zu bezeichnen, dass Tycho seine Wahrnehmungen genau in der nämlichen Weise formulirt, wie dies sein präsumtiver arabischer Vorläufer thut.

Der Text des betreffenden Capitels von Abul Wafa's Buch wird nebst einer französischen Uebersetzung anhangsweise mitgetheilt. — Da bei Fragen solcher Natur doch schliesslich nur die genaue Sprachkenntniss entscheidet, und da auf diese unter allen beim Kampfe Betheiligten einzig und allein Herr Sédillot Anspruch machen kann, so dürfte seine Auslegung wohl als die beste erscheinen, und es bliebe dem arabischen Gelehrten der ungeschmälerte Ruhm seiner wichtigen Entdeckung.

6) *P. Mansion, Notice sur la vie et les travaux de Rodolphe Frédéric Alfred Clebsch,* S. 121—132.

7) *Catalogue des travaux de R. F. Alfred Clebsch,* S. 133—184.

Ueber beide Publicationen ist bereits im vorigen Jahrgang der historisch-literarischen Abtheilung von Seite der Redaction referirt worden. Der Catalog führt mit rühmenswerther Treue auch all' die Berichte auf, welche Clebsch für die „Fortschritte der Physik" ausgearbeitet; da sich dieselben überwiegend auf rein experimentelle Materien beziehen, kann die Behauptung der dem 7. Bande der „Mathem. Annalen" einverleibten Biographie, die Physik als solche habe Clebsch „nicht besonders interessirt", wohl kaum aufrecht erhalten werden.

8) P. Mansion, Recension zu Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874; S. 185—220.

Eine eingehende Berichterstattung über das bekannte Hankel'sche Geschichtswerk, die jedoch nicht eigentlich einen recensirenden Zweck verfolgt.

9) *Ferdinando Jacoli, Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval,* S. 265—304.

Der durch mehrere werthvolle Arbeiten geschichtlich-mathematischen Inhalts bereits vortheilhaft bekannte Verfasser liefert hier eine neue Studie, welche wir in Verbindung mit Nr. 12 flgg. unbedenklich für den bedeutendsten Bestandtheil dieses Bandes erklären. — Wenn der eine Curve beschreibende Punkt gleichzeitig verschiedenen Impulsen unterliegt, so fällt die Mittelkraft letzterer mit der Berührungslinie der Curve in jenem Punkte zusammen. Auf diesen Lehrsatz hat, wie wenigstens fast allgemein angenommen wird, zuerst Roberval die Lösung des sogenannten directen Tangentenproblems zurückgeführt. Nun bedient sich aber Galilei's geistreichster Schüler Torricelli in dem einzigen bei seinen Lebzeiten veröffentlichten geometrischen Sammelwerke genau desselben Verfahrens zur Construction der Tangenten für die Kegelschnitte, die archimedische Spirale und die Cycloide; ja er schickt sogar der betreffenden Untersuchung eine Demonstration des Satzes vom Kräfteparallelogramm voraus. Damit ist zweifellos festgestellt, dass der französischen Erfindung die italienische als gleichberechtigt an die Seite gesetzt werden muss, und es handelt sich nur mehr um die rein chronologische Frage der Priorität. Dass Torriccelli die fragliche Theorie allerspätestens im October des Jahres 1644 der Oeffentlichkeit übergeben habe, geht aus verschiedenen Anzeichen unzweideutig hervor; etwas schwerer hält es, den entsprechenden Termin für Roberval ausfindig zu machen. Gleichwohl gelangt Herr Jacoli durch sorgfältigste Vergleichung aller irgend heranzuziehenden Data zu einem Resultate, welches er (S. 278) folgendermassen einkleidet: „Es steht mit Bestimmtheit fest, dass die Bekanntmachung der bezüglich von Roberval und Torriccelli ersonnenen Methoden ganz gleichzeitig erfolgte oder höchstens die erstere um ein paar Tage früher, selbst wenn man das Werk Torriccelli's als nicht vor October 1644 edirt betrachtet.“ Weiterhin erfahren wir, dass über diese Priorität in der That heftig gestritten wurde. Pascal erhob gegen Torriccelli in seiner „*Histoire des roulettes*“ die ungerechtesten Vorwürfe und wurde dafür von Carlo Dati (unter dem Pseudonym Timaurus Antiates) energisch bekämpft, während Wallis den wahren Sachverhalt ganz richtig übersah. Auch Torriccelli selbst betheuert mit aller Entschiedenheit des guten Gewissens, dass er „*proprio marte*“ auf seine Erfindung gekommen sei. Zum Ueberfluss sieht sich aber Jacoli noch nach allen Kriterien um, welche zur Fixirung des eigentlichen Erfindungsmomentes herangezogen werden können, und gelangt (S. 288) zu dem Schlusse, dass die Conception der Idee bei Roberval wohl etwas, nicht aber viel, früher als bei Torriccelli stattgefunden habe. Dass übrigens Ersterer selbst edler über das Verhältniss zu seinem Nebenbuhler gedacht hat, geht u. A. aus einer Episode hervor, die uns Herr Jacoli ausführlich schildert: Der Kapuziner Valerianus Magnus hatte von dem berühmten Quecksilberexperiment, welches Torriccelli zur Construction des Barometers leitete, als von seiner eigenen Erfindung gesprochen und zieht sich dafür von Seite Roberval's eine in einem offenen Briefe ertheilte sehr empfindliche Rüge zu. — Zum Schlusse erhalten wir ein Verzeichniss der Autoren, welche seit jener Zeit mit dem Torriccelli'schen Verfahren sich beschäftigt haben, und in einem Anhang einen Auszug aus dem Reisejournal des bekannten Polyhistors Monconys, insoweit dessen Beisammensein mit Torriccelli dabei in Frage kommt.

Was gründliche und kritische Durchmusterung der vorhandenen — gedruckten wie ungedruckten — Literatur und scharfsichtige Benutzung aller, auch der kleinsten verwerthbaren Notizen anlangt, kann die besprochene Arbeit als eine mathematisch-historische Musterleistung gelten. Freilich wäre ohne die allerorts zu Tage tretende Unterstützung des stets hilfsbereiten Herausgebers eine so umfassende Durcharbeitung nicht wohl möglich gewesen.

10) *F. Marchetti, Intorno alla vita ed ai lavori del P. Paolo Rosa,* S. 305—313.

Eine eingehende, von einem Fach- und Ordensgenossen ausgearbeitete Lebensbeschreibung des Astronomen Paul Rosa, dessen Name und Leistungen bei uns wohl kaum genügend bekannt sein dürften. Rosa (23. Juni 1825 bis 11. Juli 1874) ward geboren zu Cività Castellana, erhielt seine Erziehung im Jesuitencollegium zu Rom und begann 1845 sein Ordensnoviziat. Nachdem er Assistent des bekannten Cometenentdeckers De Vico geworden, trat er eine wissenschaftliche Reise nach England an und reiste von dort in Gemeinschaft mit Secchi und Pianciani* nach Amerika. Der neue Director des Observatoriums, eben Pater Secchi, wählte Rosa zu seinem Adjuncten, und unter ihrer gemeinsamen Thätigkeit ward die nach veralteten Grundsätzen angelegte Sternwarte zweckentsprechend reconstruirt. Seit 1864 versah derselbe auch die Lehrkanzel der Mathematik und Astronomie, wie er dies auch bereits früher zu Georgetown gethan hatte. — Auch der scientifischen Wirksamkeit Rosa's wird gedacht und die Art und Weise beschrieben, in welcher die beiden Astronomen die Sonnenflecken- und Cometenbeobachtungen auf der römischen Sternwarte ausführten.

Dass der Ton dieser Biographie ein etwas salbungsvoller ist, wird man bei der socialen Stellung des Verfassers begreiflich finden; unangenehmer berühren in einem wissenschaftlichen Artikel die Tiraden gegen die „Demagogen“ des Revolutionsjahres 1848. Ob die gelehrten Studien unter der römischen Republik wirklich „*manomessi*“ (S. 308) waren, möchten wir nach der Persönlichkeit ihres Unterrichtsministers (Gherardi) wohl ein wenig in Zweifel ziehen.

11) *Catalogo dei lavori del P. Paolo Rosa,* S. 314—320.

Enthält 18 Nummern. Darunter befindet sich eine selbstständige Monographie über den Sonnendurchmesser und ausserdem 17 Artikel, zum Theil in Schumacher's „Astron. Nachrichten“, zum Theil in den Jahrbüchern der Sternwarte und in den neuen Journalen der italienischen Meteorologen und Spectroskopiker erschienen. Beobachtungen astrophysikalischer Natur und Untersuchungen über Grösse und Veränderlichkeit des Sonnendiameters bilden die Mehrzahl.

* Bezüglich dieses Mannes, der Herrn P. Marchetti zufolge das Studium der exacten Wissenschaften an der päpstlichen Universität wesentlich förderte, ist S. 65 der Literaturzeitung des VII. Bandes dieser Zeitschrift zu vergleichen.

12) *B. Boncompagni, Intorno ad alcune lettere di Evangelista Torricelli, del P. Marino Mersenne e di Francesco du Verdus,* S. 353—382.

Fürst Boncompagni liefert hier die exacte bibliographische Beschreibung einer Anzahl zwischen Torricelli und Mersenne gewechselter Briefe. Dieselben befinden sich theils im Privatbesitze des Grafen Manzoni, theils auf der Nationalbibliothek zu Florenz in einem mit dem Signat „Galilei's Schüler" versehenen Fascikel. Aus ihnen entnahm Herr Jacoli manchen Stoff für seine Arbeit über Torricelli's Stellung zu Roberval.

13) *Lettere di Evangelista Torricelli al P. Marino Mersenne,* S. 382—409.

Es sind deren zwölf. Im ersten drückt Torricelli seine Bewunderung über Roberval's neueste Forschungen aus, im zweiten beantwortet er eine Frage Mersenne's, ob Galilei auf das Problem des Stosses Bezügliches hinterlassen habe, in negativem Sinne und verbreitet sich dann über die Tangentenziehung an die Radlinie und die Cubatur ihres Rotationskörpers. Der dritte belobt Mersenne's experimentelle Thätigkeit und erwähnt der Aufgabe „*de inveniendo numero, qui quotcunque partes habeat aliquotas*". d. h. doch wohl vollkommener Zahlen. An vierter Stelle wird die Bewegung zweier Kugeln von gleichem Stoff und Inhalt sehr einlässlich besprochen, deren eine doppelt so hoch als die andere herabfällt, an fünfter wird diese Betrachtung dadurch, dass man die Kugeln auf schiefen Ebenen herabrollen lässt, erweitert; hierauf folgt eine Anweisung, Spiralen organisch zu beschreiben, und ein analoger Excurs auf die Curve $y^4 = ax^3$. Das nächste sehr kurze Schreiben erwähnt mehr beiläufig, dass den Schreiber das ihm übersandte Weltsystem des Aristarchus* nicht durchaus befriedigt habe, er glaubte nicht, dass es wirklich jenen Griechen zum Verfasser habe; das siebente verweilt hierbei noch einen Augenblick, wendet sich dann aber zu einem höchst interessanten Gegenstande: es wird nämlich bewiesen, dass ein frei fallender Körper, wenn nur die Fallhöhe gross genug, jede willkürliche Geschwindigkeit erlangen müsse. Sehr merkwürdig ist dabei, dass sich Torricelli vom Naturgesetz, wie es factisch besteht, gänzlich emancipirt; jene Thatsache, meint er, würde auch dann noch giltig bleiben (S. 395), „*si alias rationes haberem praeter allatas à Galileo*". Der achte Brief lehrt in eigenartiger Weise einige Probleme aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten behandeln. Der neunte weist den Angriff eines (ungenannten) Schriftstellers zurück, welcher dem Galilei'schen Fallgesetze ein anderes substituiren wollte, und beschäftigt sich im An-

* Torricelli war in diesem Falle auf dem richtigen Wege. Wie man seit lange weiss und wie erst in neuester Zeit Henri Martin (dieses Bullettino, 3. Bd. S. 299 flgg.) ausführlicher erörtert hat, ist der hier in Frage kommende „*libellus Aristarchi Samii de mundi systemate*" Nichts als ein Falsificat Roberval's.

schlusse daran mit einer Frage, die sich so formuliren lässt: Die eine Schale einer gleicharmigen Waage ist mit einer Last beschwert, befindet sich aber durch Unterstützung auf gleichem Niveau mit der andern. Fällt nun auf letztere ein Körper von noch so geringem Gewichte aus noch so geringer Höhe herab, wird dadurch jene Schale gehoben? Theoretisch, meint Torriccelli, sei er sich hierüber nicht ganz klar, Versuche ergäben ein positives Resultat. — Im zehnten Briefe vertheidigt er die Güte seiner Fernröhre und „rühmt" eine von A. Kircher ausgegangene Kreisquadratur. Beschreibt man nämlich um einen Eckpunkt eines Quadrates mit der Seite als Radius den ins Quadrat fallenden Quadranten, halbirt sowohl ihn, als einen der gezogenen Radien und verbindet beide Halbirungspunkte durch ein Gerade, so schneidet dieselbe von der gegenüberliegenden Quadratseite ein Stück ab gleich dem halben Quadranten.* Weiterhin handelt die Correspondenz von den Einwürfen, welche Roberval, der sich selbst zuerst vergeblich mit der Bestimmung des Schwerpunktes der Cycloide beschäftigt zu haben scheint, gegen Torriccelli's Lösung gmacht hatte. Im letzten Schreiben endlich präcisirt Letzterer die Grundsätze, nach welchen Fernröhre von grösstmöglicher Vollkommenheit angefertigt werden müssen, und übermittelt seinem Freunde die eigenthümlich gefasste Aufgabe „*datis tribus punctis aliud reperire ex quo tres eductae sint minima quantitas*", welche er auf mannigfaltige Weisen aufzulösen verstehe.

Zur Geschichte der Mechanik und Optik liefert sowohl diese Briefsammlung, als auch jede der beiden in den folgenden Nummern analysirten sehr bemerkenswerthe Beiträge.

14) *Lettere del P. Marino Mersenne ad Evangelista Torriccelli,* S. 410—441.

So reich und interessant der Inhalt dieser 19 Briefe ist, müssen wir uns doch ein näheres Eingehen aus Rücksichten der Kürze versagen. Einige Einzelheiten aber seien erwähnt. So theilt Mersenne in seinem zweiten Schreiben ein schwieriges zahlentheoretisches Problem Fermat's mit,** im siebenten spricht er von der Möglichkeit, die Parabel durch Betrachtungen mechanischer Natur zu rectificiren, und von Rotationskörpern, welche aus einer Oeffnung in gleichen Zeiten gleiche Flüssigkeitsmengen austreten lassen. Im vierzehnten beschreibt er seine sehr ausgedehnte Versuchsreihe, durch welche er für eine Menge der verschiedensten um eine horizontale Axe drehbaren Körperformen das „*centrum*

* Dass diese Quadratur nur spöttisch „*perfectissima*" genannt worden, ist uns durchaus unzweifelhaft, insofern sie für die Zahl π den bereits in der ersten Decimalstelle abweichenden Werth 3,0714 liefert.

** Es handelt sich dabei um die ganzzahlige Auflösung nachstehender drei Gleichungen mit fünf Unbekannten:

$$x^4 = y^2 + z^2, \quad y + z = u^2, \quad x^2 + z = v^2.$$

percussionis"* auszumitteln sich bestrebte, und an diese Versuche knüpfen auch die weiteren Briefe an. Von besonderem Interesse ist endlich einer der letzten Sätze des 19. Schreibens, weil hier von einem „Batavus" die Rede ist, welcher Galilei's Voraussetzung, die Kettenlinie sei mit der Parabel identisch, für unrichtig erkläre. Es scheint daraus hervorzugehen, dass man in jener Zeit dieses Verhältniss, welchem bekanntlich nur für den Fall einer sehr scharfen Spannung approximative Giltigkeit innewohnt, allgemein angenommen hatte.

15) *Lettere di Francesco du Verdus ad Evangelista Torriccelli*, S. 442—456.

Von du Verdus, einem vertrauten Schüler Roberval's, sind uns auch noch zehn Briefe an den berühmten italienischen Mathematiker erhalten, sämmtliche inhaltsreich. Im ersten derselben spricht er sich weitläufig über das Vacuum und die sonstigen Umstände des barometrischen Grundversuches aus, von da ab betreffen seine Bemerkungen ausschliesslich kinematische und geometrische Fragen. So zieht er im dritten Briefe die Tangente an die Conchoide nach dem Satze von der Zusammensetzung der Bewegungen. Im vierten wird auf gleichfalls kinematischem Wege die sogenannte „Begleiterin der Cykloide" nach Roberval construirt, und in den beiden letzten Mittheilungen beschreibt und discutirt du Verdus eine von ihm neu aufgefundene krumme Linie, die Terois oder Flügelcurve. Dieselbe ist dritter Ordnung und würde bei der im Original gewählten Axenlage die Gleichung

$$2ay^2 = xy^2 + a^2x - 2ax^2 + x^3$$

ergeben. Bemerkt mag dabei werden, dass ein Druckfekler (S. 454, Z. 6 v. o. ed statt cd) das Verständniss sehr erschwert.

16) *L. Am. Sédillot, Grande exécution d'automne, Lettre à M. le Dr. Ferdinand Hoefer au sujet des sciences mathématiques des Indiens, et des origines du Sanskrit*, S. 457—468.

Den weitaus grösseren Theil dieses Sendschreibens erfüllen Spöttereien über diejenigen Alterthumsforscher, welche bei Indern und Chinesen auch nur die leiseste Spur wissenschaftlicher Selbstthätigkeit zu finden wähnen, während diesen Völkern all ihr geistiges Besitzthum von Aussen her, zuerst von griechischer und dann von arabischer Seite, zugekommen sei. Daran mag manches Wahre sein; dass die Inder zumal nicht in dem Grade originelle Mathematiker waren, wie es noch Hankel annahm, wird sich wohl bald mit Sicherheit herausstellen, und auch mit manchem

* Dieses *„centrum percussionis"*, welches in unserer Correspondenz alle Augenblicke wiederkehrt, spielt deshalb eine so wichtige Rolle in der Dynamik des XVI. Jahrhunderts, weil man es ohne Umstände mit dem sogenannten Schwingungsmittelpunkte identificirte und so den Stoss von Körpern direct auf den materieller Punkte zurückführen wollte. Vergl. hierüber H. Klein's „Principien der Mechanik", Leipzig 1872, S. 21.

der von Sédillot beigebrachten Belege kann man sich einverstanden erklären.* Allein dieses kritische Bestreben lässt ihn weit über das Ziel hinausschiessen; bei Hypothesen wie Sanskrit = *Sanctum scriptum* hört die Discussion so ziemlich auf.**

Ueber das chinesische Fest, welches den Titel der Note abgeben musste, erfahren wir so gut wie Nichts.

17) *L. C. Béziat, La vie et les travaux de Jean Hévélius,* S. 497—558, S. 589 bis Ende des Bandes.

Wir werden über diese Monographie auf den Wunsch des Herrn Herausgebers anderswo ausführlich Bericht erstatten und begnügen uns deshalb hier, zu sagen, dass man es mit einer höchst gründlichen, auf Grund des gesammten zugänglichen Materials gearbeiteten Abhandlung zu thun hat.

Unsere gedrängte Darstellung wird den Leser hoffentlich soviel erkennen lassen, dass dieser Jahrgang unserer einzigen mathematisch-historischen Zeitschrift seinem unmittelbaren Vorgänger an Reichthum des Inhalts und wissenschaftlicher Bedeutung durchaus nicht nachsteht.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Joh. Faulhaber. Von A. Germann, Professor. Programm des königl. Gymnasiums in Ulm zum Schlusse des Schuljahres 1875—76. Ulm 1876. Druck der Wagner'schen Buchdruckerei. 13 S.

Referent hat vor einigen Jahren eine kleine Abhandlung unter genau gleichem Titel in den Sitzungsberichten der Erlanger gelehrten Gesellschaft erscheinen lassen. Man wird es deshalb begreiflich finden, dass er mit grossem Interesse die Schrift des Herrn Germann zur Hand nahm, musste er doch durch diese Neubearbeitung eines anscheinend abgethanen Themas dasselbe in historischer oder sachlicher Hinsicht wesentlich gefördert erwarten. Inwieweit nun diese seine Erwartungen erfüllt, beziehungsweise übertroffen wurden, möge nachstehende Analyse ersehen lassen.

* Wenn derselbe beispielsweise von dem 17000jährigen Bestehen einer chinesischen Astronomie Nichts wissen will, wie ein solches in dem neuen Werke von Schlegel, *„Uranographie chinoise"*, postulirt wird, so haben wir wenigstens nicht das Geringste einzuwenden. Immerhin wird die astronomische Geschichtsforschung jenes voluminöse Buch nicht ausser Acht lassen dürfen; vergl. u. A. eine dahin zielende Notiz im „Mag. f. d. Literatur d. Ausl." und die Recension des Unterzeichneten in der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft.

** Auch dass sowohl Horaz als Juvenal der Inder und christliche Schriftsteller der ältesten Zeit des Buddhismus Erwähnung thun, scheint für Herrn Sédillot nicht zu existiren.

Die ersten drei Seiten geben biographische Nachrichten über den merkwürdigen Gelehrten, wie man sie auch bei Kästner nachlesen kann. Alsdann folgt das von Faulhaber selbst herrührende Énoncé seines Problems, darin bestehend, aus sieben gegebenen Strecken ein einem Kreise einschreibbares Siebeneck herzustellen. Der erste Mathematiker. der sich hiermit beschäftigte, war Tobias Mayer, über dessen Methode wir bei mangelnder Kenntniss des betreffenden Werkes Nichts mitzutheilen in der Lage waren. Herr Germann glaubt, da er durch die Hilfe des Herrn Professor Ofterdinger Einsicht in jenes erhalten hat, Mayer's Lösung als eine „ausschliesslich graphische mittelst einer Hilfscurve“ bezeichnen zu können, und da wir ihn nicht controliren können, wollen wir es ihm glauben.

Nunmehr erörtert der Verfasser die rechnenden Methoden, zunächst diejenige von Möbius. Nur beschleicht dabei den Unterzeichneten ein eigenthümliches Gefühl; es möchte ihm fast so vorkommen, als habe Herr Germann die Originalarbeit gar nicht vor Augen gehabt, sondern lediglich an den in seiner eigenen Note mitgetheilten Auszug sich gehalten. Thun wir ihm mit diesem Verdachte Unrecht, so hat er sich das selbst zuzuschreiben, denn seine einleitende Bemerkung: „Fast genau 200 Jahre nach Faulhaber's Tode fand seine Aufgabe Beachtung durch eine Capacität ersten Ranges, es ist Möbius in Leipzig“, ist eine einfache geschichtliche Unwahrheit, Möbius weiss nicht das Geringste von Faulhaber. Nun, wie dem immer sei, Herr Germann kommt zu dem Schlusse des Referenten, dass auf diesem Wege der Ulmer Ingenieur seinen Radius gewiss nicht errechnet habe, und damit hat er zweifellos Recht. — Weiterhin gelangt er zu dem „jüngeren Mathematiker“, der sich ausdrücklich mit der Frage beschäftigt hat. Er reproducirt dessen Verfahren, welches ausschliesslich auf die Elementargeometrie sich beschränkt, macht aber dabei die folgenschwere Entdeckung, dass ein Sinus mit einem Cosinus vertauscht sei. Dieser Fund macht dem Autor ersichtlich viele Freude, und es wäre von unserer Seite frivol, ihm diese zu missgönnen. Ja, es ist wirklich so, und die Endformel bekäme bei angebrachter Correction eine etwas veränderte Gestalt, ohne dass selbstverständlich der Charakter der weiteren Schlüsse durch diese Modification irgendwie beeinträchtigt würde. Immerhin ist die Meinung des Verfassers, der „unsymmetrische“ Bau der Formeln habe jene Verwechselung verrathen müssen, unbegründet. Die irrationale Endgleichung, auf deren Lösung Alles ankommt, enthält auch Glieder von der Form

$$\sqrt{(4r^2-a^2{}_{\mathfrak{a}})(4r^2-a^2{}_{\mathfrak{b}})(4r^2-a^2{}_{\mathfrak{c}})(4r^2-a_{\mathfrak{d}}{}^2)(4r^2-a^2{}_{\mathfrak{e}})}.$$

Wenn wir nun den Herrn Verfasser richtig verstehen, was stellenweise nicht ganz leicht ist, so meint er doch. die Complexion $\mathfrak{abcde}$ müsse,

„da die Seiten formell gleichwerthig sind", im Ganzen $\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}$-mal auftreten, während es doch in Wirklichkeit nur 9 derartige Wurzelgrössen giebt, welche resp. den Arrangements 12456, 12457, 12467, 13456, 13457, 13467, 23456, 23457, 23467 entsprechen.

Allein die Entdeckung jenes Fehlers ist zu wenig, die höchst unschuldige Schlussbemerkung des Referenten, wie wohl jene Gleichung habe praktisch berechnet werden können, macht dem Verfasser gleichfalls Kopfschmerzen. Wir nahmen und nehmen noch heute an, je roher und primitiver man sich die Mittel denkt, mit welchen man die Forscher vergangener Zeiten arbeiten lässt, um so näher kommt man der Wahrheit. So war denn unsere Ansicht die, Faulhaber habe einfach einen ganz beliebigen Werth für r angenommen, hierauf die complicirten Wurzeln, deren Extrahirung damals wahrlich keine leichte Sache war, durch Logarithmen ausgerechnet und endlich zugesehen, ob und wie der errechnete Werth von Null abweiche. Vier oder fünf derartige absolut empirische Rechnungen mochten zu einem leidlich brauchbaren Ergebnisse führen, und von einem consequent durchgeführten Näherungsverfahren, auf welches sich der Verfasser komischerweise capricirt, braucht keine Rede zu sein. Ob er diese unsere höchst einfache Auffassung der Sachlage nicht verstand oder nicht verstehen wollte, wissen wir nicht.

Er freilich traut seinem Landsmann mehr zu, als wir dies aus guten Gründen thaten. Herrn Germann's Faulhaber kennt die Formel für $\sin(\alpha+\beta)$, er versteht die Wurzel $\sqrt{1-m^2x^2}$ „rational zu machen", freilich nicht etwa im zahlentheoretischen Sinne, sondern mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes; er weiss endlich mit biquadratischen Gleichungen der Form $ax^4+bx^2=c$ trefflich umzugehen. Gestehen wir dem Manne, der am Eingange des 17. Jahrhunderts stand und bei seiner bekannten Eitelkeit von dem Besitze so wichtiger Theoreme wohl auch sonst Zeugniss abgelegt haben würde, dieselben factisch zu, dann mag er auf dem von Herrn Germann angegebenen Wege vorgegangen sein. Denn dies wollen wir nicht leugnen, das zuletzt genannte Verfahren ist wirklich ein sehr elegantes und macht seinem Erfinder alle Ehre.

Hätte der Verfasser sich darauf beschränkt, die letzten vier Seiten seines Programms etwa nebst einer kurzen Vorgeschichte des Gegenstandes der Oeffentlichkeit zu übergeben, wir würden ihm unsere volle Anerkennung nicht versagt haben. Die breite, schulmeisterliche und durchaus vom Verkennen historischer Verhältnisse zeugende Diatribe aber, welche den räumlich grössten Theil der Schrift erfüllt, weisen wir mit aller Entschiedenheit zurück.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1876.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 12. Bd. 2. Abth. München, Franz. 8 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1876, 2. Heft. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 36. Bd. Wien, Gerold. 40 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 1876. I. Abth. 1. bis 3. Heft. Ebendas. 4 Mk.

Dieselben. II. Abth. 1.—4. Heft. Ebendas. 10 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 6. Bd., Jahrgang 1874. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 20 Pf.

Fortschritte der Physik im Jahre 1872. 28. Jahrgang, redigirt von B. Schwalbe. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 7 Mk. 50 Pf.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von L. Königsberger und G. Zeuner. 1. Bd. 3. Heft. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Gauss, C. F., Werke. Nachtrag zum 1. Abdruck des 2. Bandes. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht in Comm. 1 Mk. 60 Pf.

Bardey, E., Algebraische Gleichungen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Walberer, C. F., Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. München, Ackermann. 1 Mk. 20 Pf.

IGEL, B., Ueber einige elementare unendliche Reihen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

GEGENBAUER, L., Ueber die Bessel'schen Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

SINRAM, TH., Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 2. Thl. Hamburg, Meissner. 4 Mk.

GRASSMANN, R., Mathematisches Uebungsbuch. Stettin, Grassmann. 10 Pf.

HEILERMANN, H., Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Mathematik. 2. Thl., 2. Abth. 2. Aufl. Coblenz, Hergt. 1 Mk. 75 Pf.

SCHRÖN, L., Siebenstellige gemeine Logarithmen. 15. Ausg. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk. 20 Pf.

SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige logarithmische Tafeln. 5. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk.

AUGUST, F., Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 11. Aufl. Berlin, Veit. 1 Mk. 60 Pf.

GILLES, J., Lehrbuch der ebenen Geometrie nach der Entwickelungsmethode. Heidelberg, Winter. 2 Mk. 80 Pf.

KOPPE, K., Die Planimetrie. 13. Aufl., bearb. von W. DAHL. Essen, Bädeker. 2 Mk. 70 Pf.

SCHNEIDER, M., Die Elemente der Mathematik. 1. Thl.: Planimetrie. Cöthen, Schulze. 1 Mk. 75 Pf.

ADAM, W., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Berlin, Stubenrauch. 2 Mk. 40 Pf.

FÉAUX, B., Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. 4. Aufl. Paderborn, Schöningh. 1 Mk. 20 Pf.

KOMMERELL, F., Lehrbuch der Stereometrie. 3. Aufl. Tübingen, Laupp. 2 Mk.

SCHURIG, K., Sammlung von Rechen- und Constructionsaufgaben aus der Planimetrie. Plauen, Hohmann. 75 Pf.

WEISSENBORN, H., Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für orthogonale und homogene Punkt- und Liniencoordinaten. Leipzig, Teubner. 7 Mk.

UNVERZAGT, W., Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren. Wiesbaden, Kreidel. 10 Mk.

GALL, A. v. und WINTER, Die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden nebst Aufgaben. Darmstadt, Diehl. 3 Mk.

PELZ, C., Ueber die Axenbestimmung der Kegelschnitte. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

MOSHAMMER, K., Zur Geometrie ähnlicher Systeme und eine Fläche dritter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

ALLÉ, M., Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

DIRICHLET, *Lejeune*, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgeg. von F. GRUBE. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

DÜHRING, E., Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. 2. Aufl. Leipzig, Fues. 9 Mk.

INDRA, A., Graphische Ballistik (mit Rücksicht auf Luftwiderstand). 1. Thl. Wien, Seidel & Sohn. 4 Mk.

Maassvergleichungen. 2. Heft: Beobachtungen auf dem Reichel'schen Fühlspiegel-Comparator. Berlin, Imme in Comm. 7 Mk. 50 Pf.

BAUERNFEIND, M. v., Das bayrische Präcisionsnivellement. 4. Mittheilg. München, Franz. 2 Mk.

Präcisionsnivellement, ausgeführt vom königl. preussischen geodätischen Institute. 1. Bd.: Arbeiten aus den Jahren 1867—1875. Berlin, Imme in Comm. 10 Mk.

Seehöhen hervorragender Orte im Königreiche Sachsen nach den Nivellements der europäischen Gradmessung. Freiberg, Engelhardt. 50 Pf

HARTNER, F., Handbuch der niederen Geodäsie. 5. Aufl., bearb. von J. WASTLER. Wien, Seidel & Sohn. 16 Mk.

DOLL, M., Die Nivellirinstrumente und deren Anwendung. Stuttgart, Bonz & Comp. 3 Mk.

WEYGANDT, C., Mathematische Geographie. Tauberbischofsheim, Lang. 2 Mk.

ADAM, V., Grundzüge der mathematischen Geographie. Carlsruhe, Müller & Gräff. 1 Mk. 80 Pf.

WETZEL, E., Wandkarte für den Unterricht in der mathematischen Geographie. 3. Aufl. Berlin, D. Reimer. 10 Mk.

HARTMANN, J., Lehrbuch der Zeitbestimmung und Zeitrechnung. München, Stahl. 2 Mk.

BESSEL, F. W., Abhandlungen, herausgeg. von R. ENGELMANN. 3. Bd. Leipzig, Engelmann. 22 Mk.

STARK, J., Ueber die Bahnbestimmung des Planeten Hekate (100). III. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

VRBA, K., Krystallographische Tafeln. 3. Aufl. Prag, Dominicus. 1 Mk.

SCHEIBNER, W., Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

SCHEFFLER, H., Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. 1. Thl. 2. Lief. Leipzig, Förster. 11 Mk.

Physik und Meteorologie.

EISENLOHR, W., Lehrbuch der Physik. 11. Aufl., herausgegeben von P. ZECH. Stuttgart, Engelhorn. 9 Mk.

MÜNCH, P., Lehrbuch der Physik. 4. Aufl. 1. Lief. Freiburg i. Br., Herder. 1 Mk. 20 Pf.

SCHULZE, L. R., Das Buch der physikalischen Erscheinungen. Frei nach A. GUILLEMIN. 14.—16. (Schluss-) Lief. Leipzig, Frohberg. 3 Mk.

BOYMANN, R., Lehrbuch der Physik. 3. Aufl. 1. Hälfte. Cöln und Neuss, Schwann. pro compl. 4 Mk.

STEWART, B., Physik. Deutsch von WARBURG. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

FLIEDNER, C., Lehrbuch der Physik. 2. Thl. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk., compl. 7 Mk.

FRICK, J., Die physikalische Technik. 5. Aufl. Ebendas. 12 Mk.

STÖHRER, E., Die Projection physikalischer Experimente und naturwissenschaftlicher Photogramme. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk. 50 Pf.

KREMERS, P., Physikalisch-chemische Untersuchungen. 7. Heft. Wiesbaden, Limbarth. 1 Mk. 50 Pf.

KIRCHHOFF, G., Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. (Akad.) Berlin, Dümmler. 1 Mk. 50 Pf.

NEUMANN, C., Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

ZÖLLNER, F., Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie. 1. Bd. 1. Buch: Abhandlungen zur atomist. Theorie der Elektrodynamik von W. WEBER. Leipzig, Engelmann. 18 Mk.

DOVE, H. W., Ueber die Witterung des Jahres 1875 und Anfang 1876. (Akad.) Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

JELINEK, C., Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen und Sammlung von Hilfstafeln. 2. Aufl. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

KRÜMMEL, O., Die äquatorialen Meeresströmungen des atlant. Ocean und das allgemeine System der Meerescirculation. Leipzig, Duncker & Humblot. 2 Mk. 40 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre par *M. Paul Mansion, Professeur à l'université de Gand. Paris* 1875, *Gauthier-Villars* In 8°. XVI und 282 Seiten

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen Variablen bildet gegenwärtig einen abgeschlossenen Theil der Analysis, gleich ausgezeichnet durch die Mannichfaltigkeit der Probleme, die in ihm ihren Mittelpunkt finden, wie durch die Geschichte ihrer Entwickelung, mit welcher die glänzenden Namen eines Lagrange, Pfaff, Cauchy, Jacobi verknüpft sind. Eine zusammenhängende Darlegung der in den gelehrten Zeitschriften zerstreuten wichtigsten Untersuchungen auf diesem Gebiete hat zuerst Herr Imschenetzky im Jahre 1868 in einer in Grunert's Archiv erschienenen vortrefflichen Abhandlung (Bd. 50 S. 273—474) gegeben, in welcher ausser den Untersuchungen von Lagrange, Charpit, Pfaff, Cauchy und Jacobi auch die späteren von Bertrand und Bour berücksichtigt sind. Eine weniger vollständige Monographie über denselben Gegenstand ist später von Herrn Graindorge veröffentlicht worden (*Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Paris, Gauthier-Villars,* 1872), worin auch noch die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Kreis der Darstellung gezogen ist.

Vorliegendes Werk, die preisgekrönte Beantwortung einer von der belgischen Akademie gestellten Aufgabe, beschränkt sich lediglich auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und beliebiger Systeme von solchen mit einer abhängigen Variablen, mit Ausschluss jeder Anwendung derselben auf die Variationsrechnung, auf die isoperimetrischen oder mechanischen Probleme. Innerhalb des so begrenzten Gebietes ist eine annähernde Vollständigkeit erreicht, indem fast alle wichtigeren, bis auf die Zeit der Veröffentlichung der Schrift erschienenen Untersuchungen mehr oder weniger eingehend dargestellt sind, mit Ausnahme der in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit des

Herrn Weiler (Jahrg. VIII, S. 264), welche dem Verfasser, wie er bemerkt, nicht zugänglich gewesen ist.

Der in der Schrift befolgte Gang ist nicht der systematische, sondern der historische. Die einzelnen Lehrsätze der Theorie werden nicht nach gewissen, aus der Natur des Gegenstandes entnommenen Gesichtspunkten einheitlich entwickelt; das Werk besteht vielmehr aus einer Reihe von Analysen der Arbeiten der bedeutenderen Autoren, nach denen auch die einzelnen Capitel überschrieben sind. Die Anordnung folgt hierbei im Allgemeinen der geschichtlichen Entwickelung, nur dass die Cauchy'sche Methode, wiewohl ihre Veröffentlichung in eine weit frühere Zeit fällt, als die ersten Arbeiten Jacobi's über partielle Differentialgleichungen, erst gegen Ende des Buches neben den Lie'schen Untersuchungen auseinandergesetzt ist. Die Berechtigung für diese exceptionelle Behandlung Cauchy's liegt in der merkwürdigen Thatsache, dass die Arbeit eines so eminenten Mathematikers, wie sie Jacobi selbst entgangen war, so auch von den späteren die Jacobi'schen Entdeckungen zum Ausgangspunkte nehmenden Forschern lange unbeachtet blieb, bis sie in der neuesten Zeit die gebührende Aufmerksamkeit auf sich gelenkt und in der Weiterentwickelung der Theorie einen bemerkbaren Einfluss auszuüben begonnen hat.

In dem Umstande, dass das Problem der partiellen Differentialgleichungen einen speciellen Fall des berühmten Pfaff'schen Problems bildet und auch historisch seine erste Lösung mit der Aufstellung und Lösung des letzteren gefunden hat, ist es begründet, dass der Verfasser auch das Pfaff'sche Problem mit in seine Darstellung aufgenommen hat. Die Lösung desselben ist darin bis zu den von Jacobi eingeführten Vereinfachungen fortgeführt, wobei die Gauss'sche Recension und die Cayley'schen Arbeiten darüber berücksichtigt sind. Die weiteren Entwickelungen dagegen, welche diese Theorie seit der Grund legenden Arbeit des Herrn Natani („Ueber totale und partielle Differentialgleichungen", Borch. J. Bd. 58) erfahren hat, sind als zum eigentlichen Gegenstande des Werkes nicht gehörig fortgelassen. Es ist uns jedoch fraglich, ob nicht durch die Aufnahme der Natani'schen Untersuchungen, sowie der nachfolgenden Clebsch's, die Einsicht in die Natur gerade der so berühmten neueren Jacobi'schen Methode erheblich vertieft worden wäre. Das Problem der partiellen Differentialgleichung erschien nur so lange als ein besonders einfacher Fall des Pfaff'schen Problems, als man glaubte, zur Lösung des letztern die vollständige Integration sämmtlicher von Pfaff nacheinander (von Jacobi nebeneinander) aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen nöthig zu haben, da nämlich bei der partiellen Differentialgleichung nach der durch Jacobi modificirten Pfaff'schen oder nach der Cauchy-schen Methode die Aufgabe bereits mit der vollständigen Integration des ersten Systems erledigt war. Seitdem aber durch die „*Nova methodus*“ Jacobi's die Stellung der Probleme zueinander dahin verändert war, dass den früheren Vorstellungen entgegen die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit n unabhängigen Veränderlichen für ein weniger complicirtes Problem, als die vollständige Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit $2n+1$ Variablen zu halten ist, indem zu der letztern im Allgemeinen Integrationen höherer Ordnung, als zur erstern erforderlich werden, und dass man es vielmehr als eine besonders ausgezeichnete Eigenschaft des zu einer partiellen Differentialgleichung gehörigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachten kann, dass ihre Integration auf die Lösung der erstern reducirt ist — seit dieser Erkenntniss erweist sich die bevorzugte Stellung der partiellen Differentialgleichung innerhalb der Theorie des Pfaff'schen Problems hinsichtlich ihrer Einfachheit als eine scheinbare. Denn inzwischen hatte Herr Natani und später Clebsch gezeigt, dass die Lösung des letzteren nicht mehr vorzunehmende Integrationen erfordert, als die der ersteren, und dass in gleicher Weise die vollständige Integration der Pfaff'schen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen als durch die Lösung des Pfaff'schen Problems geleistet und nicht umgekehrt dieses als auf die erstere Aufgabe reducirt anzusehen ist.

Das Werk beginnt mit einer Uebersicht des Planes und einem historischen Rückblicke auf den Entwickelungsgang, den die Theorie seit Lagrange genommen hat. In der darauf folgenden Einleitung giebt der Verfasser zunächst eine Definition des Problems der Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung oder eines Systems solcher mit einer abhängigen Variablen nach Lagrange und Herrn Lie, wobei die Lie'sche Fassung in einer geometrischen Interpretation des analytischen Problems besteht, unter Anwendung der Terminologie der Mannigfaltigkeitslehre bei mehr als drei Variablen.

Alsdann behandelt der Verfasser die Erzeugung der partiellen Differentialgleichungen, die verschiedenen Arten ihrer Lösungen (vollständige, allgemeine, singuläre) nach Lagrange, sowie eine von Herrn Lie herrührende Classification der ersteren in lineare, halb lineare und nicht lineare, endlich die Erzeugung eines Systems simultaner partieller Differentialgleichungen durch Differentiation einer Function mit einer abhängigen und einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variablen, in der die Zahl der willkürlichen Constanten geringer als die der letzteren ist. Bemerkenswerth ist noch eine Begründung der zweiten Jacobi'schen Transformation (*Nova Methodus* § 1), welche die Fortschaffung der abhängigen Variablen aus der partiellen Differentialgleichung bezweckt, gegen die Einwände, welche sie von Seiten mehrerer Mathematiker erfahren hat.

Die Integrationsmethoden selbst werden in drei Büchern abgehandelt.

Das erste Buch enthält die Analyse der Methoden Lagrange's und Pfaff's in vier Capiteln. Den Anfang machen die linearen partiellen Differentialgleichungen und diejenigen nicht linearen, welche mit Hilfe der Legendre'schen Substitution in lineare verwandelt werden können. Bei dieser Gelegenheit wird auch die Ausdehnung mitgetheilt, welche Jacobi dem Lagrange'schen Integrationsverfahren auf eine gewisse, bekanntlich bisher allein untersuchte Classe simultaner linearer partieller Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen Variablen gegeben hat. Die Verwunderung, die der Verfasser darüber äussert, dass die betreffende, vom Jahre 1827 datirende Abhandlung (Crelle's J. Bd. 2) in allen Lehrbüchern, selbst in den neuesten Arbeiten der Herren Imschenetzky und Graindorge mit Stillschweigen übergangen sei, veranlasst uns zu dem gelegentlichen Hinweise, dass die genannte Verallgemeinerung in dem verbreiteten Lehrbuche von Cournot, „*Théorie des fonctions*", sowie in dem inhaltsreichen Werke des Herrn Natani („Höhere Analysis in vier Abth.", Berlin 1866) sich auseinandergesetzt findet. Im zweiten Capitel wird die Lagrange'sche Methode der Integration nicht linearer partieller Differentialgleichungen mit drei Variablen entwickelt, wobei im Hinblick auf die späteren Lösungen desselben Problems für mehrere Variable in einer sehr klaren Weise gezeigt wird, wie die verschiedenen Formen, in welchen der berühmte Urheber seine Theorie dargestellt hat, die Keime einerseits der Pfaff'schen und Cauchy-schen, andererseits der neueren Jacobi'schen Methode enthalten. Das dritte Capitel giebt die Analyse einer ebenfalls im Jahre 1827 erschienenen Abhandlung Jacobi's (Crelle's J., Bd. 2 S. 317—329), worin derselbe durch Ausdehnung der Lagrange'schen Methode auf partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variablen zu demselben System gewöhnlicher Differentialgleichungen gelangt, welche bei der Pfaff'schen Methode als erstes System erhalten wird. Mit der Auseinandersetzung der Lösung des Pfaff'schen Problems bis zu den oben bezeichneten Vervollkommnungen von Gauss und Jacobi und ihrer Anwendung auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen schliesst das erste Buch.

Es folgt nunmehr die Darlegung der neueren Jacobi'schen Methode nach der „*Nova methodus*" (Borch. Journ. Bd. 60) und den „Vorlesungen über Dynamik", welche die beiden ersten Capitel des zweiten Buches einnimmt. Es wird bemerkt, dass diese Methode von Jacobi 1838 gefunden, aber vor ihrer vom Jahre 1860 datirenden Veröffentlichung bereits in den Jahren 1853 und 1854 von Liouville, Bour und Donkine zum zweiten Male entdeckt worden ist. Einleitend werden die die Integrabilitätsbedingungen ausdrückenden (Jacobi-Poisson'schen) Formeln in systematischer Form und mit einer weit über das vorliegende Bedürfniss gehenden Ausführlichkeit in den verschiedensten

Formen entwickelt. Es werden ferner im Anschluss an die Jacobi'sche Integrationsmethode die bemerkenswerthen Vereinfachungen angezeigt, welche Herr Imschenetzky in gewissen Fällen beträchtlicher Allgemeinheit durch die Methode der Trennung der Variablen eingeführt hat. Das dritte Capitel beschäftigt sich mit der von Bour gegebenen Erweiterung der Jacobi'schen Theorie auf simultane partielle Differentialgleichungen mit einer abhängigen Variablen, welche in einem Punkte nach einer Angabe des Herrn Mayer berichtigt wird. Im vierten Capitel wird die Clebsch'sche Arbeit „Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen" (Borch. J. Bd. 65) reproducirt, in welcher die Auffindung einer gemeinsamen Lösung jedes der in der Jacobischen Methode nacheinander auftretenden Systeme simultaner Gleichungen von nur zwei auszuführenden Integrationen abhängig gemacht wird. Der Verfasser nennt diese Methode die Clebsch-Weiler'sche, eine durch Clebsch selbst veranlasste üblich gewordene Bezeichnung, gegen welche sich neuerdings Herr Weiler (dieses Journ., Bd. XX S. 271) mit Recht verwahrt hat. (Vergl. hierüber die neueste Abhdlg. des Herrn Mayer „Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode", Mathem. Ann. Bd. IX). In der Wiedergabe befindet sich an der Stelle auf S. 184, wo von der Verfügung über die Functionen u in der Clebsch'schen Transformation gesprochen wird, der irrthümliche Passus: „*Cette fonction* u_1 *sera une solution du système transformé* $(1'_{1-1})$" und demgemäss ist in den darunter befindlichen Gleichungen 2) überall $B_{i-1,i-1.}(u_i)$ gleich Null gesetzt, während nach Clebsch's Bestimmung u_i nur die gemeinsame Lösung der $i-2$ ersten Gleichungen des Systems $(1'_{i-1})$ sein soll, also die Grössen $B_{i-1,i-1}(u_i)$ von Null verschieden sind. Uebrigens treten auch in der Darstellung des Verfassers dieselben Grössen in den Gleichungen 5), S. 185, als wesentlich von Null verschieden auf, wie aus der daran geknüpften Folgerung unmittelbar hervorgeht. — Es folgen dann im fünften Capitel die Methoden der Herren Boole und Korkine für die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen, erstere auf lineare, letztere auf beliebige Systeme sich erstreckend, beide darin übereinstimmend, dass das System vermittelst vollständiger Integration einer Gleichung desselben in ein anderes transformirt wird, in welchem sowohl die Zahl der Variablen, als die der Gleichungen um 1 vermindert ist. Die bei Herrn Korkine fehlenden Beweise für die Erhaltung der Integrabilität, sowie für die Verminderung der Zahl der Variablen durch die angewandte Transformation werden vom Verfasser hinzugefügt. Das letzte Capitel des zweiten Buches ist der wichtigen Abhandlung des Herrn Mayer: „Ueber integrable Systeme etc.", Math. Ann. Bd. V, gewidmet, deren Inhalt man in drei Theile sondern kann: 1. Systematische Darstellung des Zusammenhanges eines integrablen Systems totaler Differentialgleichungen mit einem System simultaner linearer partieller Differentialgleichungen; 2. Zurückführung der Ermittelung aller Lösungen eines solchen Systems auf die vollständige Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen; 3. Ableitung einer gemeinsamen Lösung des Systems aus einem einzigen Integral des letzterwähnten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, indem durch die besondere Form, auf welche man die gefundene Integralgleichung und die daraus gebildeten Gleichungen bringt, bewirkt wird, dass alle übrigen Operationen rein algebraische werden. Herr Mansion erwähnt, dass Herr Mayer sich für seine Methode auf die oben angeführte Abhandlung des Herrn Natani und eine Abhandlung des Herrn Du Bois-Reymond (Borch. J. Bd. 70) bezieht. Zur specielleren Orientirung sei hinzugefügt, dass dieser Hinweis den zweiten Theil allein (nach obiger Eintheilung) betrifft. Herrn Natani verdankt man nämlich die Einführung der Anfangswerthe der Variablen in den Integralen, wodurch die zu integrirenden Systeme von einander unabhängig aufgestellt und integrirt werden können; er wurde darauf durch die glückliche Anwendung geführt, welche Jacobi davon für die Vervollkommnung der Pfaff'schen Methode gemacht hatte. Herr Du Bois-Reymond zeigte hierauf, dass durch eine passende Wahl der Anfangswerthe die Integration einer integrablen totalen Differentialgleichung auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Die im zweiten Theile entwickelte Methode des Herrn Mayer ist nun die Ausdehnung des Du Bois-Reymond'schen Verfahrens auf ein System integrabler totaler Differentialgleichungen.

Das dritte Buch handelt von den Methoden Cauchy's und Lie's. Cauchy hat seiner ersten 1818 veröffentlichten Arbeit eine bisher nicht genügend beachtete neue Abhandlung im Jahre 1841 hinzugefügt, in welcher er seiner Methode eine allgemeinere Form giebt. Es ist das Verdienst des Verfassers, die Wichtigkeit dieser zweiten Arbeit für die tiefere Einsicht in die Cauchy'sche Methode erkannt zu haben; und nach seiner Darstellung derselben, die in gewissem Sinne eine Originalleistung genannt werden darf, behält diese Methode ihre unveränderte Giltigkeit in allen den singulären Fällen, welche einerseits den Gegenstand der interessanten Untersuchungen des Herrn Serret bilden, worunter auch die Lie'schen halb linearen Gleichungen begriffen sind — andererseits in letzter Zeit den Herren Mayer und Darboux zur Modification der Jacobi-Hamilton'schen Methode Anlass gegeben haben. Die Analyse der Serret'schen Untersuchungen nimmt das zweite Capitel ein. — Im letzten Capitel wird die Lie'sche Methode nach der Darstellung des Herrn Mayer als eine natürliche Folge der Cauchy'schen Methode auseinandergesetzt. In dieser Methode wird die Integration von $m+1$ partiellen Differentialgleichungen mit $m+n$ unabhängigen Variablen auf die einer einzigen Gleichung mit n Independenten zurückgeführt.

Die Theorie der Transformation der partiellen Differentialgleichungen, welche hierbei zur Anwendung kommt, wird nur soweit, als zum vorliegenden Zweck erforderlich ist, entwickelt. Das Werk schliesst mit einem kurzen Anhang, der zur leichteren Auffassung des Zusammenhanges der besprochenen Theorien unter einander eine synthetische Darstellung derselben mittelst der Lie'schen Begriffe der charakteristischen Linien, Congruenzen etc. enthält.

Die consequent durchgeführte Anwendung der Theorie der Functionaldeterminanten verleiht der Darstellung eine ungemeine Präcision und Kürze. Auf Strenge und Vollständigkeit der Beweise ist überall Bedacht genommen. So hat z. B. der Verfasser bei der Ableitung der allgemeinen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen es sich jedesmal angelegen sein lassen, den directen Nachweis zu liefern, dass jede Lösung in der allgemeinen Lösung enthalten ist. An mehreren Stellen sind die bei dem betreffenden Autor ohne Beweis gegebenen Resultate mit den nöthigen Beweisen versehen worden. Der in dem Werke befolgte Plan, die Theorie in ihrer historischen Entwickelung vorzuführen, hat neben dem Vortheil, dabei gleichzeitig von den einfacheren Problemen zu den complicirteren fortzuschreiten, doch auch den Nachtheil, dass systematisch Zusammengehöriges in der Darstellung öfters getrennt erscheint. Diesem Uebelstande hat der Verfasser dadurch abzuhelfen sich bemüht, dass er jede Gelegenheit wahrgenommen hat, auf den Zusammenhang der verschiedenen Methoden unter einander an den betreffenden Stellen im Einzelnen hinzuweisen. Zur Erläuterung der entwickelten Integrationsmethoden sind zahlreiche Beispiele ausgeführt, welche den Arbeiten von Lagrange, Monge, Cauchy, Imschenetzky, Graindorge, Collet entnommen sind. Hierher gehört noch als besonders erwähnenswerth die Aufnahme der Specialarbeiten von Hesse („*De integratione aequationis partialis etc.*", Crelle's J., Bd. 25 S. 171—177) und von Herrn Schlaefli („*Sopra una equazione a differenziali parziale del primo ordine*", *Ann. di mat. pur. ed appl., serie 2ª t. II p.* 89—96).

Nach dem Vorangehenden bedarf es wohl kaum einer besondern Hervorhebung des unschätzbaren Werthes, welchen das vorliegende Werk für Jeden hat, der sich in einer der wichtigsten unter den mathematischen Disciplinen allseitig orientiren und gründlich belehren will. Es sei nur noch bemerkt, dass sich der Verfasser um den Dank der Gelehrten in hohem Grade auch durch die gewissenhafte Sorgfalt verdient gemacht hat, mit der er auf Vollständigkeit der Citate bedacht gewesen ist, in denen durchgehends die einzelnen Methoden und Lehrsätze bis auf ihre ersten Entdecker zurückgeführt worden sind. Mit diesem den früheren Leistungen dargebrachten Tribut ist zugleich für künftige

Forschungen der Weg zu den Originalquellen in erwünschtester Weise geebnet.

December 1876. HAMBURGER.

Principien der Flächentheorie, von R. HOPPE, Professor an der Universität Berlin. Leipzig 1876. 96 S.

In dem Werke „*Application de l'analyse à la géométrie*" hatte Monge den ersten Versuch einer systematischen analytischen Geometrie der Flächen und Curven doppelter Krümmung gemacht. Es finden sich in diesem Werke Principien entwickelt, welche für den Fortschritt der Geometrie von wesentlicher Bedeutung gewesen sind. Bei aller Bewunderung für das eminente Talent von Monge lässt sich eine schwache Seite seines Werkes nicht verkennen: dass man es weniger mit einem einheitlichen Ganzen zu thun hat, wie mit einer Reihe von Abhandlungen, deren Zusammenhang ein etwas loser ist. Die eigentlichen Fundamente einer Flächentheorie hat Gauss in der berühmten Abhandlung „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" aufgerichtet, welche Abhandlung, in Verbindung mit ähnlichen Arbeiten des grossen Mathematikers, für spätere Untersuchungen massgebend geworden ist.

Die Arbeiten von Monge und Gauss haben in neuerer Zeit den Anstoss zu zahlreichen Untersuchungen gegeben, deren Verständniss einen ziemlich entwickelten Apparat analytischer Ausdrücke und Formeln erfordert. Eine nur einigermassen vollständige Zusammenstellung des einschlägigen Materials lassen selbst die besseren, neueren Werke über Raumgeometrie nur ungern vermissen, wie z. B. die Werke von Salmon und Joachimsthal. Unter diesen Umständen versucht das in der Ueberschrift genannte Werkchen des Herrn Professor Hoppe, ein zeitgemässer Beitrag zur Ausfüllung einer literarisch-mathematischen Lücke zu sein. Eine kurze Aufzählung der behandelten Gegenstände bietet ein einfaches Mittel zu einer Uebersicht des vom Verfasser behandelten Materials. Was den Umfang desselben betrifft, so möchte Referent zu der Meinung hinneigen, dass der Verfasser manches Mittheilenswerthe nicht in den Kreis seiner Darstellung gezogen hat. Doch will der Referent sich hierin gern bescheiden, da über den grösseren oder geringeren Werth mancher Entwickelungen Erfahrung und Anwendung das beste Urtheil fällen.

Der günstige Eindruck, welchen der Anfang der Schrift des Herrn Hoppe macht, wird durch eine Aenderung der Bezeichnung etwas gestört, welche den Vergleich mit anderen Arbeiten erschwert. In dem Ausdrucke für das allgemeine Bogenelement einer Curve auf einer Fläche hat Gauss drei Quantitäten durch E, F und G bezeichnet, welche Bezeichnungen später von allen Mathematikern stillschweigend angenommen worden sind. Herr Hoppe ersetzt die grossen durch die kleinen lateinischen Buchstaben und gebraucht E, F und G zur Bezeichnung von drei Determinanten, welche in den Gleichungen für die Krümmungshalbmesser ebener Schnittcurven erscheinen. Da gemeiniglich durch e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet wird und e in dieser Bedeutung in dem Gauss'schen Ausdrucke E bei Untersuchungen häufig vorkommt, so glaubt Referent, dass ein Festhalten an den Gauss'schen Bezeichnungen Nichts weniger wie pedantisch sein möchte.

Die Schrift von Herrn Hoppe zerfällt in drei Abtheilungen. In der ersten derselben wird der Ausdruck für das Bogenelement als Ausgangspunkt genommen. Es knüpfen sich daran die Bestimmungen der berührenden Ebene, der Normale, Herstellung dreier Fundamentalgleichungen, Entwickelung des Ausdruckes für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Schnittcurve, woran sich dann die Sätze von Meusnier und Euler anschliessen. Die Hauptkrümmungshalbmesser werden definirt und mehrere Begriffe, welche mit denselben eng verbunden sind, wie sphärische Krümmung, Krümmungsmass, conjugirte Tangenten. Auf die Bedingung, damit eine Gerade die Normale einer Fläche sein kann, folgt die Bestimmung des Torsionsradius einer Curve auf einer Fläche. Hier wäre wohl ein kurzer Abriss, betreffend die wesentlichsten Elemente einer Curve auf einer Fläche, am geeigneten Orte gewesen. Der Begriff der Biegung einer Fläche wird gegeben, darauf folgen Betrachtungen über Mittelpunktsflächen und parallele Flächen; einige Bemerkungen über Coincidenzpunkte der Parameterlinien schliessen die erste Abtheilung. Die zweite Abtheilung enthält Untersuchungen über besondere Linien und Liniensysteme auf Flächen. Es sind dieses die Krümmungslinien, die asymptotischen Linien und die geodätischen Linien. Die conforme Abbildung der Flächen auf der Ebene beschliesst die zweite Abtheilung. Ein genaueres Eingehen in die Preisschrift von Gauss hätte den etwas kurzen Paragraphen über conforme Abbildung nur an Deutlichkeit gewinnen lassen können.

Der dritte Abschnitt enthält Anwendungen der früher entwickelten Principien auf besondere Arten von Flächen. Es sind dieses wesentlich: die abwickelbaren Flächen, Flächen von constantem Krümmungsmass, Minimalflächen, Rotationsflächen und schliesslich die Flächen zweiten Grades. Bei einigen dieser Flächenuntersuchungen verliert die Schrift, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, ihren bisherigen objectiven Charakter, der Verfasser ergeht sich in eigenen Untersuchungen. Wenn in der Vorrede betont wird, dass die dritte Abtheilung Betrachtungen über solche Flächen enthalte, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie Lösungen von Problemen zulassen, die allgemein nicht lösbar sind, so möchte dieses auf S. 58 nicht gerade zutreffend sein. Es wird dort das Problem der Darstellung der Flächen constanter Krümmung in Coordinaten behandelt. Die entwickelten Formeln werden schliesslich auf die Rotationsfläche angewandt, wodurch der Werth der betreffenden Formeln nur wenig genügend erwiesen scheint. Der kurze Abriss einer Theorie der Flächen zweiten Grades enthält das Wesentlichste, was in Beziehung auf orthogonale Flächensysteme, asymptotische Linien, Krümmungslinien und geodätische Linien über diese Flächen existirt. Das Werkchen schliesst mit einer Fläche, welche Herr Hoppe „asymptotische Fläche dritten Grades" nennt. Diese Fläche, repräsentirt durch die Gleichung $xyz = Constant$, gehört einem dreifach orthogonalen Flächensystem an. Die sämmtlichen Resultate finden sich zuerst in der scharfsinnigen Abhandlung von Serret: „*Mémoire sur les surfaces orthogonales*" (*Liouville. Journal, t. XII p.* 241, 1e *sèrie*), wo noch ein weiteres orthogonales System algebraischer Flächen mitgetheilt ist.*

Als ein Supplement zu den Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung mag die Flächentheorie von Herrn Hoppe Manchem nicht unwillkommen sein.

Göttingen, im November 1876. ENNEPER.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Mittelschulen und zum Selbstunterricht, bearbeitet von J. Kreuszel, Professor. 2 Theile. Brünn 1876, Verlag von Fr. Karafiat.

Der Verfasser giebt im ersten Abschnitte, der Curvenlehre, nach einigen allgemeinen Erörterungen die gebräuchlichen Constructionsmethoden der Kegelschnitte, Cycloiden, Spiralen, und löst die üblichen Aufgaben für dieselben über Tangenten, Normalen etc. Im zweiten Abschnitte behandelt er ziemlich eingehend die senkrechte Projection von Punkten, Linien, Ebenen und Polyedern. Etwas weniger ausführlich ist der dritte Abschnitt, dessen Gegenstand die krummen Flächen sind. Hiermit schliesst der erste Theil. Im vierten Abschnitte finden sich die Schatten- und Beleuchtungsconstructionen; im fünften und letzten endlich werden die Lehren der Perspective auseinandergesetzt. Diese beiden Capitel bilden den Inhalt des zweiten Theiles.

* Bei dieser Gelegenheit möge folgende Bemerkung von Cayley hier Raum finden (*Quaterly Journal of Mathematics, 1869, vol. 10 p. 112*). Die Krümmungslinien der Fläche, deren Gleichung $xyz = 1$ ist, sind die Schnittcurven derselben mit einer Reihe von Flächen, bestimmt durch die Gleichung:

$$h = (x^2 + \omega' y^2 + \omega^2 z^2)^{3/2} + (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{3/2},$$

wo ω eine der imaginären dritten Wurzeln der Einheit ist. Wird die Gleichung rational gemacht, so ist dieselbe in Beziehung auf x, y, z von dem zwölften Grade.

Wie der Titel angiebt, ist das Werk für Mittelschulen, sowie zum Selbstunterricht geschrieben, und hat der Verfasser, was Auswahl des Stoffes und Deutlichkeit der Sprache anbelangt, diesem Zwecke ziemlich entsprochen. Warum er das französische Wort „Trace" statt des eingebürgerten deutschen „Spur" angewendet hat, vermögen wir uns nicht zu erklären. Der consequent gebrauchte Ausdruck „Berührungselement" statt „Berührungspunkt" erscheint häufig geradezu als unrichtig, z. B. S. 4, wo es heisst: „so ist der Durchschnitt M der beiden Geraden pT (Tangente) und Mm (Normale) das fragliche Berührungselement".

Die angegebenen Regeln und Constructionsmethoden sind, soweit sie den anschaulichen Theil der darstellenden Geometrie betreffen, zweckentsprechend und mit geringfügigen Ausnahmen auch richtig. Sobald jedoch der Autor mit seinen Erläuterungen in etwas höhere Gebiete der Mathematik gelangt, haben sich ziemlich bedeutende Irrthümer eingeschlichen; es wäre daher wohl eine vorherige genauere Durchsicht dieser Theorien am Platze gewesen. Als Beispiele mögen folgende angeführt werden. S. 3 wird behauptet: „Zwei aufeinanderfolgende Hauptnormalen einer Curve doppelter Krümmung liegen in derselben osculirenden Ebene und schneiden sich daher in einem Punkte." Auf S. 33, wo auf diesen Gegenstand etwas näher eingegangen wird, ist dann das Richtige und gerade das Gegentheil des Früheren angegeben. Ebenso wenig gilt der S. 3 ausgesprochene Satz, dass eine Curve und ihre Evolute an correspondirenden Stellen gleiche Krümmung besitzen, weil zwei aufeinander folgende Tangenten der letzteren auf zweien solchen der ersteren senkrecht stehen. Es wurde dabei ausser Acht gelassen, dass man zwei Contingenzwinkel nur bei Gleichheit der Curvenelemente miteinander vergleichen kann. Ausser den im Vorstehenden erwähnten kommen noch andere, weniger erhebliche Fehler zum Vorschein, welche hätten vermieden werden sollen. So wird u. A. von der Schraubenlinie auf einem Kegel geredet, während die betreffende Curve die conische Spirale oder Schneckenlinie heisst. Oder es wird gesagt (S. 7): „Die Anzahl der Elemente (einer Curve) ist sehr gross und ihre Länge unendlich klein."

