Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Fünfzehnter Jahrgang.

Mit 5 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1870.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

I.

Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen.

Von

Dr. Th. Kötteritzsch,

Lehrer an der Fürstenschule zu Grimma.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen.

Ist ein System von $n+1$ linearen Gleichungen (n eine reelle ganze positive endliche Zahl) mit $n+1$ Unbekannten zur Auflösung vorgelegt in der Form:

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} {}_0a_0\, x_0 + {}_0a_1\, x_1 + {}_0a_2\, x_2 + \cdots\cdots + {}_0a_n\, x_n &= u_0 \\ {}_1a_0\, x_0 + {}_1a_1\, x_1 + {}_1a_2\, x_2 + \cdots\cdots + {}_1a_n\, x_n &= u_1 \\ {}_2a_0\, x_0 + {}_2a_1\, x_1 + {}_2a_2\, x_2 + \cdots\cdots + {}_2a_n\, x_n &= u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_na_0\, x_0 + {}_na_1\, x_1 + {}_na_2\, x_2 + \cdots\cdots + {}_na_n\, x_n &= u_n, \end{aligned}$$

wo die mit u und a bezeichneten Grössen keine der mit x bezeichneten Unbekannten enthalten, so ist bekanntlich der Werth irgend einer der Unbekannten, z. B. der Werth von x_k dargestellt durch

$$1)\quad x_k = \frac{{}_0\alpha_k}{R}\, u_0 + \frac{{}_1\alpha_k}{R}\, u_1 + \frac{{}_2\alpha_k}{R}\, u_2 + \cdots\cdots + \frac{{}_n\alpha_k}{R}\, u_n,$$

wenn

$$R = \begin{vmatrix} {}_0a_0 & {}_0a_1 & \cdots & {}_0a_n \\ {}_1a_0 & {}_1a_1 & \cdots & {}_1a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_na_0 & {}_na_1 & \cdots & {}_na_n \end{vmatrix}$$

die Determinante des vorgelegten Systemes I) linearer Gleichungen bedeutet und ${}_i\alpha_k$ den Coëfficienten von ${}_ia_k$ in der Entwickelung von R bezeichnet.

Die eben angegebene Art der Auflösung des vorgelegten Systemes I) bleibt bestehen, wenn man zu den linken Seiten der einzelnen Gleichungen der Reihe nach noch die Glieder addirt: ${}_0a_{n+1}\, x_{n+1}$; ${}_1a_{n+1}\, x_{n+1}$; ${}_2a_{n+1}\, x_{n+1}$; $\cdots$ ${}_na_{n+1}\, x_{n+1}$; und wenn man zugleich die Anzahl $n+1$ der Gleichungen des Systemes I) vermehrt um die folgende:

$$ {}_{n+1}a_0\, x_0 + {}_{n+1}a_1\, x_1 + {}_{n+1}a_2\, x_2 \cdots\cdots + {}_{n+1}a_n\, x_n + {}_{n+1}a_{n+1}\, x_{n+1} = u_{n+1} $$

Es ändert sich also nichts an der angegebenen Methode der Auflösung des Systemes I) wenn die Anzahl der Unbekannten ebenso wie die der gegebenen Gleichungen um eine Einheit zunimmt; da man nun das eben erhaltene Resultat wiederum auf das erweiterte System linearer Gleichungen anwenden kann u. s. f. so kommt man zu dem allgemeinen Resultate:

Ist das System linearer Gleichungen I) so beschaffen, dass in ihm die Anzahl $n+1$ der Gleichungen in ganz derselben Weise wie die Anzahl $n+1$ der darin vorkommenden Unbekannten x ins Unendliche wächst, so ist der Werth irgend einer Unbekannten, etwa der x_k

$$ 2)\; x_k = \frac{{}_0\alpha_k}{R}\, u_0 + \frac{{}_1\alpha_k}{R}\, u_1 + \frac{{}_2\alpha_k}{R}\, u_2 + \frac{{}_3\alpha_k}{R}\, u_3 + \cdots\cdots $$

wenn R die Determinante von $\lim\limits_{n=\infty} (n+1)^2$ Elementen des vorgelegten Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen bedeutet und ${}_i\alpha_k$ den Coëfficienten von ${}_ia_k$ in R bezeichnet.

Die Existenz eines Systemes linearer Gleichungen, deren Anzahl unendlich gross ist, ist aber nur möglich, wenn das allgemeine Gesetz gegeben ist, nach welchem die Coëfficienten a und die Werthe u gebildet werden müssen, weil im entgegengesetzten Falle das System unendlich vieler linearer Gleichungen gar kein Gegenstand mathematischer Behandlung sein kann. Um diess anzudeuten, setzen wir

$$ {}_ma_n = f_0\,(m\,,\,n)\,;\; u_n = \varphi_n\,, $$

so dass wir ein beliebiges System unendlich vieler linearer Gleichungen, mit ebensoviel Unbekannten x als Gleichungen existiren, kurz andeuten können durch die Form:

$$ \text{II)}\; \overset{0}{\underset{\infty}{m}} \left| \sum_0^\infty{}^p f_0\,(m\,,\,p)\, x_p = \varphi_m \right| $$

Da auch jetzt noch die Gleichung 2) die Auflösung des Systemes II) bildet, so können wir aus ihr leicht folgende Sätze ableiten:

Sind sämmtliche φ_m der Null gleich, während sämmtliche Functionen $f_0\,(m\,,\,p)$ endlich sind und die Determinante R des Systemes II) einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat, so ist auch der Werth einer jeden Unbekannten der Null gleich.

Verschwindet die Determinante R des Systemes II), so kommen sämmtlichen Unbekannten x unendlich grosse Werthe zu, die aber, wie eine genauere Betrachtung der Partialdeterminanten ${}_i\alpha_k$ für den Fall $R = 0$ lehrt, zu einander bestimmte Verhältnisse haben. Das letztere findet auch statt, wenn sämmtliche Functionen φ_m verschwinden.

Diese beiden Sätze können leicht durch eine Betrachtung, die der Eingangs dieses Paragraphen geführten analogisch ist, streng nachgewiesen werden, indem man zeigt, dass, weil dieselben gelten für ein System linearer Gleichungen von endlicher Anzahl, und unverändert Geltung behalten, wenn die Anzahl der Gleichungen um eine endliche Zahl wächst, sie auch gelten müssen, wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten ins Unbegrenzte wächst.

Wird irgend eine der Functionen $f_0(m, p)$, etwa $f_0(r, s)$ unendlich, während φ_r endlich ist, so kann x_s den Werth Null haben; findet dies statt und lässt man in dem System II) alle die Glieder hinweg, welche in x_s multiplicirt sind und vernachlässigt man die Gleichung, welche $f_0(r, s)$ enthält, so kann man aus dem übrig bleibenden Systeme linearer Gleichungen sämmtliche Unbekannten x mit einziger Ausnahme von x_s bestimmen; setzt man dann die erhaltenen Werthe der x in die vernachlässigte Gleichung ein, so ergiebt sich aus derselben das Gesetz, nach welchem sich x_s der Null nähert.

Wird eine der Functionen φ_m, etwa φ_r unendlich, so kann entweder auch eine oder mehrere der Functionen $f_0(r, s)$ (constantes r) unendlich werden, oder es kann auch eine oder mehrere der Unbehannten x unendliche Werthe erlangen. Der erstere Fall kann durch Division der s^{ten} Gleichung mit einem der unendlich gross werdenden Werthe entweder auf den zweiten Fall zurückgeführt werden, oder man erlangt statt der s^{ten} Gleichung eine neue richtige Gleichung mit lauter endlichen bekannten Werthen. (Der erstgenannte Umstand kann offenbar dann eintreten, wenn φ_r in höherer Ordnung unendlich wird, als irgend eins der ebenfalls unendlich werdenden $f_0(r, s)$). Im zweiten Falle vernachlässige man vor der Hand die s^{te} Gleichung und bestimme aus den übrigen Gleichungen die Verhältnisse aller Unbekannten x zu irgend einer bestimmten Unbekannten, etwa x_q als Functionen von x_q. Durch Einsetzen der so erhaltenen Werthe in die vorher vernachlässigte Gleichung ergeben sich aus derselben sämmtliche Werthe der Unbekannten x.

Die praktische Verwendung dieser Sätze aber scheitert, eben so wie die nach Gleichung 2) zu erlangenden Werthe der Unbekannten x an der Schwierigkeit, mit der die Werthe der Determinante R und ihrer Partialdeterminanten α beschafft werden können. In den folgenden Paragraphen soll ein Mittel angegeben werden, um diese Schwierigkeiten zu besiegen.

§ 2.

Auflösung eines besonderen Systemes linearer Gleichungen.

Gesetzt in dem Systeme II) § 1 wären sämmtliche Functionen $f_0\,(m, p)$, deren p kleiner als m ist, der Null gleich, alsdann hat die Determinante R dieses vereinfachten Systemes die Form:

$$1)\ R = \begin{vmatrix} f_0\,(0,0) & f_0\,(0,1) & f_0\,(0,2) & \cdots & f_0\,(0,n) & \cdots \\ 0 & f_0\,(1,1) & f_0\,(1,2) & \cdots & f_0\,(1,n) & \cdots \\ 0 & 0 & f_0\,(2,2) & \cdots & f_0\,(2,n) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_0\,(n,n) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= f_0\,(0,0)\,f_0\,(1,1)\,f_0\,(2,2)\cdots\cdots f_0\,(n,n)\cdots\cdots$$

Diese Form der Determinante R lässt leicht erkennen, ob ihr ein verschwindender Werth zukomme, indem in diesem Falle eine oder mehrere der Functionen f_0 mit zwei gleichen Argumenten verschwinden müssen. Findet diess aber statt, so haben die Unbekannten x zu einander ein bestimmtes Verhältniss oder mit andern Worten, die einzelnen Gleichungen des zur Auflösung vorgelegten Systemes sind nicht unabhängig von einander.

Es kann nun auch leicht der Werth irgend einer der Unbekannten x, z. B. der von x_p dargestellt werden durch die Functionen f_0. Die Gleichung 2) § 1 liefert nämlich für den jetzigen Fall:

$$
\begin{aligned}
2)\ x_p = \frac{1}{f_0\,(p,p)} \Big\{ & \varphi_p - \varphi_{p+1}\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1, p+1)} \\
&+ \varphi_{p+2}\left[\frac{f_0\,(p+1, p+2)}{f_0\,(p+2, p+2)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)} - \frac{f_0\,(p, p+2)}{f_0\,(p+2,p+2)}\right] \\
&- \varphi_{p+3}\left[\frac{f_0\,(p+2, p+3)}{f_0\,(p+3, p+3)}\left(\frac{f_0\,(p+1, p+2)}{f_0\,(p+2, p+2)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)}\right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{f_0\,(p, p+2)}{f_0\,(p+2,p+2)}\right) - \frac{f_0\,(p+1,p+3)}{f_0\,(p+3,p+3)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1, p+1)} + \frac{f_0\,(p, p+3)}{f_0\,(p+3, p+3)}\right] \\
&+ \varphi_{p+4}\left\{\frac{f_0\,(p+3,p+4)}{f_0\,(p+4,p+4)}\left[\frac{f_0\,(p+2,p+3)}{f_0\,(p+3,p+3)}\left(\frac{f_0\,(p+1,p+2)}{f_0\,(p+2, p+2)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)}\right.\right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{f_0\,(p, p+2)}{f_0\,(p+2,p+2)}\right) - \frac{f_0\,(p+1,p+3)}{f_0\,(p+3,p+3)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)} + \frac{f_0\,(p, p+3)}{f_0\,(p+3, p+3)}\right] \\
&- \frac{f_0\,(p+2,p+4)}{f_0\,(p+4,p+4)}\left(\frac{f_0\,(p+1,p+2)}{f_0\,(p+2,p+2)} - \frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)} - \frac{f_0\,(p, p+2)}{f_0\,(p+2, p+2)}\right) \\
&\left. + \frac{f_0\,(p+1,p+4)}{f_0\,(p+4,p+4)}\,\frac{f_0\,(p, p+1)}{f_0\,(p+1,p+1)} - \frac{f_0\,(p, p+4)}{f_0\,(p+4, p+4)}\right\} \mp \cdots
\end{aligned}
$$

Schreibt man für den angeführten Werth von x_p kurz

$$3)\ x_p = \frac{1}{f_0(p\,,\,p)} \Big\{ {}_pB_p\,\varphi_p - {}_pB_{p+1}\,\varphi_{p+1} + {}_pB_{p+2}\,\varphi_{p+2} - {}_pB_{p+3}\,\varphi_{p+3} \pm \cdots\cdots + (-1)^m\,{}_pB_{p+m}\,\varphi_{p+m} + \cdots\cdots \Big\}$$

so erkennt man aus den rechten Seiten der Gleichungen 2) und 3) dass die Werthe der Coëfficienten B der Reihe nach leicht gebildet werden können mit Hülfe der folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&{}_pB_p = 1 \\
&{}_pB_{p+1} = {}_pB_p \cdot \frac{f_0\,(p\,,\;\; p+1)}{f_0\,(p+1\,,\,p+1)} \\
4)\ &{}_pB_{p+2} = {}_pB_{p+1}\,\frac{f_0\,(p+1\,,\,p+2)}{f_0\,(p+2\,,\,p+2)} - {}_pB_p\,\frac{f_0\,(p\,,\;\;p+2)}{f_0\,(p+2\,,\,p+2)} \\
&{}_pB_{p+3} = \frac{1}{f_0\,(p+3\,,\,p+3)} \Big[{}_pB_{p+2}\,f_0\,(p+2\,,\,p+3) - {}_pB_{p+1}\,f_0\,(p+1,\,p+3) \\
&\qquad + {}_pB_p\,f_0\,(p\,,\,p+3) \Big] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&{}_pB_{p+m} = \frac{1}{f_0\,(p+m,\,p+m)} \Big[{}_pB_{p+m-1}\,f_0\,(p+m-1\,,\,p+m) \\
&\qquad - {}_pB_{p+m-2}\,f_0\,(p+m-2\,,\,p+m) + {}_pB_{p+m-3}\,f_0\,(p+m-3\,,\,p+m) \\
&\qquad \mp \cdots\cdots + (-1)^{m-2}\,{}_pB_{p+1}\,f_0\,(p+1\,,\,p+m) \\
&\qquad + (-1)^{m-1}\,{}_pB_p\,f_0\,(p\,,\,p+m) \Big]
\end{aligned}
$$

Vermittels der Gleichungen 3) und 4) ist es nun ein Leichtes, das System II) §. 1 aufzulösen, wenn die einzelnen Functionen f_0 desselben von der Art sind, dass $f_0\,(r\,,\,s) = 0$, so lange $s < r$.

§. 3.

Reduction eines beliebigen Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen auf die Form des in § 2 Behandelten.

Es möge zunächst die Reihenfolge der einzelnen Gleichungen des Systemes II § 1, wie es immer möglich sein wird, so geordnet werden, dass in der q^{ten} Gleichung das Glied der linken Seite $f_0\,(q\,,\,q)\,x_q$ nicht verschwindet; ausserdem ordnen wir die Glieder der einzelnen linken Seiten so, dass diejenigen der Unbekannten x, welche voraussichtlich am beträchtlichsten von Null verschiedene Werthe erlangen, die niedrigsten Indexe erhalten, und dass analog diejenigen Gleichungen, welche voraussichtlich den meisten Einfluss auf die Werthe der Unbekannten x haben, die ersten in der Reihenfolge der einzelnen Gleichungen sind. Die eben genannte Anordnung der Gleichungen wird meist von selbst gegeben sein in den Fällen, wo die Rechnung auf ein Gleichungensystem führt, wie das vorgelegte ist. Diese eben angegebene Eigenschaft habe nun das System Gleichungen

$$\begin{array}{c} 0 \\ m \\ \infty \end{array} \left| \sum_0^\infty {}^p f_0(m, p)\, x_p = \varphi_m \right|$$

Wir lassen zunächst die 0te Gleichung unverändert, schreiben aber statt $f_0(0, p)$ einfacher $f_0(p)$ und statt φ_0 (φ_0), so dass also

$$f_0(p) = f_0(0, p);\ (\varphi_0) = \varphi_0$$

Wir multipliciren ferner die 0te Gleichung des gegebenen Systemes mit λ_1^1, addiren sie alsdann zur 1sten Gleichung, und bestimmen nun den Factor λ_1^1 so, dass in der neuen Gleichung der Coëfficient von x_0 verschwindet. Diess geschieht, wenn

$$\lambda_1^1 f_0(0) + f_0(1, 0) = 0 = f_1(0)$$

Den Coëfficienten von x_p, nämlich $\lambda_1^1 f_0(p) + f_0(1, p)$ setzen wir zur Abkürzung gleich $f_1(p)$ und schreiben für die rechte Seite der Gleichung, nämlich $\lambda_1^1(\varphi_0) + \varphi_1$, (φ_1).

Wir multipliciren ferner die 0te Gleichung des gegebenen Systemes mit λ_1^2 und die nach der eben angeführten Methode transformirte zweite mit λ_2^2 und addiren die so entstandenen Produkte zur 2ten Gleichung; die Werthe von λ_2^2 und λ_1^2 bestimmen wir nun durch die Bedingung, dass in der neu entstandenen Gleichung der Coëfficient von x_0 und x_1 verschwindet, diess erfolgt, wenn:

$$\lambda_1^2 f_0(0) + f_0(2, 0) = 0 \text{ und}$$
$$\lambda_2^2 f_1(1) + \lambda_1^2 f_0(1) + f_0(2, 1) = 0 = f_2(1)$$

während in der neu entstandenen Gleichung allgemein der Coëfficient von x_p, nämlich $\lambda_2^2 f_1(p) + \lambda_1^2 f_0(p) + f_0(2, p)$ mit $f_2(p)$ und die rechte Seite der Gleichung, nämlich $\varphi_2 + \lambda_2^2(\varphi_1) + \lambda_1^2(\varphi_0)$ mit (φ_2) bezeichnet werden möge.

Es möge weiter die 0te Gleichung des gegebenen Systemes mit λ_1^3, die erste transformirte Gleichung mit λ_2^3 und die zweite transformirte Gleichung mit λ_3^3 multiplicirt werden, die so entstandenen Gleichungen addiren wir zur dritten des gegebenen Systemes und bestimmen nun λ_3^3, λ_2^3 und λ_1^3, so, dass in der neu entstandenen Gleichung die Coëfficienten von x_2, x_1 und x_0 verschwinden; diess geschieht, wenn

$$\lambda_1^3 f_0(0) + f_0(3, 0) = 0$$
$$\lambda_2^3 f_1(1) + \lambda_1^3 f_0(1) + f_0(3, 1) = 0$$
$$\lambda_3^3 f_2(2) + \lambda_2^3 f_1(2) + \lambda_1^3 f_0(2) + f_0(3, 2) = 0 = f_3(2)$$

Der Coëfficient von x_p in der neu entstandenen Gleichung sei kurz bezeichnet mit $f_3(p)$, wo

$$f_3(p) = \lambda_3^3 f_2(p) + \lambda_2^3 f_1(p) + \lambda_1^3 f_0(p) + f_0(3, p),$$

und die rechte Seite derselben sei (φ_3) wo

$$(\varphi_3) = \varphi_3 + \lambda_3^3 (\varphi_2) + \lambda_2^3 (\varphi_1) + \lambda_1^3 (\varphi_0)$$

Fahren wir in analoger Weise weiter fort die einzelnen Gleichungen des gegebenen Systemes zu transformiren, so erscheint als neues System

$$\text{I)} \left.\begin{array}{c} 0 \\ m \\ \infty \end{array}\right| \sum_0^\infty {}^p f_m(p)\, x_p = (\varphi_m) \Bigg|$$

$$f_m(p) = 0 \text{ so lange } p < m.$$

Das System I) kann nun ganz nach Analogie des in § 2 aufgelösten Systemes behandelt werden und man erhält:

$$1)\; x_p = \frac{1}{f_p(p)} \Big\{ {}_pA_p(\varphi_p) - {}_pA_{p+1}(\varphi_{p+1}) + {}_pA_{p+2}(\varphi_{p+2}) \mp \cdots + (-1)^m\, {}_pA_{p+m}(\varphi_{p+m}) + \cdots \Big\}$$

wenn

$$ {}_pA_p = 1$$

$$ {}_pA_{p+1} = {}_pA_p \frac{f_p(p+1)}{f_{p+1}(p+1)}$$

$$2)\; {}_pA_{p+2} = \frac{1}{f_{p+2}(p+2)} \Big[{}_pA_{p+1} f_{p+1}(p+2) - {}_pA_p f_p(p+2) \Big]$$

. . . .

$$ {}_pA_{p+m} = \frac{1}{f_{p+m}(p+m)} \Big[{}_pA_{p+m-1} f_{p+m-1}(p+m) - {}_pA_{p+m-2} f_{p+m-2}(p+m) \pm \cdots + (-1)^{m-2}\, {}_pA_{p+1} f_{p+1}(p+m) + (-1)^{m-1}\, {}_pA_p f_p(p+m) \Big]$$

Um nun die Werthe der Functionen f und (φ) zu ermitteln, bedarf es der Werthe der eingeführten Hülfsgrössen λ. Um irgend eines der λ, z. B. λ_p^n zu bestimmen, haben wir das System Gleichungen aufzulösen:

$$\lambda_n^n f_{n-1}(n-1) + \lambda_{n-1}^n f_{n-2}(n-1) + \lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-1) + \cdots + \lambda_2^n f_1(n-1) + \lambda_1^n f_0(n-1) + f_0(n, n-1) = 0$$

$$\lambda_{n-1}^n f_{n-2}(n-2) + \lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-2) + \cdots + \lambda_2^n f_1(n-2) + \lambda_1^n f_0(n-2) + f_0(n, n-2) = 0$$

$$\lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-3) + \cdots + \lambda_2^n f_1(n-3) + \lambda_1^n f_0(n-3) + f_0(n, n-3) = 0$$

. . . .

$$\lambda_2^n f_1(1) + \lambda_1^n f_0(1) + f_0(n, 1) = 0$$

$$\lambda_1^n f_0(0) + f_0(n, 0) = 0$$

oder wie wir hierfür kürzer schreiben:

$$\begin{array}{c}1\\ m\\ n-1\end{array}\left|\sum_{0}^{n-1}{}^{p} f_{n-p-1}(n-1-m)\lambda^n_{n-p} = -f_0(n, n-1-m)\right|$$

$$f_{n-p-1}(n-1-m)=0 \text{ so lange } n-1-m < n-p-1.$$

Auch dieses System Gleichungen kann aufgelöst werden nach Analogie des in § 2 behandelten Systemes von Gleichungen und man erhält:

$$\lambda^n_{n-p} = \frac{-1}{f_{n-p-1}(n-p-1)}\Big\{{}_{n-p}C_{n-p-1}f_0(n, n-p-1) - {}_{n-p}C_{n-p-2}f_0(n, n-p-2)$$

$$+ {}_{n-p}C_{n-p-3}f_0(n, n-p-3) \mp \cdots\cdots + (-1)^{n-p+1}{}_{n-p}C_0 f_0(n, 0)\Big\}$$

wenn

$${}_{n-p}C_{n-p-1} = 1$$

$${}_{n-p}C_{n-p-2} = {}_{n-p}C_{n-p-1}\frac{f_{n-p-2}(n-p-1)}{f_{n-p-2}(n-p-2)}.$$

$$3)\quad {}_{n-p}C_{n-p-3} = {}_{n-p}C_{n-p-2}\frac{f_{n-p-3}(n-p-2)}{f_{n-p-3}(n-p-3)} - {}_{n-p}C_{n-p-1}\frac{f_{n-p-3}(n-p-1)}{f_{n-p-3}(n-p-3)}$$

. . . .

$${}_{n-p}C_{n-p-q} = \frac{1}{f_{n-p-q}(n-p-q)}\Big\{{}_{n-p}C_{n-p-q+1}f_{n-p-q}(n-p-q+1)$$

$$- {}_{n-p}C_{n-p-q+2}f_{n-p-q}(n-p-q+2)$$

. . . .

$$+ (-1)^q_{n-p}C_{n-p-1}f_{n-p-q}(n-p-1)\Big\}$$

. . . .

Aus der ersten der Gleichungen, die die Werthe der λ bestimmen, folgt ferner der Werth von $f_n(q)$ $q \geq n$ in der Form:

$$f_n(q) = f_0(n, q) + \lambda^n_1 f_0(q) + \lambda^n_2 f_1(q) + \lambda^n_3 f_2(q) + \cdots\cdots + \lambda^n_n f_{n-1}(q)$$

und zugleich ist

$$(\varphi_n) = \varphi_n + \lambda^n_n(\varphi_{n-1}) + \lambda^n_{n-1}(\varphi_{n-2}) + \cdots\cdots + \lambda^n_2(\varphi_1) + \lambda^n_1(\varphi_0)$$

Setzt man die für die λ gefundenen Werthe ein, so entsteht:

$$f_n(q) = f_0(n, q)$$

$$-f_0(n,0)\left[{}_1C_0\frac{f_0(q)}{f_0(0)} - {}_2C_0\frac{f_1(q)}{f_1(1)} + {}_3C_0\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}C_0\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\right]$$

$$4)\quad +f_0(n,1)\left[\qquad - {}_2C_1\frac{f_1(q)}{f_1(1)} + {}_3C_1\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}C_1\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\right]$$

$$-f_0(n,2)\left[\qquad + {}_3C_2\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}C_2\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\right]$$

. . . .

$$-(-1)^n f(n, -1)\left[\qquad + (-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\right]$$

und

$$
\begin{array}{rl}
(\varphi_n) = \varphi_n & \\
-f_0(n,0)\Big[& {}_1C_0\frac{(\varphi_0)}{f_0(0)} - {}_2C_0\frac{(\varphi_1)}{f_1(1)} + {}_3C_0\frac{(\varphi_2)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}\, C_0\frac{(\varphi_{n-1})}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\
+f_0(n,1)\Big[& \qquad - {}_2C_1\frac{(\varphi_1)}{f_1(1)} + {}_3C_1\frac{(\varphi_2)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}\, C_1\frac{(\varphi_{n-1})}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\
-f_0(n,2)\Big[& \qquad\qquad + {}_3C_2\frac{(\varphi_2)}{f_2(2)} \mp \cdots + (-1)^{n-1}\, C_2\frac{(\varphi_{n-1})}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\
\cdots & \cdots \\
-(-1)^n f(n,n-1)\Big[& \qquad\qquad\qquad + (-1)^{n-1}\, C_{n-1}\frac{(\varphi_{n-1})}{f_{n-1}(n-1)}\Big]
\end{array}
\tag{5}
$$

Aus den Gleichungen 3) 4) und 5) lassen sich nun die Werthe von $f_n(q)$ und (φ_n) mit Leichtigkeit nach und nach berechnen als Functionen von den f_0 und φ_1. Mit Hülfe der so erlangten Werthe der $f_n(q)$ folgen dann leicht aus der Gleichung 2) die Werthe der ${}_pA_{p+m}$ und alsdann aus den gefundenen Werthen der (φ_n) und ${}_pA_{p+m}$ nach Gleichung 1) die Unbekannten x_p selbst.