In Bezug auf den zweiten Theil des Lehrbuches möchten wir über die Beleuchtungslehre eine Bemerkung machen. Es schliesst sich nämlich in derselben der Verfasser der Mehrzahl der Schriftsteller dieses Faches an und benützt die Hypothese, dass das reflectirte Licht gerade nur in entgegengesetzter Richtung wie das direct einfallende zur Wirkung komme. Diese Hypothese wird gemacht, damit man im Stande ist, auch im Eigenschatten eines Körpers Curven gleicher Helligkeit leicht zu construiren. In Wirklichkeit ist aber jene Voraussetzung nie zutreffend, indem die Resultante der Reflexbeleuchtung, welche von der Lage der benachbarten Körper, sowie von der Luft abhängig ist, von Punkt zu Punkt ihre Richtung ändert.

Aus Vorstehendem darf man wohl den Schluss ziehen, dass das besprochene Werk nur nach Beseitigung von wesentlichen Mängeln empfohlen werden könnte.

Carlsruhe, im December 1876. SCHÄFER.

Nozze Formigini-Odono. Alcune Lettere Inedite Di Alessandro Volta. Modena, Tipi Di Nicola Zanichelli e Soci, 1876. 2 Blatt, 75 S. gr. 8°. (Nur in 100 Exemplaren gedruckt.)

Bekanntlich ist es in Italien eine schöne Sitte, bei Gelegenheit einer Hochzeit den Neuvermählten wichtige Untersuchungen oder sonstige Veröffentlichungen von wissenschaftlichem Werthe als Hochzeitsgeschenk darzubringen. So sind auch diese unedirten Briefe Volta's eine solche Gabe, für welche aber nicht allein die Beschenkten Herrn Prof. Riccardi in Modena — denn dieser unterzeichnet sich unter der Einleitung als Herausgeber — Dank abstatten werden. Was dieser über Veröffentlichung von Briefsammlungen im Allgemeinen sagt, ist gerade auf die 13 von ihm herausgegebenen Briefe Volta's in hohem Grade anwendbar. „Wenn die Veröffentlichung nachgelassener wissenschaftlicher Schriften berühmter Männer," sagt er, „vielfach zur Bestimmung der Priorität bei Entdeckungen von Nutzen sind und zur Beschaffung von authentischen Documenten für die Geschichte der Wissenschaft, so dient die ihrer Privatbriefe an Verwandte und Freunde noch häufiger dazu, ein Gemälde ihres Geistes, ein Abbild ihrer Gestalt zu geben, die Geschichte ihres Lebens zu zeichnen, den Charakter des Mannes sowohl, als die Verdienste des Gelehrten in das rechte Licht zu setzen, vielleicht besser, als es der beste Biograph thun könnte."

Auch diese Briefe zeigen uns Volta als genauen Forscher; sie sind geeignet, seine Verdienste um mancherlei wichtige Theorien ins Klare zu bringen; sie geben nicht unwichtige Beiträge zur Lebensgeschichte und zur Charakterzeichnung des berühmten Mannes; vielleicht findet auch der Geschichtsforscher, der nicht die Geschichte der Wissenschaft, sondern die der Völker studirt, Manches, was er verwerthen kann.

Einige handeln von jener wichtigen Entdeckung Lavoisier's, das Wasser in Sauerstoff und Wasserstoff zu zerlegen, und dem umgekehrten Experimente, Beides wieder zu Wasser zu vereinigen. In diesen Briefen finden sich auch eigene Experimente Volta's in dieser Hinsicht beschrieben. Andere stellen den Antheil Volta's an der Erfindung des Elektrophors klar; andere sind aus Lyon datirt, wo Volta als Deputirter der italienischen Republik an den Verhandlungen der Consulta theilnahm (1802). Der elfte Brief hat die Unterschrift Volta's in Facsimile.

Gleichzeitig mit dieser Briefsammlung möchte ich auf eine andere, nicht weniger interessante, aufmerksam machen.

Lettere Inedite Di Uomini Illustri Bolognesi, Pubblicati Da Carlo Malagola. Libri II. Bologna. Romagnoli. 1875. XXXVIII, S. 1—208, II, S. 209—524. 24°. Pr. 18 Lire. (Nur in 202 numerirten Exemplaren gedruckt.)

Diese Briefe, grösstentheils dem Archiv der alten Regierung zu Bologna (jetzt Archiv der königl. Präfectur) entnommen, sind fast ausschliesslich von Mathematikern oder Physikern geschrieben und theils für ihre Arbeiten, theils für ihre Lebensgeschichte von hohem Interesse. Den Reigen eröffnet Domenico Guglielmini, Professor der Mathematik und Hydrometrie, sowie Generalaufseher der Gewässer des bologneser Gebietes (7 Briefe); ihm folgen nach ihrem Geburtsdatum geordnet Ferd. Bibiena Galli, berühmter Maler, aber durch seine *Architettura civile* (Parma 1711) auch für Mathematik wichtig (1 Brief); dann Pier Jacopo Martello, berühmter Dichter des *Femia sentenziato* (1 Brief); Eustachio Manfredi, wie Guglielmini Generalaufseher der Gewässer im Bolognesischen und Astronom des dortigen Instituts (46 Briefe); Gian-Pietro Zanotti, Secretär der *Accademia Clementina* zu Bologna (5 Briefe); Gabriello Manfredi, Professor der Mathematik zu Bologna, später Nachfolger seines Bruders Eustachio Manfredi als Generalaufseher der Gewässer — was z. B. bei Poggendorff nicht erwähnt ist — (8 Briefe); Giacomo Bartolomeo Beccari, Professor der Medicin und Chemie (6 Briefe); Eraclito Manfredi, Professor der Medicin, nachher der Geometrie zu Bologna (6 Briefe); Fernand'Antonio Ghedini, Professor der Naturgeschichte und bedeutender Dichter (4 Briefe); Francesco Maria Zanotti, Professor der Logik, dann der Physik, endlich der Moralphilosophie (16 Briefe); Gian-Battista Bianconi, Bibliothekar des Instituts (5 Briefe); Flaminio Scarselli, Secretär des Senats zu Bologna (13 Briefe); Eustachio Zanotti, bekannter bologneser Astronom (8 Briefe); Laura Bassi, die berühmte Professorin der Physik an der Universität Bologna (3 Briefe); Ludovico Savioli, Geschichtsschreiber und Dichter von Ruf (4 Briefe); Sebastiano Canterzeni, Professor der Mathematik (10 Briefe); Luigi Galvani, der berühmte Entdecker des Galvanismus (5 Briefe); Luigi Palcani-Caccianemici, Professor der angewandten Mathematik zu Bologna (12 Briefe); Clotilde Tambroni, Professorin der griechischen Sprache zu Bologna (1 Brief); Filippo Schiassi, berühmter lateinischer Epigrammatist (7 Briefe); Giuseppe Mezzofanti, der bekannte sprachkundige Cardinal (1 Brief). Als Anhang folgen noch 7 Briefe des berühmten Mathematikers Guido Grandi, da dieser als Professor in Pisa eigentlich nicht in diese Gesellschaft gehört.

Fast alle Briefe sind von Interesse. Eigenthümlich kommen einem jetzt die Bittschreiben vor, mit denen selbst ein Galvani um Verleihung einer Professur oder Erhöhung seines Gehaltes bitten musste.. Solcher Bittschreiben sind eine ziemliche Zahl aufgenommen. Da sie jedesmal von einer Notiz begleitet sind, welche die bisherigen Stellungen, Vorlesungen und Studien des Schreibers darlegt, aus denen der Bittsteller sein Recht auf die betreffende Professur oder die Erhöhung seines Gehaltes herleitet, so sind gerade diese Schreiben von hoher Wichtigkeit.

Diese Briefsammlung bildet die Bände 145—146 der *Scelta di Curiosità Letterarie inedite o rare dal secolo XIII al XVII.* Auch für sie muss man dem Herausgeber Dank wissen, der ja bekanntlich durch seine archivalischen Studien in Bologna auf die Geschichte der deutschen Nation an der Universität Bologna und speciell auf die des Coppernicus ein helles Licht geworfen hat.

Thorn, 16. December 1876. M. Curtze.

Rocco Bombelli. Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica ed i relativi numeri simbolici. Parte prima: Dell' antica numerazione italica. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1876. 4°. 128 S.

Wenn Zwei dasselbe thun, ist es nicht mehr dasselbe. Dieses Sprichwort kam uns nicht aus dem Sinne, so lange wir beschäftigt waren, die hier genannte Schrift zu durchlesen, eigentlich nur den ersten Theil einer Schrift, deren zweiter Theil noch der Ausarbeitung harret. Herr Bombelli ist wesentlich Philologe, das geht aus den Titeln der anderen Bücher hervor, welche er schon der Oeffentlichkeit übergeben hat, aber auch aus den uns vorliegenden Bogen. Der Mathematiker wird daher, mag er noch so genau mit der Geschichte seiner Wissenschaft bekannt sein, bei Herrn Bombelli noch manche ihm neue Angaben finden, welche solchen Schriftstellern des griechischen und römischen Alterthums entnommen sind, die, wie Dichter und Kirchenväter, seltener in das Bereich der vorbereitenden Studien zu einer historisch-mathematischen Arbeit gezogen werden. Kaum irgendwo dürfte z. B. die Literatur über das Fingerrechnen der Alten so übersichtlich gesammelt sein, wie von Herrn Bombelli. Auch über die altetruskischen Zahlzeichen finden sich vollständigere Citate, als wir sie gewohnt sind. Ebenso sind die sechs etruskischen Wörter angegeben, welche zur Bezeichnung der Flächen alter Würfel dienend, höchst wahrscheinlich die sechs ersten Zahlwörter jenes räthselhaften Volkes sind. Weniger Uebereinstimmung herrscht freilich zwischen Denen, welche das Etruskische zu verstehen behaupten, über den Sinn jedes einzelnen dieser Zahlwörter. Die Gewährsmänner unseres Verfassers zählen: *mach, thu, zal, huth, ki, sa*: Herr Isaac Taylor in England vertritt die Reihenfolge: *mach, ki, zal, sa, thu, huth*, welche nur in den Namen für 1 und 3 mit der ersteren übereinstimmt, und wir wollen es nicht verschwören, ob nicht noch andere Gelehrte für irgend andere von den 720 überhaupt möglichen Permutationen der sechs Namen sich erklären. Wann Herr Bombelli den versprochenen zweiten Theil seiner Abhandlung „Ueber die symbolische Bedeutung der Zahlen" liefern wird, ist uns unbekannt. Voraussichtlich dürften in demselben die Kenntnisse des vorzugsweise philologisch gebildeten Verfassers noch zur bessern Geltung kommen, als im ersten Theile; auch dürften dort manche Mängel sich weniger empfinden lassen, die hier im ersten Theile daraus entstanden, dass der Verfasser eigentlich mathematische Fachschriften, besonders solche von deutschen Gelehrten (vielleicht aus zu geringer Kenntniss der deutschen Sprache?) allzu sparsam benutzt hat, und so eine Anzahl von Meinungen noch mitschleppt, die eigentlich schon geraume Zeit als Balast über Bord geworfen sind.

Cantor.

Zur Geschichte des Rechenunterrichtes, I. Theil. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der *Venia docendi* der philosophischen Facultät an der Universität Jena, vorgelegt von Dr. Heinrich Stoy. Jena 1876. 8°. 61 S.

Johann Samuel Traugott Gehler, ein tüchtiger Jurist, Physiker und Mathematiker der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts, unseren Fachgenossen wahrscheinlich am besten durch sein physikalisches Wörterbuch (Leipzig 1787—1795) bekannt, erwarb sich am 30. October 1776 zu Leipzig die Doctorwürde auf Grund einer vortrefflichen Abhandlung: *Historiae logarithmorum naturalium primordia.* Die erste der gebräuchlichermassen angefügten Thesen lautet: „*Nulla eruditionis pars potest accurate cognosci sine eiusdem historia*", eine Meinung, die man theilen mag oder nicht, die aber mit dem Inhalte der Abhandlung einer geistigen Congruenz nicht entbehrt. Heute liegt uns eine Jenaer Inaugural-Dissertation vor; auch sie hat einen historisch-mathematischen Inhalt; wieder sind Thesen beigefügt, deren erste heisst: „Die geschichtliche Erforschung hat für die Mathematik geringere Bedeutung, als für andere Wissenschaften." Wir gestehen es offen, der sonderbare Gegensatz, in welchen der Verfasser hierdurch zu seiner eigenen schriftstellerischen Erstlingsthätigkeit zu treten scheint, hat uns nicht angenehm überrascht. Mag sein, dass Herr Stoy dachte eine These von so zugespitzter Form aufstellen zu sollen, dass auch nach Abbrechen der äussersten Spitze die Treffähigkeit nicht verloren gehe, jedenfalls kann ein Gegner historisch-mathematischer Studien — und deren giebt es heute weit mehr als Freunde — seinem

Satze eine gewisse Geringschätzung entnehmen, von der er muthmasslich frei ist. Auf alle Fälle verfehlen wir nicht, unsere abweichende Ueberzeugung auszusprechen. Wir sind der Ansicht: in allen Erfahrungswissenschaften, und zu diesen zählen wir die Mathematik, hat die geschichtliche Forschung dieselbe geringe Bedeutung für die Förderung der Wissenschaft an sich, dieselbe sehr hohe Bedeutung für die Förderung des Unterrichts in der Wissenschaft, neben der Bedeutung für die Geschichte der Menschheit als eines Culturganzen.

Dieser Widerspruch ist jedoch der einzige von Erheblichkeit, den wir gegen Herrn Stoy aufrecht zu erhalten wünschen. Wir stehen nicht an, schon jetzt die Arbeit, deren erster Theil nur die Presse verlassen hat, eine geradezu bedeutende zu nennen. Wir können und müssen eine Fülle von neuen Anschauungen betonen, welche der Verfasser dem fast schon breit getretenen Gegenstande gegenüber zu gewinnen wusste und welche er mit umfassender Belesenheit ausbeutet. Wenn das Buch dereinst fertig sein wird, verspricht es ja bis zu einem gewissen Grade eine Art Fortbildung Dessen zu werden, was wir selbst 1863 mit unseren Mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker angebahnt haben. Nicht Weniges ist inzwischen von verschiedenen Fachgelehrten hinzugefügt worden. Herr Stoy hat sich Alles, was bis heute über die Geschichte des Rechenunterrichtes erschienen ist, angeeignet und ist in manchen Dingen über alle seine Vorgänger um einen tüchtigen Schritt hinausgegangen.

Um Einiges besonders hervorzuheben, ist eine sehr feine Bemerkung, wenn S. 26 constatirt wird, es sei kein Zufall, wenn sich auf der salaminischen Tafel die alten Ziffern des Herodian finden, denn nur bei diesen könne an ein wirklich instrumentales Rechnen gedacht werden. Sehr richtig ist S. 33 auf die decimale Anordnung der an den Fingern sichtbar gemachten Zahlen hingewiesen, überhaupt ist der ganze Paragraph von den Digitalzahlen mit grossem Geschick bearbeitet. Wenn Herr Stoy S. 40, Anmerkung 3, die Vermuthung ausspricht, auch bei den Egyptern dürfte sich die digitale Darstellung der Zahlen nachweisen lassen, so sind wir in der Lage, diesen Satz, wie wir glauben, endgiltig beweisen zu können, indem wir von dem Inhalte der Abhandlung „Ueber die egyptische Elle" Gebrauch machen, welchen Geh. Rath Lepsius 1865 in den Abhandlungen der Berliner Akademie veröffentlicht hat. Daselbst werden die Breiten von 1, 2 bis 6 Fingern durch Hieroglyphen dargestellt, welche unzweifelhafte Abbildungen der rechten Hand in verschiedener Haltung sind. S. 50 flgg. ist die Zusammenstellung der Gründe für die gegen den Rechner verticale Richtung der Abacuslinien ebenso neu als reichhaltig. S. 58 ist die Betonung des ungeheuren Fortschrittes, den der Columnenabacus mit seinen geschriebenen Zahlen bildet, mit grosser Deutlichkeit in die drei Sätze gekleidet, dass hier 1. vollständige Beseitigung der fünffachen Zwischenstufen, 2. hiermit zum ersten Male vollkommen reine Darstellung des decimalen Systems durch die Schrift, 3. die Einsicht in die Möglichkeit, mit neun Zahlzeichen sämmtliche Zahlen darstellen zu können, gegeben war.

Wir könnten noch Anderes bemerklich machen, könnten auch die durchaus liebenswürdige Polemik, mit welchen der Verfasser sich an einigen wenigen Stellen gegen uns wendet, aufnehmen. Wir ziehen es vor, heute den Anfang des Werkes mit dem Anfange einer Besprechung zu begrüssen, und geben Herrn Stoy die Zusicherung, dereinst dem abgeschlossenen Buche unsere volle Aufmerksamkeit zuwenden zu wollen.

CANTOR.

Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung, berechnet von Dr. REINHOLD HOPPE. Leipzig 1876, C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung. 16 S.

Bekanntlich ist $log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \ldots$ für $z < 1$. Dabei ist $\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \ldots < \frac{1}{2}z^2(1+z+\ldots)$ oder $< \frac{z^2}{2-2z}$ und um so mehr $< z^2$. Wenn also $\frac{1}{10^{h+1}} < z < \frac{1}{10^h}$, so ist $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \ldots = z$ auf $2h$ Decimalstellen genau. Die für z gegebene Begrenzung lässt aber $1-z$ von der Einheit um weniger als eine 1 in der h^{ten}, um mehr als eine 1 in der $h+1^{\text{ten}}$ Decimalstelle verschieden sein, d. h. giebt einen Decimalbruch $1-z$, dessen erste h Ziffern rechts vom Komma lauter 9 sind. Nun tritt bei der Leichtigkeit, den natürlichen Logarithmus $log(1-z)$ auf $2h$ Stellen genau hinzuschreiben, die Frage auf, ob nicht der natürliche Logarithme jeder beliebigen Zahl x auf den $log(1-z)$ zurückgeführt werden könne? In der That ist dieses möglich. Jede Zahl x lässt sich mit einem Factor p, der selbst eine ein- oder zweiziffrige Zahl oder das Inverse einer einziffrigen Zahl ist, vervielfachen, so dass die äusserste zählende Ziffer links im Producte eine 9 werde. Z. B. $0{,}0309 \times 3 = 0{,}0927$; $24{,}7 \times 4 = 98{,}8$; $57841{,}32 \times \frac{1}{6} = 9640{,}22$. Herr Hoppe hat in einer mit IV bezeichneten Tabelle die verschiedenen p zusammengestellt, welche zu irgend einem x gehören. Das Product px lässt sich nun selbst wieder auffassen als das Product eines Decimalbruches $y = 0{,}9\ldots$ in eine Potenz 10^m, wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist, z. B. $0{,}0927 = 10^{-1} \times 0{,}927$; $98{,}8 = 10^2 \times 0{,}998$; $9640{,}22 = 10^4 \times 0{,}964022$; und somit ist allgemein die Zerlegung

$$x = 10^m \cdot \frac{y}{p}$$

als vollzogen zu denken, welche die Folgerung zulässt

$$1)\qquad \log x = m.\log 10 - \log p + \log y.$$

Von diesen drei Theilen sind die beiden ersten tabellarisch nachzuschlagen. Herr Hoppe giebt eine Tabelle I, welche $m.\log 10$ von $m=1$ bis $m=30$ auf 33 Decimalstellen genau enthält, und eine Tabelle II, welche aus den auf ebenso viele Decimalstellen ganau berechneten $\log p$ von $p=1$ bis $p=99$ besteht. Leicht begreiflich kann der Fall, dass p eine inverse einziffrige Zahl bedeutet, so wenig Schwierigkeiten verursachen, wie der eines negativen m, da es beidemal nur auf einen Wechsel des Vorzeichens des Gliedes $\log p$, beziehungsweise $m.\log 10$ ankommt. Das y erfördert nun noch weitere Veränderung. Dasselbe kann durch nacheinander hinzutretende neue Factoren $1+\frac{n_2}{100}$, $1+\frac{n_3}{1000}$, $\ldots 1+\frac{n_h}{10^h}$ (wo sämmtliche n einziffrig sind) die Form $1-z$ erhalten, d. h. die Form eines Decimalbruches, dessen h erste Ziffern hinter dem Komma sämmtlich 9 heissen. Z. B. $y=0{,}964022$; $y\times 1{,}03=0{,}99294266=y_1$; $y_1\times 1{,}007=0{,}99989325862=y_2$; $y_2\times 1{,}0001=0{,}999993247945862=y_3$ u. s. w. Mit anderen Worten $y\times 1{,}03\times 1{,}007\times 1{,}0001=1-0{,}000006752054138$. Daraus folgt

$$2)\qquad \log y+\log\left(1+\frac{n_2}{100}\right)+\log\left(1+\frac{n_3}{1000}\right)+\ldots+\log\left(1+\frac{n_h}{10^h}\right) = \log(1-z) = -z$$

und durch Verbindung von 1) mit 2)

$$3)\qquad \log x = m.\log 10-\log p - z-\log\left(1+\frac{n_2}{100}\right)-\log\left(1+\frac{n_3}{1000}\right)-\ldots \ldots-\log\left(1+\frac{n_h}{10^h}\right).$$

Herr Hoppe hat nun in einer Tabelle III die wieder auf 33 Decimalstellen genau berechneten Zahlen vereinigt, welche er $L(n,k)$ nennt, d. h. $L(n,k)=\frac{n}{10^k}-\log\left(1+\frac{n}{10^k}\right)$. Auch diese Function lässt sich in die Gleichung 3) einführen, wenn $\frac{n_2}{100}+\frac{n_3}{1000}+\ldots+\frac{n_h}{10^h}$ additiv und subtractiv hinzugefügt wird. Alsdann geht sie offenbar über in:

$$4)\qquad \log x = m.\log 10-\log p-z-\sum_{k=2}^{k=h}\frac{n_k}{10^k}+\sum_{k=2}^{k=h}L(n_k,k).$$

So ist die Aufgabe gelöst, zu einer Zahl x ihren Logarithmen zu finden. Auch der Rechnungsgang für den entgegengesetzten Fall der Aufsuchung der Zahl bei gegebenem Logarithmus dürfte nunmehr ohne Schwierigkeit verstanden werden.

Cantor.

Die Elemente der Arithmetik, für die Mittelclassen höherer Schulen und zur Repetition in den oberen Classen zusammengestellt von F. August, Dr. philos., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium und Lehrer an der königl. Artillerie- und Ingenieurschule zu Berlin. Berlin, Winckelmann & Söhne, 1875. 8°. 68 S.

Kurz genug, um dem Lehrer Gelegenheit zu geben, mündliche Erläuterung in Fülle hinzuzufügen, lang genug, um den fleissigen Schüler bei Wiederholungen auf alle im Unterricht vorgekommenen Dinge aufmerksam zu machen, gründlich genug, um auch den Bedürfnissen moderner mathematischer Strenge auf elementarem Gebiete gerecht zu werden, das ist die Censur, welche wir dem uns vorliegenden Leitfaden ertheilen möchten. Der Ausgangspunkt der arithmetischen Betrachtungen wird in demselben von Grössenbegriffen her gewonnen, erst bei der Potenzirung (S. 32) verlässt der Verfasser diese Grundlage, um zu reinen Zahlenoperationen überzugehen. Wir könnten nun freilich die Frage stellen, warum diese Abstraction, wenn sie doch einmal erfolgen muss, bei fortgeschrittenen Schülern nicht gleich am Anfange erfolgte? Wir verzichten aber auf Erörterung von Principien, welche, wie dieses, schliesslich nur Geschmackssache sind. In der Durchführung bedient sich der Verfasser des heute allgemein gebräuchlichen Ganges, der die Permanenz der formalen Gesetze als Vorbedingung stellt und nun je nach Bedürfniss Begriffserweiterungen der Rechnungsoperationen wie der Elemente, an welchen sie vollzogen werden, eintreten lässt. Von ärgerlichen Druckfehlern ist uns nur ein einziger S. 143 in § 100 aufgefallen, wo im Widerspruch zu § 106a und b (S. 45) der falsche Satz steht: „$\sqrt[0]{a}=0$, wenn $a \lesseqgtr 1$ ist“, statt dessen es heissen müsste: „$\sqrt[0]{a}=0$, wenn $a<1$, $\sqrt[0]{a}=\infty$, wenn $a>1$.“

Cantor.

Elementaraufgaben aus der Algebra, von Prof. Dr. O. Hermes. Berlin, Winckelmann & Söhne, 1875. 8°. 140 S.

In 4 Capiteln, beziehungsweise 52 Paragraphen sind nicht weniger als 3470 Aufgaben vereinigt, von denen manche selbst wieder aus mehreren Aufgaben bestehen. Die Resultate sind nicht beigesetzt, auch nicht anhangsweise angefügt. Wir wissen wohl, dass darüber zwischen den Pädagogen gestritten wird, ob Aufgaben mit oder ohne ihre Auflösungen gedruckt werden sollen. Die Gründe für und wider sind unzähligemal erörtert worden. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass wir die dem Verfasser entgegengesetzte Meinung hegen. Die Aufgaben erstrecken sich über das ganze Gebiet elementarer Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten. Unter den Gleichungsproblemen, deren Ansatz selbst erst gesucht wird, finden sich auch einzelne aus der

Planimetrie, so dass hier die Algebra in, wie uns scheint, äusserst praktischer Weise sehr frühzeitig als Begleiterin des geometrischen Unterrichts und umgekehrt auftritt.

CANTOR.

Vorlesungen über mathematische Physik, von Dr. GUSTAV KIRCHHOFF. Leipzig, B. G. Teubner.

Von den Vorlesungen Kirchhoff's über mathematische Physik ist nun die dritte und letzte Lieferung erschienen, welche das ganze Werk abschliesst. In Bezug auf diesen letzten Theil des Kirchhoff'schen Werkes wollen wir uns hier im Wesentlichen nur auf ein kurzes Referat über den Inhalt beschränken, da ein genaueres Eingehen besser in einer das ganze Werk in Betracht ziehenden Besprechung geschieht. Wir hoffen, dieses Gesammtreferat bald geben zu können.

Diese dritte Lieferung enthält die Vorrede und Inhaltsangabe für das ganze Werk. In ersterer ist kurz erwähnt, dass das ganze Werk nur die Beschreibung der Bewegung materieller Punkte und der Körper, insofern sie als ein Continuum aus materiellen Punkten betrachtet werden können, enthalten soll, ohne dass gerade auf eine Erschöpfung des ganzen Gegenstandes Anspruch gemacht wird. Weiter wird noch die dem ganzen Werke eigenthümliche Einführung der Begriffe von Kraft und Masse begründet.

Im Allgemeinen umfasst nun die vorliegende dritte Lieferung in den Vorlesungen 23 bis 30 die Anwendung der allgemeinen Resultate der 11. Vorlesung auf flüssige Körper (die zum Theil schon in der vorhergehenden Lieferung mit behandelt wurden) und auf elastische feste Körper. Im Speciellen beschäftigt sich die 23. und 24. Vorlesung mit den Bewegungszuständen luftförmiger Körper unter verschiedenen Voraussetzungen, wobei namentlich die für die Akustik wichtigen Fälle näher durchgeführt werden. Die 25. und 26. Vorlesung beschäftigt sich mit den Bewegungszuständen incompressibler Flüssigkeiten, und zwar die erstere ohne, die zweite mit Berücksichtigung der Reibung. Ausfluss von Flüssigkeiten aus Gefässen, Wellenbewegung, Bewegung der Flüssigkeiten in Röhren sind besonders betont, ebenso wie die Bewegung einfacher ganzer flüssiger Körper oder einfacher fester Körper, die in eine Flüssigkeit eingetaucht sind. Die vier letzten Vorlesungen endlich beschäftigen sich mit den Bewegungszuständen fester Körper. Auch hier werden die allgemeinen Resultate der 11. Vorlesung für eine Reihe von speciellen Fällen der Elasticitätstheorie, deren Aufzählung wir uns füglich hier ersparen können, umgestaltet; die einzelnen gewählten speciellen Fälle sind natürlich solche, bei denen sich die nöthig werdenden Integrationen haben durchführen lassen.

Freiberg, den 12. October 1876. Dr. TH. KÖTTERITZSCH.

Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik, von Prof. Dr. A. v. WALTENHOFEN. Leipzig, B. G. Teubner.

Das in bekannter Weise von der Verlagsbuchhandlung vorzüglich ausgestattete Werk umfasst hauptsächlich diejenigen Disciplinen der Physik, welche sich auf rein mathematischem Wege abhandeln lassen. Es soll sein ein Hilfsmittel zum Selbststudium und zur Repetition für Studirende an technischen Hochschulen und für Lehramtscandidaten. Gewisse wesentliche Theile der Physik sind ganz übergangen, nämlich nicht nur alle diejenigen, welche sich auf die Wellentheorie beziehen, also die Wellenbewegung flüssiger Körper, die Akustik, Optik und die gestrahlte Wärme, sondern auch die Lehren vom Magnetismus, von der Elektricität und vom Galvanismus, soweit nicht letztere mit den einfachsten Sätzen der Potentialtheorie zusammenhängen. Dagegen sind mit besonderer Vorliebe behandelt gewisse Theile der reinen Mechanik, die mechanische Wärmetheorie und die Potentialtheorie — Disciplinen, von denen weiter unten noch besonders die Rede sein wird.

Es folgt hieraus, dass das vorliegende Werk nicht daraufhin verfasst ist, etwa rein nur zum Selbststudium zu dienen, sondern vielmehr zu dem Zwecke, dass es neben dem Vortrage des Lehrers benützt werde, um bequemer die schwierigeren Theile der Physik wiederholen zu können, und auf die einschlagende mathematische Fachliteratur vorzubereiten. Die Werke, welche der Verfasser namentlich seinem Buche zu Grunde gelegt hat, sind Wüllner's Lehrbuch der Physik, Briot's Lehrbücher und gewisse Theile der Schriften von Clausius, Gauss und Green.

Entstanden ist das Werk durch Stenographiren und Transscribiren des grösstentheils frei dictirten Manuscriptes des Verfassers seiten eines Zuhörers (Eduard Glaser). Diese Entstehung des Werkes aus dem eingeschlagenen Lehrgange, den der Verfasser erprobt haben will, erklärt dies und jenes Auffällige; so nicht allein orthographische Ungleichheiten, wie der Verfasser selbst bemerkt und die sich trotz eigenhändiger Abänderungen und Zusätze eingeschlichen haben, sondern namentlich auch, wie Referent hinzusetzen muss, da und dort das Weglassen der Bedeutung eingeführter mathematischer Bezeichnungen, unverbesserte auffällige Schreibfehler und mehrfache uncommode Stellung der Figuren, auf die sich der Text bezieht, und die ein häufiges Umschlagen des eben gelesenen Blattes veranlasst.

Gehen wir nunmehr auf das Einzelne und die Anordnung des ganzen Stoffes ein, von der freilich der Verfasser selbst sagt, dass beim Vortrag davon abgewichen werden müsse, so ist von dem ganzen 355 Seiten umfassenden Raume ein erster grösserer Abschnitt, nämlich 49 Seiten, einer rein mathematischen Einleitung gewidmet, in der gewisse Lehrsätze der Differential- und Integralrechnung vorgetragen werden. Diese mathematische Einleitung müssen wir nun freilich für den schwächsten Theil des ganzen Werkes erklären. Der Verfasser sagt selbst in der Vorrede, dass er in diesem Theile seines Werkes keine Rücksicht auf die Stetigkeit der Functionen und auf die Convergenz unendlicher Reihen genommen habe. Dann aber müssen wir antworten, wo bleibt in solchem Falle das wissenschaftliche Gepräge des ganzen folgenden Lehrgebäudes, dem doch gerade, wie auch der Verfasser in der Vorrede bemerkt, Rechnung getragen werden sollte. Aber nicht allein dieser Einwurf lässt sich machen, sondern noch mancher andere. So rechnet der Verfasser sofort mit Differentialien wie mit endlich grossen Werthen, während doch immer nur infolge eines bestimmten Grenzüberganges etwas Derartiges gestattet ist. Auch Integrationen von der Art (S. 38): Gegeben $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=b$, integrirt: $u=\int b\,dx\,dy=\int dy\int b\,dx=\int b\,x\,dy=bxy$, oder vielmehr $u=bxy+\Phi(y)+X(x)$ müssen den Anfänger frappiren; warum ist nicht das auf S. 40, 41 und 42 Gesagte (Integration eines vollständigen Differentialausdruckes mit zwei unabhängig Veränderlichen) vorausgenommen?

Es folgt nun als Theil des eigentlichen Werkes das erste Hauptstück von S. 50—130, in welchem die einfacheren Sätze der allgemeinen Mechanik fester Körper vorgetragen werden, während in einem räumlich ziemlich weit getrennten Abschnitte, nämlich von S. 203 bis 214, noch ein Anhang der Mechanik hinzugefügt wird, der das Gesetz der Flächen und die Lehre vom Stossdrucke ausströmender Flüssigkeiten und Gase enthält. Der Grund, warum dieser Anhang der Mechanik nicht ohne Weiteres auf das erste Hauptstück folgt, ist dahin angegeben, dass für ein erstes Studium des ganzen Werkes dieser Anhang der Mechanik überschlagen werden kann.

Aber auch gegen Einzelnes, was im ersten Hauptstück gesagt ist, möchten wir uns aussprechen, so z. B. gegen Schreibweisen wie auf S. 52: $dv=\frac{ds'-ds}{dt}$ und somit $\frac{dv}{dt}=\frac{ds'-ds}{dt^2}$, während man doch richtiger zu schreiben hat $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds'-ds}{dt}\right)$; ferner gegen Integrationen von der Form: gegeben $\frac{d^2s}{dt^2}=-ks$, hieraus wird nach Multiplication mit ds und weil dt^2 constant ist, $\frac{1}{dt^2}\int ds\,d^2s=-k\int s\,ds$, also $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=-ks^2+Const.$, während doch bekanntlich die Integration dadurch zu geschehen hat, dass s als unabhängige Variable eingeführt wird. Auch die Bezeichnung der allgemeinen Beschleunigung durch g vermögen wir nicht zu billigen, da es nun einmal Gebrauch geworden ist, damit die Beschleunigung der Schwere zu bezeichnen. Wenn endlich auch in diesem Werke der Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ lebendige Kraft genannt wird gegenüber der älteren und daher klassischen Bezeichnung, wo mv^2 lebendige Kraft heisst, so möchten wir daran erinnern, dass schon längst, um Verwirrungen zu vermeiden, für den Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ die freilich wenig in Aufnahme gekommene Bezeichnung „lebendige Potenz" vorgeschlagen worden ist.

Geradezu erstaunt sind wir aber über die auf S. 92 und 93 stehende Erklärung der Ebbe und Fluth, denn nicht die Grösse der Anziehung des Mondes direct bewirkt diese Erscheinung, sondern, wie schon Laplace ganz richtig gelehrt hat, die Gestalt der Niveaufläche einer die Erde umgebenden flüssigen Schicht, auf die die Anziehung der Erde und des Mondes gleichzeitig wirkt. Dieses Beispiel der Ebbe und Fluth würde daher ganz gut seinen Platz in dem Abschnitte über die Potentialtheorie gefunden haben.

Hervorheben wollen wir noch, dass der Verfasser noch besonders (abweichend von anderen kurzen Darstellungen der reinen Mechanik) die Abweichung der Geschosse und die Präcession der Nachtgleichen berücksichtigt hat, wenn auch weniger die strengere mathematische Betrachtung, als vielmehr eine die Erscheinungen erklärende Erläuterung in Worten Platz gefunden hat.

Als Fortsetzung der reinen Mechanik würde man nun sogleich den Theil erwarten, den der Verfasser „Grundzüge der Potentialtheorie" nennt und dem er den letzten Raum seines Werkes, nämlich von S. 269 bis 355 angewiesen hat. Als Anwendung der Sätze der Potentialtheorie nimmt der Verfasser dabei hauptsächlich Rücksicht auf die Elektrostatik und giebt die einfacheren Sätze, welche sich auf stationäre elektrische Ströme beziehen. Hinsichtlich der Anwendungen auf die Elektrostatik möchten wir bemerken, dass die Influenzelektricität immer noch nach der Poisson'schen Weise erklärt ist, während doch, wie Referent in seinem Lehrbuch der Elektrostatik gezeigt hat, diese Erscheinung sich viel einfacher aus dem Coulomb'schen Gesetz allein mit Hilfe des Potentials auf sich selbst ergiebt.

Das zweite Hauptstück von S. 139 bis 159 enthält die Mechanik (tropfbar) flüssiger Körper, mit besonderer Berücksichtigung der Gestalten der Flüssigkeit, Capillarität, Endosmose und der Araeometer.

Das dritte Hauptstück von S. 161 bis 203 enthält die Mechanik der Gase. Hier wird bereits Vieles gelehrt, was man gewöhnlich in dem Capitel über mechanische Wärmetheorie sucht, dazu noch die Absorption und Diffusion der Gase, das Ausströmen der Gase, deren Bewegung in Canälen, das barometrische Höhenmessen und schliesslich der Gewichtsverlust der Körper in der Luft.

Das vierte Hauptstück endlich, Einleitung in die mechanische Wärmetheorie genannt, umfasst von S. 215 bis 218 die fundamentalen Betrachtungen und Resultate, wie sie eben der mechanischen Wärmetheorie eigenthümlich sind.

Haben wir sonach Manches an dem vorliegenden Werke auszustellen gehabt, wobei wir noch ganz davon abgesehen haben, dass an mehreren Stellen die Deutlichkeit und Klarheit des Vorgetragenen besser zu Tage getreten wäre, wenn die Darstellung präciser und knapper gehalten worden wäre, so müssen wir doch auch wiederum Vieles lobend anerkennen, was das vorliegende Werk vor anderen Lehrbüchern der Physik rühmlich auszeichnet. Wir betonen in dieser Hinsicht den mathematischen Geist, den der vorliegende Grundriss für das Studium der Physik anbahnt, gegenüber den charlatanhaften und effecthaschenden Vorträgen über exacte Naturwissenschaften, wie sie an manchen Stätten der Wissenschaft Mode geworden sind, Vorträge, die durch schöne und kostspielige Instrumente und Versuche Zuhörer anlocken und bei denen der vortragende Professor oft nicht viel mehr macht, als dass er da und dort einen Hahn öffnet, einen Knopf niederdrückt, einen schlechten Witz verbricht und häufig durch ziemlich tölpelhafte Ungeschicktheit seinen Assistenten zur Verzweiflung bringt. Manche gute Bemerkung über die Bethätigung der mechanischen Gesetze in den Erscheinungen der Natur macht den Vortrag lebendig und erhöht das Interesse des Lesenden am Gelesenen.

Im Ganzen können wir daher unser Urtheil über das vorliegende Werk wohl dahin zusammenfassen, dass es ein erster lobenswerther Versuch ist, auch den Unterricht und das Studium der Physik so zu gliedern, dass das Pensum der (technischen) Hochschule in angemessener Weise an das vorausgegangene Pensum der Mittelschule sich anschliesst.

Freiberg, 31. October 1876. Dr. Th. Kötteritzsch.

Handbuch der barometrischen Höhenmessungen. Anleitung zur Berechnung der Höhen aus barometrischen, thermometrischen und hygrometrischen Messungen, sowie zur Anstellung sämmtlicher bei den Höhenmessungen nöthigen Beobachtungen, unter besonderer Berücksichtigung der Surrogate für das Quecksilberbarometer (Aneroid, Thermobarometer), für Ingenieure, Forschungsreisende, Meteorologen, Mitglieder der Alpenvereine etc., von Dr. Paul Schreiber. 8°. XX, 307 S. Mit einem Atlas von 18 Grossfoliotafeln, enthaltend zahlreiche Karten und Figuren. Weimar 1877, Bernh. Friedr. Voigt.

Das Buch ist so umständlich wie sein Titel und bespricht Alles, was unmittelbar oder mittelbar bei barometrischen Höhenmessungen vorkommt oder vorkommen kann, übrigens in guter Ordnung und mit Umsicht.

Die Herleitung der barometrischen Höhenformel unterbleibt, von den vielen vorgeschlagenen Formeln werden gelegentlich einige erwähnt. Die ausgewählte berücksichtigt Temperatur und Feuchtigkeit der Luft, dann die Veränderungen der Schwere mit geographischer Breite und Höhe über dem Meere. Man ist freilich noch weiter gegangen und hat in die Formel noch den mit der Breite veränderlichen Erdhalbmesser und die wechselnde Dichte der oberen Erdschichten gezogen, — davon sieht aber das Buch glücklicherweise ab. Die gewählte Formel, immer noch verwickelt genug, wird in eine Summe umgeformt, um den Einfluss der einzelnen Umstände einzeln zu verfolgen.

Vermisst wird die Angabe des Grades der Sicherheit einer Barometerbeobachtung, während doch davon abhängt, welche Verbesserungen noch von Belang sind. Es wird vorgeschlagen, mangelhafte oder fehlende Beobachtung der Temperatur aus der Feuchtigkeit der Luft zu ersetzen durch die Mittelwerthe aus meteorologischen Tabellen, und daraus Anlass genommen, zahlreiche Tabellen und Karten der Isothermen, des Dampfdruckes, der Isobaren, Witterungskarten u. s. w. mitzutheilen. Es wird für wahrscheinlich erachtet, „dass man genauere oder wenigstens ebenso genaue Resultate erhalten kann, wenn man die Temperatur der Luftsäule aus den Mitteln langjähriger Temperaturbeobachtungen berechnet, anstatt directe Beobachtungen zu verwenden". Es ist Nichts dagegen zu erinnern, wenn, wie schon von Anderen geschah, mit der nöthigen Vorsicht die Jahresmittel meteorologischer Beobachtungen für die Berechnung der Höhenunterschiede verwerthet werden, aber nur, so lange Baremetermittel mit Temperaturmitteln und Feuchtigkeitsmitteln verbunden werden. Hingegen verbietet eine richtige Deutung des Gesetzes der grossen Zahlen, genaue Einzelbeobachtungen des Barometerstandes, die den augenblicklichen, vom mittlern möglicherweise sehr verschiedenen Luftdruck angeben, mit Mittelwerthen der Temperatur und Feuchtigkeit zu verknüpfen. Bekanntlich werden, abgesehen von dem mangelnden Gleichgewichtszustande der Atmosphäre, die Ergebnisse barometrischer Höhenmessungen alle dadurch besonders zweifelhaft, dass die Gesetze unbekannt sind, nach welchen sich Temperatur und Feuchtigkeit der Luft (senkrecht und wagerecht) ändern. Die Unsicherheit in diesem Betreff wird aber nicht vermindert, sondern kann nur vergrössert werden durch Beiziehung von Mittelwerthen als Ersatz für die unmittelbare Beobachtung, welche, wenn gut angestellt, doch wenigstens den augenblicklichen (vom mittlern möglicherweise sehr verschiedenen) Zustand an dem Ende der fraglichen Luftsäule angiebt.

Die Instrumente zur Bestimmung des Luftdruckes werden aufgezählt, beschrieben, abgebildet und ihre Berichtigung und Vergleichung eingehendst besprochen. Eine bedeutende Kürzung in diesem Theile (wie in den anderen) würde für das Buch gewiss von Vortheil sein. Wie gross die Ausführlichkeit ist, mag daraus erhellen, dass, weil gelegentlich Wasser zu erwärmen ist, sofort das Gasbrennen, dann Vorrichtungen zum Regeln des Gaszutritts u. s. w. beschrieben und abgebildet werden.

Besondere Aufmerksamkeit wird dem Federbarometer gewidmet, den verschiedenen Formen (gute Abbildungen), ihrer Verwendbarkeit und ihrer Vergleichung mit Quecksilberbarometern. Die Verbesserungsgleichung für die Ablesung wird mit zehn Gliedern, zehn Constanten enthaltend, aufgestellt. Das ist viel; für eine Geräthschaft, die sich, wie alle Federn, mit der Zeit, und zwar unstätig ändert, entschieden zu viel. Freilich werden auch noch kürzere Vergleichungs- und Berichtigungsverfahren besprochen, aber sie knüpfen alle an die umständlichste und deshalb nach Meinung des Berichterstatters wenigst nützliche an. Hinsichtlich der Verwendung der Federbarometer zu Höhenmessungen dürfte das in Jordan's Kalender für Vermessungskunde (1876) auf etwa $\frac{1}{40}$ des Raumes Gegebene vollkommen ausreichen. Der Vorzug ausserordentlicher Empfindlichkeit der Federbarometer scheint gelegentlich ihrer Beurtheilung nicht genügend beachtet zu sein.

Ein Capitel belehrt ausgiebig über Thermometer, ihre Anfertigung, Prüfung, Berichtigung, beschreibt ein Siedethermometer und schlägt vor, als Ersatz für die üblichen jedesmal den Rudberg-Regnault'schen Fundamentalversuch zu wiederholen!

Ein anderes Capitel ist den Feuchtigkeitsbestimmungen gewidmet. Bei dieser Gelegenheit wird eine Beschreibung fast aller möglichen Luftpumpen, von Aspiratoren, Gasometern, Manometern u. s. w. gegeben.

Ferner ein Capitel über Bestimmung der geographischen Breite, was Anlass bietet, Tabellen über Refraction, über Sternpositionen zu geben, und zu einer Abschweifung über wahre Zeit, Sternzeit, mittlere Zeit.

Ein Capitel über Ausgleichungsrechnungen nach dem Verfahren der kleinsten Quadratensumme.

Ein Literaturbericht, 27 Seiten.

In Anbetracht der zahlreichen Tabellen, der ausgerechneten Beispiele, deren 86 beziffert, vorgetragen aber noch mehr sind, der Karten und Figuren, der 325 bezeichneten Gleichungen (ohne die unbezeichneten) darf man wohl glauben, etwas weniger wäre eigentlich mehr gewesen. An Fleiss und an Kenntnissen fehlt es sicher dem Verfasser nicht.

Die Zeichnungen sind zum Theil recht gut, zum Theil aber auch, aus ängstlicher Sorge für die Deutlichkeit, in den Verhältnissen stark verfehlt.

C. Bohn.

Bibliographie

vom 1. bis 31. December 1876.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 73. Bd. I. Abth. 4. u. 5. Heft. Wien, Gerold. 4 Mk.

Dasselbe. II. Abth. 1. Heft. Ebendas. 1 Mk. 80 Pf.

Dasselbe. III. Abth. 1.—5. Heft. Ebendas. 5 Mk. 20 Pf.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein und A. Mayer. 11. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von J. C. Poggendorff. Ergänzung, 8. Bd. 1. Stück. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Repertorium der Meteorologie, redigirt von H. Wild. 5. Bd. 1. Heft. Leipzig, Voss. 9 Mk. 20 Pf.

Tageblatt der Versammlung deutscher Naturforscher in Hamburg vom 18. bis 24. September 1876, redigirt von W. Spengel. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 6 Mk.

Bulletin de l'Académie imp. des sciences de St. Petersburg. Tome 22, *No.* 1 *et* 2. Leipzig, Voss. pro compl. 9 Mk.

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de St. Petersburg. 7. *Série. Tome* 22, *No.* 11 *et* 12. Leipzig, Voss. 20 Mk. 30 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico chemica et mathematica, ed. A. Metzger. 26. Jahrg. 1. Heft, Jan.-Juni 1876. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Adam, W., Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. 1. Thl. 2. Aufl. Neu-Ruppin, Petrenz. 3 Mk. 60 Pf.

Sohncke's, A., Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung 4. Aufl., besorgt von Arnstein. 2. Thl. Halle, Schmidt. pro compl. 11 Mk.

Lieber, H. und F. v. Lühmann, Leitfaden der Elementarmathematik. Berlin, Simion. 1 Mk. 25 Pf.

Hočevar, F., Ermittelung des Werthes einiger bestimmten Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Bremiker, C., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 2. Aufl. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Biehringer, Ueber schiefe trigonometrische Functionen und deren Anwendung. Nördlingen, Beck. 1 Mk. 60 Pf.

Arendt, G., *Trigonométrie rectiligne.* Berlin, Herbig. 1 Mk.

Müller, J., Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk. 20 Pf.

Westkamp, F., Untersuchungen über die Curve, deren Gleichung ist $\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1$. (Dissert.) Jena, Deistung. 80 Pf.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von F. Lindemann. 1. Thl. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 12 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Seeliger, H., Theorie des Heliometers. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Hann, J., Zur barometrischen Höhenmessung. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Börsch, O., Theodolite, astronomische Instrumente und Bussolenapparate des mechanischen Instituts von Breithaupt & Sohn in Cassel, ihre Beschreibung, Prüfung, Berichtigung und Anwendung. Cassel, Kay. 9 Mk. 35 Pf.

Rüdiger, W. v., Die Methode der kleinsten Quadrate, abgel. aus der Wahrscheinlichkeitslehre, und ihre Anwendungen auf naturwissenschaftliche Messungen. (Dissert.) Jena, Deistung. 1 Mk.

Stammeshaus, W., Darstellung der Dioptrik des normalen menschlichen Auges. Oberhausen, Spaarmann. 7 Mk.

Physik und Meteorologie.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. 4. Aufl. Freiburg i. B., Herder. 4 Mk.

Bothe, F., Physikalisches Repertorium. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 40 Pf.

Lang, V. v., Ueber die Drehung der Polarisationsebene durch den Quarz. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Plank, J., Versuche über das Wärmeleitungsvermögen von Stickstoff, Stickoxyd, Ammoniak und Leuchtgas. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Blažek, G., Entwurf einer Theorie der Meeresströmungen. Prag, Dominicus. 80 Pf.

Instruction für die Signalstellen der deutschen Seewarte. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 1 Mk. 20 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Programm

des von der

königl. Akademie der Wissenschaften in Turin

zu vergebenden

Bressa-Preises.

Caesar Alexander Bressa, im Leben Doctor der Medicin und Chirurgie, hat am 4. September 1835 in seinem Testamente Folgendes wörtlich verfügt:

„Ich erwähle zum Universalerben meiner jetzigen und künftigen Güter, nach Abzug der verschiedenen Legate, die königl. Akademie der Wissenschaften zu Turin, welche sich von ihrem beständigen Secretär oder von einem Procurator wird vertreten lassen können, der zu diesem Zwecke von ihren Mitgliedern zu erwählen wäre.

Sowie das Recht der Nutzniessung aufhört (welches in demselben Testamente der Frau Claudia Amata Dupêché zugesprochen ist), wird die Turiner Akademie die Nachlassenschaft sofort antreten und befugt sein, die unbeweglichen Güter zu verkaufen, die Capitalien nach ihrem Ermessen anzulegen und mit dem Ertrag des Gesammtvermögens einen zweijährigen Preis zu stiften, der in folgender Weise abwechselnd vergeben werden soll.

Der Reinertrag der ersten beiden Jahre ist als Preis für denjenigen Gelehrten bestimmt, der, gleichviel zu welcher Nation er gehören möge, während der letzten vier Jahre die ausgezeichnetste und nützlichste Entdeckung gemacht haben wird oder der Urheber war des berühmtesten Werkes im Bereiche der physikalischen und experimentellen Wissenschaften, der Naturgeschichte, der reinen und angewandten Mathematik, der Chemie, Physiologie und Pathologie, mit Einschluss der Geologie, der Geschichte, Geographie und Statistik.

Der Reinertrag der folgenden beiden Jahre wird demjenigen Gelehrten zugesprochen werden, welcher, immer nach dem Urtheile derselben Turiner Akademie, in den letzten vier Jahren bezüglich einer der oben erwähnten Wissenschaften in Italien die wichtigste Entdeckung gemacht oder das bedeutendste Werk veröffentlicht haben wird u. s. w., unter Beobachtung derselben Reihenfolge."

Obgleich sich die Akademie nicht verhehlt, dass ihr die edelmüthige Schenkung des Dr. Bressa eine schwere Verantwortlichkeit auferlegt, indem sie dazu berufen sein soll, über Geisteserzeugnisse zu urtheilen, welche in irgend einem Theile des weiten Gebietes beinahe sämmtlicher positiven Wissenschaften auftauchen mögen, glaubt sie dennoch dem Vertrauen des freigebigen Erblassers entsprechen zu müssen, indem sie sich anheischig macht, die Bestimmungen seines Testamentes genau zu erfüllen, das von der lobenswerthen Absicht eingegeben ist, das Gedeihen der Wissenschaft zu befördern.

Das Bressa'sche Vermächtniss ist im Monat Juli 1876 von der Bedingung der Nutzniessung befreit worden. Infolge dessen muss der erste vom Testament bestimmte Zeitraum sich über die Jahre 1877 und 1878 erstrecken.

Der erste Preis wird im Jahre 1879 demjenigen Gelehrten zuertheilt werden, der, gleichviel welcher Nation er angehören möge, während der vorangegangenen vier Jahre, d. h. vom 1. Januar 1875 bis zum letzten December 1878, die bedeutendste und nützlichste Entdeckung gemacht oder das berühmteste Werk veröffentlicht haben wird in dem Gebiete der der reinen und angewandten Mathematik, der experimentellen Wissenschaften: Physik, Chemie und Physiologie, der Naturgeschichte mit Einschluss der Geologie, der Pathologie, der Geschichte, Geographie und Statistik.

Der erste für den vierjährigen Zeitraum, 1875—1878, bestimmte Preis wird 12,000 italienische Franken betragen.

Im Sinne des Bressa'schen Testamentes wird die Akademie unter den Entdeckungen und veröffentlichten Werken, mögen sie von deren Urhebern eingereicht worden sein oder nicht, das Beste wählen, ohne sich an irgend etwas Anderes zu binden, als an die Grenzen der Zeit, die der Erblasser vorgeschrieben, und an die Rücksicht der Unparteilichkeit, die es verbietet, in eigener Sache zu richten.

Kein nationales Mitglied der Akademie, mag es zu den in Turin ansässigen oder nicht ansässigen gehören, wird den Preis davontragen können.

Im Jahre 1881 wird der zweite Bressa-Preis für den vierjährigen Zeitraum 1877 bis 1880, ertheilt werden, ganz nach Massgabe der obigen Bestimmungen, nur dass, dem Testamente gemäss, dieser zweite Preis nur von einem italienischen Gelehrten gewonnen werden kann.

Und auf dieselbe Weise soll alle vier Jahre einem Gelehrten ohne Rücksicht auf seine Abstammung, und alle vier Jahre einem italienischen

Gelehrten der Bressa-Preis zuerkannt werden, so zwar, dass ein Weltpreis und ein vaterländischer Preis regelmässig mit einander abwechseln.

Turin, 7. December 1876.

Der Präsident der Akademie:

Federigo Sclopis.

Der Secretär der Classe für physikalische und mathematische Wissenschaften:

Ascanio Sobrero.

Der Secretär der Classe für moralische, historische und philologische Wissenschaften:

Gaspare Gorresio.

Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Unter diesem Titel veröffentlicht Herr Ludwig Boltzmann im 6. Hefte des 21. Jahrgangs dieser Zeitschrift eine Bemerkung, welche mit den Worten beginnt: „Die Eingangsworte zur Abhandlung Riemann's über diesen Gegenstand zeigen, dass demselben die früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand gänzlich unbekannt waren.“ Dass diese Aeusserung auf einem Irrthum beruht, beweist die in den Göttinger Nachrichten von 1859, also schon vor der Abhandlung erschienene Selbstanzeige derselben (Riemann's gesammelte mathematische Werke, Str. 165), dort wird der Arbeiten von Challis, Airy und Stokes mit ausdrücklicher Beziehung auf Riemann's Resultate gedacht. Dass die Poisson'sche Abhandlung Riemann unbekannt gewesen sei, ist hiernach kaum glaublich, da dieselbe den Ausgangspunkt bildet für die ganze Discussion der englischen Gelehrten. Die Arbeit von Saint Venant und Wantzel behandelt ein Problem, welches von dem in Rede stehenden gänzlich verschieden ist, nämlich den Ausfluss eines Gases aus einer Oeffnung.

Was endlich die Abhandlung von Earnsehaw betrifft, so ist dieselbe zwar schon im Jahre 1858 entstanden; indessen trägt der Band der *Phil. transact.*, in dem dieselbe gedruckt ist, die Jahreszahl 1861, während Riemann's Selbstanzeige in den Göttinger Nachrichten von 1859 erschien. Diese Arbeit konnte also Riemann zu der Zeit, als er seine Untersuchungen über das Problem ausführte, nicht bekannt sein.

Königsberg, 3. Januar 1877. H. Weber.

Recensionen.

Vorlesungen über Geometrie von ALFRED CLEBSCH, bearbeitet und herausgegeben von Dr. FERDINAND LINDEMANN. Mit einem Vorworte von FELIX KLEIN. Erster Band: Geometrie der Ebene. Mit 78 Holzschnitten. Leipzig, B. G. Teubner. 1876.

Das vorliegende Werk trägt an seiner Spitze den Namen des Mannes, der auf das Gebiet, das es behandelt, einen leitenden und umgestaltenden Einfluss ausgeübt hat. Die Mittel, mit welchen Clebsch auf seine Zuhörer und die ihm näher Stehenden gewirkt hat, einem grösseren Kreise zugänglich zu machen, ist daher ein Unternehmen von ausserordentlicher Wichtigkeit, für dessen Durchführung die Wissenschaft dem Herausgeber Herrn Lindemann, sowie Herrn Klein, der nach dem Tode Clebsch's die Leitung der Herausgabe in seine Hand genommen, hohen Dank schuldet.

Die Schwierigkeiten, welche einer Herausgabe der geometrischen Vorlesungen Clebsch's entgegenstehen, sind ganz besonderer Art. Diese bilden äusserlich kein geschlossenes Ganzes, sie hängen vielmehr mit den in den Zeitschriften niedergelegten Arbeiten so innig zusammen, dass ihre im Laufe der Jahre wechselnde Gestalt erst in dieser Zusammenfassung erklärlich wird. Die Wirkung dieser ganzen wissenschaftlichen Thätigkeit beruht so nicht auf den einzelnen Mittheilungen, sondern auf der tiefern Einheit, die sie beherrscht und ihren organischen Zusammenhang bestimmt. Es wird nöthig, alle die verschiedenen Richtungen, nach welchen die gemeinsamen Grundgedanken zum Ausdruck gelangen, zu verfolgen und zu vergleichen, um diese Ideen selbst in ihrer vollen Allgemeinheit und in ihrer Begrenzung zu erfassen. Dazu kommt noch, dass bei diesem Zusammenhange des Schaffens, der aus der Einheit der Idee fliesst, sich auch vielfach in der Darstellung Schwierigkeiten ergeben. Denn einmal wird oft von einer Arbeit auf die andere verwiesen, und weiter werden bei der Umsetzung der allgemeinen Anschauungen in analytische Methoden die Modificationen derselben für specielle Fälle in der Regel nur dann durchgeführt, wenn es die Wichtigkeit des Specialfalles verlangt, da ja doch sämmtliche solche Fälle von jenen Anschauungen schon beherrscht sind. Das Studium einer einzelnen herausgerissenen Abhandlung, die ihren Gegenstand nicht nach allen Seiten fest begrenzt, ist daher nicht leicht und muss unbefriedigend bleiben, so lange sie nicht als ein Theil eines grossen Ganzen betrachtet wird. Und ebenso wenig hat eine einzelne geometrische Vorlesung von Clebsch den gesammten Apparat an Anschauungen und Methoden liefern können, der zum Verständniss des Ganzen nöthig ist.

Es ist aus diesen Bemerkungen klar, dass zur Lösung der wichtigsten Aufgabe, eine Uebersicht über die Grundlage und die Ausdehnung dieser Methoden zu geben, die einfache Herausgabe einer der Vorlesungen nicht genügend war. Erst das grosse Material, das aus mehreren geometrischen und algebraischen Vorlesungen, aus einer Reihe von Abhandlungen von Clebsch, sowie endlich aus nebenher laufenden oder sich anschliessenden Arbeiten Anderer besteht, welche an der Ausbildung der Methoden betheiligt sind und unter welchen vor Allem Gordan, auf so vielen Gebieten Mitarbeiter Clebsch's, zu nennen ist — erst dieses gesammte Material kann zu einer systematischen Darstellung hinführen. Für die Herausgabe entstand hierdurch die bedeutende Aufgabe, aus einem zerstreuten und ungeordneten, zum Theil auch lückenhaften Material ein Ganzes erst zu schaffen und nach den Ideen Clebsch's auszubilden.

Die vorliegende Herausgabe hat sich in der That auf diesen Standpunkt gestellt und die Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit angegriffen. Sie giebt auf Grund einiger Vorlesungen Clebsch's, von den Gesichtspunkten aus, die sich im Laufe der ganzen geometrischen Entwickelung ausgebildet haben, eine methodische Darstellung des Standes der geometrischen Wissenschaft. Sie giebt noch mehr: um die ganze Tragkraft der leitenden Ideen zu zeigen, sind nicht nur die bekannten oder von Clebsch erschlossenen Gebiete behandelt, sondern selbst einzelne kaum betretene Gebiete, auf welche erst ein noch ungewisses Licht geworfen ist. Insofern jedoch diese letzteren Darstellungen an vielen Stellen über das berechtigte Streben, bis zu den neuesten Einsichten und bis zur Richtung der jetzigen Entwickelungen hinzugeleiten, hinausgehen, wäre eine grössere Beschränkung durchaus nöthig gewesen.

Die Allgemeinheit des Standpunktes, von welchem aus der Herausgeber die Ordnung und Behandlung der verschiedenen Materien vornimmt, dürfen wir (nach den einleitenden Worten des Herausgebers) wohl wesentlich auf die Mitwirkung von Herrn F. Klein zurückführen, der schon in seiner Programmschrift („Vergleichende Betrachtungen etc.", Erlangen 1872) die einheitlichen Ideen, welche die jetzige geometrische Forschung durchdringen, mit klarer Hand gezeichnet hat. Ich gebe nun zunächst eine summarische Uebersicht über das ausserordentlich reiche Material, das von diesem Standpunkte aus bearbeitet und auch grösstentheils bewältigt wird, wie über den Inhalt des Werkes.

Das Material besteht wesentlich in den beiden Vorlesungen über die Geometrie der Kegelschnitte (1871), die der algebraischen Curven (1871 bis 1872) und in der Vorlesung über die Theorie der algebraischen Formen (1872). Dazu wurden ein Theil der Vorlesungen über die Abel-schen Functionen, ein Manuscript Clebsch's über die aus dessen letzter Zeit stammende Connextheorie, endlich die früher veröffentlichten Arbeiten Clebsch's und Anderer benutzt. Auf mehr als 1000 Seiten und in 7 Hauptabtheilungen werden nach einander vorgeführt: in Abtheilung 1 die metrische und projectivische Geometrie des Punktes und der Geraden (S. 1—71), in 2 die Theorie der Kegelschnitte (72—166); in 3 die binären Formen mit ihren geometrischen Anwendungen, sowie eine Einleitung in die Theorie der ternären Formen, ebenfalls mit den Anwendungen auf Collineation und Kegelschnittsysteme (167—304); in 4 eine allgemeine Theorie der algebraischen Curven, in Bezug auf deren Verhalten bei projectivischen Transformationen (S. 305—496). Diese Abtheilung geht nach mehreren Richtungen auseinander: Polarentheorie, mit Untersuchung der singulären Punkte; Curvensysteme mit der Methode der Charakteristikentheorie; Geometrie auf der Curve mit den algebraischen und rein geometrischen Untersuchungen über Punktgruppen und Correspondenz; zuletzt eine Darstellung der eindeutigen Beziehung zweier Ebenen auf einander, die ihrem Inhalte nach mehr eine Einleitung zur 6. Abtheilung ist, mit der Anwendung auf die Auflösung der singulären Punkte. Abtheilung 5 bringt sodann die Theorie der Curven dritter Ordnung oder dritter Classe, unter Anwendung der Theorie der ternären Formen und der elliptischen Functionen (S. 497—660); Abth. 6 die Geometrie auf einer algebraischen Curve, soweit sie bei rationalen Transformationen invariante Eigenschaften betrifft, unter Anwendung der Theorie der algebraischen und der Abel'schen Functionen (661—923); endlich Abtheilung 7 die Connexe, behandelt mit Hilfe der ternären Formen mit mehreren Reihen von Variabeln, und deren Zusammenhang mit den Berührungstransformationen und den algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (924—1037).

Von diesen mannigfaltigen Darstellungen sind nur die ersten beiden Abtheilungen eine wesentlich getreue Wiedergabe der Clebsch'schen Vorlesung über die Kegelschnitte. Schon die dritte Abtheilung ist eine freie Bearbeitung der Vorlesung über die Formen, zum Zwecke einer mehr geometrischen Einleitung in die folgenden Capitel. Von sämmtlichen übrigen Abtheilungen sind aber nur noch die vier ersten Abschnitte der 4. (Polarentheorie), mehrere Capitel der 5., sowie ein Theil der 7. Abtheilung den Clebsch'schen Vorlesungen entnommen: alles Uebrige, also der umfangreichere Theil des Buches, ist Verarbeitung eines anderswo gegebenen Stoffes, zum Theil auch aus privaten Mittheilungen geschöpft, wie die Angabe des vollständigen Systems zweier ternären quadratischen

Formen nach Gordan (in Abth. 3), zum nicht geringen Theil endlich auch eigener Zusatz des Herausgebers.

Es liegt zunächst die Frage nahe, wie weit hiernach der Titel des Werkes: „Vorlesungen von Clebsch", gerechtfertigt ist. Herr Klein erklärt in der Vorrede, dass der Stoff des Buches nach seiner Begrenzung den Vorlesungen Clebsch's conform bemessen ist, nach seinem Gehalt auf Clebsch zurückgeht und sich auch in der Form der Darstellung an ihn durchaus anschliesst. Wir stimmen der ersteren Bemerkung nicht zu; trotzdem können wir diese Frage bei Seite lassen, da jetzt nach den ausführlichen Erklärungen, welche der Herausgeber, Herr Lindemann, in der Einleitung über sein Verhältniss zu den Clebschschen Vorlesungen giebt, über dasselbe kein Missverständniss entstehen kann. Die Herausgeber haben vielmehr für die Darstellung mit ihrer vollen Verantwortlichkeit einzutreten, und ich beurtheile daher die Hauptpartien des Buches als ein Werk des Herrn Lindemann.

Die gegebene Inhaltsübersicht wird genügen, um die den Herausgeber leitenden Gesichtspunkte zu kennzeichnen: das Material theilt sich ihm in mehrere Gebiete, in das der Eigenschaften der Curven, die bei linearen Transformationen erhalten bleiben, in das solcher, welche bei rationaler Transformation invariant sind, und endlich auch noch solcher, welche sich auf die sogenannten „Berührungstransformationen" beziehen.

Bei Gelegenheit des letzteren, von Lie eingeführten, vom Herausgeber adoptirten Ausdruckes möchte ich die Bemerkung machen, ob derselbe nicht besser durch einen andern Ausdruck ersetzt würde, da die Eigenschaft, die er speciell bezeichnet, in Ausnahmeelementen ihre Bedeutung verliert, während eine andere Eigenschaft, nämlich (vergl. S. 1025 des Buches) die, aufeinanderfolgende Elemente wieder in solche überzuführen, erhalten bleibt?

Von den erwähnten Gesichtspunkten ausgehend, giebt nun der Herausgeber ganz allgemeine Methoden, die eigentlich, bei allem Reichthum der Ausführung, ein noch viel grösseres Gebiet umfassen, als das speciell behandelte. Es wird neben der Theorie der homogenen Formen auch noch die der algebraischen Functionen und der aus denselben abgeleiteten Transcendenten im weitesten Masse hereingezogen. Dagegen werden einzelne Gegenstände, wie die metrischen Eigenschaften der Curven dritter und vierter Ordnung, nur berührt, da sie schon an anderen Orten (bei Salmon, Höhere ebene Curven, Durège, Curven dritter Ordnung, etc.) ausführlich dargestellt sind. Das Buch steht überhaupt im Gegensatze zu dem eben genannten Salmon'schen Werke, das überall nur einen Zugang zu den mannigfaltigen älteren und neueren Theorien eröffnet und, seinem Lehrzwecke entsprechend, erst zuletzt in die Höhe führt.

In der Darstellung sind im Grossen und Ganzen die bei Clebsch charakteristischen Seiten getreu wiedergegeben. Das Zusammengehen der algebraischen Entwickelung mit der geometrischen Deutung, der Einfluss der einen Betrachtungsart auf den Gang der andern gelangt geschickt zum Ausdruck. Die Betrachtung geht dabei gewöhnlich über wenige specielle Fälle hinweg mit rascher Verallgemeinerung zur Entwickelung umfassender Methoden über.

Aber mehrere Umstände erscheinen mir als Mängel in der Darstellung des Herausgebers. Einmal fehlt die Systematik nach unten hin. Es ist nicht möglich, aus der Anordnung und Darstellung des Buches einen Blick auf die einfachen algebraischen und geometrischen Sätze zu gewinnen, welche allen den Theorien zu Grunde liegen, ja, es finden sich sogar ganz wesentliche Lücken in diesen fundamentalen Sätzen. Ich erwähne nur die knappe und an verschiedene Stellen zerstreute Behandlung der Eliminationstheorie, was um so mehr auffällt, als doch manche andere, weniger wichtige Theorie eine viel eingehendere Darstellung gefunden hat. So finde ich nirgends einen Beweis des Satzes von den $\mu . \nu$ Schnittpunkten, die in einen μ-, bez. ν-fachen Punkt zweier Curven fallen.

Zweitens ist die Orientirung darüber, wie weit die dargestellten Theorien und Sätze gelten, ob sie sich also in speciellen Fällen modificiren, nicht immer leicht gemacht, oder ist auch an einzelnen Stellen gar nicht zu erhalten. Dies wird bei solchen Theorien, welche gerade in ihrer unbeschränkten Giltigkeit ihre wesentliche Bedeutung haben, bei welchen es also vor Allem auf einen klaren Begriff über ihre Grundlage und Tragweite ankommt, ziemlich bedenklich (wie bei den aus der gemeinsamen Arbeit von Brill und dem Ref., Math. Ann. VII, entnommenen Theorien über die Geometrie auf der Curve in Abth. 4 und 6, wovon ich noch weiter unten zu sprechen habe).

Endlich habe ich schon oben einen Missstand angedeutet, der aus einer guten Seite der Herausgabe entspringt. Derselbe hängt mit der in der Einleitung abgegebenen Erklärung des Herausgebers zusammen, dass er sich erst allmälig, im Laufe der beiden Jahre, die er an die Herausgabe des ersten Bandes gesetzt, in die einzelnen Gebiete tiefer eingearbeitet habe. Die hierdurch verursachte Ungleichheit in der Behandlung des Stoffes ist aber von geringer Bedeutung. Dagegen hat Herr Lindemann bei dieser Aufnahme und Wiedergabe des Stoffes zugleich eine bedeutende Productivität entwickelt, die ihm persönlich zur Ehre gereicht und die dem Buche auch theilweise sehr zu gute gekommen ist, theilweise aber auch dasselbe mit Theorien erweitert hat, die — was auch in mathematischen Dingen nicht unwichtig ist — noch nicht die Probe der Jahre aufweisen können oder gar von zweifelhafter Richtigkeit sind. Wir werden dafür unten eine Reihe von Belegen anzuführen haben. Es ist um so mehr zu bedauern, dass der Herausgeber hier das gebotene Mass überschritten hat, als eine Beschränkung auch den übrigen Theilen eine sorgfältige Redaction gesichert hätte, während jetzt bei der Masse des Materials eine solche nicht überall vorhanden ist.

Es ist natürlich nicht möglich, hier alle Capitel des Buches eingehend zu besprechen. Der Herausgeber hat auch selbst insbesondere über die von ihm herrührenden Zufügungen in der Einleitung Rechenschaft gegeben. Aber wenigstens die Mehrzahl der Capitel der beiden Abtheilungen 4 und 6 will ich hier genauer betrachten, indem ich dadurch dem Werke, das voraussichtlich eine ausgedehnte Wirksamkeit zu entfalten berufen ist, für diese Theile, die Geometrie auf der Curve, von einigem Nutzen zu sein hoffe.

In den ersten Capiteln der 4. Abtheilung finden sich ziemlich eingehende Entwickelungen, die sich auf Eliminationsprobleme beziehen, wie auf die Steiner'sche Curve etc., und an denen wohl die Behandlung solcher Aufgaben erkannt werden kann. Trotzdem vermissen wir auf diesem Gebiete, in dem sich die Kraft der ersten Geometer, wie Sylvester, Clebsch u. A. zunächst bewährt hat, ausser den schon erwähnten Grundlagen noch eine grössere Vollständigheit, so das Eliminationsproblem bei drei Gleichungen m^{ten}, zweiten und ersten Grades mit seinen schönen Anwendungen. Ferner die Aufstellung der Gleichung 14. Grades, welche für die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung auftritt, auch eine Betrachtung der speciellen Curven vierter Ordnung, die von Clebsch und von Lüroth behandelt sind, etc. Statt dessen finden wir freilich allgemeine Eliminationsprobleme behandelt, als algebraische Grundlage für neuere Untersuchungen aus der Geometrie der Anzahl. Aber wenigstens bei dem ersten Beweise (über die Zahl der gemeinsamen Werthsysteme einer Gleichung mit einem System von Gleichungen, S. 399) zeigt sich die lückenhafte Grundlage; denn das behauptete Absondern eines Factors findet nicht statt, und das Verhalten von Ψ in den singulären Punkten von Φ hätte direct bestimmt werden müssen. In den weiterhin folgenden algebraischen Betrachtungen kommen an sich werthvolle Ideen des Herausgebers zum Ausdruck (bei den Curvensystemen S. 419, die algebraische Darstellung von einfachen Coincidenzpunkten bei Correspondenz auf einer Curve S. 446, bei der Ableitung des darauf bezüglichen Brill'schen Reciprocitätssatzes S. 464); aber es wäre wohl eine genauere Ausführung derselben an einem andern Orte mehr gerechtfertigt gewesen.

In dem zweiten Capitel von Abtheilung 4 werden die singulären Punkte nach der Newton-Puiseux'schen Methode untersucht. Es ist uns zunächst aufgefallen, dass hierbei die Frage nach der von der Form der Reihenentwickelungen abhängigen Singularität und die nach der Realität der Zweige, Fragen, die doch von verschiedenartigen Annahmen über die

Constanten in der Gleichung der Curve abhängen, immer ungetrennt behandelt werden. Ferner scheint mir das über den vierten Typus eines Zweiges Gesagte nicht ganz verständlich; denn derselbe, durch

$$x = y^{\frac{2k}{2h}} + a y^{\frac{2l+1}{2h}} + \dots$$

charakterisirt, unterscheidet sich vom Rückkehrpunkte erster Art nicht nur durch das Verhalten im Reellen, sondern genau in demselben Sinne, wie Typus I von Typus II. Endlich sind von diesen Entwickelungen, ausser auf die Gestalt der Curve, keine Anwendungen gemacht, auch nicht auf die Schnittpunkte zweier Curven, wozu sich freilich die später (S. 491) gegebene Methode directer eignen würde.

Von einem folgenden Capitel, über Charakteristikentheorie, erwähnen wir, dass es zugleich in die Zeuthen'schen Theorien, die sich auf Curven höherer als zweiter Ordnung erstrecken, einführt, jedoch bei sehr vielen Zahlen nur referirend, hauptsächlich auch durch Wiedergabe von Zeichnungen Zeuthen's über Curvendeformationen. Hier wird uns ein wichtiges und aussichtsreiches Capitel eröffnet.

Nun beginnt ein Cap. VII, das in Abth. 6, Cap. I, II, XI seine Fortsetzung hat (Geometrie auf der Curve) und bei dem ich etwas länger verweilen werde. Diesem Capitel liegt theilweise die schon citirte Arbeit von Brill und dem Ref. (Algebraische Functionen, Math. Ann. VII) zu Grunde; aber die Auffassung und Wiedergabe der Resultate ist eine ziemlich freie, und nicht immer ganz klar.

S. 427 flgg. handelt es sich um die Anzahl der Punkte, welche in einem Schnittpunktsystem durch die übrigen bestimmt sind, wobei die Beschränkung „wenn keine anderen Bedingungen hinzutreten" der Natur der Sache nach nur auf Bedingungen für die zu bestimmenden Punkte gehen kann. Aber dem widerspricht dann wieder die beim darauf folgenden Pascal'schen Satze gemachte Anmerkung, wo dem Wortlaute nach jene Einschränkung auf die gegebenen Punkte bezogen wird, da ja hier diese es sind, welche in Gruppen zerfallen, nicht die zu bestimmenden Punkte.*

Mit dem Beweise des Hauptsatzes der Theorie (S. 439 etc.), dass eine Gruppe $G_Q^{(q)}$, für welche $q \geq Q - p + 1$, von adjungirten C_{n-3} ausgeschnitten werden kann, kann ich mich nicht einverstanden erklären.

---

* Ich erwähne hier einige zu dieser Darstellung gegebene falsche Correcturen, die leicht irre leiten könnten:

S. 434. In Z. 21 v. u. ist der Text richtig, aber Z. 16 v. u. ist „äquivalent" statt „residual" zu lesen.

S. 436, Z. 11 v. u. Der Text ist richtig, nicht aber die von Durège gegebene Correctur, diese Zeitschr. Bd. XXI, hist.-lit. Abth. S. 110. Die übrigen daselbst angegebenen Correcturen finden sich grösstentheils bei denen des Herausgebers wieder.

Es werden zu dem Zwecke gewisse Specialgruppen ausgezeichnet, deren Existenz erst zu beweisen wäre, es werden also für diesen unbeschränkt giltigen Satz, der a. a. O. mit den einfachsten Mitteln bewiesen ist, Betrachtungen benutzt, die man kaum beim Beweise des Riemann-Roch-schen Satzes gelten lassen darf, wo sie später vom Herausgeber wiederum, aber nur unter anderen Beweisen, verwendet werden. Solche unstatthafte Betrachtungen werden z. B. speciell für $g_p^{(q)}$, wo $q \geqq 2$, gebraucht; und doch genügt hier zum Beweis der eine Umstand, dass eine zu einer solchen Schaar gehörige Gruppe auch zu unendlich vielen $g_p^{(1)}$ gehört, für welche der Satz gerade vorher bewiesen worden ist.

Zum letzten Capitel der Abth. 4, der eindeutigen Ebenentransformationen, mache ich noch zwei Bemerkungen. Aus Gleichung 10), S. 481, allein folgt nicht (welche Folgerung ich übrigens noch in mehreren anderen Arbeiten gefunden habe), dass die Fundamentalpunkte das Netz vollständig bestimmen, da ja wegen specieller Lage dieser Punkte die Zahl der Bedingungen nicht mit $\Sigma \frac{1}{2} i(i+1) \alpha_i$ übereinstimmen könnte. Ferner ist die Formel für die Classe k bei singulären Punkten, am Anfange der S. 495, nicht richtig, da in derselben nicht berücksichtigt ist, dass z. B. der l_1-fache Punkt selbst wieder aus einem gewöhnlichen solchen und einer Reihe an ihn herangerückter vielfacher Punkte bestehen kann.

In der 6. Abtheilung erhalten wir eine vom Herausgeber selbstständig gegebene Ausarbeitung des wichtigen Gebiets neuerer algebraischer Forschung, wo die Untersuchungen mit denen der Functionentheorie zusammengehen. Diese Capitel sind, indem sie die bei rationalen Transformationen invarianten Eigenschaften der Curve behandeln, ihrem Inhalte nach zugleich eine Grundlage für die Theorie der Abel'schen Functionen, und sie zeigen die Fortschritte der Theorie, die seit dem Erscheinen des Clebsch-Gordan'schen Buches über Abel'sche Functionen in diesen grundlegenden algebraischen Theilen gemacht worden sind. Aber der Herausgeber scheint hier wieder über seine eigenen ursprünglichen Absichten hinausgegangen zu sein; denn das Gegebene stellt auch eine ziemlich ausführliche Einführung in die Functionentheorie selbst dar. Statt dieser nothwendig lückenhaften Uebersicht über die Theorie, deren Verständniss doch die Kenntniss der Theorie schon voraussetzen muss, und statt der hiervon herrührenden mangelhaften Ausführung einiger Theile hätten wir kurze Verweise mit den nothwendigsten Angaben der Bezeichnung weit vorgezogen. In diesen Capiteln sind dagegen noch einige neue algebraische Ableitungen, auf die ich noch zu sprechen komme, sowie die geometrischen Anwendungen auf die Berührungscurven etc., gut durchgeführt. Ich gehe jetzt zu einer specielleren Betrachtung dieser Abtheilung über.

Die ersten drei Capitel geben sehr vollständige Darstellungen des Verhaltens der Curve zu eindeutigen Transformationen. Nach der Untersuchung der Transformationen selbst werden die verschiedenen Geschlechtsbeweise abgeleitet, wobei die vom Herausgeber durchgeführte directe Untersuchung der Curve M, welche die Abbildung der vielfachen Punkte ausschneidet, von Werth ist. Wir hätten nur gewünscht, dass der zuletzt von Clebsch gegebene Beweis (S. 683) etwas eingehender behandelt worden wäre, da hier der Anlass war, von den über singuläre Punkte früher eingeführten Begriffen Anwendung zu machen. Auch wäre es für den Zusammenhang räthlich gewesen, zu bemerken, dass der Satz S. 677, über das Entsprechen adjungirter C_{n-3}, auch ohne die identische Gleichung von S. 674 schon aus der 4. Abtheilung folgt, und dass dann aus diesem und dem Restsatze wieder der Satz auf S. 675 eine unmittelbare Folge ist. Sodann geht das Buch zur Darstellung des sogenannten Riemann-Roch'schen Satzes weiter und zur Aufsuchung der Specialschaaren, wobei die Discussion der hierbei auftretenden Determinantenrelationen zu bemerken ist. Endlich geben diese Capitel noch die Darstellung der Normalcurven (hierbei ist aber zur Herstellung der hyperelliptischen Normalform, S. 719 Z. 3 v. u., vorher eine weitere rationale Transformation anzuwenden).

In Cap. IV finden sich ausgedehnte Untersuchungen über Punktgruppen auf der Curve, welche mehreren Correspondenzgleichungen gleichzeitig genügen, der Form nach Verallgemeinerungen der über die vorhin genannte Curve M angestellten Betrachtungen, der Sache nach Beweise von Sätzen, von denen die meisten von Brill gegeben sind. Wir enthalten uns, über diese ziemlich complicirten Darstellungen, die eine Anwendung auf Aufsuchung von sogenannten Specialgruppen auf der Curve finden, sonst aber in ein noch wenig gekanntes Gebiet einzudringen suchen, hier ein kritisches Urtheil abzugeben.

Capitel V bringt die Jacobi'schen Schnittpunktsätze, und in den weiteren Capiteln geht das Buch zu den der Curve zugehörigen Integralen über. Auf die Reduction der allgemeinen Integrale auf die Normalformen, wobei die Behandlung in durchaus homogener Weise hervorzuheben ist, folgt die Untersuchung der Normalformen, mit Entwickelung der zugehörigen Periodicitätseigenschaften. Das hierbei (S. 793) gewählte Beispiel des Flächenintegrals passt nur nicht für den betrachteten Fall; dagegen ist die Ableitung der Eigenschaften des Integrals dritter Gattung, das in einem Doppelpunkte unendlich wird, mittelst Grenzprocesses aus dem Integral erster Gattung (S. 806) anzuerkennen. Endlich folgen verschiedene Darstellungen des Abel'schen Theorems für die Integrale der drei Gattungen. Ich mache besonders auf die Darstellung des Theorems aus dem Jacobi'schen Satze aufmerksam, der selbst (die Erweiterung des Satzes über Partialbruchzerlegung auf zwei Functionen von drei homogenen Variabeln) hier in homogener Form abgeleitet wird. Auch andere Ableitungen des Theorems, wie die durch eindeutige Transformation nach Brill, die aus dem für Integrale erster Gattung bewiesenen Theorem nach Harnack, sind bemerkenswerth (bis S. 830, Cap. VIII).

Von diesen algebraischen, ziemlich vollständigen Untersuchungen gelangen wir jetzt zu den rein functionentheoretischen Darstellungen, wo aber gleich im Beginn (S. 831) bei den verschiedenen Wegen, welche das Umkehrproblem einschlagen kann, sich Unklarheiten finden. Der erste daselbst erwähnte Weg existirt nämlich gar nicht, da es keine Functionen $\frac{\varphi}{\psi}$ giebt, welche in p beliebigen Punkten 0 oder ∞ werden. Im folgenden Capitel erhalten wir die Sätze über das Verschwinden der Thetafunction und damit nochmals (S. 857) einen Beweis für den Riemann-Roch'schen Satz, der aber, wie in der mehrmals citirten Arbeit, aus welcher der Satz gezogen ist, angedeutet wird, durch eine ganz einfache Verallgemeinerung der Riemann'schen Betrachtung, ohne alle Benutzung der im Buche gebrauchten Determinantenrelationen, sich ergeben würde. Dasselbe Capitel giebt noch unvollständige Betrachtungen über denselben Riemann-Roch'schen Satz, die aus dem Umkehrproblem folgen (S. 857); denn es ist ja bekannt, dass eine lineare Relation zwischen den $\varphi(x^i)$ schon zu zwei Relationen für die v_h führt, während die dortigen Betrachtungen den gegentheiligen Schluss zu impliciren scheinen. Und, um die Sache gründlich zu erschöpfen, wird noch ein letzter Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes durch Integrale zweiter Gattung mitgetheilt (S. 862). Hierbei gelangt der Herausgeber sogar zu einem bisher völlig unbekannten Satze (S. 865). Jenes Theorem soll auch für nicht adjungirte Curven gelten; mit anderen Worten: die Constantenzahl einer algebraischen Function soll, wenn diese sich auch in den singulären Punkten speciell (z. B. wie eine ganze Function) verhält, doch auch nach der allgemeinen Regel bestimmt werden können! Das Beispiel des Herausgebers (S. 866) passt wohl hierzu; aber hier ein anderes analoges Beispiel. Sei eine Curve C_8 mit sechs Doppelpunkten gegeben, welche auf einem Kegelschnitte liegen; für die Function $\lambda = \frac{a_x}{b_x}$ gilt dann der Satz nicht. In der That verschwindet dann auch die Gleichung 15) nicht identisch, sondern liefert eine Beziehung zwischen den Coefficienten der Function, während 16) nur eine Wiederholung von 13) und 15) ist.

Von dem nun folgenden erweiterten Umkehrproblem, dessen Behandlung, dazu noch für $p=2$ nach Riemann'schen Principien, man kaum in diesem Buche suchen möchte, wird die schon erwähnte Anwendung auf die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkt gemacht. Die drei letzten Capitel des Buches, eine specielle Behandlung der Curven vom Geschlechte 0, 1 und 2, geben dem Herausgeber mannigfache Gelegenheit, die bekannten Darstellungen Clebsch's und Anderer durch anregende Bemerkungen fruchtbar zu machen, von denen ich nur die Anmerkung zu den rationalen Curven vierter Ordnung, S. 900, erwähnen will. Es wird hier so ziemlich Alles, was über die Parameterdarstellung dieser Curven gearbeitet worden ist, mitgetheilt, wobei nur bedauerlich ist, dass bei der Darstellung der hyperelliptischen Curven der Herausgeber wiederum eine viel zu weitgehende Verallgemeinerung vorgenommen hat. Die auf S. 918 versuchte Darstellung durch Functionen vom Grade $\frac{n}{2}$ existirt im Allgemeinen gar nicht; denn in Bezug auf die Verschwindungs- und Unendlichkeitspunkte einer Function sind nicht von beiden Systemen je p durch die übrigen bestimmt, sondern nur von einem System, nachdem zuvor das andere vollständig gegeben ist.

Indem ich die Betrachtung der beiden Abtheilungen 4 und 6 schliesse, bemerke ich noch, dass die übrigen Abtheilungen, also insbesondere 5 und die zum Theil aus dem Nachlasse Clebsch's mitgetheilte Abtheilung 7 über die Connexe, die vieles Neue enthält, sehr viel weniger Anlass zu Anständen zu geben scheinen. Auch die vorstehenden Bemerkungen treffen nicht den Kern der Theorien, der überall richtig erfasst ist; aber sie zeigen, dass an vielen Stellen eine nochmalige kritische Revision und eine tüchtige Anwendung des Rothstiftes dem Buche sehr zu gute gekommen wäre. Die Aufgabe, die die geometrische Wissenschaft bewegenden Gedanken darzustellen, ist mit Geschick gelöst; auf diesen Darstellungen sich weiter entwickelnd, wird die Wissenschaft von selbst über die Mängel derselben in speciellen Gebieten bald hinwegschreiten. Wir wünschen und hoffen von dem Werke, dass die von ihm ausgehende Anregung kräftig genug wirken möge, um es bald selbst überholt erscheinen zu lassen und ihm vielleicht eine neue Auflage, unter Abstreifung der Mängel der jetzigen, zu ermöglichen.

Der Herausgeber hat einen zweiten Band in Aussicht gestellt, der ein noch weiteres Feld, als das der ebenen Geometrie, die Raumgeometrie, behandeln soll. Gerade in der Raumgeometrie liegen die schönsten Arbeiten von Clebsch. Der Herausgeber hat in dem ersten Bande zwei Eigenschaften gezeigt, die ihn auch für diese weitere Aufgabe befähigen: Hingebung an die Sache und die Gabe, ein grosses Material zusammenzufassen. Es ist daher zu hoffen, dass Herr Lindemann auch seinen weiteren Plan, vielleicht unter einigen erleichternden Beschränkungen, ausführe.

Erlangen. M. Noether.

Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren, von Professor K. W. Unverzagt. Wiesbaden, C. W. Kreidel. 1876. 312 S.

Der Verfasser des uns vorliegenden stattlichen Bandes ist uns wie den Lesern unserer Zeitschrift keineswegs unbekannt, und ebenso geht es mit den Grundgedanken des uns vorliegenden Werkes. Im IX. Bande dieser Zeitschrift S. 110 der Literaturzeitung haben wir über ein Programm von 1864: „Ueber eine neue Methode zur Untersuchung räumlicher Gebilde", im XVI. Bande S. 57 der Literaturzeitung über ein Programm von 1871: „Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden" berichtet; zwischen beide Veröffentlichungen fällt ein Programm von 1866: „Ueber einige neue Projectionsmethoden". An die jüngste dieser Abhandlungen schliesst sich die neue Schrift an, welche geradezu als Vervollkommnung und Ausarbeitung des Programms von 1871 bezeichnet werden kann. Dürfen wir doch zugleich die Freude darüber aussprechen, dass einige wenige damals von uns geäusserte Bemerkungen von Herrn Unverzagt aufgegriffen und gleichfalls in seine Ausarbeitung einverleibt worden sind, wo sie freilich unter der Menge des Stoffes verschwinden. Es sei gestattet, in aller Kürze den Grundgedanken auf's Neue auszusprechen, woraus sich zugleich ergeben wird, dass, was Professor Biehringer in seinem in diesem Hefte recensirten Schriftchen „Ueber schiefe trigonometrische Functionen" mitgetheilt hat, keineswegs den Anspruch auf vollständige Neuheit erheben kann, so sehr auch anzunehmen ist, dass Herr Biehringer von den chronologisch weit früheren Untersuchungen unsers Verfassers keine Kenntniss gehabt haben mag.

Denken wir uns zwei einander unter einem beliebigen Winkel λ schneidende Gerade, welche unendlich gedacht die Zeichnungsebene in vier Sectoren zerlegen, die man uneigentlich Quadranten nennen könnte. Irgend eine von dem Durchschnittspunkte der beiden Axen ausgehende dritte Gerade lässt sich nun mit Hilfe einer der einen Axe parallelen Projicirenden auf die andere Axe projiciren und so entstehen drei Strecken: die Projicirte, die Projicirende, die Projection, von welchen je zwei in einen Quotienten vereinigt Functionen des Winkels, den die Projicirte mit der Projectionsaxe bildet, darstellen, sofern man den Coordinatenwinkel λ als constant ansieht. Diese Winkelfunctionen allgemeinerer Natur als die gewöhnlichen goniometrischen Functionen, welche $\lambda = \frac{\pi}{2}$ voraussetzen, bezeichnet Herr Unverzagt durch die jedem Anfänger aus der Trigonometrie bekannten Silben, deren ersten Buchstaben er nur als Majuskel schreibt, also *Sin* gegenüber von *sin*, *Cos* gegenüber von *cos* u. s. w. Soll die Grösse des Coordinatenwinkels angegeben werden, so schreibt Herr Unverzagt z. B. $Sin_\lambda \beta$ oder ${}^\lambda Sin \beta$ u. s. f.

Die erste Aufgabe, welche er sich somit zu stellen hat, geht dahin, Gleichungen zwischen den allgemeinen und den speciellen Winkelfunctionen zu entwickeln, unter welchen

$$Sin\,\beta = \frac{sin\,\beta}{sin\,\lambda},\quad Sin(\alpha+\beta) = Sin\,\alpha\,.\,Cos\,\beta + Cos\,\alpha\,.\,Sin\,\beta + 2\,Sin\,\alpha\,.\,Sin\,\beta\,.\,cos\,\lambda,$$
$$Sin(\alpha-\beta) = Sin\,\alpha\,.\,Cos\,\beta - Cos\,\alpha\,.\,Sin\,\beta,$$

sowie die erweiterten Lexell'schen Gleichungen der Polygonometrie

$$a_1\,Cos\,\alpha_1 + a_2\,.\,Cos(\alpha_1+\alpha_2) + a_3\,.\,Cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \ldots$$
$$+ a_n\,.\,Cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n) = 0$$

und

$$a_1\,.\,Sin\,\alpha_1 + a_2\,.\,Sin(\alpha_1+\alpha_2) + a_3\,.\,Sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \ldots$$
$$+ a_n\,.\,Sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n) = 0$$

als Beispiele hervorgehoben sein mögen.

Ein besonderes Gewicht legt nun Herr Unverzagt auf die Auffindung eines Factors j, der in seiner Anwendung auf die allgemeinen Winkelfunctionen das i des Moivre'schen Theorems ersetze, beziehungsweise als speciellen Fall in sich schliesse. Mit anderen Worten, er untersucht den Werth von j, welcher die Gleichungen

$$(Cos\,\alpha + j\,Sin\,\alpha)(Cos\,\beta + j\,Sin\,\beta) = Cos(\alpha+\beta) + j\,Sin(\alpha+\beta),$$
$$(Cos\,\alpha + j\,Sin\,\alpha)^n = Cos\,n\,\alpha + j\,Sin\,n\,\alpha$$

erfülle und dessen Auffindung nicht leicht war, den Verfasser wenigstens mehrere Jahre beschäftigte, bis ein glücklicher Gedanke ihn

$$j = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}} = cos\,\lambda + i\,.\,sin\,\lambda$$

erkennen liess, eine Gleichung, welche in der That bei $\lambda = \frac{\pi}{2}$ in $j = i$ übergeht.

Die Rechnung mit den durch j verbundenen complexen Zahlen, für welche eine reducirte Form

$$a + jb = \varrho(Cos\,\varphi + j\,.\,Sin\,\varphi),$$

wo

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,.\,cos\,\lambda,\quad Cos\,\varphi = \frac{a}{\varrho},\quad Sin\,\varphi = \frac{b}{\varrho},\quad Tang\,\varphi = \frac{b}{a}$$

erkannt wird, bietet manches Interesse, wenn auch natürlich der Name complexer Zahlen, welcher für diese Verbindungsart gewählt ist, nicht ausschliesst, dass dieselben Zahlen auch als complex im gewöhnlichen Sinne des Wortes behandelt werden könnten:

$$a + jb = a + b\,.\,cos\,\lambda + ib\,.\,sin\,\lambda = \varrho(cos\,\chi + i\,.\,sin\,\chi),$$

wo ϱ denselben Werth besitzt, wie oben, nämlich $\varrho^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,.\,cos\,\lambda$, während $tang\,\chi = \frac{b\,.\,sin\,\lambda}{a + b\,.\,cos\,\lambda}$. Das Theorem von der Unmöglichkeit anderer complexer Zahlen als der gewöhnlich sogenannten erleidet somit keineswegs einen Widerspruch, es ist vielmehr nur ein neuer Algorithmus, welcher aufgestellt wird und welcher zur Entwickelung interessanter Sätze führt, unter denen

$$1 + Cos\,\varphi + Cos\,2\varphi + \ldots + Cos\,n\varphi = \frac{Sin\,\frac{(n+1)\varphi}{2}}{Sin\,\frac{\varphi}{2}} \cdot Cos\,\frac{n\varphi}{2},$$

$$Sin\,\varphi + Sin\,2\varphi + \ldots + Sin\,n\varphi = \frac{Sin\,\frac{(n+1)\varphi}{2}}{Sin\,\frac{\varphi}{2}} \cdot Sin\,\frac{n\varphi}{2}$$

hervorgehoben sein mögen.

Einen besondern Fall der allgemeinen trigonometrischen Functionen erhält man bei $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Es sind dieses, wie schon berührt, die gewöhnlichen goniometrischen Functionen. Ein anderer besonderer Fall entsteht bei $\lambda = \frac{\pi}{3}$. Auch diesem hat der Verfasser einige Berücksichtigung geschenkt. Ganz hervorragende Aufmerksamkeit widmet er aber dem dritten speciellen Falle $\lambda = 0$, bei welchem die longimetrischen Functionen erscheinen, die er schon 1871 einführte. Wir verweisen auf das Buch selbst, um eine genügende Kenntniss von diesen eigenthümlichen analytisch-geometrischen Ausdrücken und ihren Eigenschaften zu erwerben. Nothdürftiges haben wir bereits in unserer oben angeführten Besprechung im XVI. Bande dieser Zeitschrift gegeben. Freilich ist der Verfasser gegenwärtig um soviel über sein Programm von 1871 hinausgegangen, als die neu hinzutretende Kenntniss des Factors j, der im allgemeinen Falle auch durch j_λ, bei longimetrischen Functionen durch j_0 bezeichnet wird, möglich und nothwendig machte.

Die charakteristische Gleichung für j_0 ist

$$j_0^2 = 2j_0 - 1,$$

wie der Verfasser schreibt, um nicht $j_0 = 1$ zu sagen und dadurch einen Sinn hervorzurufen, den er nicht beabsichtigt. Die Vervielfältigung einer eine Strecke bedeutenden Grösse mit j_0 lässt dieselbe nämlich der Quantität wie der Richtung nach unverändert, giebt ihr aber einen andern Anfangspunkt, und damit rechtfertigt sich der Name des Verschiebungsfactors, welchen Herr Unverzagt für j_0 einführt. Man sieht sofort, dass wir uns hier auf jenem Gebiete befinden, welchem Herr Grassmann seit 1844 den Namen der „Ausdehnungslehre" beigelegt hat, nachdem schon Möbius seit 1827 durch seinen „barycentrischen Calcul" den Weg dazu eröffnet hatte. Freilich sind es nur die allgemeinsten Begriffe geometrischen Rechnens, in denen Herr Unverzagt wenigstens in der ersten Hälfte seines Buches sich von seinen Vorgängern abhängig erweist. Die longimetrischen Functionen selbst, sowie diejenigen Quotienten, welche er im weitern Verlaufe als planimetrische und stereometrische Functionen benennt, sind, soweit wir wissen, sein unbestreitbares Eigenthum.

In der zweiten Abtheilung schliesst sich der Verfasser etwas mehr an Möbius, aber auch an Hamilton an, dessen Quaternionen ihn begreiflicherweise mehr anmutheten, als es wohl für die Mehrzahl deutscher Mathematiker der Fall ist. Ist doch überhaupt erst der Anfang gemacht, jenes ganze oben bezeichnete Gebiet für Deutsche zugänglicher zu machen, nachdem es der Hauptsache nach Deutsche waren, die es entdeckten.

Zu einer Popularisirung des Gegenstandes scheint uns aber das vorliegende Werk neben seinem Gehalte an eigenen Untersuchungen vorzugsweise geeignet, da Herr Unverzagt eine besonders klare Darstellungsweise besitzt, vielleicht in dem Streben nach Klarheit mitunter etwas in die Breite geräth.

CANTOR.

Ueber schiefe trigonometrische Functionen und ihre Anwendung. Von Dr. BIEHRINGER, Professor an der königl. Industrieschule in Nürnberg. Nördlingen, Druck und Verlag der C. H. Beck'schen Buchhandlung. 1877. II, 54 S. 1 Figurentafel.

Die Idee, den Begriff der goniometrischen Functionen dadurch zu erweitern, dass man an Stelle des Projectionswinkels von 90° einen willkürlichen andern treten lässt, ist an und für sich eben keine fernliegende. Dahin zielende Gedanken finden sich bereits in einer dem 31. Bande des Grunert'schen Archivs einverleibten Abhandlung von Beysell; in späterer Zeit hat Unverzagt in einem Wiesbadener Schulprogramm die Sache von Neuem angeregt (vergl. die Recension von Cantor im 10. Bd. dieser Zeitschrift). Der genannte Mathematiker beschränkte sich jedoch auf den speciellen Fall eines Neigungswinkels von 180°, wo dann der gewöhnlichen Fundamentalgleichung $sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$ das „longimetrische" Analogon

$$sin\, long\, \alpha + cos\, long\, \alpha = 1$$

gegenübersteht. Den ganz allgemeinen Gesichtspunkt dagegen finden wir erstmalig in der vorliegenden Monographie Biehringer's consequent durchgeführt. Auch betrachtet der Verfasser seine Neuerung nicht blos als einen gelegentlichen *lusus ingenii*, sondern erörtert in seiner Einleitung treffend die Eigenschaften, welche in die Mathematik einzuführende Begriffe besitzen müssen, wenn sie wirklich Nutzen stiften sollen. Derartige Eigenschaften glaubt er in seinen „schiefen" Functionen zu finden, welche sich also zu den rechtwinkligen ganz ähnlich verhalten wie die Logarithmen eines willkürlichen Systems zu den Briggs'schen, und wir persönlich stimmen ihm darin vollständig bei.

Sind AC und BA zwei begrenzte, vom Punkte A unter dem Winkel α ausgehende Strecken, und wird $\angle CBA = \pi - \varphi$ gesetzt, so hat man nachstehende sechs wohl unmittelbar verständliche Fundamentalrelationen:

$$\overset{\varphi}{\sin}\alpha = \frac{CB}{AC}, \quad \overset{\varphi}{\cos}\alpha = \frac{BA}{AC}, \quad \overset{\varphi}{tg}\,\alpha = \frac{CB}{BA}, \quad \overset{\varphi}{cot}\,\alpha = \frac{BA}{CB},$$

$$\overset{\varphi}{sec}\,\alpha = \frac{AC}{BA}, \quad \overset{\varphi}{cosec}\,\alpha = \frac{AC}{CB}.$$

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so haben wir die alten Ausdrücke. Unter sich hängen die neuen Verhältnisse in ganz ähnlicher Weise zusammen wie jene; so ist für $\alpha + \beta = \varphi$ die Function von α gleich der *Co*-Function von β etc. Eine neue Reihe von Formeln erhält man, wenn man für das Dreieck ABC den allgemeinen pythagoräischen Lehrsatz anschreibt und bezüglich durch $\overline{AC}^2$, $\overline{CB}^2$ oder $\overline{BA}^2$ die ganze Gleichung dividirt; den nachtheiligen Umstand, dass in der resultirenden Beziehung noch $\overset{\frac{\pi}{2}}{\cos}\varphi = \cos\varphi$ übrig bleibt, weiss der Verfasser durch eine einfache geometrische Betrachtung zu paralysiren, und es gelingt ihm so, Bestimmungsgleichungen herzustellen, in welchen kein anderer Projectionswinkel als eben φ selbst vorkommt. Als Probe mag folgende dienen:

$$1 = \left(\overset{\varphi}{\sin}\alpha\right)^2 + \left(\overset{\varphi}{\cos}\alpha\right)^2 - \overset{\varphi}{\sin}\alpha\,\overset{\varphi}{\cos}\alpha\,\overset{\varphi}{\cos}(\pi - \varphi).$$

In §§ 5—8 wird das Verhalten der schiefen Functionen studirt, wenn sie aus dem durch die Anfangslage des Winkels φ charakterisirten ersten Quadranten heraustreten; dasselbe ist mit Ausnahme einer bemerkenswerthen Thatsache demjenigen für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ziemlich analog. Die Maximalwerthe für Sinus und Cosinus fallen nämlich nicht auf den Werth φ des Arguments α etc. Die nächsten Paragraphen enthalten Untersuchungen über Identitäten, welche man für die Zerlegung eines Winkels in Summanden enthält. Ist z. B. $\alpha = \beta + \gamma + \delta$, so bestehen die Gleichungen

$$\overset{\varphi}{\sin}\alpha = \overset{\varphi}{\sin}\beta \,.\, \overset{\beta}{\sin}\gamma \,.\, \overset{\gamma}{\sin}\delta \,.\, \overset{\delta}{\sin}\alpha, \quad \overset{\varphi}{tg}\,\alpha = \overset{\varphi-\alpha+\beta}{tg}\,\beta \,.\, \overset{\beta+\gamma}{tg}\,\gamma \,.\, \overset{\gamma+\delta}{tg}\,\delta \,.\, \overset{\delta+\alpha}{tg}\,\alpha.$$

Als eine Consequenz ergeben sich weiterhin in § 13 die Zerlegungsformeln für Sinus und Cosinus einer algebraischen Winkelsumme in sehr eleganter Gestalt; es ist nämlich abgekürzt

$$\left.\begin{matrix}\overset{\varphi}{\sin}\\ \cos\end{matrix}\right\}\alpha \pm \beta = \left.\begin{matrix}\overset{\varphi}{\sin}\\ \cos\end{matrix}\right\}\alpha\,\left.\begin{matrix}\overset{\varphi}{\cos}\\ \cos\end{matrix}\right\}\mp\beta \pm \left.\begin{matrix}\overset{\varphi}{\cos}\\ \sin\end{matrix}\right\}\alpha\,\left.\begin{matrix}\overset{\varphi}{\sin}\\ \sin\end{matrix}\right\}\beta.$$

Nachdem dann in § 17 allgemeine Bemerkungen über Differentiation und Reihenentwickelung der neuen Functionen eingeschaltet sind, beginnen geometrische Anwendungen, welche sich bis § 28 erstrecken. Da ist besonders die Form hervorzuheben, welche man einer bekannten Fundamentalgleichung der Polygonometrie ertheilen kann: Sind nämlich $a_1 \ldots a_n$ die Seiten eines n-Ecks und schneiden dieselben die positive X-Axe eines schiefwinkligen Systems vom Coordinatenwinkel φ resp. unter den Winkeln $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, so ist immer

$$a_n \overset{\varphi}{sin}\, \alpha_n = \overset{m=n-1}{\underset{m=1}{S}} a_m \overset{\varphi}{sin}\, \alpha_m .$$

Indem sich dann die Darstellung zu drei Dimensionen erhebt, werden einige Formeln über das Wechselverhältniss zwischen einer ebenen Figur und deren Projection mitgetheilt, von denen wir besonders eine ihres schön abgerundeten Charakters halber hier reproduciren wollen. Ein Polygon F erzeuge durch ein Parallelstrahlenbündel, welches die Projectionsebene unter dem Winkel φ trifft, auf letzterer ein zweites Vieleck vom Inhalt P. Eine beliebige dritte Ebene bilde mit den Ebenen von F und P die Schnittlinien m und n, während die Kante jener ersten beiden Ebenen durch r bezeichnet werden möge. Dann ist, wenn wir die leichter verständlichen Bezeichnungen der analytischen Geometrie einführen,

$$P = F \overset{\varphi}{cos}(m, n) \overset{(r,m)}{sin}(n, r).$$

Bei seinen Anwendungen auf höhere Geometrie gelangt Herr Biehringer dadurch zu interessanten Ergebnissen, dass er principiell den beliebigen Projectionswinkel mit demjenigen von 90^0 verbindet oder, wie man auch sagen könnte, recht- und schiefwinklige Coordinaten zugleich anwendet, denn es resultirt dadurch eine Symmetrie, welche bei ausschliesslicher Verwendung des nämlichen Axenwinkels sich nicht erreichen lässt. Sucht man z. B. für zwei Punkte, deren schief- und rechtwinklige Coordinaten resp. $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ und $x'_1, y'_1, z'_1; x'_2, y'_2, z'_2$ sein mögen, den durch die Fahrstrahlen r_1 und r_2 eingeschlossenen Winkel, so findet sich

$$2 r_1 r_2 \cos(r_1, r_2) = x_1 x'_2 + x_2 x'_1 + y_1 y'_2 + y_2 y'_1 + z_1 z'_2 + z_2 z'_1 .$$

Lässt man gleicherweise in den betreffenden Formeln zu gleichen Theilen rechtwinklige und schiefe Richtungscosinus zu, so ergeben sich übersichtliche Transformationsausdrücke zum Uebergang von einem schiefwinkligen Axensystem auf ein beliebiges anderes. — Zum Schluss bietet § 34 einen Excurs auf die Verwendung der bereits skizzirten Doppelzerlegung auf statische Probleme, und dabei gelangt der Verfasser zu einem bei gewissen Untersuchungen im Gebiete der Mechanik vermuthlich wohl zu beachtenden Corollar. Geht vom Angriffspunkte einer Kraft r ein Strahl unter willkürlichem Winkel aus, tragen wir darauf eine den virtuellen Weg von r repräsentirende Strecke r_1 auf und nehmen deren senkrechte Projectionen auf die Axen als virtuelle Wege der nach jenen Axen genommenen Componenten von r, so gilt, wenn das Axenkreuz ein rechtwinkliges ist, das Theorem, dass das virtuelle Moment der Resultante gleich der Momentensumme der drei Seitenkräfte ist. Bei beliebigen Coordinatenwinkeln verhält sich dies hingegen anders, hier muss r_1 mit r zusammenfallen, wenn dem Satze seine Giltigkeit verbleiben soll, mit anderen Worten, es muss, wenn δ jenen Winkel bedeutet, $r \cos \delta$ senkrecht auf die Axen projicirt werden.

Wir glauben, dass der Versuch des Verfassers allgemein als ein gelungener anerkannt werden wird.* Die goniometrischen Functionen lassen in zweifacher Hinsicht eine Erweiterung zu, einmal indem man den Kreis durch eine andere Curve ersetzt, dann, indem man den Neigungswinkel des Projectionsstrahles abändert. Nachdem seit Lambert's Zeit die hyperbolische Trigonometrie zu so hohen Ehren gelangt ist, war es wohl auch einmal angezeigt, nach der andern Richtung hin zu arbeiten, und Herrn Biehringer's Schrift lässt erkennen, dass dort noch gar Mancherlei zu holen ist. Axonometrie, Krystallographie und vor Allem gewisse Aufgaben der Lehre vom Potential dürften durch eine in diesem Sinne gehaltene Behandlung wesentlich gewinnen; der Verfasser hat auch eine Fortführung seiner Untersuchungen in Aussicht gestellt, und da ihm seine Stellung als Lehrer der Geometrie an der ersten technischen Mittelschule Bayerns gewiss viel bezüglichen Stoff zuführt, so dürfen wir einer weiteren Lieferung wohl in nicht zu ferner Zeit entgegensehen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Die Nivellirinstrumente und deren Anwendung, von Dr. M. Doll. Mit 5 Tafeln, 30 S. 8°. Stuttgart, Ad. Bonz & Comp., 1876.

Der Inhalt der kleinen Schrift entspricht nicht ganz den Verheissungen des Titels, da nur die fünf für das badische Präcisionsnivellement und dessen Vorarbeiten verwendeten Instrumente ganz kurz beschrieben und abgebildet werden. Sie sind zwar alle Libellenfernröhre, stammen aber aus verschiedenen Werkstätten und weichen in den Einzelheiten der Einrichtung vielfach von einander ab. Die Vergleichung und Beurtheilung dieser Unterschiede lag nicht in des Verfassers Absicht, doch wird die Prüfung jedes der fünf individuellen Instrumente, die Empfindlichkeit ihrer Libelle, Vergrösserung ihres Fernrohres u. s. w. zahlenmässig angegeben. Eine Nivellirlatte wird beschrieben und über ihre wiederholte Vergleichung mit Normalmaassen berichtet. Werthvoll ist die Mittheilung einzelner Erfahrungen der badischen Ingenieure über verschiedene, die Genauigkeit der Messung beeinflussende Umstände, die daraus hervorgegangenen Arbeitsregeln, die Strecken, welche täglich mit

* Druck und Figuren des Schriftchens verdienen gleiche Anerkennung. Der einzige etwa störende Druckfehler dürfte die öfters vorkommende Vertauschung von a und α sein.

den einzelnen Instrumenten und verschiedenen Zielweiten nivellirt werden konnten, und Aehnliches mehr. Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung für jedes der fünf Instrumente wird aufgesucht und eine etwas allgemeiner gehaltene Betrachtung über den Einfluss der Zielweite auf den wahrscheinlichen Schlussfehler eines Nivellements angestellt. Zum Schluss ist die Fehlerausgleichung nach dem Verfahren der kleinsten Quadratensumme an einem Beispiele ausgeführt. Als vorzüglich sind die auf den fünf Tafeln gegebenen Abbildungen zu rühmen. Sie stellen die fünf Instrumente in verschiedenen Ansichten mit Einzelheiten dar, dann die Nivellirlatte mit einem Aufstellungsstativ und Dosenlibelle, sowie die Fussplatte, auf welcher sie stehen kann.

C. Bohn.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. März 1877.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 12. Bd., 3. Abth. München, Franz. 10 Mk. 50 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 74. Bd., 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. à 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 7. Bd. (1875). 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 60 Pf.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. von Grunert, fortges. von R. Hoppe. 60. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von L. Königsberger und G. Zeuner. 1. Bd., 4. Heft. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld und A. Winnecke. 11. Jahrg., 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Astronomisches Jahrbuch für 1870, mit Ephemeriden der Planeten 1 bis 204 für 1877. Redigirt von W. Förster und F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Nautisches Jahrbuch, vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1879, herausgegeben von C. BREMIKER. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge, 25. Bd. (1875). Wien, Wallishauser. 11 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von J. C. POGGENDORFF. 110.—112. Bd. (Jahrg. 1877), 1. Stück. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

Dasselbe. Ergänzung, 8. Bd., 2. Stück. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie von POGGENDORFF. 1. Bd. (12 Hefte). Leipzig, Barth. pro compl. 12 Mk.

Annalen der Hydrologie und maritimen Meteorologie. 5. Jahrg. (1877), 1. Heft. Berlin, Mittler. 1 Mk. 50 Pf.

Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen, angestellt an den königl. sächsischen Stationen in den Jahren 1872 und 1873. Herausgegeben von C. BRUHNS. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, herausgeg. von J. HANN. 12. Bd. (1877), Nr 1. Wien, Braumüller. pro compl. 10 Mk.

Reine Mathematik.

SALMON, G., Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen; deutsch von W. FIEDLER. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

IGEL, B., Ueber die Discriminante der Jacobi'schen Covariante dreier ternären quadratischen Formen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

SONNENBURG, F., Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. Berlin, Springer. 80 Pf.

BECKER, J. K., Die Elemente der Geometrie, auf neuer Grundlage streng deductiv dargestellt. 1. Thl. Berlin, Weidmann. 7 Mk.

Angewandte Mathematik.

KAUTZNER, A., Ueber die Geschichte und Bedeutung alter und neuer Masssysteme und Gradmessungen. Graz, Leuschner & Lubensky. 1 Mk.

PESCHKA, V., Kotirte Ebenen und deren Anwendung. Brünn, Buschak & Irrgang. 9 Mk. 60 Pf.

RÜDIGER, W. v., Die Methode der kleinsten Quadrate und ihre Anwendung. Berlin, Kühn. 1 Mk. 50 Pf.

NYRÉN, M., Das Aequinoctium für 1865, abgeleitet aus den von 1861 bis 1870 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. Leipzig, Voss. 1 Mk.

Mittlere und scheinbare Oerter für das Jahr 1877 von 539 Sternen u. s. w. (Akad.) Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Preuss, W. H., Sammlung von Formeln und Aufgaben aus der rechnenden Nautik. 1. Thl. Oldenburg, Schulze. 2 Mk.

Kummer, E., Neue Versuche zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultante des Luftwiderstandes gegen rechteckige schiefe Ebenen. (Akad.) Berlin, Dümmler. 60 Pf.

Kirchhoff, G., Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 13 Mk.

Physik und Meteorologie.

Lederer, A., Centrische und excentrische Dynamiden. Beiträge zu einer Atomenlehre. Wien, Hölder. 2 Mk. 40 Pf.

Himly, Neue Methode zur genauen Bestimmung der Schmelzpunkte der Metalle etc. Kiel, Maack. 60 Pf.

Knoblauch, Untersuchung der Reflexion der Wärmestrahlen von Metallplatten. Halle, Schmidt. 80 Pf.

Riecke, E., Ueber die Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern, insbesondere über die elektrischen Schwingungen in einer leitenden Kugel. Göttingen, Dieterich. 3 Mk.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8. Aufl., bearb. von L. Pfaundler. 1. Bd., 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 60 Pf.

Jarz, K., Die Strömungen im nordatlantischen Ocean, mit bes. Rücksicht des Golfstroms. Wien, Hölzl. 1 Mk. 60 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber Arwed Walter's Untersuchungen über Molecularmechanik.

Von

D. J. KORTEWEG,

Lehrer an der höheren Bürgerschule in Breda, Holland.

Unter dem Titel „Untersuchungen über Molecularmechanik nach analytisch-geometrischer Methode als mathematische Grundlage der chemischen Statik" erschien 1873 eine Arbeit von sehr mathematischem Aussehen, die Professor Lothar Meier gewidmet war. Sie führte sich ein als ein erster Versuch, um auch in der Chemie den Weg der mathematischen Deduction zu betreten, und kündigte als hauptsächliches Ergebniss an, dass die Moleküle sehr abgeplattete rotirende Scheiben wären, die zusammengesetzt seien aus um- und durcheinander schwingenden Atomen. Da dieses Resultat wohl geeignet war, Interesse zu erwecken, arbeitete ich mich durch die ersten achtzig Seiten durch, die nur die Einleitung bildeten und worin mit vieler Virtuosität im Gebrauch der Analyse die mathematische Grundlage für die folgenden Betrachtungen gelegt wird, fand aber dann, dass Hypothesen eingeführt werden, die allein darauf beruhen, dass mit ihrer Hilfe die Integrirung einiger Differentialgleichungen möglich wird. Ich fuhr fort und im weiteren Verlauf der Arbeit fand ich meine Vermuthung, dass in der genannten Abhandlung die durch cursive römische Ziffern angedeuteten Resultate meistens kurz zuvor mehr oder weniger versteckt als Hypothesen eingeführt waren, vollkommen bestätigt. Ausserdem gewann ich die Ueberzeugung, dass das Nichtglücken von Walter's Versuch nicht so sehr der Schwäche seiner Kräfte, als der befolgten Methode zu verdanken war. Von diesem Gesichtspunkte aus kann es von Interesse sein, die Ungeschicktheit der Methode und die Unrichtigkeit der Resultate nachzuweisen.

I.

Die ursprüngliche Idee Walter's war wohl, über die Zusammensetzung der Moleküle und der innerhalb ihrer Grenzen wirkenden Kräfte ganz allgemeine Annahmen zu machen und zu untersuchen, was aus diesen allein schon abzuleiten wäre. Specielle Hypothesen können doch immer noch später eingeführt werden.

Walter geht nun in der Ausführung dieser Idee sehr weit. Bis auf die schon genannte Seite 82 macht er keine anderen als die folgenden, ziemlich allgemein anerkannten Annahmen.

1. Die Materie löst sich schliesslich auf in Monaden, das sind unter einander vollkommen gleiche Theilchen, die physikalisch nicht mehr getheilt werden können und die mathematisch nicht mehr getheilt zu werden brauchen. Sie sind so klein, dass die lebendige Kraft ihrer rotirenden Bewegung um irgend eine Axe, die durch ihren Schwerpunkt geht, vernachlässigt werden mag, so dass sie als materielle Punkte betrachtet werden können.

2. Atome bestehen aus Massen von fest mit einander verbundenen Monaden.

3. Moleküle sind Aggregate von Atomen, die umeinander schwingen und dabei gewisse Grenzen nicht überschreiten, so dass sie alle zusammen innerhalb eines gewissen stillstehenden oder sich fortbewegenden Raumes vereinigt bleiben.

4. Monaden ziehen einander an oder stossen einander ab infolge von Kräften, deren Richtung mit der ihrer Verbindungslinie zusammenfällt.

5. Die Kräfte, die zwei Monaden auf einander ausüben, sind gleich und entgegengesetzt.

6. Diese Kräfte sind ausschliesslich Functionen des Abstandes beider Monaden, also unabhängig von der Richtung der Verbindungslinie und von dem Bewegungszustande der Monaden.

Bedenkt man nun, dass die philosophische Annahme der absoluten Gleichheit der Monaden eigentlich überflüssig ist und diese Monaden ebenso gut betrachtet werden können als Differentialen der Atome, und dass ferner diese Atome nicht mit den chemischen Atomen identisch, sondern auch nur Bestandtheile dieser zu sein brauchen, dann wird zugegeben werden müssen, dass die Eigenschaften, die aus diesen Annahmen abgeleitet worden sind, höchst wahrscheinlich mit den Eigenschaften chemischer Moleküle übereinstimmen werden.

II.

Gehen wir nun dazu über, um zu sehen, was Walter mit diesen Annahmen anzufangen weiss. Er behandelt zunächst die Bahn einer einzigen Monade, die der Wirkung gegebener Kräfte unterworfen ist.

Er bespricht zu dem Zwecke unter anderen die beiden Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds},$$

$$m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=X\varrho\frac{d^2x}{ds^2}+Y\varrho\frac{d^2y}{ds^2}+Z\varrho\frac{d^2z}{ds^2},$$

wovon die erste sich bezieht auf die Projectionen der Kräfte auf die Tangente, die zweite auf die Normale.

Die „Anhäufung" der Kraftwirkung in der Richtung der Tangente ist nun nach Walter die eigentliche Ursache der lebendigen Kraft, die sich in der Monade während der Bewegung ansammelt. Die Möglichkeit solch einer Anhäufung gründet sich auf das Princip, dass die Wirkung einer Kraft auf ihren Angriffspunkt so lange bestehen bleibt, bis eine entgegengesetzte Kraft sie aufhebt, daher dann die Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit.

Der Zweck dieser etwas unbestimmten Betrachtungsweise des Verfassers ist, dem Leser eine dunkle Ahnung aufkommen zu lassen, dass die Anhäufung der Kraftwirkungen in der Richtung der Normale ebenfalls ein Resultat haben muss, das sich mit der lebendigen Kraft vergleichen lässt. Um nun dieser neuen Function auf die Spur zu kommen, behandelt Walter die zweite Gleichung ganz in derselben Weise wie die erste, wenn man daraus die Beziehung zwischen lebendiger Kraft und Arbeit ableiten will. Er multiplicirt nämlich mit ds und integrirt dann.

Dass diese Methode bei der ersten Gleichung solch ein wichtiges Resultat giebt, liegt an der Integrirbarkeit der beiden Seiten der Gleichung, nämlich

$$m\frac{d^2s}{dt^2}ds \quad \text{und} \quad X\,dx+Y\,dy+Z\,dz.$$

Die eine Seite ist nämlich das Differential der halben lebendigen Kraft und die andere Seite ist, wenn für die Kräfte die Beziehungen gelten, die wir früher genannt haben, stets das totale Differential einer Function Ω von x, y und z.

Bei der zweiten Gleichung ist sie dahingegen durchaus nicht anzuwenden, da von der Gleichung

$$m\frac{1}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2ds=\left(X\varrho\frac{d^2x}{ds^2}+Y\varrho\frac{d^2y}{ds^2}+Z\varrho\frac{d^2z}{ds^2}\right)ds$$

weder die eine, noch die andere Seite integrirbar ist.

Abgesehen davon, dass es keine Bedeutung hat, um auch die Kräfte senkrecht auf die Bahn sich „anhäufen" zu lassen, durch Multiplicirung mit einem Elemente der Bahn und Summirung dieser Producte, welche Anhäufung dann bei Walter den Namen „Spannkraft" oder „centrifugale Energie" erhält, führt die Methode zu keinem Resultat, weil das Integriren unmöglich ist.

Das sieht auch Walter ein und versucht darum sein Glück mit den Projectionen der Bahn, und führt so statt einer einzigen Spannkraft drei Spannkräfte ein für die drei Projectionsebenen. Auch jetzt wird der Zweck nicht erreicht. Nach dem Einführen neuer Coordinaten stösst Walter jedoch auf eine Differentialgleichung, deren eine Seite viele partielle Differentialquotienten der Function

$$g = m r r' v'$$

enthält, worin m die Masse, r den Radius vector, v' die Winkelgeschwindigkeit, $r' = \frac{dr}{dt}$; Alles bezogen auf einen willkürlichen Pol.

Diese Function erklärt er in Ermangelung einer bessern, wenigstens für die Ebene, für die wesentliche und wahre Spannkraft, und betrachtet sie als der lebendigen Kraft zur Seite stehend. Diese Function nun hat wirklich eine einfache Bedeutung, die Walter entgeht, aber die viel von dem Geheimnissvollen, das ihr sonst anklebt, verschwinden lässt. Man kann sie nämlich, wenn v den Polwinkel vorstellt, auch so schreiben:

$$g = m \frac{r\,dr\,dv}{dt^2}.$$

Der Zähler des Bruches ist dann der Inhalt der kleinen Fläche, die zwischen den beiden Radii vectores der Endpunkte eines kleinen Bogens der Bahn und den beiden Kreisen, die mit jedem der Radii vectores als Radius um den Pol als Mittelpunkt beschrieben sind, gelegen ist. Dieser Inhalt, multiplicirt mit der Masse und getheilt durch das Quadrat der Zeit, stellt also diese Spannkraft vor, die ganz abhängt von der Wahl des Pols und darum nichts Wesentliches bedeuten kann, das mit der lebendigen Kraft verglichen werden könnte.

Um nun zum Raume zurückzukehren, gebraucht Walter ein sehr einfaches Mittel. Er nimmt nämlich den Pol ausserhalb der oscillirenden Ebene der Bahn an, behält aber dieselbe Formel bei.

Hiermit schliesst er das erste Capitel, das nach unserer Meinung Nichts enthält, als einen Bericht über misslungene Versuche, um für die Centrifugalkräfte Etwas zu finden, äquivalent der lebendigen Kraft für die Tangentialkräfte.

III.

Im zweiten Capitel versucht Walter zu zeigen, dass die Eigenschaften der Atome ausschliesslich abhängen müssen von ihrer Masse und von der Grösse der drei Hauptträgheitsmomente; darauf giebt er eine gut gelungene Vorstellung der Bewegungen, die in einem Atomensystem, wie Walter es sich denkt, statthaben müssen.

Die Bewegung einer Monade kennt man ganz aus der Bahn, die sie beschreibt, und der Geschwindigkeit, die sie in jedem Punkte besitzt.

Bei der Bewegung eines Atoms kommt die Bahn in Betracht, die durch seinen Schwerpunkt beschrieben wird; ausserdem aber noch die drehende Bewegung des Atoms um diesen Schwerpunkt. In jedem Atom lassen sich drei Hauptträgheitsaxen angeben, die also bei der Bewegung im Allgemeinen drei geradlinige Oberflächen beschreiben werden. In jedem kurzen Augenblicke lässt sich die Rotation um den Schwerpunkt vorstellen als eine Rotation um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht. (Augenblickliche Rotationsaxe.) Aber der Stand dieser Axe ist sowohl im Atom veränderlich in Bezug auf die Hauptaxen, als auch im Raume in Bezug auf die festen willkürlichen Coordinatenaxen. Durch die Rotationsgeschwindigkeiten, die das Atom um jede der Hauptaxen besitzt, ist die Lage dieser augenblicklichen Rotationsaxen, sowie die Rotationsgeschwindigkeit um dieselbe vollkommen gegeben, und umgekehrt. Noch allgemeiner kann man sagen, dass zwei aufeinanderfolgende Lagen der Hauptaxen die Rotationsaxe und die zugehörige Rotation ganz bestimmen.