Sind, wie in § 1 bemerkt wurde, die Functionen f_0 ebenso wie die Functionen φ nach einem bestimmten Gesetze gebildet, so ist dasselbe auch, wie man aus den Gleichungen 3) 4) und 5) erkennt, mit den Functionen $f_n(q)$ und (φ_n) der Fall, also dann auch, wie man aus den Gleichungen 2) und 1) erkennt, mit den Werthen, welche die Unbekannten x_p erhalten. Hat man daher den Werth der Unbekannten mit dem allgemeinen Index p erhalten, so kann man daraus ohne weitere Rechnung die Werthe aller anderen Unbekannten x ableiten. Das specielle Gesetz, nach welchem diess zu geschehen hat, hängt freilich ab von dem speciellen Bildungsgesetz der Functionen f_0 und φ und lässt sich daher specieller als geschehen ist, nicht angeben.

Die somit durchgeführte Lösung des Systemes linearer Gleichungen

$$\begin{array}{c}0\\ m\\ \infty\end{array}\left|\ \sum_0^{\infty}{}^{p} f_0(m,p)\, x_p = \varphi_m\ \right| .$$

ist von ganz besonderer Wichtigkeit für die Anwendung der Methode der unbestimmten Coëfficienten. So weiss man z. B. dass, innerhalb gewisser Grenzen des Argumentes, jede Function sich nach Kugelfunctionen oder nach Fourierschen Reihen entwickeln lässt; man kann also auch von einer **gesuchten** Function eine derartige Entwickelung im Voraus annehmen und die Coëfficienten der Entwickeluug nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zu bestimmen suchen. Sind nun die Bedingungen, denen die gesuchte Function zu genügen hat, derartig, dass es nur eine einzige solche Function geben kann, so müssen auch die unbekannten Coëfficienten x der Entwickelung einem Systeme von

Bedingungsgleichungen genügen, wie das eben hingeschriebene ist. Kennt man nun aber durch Auflösung des Systemes linearer Gleichungen den allgemeinen Werth von x_p, so kann man auch mit leichter Mühe die Functionen selbst finden, bei deren Entwickelung nach Kugelfunctionen oder Fourierschen Reihen die x die Coëfficienten bilden. Es kann nämlich in diesem Falle $x_p = f(p)$ als Function des Stellenindexes p betrachtet werden, so dass die Entwickelungen lauten:

$$S_1 = f(0)\,P^0 + f(1)\,P^1 + f(2)\,P^2 + \cdots\cdots + f(n)\,P^n + \cdots\cdots$$
$$S_2 = \tfrac{1}{2} f(0) + f(1) \cos\theta + f(2) \cos 2\,\theta + \cdots\cdots + f(n) \cos n\,\theta + \cdots\cdots$$
$$S_3 = \qquad f(1) \sin\theta + f(2) \sin 2\,\theta + \cdots\cdots + f(n) \sin n\,\theta + \cdots\cdots$$

Nun ist bekanntlich, wenn z eine complexe Variable bedeutet

$$\int \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\,i\,\pi\,f(a)\,,$$

wenn $f(z)$ innerhalb der geschlossenen Integrationscurve synectisch bleibt. Hat nun etwa $f(z)$ die ebengenannte Eigenschaft für alle Punkte der positiven Seite der Zahlenebene, Null und die imaginäre Axe eingeschlossen, so kann man als Integrationscurve wählen die imaginäre Axe und einen auf der positiven Seite der Zahlenebene gelegenen Halbkreis mit unendlich grossem Radius. Das Integral, ausgedehnt über diesen Halbkreis, verschwindet und es bleibt allein übrig, wenn allgemein $z = x + iy$

$$\int_0^\infty \frac{f(iy)}{iy-a}\,dy + \int_{-\infty}^0 \frac{f(iy)}{iy-a}\,dy = \left\{ \begin{matrix} -2\pi f(a) \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{wenn der reelle Theil von } a \text{ positiv} \\ \text{wenn der reelle Theil von } a \text{ negativ} \end{matrix} \Big\} \text{ ist.}$$

Es bedeute nun a irgend eine Zahl p der reellen Zahlenreihe von 1 bis ∞, dann folgt aus der eben erlangten Relation, wenn in ihr noch die Integrationsgrenzen sämmtlich auf 0 bis ∞ zurückgeführt werden:

$$\int_0^\infty \frac{(iy-p)f(iy)-(iy+p)f(-iy)}{y^2+p^2}\,dy = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{-(iy+p)\,f(iy) + (iy-p)\,f(-iy)}{y^2+p^2}\,dy = -2\pi f(p)$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction, so erhält man

a) $$\int_0^\infty \frac{y}{p^2+y^2} \cdot \frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy = \tfrac{1}{2}\pi f(p)$$

b) $$\int_0^\infty \frac{p}{p^2+y^2} \cdot \frac{f(-iy)+f(+iy)}{2}\,dy = \tfrac{1}{2}\pi f(p)$$

In dem besonderen Falle $p = 0$ schliessen wir den Ausnahmepunkt Null durch einen nach der positiven Seite der Zahlenebene sich erstreckenden Halbkreis von der Fläche aus, die die Integrationscurve umkreist. Das über die jetzige Integrationscurve erstreckte Integral muss Null sein. Lassen wir nun den Radius des den Nullpunkt ausschliessenden Halbkreises bis zur Grenze Null abnehmen, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{f(iy)}{iy}\,dy + \int_{-\infty}^0 \frac{f(iy)}{iy}\,dy = -\pi f(0)$$

Oder:

$$\text{c)} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{2y}\,\frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

Setzt man nun die Werthe von $f(0)$ und $f(p)$ aus den Gleichungen a und c ein in die obige Summe S_2, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi S_2 = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{2y} + \frac{y\cos\theta}{1^2+y^2} + \frac{y\cos 2\theta}{2^2+y^2} + \frac{y\cos 3\theta}{3^2+y^2} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{y\cos n\theta}{n^2+y^2} + \cdots\cdots \right\} \frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy$$

Oder weil

$$\frac{1}{2y} + \frac{y\cos\theta}{1^2+y^2} + \frac{y\cos 2\theta}{2^2+y^2} + \frac{y\cos 3\theta}{3^2+y^2} + \cdots\cdots + \frac{y\cos n\theta}{n^2+y^2} + \cdots\cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{(\pi-\theta)y}+e^{-(\pi-\theta)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} \qquad \pi \geqq \theta \geqq 0$$

$$6)\quad S_2 = \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\theta)y}+e^{-(\pi-\theta)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}\,\frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy. \qquad \pi \geqq \theta \geqq 0$$

Setzt man ferner den Werth von $f(p)$ aus der Gleichung b ein in die Summe S_3, so entsteht:

$$\tfrac{1}{2}\pi S_3 = \int_0^\infty \left\{\frac{1\sin\theta}{1^2+y^2} + \frac{2\sin 2\theta}{2^2+y^2} + \frac{3\sin 3\theta}{3^2+y^2} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{n\sin n\theta}{n^2+y^2} + \cdots \right\} \frac{f(-iy)+f(+iy)}{2}\,dy$$

Nun ist

$$\frac{1\sin\theta}{1^2+y^2} + \frac{2\sin 2\theta}{2^2+y^2} + \frac{3\sin 3\theta}{3^2+y^2} + \cdots\cdots + \frac{n\sin n\theta}{n^2+y^2} + \cdots\cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{(\pi-\theta)y}-e^{-(\pi-\theta)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} \qquad \pi > \theta > 0$$

folglich ist auch

$$7)\ ^{*})\ S_3 = \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\theta)y}+e^{-(\pi-\theta)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} \frac{f(-iy)+f(+iy)}{2}\, dy. \quad \pi > \theta > 0$$

Durch die Formeln 6) und 7) sind die Functionen selbst gefunden, die, nach Fourier entwickelt, die Unbekannten x_p des Systemes linearer Gleichungen

$$\begin{array}{c} 0 \\ m \\ \infty \end{array} \left| \sum_0^\infty {}^p f_0\,(m\,,\,p)\; x_p = \varphi_m \right|$$

zu Entwickelungscoëfficienten haben.

Es hat bekanntlich keine Schwierigkeit, das Gültigkeitsintervall der Formeln 6) und 7) noch weiter auszudehnen, als die beigefügten Grenzen angeben.

Sollte die Bedingung, dass $x_p = f\,(p)$ synectisch bleibt auf der ganzen positiven Seite der Zahlenebene, wenn man für p die complexe Zahl $x + iy$ setzt, nicht erfüllt sein, so hat diess für die Herleitung der Formeln, die anstatt der 6) und 7) auftreten, weiter keine Wirkung, als dass andere Integrationswege der Formel $\int \frac{f\,(z)}{z-a}\, dz = 2\,\pi\, i\, f\,(a)$ gewählt werden müssen. Darauf hier weiter einzugehen ist nicht der Ort.

Um ferner die Function S_1 von θ zu erhalten, die bei Entwickelung nach Kugelfunctionen die Unbekannte $x_p = f\,(p)$ zum Coëfficienten von P^p besitzt, braucht man nur die Dirichlet'sche Formel**) zu benutzen:

$$P^n\,(cos\,\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{cos\,\frac{1}{2}\,\varphi\; cos\,n\,\varphi}{\sqrt{2\,(cos\,\varphi - cos\,\theta)}}\, d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{sin\,\frac{1}{2}\,\varphi\; cos\,n\,\varphi}{\sqrt{2\,(cos\,\theta - cos\,\varphi)}}\, d\varphi$$

in der man, im Falle $n = 0$, die Hälfte der rechten Seite zu nehmen hat. Substituirt man den Werth von $P^n\,(cos\,\theta)$ in die Entwickelung von S_1, so erhält man:

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{cos\,\frac{1}{2}\,\varphi}{\sqrt{2\,(cos\,\varphi - cos\,\theta)}} \Big\{ \tfrac{1}{2} f(0) + f(1)\, cos\,\varphi + f(2)\, cos\,2\,\varphi + \cdots \\ + f(n)\, cos\,n\,\varphi + \cdots \Big\}\, d\varphi \\ + \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{sin\,\frac{1}{2}\,\varphi}{\sqrt{2\,(cos\,\theta - cos\,\varphi)}} \Big\{ \tfrac{1}{2} f(0) + f(1)\, cos\,\varphi + f(2)\, cos\,2\,\varphi + \cdots \\ + f(n)\, cos\,n\,\varphi + \cdots \Big\}\, d\varphi \end{aligned}$$

---

*) Man vergl. hierüber: Schlömilch, Développement de deux formules summatoires. Journal von Crelle Bd. 42, pag. 125 seqq.

**) Crelle, Journal f. Mathem. Bd. XVII. p. 41.

Diese Gleichung vereinfacht sich aber bei Anwendung der Formel 6) in:

$$8)\ S_1 = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\varphi)y}+e^{-(\pi-\varphi)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}\,\frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy\right.$$

$$\left.+\int_\theta^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\varphi)y}+e^{-(\pi-\varphi)y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}\,\frac{f(-iy)-f(+iy)}{2i}\,dy\right\}$$

Die Formel 8) gilt natürlich unter denselben Voraussetzungen, über $x_p = x_{x+iy} = f(z)$, unter denen auch die Formel 6) galt, während die nach 6) über φ aufzustellende Bedingung, nämlich $\pi \geqq \varphi \geqq 0$, durch die Grenzen der zweiten Integration von selbst erfüllt ist.

Da nach der Gleichung 1) der Werth irgend einer Unbekannten x_p zunächst immer in Form einer unendlichen Reihe erscheint, so versteht es sich von selbst, dass nur solche Werthe von x_p wirklich brauchbar sind, für welche

$$R = \frac{1}{f_p(p)}(-1)^m\, {}_pA_{p+m}\,(\varphi_{p+m}) - (-1)^m\, {}_pA_{p+m+1}\,(\varphi_{p+m+1}) \mp \cdots$$

bei hinreichend grossem m kleiner wird als jede noch so kleine Grösse δ. Dieser Umstand bildet auch das allgemeine Kriterium darüber, ob das vorgelegte System Gleichungen überhaupt zulässige Lösungen besitze. Die speciellen Regeln darüber können ohne Weiteres aus der Theorie über die Convergenz unendlicher Reihen übertragen werden.

§ 4.

Beispiel.

Gesetzt es sei zur Auflösung vorgelegt das System Gleichungen

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\ \sum_0^\infty{}^p\ \alpha_p^m\ x_p = t^m\ \right|$$

so ist, verglichen mit der zu Grunde gelegten allgemeinen Form eines solchen Systemes Gleichungen:

$$f_0(m,p) = \alpha_p^m;\ \varphi_m = t^m$$

Man erhält dann zur Bestimmung der Functionen $f_n(q)$ und (φ_n) aus den Gleichungen 3) 4) und 5) von § 3:

$${}_1C_0 = 1; \qquad f_0(q) = 1;$$

$${}_2C_1 = 1;\ {}_2C_0 = 1; \qquad f_1(q) = \alpha_q - \alpha_0$$

$$f_2(q) = (\alpha_q - \alpha_0)(\alpha_q - \alpha_1)$$

$${}_3C_2 = 1;\ {}_3C_1 = \frac{\alpha_2-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}$$

$${}_3C_0 = \frac{\alpha_2-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0} \qquad f_3(q) = (\alpha_q-\alpha_0)(\alpha_q-\alpha_1)\,\alpha_q-\alpha_2)$$

. . . .

$$ {}_4C_3 = 1;\ {}_4C_2 = \frac{(\alpha_3-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)} $$

$$ {}_4C_1 = \frac{(\alpha_3-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_0)} - \frac{\alpha_3-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0} \quad f_4(q) = (\alpha_q-\alpha_0)(\alpha_q-\alpha_1)(\alpha_q-\alpha_2)(\alpha_q-\alpha_3) $$

$$ {}_4C_0 = \frac{(\alpha_3-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_0)} - \frac{\alpha_3-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0} - \frac{(\alpha_3-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_0)} + 1; $$

. . . .

$$ (\varphi_0) = 1 $$
$$ (\varphi_1) = t - \alpha_0 $$
$$ (\varphi_2) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1) $$
$$ (\varphi_3) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) $$
$$ (\varphi_4) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3) $$

. . . .

Man erkennt hieraus bereits, dass $f_n(q)$ und (φ_n) die Form haben müssen:

$$ f_n(q) = (\alpha_q-\alpha_0)(\alpha_q-\alpha_1)(\alpha_q-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_q-\alpha_{n-1}) $$
$$ (\varphi_n) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots\cdots(t-\alpha_{n-1}) $$

Resultate, deren Richtigkeit man noch durch die nicht schwierige aber umständliche Rechnung des Schlusses vom $n$ten Gliede auf das $(n+1)$te Glied nachweisen kann.

Die Determinante des gegebenen Systemes Gleichungen ist nun

$$ \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f_n(n) = (\alpha_n-\alpha_0)(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1}) $$

Soll daher das gegebene System Gleichungen wirklich so bestehen können, dass seine einzelnen Gleichungen unabhängig von einander sind, so darf die Determinante nicht verschwinden oder es müssen die einzelnen α durchgängig von einander verschiedene Werthe besitzen.

Setzt man die für $f_n(q)$ erlangten Werthe ein in die Gleichungen 2) § 3, so entsteht:

$$ {}_pA_p = 1 $$

$$ {}_pA_{p+1} = \frac{1}{\alpha_{p+1}-\alpha_p} $$

$$ {}_pA_{p+2} = \frac{1}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)(\alpha_{p+2}-\alpha_p)} $$

$$ {}_pA_{p+3} = \frac{1}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)(\alpha_{p+2}-\alpha_p)(\alpha_{p+3}-\alpha_p)} $$

. . . .

$$ {}_pA_{p+m} = \frac{1}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)(\alpha_{p+2}-\alpha_p)(\alpha_{p+3}-\alpha_p)\cdots\cdots(\alpha_{p+m}-\alpha_p)} $$

und die Gleichung 1) § 3 ergiebt jetzt:

$$x_p = \frac{(t-\alpha_0)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3)\cdots\cdots(t-\alpha_{p-1})}{(\alpha_p-\alpha_0)(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)(\alpha_p-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_p-\alpha_{p+1})}\Big\{1-\frac{t-\alpha_p}{\alpha_{p+1}-\alpha_p}$$

$$+\frac{(t-\alpha_p)(t-\alpha_{p+1})}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)(\alpha_{p+2}-\alpha_p)}-\frac{(t-\alpha_p)(t-\alpha_{p+1})(t-\alpha_{p+2})}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)(\alpha_{p+2}-\alpha_p)(\alpha_{p+3}-\alpha_p)}\pm\cdots\cdots\Big\}$$

Oder, wie man leicht findet:

$$x_p = \frac{(t-\alpha_0)(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots\cdots(t-\alpha_{p-1})(t-\alpha_{p+1})(t-\alpha_{p+2})\cdots\cdots}{(\alpha_p-\alpha_0)(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_p-\alpha_{p-1})(\alpha_p-\alpha_{p+1})(\alpha_p-\alpha_{p+2})\cdots\cdots}$$

Durch diesen Werth von x_p ist das gegebene System Gleichungen vollständig aufgelöst, da man für p jede der ganzen Zahlen von 0 bis ∞ setzen kann*).

Ob der gefundene Werth von x_p überhaupt brauchbar sei, hängt davon ab, ob das unendliche Product, das den Werth von x_p stellt, einen endlichen Werth besitzt oder nicht, gleichgültig, welche positive ganze Zahl p sei.

---

*) Vergl. Lagrange, Mém. de Berlin 1775 p. 185. Cauchy, J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 73.

II.

Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt.

Von

Dr. LUDWIG BOLTZMANN.

(Mit 1 Tafel.)

Ampère gründete sein Gesetz für die Wechselwirkung zweier Elemente eines elektrischen Stromes auf qualitative Versuche. Seitdem fand dieses Gesetz durch die schönen quantitativen Versuche Weber's eine ausgedehnte Bestätigung.

Allein Weber operirte blos mit sogenannten Solenoiden, prüfte also blos die Wirkung fester geschlossener Ströme auf andere feste geschlossene Ströme (wenigstens solcher, welche für das Experiment als in sich geschlossen angesehen werden konnten). Es erschien mir daher nicht ohne Interesse zu sein, die Wechselwirkung der Theile eines Stromes auch in Fällen quantitativ zu bestimmen, wo nicht jeder der festen Theile für sich bereits als ein geschlossener Strom angesehen werden kann. In diesen Fällen ist der quantitativen Bestimmung namentlich die grosse Zähigkeit des Quecksilbers hinderlich, das man als Verbindungsmittel der beweglichen Stromtheile nicht entbehren kann. Ich untersuchte, um diesen Uebelstand möglichst zu vermeiden, einen Strom von unveränderlicher Länge, aber veränderlicher Gestalt, so dass also Gleitstellen gänzlich vermieden wurden und sich die beweglichen Stücke an den Verbindungsstellen blos im Quecksilber zu drehen brauchten. Die Reibung in demselben war auf diese Art freilich nicht ganz vermieden, aber sie erschien doch auf ein Minimum reducirt.

1. Beschreibung des Apparates.

Der Apparat, den ich zu diesem Zwecke anwandte, ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Die beiden Linien *GEA* und *HFD* sind Kupferdrähte, die auf einer passenden hölzernen Unterlage festgemacht sind. Die Enden

G und H derselben werden mit den Polen einer Batterie verbunden. Die Stücke GE und HF laufen parallel und befinden sich in möglichst geringer Entfernung. Die Stücke EA und FD dagegen sind so gebogen, dass sie in eine und dieselbe horizontale Linie AD fallen.

Dieselben sind an den Enden A und D etwas nach abwärts gebogen und tragen daselbst je ein kleines Kupferschälchen. AB und CD sind ebenfalls zwei an den Enden etwas nach abwärts gebogene Kupferdrähte. Die Enden B und C derselben tragen zwei Kupferschälchen von derselben Beschaffenheit, wie die der früher betrachteten Drähte. Die Enden A und D dagegen sind mit einer feinen Stahlspitze versehen, welche in den Schälchen A und D aufruht.

Um die Reibung der Stahlspitze zu vermindern ist jedes der Kupferschälchen in der Mitte durchbohrt und in dasselbe ein Granathütchen, wie man dieselben bei Bussolen verwendet, eingelegt. Fig. 2 giebt einen Querschnitt des Schälchens bei D sammt der darin ruhenden Spitze. Die Kupferdrähte AB und CD sind an zwei hölzernen Stäben IK und LM befestigt, welche bei K und M mit passenden Gegengewichten versehen sind, so dass sie bei horizontaler Lage von AB und CD auf den Spitzen A und D balanciren. BC ist ebenfalls ein an seinen Enden mit Stahlspitzen versehener Kupferdraht, welcher genau in derselben Höhe in den Schälchen B und C balancirt; er trägt bei N etwas tiefer ein Gegengewicht.

Um die Reibung zu vermindern, sind an den Holzstäben IK und LM bei A und D Coconfäden befestigt, welche über eine Rolle laufen und an dem andern Ende so gewählte Gewichte tragen, dass auf die Spitzen A und D nur ein ganz kleiner Druck nach abwärts übrig bleibt. Die Länge der Linien AB, BC, CD und DA beträgt 338½ Mm., die Dicke der Drähte etwa 2 Mm. Die Schälchen wurden nun so weit mit Quecksilber gefüllt, dass der Strom direct vom Schälchen in die Kupferdrähte übergehen konnte und die Stahlspitzen nicht zu durchlaufen brauchte, weil dieselben sonst durch die starken angewandten Ströme gelitten hätten. Werden nun die Drahtenden G und H mit den Polen einer Batterie in Verbindung gesetzt, so durchfliesst der Strom die Kupferdrähte in der durch die Pfeile angegebenen Richtung. Man sieht, dass die vom Strome durchflossene Figur ein Rhombus ist, in welchem bloss die Winkel der Seiten variabel sind. Umfliesst der Strom den Rhombus von West über Nord nach Ost, so sucht sowohl die Einwirkung des Erdmagnetismus als auch die Wirkung des Stromes den Rhombus in ein Quadrat zu verwandeln. Hat dagegen der Strom die entgegengesetzte Richtung, so kehrt sich die Einwirkung des Erdmagnetismus um, während die des Stromes auf sich selbst unverändert bleibt. In diesem Falle ist das Quadrat eine labile Gleichgewichtslage und die stabile tritt bei irgend einem andern Winkel ein. Derselbe wächst mit zunehmender Stromstärke, bis er endlich bei sehr grosser Stromstärke gleich einem rechten wird, wo dann die labile Gleichgewichtslage aufhört, was durch die späteren Rechnungen begründet werden soll.

Alle diese Erscheinungen zeigen sich bei der grossen Beweglichkeit des Apparates schon recht auffällig bei Anwendung von 6 Smee'schen Elementen, und dürfte sich daher der Apparat bei seiner leichten Herstellbarkeit auch als elektrodynamischer Vorlesungsapparat gut eignen, wobei vielleicht noch die Granathütchen und Aequilibrirung durch die Rollen weggelassen werden könnte. Zum Zwecke der Messung war natürlich eine Kraft nöthig, welche den Rhombus in eine bestimmte Lage zu bringen suchte. Es wurde zu diesem Zwecke an den Holzstab LM auch im Punkte S in der Entfernung von 98½ Mm. von D ein Coconfaden und vertical unter demselben ein Gewicht von 10 Grammen befestigt.

Das andere Ende des Coconfadens wurde an einem horizontalen Stabe festgemacht, der um eine verticale Axe drehbar war. Die Axe wurde ausserdem noch mittelst eines Senkels vertical über die tiefste Stelle des Schälchens D gestellt. Das Gewicht sucht dann immer vertical unter dem oberen Befestigungspunkt des Coconfadens zu stehen und hält daher den Rhombus in einer bestimmten Lage mit einer bestimmten Kraft fest, welche Lage jedoch durch Drehung des Stabes, an dem der Coconfaden festgemacht war, beliebig variirt werden konnte.

Es ist natürlich, dass dann der Winkel des Rhombus durch die elektrodynamischen Kräfte nur unbedeutend verändert wurde. Um diese Winkelveränderungen mit Genauigkeit messen zu können, war am Holzstabe LM im Punkte D ein kleiner Spiegel angebracht, auf den mittelst eines Fernrohres visirt wurde. Der Spiegel war ausserdem noch um eine verticale Axe gegen den Holzstab drehbar. Der ganze Apparat befand sich, um gegen den Luftzug möglichst geschützt zu sein, in einem allseitig verschlossenen Kasten, der nur für den Spiegel ein mit einer planparallelen Glasplatte verschlossenes Loch hatte. Ich bemerke noch, dass der Draht AD direct mittelst einer Libelle, die übrigen Drähte aber durch Verschiebung der Gegengewichte auf den Holzstäben unter Vergleichung mit nahe anliegenden, mittelst Libelle horizontal gestellten Stäben horizontal gemacht wurden.

2. Theorie der auf den Rhombus wirkenden Kräfte.

Ich will nun zur Berechnung der an diesem Apparate zu beobachtenden Erscheinungen übergehen.

Ich will zu diesem Zwecke die Länge einer Seite des Rhombus $AB = l$ etzen (vergl. Fig. 3); ich nehme an, dass auf ein Längendifferential ds_1 der Seite AB, das sich in der Entfernung s_1 vom Punkte A befindet, in Folge der elektrodynamischen Kräfte die Gesammtkraft $R_1\, ds_1$, auf ein Längendifferential ds_2 der Seite BC die Gesammtkraft $R_2 ds_2$ und auf ein Längendifferential ds_3 der Seite CD in der Entfernung s_3 von D die Gesammtkraft

$R_3 ds_3'$ ausgeübt werde. Ausserdem wirkt noch auf den Punkt S die horizontale Componente Q des Zuges des daselbst angehängten Gewichtes in einer Richtung senkrecht auf CD. Der Winkel der beiden Geraden AB und AD soll α heissen. Vergrössern wir denselben um $\delta\alpha$, so soll das Element ds_1 die virtuelle Verschiebung δp_1, das Element ds_2 die Verschiebung δp_2, das Element ds_3 die Verschiebung δp_3, endlich der Punkt S die Verschiebung δq erleiden. War der Winkel α eine Gleichgewichtslage, so muss die Gleichung bestehen:

$$\int_0^l P_1 ds_1 \delta p_1 + \int_0^l P_2 ds_2 \delta p_2 + \int_0^l P_3 ds_3 \delta p_3 + Q\delta q = 0,$$

worin mit P_1, P_2 und P_3 die Componenten der Kräfte R_1, R_2 und R_3 in der Richtung der virtuellen Verschiebungen δp_1, δp_2 und δp_3, also in einer Richtung senkrecht auf AB oder CD bezeichnet wurden. Dieselben, sowie die Kraft Q sollen positiv gezählt werden, wenn sie die durch den Pfeil YZ Fig. 3 dargestellte Richtung, negativ, wenn sie die entgegengesetzte Richtung haben.