Beim Molekül oder Atomsystem kann man sowohl den Begriff der Hauptträgheitsaxen, als auch den des Schwerpunktes festhalten, wenn man darunter nur den augenblicklichen Schwerpunkt und die augenblickliche Hauptträgheitsaxe versteht, die dem für einen Moment unveränderlich gedachten System zukommen würde. Die beiden aufeinanderfolgenden Lagen dieser Axen bestimmen dann wieder eine augenblickliche Rotationsaxe und eine Rotationsgeschwindigkeit um diese Axe, die dem ganzen unveränderlich gedachten System zukommen würden. Während aber die Bewegung eines Atoms vollständig gegeben ist durch die seiner Hauptaxen, weil die einzelnen Monaden ihre Stellung in Bezug auf diese nicht verändern, muss man, um die Bewegung eines Atomsystems zu kennen, auch noch die Bewegungen der einzelnen Atommittelpunkte und Hauptaxen in Betracht ziehen. Die Winkelgeschwindigkeit nun, die solch ein einzelnes Atom bei dieser Bewegung in Bezug auf eine der Hauptaxen besitzt und womit es also der Rotation des ganzen Systems um diese Axe vorausstrebt oder dahinter zurückbleibt, erhält den sehr bezeichnenden Namen von Torsion.

Walter begnügt sich nicht mit diesen allgemeinen Betrachtungen. Er wünscht mittelst mathematischer Analyse für die relative Bewegung der Atome eines Atomsystems in Beziehung auf die Hauptaxen dieses Systems Formeln abzuleiten. Er hat dabei das allgemeinste Problem aufzulösen, das bei der relativen Bewegung vorkommen kann, nämlich um bei einer gegebenen Bewegung in Beziehung auf ein X, Y, Z-System die relative Bewegung in Bezug auf ein neues U, V, W-System abzuleiten, dessen Bewegung bestimmt wird durch die Veränderung der Coordinaten des neuen Axenmittelpunktes und die Veränderung der Winkel, die die neuen Axen mit den alten machen.

Dazu müssen nun zuerst die Beziehungen gefunden werden, die zwischen diesen Axenwinkeln, den neuen und alten Coordinaten und ihren Differentialquotienten bestehen. Mit dieser Arbeit wird das Capitel beschlossen.

IV.

Im folgenden Abschnitt leitet Walter aus der allgemeinen Variationsgleichung für die Bewegung hinsichtlich des X, Y, Z-Systems

$$\Sigma \int \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right) dm = \Sigma \int (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)$$

(dm = Masse einer Monade) die ebenso allgemeine Variationsgleichung ab für die relative Bewegung in Bezug auf die U, V, W-Axen, die er gleich auffasst als die Hauptaxen des Moleküls. Bei dieser Ableitung gebraucht er deshalb, wo es geeignet ist, die Beziehungen

$$\Sigma \int uv\, dm = 0, \quad \Sigma \int uw\, dm = 0, \quad \Sigma \int vw\, dm = 0.$$

Man kann nun einsehen, dass man durch das Substituiren bestimmter Werthe für die neuen Variationen, insoweit sie unabhängig von einander geblieben sind, verschiedene allgemeine Formeln erhalten wird. Vorläufig beschränkt sich Walter auf die Gleichstellung der Coefficienten gleichnamiger Variationen in beiden Seiten der Gleichung.*

---

* Hierdurch erhält er sechs Bedingungsgleichungen (Walter S. 32 obenan). Hiervon sind die ersten drei falsch, sie werden aber erst viel später (nämlich S. 65) wieder für die Rechnung verwendet. Um den Fehler näher anzuzeigen, gebe ich Walter's Bezeichnungsweise unverändert zurück, obschon diese im Text zur Vermeidung von Weitläufigkeit ein wenig verändert ist.

Die Variation δX wird durch Walter zergliedert in die Summe der Variationen δA, δx und $\delta \xi$. Nun beachte man wohl, dass Walter, um die Formel, die dadurch aus der allgemeinen Variationsgleichung entsteht, einfacher zu machen, die Beziehung $\Sigma m\,\delta x = 0$ gebraucht.

Daraus folgt, dass er unter δA die Variation des Schwerpunktes des Moleküls versteht, welche Variation ganz bestimmt wird durch die Variationen der Atommittelpunkte des Systems, und zwar so, dass δA gleich $\Sigma m\,\delta X$; daraus folgt dann wieder, dass die Variationen δx nicht ganz unabhängig von einander sind, sondern unterworfen sind der Gleichung

$$\Sigma m\,\delta x = 0.$$

Es wäre deshalb nicht erlaubt, aus der Bedingungsgleichung

$$\Sigma \mathrm{X}\,\delta x = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}\delta x \text{ (s. über die Bedeutung von X S. 30 bei Walter)}$$

zu schliessen, dass

$$\mathrm{X} = m\frac{d^2 x}{dt^2},$$

was auch augenscheinlich falsch sein würde; ist doch $\Sigma \mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ (s. die Definition S. 30) und $\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$.

Das thut nun Walter nicht, sondern vergisst, dass die neuen Variationen δu, da

Hätte er einen festen Monadencomplex zum Gegenstand seiner Untersuchung gemacht, dann würden sich auf diese Weise die bekannten Formeln

$$A\frac{dh}{dt}+kl(C-B)=L,$$

$$B\frac{dk}{dt}+lh(A-C)=M,$$

$$C\frac{dl}{dt}+hk(B-A)=N$$

ergeben haben, worin A, B, C die Trägheitsmomente, h, k, l die Rotationsgeschwindigkeiten in Bezug auf die Hauptaxen, L, M, N Kräftepaare vorstellen, welche Formeln bekanntlich genügen, um die Bewegung eines solchen Systems ganz zu bestimmen.

Von einem veränderlichen System ausgehend, findet Walter jetzt die allgemeineren Formeln

$$\frac{dA}{dh}h+A\frac{dh}{dt}+\frac{dU'}{dt}+kl(C-B)+kW'-lV'=L,$$

$$\frac{dB}{dk}k+B\frac{dk}{dt}+\frac{dV'}{dt}+lh(A-C)+lU'-hW'=M,$$

$$\frac{dC}{dl}l+C\frac{dl}{dt}+\frac{dW'}{dt}+hk(B-A)+hV'-kU'=N,$$

worin U', V', W' abhängig sind von der Torsion, so dass zum Beispiel $U'=\Sigma m\varrho^2_u\frac{dw_u}{dt}$ $\left(\varrho_u\right.$ Abstand von der U-Axe, $\frac{\partial w_u}{dt}$ Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf diese $\left.\text{Axe}\right)$. Diese neuen Grössen werden Torsionsgrössen und, in Uebereinstimmung damit, Ah, Bk und Cl Rotationsgrössen genannt.

Bei einem System, das sich selbst überlassen ist, werden L, M und N gleich Null und es wird Walter leicht, zu beweisen, dass für solch ein System

---

$$\delta u=\alpha\,\Sigma m\,\delta x+\alpha'\,\Sigma m\,\delta y+\alpha''\,\Sigma m\,\delta z=0$$

ebenfalls gebunden sind durch die Beziehungsgleichung

$$\Sigma m\,\delta u=\alpha\,\Sigma m\,\delta x+\alpha'\Sigma m\,\delta y+\alpha''\,\Sigma m\,\delta z=0$$

und dass er also mit Unrecht S. 32 zur Formel gelangt

$$mu''=\Xi.$$

Dass diese Formel falsch ist, kann leicht gezeigt werden, da

$$\Sigma mu''=0 \text{ (wie leicht hervorgeht aus dem Werthe von } u'')$$

und

$$\Sigma\Xi=\Xi_0=X_0\alpha+Y_0\alpha'+Z_0\alpha''.$$

Ganz im Gegentheil kann man sehr leicht einsehen, dass

$$mu''=\Xi-m\alpha\frac{d^2A}{dt^2}-m\alpha'\frac{d^2B}{dt^2}-m\alpha''\frac{d^2C}{dt^2},$$

und diese Formel entspricht derselben Prüfung, da

$$\Sigma\Xi-\alpha\,\Sigma m\frac{d^2A}{dt^2}-\alpha'\,\Sigma m\frac{d^2B}{dt^2}-\alpha''\,\Sigma m\frac{d^2C}{dt^2}=\Xi_0-\alpha X_0-\alpha' Y_0-\alpha'' Z_0=0.$$

die Summe aus der Rotationsgrösse und der Torsionsgrösse des Systems in Bezug auf eine jede der Trägheitsaxen nur von der Lage derselben abhängt, also immer dann zu demselben Werthe zurückkehrt, wenn diese Axe in eine neue, einer älteren parallele Lage übergeht,

während

die Summe der Projectionen dieser Summen von Torsionsgrössen, jede für sich aufgetragen auf eine der drei Hauptaxen und darnach projectirt auf eine beliebige Linie im Raume, stets constant bleibt.

Dieses letztere Gesetz erscheint identisch mit dem bekannten Gesetze der Sectoren.

Walter betrachtet aber diesen Theil seiner Untersuchungen als eine Abschweifung, da ein Molekül niemals lange den Kraftwirkungen anderer Moleküle entzogen bleibt.

V.

Auf die allgemeine Variationsgleichung wird nun im vierten Capitel die Gleichstellung der Variationen mit den Differentialen angewendet. Wie zu erwarten war, entsteht eine Gleichung, die an beiden Seiten integrirbar ist und dann die Beziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft anzeigt. Diese lebendige Kraft erscheint dabei als die Summe einiger Ausdrücke, von denen ein jeder eine einfache Bedeutung hat. Zuerst besteht sie aus der Summe der drei folgenden Theile:

1. die lebendige Kraft der Bewegung des Schwerpunktes von dem Atomsystem, berechnet, als ob die ganze Masse in diesem Mittelpunkte concentrirt wäre;

2. die lebendige Kraft der Bewegung der Atommittelpunkte in Bezug auf ein willkürliches Coordinatensystem, welches sich parallel mit sich selbst mit dem Schwerpunkte des Atomsystems fortbewegt; dabei wird die Masse eines jeden Atoms in seinem Schwerpunkte concentrirt gedacht;

3. die lebendige Kraft der Rotation der Atome um ihre augenblicklichen Drehungsaxen.

Ferner kann nun der zweite dieser Theile noch in die Summe von folgenden drei Theilen zerlegt werden:

1. die lebendige Kraft der Fortbewegung der Atommittelpunkte in Bezug auf die Hauptflächen des Moleküls, also auf das U, V, W-System, wobei man sich die Masse eines jeden Atoms in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt;

2. die lebendige Kraft der Rotation des Moleküls um seine Hauptträgheitsaxen, wobei das Molekül für einen Augenblick betrachtet wird als ein unveränderliches Atomsystem;

3. eine Grösse $hU' + kV' + lW'$, die einzige, die abhängt von der Torsion, und die deshalb betrachtet werden kann als die lebendige Kraft der Torsion der Atome in Bezug auf die Trägheitsaxen des Moleküls, wenn auch in einigermassen figürlichem Sinne.

VI.

Im folgenden Capitel kommt wieder die Spannkraft zur Sprache; aber weit davon, dass wir jetzt nähere Bekanntschaft machen mit dem Ausdrucke

$$g = mrr'v',$$

womit Walter sich nach seinen schwankenden Untersuchungen des ersten Capitels begnügt zu haben schien, nimmt er auf's Neue die drei nicht integrirbaren Ausdrücke in Arbeit, von denen ein jeder sich bezieht auf eine der Projectionen der Bahn auf die Coordinatenfläche, und führt also wieder drei Spannkräfte ein, die nichts Anderes sind, als die Integrale dieser Ausdrücke. Nun folgt die Einführung der u, v, w-Coordinaten, wodurch die Integration natürlich nicht besser auszuführen ist; darauf theilt Walter seine Formeln in eine grosse Anzahl von Gliedern, von denen schliesslich die meisten integrirt werden können.

Er wählt nämlich sieben ohne feste Regel, aber so zweckmässig wie möglich ausgesuchte Functionen von h, k, l; A, B, C, und von den Winkeln, die die u, v, w mit den x, y, z-Axen machen, und bestimmt davon partielle Differentialquotienten. Diese partiellen Differentialquotienten führt er dann, soviel eben möglich, in die betreffenden Ausdrücke, aus deren Integration die Spannkraft entstehen muss, ein. Sobald er alle partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function in der Entwickelung bei einander hat, wird dieser Theil ein totales Differential und kann also integrirt werden. Es ist aber nicht möglich, alle partiellen Differentialquotienten von allen sieben Functionen einzuführen, und ausserdem bleiben in den Ausdrücken noch einige Glieder übrig. Diese nicht integrirbaren Theile nun sucht Walter soviel wie möglich zu reduciren. Das ist natürlich eine unbestimmte Aufgabe und Walter schlägt schliesslich drei verschiedene Ausdrücke vor, von denen ein jeder aus einem integrirbaren Theile und einem nicht integrirbaren Reste besteht.

Die zweite Seite der Gleichung, aus deren Integration das eine oder andere Theorem über die Spannkraft entstehen muss, und welche die Kräfte enthält, die auf die Atome wirken, wird ebenfalls für die U, V, W-Axen transformirt, so dass die Projectionen der Kräfte auf diese Axen eingeführt werden. Auch hier wird ein integrirbarer und nicht integrirbarer Theil unterschieden.

Ausserdem vertreibt Walter theilweise die Kräfte dadurch, dass er die sogenannten Trägheitskräfte, denen sie gleich und entgegengesetzt sind, einführt, und zwar mit Hilfe der Formeln, die in der letzten Anmerkung als fehlerhaft angezeigt sind, und er scheint nicht einzusehen, wie eigenthümlich dieses Verfahren ist.

Da nämlich seine Gleichungen auf dem Princip von d'Alembert der Gleichstellung von Trägheits- und wirklich angreifenden Kräften beruhen, würde eine consequente Anwendung dieses Verfahrens nothwendig die Beziehung $0 = 0$ ergeben. Wir wollen dies aber auf sich beruhen lassen, da wir noch mehr eingreifende Verstösse antreffen werden, und bemerken allein, dass Walter so zu drei verschiedenen Systemen dreier Gleichungen kommt, welche Systeme im Grunde identisch sind, sich aber von einander unterscheiden durch die Vertheilung in einen integrirbaren Theil und einen nicht integrirbaren Rest.

VII.

Im folgenden sechsten Capitel betritt Walter endlich ganz das Gebiet der reinen Willkür.

Er fängt damit an, in den eben genannten Gleichungen den nicht integrirbaren Rest einfach gleich Null zu setzen. So führt er also drei neue Beziehungen, „Spannungsgleichungen", ein, deren Tendenz und eigentliche Bedeutung verborgen bleiben unter ihrer höchst verwickelten algebraischen Form. Sie müssen Eigenschaften sein der Kräfte, die innerhalb oder ausserhalb des Moleküls wirken; welcher Natur aber diese Eigenschaften sind, wird weder hier, noch in dem Folgenden erklärt, doch wird die Annahme dieser geheimnissvollen Beziehungen einigermassen motivirt, wir müssen also den Werth dieser Argumentation prüfen.

Zuerst bemerken wir, dass Walter in Uebereinstimmung mit den drei verschiedenen Systemen von je drei Gleichungen selbstverständlich auch drei verschiedene Systeme von Spannungsgleichungen erhält, die er, gewiss sehr gewagt, betrachtet als mit drei Modificationen der natürlichen Moleküle übereinstimmend.

Der einzige Fall, worin diese Spannungsgleichungen so einfach werden, dass wir ihnen eine Bedeutung, die man sich einigermassen vorstellen kann, unterlegen könnten, ist der, wobei die Atome im Molekül so nahe bei einander liegen, dass sie annähernd als unbeweglich in Bezug auf einander betrachtet werden können, während ausserdem keine äusseren Kräfte auf sie wirken. In diesem Falle würden sie sich ausser nach den bekannten Gleichungen

$$A\frac{dh}{dt} + kl(C-B) = 0,$$

$$B\frac{dk}{dt} + lh\,(A-C) = 0,$$

$$C\frac{dl}{dt} + hk\,(B-A) = 0$$

auch noch verhalten nach den „Spannungsgleichungen"

$$\frac{dk}{dt} Cl - \frac{dl}{dt} Bk = 0,$$
$$\frac{dl}{dt} Ah - \frac{dk}{dt} Cl = 0,$$
$$\frac{dh}{dt} Bk - \frac{dk}{dt} Ah = 0,$$

woraus die doch sehr sonderbaren Beziehungen

$$\frac{\sqrt[A]{h}}{k_1} = \frac{\sqrt[B]{k}}{k_2} = \frac{\sqrt[C]{l}}{k_3}$$

sich ergeben, in welchen k_1, k_2, k_3 constant sind.

Was nun die Argumentation Walter's betrifft, so dient diese unglaublich genug dazu, um zu beweisen, dass die Einführung von drei willkürlichen Gleichungen nothwendig ist, um die Bewegungszustände bei einem Moleküle zu bestimmen, selbst wenn die Kräfte, die darauf wirken, bekannt sind; mit anderen Worten, er sucht zu beweisen, dass in der Natur ohne das Einführen dieser Gleichungen kein Causalverband bestehen würde.*

---

* Der Fehler in dieser um ihr sonderbares Resultat so merkwürdigen Argumentation liegt im Folgenden:

Walter bemerkt, dass in einem Molekül von n Atomen die Lage eines jeden Atommittelpunktes in jedem gegebenen Augenblicke durch die drei Coordinaten U, V und W bestimmt wird. Dies giebt $3n$ veränderliche Grössen. Ausserdem muss aber auch noch die Bewegung der U-, V- und W-Axen selbst bekannt sein. Achten wir nun nicht auf die Lage des Axenmittelpunktes, von der Walter einzusehen scheint, dass sie gegeben ist, sobald die Lage der Atome selbst bekannt ist, da sie mit ihrem Schwerpunkte zusammenfällt, so sind zur Bestimmung der Richtung dieser neuen senkrechten Coordinatenaxen nochmals drei veränderliche Grössen nöthig, das macht zusammen $3n + 3$ Grössen, die man in einem bestimmten Moment kennen muss, um die Lage der Atome im Raume zu kennen.

Walter weist nun hin auf die drei Beziehungen

$$mu'' = \Xi, \quad mv'' = H, \quad mw'' = Z,$$

die für jedes Atom gelten, wodurch aber nur $3n$ Beziehungen entstehen. Wunderlich genug kann er die drei übrigen nicht finden und schliesst nun, dass er selbst drei neue Beziehungen, nämlich seine Spannungsgleichungen, einführen muss.

Nun liegen die Beziehungen, die er vergisst, vor der Hand. Es sind die drei Gleichungen

$$\Sigma muw = 0, \quad \Sigma mvw = 0, \quad \Sigma muv = 0,$$

die er selbst mehrere Male anwendet. Wirklich brauchen die U-, V- und W-Axen ohne diese Beziehungen nicht mehr mit der augenblicklichen Hauptträgheitsaxe des Moleküls zusammenzufallen. Ihre Wahl wird dann ganz unbestimmt, und das ist der Grund dafür, dass die U, V, W-Coordinaten (nicht die wirkliche Stellung der Atome im Raume) unbestimmt bleiben, wenn man diese Beziehungen nicht in Rechnung bringt. Mit diesen Beziehungen dagegen wird die ganze Bewegung bestimmt, wie zu erwarten war.

VIII.

Durch die Einführung der „Spannungsgleichungen“, wodurch der nicht integrirbare Theil eliminirt wird, kann nun natürlich integrirt werden. Dennoch erreicht Walter nur das folgende unbestimmte Resultat:

„In einem der Wirkung innerer und äusserer Kräfte überlassenen Molekül, dessen in seinem Massenmittelpunkte sich rechtwinklig kreuzende Hauptträgheitsaxen durch ihre Bewegung im absoluten Raume geradlinige Oberflächen erzeugen, sind immer, so lange es besteht, drei Functionen, welche alle Bestimmungsstücke der Lage und Bewegung der einzelnen das Molekül zusammensetzenden Atome enthalten, einzig nur von der Richtung der Axe, auf welche sie gehen, abhängig, so dass jede dieser Functionen immer zu demselben Werthe zurückkehrt, wenn die ihr entsprechende Hauptträgheitsaxe wieder in die alte Lage oder in eine neue, dieser parallele, Lage übergeht.“

Dieser Satz erklärt nach Walter den Widerstand, den ein Molekül äusseren Einflüssen entgegensetzt, und er nennt ihn das Gesetz der Erhaltung der Spannkraft in jedem einmal entstandenen Molekül. Dann geht er dazu über, die vielen Glieder, woraus die Spannkraft besteht, zu besprechen und mit neuen Namen zu versehen.

Endlich bemerkt er, dass die drei Spannkräfte (jede Axe besitzt nämlich eine) projectirt werden können auf willkürliche Linien und dass es unter diesen Linien eine geben muss, worauf die Summe dieser Projectionen ein Maximum ist. Diese erhält den Namen von „Haupt-Spannkraftaxe“ und hat eine unveränderliche Lage im Raume. Natürlich erhält er aber für die verschiedenen Systeme von Spannungsgleichungen auch drei verschiedene Haupt-Spannkraftaxen, und jetzt geht Walter so weit, um von drei Modificationen der Moleküle zu sprechen, die durch eine, durch äussere Kräfte verursachte, plötzliche Veränderung ihrer Haupt-Spannkraftaxen in einander übergehen müssen.

Wir wollen nun den Versuch, in jedem System die dritte Spannungsgleichung aus den beiden ersten abzuleiten, mit Stillschweigen übergehen, aber noch einen Augenblick bei den neuen Hypothesen stillstehen, die Walter mehr oder weniger deutlich einführt (sie werden wenigstens nicht deutlich hervorgehoben, wie es wohl stattfindet mit den Resultaten, die er daraus erhält).

Wir bemerken dann, dass Walter, um noch eine grössere Verallgemeinerung zu erreichen, das Molekül nicht mehr als ein Aggregat von Atomen betrachtet, sondern als ein Aggregat von Partialmolekülen, und seine Formeln, soweit nöthig, mit dieser Veränderung in Uebereinstimmung bringt. S. 141 und 163 wird nun, einigermassen verborgen, die Hypothese eingeführt, dass die augenblicklichen Rotationsaxen der

Partialmoleküle fortwährend parallel bleiben der augenblicklichen Rotationsaxe des ganzen Moleküls. Was am letztgenannten Orte zu ihrer Vertheidigung angeführt wird, kann höchstens dazu dienen, sie einigermassen plausibel zu machen. Während zugegeben wird, dass, nach der Formel für die Bewegung der Rotationsaxe der Partialmoleküle, diese höchstens um diese parallele Lage hin- und herschwingen, wird die parallele Lage die Normale genannt und dabei unentschieden gelassen, ob der Verfasser diesen normalen Zustand als wirklich existirend, als annähernd richtig oder als durchaus nicht mit dem wirklichen Zustande übereinstimmend betrachtet. Warum dieser Zustand annähernd wahr sein muss und warum die Rotationsaxen der Partialmoleküle nicht heftig hin- und herschwingen, wird wenigstens nirgends angezeigt.

Eben wenig logisch sind die Argumentationen, wodurch die übrigen Resultate dieses Capitels erhalten werden.

IX.

Das jetzt folgende siebente Capitel übergehen wir um so eher, als darin ein ganz neues Gebiet betreten wird, das nur entfernt in Beziehung mit dem vorhergehenden steht. Walter betrachtet darin die Kräfte, die zwei Moleküle auf einander ausüben können. Es sind dies eigentlich Kräfte, die von Monade auf Monade wirken, die in Gruppen vertheilt und zusammengefügt werden. Besonders die Kräftepaare, wodurch die Drehung um die Hauptaxen verzögert oder beschleunigt werden kann, bilden den Gegenstand der Behandlung. Wir begeben uns jeden Urtheils über dieses Capitel.

Schliesslich resumirt Walter seine Sätze und versucht ihre Uebereinstimmung mit physikalischen und chemischen Thatsachen zu zeigen, wie uns scheint, mit wenig Glück. Dieser Theil kann übrigens durch jeden Chemiker beurtheilt werden, wenn man dabei nur die Thatsache ins Auge fasst, dass die durch Walter angeführten Sätze nicht bewiesen sind.

Resumiren wir jetzt unser Urtheil über Walter's Arbeit, dann bemerken wir, dass er bis auf S. 82 keine willkürlichen Hypothesen einführt, aber auch keine Resultate erhält. Später findet er Resultate, hat aber dann mehrere unerlaubte Hypothesen eingeführt. Wir können dabei nicht unterlassen, als unsere Ansicht auszusprechen, dass ein jeder Versuch, jetzt schon den inneren Bewegungszustand der Moleküle durch glückliche, auf mechanische Principien sich stützende Hypothesen aufzuklären, gleiche Folgen haben muss. Wir besitzen dazu noch zu wenig Daten, dagegen lässt der Uebergangszustand, in dem die Chemie sich jetzt befindet, vielleicht für die nächste Zukunft viel hoffen. Darum ist aber auch kein Augenblick schlechter gewählt als der jetzige, um eine mathematische Theorie der chemischen Verwandtschaft zu begründen, jetzt, wo z. B. der Streit über feste und veränderliche Valenz, worauf eine solche Theorie sich wenigstens stützen müsste, wenn sie sich auf irgend Etwas stützen will, noch nicht ausgestritten ist, und wenigstens die Bedingungen, unter welchen die Valenz verändert, noch nicht festgestellt sind.

Mehr wie wahrscheinlich werden wir neue Resultate über das Wesen der Moleküle den eifrigen Untersuchungen der Chemiker zu danken haben, die nach den Methoden arbeiten, die sich schon als so fruchtbar erwiesen, und werden diese nicht durch eine glückliche mathematische Vermuthung gewissermassen aus der Luft fallen.

Wahrscheinlich ist Walter zum Unternehmen seiner mühevollen und nach unserer Ueberzeugung grösstentheils fruchtlosen Arbeit veranlasst worden durch die genialen Untersuchungen Lothar Meier's und Mendelejeff's, die auch für Nichtchemiker ein so grosses Interesse gewährten. Walter's Auffassung über die dadurch eröffneten Voraussichten erscheint uns jedoch unrichtig. Die Moral, die wir aus der Arbeit Lothar Meier's gezogen zu sehen wünschten, ist Anschluss an die Physik, Bestimmung physikalischer Constanten im grossen Masstabe, aber man versuche nicht, über dieses Terrain hin durch einen „*Sant périlleux*" bei der mathematischen Deduction zu landen. Man betrachte wenigstens solchen Versuch mit grossem Misstrauen.

Dass übrigens die mathematische Analyse sich bereit macht, die Bewegungen und Formveränderungen solcher Atomsysteme, wie Walter sie bespricht, zu behandeln, wer sollte es nicht billigen? Man überlade dann aber seine Arbeit nicht mit nutzlosen Betrachtungen und Hypothesen und man sage auch nicht: „Ich habe es verschmäht, das Neue, was ich bringe, schulmässig darzustellen." So viel Eile hat es wahrlich nicht.

Breda, 20. Dec. 1874.

Ueber den Himmelsglobus des Archimedes.

Von

F. Hultsch
in Dresden.

Heinr. Aug. Schiek schliesst seine treffliche Abhandlung über „Die Himmelsgloben des Archimedes" (Programm des Gymnasiums zu Hanau, 1846) mit den Worten: „Gerade die wesentlichsten Punkte bleiben in Dunkel gehüllt. Unauflösbar sind unter anderen die Räthsel in Claudian's Worten:

Knechtisch dient die verschlossene Luft den verschied'nen Gestirnen,
Treibet das lebende Werk fort im gemessenen Lauf,

durch welche unwillkürlich der Gedanke an einen sinnreichen Automaten erweckt wird. Und welche Mittel giebt es, die prunkende und darum noch dunklere Schilderung des Marcianus Capella aufzuhellen? Sie führt in ein Labyrinth, dessen Irrgänge in der That abschreckend sind. Deshalb scheint es wenigstens für jetzt räthlicher, mit Offenheit das Unvermögen zur Enthüllung der Geheimnisse einzugestehen, als Vermuthungen Raum zu geben, die jedenfalls ungenügend sein würden." Dem Verfasser war, als er diese Worte schrieb, eine kurze Notiz noch nicht zugänglich, welche sich zu Anfang des 7. Buches der Sammlung des Pappus von Alexandria findet: μηχανικοὺς δὲ καλοῦσιν καὶ τοὺς τὰς σφαιροποιΐας ἐπισταμένους, ὑφ' ὧν εἰκὼν τοῦ οὐρανοῦ κατασκευάζεται δι' ὁμαλῆς καὶ ἐγκυκλίου κινήσεως ὕδατος, „Mechaniker heissen auch diejenigen, welche Himmelsgloben anzufertigen verstehen, denn von ihnen wird ein Abbild des Himmels (und des Laufes der Gestirne) durch gleichmässige Kreislaufbewegung des Wassers dargestellt." Nun war bekanntlich das einzige Werk mechanischen Inhalts, welches Archimedes geschrieben, der σφαιροποιΐα gewidmet; und seitdem galt diese Kunstfertigkeit als eine besondere Disciplin der Mechanik, wie wir aus der Darstellung bei Proclus in seinem Commentar zum 1. Buch der Elemente des Euclid (S. 41 der Ausgabe von Friedlein) ersehen. Denn hier erscheint unter einer vollständigen Uebersicht aller Theile der mechanischen Wissenschaft καὶ ἡ σφαιροποιΐα κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἵαν καὶ Ἀρχιμήδης ἐπραγματεύσατο (die Kunst, Himmelsgloben als Abbilder des Umlaufes der Gestirne anzufertigen, eine Kunst, welche schon Archimedes betrieben hat). Bringen wir hiermit die leider so dunklen Andeutungen der Dichter Ovid (*fast.* 6, 269—280), Claudian (*epigr.* 18) und Martianus Capella (6, 583 flg.) in Verbindung, so eröffnet sich als nicht unwahrscheinlich die Annahme, dass der Himmelsglobus des Archimedes durch ein hydraulisches Werk getrieben worden sei. Dass die Hydraulik bei den Alten bereits zu einem hohen Grade ausgebildet war, wissen wir aus Heron's Spiritalia und so mancher andern Ueberlieferung; es darf also wohl mit Recht vermuthet werden, dass der grosse Archimedes die Principien auch dieses Theiles der Mechanik gekannt und, wie aus obigen Stellen hervorgeht, bei der Construction seines berühmten Himmelsglobus verwerthet habe. An Wasser als Triebkraft des Kunstwerkes fehlte es weder in Syracus, noch später in Rom, wo der Globus im Tempel der Virtus durch Marcellus, den Bezwinger von Syracus, aufgestellt worden war. Vielleicht gelingt es nach diesen Andeutungen, den Mechanismus des Archimedischen Globus zu reconstruiren, oder wenigstens der Lösung des schwierigen Problems näher zu treten, als es bisher möglich war.

Recensionen.

Darstellung von Stereoskopbildern mit Hilfe orthogonaler Coordinaten. Programm der königl. Gewerbeschule zu Neustadt a. d. H. pro 1876. Von Dr. TH. HUGEL, k. Rector. Darmstadt, Buchdruckerei von G. Otto. II, 13 S. 9 Figurentafeln.

Der rührige Verfasser dieser Gelegenheitsschrift hat vor Kurzem ein selbstständiges Werkchen über reguläre und halbreguläre Polyeder erscheinen lassen, an welche sich eine Garnitur stereoskopischer didaktisch höchst empfehlenswerther Figuren anschloss. Dieselben erregten durch die Correctheit ihrer Ausführung in weiteren Kreisen Aufsehen, da man über das zu ihrer Herstellung angewandte Verfahren sich im Unklaren befand. Nunmehr setzt uns der Autor selbst in ansprechender Weise auseinander, welcher Mittel er sich bedient hat; in der festen Ueberzeugung, dass blosse Construction nicht die erforderliche Genauigkeit zu liefern vermöge, liess er sich die Mühe nicht verdriessen, die Abmessungen für jedes einzelne Bild algebraisch auszurechnen und die gefundenen Masszahlen mit Hilfe einer Theilmaschine aufzutragen.

In §§ 1 und 2 wird das Wesen der perspectivischen und speciell dasjenige der stereoskopischen Darstellung erläutert; als XY-Ebene gilt eine durch die Verbindungslinie der Augen und einen ausgezeichneten Punkt des Körpers gelegte Ebene; dieselbe wird von der YZ-Ebene im sogenannten „Nasenstrahl" geschnitten, und die nunmehr in ihrer Stellung festgelegte XZ-Ebene nimmt das stereoskopische Doppelbild auf. § 3 lehrt dieses Axensystem auf ein anderes, für die Rechnung günstiger gelegenes überführen, und hierbei ergeben sich gewisse aus den Coordinaten eines willkürlichen Punktes und Constanten zusammengesetzte Ausdrücke, welche als „stereoskopischer Charakter" und „reducirter stereoskopischer Charakter" für die weitere Entwickelung bedeutsam sind. Der nächste Paragraph enthält dann die eigentlichen Details der Rechnung, berücksichtigt die anzuwendenden Cautelen, wenn die Bilder gegenseitig übergreifen sollen, und stellt in Gemeinschaft mit § 5 numerische Werthe zusammen. Die drei Schlussparagraphen endlich beuten die gewonnenen Resultate in rein wissenschaftlichem Sinne aus, so führt § 8 mit Hilfe einiger Determinantensätze den Beweis, dass die entsprechenden Stereoskopen von Parallellinien sich in Einem Punkte schneiden.

Wer sich für die Theorie der wissenschaftlichen Zeichnungskunst interessirt und etwas Rechnung nicht scheut, wird die kleine Schrift mit Vergnügen lesen und dem Verfasser für seine grosse Anstrengung Dank wissen. Die sehr zahlreich beigegebenen Figuren sind zwar nicht mit besonderer Feinheit, aber doch hinlänglich genau ausgeführt, um der Lectüre eine wirksame Unterstützung zu leisten.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Lehrbuch der Physik, für den Gebrauch in höheren Unterrichtsanstalten und beim Selbstunterricht. Von Dr. C. Fliedner, Prorector am Gymnasium zu Hanau. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1875—1876.

Der Verfasser ist den Lehrern der Physik von seiner Aufgabensammlung, die schon in fünf Auflagen erschienen ist, wohl bekannt. An der Vollendung des vorliegenden Werkes, dessen erster Theil schon vor einigen Jahren erschienen ist, wurde derselbe durch ein Augenleiden gehindert, das ihn schliesslich nöthigte, in Oberlehrer Dr. Krebs einen Mitarbeiter zu suchen. Im ersten Theil wird die Physik der Materie, der Eintheilung von Mousson entsprechend, behandelt, Mechanik, Wellenlehre und Akustik; im zweiten Theil Licht, Wärme, Magnetismus und Elektricität. Der erste Theil und die Gesetze der Zurückwerfung und Brechung der Lichtes sind von Fliedner selbst bearbeitet, und da die ganze Anlage des Werkes darauf hinausgeht, den mechanischen Theil der Physik vorzugsweise zu berücksichtigen, von Licht, Wärme, Magnetismus und Elektricität nur das Hauptsächlichste kurz aufzunehmen, so störte die Mitarbeiterschaft eines Andern nicht die Einheit des Ganzen.

Das Lehrbuch soll an höheren Unterrichtsanstalten als Vorbereitung für Vorträge über Physik an Hochschulen dienen, es wird in erster Linie für humanistische Anstalten passen. Der Verfasser sucht, „durch verständige Verknüpfung von Thatsachen und Gesetzen ein lebendiges Interesse für die Wissenschaft hervorzurufen“ und glaubt namentlich in der Mechanik, in der näheren Betrachtung der Schwerkraft und der Wellenlehre mehr als die gewöhnlichen Lehrbücher zu leisten. Wir glauben nach Durchsicht des Buches, dass er seinen Zweck erreicht hat.

Der Verfasser vorliegender Recension hat noch nie sein Urtheil über ein Lehrbuch der Physik öffentlich abgegeben, wohl aber ein halbes Dutzend im Einzelnen näher kennen gelernt. Es ist ihm bei allen aufgefallen, dass bei Feststellung der Grundbegriffe und Betrachtung bestimmter einfacher Apparate nicht ganz logisch vorgegangen wird: er hätte gewünscht, dass auch in dieser Beziehung das vorliegende Werk über die gewöhnlichen Lehrbücher hinausgegangen wäre. Es möge uns gestattet sein, auf diesen Gegenstand näher einzugehen, mit der Bitte an den Leser, im Auge zu behalten, dass es sich nicht um Aussetzungen speciell am vorliegenden Buche handelt, sondern um ererbte Fehler, die freilich hätten gebessert werden können.

Die Masse eines Körpers wird vermittelst des Gewichts definirt: zwei Körper haben gleiche Massen, wenn sie gleiche Gewichte haben. Diese Definition fehlt darin, dass sie das Einfachere durch das Zusammengesetzte erklärt. Es ist nicht richtig, dass mit der Waage das Gewicht bestimmt werde, die Waage dient nur zur Vergleichung der Massen, ist unabhängig von der Grösse der Schwerkraft. Diese — der Werth von g — wird vermittelst des Pendels bestimmt. Es ist darum kein Grund abzusehen, warum man von der alten Definition der Masse als Menge Stoff im Körper abgehen soll. Wie Kohlrausch (Praktische Physik, 2. Aufl., S. 185) mit Recht sagt, besteht der Zweck der Wägung meistens in der Massenbestimmung: dem Chemiker, dem Kaufmann, dem Arzte ist es nicht um den Druck der Körper auf die Unterlage zu thun, sondern lediglich um ihre Masse, denn durch diese wird die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder Nahrungswerth u. s. w. bedingt. Wenn Wüllner (Experimentalphysik, 4. Aufl., I, S. 60) behauptet, man könne bei der alten Definition nicht von gleichen Quantitäten Materie sprechen, wenn man verschiedene Körper, z. B. Kupfer und Blei vergleichen wolle, so beruht das auf einer Verkennung der Waage, deren Aufgabe eben das ist, Mengen verschiedener Stoffe zu vergleichen.

Mit Gramm ist in dem ursprünglichen französischen Gesetz allerdings das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser bezeichnet, und ebenso in den neueren gesetzlichen Bestimmungen, wenn das Grammgewicht eingeführt wurde. Aber der Physiker muss darauf aufmerksam machen, dass das Gewicht von Breite zu Breite wechselt, die Masse gleich bleibt. Wenn Gauss bei seiner Einführung eines absoluten Maasses das Gramm als Masseneinheit betrachtet hat, wenn dies noch jetzt bei Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus immer geschieht, so sollte ein Lehrbuch der Physik etwas davon erwähnen, wenn auch im praktischen Leben das Gramm stets Gewichtseinheit bleiben wird. Es würden dann auch in Poggendorf's Annalen keine Anfragen kommen, für welchen Breitegrad eigentlich das Gramm Gewichtseinheit sei.

Die Waage ist mit dem Worte abgethan und auf die Aufgaben verwiesen (S. 51). Das ist denn doch zu wenig, wenn auch immer noch besser, als vollkommen gleiche Waagbalken zu verlangen (Wüllner I, S. 79; Mousson I, S. 52; Recknagel, S. 27 u. s. w.). Wenn man bis auf ein Milliontel genau wägen will, so wäre jene Gleichheit nur ebenso weit zu treiben, aber selbst dies ist keinem Mechaniker möglich. Wie stimmt jenes sogenannte nothwendige Erforderniss zu dem Zugeständnisse, das meist kurz nachher folgt, dass kleine Fehler nicht zu vermeiden seien? Die Waage soll in der Physik als nicht vollkommen betrachtet, aber gezeigt werden, wie man sich doch von den Fehlern beim Wägen frei machen kann. Eine Angabe dieser Art sollte auch in vorliegendem Lehrbuche nicht fehlen.

Was dann den Abschnitt über die Schwerkraft betrifft, auf den der Verfasser in der Vorrede als eigenthümlich behandelt aufmerksam macht, so vermissen wir — und das ist freilich wieder bei allen Lehrbüchern, mit Ausnahme von Mousson, der Fall — eine klare Auseinandersetzung der Begriffe „Schwere" und „Anziehungskraft". In § 94 wird von einer totalen Schwerkraft gesprochen und von einem übrig bleibenden Theile der Schwerkraft, wenn man jene in zwei Componenten zerlegt, von denen eine senkrecht zur Erdaxe ist. Auch in der Anmerkung kommt diese neue Bezeichnung „totale Schwerkraft" vor. Sie soll durch den Erdmittelpunkt gehen, scheint also die Anziehung der Erde zu sein, wie sie stattfände, wenn die Erde in Ruhe wäre; alsdann ist aber der Ausdruck „Anziehungskraft der Erde" der einzig passende. Diese Anziehung geht genähert durch den Erdmittelpunkt, senkrecht zur Erdaxe von dieser weg wirkt die Centrifugalkraft, wenn man sich jetzt die Erde als drehend denkt, und die Resultante beider, die Schwerkraft, wird direct von uns beobachtet. In § 96 ist ganz richtig die Anziehungskraft der Erde genannt, freilich auch gleich nachher wieder mit der Schwerkraft identificirt. In § 98 wird dann von einer allgemeinen Schwere gesprochen, welche gleich der Gravitation sei. Wie soll nun der Studirende mit der totalen, allgemeinen und gewöhnlichen Schwere und einem Reste von Schwere fertig werden? Das Wort Schwere sollte man auf die Anziehung der Weltkörper nicht anwenden, sie ist (wie auch der Verfasser § 94 sagt) der Druck auf eine Unterlage und deswegen steckt in ihr die Centrifugalkraft. Es mag noch gestattet sein, darauf aufmerksam zu machen, dass der Satz „alle Körper sind gleich schwer" (§ 91) missverstanden werden kann. Im gewöhnlichen Leben versteht man unter „gleich schwer", was gleiches Gewicht hat, zuweilen auch was gleiches specifisches Gewicht hat; der Physiker wird deswegen das Adjectiv „schwer" lieber vermeiden. Mit Verweisung auf § 13 hätte ausgeführt werden können, dass die Beschleunigung der Schwerkraft für alle Körper gleich ist, weil mit wachsender oder abnehmender Masse auch das Gewicht, also die bewegende Kraft, in gleichem Maasse zu- oder abnimmt.

In der Wellenlehre ist an einer Reihe von Zeichnungen das Fortschreiten und die Zurückwerfung einer Welle, dann eines Wellenzuges und die daraus sich ergebende stehende Schwingung sowohl für Querschwingungen, als für Längsschwingungen auseinandergesetzt. Ausführliche graphische Darstellung ist sicherlich das beste Mittel, Klarheit in die Sache zu bringen. Bei Gelegenheit der Zurückwerfung einer Luftwelle wird passenderweise schon auf die Verschiedenheit aufmerksam gemacht, je nachdem die Zurückwerfung aus dünnerem oder dichterem Mittel stattfindet. Der Verfasser dachte wohl an die Anwendung bei den Farben dünner Blättchen: da er jedoch den betreffenden § 184 nicht bearbeitet hat, so suchen wir dieselbe vergebens.

In den ersten Sätzen über Zurückwerfung und Brechung des Lichtes sollte nach unserer Ansicht die Bemerkung, dass die Constructionen nur für geringe Oeffnung gelten, gleich anfangs gemacht werden; es gäbe dann Gelegenheit zu einer Andeutung, dass im andern Falle bei Zurückwerfung an krummen Flächen und bei der Brechung überhaupt Nichts entstehen kann, was den Namen Bild verdient, und es lassen sich darüber ja eine Menge der einfachsten Versuche machen. Freilich ist insbesondere die Angabe über das Bild eines Punktes z. B. unter einer Wasseroberfläche eigentlich in allen Lehrbüchern falsch, und ein Kritiker in Poggendorf's Annalen (Bd. 153 S. 572) hat selbst eine einseitige Anschauung. Die Arbeiten von Reusch (z. B. Poggendorf's Annalen Bd. 130, S. 497) sind bei den Darstellungen der elementaren Optik noch nicht berücksichtigt worden.

Zum Schluss möchten wir noch auf einige Aussprüche hinweisen, die wohl schärfer zu fassen wären: In § 97 heisst es, Kepler habe durch astronomische Beobachtungen seine Gesetze gefunden, geschichtlich richtig sollte es heissen: aus astronomischen Beobachtungen (Tycho's). Beim Pendel (§ 56) ist das Gesetz aufgestellt: „Die Dauer kleiner Schwingungen, d. h. solcher, deren Schwingungsbogen 10^0 nicht übersteigt, ist von der Grösse der Schwingungsbogen unabhängig.“ Wenn der Schüler an den Wortlaut sich hält, so muss er glauben, dass bei 10^0 ein Sprung stattfinde. Etwas vorsichtiger ist ein ähnlicher Ausdruck in § 150.

§ 165 steht gesperrt gedruckt der Satz: „Bei Prismen aus demselben Stoffe sind sowohl die Längen der Spectra, als auch die Abstände der entsprechenden Fraunhofer'schen Linien den brechenden Winkeln der Prismen proportional.“ § 121 heisst es: „Ist die reflectirende Wand der Schallquelle sehr nahe, so fällt die reflectirte Schallwelle mit der directen zugleich ins Ohr.“ Zu beiden Sätzen ist zu bemerken, dass, was genähert der Fall ist, nicht als absolut giltig dargestellt werden soll.

Die Bewegung eines Planeten um einen Centralkörper „Umdrehung“ zu nennen (§ 46), erscheint nicht passend; entschieden falsch aber ist es, zu sagen (§ 47), eine Tangentialkraft werde nach dem Bogenelement und senkrecht zur Tangente zerlegt, als ob das Bogenelement eine andere Richtung als die Tangente hätte; warum heisst es nicht „nach der Sehne“?

Bei der Figur endlich, welche (§ 263) eine Skizze der Art des Telegraphirens von Station zu Station mit dem Morse'schen Telegraphen giebt, geht der Strom durch beide Schreibapparate, was in der Praxis nie der Fall ist.

Der Recensent hofft durch diese Bemerkungen gezeigt zu haben, dass er das vorliegende Buch mit Interesse studirt hat; die ganze Anlage ist entschieden zu loben. Möge dem Verfasser erneute Gesundheit gestatten, in einer spätern Auflage den Werth seines Buches noch mehr zu erhöhen.

P. Zech.

Einfluss der Himmelskörper auf Witterungsverhältnisse. Vortrag von Dr. S. Günther. Nürnberg, H. Ballhorn. 1876.

Der Glaube, dass die Gestirne mit den Witterungsverhältnissen in enger Beziehung stehen, ist ein uralter, obgleich gegenwärtig wohl Niemand mehr einen Einfluss der Gestirne — abgesehen von den Wirkungen der Sonnenstrahlen — auf unsere Atmosphäre annehmen möchte. In einem höchst gediegenen Schriftchen behandelt der Verfasser auf eine klare und bündige Weise Alles, was wir über den Einfluss der Himmelskörper auf unsere Erde wissen. Wir sind hierfür dem Verfasser zu Dank verpflichtet, um so mehr, als wir diesen Gegenstand in keinem Werke zusammenhängend behandelt finden, und der angehängte Literaturnachweis uns in Stand setzt, den Gegenstand eingehend zu studiren. Nur die Hauptpunkte sollen hier hervorgehoben werden. Zunächst zeigt der Verfasser, dass weder der Mond, noch die Sonne, noch irgend ein anderer Himmelskörper durch ihre Attraction einen merklichen Einfluss auf unsere Atmosphäre ausüben. Dieser Satz ist von hoher Bedeutung. Würde z. B. der Mond, ähnlich wie beim Meere, auch in der Atmosphäre Fluth und Ebbe hervorrufen, so würde er einen directen Einfluss auf die Luftdruck- und folglich, da die Richtung und Stärke des Windes vom Luftdruck abhängig sind, auf die Windverhältnisse ausüben. Da nun aber durch den Wind die Witterung der einen Gegend auf die andere übertragen wird, so hätte wirklich der Mond einen Einfluss auf unsere Witterung, sobald eine merkliche Anziehung unserer Lufthülle durch den Mond dargethan würde. Nun aber ist besonders durch die Arbeiten von Laplace und anderen Gelehrten nachgewiesen, dass die durch den Mond hervorgerufenen Störungen in unserer Atmosphäre so unmerklich sind, dass sie vor den allgemeinen atmosphärischen Bewegungen vollständig verschwinden, und hiermit ist dann dargethan, dass der Mond an allen Witterungsvorgängen ganz unschuldig ist, was auch mit den durch mannichfach angestellte Vergleichungen der Witterungszustände bei den verschiedenen Mondphasen erhaltenen Resultaten vollkommen übereinstimmt. Dann gelangt der Verfasser zu dem Schlusse, dass die Himmelskörper — mit Ausnahme der Sonne — keinen Einfluss haben auf die Erwärmung unserer Atmosphäre. Schliesslich behandelt der Verfasser noch eine sehr schwierige, aber sehr interessante Frage, nämlich den Zusammenhang der Sonnenflecken mit den meteorologischen Erscheinungen. Dieser Zusammenhang ist besonders durch die geistreichen Arbeiten namentlich Köppen's und Wolf's als sehr wahrscheinlich dargethan; den Grund des Zusammenhanges kennen wir nicht, und wir müssen abwarten, bis sich dieses wunderbare Räthsel lösen wird.

Wir wünschen dem Werkchen eine weite Verbreitung, da dasselbe ganz geeignet ist, manche irrige Vorstellungen, die sich vom schlichtesten Landmann bis hinauf zum akademisch Gebildeten geltend machen, zu beseitigen.

Weissenburg a. S. VAN BEBBER.

Lezioni di statica grafica per Antonio Favaro, Professore nella R. Università di Padova; Membro etc. etc. Padova, Premiata Tipografia Edit. F. Sacchetto, 1877. XX, 652 S. 32 Figurentafeln.

Mit der altberühmten Hochschule von Padua ist in neuerer Zeit eine „*Scuola d'Applicazione*", ein polytechnischer Lehrcurs, in Verbindung gesetzt worden, über dessen für unsere Begriffe etwas ungewöhnliche Einrichtung der Verfasser obigen Werkes im vorigen Jahre eine selbstständige Broschüre hat erscheinen lassen. An dieser Anstalt vertheilte sich ehedem der Unterricht in der Graphostatik auf zwei volle Studienjahre, und Herr Favaro, der seit 1870 die bezüglichen Vorlesungen zu halten hat, legte sich den Stoff so zurecht, dass immer im ersten Jahre neuere Geometrie und graphischer Calcul, im zweiten dagegen die eigentlich sogenannte graphische Statik vorgetragen wurde. Es ergab sich dabei der nachtheilige Umstand, dass die italienische Literatur zwar treffliche Leistungen für einzelne Partien (insbesondere von Cremona), nicht jedoch ein vollständiges Compendium der Wissenschaft im oben bezeichneten Sinne aufweist,* und da das Gros der Paduaner Studenten die deutsch oder französisch geschriebenen Lehrbücher nicht zu benützen in der Lage ist, so entschloss sich der Lehrer des Faches, einen autographirten Leitfaden seinem Unterrichte zu Grunde zu legen. Allein auch dieser war bald vergriffen, und so entstand denn das vorliegende stattliche Werk, dessen Charakter der Verfasser im Vorwort ausdrücklich dahin erklärt, es solle durchaus keine originale Schöpfung reprä-

* Professor Isè in Neapel besorgt zur Zeit eine italienische Ausgabe des bekannten Werkes von Bauschinger, welches jedoch bekanntlich von den neueren geometrischen Methoden principiell Abstand nimmt.

sentiren, sondern lediglich unter dem didaktischen Gesichtspunkte, als möglichst vollständige und nach den besten Quellen gearbeitete Zusammenstellung der graphostatischen Lehren, beurtheilt werden. Dass das Buch dieser Tendenz ausgiebig gerecht wird, ist nun in der That unsere vollste Ueberzeugung.

Was daran besonders lobend hervorzuheben ist, das ist die allseiseitige und überaus gründliche Hervorhebung des geschichtlichen Elementes, wie man das freilich von dem Verfasser nicht anders erwarten durfte. Die Quellenangaben sind mit solcher Genauigkeit zusammengetragen, dass wir wenigstens nirgends das Uebersehen einer irgend bemerkenswerthen Thatsache zu constatiren vermöchten. Um an einem speciellen Beispiel zu charakterisiren, wie ernst es der Verfasser mit seinem Studium der fremdländischen Literatur — bekanntlich sonst die schwache Seite der Romanen — genommen habe, sei ein an sich gleichgiltiger Abschnitt herausgegriffen, derjenige, welcher von dem Gebrauche des logarithmischen Rechenlineals handelt (S. 309); unter den Arbeiten, welche bei Ausarbeitung desselben verwendet wurden, finden wir vier deutsche (Culmann, Tetmajer, Herrmann, Steiner), zwei italienische (Sella, Bellavitis), zwei französische (Lalanne zweimal) und je ein englisches und amerikanisches (Everett, Fuller). Dass unter diesen Umständen Favaro's Buch geradezu eine werthvolle Materialiensammlung für eine künftige pragmatische Geschichte der statischen Graphik bildet, liegt auf der Hand. Wir heben einige Stellen hervor, die unser persönliches Interesse besonders erregt haben. Hierher gehört die Bemerkung (S. 13), dass schon bei Leibnitz eine Andeutung des später unter Poncelet's Namen berühmt gewordenen „Princips der Continuität" sich vorfinde, die Vielen wohl neuen Nachweisungen über Encontre's und Stanville's Transformationsmethoden (S. 86), die Prioritätsreclamation der „geometrischen Addition" für John Warren, der schon in seinem 1828 erschienenen Werke *„Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities"* jenen Calcul der Aequipollenzen, den dann Bellavitis in ein System brachte, praktisch anwandte (S. 255). Auch die vom Verfasser vordem publicirte „Geschichte der mechanischen Planimetrie" erhält einen interessanten Nachtrag (S. 391); es hat sich nämlich herausgestellt, dass die erste derartige Vorrichtung unter dem Namen *„Balance planimètrique"* von Marinoni im Jahre 1714 ersonnen ward.

Wenden wir uns nach Voraussendung dieser speciellen Notizen zu einer kurzen Inhaltsübersicht. Den ersten Theil des Buches (S. 1—246) nimmt die Geometrie der Lage ein, ein ausführlicher Abriss dieses Wissenszweiges in 20 starken Paragraphen. Die Behandlungsweise ist im Wesentlichen derjenigen v. Staudt's resp. Reye's nachgebildet, stützt sich also ausschliesslich auf projectivische Betrachtungen; da aber der praktische Zweck des Werkes die Rechnung mit einschliesst, so sind — ebenfalls wieder im Sinne der Reye'schen Vorträge — einzelnen Paragraphen umfängliche analytische Anhänge beigegeben worden, so z. B. denjenigen, welche die Lehre von der Involution, von den elementaren Verwandtschaften u. s. w. abhandeln. Was die Menge des verarbeiteten Stoffes anbelangt, so sei nur constatirt, dass ausser einer vollständigen Theorie der Gebilde zweiter Ordnung auch die cubischen Raumcurven mit herangezogen wurden.

Als zweite Hauptabtheilung erscheint der graphische Calcul, welchem der Verfasser beim Unterrichte vermuthlich das Sommersemester des ersten Schuljahres zu widmen pflegte. Hier musste die Darstellung sich noch mehr als früher innerhalb der diesem Hilfsfache conventionell eingeräumten Grenzen halten, so dass dieses zweite Capitel (S. 247—396) wesentlich mit anderen bekannten Compendien, vor Allem mit dem trefflichen, auch in diesen Blättern besprochenen Werkchen von Cremona übereinstimmt. Indess ist auch hier durchaus nicht an sclavische Reproduction zu denken, vielmehr wird man manche eigenthümliche Darstellung finden. So hat uns besonders die eingehende Berücksichtigung der verschiedenen Spiralen beim Dividiren und Wurzelausziehen gefallen. Im Vergleich zu Cremona, Ott und anderen Fachautoren wird man bei Favaro manch' Neues finden, so (S. 330) das Steiner'sche Curvenlineal, ein Verfahren, graphisch zu integriren (S 305) u. A. m. Ein eigener Paragraph ist den beim sogenannten Massennivellement vorkommenden graphischen Rechenoperationen angewiesen.

An dritter Stelle endlich treffen wir auf die eigentliche Graphostatik (S. 397 bis Ende). Der Hauptsache nach, wie es nicht anders sein kann, an Culmann's Principien und Lehrgang sich anschliessend, strebt doch auch dieser wichtigste Abschnitt darnach, den neuesten Fortschritten gerecht zu werden und seine Leser mit dem Normalmass der Wissenschaft vertraut zu machen. So sind die erst dem vergangenen Jahre angehörigen Untersuchungen Steiner's, welche eine Erweiterung des bekannten Seilpolygons zur Seilpyramide anstreben, gebührend verwerthet, so hat im vorletzten (13.) Paragraphen ein ausgedehnter Cyclus von Arbeiten des Mailänder Mathematikers Jung über Trägheitsmomente Berücksichtigung gefunden.

Die Entwickelungsweise des Autors kommt uns, soweit wir uns ein Urtheil zutrauen dürfen, klar und lichtvoll vor. Diese wichtigste Eigenschaft eines Unterrichtswerkes wird demselben in seiner Heimath gewiss viele Freunde erwerben; wir zweifeln aber auch nicht, dass sich Favaro's graphische Statik nicht minder in den technischen Bibliotheken Deutschlands einbürgern wird. Dazu eignet sie sich trefflich wegen ihrer umfassenden Benützung der Gesammtliteratur; in dieser Hinsicht verdient sie geradezu den Namen eines internationalen Repertoriums der graphostatischen Lehren und ihrer Vorbereitungsdisciplinen.*

Ansbach. Dr. S. Günther.

Die Regenverhältnisse Deutschlands, von Dr. Jac. van Bebber. München, Ackermann. 1877.

Ueber den Regen weiss die Meteorologie noch so wenig zu sagen, dass jede Zusammenstellung einer grössern Zahl von Beobachtungen ihr Verdienstliches hat. Der Verfasser hat die aus Deutschland zu Gebote stehenden Zahlen gesammelt, leider nicht bis zur neuesten Zeit, was wohl theilweise der meist verspäteten Publication meteorologischer Beobachtungen zuzuschreiben ist; er hat eine grosse Zahl Mittel gezogen und eine graphische Darstellung der Vertheilung des Regens nach Einzelgebieten und nach der Höhe über dem Meere, der Regenwahrscheinlichkeit und Regendichte nach den Einzelgebieten, Alles für die einzelnen Monate des Jahres, gegeben.

Aus den Verhältnissen der einzelnen Orte, die der Verfasser theilweise in seinen Regentafeln schon früher publicirt hat, werden Mittel gezogen, um die Zahlen für die einzelnen Gebiete, Baden, Hannover, Sachsen u. s. w. zu erhalten. Dann werden diese Gebiete in drei grössere, Nord-, Mittel- und Süddeutschland zusammengefasst und als Mittel aus den ihnen zukommenden Zahlen das Mittel für ganz Deutschland berechnet. Bei diesem Mittelziehen bleibt die Zahl der Stationen im einzelnen Lande ausser Berechnung, was bei nahe gleicher Grösse der Einzelgebiete wohl zu rechtfertigen ist. Für ganz Deutschland dürfte man aber wohl ein genaueres Mittel erwarten, mit Rücksicht auf die Quadratmeilenzahl der Einzelländer.

Unangenehm fällt es auf, dass das Verständniss der Zahlentafeln erschwert ist durch zu grosse Sparsamkeit in der Bezeichnung. Wenn es S. 54 heisst: „Breslau 791—54", so ist dem Leser doch etwas zu viel zugemuthet, aus diesen Zahlen herauszulesen: „von den Beobachtungsjahren 1791 bis 1854". Jedenfalls sollte es irgendwo gesagt sein. Was S. 52 „Nordöstliches Deutschland *a*, *b*, *c*" und S. 60 „Nordöstliches Deutschland *a*, *b*" bedeutet, sucht man vergebens; bei den Zusammenstellungen S. 58 und 64 wird von sieben Stationen des nordöstlichen Deutschlands gesprochen, die vorher nicht vorkommen. In vielen Fällen

---

* Um so höher werden wir diese Eigenschaft unseres Buches schätzen müssen, wenn wir an gewisse abschreckende Exempel denken. So soll ein jüngst erschienenes französisches Werk verwandten Inhalts in theoretischer Hinsicht zwar Originales und Werthvolles, in der Verkennung fremdländischer Leistungen dagegen nach Sturm's Bericht (in Ohrtmann-Müller's „Jahrbuch") nicht minder Staunenswerthes bieten.

sind die Beobachtungsjahre nicht genannt, durch ein Sternchen wird angedeutet, dass nahe dieselbe Reihe Jahre benützt seien: der Leser verlangt keine Andeutung, sondern eine Angabe der Reihe, wenn auch etwas mehr Zahlen gedruckt werden müssen.

Das Hauptverdienst des Werkes scheinen die graphischen Darstellungen zu sein, wenn nur nicht der Verfasser in einer Schlussbemerkung sagen würde, es haben sich Ungenauigkeiten eingeschlichen, von deren mühsamer Revision wegen ihrer Unerheblichkeit abgesehen worden sei! Die Einleitung erscheint zu weitschweifig und zuweilen, z. B. im geographischen Theile, sehr mangelhaft. Wer die Tafeln benützt, braucht nicht die allgemeinen meteorologischen Belehrungen, sondern eben nur die Tafeln mit gründlicher Anleitung zu ihrem Gebrauch.

Stuttgart. P. Zech.

Bibliographie

vom 16. März bis 15. Juni 1877.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. 1876, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Annalen der königl. Sternwarte bei München, herausgeg. von J. v. Lamont. 21. Bd. Ebendas. 6 Mk.

Beobachtungen, meteorologische und magnetische, der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1876; herausgeg. von J. v. Lamont. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrg. 1876, I. Abth., Heft 1, 2 u. 3. Wien, Gerold 10 Mk. 40 Pf.

——, II. Abth., Heft 1 und 2. Ebendas. 4 Mk.

——, III. Abth., Heft 1 und 2. Ebendas. 5 Mk. 50 Pf.

Beobachtungsergebnisse der im Königreich Preussen und den Reichslanden eingerichteten forstlich-meteorologischen Stationen. 3. Jahrg., Nr. 1; herausgeg. v. Müttrich. Berlin, Springer. pro compl. 2 Mk.

Annalen des physikal. Centralobservatoriums in Petersburg. Jahrg. 1873, 1874 u. 1875; herausgeg. v. H. Wild. Leipzig, Voss. à 18 Mk. 80 Pf.

Crelle's Journal für Mathematik, fortgesetzt von Borchardt. 83. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1872. 28. Jahrg., redig. von Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 14 Mk. 25 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 7. Bd., Jahrg. 1875, 2. Heft. Ebendas. 4 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

ZMURKO, L., Ueber die Kriterien höherer Ordnung zur Untersuchung der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale etc. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

SCHÖNHOLZER, J., Die Auswerthung bestimmter Integrale durch Veränderungen des Integrationsweges. Bern, Fiala. 1 Mk. 60 Pf.

THOMAE, J., Ueber eine specielle Classe Abel'scher Functionen. Halle, Nebert. 4 Mk. 50 Pf.

DÖLP, H., Die Determinanten. 2. Aufl., bearb. von W. SOLDAU. Darmstadt, Brill. 2 Mk.

BECKER, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Thl.: Arithmetik und Algebra. 1. Buch. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

OHLERT, B., Lehrbuch der Mathematik. 1. Abth., 3. Thl. Elbing, Neumann-Hartmann. 3 Mk.

RUDEL, K., Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Bamberg, Schmidt. 60 Pf.

ERDMANN, B., Die Axiome der Geometrie; eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Leipzig, Voss. 4 Mk. 80 Pf.

NISSEN, H., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Thl.: Planimetrie. Schleswig, Bergas. 1 Mk. 50 Pf.

GYSEL, J., Beiträge zur analytischen Geometrie der Curven und Flächen zweiten Grades. Schaffhausen, Baader. 1 Mk.

FROMBECK, H., Bemerkungen zur Coordinatentheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

WEYR, E., Ueber Raumcurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

KLEIN, B., Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 50 Pf.

ERLER, W., Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

OUDEMANS, C., Die Triangulation von Java. 1. Abth. Haag, Nijhoff. 6 Mk.

FRISCHAUF, J., Tafeln zur Berechnung barometrischer Höhenmessungen. Wien, Hölder. 60 Pf.

MAYER, A., Geschichte des Princips der kleinsten Action. Leipzig, Veit & Comp. 80 Pf.

SCHMIDT, P., Ueber die innere Reibung fester Körper. Breslau, Gosohorsky. 1 Mk.

WERTHER, C. A., Die Gesetze der Anfangsgeschwindigkeit in den Bewegungen der Weltkörper. Rostock, Werther. 2 Mk.

Kutter, R., Die neuen Formeln für die Bewegung des Wassers in Kanälen etc. 2. Aufl. Wien, Waldheim. 10 Mk.

Wolff, Th., Photometrische Beobachtungen an Fixsternen. Leipzig, Breitkopf & Härtel. 9 Mk.

Wetzel, E., Kleines Lehrbuch der astronomischen Geographie. Berlin, Stubenrauch. 1 Mk. 60 Pf.

Günther, S., Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. 1. und 2. Heft. Halle, Nebert. 3 Mk. 90 Pf.

Gauss' Werke. 5. Bd. 2. Abdr. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 18 Mk.

Physik und Meteorologie.

Hoff, J. H. van't, Die Lagerung der Atome im Raume. Deutsch bearb. von F. Herrmann. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk.

Boltzmann, L., Ueber die Natur der Gasmoleküle. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Weber, L., Untersuchungen über die Temperatur der Maximaldichtigkeit für destillirtes und Meerwasser. Kiel, Häseler. 2 Mk.

Stefan, J., Ueber das Wärmeleitungsvermögen des Hartgummi. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Börnstein, R., Der Einfluss des Lichtes auf den elektrischen Leitungswiderstand von Metallen. Heidelberg, Winter. 1 Mk. 60 Pf.

Kohlrausch, F., Leitfaden der praktischen Physik. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Hahn, F., Ueber die Beziehungen der Sonnenfleckenperiode zu den meteorologischen Erscheinungen. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Wittstein, Th., Gedächtnissrede auf C. F. Gauss zur Feier des 30. April 1877. Hannover, Hahn. 40 Pf.

Winnecke, F., Gauss. Ein Umriss seines Lebens und Wirkens. Braunschweig, Vieweg. 60 Pf.

Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss. Leipzig, Hirzel. 3 Mk.

Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss. Herausgegeben von C. Bruhns. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1876.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Akustik.

1. Ueber die Klangfiguren einer quadratischen Platte von Flüssigkeit und des cubischen Volumens einer Luftmasse. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 38

Analytische Geometrie der Ebene.

2. Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 278.
3. Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene. Weinmeister. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 301.
4. Valeur de $\frac{d.\cos\varrho}{ds}$, ϱ étant l'angle entre le rayon de courbure et une direction donnée et s l'arc de courbe. Schoentjes. N. corresp. math.* II, 358.
5. Sur les asymptotes des courbes algébriques. De Tilly. N. corresp. math. II, 49, 149. — Niewenglowski ibid. 146.
6. Ueber Fusspunktcurven. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 139.
7. Sur deux formules relatives à la théorie des courbes planes. Mansion. N. corresp. math. II, 174.
8. Enveloppes paradoxales d'une multitude de droites. Niewenglowski. N. corr. math. II, 120. — Paturet ibid. 182. — Mansion ibid. 307.
9. Sur l'enveloppe de certaines droites relatives à une courbe plane quelconque. Laisant. N. corresp. math. II, 23.
10. Enveloppe des polaires du pole d'une spirale logarithmique par rapport à une série de circonférences. Brocard. N. corresp. math. II, 392.
11. Relation entre les m périodes cyclique de la quadratrice d'une courbe algébrique de degré m. Marie. Compt. rend. LXXX, 872.
12. Propriétés d'une ligne droite. Catalan. N. corresp. math. II, 124.
13. Limaçon de Pascal engendré par un triangle. Neuberg. N. corresp. math. II, 358.
14. Propriété de l'ovale de Descartes. Philippin. N. corresp. math. II, 85.

Vergl. Cycloide. Doppeltangente. Homogene Functionen. Imaginäres 126. Kegelschnitte. Krümmung 156, 157. Quadratur. Rectification. Trisection des Winkels.

Analytische Geometrie des Raumes.

15. Ueber einige Anwendungen eines besonderen Falles der homographischen Verwandtschaft. Korteweg. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 28.
16. Sur l'enveloppe d'un cylindre de révolution. Le Paige. N. corr. math. II, 296.

Vergl. Krümmung 155. Normalen. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Perspective. Quadratische Formen 221.

---

* Unter „N. corresp. math." verstehen wir von nun an die belgische Zeitschrift: „Nouvelle correspondance mathématique, redigée par E. Catalan avec la collaboration de P. Mansion, A. Laisant, H. Brocard, J. Neuberg et E. Lucas".

Astronomie.

17. Sur des formules de perturbation. E. Mathieu. Compt. rend. LXXX, 627, 1216. — Journ. mathém. XL, 183.
18. Sur une méthode du calcul des perturbations absolues des comètes. Gylden. Compt. rend. LXXX, 809, 907.
19. Sur les inegalités séculaires des grands axes des orbites des planètes. E. Mathieu. Crelle LXXX, 97.
20. Sur le mouvement de rotation de la terre. E. Mathieu. Compt. rend. LXXX, 1582.
21. On the theory of the moon's motion. Stockwell. Astr. Nachr. LXXXV, 113; LXXXVI, 131.
22. Bedenken gegen H. Stockwell's verbesserte Mondtheorie. Schjellerup. Astr. Nachr. LXXXV, 273.

Vergl. Elliptische Transcendenten 61. Geodäsie. Mechanik 164, 168, 169.

B.

Ballistik.

23. Sur la théorie générale des percussions et sur la manière de l'appliquer au calcul des effets du tir sur les différentes parties de l'affût. Putz. Compt. rend. LXXX, 295.
24. Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles après l'explosion. Resal. Journ. mathém. XL, 121.

Bernoulli'sche Zahlen.

25. Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. E. Lucas. N. corresp. math. II, 328. — Catalan ibid. 336.

Bestimmte Integrale.

26. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 224.
27. Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. Catalan. Journ. mathém. XL, 209.

Vergl. Gammafunctionen. Variationsrechnung.

C.

Cubatur.

28. Classification des intégrales cubatrices des volumes terminés par des surfaces algébriques. Définition géométrique des surfaces capables de cubature algébrique. Marie. Compt. rend. LXXX, 757.
29. Volume d'un segment sphérique égal à la différence d'un cylindre et d'un tronc de cone. Guillet. N. corresp. math. II, 396.
30. Anneau engendré par un segment parabolique dans sa rotation autour de l'axe. Guillet. N. corresp. math. II, 398.
31. Volume d'un tronc hyperbolique. Guillet. N. corresp. math. II, 399.

Cycloide.

32. Zur elementaren Behandlung der Cycloiden. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 128.

Vergl. Kegelschnitte 133. Mechanik 174.

D.

Determinanten.

33. Extraits de la théorie des déterminants de S. Günther. Brocard. N. corresp. math. II, 209.
34. Zur Theorie der Hesse'schen Determinante. Pasch. Crelle LXXX, 169.
35. Ueber die Determinanten, welche aus Functionen und deren Differentialen gebildet sind. Pasch. Crelle LXXX, 177.
36. Zur Construction einer unimodularen Determinante. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 134.

Vergl. Gleichungen 108, 114.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

37. Le trièdre et le tétraèdre avec application des déterminants. Dostor. N. corresp. math. II, 148. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 254.]

61. Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant les multiples d'une intégrale elliptique. Gylden. Compt. rend. LXXX, 1070.
Vergl. Geschichte der Mathematik 95. Quadratur 222. Rectification.

F.

Fourier'sche Reihe.

62. Sulla serie di Fourier. Ascoli. Annali mat. Ser. 2, VI, 21, 298.

Functionen.

63. Sull'uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione e costante. Schlaefli. Annali mat. Ser. 2, VI, 1.

64. Sur une propriété de la fonction $e^{\sqrt{x}}$. Glaisher. N. corresp. math. II, 240, 349. — Le Paige ibid. 279.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialquotienten. Gammafunctionen. Imaginäres. Integration (unbestimmte). Invarianten. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Productenfolge Reihen.

G.

Gammafunctionen.

65. Ueber die unvollständige Gammafunction. Hočevar. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 449.

Geodäsie.

66. Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura. Fergola. Annali mat. Ser. 2, VI, 246.
67. Sur le calcul des coordonnées géodésiques. Trepied. Compt. rend. LXXX, 36.
68. Sur une nouvelle méthode et un nouvel instrument de télémétrie. Giraud-Teulon. Compt. rend. LXXX, 1379.
69. Moyen facile d'obtenir sans instruments et avec une assez grande approximation la latitude d'un lieu. D'Avout. Compt. rend. LXXX, 372.
Vergl. Geschichte der Mathematik 88.

Geometrie (höhere).

70. Sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes. E. Lucas. N. corresp. math. II, 384.
71. Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. E Lucas. N. corresp. math. II, 225, 255, 289.
72. Studio sulla geometria projettiva. D'Ovidis. Annali mat. Ser. 2, VI, 72.
73. Sur quelques propriétés des courbes algébriques. Laguerre. Compt. rend. LXXX, 1218.
74. Sur la théorie des transformations linéaires Mansion. N. corresp. math. II, 15, 41.
75. Sur les courbes unicursales considérées comme des cissoïdes. Mansion N. corresp. math. II, 321, 404.
76. Sur les courbes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$. Niewenglowski. Compt. rend. LXXX, 1067. — N. corresp. math. II, 120. — Fouret. Compt rend. LXXX, 1158.
77. Théorèmes généraux sur le déplacement d'une figure plane sur son plan. Chasles. Compt. rend. LXXX, 346.
78. Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable. Brisse. Journ. mathém. XL, 141. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 79.]
79. Zur Geometrie der Geraden. Moshammmer. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 449.
80. Par un point donné, mener une sécante telle, que le segment intercepté entre les côtés d'un angle donné soit vu, d'un autre point donné, sous un angle connu. Brocard. N. corresp. math. II, 59, 115. — Laisant ibid. 59. — Neuberg ibid. 216. — Mathew Collins ibid. 311
81. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 427.
82. Extrait de deux lettres de Mr. Bischoff à Mr. Cremona. Annali mat. Ser. 2, VI, 144.
83. Untersuchungen über cubische Raumcurven. R Sturm. Crelle LXXX, 128, 334. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 78]
84. Sur des courbes gauches du genre zéro. Saltel. Compt. rend. LXXX, 1324.
85. On the correlation of two planes. Hirst. Annali mat. Ser. 2. VI, 260.
Vergl. Gleichungen 107. Normalen 180. Perspective. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

86. Lebenszeit des Pappus. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 70.
87. Die geometrischen Progressionen bei den Arabern. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 57.
88. Die Chorographie des Joachim Rheticus. Hipler. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 125.
89. Sur la valeur de π. Mansion. N. corresp. math. II, 213, 281.
90. Sur un nouveau document historique relatif à Salomon de Caus. Depping. Compt. rend. LXXX, 333. — Dumas ibid. 804
91. Sur John Wilson. Catalan. N. corresp. math. II, 32. — De Marsilly ibid. 33. — Glaisher ibid. 110.
92. Note historique sur les carrés magiques. P. S. N. corresp. math. II, 55.
93. Die magischen Quadrate bei Gauss. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 61.
94. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Boltzmann. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 452.
95. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. Crelle LXXX, 205.
96. Sur la nécessité d'une publication des oeuvres de Cauchy. Bertrand. Compt. rend. LXXX, 317.
97. Note biographique sur Ch. E. Delaunay. Catalan. N. corresp. math. II, 54.
98. Alfredo Clebsch e i suoi lavori scientifici. Annali mat. Ser. 2, VI, 153. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 296.]
99. Barnaba Tortolini, † 24. Agosto 1874. Annali mat. Ser. 2, VI, 352.
100. Todesanzeige von F. W. A. Argelander, † 17. Februar 1875. Astr. Nachr. LXXXV, 161.
101. Annonce du décès de C. L. Mathieu, † 5. Mars 1875. Compt. rend. LXXX, 581, 1457.
102. Nekrolog von C. G. Reuschle, † 22. Mai 1875. Zech. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 1.
103. Necrologue of Prof. Jos. Winlock, † 11. June 1875. Rogers. Astr. Nachr. LXXXVI, 116.
104. Todesanzeige von H. L. d'Arrest, † 14. Juni 1875. Astr. Nachr. LXXXVI, 63.
105. Todesanzeige von A. Reslhuber, † 29. Sept. 1875. Astr. Nachr. LXXXVI, 321.
106. Adolph Zeising († 27. April 1876) als Mathematiker. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXI, hist. Abth. 157.

Vergl. Differentialgleichungen 49. Gleichungen 110. Kegelschnitte 129. Kreis 139, 140. Mechanik 163. Reihen 228. Zahlentheorie 253, 254, 257.

Gleichungen.

107. Sur une extension analytique du principe de correspondance de Mr. Chasles. Saltel. Compt. rend. LXXX, 1064.
108. Sur l'élimination. Calcul des fonctions de Sturm. Lemonnier. Compt. rend. LXXX, 252.
109. Sur la transformation des équations. Catalan. N. corresp. math. II, 342.
110. Sur la méthode d'approximation de Cardan. Brocard. N. corresp. math. II, 176.
111. Sur les fonctions dissymmétriques des racines d'une équation. Cayley. N. corresp. math. II, 119.
112. Zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 364.
113. Sur l'équation du cinquième degré. Brioschi. Compt. rend. LXXX, 753, 815.
114. Théorèmes sur des équations possédant des racines communes. Lemonnier. Compt. rend. LXXX, 111.

H.

Homogene Functionen.

115. Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie analytique. Laguerre. Journ. mathém. XL, 99.

Vergl. Determinanten. Invarianten. Quadratische Formen.

Hydrodynamik.

116. Determinazione della pressione nell' interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne. Lipschitz. Annali mat. Ser. 2, VI, 226.

117. Zur Theorie der inneren Reibung. O. E. Meyer. Crelle LXXX, 315. [Vergl. Bd. XX, Nr. 452.]
118. Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 47.
119. De la propagation des marées dans les rivières (d'après Mr. H. Airy). Guieysse. Journ. mathém. XL, 399

Vergl. Akustik. Geschichte der Mathematik 94.

Hyperbel.

120. Construction de l'hyperbole. Retsin. N. corresp. math. II, 143. — Catalan ibid. 143.
121. Lieu des milieux des diagonales de certains trapèzes d'aire constante. Habbé & Guillet. N. corresp. math. II, 158.
122. Sur l'hyperbole équilatère et ses asymptotes. Brocard. N. corresp. math. II, 105.

Vergl. Cubatur 31. Krümmung 157.

I.

Imaginäres.

123. Sur les fonctions de quantités complexes. De Marsilly. N. corresp. math. II, 350.
124. Sur une question paradoxale. Laisant. N. corresp. math. II, 274, 353. — Catalan ibid. 276. — Mansion ibid. 369.
125. Sur certains nombres complexes compris dans la formule $a+b\sqrt{-c}$. P. Pepin. Journ. mathém. XL, 317.
126. Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 325.

Integration (unbestimmte).

127. Two theorems in integration. Malet. Annali mat. Ser. 2, VI, 252.

Invarianten.

128. Recherches sur les covariants. C. Jordan. Compt. rend. LXXX, 875, 1160.

K.

Kegelschnitte.

129. Sur l'essai pour les coniques de Pascal. Le Paige. N. corresp. math II, 9.
130. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Hesse. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 1.
131. Geometrischer Ort eines Punktes in der Ebene, welcher einem fortrückenden Punktepaare von constanter Entfernung auf der Fundamentallinie entspricht. Hesse. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 73.
132. Coniques se déplaçant de manière que chacun des foyers reste sur une droite donnée. Catalan. N. corresp. math. II, 75. — Brocard ibid. 277.
133. Roulettes de coniques. Brocard. N. corresp. math. II, 373.
134. Des quatre coniques circonscrites à un triangle un foyer étant donné. Neuberg. N. corresp. math. II, 356
135. Sur les coniques circonscrites à un quadrilatère. Neuberg. N. corresp. math. II, 318
136. Sur les polygones circonscrits à une conique. Neuberg. N. corresp. math. II, 1, 34, 65.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

137. Ueber eine Kettenbruchentwickelung. Schendel. Crelle LXXX, 95.
138. Ueber aufsteigende Kettenbrüche. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 178.

Kreis.

139. Eine analytische Auflösung der Aufgabe des Apollonius. Mertens. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 443.
140. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck. Mertens. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 297.
141. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Van Aubel. N. corresp. math. II, 155.

142. Le lieu des points dont la somme des puissances par rapport à *n* circonférences données est constante est une circonférence. Van Aubel. N. corresp. math. II, 156.
143. Somme des puissances d'un point par rapport aux circonférences décrites sur les côtés d'un quadrilatère. Van Aubel. N. corresp. math. II, 184.
144. Somme des puissances de *n* points par rapport à une circonférence passant par leur centre de gravité. Van Aubel. N. corresp. math. II, 185.
145. Différences des puissances d'un point par rapport à trois circonférences. Van Aubel. N. corresp. math. II, 185.
146. Propriété du centre de similitude externe de deux circonférences. Van Aubel. N. corresp. math. II, 187.
147. Produit de deux cordes parallèles dans un cercle. Barzin. N. corresp. math. II, 316.
148. Formule relative à deux circonférences dont la corde commune et une tangente commune sont données. Neuberg. N. corresp. math. II, 250.
149. Tangentes à deux circonférences données faisant entre elles un angle donné. Neuberg. N. corresp. math. II, 219.
150. Sur trois circonférences ayant même axe radical et étant coupées par une quatrième circonférence. Tesch. N. corresp. math. II, 61. — Neuberg ibid. 209.
151. Trois circonférences se coupant en un point tandis que les autres points communs sont en ligne droite. Guillet. N. corresp. math. II, 399.
152. Sur les rayons du cercle circonscrit et des cercles inscrit et ex-inscrits d'un triangle. Boset. N. corresp. math. II, 273. — Neuberg ibid. 391.
153. Construire un triangle connaissant les rayons de deux des cercles tangents aux trois côtés et le rayon du cercle inscrit. Van Aubel. N. corresp. math. II, 315.

Vergl. Geschichte der Mathematik 89.

Krümmung.

154. Die Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Beez. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 373. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 327.]
155. Propriétés relatives à la courbure de la développée d'une surface quelconque. Halphen. Compt. rend. LXXX, 116.
156. Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. Catalan. N. corresp. math. II, 178.
157. Construction für die Krümmungsmittelpunkte von Ellipsen und Hyperbeln. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 80.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Oberflächen 188.

Kugelfunctionen.

158. Zur Theorie der Kugelfunctionen. Schendel. Crelle LXXX, 86.
159. Sur les fonctions de Legendre. Laurent. Journ. mathém. XL, 373.
160. Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X_n. Dini. Annali mat. Ser. 2, VI, 216.
161. Sopra le serie di funzioni sferiche. Dini. Annali mat. Ser. 2, VI, 112, 208.

M.

Magnetismus.

162. Sur la détermination de la quantité de magnétisme d'un aimant. Blondlot. Compt. rend. LXXX, 653.

Maxima und Minima.

Vergl. Ellipse. Oberflächen 192, 193. Variationsrechnung.

Mechanik.

163. Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé suivant Poinsot relativement à deux points fondamentaux de la mécanique analytique. Breton (de Champ). Journ. mathém. XL, 81, 263. — Bertrand ibid. 181.
164. Sur le problème des trois corps. Allégret. Journ. mathém. XL, 277.
165. Sur les applications des théories générales de la Dynamique au mouvement d'un corps de forme variable. Durrande. Compt. rend. LXXX, 877.
166. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen. Mischer. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 219.

167. Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax^2_1 + Bx^2_2 + Cx^2_3$. Böttcher. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 145.
168. Construction der Bahn eines Punktes, der von einem festen Punkte nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird. Schellbach. Crelle LXXX, 194.
169. Bewegung in Kegelschnitten von mehr als zwei Körpern, welche sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen. Veltmann. Astr. Nachr. LXXXVI, 17.
170. Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe. C. Jordan. Journ. mathém. XL, 7. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 133.]
171. Résultante de certaines forces appliquées au centre d'une circonférence. Schoentjes. N. corresp. math. II, 360.
172. Sur un théorème de cinématique. Liguine. N. corresp. math. II, 354.
173. Les compas composés de Peaucellier, Hart & Kempe. Mansion. N. corresp. math. II, 129.
174. Théorème relatif au pendule cycloïdal. Liguine. N. corresp. math. II, 395.
175. De la résistance au choc d'une chaine à maillons plats. Resal. Journ. mathém. XL, 43.
176. Sur les modes d'équilibre limite les plus simples que peut présenter un massif sans cohésion fortement comprimé. Boussinesq. Compt. rend. LXXX, 546, 623.
177. Construction géométrique des moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées solidaires. Fouret. Compt. rend. LXXX, 550.
178. Sur la théorie des poutres droites continues. M. Levy. Compt. rend. LXXX, 749.

Vergl. Akustik. Astronomie. Ballistik. Elasticität. Hydrodynamik. Imaginäres 126. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Molecularphysik.

179. Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik. Gosiewski. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 116.

N.

Normalen.

180. Généralisation de la théorie des normales des courbes géométriques, ou l'on substitue à chaque normale un faisceau de droites. Chasles. Compt. rend. LXXX, 505.
181. Sur la construction des normales à quelques courbes et à quelques surfaces. Ghysens. N. corresp. math. II, 165.
182. Ueber die Flächen, deren Normalen Winkel mit den Coordinatenebenen bilden, welche gegebene Functionen der Coordinaten sind. Schloemilch. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 75.

O.

Oberflächen.

183. Sur la notion des systèmes généraux des surfaces, algébriques ou transcendantes, deduite de la notion des implexes. Fouret. Compt. rend. LXXX, 167. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 154.]
184. Sur quelques conséquences d'un théorème général relatif à un implexe et à un système de surfaces. Fouret. Compt. rend. LXXX, 805.
185. Ueber Curven auf Rotationsflächen. Biehringer. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 229. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 138.]
186. Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen. R. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 265.
187. Solutions géométriques de quelques problèmes, relatifs à la théorie des surfaces, et qui dépendent des infiniment petits du troisième ordre. Mannheim. Compt. rend. LXXX, 541, 619.
188. Propriétés de courbes tracées sur les surfaces. Ribaucour. Compt. rend. LXXX, 642. — Mannheim ibid. 725. — Laguerre ibid. 822. — O. Bonnet ibid. 823.
189. Sur un point de la théorie des surfaces. Halphen. Compt. rend. LXXX, 258.
190. Théorie des surfaces de révolution qui, par voie de déformation, sont superposables les unes aux autres et chacune à elle-même dans toutes ses parties. Reech. Compt. rend. LXXX, 1388, 1442.

191. Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. Mannheim. Journ. mathém. XL, 57.
192. Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. H. A. Schwarz. Crelle LXXX, 280.
193. Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. H. A. Schwarz. Crelle LXXX, 301.
Vergl. Cubatur 28. Krümmung 155.

Oberflächen zweiter Ordnung.

194. Démonstration d'un théorème de Mr. Hesse. Bischoff. Annali mat. Ser. 2, VI, 232.
195. Décagones gauches inscriptibles à une surface du second ordre. P. Serret. N. corresp. math. II, 118.
Vergl. Ellipsoid.

Optik.

196. Sur la diffraction, propriétés focales des réseaux. Cornu. Compt. rend. LXXX, 645.
197. Nouvelle formule destinée à calculer la force réfringente ou le numéro des lunettes de presbyte. Monoyer. Compt. rend. LXXX, 919.

P.

Parabel.

198. Construction d'une parabole. Moreau. N. corresp. math. II, 85. — Brocard ibid. 312.
199. Le polygone formé par n tangentes à une parabole est la moitié du polygone qui a pour sommets les points de contact. Lucie Leboeuf. N. corresp. math. II, 153.
Vergl. Cubatur 30.

Perspective.

200. Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Hauck. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 81, 402.
201. Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques. Halphen. Compt. rend. LXXX, 638.

Planimetrie.

202. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 294.
203. Sur le vide qui reste en cherchant à remplir un polygone au moyen de cercles. Brocard. N. corresp. math. II, 106.
204. Décompositions des figures rectilignes en parties qui en constituent d'autres. Busschop. N. corresp. math. II, 83.
205. Quadrilatère partagé en deux par une sécante quelconque. Even. N. corresp. math. II, 109. — Mansion ibid. 109.
206. Démonstration des propriétés du quadrilatère inscriptible. Mansion. N. corresp. math. II, 181.
207. À un triangle isoscèle inscrire un hexagone équilatéral. Neuberg. N. corresp. math. II, 219.
208. Cas rémarquable d'inégalité de deux triangles. Gelin. N. corresp. math. II, 338.
209. Propriétés des trois triangles équilatéraux construit sur une droite et sur ses deux segments Van Aubel. N. corresp. math. II, 90.
210. Propriété du triangle coupé par une bissectrice. Van Aubel. N. corresp. math. II, 157.
211. Propriété d'un triangle. Neuberg. N. corresp. math. II, 248.
212. Triangle coupé par une transversale. Neuberg. N. corresp. math. II. 220.
213. Trois droites qui dans un triangle se coupent en un même point. Modard. N. corresp. math. II, 218.
214. Propriété des droites joignant les sommets d'un triangle à un même point. Even. N. corresp. math. II, 89.
215. Les droites tirées perpendiculairement sur les côtés d'un triangle à partir des projections de ses sommets sur une droite quelconque passent par un même point. Van Aubel. N. corresp. math. II, 281, 316.

216. Angle plan coupé par une transversale droite. Neuberg. N. corresp. math. II, 249.
217. Sul potentiale mutuo di due sistemi rigidi ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico. Beltrami. Annali mat. Ser. 2, VI, 233.
Vergl. Mechanik 167.

Productenfolge.

218. Sur un produit de sinus. Catalan. N. corresp. math. II, 244.

Q.

Quadratische Formen.

219. Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst. Rosanes. Crelle LXXX, 52.
220. Ueber die Darstellung der ternären quadratischen Formen durch Quadrate. Igel. Annali mat. Ser. 2, VI, 141.
221. Ueber das simultane System von drei ternären quadratischen Formen. S. Gundelfinger. Crelle LXXX, 73.

Quadratur.

222. Ueber die durch elliptische Integrale quadrirbaren Sectoren der Curve $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 133.
223. Sur l'erreur de la formule de Poncelet relative à l'évaluation des aires. Chevilliet. Compt. rend. LXXX, 823.
224. Quadrature approchée d'un segment de courbe plane. Guillet. N. corresp. math. II, 217.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 11. Parabel 199. Planimetrie 203.

R.

Rectification.

225. Sur la rectification des ovales de Descartes. Genocchi. Compt. rend. LXXX, 112, 837. — S. Roberts ibid. 687.
Vergl. Geschichte der Mathematik 89. Reihen 230.

Reihen.

226. Sur les nombres polyèdraux. Charlier. N. corresp. math. II, 24.
227. Sur le triangle arithmétique de Pascal et sur la série de Lamé. E. Lucas. N. corresp. math. II, 70.
228. Sur l'emploi du calcul symbolique dans la théorie des séries récurrentes. E. Lucas. N. corresp. math. II, 201.
229. Développement de $\frac{2}{\pi}$. Bauer. N. corresp. math. II, 272.
230. Sur le développement de *arctg x*. Mansion. N. corresp. math. II, 308.
231. Ueber die Entwickelung abgekürzter convergirender Potenzreihen. W. Jordan. Astr. Nachr. LXXXV, 73.
232. Sur la généralisation d'une identité remarquée par M. Catalan. Tchébychef. N. corresp. math. II, 303.
233. Sur le développement en une série d'exponentielles. Popoff. Crelle LXXX, 201.
Vergl. Elliptische Transcendenten 61. Fourier'sche Reihe. Geschichte der Mathematik 87. Kugelfunctionen.

S.

Schwerpunkt.

234. Zwei Sätze vom Schwerpunkt. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 450.
Vergl. Kreis 144.

Singularitäten.

235. Rapport sur un mémoire de Mr. Halphen concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. De la Gournerie. Compt. rend. LXXX, 97
236. Sur les singularités des courbes de quatrième classe. Laguerre. Journ. mathém. XL, 265.

237. Sur la détermination des singularités de la courbe gauche, intersection de deux surfaces d'ordres quelconques qui ont en commun un certain nombre de points multiples. Saltel. Compt. rend LXXX, 1285.
Vergl. Doppeltangenten.

Stereometrie.

238. Théorème sur des plans parallèles coupant deux droites quelconques. Neuberg. N. corresp. math. II, 355.
Vergl. Tetraeder.

T.

Tetraeder.

239. Propriété du tétraèdre. Brocard. N. corresp. math. II, 108.
240. Théorème sur le tétraèdre. Neuberg. N. corresp. math. II, 356.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung.

Trisection des Winkels.

241. De la trisection de l'angle au moyen du compas. E. Lucas. N. corresp. math. II, 14.

V.

Variationsrechnung.

242. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale. Mertens. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 142.

W.

Wärmelehre.

243. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie. Dahlander. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 287.
244. Sur l'expression du travail relatif à une transformation élémentaire. Moutier. Compt. rend. LXXX, 40.
245. Sur la loi des variations diurnes et annuelles de la température dans le sol. Peslin. Compt. rend. LXXX, 1090.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

246. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Mees. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 126. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 396, 397.]
247. Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhang stehende Fragen. Helmert. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 192.
248. Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler. Helmert. Astr. Nachr. LXXXV, 353.
249. Sur la méthode des moindres carrés. Laurent. Journ. mathém. XL, 75.
250. Sur la méthode des moindres carrés. Faye. Compt. rend. LXXX, 352.
251. Ueber Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements. Baeyer. Astr. Nachr. LXXXVI, 177.
252. Sur la substitution par approximation, entre des limites déterminées, du rapport des variables d'une fonction homogène de deux variables à une autre fonction homogène du même degré. Resal. Compt. rend. LXXX, 1185.

Z.

Zahlentheorie.

253. Sur les carrés magiques. Mansion. N. corresp. math. II, 161, 193. — Lucas ibid. 215.
254. Sur un problème d'Euler relatif aux carrés magiques. E. Lucas. N. corresp. math. II, 97.
255. Sur un mémoire de Libri. Catalan. N. corresp. math. II, 30. — Realis ibid. 122. — De Tilly ibid. 150.
256. Sur les nombres parfaits. Carvalho. N. corresp. math. II, 180.
257. Extension d'un théorème de Stiefel. Laisant. N. corresp. math. II, 341.

258. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen. Otte. Zeitschr. Math. Phys XXI, 366.
259. Theilbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine andere. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 365.
260. Démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. Mansion. N. corresp. math. II, 233, 266.
261. Observatio arithmetica. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, VI, 148.
262. Sur les résidus de septième puissance. P. Pepin. Compt. rend. LXXX, 311.
263. Sur la partition des nombres. J. W. L. Glaisher. Compt. rend. LXXX, 255.
264. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei. F. Müller. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 227. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 399.]
265. Sur un théorème d'arithmétique. Catalan. N. corresp. math. II, 179.
266. Ueber die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXI, 79.
267. Diverses propositions d'arithmétique. E. Lucas. N. corresp. math. II, 101.
268. Théorèmes d'arithmétique après Mrs. Petersen et E. Lucas. Mansion. N. corresp. math. II, 85.
269. Théorème d'arithmétique. P. S. N. corresp. math. II, 123. — Neuberg ibid. 215.
270. Sur un porisme de Diophante. Brocard. N. corresp. math. II, 246.

Vergl. Geschichte der Mathematik 91, 92, 93. Imaginäres 125.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Ludovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia comprendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' altra parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da Enrico Giordani Bolognese. Milano 1876. *R. Stabilimento litografico di Luigi Ronchi e tipografia degl' ingegneri.*

Aufgaben, welche in Gleichungsform gebracht den zweiten Grad übersteigen, zunächst also auf cubische Gleichungen führen, waren den Mathematikern seit den ältesten Zeiten entgegengetreten. Wir brauchen nur an den freilich einfachsten Fall einer rein cubischen Gleichung, an die delische Aufgabe von der Würfelverdoppelung zu erinnern, welche, wie wir wissen, über die Zeit des Euripides hinaufreicht, also mindestens in das V. vorchristliche Jahrhundert. Die zur Lösung dieser Aufgabe allein nothwendige Ausziehung einer Cubikwurzel war die alexandrinische Wissenschaft, soweit dieselbe heute bekannt ist, arithmetisch zu leisten ausser Stande. Geometrische Constructionen, beziehungsweise mechanische Hilfsmittel, mussten dazu dienen, die Durchschnittspunkte von mitunter recht complicirten Curven zu liefern, und die mit dem Zirkel zu messende Entfernung jener Durchschnittspunkte von anderen gegebenen Punkten gab alsdann die verlangte Cubikwurzel. Wann und durch wen die arithmetische Ausziehung der Cubikwurzel entstanden sein mag, ist noch theilweise ein Räthsel. In Indien begegnen wir derselben im VII. nachchristlichen Jahrhundert, ohne dass von ihr als von einer neuen Erfindung besonderes Aufheben gemacht würde. In Europa dagegen lehrte Leonardo von Pisa 1202 in seinem *Liber Abbaci* zuerst die Operation, deren Erfindung er ausdrücklich für sich in Anspruch nimmt, ein Anspruch, dessen Berechtigung bei Leonardo's ungemeiner Gewissenhaftigkeit gegenüber von ihm bekannt gewordenen Vorgängern nicht dem leisesten Zweifel ausgesetzt ist. Kurze Zeit darauf lehrte Johann von Sacrobosco gleichfalls die Cubikwurzelausziehung, jedenfalls aus indisch-arabischer Ueberlieferung.

Die durch blosse Cubikwurzelausziehung lösbare rein cubische Gleichung ist freilich nur die elementarste unter den Gleichungen von höherem Grade als der zweite ist, und wir müssen uns weiter umsehen, wo und wann unreine cubische Gleichungen auftreten. Ein arabischer Schriftsteller Omar Alkhayami, in dessen Lebenszeit das Jahr 1079 fällt, unterscheidet 13 verschiedene Gattungen cubischer Gleichungen, je nachdem mehr oder weniger Glieder vorkommen und dieselben, wie wir uns ausdrücken würden, mit positiven Coefficienten versehen rechts oder links vom Gleichheitszeichen auftreten. Sie alle weiss er durch einander durchkreuzende Kegelschnitte aufzulösen. Eine unreine cubische Gleichung war es dann auch, welche Johann von Palermo bei Gelegenheit der vermuthlich 1225 in Pisa angeordneten öffentlichen Production des Leonardo von Pisa diesem vorlegte, die Gleichung $x^3+2x^2+10x=20$. Leonardo fand nun, dass euklidische Irrationalzahlen, d. h. solche, bei welchen nur Quadratwurzeln in beliebiger Verschränkung vorkommen, nicht im Stande sind, einer solchen Aufgabe zu genügen. Das war der erste erfolgreiche Schritt zur allgemeinen Theorie der Gleichungen, bis zu einem gewissen Grade dem Satze vergleichbar, das Gleichungen von höherem als dem vierten Grade, von besonderen Fällen abgesehen, überhaupt durch algebraische Functionen nicht mehr aufgelöst werden können, durch welchen Ruffini (1806) und in strengerer Beweisführung Abel (1824) die Wissenschaft bereicherten. Neben dem negativen Satze, wie die Wurzel jener cubischen Gleichung nicht aussehen könne, gab aber Leonardo auch einen numerischen Näherungswerth der Wurzel in Gestalt von $x=1\;22'\;7''\;42'''\;33^{IV}\;4^{V}\;40^{VI}$, wo die einzelnen Zahlen als Sexagesimalbrüche wachsender Ordnung gelesen werden müssen. Man hat nachgerechnet, dass dieser Näherungswerth auf ein Dreissigtausendmilliontel genau ist. Um so interessanter wäre es, die Methode zu kennen, deren Leonardo sich dabei bediente. Leider besitzen wir zur Ermittelung derselben nicht den geringsten Anhaltspunkt. Wenn Hankel (Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, S. 290 flgg.) zu diesem Zwecke auf eine Methode aufmerksam macht, deren ein arabischer Schriftsteller muthmasslich des XV. Jahrhunderts sich bediente, um $x^3+Q=Px$ näherungsweise zu lösen, so ist zwar die Methode selbst gewiss würdig, in der Geschichte der Algebra aufbewahrt zu werden, aber die Schlüsse, welche Hankel daran anknüpft, sind unrichtig. Ist doch der Rückschluss, dass eine spätere Methode der Hauptsache nach schon zwei Jahrhunderte früher bekannt gewesen sei, an sich ein sehr gewagter. Dazu kommt zweitens, dass die Form der Gleichung des Leonardo sich von der Form der durch den Araber behandelten wesentlich unterscheidet, während jede andere Form noch im XVI. Jahrhundert, wie wir gleich sehen werden, als besonderer Fall besondere Schwierigkeiten machte. Dazu kommt drittens, dass man bei genauerer Beachtung der arabischen Methode nachweisen kann, dass sie auf Leonardo's Gleichung überhaupt nicht anwendbar ist.

Wie nun auch Leonardo verfahren sein mag, die Thatsache, dass er eine cubische unreine Gleichung mit ausserordentlich scharfer Annäherung gelöst hat, steht fest, und vielleicht dem Eindrucke, den diese bis dahin unerhörte Leistung hervorbrachte, ist es zuzuschreiben, dass von diesem Augenblicke an die cubischen Gleichungen nicht aufhörten, das Interesse italienischer Mathematiker zu fesseln, bis es ihnen endlich gelang, die Auflösung derselben zu finden. Libri (*Histoire des sciences mathématiques en Italie II*, 213 Note) macht beispielsweise auf eine handschriftliche, muthmasslich im XIV. Jahrhundert in Florenz entstandene Algebra aufmerksam, in welcher die Gleichung $px^3 = ax + b$ durch $x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + b}$ gelöst sei. Diese Auffassung von Libri ist zwar falsch, indem der Text (abgedruckt bei Libri III, 306) nicht so, wie er behauptet, verstanden werden kann, sondern nur als $x = \frac{a}{2p} + \sqrt{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + \frac{b}{p}}$, d. h. die cubische Gleichung ist als quadratische behandelt; aber die Gewissheit, dass man in jener Zeit sich überhaupt mit cubischen Gleichungen beschäftigte, wird durch unsere Einwendungen nicht angetastet. Cubischen Gleichungen forschte bei seinem Aufenthalte in Italien auch Regiomontanus nach. Im Februar 1464 stellt er in einem Briefe an Bianchini eine Aufgabe, welche modern geschrieben $ax^3 = 3ab^2x - b^2(a^2 + b^2 - c^2)$ hiesse, und fügt hinzu: „*Si dabitis lineam dabo cordam unius gradus.*“ Man kannte nämlich den Sinus und Cosinus der Winkel von 18^0 und von 30^0, welche mit Hilfe von Quadratwurzeln in genauer Weise dargestellt, beziehungsweise bis zu beliebiger Annäherung berechnet werden konnten. Keiner höheren Hilfsmittel bedurfte es, um die Winkelfunctionen von $30^0 - 18^0 = 12^0$, von $\frac{12^0}{2} = 6^0$ und von $\frac{6^0}{2} = 3^0$ abzuleiten. Hier stockte die Rechnung. Der Uebergang von den Winkelfunctionen von 3^0 zu denen von 1^0 verlangte die Auflösung einer cubischen Gleichung, und diese forderte demgemäss Regiomontanus von seinem wissenschaftlichen Freunde. Konnte sie überhaupt geliefert werden? Trotz der sicherlich nicht untergegangenen Tradition von der denkwürdigen Leistung des Leonardo von Pisa war darüber Zweifel. Luca Pacioli gab demselben bestimmten Ausdruck. In seiner 1494 gedruckten *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita* spricht er nach den Gleichungen ersten und zweiten Grades, deren Auflösung er lehrt, auch von den Gleichungen vierten Grades, von welchen er acht Formen unterscheidet. Die drei ersten Formen: $x^4 = a$, $x^4 = ax$, $x^4 = ax^2$, sind als reine Gleichungen vierten, dritten und zweiten Grades durch blosse Wurzelausziehungen lösbar. Die drei letzten: $x^4 + a = bx^2$, $x^4 + ax^2 = b$, $x^4 = ax^2 + b$ (wo a und b immer positive Zahlen sind), haben nur scheinbar die Form von Gleichungen vierten Grades und lösen sich als quadratische Gleichungen. Als vierte und fünfte Form endlich treten die Gleichungen $x^4 + ax^2 = bx$ und $x^4 + ax = bx^3$ auf. Zunächst könnte jede derselben durch x getheilt und damit auf eine cubische Gleichung ($x^3 + ax = b$ und $x^3 + a = bx$) zurückgeführt werden. Luca Pacioli unterlässt solches; er begnügt sich vielmehr, das Wort *Impossibile* daneben drucken zu lassen, das Eingeständniss der für ihn wenigstens vorhandenen Unmöglichkeit einer Auflösung.

Was für Pacioli noch unmöglich war, gelang einem nur wenig jüngeren Zeitgenossen. In Bologna lehrte von 1496—1526 ein Scipione del Ferro, von dessen Abstammung, von dessen Bildungsgang, ja von dessen Schriften unmittelbar Nichts erhalten ist, wiewohl er unzweifelhaft zu den hervorragendsten Mathematikern seines Jahrhunderts gehört haben muss. Unter seinen Schülern kann sehr wohl Nicolaus Copernicus gesessen haben, der bekanntlich von 1496 bis 1500 in Bologna studirte. Ueber seine Lebensverhältnisse wissen wir nur aus den Verzeichnissen der Universität Bologna, dass er in den genannten Jahren dort mathematische Vorlesungen hielt, dass er vermuthlich im letzten Jahre 1526 seinen Schwiegersohn Annibale dalla Nave zum Gehilfen hatte, dass er wahrscheinlich in dieser Zeit starb, indem seit 1527 sein Name in den Vorlesungsverzeichnissen verschwindet und statt seiner eben Annibale dalla Nave eingetreten zu sein scheint, dessen Lehrthätigkeit ununterbrochen bis 1558 sich verfolgen lässt. Scipione del Ferro, auch wohl Ferreus mit lateinischer Form des Namens genannt, hat nun unzweifelhaft die Lösung der dreigliedrigen, des quadratischen Gliedes entbehrenden cubischen Gleichung $x^3 + ax = b$ gefunden. Er hat sie niedergelegt in einem Werke, dessen Handschrift als Erbstück in den Besitz von Dalla Nave gelangte, hat sie aber auch Schülern mitgetheilt, wiewohl wir nicht sicher wissen, um welche Zeit dieses geschah. Man möchte vermuthen, dass erst gegen das Ende seiner Lehrthätigkeit die gewaltige Entdeckung ihm gelang, da sonst die Verkennung seiner Verdienste, das Verschwinden seines Namens in den nächsten Jahrhunderten selbst aus solchen Schriften, welche historische Nachweise mit Vorliebe enthalten, nur noch räthselhafter erscheinen wird, und dennoch spricht die einzige Kunde, welche auf die Verbreitung seiner Lösung sich bezieht, von einer erheblich früheren Zeit, von dem Jahre 1504 etwa. Der Schüler, um den es sich handelt, war ein gewisser Antonio Maria del Fiore, lateinisch Floridus genannt. Wir wissen von ihm, dass er 1530 einen Mathematiker von Brescia mit Namen Zuane de' Tonini da Coi, lateinisch Johannes Colla, herausforderte, im öffentlichen Wettkampfe mit ihm Probleme dritten Grades aufzulösen. Da Coi war nicht im Stande, das Gewünschte zu leisten, und wandte sich rathsuchend an einen Landsmann, dessen Persönlichkeit ebenso wie die einiger anderen Mathematiker uns einen Augenblick beschäftigen muss, da in geschichtlichen Fragen, insbesondere wenn es um einander schroff widersprechende Aussagen sich handelt, oftmals die Kenntniss der Charaktere der Aussagenden zur Entscheidung führt.

Nicolo war der Sohn eines Postillons, Micheletto mit diminutivem Namen, um die kleine Statur desselben zu kennzeichnen. Nicolo erbte von dem Vater die kurze Gestalt, fast das einzige Erbtheil, auf welches die sechsjährige Waise um 1506 beim Tode Micheletto's sich Hoffnung machen konnte. Die Mutter ernährte kümmerlich ihre drei Kinder, unter welchen Nicolo damals schon lesen konnte. 1512 wurde Brescia durch die Franzosen eingenommen, welche in der eroberten Stadt fürchterlich hausten. Der 12jährige Nicolo wurde im Dome, wohin seine Mutter mit ihm sich geflüchtet hatte, durch fünf Hiebe verwundet, deren einer über das Gesicht ging und beide Kiefer spaltete. Diese letzte Wunde heilte nur mangelhaft bei der geringen Pflege, welche die Mutter dem Knaben gewähren konnte. War sie doch nicht im Stande, einen Arzt zu bezahlen, und musste sich begnügen, die Wunden durch häufiges Waschen rein zu erhalten als einzige Unterstützung bei der Heilung. So vernarbte der grässliche Hieb über die unteren Theile des Gesichts nicht in richtiger Weise, die Zähne blieben wacklig, die Sprache wurde stotternd und um ihretwillen legten Nicolo's Altersgenossen ihm einen Spottnamen bei, den er später freiwillig als Namen behielt: der Stammler, Tartaglia. Als er 14 Jahre alt geworden war, brachte die Mutter ihn zu einem Schreiblehrer. Es war dort Sitte, das Schulgeld in drei Abtheilungen zu zahlen. Das erste Drittel musste voraus erlegt werden, das zweite, wenn die Hälfte der Buchstaben, also *A* bis *K*, erlernt war, das letzte Drittel am Ende des Unterrichts. Tartaglia's Mutter hatte nur das erste Drittel aufzubringen gewusst. Der Knabe wurde deshalb entlassen, noch ehe er die Anfangsbuchstaben seines Namens zu schreiben erlernt hatte, wie er mit bittrer Selbstironie erzählt, und war von da an in Allem sein eigener Lehrer, sich stets nach den Vorschriften der Verstorbenen richtend. Auch dieser letztere Ausdruck ist von ihm selbst, wie denn Alles, was wir von seiner Jugend wissen, aus autobiographischen Notizen stammt. Sind dieselben geeignet, schon das Interesse des Mitleids für Tartaglia zu erwecken, so steigert sich dieses Interesse zur Bewunderung, wenn wirklich kein lebender Führer dem jungen Manne bei seinem mathematischen und humanistischen Bildungsgange zur Seite ging, wenn er wirklich ganz allein sich die Fähigkeit erwarb, eine italienische Uebersetzung des Euklid, eine lateinische des Archimed anzufertigen, wenn er ganz allein auf die Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Körper, auf die Untersuchungen über Wurfgeschosse, auf die Geometrie mit einer Zirkelöffnung, auf die Arbeiten über cubische Gleichungen kam, wenn die Verstorbenen, nach deren Vorschriften er sich richtete, solche waren, die nicht innerhalb seiner eigenen Studienzeit aus dem Leben gingen, mithin die Höhe der damaligen Wissenschaft noch nicht erklommen hatten. Sollten aber an allen diesen hypothetisch von uns ausgesprochenen Dingen gerechte Zweifel haften, sollte das wenn, womit wir sie einleiteten, nicht stark genug betont werden können, so bleibt immerhin Tartaglia der grossen Hauptsache nach Autodidakt, bleiben die trüben Erinnerungen seiner Kindheit, die Kämpfe um den nothdürftigsten Lebensunterhalt, welche sein Mannesalter erfüllen, welche von Aufenthalt zu Aufenthalt ihn begleiten nach Mailand, nach Verona, 1534 nach Venedig, wohin er nach kurzem verunglücktem Versuche, in der Vaterstadt Brescia eine gesicherte Stellung zu finden, auf's Neue zurückkehrt, wo er endlich im Alter von etwa 59 Jahren sein Leben beschliesst. Aus diesen Schicksalen erklärt sich dann leicht eine gewisse Bitterkeit, eine gesteigerte Vorliebe für alle Kenntnisse, die er Niemandem als sich zu schulden sich vielleicht selbst einredet, ja es erklärt sich, wenn es sich auch nicht rechtfertigt, dass Tartaglia es lieben mochte, eine gewisse Kunstfertigkeit für sich zu besitzen, die ihm einen Vorrang vor Solchen bereite, welche im Uebrigen vermöge eines regelmässigeren Bildungsganges ihn überragten.

Diesem Tartaglia gegenüber stellen Zeit und Verhältnisse Geronimo Cardano, lateinisch Hieronymus Cardanus. In einer Abhandlung, welche wir vor nunmehr 21 Jahren in dieser Zeitschrift veröffentlichten („Drei mathematische Charakterbilder". Zeitschr. Math. Phys. II, 353—376, vergl. besonders 367 flgg.) haben wir diesen merkwürdigen Mann zu schildern versucht. Wir benutzen vielleicht einen andern Ort, uns wiederholt mit ihm zu beschäftigen und auf seine Bedeutung auch auf solchen Wissensgebieten, die wir damals kaum streiften, näher hinzuweisen. Gegenwärtig darf es uns genügen, auf jene frühere Arbeit uns zu beziehen, von seinem Lebenslaufe nur zu erwähnen, dass er 1539 endlich nach manchen schmerzlichen Zurückweisungen in das Collegium der Mailänder Aerzte aufgenommen, die erste, einzige glückliche Zeit seines Lebens anbrechen sah, in seinem Charakter auf's Neue einen Widerstreit von Leidenschaften der niedrigsten Art und tiefer Religiosität, von wahrhaft colossalem Wissen und wirklichem oder erheucheltem Aberglauben zu bezeugen, ohne ihn zu erklären. Nur ein Zug, einen neuen Widerspruch enthaltend, sei dem Bilde beigefügt. Derselbe Cardano, der in Geldsachen ein recht weites Gewissen hatte, so dass sein Benehmen bei manchen Gelegenheiten nur durch dem Strafrechte angehörige Bezeichnungen richtig zu benennen ist, zeigt sich in gelehrten Dingen als Muster von ehrlicher Anerkennung dessen, was er Vorgängern verdankt, so zwar, dass seine Werke eine fast unerschöpfliche Fundgrube für den Historiker bilden, welcher dort Namen und Verdienste von Persönlichkeiten verzeichnet findet, die sich nirgend sonst erhalten haben.

Noch eine dritte Persönlichkeit wird uns begegnen: Ludovico Ferrari. Er wurde 1522 zu Bologna geboren und kam 15 Jahre alt zu Cardano, dessen begeisterter Schüler er wurde. Freilich dehnte sich die Gelehrigkeit des Zöglings auch auf Dinge aus, in welchen er besser ein anderes Vorbild gewählt hätte: Cardano selbst schildert ihn nämlich als ebenso zügellosen Lebens, als begabt und gelehrt in den mathematischen Wissenschaften. Für die Treue der Schilderung spricht nach der einen Richtung ein Raufhandel, in welchen er mit 17 Jahren sich einliess und bei welchem der jähzornige Jüngling sämmtliche Finger der rechten Hand einbüsste, nach der andern Richtung die Auflösung der biquadratischen Gleichungen, welche man Ferrari verdankt. Seine mathematische Begabung bethätigte er auch frühzeitig als Lehrer zu Mailand. Ebendaselbst war er etwa 1549—1556 Vorsteher des Katasterwesens. Eine Fistel, die er sich zuzog und die es ihm unmöglich machte, zu Pferde zu sitzen und wie ehedem die praktischen Arbeiten seiner Untergebenen da und dort zu beaufsichtigen, veranlassten ihn wohl, die Stellung aufzugeben und nach der Heimath, nach Bologna, zurückzukehren. Dort lebte er als Lehrer seiner Wissenschaft bis 1565. Ueber seinen Tod schwebt ein geheimnissvolles Dunkel. Seine Schwester, so wird kurz berichtet, habe ihn muthmasslich vergiftet.

Wir kehren nach diesen, wie wir glaubten, nothwendigen Zwischenbemerkungen zu den Ereignissen des Jahres 1530 zurück. Wir sehen, dass Da Coi sich damals, von Del Fiore herausgefordert, an Tartaglia wandte, ihn um die Lösung cubischer Gleichungen angehend, wobei als selbstverständlich gilt, dass es hier, wie in der ganzen Periode dieses Streites sich immer nur um eine Wurzel der betreffenden Gleichung und zwar um eine reelle positive Wurzel handelt, wiewohl Cardano um dieselbe Periode bereits mit negativen, ja mit imaginären Wurzeln quadratischer Gleichungen bekannt war und eben derselbe nicht minder als Tartaglia das Vorhandensein von einer grösseren Anzahl von Wurzeln der den ersten Grad übersteigenden Gleichungen mehr als nur ahnte. Unter den Aufgaben, welche Da Coi dem Tartaglia einschickte, deren Lösung ihm selbst aber wohl nur unter der Voraussetzung zu Gebote stand, dass er von der Wurzel ausgehend rückwärts die Gleichung gebildet hatte, fanden sich auch solche von der Form $x^3+ax^2=b$, also in einer Form, in welcher das quadratische Glied nicht fehlte. Tartaglia gelang es zwar nicht, diese Gleichung aufzulösen, aber sie gab ihm doch den Anlass, sich nunmehr, wenn nicht schon früher, mit Gleichungen dritten Grades zu beschäftigen und zu erkennen, dass $x^3+ax^2=b$

jedesmal eine Wurzel besitzt, wenn $b=2c(2c-a)^2$ ist, und dass diese Wurzel $x=\sqrt{2ac-3c^2}-c$ heisst, wovon man sich durch Substitution überzeugen kann. Damit war durchaus kein Schritt zur wirklichen Lösung cubischer Gleichungen gethan, aber es war mit unleugbarem Scharfsinne eine Methode gefunden, lösbare Specialfälle aufzustellen. Dass Tartaglia sich über den Werth seiner Entdeckung täuschte, dass er sich rühmte, cubischer Gleichungen unter gewissen Voraussetzungen Herr zu sein, ist ihm bei dem Stande der damaligen Kenntnisse nicht zu verargen. Es beweist uns nur, dass er kurz nach 1530 in der That über die eigentlichen Fragen und über Mittel zu deren Beantwortung noch ganz im Unklaren tappte. Die Ruhmredigkeiten Tartaglia's drangen zu Del Fiore, der nun 1534 auch ihm gegenüber auf seine Kunst, Aufgaben wie $x^3+ax=b$ zu lösen, pochte. Tartaglia hielt es für inhaltslose Prahlerei und forderte seinerseits Del Fiore zum öffentlichen Wettkampfe auf den 22. Februar 1535. An diesem Tage sollte jeder der Gegner 30 Aufgaben in die Hände eines Notars niederlegen, zu deren Auflösung 50 Tage Zeit gegeben seien. Wer mehr Auflösungen als der Andere zu Wege bringe, solle Sieger sein und noch 5 Soldi für jede Aufgabe erhalten. Das Ergebniss war ein für Tartaglia glänzendes. Del Fiore war nicht im Stande, auch nur eine von den Aufgaben Tartaglia's zu lösen. Tartaglia bewältigte dagegen sämmtliche Aufgaben des Del Fiore, die durchgängig der Form $x^3+ax=b$ angehörten, in zwei Stunden.

Wie war Tartaglia in Besitz dieser Kunst gelangt? Er selbst erzählt die Sache, wie folgt: Er habe, nachdem er die Herausforderung schon gestellt, in Erfahrung gebracht, dass Del Fiore in der That mehr wisse, als er geahnt hatte; dass vor etwa 30 Jahren (das ist also um 1504, wie vorher bemerkt worden ist) sein Gegner die mehrerwähnte Form der Gleichungen und ihre Lösung von einem verstorbenen Meister erhalten habe, dass ihm demzufolge fast mit Gewissheit eine Niederlage drohe. Nun habe er allen Eifer, Fleiss und Kunst eingesetzt, und es gelang ihm zehn Tage vor dem Termin, am 12. Februar, durch sein gutes Geschick, die Auflösung zu finden. So Tartaglia und Alle, die ihm auf's Wort glauben (z. B. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, S. 362). Wir werden nachher unsere entgegengesetzte Meinung, in welcher wir mit Gherardi (Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät von Bologna, deutsch von M. Curtze in Grunert's Archiv Bd. LII) zusammentreffen, zu begründen haben.* Sei dem nun für's Erste wie da wolle, jedenfalls endigte

* Wir wissen nicht, welche Ansichten in der Biographie H. Morley's: *„Jerome Cardan. The life of Girolamo Cardano of Milan, Physician“* (2 vol., London 1854) vertreten sind, welches uns erst ganz kürzlich dem Namen nach bekannt geworden ist, aber gerade den Streit zwischen Cardano und Tartaglia ausführlich zu behandeln scheint.

der Wettkampf zwischen Tartaglia und Del Fiore in der genannten Weise.

Da Coi, wüthend, dass er selbst Nichts erfuhr, theilte um 1538 Cardano in Mailand mit, dass Del Ferro die Lösung der Gleichung $x^3 + ax = b$ seiner Zeit gefunden habe, dass Tartaglia und Del Fiore sie gegenwärtig besässen. Jetzt war Cardano's Begierde, gleichfalls in Besitz des grossen wissenschaftlichen Geheimnisses zu gelangen, auf's Stärkste gereizt. Er wendet sich bittend an Tartaglia um die Mittheilung, jener schlägt sie ab; wenn die Methode im Drucke der Oeffentlichkeit übergeben werden solle, so könne er das selbst besorgen. Cardano bedient sich nun der List; er thut, als wenn er an Tartaglia's Methode überhaupt nicht glaube; er lockt ihn nach Mailand zu sich, um einem freigebigen Marchese Unterricht zu ertheilen, der sich als stets abwesend erweist, wenn er zum Vorschein kommen soll; er schwört bei Allem, was heilig ist, das Geheimniss, wenn Tartaglia es ihm mittheile, bewahren zu wollen, schwört es sogar nur in Geheimschrift aufzeichnen zu wollen, damit auch durch Zufall, auch nach seinem Tode Niemand der Aufzeichnung sich bedienen könne. Der 25. März 1539 ist der Tag, an welchem Tartaglia, den Schwüren Cardano's vertrauend, ihm in Gegenwart Ferrari's die Methode enthüllt. Ob wohl das Wort „enthüllt“ der Sachlage durchaus entspricht? Wir wollen unseren Lesern die Entscheidung überlassen.

Tartaglia übergab dem Cardano Verse, deren einige hier im Wortlaute folgen und denen wir einen Versuch einer Uebersetzung beifügen:

Quando che 'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto:
Trovan dui altri, differenti in esso.

Dapoi terrai, questo per consueto,
Che 'l lor produtto, sempre sia eguale
Al terzo cubo, delle cose neto;

El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, bene sottratti
Varrà la tua cosa principale.

Wenn Würfel Dir und Dinge sind daneben,
Die irgend einer Zahl sich recht vergleichen,
Zwei and're lass den Unterschied ergeben.

Dann setze, als Gewohnheit sei Dir's eigen,
Dass ihr Product genau zu allen Zeiten
Des Drittels Würfel soll des Dings erreichen.

Nimmst Du von ihnen dann der Würfel Seiten,
Zieh' richtig ab: der Rest im Allgemeinen
Wird Dir das Ding, welches Du suchst, bereiten.

Wir befürchten nicht, dass man unserer Nachahmung den Vorwurf machen werde, sie sei weniger klar als das Original. Wenn Hankel neben die erste Strophe die Gleichungen $x^3 + mx = n$ und $t - u = n$, neben die zweite $tu = \left(\frac{m}{3}\right)^3$, neben die dritte $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ drucken liess, so ist diese Erläuterung zuverlässig richtig und geeignet, uns heute den Sinn der Verse verstehen zu lassen; ob es im XVI. Jahrhundert möglich war, diese ihre Bedeutung zu erkennen, ist eine ganz andere Frage. Soviel ist sicher, dass Cardano so wenig wie Ferrari aus dem Orakelspruche klug zu werden vermochten. Wiederholte briefliche Anfragen wurden von Tartaglia ausweichend beantwortet. Zu Anfang 1540 bricht der Briefwechsel ab, und die wissbegierigen Mailänder sind nicht um einen Schritt weiter, als sie es vor 1539 waren.

Man wird fragen: Hat denn Tartaglia, durch die erwähnten Verhältnisse fast genöthigt, das grosse Problem der cubischen Gleichungen stets im Auge zu behalten, dasselbe inzwischen wesentlich gefördert? Hat er etwa die Lösung der vollständigen cubischen Gleichungen gefunden? Keineswegs! Was er seit dem 12. Februar 1535 bis zum Jahre 1540 erfunden hat, beschränkt sich nach eigener Aussage auf die in der schlaflosen Nacht vom 10. November 1536 gelungene Entdeckung, dass $x^6 + mx^3 = n$ sich nach Art einer quadratischen Gleichung behandeln lasse, wahrlich keine bahnbrechende Entdeckung, nachdem Luca Pacioli, wie wir weiter oben sahen, Aehnliches für die biquadratische Gleichung $x^4 + mx^2 = n$ mehr als 40 Jahre früher veröffentlicht hatte.

Wieder verstrichen zwei Jahre in fruchtlosem Abmühen für Cardano und Ferrari. Da kamen sie 1542, ob zufällig, ob mit Absicht, mag dahinstehen, gelegentlich einer Reise nach Florenz auch nach Bologna, und hier zeigte ihnen Dalla Nave das Manuscript seines Schwiegervaters, in welchem die Auflösung von $x^3 + ax = b$ elegant und gelehrt auseinandergesetzt war. Jetzt fallen den tüchtigen Algebristen die Schuppen von den Augen. Jetzt verstehen sie Tartaglia's Verse. Jetzt sind sie wahrhaft in Besitz des Geheimnisses, des vollen Geheimnisses, denn jetzt erfindet Cardano die heute noch übliche Methode, eine vollständige cubische Gleichung durch eine lineare Substitution von ihrem quadratischen Gliede zu befreien, d. h. auf die Form zurückzuführen, für welche alsdann Del Ferro's Methode Anwendung finden kann.

Wir müssen hier einen Augenblick einhalten, um aus den zuletzt erwähnten Thatsachen die nöthigen Folgerungen zu ziehen. Cardano und Ferrari verstanden sofort Del Ferro's Auseinandersetzung, nachdem sie Jahre an das Verständniss von Tartaglia's Versen verschwendet hatten. Sie verstanden jetzt auch jene Terzinen. Folgt daraus nicht mit zwingender Nothwendigkeit, dass es eine und dieselbe Methode war, welche Del Ferro in seinem handschriftlich erhaltenen Buche niedergelegt hatte, welche Tartaglia 1535 selbstständig erfunden haben will?

Sonderbarer Zufall! Die cubische Gleichung ist nicht etwa nur nach einer Methode lösbar. Die Geschichte der Algebra hat uns recht verschiedene Wege erhalten, um zu diesem Ziele zu gelangen. Erinnern wir beispielsweise an Vieta's Methode, wie sie in dessen Abhandlung *De aequationum recognitione et emendatione* niedergelegt, 1615 im Drucke erschienen ist. Um $x^3 + ax = b$ zu lösen, setzt Vieta eine neue Unbekannte y ein, deren Zusammenhang mit x und a auf der Gleichung $y^2 + xy = \frac{a}{3}$, $x = \frac{a/_3 - y^2}{y}$ beruht. Die Substitution dieses Werthes von x verwandelt in der That nach leichter Umformung die gegebene Gleichung in $y^6 + by^3 = (a/_3)^3$, woraus zunächst y^3, dann y, endlich x gefunden wird. Oder denken wir an die Methode, welche Tschirnhausen im Mai 1683 in den *Acta Eruditorum* mittheilte und die später sich als so folgewichtig erwiesen hat. Auch er löst $x^3 + ax = b$ durch eine Substitution, nämlich durch $x^2 = z_0 + 2z_1 x + y$, aus welcher zunächst $x = z_1 + \sqrt{z_1^2 + z_0 + y}$ hervorgeht und dann eine nach Potenzen von y geordnete cubische Gleichung, aus welcher durch leicht einzurichtende Wahl passender Werthe für z_0 und z_1 die beiden Glieder mit y und y^2 herausfallen, so dass nur die rein cubische Gleichung $y^3 = A$ übrig bleibt, deren Auflösung durch blosse Wurzelausziehung erfolgt. Diese beiden Methoden, denen andere an die Seite gesetzt werden können, eignen sich nicht minder als die Methode des Del Ferro, mit der sie auch nicht die entfernteste Aehnlichkeit haben, zur Auflösung von $x^3 + ax = b$. Und nun wiederholen wir, hoffentlich im Einverständnisse mit unseren Lesern, sonderbarer Zufall, dass Tartaglia, der 1534 nur einen bestimmten Specialfall der Gleichung $x^3 + ax^2 = b$ zu lösen im Stande war, bei welchem nur eine Quadratwurzelausziehung nöthig war, der uns nirgend sagt, dass er auch nur Versuche mit Cubikwurzeln angestellt habe, dass dieser urplötzlich am 12. Februar 1535 durch sein gutes Geschick den Einfall hat, $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ zu setzen und zuzusehen, was dabei herauskommt, er dem, wie wir vorher betonten, bis dahin gar keine wirklich wesentliche Entdeckung auf dem Gebiete der cubischen Gleichungen gelungen war. Wir kommen auf diese Frage, wie weit man Tartaglia's Versicherung selbstständiger Nacherfindung der Del Ferro-schen Methode Glauben schenken darf, noch einmal mit anderen Gründen zurück.