Setzt man in diese Gleichung die Werthe:

$$\delta p_1 = s_1 \delta\alpha,\ \delta p_2 = l\delta\alpha,\ \delta p_3 = s_3\delta\alpha,\ \delta q = m\delta\alpha$$

ein, wobei m die Länge des Stückes DS ist und dividirt durch $\delta\alpha$ weg, so ergiebt sich:

$$1)\qquad \int_0^l P_1 s_1 ds_1 + l\int_0^l P_2 ds_2 + \int_0^l P_3 s_3 ds_3 + Qm = 0.$$

Die Kräfte $P_1 ds_1$, $P_2 ds_2$ und $P_3 ds_3$ bestehen aus 2 Theilen: der Componente der Einwirkung des Erdmagnetismus $A_1 ds_1$, $A_2 ds_2$ und $A_3 ds_3$ in der Richtung YZ, und der Componente der Wirkung des Stromes auf das betreffende Stromelement in derselben Richtung.

Vom Erdmagnetismus wirkt auf ein horizontales Stromelement ds in horizontaler Richtung bloss die Verticalcomponente, und zwar mit der Intensität $\frac{Vids}{\sqrt{2}}$ gegen die Linke einer mit dem Gesichte nach abwärts im Strom schwimmenden Figur. In dieser Formel bedeutet V die Intensität der Verticalcomponente, i die Stromintensität, gemessen in elektrodynamischem Maasse. Diese Wirkung fällt, wenn der Strom von der Intensität i den Rhombus in der Richtung von West über Nord nach Ost durchfliesst, für die Seite AB mit der Richtung YZ zusammen. Man hat daher:

$$A_1 ds_1 = \frac{Vi}{\sqrt{2}} ds_1,$$

Für die Seite CD ist sie der Richtung YZ entgegengesetzt, daher

$$A_3 ds_3 = -\frac{Vi}{\sqrt{2}} ds_3.$$

Für die Seite BC schliesst sie mit YZ den Winkel α ein; es wird also:

$$A_2 ds_2 = \frac{Vi}{\sqrt{2}} \cos\alpha \, ds_2.$$

Die Glieder, welche der Erdmagnetismus in die Gleichung 1) liefert, sind daher:

$$2)\quad \frac{Vi}{\sqrt{2}} \int_0^l s_1 ds_1 + \frac{Vil \cos\alpha}{\sqrt{2}} \int_0^l ds_2 - \frac{Vi}{\sqrt{2}} \int_0^l s_3\, ds_3 = \frac{Vil^2 \cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Um die Wirkung des Stromes auf sich selbst zu rechnen, will ich den Draht AB mit I, den Draht BC mit II, den Draht CD mit III und den Draht AD mit IV bezeichnen und die Glieder gesondert betrachten, welche die Wirkung eines jeden dieser Drähte auf jeden anderen liefert. Es seien zunächst in Fig. 4 LM und MN zwei im Punkte M zusammenstossende Drähte, welche von einem Strome in der durch die Pfeile angezeigten Richtung durchflossen werden und mit einander den Winkel β bilden. Die Abstossung der Elemente ds und ds' in den Entfernungen s und s' von M ist nach dem Ampère'schen Gesetze

$$p = \frac{i^2\, ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\beta + \tfrac{3}{2} \cos\theta \cos\theta' \right);$$

darin ist:

$$r^2 = s^2 + s'^2 - 2ss' \cos\beta$$

$$\cos\theta = \frac{s' \cos\beta - s}{r} \quad \cos\theta' = \frac{s \cos\beta - s'}{r};$$

es ist daher:

$$p = \frac{i^2\, ds\, ds'}{2r^4}\left(-s^2 \cos\beta - s'^2 \cos\beta + 3ss' - ss' \cos^2\beta \right).$$

Für die Wirkung des Drahtes IV auf I ist $\beta = \alpha$ zu setzen; die Componente dieser Wirkung in der Richtung YZ wird durch Multiplication mit $\frac{s \sin\alpha}{r}$ gefunden und geht in die Formel 1) mit s' multiplicirt ein. Die Wirkung des Drahtes IV auf I liefert daher in die genannte Formel:

$$B_{41} = \frac{i^2 \sin\alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{ss'(-s^2\cos\alpha - s'^2 \cos\alpha + 3ss' - ss' \cos^2\alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Für die Wirkung des Drahtes II auf I ist $\beta = 180 - \alpha$ zu setzen, s und s' sind jetzt die Distanzen der Stromelemente vom Punkt B. Dieselbe wird daher gleich:

$$\frac{i^2\, ds\, ds'\, (s^2 \cos\alpha + s'^2 \cos\alpha + 3ss' - ss' \cos^2\alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2ss' \cos\alpha)^2}$$

Ihre Componente in der Richtung YZ wird wieder durch Multiplication mit $\frac{s \sin \alpha}{r}$ gefunden. Multiplicirt man zudem noch mit dem Abstand des Elementes ds' von A also mit $l - s'$ und integrirt, so erhält man für den Ausdruck, welchen die Wirkung des Drahtes II auf I in die Gleichung 1) liefert

$$B_{21} = \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(l - s')\, s\, (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Wirkung des Drahtes II auf III ist gerade so gross, wie die von IV auf I, aber sie ist entgegengesetzt gerichtet und mit $l - s'$ statt s' zu multipliciren; sie liefert daher:

$$B_{23} = \frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(l - s')\, s\, (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha - 3ss' + ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Wirkung des Drahtes IV auf III ist gleich und entgegengesetzt gerichtet der Wirkung von II auf I und mit s' statt $l - s'$ zu multipliciren; liefert daher

$$B_{43} = -\frac{i^2 \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{ss' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Componenten der auf die Bogen-Differentiale des Drahtes II wirksamen Kräfte gehen in die Formel 1) mit l multiplicirt ein. Sie sind gleich und entgegengesetzt bezeichnet mit den Componenten der Wirkung des Drahtes II auf die übrigen Drähte. Es liefert daher die Wirkung des Drahtes I auf II:

$$B_{12} = -\frac{i^2 l \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

und die Wirkung von III auf II:

$$B_{32} = \frac{i^2 l \sin \alpha}{2} \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{s' (-s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Summe aller dieser Ausdrücke ist:

$$B_{41} + B_{21} + B_{23} + B_{43} + B_{12} + B_{32} =$$

$$= i^2 \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{ss' (- s^2 \cos \alpha - s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- i^2 \sin \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{ss' (s^2 \cos \alpha + s'^2 \cos \alpha + 3 ss' - ss' \cos^2 \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2 ss' \cos \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Es sind noch die Glieder zu bestimmen, welche die Wirkung je zweier unter einander paralleler Drähte liefert. Seien in Fig. 5 ds und ds' zwei Elemente der Drähte I und III in der Entfernung s und s' von dem Punkt A und D, so ist nach dem Ampère'schen Gesetze ihre Abstossung:

$$q = \frac{i^2\, ds\, ds'}{r^2} \left(1 + \tfrac{3}{2} \cos\theta \cos\theta'\right),$$

wobei

$$\cos\theta = -\cos\theta' = \frac{l \cos\alpha + s' - s}{r}$$

$$r^2 = l^2 + (s' - s)^2 + 2\, l \cos\alpha\, (s' - s).$$

Nach Einsetzung dieser Werthe erhält man:

$$q = \frac{i^2\, ds\, ds'}{r^4}\left[r^2 - \tfrac{3}{2}(l \cos\alpha + s' - s)^2\right]$$

Die Componenten der Wirkung des Elementes ds' auf ds in der Richtung YZ ergiebt sich durch Multiplication dieses Ausdruckes mit $\sin\theta = \frac{l \sin\alpha}{r}$, die der Wirkung des Elementes ds auf ds' durch Multiplication mit $-\frac{l \sin\alpha}{r}$; erstere geht mit s, letztere mit s' multiplicirt in die Gleichung 1) ein; es liefert daher die Wirkung des Drahtes III auf den Draht I in die genannte Formel:

$$B_{31} = i^2\, l \sin\alpha \int_0^l s\, ds \int_0^l ds' \frac{r^2 - \frac{3}{2}(l \cos\alpha + s' - s)^2}{r^5}$$

und die Wirkung des Drahtes I auf III liefert:

$$B_{13} = i^2\, l \sin\alpha \int_0^l ds \int_0^l s'\, ds' \frac{-r^2 + \frac{3}{2}(l \cos\alpha + s' - s)^2}{r^5}$$

Die Abstossung eines Elementes ds des Drahtes IV auf ein Element ds' des Drahtes II ist durch dieselbe Formel

$$q = \frac{i^2\, ds\, ds'}{r^2}\left[r^2 - \tfrac{3}{2}(l \cos\alpha + s' - s)^2\right]$$

gegeben, in der jetzt s den Abstand des Elementes ds von A, s' den des Elementes ds' von B bedeutet. (Fig. 6.)

Von dieser Kraft ist die Componente in der Richtung YZ, also senkrecht auf AB zu nehmen. Bezeichnet θ den Winkel der Verbindungslinie r der Elemente ds und ds' mit AD, so ist diese Componente

$$-q \sin(\alpha - \theta) = -\frac{q \sin\alpha\, (s' - s)}{r}, \quad \text{wegen } \cos\theta = \frac{l \cos\alpha + s' - s}{r}$$

$sin\ \theta = \frac{l\ sin\ \alpha}{r}$. Dieselbe ist noch mit l zu multipliciren und zu integriren und liefert daher in die Gleichung 1):

$$B_{4\,2} = i^2\ l\ sin\ \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' (s' - s) \frac{\frac{3}{2}(l\ cos\ \alpha + s' - s)^2 - r^2}{r^5}$$

Die Summe aller Glieder, welche die Wirkung zweier paralleler Drähte in die Gleichung 1) liefert, ist daher:

$$B_{3\,1} + B_{1\,3} + B_{4\,2}$$

$$= i^2\ l\ sin\ \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' (s' - s) \frac{3\ (l\ cos\ \alpha + s' - s)^2\ 2\ r^2}{r^5}$$

$$= i^2\ l\ sin\ \alpha \int_0^l ds \int_0^l ds' \frac{(s' - s)\ [(l\ cos\ \alpha + s' - s)^2 - 2\ l^2\ sin^2\ \alpha]}{[(l\ cos\ \alpha + s' - s)^2 + l^2\ sin^2\ \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Integration liefert:

$$\int\int ds\ ds' \frac{ss'\ (-s^2\ cos\ \alpha - s'^2\ cos\ \alpha + 3\ ss' - ss'\ cos^2\ \alpha)}{(s^2 + s'^2 - 2\ ss'\ cos\ \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{-s^2\ cos\ \alpha - s'^2\ cos\ \alpha + ss'\ (1 + cos^2\ \alpha)}{sin^2\ \alpha \sqrt{s^2 + s'^2 - 2\ ss'\ cos\ \alpha}}$$

daher, indem man das Zeichen von $cos\ \alpha$ verwechselt:

$$\int\int ds\ ds' \frac{ss'\ (s^2\ cos\ \alpha + s'^2\ cos\ \alpha + 3\ ss' - ss'\ cos^2\ \alpha)}{(s^2 + s'^2 + 2\ ss'\ cos\ \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{s^2\ cos\ \alpha + s'^2\ cos\ \alpha + ss'\ (1 + cos^2\ \alpha)}{sin^2\ \alpha \sqrt{s^2 + s'^2 + 2\ ss'\ cos\ \alpha}}$$

Die Einsetzung der Grenzen Null und l, sowie Multiplication mit $i^2 sin\,\alpha$ liefert:

$$B_{4\,1} + B_{2\,1} + B_{2\,3} + B_{4\,3} + B_{1\,2} + B_{3\,2}$$

3) $$= i^2\ l\ sin\ \alpha \left(\frac{4\ cos\ \alpha}{sin^2\ \alpha} + \frac{sin\ \frac{\alpha}{2}}{2\ cos^2\ \frac{\alpha}{2}} - \frac{cos\ \frac{\alpha}{2}}{2\ sin^2\ \frac{\alpha}{2}} \right)$$

Ferner findet man:

$$\int\int ds\ ds' \frac{[(l\ cos\ \alpha + s' - s)^2 - 2\ l^2\ sin^2\ \alpha]\ (s' - s)}{[(l\ cos\ \alpha + s' - s)^2 + l^2\ sin^2\ \alpha]^{\frac{5}{2}}}$$

$$= log\ (l\ cos\ \alpha + s' - s + \sqrt{l^2 + (s' - s)^2 + 2\ l\ cos\ \alpha\ (s' - s)}$$

$$- \frac{l\ cos\ \alpha + s' - s}{\sqrt{l^2 + (s' - s)^2 + 2\ l\ cos\ \alpha\ (s' - s)}} \left(1 + \frac{(l\ cos\ \alpha + s' - s)\ cos\ \alpha}{l\ sin^2\ \alpha} \right)$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die Grenzen Null und l und multiplicirt schliesslich mit $i^2\ sin\ \alpha$, so erhält man:

4) $B_{31} + B_{13} + B_{12}$

$$= i^2\, l \sin\alpha \left[\log \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\,(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\,(1 + \cos\frac{\alpha}{2})} - \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Fasst man nun die unter 2) gegebenen vom Erdmagnetismus stammenden, ferner die unter 3) gegebenen von der Einwirkung der gegeneinander geneigten Drähte herrührenden, und endlich die unter 4) angeführten von der Wirkung der parallelen Drähte herstammenden Glieder zusammen, so verwandelt die Gleichung 2) in folgende:

$$\frac{Vil^2 \cos\alpha}{\sqrt{2}} + i^2 l \left[2 \cot\alpha + \sin\alpha \log \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\,(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\,(1 + \cos\frac{\alpha}{2})} \right] + Q\, m = 0.$$

Da die Veränderungen der Gestalt des Rhombus durch den Strom nur geringe, die Länge der Coconfäden aber eine ziemlich bedeutende war, so kann das von der Schwere herrührende Moment Qm proportional der durch den Strom hervorgerufenen Veränderung des Winkels α gesetzt werden. Nehmen wir daher an, dieser Winkel habe, bevor der Strom durchging, den Werth α_0 gehabt und sei durch die Einwirkung des Stroms um $\triangle\,\alpha = \alpha - \alpha_0$ gewachsen, so kann $Qm = -\, n \triangle\,\alpha$ gesetzt werden.

Das negative Zeichen ist zu wählen, weil durch ein Wachsen des Winkels α eine Kraft erweckt wird, welche denselben zu verkleinern strebt, also der Richtung YZ entgegenwirkt. Setzt man noch:

$$\frac{Vl^2}{\sqrt{2}\, n} = a\,, \quad \frac{2\,l}{n} = b,$$

was für alle Versuche constante Zahlen sind, so ergiebt sich die Formel:

$$5) \qquad \triangle\,\alpha = ai \cos\alpha + bi^2 \left[\cot\alpha + \frac{\sin\alpha}{2} \log \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\,(1 + \sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\,(1 + \cos\frac{\alpha}{2})} \right].$$

3. Vergleichung der gefundenen Formel mit der Erfahrung.

Um die gefundene Formel experimentell zu prüfen, wurden dem Winkel α_0 des Rhombus, wenn kein Strom durch denselben ging, 4 verschiedene Werthe ertheilt. Für jeden dieser Werthe wurde bei 3, für einen bei 4 verschiedenen Stromstärken die Veränderung des Winkels $\triangle\alpha$ mittelst der Spiegelablesung bestimmt, sowohl wenn der Strom von West über Nord nach Ost, als auch wenn er in der entgegengesetzten Richtung ging. Als Stromquelle dienten 1 bis 8 passend verbundene Grove'sche Elemente.

Es zeigte sich bald, dass der Strom innerhalb der Dauer eines Versuches keineswegs als constant betrachtet werden konnte. Ich schaltete deshalb ausser dem Rhombus noch ein in ziemlicher Entfernung befindliches Weber'sches Galvanometer in den Stromkreis ein, dessen Magnet jedoch nicht durch die dazu gehörigen Drahtrollen, die einen zu grossen Widerstand gehabt hätten, sondern durch einen dicken, vom Strom durchflossenen Messingring abgelenkt wurde.

An demselben wurde jedesmal gleichzeitig mittelst eines andern Fernrohres die Stromstärke abgelesen. Die Genauigkeit, mit der die elektrodynamischen Kräfte am Rhombus gemessen werden konnten, steht freilich weit hinter der Genauigkeit zurück, welche bloss an Coconfäden aufgehängte Magnete gewähren (wohl hauptsächlich wegen der Zähigkeit des angewendeten Quecksilbers). Namentlich war zu beachten, dass man die Schwingungen des Rhombus nicht durch passendes Oeffnen und Schliessen des Stromes rasch zur Ruhe bringen durfte. In diesem Falle zeigte sich die Ruhelage immer um einige Theilstriche im Sinne des früheren Ausschlages verschoben. Es blieb wahrscheinlich im Quecksilber noch eine kleine Deformation im Sinne des früheren Ausschlages zurück. Denn von einem Steckenbleiben kann um so weniger die Rede sein, da die Beweglichkeit des Rhombus so gross war, dass die wirkliche Ruhe des Spiegels gar nicht abgewartet werden konnte, sondern sein Stand aus mehreren Ausschlägen berechnet werden musste. Wenn man dagegen die Schwingungen, statt sie zu dämpfen, jedesmal noch etwas verstärkte, so zeigte sich in den Ausschlägen sowie in der Ruhelage eine vollkommen befriedigende Constanz.

Letztere wurde zur Vorsicht nach jeder Ablenkung separat abgelesen und zum Schluss das Mittel als wahre Ruhelage angenommen.

Folgendes waren z. B. die successiven Ablesungen im Fernrohre, wenn kein Strom durch den Rhombus ging bei der ersten Beobachtungsreihe: 111½, 110½, 111, 113, 112, 111, 111½, 112½, 113, 111, 112, 112, 111, 111, 111½.

Die Bestimmung des Winkels α_0 des Rhombus in seiner Ruhelage geschah durch Messung der Distanz zweier Punkte mittelst des Stangenzirkels, welche auf den Drähten AB und AD in einer Distanz von 300 Mm. vom Punkte A markirt waren.

Damit hierbei die Schwingungen des Rhombus nicht hinderlich wären, wurde derselbe während dieser Messung jedesmal mittelst einer in den Weg gestellten gabelartigen Vorrichtung arretirt; dabei erlitt allerdings der Winkel α_0 eine kleine Veränderung, allein aus der Zahl, welche jetzt im Fernrohre mit dem Fadenkreuze zusammenfiel und derjenigen, welche die wahre Ruhelage bildete, konnte unmittelbar auch der Winkel für die wahre Ruhelage berechnet werden. In der folgenden Tabelle sind die Ablesungen an dem mit dem Rhombus verbundenen Spiegel, sowie die jedesmaligen Stromstärken in Scalentheilen für die 4 der Beobachtung unterzogenen Winkel zusammengestellt:

$\alpha_0 = 26^0 2'$		$\alpha_0 = 39^0 59'$		$\alpha_0 = 54^0 34'$		$\alpha_0 = 69^0 15'$	
Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke
—42	—134	—51	—124·5	—47½	—120·2	107	199·9
199	134·1	141	129	104	129·4	—34	—202·4
—42½	—133·8	—53	—130·5	—48	—132·8	110½	203·4
199	133·7	144	130·7	109	133·4	—33½	—204
—5½	—191·5	—49	—177·4	—48	—133·7	150	259·6
325½	194	220	178·7	109	133·7	—27½	—258·8
—4½	—194·8	—50	—180·2	—51½	—191·9	146	257·3
329	195·4	—48½	—180·8	171½	192·7	—29	—257
—5	—193	221½	180	—49	—192·7	234½	368
315	189·5	220	177·5	171	191	—1½	—370·3
10	—215·9	—16	—255·5	—36	—254·5	—2	—372
369	212·9	350	252·3	248	254	231	365·7
6	—210·4	—19	—251	—36	—252·8	231	364·9
356½	206	344	249·5	247	250·5	—4	—363
				384	355		
				10	—356·7		
				384	355·8		
				10	—352·9		

Die Ablenkungen in der Columne links sind positiv gezählt, wenn sich der Winkel α_0 vergrösserte, die Stromstärke ist positiv gezählt, wenn der Strom den Rhombus von West über Nord nach Ost durchfloss. Es erscheint zunächst wünschenswerth jede Gruppe von Beobachtungen, welche nahezu bei gleicher Stromstärke gemacht wurden, auf genau gleiche Stromstärke zu reduciren. Für jede Beobachtungsreihe ist das in Gleichung 5) auftretende α nur wenig von dem jedesmaligen α_0 verschieden. Setzt man daher letzteres für das erstere, so erhält man für den Ausschlag einen Ausdruck von der Form:

$$\triangle \alpha = Ai + Bi^2,$$

wobei

$$A = a \cos \alpha_0$$

6) $$B = b \cot \alpha_0 + b \frac{\sin \alpha_0}{2} \log \frac{\cos \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha_0}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha_0}{2}\right)}$$

ist. Wechselt der Strom seine Richtung, so ändert das erste Glied Ai das Zeichen, Bi^2 dagegen bleibt positiv; es wird also der neue Ausschlag, wenn man blos die Grösse, nicht das Zeichen von i berücksichtiget:

$$\triangle' \alpha = - Ai + Bi^2.$$

Wenn die Stromintensität um eine kleine Grösse δi ansteigt, so wächst der Ausschlag um:

7) $$A \delta i + 2 B i \delta i,$$

wobei jedoch wieder das Zeichen von i berücksichtigt werden muss. Indem man diese Grösse von dem bei der Stromintensität $i + \delta i$ abgelesenen Ausschlage abzieht, erhält man den Ausschlag, der durch die Stromintensität i hervorgerufen worden wäre. Dabei ist:

$$A = \frac{\Delta\, \alpha - \Delta'\, \alpha}{2i},\ B = \frac{\Delta\, \alpha - \Delta'\, \alpha}{2i^2}.$$

Wählt man für $\Delta\alpha$ und $\Delta'\alpha$ aus jeder Gruppe von Beobachtungen, die bei nahezu gleicher Stromintensität gemacht wurden, diejenigen aus, bei denen der Strom möglichst constant blieb, so erhält man für die 3 Gruppen der ersten Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 26^0\ 2'$.

$$A = 0{\cdot}899,\quad 0{\cdot}850,\quad 0{\cdot}852$$

$$A = 0{\cdot}00437,\ 0{\cdot}00426,\ 0{\cdot}00412;$$

ferner für die zweite Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 39^0 59'$.

$$A = 0{\cdot}754,\quad 0{\cdot}754,\quad 0{\cdot}732$$

$$B = 0{\cdot}00266,\ 0{\cdot}00264,\ 0{\cdot}00260$$

für $\alpha_0 = 54^0\ 34'$

$$A = 0{\cdot}586,\quad 0{\cdot}572,\quad 0{\cdot}559,\quad 0{\cdot}527$$

$$B = 0{\cdot}00170,\ 0{\cdot}00165,\ 0{\cdot}00164,\ 0{\cdot}00156$$

endlich für $\alpha_0 = 69^0\ 15'$

$$A = 0{\cdot}354,\quad 0{\cdot}340,\quad 0{\cdot}321$$

$$B = 0{\cdot}000929,\ 0{\cdot}000883,\ 0{\cdot}000860.$$

Diese Werthe können in die Formel 7) eingesetzt und so die verschiedenen Ablenkungen auf gleiche Stromstärke reducirt werden. Die folgende Tabelle giebt die reducirten Ablenkungen an; die Zahlen rechts sind die Stromstärken, auf welche die beobachteten Ablenkungen reducirt wurden.

Ein Blick auf die Werthe der Constanten A und B zeigt, dass dieselben mit wachsender Stromstärke abnehmen. Die Ursache hiervon liegt darin, dass wir in der Formel 5) α mit α_0 verwechselt haben, oder dass die elektrodynamische Kraft so berechnet wurde, als ob der Winkel des Rhombus nach der Deformation derjenige gewesen wäre, den derselbe annimmt, wenn kein Strom hindurchgeht, während er doch in der That um $\Delta\, \alpha$ grösser war. Es muss daher deswegen noch eine Correction an unsere Zahlen angebracht werden.

Wir können den Betrag dieser Correction berechnen, indem wir uns aus den gegenwärtigen Daten vorläufig angenährte Werthe der Constanten a und b in Formel 5) verschaffen und diese Werthe benutzen, um aus der Ablenkung für den Winkel $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ diejenige zu berechnen, welche durch dieselbe Stromstärke hervorgerufen worden wäre, wenn der ursprüngliche Winkel des Rhombus so gewählt worden wäre, dass er sich erst durch den Strom in α_0 verwandelt hätte.

$\alpha_0 = 26^0\ 2'$		$\alpha_0 = 39^0\ 59'$		$\alpha_0 = 54^0\ 34'$		$\alpha_0 = 69^0\ 15'$	
Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke
—42	134	—51·3	130	—49·2	133	107·3	203
198·8		142·4		107·7		—34	
—42·6		—53		—48		110·2	
199·6		143		108·6		—33·5	
—3·5	194	—48·5	180	—47·9		148·7	258
325·5		222·2		108·3		—27·6	
—5·1		—50		—51·5	192	146·6	
325·5		—48·7		170·7		—28·9	
—4·2		221·5		—49		236·4	370
326·2		224·2		172·2		—1·6	
7·4	213	—19·1	250	—36·1	254	—2·6	
369·2		345·3		248		235·1	
8·3		—19·6		—35·7		235·9	
374·7		345		251·9		—1.9	
				384	355		
				9			
				382·7			
				11·2			

Schreiben wir statt $cot\ \alpha + \frac{sin\ \alpha}{2}\ log\ \frac{cos\ \frac{\alpha}{2}\ (1 + sin\ \frac{\alpha}{2})}{sin\ \frac{\alpha}{2}\ (1 + cos\ \frac{\alpha}{2})}$ kurz $f(\alpha)$, so erhalten wir für den Ausschlag

$$\triangle\ \alpha = a\ i\ cos\ \alpha + b\ i^2\ f(\alpha).$$

Diese Grösse wächst, wenn der Winkel α um $\triangle\ \alpha$ zunimmt, um

8) $$\left[a i \frac{d\ (cos\ \alpha)}{d\ \alpha} + b\ i^2\ \frac{d\ f\ (\alpha)}{d\ \alpha}\right]\ \Delta\ \alpha.$$

Um daher die Ablenkung zu finden, die von demselben Strome hervorgebracht worden wäre, wenn der Winkel erst nach der Deformation α_0 gewesen wäre, haben wir diese Grösse von der Ablenkung, bei der der Winkel nach der Deformation $\alpha = \alpha_0 + \triangle\ \alpha$ war, abzuziehen.