Cardano hielt sich, nachdem er in Bologna also aus anderer Quelle die ihm bis dahin noch immer unklare Lösung der cubischen Gleichungen erstmalig verständlich kennen gelernt hatte, nachdem er überdies durch eigene Entdeckung die Verallgemeinerung des bisher beschränkten Problems geschaffen hatte, an den Tartaglia geleisteten Schwur nicht mehr gebunden. Er glaubte, gewiss mit Unrecht, jetzt die Veröffentlichung vornehmen zu können; er erläuterte das ganze Verfahren in dem Werke *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, welches 1545 in der berühmten Druckerei von Petrejus in Nürnberg die Presse verliess. War diese Veröffentlichung selbst ein grobes Unrecht an Tartaglia, so lässt sich nicht in Abrede stellen, dass Cardano das Seinige that, um wenigstens durch den Wortlaut der Veröffentlichung das Unrecht zu sühnen. Die Gleichung $x^3 + ax = b$ zu lösen, gelang, so erzählt er, zuerst vor etwa 30 Jahren dem Scipione del Ferro; durch dessen Schüler Del Fiore gereizt, erfand nachher mein Freund Tartaglia dasselbe zum zweiten Male und theilte mir auf meine dringende Bitte die Methode mit; auf der Jagd nach dem Beweise der Methode gelang es mir und meinem ehemaligen Schüler Ferrari, noch Manches hinzuzuentdecken. Das ist, wie wir gesehen haben, die durchaus wahrheitsgetreue Erzählung des Vorganges in der für Tartaglia schmeichelhaftesten Form, indem Cardano noch ausdrücklich hervorhebt, jene Lösung sei ein Zeugniss von Geisteskraft so herrlicher Art, dass Dem, welcher sie zu Stande brachte, Nichts mehr unerreichbar erscheinen könne. Nur den von ihm geschworenen Eid verheimlicht er bei der Erzählung, der aber bei der Abwägung der Verdienste, die jeder der Betheiligten um die Wissenschaft sich erwarb, durchaus gleichgiltig ist. Tartaglia wüthete. Sogleich im folgenden Jahre 1546 gab er unter dem Titel *Quesiti et inventioni diverse* ein Werk heraus, dessen neuntes und letztes Buch vorwiegend der Geschichte der cubischen Gleichungen gewidmet war. Der Schwur Cardano's wurde erzählt, der ganze Briefwechsel von 1539 mitgetheilt, Vorwürfe auf Vorwürfe gegen Cardano erhoben, dessen Anrecht an jegliche Vervollkommnung des von Tartaglia Erlernten in Abrede gestellt ist. Sogar die Befreiung der vollständigen cubischen Gleichung von ihrem quadratischen Gliede will Tartaglia im Jahre 1541 gefunden haben. In diesem Moment ergriff Ludovico Ferrari die Feder, um für seinen Lehrer und Freund einzutreten, sei es, dass Ferrari's von uns geschilderte händelsüchtige Natur die Gelegenheit zu einem Streite, wo sie sich nur von Weitem bot, nicht versäumen mochte, sei es, dass Cardano selbst ihn um Unterstützung angegangen hatte, sei es, was wir am Liebsten vermuthen wollen, dass wirklich Freundschaft und Gerechtigkeitsgefühl ihn die sicherlich zu weit gehenden Verunglimpfungen Dessen, dem er geistig so viel verdankte, nicht ruhig mit ansehen liessen.

Unter dem Datum des 10. Februar 1547 erliess Ferrari ein Cartello gegen Tartaglia, ein Herausforderungsschreiben zu einer öffentlichen Disputation um den Preis von 200 Scudi oder einer geringeren Summe nach Tartaglia's Belieben. Die Disputation solle theils einzelne Capitel der Quesiti von 1546, deren Neuheit, beziehungsweise deren Richtigkeit in Abrede gestellt wurden, theils beliebige Stellen alter und neuer mathematischer Schriftsteller zum Gegenstande haben; Ferrari macht sich anheischig, in allen Punkten Tartaglia's Unbedeutendheit zu erweisen. Dieses Cartello, in italienischer Sprache abgefasst, von drei Zeugen mitunterschrieben, wurde als offener Brief gedruckt, als Flugblatt verbreitet, insbesondere 50 ausdrücklich genannten Persönlichkeiten mitgetheilt, welche an verschiedenen Orten Italiens den mathematischen Wissenschaften oblagen, unter ihnen Annibale dalla Nave in Bologna, während der Name Cardano's unter diesen Adressaten fehlt. Eine Risposta, ein Antwortschreiben von Tartaglia, unter dem Datum des 19. Februar 1547 von drei Zeugen mitunterschrieben, wurde nun ähnlicherweise als Flugblatt gedruckt und in nicht weniger als 1000 Abzügen verbreitet. Der Hauptpunkt in diesem Antwortschreiben ist wohl darin zu finden, dass Tartaglia auf eine Polemik mit Cardano einzugehen sich bereit erklärt, nicht mit Ferrari, jedenfalls nicht mit Ferrari allein, und um diese Personenfrage, die nur mit mancherlei Ausflüchten von beiden Seiten verbrämt erscheint, handelt es sich in weiteren fünf Cartellen und fünf Risposten, deren letzte das Datum des 24. Juli 1548 trägt. Mit Ausnahme des zweiten Cartello, welches lateinisch geschrieben ist, sind sämmtliche Flugblätter in italienischer Sprache abgefasst. Sie bieten wahre Muster von Grobheit, wie sie in unserem Jahrhundert den Mathematikern höchstens aus Schnuse'schen Vorreden erinnerlich sein mag. Jeder der beiden Pamphletisten lässt Datum und Unterschrift meistens von Zeugen bestätigen, und es wird uns wohl gestattet sein, unter den Zeugen Tartaglia's für die zweite und dritte Risposta einen Namensvetter von uns, einen *Dominico quondam Donato Cantor* namhaft zu machen, offenbar ein Ordensgeistlicher, mit welchem unsere aus Dänemark stammende Familie keinenfalls auch nur entfernt verwandt ist. Dass Männer von der geistigen Bedeutung, welche wir bis zu einem gewissen Grade Tartaglia ebenso wenig absprechen wie Ferrari, sich nicht begnügen konnten, durch zwölf Druckschriften kleinerer, aber auch grösserer Ausdehnung hindurch immer nur Uebungen in der Umgangssprache der Markthallen anzustellen, immer nur Fragen von im Ganzen so untergeordneter Bedeutung wiederzukäuen, wie die, ob Cardano an einer etwaigen Disputation theilnehmen müsse oder nicht, ob der Preis, um den man kämpfen wollte, voraus niedergelegt werden müsse und bei wem, ob die Preisrichter auf eine oder die andere Weise zu ernennen seien u. s. w., das versteht sich von selbst. Auch das wissenschaftliche Interesse fand in jenen offenen Briefen seine Rechnung und besonders bieten 31 von Tartaglia in der zweiten Risposta, ebenso viele von Ferrari in dem dritten Cartello aufgestellte Aufgaben ein ziemlich scharfes Bild von den mathematischen Leistungen, welcher jeder der beiden Aufgabensteller sich fähig wusste oder doch fähig glaubte. Da ist es nun allerdings merkwürdig, dass Tartaglia's Aufgaben vorwiegend aus der Geometrie mit einer Zirkelöffnung, aus der Lehre von der Ausziehung höherer Wurzeln und von dem Rationalmachen von Brüchen geschöpft sind. Namentlich die geometrischen Aufgaben müssen mit einigen Worten besprochen werden.

Die Elementargeometrie der Alten hatte als Forderungen aufgestellt, dass man eine gerade Linie durch irgend zwei gegebene Punkte ziehen und um jeden Punkt einen Kreis mit jenem gegebenen Halbmesser beschreiben könne. Dieser Constructionsmittel allein, dieser aber auch unbeschränkt durfte man sich bedienen, ohne dass die Lösungen ihren elementaren, rein geometrischen Charakter einbüssten. Praktisch ausgedrückt heisst das: dem Geometer steht ein Lineal zur Verfügung und ein Zirkel, dessen beide Arme ihre gegenseitige Neigung verändern können. Wann und wo man die Spielerei ersann, den Zirkel als fest gegeben mit unveränderlicher gegenseitiger Neigung der Arme zu denken, ist ungewiss. Soviel steht fest, dass Woepcke Spuren davon bei Abul Wefa, dem bekannten arabischen Astronomen in der zweiten Hälfte des X. Jahrhunderts, entdeckt hat (*Journal Asiatique Ser.* 5, *T. V, Paris* 1855, S. 346 flgg.), dass nach Libri (III, 122) auch Lionardo da Vinci in seinen Jahrhunderte lang unbenutzt gebliebenen Notizen sich damit beschäftigt haben soll. Tartaglia hat, wie wir sagten, eine grosse Vorliebe für diese geometrische Geistesübung an den Tag gelegt. Sein Schüler Giambattista Benedetti (1530—1590) hat die Lehre vollständig ausgebildet und zum Gegenstande eines eigenen Buches gemacht, durch welches er, erst 23 Jahre alt, die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zog. Es ist jedenfalls bemerkenswerth, dass Ferrari in seinem fünften Cartello (S. 25) sich folgendermassen über den Gegenstand äussert:

„Ich freue mich, mein Herr Nicolo, dass Ihr mir in diesen Euren Aufgaben Stoff gegeben habt, Diejenigen, die an Geometrie und Arithmetik sich ergötzen, die aber gleichwohl noch nicht den Gipfelpunkt der vorgenannten Wissenschaften erreicht haben, zu erheitern, und zwar dadurch, dass in Euren 17 ersten Fragen jene schöne Erfindung enthalten ist, bei dem Verfahren die Weite der Zirkelöffnung nicht zu verändern. Von wem dieselbe ausgegangen ist, weiss ich nicht. Das aber weiss ich, dass seit etwa 50 Jahren viele schöne Talente sich angestrengt haben, ihr Zuwachs zu verschaffen, und unter diesen zum grossen Theil Herr Scipione del Ferro, Bürger von Bologna seligen Angedenkens."

Mit dieser Stelle verbinden wir eine andere aus dem zweiten Cartello (S. 3), von der wir schon oben (S. 142 Z. 23) einen vorübergehenden Gebrauch gemacht haben. Es handelt sich in ihr um die Auflösung der Gleichung $x^3 + ax = b$:

„Vor fünf Jahren, als Cardanus nach Florenz reiste und ich ihm Begleiter war, sahen wir in Bologna Annibale de Nave, einen geistvollen und liebenswürdigen Mann, der uns ein Buch zeigte von der Hand seines Schwiegervaters Scipio Ferreus vor langer Zeit geschrieben, in welchem jene Erfindung elegant und gelehrt entwickelt mitgetheilt war. Ich würde das nicht schreiben, um nicht den Schein auf mich zu laden, nach Eurer Gewohnheit Dinge, die sich auf mich beziehen, zu erfinden, wenn nicht Annibale selbst noch am Leben wäre und bei diesem Streitpunkte als Zeuge dienen könnte."

Schliesslich sei aus der zweiten Risposta des Tartaglia (S. 6) der Wortlaut angeführt, den er dieser Angabe gegenüberstellt:

„Was diese Einzelheit betrifft, so scheint es mir nicht erlaubt, sie zu bestreiten, geschweige denn zu leugnen; denn es wäre eine übergrosse Anmassung von mir, zu verstehen zu geben, dass Dinge, welche durch mich erfunden worden sind, nicht zu anderen Zeiten von Anderen erfunden worden sein können und in gleicher Weise in Zukunft von Anderen erfunden werden dürften, auch wenn sie nicht durch den genannten Herrn Hieronymo oder durch mich der Oeffentlichkeit übergeben worden wären. Wohl aber kann ich der Wahrheit gemäss sagen, dass ich diese Dinge niemals bei irgend einem Schriftsteller gesehen habe, dass ich sie vielmehr und zwar rasch erfunden habe, zugleich mit anderen Einzelheiten, die vielleicht von noch grösserer Bedeutung sind."

Die Thatsachen, welche wir diesen Stellen entnehmen, sind folgende: Erstlich ist es keinem Zweifel unterworfen, dass wirklich die auch früher von uns erzählte Kenntnissnahme des Manuscripts in Bologna um 1542 stattgefunden hat; zweitens ist es sicher, dass derselbe Del Ferro, dem die Auflösung von $x^2+ax=b$ nach unseren früheren Betrachtungen in derselben Weise, wie Tartaglia sie vollzog, gelungen sein muss, auch der Geometrie mit einer festen Zirkelöffnung sich befleissigte, welcher Tartaglia ebenfalls später oblag; drittens ist das Gewundene in Tartaglia's Rückäusserung nicht zu verkennen, der zunächst nur leugnet, die Sache „bei einem Schriftsteller gesehen" zu haben, was eine mündliche Ueberlieferung keineswegs ausschliesst.

Allerdings setzt der deutungsfähigen Verneinung fremden Einflusses Tartaglia sofort die absolute Behauptung eigener Erfindung hinzu. Es fällt uns schwer, ihr vollen Glauben zu schenken. Nichtsdestoweniger halten wir es für Pflicht, auf einige Gesichtspunkte aufmerksam zu machen, welche zur Bestätigung von Tartaglia's Aussage dienen können. Dass Tartaglia das in Dalla Nave's Besitz gekommene Manuscript zu Gesicht bekommen haben sollte, ist kaum denkbar. Dalla Nave würde diese Thatsache entweder schon 1542 dem Cardano erzählt haben, oder doch im Laufe der Jahre 1547 und 1548 damit hervorgetreten sein. Ferrari hat überdies an die Selbstständigkeit Tartaglia's bei der Erfindung geglaubt, sonst hätte er ihm den Vorwurf des Plagiats an Del Ferro nicht erspart; macht er ihm doch und mit Recht einen ähnlichen Vorwurf mit Bezug auf Jordanus Nemorarius.

Wer Tartaglia endlich im Februar 1535 die Del Ferro'schen Methoden mündlich mitgetheilt haben soll, ist durchaus nicht zu sagen. Es müsste eben ein ehemaliger Schüler des Bologneser Professors gewesen sein, der unmittelbar darauf gestorben oder ausser Landes gegangen wäre, so dass sein Zeugniss von keinem Gegner mehr angerufen werden, beziehungsweise bei dem Lärm, den der Streit verursachte, von selbst hervortreten konnte. Und allen diesen gewichtigen Gründen haben wir Nichts entgegenzusetzen, als die unmittelbar zuvor beleuchteten Thatsachen, als die weitere Thatsache, dass von anderen so bahnbrechenden Entdeckungen, deren Tartaglia sich gerade in Bezug auf Gleichungen rühmt, nicht das Geringste bekannt geworden ist, während in den *Quesiti et inventioni* die Gelegenheit zur Veröffentlichung vollauf geboten war, endlich als unser persönliches Gefühl, welches wir natürlich keinem Leser gegenüber als Grund aufzuführen uns vermessen, welches uns aber zu dem Urtheile führt, die Sache sei mindestens noch nicht klar.

Derselben Ansicht dürften übrigens bis zu einem gewissen Grade Tartaglia's eigene Landsleute gewesen sein. Wir haben gesehen, dass Tartaglia von Venedig für kurze Zeit nach seinem Geburtsorte Brescia übersiedelte. Der Wohnungswechsel fand in den ersten Monaten des Jahres 1548 statt. Unter dem 16. Juni dieses Jahres erlässt Tartaglia von Brescia aus seine fünfte Risposta, in welcher er sich erbietet, zur vielbesprochenen Disputation nach Mailand zu kommen. Ferrari giebt nun im sechsten Cartello vom 14. Juli zu verstehen, das werde wohl die Bedingung sein, welche man in Brescia an seine endgiltige Anstellung geknüpft habe, und die Ereignisse stimmen mit dieser Auffassung überein. Die Disputation sollte am 10. August 1548 zur 18. Stunde in der Kirche St. Maria del Giardino in Mailand stattfinden. Ferrari erschien umgeben von Freunden, Tartaglia einzig in Begleitung seines jungen Bruders, Cardano kam gar nicht. Unter Formstreitigkeiten über die Wahl der Kampfrichter, wobei man die Fremden kaum zu Worte kommen liess, wurde es Essenszeit; die Kirche entleerte sich; Tartaglia sah ein, dass von einer entscheidenden, unparteiisch in Scene gesetzten Disputation unter solchen Verhältnissen keine Rede sein könne, und reiste wieder ab. So sein eigener Bericht. Wir stellen demselben die gleichfalls von Tartaglia selbst erzählte Thatsache gegenüber, dass man in Brescia sich jetzt weigerte, ihm die ausbedungene Besoldung auszuzahlen, und dass er nach Venedig zurückkehrte. Damit schliesst die Geschichte der Erfindung und Veröffentlichung der ersten Auflösung cubischer Gleichungen und des Streites um dieselbe.

Die zwölf Flugschriften aus den Jahren 1547 und 1548 waren, wie wenigstens für die beiden ersten derselben feststeht, aber auch für die zehn anderen mit gleicher Sicherheit anzunehmen ist, in zahlreichen Exemplaren gedruckt und verbreitet worden. Um so auffallender erscheint es, dass dieselben im Laufe von drei Jahrhunderten zu den grössten antiquarischen Seltenheiten geworden sind. Heute sind nur zwei Exemplare des ersten Cartello, sechs der ersten Risposta u. s. w. bekannt, im ganzen 42 Exemplare aller Schriften zusammengenommen, sämmtlich in Italien: in Florenz, Mailand, Rom, Venedig, und darunter keine einzige Vereinigung von Exemplaren aller zwölf Schriften am gleichen Orte, ja überhaupt kein einziges Original des sechsten Cartello. Die beiden letzten, vom bibliographischen Standpunkte aus beklagenswerthen Mängel sind noch keine 20 Jahre zu bedauern. Es war Prof. Silvestro Gherardi gelungen, nach langjährigem Suchen da und dort Exemplare aller einzelnen Flugschriften in seinen Besitz zu bekommen und dieselben in einem Sammelbande, der dadurch ein Unicum darstellte, zu vereinigen. In drückender Noth sah Gherardi 1858 sich veranlasst, sich dieses Schatzes zu entäussern. Er verkaufte den Sammelband an den damals in London lebenden Libri, nachdem er zuvor eine saubere Abschrift hatte machen lassen, die er selbst Wort für Wort collationirte. Drei Jahre später, im April 1861, kam Libri's Bibliothek zur Versteigerung, in welcher jener Band dem Londoner Buchhändler Boone um den Preis von $10^1/_2$ Pfund Sterling zugeschlagen wurde. Später kam Libri, wie er selbst 1869 kurz vor seinem Tode in Florenz Gherardi erzählte, auf's Neue in Besitz der Sammlung, aber nur für einen geringen Zeitraum. Ein von ihm für treu gehaltener Diener bestahl ihn in eigenthümlicher Nachahmung seiner in Frankreich begangenen Verbrechen um eine grössere Anzahl werthvollster Bücher und anderer Gegenstände, welche seitdem als verloren zu betrachten sind. Darunter war auch der mehrgenannte Sammelband, von dessen gegenwärtigem Aufbewahrungsorte nicht das Geringste bekannt ist, so dass die Sammlung, sollte sie auch, wie wahrscheinlich, noch vorhanden sein, für die Wissenschaft, für die Forschung verschwunden ist. Man war einzig angewiesen auf die Auszüge aus den zwölf Streitschriften, welche Gherardi in seinen früher genannten Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät von Bologna mitzutheilen für gut gefunden hatte, Auszüge von grösster Bedeutung, vortrefflich gewählt, mit geschickter Hand gesichtet, aber doch nur Auszüge!

So war es ein wirkliches Verdienst, welches Herr Enrico Giordani aus Bologna, aber in Mailand ansässig, sich um die Geschichte der Wissenschaft erwarb, indem er die sämmtlichen zwölf Flugschriften (elf davon nach den Originalien facsimilirt, das sechste Cartello nach der Gherardi'schen Abschrift gedruckt) neu veröffentlichte. Allerdings besitzt auch diese Veröffentlichung von Anfang an den bibliographischen Reiz verhältnissmässiger Seltenheit, indem nur 212 Abzüge genommen wurden, alle einzeln numerirt, unter welchen Nr. 19 uns zur Besprechung vorliegt. Herr Giordani hat eine zwei Druckbogen starke werthvolle Einleitung vorausgeschickt, in welcher sämmtliche heute nachweisbaren 42 Exemplare der Flugschriften genau aufgezählt sind, auch die Schicksale des Gherardi'schen Sammelbandes zur Mittheilung gelangen. Eine Widmung an den Fürsten Boncompagni giebt nicht undeutlich zu verstehen, in welcher Beziehung der grossmüthige und gelehrte Förderer mathematisch-historischer Studien in Rom, dessen Freundschaft auch wir uns rühmen dürfen, zu der Veröffentlichung steht. In typographischer Hinsicht müssen wir dieselbe als hochgelungen bezeichnen, und wenn ein Wunsch uns unerfüllt blieb, den wir zur möglichen Ergänzung anderer ähnlicher, etwa noch bevorstehender Publicationen nicht unausgesprochen lassen wollen, so ist es der: eine durchlaufende Pagination etwa unten an den Blättern durch den ganzen Band durchgeführt zu sehen, wodurch Citirung und Nachschlagen von Citaten der jetzt einzig vorhandenen Paginirung der einzelnen Schriften gegenüber wesentlich erleichtert worden wäre.

Cantor.

Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae nunc primum collectae et editae a F. R. Friis. Fasc. I. Havniae, Lipsiae, Londini et Parisiis. MDCCCLXXVI.

Otto Brahe zu Knudstrup und dessen Ehefrau Beata Bille, beide alten berühmten dänischen Adelsgeschlechtern angehörig, hatten 10 Kinder: 5 Töchter, deren älteste Elisabeth hiess, und 5 Söhne, deren ältester, in der Gesammtfolge der Kinder nach Elisabeth geboren, den Namen Tycho erhielt. Neben diesen verdient noch das letzte Kind Sophia genannt zu werden, welche der Kenntniss der Dinge, die ihren um 10 Jahre älteren Bruder so berühmt machten, gleichfalls nahe stand und insbesondere mit den Theilen der Astronomie sich beschäftigte, welche das XVI. und XVII. Jahrhundert noch nicht aus dem Kreise der ernsten Wissenschaften gestrichen hatte, mit der Beurtheilung künftiger Ereignisse aus dem Stande der Gestirne, mit dem sogenannten Nativitätstellen. Tycho Brahe, am Vormittage des 14. December 1546 auf dem väterlichen Gute Knudstrup in Schonen, dem südlichsten Theile von Schweden, geboren, wurde bei Georg Brahe, seinem Oheim von väterlicher Seite, erzogen, der ihn den Eltern heimlich entführen liess, weil er selbst keinen Sohn hatte, während es in Tycho's Vaterhause daran nicht fehlte. Die Eltern fanden sich allmälig darein, den erstgeborenen Sohn zu entbehren, vielleicht durch die scheinbar grösseren Geistesgaben seiner Brüder getröstet; wenigstens nennt sich Tycho in einem Ende 1567 verfassten lateinischen Gedichte den Geringstgeachteten unter fünf Brüdern. Vom 7. Jahre an wurde Tycho in der lateinischen Sprache unterrichtet, mit 12 Jahren bezog er die Kopenhagener hohe Schule, um in Rhetorik und Philosophie sich auszubilden, bevor er nach des Oheims Willen

Jurisprudenz studirte. Letzteres Studium begann er nach weiteren zwei Jahren im Februar 1562 zu Leipzig, wohin er in Begleitung eines Hofmeisters geschickt worden war. Freilich stand Tycho's Sinn bereits nach Anderem. Am 21. August 1560 hatte jene berühmte Sonnenfinsterniss stattgefunden, welche in Portugal nach dem Berichte von Clavius um Mittag nächtliche Dunkelheit verbreitete, so dass Niemand einen Fuss setzen konnte und die Vögel erschreckt zur Erde fielen. So vollständig war allerdings in Kopenhagen die Finsterniss nicht, aber immerhin dicht genug, um auf den noch nicht 14jährigen Knaben einen bedeutenden Eindruck hervorzubringen, um vor Allem ihn bewundern zu lassen, wie man im Stande gewesen sein konnte, eine solche Erscheinung vorauszusagen. Von diesem Tage datirt sich Tycho's Neigung zur Astronomie, datiren sich seine geheimen Studien in dieser Wissenschaft, geheim, weil man in Dänemark überhaupt aus der Erkenntniss der Natur sich nicht viel machte, weil insbesondere in Adelskreisen nächst dem Waffenhandwerke höchstens noch die Rechtsgelehrsamkeit standesgemäss erschien. Tycho's Oheim Georg Brahe war in diesen Vorurtheilen seiner Zeit und seines Geschlechts befangen wie Einer, und Tycho's Hofmeister oder Begleiter auf die deutsche Hochschule, wie man den um wenige Jahre älteren Jüngling lieber nennen sollte, war gleichfalls keiner andern Gesinnung. Er war der nachmalige berühmte dänische Geschichtsschreiber Andreas Soerensen Vedel (geboren etwa 1543), mit welchem Tycho nachmals in innigem Verhältnisse gestanden zu haben scheint. Wir begegnen ihm wenigstens in der als Ueberschrift genannten Sammlung als Andr. Severini Vellejus, an welchen ein Brief vom 18. Mai 1571 gerichtet ist, in welchem genaue Nachricht über den am 9. Mai erfolgten Tod von Otto Brahe gegeben ist. In Leipzig widersetzte sich Vedel nach Pflicht und Gewissen den Allotrien, wie Tycho's Beschäftigung mit dem gestirnten Himmel hiess. In unbewachten Stunden der Nacht verglich Tycho allein das Firmament mit einem faustgrossen Globus und lernte so beobachten. Mathematische Vorlesungen bei Johannes Hommel (lebte 1518—1562) wird er daher wohl nicht besucht haben, und wenn auch daran nicht wohl gezweifelt werden kann, dass Hommel der Erfinder der nachmals von Brahe vielfach benutzten Methode war, kleine Theile einer Linie durch Transversalen zu ermitteln oder, wie man heute sagt, einen verjüngten Massstab zu construiren, so wird wohl Brahe die Erfindung nur mittelbar durch Bartholomäus Scultetus kennen gelernt haben, einen Studiengenossen aus Görlitz, wo derselbe auch später, 1614, als Bürgermeister starb. Als Tycho Brahe so drei Jahre lang öffentlich die Rechte, heimlich Sternkunde in Leipzig getrieben hatte, erhielt er im Mai 1565 Befehl zur Heimreise, und als er diesem Gebote über Wittenberg und Rostock nachkam, starb am 21. Juni sein Onkel Georg. Bald fand sich jedoch für ihn ein anderer Beschützer: Steen Bille, der Bruder seiner Mutter, ansässig in dem ehemaligen Mönchskloster Herritzwad ganz nahe bei Knudstrup. Steen Bille war der Einzige, der des Neffen naturerforschenden Sinn begriff und gut hiess; alle übrigen Verwandten waren der landläufigen entgegengesetzten Meinung. Auf eine oder andere Art wusste Tycho sich Reisemittel zu verschaffen und kehrte nach Deutschland zurück. Im April 1566 ist er in Wittenberg, seit dem 24. September desselben Jahres in Rostock und dort traf er wiederholt feindlich mit einem Landsmanne Manderup Parsberg zusammen, der ihm schliesslich am 29. December in einem nächtlichen Raufhandel die Nase abhieb, so dass Tycho Brahe von nun an eine künstliche, aus Gold und Silber angefertigte Nase trug. Es hat zur Kennzeichnung des wissenschaftlichen Standpunktes der Zeit mehr als nur anekdotischen Werth, dass Tycho Brahe diesen Unfall mit seiner Nativität verglich und daraus rückwärts berechnete, sein Vater, der seine Geburt auf die Stunde von 9—10 Uhr notirt hatte, müsse sich geirrt haben und er um 10 Uhr 47 Minuten geboren sein. In diesen Rostocker Aufenthalt fällt auch eine Mondfinsterniss vom 28. October 1566, welche Brahe voraus ankündigte und infolge derselben den Tod des türkischen Kaisers Soliman prophezeite. Durch ein seltsames Spiel der Natur starb Solimann wirklich — aber vor der Mondfinsterniss, und Tycho Brahe wusste sich damit auszureden, er habe den Tod eigentlich nach Soliman's Nativität ausgerechnet, die von der Mondfinsterniss unabhängig sei. Derartige Ankündigungen waren wohl geeignet, einem jungen Gelehrten in damaliger Zeit Ruhm zu verschaffen. Er war jetzt ein in der öffentlichen Meinung gerechtfertigter Astronom, seine Beobachtungen bekamen Werth. Wahrscheinlich dachte er, auch in der Heimath werde ein Umschwung in diesem Sinne stattgefunden haben, und kehrte im Sommer 1567 nach Hause zurück. Er hatte sich getäuscht. Das alte Widerstreben begegnete seinen Neigungen, und wieder verliess er den heimathlichen Heerd, um nach Deutschland zu fliehen, denn einer Flucht sah allerdings die heimliche Abreise gleich, in deren Folge er am 1. Januar 1568 in Rostock anlangte. Ein Brief aus Rostock vom 14. Januar an Johann Aalburg in Kopenhagen bittet diesen, von den geheimen Beweggründen zur Reise zu schweigen. Es ist dieses der erste erhaltene Brief von Tycho Brahe. Von Rostock aus trat Brahe 1569 eine Wanderung durch Deutschland an. An verschiedenen Orten hielt er sich auf, am längsten in dem hochgebildeten Augsburg, dessen Patrizier stolz darauf waren, den Wissenschaften ihre freie Zeit, ihre reichen Geldmittel zu widmen. Die beiden Brüder Johann und Paul Hainzel, Hieronymus Wolf, Johann Major waren dort seine Freunde, dort lernte er Petrus Ramus bei vorübergehendem Aufenthalte kennen, dort fertigte er den ersten Quadranten, liess er 1570 einen colossalen Himmelsglobus aus Holz zusammensetzen. In Dänemark war kurz nach Brahe's neuer

Abreise wenigstens in Hofkreisen eine für ihn günstige Wendung eingetreten. König Friedrich II. bewilligte ihm unter dem 14. Mai 1568 die Einkünfte des nächsten erledigten Canonicats an der Rothschilder Domkirche. War inzwischen ein solches frei geworden oder nicht, jedenfalls nahm Brahe noch 1570 wieder seinen Aufenthalt in der Heimath. So war er bei dem am 9. Mai 1571 erfolgten Tode des Vaters zugegen, welchen er in einem vorerwähnten Briefe an seinen ehemaligen Hofmeister in rührender Weise beschreibt. Theils auf dem Erbgute, theils in dem benachbarten Heritzwad, wo Steen Bille ihm ein Observatorium und ein Laboratorium herrichten liess, trieb er nun in den nächsten Jahren Sternkunde und Chemie, Wissenschaften, die man damals als zusammengehörig betrachtete, da man Gold, Silber und andere Metalle als die irdischen Sterne zu bezeichnen liebte. Wir gelangen zur ersten wissenschaftlich bedeutsamen Entdeckung von Tycho Brahe, zur Entdeckung des neuen Sternes in dem Bilde der Cassiopeia am 11. November 1572. Bis zum Frühjahr 1573 beobachtete er ihn regelmässig und zeichnete die Beobachtungen auf's Sorgfältigste auf. Als er alsdann, wie es alljährlich seine Gewohnheit war, eine Reise nach Kopenhagen antrat, dort bei seinem gelehrten Freunde, dem Arzte Johannes Pratensis, wohnte, mit dem französischen Gesandten Carolus Danzaeus verkehrte, waren Beide nicht wenig erstaunt, von genauen Beobachtungen eines Sternes zu hören, dessen Existenz sie nicht einmal argwohnten; ja bis Tycho Brahe sie am Abend durch den Augenschein überzeugte, hielt Danzaeus das Ganze für einen Scherz. Brahe wollte zunächst von einer Veröffentlichung seiner Abhandlung Nichts wissen und liess erst auf vieles Zureden es geschehen, dass Pratensis 1573 die Herausgabe besorgte. Er selbst hatte während der Zeit mit Krankheit zu schaffen. In dieselbe Zeit fällt auch die Verheirathung mit Christina, einem Mädchen aus niedrigem Stande, wenn er überhaupt gesetzlich mit ihr verheirathet war. Die kaum beigelegten Zwistigkeiten mit seiner Familie mochten durch dieses Ereigniss zu neuer Heftigkeit entbrennen, und so entstand der Plan zur abermaligen Uebersiedelung nach Deutschland, nachdem Brahe im Winter von 1574 auf 1575 auf bestimmten Wunsch des Königs astronomische Vorlesungen in Kopenhagen gehalten hatte. Schon ein Jahr früher muss er einen Abstecher nach der später durch ihn so bekannten Insel Hueen gemacht haben, wo er am 22. Februar 1574 einige Beobachtungen anstellte. Im Frühjahr 1575 treffen wir Tycho Brahe allein auf Reisen, um einen Wohnsitz für sich und die Seinen zu suchen. Kassel, wo der Hof des fürstlichen Astronomen Wilhelm der Weise ihm lockend erscheinen musste, Frankfurt, Basel, Regensburg, Augsburg dienen ihm der Reihe nach als Aufenthalt. In Basel gefiel es ihm am Besten, und als er Ende 1575 nach Knudstrup zurückkehrte, dachte er im nächsten Frühjahr dorthin mit Frau und Kind auszuwandern. Da wurde ihm, wie wir jetzt aus einem Briefe an Pratensis vom 14. Februar 1576 wissen, am 11. desselben Monats durch königliches Handschreiben das Anerbieten der Insel Hueen, an welcher, wie der König sagt, Brahe einmal Gefallen geäussert haben solle, was wir wohl mit dem ersterwähnten Ausfluge von 1574 in Zusammenhang bringen dürfen. Wenige Monate später starb Pratensis, der noch zuletzt in einem beweglichen Briefe den Freund zum Verweilen im Vaterlande aufgemuntert hatte.

Bis zu dieser Zeit etwa (Mitte 1576) gehen die Briefe von und an Tycho Brahe, welche in dem ersten Hefte der neuen Sammlung abgedruckt sind. Mögen die hier erzählten Lebensverhältnisse den Lesern der Briefe das Verständniss einstweilen erleichtern helfen. Unsere Quellen waren: Lebensbeschreibung des berühmten und gelehrten dänischen Sternsehers Tycho v. Brahe's, aus der dänischen Sprache in die deutsche übersetzt von Philander von der Weistritz. Kopenhagen und Leipzig 1756, und: Kästner, Geschichte der Mathematik Bd. II, S. 376 — 412. Göttingen 1797. Einzelnes ergänzten wir aus den Briefen selbst. Wir erachten es als unzweifelhaft, jedenfalls als unumgänglich, dass der Herausgeber der Briefe mit den späteren Heften eine neue, das gesammte Material verwerthende Lebensbeschreibung verbinden werde.

Cantor.

Das Grundgesetz der Kraft, von Carl Mittelacher. St. Petersburg, H. Schmitzdorff. 8. 86 S.

Unter vorstehendem Titel giebt der Herr Verfasser eine Uebersicht über die neueren Anschauungen, welche durch die obsiegende mechanische Auffassung der Wärme als die Hauptgrundlagen der theoretischen Physik zur allgemeinen Annahme gelangt sind und ihren universellsten Ausdruck in dem Princip von der Erhaltung der Kraft, dem „Grundgesetze derselben", gefunden haben.

Indem der Verfasser den Satz, dass das Wesen aller Dinge in der Natur Bewegung sei, an die Spitze seiner Betrachtungen stellt und damit die Grundanschauung, aus der die folgenden Resultate fliessen und ihre universelle Bedeutung erhalten, zum Ausdrucke bringt, ergiebt sich ihm sofort der Gegenstand der zunächst zu erledigenden Untersuchung, der in den nothwendigen Voraussetzungen der Bewegung, in einem Träger und in gewissen zureichenden Gründen besteht. Mit Rücksicht auf die principielle Anschauung, dass ersterer, der Stoff, sich aus kleinsten Stofftheilen, welche durch keine Ursache der Bewegung weiter zerlegbar sind, aufbaue, sind es daher die Begriffe des Atoms und der Kraft, welche zunächst Feststellung und Beleuchtung finden; hieran reiht sich die Besprechung der allgemeinsten Unterscheidung dieser beiden Objecte, nämlich einerseits in Materie- und Aetheratome, andererseits in anziehende und abstossende Kräfte; aus diesen Betrachtungen hebt sich der fundamentale Satz ab, dass sowohl die Summe des in der Natur vorhandenen Stoffes, als auch die Summe der in der Natur vorhandenen Kraft eine unveränderliche Grösse sei. Wie insbesondere die rationelle Construction des Kraftbegriffes erforderlich macht, schliesst sich an diese allgemeine Untersuchung eine zwar gedrängte, aber doch klare Darlegung der Grundbegriffe der Mechanik eines materiellen Punktes an. Unter Zugrundelegung der so gewonnenen Vorstellungen versucht es nun der Verfasser, ein Bild von der physischen Constitution der Körper mit Hilfe des Zwischengebildes des Moleküls zu entwerfen und eine allgemeine Classification der Kräfte, welche in der Molecularwelt anzunehmen sind, nach Massgabe der Verschiedenheit ihres Wirkungsgesetzes durchzuführen; den Schluss der drei ersten Abtheilungen bildet die Betrachtung der wichtigsten Bewegungsform in der Molecularwelt, der Schwingungen, deren allgemeine Eigenschaften kurz erörtert werden. Das sich unmittelbar daran anschliessende Capitel über „Bewegung und Vorstellung" glaubt der Recensent, als ein Laie auf dem hier betretenen Gebiete, aus dem Kreise seiner Besprechung ausschliessen zu dürfen.

Auf diesen Grundlagen fussend, tritt nun der Verfasser in die Discussion der fundamentalen Begriffe der Arbeit, der dynamischen und der potentiellen Energie ein, zeigt zunächst, wie dieselben einzeln zusammenhängen (Leibnitz'sches Theorem von der Aequivalenz der Arbeit und dynamischer Energie, Specialsatz von der Aequivalenz von Arbeit und Wärme, Umsatz der dynamischen Energie der Massenbewegung in Wärme, Uebergang von Arbeit in potentielle Energie und von dieser letzteren in dynamische Energie) und construirt endlich aus der Verknüpfung dieser Resultate das Princip von der Erhaltung der Kraft, das aussagt, dass „das Weltall einen Vorrath von wandlungsfähiger Kraft besitzt, der zum Theil in dynamischer, zum Theil in potentieller Energie besteht, dass die eine Form der Kraft unaufhörlich in die andere übergeht, aber ihre Summe unverändert bleibt". Im Verlauf dieser Entwickelung, der sich noch der nicht minder wichtige Satz anschliesst, dass, wie Clausius sich ausdrückt, die Entropie der Welt einem Maximum zustrebe, berührt der Verfasser die Hauptfragen, welche in der mechanischen Wärmetheorie Erledigung finden, illustrirt seine theoretische Darlegung mit vielen Beispielen und zeigt insbesondere in zwei eigenen Abschnitten über den „Ursprung der Himmelskörper" und über „die lebendige Kraft der Sonne", welch' grossartige Bedeutung und Tragweite die vorgeführten Anschauungen besitzen.

Wie diese Inhaltsskizze erkennen lässt, bewältigt das oben angezeigte Schriftchen trotz seines mässigen Umfanges ein sehr reiches Material. Als besondere Vorzüge desselben möchte ich seine Vollständigkeit, seine kurze und doch im Allgemeinen klare Fassung und endlich seine treffliche Anordnung betrachten, die den Leser allmälig und ohne besondere Anstrengung zum Verständnisse der Summe von Anschauungen, Begriffen und Sätzen, die schliesslich in dem Princip von der Erhaltung der Kraft concentrirt erscheinen, gelangen lässt. Ich glaube daher mit Recht dieses Schriftchen jenem grossen Kreise von Lesern empfehlen zu dürfen, denen es darum zu thun ist, einen gründlichen Einblick in die neueren physikalischen Anschauungen zu gewinnen, ohne den damit verbundenen mathematischen Entwickelungen folgen zu müssen. Wenn ich nun auch im Allgemeinen den Takt, der den Verfasser bei der Wahl und Behandlung seines Stoffes leitete, lobend anerkennen muss, so kann ich doch nicht umhin, einige Punkte hervorzuheben, die meinen Beifall weniger gefunden haben. Zweifellos hätte zunächst die geschichtliche Entwickelung des Gegenstandes mehr Beachtung verdient; auch hätte ich manchem Abschnitte einen weniger abschliessenden Charakter zugelegt gewünscht: nicht allen Anschauungen, die der Verfasser vorführt, kommen gleiche Gewichte zu, welcher Umstand in ihrer Darlegung zum Ausdrucke kommen sollte. Mein Haupteinwand richtet sich aber gegen den Titel dieses Schriftchens und gegen die darunter sich verbergende Tendenz, deren Ursprung leicht zu erkennen ist: Wahrheiten können die physikalischen Wissenschaften nach der ihnen eigenthümlichen Probe aus der Hand des Genius annehmen, auf welchem Wege sie auch ursprünglich gefunden sein mögen; aber sie werden sich ängstlich hüten müssen, damit zugleich Anschauungen zu erwerben, die nur dem Philosophen geziemen.

Ich sehe es nämlich als eine natürliche Consequenz gerade unserer neueren Anschauungen an, dass für die physikalischen Wissenschaften Atom und Kraft als physische Principien der Dinge nie in Frage kommen können. Durch Beobachtung und Versuch vermögen wir nie über zusammengesetzte Erscheinungen hinauszukommen, die daher allein unserer unmittelbaren Controle zu unterziehen sind. Den physikalischen Wissenschaften kann daher, wie sich Kirchhoff in einer ebenso geistvollen als treffenden Weise ausgedrückt hat, nur noch die Aufgabe zufallen, die Erscheinungen in einer vollständigen und zugleich in der einfachsten Weise zu beschreiben: im Sinne einer mechanischen Auffassung der Naturvorgänge können wir es hierbei nur mit Mathematik und mathematischen Begriffen zu thun haben und müssen die Frage, ob diesen letzteren Etwas in der realen Welt entspreche, von unserem Standpunkte aus, weil er sie nicht zu beantworten gestattet, als ausgeschlossen betrachten. Wäre uns die Lösung dieser Aufgabe nach einer jeden Beziehung endgiltig — wofür wir übrigens kein ausreichendes Kriterium besitzen — gelungen, so ständen wir dann an der Grenze, die unserem Naturwissen gesetzt ist und jenseits deren nur noch die Gedanken des Philosophen Befriedigung suchen können.

Nach diesen Bemerkungen bedarf es keiner weiteren Erklärung, dass ich dem Grundgesetze der Unzerstörbarkeit der Kraft als *causa physica* keine physikalische Bedeutung beilege und die Identificirung desselben mit dem Princip von der Erhaltung der Kraft als willkürlich ansehe; solche willkürliche Festsetzungen bedrohen aber die Klarheit und sind daher streng zu verpönen. Es ist an sich vollkommen gleichgiltig, wie wir das, als dessen wandelbare Formen dynamische und potentielle Energie gelten, etwa bezeichnen wollen, weil dieser Name von uns weder als der Ausdruck, noch als die Quelle einer besonderen Erkenntniss zu betrachten ist. Da wir aber über das Wort „Kraft" schon im Sinne der *causa mathematica* disponirt und an dem Grundsatze festzuhalten haben, dass die Verschiedenheit der Begriffe auch in der Verschiedenheit der entsprechenden Bezeichnungen hervorzutreten habe, so muss ich es für unzulässig erachten, dieses Wort in dem eben angegebenen Sinne beizubehalten, anstatt etwa den sich geradezu aufdrängenden Ausdruck der Energie zu wählen.

Die Inconvenienzen, welche aus dem mehrsinnigen Gebrauche des Wortes „Kraft" entspringen, treten insbesondere in dem Capitel über „Potentielle Energie und dynamischer Effect" störend hervor und führen zu einer höchst eigenthümlichen, nahezu geheimthuerischen, mir wenigstens unsympathischen Behandlung der hier auftauchenden Fragen, zu der, wie ein Blick in die auch in dieser Beziehung musterhaften Abhandlungen Clausius' belehren kann, auch nicht die mindeste begründete Veranlassung vorliegt. — Schliesslich möchte ich noch betonen, dass es für die Klarheit der Darstellung nicht ganz unerheblich gewesen wäre, wenn bei dem Uebergange zur „Kraft als *causa mathematica*" die Stellung, welche die Begriffe des materiellen Punktes und des Atoms, des elementarsten Trägers der Bewegung, zu einander einnehmen, gebührend erörtert worden wäre; mir scheinen sie beide durch die Irrelevanz der Dimensionen in mechanischer Beziehung gekennzeichnet zu sein.

München. Dr. Friedrich Narr.

Dr. W. Eisenlohr's Lehrbuch der Physik, 11. Auflage, bearbeitet von Dr. P. Zech. Stuttgart, Verlag von J. Engelhorn. 1876.

Noch einmal soll auch nach dem Tode des ursprünglichen Verfassers (1872) dessen vielverbreitetes Lehrbuch seine Kraft erproben, da Herr Prof. Dr. Zech eine elfte Auflage des Werkes bearbeitet hat. Wenn ein Lehrbuch der Physik, wie das von Eisenlohr, noch bei Lebzeiten des Verfassers zehn Auflagen erlebt, wenn es also zu den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik überhaupt gehört, so kann man wohl erwarten, dass auch eine elfte Auflage, die nach dem Tode des ursprünglichen Verfassers erscheint, aber im Sinne desselben gehalten ist, dem gefühlten Bedürfnisse Rechnung tragen wird.

Im Wesentlichen ist der ganze zu bearbeitende Stoff auch in der vorliegenden elften Auflage ganz wie früher behandelt worden. Nach einer zwei Seiten umfassenden Einleitung, die die Gliederung der sämmtlichen Naturwissenschaften und ihre Methode enthält, giebt der erste Abschnitt: Gemeinsame Eigenschaften der Körper, der zweite: Verschiedenheit der Körper, der dritte: Gleichgewicht und Bewegung; der vierte handelt von der Wellenbewegung, der fünfte vom Schalle, der sechste vom Lichte, der siebente von der Wärme, der achte vom Magnetismus, der neunte von der Elektricität und der zehnte von der Elektrodynamik.

Der Herausgeber bemerkt in der Vorrede, dass er eine Reihe von Gegenständen nicht oder nur ihren Principien nach aufgenommen habe, Gegenstände, die zweckmässiger für sich gesondert abgehandelt werden. Namentlich gilt dies von gewissen physiologischen Dingen, wie von der Beschreibung der Sinnesorgane; von gewissen technologischen, wie von der Beschreibung der Dampfmaschine und theilweise von den Telegraphen; von gewissen meteorologischen, wie von der Verbreitung der Wärme auf der Erdoberfläche und der Elektricität in der Atmosphäre. Der chemische Theil der früheren Auflagen ist ganz weggelassen worden.

Ebenfalls bemerkt der Herausgeber in der Vorrede, dass er die Wellenlehre, die Akustik und die Lehre vom galvanischen Strome ganz umgearbeitet habe, und zwar mehr im Sinne einer bessern Ordnung, als einer neuen Darstellung.

Endlich fügt der Herausgeber noch bei, dass er die Worte „Atom“ und „Molekül“ zu vermeiden gesucht habe und dafür „Theilchen“ oder „Massentheilchen“ gebrauche; der Grund war der chemische Sinn der beiden Worte „Atom“ und „Molekül“, der den Physiker Nichts angehe und weil namentlich das Wort „Molekül“ französischen Ursprungs sei und man dafür besser „Molekel“ sage, wie z. B. auch „Partikel“, „Matrikel“ u. s. w. Das Wort „fest“ im Gegensatz zu flüssig und gasförmig ist durch das richtigere „starr“ ersetzt. Als Bezeichnung für Maasse ist blos *m*, *cm*, *mm* aufgenommen, um Verwirrung zu vermeiden. Flächen- und Körpermaasse sind, wo Zweideutigkeit entstehen konnte, nicht abgekürzt bezeichnet.

Wir haben hier diesen Worten weiter Nichts beizufügen, als dass auch die neueren Fortschritte der Physik im Sinne Eisenlohr's verwerthet worden sind und dass man wohl hoffen kann, dass, wenn das frühere Lehrbuch zehn Auflagen erlebte, die den Errungenschaften der Jetztzeit entsprechende elfte Auflage wohl auch einem gefühlten Bedürfnisse nachkommen werde.

Freiberg, den 12. Juli 1877. TH. KÖTTERITZSCH.

Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur, von Dr. LEONHARD SOHNCKE. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchhandlung. 1876.

Das vorliegende Werk, das seinem räumlichen Umfange nach auf nur 83 Seiten kl. 8^0 und zwei Figurentafeln zusammengedrängt ist, erscheint als Separatabdruck aus dem 7. Hefte der Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Karlsruhe 1876; es setzt die schon vieljährigen eingehenden und fruchtbaren Studien des Verfassers, von denen die anerkannten Arbeiten: „Die Gruppirung der Moleküle in den Krystallen", Pogg. Ann. Bd. 132, S. 75—106, und „Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung", Borch. Journ. Bd. 73, S. 47—100, schon beredtes Zeugniss ablegten, in umfassenderer Weise weiter fort.

Während nämlich der Verfasser mit Bravais noch die Hypothese annahm, dass alle Krystallelemente parallel seien, so giebt er in der vorliegenden Untersuchung diese beschränkende Hypothese auf und definirt blos: „Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Punkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden andern Punkt." Unter Punkt ist hierbei verstanden der Schwerpunkt von Krystallelementen, und von einem Krystallelement ist es wiederum ins Belieben gestellt, ob man sich darunter Moleküle oder Aggregate von solchen denken will. Es ist ohne Weiteres klar, dass eine vollständige tabellarische Aufstellung aller nach dieser Hypothese möglichen regelmässigen Punktsysteme auf alle die Krystallstructurformen führen muss, die überhaupt vom geometrischen Gesichtspunkte aus möglich sind.

Die hauptsächlichste Aufgabe, welche nun für den Verfasser vorlag, war: „Alle überhaupt regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden." Um diese Aufgabe zu lösen, hat der Verfasser die Arbeit von *Camille Jordan: „Mém. s. l. groupes de mouvements", Brianchi e Cremona: Annali di Matematica T. II* (1868—1869), S. 167—215 u. 322—345, zu Grunde gelegt, die er bei späterer Gelegenheit nochmals revidiren will, da er in der benützten Arbeit einige Unrichtigkeiten gefunden hat.

Es werden sodann alle regelmässigen Punktsysteme entwickelt und nochmals tabellarisch zusammengestellt auf den Seiten 68—70. Der Verfasser findet 54 derartige Punktsysteme.

Den Beweis der Vollständigkeit der Jordan'schen Arbeit überlassend, bemerkt der Verfasser mit Recht, dass diese regelmässigen Punktsysteme nur aus geometrischen Gründen möglich seien; ob auch aus mechanischen Gründen, sei eine andere, zur Zeit noch unlösbare Frage. Um aber doch der Antwort auf diese Frage näher zu kommen, werden schliesslich noch die gefundenen Punktsysteme in Vergleich gebracht mit den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

Das Schriftchen soll wohl als Vorläufer dienen für ein umfassendes Werk, aber man muss nach dem auch auf dem engen Raume dargebotenen reichen und durchdachten Stoffe die umfassende Arbeit mit Spannung erwarten.

Freiberg, den 29. Juni 1877. TH. KÖTTERITZSCH.

Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche, studi analitici del Dr. Giovanni Biasi. Verona 1876.

Dass die Coefficienten einer algebraischen Gleichung, welche die einzige in ihr vorkommende Unbekannte in Gestalt von Potenzen mit ganzen positiven Exponenten enthält, algebraische Functionen, und zwar symmetrische algebraische Functionen der Wurzelwerthe dieser Gleichung sind, ist längst bekannt. Nicht bekannt dagegen ist die Functionalität, mittelst deren die Wurzelwerthe aus den Coefficienten sich bilden, wenn auch die Nothwendigkeit einer solchen umgekehrten Abhängigkeit sofort einleuchtet. Herr Biasi hat sich nun die Frage vorgelegt, ob es nicht möglich sei, bei aller Unbekanntheit dieser Functionalität dennoch Gleichungen zu einer neuen zu combiniren, deren Wurzeln aus den Wurzeln der combinirten Gleichungen in vorgeschriebener Weise zusammengesetzt sein sollen? Von den drei Gleichungen

1) $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

2) $$\alpha_0 \xi^\mu + \alpha_1 \xi^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0,$$

3) $$A_0 Z^n + A_1 Z^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

sollen etwa die beiden ersten gegeben und die zu combinirenden Gleichungen sein; deren Wurzeln sollen $x_1, x_2, \ldots x_m$, beziehungsweise $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu$ heissen; man sucht die Combinationsgleichung 3), d. h. deren Coefficienten aus den Coefficienten von 1) und 2) herzustellen, unter der Bedingung, dass von den Wurzeln $Z_0, Z_1, \ldots Z_n$ der Gleichung 3) jede der Functionalität $Z_k = f(x_l, \xi_\lambda)$ genüge. Diese allgemeinste Aufgabe begnügt sich Herr Biasi freilich auszusprechen und ihr den Namen *calcolo sulle incognite*, Rechnung mit den Unbekannten, beizulegen. Zur näheren Untersuchung schränkt er die Aufgabe so weit ein, dass jedes Z nicht beliebig aus einem x und einem ξ entstehe, sondern nur als

$$x + \xi, \quad x - \xi, \quad x\xi, \quad \frac{x}{\xi}, \quad x^\xi.$$

Es leuchtet dabei ein, dass jedes x mit jedem ξ in Verbindung treten kann, so dass die Wurzelwerthe Z ihrer Anzahl nach durch das Product der Anzahl der x in die Anzahl der ξ bestimmt sind, oder mit anderen

Worten, dass zwischen den Graden der Gleichungen 1), 2), 3) der Zusammenhang stattfinden muss

$$n = m \times \mu.$$

Soll $Z = x - \xi$ sein, so nennen wir die Gleichungen 1), 2) subtractional combinirt, soll $Z = \frac{x}{\xi}$ sein, so mögen 1) und 2) divisional combinirt heissen. Diese beiden Combinationsweisen haben eine ganz besondere Wichtigkeit, um zu ermitteln, ob zwei gegebene Gleichungen etwa identische Wurzelwerthe besitzen.*

Ist nämlich $x_l = \xi_\lambda$, wo wieder x_l eine Wurzel von 1), ξ_λ eine Wurzel von 2) bedeutet, so giebt es eine Wurzel $Z_k = x_l - \xi_\lambda = 0$ von 3), d. h. das Gleichungspolynom der subtractionellen Combinationsgleichung muss durch Z theilbar sein oder es muss sein $A_n = 0$. Sind zwei, drei oder noch mehr Wurzeln x und ξ identisch, so enthält das Gleichungspolynom von 3) Z^2, Z^3 oder eine noch höhere Potenz von Z als Factor, d. h. die 2, 3, ... Coefficienten der niedrigsten Glieder in 3) werden zu Null. Kaum anders stellt sich die Sache, wie man leicht übersieht, wenn 1) und 2) eine und dieselbe Gleichung bedeuten, die subtractional mit sich selbst combinirt werden soll. Die Combinationsgleichung muss hier ein durch Z^m theilbares Polynom besitzen. Sind aber einzelne Wurzeln von 1) überdies unter sich gleich, also etwa $x_h = x_k$, so wird auch $Z = x_h - \xi_k = 0$ und $Z = x_k - \xi_h = 0$, d. h. das Gleichungspolynom 3) wird nach Division durch Z^m immer noch Factoren Z enthalten, oder es werden in der subtractionalen Combinationsgleichung von 1) mit sich selbst mehr als nur die m Coefficienten der niedrigsten Glieder verschwinden, vorausgesetzt, dass die Gleichung 1) mehrfache Wurzeln besitzt, für deren Nachweis somit in dieser Theorie eine neue Methode gewonnen ist.

Bei der divisionalen Combination zweier Gleichungen ist ersichtlich $Z_k = \frac{x_l}{\xi_\lambda} = 1$, sofern $x_l = \xi_\lambda$. Die Gleichung 3) hat aber eine Wurzel $= 1$, wenn $A_0 + A_1 + \ldots + A_n = 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung muss 3) durch $Z - 1$ theilbar sein, worauf der Quotient dieser Theilung leicht gefunden wird, nämlich

$$A_0 Z^{n-1} + (A_0 + A_1) Z^{n-2} + (A_0 + A_1 + A_2) Z^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}) = 0.$$

Ist noch eine Wurzel den Gleichungen 1) und 2) gemeinschaftlich, so muss auch die eben gefundene Gleichung durch $Z = 1$ erfüllt werden, d. h. es muss sein $(n-1) A_0 + (n-2) A_1 + \ldots + A_{n-1} = 0$ neben der vor-

* Mit ebendieser Aufgabe beschäftigt sich in etwas anderer Fassung eine interessante Abhandlung von Lemonnier in den *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, LXXX, 111.*

her angegebenen Bedingungsgleichung. Aehnlich verhält es sich beim Auftreten von noch mehr den Gleichungen 1) und 2) gemeinsamen Wurzelwerthen, ähnlich wenn 1) und 2) identisch sind und es sich als Zweck der Untersuchung um die Erforschung mehrfacher Wurzeln von 1) handelt.

Andere bemerkenswerthe Erscheinungen bieten die additionale, die multiplicationale, die exponentiale Combination — Namen, deren Bedeutung wir wohl nicht weiter zu erläutern brauchen. Damit rechtfertigt sich die Aufsuchung der Combinationsgleichungen überhaupt, rechtfertigt sich die Rechnung mit den Unbekannten.

Die Ausführung dieser Rechnung beruht selbstverständlich auf der Kenntniss der symmetrischen Functionen der Wurzelwerthe einer Gleichung, die in Gestalt der Gleichungscoefficienten gegeben sind, und demzufolge in erster Linie auf der Theorie der symmetrischen Functionen im Allgemeinen. Herr Biasi hat diese Theorie auch, soweit es nothwendig war, vorausgeschickt und durch Wahl einer ebenso durchsichtigen, als allgemeinen Bezeichnung dazu beigetragen, ihre Kenntnissnahme zu erleichtern. Bei der Anwendung auf die Aufstellung von Combinationsgleichungen treten, wie im Voraus zu erwarten war, die verschiedenen Formen auf, mit denen die Schüler moderner Algebra bekannt sind. Wer also dieses Gebiet hinreichend beherrscht, wird um so leichter den bald einfacheren, bald complicirteren Rechnungen des Verfassers folgen, auf deren Interesse hinzuweisen wir nicht unterlassen wollten, während es uns schwieriger erscheint, sie im Auszuge wiederzugeben.

Cantor.

Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte von Dr. P. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Dr. F. Grube, ord. Lehrer an der königl. Domschule zu Schleswig. Leipzig, B. G. Teubner. 1876. VIII, 183 S.

Wenn Referent an einer andern Stelle, wo es ihm oblag, den Lebenslauf und die wissenschaftliche Bedeutung Dirichlet's kurz zu schildern (Allgemeine deutsche Biographie Bd. V, S. 251—252) als vorzugsweise kennzeichnend für die Vortragsweise, durch welche jener grosse Mathematiker seine Schüler hinriss, die Klarheit pries, mit welcher er die Hauptmomente schwieriger Beweisführungen im Voraus anzudeuten und dadurch ein ununterbrochenes geistiges Mitschaffen seiner Zuhörer zu ermöglichen wusste, so lag diesem Urtheile die Erinnerung an Selbsterlebtes aus dem Jahre 1852, aber auch die Kenntniss der von Professor Rich. Dedekind und von Dr. G. F. Mayer herausgegebenen Vorlesungen über „Zahlentheorie" und über „Bestimmte Integrale zwischen reellen Grenzen", in welche letztere die Vorlesungen über „Partielle Differentialgleichungen" zum grossen Theile mit hineinverarbeitet sind, zu

Grunde. Inzwischen hat nun Dr. Grube auch die Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte der Oeffentlichkeit übergeben, leider zu spät, um in unserer biographischen Notiz Berücksichtigung finden zu können, rechtzeitig genug, um unser Urtheil mit neuen Belegen zu bestätigen. Konnte man schon nach Prof. Heine's gelegentlicher Bezeichnung dieser Vorlesungen als des besten Lehrbuches über den in ihnen behandelten Gegenstand mit hochgespannten Erwartungen an sie herantreten, so werden diese Erwartungen noch reichlich übertroffen. Namentlich die obengenannte Dirichlet'sche Tugend besitzt das nunmehr im Drucke erschienene Collegienheft vielleicht in noch höherem Grade, als die anderen Vorlesungen des Meisters. Wir machen beispielsweise nur auf den in § 32 gegebenen Beweis des Dirichlet'schen Princips aufmerksam, welcher ein Muster von Durchsichtigkeit ist. Aber auch in jeder andern Beziehung, nach Reichhaltigkeit des Inhaltes bei scheinbarer Beschränkung des Gegenstandes, nach Eleganz der analytischen und vielleicht in noch vorzüglicherer Weise der geometrischen Beweisführungen, nach Fülle der geistvollsten Nebenbemerkungen (wir machen nur auf § 28 über Functionalgleichungen aufmerksam) sind diese Vorlesungen geradezu Mustervorträge, den Leser entzückend und niederdrückend durch das Bewusstsein, dass solche Vollendung nicht wieder zu erreichen, kaum entfernt nachzuahmen ist. Um so dankbarer sind wir dem Herausgeber, dass er diese Vorträge veröffentlichte, dass er sie so veröffentlichte, wie er es gethan hat. In einer Vorlesung kann man nicht Alles sagen, und selbst was zur Zeit, als eine Vorlesung gehalten wurde, „Alles" war, ist nach einem Zwischenraume von 20 Jahren meistens vielfach nur Bruchstück. Der Herausgeber kann sich nun in die Epoche der Vorlesung oder in die der Herausgabe versetzen. Im ersteren Falle wird er möglichst getreu den Lehrer sprechen lassen, im zweiten wird er von dem Seinigen da und dort hinzufügen. Beide Möglichkeiten sind gegeben, für beide haben die letzten Jahre Beispiele geboten. Herr Grube ist der Methode gefolgt, welche, wie uns däucht, die Pietät vorschreibt. Er hat die Vorlesungen Dirichlet's, nicht seine eigene Paraphrase derselben, dem Drucke übergeben. Er hat es dadurch verstanden, in uns, wenn wir uns einzelne Stellen mit lauter Stimme vorlasen, das Gefühl zu erwecken, als hörten wir Dirichlet selbst, sicherlich das untrüglichste Merkmal einer genauen Wiedergabe. Alle Bemerkungen, zu welchen Dr. Grube befugt und befähigt ist wie irgend ein Mathematiker, sind in einen Anhang verwiesen. Noch näher auf den Inhalt eines Werkes einzugehen, welches in keiner mathematischen Büchersammlung künftig fehlen wird, halten wir für überflüssig; den allgemeinsten Inhalt bezeichnet der Titel zur Genüge.

Cantor.

Mathematische Modelle, angefertigt im mathematischen Institut des königl. Polytechnikums in München. Serie I. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Darmstadt, Verlag von L. Brill.

Ausser den in Paris erschienenen Muret'schen Flächenmodellen, die ohne Erläuterung sind und mehr den Zwecken der darstellenden Geometrie dienen, und ausser einigen nur sehr speciellen geometrischen Untersuchungen zugehörigen Modellen existirten bisher keine allgemein zugänglichen Mittel, die schönen Eigenschaften, auf welche besonders die Anwendung der Analysis auf die Geometrie der Flächen geführt, zur Anschauung zu bringen. Und doch ist die Anregung zum Studium, die aus solchen Darstellungen entspringt, allgemein anerkannt; und wie selbst die Anregung zu selbstständiger Weiterforschung in diesem an Problemen jeder Art reichen Gebiete nicht unterschätzt werden darf, zeigt die Thatsache, dass ein Modell der Krümmungsmittelpunktsfläche des Ellipsoids seiner Zeit zu einem genaueren Studium ihrer Doppelcurven theilweise erst hingeleitet hat.