Wenn $\triangle\ \alpha$ in Scalentheilen ausgedrückt ist, so bedeuten $\frac{d\ cos\ \alpha}{d\ \alpha}$ und $\frac{d\ f\ (\alpha)}{d\ \alpha}$ die Zuwächse von $cos\ \alpha$ und $f\ (\alpha)$ für einen Ausschlag von einem Scalentheile. Nun wächst aber, wenn α um einen Grad zunimmt:

	für $\alpha = 26^0\ 2'$	für $\alpha = 39^0\ 59'$
$cos\ \alpha$ um:	—0·00780,	—0·01133,
$f\ (\alpha)$ um:	—0·08684,	—0·04317,
	für $\alpha = 54^0\ 34'$	für $\alpha = 69^0\ 15'$
$cos\ \alpha$ um:	—0·01431,	—0·01637
$f\ (\alpha)$ um:	—0·02967,	—0·02433.

Es ist noch zu berechnen, um wie viel Grade sich der Winkel α bei einer Ablenkung von einem Theilstriche veränderte. Die Distanz des Spiegels von der Scala betrug 2318 Mm.

Die Scalentheile hatten eine Distanz von $\frac{495}{500}$ Mm., es war daher die Winkelveränderung des Rhombus bei einer Ablenkung von einem Scalentheile:

$$\frac{495 \cdot 180}{2 \cdot 500 \cdot 2318 \cdot \pi} = 0{\cdot}012235 \text{ Grade.}$$

Multiplicirt man mit dieser Zahl die Zuwächse von $\cos \alpha$ und $f(\alpha)$ für einen Grad, so erhält man als Zuwächse dieser Grössen für eine Ablenkung von einem Scalentheile:

$$\text{für } \alpha = 26^0\ 2' \quad \text{für } \alpha = 39^0\ 59'$$

$$\frac{d \cos \alpha}{d \alpha} = -\ 0{\cdot}00009541, \quad -\ 0{\cdot}0001386$$

$$\frac{d f(\alpha)}{d \alpha} = -\ 0{\cdot}001062, \quad -\ 0{\cdot}0005281,$$

$$\text{für } \alpha = 54^0\ 34' \quad \text{für } \alpha = 69^0\ 15'$$

$$\frac{d \cos \alpha}{d \alpha} = -\ 0{\cdot}0001751, \quad -\ 0{\cdot}0002003,$$

$$\frac{d f(\alpha)}{d \alpha} = -\ 0{\cdot}0003640, \quad -\ 0{\cdot}0002977.$$

Aus den Formeln 6) erhellt, dass wir a erhalten, indem wir A durch $\cos \alpha_0$, b, indem wir B durch $f(\alpha_0)$ dividiren. Es ergiebt sich z. B. aus der 1. Beobachtungsgruppe $a = 1{\cdot}0005$, $b = 0{\cdot}00193$. Diese Werthe sind wahrscheinlich etwas zu klein; ich will statt ihrer zum Zwecke der Correction in die Formel 8) die Werthe $a = 1{\cdot}045$, $b = 0{\cdot}00206$ einsetzen; die corrigirten Ablenkungen werden dann genauere Werthe der Constanten a und b liefern, und dieselben können dann neuerdings in die Correctionsformel eingesetzt werden. Würde sich zeigen, dass wir zufällig die genauen Werthe der Constanten a und b getroffen hätten, so wären wir natürlich dieser neuen Mühe überhoben. Wir kommen daher zu dem Resultate, dass man zu jeder Ablenkung die Grösse der Ablenkung in Scalentheilen multiplicirt mit folgenden Factoren zu addiren hat:

$$\text{für } \alpha = 26^0\ 2' \text{ mit } 0{\cdot}0000997\ i + 0{\cdot}000002181\ i^2$$
$$\text{für } \alpha = 39^0\ 59' \text{ mit } 0{\cdot}0001448\ i + 0{\cdot}000001085\ i^2$$
$$\text{für } \alpha = 54^0\ 34' \text{ mit } 0{\cdot}0001830\ i + 0{\cdot}000000748\ i^2$$
$$\text{für } \alpha = 69^0\ 15' \text{ mit } 0{\cdot}0002093\ i + 0{\cdot}000000611\ i^2$$

Führt man diese Correction aus, so erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe:

$\alpha_0 = 26^0\ 2'$		$\alpha_0 = 39^0\ 59'$		$\alpha_0 = 54^0\ 34'$		$\alpha_0 = 69^0\ 15'$	
Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke	Ablenkung	Stromstärke
—43		—51·3		—48·7		114·4	
209·2	134	147·6	130	111·5		—33·4	203
—43·6		—53		—47·5	133	117·6	
210		148·3		112·6		—32·9	
—3·8		—48·9		—47·4		162·9	
358·4		235·6		112·3		—27·2	258
—5·4	194	—50·5	180	—51·1		160·3	
358·7		—49·2		181·4	192	—28·5	
—4·5		235		—48·7		274·1	
358		237·7		182·8		—1·6	
6·6		—19·6		—36·2		—2·6	370
413·6	213	381·7	250	271·3	254	272·3	
7·8		—20·2		—35·8		273·1	
417·4		380·8		275·1		—1·9	
				444·9			
				8·7	355		
				443·6			
				10·9			

Diese Ablenkungen sind nunmehr auf denselben Winkel α_0 reducirt; man erhält daher, wenn man je zwei Ablenkungen bei entgegengesetzter Stromstärke subtrahirt und durch $2i$ dividirt, die Grösse $a \cos \alpha_0$; wenn man sie addirt und durch $2i^2$ dividirt, die Grösse $bf(\alpha_0)$. Nimmt man jedesmal von allen bei gleicher Stromstärke und Stromesrichtung gemachten Beobachtungen das Mittel, so ergiebt sich auf diese Weise für die erste Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 26^0\ 2'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0{\cdot}9444, \quad 0{\cdot}9356, \quad 0{\cdot}9585$$
$$b\,f(\alpha_0) = 0{\cdot}0046363,\ 0{\cdot}0047003,\ 0{\cdot}0046585,$$

ferner für die zweite Beobachtungsreihe, also für $\alpha_0 = 39^0\ 59'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0{\cdot}7696, \quad 0{,}7933, \quad 0{\cdot}8020$$
$$b\,f(\alpha_0) = 0{\cdot}0028373,\ 0{\cdot}0028796,\ 0{\cdot}0028896;$$

für $\alpha_0 = 54^0\ 34'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0{\cdot}6015, \quad 0{\cdot}6042, \quad 0{\cdot}6087, \quad 0{\cdot}6118$$
$$b\,f(\alpha_0) = 0{\cdot}0018147,\ 0{\cdot}0017931,\ 0{\cdot}0018383,\ 0{\cdot}0018012,$$

endlich für $\alpha_0 = 69^0\ 15'$:

$$a \cos \alpha_0 = 0{\cdot}36749, \quad 0{\cdot}36725, \quad 0{\cdot}37189$$
$$b\,f(\alpha_0) = 0{\cdot}0010046,\ 0{\cdot}0010043,\ 0{\cdot}0009905.$$

Nun findet man aber:

	für $\alpha_0 = 26^0\ 2'$	für $\alpha_0 = 39^0\ 59'$
$cos\ \alpha_0$	$= 0{\cdot}89539,$	$0{\cdot}766231$
$f(\alpha_0)$	$= 2{\cdot}26393,$	$1{\cdot}39883,$
	für $\alpha_0 = 54^0\ 34'$	für $\alpha_0 = 69^0\ 15'$
$cos\ \alpha_0$	$= 0{\cdot}579755,$	$0{\cdot}354291$
$f(\alpha_0)$	$= 0{\cdot}87583,$	$0{\cdot}48159.$

Dividirt man die obigen Zahlen durch diese Werthe, so ergiebt sich als Werth der Constanten a für die 1. Beobachtungsreihe:

1·051, 1·041, 1·067, im Mittel 1·053,

für die 2. Beobachtungsreihe:

1·004, 1·035, 1·047, im Mittel 1·029,

für die 3. Beobachtungsreihe:

1·037, 1·042, 1·050, 1·055, im Mittel 1·046,

für die 4. Beobachtungsreihe:

1·037, 1·038, 1·049, im Mittel 1·041.

Als Werth der Constanten b aber ergiebt sich für die 1. Beobachtungsreihe:

0·002048, 0·002076, 0·002058, im Mittel 0·002061,

für die 2. Beobachtungsreihe:

0·002028, 0·002059, 0·002066, im Mittel 0·002051

für die 3. Beobachtungsreihe:

0·002072, 0·002047, 0·002099, 0·002057, im Mittel 0·002069,

für die 4. Beobachtungsreihe:

0·002086, 0·002085, 0·002057, im Mittel 0·002076.

Die Abweichungen dieser verschiedenen Werthe der Constanten a und b sind nicht grösser, als es nach den unvermeidlichen Fehlerquellen des Apparates zu erwarten war. Sie stimmen zugleich mit den in der Correctionsformel angewandten Constanten überein, was eine weitere Correction überflüssig macht. Die Mittelwerthe bei den einzelnen Beobachtungsreihen werden noch etwas constanter, wenn man die 1. Beobachtung der 2. Beobachtungsreihe, welche sich offenbar etwas anormal verhält, ausschliesst; man erhält dann folgende Werthe der Constanten:

a	b
1·053	0·002061
1·041	0·002062
1·046	0·002069
1·041	0·002076

Es kann daher wenigstens innerhalb der Grenzen der Fehler, welche der gebrauchte Apparat nothwendig mit sich führt, als nachgewiesen betrachtet werden, dass auch die Totalwirkung des Stromes, welcher einen Rhombus mit veränderlichem Winkel durchfliesst, auf sich selbst als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus der Wirkung aller seiner Stromelemente auf einander, von denen je 2 nach dem Ampère'schen Gesetz aufeinander wirken.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

(Hierbei eine Figurentafel.)

Von einem gegebenen Dreieck ABC sei die eine Seite AB constant und liege fest, der Scheitelpunkt C dagegen möge auf einer Curve $y=f(x)$ fortgleiten, dann wird jeder der merkwürdigen Punkte eine Curve beschreiben.

Das Folgende enthält eine Untersuchung derjenigen geometrischen Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks, welche entstehen, wenn die Kegelschnitte als Leitcurven für den Scheitelpunkt C angenommen werden.

Das Dreieck ABC möge so liegen, dass die Seite AB mit dem positiven Theile der x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und zwar der Punkt A mit dem Anfangspunkte zusammenfällt. Wir bezeichnen der Kürze wegen die Winkel mit A, B, C, die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c und führen, um möglichst einfache Resultate zu erzielen, statt der 3 Seiten den Radius des umschriebenen Kreises ein:

$$a=2R\sin A;\quad b=2R\sin B;\quad c=2R\sin C.$$

Bekanntlich sind nun die Coordinaten des Durchschnitts der Höhen des Dreiecks:

$$\text{I)}\qquad \begin{cases} x=2R\cos A\sin B, \\ y=2R\cos A\cos B, \end{cases}$$

ferner die Coordinaten des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises:

$$\text{II)}\qquad \begin{cases} x=R\sin(A+B), \\ y=-R\cos(A+B), \end{cases}$$

drittens die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$\text{III)}\qquad \begin{cases} x=\tfrac{2}{3}R(\sin A\cos B+2\cos A\sin B) \\ y=\tfrac{2}{3}R\sin A\sin B, \end{cases}$$

endlich die Coordinaten des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises:

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} x = 4\,R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \\ y = 4\,R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \end{cases}.$$

I. Die geometrischen Oerter des Höhenpunktes.

A. Die Leitcurve sei eine Parabel; deren Gleichung:

$$\eta^2 = p\xi.$$

Mit Hülfe von I) findet man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$x(c-x)^2 = py^2.$$

Nimmt man den Punkt $(c, 0)$ als Pol an, so ist die Polargleichung der Curve:

$$r\cos\varphi + c = p\,tg^2\varphi.$$

Diese Curve geht also durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und schneidet ausserdem die x-Axe in der Entfernung $+c$ von demselben; sie liegt ferner symmetrisch zur x-Axe. Für negative x wird y stets imaginär; die Curve kann sich daher nur auf der rechten Seite der y-Axe ausbreiten.

Bei $x = \frac{1}{3}c$ hat die Curve sowohl einen oberen als einen unteren Culminationspunkt. Wendepunkte sind nicht vorhanden.

Der Krümmungsradius ist:

$$\varrho = \frac{\{4\,px + (c-3\,x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2\,p\,(3\,x+c)},$$

er nimmt für $x = 0$ den Werth:

$$\varrho = \frac{c^2}{2\,p}$$

und für $x = \frac{1}{3}c$ den Werth:

$$\varrho = \tfrac{2}{9}\sqrt{3\,pc} \text{ an.}$$

Setzen wir in der Gleichung der Parabel und der Gleichung des g. O. $x = c \pm p$, so erhalten wir in beiden Fällen:

$$y = \pm\sqrt{pc \pm p^2}.$$

Demnach wird für $c > p$ die Parabel von dem g. O. 4mal geschnitten, dagegen für $c < p$ nur in 2 Punkten. —

Nehmen wir an, dass die Directrix der Parabel der x-Axe parallel läuft und der Anfangspunkt des Coordinatensystems mit dem Scheitelpunkte zusammenfällt, so ist die Gleichung derselben:

$$\xi^2 = p\eta.$$

Die Gleichung des g. O. des Höhenpunktes ist dann:

$$x^2 = \frac{px(c-x)}{y}$$

oder
$$xy + px - pc = 0.$$

Verschieben wir das Coordinatensystem so, dass $y = y_1 - p$ wird, so erhält die gefundene Gleichung die Gestalt:
$$xy_1 = pc.$$

Der g. O. des Höhenpunktes ist also in diesem Falle eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die y-Axe und eine Parallele zur x-Axe ($y = -p$) sind.

Wir wollen endlich der Leitparabel eine 3te Lage geben. Dieselbe möge ihren Scheitel nach oben kehren und die Directrix möge der x-Axe parallel laufen. Die Gleichung sei:
$$\eta + n\xi^2 - m\xi = 0.$$
Die Gleichung des g. O. des Höhenpunktes ist dann:
$$nxy - my - x + c = 0.$$
Verschieben wir das Coordinatensystem, indem wir statt x $x_1 + \frac{m}{n}$, statt y $y_1 + \frac{1}{n}$ setzen, so erhalten wir die Gleichung:
$$x_1 y_1 = \frac{m - cn}{n^2}.$$
Der g. O. ist also wieder eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die geraden Linien
$$x = \frac{m}{n} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{n}$$
sind.

B. Die Leitcurve für den Scheitel C sei eine Ellipse, deren Gleichung:
$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$
Daraus ergiebt sich als Gleichung des geometr. Ortes:
$$b^2x^2y^2 - a^2b^2y^2 + a^2x^2(c - x)^2 = 0$$
oder
$$y = \pm \frac{ax(c - x)}{b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$
Diese Curve liegt symmetrisch zur x-Axe, geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und durch den Punkt $(c, 0)$; errichtet man in den Endpunkten der grossen Axe Lothe auf derselben, so sind letztere Asymptoten der Curve.

Nimmt man speciell die Seite c des Dreiecks gleich der grossen Halbaxe der Ellipse, so wird die Gleichung des g. O.:
$$b^2x^2y^2 - a^2b^2y^2 + a^2x^2(a - x)^2 = 0$$
oder
$$y = \pm \frac{a}{b} x \cdot \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Diese Curve hat die in Fig. 3. angegebene Gestalt, wobei die Culminationspunkte der Abscisse

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,a$$

entsprechen.

Für die Abscissen $\frac{a b^2}{a^2 - b^2}$ und $-\frac{a b^2}{a^2 + b^2}$ sind die Ordinaten der Ellipse und des g. O. $=$, die Ellipse wird demnach viermal von demselben durchschnitten.

Verschieben wir die Leitellipse, so dass der linke Scheitel derselben mit dem 0-Punkte zusammenfällt, so ist ihre Gleichung:

$$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a\xi - \xi^2);$$

es möge die Seite c des Dreiecks $= 2a$ werden, dann wird die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\frac{a^2}{b^2}(2ax - x^2) = y^2.$$

(Fig. 4.) Der Höhenpunkt des Dreiecks bewegt sich danach auf einer Ellipse, deren Halbaxen a und $\frac{a^2}{b}$ sind.

C. Die Leitcurve für den Scheitel C sei eine Hyperbel, die Gleichung derselben:

$$a^2\eta^2 - b^2\xi^2 = -a^2b^2.$$

Hieraus folgt als Gleichung des geometr. Ortes:

$$y = \pm \frac{a}{b}\,\frac{x(c - x)}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Die beiden Lothe auf der x-Axe, in den Scheiteln der Hyperbel errichtet, sind die Asymptoten dieser Curve, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, sondern die x-Axe nur in dem Punkte $(c, 0)$ schneidet.

(Fig. 5.) Die gefundene Curve besteht überhaupt aus zwei vollständig von einander getrennten Theilen, jeder Theil aber wieder aus zwei Zweigen, welche symmetrisch zur x-Axe liegen.

Für $c = a$ nimmt die Gleichung des geometr. Ortes die Gestalt an:

$$y = \mp \frac{a}{b}\,x\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}.$$

Die Curve hat die in Fig. 6. angegebene Form; der Abscisse

$$x = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\,a$$

entsprechen zwei Culminationspunkte; für $x = 2a$ sind zwei Wendepunkte vorhanden.

Für die Abscissen

$$x = \frac{b^2 a}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{b^2 a}{-a^2 - b^2}$$

sind die Ordinaten der Hyperbel und des geometr. Ortes einander gleich; daraus folgt: dass sich die Hyperbel und der g. O. in vier Punkten schneiden.

Wir verschieben jetzt das Coordinatensystem so, dass der linke Scheitel der Hyperbel mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, dann ist die Gleichung derselben:

$$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi).$$

Für $c = 2a$ wird

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 - 2ax),$$

d. h. der g. O. ist eine Hyperbel, deren Scheitel mit den Scheiteln der Leithyperbel zusammenfallen, deren Halbaxen aber a und $\frac{a^2}{b}$ sind. (Fig. 7.)

Endlich möge sich der Scheitel C auf einer gleichseitigen Hyperbel bewegen, deren Gleichung

$$\xi\eta = \frac{1}{M}$$

sei; dann ergiebt sich als Gleichung des g. O.:

$$y = Mx^2(c - x).$$

Die Curve hat die in Fig. 8. angegebene Form, wobei dem Werthe $x = 0$ ein unterer, dem Werthe $x = \frac{2}{3}c$ ein oberer Culminationspunkt und dem Werthe $x = \frac{1}{3}c$ ein Wendepunkt entspricht.

II. Der geometrische Ort des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises.

Da in allen hier betrachteten Fällen die Dreiecksseite c constant bleibt, so ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises immer das Loth, welches in $x = \frac{c}{2}$ auf der x-Axe errichtet ist.

III. Die geometrischen Oerter des Schwerpunktes.

A. Die Leitcurve sei eine Parabel, deren Gleichung:

$$\eta^2 = p\xi.$$

Als Gleichung der von dem Schwerpunkt beschriebenen Bahn ergiebt sich dann:

$$9y^2 = p(3x - c)$$

oder

$$y^2 = \frac{p}{3}x - \frac{pc}{9},$$

d. h. der g. O. des Schwerpunktes ist ebenfalls eine Parabel, deren Parameter $\frac{p}{3}$ ist, und deren Scheitel auf der x-Axe um $\frac{c}{3}$ vom Scheitel der Leitparabel entfernt liegt.

Führen wir die Leitparabel in die zweite oben angegebene Lage über, so ist die Gleichung für den Weg des Schwerpunktes:

$$x^2 - \frac{2cx}{3} - \frac{p}{3}y + \frac{c^2}{9} = 0$$

und lassen wir endlich die Parabel die 3te Lage einnehmen, so erhalten wir:

$$3y - m(3x - c) + n(3x - c)^2 = 0.$$

Bewegt sich demnach der Scheitel C des Dreiecks auf einer Parabel, so wird der g. O. des Schwerpunktes immer ebenfalls eine Parabel sein.

B. Der Scheitel C bewege sich auf einer Ellipse, deren Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1;$$

als Gleichung der Bahn des Schwerpunktes folgt dann:

$$\frac{9\left(x - \frac{c}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{9y^2}{b^2} = 1,$$

d. h. der g. O. ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Coordinaten $\left(\frac{c}{3}, 0\right)$ hat und deren Halbaxen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind. Lässt man c alle möglichen Werthe annehmen, so wird nur der Mittelpunkt der Ellipse längs der x-Axe verschoben; Gestalt und Grösse derselben bleiben unverändert.

Fällt der linke Scheitel der Leitellipse mit dem 0-Punkte zusammen, so ist die Gleichung derselben:

$$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a\xi - \xi^2)$$

und für $c = 2a$ ist die Gleichung des g. O.:

$$9y^2 = \frac{b^2}{a^2}(18ax - 8a^2 - 9x^2),$$

d. h. der g. O. ist eine Ellipse, die mit der Leitellipse den Mittelpunkt gemein hat, deren Axen aber $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind.

C. Der Scheitel C bewege sich auf einer Hyperbel, deren Gleichung:

$$\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2} = -1.$$

Dann ist die Gleichung des g. O. des Schwerpunktes:

$$\frac{9y^2}{b^2} - \frac{9\left(x - \frac{c}{3}\right)^2}{a^2} = -1,$$

d. h. der g. O. ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten $\left(\frac{c}{3}, 0\right)$

hat und deren Halbaxen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind. Durch Veränderung der Grösse von c wird nur der Mittelpunkt der Hyperbel auf der x-Axe verlegt, die Hyperbel selbst ändert sich nicht.

Der Scheitel des linken Armes der Hyperbel möge mit dem 0-Punkte zusammenfallen, dann ist die Gleichung derselben:

$$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi).$$

Für $c = 2a$ ist die Gleichung der Bahn des Schwerpunktes:

$$9y^2 = \frac{b^2}{a^2}(9x^2 - 18ax + 8a^2),$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Hyperbel, die den Anfangspunkt mit der Leithyperbel gemein hat und deren Axen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{3}$ sind.

Läuft endlich C auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung:

$$\xi\eta = m,$$

so ist die Gleichung des g. O.:

$$y\left(x - \frac{c}{3}\right) = \frac{m}{9},$$

d. h. er ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die x-Axe und die Linie $x = \frac{c}{3}$ sind.

IV. Die geometrischen Oerter des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises.

A. Der Scheitel C des Dreiecks bewege sich auf einer Parabel, deren Gleichung

$$\eta^2 = p\xi$$

sei; als Gleichung des g. O. des Mittelpunktes findet sich dann:

$$4x^2y^2(c-x) = p(x^2 - y^2)\left\{x(c-x) - y^2\right\}.$$

Die Curve schneidet die x-Axe zweimal für $x = 0$ und für $x = c$; zwischen $x = 0$ und $x = c$ besitzt sie vier Arme, für $x < 0$, sowie für $x > c$ nur zwei.

Im Falle $x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{p}{3}(c-p)}$, werden die Ordinaten der Leitparabel und des geometr. Ortes einander gleich

$$\pm\sqrt{p\left\{\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{p}{3}(c-p)}\right.},$$

d. h. für $p > c$ kann die Parabel von dem g. O. in vier Punkten geschnitten werden; für $p < c$ nur in zwei Punkten.

Geben wir c den Werth $\frac{p}{4}$, so wird die oben gefundene Gleichung das Produkt der beiden Gleichungen:

$$y^2 - \frac{p}{4}x = 0,$$
$$py^2 - 4cx^2 + 4x^3 = 0;$$

sie repräsentirt also eine Parabel mit dem Parameter $\frac{p}{4}$ und eine Curve 3ten Grades. Der g. O. des Mittelpunktes ist also hier dieselbe Curve, welche der Höhenpunkt eines Dreiecks durchläuft, wenn die Spitze C auf einer Parabel $y^2 = \frac{p}{4}(c - x)$ fortbewegt wird. Der Mittelpunkt bewegt sich aber nur auf den Theilen der Curve, welche zu beiden Seiten der Dreiecksseite c liegen.

B. Die Leitcurve für den Scheitel C sei eine Ellipse, deren Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1;$$

als Gleichung des geometr. Ortes findet sich dann:

$$b^2(c-x)^2(x^2-y^2)^2 + 4a^2x^2y^2(c-x)^2 = a^2b^2\left\{x(c-x) - y^2\right\}^2.$$

Wir wollen hier nur einen Specialfall näher ins Auge fassen. Es möge die kleinere Axe ($= 2a$) der Ellipse mit der x-Axe zusammenfallen, so dass der eine Endpunkt derselben in dem 0-Punkte liegt; die grössere ($= 2b$) laufe der y-Axe parallel. Die beiden Halbaxen mögen in einem bestimmten Verhältnisse stehen, so dass $b^2 = 2a^2$ ist; und die Dreiecksseite c endlich sei gleich der kleineren Axe. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist dann:

$$y^4 - 4a^2y^2 + 4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 = 0.$$

Die Curve hat die in Fig. 9. angegebene Form, welche aus vier, zur x-Axe symmetrisch liegenden Armen besteht. Sie schneidet die x-Axe und zugleich die Leitellipse in den Punkten $(0, 0)$ und $(2a, 0)$. Den Werthen $x = 0$, $x = a$ und $x = 2a$ entsprechen Culminationspunkte, ausserdem sind acht Wendepunkte vorhanden.

Der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises durchläuft übrigens nur die Theile der Curve, welche von der Leitellipse eingeschlossen sind.

C. Die Bahn für den Scheitel C des Dreiecks sei endlich eine Hyperbel, deren Gleichung:

$$\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2} = -1.$$

Dann ist die Gleichung für den g. O. des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises:

$$4a^2x^2y^2(c-x)^2 - b^2(c-x)^2(x^2-y^2)^2 + a^2b^2(x(c-x) - y^2)^2 = 0.$$

Auch hier wollen wir nur einen besonderen Fall näher betrachten. Die Hyperbel liege so, dass der linke Scheitel mit dem 0-Punkt zusammenfällt; zwischen den beiden Axen möge die Beziehung $b^2 = 2a^2$ stattfinden und die Seite c des Dreiecks sei gleich der Axe $2a$. — Dann ist die Gleichung des g. O.:

$$y^2 = 2(x-a)^2 \pm \sqrt{4(x-a)^4 - x^2(x-2a)^2}.$$

Einfacher gestaltet sich dieselbe, wenn wir das Coordinatensystem von links nach rechts um a verschieben:

$$y^2 = 2x^2 \pm \sqrt{(3x^2-a^2)(x^2+a^2)}.$$

Die Curve hat die in Fig. 10. angegebene Form und zwar besteht sie aus 4 Theilen, welche symmetrisch zu den beiden Axen liegen; je 2 berühren sich in einem Scheitel der Hyperbel und die beiden Arme eines jeden Theiles erstrecken sich ins Unendliche. Der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises bewegt sich nur auf denjenigen Theilen der Curve, welche zwischen den auf der x-Axe in den Scheiteln der Hyperbel errichteten Lothen liegen.

Magdeburg. Dr. Ad. Hochheim.

II. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben zur directen Auflösung der quadratischen und cubischen litteralen Gleichungen.

In den mathematischen Schriften der Araber findet sich eine Methode der Auflösung der numerischen Gleichungen ersten Grades, welche jetzt noch mit Vortheil als Näherungsmethode bei der Auflösung höherer numerischer oder transcendenter Gleichungen angewandt und gewöhnlich mit dem Namen regula falsi oder falsae positionis bezeichnet wird. Dieselbe ist indischen Ursprungs und nach einigen in der Pariser Bibliothek vorhandenen lateinischen Manuscripten das betreffende Buch von dem in der ersten Hälfte des XII. Jahrhunderts lebenden spanischen Juden Abraham Ibn Esra aus dem Indischen übersetzt worden. Der vollständige Titel der lateinischen Uebersetzung, welche in Libri, Hist. des scienses math., Paris 1835, Note VI. abgedruckt ist, heisst: Liber augmenti et diminutionis, vocatus numeratio divinationis, ex eo, quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum, qui Indorum dictus est, composuit (vgl. Zeitschr. IV, p. 383). Hiernach hiess die Methode bei den Brahminen also Divinationsrechnung (Muthungsrechnung). Sodann findet sie sich im Talkhys al-Hissâb, von Aboul Abbas Ahmed Ibn Albannâ (Sohn des Architecten) al-Marokeschi, verfasst um 1222 n. Chr. unter dem Namen „Methode der Wagschaalen“ (Journ. math. X. 1865). Endlich erwähnen wir noch des arabischen Buches Khilâsat al-Hissâb (Quintessenz der Rechenkunst) von

Mohammed Behâ-Eddîn al-Amouli verfasst im XVI. Jahrhundert, welches Beispiele desselben enthält.

Das Princip der Methode besteht darin, dass man in der auf Null gebrachten, nur positive Potenzen der Unbekannten enthaltenden Function für die Unbekannte zwei Werthe z_0 und z_1 substituirt und aus den Fehlern der Gleichung φ_0 und φ_1 die Unbekannte herleitet.

Gegeben sei also die lineare Function $f(x) = 0$. Das Verfahren ihrer Auflösung lässt sich auf ein analytisch-geometrisches Princip zurückführen. Setzt man die auf Null und positive Exponenten der Grösse x gebrachte Function allgemein gleich y und betrachtet die Unbekannte als Abscisse, y als Ordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist die Function die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissenaxe in einem Punkte schneidet, dessen Abscisse die gesuchte Wurzel sein muss. Substituirt man also nacheinander für x zwei beliebige Werthe z_0 und z_1, so sind $x - z_0$ und $x - z_1$ die Fehler der Substitutionen, die entsprechenden Werthe von y, nämlich φ_0 und φ_1 die Fehler der Gleichung und es verhalten sich offenbar die Fehler der Gleichungen wie die Fehler der Substitutionen; folglich

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}, \quad x = \frac{z_1\varphi_0 - z_0\varphi_1}{\varphi_0 - \varphi_1}.$$

a) Die Divinationsmethode (regula lancium).

Aufgabe. (Aus Ibn Esra, capitulum de negociatione.) Gegeben sei die Gleichung

$$2(2(2x - 1) - 2) - 3 = 10,$$

also

$$f(x) = 2(2(2x - 1) - 2) - 13 = 0.$$

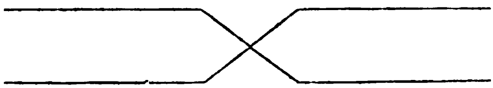
Setzt man für x zunächst $z_0 = 4$, so ist der erste Fehler $\varphi_0 = 11$.

Setzt man demnach für x $z_1 = 5$, so ist der zweite Fehler $\varphi_1 = 19$,

folglich ist

$$x = \frac{5 \cdot 11 - 4 \cdot 19}{11 - 19} = 2\tfrac{5}{8}.$$

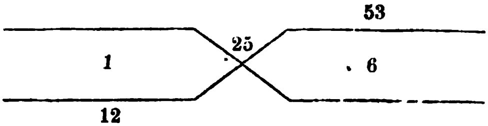
b) Die Methode der Wagschalen. (Nach dem Talkhys (Lehrbuch der Arithmetik) von Ibn Albanna mizân, d. i. Bilanx, Wage- oder Proberechnung genannt.) Ibn Albanna sagt: „Man nehme eine Wage von folgender Form



und setze den gegebenen Werth (der Function) über den Drehpunkt, setze auf die eine Schaale eine beliebige Zahl, setze sie alsdann für die Unbekannte (in die Function) ein und vergleiche die ausgerechnete Grösse mit derjenigen über dem Drehpunkt. Ist sie ihr gleich, so ist die Zahl auf der Schaale die gesuchte Unbekannte selbst. Ist sie davon verschieden, so notire man, wenn sie grösser ist, den Ueberschuss über der Schaale, wenn sie kleiner ist, den Fehler unter der Schaale. Dann setze man auch auf die andere Schaale eine beliebige andere Zahl und verfahre ebenso. Jetzt multiplicire man den Fehler jeder Schaale mit dem Aufsatz der anderen. Sind die Fehler beide positiv oder beide negativ, so subtrahire man den kleineren vom grösseren, ebenso das kleinere Produkt von dem grösseren und dividire die Differenz der Produkte durch die Differenz der Fehler. Ist hingegen der eine Fehler positiv, der andere negativ, so dividire man die Summe der Produkte durch die Summe der Fehler."

Bemerkung: Ibn Albanna giebt die Regel offenbar nur richtig an für positive Werthe der Unbekannten. Ist die Wurzel negativ, so hat die Regel nur allgemeine Gültigkeit, wenn sie von der betreffenden Stelle an so lautet: Man dividire die Differenz der Produkte aus dem ersten Aufsatz mit dem zweiten Fehler und dem zweiten Aufsatz mit dem ersten Fehler durch die Differenz des zweiten und ersten Fehlers.

Aufgabe. (Aus dem Commentar von Aboul Hazan Ali Al-Kalzadi († 1486) zum Talkhys.) Eine Zahl zu finden, deren Sechsfaches nebst ihrem Siebenfachen zusammen 25 ausmachen.

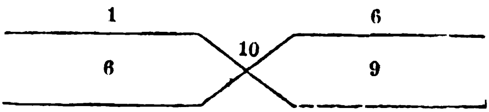


Erste Schaale 6, $6 \times 6 + 6 \times 7 = 78 = 25 + 53$; erster Fehler $= +53$.
Zweite Schaale 1, $1 \times 6 + 1 \times 7 = 13 = 25 - 12$; zweiter Fehler $= -12$.

Demnach ist

$$x = \frac{1 \times 53 + 6 \times 12}{53 + 12} = 1\tfrac{12}{13}.$$

Aufgabe. (Aus dem Khilâsat al-Hissâb von Mohammed Behâ-Eddîn.) Eine Zahl zu finden, welche um ihr Zweidrittelfaches und um eine Einheit vermehrt, 10 ausmacht.



Erste Schaale 9, $9 + \frac{2}{3} \times 9 + 1 = 16 = 10 + 6$; erster Fehler $= +6$.
Zweite Schaale 6, $6 + \frac{2}{3} \times 6 + 1 = 11 = 10 + 1$; zweiter Fehler $= +1$.

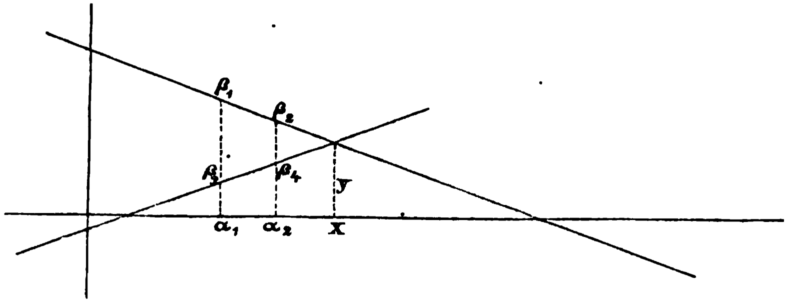
Demnach ist

$$x = \frac{6 \times 6 - 9 \times 1}{6 - 1} = 5\tfrac{2}{5}.$$

Vorstehende Beispiele mögen genügen, die Methoden der Alten zu erläutern. Wir wollen noch zeigen, wie man die regula falsi zur Auflösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten verwenden kann. Die Methode ist geometrisch-analytisch folgende.

Seien α_1 und α_2 zwei beliebige Substitutionen für x, β_1 und β_2 die zugehörigen Werthe von y der ersten Gleichung, β_3 und β_4 die zugehörigen Werthe der zweiten Gleichung, so ist offenbar

$$\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}=\frac{\beta_1-\beta_3}{\beta_2-\beta_4}, \qquad x=\frac{\alpha_2(\beta_1-\beta_3)-\alpha_1(\beta_2-\beta_4)}{(\beta_1-\beta_3)-(\beta_2-\beta_4)}.$$



Sind β_1 und β_2 dieselben Substitutionen für y, α_1 und α_2 die zugehörigen Werthe von x der ersten Gleichung, α_3 und α_4 die zugehörigen Werthe der zweiten Gleichung, so ist nun auch

$$\frac{y-\beta_1}{y-\beta_2}=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}, \qquad y=\frac{\beta_2(\alpha_1-\alpha_3)-\beta_1(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_2-\alpha_4)}.$$

Beispiel:

$$\text{I.}\quad 5x-7y=20.$$
$$\text{II.}\quad 9x-11y=44.$$

$$\alpha_1=5,\quad \beta_1=\tfrac{5}{7},\quad \beta_3=\tfrac{1}{11},\quad \alpha_3=5\tfrac{48}{63},$$
$$\alpha_2=6,\quad \beta_2=\tfrac{10}{7},\quad \beta_4=\tfrac{10}{11},\quad \alpha_4=6\tfrac{40}{63}.$$

Demgemäss ist:

$$x=\frac{6\cdot(\frac{5}{7}-\frac{1}{11})-5(\frac{10}{7}-\frac{10}{11})}{(\frac{5}{7}-\frac{1}{11})-(\frac{10}{7}-\frac{10}{11})}=11.$$
$$y=\frac{\frac{10}{7}(5-5\frac{48}{63})-\frac{5}{7}(6-6\frac{40}{63})}{(5-5\frac{48}{63})-(6-6\frac{40}{63})}=5.$$

Wir wollen jetzt eine Verallgemeinerung der Methode geben, indem wir die Bedingungen feststellen, unter welchen sie bei der allgemeinen Auflösung quadratischer und cubischer numerischer oder litteraler Gleichungen anwendbar ist. Sind die Formen der aufzulösenden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad ax+b=0,$$
$$\text{II.}\quad ax^2+bx+c=0,$$
$$\text{III.}\quad ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

und bedeuten wie zuvor z_0 und z_1 zwei Substitutionen für die Unbekannten, φ_0 und φ_1 die zugehörigen Fehler der Functionen, so sind die Ausdrücke der Wurzeln folgende:

$$\text{I.}\quad x=\frac{z_1\varphi_0-z_0\varphi_1}{\varphi_0-\varphi_1},$$

$$\text{II.}\quad x_1 \text{ und } x_2 = \frac{z_1\sqrt{\varphi_0} - z_0\sqrt{1}\cdot\sqrt{-\varphi_1}}{\sqrt{\varphi_0} - \sqrt{1}\cdot\sqrt{-\varphi_1}},$$

wo z_0 und z_1 aneinander durch die Relation

$$2az_0z_1 + b(z_0 + z_1) + 2c = 0$$

gebunden sind.

$$\text{III.}\quad x_1, x_2 \text{ und } x_3 = \frac{z_1\sqrt[3]{\varphi_0} - z_0\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_0} - \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}},$$

wo z_0 und z_1 durch die Relationen

$$3az_0z_1 + b(z_0 + z_1) + c = 0$$

und

$$bz_0z_1 + c(z_0 + z_1) + 3d = 0$$

aneinander gebunden sind. Es sollen diese Sätze bewiesen und durch Zahlenbeispiele erläutert werden.

I. $ax + b = 0$. Es sei

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = u, \quad \text{also} \quad x = \frac{z_0 - z_1 u}{1 - u}.$$

Setzen wir den Werth von x in die Function ein und ordnen noch u, so wird

$$(az_1 + b)u - (az_0 + b) = 0.$$

Es ist demnach

$$u = \frac{az_0 + b}{az_1 + b} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1},$$

mithin

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}, \qquad x = \frac{z_1\varphi_0 - z_0\varphi_1}{\varphi_0 - \varphi_1}.$$

II. $ax^2 + bx + c = 0$. Es sei wiederum

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = u, \quad \text{also} \quad x = \frac{z_0 - z_1 u}{1 - u}.$$

Setzen wir den Werth von x in die Function ein und ordnen nach u, so wird

$$(az_1^2 + bz_1 + c)u^2 - (2az_0z_1 + b[z_0 + z_1] + 2c)u + (az_0^2 + bz_0 + c) = 0.$$

Wählt man nun z_0 beliebig, aber z_1 so, dass

$$2az_0z_1 + b(z_0 + z_1) + 2c = 0$$

wird, so ist

$$u = \pm\sqrt{-\frac{az_0^2 + bz_0 + c}{az_1^2 + bz_1 + c}} = \pm\frac{\sqrt{\varphi_0}}{\sqrt{-\varphi_1}},$$

mithin

$$x_1 = \frac{z_1\sqrt{\varphi_0} - z_0\sqrt{-\varphi_1}}{\sqrt{\varphi_0} - \sqrt{-\varphi_1}}, \qquad x_2 = \frac{z_1\sqrt{\varphi_0} + z_0\sqrt{-\varphi_1}}{\sqrt{\varphi_0} + \sqrt{-\varphi_1}}.$$

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Gleichung $8x^2 - 10x + 3 = 0$. Substituirt man $z_0 = 1$, so ist der erste Fehler

$$8z_0^2 - 10z_0 + 3 = 1 = \varphi_0.$$

Wegen $2\,a z_0 z_1 + b(z_0 + z_1) + 2\,c = 0$ aber ist $z_1 = \frac{2}{3}$, also der zweite Fehler $8\,z_1{}^2 - 10\,z_1 + 3 = -\frac{1}{9} = \varphi_1$. Mithin ist

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1} - 1\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{3}{4}.$$

III. $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$. Es sei nun wieder

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = u, \quad \text{also} \quad x = \frac{z_0 - z_1 u}{1 - u}.$$

Setzen wir den Werth von x in die Function ein und ordnen nach u, so wird

$$\begin{aligned}(az_1{}^3 + bz_1{}^2 + cz_1 + d)\,u^3 - [(3\,az_1{}^2 + 2\,bz_1 + c)\,z_0 + (bz_1{}^2 + 2\,cz_1 + 3\,d)]\,u^2 \\ + [(3\,az_0{}^2 + 2\,bz_0 + c)\,z_1 + (bz_0{}^2 + 2\,cz_0 + 3\,d)]\,u \\ - (az_0{}^3 + bz_0{}^2 + cz_0 + d) = 0.\end{aligned}$$

Unter den Bedingungen

$$(3\,a z_1{}^2 + 2\,b z_1 + c)\,z_0 + (b z_1{}^2 + 2\,c z_1 + 3\,d) = 0$$

und

$$(3\,a z_0{}^2 + 2\,b z_0 + c)\,z_1 + (b z_0{}^2 + 2\,c z_0 + 3\,d) = 0$$

wird

$$u = \sqrt[3]{\frac{a z_0{}^3 + b z_0{}^2 + c z_0 + d}{a z_1{}^3 + b z_1{}^2 + c z_1 + d}} = \sqrt[3]{1}\cdot\frac{\sqrt[3]{\varphi_0}}{\sqrt[3]{\varphi_1}}.$$

Mithin

$$\frac{x - z_0}{x - z_1} = \sqrt[3]{1}\cdot\frac{\sqrt[3]{\varphi_0}}{\sqrt[3]{\varphi_1}},$$

und wenn wir die drei Cubikwurzeln der Einheit mit $1, J, J_1$ bezeichnen:

$$x_0 = \frac{z_1\sqrt[3]{\varphi_0} - z_1\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_0} - \sqrt[3]{\varphi_1}},$$

$$x_1 = \frac{z_1\sqrt[3]{\varphi_0} - z_0\cdot J\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_0} - J\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}}, \qquad x_2 = \frac{z_1\sqrt[3]{\varphi_0} - z_0\cdot J_1\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}}{\sqrt[3]{\varphi_0} - J_1\cdot\sqrt[3]{\varphi_1}},$$

Aus den beiden Relationen für z_0 und z_1 aber folgt, wenn man sie von einander subtrahirt und durch $z_1 - z_0$ dividirt:

$$3\,a z_0 z_1 + b\,(z_0 + z_1) + c = 0,$$

da $z_1 - z_0$ nicht gleich Null gesetzt werden darf, indem daraus $x = 1$ folgen würde. Multiplicirt man die erhaltene Gleichung mit z_1 und subtrahirt sie von der ersteren, so entsteht ausserdem die Bedingungsgleichung:

$$b z_0 z_1 + c\,(z_0 + z_1) + 3\,d = 0.$$

Aus der Combination beider Bedingungsgleichungen erhält man leicht:

$$z_0 + z_1 = -\frac{bc - 9\,ad}{b^2 - 3\,ac}, \qquad z_0 z_1 = \frac{c^2 - 3\,bd}{b^2 - 3\,ac}.$$

Es müssen also z_0 und z_1 der Gleichung

$$(b^2 - 3\,ac)\,z^2 + (bc - 9\,ad)\,z + (c^2 - 3\,bd) = 0$$

genügen, d. h. ihre Wurzeln sein. Hieran schliessen sich folgende zwei Theoreme:

1) Hat die Gleichung in z zwei reelle Wurzeln, so hat die cubische Gleichung eine reelle und zwei complexe Wurzeln.

2) Hat die Gleichung in z zwei complexe Wurzeln, so hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln (casus irreducibilis).

Zahlenbeispiel. Gegeben sei die Gleichung

$$2x^3 + 5x^2 + 4x + \frac{20}{21} = 0.$$

Es ist die Gleichung in z nun

$$7z^2 + 20z + 12 = 0, \quad z_0 = -\tfrac{6}{7}, \quad z_1 = -2.$$

Setzt man $z_0 = -\frac{6}{7}$, so ist der erste Fehler

$$az_0^3 + bz_0^2 + cz_0 + d = -\frac{64}{1029} = \varphi_0.$$

Setzt man $z_1 = -2$, so ist der zweite Fehler

$$az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = -\frac{64 \cdot 49}{1029} = \varphi_1.$$

Mithin

$$x_1 = \frac{-2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{64}{1029}} + \frac{6}{7} \cdot \sqrt[3]{-\frac{64 \cdot 49}{1029}}}{\sqrt[3]{-\frac{64}{1029}} - \sqrt[3]{-\frac{64 \cdot 49}{1029}}} = -\tfrac{2}{7}\,\frac{7 - 3\sqrt[3]{49}}{1 - \sqrt[3]{49}},$$

$$x_2 = -\tfrac{2}{7}\,\frac{7 - 3 \cdot J \cdot \sqrt[3]{49}}{1 - J \cdot \sqrt[3]{49}}, \qquad x_3 = -\tfrac{2}{7}\,\frac{7 - 3 \cdot J_1 \cdot \sqrt[3]{49}}{1 - J_1 \cdot \sqrt[3]{49}}.$$

Den Auflösungen gegenüber, welche von Tschirnhausen, Lacroix Hulbe, Sommer, Bretschneider, Grunert, Arndt und Anderen für die allgemeinen cubischen Gleichungen von der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ angegeben sind, dürfte die vorstehende sich durch Einfachheit und Symmetrie ihrer Formeln auszeichnen.

Husum. Dr. Ludwig Matthiessen.

III. Relationen zwischen einigen unendlichen Reihen.

Setzt man in den beiden Gleichungen

$$\pi \cdot \frac{e^{a\pi z} + e^{-a\pi z}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)a\pi} + e^{-(2n-1+z)a\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{a} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{a}{a^2 + n^2} \cos n\pi z, \quad -1 \leqq z < 1,$$

$$\pi \cdot \frac{e^{a\pi z} - e^{-a\pi z}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)a\pi} - e^{-(2n-1+z)a\pi} \right\}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin n\pi z, \quad 0 < z < 1,$$

successive $a = v + ui$, $a = v - ui$, so erhält man durch Addition und Subtraction die folgenden Entwickelungen:

A.

$$\pi \cdot \frac{\left(e^{(1+z)v\pi} - e^{-(1+z)v\pi}\right) \cos (1-z) u\pi + \left(e^{(1-z)v\pi} - e^{-(1-z)v\pi}\right) \cos (1+z) u\pi}{e^{2v\pi} - 2 \cos 2\pi u + e^{-2v\pi}}$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)v\pi} \cos (2n-1-z) u\pi + e^{-(2n-1+z)v\pi} \cos (2n-1+z) u\pi \right\}$$

$$= \frac{v}{v^2 + u^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\pi z \left\{ \frac{v}{v^2 + (n+u)^2} + \frac{v}{v^2 + (n-u)^2} \right\}.$$

B.

$$\pi \cdot \frac{\left(e^{(1+z)v\pi} + e^{-(1+z)v\pi}\right) \sin (1-z) u\pi + \left(e^{(1-z)v\pi} + e^{-(1-z)v\pi}\right) \sin (1+z) u\pi}{e^{2v\pi} - 2 \cos 2\pi u + e^{-2v\pi}}$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)v\pi} \sin (2n-1-z) u\pi + e^{-(2n-1+z)v\pi} \sin (2n-1+z) u\pi \right\}$$

$$= \frac{u}{v^2 + u^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\pi z \left\{ \frac{n+u}{v^2 + (n+u)^2} - \frac{n-u}{v^2 + (n-u)^2} \right\}.$$

C.

$$\pi \cdot \frac{\left(e^{(1+z)v\pi} + e^{-(1+z)v\pi}\right) \cos (1-z) u\pi - \left(e^{(1-z)v\pi} + e^{-(1-z)v\pi}\right) \cos (1+z) u\pi}{e^{2v\pi} - 2 \cos 2\pi u + e^{-2v\pi}}$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)v\pi} \cos (2n-1-z) u\pi - e^{-(2n-1+z)v\pi} \cos (2n-1+z) u\pi \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \sin n\pi z \left\{ \frac{n-u}{v^2 + (n-u)^2} + \frac{n+u}{v^2 + (n+u)^2} \right\}.$$

D.

$$\pi \cdot \frac{\left(e^{(1+z)v\pi} - e^{-(1+z)v\pi}\right) \sin (1-z) u\pi - \left(e^{(1-z)v\pi} - e^{-(1-z)v\pi}\right) \sin (1+z) u\pi}{e^{2v\pi} - 2 \cos 2\pi u + e^{-2v\pi}}$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ e^{-(2n-1-z)v\pi} \sin (2n-1-z) u\pi - e^{-(2n-1+z)v\pi} \sin (2n-1+z) u\pi \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \sin n\pi z \left\{ \frac{v}{v^2 + (n-u)^2} - \frac{v}{v^2 + (n+u)^2} \right\}.$$

In den Gleichungen A und B ist $-1 \leqq z \leqq 1$, in den Gleichungen C und D ist $0 < z < 1$; kommt eine der Gleichungen A oder B in Verbindung mit einer der Gleichungen C oder D vor, so ist selbstverständlich $0 < z < 1$.

Der Einfachheit halber ist im Folgenden $\sum \varphi(n)$ statt $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \varphi(n)$ gesetzt.