Wir begrüssen daher die Veröffentliehung der vorliegenden Collection von Gypsmodellen. Dieselben sind ursprünglich von Studirenden am Münchener Polytechnikum zur Uebung der Anschauung und zur Anwendung allgemeiner Theorien unter Leitung von Prof. Brill hergestellt worden; eine Entstehungsweise, die sie den oben angegebenen Zwecken noch näher bringt. Mit den eingehenden Erläuterungen zusammengenommen, sind es bis in das Detail durchgearbeitete Betrachtungen einiger wichtiger Probleme der Flächentheorie, überall bis zur Klarlegung der gestaltlichen und Realitätsverhältnisse fortgeführt. Im Einzelnen sind es folgende Modelle:

I ist die Rotationsfläche der Tractrix, mit geodätischen und Haupttangenten-Curven, modellirt von J. Bacharach. Dies ist die schon länger bekannte Fläche von constantem negativem Krümmungsmasse. Von ihren geodätischen Linien sind mehrere aufgezeichnet, die eine genügende Uebersicht über den Lauf dieser Linien überhaupt gewähren; ausserdem eine eine geodätische Curve berührende Haupttangentencurve.

II. Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungscentra des elliptischen Paraboloids in collinearer Verwandtschaft steht. Von L. Schleiermacher. Es ist die letztere Fläche, nach einer Richtung hin gedehnt. Hier werden die getrennten Modelle der beiden Mäntel mitgetheilt, sowie das Modell, das beide Mäntel vereinigt darstellt. Die analytische Discussion der Gleichung der Fläche, insbesondere in Bezug auf die Rückkehrcurve und Doppelcurve, wird durch Einführung eines Parameters sehr einfach, ebenso die Darstellung der reellen Doppelcurve selbst.

III. Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids. Von W. Dyck. Ebenfalls die getrennten und die vereinigten Mäntel. — Die Discussion der Centrenfläche des Ellipsoids ist schon früher von Cayley gegeben worden nach einer Methode, die für das Hyperboloid nicht anwendbar ist. Hier werden die Coordinaten der Doppelcurve auf eine Weise durch einen Parameter ausgedrückt, die auch bei den übrigen Flächen zweiten Grades (mit Mittelpunkt) brauchbar bleibt. Das Modell stellt den Fall dar, in dem diese Doppelcurve, die Durchschnittscurve der beiden Mäntel, reell ist.

IV. Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid. Von K. Rohn.

V. Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Von K. Rohn.

Beide führen bekanntlich auf elliptische Integrale. In der Erläuterung werden dieselben eingehend discutirt und ihre Zurückführung auf Thetafunctionen und deren Umformung in bemerkenswerther Weise so weit entwickelt, dass man die numerische Berechnung vornehmen und den ganzen Verlauf der Curven verfolgen kann. Im ersten Falle sind mehrere, im letzten Falle eine Curve aufgetragen, die sich ins Unendliche um die Fläche herumschlingt. Im ersten Falle ist wenigstens für den Aequatorialkreis angegeben, in welcher Ausdehnung er kürzeste Linie ist, während es wohl wünschenswerth wäre, diese Grenzen überhaupt dargestellt zu erhalten.

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass die Auswahl und die Behandlung der einzelnen Gegenstände dem Zwecke der Förderung der Anschauung und des Studiums durchaus entsprechend ist. Fügen wir noch hinzu, dass auch die technische Ausführung der Modelle gut ist und dieselben auch einzeln abgegeben werden, so können wir ihnen wohl die Aufnahme in alle mathematischen Sammlungen voraussagen.

Mannheim, April 1877. M. Noether.

Physikalisches Repertorium oder die wichtigsten Sätze der elementaren Physik, von Bothe. Dritte umgearbeitete und vervollständigte Auflage. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Der Anlass zur Veröffentlichung des vorliegenden Buches lag für den Herrn Verfasser in der Erfahrung, dass scharf ausgesprochene Gesetze und Regeln, sowie kurze Definitionen bestimmter Begriffe sich dem Gedächtnisse des Schülers leicht einprägen und dadurch eine Grundlage für weiteres erfolgreiches Voranschreiten gewähren. Dasselbe soll, wie die Vorrede mit vollem Rechte hervorhebt und nur recht sehr zur Beherzigung empfohlen werden kann, nicht dazu dienen, in die Wissenschaft einzuführen, die lebendige Lehre und das Studium von Lehrbüchern entbehrlich zu machen, sondern vielmehr nur dem Ueberblicke gewisse feste Punkte bieten und dadurch die Wiederholung erleichtern. Der Umstand, dass dieses Buch trotz mannigfacher Concurrenz nun schon in der dritten Auflage vorliegt, dürfte wohl an sich schon darthun, dass dasselbe dem Bedürfnisse eines grossen Leserkreises und zwar in einer gelungenen Weise entspricht. In der That kann eine solche Uebersicht, wie sie hier geboten wird, nicht blos dem Lernenden die Wiederholung erleichtern, sondern auch überhaupt einem Jeden beim Auffrischen des alten Wissens die besten Dienste leisten. Sehr brauchbar ist auch das vorliegende Buch als Nachschlagebuch, um sich ohne Zeitverlust über Fragen aufzuklären, wie sie z. B. bei der Durchführung einer Arbeit im physikalischen Praktikum entgegentreten; die beigegebenen 55 Tabellen werden es für diesen Zweck um so mehr empfehlen.

Wenn wir uns sonach auch mit den Zielen und der Ausführung dieses Buches im Allgemeinen einverstanden erklären, die Verbesserungen und Vermehrungen, die dasselbe in der neuen Auflage erfahren hat, anerkennen und demselben, wie der Verfasser, neue Freunde und immer weitere Verbreitung wünschen, so müssen wir doch einige Punkte hervorheben, die uns verbesserungsfähig erscheinen.

Zunächst möchten wir die Häufung in den Bezeichnungen, wie sie z. B. an „Beweglichkeit, Mobilität“ oder an „Theilbarkeit, Divisibilität“ zu Tage tritt, zum Mindesten als überflüssig betrachten; auch in der Einführung neuer Bezeichnungen scheint uns eine möglichst grosse Enthaltsamkeit geboten zu sein, und wir würden daher z. B. die Namen Krith und Kotyl gerade in dem vorliegenden Buche nicht sehr vermisst haben. Auch manche der Definitionen und Erklärungen hätten wir etwas präciser gewünscht. So schiene es uns z. B. unbedingt am Platze, in § 141 den gleichförmigen Charakter der Bewegung, welche zur Zeitmessung und Zeiteintheilung geeignet ist, hervorzuheben. In § 366 bezeichnet δ nicht, wie in den vorhergehenden §§ 361 und 362, die totale Ablenkung überhaupt, sondern das Minimum derselben, was jedenfalls im Interesse der Klarheit zu betonen gewesen wäre. Für eine künftige Auflage fänden wir eine Umarbeitung des Capitels über den Achromatismus angezeigt, da die darin enthaltenen unaufgelösten Widersprüche das Verständniss nicht fördern können. Wir haben nicht vor, für eine der beiden Hypothesen über den Zustand eines elektrisirten Körpers mit besonderem Nachdruck einzutreten; wir können es aber weder dem Stande dieser Frage, noch dem Charakter des vorliegenden Buches für entsprechend erachten, die Symmer'sche Anschauung, wie es der Herr Verfasser thut, wie eine ganz überwundene zu behandeln: schon der Umstand, dass derselben alle üblichen Bezeichnungen angepasst sind, muss gegen ein solches Verfahren Bedenken erregen. Schliesslich möchten wir noch für die folgende Auflage eine stärkere Berücksichtigung der mechanischen Auffassung der Wärme und ihrer Consequenzen, die für immer weitere Kreise von der grössten Bedeutung werden, anempfehlen.

München. Dr. Friedrich Narr.

Geschichte des Princips der kleinsten Action. Akademische Antrittsvorlesung von Dr. Adolph Mayer, ausserord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig etc. etc. Leipzig, Verlag von Veit & Comp., 1877. 31 S.

Die neueste Zeit hat uns zwei speciell die mathematischen Gesetze der Mechanik in historisch-kritischem Sinne behandelnde Werke gebracht, und wir sind dadurch des grossen Vortheils theilhaftig geworden, die allmälige Entstehung der mechanischen Principien bis zu ihrer Quelle hinauf verfolgen zu können. Natürlich ward in diesen Darstellungen auch das „Princip der kleinsten Wirkung" nicht vergessen, allein angesichts seiner Unfruchtbarkeit wies man ihm doch nur eine untergeordnete Stellung an. Das mochte in einem umfassenderen Werke, welches doch vor Allem auf den factischen Erfolg der einzelnen Lehren Gewicht legen muss, mit allem Rechte angehen, allein der Historiker als solcher musste ebenso selbstverständlich wünschen, eine immerhin höchst interessante Durchgangsphase des mechanischen Erkenntnissweges genauer kennen zu lernen. Hierzu verhilft ihm die unlängst erschienene kleine Monographie A. Mayer's.

Der Verfasser behandelt sein Thema in einer von der sonst üblichen etwas abweichenden Weise, die auf den ersten Anblick etwas befremdend erscheinen mag, der man aber hinterher ihre volle Berechtigung nicht wird absprechen wollen. Da nämlich der eigentliche Sinn, welchen verschiedene Zeiten dem Tenor des betreffenden Princips unterlegt haben, sich so ziemlich vollständig geändert hat, so führt uns der Verfasser unmittelbar nach kurzer Skizzirung jener Probleme, aus welchen die früheste Formulirung resultirte, in die moderne Auffassung des Princips ein, welche rein mathematisch gehalten und des philosophischen oder gar teleologischen Reliefs von ehedem gänzlich verlustig gegangen ist. — Wir erfahren so, dass die Anregung zur Stellung und Lösung solcher Aufgaben von Daniel Bernoulli ausgegangen ist, der sich zuerst fragte, ob nicht z. B. die Theorie der Centralbewegung durch die Lehre von den Isoperimetern — wie wir sagen würden, die Variationsrechnung — erledigt werden könne, dass dann weiter Leonhard Euler diese Frage aufnahm und sodann gewisse einfachste Fälle, noch ohne Hereinziehung irgendwelcher metaphysischer Gesichtspunkte, ganz nach Bernoulli's Intentionen durchführte. Damals war Euler ganz auf der richtigen Fährte. Denn im Anschlusse an Jacobi's posthume Vorlesungen über Dynamik zeigt nunmehr der Verfasser, dass für den Fall des Bestehens einer Kräftefunction ein gewisses aus den Massen- und Bahnelementen der Systempunkte zusammengesetztes Integral ein Minimum werden muss,* und in diesem Sinne hatte auch Euler zuerst seine Vorlage aufgefasst. Da trat plötzlich Maupertuis mit seinem dem optischen Gesetze Fermat's (wenn man will, des Heliodorus von Larissa) nachgebildeten aprioristischen „Princip der kleinsten Menge von Action" auf, und obwohl D'Arcy gleich darauf darthat, welch' absonderliche Consequenzen dies Princip zulasse, so trat doch gleichwohl Euler entschieden auf Maupertuis' Seite und liess sich sogar herab, seine früheren bahnbrechenden Leistungen zu Gunsten jenes herabzusetzen. Herr Mayer deutet mit Recht darauf hin, dass gewiss Euler's fügsamer Charakter durch die äussere Stellung seines damaligen Vorgesetzten beeinflusst worden sei; man darf unseres Erachtens aber auch nicht vergessen, wie gern der grosse Analytiker sich naturphilosophischen — zum Theil recht sonderbaren — Speculationen ** hingab. Der Prioritätsstreit, an welchen sich die Namen Samuel König und Voltaire knüpfen, wird uns eingehend geschildert; hierauf wendet sich der Verfasser zu Lagrange, dessen Darstellungsart er genauer untersucht, als dies bisher geschehen. So gelingt es ihm, den Nachweis zu führen, dass jene Auffassung, welche Bertrand dem Lagrange'schen Énoncé unterlegte, eine irrige sei, dass vielmehr principiell Lagrange's Fassung mit jenem berühmten Universalprincip der Mechanik identisch sei, welches im Jahre 1835 von Hamilton aufgestellt ward.

Die leicht lesbare abgerundete Skizze sei hiermit bestens empfohlen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Ueber die Genauigkeit der Längenmessungen mit Messlatte, Messband, Messkette und Drehlatte. Von Franz Lorber. Wien 1877, Alfred Holder. 8°. 66 S.

Vollen wissenschaftlichen Werth erhalten Untersuchungen jeglicher Art erst durch die Feststellung des Grades der Zuverlässigkeit der Ergebnisse. Häufig unterbleibt diese Feststellung und daher ist eine Arbeit, die sich die Aufgabe stellt, die Grenzen der Genauigkeit von bestimmten

---

* Das Princip gehört sonach wirklich in die genannte Disciplin und ist nicht, wie Dienger meint (Grunert's Archiv 41. Theil, S. 198), „eine jener in letzter Zeit wieder vielfach beliebten Künsteleien, Probleme der Mechanik als solche der Variationsrechnung erscheinen zu lassen".

** In diesem Sinne sind die — unseres Wissens vom Verfasser erstmalig hervorgehobenen — Aufforderungen Daniel Bernoulli's, des nüchternen Physikers, an seinen berühmten Landsmann von hohem Interesse. Er beschwört ihn, seine Zeit doch nicht an solche unfruchtbare Abstrusitäten zu verschwenden.

Messungen zu ermitteln, besonders freudig zu begrüssen, namentlich wenn sie mit soviel Sorgfalt, Fleiss und Umsicht angestellt wird, wie die zu besprechende.

In der Einleitung werden die bei Messungen vorkommenden Fehler (abgesehen von groben Irrungen) eingetheilt in zufällige, unvermeidliche, abwechselnd im einen und im entgegengesetzten Sinne ausfallende, nach der Methode der kleinsten Quadratensumme abschätzbare und in constante nebst einseitig wirkenden. Letztere entstehen z. B. bei der Längenmessung auf dem Felde dadurch, dass der Massstab nicht genau in die Richtung der zu messenden Strecke gelegt wird, sondern um diese Richtung schwankt, wodurch das Ergebniss stets zu gross werden muss. Die constanten und die einseitig wirkenden werden in den Begriff der regelmässigen Fehler zusammengefasst und der Verfasser versucht die Methode der kleinsten Quadrate auch zu ihrer Ermittelung anzuwenden. Die zur Anwendung kommenden Sätze werden zusammengestellt, kurz und elementar begründet.

Theoretisch ist der regelmässige Fehler der Länge einer gemessenen Strecke der ersten Potenz, der mittlere Fehler aber der Quadratwurzel der Länge proportional. Durch eine sehr störende Wortauslassung auf S. 18 der Schrift wird in diesem Betreff eine schlimme Entstellung hervorgebracht.

Die älteren Arbeiten werden in ziemlicher Vollständigkeit vorgeführt und dann schreitet der Verfasser zur Besprechung seiner sehr zahlreichen (6000) eigenen Messungen und Vergleichungen.

Die Genauigkeit einer jeden Messung hängt ausser von dem Verfahren und der Güte der Werkzeuge noch wesentlich ab von der Sorgfalt und Geschicklichkeit des Ausführenden. Für die praktische Anwendung haben daher besondere Vorsichtsmessungen, auf welche meist eine mehr als gewöhnliche Sorgfalt verwendet wird, keine unmittelbare Zahlenbedeutung. Abgesehen von Anderem, erlangen des Verfassers Vergleichungen in den Augen des Berichterstatters dadurch besondere praktische Wichtigkeit, dass alle Messungen von ständigen Gehilfen (und zwar durchgehends denselben, die als sehr verlässig und gewissenhaft bezeichnet sind) ausgeführt wurden, also mit einer in der Praxis möglichen und vorkommenden Sorgfalt und Geschicklichkeit.

Zunächst ergab sich Bestätigung des theoretisch aus der Lehre der kleinsten Quadrate abgeleiteten Gesetzes, die Fortpflanzung des mittleren Fehlers sei der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge proportional.

Verglichen wurden: 1. Messungen mit zwei Stück je 4^m langen Latten längs einer gespannten Schnur und 2. ohne Schnur, 3. mit der Messkette (gewöhnliche Einrichtung, 20^m lang, Glieder von je $0{,}2^m$), 4. mit einem Stahlbande (20^m lang, Gebrauchsweise wie die der Kette) und 5. mit der Drehlatte oder dem Feldzirkel (2^m lang zwischen den Spitzen).

Wünschenswerth wären noch vergleichende Messungen mit dem Messrade gewesen. Der Verfasser hat sie wohl deshalb unterlassen, weil er einen überwiegenden Einfluss der Bodenbeschaffenheit voraussah.

Die Messungen mit Latten längs gespannter Schnur ergeben sich weitaus am genauesten (mittlerer Fehler 535 Milliontel), die mit der Kette entschieden am ungenauesten (mittlerer Fehler 3000 Milliontel), die mit der Drehlatte (2120) und mit dem Stahlbande (2160 Milliontel) annähernd gleich genau. Die mittleren Fehler der Messungen 1, 2, 3, 4 und 5 fanden sich ungefähr in den Verhältnissen

$$1:2:6:4:4.$$

Der regelmässige Fehler bei Lattenmessung längs gespannter Schnur ist sehr klein. Unter der Voraussetzung, er schwinde ganz, lässt sich der regelmässige Fehler bei den anderen Messverfahren berechnen und wurde gefunden: für Latten ohne Schnur (— 85 Milliontel), Messkette (+ 460 Milliontel), Stahlmessband (— 320 Milliontel) und Feldzirkel (— 790 Milliontel), ist also für die Drehlatte weitaus am grössten. Diese regelmässigen Fehler werden wohl mit der Bodenbeschaffenheit ziemlich stark wechseln. Der für die Kette angegebene Werth hat keine allgemeine Bedeutung; der Grad der Spannung, den selbst dieselben, geübten Gehilfen nicht stets gleich einhalten, zeigt sich von zu bedeutendem Einfluss. Das entgegengesetzte Vorzeichen wird einer durchschnittlich zu starken Spannung zugeschrieben.

Schliesslich werden Angaben gemacht über die mittlere Geschwindigkeit der Messungen nach den verschiedenen Verfahren. In der Minute wurde gemessen von

2	Gehilfen	mit	Latten . .	14 m,
2	„	„	Kette . .	18 „
2	„	„	Band . .	20 „
1	„	„	Feldzirkel	26 „

Nach des Berichterstatters Erfahrungen müssen des Verfassers Gehilfen neben ihrer sonstigen Vorzüglichkeit auch noch Muster von Fleiss sein.

Aschaffenburg. C. Bohn.

Bibliographie

vom 16. Juni bis 15. Juli 1877.

Periodische Schriften.

Jahrbuch, kleines nautisches, für d. Jahr 1878. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Jahrbuch über die Erfindungen und Fortschritte auf dem Gebiete der Maschinentechnik und mechanischen Technologie, herausgeg. von F. Neumann. 5. Jahrg. 1877, 2. und 3. Heft. Leipzig, Knapp. 1 Mk. 20 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, herausgeg. von A. Metzger. 26. Jahrg., 2. Heft, 1876. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. 1. Bd., 5. Heft. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayr. Akademie d. Wissensch. 1877, 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld und A. Winnecke. 12. Jahrg., 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Abhandlungen, herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. 11. Bd., 1. Heft. Frankfurt a. M., Winter. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 22. Jahrg., 1. Heft. Zürich, Höhr. 3 Mk. 60 Pf.

Reine Mathematik.

Reye, Geometrie der Lage. 2. Aufl. 1. Abth. Hannover, Rümpler. 5 Mk.

Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Thl.: Analytische Geometrie der Ebene, von O. Fort. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Piorek, Einleitung in die kinematische Geometrie. Hildesheim, Gerstenberg. 1 Mk. 50 Pf.

Frischauf, J., Elemente der Geometrie. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Klekler, K., Die Methode der darstellenden Geometrie. Ebendas. 4 Mk. 40 Pf.

Neumann, C., Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Ebendas. 10 Mk.

ROTTOK, H. L., Neuere Geometrie für die oberen Classen der Realschulen und Gymnasien. Schleswig, Bergas. 1 Mk. 50 Pf.

GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. 2. Aufl. Erlangen, Besold. 5 Mk.

RAPP, J. N., Lehrbuch d. Arithmetik. Ingolstadt, Ganghofer. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

MEYERHOFEN, R., Mathematisch-technisches Lehr- und Handbuch. 1. Thl., 4. Lief. Strassburg, Schneider. 75 Pf.

LAUNHARDT, Das Massennivellement. 2. Aufl. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 2 Mk.

JORDAN, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Aufl. 1. Lief. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

RÜHLMANN, M., Allgemeine Maschinenlehre. 3. Bd., 1. Hälfte. 2. Aufl. Braunschweig, Schwetschke & Sohn. 7 Mk. 60 Pf.

OTT, E., Elemente der Mechanik. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

NEHLS, C., Ueber graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. Hannover, Rümpler. 8 Mk.

Physik und Meteorologie.

HELMHOLTZ, H., Die Lehre von Tonempfindungen, als physiologische Grundlage f. d. Theorie d. Musik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 12 Mk.

VOGEL, H. W., Praktische Spectralanalyse irdischer Stoffe. Nördlingen, Beck. 8 Mk.

WACHNER, C., Historisch-kritische Uebersicht über die Hageltheorien. Rotterdam, van Hengel & Eeltjes. 6 Mk.

RIEDEL, J., Populäre Physik oder leichtfassliche Naturlehre. 3. Aufl. Heidelberg, Groos. 2 Mk. 40 Pf.

TAIT, P. G., Vorlesungen über einige neuere Fortschritte d. Physik, deutsch herausgegeben von G. Wertheim. Braunschweig, Vieweg. 5 Mk.

REIS, P., Neue elektrische Maschinen, insbes. die magnet-elektr. Maschinen u. deren Anwendungen. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 25 Pf.

Berichtigung.

In dem Supplementhefte zur historisch-literarischen Abtheilung bitten wir in der Uebersetzung der Abhandlung über die homocentrischen Sphären folgende Druckfehler zu verbessern:

S. 124 Z. 8 soll heissen: „was den damaligen Griechen nicht gleich war“.

S. 138 Z. 3 v. u. soll heissen: „welche auf ihrer Oberfläche zwei entgegengesetzte Pole P trägt“.

S. 157 Z. 14 und 15 soll heissen: „und mit der synodischen Bewegung des Planeten ist sein unregelmässiger Lauf bezüglich der Sonne und seine Bewegung nach der Breite vollständig bestimmt“.

S. 171 Z. 9 v. u. soll heissen: „beschrieben“ (statt beschrieb).

München. W. HORN.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Volumen II. Insunt librorum VI et VII reliquiae. Berolini apud Weidmannos 1877. VIII, 473—1020.

Im XXI. Bande dieser Zeitschrift, historisch-literarische Abtheilung S. 70—80, haben wir ziemlich eingehend über das Erscheinen des ersten Bandes der neuen Pappus-Ausgabe berichtet, heute wird uns die Freude, die gleiche Aufgabe gegenüber dem zweiten Bande erfüllen zu können. Wir setzen voraus, dass unseren Lesern jene frühere Anzeige zu Gebote stehe, und knüpfen an den damals abgebrochenen Faden an, indem wir eine vielleicht nicht unwichtige Nachtragsbemerkung als Verbindung wählen.

Als wir S. 79 das 5. Buch des Pappus besprachen, wussten wir von Zenodorus, dem Verfasser einer Schrift über isoperimetrische Figuren, welcher Archimed's Schriften benutzte, selbst von Pappus und von Theon von Alexandrien benutzt ward, sonst kein chronologisch verwerthbares Moment anzugeben. Die Grenzjahre seiner Lebenszeit waren demnach 200 vor und 300 nach Christus. Heute glauben wir diese ein halbes Jahrtausend umfassende Zwischenzeit auf die Hälfte einschränken zu können. M. Fabius Quintilianus lebte nach den Angaben der römischen Literaturgeschichten etwa in den Jahren 35—95. Im I. Buche seiner *Institutio oratoria* (*I*, 10, 39—45, *edit. Halm*, Leipzig 1868, S. 62) findet sich folgende Stelle: „Wer wird einem Redner nicht vertrauen, wenn er vorbringt, der Raum, der innerhalb gewisser Linien enthalten sei, müsse der gleiche sein, sofern jene Umfassungslinien dasselbe Maass besitzen? Doch ist dieses falsch, denn es kommt sehr viel darauf an, von welcher Gestalt jene Umfassung ist, und von den Geometern ist Tadel gegen solche Geschichtsschreiber erhoben worden, welche da glaubten, die Grösse von Inseln werde zur Genüge durch die Dauer der Umschiffung gekennzeichnet. Je vollkommener eine Gestalt ist, um so mehr Raum schliesst sie ein. Stellt daher jene Umfassungslinie einen Kreis dar, welches die vollkommenste der Gestalten der Ebene ist, so schliesst sie mehr Raum ein, als wenn sie bei gleicher Küstenstrecke ein Quadrat bildete. Das Quadrat hinwieder schliesst mehr Raum ein als das Dreieck, das gleichseitige Dreieck mehr als das ungleichseitige.“ Unseres Wissens hat von Mathematikern zuerst Jean Borrel (Buteo) in seinen *Opera Geometrica*, Lyon 1554, eine Abhandlung *Ad locum Quintiliani geometricum explanatio* veröffentlicht. Kaestner (Gesch. der Mathematik I, 470) sagt darüber: „Die geometrische Stelle Quintilian's befindet sich im ersten Buche *Instit. Orat.* und betrifft den Irrthum, Inhalt der Figuren aus ihrem Umfange zu schätzen.“ Als wir unsere Agrimensoren verfassten, war uns leider diese Bemerkung entgangen, sonst hätten wir sicherlich damals schon der Originalstelle nachgespürt und aus derselben die nach zwei Seiten hin wichtigen Folgerungen gezogen: erstlich dass mit grosser Wahrscheinlichkeit Zenodorus, dessen Resultate Quintilian gekannt zu haben scheint, vor diesem, also etwa vor dem Jahre 90, gelebt haben muss, zweitens dass zu Quintilian's Zeiten wissenschaftlich gebildete Männer von der Art dieses Schriftstellers selbst auf Geometrie sich wohl verstanden, wenn auch die grosse Menge Nichts von solchen Dingen wusste. Dürfen wir bei dieser Gelegenheit eine griechische Parallelstelle zu Quintilian anführen, so verweisen wir auf Polybius, der um 130 v. Chr. (*IX*, 21 *edit. Hultsch*, *pag.* 686) erzählt, dass es Leute gebe, die nicht begreifen könnten, dass Lager bei gleicher Umwallung verschiedenes Fassungsvermögen besitzen. Eine späte Bestätigung liefert Proclus (*edit. Friedlein pag.* 237): „Es ist also, wie ich sagte, dass auch bei Gleichheit des Umfanges Räume ungleich sind; und Manche haben bei der Theilung von Feldern ihre Gesellschafter über's Ohr gehauen, indem sie ein grösseres Feld mit Bezugnahme auf die Gleichheit des Umfanges für sich nahmen.“ Unter den nach Quintilian tadelnswerthen und getadelten Geschichtsschreibern nennen wir endlich keinen geringeren als Thukydides, der, ein Zeitgenosse Plato's in Athen, eines ähnlichen Trugschlusses sich schuldig machte (*VI*, 1 *edit. Rothe*, *pag.* 95).

Der neue Band beginnt mit dem 6. Buche der Sammlung. Dieses stellt sich in einer Ueberschrift die Aufgabe, Auflösungen zu den Schwierigkeiten zu liefern, welche in dem sogenannten *μικρὸς ἀστρονομούμενος* enthalten sind. Der „Kleine Astronom“ war selbst eine Sammlung von Schriften, deren Studium nach dem der Elemente des Euklid und vor dem des grossen Universalwerkes der Astronomen, des Almagestes des Ptolemaeus, eingeschoben werden musste, wenn letzteres all den Nutzen schaffen sollte, dessen es fähig war. Ob der kleine Astronom eine endgiltig begrenzte Sammlung war, ob nicht vielmehr der an sich lose Zusammenhang gestattete, bald diese, bald jene kleinere Schrift aufzunehmen oder auszuschliessen, dürfte zweifelhaft sein. Für die zweite Auffassung spricht der einigermassen verschiedene Inhalt morgenländischer Uebersetzungen und Bearbeitungen dieser Sammlung, über welchen unser gelehrter Mitarbeiter Dr. Moritz Steinschneider unter dem Titel „Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter" im X. Bande dieser Zeitschrift S. 456—498 ausführlich berichtet hat. Der Commentar des Pappus verbreitet sich über nachfolgende Bücher: 1. Die Sphärik des Theodosios, 2. die Abhandlung des Autolykos über die sich drehende Kugel, 3. die des Theodosios über Tag und Nacht, 4. die des Aristarchos über Grösse und Entfernung von Sonne und Mond, 5. die Optik des Euklides, 6. die Phänomena desselben Verfassers. 7. Ein Commentar des Menelaos zu dem unter 6 genannten Werke sollte zwar nach einer (*pag.* 602 *lin.* 1) durch Pappus gegebenen Zusage auch noch erläutert werden, doch findet sich davon in dem auf uns gekommenen Texte des Pappus keine weitere Spur. Zur Herausgabe gerade dieses 6. Buches der Sammlung des Pappus konnte durch Herrn Hultsch Material benutzt werden, welches Jahrhunderte lang für die Wissenschaft verschwunden war. Bei dreimonatlichem Aufenthalte in Italien im Jahre 1876 ist es Herrn Hultsch geglückt, neue Handschriften des Autolykos, sowie des Theodosios aufzufinden und abzuschreiben, welche theils Unbekanntes, theils mangelhaft Bekanntes in wesentlich neuer Form kennen lehren. Die getreue Veröffentlichung dieser ganzen Texte stellt die unermüdliche Arbeitskraft des Herausgebers uns in künftige Aussicht; gegenwärtig konnte er dieselben schon bei der Kritik des Wortlautes des Pappus an nicht wenigen schwierigen Stellen benutzen, und die reichlich der Uebersetzung beigegebenen Anmerkungen lassen uns die Wichtigkeit jener Benutzung nur um so deutlicher erkennen. Was den eigentlichen Inhalt des 6. Buches des Pappus betrifft, so müssen wir vielleicht einem möglichen Irrthum vorbeugen. Es wäre nicht undenkbar, dass der Zweifel laut würde, wie denn Erläuterungen zu astronomischen Schriften in den Rahmen eines der Hauptsache nach geometrischen Autors passen wollen, und derartige Erwägungsgründe waren es auch, welche Herrn Gerhardt veranlassten, das 6. Buch ohne Weiteres dem Pappus ab- und dafür dem Theon von Alexandrien zuzusprechen. (Vergl. hist.-lit. Abtheilung von Bd. XXI dieser Zeitschrift, S. 41.) Dem gegenüber bemerken wir, dass die Erläuterungen des 6. Buches ihrer grössten Mehrzahl nach geometrischer Natur sind und demzufolge in keinerlei Gegensatz weder zu den vorhergehenden, noch zu den folgenden Büchern treten.

Wer die Elemente des Euklid inne hat und von ihnen aus der Astronomie sich zuwenden will, bedarf, wie vorher bemerkt, des Studiums der im 6. Buche erläuterten Schriften. Wer, mit den allgemeinen Elementen vertraut, erlernen will, wie man durch Construction mannigfacher Linien die Auflösung gestellter Aufgaben vollende, bedarf dazu eines anderweitigen eigenen Uebungsstoffes, der unter dem Namen des aufgelösten Ortes von Euklides, von Apollonios von Pergä, von Aristaios dem Aelteren behandelt worden ist. Die hierzu nothwendigen Hilfssätze und Erläuterungen hat Pappus in seinem VII. Buche vereinigt, ein Parallelismus, auf welchen wir bei früherer Gelegenheit schon aufmerksam gemacht haben und welcher die Zusammengehörigkeit des 6. und 7. Buches bestätigt. Gleichwie im 6. Buche Unterabtheilungen nach den erläuterten Schriften gebildet sind, so verhält es sich auch bei dem 7. Buche mit ähnlicher Angabe des Namens der Schriften, welche Pappus dabei im Auge hatte. Pappus nennt: die Daten des Euklides, den Verhältnissschnitt, den Raumschnitt, den bestimmten Schnitt, die Berührungen des Apollonios, die Porismen des Euklides, dann wieder von Apollonios die Neigungen, die ebenen Oerter, die Kegelschnitte, endlich die körperlichen Oerter des Aristaios, die Oerter auf der Oberfläche des Euklides, die mittleren Proportionallinien des Eratosthenes (*pag.* 636). Wir bemerken, dass wir hier diejenigen deutschen Namen benutzt haben, deren Herr Gerhardt in seiner mit Uebersetzung versehenen Ausgabe des 7. und 8. Buches des Pappus (Halle 1871, S. 5) sich bedient. Dieser Uebersetzung entgegen verstehen wir jedoch die sich anschliessenden Worte des Pappus nicht: „Es sind dies 33 Bücher, von deren Inhalt, bis auf die Kegelschnitte des Apollonios, Kenntniss zu nehmen ich Dir anempfehle", sondern wir nehmen mit Herrn Hultsch an, Pappus sage: „Es sind dies 33 Bücher, deren Inhalt bis zu den Kegelschnitten des Apollonios ich Dir übersichtlich herausgestellt habe", eine Behauptung, welcher auch in der That der ganze Text des Pappus bis S. 682 entspricht, d. h. Dasjenige, was Chasles in seiner Geschichte der Geometrie die Vorrede des 7. Buches nennt, diesen Begriff weiter ausdehnend, als man es sonst wohl gewohnt ist. Aus diesen Auszügen Bemerkenswerthes hervorzuheben, ist nicht mühsam. Wir führen zunächst zwei Stellen aus der Inhaltsangabe der Berührungen an, deren hohe geschichtliche Bedeutung, unseres Wissens noch nie erkannt, uns gleichfalls gegenwärtig ganz neu und überraschend auffiel.

Pappus sagt S. 646: *ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ι'* und S. 648: *ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος ς'*. In moderner Sprache heisst dieses aber: aus 3 Elementen lassen sich 10 Combinationen mit Wiederholung zur Classe 3, 6 dergleichen zur Classe 2 bilden. Damit ist die erste Spur combinatorischer Betrachtungen bei einem griechischen Mathematiker aufgefunden und dadurch wenigstens neben der hochentwickelten Combinatorik indischer Schriftsteller ein selbstständiges europäisches Auftreten dieses Capitels der Denklehre gesichert. Ob wir freilich jene combinatorischen Bemerkungen bis zu Apollonius verfolgen dürfen, ob wir sie für Pappus in Anspruch zu nehmen haben, bleibt mindestens fraglich, so lange die zwei Bücher über Berührungen nicht wieder aufgefunden sind. Wir persönlich haben den Eindruck, als sei allerdings erst ein Zusatz des Pappus in jenen Worten enthalten, ein Zusatz, wie er sich deren an so vielen Orten auch bei scheinbarer Berichterstattung erlaubt.

Eine andere höchst bemerkenswerthe und mehrfach bemerkte Stelle aus der Inhaltsanzeige der Kegelschnitte des Apollonius *pag.* 678 spricht die Aufgabe aus, welche seit Descartes den Namen der Aufgabe des Pappus im engeren Sinne führt, und kurz darauf *pag.* 682 befindet sich die Regel zur Bestimmung des Körperinhaltes von Umdrehungskörpern, welche im XVII. Jahrhundert ohne Quellenangabe durch Paul Guldin neu veröffentlicht wurde und mit nicht selten sich wiederholender Ungerechtigkeit der Benennung seitdem als Guldin'sche Regel durch die Lehrbücher sich forterbt.

Nach den allgemeinen Inhaltsanzeigen der vorerwähnten Schriften lässt Pappus eine grosse Anzahl von Hilfssätzen zu den Büchern des Apollonius über den Verhältnissschnitt und den Raumschnitt (*pag.* 684), über den bestimmten Schnitt (*pag.* 704), über die Neigungen (*pag.* 770), über die Berührungen (*pag.* 820), über die ebenen Oerter (*pag.* 852) folgen; darauf weitere Hilfssätze zu den Porismen des Euklid (*pag.* 866), zu den Kegelschnitten des Apollonius (*pag.* 918), endlich zu Euklid's Oertern auf der Oberfläche (*pag.* 1004).

Von allen diesen Werken sind uns einzig die Kegelschnitte des Apollonius erhalten. Nur an diesen lässt sich daher eine Prüfung anstellen, wie eng die Beziehungen sein mögen, welche zwischen den sogenannten Hilfssätzen oder Lemmen des Pappus und den Schriften, welchen er sie zuordnet, obwalten. Diese Prüfung, längst angestellt, hat erkennen lassen, dass Pappus seiner geometrischen Phantasie kaum irgendwelche Fesseln anlegte, dass er bei dem Studium eines Buches vielmehr Anregung zu Untersuchungen fand, die dem Gegenstande des Buches selbst recht fremdartig waren, dass also das Wort Hilfssätze bei ihm kaum anders zu verstehen ist, als in dem Sinne von Sätzen, welche Pappus etwa zur Zeit, als er das betreffende Buch durcharbeitete, erdachte. Damit büssen die Lemmen nun allerdings einen guten Theil ihrer historischen Verwerthbarkeit zur Wiederherstellung der verlorenen Schriften, zu welchen sie gehören, ein, und der grosse Nutzen, den Chasles von ihnen zu seiner meisterhaften Neuschaffung der euklidischen Porismen gezogen hat, ist nur ein weiterer Beweis, wenn es eines solchen bedürfte, für die Genialität des französischen Geometers. Chasles befand sich eben hier auf einem Boden, zu dessen Bearbeitung seine Geistesrichtung wunderbar sich eignete, wie denn überhaupt eine geistige Verwandtschaft zwischen Pappus und Chasles Jedem auffallen muss, der mit den Schriften der beiden durch anderthalb Jahrtausende getrennten Gelehrten sich vertraut macht. Bei Beiden erkennen wir denselben geometrischen Scharfsinn, dieselbe Gabe, einen erhöhten Standpunkt zu gewinnen, dieselben historischen Neigungen, verbunden mit der Freude daran, fast mehr zwischen den Zeilen, als auf den Zeilen der Schriftsteller zu lesen. So hat auch Chasles in seiner Geschichte der Geometrie sich ausführlicher als mit irgend einem Werke des Alterthums mit der Sammlung des Pappus, insbesondere mit dem 7. Buche derselben beschäftigt. Er hat in den Lemmen zum bestimmten Schnitte die Lehre von der Involution von sechs Punkten wiedererkannt; er hat aus den Lemmen zu den Berührungen die Aufgabe hervorgehoben, durch drei in einer Geraden gelegene Punkte ebenso viele Gerade zu ziehen, welche ein Sehnendreieck in einem gegebenen Kreise bilden; er hat die Lehre von der Constanz des anharmonischen Verhältnisses einem Lemma zu den Porismen entlockt; er hat gezeigt, dass ein Lemma zu den Oertern auf der Oberfläche den Satz enthält, dass die Entfernungen eines jeden Punktes irgend eines Kegelschnittes vom Brennpunkte und der zu demselben gehörigen Leitlinie in constantem Verhältnisse stehen, ein Satz, welcher sich in den Kegelschnitten des Apollonius nicht findet.

Wir wollen hier nicht auf den Abweg gerathen, Alles zu wiederholen, was unsere Leser über diesen Gegenstand in der Geschichte der Geometrie von Chasles (deutsche Uebersetzung S. 31—41) in aller Ausführlichkeit entwickelt finden, wir wollen nur zwei Dinge erwähnen, an welchen Chasles absichtlich oder zufällig vorübergegangen ist.

Unter den Lemmen zum Verhältnissschnitte und Raumschnitte des Apollonius ist S. 694 der Satz bewiesen, dass das Product $x(a-x)$ zu einem Maximum werde, wenn $x=\frac{a}{2}$, und unter den Lemmen zu den Berührungen desselben Verfassers S. 840 ist der Lehre von den Aehnlichkeitspunkten zweier Kreise bereits soweit vorgearbeitet, als wenigstens bekannt ist, dass die Verbindungsgerade der entgegengesetzten Endpunkte paralleler Halbmesser zweier sich äusserlich berührender Kreise durch den Berührungspunkt geht. Eine zu *pag.* 852 befindliche Figur legt zwar die Vermuthung weiterer Vertiefung in diese Theorie nahe, doch ist die Benutzung des Aehnlichkeitspunktes hier eine fast zufällige.

Somit haben wir versucht, unsere Leser wenigstens im Allgemeinen mit dem Inhalte der Sammlung des Pappus bekannt zu machen, soweit sie bis zum Ende des zweiten Bandes der neuen Ausgabe weitergeführt uns vorliegt. Wir können zum Schlusse nur wiederholen, was wir als Urtheil über den ersten Band aussprachen. Herr Hultsch hat sich durch Texteskritik, durch eine lesbare, verständliche lateinische Uebersetzung, durch die zahlreichen vortrefflichen Anmerkungen als seiner Aufgabe durchaus gewachsen gezeigt und uns nur noch begieriger auf den dritten und letzten Band gemacht, der nächst dem 8. Buche der Sammlung eine jener gelehrten und interessanten Vorreden oder Nachreden bringen muss, wie sie Herr Hultsch zu schreiben weiss.

CANTOR.

Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. 1. Heft: Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen. 2. Heft: Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern und Hebräern. Halle bei L. Nebert, 1877.

Der Titel der Hefte giebt ziemlich genaue Auskunft über deren Inhalt. In dem ersten Hefte verfolgt der Verfasser die Veränderungen, welche die Kenntniss von der Gestalt und den Bewegungen der Erde, die bei den Griechen, wie wir namentlich seit Schiaparelli's Forschungen auf diesem Gebiete wissen, schon recht nahe mit der Wahrheit übereinstimmten, während der Zeit vom Auftreten der Kirchenväter bis zu Nicolaus Copernicus erlitten. In dem zweiten Hefte löst er dieselbe Aufgabe in Bezug auf arabische und jüdische Schriftsteller, jene vom Beginn der arabischen Literatur, also etwa vom letzten Viertel des VIII. Jahrhunderts an, diese von der Zeit um Christi Geburt an durchmusternd, leider mit Weglassung der Gnostiker in Alexandrien, welche somit, da auch Schiaparelli sie umgehen musste, gar nicht zur Behandlung gekommen sind, während wir, wie wir in der Jenaer Literaturzeitung vom 23. Juni 1877 angedeutet haben, diese Behandlung als fruchtbringend erwarten. Der für beide Hefte gemeinsame Hauptname zeigt ebenso, wie die durch beide Hefte sich fortsetzende Pagination, dass Herr Günther diese Studien fortzusetzen beabsichtigt, wofür man ihm nur zum Voraus dankbar sein kann. Seinen brieflichen Mittheilungen entnehmen wir, dass ein drittes Heft mit der S. 14 des ersten Heftes vorübergehend angezogenen Anschwellungshypothese und deren historischer Entwickelung, ein viertes mit kartographischen Dingen aus dem XVI. Jahrhundert sich beschäftigen soll.

Gleich auf S. 5 entzieht Herr Günther einen Mann der unverdienten Vergessenheit in wissenschaftlichen Kreisen, der wohl zuerst im Abendlande richtige Ansichten über die Erdgestalt besass und sie zu äussern wagte: den heil. Virgilius von Salzburg. C. J. Böttcher (*Germania Sacra.* Leipzig 1874, S. 1338) weiss von ihm Folgendes zu melden: „Um 745 ward St. Virgilius aus Irland Abt von St. Peter. Er ward, nachdem er längere Zeit als einfacher Presbyter das Bisthum verwaltet hatte, 767 zum Bischof geweiht, hatte mit dem heil. Bonifacius einige Lehrdifferenzen, missionirte (durch den heil. Modestus u. A.)

bis nach Kärnten, erbaute die Kathedrale, in welche er die meisten Reliquien St. Rupert's versetzte, und † 27. Nov. (oder Jan.) 784. 1233 von Gregor IX. canonisirt. Sein Grab in der unter ihm erbauten Kathedrale." Von den Lehrdifferenzen mit Bonifacius berichtet ziemlich ausführlich P. Josephus Mezger (*Historia Salisburgensis, hoc est vitae episcoporum et archiepiscoporum Salisburgensium etc.* Salzburg 1692, Seite 192 flgg.), aus dessen Werk die betreffende, von Herrn Günther citirte Stelle im Canisius (so heisst der durch Basnage 1725 neu herausgegebene Schriftsteller!) der Hauptsache nach entlehnt ist. Für Leser, welche eine deutsche mundgerechte Darstellung vorziehen, darf auf Rettberg, Kirchengeschichte Deutschlands, Göttingen 1846—48, Bd. II S. 233 flgg. verwiesen werden. Es ergiebt sich aus den Quellen, dass Bonifacius und Virgilius zweimal im Streite waren und dass beidemal die Entscheidung des Papstes Zacharias angerufen wurde. Das erste Mal handelte es sich um ausschliesslich theologische Dinge, und der Papst wies am 1. Juli 746 (nach Anderen 744 oder 745) Bonifacius mit seinen Klagen ab. Das zweite Mal kam neben rituellen Fragen auch die Lehre von den Antipoden zur Sprache, und in dieser Beziehung scheint der Papst keinen Spass verstanden zu haben. Sein Brief vom 1. Mai 748 legte es dem Virgilius auf, wenn er wirklich solche Gedanken hegte, zur Vertheidigung nach Rom zu kommen. Virgilius kam nun freilich nicht, aber bei dem auf Zacharias seit dessen Tode 752 folgenden Papste schadete ihm weder der Ungehorsam, noch die freie Denkart, wie aus der 15 Jahre später stattgehabten Bischofsweihe zu erkennen ist.

Eine andere, dem Geschichtsschreiber der mathematisch-physikalischen Wissenschaften gleichfalls weniger geläufige Persönlichkeit Thomas von Aquino kommt auf S. 18 und in einem Nachtrage auf S. 54 zur Geltung in Bezug auf die durch ihn erkannte, wenn auch aus naturphilosophischen Gründen verworfene Möglichkeit, den wechselnden Ort der Gestirne durch Bewegungen der Erde zu erklären. Man sieht an diesem Beispiele wiederholt, dass der Name *doctor universalis*, welchen die Schüler des gelehrten Neapolitaners ihm gaben, nicht minder gerechtfertigt war, wie sein anderer Beiname *doctor angelicus*. Auch in der mechanischen Physik bewies er seine Universalität, wie neuerdings Herr Günther selbst in einem schönen Aufsatze in der Zeitschrift „Kosmos" S. 234 bis 242 dargethan hat.

Dante, den Dichterfürsten, auch in der politischen, wie in der wissenschaftlichen Geschichte des XIII. Jahrhunderts auftreten zu sehen, ist man schon eher gewohnt. Herr Günther behandelt seine kosmographischen Ansichten theilweise nach dem Vorgange des damit besonders sich beschäftigenden Werkes von Prof. Wilhelm Schmidt in Graz, über welcher er auch seiner Zeit in ansprechender Weise in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung berichtete.

Nicolaus von Cusa und seine astronomischen Arbeiten bildeten gleichfalls bereits den Inhalt einer besondern Abhandlung von Prof. Schanz in Rottweil, welche hier benutzt, theilweise ergänzt ist. Jedenfalls ist die Günther'sche Darstellung um Vieles lesbarer als die seines Vorgängers, der bei grossem Sammelfleisse die stylistische Ausfeilung seiner Programme einigermassen vernachlässigt hat.

Nennen wir nun noch Domenico Maria, den Lehrer des Kopernik, über welchen neuerdings biographisch-genealogische Untersuchungen durch den Ehrenvorsteher der Communalbibliothek zu Ferrara, Herrn Cittadella, angestellt worden sind; nennen wir Girolamo Fracastoro, der sich mit Kopernik darin begegnete, dass er an der ptolemäischen Weltanschauung keinen Gefallen fand; nennen wir Lionardo da Vinci, dessen ofterwähnte, nie genau erörterte Stellung zu der Astronomie seiner Zeit besprochen und bei welchem eine der Aufgabe der Tractoria nahestehende Untersuchung hervorgehoben wird, so dürfte damit Einzelnes aus dem ersten Hefte in genügender Menge gekennzeichnet sein, um unsere Leser zu veranlassen, von den Günther'schen Studien nähere Kenntniss zu nehmen.

Wir fühlen uns dadurch nur um so mehr gerechtfertigt, für das zweite Heft nur eine allgemeine Empfehlung auszusprechen, der wir einen einzigen ergänzenden Zusatz geben. S. 59 Note * ist von der Gradmessung des Eratosthenes beiläufig die Rede. Es sei für ihn natürlich nicht daran zu denken gewesen, zwischen Syene und Alexandrien die Messkette auszuspannen, aber er habe sich auf die treffliche Landesvermessung beziehen können, deren sich das Königreich Aegypten rühmen durfte. Diese Vermessung reichte aber höchstens bis zur zweiten Katarakte; für das obere Land bis zu den Nilkrümmungen und nach Meroë war er offenbar, wie schon Herodot, von den ganz unbestimmten Angaben der wenigen Reisenden abhängig, welche die Hauptstationen und ihre Entfernungen in Tagemärschen verzeichnet hatten. Wir entnehmen diese Bemerkungen fast wörtlich einem Aufsatze von Geh. Rath Lepsius in der Zeitschr. f. ägypt. Sprache und Alterthumskunde, I. Heft 1877. Unter der Ueberschrift: „Das Stadium und die Gradmessung des Eratosthenes auf Grundlage der ägyptischen Maasse" wird dort auch nachgewiesen, dass Eratosthenes den Grad zu 126000^{m} annahm, während die wahre Länge des Breitengrades in Aegypten $110802{,}6^{m}$ beträgt, so dass also Eratosthenes bei seiner Schätzung um fast $13\frac{3}{4}$ Procent irrte.

CANTOR.

Die römischen Grundsteuervermessungen nach dem lateinischen Texte des gromatischen Codex, insbesondere des Hyginus, Frontinus und Nipsus bearbeitet von E. Stoeber, königl. bayrischem Bezirksgeometer. Mit einem Vorwort von Dr. C. M. v. Bauernfeind. München, Theodor Ackermann. 1877. II, 149 S.

Während derselben Zeit, zu welcher wir die Druckbogen unserer „Römischen Agrimensoren" corrigirten, beschäftigte sich im bairischen Walde, in Cham, ein Bezirksgeometer, Herr Stoeber, mit der Uebersetzung grösserer Abschnitte aus dem gromatischen Codex und mit der Verwerthung des Inhalts derselben für die Geschichte des Katasterwesens. So war von vornherein die Richtung unserer beiderseitigen Forschungen eine verschiedene, und wenn auch einzelne Kreuzungsstellen um so weniger fehlen konnten, je häufiger solche historische Untersuchungen vom geraden Wege abbiegen, so waren es doch nur einzelne Stellen, denen wir beide ein dem Grade nach gleiches, dem Inhalte nach meistens verschiedenes Interesse abzugewinnen wussten. Herr Stoeber war daher im Rechte, wenn er ein Jahr nach unserem vorgenannten Buche auch das seinige uns heute zur Besprechung unterbreitete herausgab, und wir können Herrn v. Bauernfeind nur beipflichten, wenn er in der Vorrede, welche er auf Bitten des Verfassers dem Schriftchen voranschickte, sich dahin ausspricht: „Beide Werke [das von Cantor und das von Stoeber] schliessen sich nicht aus, sondern ergänzen einander; wenn aber das erstere allerdings mehr für solche Leser sich eignet, die ein Interesse an der Geschichte der Mathematik haben, so kann das vorliegende Buch dagegen allen jenen Beamten und Vermessungstechnikern besonders empfohlen werden, welche die im ehemaligen römischen Reiche giltigen gesetzlichen und technischen Normen über Vertheilung und Besteuerung von Grund und Boden ohne besonderen Zeit- und Kostenaufwand kennen lernen wollen."

Den Mittelpunkt des Stoeber'schen Buches bildet nach des Verfassers eigener Erklärung Capitel IV, welches die Ueberschrift „Messungsmethoden" führt. Es enthält die Uebersetzung von Bruchstücken agrimensorischer Schriftsteller, welche, ob mit Recht oder Unrecht bleibe dahingestellt, in den Handschriften Hyginus, Frontinus, Nipsus genannt werden. In der Lachmann'schen Ausgabe der römischen Feldmesser sind diese Stücke gleicherweise bezeichnet und stehen als: *Hygini de limitibus constituendis pag.* 166—208, *Frontini de limitibus pag.* 31—34, *Nipsi fluminis varatio pag.* 285—286, *Nipsi limitis repositio pag.* 286—290. Herr Stöber hat sich dem an vielen Stellen sehr schwer verständlichen Texte gegenüber durch seine Uebersetzung unstreitige Verdienste erworben. Er hat mit Glück die antiken Kunstausdrücke durch die ihnen dem Wesen nach entsprechenden modernen Ausdrücke ersetzt, und wenn er dabei in sprachlich nicht immer tadelfreien Wendungen sich bewegt, so ist gerade das Feldmesserdeutsch, dessen er sich bedient (z. B. rechtwinkliger Punkt und dergleichen) ein den Geist des Originals deutlich wiedergebendes, da auch die lateinische Rechtschreibung der Hyginus, Frontinus, Nipsus und ihrer Collegen mehr als fragwürdig sein mochte.

Eine Erläuterung des Textes dieser Schriftsteller und ihrer Fachgenossen, so weit uns solche Quellen erhalten sind, ist unentbehrlich. Den juristischen Inhalt und auch zum Theil den technisch-feldmesserischen hat 1852 einer der Herausgeber der Feldmesser, A. Rudorff, in seinen vortrefflichen Gromatischen Institutionen erörtert. Freilich ist diese klassische Abhandlung in so gelehrter Form, mit Berufung auf so viele Beweisstellen, mit so paritätischer Anwendung der lateinischen neben der deutschen Sprache geschrieben, dass schon aus diesem Grunde der Leserkreis derselben ein ziemlich enger sein mag, namentlich wenn man in Erwägung zieht, dass Diejenigen, welche von Rudorff's Form eher Anziehung als Abstossung erfahren, die gegentheilige Folge des ihnen fremdartigsten Inhaltes zu empfinden pflegen. So war es keineswegs überflüssig, der deutschen Uebertragung auch eine deutsche Erklärung beizufügen, beziehungsweise vorauszuschicken. Herr Stoeber hat nach einer einen Druckbogen starken, die Geschichte der Geometrie in kürzestem Auszuge behandelnden Einleitung die drei ersten Capitel seines Buches dieser Erklärung gewidmet. Die Ueberschriften lauten: Cap. I. Die Beschaffenheit des römischen Landgebietes, S. 18—39; — Cap. II. Die Vermarkung des Landgebietes, S. 40—59; — Cap. III. Die römischen Agrimensoren. Ihre Instrumente, S. 60—79.

Wir wollen keineswegs sagen, dass diese Capitel sich vollständig mit Rudorff's gromatischen Institutionen decken! Mancherlei wird man an dem einen Orte finden, was an dem andern fehlt und umgekehrt; aber wir glauben, Herr Stoeber selbst würde es uns verübeln, wenn wir hier weniger scharf, als er es an den verschiedensten Stellen seines Buches gethan hat, hervorhöben, bei welchem Lehrer er einen grossen Theil seiner Kenntnisse sich erworben hat. Was dem Feldmesser zum Verständnisse der in Cap. IV übersetzten Stücke nöthig ist, dürfte in diesen drei Capiteln zweckmässig zusammengestellt sein. Vielleicht wäre nur ein Gegenstand noch bestimmter zu betonen gewesen: die Eigenschaft des Jucharts als Doppelmass, wodurch allein verständlich wird, dass die Centurie von 200 Juchart einen quadratischen Flächenraum bildete. Allerdings ist diese Eigenschaft des Jucharts nicht verschwiegen, sie findet sich ausgesprochen S. 122 in der Anmerkung, aber die Schwierigkeiten, welche dem Verständnisse schon bei S. 24 und anderen früheren Stellen entgegenstehen, werden durch eine so späte und in einer Anmerkung verborgene Erörterung nicht gehoben.

Als Cap. V schliesst sich den Uebersetzungen noch an: Das römische Steuersystem S. 135—149. Auch hier hat Herr Stoeber eine so vor-treffliche Arbeit wie Huschke's Buch „Ueber den Census und die Steuerverfassung der früheren römischen Kaiserzeit" in geeigneter Weise zu benutzen verstanden, an einzelnen Stellen, wie er S. 143 in bescheidener Weise es ausspricht, persönliche Bemerkungen einflechtend. Wir glauben, dass auch dieses Schlusscapitel dem Leserkreise, für welchen das Stoeber'sche Buch vorzugsweise berechnet ist, Befriedigung zu gewähren sich rühmen darf; wir selbst haben wenigstens eine ziemlich klare Anschauung römischer Grundsteuerverhältnisse daraus erhalten.

Die Ausstattung des Buches ist eine ebenso saubere als geschmackvolle. Ein Mangel, den es mit gar vielen anderen historisch-mathematischen Schriften theilt, ist der eines alphabetisch geordneten Inhaltsverzeichnisses.

CANTOR.

Die Entwickelung des Zifferrechnens von Dr. H. WEISSENBORN, Professor am grossherzogl. Realgymnasium zu Eisenach. Eisenach, Ostern 1877. 22 S.

In diesem Osterprogramm giebt Herr Weissenborn eine sehr kurzgefasste, recht übersichtliche Darstellung der Entwickelung der vier einfachen Rechnungsarten, welcher er einen Ueberblick über die Geschichte des instrumentalen Rechnens vorausschickt. In der Boethiusfrage steht er auf Seite Friedleins, nimmt also die ganze Geometrie des Boethius als unecht an. Leider verfällt er dabei in den nämlichen Fehler, den bisher alle unsere Gegner begangen haben: er schweigt die von uns und Anderen beigebrachten Gründe für die Echtheit dieser Schrift einfach todt, allerdings das bequemste Verfahren einer Entkräftung. Wir verweisen auch deshalb immer wieder auf unsere verschiedenen Veröffentlichungen über diesen Gegenstand. Wir sind weit entfernt davon, zu verlangen, dass man unsere Gründe ohne Weiteres für stichhaltig erkläre, aber eine Widerlegung im Einzelnen verlangen wir, bevor wir uns für bekehrt erklären sollen. Zu unseren früheren in den „Mathematischen Beiträgen zum Culturleben der Völker" entwickelten Gründen sind inzwischen noch neue hinzugekommen, welche weder der Zahl, noch der Art nach unterschätzt zu werden verdienen. Wir haben in unseren „Agrimensoren" gezeigt, dass die Geometrie des Boethius mit sonstigen römischen Geometrien die vollendetste Familienähnlichkeit besitzt, dass Gerbert durchaus römische Geometrie benutzte, ohne dass ihm auch nur einmal arabische Beeinflussung nachgewiesen werden könnte. Nach Rom zeigt auch die complementäre Multiplicationsmethode, deren Herr Weissenborn in seinem Programm ebenso wenig gedenkt, wie der alten complementären Division. Jene Multiplication haben wir bekanntlich in dem Codex von Salem (bei Herrn Weissenborn A_3 genannt) aufgefunden. Dr. Pick (Zeitschr. f. mathem. Unterricht 1874, Bd. V S. 57) meldet ihr Vorkommen bei walachischen Bauern. Vor mehreren Jahren wurde dieselbe

Methode bei südfranzösischen Landbewohnern nachgewiesen. Nur von Rom aus lässt sich diese mehrfache Theilung des Ablaufes nach den verschiedensten Richtungen erklären, und somit gewinnt Rom als Sitz auch der complementären Division neue Wahrscheinlichkeit. Dass ferner bei den Arabern niemals solche complementären Rechnungsverfahren, niemals ein Abacusrechnen in Uebung war, ist schon oft hervorgehoben worden.

Zu den Völkern, welche sich eines Rechenbrettes bedienten, gehörten zweifellos auch die Aegypter. Nicht blos die bekannte Herodotstelle liefert den Beweis, in deren Bedeutung Herr Weissenborn, wie wir uns freuen bemerken zu können, mit uns übereinstimmt; sogar die authentische Abbildung eines egyptischen Rechenbrettes hat sich auf der Rückseite des Papyrus Sallier IV erhalten, wenn sie auch Mathematikern bisher unbekannt geblieben zu sein scheint. Cantor.

Gauss. Ein Umriss seines Lebens und Wirkens von F. A. T. Winnecke. Festschrift zu Gauss' hundertjährigem Geburtstage am 30. April 1877, herausgegeben durch den Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig. Mit einem Bildnisse Gauss'. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1877. 34 S.

Dass auf zwei Druckbogen eine Biographie des Jubilars vom 30. Apri 1877, insbesondere eine auf alle seine wissenschaftlichen Verdienste nach Gebühr eingehende Biographie nicht Raum finden könne, darüber war sich der Verfasser der vorliegenden Festschrift vollständig klar. Aber ebenso leuchtete ihm ein, dass eine wirkliche Biographie in dem hervorgehobenen Sinne nicht für das grosse Publikum verständlich ausfallen würde, und auf einen kleinen Leserkreis beschränkt den Zweck nicht erfüllen könnte, welcher zur Aufgabe gestellt war: „das tiefwissenschaftliche Wirken des grossen Mathematikers, Astronomen und Physikers in einer allen Gebildeten verständlichen Form zu schildern". Beschränkung war daher eine Hauptpflicht des Verfassers, und wir können nicht anders sagen, als dass er sie in richtigem Maasse geübt hat. Ohne in mathematisches Detail sich zu verlieren und doch die wichtigsten Arbeiten von Gauss berührend, hat Herr Winnecke ein Lebensbild entworfen, welches, wie wir meinen, seinen beabsichtigten Zweck erfüllen muss.

Cantor.

Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie von Dr. R. Wolf, Professor in Zürich. Fünfte neu durchgearbeitete, mit 24 Tabellen und vielen Holzschnitten ausgestattete Auflage. Zürich, Druck und Verlag von Friedrich Schulthess. 1877. XVIII, 434 S.

Die erste Auflage dieses Taschenbuches erschien 1852; gegenwärtig, nach 15 Jahren, ist die fünfte Auflage nöthig geworden, und der Verfasser spricht bereits in der Vorrede mit einer gewissen stolzen Selbstbefriedigung, welche man ihm nicht leicht verargen wird, von den Umformungen, welche er in der nächsten, nach einigen Jahren erwarteten Auflage vornehmen wird. Einem in der Gunst des mathematischen Publikums vorwiegend nach seinen technischen Bestandtheilen so feststehenden Werke gegenüber kann die Kritik sich fast begnügen, das neue Erscheinen desselben anzukündigen. Weiss doch Jeder zum voraus, was er in einem solchen Taschenbuche suchen, was er nicht darin suchen darf. Formeln und Sätze in so grosser Zahl, dass man ihnen das Beiwort der Vollständigkeit zu gewähren geneigt ist, bilden den Werth eines solchen Vademecums; Ableitungen, insbesondere langathmige Beweise wird Niemand daraus lernen wollen, und wenn zum Zwecke von Wiederholungen des anderweitig erlernten Stoffes Andeutungen zu strenger Darstellung sich an nicht wenigen Orten eingestreut finden, so ist dies eine gewiss dankenswerthe Zugabe, aber doch nur eine Zugabe, gewissermassen eine Verweisung auf das umfangreiche Handbuch desselben Verfassers, in welchem der gleiche Gegenstand in ausführlicher Entwickelung behandelt ist. Man wird es dem Referenten nicht verübeln, wenn er unter den überaus nützlichen dem Taschenbuche beigegebenen Tabellen die XX. mit der Ueberschrift: Historisch-literarische Tafel hervorhebt. Auf zehn enggedruckten Seiten finden sich daselbst chronologisch geordnete Angaben über die wichtigsten Entdeckungen und deren Urheber, sowie über die Veröffentlichung besonders hervorragender Druckwerke. Manches freilich bedarf der Veränderung, wie wenn die Einführung der Zeichen +, — auf Christoph Rudolph (1524), die Erfindung der Kettenbrüche auf Brouncker (1658) zurückgeführt ist, wenn (1836) Eisenlohr's Lehrbuch der Physik eine 7. Ausgabe von 1856 nachgerühmt wird, nachdem 1876 bereits die elfte erschien u. s. w.; aber im Grossen und Ganzen sind die Angaben richtig.

CANTOR.

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung von Dr. ERNST BARDEY. Zweite, durch viele Zahlenbeispiele, erweiterte Erläuterungen und ein Register für die Aufgabensammlung verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1876. VIII, 339 S.