Multiplicirt man die Gleichung D mit ∂v, integrirt nach v zwischen den Grenzen y und ∞, so folgt:

$$\sum\left\{\frac{\sin(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}e^{-(2n-1-z)\pi y}-\frac{\sin(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}e^{-(2n-1+z)\pi y}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum(-1)^{n-1}\sin n\pi z\log\frac{y^2+(n+u)^2}{y^2+(n-u)^2}.$$

Für $y=0$ giebt die vorstehende Gleichung:

$$1)\quad \sum\left(\frac{\sin(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}-\frac{\sin(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}\right)=\sum(-1)^{n-1}\sin n\pi z\log\frac{n+u}{n-u}.$$

Multiplicirt man die Gleichung A mit ∂u, integrirt nach u zwischen den Grenzen 0 und u, setzt $v=y$, so folgt:

$$\sum\left(\frac{\sin(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}e^{-(2n-1-z)\pi y}+\frac{\sin(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}e^{-(2n-1+z)\pi y}\right)$$
$$=\operatorname{arctang}\frac{u}{y}+\sum(-1)^n\cos n\pi z\operatorname{arctang}\frac{2uy}{n^2-u^2+y^2}.$$

Für $y=0$ erhält man:

$$\sum\left(\frac{\sin(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}+\frac{\sin(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Diese Gleichung ergiebt sich auch mit Hülfe der beiden folgenden:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos\pi z u-\cos\pi(1-z)u}{\sin\pi z}=2\sum\frac{z}{(2n-1)^2-z^2}\cos(2n-1)\pi u,$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\pi z u+\sin\pi(1-z)u}{\sin\pi z}=2\sum\frac{2n-1}{(2n-1)^2-z^2}\sin(2n-1)\pi u,$$

Die Gleichung:

$$\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}-\frac{1}{v}=2\sum(-1)^n\cos n\pi z\frac{v}{v^2+n^2}$$

von der Gleichung A abgezogen giebt:

$$\pi\sum\left\{e^{-(2n-1-z)v\pi}\cos(2n-1-z)u\pi+e^{-(2n-1+z)v\pi}\cos(2n-1+z)u\pi\right\}$$
$$+\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+u^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}$$
$$=\sum(-1)^{n-1}\cos n\pi z\left\{\frac{2v}{v^2+n^2}-\frac{v}{v^2+(n-u)^2}-\frac{v}{v^2+(n+u)^2}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂v, integrirt nach v zwischen den Grenzen y und ∞, so folgt:

$$2)\quad \sum\left\{e^{-(2n-1-z)y\pi}\frac{\cos(2n-1-z)u\pi}{2n-1-z}+e^{-(2n-1+z)y\pi}\frac{\cos(2n-1+z)u\pi}{2n-1+z}\right\}$$

$$+L=\tfrac{1}{2}\sum(-1)^{n-1}\cos n\pi z\log\left(\frac{y^2+(n+u)^2}{y^2+n^2}\cdot\frac{y^2+(n-u)^2}{y^2+n^2}\right),$$

wo

$$L=\int\limits_y^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+u^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}\right)\partial v,$$

oder

$$L=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+u^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}\right)\partial v$$

$$-\int\limits_0^y\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+u^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}\right)\partial v.$$

Nun ist:

$$-\int\limits_0^y\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+u^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}\right)\partial v=\int\limits_0^y\frac{v\,\partial v}{v^2+u^2}$$

$$+2\sum(-1)^n\cos n\pi z\int\limits_0^y\frac{v\,\partial v}{v^2+n^2}=\tfrac{1}{2}\log(y^2+u^2)-\log u$$

$$+\sum(-1)^n\cos n\pi z\log\frac{y^2+n^2}{n^2}.$$

Setzt man hierin:

$$\log u=\int\limits_0^\infty\left(\frac{v}{1+v^2}-\frac{v}{v^2+u^2}\right)\partial v,$$

so ergiebt sich für L folgende Gleichung:

$$L=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{1+v^2}-\pi\frac{e^{v\pi z}+e^{-v\pi z}}{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}\right)\partial v+\tfrac{1}{2}\log(y^2+u^2)$$

$$-\sum(-1)^{n-1}\cos n\pi z\log\frac{y^2+n^2}{n^2}.$$

Bezeichnet man das rechts stehende Integral durch M, setzt in demselben v statt $2v\pi$, so folgt:

$$M=\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+(2\pi)^2}-\tfrac{1}{2}\frac{e^{v\frac{1+z}{2}}+e^{v\frac{1-z}{2}}}{e^v-1}\right)\partial v.$$

Nun ist:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{v+1} - \frac{v}{v^2+(2\pi)^2}\right)\partial v = \log 2\pi;$$

setzt man:

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{1}{v(1+v)}\right)\partial v = c,$$

so folgt:

$$\log 2\pi - c = \int_0^\infty \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{v^2+(2\pi)^2} - \frac{e^{-v}}{v}\right)\partial v.$$

Diese Gleichung von derjenigen für M subtrahirt giebt:

$$M - \log 2\pi + c = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-v}}{v} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{v\frac{1+z}{2}} + e^{v\frac{1-z}{2}}}{e^v - 1}\right)\partial v.$$

Das rechts stehende Integral ist der Differentialquotient nach z von:

$$\int_0^\infty \left(z e^{-v} + \frac{e^{v\frac{1-z}{2}} - e^{v\frac{1+z}{2}}}{e^v - 1}\right)\frac{dv}{v} = \log \frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}.$$

Hierdurch folgt:

$$M = \log 2\pi - c + \frac{\partial}{\partial z}\log \frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}$$

und:

$$L = \log 2\pi - c + \frac{\partial}{\partial z}\log \frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log(y^2+u^2)$$
$$-\sum (-1)^{n-1}\cos n\pi z \log \frac{y^2+n^2}{n^2}.$$

Setzt man diesen Werth von L in die Gleichung 2), so geht dieselbe über in:

2*)
$$\log 2\pi - c + \frac{\partial}{\partial z}\log \frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log(y^2+u^2)$$
$$+\sum\left\{\frac{\cos(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}\,e^{-(2n-1-z)\pi y} + \frac{\cos(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}\,e^{-(2n-1+z)\pi y}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\sum(-1)^{n-1}\cos n\pi z\left\{\log\frac{y^2+(n+u)^2}{n^2} + \log\frac{y^2+(n-u)^2}{n^2}\right\}.$$

Die vorstehende Gleichung giebt für $y = 0$:

$$\log 2\pi - c + \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} + \log u$$

$$+ \sum \left(\frac{\cos(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z} + \frac{\cos(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z} \right)$$

$$= \sum (-1)^{n-1} \cos n\pi z \log\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung und der Gleichung 1) $z = 2x - 1$, so erhält man, wegen $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x}$ und $2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x-1)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\log \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} + \log u - \frac{1-\cos 2\pi x u}{2x}$$

$$3) \qquad + \sum \cos 2n\pi x \log\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\cos 2(n+x)\pi u}{n+x} + \frac{\cos 2(n-x)\pi u}{n-x}\right),$$

$$4) \qquad \sum \sin 2n\pi x \log \frac{1+\frac{u}{n}}{1-\frac{u}{n}} - \frac{\sin 2\pi x u}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\sin 2(n+x)\pi u}{n+x} - \frac{\sin 2(n-x)\pi u}{n-x}\right).$$

Die Gleichung 4) gilt für $\frac{1}{2} < x < 1$. Setzt man in der Gleichung 4) $1 - x$ statt x, so bleibt dieselbe unverändert; hieraus folgt, dass in der Gleichung 4) $0 < x < 1$ ist.

Multiplicirt man die Gleichung 3) mit $\cos 2\pi x u$, die Gleichung 4) mit $\sin 2\pi x u$, bildet die Differenz der Produkte, so folgt:

$$5) \qquad \frac{\cos 2\pi x u}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\log\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} + \frac{1-\cos 2\pi x u}{2}\frac{\partial \log x}{\partial x}$$

$$+ \cos 2\pi x u \cdot \log u + \frac{1}{2}\sum \cos 2n\pi u \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x}\right)$$

$$+ \sum\left\{\cos 2\pi x(n+u)\log\left(1+\frac{u}{n}\right) + \cos 2\pi x(n-u)\log\left(1-\frac{u}{n}\right)\right\} = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 3) mit $\sin 2\pi x u$, die Gleichung 4) mit $\cos 2\pi x u$, bildet die Summe der Produkte, so folgt:

$$6) \qquad \frac{\sin 2\pi x u}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\log\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} - \frac{\sin 2\pi x u}{2}\frac{\partial \log x}{\partial x}$$

$$+ \sin 2\pi x u \cdot \log u - \frac{1}{2}\sum \sin 2n\pi u\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right)$$

$$+ \sum\left\{\sin 2\pi x(n+u)\log\left(1+\frac{u}{n}\right) - \sin 2\pi x(n-u)\log\left(1-\frac{u}{n}\right)\right\} = 0.$$

In den Gleichungen 5) und 6) ist $0 < x < 1$. Durch partielle Integration folgt:

$$\int_0^z \left[\frac{\cos 2\pi xu}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\log \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} + \frac{1-\cos 2\pi xu}{2} \frac{\partial}{\partial x}\log x\right]\partial x$$

$$= \frac{\cos 2\pi zu}{2}\left\{\log \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1-z)} + (2z-1)(\log 2\pi - c)\right\} + \frac{1-\cos 2\pi zu}{2}\log z + \tfrac{1}{2}(\log 2\pi - c)$$

$$+ 2\pi u \int_0^z \frac{\sin 2\pi xu}{2}\left\{\log \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\}\partial x.$$

Wegen

$$\tfrac{1}{2}\left\{\log \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} = \frac{1}{\pi}\sum \frac{\sin 2n\pi x}{n}\log n$$

ist:

$$2\pi u \int_0^z \frac{\sin 2\pi xu}{2}\left\{\log \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\}\partial x$$

$$= \frac{u}{2\pi}\sum\left(\frac{\sin 2\pi z(n-u)}{n-u} - \frac{\sin 2\pi z(n+u)}{n+u}\right)\frac{\log n}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum\left(\frac{\sin 2\pi z(n-u)}{n-u} + \frac{\sin 2\pi z(n+u)}{n+u}\right)\log n$$

$$- \frac{\cos 2\pi zu}{\pi}\sum \frac{\sin 2n\pi z}{n}\log n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum\left(\frac{\sin 2\pi z(n+u)}{n+u} + \frac{\sin 2\pi z(n-u)}{n-u}\right)\log n$$

$$- \frac{\cos 2\pi zu}{2}\left\{\log \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)} + (2z-1)(\log 2\pi - c)\right\}.$$

Es ist folglich:

$$\int_0^z \left[\frac{\cos 2\pi xu}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\log \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c)\right\} + \frac{1-\cos 2\pi xu}{2} \frac{\partial \log x}{\partial x}\right]\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\log z + \tfrac{1}{2}(\log 2\pi - c) + \frac{1}{2\pi}\sum\left(\frac{\sin 2\pi z(n+u)}{n+u} + \frac{\sin 2\pi z(n-u)}{n-u}\right)\log n.$$

Mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung erhält man aus 5) durch Integration nach x zwischen den Grenzen 0 und z:

$$7)\quad \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin 2\pi zu}{u}\log u + \sum\frac{\sin 2\pi z(n+u)}{n+u}\log(n+u) + \sum\frac{\sin 2\pi z(n-u)}{n-u}\log(n-u)\right\}$$

$$+ \log z + \log 2\pi - c + \sum \cos 2n\pi u \log \frac{1+\frac{z}{n}}{1-\frac{z}{n}} = 0.$$

Ist u ein positiver, echter Bruch, so lässt sich

$$\log z + \sum \cos 2n\pi u \log \frac{n+z}{n-z}$$

auf eine endliche Summe reduciren, deren einzelne Terme Produkte sind eines Cosinus mit Logarithmen der Function Γ.

Man findet leicht:

$$2\pi u \int_0^z \frac{\cos 2\pi x u}{2} \left\{ \log \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c) \right\} \partial x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{1-\cos 2\pi z(n-u)}{n-u} - \frac{1-\cos 2\pi z(n+u)}{n+u} \right) \log n + \frac{1}{\pi} \sum \frac{\sin 2n\pi z}{n} \log n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{1-\cos 2\pi z(n-u)}{n-u} - \frac{1-\cos 2\pi z(n+u)}{n+u} \right) \log n.$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left\{ \log \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)} + (2z-1)(\log 2\pi - c) \right\} \sin 2\pi z u.$$

Unter Zuziehung der vorstehenden Gleichung erhält man durch partielle Integration:

$$\int_0^z \frac{\sin 2\pi x u}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \log \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)} + (2x-1)(\log 2\pi - c) - \log x \right\} \partial x$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum \left(\frac{1-\cos 2\pi z(n-u)}{n-u} - \frac{1-\cos 2\pi z(n+u)}{n+u} \right) \log n.$$

Integrirt man die Gleichung 6) nach x zwischen den Grenzen 0 und z, so folgt:

$$8)\qquad \frac{1-\cos 2\pi z u}{u} \log u + \sum \frac{1-\cos 2\pi z(n+u)}{n+u} \log(n+u)$$

$$- \sum \frac{1-\cos 2\pi z(n-u)}{n-u} \log(n-u) = \pi \sum \sin 2n\pi u \log\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Die Gleichungen 7) und 8), deren Herleitung auf die Gleichungen 3) und 4) basirt ist, lassen sich auch direct aus den Gleichungen B und C herstellen, wobei die obige Entwickelung von $\log \Gamma(1+x) - \log \Gamma(1-x)$ nicht erforderlich ist. Aus den Gleichungen:

$$\pi \frac{\cos u\pi(1-2z)}{\sin u\pi} = \frac{1}{u} - 2 \sum \frac{u}{n^2-u^2} \cos 2n\pi z,$$

$$\pi \frac{\sin u\pi(1-2z)}{\sin u\pi} = 2 \sum \frac{n}{n^2-u^2} \sin 2n\pi z$$

findet man:

$$\pi = \frac{\sin 2u\pi z}{u} - \sum \frac{2u}{n^2-u^2} \cos 2n\pi z \sin 2u\pi z$$

$$+ \sum \frac{2n}{n^2-u^2} \sin 2n\pi z \cos 2u\pi z,$$

oder:

$$9)\qquad \pi = \frac{\sin 2u\pi z}{u} + \sum \left(\frac{\sin 2(n+u)\pi z}{n+u} + \frac{\sin 2(n-u)\pi z}{n-u} \right).$$

Setzt man in den Gleichungen B und C $1-2z$ statt z, so gehen dieselben über in:

$$\frac{u}{v^2+u^2}+\sum \cos 2n\pi z\left\{\frac{n+u}{v^2+(n+u)^2}-\frac{n-u}{v^2+(n-u)^2}\right\}=\pi e^{-2v\pi z}\sin 2\pi uz$$
$$+\pi\sum\left\{e^{-2(n+z)v\pi}\sin 2(n+z)u\pi+e^{-2(n-z)v\pi}\sin 2(n-z)u\pi\right\},$$
$$\sum \sin 2n\pi z\left\{\frac{n+u}{v^2+(n+u)^2}+\frac{n-u}{v^2+(n-u)^2}\right\}=\pi e^{-2v\pi z}\cos 2\pi uz$$
$$+\pi\sum\left\{e^{-2(n+z)v\pi}\cos 2(n+z)u\pi-e^{-2(n-z)v\pi}\cos 2(n-z)u\pi\right\}.$$

Multiplicirt man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\sin 2\pi uz$, die zweite mit $\cos 2\pi uz$, so folgt:

$$\frac{u}{v^2+u^2}\sin 2\pi uz+\sum\left(\frac{n+u}{v^2+(n+u)^2}\sin 2(n+u)\pi z+\frac{n-u}{v^2+(n-u)^2}\sin 2(n-u)\pi z\right)$$
$$-\pi e^{-2v\pi z}+\pi\sum \cos 2nu\pi\left(e^{-2(n-z)v\pi}-e^{-2(n+z)v\pi}\right)=0.$$

Diese Gleichung durch v dividirt giebt mit Rücksicht auf 9):

$$-\frac{v}{v^2+u^2}\,\frac{\sin 2\pi uz}{u}+\sum\left(\frac{v}{v^2+(n+u)^2}\,\frac{\sin 2(n+u)\pi z}{n+u}+\frac{v}{v^2+(n-u)^2}\,\frac{\sin 2(n-u)\pi z}{n-u}\right)$$
$$+\frac{\pi}{v}-\frac{\pi e^{-2v\pi z}}{v}+\pi\sum\frac{\cos 2nu\pi}{v}\left(e^{-2(n-z)v\pi}-e^{-2(n+z)v\pi}\right)=0.$$

Addirt man zu der vorstehenden Gleichung nach 9):

$$\frac{\sin 2\pi uz}{u}\,\frac{v}{1+v^2}+\frac{v}{1+v^2}\sum\left(\frac{\sin 2(n+u)\pi z}{n+u}+\frac{\sin 2(n-u)\pi z}{n-u}\right)-\pi\frac{v}{1+v^2}=0,$$

so folgt:

$$\left(\frac{v}{1+v^2}-\frac{v}{v^2+u^2}\right)\frac{\sin 2\pi uz}{u}+\sum\left(\frac{v}{v^2+1}-\frac{v}{v^2+(n+u)^2}\right)\frac{\sin 2(n+u)\pi z}{n+u}$$
$$+\sum\left(\frac{v}{v^2+1}-\frac{v}{v^2+(n-u)^2}\right)\frac{\sin 2(n-u)\pi z}{n-u}+\frac{\pi}{v}-\frac{\pi v}{1+v^2}$$
$$-\pi\frac{e^{-2v\pi z}}{v}+\pi\sum\frac{\cos 2nu\pi}{v}\left(e^{-2(n-z)v\pi}-e^{-2(n+z)v\pi}\right)=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂v und integrirt nach v zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergiebt sich die Gleichung 7), wenn man berücksichtigt, dass

$$\log 2\pi z=\int_0^\infty\frac{e^{-v}-e^{-2\pi zv}}{v}\,\partial v,$$

also:

$$\log 2\pi z-c=\int_0^\infty\left(\frac{-e^{-2\pi zv}}{v}+\frac{1}{v}-\frac{1}{1+v}\right)\partial v$$

und:

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+v}-\frac{v}{1+v^2}\right)\partial v=0$$

ist. Auf ähnliche Art lässt sich die Gleichung 8) ableiten.

Multiplicirt man die Gleichung B mit ∂u, integrirt nach u zwischen den Grenzen 0 und u, setzt darauf $v = y$, so folgt:

$$\sum\left(\frac{1-\cos(2n-1-z)\pi u}{2n-1-z}e^{-(2n-1-z)\pi y}+\frac{1-\cos(2n-1+z)\pi u}{2n-1+z}e^{-(2n-1+z)\pi y}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\log(y^2+u^2)-\log y+\sum(-1)^n\cos n\pi z\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{y^2+(n+u)^2}{y^2+n^2}+\tfrac{1}{2}\log\frac{y^2+(n-u)^2}{y^2+n^2}\right\}.$$

Diese Gleichung zur Gleichung 2*) addirt giebt:

$$\log 2\pi - c+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}+\log y+\sum\left(\frac{e^{-(2n-1-z)\pi y}}{2n-1-z}+\frac{e^{-(2n-1+z)\pi y}}{2n-1+z}\right)$$

$$=\sum(-1)^{n-1}\cos n\pi z\log\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right).$$

Setzt man hierin $z = 2x - 1$ und $y = u$, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\log\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1-x)}+(2x-1)(\log 2\pi - c)\right\}+\log u-\frac{1-e^{-2\pi x u}}{2x}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum\left(\frac{e^{-2(n+x)\pi u}}{n+x}+\frac{e^{-2(n-x)\pi u}}{n-x}\right)+\sum\cos 2n\pi x\log\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)=0.$$

Subtrahirt man die Gleichung 3) von der vorstehenden, so ergiebt sich:

$$\frac{e^{-2\pi x u}}{2x}+\tfrac{1}{2}\sum\left(\frac{e^{-2(n+x)\pi u}}{n+x}+\frac{e^{-2(n-x)\pi u}}{n-x}\right)$$

$$+\sum\cos 2n\pi x\log\left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)=\frac{\cos 2\pi x u}{2x}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum\left(\frac{\cos 2(n+x)\pi u}{n+x}+\frac{\cos 2(n-x)\pi u}{n-x}\right)+\sum\cos 2n\pi x\log\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right).$$

Wird die linke Seite der vorstehenden Gleichung durch $\varphi(u)$ bezeichnet, so ist $2\varphi(u) = \varphi(u\sqrt{-1})+\varphi(-u\sqrt{-1})$, welche Gleichung nur dann bestehen kann, wenn u positiv und kleiner wie die Einheit ist.

Göttingen.

Dr. A. Enneper.

IV. Bemerkungen über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

In seinem „Traité des fonctions elliptiques“ (t. I, pag. 64) hat Legendre zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgestellt, welche sich durch Differentiation der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Beziehung auf den Modul ergeben. Die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen hat Legendre ohne weitere Deduction mitgetheilt. Wendet man zur Integration der bemerkten Differentialgleichungen die Methode von Lagrange an, so ergeben sich einige bemerkenswerthe

Relationen zwischen bestimmten Integralen, deren weitere Ausführung den Gegenstand der folgenden Zeilen bildet.

Die beiden Quantitäten k und k' seien durch die Gleichung verbunden:

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Setzt man:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 u)}},$$

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}\, \partial u, \qquad E' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 u)}\, \partial u,$$

so finden bekanntlich die beiden Gleichungen statt:

1) $$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2},$$

2) $$K' \frac{\partial K}{\partial k} - K \frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k k'^2}.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$x = F(\varphi, k), \qquad y = E(\varphi, k).$$

wo:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}, \qquad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}\, \partial u,$$

Die beiden Differentialquotienten von x und y nach k sind:

3) $$\frac{\partial x}{\partial k} = -\frac{x}{k} + \frac{y}{k k'^2} - \frac{k}{k'^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}},$$

4) $$\frac{\partial y}{\partial k} = -\frac{x}{k} + \frac{y}{k}.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht nach Legendre:

5) $$\frac{\partial \left(k k'^2 \frac{\partial x}{\partial k}\right)}{\partial k} - kx + \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

6) $$k k'^2 \frac{\partial^2 y}{\partial k^2} + k'^2 \frac{\partial y}{\partial k} + ky - \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = 0.$$

Da K und K' die beiden particulären Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \left(k k'^2 \frac{\partial \xi}{\partial k}\right)}{\partial k} - k\xi = 0$$

sind, so hat das allgemeine Integral der Differentialgleichung 5) die Form:

$$x = PK + QK'.$$

Nach der Methode von Lagrange ergeben sich zur Bestimmung von P und Q die Gleichungen:

$$K\frac{\partial P}{\partial k}+K'\frac{\partial Q}{\partial k}=0,$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial k}\frac{\partial P}{\partial k}+\frac{\partial K'}{\partial k}\frac{\partial Q}{\partial k}\right)kk'^2=-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 2) erhält man hieraus:

$$\frac{\pi}{2}\frac{\partial P}{\partial k}=-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K', \qquad \frac{\pi}{2}\frac{\partial Q}{\partial k}=\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K.$$

Sind P_0 und Q_0 die Werthe von P und Q für $k=k_0$, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$P=P_0-\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k,$$

$$Q=Q_0+\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k.$$

Mittelst der vorstehenden Werthe von P und Q erhält man für das vollständige Integral der Gleichung 5) folgenden Ausdruck:

$$7)\qquad x=K\left\{P_0-\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k\right\}$$
$$+K'\left\{Q_0+\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k\right\}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung findet man leicht:

$$\frac{\partial x}{\partial k}+\frac{x}{k}=\left(\frac{\partial K}{\partial k}+\frac{K}{k}\right)\left\{P_0-\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial K'}{\partial k}+\frac{K'}{k}\right)\left\{Q_0+\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k\right\}.$$

Wegen der Differentialgleichungen für K und K' lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

$$8)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial k}+\frac{x}{k}\right)kk'^2=E\left\{P_0-\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k\right\}$$
$$+(K'-E')\left\{Q_0+\frac{2}{\pi}\int\limits_{k_0}^{k}\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k\right\}.$$

Da der Ausdruck 7) und ebenso $F(\varphi, k)$ der Gleichung 5) genügen, so muss offenbar $F(\varphi, k)$ in 7) enthalten sein. Man setze in 7) und 8) $k = k_0$, $x = F(\varphi, k)$ und bezeichne die entsprechenden Werthe von $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, K, K', E, E' für $k = k_0$, respective durch $F(\varphi, k_0)$, $E(\varphi, k_0)$, K_0, K_0', E_0, E_0'. Für $x = F(\varphi, k)$ reducirt sich die linke Seite der Gleichung 8) nach 3) auf:

$$E(\varphi, k) - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin\varphi \cos\varphi)}}.$$

Mit Rücksicht hierauf geben die Gleichungen 7) und 8):

$$F(\varphi, k_0) = P_0 K_0 + Q_0 K_0',$$

$$E(\varphi, k_0) - \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}} = P_0 E_0 + Q_0 (K_0' - E_0').$$

Da nun nach 1):

$$K_0 E_0' + K_0' E_0 - K_0 K_0' = \frac{\pi}{2},$$

so folgt:

$$\frac{\pi}{2} P_0 = -(K'_0 - E'_0) F(\varphi, k_0) + K'_0 \left\{E(\varphi, k_0) - \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}}\right\},$$

$$\frac{\pi}{2} Q_0 = E_0 F(\varphi, k_0) - K_0 \left\{E(\varphi, k_0) - \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}}\right\},$$

Mittelst dieser Gleichungen geht die Gleichung 7) für $x = F(\varphi, k)$ über in:

$$9) \quad \frac{\pi}{2} F(\varphi, k) = -K K_0' \left\{F(\varphi, k_0) - E(\varphi, k_0) + \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}}\right\}$$
$$+ (K E_0' + K' E_0) F(\varphi, k_0)$$
$$- K' K_0 \left\{E(\varphi, k_0) - \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}}\right\}$$
$$- K \int_{k_0}^{k} \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} K' \partial k + K' \int_{k_0}^{k} \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} K \partial k.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich eine einfachere ableiten, wenn $k_0 = 0$ gesetzt wird, die Quantitäten $E(\varphi, k_0)$, $F(\varphi, k_0)$, E_0, E_0' und K_0 reduciren sich dann auf φ, φ, 1, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Es ist ferner:

$$F(\varphi, k_0) - E(\varphi, k_0) = k_0^2 \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2 u)}} \partial u;$$

da nun:

$$\lim k K' = 0 \text{ für } k = 0,$$

so verschwindet in 9) der Term:

$$K_0' \left\{F(\varphi, k_0) - E(\varphi, k_0) + \frac{k_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k_0^2 \sin^2\varphi)}}\right\}.$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man aus 9):

$$10)\qquad \frac{\pi}{2}F(\varphi,k)=K\cdot\varphi-K\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k$$
$$+K'\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k.$$

Setzt man in der Gleichung 7) $k_0=0$, ferner A und B statt P_0 und Q_0, so folgt mittelst der Gleichung 10):

$$x=F(\varphi,k)+\left(A-\frac{2}{\pi}\varphi\right)K+BK'.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem bei Legendre vorkommenden nur durch den Factor von K, was unwesentlich ist, da A und B nur von k unabhängig sind, sonst beliebige Functionen von φ sein können.

Setzt man in der Gleichung 8) $k=k_0$, $x=F(\varphi,k)$, $P_0=\frac{2}{\pi}\varphi$, $Q_0=0$, so folgt nach 3):

$$11)\qquad \frac{\pi}{2}E(\varphi,k)=E\cdot\varphi+\frac{\pi}{2}\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$
$$-E\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K'\partial k+(K'-E')\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k.$$

Multiplicirt man die Gleichung 11) mit K, die Gleichung 10) mit E, bildet die Differenz der Produkte, so folgt nach 1):

$$KE(\varphi,k)-EF(\varphi,k)=K\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}-\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k.$$

Nun ist:

$$\int_0^k\frac{k}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}K\partial k=\int_0^k kK\frac{\partial}{\partial k}\frac{k}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\partial k=\frac{Kk^2}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$
$$-\int_0^k\frac{k}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\frac{\partial kK}{\partial k}\partial k=\frac{Kk^2}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}-\int_0^k\frac{k}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\frac{E}{k'^2}\partial k,$$

folglich:

$$KE(\varphi,k)-EF(\varphi,k)=\int_0^k\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\frac{E}{1-k^2}\partial k.$$

Diese Gleichung lässt sich auch mittelst des ganzen elliptischen Integrales dritter Gattung ableiten. Bezeichnet man der Einfachheit halber die linke Seite durch p, so ist bekanntlich:

$$p = k^2 \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2\varphi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}.$$

Durch Differentiation nach k findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$\frac{\partial p}{\partial k} = k \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} M \partial u,$$

wo:

$$M = \frac{\sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2\varphi} \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \left\{ \frac{2}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2\varphi} + \frac{1}{1 - k^2 \sin^2 u} - \frac{1}{1 - k^2 \sin^2\varphi} \right\}.$$

Nun ist aber:

$$k'^2 (1 - k^2 \sin^2\varphi) M = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sin u \cos u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \frac{1 - k^4 \sin^2 u \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2\varphi},$$

folglich:

$$\frac{\partial p}{\partial k} = \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{k'^2 \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}\, \partial u,$$

d. i.:

$$\frac{\partial p}{\partial k} = \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}} \frac{E}{1 - k^2}.$$

Integrirt man nach k zwischen den Grenzen 0 und k, substituirt für p seinen Werth, so folgt:

$$k^2 \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u \sin^2\varphi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}$$

$$= \int_0^k \frac{k}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}} \frac{E}{1 - k^2} \partial k.$$

Setzt man:

$$12)\qquad \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}} = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n a_n \cos 2n\varphi,$$

so ist:

$$13)\qquad a_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \left(\frac{k \sin u}{1 + \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \right)^{2n}$$

$$= 2 \left(\frac{1 - k'}{1 + k'} \right)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{\{(1 + k')^2 - (1 - k')^2 \sin^2 u\}}}.$$

Die Gleichung 12) nach φ differentiirt giebt:

$$14)\qquad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = -4 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n\, a_n \sin 2n\varphi.$$

Multiplicirt man die Gleichung 12) mit

$$1 - k^2 \sin^2\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}k^2 \cos 2\varphi,$$

so folgt:

$$15)\qquad \frac{\pi}{2}\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)} = (1 - \tfrac{1}{2}k)^2 a_0 - \tfrac{1}{4}k^2 a_1$$

$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left\{(2 - k^2)\,a_n - k^2\,\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}\right\}\cos 2n\varphi.$$

Da nach 13) $a_0 = K$, so erhält man aus 12):

$$\frac{\pi}{2}F(\varphi, k) - K\varphi = \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\frac{a_n}{n}\sin 2n\varphi.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 14) geht die Gleichung 10) über in:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\frac{a_n}{n}\sin 2n\varphi$$

$$= 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n n\cdot\sin 2n\varphi\left\{K\int_0^k\frac{a_nK'}{k}\,\partial k - K'\int_0^k\frac{a_nK}{k}\,\partial k\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$16)\qquad \frac{\pi}{2}\,a_n = 4n^2\left\{K\int_0^k\frac{a_nK'}{k}\,\partial k - K'\int_0^k\frac{a_nK}{k}\,\partial k\right\}.$$

Diese Gleichung nach k differentiirt giebt:

$$\frac{\pi k k'^2}{8n^2}\,\frac{\partial a_n}{\partial k} = (E - Kk'^2)\int_0^k\frac{a_nK'}{k}\,\partial k + (E' - K'k^2)\int_0^k\frac{a_nK}{k}\,\partial k,$$

oder:

$$17)\qquad \frac{\pi k k'^2}{8n^2}\left(\frac{\partial a_n}{\partial k} + \frac{a_n}{k}\right) = E\int_0^k\frac{a_nK'}{k}\,\partial k + (E' - K')\int_0^k\frac{a_nK}{k}\,\partial k.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 1) erhält man aus 16) und 17):

$$kk'^2K\left(\frac{\partial a_n}{\partial k} + \frac{a_n}{k}\right) - Ea_n = 4n^2\int_0^k\frac{a_nK}{k}\,\partial k,$$

$$kk'^2K'\left(\frac{\partial a_n}{\partial k} + \frac{a_n}{k}\right) - (K' - E')\,a_n = 4n^2\int_0^k\frac{a_nK'}{k}\,\partial k.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen nach k differentiirt giebt:

$$\frac{\partial\left(kk'^2\frac{\partial a_n}{\partial k}\right)}{\partial k} = a_n\left(k + \frac{4n^2}{k}\right).$$

Die vorstehende Gleichung lässt sich durch einen der in 13) gegebenen Ausdrücke für a_n verificiren; bedient man sich des ersten Ausdrucks, so ist die folgende Gleichung zu berücksichtigen:

$$k'^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 u}{(1 - k^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k \sin u}{1 + \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}\right)^{2n} \partial u$$

$$- \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \left(\frac{k \sin u}{1 + \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}\right)^{2n} \partial u$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{k \sin u}{1 + \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}\right)^{2n} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sin u \cos u}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}} \partial u$$

$$= 2n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 u}{1 - k^2 \sin^2 u} \left(\frac{k \sin u}{1 + \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)}}\right)^{2n} \partial u.$$

Mittelst 13) findet man $(1 - \frac{1}{2} k^2) a_0 - \frac{1}{2} k^2 a_1 = E$; mit Rücksicht hierauf giebt die Gleichung 15):

$$\frac{\pi}{2} E(\varphi, k) - E \cdot \varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left\{(2 - k^2) a_n - k^2 \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}\right\} \sin 2n\varphi.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen 11) und 14) findet man:

$$\frac{1}{2n} \left\{(2 - k^2) a_n - k^2 \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}\right\} = \frac{1}{2} k^2 (a_{n+1} - a_{n-1})$$
$$+ \frac{8n}{\pi} \left\{E \int_0^k \frac{a_n K'}{k} \partial k + (E' - K') \int_0^k \frac{a_n K}{k} \partial k\right\}.$$

d. i. nach 17):

$$18) \qquad 2 k'^2 \frac{\partial a_n}{\partial k} = k \left\{a_n - \frac{2n + 1}{2} a_{n+1} + \frac{2n - 1}{2} a_{n-1}\right\}.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich aus:

$$K E(\varphi, k) - E F(\varphi, k) = \int_0^k \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} \frac{E}{k'^2} \partial k$$

die Gleichung:

$$K \left\{(2 - k^2) a_n - k^2 \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}\right\} - 2 E a_n = n \int_0^k k \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{k'^2} E \partial k.$$

Die Gleichung 18) lässt sich auf folgende Art beweisen. Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 u)} = \Delta$, so ist identisch:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\sin u)^{2n-2}}{(1 + \Delta)^{2n}} \frac{\partial}{\partial u} (\sin u \cos u \cdot \Delta) \partial u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\sin u)^{2n-2}}{(1 + \Delta)^{2n}} \Delta \partial u$$

$$- 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin u}{1 + \Delta}\right)^{2n} \Delta \partial u - k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin u}{1 + \Delta}\right)^{2n} \frac{\cos^2 u}{\Delta} \partial u.$$

Durch partielle Integration geht das Integral auf der linken Seite über in:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\sin u)^{2n-2}}{(1+\varDelta)^{2n}} (2\varDelta - 2n)\,\partial u - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin u}{1+\varDelta}\right)^{2n} (2\varDelta - 2n)\,\partial u.$$

Die obige Gleichung wird hierdurch:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\sin u)^{2n-2}}{(1+\varDelta)^{2n}} (2n - \varDelta)\,\partial u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin u}{1+\varDelta}\right)^{2n} \frac{k^2 \cos^2 u}{\varDelta}\,\partial u$$
$$+ 2n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin u}{1+\varDelta}\right)^{2n} \partial u.$$

Diese Gleichung mit k^{2n-1} multiplicirt giebt die Gleichung 18).

Göttingen.

Dr. A. Enneper.

V. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie.

Durch synthetische Untersuchungen bin ich auf folgenden Satz geführt worden, welcher meines Wissens noch nicht bekannt ist:

Construirt man in allen Punkten, welche eine Schraubenlinie mit irgend einer Ebene π gemein hat, die Krümmungsebenen der Curve, so schneiden sich diese sämmtlich in einem auf π liegenden Punkte P. Und wenn die Ebene π um eine ihrer Geraden g gedreht wird, so beschreibt der zugehörige Punkt P ebenfalls eine Gerade g_1.

Die Schraubenlinie hat also hinsichtlich ihrer Krümmungsebenen dieselben Eigenschaften, wie die Raumcurve dritter Ordnung; sie ist wohl die erste transcendente Curve, welche dadurch der Geometrie der Lage zugänglich wird. Synthetisch und ohne alle Rechnung lässt sich der obige Satz leicht aus der 13. Nr. meiner „Lehrsätze über ... den linearen Strahlencomplex“ (im Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. 69) ableiten.

Bei dem folgenden analytischen Beweise beziehe ich die Schraubenlinie S auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe mit der Axe von S zusammenfällt und dessen x-Axe die Curve schneidet. Die Gleichungen der Schraubenlinie sind dann:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad z = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

wenn r den Radius des durch S gehenden Rotationscylinders und $2k\pi$

die Ganghöhe der Schraubenlinie bezeichnet. Wir können diese Gleichungen auch durch folgende zwei ersetzen:

$$x = r \cdot \cos \frac{z}{k} \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin \frac{z}{k}$$

und finden hieraus für die Tangente eines Curvenpunktes (x_1, y_1, z_1) leicht die Gleichungen:

$$1) \qquad z - z_1 = -\frac{k}{y_1} \cdot (x - x_1) = \frac{k}{x_1} \cdot (y - y_1).$$

Die Krümmungsebene im Punkte (x_1, y_1, z_1) muss durch diese Tangente und durch das Perpendikel hindurchgehen, welches aus (x_1, y_1, z_1) auf die z-Axe gefällt werden kann. Die Gleichungen dieses Perpendikels sind:

$$2) \qquad z - z_1 = 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x,$$

und folglich erhalten wir als Gleichung der Krümmungsebene:

$$r^2 \cdot (z - z_1) = kx_1 (y - y_1) - ky_1 (x - x_1),$$

weil diese Gleichung, welche wir auch schreiben können:

$$3) \qquad z - z_1 = \frac{k}{r^2} \cdot (x_1 y - y_1 x),$$

sowohl durch 1) als auch durch 2) befriedigt wird.

Wenn wir jetzt allgemein unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes P verstehen, so ist 3) die Gleichung einer bestimmten, durch P gehenden Ebene π, sodass also jedem Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet ist. Nun können aber in 3) die Coordinaten x, y, z mit resp. x_1, y_1, z_1 vertauscht werden, ohne dass die Gleichung sich ändert; d. h. jedem Punkte (x, y, z) in der dem Punkte (x_1, y_1, z_1) zugeordneten Ebene ist eine durch (x_1, y_1, z_1) gehende Ebene zugeordnet, oder:

Wenn ein Punkt sich in einer Ebene π bewegt, so dreht sich seine zugeordnete Ebene um den zu π zugeordneten Punkt P.

Damit ist aber der erste Theil des von der Schraubenlinie behaupteten Satzes bewiesen; denn so oft der bewegliche Punkt die Schraubenlinie trifft, fällt seine zugeordnete Ebene mit seiner Krümmungsebene zusammen.

Sind nun durch eine Gerade g beliebig viele Ebenen gelegt, so überzeugt man sich leicht, dass deren zugeordnete Punkte in einer Geraden g_1 liegen müssen. Denn wenn ein Punkt in g, also auch in allen jenen Ebenen sich bewegt, so muss sich seine zugeordnete Ebene um alle jene Punkte drehen, was nur dann möglich ist, wenn dieselben in einer Geraden liegen. Damit ist auch der letzte Theil unseres Satzes bewiesen.

Durch eine Schraubenlinie ist offenbar ein sogenanntes Nullsystem bestimmt, in welchem jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene und jeder Geraden eine Gerade zugeordnet ist, und von welchem 3) die Gleichung ist. Dagegen ist durch das Nullsystem keineswegs die Schraubenlinie völlig bestimmt; vielmehr führen alle auf coaxialen Cylindern liegenden Schraubenlinien, für welche der Quotient $\frac{2k\pi}{r^2\pi}$ aus der Ganghöhe durch den Cylinderquerschnitt einen und denselben Werth hat, zu dem nämlichen Nullsystem.

Zürich, den 25. Novbr. 1869.

Prof. Dr. Th. Reye.

Zur Geschichte der Telegraphie und des Elektromagnetismus.

Wenn es gestattet ist, nochmals auf die am Ende einer kleinen Mittheilung über die Geschichte der Telegraphie erwähnte Notiz (Jahrg. XIV, S. 351) in Betreff eines magnetischen Telegraphen zurückzukommen, so möchte ich zunächst ergänzend auf eine briefliche Mittheilung von Bertelli (in Comptes rendus LXVII, p. 785) hinweisen, in welcher hervorgehoben wird, dass eine ähnliche Idee sich schon früher (als 1836) in mehreren Werken finde, nämlich von:

S. B. Porta, 1558.
L. Barbieri in Parma, 1609.
Famiano Strada Romano, 1617.
Galilei, 1621—1623.
Nicolas Cabeo, 1627.

Sodann möchte ich auf folgende Stelle in der Vorrede eines 1869 in London bei Virtue u. Co. in zweiter Auflage erschienenen Buches von Robert Sabine: „The History and Progress of the Electric Telegraph" aufmerksam machen, welche eine etwas eingehendere Mittheilung über den fraglichen Gegenstand beibringt:

Mr. Bellamy has kindly called the author's attention to the fact that Galileo was fully alive to the importance which would attach to the employment of magnets for transmitting intelligence to a distance, but failed to see his way to the attainment of that. In one of his dialogues*) on the two great rival astronomical systems, written in 1632, he makes Sagredus say:

„Tu facis ut meminerim alicujus, qui mihi venditabat occultam artem, qua per acus magneticae sympathiam quandam, ex intervallo duorum triumve millium milliariorum, invicem colloqui liceret. Cumque dicerem,

---

*) Galilei Systema Cosmicum. Dial. I, gegen das Ende.

libenter empturum esse me, dummodo prius experimentum artis caperem, eamque ad rem sufficere, si ego in uno, ipso in alio cubiculi angulo consistamus, respondit mihi, operationem in tam exigua distantia cerni vix posse, quare dimisi hominem, ac dixi, mihi commodum non esse hoc tempore in Aegyptum aut Muscoviam illius experimenti capiendi causa tendere: si tamen ipse eo ire velit, me Venetiis manentem partes alteras obiturum."

Das erwähnte Werkchen von Sabine ist, nebenbei bemerkt, in Bezug auf seinen fachlichen Inhalt sehr empfehlenswerth; es trägt (auf seinen 278 Seiten, mit 134 Holzschnitten; Preis 3 Schillinge) auch den neuesten Verbesserungen im Gebiete der Telegraphie Rechnung und vernachlässigt dabei die geschichtliche Seite keineswegs. Unter Anderem findet sich S. 23 bezüglich der Entdeckung des Elektromagnetismus die Mittheilung, dass die Ablenkung der Magnetnadel und die Erweckung von Magnetismus in einer noch unmagnetischen Nadel bereits 1804 von Prof. Izarn in dessen „Manuel du Galvanisme" (Paris 1804) beschrieben worden sei, während Oersted's Entdeckung erst ins Jahr 1819 fällt. Der betreffende Paragraph in Izarn's Werk führt die Ueberschrift: „Appareil pour reconnaître l'action du galvanisme, sur la polarité d'une aiguille aimantée". Nach Beschreibung der Anordnung des Apparates, in welchem einfach eine frei beweglich aufgehängte Magnetnadel parallel neben einen vom galvanischen Strom durchlaufenen geraden metallischen Leiter gelegt wird, beschreibt Izarn die Wirkung mit folgenden Worten:

D'après les observations de Romagnési, physicien de Trente, l'aiguille déjà aimantée, et que l'on soumet ainsi au courant galvanique, éprouve une déclinaison; et d'après celles de J. Mojon, savant chimiste de Gènes, les aiguilles non aimantées acquièrent, par ce moyen, une sorte de polarité magnétique.

E. Zetzsche.

III.

Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber.

Von

Gustav Holzmüller

in Merseburg.

---

§ 1.
Einleitung.

In seinen Vorlesungen über Dynamik beschränkt sich Jacobi bei der Anwendung der Hamilton'schen Methode auf solche Probleme, bei welchen die Bewegung nur von der Configuration der Punkte, nicht aber von ihren Geschwindigkeiten abhängt. Diese Methode lässt sich jedoch, wie bereits Riemann bemerkt hat, auch auf manche Probleme anwenden, bei denen die Geschwindigkeiten in Frage kommen.

Handelt es sich um die gegenseitige Anziehung von Punkten und versteht man unter T die halbe lebendige Kraft, unter U diejenige Function, welche, nach den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes differentiirt, die Componenten der in jenem Punkte wirkenden Kraft giebt, so gilt, wenn U nur die Coordinaten und ausserdem die Zeit implicite oder explicite enthält, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängt, die Gleichung

$$1)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0.$$

Dabei wird die Variation so verstanden, dass die Grenzen nicht mit variirt werden. Diese Gleichung behält ihre Geltung auch dann, wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind, welche die Zeit enthalten dürfen; von solchen wollen wir jedoch ganz absehen.

Das Bestehen der Gleichung 1) wird als erstes Erforderniss von der Hamilton'schen Methode vorausgesetzt. Sie folgt aus den gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung und umgekehrt lassen sich die letzteren aus ihr ableiten.

Enthält nun aber U die Geschwindigkeiten, so ist es fraglich, ob aus der Gleichung 1) die gewöhnlichen Gleichungen der Bewegung folgen würden. Es muss also bei jedem Probleme untersucht werden, ob dies stattfindet oder nicht. Im ersteren Falle dürfen wir von jener Gleichung ausgehen, im anderen nicht. Sollte es uns aber im letzteren gelingen, eine andere Function U so zu bestimmen, dass, wenn wir sie an Stelle des früheren U in die Gleichung 1) einsetzen, aus derselben die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen folgen, so können wir diese neue Gleichung an die Spitze der weiteren Untersuchung stellen.

Eine allgemeinere Methode, dieses neue U zu finden, haben wir noch nicht. Einige kurze Bemerkungen über den Fall, wo das Potential aus zwei Theilen besteht, deren einer die Geschwindigkeiten enthält, während der andere frei von ihnen ist, gab Riemann in seinen Vorlesungen.

Ist jenes U auf irgend eine Weise gefunden, so werden independente Coordinaten $q_1 \ldots . q_\nu$ und, um die Differentialquotienten zu entfernen, neue Grössen $p_1 \ldots . p_\nu$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial q'_\mu} = p_\mu$$

eingeführt und aus der Gleichung 1) die Differentialgleichungen des Problems in den independenten Coordinaten abgeleitet. Die Hamilton'sche Methode ersetzt das System von Differentialgleichungen durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $(\nu+1)$ Variabelen, deren allgemeine Lösung V zu suchen ist, welche also ausser der additiven Constanten α noch ν andere arbiträre Constanten $\alpha_1 \ldots . \alpha_\nu$ enthält.

Gelingt es uns dann, nachzuweisen, dass die 2ν Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots , \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu,$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ldots , \frac{\partial V}{\partial q_\nu} = p_\nu,$$

wo die β neue willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen des obigen Systems von Differentialgleichungen sind, so war die Anwendung der Hamilton'schen Methode gerechtfertigt und das Problem ist auf die Ausführung gewisser Integrale reducirt. Gelingt uns aber dieser Beweis nicht, so sind die Resultate illusorisch.

Der allgemeine Beweis für den Fall, dass U nur die Coordinaten und die Zeit implicite oder explicite, nicht aber die Geschwindigkeiten enthält, findet sich bei Jacobi in der 20. Vorlesung. Für solche Fälle aber, wo U die Geschwindigkeiten enthält, ist stets eine besondere Untersuchung nöthig.

Für das hierher gehörende Problem der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber hat Neumann* auf einem eigenthümlichen Wege den Ausdruck U, welcher in die Gleichung 1) einzusetzen ist, gefunden und dadurch jenem Gesetze eine neue Bedeutung gegeben.

Dieses interessante Gesetz wird schon jetzt vielen Untersuchungen zu Grunde gelegt, scheint jedoch nach der Ansicht vieler Forscher berufen zu sein, in späterer Zeit eine noch grössere Rolle zu spielen. Sicher hat es grosse Wichtigkeit schon insofern, als es das Newton'sche als speciellen Fall in sich schliesst.

Wir wollen in Folgendem untersuchen, ob sich die Hamilton'sche Methode auf dieses Problem anwenden lässt, und zwar soll zunächst erörtert werden die Bewegung eines Punktes, welcher nach dem Weber'schen Gesetze von einem festen Centrum angezogen wird.

Ehe wir jedoch zu der eigentlichen Untersuchung übergehen, sind die nöthigen Bemerkungen über den Zusammenhang des Weber'schen mit dem Neumann'schen Ausdrucke vorauszuschicken.

Ist r die Entfernung des Punktes xyz von dem anziehenden Centrum, und m seine Masse, dann ist die in der Richtung von r wirkende Anziehung nach Weber:

$$2)\qquad R = -\frac{m}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Hier ist c eine sehr grosse Constante und zwar, wie man vermuthet, ungefähr die Geschwindigkeit des Lichtes.

Die gewöhnliche Kräftefunction würde also sein:

$$3)\qquad U_1 = \frac{m}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right).$$

Es ist klar, dass die Bewegung des Punktes in einer Ebene stattfindet, welche durch die Richtung von r und die des anfänglichen Stosses bestimmt wird; denn es ist kein Grund vorhanden, welcher den Punkt bestimmen sollte, diese Ebene zu verlassen. Wir beschränken uns also auf zwei Coordinaten.

Die Bewegungsgleichungen sind

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= R\,\frac{x}{r} = \frac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\frac{x}{r},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= R\,\frac{y}{r} = \frac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\frac{y}{r},\end{aligned}\right.$$

aus diesen folgt, wie leicht zu sehen:

---

* Neumann, Principien der Electrodynamik, Tübingen 1868. — Vergl. auch Seegers, Inauguraldissertation: *De motu perturbationibusque planetarum etc.* Göttingen 1864.

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\frac{\partial U_1}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} = 2\frac{dU_1}{dt},$$

und durch Integration:

$$5)\qquad T = U_1 + c_1.$$

Es gilt also das Princip der lebendigen Kraft, welches nicht ohne Weiteres angewendet werden durfte. Beiläufig sei bemerkt, dass auch das Flächenprincip gilt, da es sich um eine Centralkraft handelt.

Neumann hat nun gefunden, dass man auf die Bewegungsgleichungen 4) kommt, wenn man in die Gleichung 1) statt des gewöhnlichen U_1 einsetzt:

$$6)\qquad U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

und zwar ist er folgendermassen auf dieses U gekommen: Zieht das Centrum den Punkt xyz mit der Masse m nach dem Newton'schen Gesetze an, so gehört zur Entfernung r_0 das Potential $\frac{m}{r_0}$. Angenommen nun, das Potential käme nicht sofort zur Geltung, sondern würde mit endlicher Geschwindigkeit dem sich bewegenden Punkte zugeschickt, wie z. B. das Licht oder der Schall, so würde das zur Entfernung r_0 gehörende Potential den Punkt erst dann erreichen, wenn er sich in einer anderen Entfernung r befindet, so dass nicht $\frac{m}{r}$ das dort wirkende Potential ist, sondern $\frac{m}{r_0}$ oder, wie aus den Entwickelungen von Neumann hervorgeht, der Ausdruck

$$U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

wo c die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich das Potential im Raume fortbewegt.

Dass man jetzt wirklich von Gleichung 1) auf die Gleichungen 4) kommt, ist leicht zu zeigen. Ist T die halbe lebendige Kraft, so ist

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} mx'\,\delta x'\,dt + \int_{t_0}^{t_1} my'\,\delta y'\,dt.$$

Die Integration durch Theile giebt für jedes Integral der rechten Seite ein neues Integral und einen vom Integral freien Theil. Der letztere fällt weg, da die Endpositionen nicht mit variirt werden, so dass stehen bleibt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = -\,m\int_{t_0}^{t_1}(x''\,\delta x + y''\,\delta y)\,dt.$$

Aus $U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right)$ folgt ferner

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial r}\delta r + \frac{\partial U}{\partial r'}\delta r' = -\frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right)\delta r + \frac{2mr'}{rc^2}\,.\,\delta r',$$

also:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} U\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right)\delta r\,dt + \frac{2m}{c^2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{r'}{r}\,\delta r'\,dt.$$

Wendet man auf das letzte Integral die Integration durch Theile an und zieht man Alles zusammen, so folgt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} U\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2} + \frac{2rr''}{c^2}\right)\delta r\,dt = \int_{t_0}^{t_1} R\,\delta r\,dt.$$

Demnach ist:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(mx'' - R\frac{x}{r}\right)\delta x + \left(my'' - R\frac{y}{r}\right)\delta y\right]dt = 0.$$

δx und δy sind aber unabhängig von einander, so dass sich folgende Gleichungen ergeben:

$$mx'' = R\frac{x}{r}, \qquad my'' = R\frac{y}{r};$$

dies sind aber die obigen Bewegungsgleichungen.

Jetzt dürfen wir die Gleichung 1) zum Ausgangspunkte der Untersuchung nehmen.

§ 2.

Ableitung der Differentialgleichungen des Problems in independenten Coordinaten.

Als independente Coordinaten werden r und ϑ eingeführt durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

so dass $(T+U)$ eine Function von $r, r', \vartheta, \vartheta'$ wird. Man bilde

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$$

und wende die Integration durch Theile an, dann ergiebt sich, da die vom Integral freien Theile wegfallen, an Stelle von Gleichung 1) des § 1:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial r'}\right)\right]\delta r + \left[\frac{\partial(T+U)}{\partial\vartheta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial\vartheta'}\right)\right]\delta\vartheta\right\}dt.$$

Da δr und $\delta\vartheta$ unabhängig von einander sind, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial r'}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'}\right) = 0.$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen in der neuen Form.

Der Werth von $(T+U)$ in den neuen Coordinaten ist:

$$(T+U) = r'^2\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{rc^2}\right) + \frac{mr^2\vartheta'^2}{2} + \frac{m}{r}.$$

Jetzt sind neue Grössen p einzuführen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial r'} = p_1, \qquad \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} = p_2,$$

d. h.

$$p_1 = 2r'm\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right), \qquad p_2 = mr^2\vartheta'.$$

Bezeichnen wir nun $(T+U)$, sobald die neuen Grössen eingeführt sind, mit $|T+U|$, so erhalten wir:

$$|T+U| = \frac{p_1^2}{4m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{m}{r} = p_1 r' + p_2\vartheta' + \frac{m}{r}.$$

Für diesen Ausdruck gelten nun folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial |T+U|}{\partial p_1} = r', \qquad \frac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \vartheta',$$
$$\frac{\partial |T+U|}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} = 0,$$
$$\frac{\partial |T+U|}{\partial r} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{2m}{r^2}.$$

Setzt man diese Resultate in die obigen Gleichungen der Bewegung ein, so ergeben sich folgende Differentialgleichungen des Problems:

$$1)\quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial r} = -\dfrac{dp_1}{dt} - \dfrac{2m}{r^2}, \\ \beta) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial \vartheta} = -\dfrac{dp_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

und dazu kommen noch:

$$2)\quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial p_1} = \dfrac{dr}{dt}, \\ \beta) & \dfrac{\partial |T+U|}{\partial p_2} = \dfrac{d\vartheta}{dt}. \end{cases}$$

§ 3.