Es giebt gegenwärtig in Deutschland wohl keinen Schulmann, aber auch kaum einen Nichtschulmann, der nur irgend in der Gelegenheit ist, mit Schulmännern zu verkehren, dem man noch die Brauchbarkeit der Bardey'schen Aufgabensammlungen besonders hervorheben müsste. Für diejenige Sammlung, welcher der Verfasser den Namen „Aufgabensammlung“ speciell beigelegt hat, ist schon die Raschheit der Aufeinanderfolge der nöthig gewordenen neuen Auflagen ein äusserer Beweis dafür, dass der wirkliche Gebrauch des Buches seiner Brauchbarkeit entspricht, was bekanntlich nicht immer der Fall ist, so dass ein Rückschluss von der Wiederholung oder Nichtwiederholung des Abdruckes auf Werth oder Unwerth eines Werkes nicht unter allen Bedingungen zutrifft. Müsste man doch sonst die Sammlung, von welcher oben der Titel angegeben ist und welche erst nach acht Jahren in erster Auflage vergriffen war, unter die andere allgemeinere ordnen, was nach unserer Ueberzeugung wenigstens ungerecht wäre. Die „algebraischen Gleichungen" stellen entschieden ein Uebungsbuch dar, wie es nicht besser vorhanden ist, und ersetzen zugleich ein Lehrbuch des freilich ziemlich eng umgrenzten Gebietes der Algebra, mit welchem sie sich beschäftigen. Die Gleichungen, von welchen hier die Rede ist, sind nur quadratische Gleichungen oder solche, deren Lösung gelingt, ohne dass höhere Kenntnisse als die zur Bewältigung quadratischer Gleichungen nothwendigen erforderlich wären. Nun ist aber bekanntlich gerade der zuletzt von uns gebrauchte Ausdruck ein recht dehnbarer. Je nachdem man in einer Aufgabe diese oder jene Grösse als Unbekannte wählt, je nachdem man diesen oder jenen Kunstgriff anwendet, erscheint die Auflösung bald nach Art der Behandlung quadratischer Gleichungen erhältlich, bald nicht. Nur eine erhebliche Anzahl von Beispielen kann Gelegenheit bieten, alle derartigen Hilfsmittel kennen zu lehren und einüben zu lassen. Herr Bardey hat zu diesem Zwecke nicht weniger als 1000 Beispiele gegeben, theilweise mit denen in der „Aufgabensammlung" sich deckend, theilweise neu. Wo jene Uebereinstimmung der beiden Uebungswerke vorhanden ist, dient ein leicht übersichtliches Register, von dem einen auf das andere zu verweisen. Unter den vielen Kunstgriffen, von denen Gebrauch gemacht wird, kommt wohl keiner häufiger vor, als derjenige der correspondirenden Addition. Herr Bardey versteht darunter den Satz, dass aus der Gleichung $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ auch die weitere Gleichung $\frac{mA+nB}{pA+qB}=\frac{ma+nb}{pa+qb}$ folge und umgekehrt. Es ist das vielleicht ein Steckenpferd des Verfassers, aber jedenfalls ein solches, welches er mit höchster Eleganz zu reiten versteht.

Cantor.

Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. Joh. Müller, weil. Professor zu Freiburg i. Br. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. Hubert Müller, Professor, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum in Metz. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1876. VIII, 80 S. mit 25 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel mit Netzen.

Ein recht klar geschriebenes, dabei der nothwendigen Strenge doch nicht entbehrendes Büchlein, welches auf engem Raume das Nothwendigste aus der ebenen und aus der sphärischen Trigonometrie enthält. Verfasser und Herausgeber wussten sich so kurz zu fassen, dass von den 80 Seiten des Büchleins nur 72 dem eigentlichen Texte zu gute kommen, die letzten 8 Seiten eine Tafel der trigonometrischen Functionen (nicht ihrer Logarithmen) der Winkel des ersten Quadranten von 10 zu 10 Minuten enthalten. Damit ist als selbstverständlich verbunden, dass nur die unentbehrlichsten Lehren der Trigonometrie im Texte vereinigt werden konnten, und dass somit die Aneignung des darin Enthaltenen den Schüler keineswegs in die Lage setzt, ein grösseres, vollständigeres Werk oder aber den ergänzenden Unterricht eines Lehrers entbehren zu können. Unter dieser Einschränkung des Gebrauches auf Erwerbung einleitender Kenntnisse der mehrgenannten Capitel der Geometrie glauben wir das Schriftchen empfehlen zu dürfen.

CANTOR.

Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de mathématiques spéciales; par G. Dostor, Professeur de mécanique rationelle à la faculté des sciences de l'université catholique de Paris etc. etc. Paris, Gauthier-Villars. 1877. XXXI, 352 S.

Das Land, welchem die Determinantentheorie so bedeutende Bereicherungen verdankt, verfügte bislang nicht eben über viele Hilfsmittel zur Einführung in diesen Wissenszweig; denn wenn man von Belgien absieht, standen dem Studirenden daselbst nur das sehr kurz gefasste autographirte Heft von Hoüel und jene allerdings trefflichen Uebersetzungen zu Gebote, welche Combescure und Hoüel resp. von den Originalwerken Brioschi's und Baltzer's veranstaltet haben. Wenn sonach jetzt aus dem Schoosse einer neugegründeten wissenschaftlichen Anstalt ein Lehrbuch dieser Disciplin, noch dazu von einem auch bei uns bekannten Autor, hervorgeht, so werden wir der neuen literarischen Erscheinung mit um so grösserem Interesse entgegentreten, als wir von jeher vor der Befähigung unseres Nachbarvolkes, gute Unterrichtswerke zu liefern, hohen Respect zu hegen gewohnt sind.

Ehe wir unsere Besprechung beginnen, halten wir es für Pflicht, gegen einen Passus der Ankündigung Verwahrung einzulegen, durch welche die Verlagshandlung ihr neues Unternehmen dem Publikum signalisirte, einen Passus, der zunächst natürlich auf Rechnung buchhändlerischer Usancen, zum Theil aber doch sicher auch auf diejenige des Schriftstellers selber kommt. Es hiess dort nämlich, das Manuscript der Schrift sei einem Manne vorgelegt worden, dessen wissenschaftliche Stellung ihm einen fürstlichen Rang unter den Mathematikern sichere, und habe bei demselben die allerwärmste Anerkennung gefunden. Eine derartige Präoccupirung des Lesers erscheint unserer Auffassung als eine ganz unberechtigte. Jeder Verfasser hat das Recht, auf schon veröffentlichte Recensionen zu verweisen, nicht minder kann er, um seinem Erzeugnisse einen höheren Werth zu sichern, dasselbe durch die Begleitworte einer anerkannten Fach-Autorität eröffnen lassen, völlig unstatthaft aber ist die hier gewählte Anonymität. Wir glauben zwar aus gewissen Indicien mit ziemlicher Sicherheit den Namen des unbekannten Protectors errathen zu haben und räumen gern ein, dass derselbe, wenn unsere Vermuthung zutrifft, auf das von Herrn Dostor ihm beigelegte *Epitheton ornans* mit allem Fug Anspruch machen kann; allein das ändert an der Sache gar nichts, und wir wenigstens werden uns so verhalten, als sei uns von dem gewichtigen Secundanten nicht das Geringste bewusst, als trete vielmehr der Verfasser ganz ebenso mit offenem Visir vor den Kritiker, wie dies eben andere Sterbliche auch thun müssen.

Was nun, um diesen Hauptpunkt vorweg zu nehmen, unser Gesammturtheil anbetrifft, so können wir sagen: Hätte Jemand dem Herrn Verfasser die zu behandelnden Materien genau vorgezeichnet und ihm befohlen, dieselben ohne Rücksichtnahme auf die Leistungen Anderer möglichst klar und exact darzustellen, so würden wir nicht anstehen, die Ausführung dieser Pflicht für eine ausgezeichnete zu erklären. Das soll heissen, was in Dostor's Buche gegeben ist, ist an sich in wirklich musterhafter Weise gegeben, sowohl was Eleganz, als auch Rücksichtnahme auf den pädagogischen Zweck betrifft; allein wir zweifeln nicht, dass deutsche Fachgenossen uns zustimmen, wenn wir den Wunsch aussprechen, es wäre da und dort sehr viel mehr, bei anderen Gelegenheiten wiederum sehr viel weniger Stoff beigebracht worden. Die Begründung dieses Urtheils wird nachstehendes Referat liefern.

In seiner Vorrede charakterisirt der Verfasser kurz und treffend die gewaltigen Vortheile des Determinantenrechnens bei allen analytischen Untersuchungen, stellt dann die Tendenz seines eigenen Werkes als eine didaktische fest* und erzählt dann, freilich sehr kurz, wie sich der neue Calcul aus den schwachen Anfängen bei Leibnitz und Cramer allmälig entwickelt habe. Die neueste Phase dieses geschichtlichen Processes hätte er jedoch am besten gar nicht berührt; denn zu welchem Zweck soll sich der Student der katholischen Hochschule die Namen eines Cayley, Sylvester, Hesse, Borchardt, Malmstèn (nicht Malmstein), Joachimsthal und Hermite merken, wenn ihm dafür diejenigen eines Brioschi, Clebsch, Kronecker, Baltzer u. s. w. vorenthalten wer-

---

* Ganz dasselbe strebt an und leistet auch vorzüglich jedes der kleinen Heftchen in seiner Art, welche Paul Mansion im vergangenen Jahre publicirt hat. Ueberdies sind dieselben ja auch französisch geschrieben und somit gewiss für Frankreichs Gymnasien und Universitäten von vorzüglicher Brauchbarkeit.

den. Dass der Verfasser der Verdienste eines Reiss, der ganz unabhängig von Cauchy und Jacobi eine durchaus originelle Theorie der unvollständigen Determinanten geschaffen hat, mit keiner Sylbe gedenkt, wollen wir ihm angesichts der allgemeinen Vernachlässigung weniger hoch anrechnen, von welcher nun einmal das Andenken jenes genialen Mannes betroffen erscheint.

Das erste Capitel des Buches enthält in guter Ordnung die elementaren Determinantensätze, durchaus von passend gewählten Beispielen begleitet. Im zweiten finden wir alle diejenigen Regeln vereinigt, welche zur Ueberführung einer Determinantenform in eine andere und zur Reducirung solcher auf geschlossene Ausdrücke dienen. Alsdann folgt die sehr ausführlich vorgetragene Lehre von der Multiplication mit einem empfehlenswerthen Abrisse der Matricentheorie (*Déterminants multiples*). Das zweite Buch enthält die Anwendungen auf Algebra und Trigonometrie; eine recht allseitige Durcharbeitung des Eliminationsproblems ist rühmend hervorzuheben, und zwar ermöglicht es die Gewohnheit des Verfassers, gewisse für ein erstes Studium minder wichtige Themata durch kleineren Druck kenntlich zu machen, gar manchen in den Lehrbüchern sonst nicht zu findenden Satz mit hereinziehen zu können. Diese Partie ist uns entschieden die liebste im Buche. Die in der Folge behandelten goniometrischen Theoreme — denn nur um solche und nicht um eigentliche Trigonometrie handelt es sich — werden ebenfalls vielen Lesern willkommen sein.

Ehe wir zu dem umfänglicheren dritten Buche uns wenden, sei es gestattet, dem allgemeinen Urtheil von vorhin einige motivirende Bemerkungen nachzusenden. Wir erkannten gerne an, dass der Verfasser stets für den Schüler, und zwar für den Schüler von mittlerer Begabung seine Entwickelung einrichte; allein war es zur Erreichung des Lehrzweckes wirklich so unumgänglich nöthig, die Darstellung dermassen in die Breite zu ziehen, den Gebrauch des abkürzenden Symboles gänzlich abzuweisen, die Beispiele* in diesem Maasse bis ins Detail durchzurechnen? Wir haben zu den französischen Jünglingen ein besseres Zutrauen, wir glauben, dass dieselben, wenn sie erst einmal mit dem Wesen des Determinantenbegriffes vertraut sind, solch' weitläufige Exemplificationen nicht erst ihrem Leitfaden zu entnehmen, sondern selbst auszuführen in der Lage sein werden. Wir wollen gewiss dem Bestreben, neben dem Texte auch recht viele Uebungsbeispiele beizubringen, nicht zu nahe treten, hier

---

* Unter diesen Beispielen kommen auch magische Quadrate vor, welche der Verfasser als Determinanten betrachtet. Seine Behandlungsweise bietet jedoch keine an sich interessanten Gesichtspunkte und speciell ist ihm der hübsche Lehrsatz entgangen, welchen Studnička (Prager Berichte vom 24. November 1876) aus einer der vom Referenten erläuterten älteren Constructionsmethoden gezogen hat.

jedoch ist in der That des Guten zuviel geschehen. — Eine andere Ausstellung ist allgemeinerer Natur und betrifft mehr die Sache selbst, als die Art des Vortrags. Es will uns vorkommen, als bände sich Herr Dostor allzustreng an den ursprünglich historischen Charakter der Determinanten, demzufolge sie zunächst ausschliesslich Resultanten waren, und discutire deshalb die ganze Lehre einzig und allein um der Elimination willen. Diese selbst ist, wie schon gesagt, mit mustergiltiger Deutlichkeit und Ausführlichkeit behandelt, dagegen fehlen gewisse Anwendungen des Determinantencalculs, die gerade für die Erweiterung des Horizonts des Lernenden belangreich sind. Wir rechnen hierzu das Capitel von den Kettenbruchdeterminanten oder nach englischer Auffassung allgemeiner Continuanten, ferner solche Relationen mit den höheren Gleichungen, wie sie z. B. Diekmann's Buch in grosser Fülle darbietet, und endlich zahlentheoretische Anwendungen. Auch das Differenzenproduct ist verhältnissmässig zu kurz weggekommen.

Wir stehen nunmehr vor dem dritten, geometrischen Dingen gewidmeten Capitel, welches mit seinen 158 Seiten die beiden vorhergehenden an Inhalt übertrifft. Man findet hier sehr viel Material in durchaus eleganter Durcharbeitung und übersichtlicher Anordnung vor; es ist so ziemlich Alles hier vereinigt, was sonst etwa in einem ersten Cursus der analytischen Geometrie vereinigt zu werden pflegt. Auch stossen wir auf einzelne neue Entwickelungen, welche sich durch ihre Einfachheit anderen gegenüber empfehlen, so die Bestimmung des einem Dreieck umschriebenen Kreises (S. 176), die Discussion des Ausdruckes $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)$ (S. 241), den Beweis für die Realität der Wurzeln in der für die Mittelspunktsflächen des zweiten Grades charakteristischen cubischen Gleichung (S. 301 flgg.), und manches Andere. Allein trotz dieser unleugbaren Vorzüge können wir uns mit der Anlage dieses Capitels nun und nimmer einverstanden erklären. Der Studirende kann unmöglich das Dostor'sche Buch als Surrogat für ein eigenes Handbuch der höheren Geometrie verwenden, denn es stehen in jenem die einzelnen Facta wenn auch nicht ungeordnet, so doch unvermittelt neben und hinter einander, und alle Verbindungsglieder vom Elementareren zum Schwierigeren fehlen. Wenn aber doch noch die Lehre von den algebraischen Curven und Oberflächen für sich betrieben werden muss, wozu dann der ungeheure Ballast von Determinantenformeln? Wäre das Capitel ungefähr den vierten Theil so stark, als es wirklich ist, so würde es seinen Zweck nicht minder gut erreichen und ein concentrirtes Studium des wirklich Nothwendigen erleichtern, während nunmehr zu befürchten steht, dass der Anfänger in der behaglichen Breite des Vortrages sich selber allzu behaglich fühle und später nicht mehr gern an das Bohren dickerer Bretter gehe. Es hängt mit dieser Eigenschaft der bedeutendste Vorwurf zusammen, welchen wir dem Buche selber machen müssen, auf welchen wir aber erst nach Absolvirung des vierten und letzten Capitels ausführlich zurückkommen können.

Dasselbe behandelt zunächst die Disriminanten in voller Angelegenheit Daran schliesst sich die Erklärung des Begriffes einer Invariante und der umständlich geführte Nachweis, dass Discriminanten bei linearen Transformationen sich nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante verändern. Der äquivalente Begriff der Covarianten findet sich nicht vor, und überhaupt wird nicht weiter auf die Objecte der modernen Algebra eingegangen — eine Zurückhaltung, welche jedenfalls in pädagogischen Argumenten begründet liegt.

Nachdem wir so die Besprechung des Werkes zu Ende geführt und nach bestem Wissen angedeutet haben, wie sich darin Licht und Schatten vertheile, erübrigt uns noch die Darlegung und Begründung eines Einwandes gegen die ganze Art und Weise, in der das Buch gehalten ist. Wir meinen den fast gänzlichen Mangel oder, noch schärfer ausgedrückt, die Planlosigkeit der hier und da vorkommenden Citate. Wenn ein Elementarbuch, welches für den Unterricht der Mittelschule bestimmt ist, sich principiell jedweden historischen und literarischen Nachweises entschlägt, so mag das angehen; bei einem für höhere Studien berechneten Werke können wir es schon weniger billigen, indess wollen wir auch hier die uns freilich ganz unverständliche Zurückhaltung des Autors gelten lassen, wenn sie nur wenigstens consequent ist. Allein von einer solchen Consequenz ist hier keine Rede, vielmehr sind, wie uns eine oberflächliche Durchzählung ergab, im Ganzen nur 21 Gelehrte direct aus ihren schriftstellerischen Leistungen citirt, und zwar in einer Weise, die unser grösstes Erstaunen erregen muss. Es finden sich nämlich die Namen Baltzer, Sarrus, Salmon, Bachet, Gauss, Catalan, Cramer, Euler, Cayley, Joubert, Hermite und Crelle je einmal, die Namen Laplace, Vandermonde, Lagrange, Bézout, Joachimsthal je zweimal, die Namen Leibnitz, Cauchy, Sylvester circa dreimal — und der Name Dostor 41 mal, schreibe einundvierzigmal! Eine solche Oekonomie der Citate ist doch etwas stark. Wir für unsere Person sind zwar sehr gern überzeugt, dass der Verfasser durchaus *bona fide* gehandelt hat, als er seine sämmtlichen der Determinantentheorie gewidmeten Abhandlungen aus den verschiedensten Zeitschriften mit anführte, denn in der That enthalten dieselben ja sehr viele gute und didaktisch verwendbare Einzelheiten. Muss nicht aber der harmlose Schüler bei seiner Lecture ganz unvermerkt auf den Gedanken kommen, die geschichtliche Einleitung des Vorwortes diene nur zur Decoration und eigentlich sei die ganze Wissenschaft als moderne Pallas direct aus dem Kopfe seines Herrn Professors hervorgegangen — ein Irrthum, den Herr Dostor selbst ganz gewiss nicht hat provociren wollen, der aber bei seiner unglücklichen Manier zu citiren wahrlich nahe genug liegt. Auch hat das Buch und speciell das dritte Capitel durch den Umstand, dass der Verfasser darin seine Zeitschriftartikel fast vollinhaltlich reproducirte, sehr an Werth für uns Deutsche eingebüsst, denn Grunert's „Archiv" und die „*Nouvelles Annales*" hat Jeder selbst zur Hand. — Unrecht war es auch, dass von Salmon blos die „*Higher plane Curves*" namhaft gemacht wurden (S. IX), während doch gerade die „Linearen Transformationen" erweislich weit mehr ausgenützt sind. Als Beleg mögen hier einige Vergleiche folgen: Nr. 120 bei Dostor $\equiv$ § 21, 6 bei Salmon (2. Aufl. 1866); Nr. 186 D. $\equiv$ § 21, 8 S.; Nr. 187 D. $\equiv$ § 21, 9 S.; Nr. 313 flgg. D. $\equiv$ § 26, 5 S.; Nr. 338 D. $\equiv$ § 26, 7 S.; Nr. 368, Nr. 371 D. $\equiv$ § 21, 16 S. u. s. f. Nicht minder sind die „Kegelschnitte" des genannten englischen Mathematikers von ihm excerpirt worden. All' das ist ja natürlich ganz in der Ordnung, ein pädagogischer Schriftsteller nimmt von überallher, was er braucht — allein wenn Herr Dostor sich selber citirt, so hätte er die gleiche Gerechtigkeit einem Manne von der Bedeutung eines Salmon angedeihen lassen sollen.

Inwieweit nach alledem die Dostor'schen „Elemente" den gelehrten Instituten seines Vaterlandes entsprechen, entzieht sich unserer Beurtheilung. In Deutschland wird sie jeder Lehrer mit Nutzen gebrauchen, denn er findet überall darin einfache, natürliche Beweise und ein äusserst reiches Repertorium von Uebungsbeispielen. Aus diesem Grunde werden sie auch bei den Hörern unserer Hochschulen Anklang und Eingang finden, und wem es die Mittel erlauben, neben einem andern Lehrbuche sich auch noch das Dostor'sche anzuschaffen, der thue es getrost, denn dasselbe hat gewiss die gute Eigenschaft, sich mit jedem anderen zu vertragen, jedem als Ergänzung zu dienen. Als systematischer Lehrgang, dessen gründliche Durcharbeitung die Lecture anderer Werke von verwandter Tendenz überflüssig macht, darf es dagegen aus den von uns sattsam gekennzeichneten Gründen nicht angesehen werden. Im Ganzen möchten wir uns dahin aussprechen, dass Dostor in Bezug auf Klarheit, Anschaulichkeit und Eleganz der Darstellung den hohen Vorbildern aus der französischen Unterrichtsliteratur mit Erfolg nachgeeifert hat, dass es ihm dagegen, was concise Schreibart und höhere pädagogische Principien anlangt, ungleich weniger gelungen ist, jenen Mustern gerecht zu werden.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Die Determinanten, nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt von Prof. Dr. H. Dölp. 2. Aufl., bearbeitet von W. Soldan, Director der grossherzogl. Realschule zu Giessen. Darmstadt 1877, Verlag von L. Brill. VI, 94 S.

Das Dölp'sche Büchlein ist, unter Anderem auch durch eine Anzeige im XIX. Bande dieser Zeitschrift, hinlänglich bekannt, und es wird sonach genügen, die von dem Bearbeiter der neuen Ausgabe getroffenen Aenderungen zu betrachten. Wir gestehen, dass dieselben durchaus als wirkliche Verbesserungen gelten können. Die irrige Ansicht Dölp's, als müsse man den Lernenden durch umfängliche algebraische Vorbereitungen so zu sagen erst für den Determinantenbegriff trainiren, ist mit Recht nicht wieder aufgenommen, und wenn es auch, wie die Vorrede bemerkt, sich wirklich bestätigen sollte, „dass durch die Veränderungen dem Anfänger das Verständniss der ersten Abschnitte etwas gestört wird", so wird derselbe sich gleich bei der nächsten Stufe um so reicher belohnt fühlen. Hervorzuheben ist ferner der von Herrn E. Schröder herrührende Beweis für den Fundamentalsatz der Determinantentheorie, und die sehr nette Erweiterung der Gordan'schen Beweismethode für das Multiplicationstheorem auf die Bézout-Cayley'sche Elimination, deren Behandlung sich dadurch wesentlich vereinfacht. Auch die geometrischen Beispiele sind praktisch gewählt und nicht zu zahlreich. Ob es sich in der That vom Standpunkte des Lehrers empfiehlt, das Differenzenproduct in den Vordergrund zu stellen, wie dies von Cauchy und später auch von Hesse geschehen ist, scheint uns zweifelhaft, ohne dass wir dieser subjectiven Ansicht besonderes Gewicht beilegen möchten. Vielmehr stehen wir nicht an, dieses handliche, trefflich ausgestattete Buch allen denjenigen Mittelschulen angelegentlich zu empfehlen, welche sich des den bayrischen Gymnasien nicht vergönnten Vorzuges erfreuen, die Elemente der Determinantentheorie als integrirendes Glied ihres Lehrplanes zu besitzen.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Traité d'électricité statique par M. E. Mascart. Paris, G. Marson, editeur, libraire de l'Academie de médicine. 1876.

Das vorliegende stattliche Werk umfasst zwei Bände gr. 8°, den ersten mit 504 Seiten, den zweiten mit 579 Seiten Text. Jeder Band enthält ausserdem noch ein Register und der erste auch noch ein kurzes Vorwort von beinahe vier Seiten Umfang. Beiden Bänden ist eine Anzahl guter Holzschnitte im Texte beigefügt, und zwar enthält der erste Band deren 158, der zweite 140. Uebrigens ist die Ausstattung des ganzen Werkes eine gute zu nennen.

Der Titel des Werkes entspricht nach unseren Begriffen nicht dem Inhalte desselben, denn nicht allein die Bedingungen des elektrischen Gleichgewichts oder der Umstände, unter welchen gegebene Elektricitätsmengen keinerlei Arbeit verrichten oder zur Entstehung von Wärme- und Lichterscheinungen Veranlassung geben, werden behandelt, sondern viel allgemeiner umfasst das Werk eine ausgedehnte Studie über alle die Umstände, welche eine Verschiedenheit der von elektrischen Massen her-kommenden Potentialfunction erzeugen können, und die Erscheinungen, welche eintreten, wenn eine einmal entstandene Differenz der Potentialfunction auf einen geringern Betrag herabgeht.

Der Verfasser gebraucht nicht den Unterschied von Potentialfunction und Potential, die einzige Bezeichnung „Potential" gilt ihm für beide Begriffe.

Wir besitzen in Deutschland ein entsprechendes Werk, das schon im Jahre 1853 erschienene von Riess: „Die Lehre von der Reibungselektricität". Riess gruppirt bekanntlich die Gesammtheit aller Erscheinungen aus dem Gebiete der Elektricität nach den Instrumenten, die hauptsächlich zu ihrer experimentellen Untersuchung verwendet werden; für ihn umfasst das Gebiet der Reibungselektricität die Erscheinungen, für welche das Elektroskop das wesentliche Hilfsmittel der Untersuchung ist.

Wir möchten eine solche Eintheilung auch jetzt noch für vorzüglicher erachten, als die Zergliederung nach dem Begriffe des Potentiales. Denn wenn auch das Gebiet der eigentlichen Elektrostatik streng nach dem Begriffe des Potentiales abgehandelt werden kann, so treten doch überall, wenn man zur Elektrodynamik im weiteren Sinne übergeht, Umstände ein, die die bisherige theoretisch-mathematische Behandlung solcher Erscheinungen als noch ziemlich weit von dem vorgesetzten Ziele entfernt erscheinen lassen.

Die Anordnung und Vertheilung des Stoffes im vorliegenden Werke zeigt auch, dass nur mit Zwang der Begriff und die Eigenschaften des Potentials zu Grunde gelegt werden konnten. Denn während man erwarten sollte, dass das ganze Werk, seiner Anlage nach, mit einer genaueren Betrachtung der Potentialfunction beginne, so folgt diese doch erst im 6. Capitel des ersten Bandes, nachdem in den 5 vorausgehenden Capiteln bereits in mehr geschichtlich behandelter Reihenfolge die Lehre von der Elektrostatik bis zum Erscheinen der Influenz abgehandelt worden ist. Im 1. Capitel nämlich, umfassend die ersten 32 Seiten des Werkes, wird ein geschichtlicher Ueberblick dessen gegeben, was bis zum Auftreten Coulomb's in Bezug auf die Elektricitätslehre ermittelt worden war, einschliesslich namentlich der beiden Haupttheorieen über die Natur der Elektricität, der Franklin'schen und Symmer'schen.

Das 2. Capitel von Seite 33—68 behandelt in ebenfalls mehr geschichtlich kritischer Weise die Entdeckung des Coulomb'schen Gesetzes. Mit Recht wird hierbei auf die klassischen Untersuchungen Coulomb's der Hauptwerth gelegt, während die Vorläufer und Nachfolger Coulomb's weniger beachtet werden.

Das 3. Capitel, die Seiten 69—89 umfassend, handelt von der Zerstreuung der Elektricität und zwar theils durch Uebergang an die isolirenden Stützen oder Träger, theils durch Uebergang an die Luft.

Das 4. Capitel von Seite 90—137 handelt von der Vertheilung der Elektricität auf Conductoren und von der Ermittelung derselben. Das fünfte Capitel endlich, von Seite 138—203, von der elektrischen Influenz und den Condensatoren.

Endlich nun im schon erwähnten 6. Capitel, umfassend die Seiten von 204—268, folgt die Lehre von der Potentialfunction. Hier werden die bekannten Sätze von Laplace, Green und Poisson gegeben, zugleich auch Murphy's Methode, die Influenzelektricität zu bestimmen. Wider Erwarten schliesst sich hieran die Theorie dessen, was wir das Potential auf sich selbst nennen, mit Einführung und Behandlung des Begriffes der elektrischen Energie. Wir sagen, wider Erwarten tritt hier dieser Theil der Potentialtheorie auf, weil in dem nun folgenden 7. Capitel, von Seite 269—343, die weiteren theoretischen Anwendungen des ersten Theiles des vorigen Capitels folgen, indem namentlich die bekannte Arbeit Poisson's über die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden isolirten Kugeln im Auszug mitgetheilt wird und alsdann die noch weiteren numerischen Ergänzungen dazu von Plana und von Roche (Kirchhoff's Arbeit ist nicht erwähnt). Es folgt nun eigentlich eine nochmalige Lösung derselben Aufgabe auf dem Wege M. Thomson's, wie er von R. Murphy angebahnt worden war. Schliesslich enthält dieses Capitel noch eine Vergleichung der Erscheinungen oder besser Fundamentalgleichungen der Elektrostatik mit denen der Thermostatik. Mag auch hier von vornherein ein solcher Vergleich wohl nicht gesucht werden, so müssen wir doch auch weiter sagen, dass, wenn die Lehrsätze über das Potential verallgemeinert werden sollten, hier auch Erscheinungen mit herangezogen zu werden verdienten, die der Lehre vom Magnetismus angehören und die auch von elastischen festen und luftförmigen Körpern oder von den Bewegungen tropfbar-flüssiger Körper dargeboten werden.

In dem nun folgenden längeren 8. Capitel von Seite 344—436 werden die Instrumente besprochen, die zur Beobachtung und Messung der Elektricität dienen. Es wird behandelt das elektrische Pendel in seinen verschiedenen Formen bis zum Goldblatt-Elektroskop von Hankel, die Magnetelektrometer, die Elektrometer, welche auf der Ablenkung einer in horizontaler Ebene rotirenden Nadel beruhen, die Elektrometer, die auf der elektrischen Entladung beruhen, die Elektrothermometer, das Galvanometer und das Weber'sche Dynamometer (die Wiedemann'sche Einrichtung des Galvanometers ist nicht berücksichtigt).

Das 9. Capitel, das letzte des ersten Bandes, reichend von Seite 437 bis 502, giebt Genaueres an über die Einrichtung condensirender Apparate, nachdem vorher durch Betrachtung der Kraftwirkungen zwischen elektrischen Körpern und dessen, was man die elektrische Capacität eines

Conductors nennt, genauer noch die Rolle dargelegt worden ist, welche das isolirende Zwischenmittel des Condensators zu spielen hat.

Der zweite Band beginnt mit dem 10. Capitel, das, von Seite 2—51 reichend, die Wärmeerscheinungen bei elektrischen Entladungen behandelt und die Geschwindigkeit, mit der sich die Elektricität in einem Leiter fortpflanzt. Das 11. Capitel, von Seite 51—159, behandelt die Dauer der Funkenentladung, die Schlagweite des elektrischen Funkens und verschiedene verwandte Erscheinungen, wie sie bei elektrischen Entladungen auftreten. Das 12. Capitel, von Seite 160—244, behandelt einen etwas heterogenen Stoff, wie die Priestley'schen Ringe, Entzündungen durch den elektrischen Funken, Durchbohrungen, die derselbe hervorbringt, die Lichtenberg'schen u. s. w. Figuren, verschiedene Lichterscheinungen, verschiedene Bewegungserscheinungen durch Elektricität, physiologische, chemische und magnetische Erscheinungen.

Das nächste, 13. Capitel, von Seite 245 – 332, enthält die Beschreibung und Aufzählung der Elektrisirmaschinen und Einiges über Inductionsapparate.

Mit dem 14. Capitel endlich, reichend von Seite 333—411, beginnt der letzte Abschnitt des ganzen Werkes, nämlich die Behandlung der Quellen der Elektricität. Ein grosser Theil dessen, was nun folgt, wird gewöhnlich in der Lehre vom Galvanismus abgehandelt, namentlich der Inhalt des 14. Capitels, der von der Contactelektricität handelt, und der grösste Theil des 15. Capitels von Seite 412—511, das von der Thermoelektricität, den elektrischen Strömen überhaupt und von der Pyroelektricität handelt. (Hier sind die neueren Untersuchungen Hankel's nicht berücksichtigt.) Das 16. oder Schlusscapitel von Seite 512—575 endlich behandelt die sonstigen Quellen der Elektricität durch rein mechanische Processe, dann durch Verdampfen, durch chemische, durch physiologische Processe, durch Capillaritätswirkung, und schliesslich wird noch die atmosphärische Elektricität ausführlicher behandelt.

In Bezug auf die eben mitgetheilte Vertheilung des ganzen behandelten Stoffes heben wir hier nur noch hervor, dass wohl die Elektrisirmaschinen besser nach Besprechung der betreffenden Quellen der Elektricität abgehandelt werden und dass in den Capiteln 10, 11 und 12 die Wärme- und Lichterscheinungen zu weit auseinandergezogen erscheinen, während diese doch recht bequem an der Hand des Begriffes des Potentiales auf sich selbst abgehandelt werden können.

Die Werke, welche hauptsächlich benützt wurden, giebt der Verfasser in seiner Vorrede selbst an, und zwar als: Riess, Die Lehre von der Reibungselektricität; *M. William Thomson, Papers on Electrostatics and Magnetism: M. Briot, Théorie mécanique de la chaleur*, und die Leçons Bertrand's am *Collège de France*. Mit Recht steht unter diesen benutzten Werken das Riess'sche an der Spitze. Auch andere Arbeiten sind noch vielfach verwerthet worden, und zwar namentlich diejenigen, welche auch in den *Annales de Chimie et de Physique* veröffentlicht worden sind. Nach der klassischen Arbeit von Riess lag die Hauptarbeit des Verfassers darin, die nach 1853 erschienene Literatur zu mustern und zu sichten; leider müssen wir in Bezug darauf sagen, dass der Verfasser etwas zu einseitig verfahren ist.

Freiberg, 23. August 1877. TH. KÖTTERITZSCH.

Bibliographie

vom 16. Juli bis 30. September 1877.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftl. Abth. Jahrg. 1876, 2. Abth., 8. bis 10. Heft. Wien, Gerold. 3 Mk. 40 Pf.

—, Jahrg. 1877, 2. Abth., 1.—3. Heft. Ebendas. 5 Mk.

Verhandlungen der vom 5.—10. Oct. 1876 in Brüssel vereinten permanenten Commission d. europ. Gradmessung, red. v. C. BRUHNS u. A. HIRSCH. Zugleich mit d. Generalbericht f. 1876. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. v. C. OHRTMANN, G. MÜLLER und A. WANGERIN. Jahrg. 1875, 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 20 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. SCHÖNFELD und A. WINNECKE. 12. Jahrg., 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Archiv der Mathematik und Physik, begründet v. A. GRUNERT, fortgesetzt v. R. HOPPE. 61. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch's Verl. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Jahresbericht d. grossherzogl. bad. meteorologischen Centralstation Carlsruhe. Nr. VIII, Jahrg. 1876, bearb. v. O. RUPPEL. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

WEIERSTRASS, K., Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. (Akad.) Berlin, Dümmler. 3 Mk.

WINCKLER, A., Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

KUNERTH, A., Neue Methoden zur Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in ganzen Zahlen. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

GÜNTHER, S., Lehrbuch der Determinantentheorie. 2. Aufl. Erlangen, Besold. 5 Mk.

Lipschitz, R., Lehrbuch der Analysis. 1. Bd. Bonn, Cohen. 15 Mk.

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. I. Thl.: Arithmetik und Algebra. 2. Buch: das Pensum der Prima. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Igel, B., Ueber die Singularitäten eines Kegelschnitt-Netzes und Gewebes. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Pelz, C., Ueber eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

Consentius, O., Beiträge zur Geometrie des Dreiecks. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 20 Pf.

Hattendorff, K., Einleitung in die analytische Geometrie. 2. Aufl. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 4 Mk.

Löser, J., Elemente der Mathematik. 2. Thl.: Geometrie der Ebene. Weinheim, Ackermann. 2 Mk. 80 Pf.

Reidt, F., Sammlung von Beispielen aus der Trigonometrie. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Voss, A., C. F. Gauss; ein Vortrag. Darmstadt, Diehl. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Mikoletzky, J., Aufgaben aus der descriptiven Geometrie. Wien, Hölzel. 1 Mk.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 2. Aufl. 2. Lief. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

Schell, A., Distanzmesser mit der Basis am Instrumente. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Kraft, G., Die Anfangsgründe der Theodolithmessung und der ebenen Polygonometrie. 2. Aufl. Hannover, Helwing. 4 Mk.

Lockyer, N., Astronomie; deutsch von A. Winnecke. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

Zinger, N., Die Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen verschiedener Sterne. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Seydler, A., Ueber die Bahn der Dione (106). (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Mach, E. und J. Sommer, Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionsschallwellen. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Mecklenburg, H., Ueber die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Berlin, Mecklenburg. 1 Mk.

Wernicke, A., Lehrbuch der Mechanik fester Körper. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Boltzmann, L., Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen, welche die Molecularbewegung in Gasen bestimmen. (Akad.) Wien, Gerold. 70 Pf

BOLTZMANN, L., Ueber einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

LOSCHMIDT, J., Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichts mit Rücksicht auf die Schwerkraft. III. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

LIPPICH, F., Zur Theorie der Elektrodynamik. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Physik und Meteorologie.

TAIT, P., Vorlesungen über einige neuere Fortschritte der Physik; deutsch von G. WERTHEIM. Braunschweig, Vieweg. 5 Mk.

BOHN, C., Ergebnisse physikalischer Forschung. 1. Lief. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

BAUMGARTNER, C., Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Verdampfungsgeschwindigkeit von Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

HABERMANN, J., Ueber eine Modification der Dumas'schen Methode der Dampfdichten-Bestimmung. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

EXNER, F., Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Flüssigkeitslamellen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

PULUJ, J., Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Thonzellen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

WALTENHOFEN, A. v., Ueber den Peltier'schen Versuch. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

DOMALIP, K., Ueber eine Methode zur Bestimmung der Widerstände schlechter Elektricitätsleiter. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

EXNER, F., Weitere Versuche über die galvanische Ausdehnung. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

WALLENTIN, G., Zur Theorie der Wirkung von Cylinderspiralen mit variabler Windungszahl. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

REIS, P., Neue elektrische Maschinen und deren Anwendung. Leipzig, Quandt & Händel. 2 Mk. 25 Pf.

LANG, V. v., Theorie der Circularpolarisation. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

ROLLETT, A., Ueber die Bedeutung von Newton's Construction der Farbenordnung dünner Blättchen für die Spectraluntersuchung der Interferenzfarben. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

LORBERG, H., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Berichtigungen.

S. 340 Z. 8 v. o. lies 90^0 statt 80^0 und φ statt α.

S. 340 Z. 9 v. o. lies XOT statt X_1ST.

Hist.-lit. Abth. S. 169 Z. 16 v. u. lies Versuchsmessungen statt Vorsichtsmessungen.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1876.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Aberration.

271. Sur la théorie de l'aberration. Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXXI, 165.

Akustik.

272. On the mathematical theory of Mr. Baillie Hamilton's string-organ. Bosanquet. Phil. Mag. XLIX, 98.

Analytische Geometrie der Ebene.

273. Rapport sur un mémoire sur les développoïdes de M. Haton de la Goupillière. Puiseux. Compt. rend. LXXXI, 396.
274. Rationale ebene Curven dritter Ordnung. Zahradnik. Grun. Archiv LVIII, 23. [Vergl. Bd. XX, Nr. 349.]
275. De la courbe $x^{2/3}+y^{2/3}=r^{2/3}$. Barbarin. N. ann. math. XXXIV, 328.
276. Sur la parabole sémi-cubique. Laurans. N. ann. math. XXXIV, 277. — Moret-Blanc ibid. 281, 382.
277. Die Brennpunkte der Differentialcurve der Parabel. Hochheim. Grun. Archiv LVIII, 278.
278. Die reciproke Polare der Differentialcurve der Parabel in Bezug auf einen Kreis. Hochheim. Grun. Archiv LVIII, 423.
279. Ueber Lissajous' Curven. Braun. Mathem. Annal. VIII, 567.
280. Sur l'enveloppe d'une droite dont deux points décrivent des lignes rectangulaires. De la Gournerie. N. ann. math. XXXIV, 47. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 4.]
281. Ueber den Spieker'schen Punkt. Hain. Grun. Archiv LVIII, 164.
282. Ueber Symmetriepunkte des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LVIII, 176.
283. Ueber symmetrische Punktsysteme des Dreiecks. Hain. Grun Archiv LVIII, 385.
284. Ueber Bildung neuer Symmetriepunkte. Hain. Grun. Archiv LVIII, 394.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung. Ellipse. Hyperbel. Imaginäres 400. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung. Normale. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

285. Beweis eines Satzes aus der Theorie der geometrischen Addition der Strecken im Raume. Hertz. Grun. Archiv LVIII, 326.
286. Sur les points d'une courbe ou d'une surface, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou aux dérivées partielles. Halphen. Compt. rend. LXXXI, 1053.
287. Lehrsatz, eine gewisse Raumcurve 6. Grades betreffend. August. Grun. Archiv LVIII, 216.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung. Ellipse. Hyperboloid. Kegelschnitte. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Sphärik.

Attraction.

288. Zur Theorie der Anziehungsgesetze. Bender. Grun. Archiv LVIII, 104.
289. On the motion of a particle from rest towards an attracting centre. Glashan. Phil. Mag. L, 20.
290. Untersuchung der Bahn eines nach inverser 4. Potenz der Entfernung angezogenen Punktes. Kaerger. Grun. Archiv LVIII, 225.
Vergl. Potential.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

291. Note sur les nombres de Bernoulli. Catalan. Compt. rend. LXXXI, 441. — Le Paige ibid. 966.

Bestimmte Integrale.

292. Sur un paralogisme dans le calcul des intégrales définies. Allaretti. N. ann. math. XXXIV, 227. — Brisse ibid. 370.
293. On spherical harmonics. Sylvester. Phil. Mag. LII, 291, 400.
Vergl. Cylinderfunctionen. Quadratur. Zahlentheorie 542.

C.

Cartographie.

294. On maps of the world. Darwin. Phil. Mag. L, 431.

Combinatorik.

295. Nombre de termes négatifs dans le développement de la puissance μ de m quantités dont n négatives. Brocard. N. ann. math. XXXIV, 235.
296. Permutations rectilignes de 29 lettres égales deux à deux ou trois lettres consécutives sont toujours distinctes. Vachette. N. ann. math. XXXIV, 299, 337, 438.
297. On nodes and loops in connexion with chemical formulae. Lodge. Phil. Mag. L, 367.

Cylinderfunction.

298. Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen. Hankel. Mathem. Ann. VIII, 453.
299. Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen. Hankel. Mathem. Ann. VIII, 471.

D.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

300. Sur la représentation des figures de géométrie à n dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire. Spottiswoode. Compt. rend. LXXXI, 875, 961.
301. Relation entre les sinus des quatre trièdres formés par quatre droites issues d'un même point, avec application au tétraèdre. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 1.
302. Application des discriminants aux curves et surfaces du second degré. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 5.
303. Application des déterminants aux surfaces de révolution et en particulier à celles du second degré. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 17.
304. Application des déterminants aux surfaces de révolution et en particulier à celles du second degré. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 285.
305. Expression en déterminant de la surface d'un triangle de l'espace en valeurs de coordonnées de ses trois sommets. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 289.
306. Application des déterminants aux surfaces cylindriques et en particulier aux cylindres du second degré. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 293.
307. Expression de s comme quotient de deux déterminants. Lemonnier. N. ann. math. XXXIV, 167.
308. Foyers et directrices des surfaces du second degré. Lemonnier. N. ann. math. XXXIV, 216.
309. Ueber die Winkelhalbirenden des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LVIII, 90.

Differentialgleichungen.

310. Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. Mansion. Grun. Archiv LVIII, 99.
311. Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode. A. Mayer. Math. Annal. VIII, 313.

312. On primary forms. Cockle. Phil. Mag. XLIX, 134.
313. On a differential criticoïd. Cockle. Phil. Mag. L, 440.
314. Ueber gewisse Differentialgleichungen. Frahm. Mathem. Annal. VIII, 35.
315. Ueber Differentialgleichungen der Form

$$(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_0+b_0x)\,y=0.$$

S. Spitzer. Grun. Archiv LVIII, 361.
316. Ueber Differentialgleichungen der Form $y'''=x^m(Ax^2y''+Bxy'+Cy)$. S. Spitzer. Grun. Archiv LVIII, 100.
317. Kriterien der singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung. Veltmann. Grun. Archiv LVIII, 337.
318. On the finite integration of linear partial differential equations with constant coefficients. Earnshaw. Phil. Mag. LII, 47.
319. Sur la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Mansion. Compt. rend. LXXXI, 790.
320. Intégration d'une équation aux différentielles partielles du second ordre. Nicolaidès. Compt. rend. LXXXI, 216, 365. — Ossian Bonnet ibid. 259.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 286. Invariantentheorie 403.

Differentialquotient.

321. Multiple differentiation of a certain expression. Glaisher. Phil. Mag. LII, 208, 522.
322. Discussion du polynome $\varphi_n(x)=e^{x^2}\cdot\dfrac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 497.

E.

Elektrodynamik.

323. On a new fundamental law of electrodynamics. Clausius. Phil. Mag. LI, 69.
324. On the bearing of the fundamental of electrodynamics toward the principle of the conservation of energy and on a further simplification of the former. Clausius. Phil. Mag. LI, 218.
325. Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. C. Neumann. Mathem. Annal. VIII, 555.
326. Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1875, 487.
327. On galvanic resistance as dependant on the motion of the conductor. Edlund. Phil. Mag. LI, 89.
328. On gravical methods of solving certain simple electrical problems. Foster. Phil. Mag. XLIX, 368.
329. On the flow of electricity in a uniform plane conducting surface. Foster & Lodge. Phil. Mag. XLIX, 385, 453; L, 475.
330. On some problems connected with the flow of electricity in a plane. Lodge. Phil. Mag. LI, 373; LII, 37.
331. On a model illustrating mechanically the passage of electricity through metals, electrolytes and dielectrics according to Maxwell's theory. Lodge. Phil Mag. LII, 353.
332. On a mechanical illustration of thermo-electric phenomena. Lodge. Phil. Mag. LII, 524.
333. On Kohlrausch's determination of the absolute value of the Siemens mercury unit of electrical resistance. Rowland. Phil. Mag. L, 161.
334. Bestimmung des Leitungswiderstandes in Elementen und in Tangentenbussolen. Külp. Grun. Archiv LVIII, 444
335. Ueber das Verhältniss eines kleinplattigen zu einem grossplattigen Elemente. Külp. Grun. Archiv LVIII, 448.
336. Theorie der Holz'schen Influenzmaschine zweiter Art. Veltmann. Grun. Archiv LVIII, 353.
337. On the general theory of duplex telegraphy. Schwendler. Phil. Mag. XLIX, 108; L, 458; LI, 526. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 263.]
338. On duplex telegraphy. Heaviside. Phil. Mag. LI, 32.
339. On the extra current. Heaviside. Phil. Mag. LII, 135.
Vergl. Oberflächen 455.

Ellipse.

340. Ellipse considérée comme projection oblique d'un cercle. Construction simplifiée des axes d'une ellipse dont on connait deux diamètres conjugués. A. Jullien. N. ann. math. XXXIV, 324, 359.

341. Lieu du centre d'une ellipse bitangente intérieurement à une parabole donnée. Bourguet. N. ann. math. XXXIV, 236.
342. Triangles inscrits dans une ellipse dont les médianes se coupent au centre de la courbe. Michel. N. ann. math. XXXIV, 468.
Vergl. Maxima und Minima 433, 434.

Ellipsoid.

Vergl. Potential 481.

Elliptische Transcendenten.

343. Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1875, 498.
344. Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Krause. Mathem. Annal. VIII, 539.
345. On some identities derived from elliptic-function formulae. Glaisher. Phil. Mag. L, 539.
346. Intégration de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'hyperboloïde réglé. Floquet. N. ann. math. XXXIV, 120.

F.

Functionen.

347. Entwickelung von $x^n.e^{\lambda x^2}$ in eine Reihe von Exponentialgrössen. S. Spitzer Grun. Archiv LVIII, 431.
348. Détermination des diviseurs à coefficients commensurables d'un degré donné d'un polynome entier en x à coefficients commensurables. Maleyx. N. ann. math. XXXIV, 97.
349. Forme générale d'un polynome entier $F(x)$ satisfaisant aux relations $F(1-x) = F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{F(x)}{x^m}$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 494.
350. Sur une certaine fonction algébrique entière. De Virieu. N. ann. math. XXXIV, 349.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Elliptische Transcendenten. Homogene Functionen. Invariantentheorie. Logarithmen. Potential. Singularitäten. Substitution. Ultraelliptische Transcendenten. Unendlich.

G.

Geodäsie.

351. Einrichtung des Messtisches auf drei Punkte. L. v. Pfeil. Grun. Archiv LVIII, 377.
352. Sur le miroir-équerre. Gaumet. Compt. rend. LXXXI, 77.

Geometrie (höhere).

353. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Noether. Mathem. Annal. VIII, 495.
354. Ueber Systeme von Curven und Flächen. Brill. Mathem. Annal. VIII, 534.
355. Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 253.
356. Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 355.
357. Nouveaux théorèmes relatifs à des conditions d'égalité de grandeur de segments rectilignes sur les tangentes de courbes géométriques, d'ordre et de classe quelconques. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 643.
358. Détermination de la classe de courbes enveloppes qui se présentent dans les questions d'égalité de grandeur de deux segments faits sur des tangentes de courbes géométriques. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 757.
359. Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'égalité de deux segments pris sur des normales et des tangentes des courbes d'ordre et de classe quelconque. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 993.
360. Théorèmes dans lesquels se trouvent des couples de segments ayant un rapport constant. Chasles. Compt. rend. LXXXI, 1221.
361. Propriétés de la strophoïde. Maleyx. N. ann. math. XXXIV, 193, 241.

362. Propriétés de quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leur bissectrices. Sancery. N. ann. math. XXXIV, 145.
363. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Cahen. N. ann. math XXXIV, 21.
Vergl. Imaginäres. Invariantentheorie. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

364. Sur l'emploi fait, dans l'antiquité, de la chaleur solaire. Buchwalder. Compt. rend. LXXXI, 627. — Mouchot ibid. 680.
365. Leibnitz als Philosoph. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1875, 425.
366. Zum zweihundertjährigen Jubiläum der Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibnitz. Gerhardt. Berl. Akad.-Ber. 1875, 588.
367. Zur Geschichte des Principes der Erhaltung der Kraft. Berthold. Berl. Akad.-Ber. 1875, 577.
368. Zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1875, 267.
369. The history of Young's discovery of his theory of colours. A. M. Mayer. Phil. Mag. LI, 111.
370. Histoire du pendule explorateur. Chevreul. Compt. rend. LXXXI, 5.
371. F. Mohr and the thermodynamics. Tait. Phil. Mag. LII, 110.
372. Droits de Felix Chio à la découverte de la limite à laquelle s'arrête la convergence de la série de Taylor. Genocchi. N. ann. math. XXXIV, 92.
Vergl. Hydrodynamik 389. Trisection des Winkels.

Gleichungen.

373. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Siebel. Grun. Archiv LVIII, 127. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 301.]
374. Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bezout. Saltel. Compt. rend. LXXXI, 884.
375. Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients. Pellet. N. ann. math. XXXIV, 259.
376. Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. Lalanne. Compt. rend. LXXXI, 1186, 1243.
377. Sur la séparation des racines des équations. Laurent. N. ann. math. XXXIV, 37.
378. Resondre les équations $x-y=a=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 506.
379. Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques Realis. N. ann. math. XXXIV, 289, 424.
380. Sur l'équation du troisième degré. André. N. ann. math XXXIV, 356.
381. Sur la discussion des équations du premier degré. Rouché Compt. rend. LXXXI, 1050.
382. Sur la discussion d'un système d'équations linéaires simultanées. Méray. Compt. rend. LXXXI, 1203.
383. Théorème pour la discussion d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Fontené. N. ann. math. XXXIV, 481.

H.

Homogene Functionen.

384. Ueber binäre Formen, welche Polaren einer Form sind. Wiederhold. Math. Annal. VIII, 444.
385. Sur la réduction d'une forme cubique ternaire à sa forme canonique. Brioschi. Compt. rend. LXXXI, 590.

Hydrodynamik.

386. On waves. Rayleigh. Phil. Mag. LI, 257.
387. On the resistance of fluids. Rayleigh. Phil. Mag. LII, 430.
388. Notes on hydrodynamics. Rayleigh. Phil. Mag. LII, 441.
389. On a passage of Laplace's theory of the tides. W. Thomson. Phil. Mag. L, 227, 279, 388. — Airy ibid. L, 277. — Challis ibid. L, 544. — Ferrel ibid. LI, 182.
390. Remarks on Helmholtz's memoir on the conservation of force. Moon. Phil. Mag. XLIX, 377; LII, 114.
391. On the distribution of energy in a mass of liquid in a state of steady motion. Cotterill. Phil. Mag. LI, 108.
392. Supplementary discussion of the hydrodynamical theory of attractive and repulsive forces. Challis. Phil. Mag. LII, 172.

Hyperbel.

393. Trisection eines beliebigen Winkels mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbel. Kosch. Grun. Archiv LVIII, 98.
394. Théorèmes sur l'hyperbole. Garreta & Goulin. N. ann. math. XXXIV, 238.
395. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux hyperboles équilatères tangentes aux trois côtés d'un triangle donné. Astor. N. ann. math. XXXIV, 189.

Hyperboloid.

396. Déterminer le paramètre d'une section parabolique dans un hyperboloide à une nappe. Lemonnier. N. ann. math. XXXIV, 169.
397. L'enveloppe d'un plan mobile qui détache d'un cône quelconque du second degré un cône fermé de volume constant est un hyperboloïde à deux nappes. Brocard. N. ann. math. XXXIV, 66.
398. Propriété de deux hyperboloïdes gauches ayant une génératrice commune. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 183.

Vergl. Elliptische Transcendenten 346.

I.

Imaginäres.

399. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Lüroth. Mathem. Annal. VIII, 145.
400. Grenzwerthrechnung nebst Grundzügen der Theorie der Lateralcurven. Thieme. Grun. Archiv LVIII, 185.
401. Von den imaginären Geraden. Thieme. Grun. Archiv LVIII, 218.

Invariantentheorie.

402. Ueber geometrische Deutung algebraischer Formen, die in der Theorie der Curven dritter Ordnung auftreten. Gundelfinger. Mathem. Annal. VIII, 136.
403. Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen. Lie. Mathem. Annal. VIII, 215.
404. Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. A. Mayer. Mathem. Annal. VIII, 304.
405. Théorème sur la composition des Covariants. C. Jordan. Compt. rend. LXXXI, 495.

K.

Kegelschnitte.

406. Sur la théorie des sections coniques. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXIV, 265, 458.
407. Discussion algébrique de l'équation en λ. Picart. N. ann. math. XXXIV, 31.
408. Lieu des points de l'espace tel qu'une conique donnée se projette suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné sur le plan de la conique. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 563.
409. Quadrilatères et sections coniques. Terrier. N. ann. math. XXXIV, 514.
410. Théorème sur les perpendiculaires tirées d'un point quelconque sur les côtés d'un triangle conjugué à une conique et théorème analogue pour l'espace. Pellet. N. ann. math. XXXIV, 68.
411. Puissance d'un point situé sur l'axe d'une conique par rapport à une certaine circonférence. Sondat. N. ann. math. XXXIV, 472.
412. Lieu du sommet d'un triangle de base fixe, le pied de la bissectrice d'un angle situé sur la base décrivant une droite donnée. Soubeiran. N. ann. math. XXXIV, 141.
413. Problème sur deux coniques bitangentes à une troisième. Fiot. N. ann. math. XXXIV, 308.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 302. Ellipse. Hyperbel. Oberflächen zweiter Ordnung 458, 459, 460. Parabel.

Kettenbrüche.

Vergl. Quadratur 483.

Kreis.

414. Ueber den Umkreis des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LVIII, 380.
415. Propriété du cercle des neuf points d'un triangle. Meyl. N. ann. math. XXXIV, 180.

440. Étude du choc d'une tige mouvante venant se heurter contre une axe donnée. Tourrettes. N. ann. math. XXXIV, 165.
441. Mouvement d'une tige mobile dans un plan vertical et se heurtant à un obstache fixe. Tourrettes. N. ann. math. XXXIV, 318.
442. Additions et éclaircissements à un essai précédant sur la théorie des eaux courantes. Boussinesq. Compt. rend. LXXXI, 140. — De Saint-Venant ibid. 464.
443. On the theorem of the mean ergal and its application to the molecular motions of gases. Clausius. Phil. Mag. L, 26, 101, 191.
444. De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de plasticodynamique. De Saint-Venant. Compt. rend. LXXXI, 115. — Tresca ibid. 121.
445. Ueber das Problem der Gradführung eines Punktes. Hoppe. Grun. Archiv LVIII, 215.
446. Beweis des Peaucellier'schen Satzes. August. Grun. Archiv LVIII, 216.
447. Sur les systèmes de tiges articulées. Liguine. N. ann. math. XXXIV, 529.
448. On the flexure of continuous girders. Merriman. Phil. Mag. L, 179.
449. Examen critique des bases de calcul habituellement en usage pour apprécier la stabilité des ponts à tabliers métalliques, soutenus par des poutres droites prismatiques et propositions pour l'adoption des bases nouvelles. Lefort. Compt. rend. LXXXI, 214. — De Saint-Venant ibid. 459.

Vergl. Akustik. Attraction. Electrodynamik. Geschichte der Mathematik 367, 370. Hydrodynamik. Imaginäres 400. Magnetismus. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

N.

Normalen.

450. D'un point donné des normales sont abaissées sur un système de courbes, on demande le lieu des points des courbes atteints par ces normales. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 77.

O.

Oberflächen.

451. Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems. Hoppe. Grun. Archiv LVIII, 37. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 356.]
452. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Voss. Mathem. Annal. VIII, 54.
453. Sur certaines surfaces du troisième degré. Bourguet. N. ann. math. XXXIV, 87.
454. Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés. Mannheim. Compt rend. LXXXI, 369.
455. On the forms of equipotential curves and surfaces and lines of electric force. Adams. Phil. Mag. L, 548.
456. Des surfaces coordonnées telles, qu'en chaque point considéré comme centre d'une sphère de rayon constant, les normales aux surfaces déterminent sur cette sphère les sommets d'un triangle sphèrique d'aire constante. Aoust. Compt. rend. LXXXI, 963.
457. Surfaces développables passant par une courbe plane donnée et ayant leur arête de rebroussement sur une surface du second degré également donnée. Chabanel. N. ann. math. XXXIV, 85.

Vergl. Geometrie (höhere). Potential 479. Singularitäten.

Oberflächen zweiter Ordnung.

458. Sur la tranformation des équations du second degré à deux et à trois variables. Lemonnier. N. ann. math. XXXIV, 396.
459. Génération des lignes et des surfaces du second degré, d'après Jacobi. Waille. N. ann. math. XXXIV, 5. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 400, 401.]
460. Sur la détermination analytique du centre d'une section plane faite dans une surface du second ordre. Saltel. N. ann. math. XXXIV, 271.
461. Propriété d'une transversale d'une surface du second degré. Genty. N. ann. math. XXXIV, 133.
462. Propriété de deux droites en rapport avec une surface du second degré. Chabanel. N. ann. math. XXXIV, 135.

Optik.

P.

Parabel.

Planimetrie.

Potential.

Q.

Quadratur.

R.

Reihen.

486. Sommation d'une série. De Virieu. N. ann. math. XXXIV, 351.

487. $tg\,45^0 + \frac{1}{3}\,tg\,\frac{45^0}{2} + \frac{1}{4}\,tg\,\frac{45^0}{4} + \ldots = \frac{4}{\pi}$. Stordeur. N. ann. math. XXXIV, 333.

Vergl. Combinatorik 295. Cylinderfunctionen 299. Functionen 347. Geschichte der Mathematik 372. Imaginäres 400.

S.

Schwerpunkt.

488. Sur les centres de gravité des surfaces et des volumes de révolution. Niewenglowski. N. ann. math. XXXIV, 352.

489. Ueber den Schwerpunkt des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LVIII, 170.

Singularitäten.

490. Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven. Stolz. Mathem. Annal. VIII, 415.

491. On the group of points $G_4{}^1$ or a sextic curve with five double points. Cayley. Math. Annal. VIII, 359.

492. Études des propriétés de situation des surfaces cubiques. Zeuthen. Mathem. Annal. VIII, 1.

493. Application d'un théorème, complémentaire du principe de correspondance, à la détermination, sans calcul, de l'ordre de multiplicité d'un point O, qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné. Saltel. Compt. rend. LXXXI, 1047.

Sphärik.

494. Théorème sur un système de sphères. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 429.

Stereometrie.

495. Sur les distances de quatre points dans l'espace à deux points d'une droite. Chadu. N. ann. math. XXXIV, 561.

496. Tronc du cône circonscrit à deux sphères tangentes extérieurement et dont les rayons sont en rapport de 1:2. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 504.

497. Sur la partie communes à deux cylindres de revolution du même rayon dont les axes se rencontrent. Rey. N. ann. math. XXXIV, 278. — Moret-Blanc ibid. 377.

498. Inscrire un rectangle dans un quart de cercle qui en tournant engendre un cylindre de surface donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 503.

499. Parallelopipède engendré au moyen d'un tétraèdre. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 505.

Vergl. Maxima und Minima 430, 431, 432.

Substitutionen.

500. Realität der Wurzeln der Gleichung, auf welche die lineare Substitution aus einer homogenen Function zweiten Grades in eine Summe von Quadraten führt. Gravelaar. Grun. Archiv LVIII, 301.

501. Ueber eine besondere Art von successiven linearen Substitutionen. Veltmann. Grun. Archiv LVIII, 342.

T.

Tetraeder.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 301. Maxima und Minima 431. Stereometrie 499. Trigonometrie 509.

Trigonometrie.

502. Zur Schultrigonometrie. L. v. Pfeil. Grun. Archiv LVIII, 319.

503. Démonstration géométrique de l'inégalité $a - sin\,a < \frac{a^3}{4}$. Joffroy. N. ann. math. XXXIV, 171.

504. Trouver dans l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC un point O tel que les angles OAB, OBC, OCA soient égaux. Chadu. N. ann. math. XXXIV, 286.

505. Sur trois droites possédant un concours identique dans un triangle. Chadu. N. ann. math. XXXIV, 175.

506. Du triangle et de son cercle circonscrit. Lez. N. ann. math. XXXIV, 465.

531. On unitation. Walenn. Phil. Mag. XLIX, 346; L, 117, 521; LI, 546. [Vergl. Bd. IX, Nr. 419.]
532. On division-remainders in arithmetic. Walenn. Phil. Mag. LII, 345.
533. Note on partitions. Glaisher. Phil. Mag. XLIX, 307.
534 Décomposition des nombres en facteurs premiers. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXIV, 523
535. Théorie des nombres parfaits. Carvallo. Compt. rend. LXXXI, 73.
536. Détermination du chiffre qui termine les puissances successives des nombres entiers. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 436.
537. 3^n+1 étant un multiple de 10, $3^{n+4}+1$ en sera un autre. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 507.
538. Sur les fractions périodiques. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 229. — Laisant ibid. 381. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 215.]
539. Propriétés des nombres. Dostor. Grun. Archiv LVIII, 433.
540. Propositions sur les nombres. Moreau. N. ann. math. XXXIV, 274. — Moret-Blanc ibid. 391.
41. Théorèmes arithmologiques. P. Pepin. N. ann. math. XXXIV, 275. — Moret-Blanc ibid. 371.
42. Démontrer que $\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$ est un nombre entier a et b étant entiers eux-mêmes. Bourguet. N. ann. math. XXXIV, 89. — Catalan ibid. 179.
543. Beweis, dass $x^n+y^n=z^n$ für $n>2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, nebst einer kurzen Auflösung für $n=2$. F. Lukas Grun. Archiv LVIII, 109.
544. Le sextuple d'un carré impair est toujours décomposable en trois carrés Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 428.
545. On the representation of an uneven number as a sum of four squares and as the sum of a square and two triangular numbers. Glaisher. Phil. Mag. LI, 44.
546. Consequences tirées de l'équation $p=r^2+s^2+t^2+u^2$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 90.
547. Sur les solutions rationnelles des équations $x^2+y^2-1=z^2$ et $x^2-y^2-1=u^2$ dont les termes entiers ne dépassent pas une limite assignée. Pepin. N. ann. math. XXXIV, 63. — Genocchi ibid. 178.
548. Sur les équations $p=x^2+16y^2$ et $p=t^2+8u^2$, p étant nombre premier de la forme $8q+1$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIV, 73.
549. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation $x^4+x^3+x^2+1=y^2$. Moreau. N. ann. math. XXXIV, 335.

Vergl. Functionen 348. Geschichte der Mathematik 368.