Aufstellung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Setzen wir:

$$V = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt \tag{1}$$

und bilden wir δV, jedoch so, dass auch die Endpositionen variirt werden, so fallen bei der Integration durch Theile nicht mehr die vom Integral freien Ausdrücke weg, so dass wir haben:

$$\delta V = \left| \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} \delta r + \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} \partial \vartheta \right|_{t_0}^{t_1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial (T+U)}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial r'}\right)\right] \delta r + \left[\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'}\right)\right] \delta \vartheta \right\} dt.$$

Nach dem Obigen ist der letztere Theil gleich Null; bezeichnen wir demnach mit r_0 und ϑ_0 die Anfangspositionen, mit r und ϑ die Endpositionen, so bleibt stehen:

$$\delta V = \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} \delta r - \frac{\partial (T+U)}{\partial r'_0} \delta r_0 + \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} \delta \vartheta - \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'_0} \delta \vartheta_0.$$

Betrachten wir aber V als Function der Anfangs- und Endpositionen und der verflossenen Zeit, so ist:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial r_0} \delta r_0 + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_0} \delta \vartheta_0 + \frac{\partial V}{\partial r} \delta r + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \delta \vartheta.$$

Vergleicht man die beiden letzten Ausdrücke und setzt man, da die Variationen willkürlich sind, die entsprechenden Factoren gleich, so entstehen folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial (T+U)}{\partial r'} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'} = p_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_0} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial r'_0} = -p_{0_1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta_0} = -\frac{\partial (T+U)}{\partial \vartheta'_0} = -p_{0_2}.$$

Die p lassen sich demnach ersetzen durch partielle Differentialquotienten von V nach den independenten Coordinaten.

Wir betrachteten soeben V als Function der Anfangs- und Endcoordinaten und der verflossenen Zeit t; letztere ist in V sowohl explicite enthalten, als auch implicite in den Endcoordinaten, nicht aber in den Anfangscoordinaten, so dass

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}. \tag{3a}$$

Ferner giebt die Differentiation der Gleichung 1) nach der oberen Grenze t:

3b) $$\frac{dV}{dt} = T + U.$$

Durch Subtraction von 3a) und 3b) erhalten wir:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - (T+U),$$

oder wenn man setzt:

$$\psi = \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - (T+U) = p_1 r' + p_2 \vartheta' - |T+U|$$
$$= 2|T+U| - \frac{2m}{r} - |T+U| = |T+U| - \frac{2m}{r},$$

4) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

In diese Gleichung kann man an Stelle von r, r', ϑ und ϑ' einführen r, ϑ, p_1, p_2; p_1 und p_2 aber lassen sich ersetzen durch $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, so dass in Gleichung 4) nur noch vorkommen r, ϑ, t, $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$. Durch diese Transformationen geht also Gleichung 4) über in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Variabelen, durch welche V definirt wird als Function von r, t und ϑ.

§ 4.

Beweis für die Anwendbarkeit der Hamilton'schen Methode auf unser Problem.

Es ist der Beweis für folgende Behauptung zu liefern:

Ist V eine allgemeine Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, d. h. ein Integral, welches ausser der additiven Constanten α noch zwei andere arbiträre Constanten α_1 und α_2 enthält, und setzen wir:

I) $$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2,$$

wo β_1 und β_2 neue willkürliche Constanten sind, und nehmen wir dazu aus Gruppe 2) des § 3 folgende Gleichungen:

II) $$\frac{\partial V}{\partial r} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = p_2,$$

so wird behauptet, dass diese Gleichungen die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen am Schluss von § 2 sind.

Beweis. Der Beweis ist geliefert, wenn gezeigt wird, dass die Differentiation der Gleichungen I) und II) nach t auf die obigen Differentialgleichungen führt.

Die Gleichungen I) gelten zunächst identisch für jedes beliebige t, z. B. auch für $(t+dt)$; differentiire ich also beiderseits vollständig nach t, so darf ich beide Seiten gleich setzen. Da nun t sowohl explicite in $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}$ vorkommt, als auch implicite (in r und ϑ), so ergiebt sich:

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt},\\ 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Ferner darf ich die Gleichung 4) in § 3 partiell nach den α differentiiren, da die α willkürlich sind, also die Gleichung auch identisch für $(\alpha+d\alpha)$ gilt. Man erhält:

$$\text{b)}\quad \left\{\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,.\,\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1},\\ 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,.\,\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist aber

$$\psi=\frac{\partial V}{\partial r}\,r'+\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,.\,\vartheta'-(T+U),$$

wo r', ϑ', $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$ vermittelst der Gleichungen:

$$r'=\frac{p_1}{2m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{rc^2}\right)},\qquad \vartheta'=\frac{p_2}{mr^2},$$

$$p_1=\frac{\partial V}{\partial r},\qquad p_2=\frac{\partial V}{\partial\vartheta},$$

durch r, ϑ, p_1 und p_2 zu ersetzen sind. Hat man auf diese Weise ψ als Function von t, r, ϑ, p_1 und p_2 dargestellt, so sind offenbar α_1 und α_2 in ψ nur insofern enthalten, als sie in p_1 und p_2 vorkommen; die Gleichungen b) gehen also über in:

$$\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,dt}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_1},\\ 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_2},\end{aligned}$$

oder in:

$$\text{c)}\quad \left\{\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_2},\\ 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_2}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungssysteme a) und c) haben dieselben Coefficienten. Giebt also die Auflösung derselben etwas Bestimmtes, so müssen sich für die Unbekannten dieselben Werthe ergeben, d. h. es muss sein:

5) $$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\qquad \frac{\partial\vartheta}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_2},$$

so dass wir die Auflösung der Gleichungen a) umgangen haben durch Aufstellung des Systems c). Etwas Bestimmtes aber geben die Gleichungen (insofern die Coefficienten derselben endlich bleiben, was immer angenommen wird) stets dann, wenn die Determinante der Coefficienten verschieden von Null ist, d. h. sobald

$$R=\Sigma\pm\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}\right)=\Sigma\pm\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)\lessgtr 0.$$

„Wäre aber $R=0$, so wären die Grössen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}$ und $\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}$, als Functionen von r und ϑ betrachtet, nicht unabhängig von einander, d. h. es müsste zwischen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}$, $\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}$, α_1, α_2 und t eine Gleichung existiren, welche r und ϑ nicht enthielte. Ebenso wären $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$, als Functionen von α_1 und α_2 betrachtet, nicht unabhängig von einander, und es müsste zwischen $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$, r, ϑ und t eine Gleichung existiren, in welcher α_1 und α_2 nicht vorkämen. Man hätte also eine Gleichung von der Form:

$$0=F\left(t,\ r,\ \vartheta,\ \frac{\partial V}{\partial r},\ \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right),$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die vorausgesetzte Lösung V genügen müsste und welche $\frac{\partial V}{\partial t}$ nicht enthält. Dies ist aber unmöglich, wenn V wirklich eine vollständige Lösung von Gleichung 4) sein soll." Die Begründung davon ist wörtlich dieselbe, wie bei Jacobi S. 161 etc.

Sobald also V wirklich eine vollständige Lösung der betreffenden Gleichung ist, kann R nicht Null werden. Der Schluss auf das Bestehen der Gleichungen 5) war demnach ein berechtigter.

Sind nun die Gleichungen 5) identisch mit den Gleichnngen 2) in § 2, nämlich mit

$$\frac{\partial\,|T+U|}{\partial p_1}=\frac{dr}{dt},\qquad \frac{\partial\,|T+U|}{\partial p_2}=\frac{d\vartheta}{dt},$$

so sind wirklich die Gleichungen I) die Integralgleichungen der letzteren. Und dies ist der Fall, denn in § 3 war

$$\psi=|T+U|-\frac{2m}{r},$$

folglich

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_1}=\frac{\partial\,|T+U|}{\partial p_1}=\frac{dr}{dt},$$

und ebenso

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_2}=\frac{\partial\,|T+U|}{\partial p_2}=\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Also: die Gleichungen I) sind die Integralgleichungen der Differentialgleichungen 2) in § 2.

Um dasselbe für die Gleichungen II) zu beweisen, differentiiren wir dieselben vollständig nach t und erhalten:

$$\text{d)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r}\,\frac{dr}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{dt},\\ \frac{dp_2}{dt}&=\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\vartheta}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r}=\frac{\partial p_1}{\partial r},\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\vartheta}=\frac{\partial p_1}{\partial\vartheta},\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial\vartheta}=\frac{\partial p_2}{\partial\vartheta},$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial r}=\frac{\partial p_2}{\partial r}$$

ist; da ferner nach den Gleichungen 5)

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_2},$$

so geht das System d) über in:

$$\text{e)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_2},\\ \frac{dp_2}{dt}&=\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_2}.\end{aligned}\right.$$

Die partielle Differentiation der Gleichung 4) nach r und ϑ giebt aber, da r und ϑ zunächst in $\frac{\partial V}{\partial t}$, dann aber in ψ sowohl explicite, als auch implicite in den p vorkommen,

$$\text{f)}\quad \left\{\begin{aligned} 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial r},\\ 0&=\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},\end{aligned}\right.$$

so dass wir durch Subtraction der Systeme e) und f) erhalten:

$$6)\qquad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

Da jedoch $\psi=|T+U|-\frac{2m}{r}$ ist, so folgt ans 6)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=-\frac{\partial\,|T+U|}{\partial r}-\frac{2m}{r^2},\\ \frac{dp_2}{dt}&=-\frac{\partial\,|T+U|}{\partial\vartheta}=0.\end{aligned}\right.$$

Dies sind aber die Gleichungen 1) in § 2. Also: die Gleichungen II) sind die Integralgleichungen der entsprechenden Differentialgleichungen.

Damit ist der Beweis für die Anwendbarkeit der Hamilton'schen Methode auf unser Problem geliefert, und zwar in einer Form, in welcher er sich höchst einfach auf beliebig viele Variabelen ausdehnen lässt. Jetzt sind wir überzeugt davon, dass die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung richtige Resultate liefern wird.

§ 5.
Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Ersetzt man in der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r} r' + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \vartheta' - \frac{p_1^2}{4m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} - \frac{p_2^2}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0$$

r' und ϑ' durch die p, und dann p_1 und p_2 durch $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, so geht sie über in:

$$4^*) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \cdot \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 \frac{1}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0.$$

t kommt nur in $\frac{\partial V}{\partial t}$, sonst nicht explicite vor, deshalb setzen wir versuchsweise $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha_1$, oder $V = \alpha_1 t + W$, wo α_1 eine willkürliche Constante, W aber constant nach t ist, so dass, da $\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r}$ ist, die Gleichung übergeht in:

$$\alpha_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \cdot \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0.$$

Da ϑ nur in $\frac{\partial W}{\partial \vartheta}$, sonst nicht explicite vorkommt, so setzen wir:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \alpha_2, \qquad W = \alpha_2 \vartheta + Z,$$

wo Z constant nach t und ϑ ist, also $\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial r}$. Die Gleichung geht über in

$$\alpha_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 \frac{rc^2}{2m(rc^2+2)} + \frac{\alpha_2^2}{2mr^2} - \frac{m}{r} = 0,$$

also

$$\frac{\partial Z}{\partial r}=\sqrt{2m}\sqrt{\left(\frac{m}{r}-\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1+\frac{2}{rc^2}\right)},$$

d. h.

$$Z=\sqrt{2m}\int\sqrt{\left(\frac{m}{r}-\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1+\frac{2}{rc^2}\right)}\,dr,$$

so dass sich als allgemeine Lösung der Gleichung 4*) ergiebt

A) $$V=\alpha_1 t+\alpha_2\vartheta+\sqrt{2m}\int\sqrt{\left(\frac{m}{r}-\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{2mr^2}\right)\left(1+\frac{2}{rc^2}\right)}\,dr.$$

Die Integralgleichungen für das mechanische Problem sind, wie oben nachgewiesen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1=t+\frac{\partial Z}{\partial \alpha_1},\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2=\vartheta+\frac{\partial Z}{\partial \alpha_2},$$

also

B) $$t=\beta_1+m\int\frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,.\,dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}-2\alpha_1 m}}.$$

Dieses Integral giebt den Zusammenhang zwischen t und r.

Ferner erhalten wir:

C) $$\vartheta=\beta_2+\alpha_2\int\frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}-2\alpha_1 m}},$$

wodurch der Zusammenhang zwischen ϑ und r gegeben ist.

Führt man in das letzte Integral $Z=\frac{1}{r}$ ein, so geht die Gleichung über in

C*) $$\vartheta=\beta_2-\alpha_2\int\frac{\sqrt{1+\frac{2Z}{c^2}}\,dZ}{\sqrt{2m^2Z-2\alpha_1 m-\alpha_2^2 Z^2}}.$$

§ 6.

Constantenbestimmungen etc.

Aus Gleichung B) folgt:

$$dt=\frac{m\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}-2\alpha_1 m}}.$$

Aus Gleichung C) folgt:

$$d\vartheta=\frac{\alpha_2\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}-2\alpha_1 m}}$$

und durch Division der beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\alpha_2 = m r^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Da aber $r^2 d\vartheta$ der doppelte Flächeninhalt eines Elementes ist, welches der Radius vector beschreibt, so ist α_2 dieselbe Constante, welche uns das Flächenprincip giebt. Dass letzteres hier gilt, wurde schon oben erwähnt.

Ist also der Anfangszustand gegeben durch

$$t_0,\ r_0,\ \vartheta_0, \qquad v_0 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_0},$$

und den Winkel β_0, welchen die Anfangsgeschwindigkeit mit dem Radius vector r_0 bildet, so dass

$$ds_0 \sin\beta_0 = r_0\, d\vartheta_0, \qquad ds_0 \cos\beta_0 = dr_0,$$

und demnach

$$v_0 \cos\beta_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t_0}, \qquad v_0 \sin\beta_0 = r_0 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{t_0},$$

so ergiebt sich:

$$\alpha_2 = m r_0^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_{t_0} = m r_0 v_0 \sin\beta_0.$$

Ferner folgt aus

$$v \cos\beta = \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m}}{m\sqrt{1 + \frac{2}{rc^2}}},$$

$$m^2 \left(1 + \frac{2}{rc^2}\right) v^2 \cos^2\beta = \frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m,$$

oder wenn der Werth für α_2 eingesetzt wird:

$$2\alpha_1 = -m v^2 + \frac{2m}{r}\left(1 - v^2 \cos^2\beta \frac{1}{rc^2}\right)$$

$$= -m v^2 + \frac{2m}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) = -m v^2 + 2U_1,$$

also $T = U_1 - \alpha_1$, so dass α_1 die Constante ist, welche aus dem Princip der lebendigen Kraft hervorgeht. Sie bestimmt sich aus dem Anfangszustande als

$$2\alpha_1 = -m v_0^2 + \frac{2m}{r_0}\left(1 - v_0^2 \cos^2\beta_0 \frac{1}{r_0 c^2}\right).$$

Zugleich hat es sich an dieser Stelle bestätigt, dass das Princip der lebendigen Kraft für unser Problem Geltung hat.

Um die Bedeutung der Constanten β festzustellen, müssen wir den Integralen bestimmte Grenzen geben. Setzen wir als untere Grenze einen bestimmten Zahlenwerth r_0 fest, so ergiebt sich aus:

$$\text{B)} \qquad t = m \int^{r} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}=2\alpha_1 m}} + \beta_1,$$

dass für $r=r^0$, d. h. $t=t_0$, rechts nur stehen bleibt β_1, so dass β_1 der Anfangswerth von t ist. Ebenso folgt aus C), dass β_2 der Anfangswerth von ϑ ist.

Da t und β stets reell sein müssen, so folgt aus Gleichung B) (wo die im Zähler stehende Wurzel nie imaginär wird, weil r stets positiv ist), dass die im Nenner stehende Wurzel nie imaginär werden darf, woraus sich für r ein Maximal- und Minimalwerth ergeben wird. Diese bestimmen sich durch die Gleichung

$$\frac{2m^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2\alpha_1 m = 0$$

als

$$r_1 = \frac{m}{2\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha_1}\sqrt{m^2 - \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{m}}$$

und

$$r_2 = \frac{m}{2\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_1}\sqrt{m^2 - \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{m}},$$

sind also, wenn c gegeben ist, leicht aus dem Anfangszustande zu berechnen.

Die möglichen Lagen des angezogenen Punktes sind demnach beschränkt auf einen Ring zwischen zwei concentrischen Kreisen, die mit den Radien r_1 und r_2 um das anziehende Centrum geschlagen sind.

Was die Ausführung der elliptischen Integrale anbetrifft, so verweisen wir auf die Dissertation von Seegers, wo sie elegant behandelt sind.

Für das Maximum und Minimum des Abstandes wollen wir die Namen Aphelium und Perihelium beibehalten. Seegers hat nachgewiesen, dass aufeinanderfolgende Perihelia und Aphelia nicht um dem Winkel π, wie bei dem Newton'schen Gesetz, sondern um einen andern von einander abstehen.

Diese Bemerkung soll mit Hilfe des Obigen dazu dienen, uns ein Bild von der stattfindenden Bewegung zu verschaffen.

Aus der Gleichung des Flächenprincips

$$m r^2 \vartheta' = \alpha_2$$

folgt zunächst, dass ϑ' nie sein Zeichen ändert, dass also die Bewegung stets in demselben Sinne vor sich geht. Sie umschliesst stets den kleinen Kreis und wird von dem grösseren umschlossen.

Ferner ist auf Grund desselben Princips die Geschwindigkeit umgekehrt proportional der Entfernung des Centrums von der Tangente der Bahn, so dass sie am langsamsten im Aphelium ist. Endlich ergiebt sich, dass zu demselben r dasselbe ϑ' gehört.

Aus dem Princip der lebendigen Kraft folgt durch Elimination der Constanten α

$$T - T^1 = U_1 - U_1^1$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(r'^2 + r^2 \vartheta'^2\right) - \left(r_1'^2 + r_1^2 \vartheta_1'^2\right)\right] = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) - \frac{1}{r_1^2}\left(1 - \frac{r_1'^2}{c^2}\right).$$

Für gleiche r ergiebt sich also, da zu denselben gleiche ϑ' gehören,

$$\tfrac{1}{2}\left(r'^2 - r_1'^2\right) = \frac{1}{c^2 r^2}\left(r_1'^2 - r'^2\right),$$

eine Gleichung, die nur möglich ist, wenn

$$r' = \pm r'_1.$$

Folglich gehören zu gleichen r stets gleiches ϑ' und gleiches r' (abgesehen vom Vorzeichen), also auch gleiches $\frac{ds}{dt}$ und abgesehen vom Zeichen gleiches $\frac{dr}{d\vartheta}$ und $\frac{dr}{r d\vartheta}$; in Worten also:

Wird irgend ein um das Centrum geschlagener Kreis von dem angezogenen Punkte öfters durchschnitten, so geschieht dies stets mit derselben Geschwindigkeit und, abgesehen vom Vorzeichen, unter demselben Winkel.

Daraus ergeben sich folgende wichtige Eigenschaften der Bahn:

Ist P ein Perihelium und A das darauf folgende Aphelium, so ist der Weg von A nach dem folgenden Perihelium P_1 congruent dem Wege von P nach A und symmetrisch gegen die Linie AC gelegen, wenn C das Centrum bedeutet. Der Weg von P_1 nach A_1 ist congruent dem von A nach P_1 und symmetrisch gegen die Linie $P_1 C$ gelegen u. s. w.

Die Aphelia folgen also in gleichen Winkelabständen auf einander, ebenso die Perihelia unter denselben Winkelspannungen. Ist diese letztere γ und $\frac{\gamma}{\pi}$ irrational, so hat die Bahn unendlich viele congruente Arme; ist $\frac{\gamma}{\pi}$ rational, so ist die Anzahl dieser Arme endlich und die Bahn läuft in sich selbst zurück. Sie hat zunächst so viele Symmetrieaxen durch c, als Perihelia und Aphelia zusammengenommen. Verbindet man ausserdem einen Punkt, in welchem zwei Arme der Bahn sich schneiden, mit dem Centrum, so entsteht wieder eine Symmetrieaxe. Auch von dieser letzteren Gruppe haben wir entweder eine endliche oder eine unendliche Anzahl.

Für $c = \infty$, wo also das Potential keine Zeit gebraucht, um den angezogenen Punkt zu erreichen, stimmt das Gesetz mit dem Newton'schen überein, und die Bahn des Punktes wird, wenn nur r_1 endlich bleibt, eine Ellipse. Dann ist der Abstand der einzelnen Aphelia unendlich klein, d. h. $\gamma = 0$. Ist c sehr gross, so ist die Bahn nahezu eine Ellipse und γ wird sehr klein sein. Ein ungefähres Bild der Bahn für sehr grosses c (und c ist in Wahrheit sehr gross) könnte man also etwa auf folgendem Wege erhalten: Es bewege sich ein Punkt nach dem Newton'schen Gesetze auf einer Ellipse, während dieser Bewegung aber drehe sich die Ellipse sehr langsam um den Brennpunkt, in welchem sich die anziehende Kraft befindet.

§ 7.

Dasselbe Problem für drei Coordinaten.

Um zu zeigen, wie schnell die Hamilton'sche Methode zum Ziele führt, wollen wir dasselbe Problem noch einmal kurz für drei Coordinaten durchführen.

Die independenten Coordinaten werden eingeführt durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

so dass

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\,\psi'^2,$$

also

$$T = \frac{m}{2}\left(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\sin^2\varphi\,\psi'^2\right).$$

Ferner ist

$$U = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right),$$

also

$$1)\qquad (T+U) = r'^2 m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right) + \frac{mr^2}{2}\varphi'^2 + \frac{mr^2\sin^2\varphi}{2}\psi'^2 + \frac{m}{r}.$$

Die Einführung der p geschieht durch die Gleichungen

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial r'} = p_1 = 2mr'\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right),\quad \text{also } r' = \frac{p_1}{2m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)},$$

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial\varphi'} = p_2 = mr^2\varphi',\qquad \text{also } \varphi' = \frac{p_2}{mr^2},$$

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = p_3 = mr^2\sin^2\varphi\,\psi',\qquad \text{also } \psi' = \frac{p_3}{mr^2\sin^2\varphi}.$$

Das transformirte $(T+U)$ wird demnach

$$2)\qquad |T+U| = \frac{p_1^2}{4m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} + \frac{p_2^2}{2mr^2} + \frac{p_3^2}{2mr^2\sin^2\varphi} + \frac{m}{r}.$$

Dieses hat die Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial|T+U|}{\partial p_1} = \frac{2p_1}{4m\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{rc^2}\right)} = r';\quad \frac{\partial|T+U|}{\partial p_2} = \frac{2p_2}{2mr^2} = \varphi';$$

$$\frac{\partial|T+U|}{\partial p_3} = \frac{2p_3}{2mr^2\sin^2\varphi} = \psi';$$

ferner, dass

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial r} = -\frac{\partial\,|T+U|}{\partial r} - \frac{2m}{r^2}; \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial\,|T+U|}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial \psi} = -\frac{\partial\,|T+U|}{\partial \psi} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen von der Form

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'}\right) = 0,$$

wo die q die independenten Coordinaten sind, gehen über in

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial r} = -\dfrac{d p_1}{dt} - \dfrac{2m}{r^2}, \\ \beta) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial \varphi} = -\dfrac{d p_2}{dt}, \\ \gamma) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial \psi} = -\dfrac{d p_3}{dt} = 0, \end{cases}$$

wozu noch treten

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial p_1} = r'. \\ \beta) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial p_2} = \varphi'. \\ \gamma) & \dfrac{\partial\,|T+U|}{\partial p_3} = \psi'. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = V,$$

so ergiebt sich

$$\text{III.} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial(T+U)}{\partial r'} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi'} = p_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial(T+U)}{\partial \psi'} = p_3.$$

Ferner folgt aus

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\cdot\frac{d\psi}{dt}$$

und

$$\frac{dV}{dt} = T+U$$

die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + p_1 r' + p_2 \varphi' + p_3 \psi' - (T+U) = 0,$$

oder

$$\text{IV.} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \frac{r c^2}{2m(2+rc^2)} + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{2mr^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m \sin^2\varphi} - \frac{m}{r} = 0.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung 1[ter] Ordnung mit vier Variabelen. Um sie zu integriren, setzen wir versuchsweise

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\alpha_1, \quad \text{also } V=\alpha_1 t+W,$$

so dass die Gleichung übergeht in

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\frac{r c^2}{2+r c^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\right]=\frac{m^2}{r}-\alpha_1 m.$$

Wir fügen beiderseits $-\frac{\alpha_2^2}{r^2}$ hinzu und setzen

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\frac{r c^2}{2+r c^2}=\frac{m^2}{r}-\alpha_1 m-\frac{\alpha_2^2}{r^2},$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial r}=\sqrt{2\left(\frac{m^2}{r}-\alpha_1 m-\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{2}{r c^2}\right)},$$

d. h.

$$W=\int\sqrt{\left(\frac{2 m^2}{r}-2\alpha_1 m-\frac{2\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{2}{r c^2}\right)}dr+P,$$

so geht die Gleichung über in

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\right]-\frac{\alpha_2^2}{r^2}=0,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\right]=\alpha_2^2.$$

Fügt man beiderseits $-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}$ hinzu und setzt man

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2=\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\varphi},$$

also

$$P=\int\sqrt{2\alpha_2^2-\frac{2\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+Z,$$

so verwandelt sich die Gleichung in

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}$$

oder

$$Z=\int\alpha_3\sqrt{2}\,d\psi=\psi\alpha_3\sqrt{2}+(\alpha).$$

Demnach ist das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung

$$\text{A)}\qquad V=\alpha_1 t+\int\sqrt{\left(\frac{2m^2}{r}-2\alpha_1 m-\frac{2\alpha_2^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{2}{r c^2}\right)}\,dr$$
$$+\int\sqrt{2\alpha_2^2-\frac{2\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\psi\alpha_3\sqrt{2}+(\alpha),$$

während die Differentialgleichungen des Problems sind

B) $$\beta_1 = t - m \int \frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{\sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}},$$

C) $$\beta_2 = -\int \frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}} + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\alpha_2^2 - \frac{2\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Das letztere Integral geht durch die Substitution

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\,.\cos\eta,$$

$$\sin\varphi\,d\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin\eta\,d\eta$$

über in

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha_2^2}}\int d\eta = \left|\frac{\eta}{\sqrt{2\alpha_2^2}}\right|_{Gr_1}^{Gr_2},$$

so dass wir erhalten:

C*) $$\beta_2 = -\int \frac{\sqrt{1+\frac{2}{rc^2}}\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2m^2}{r} - 2\alpha_1 m - \frac{2\alpha_2^2}{r^2}}} + \left|\frac{\eta\,.}{\sqrt{2\alpha_2^2}}\right|_{Gr_1}^{Gr_2}.$$

Die letzte Gleichung endlich ist

D) $$\psi - \beta_3 = \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Führt man hier $cotg\,\varphi$ als Variabele ein, so entsteht

$$\psi - \beta_3 = -\alpha_3 \int \frac{d\,ctg\,\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_3^2\,ctg^2\varphi}} = -\operatorname{arc\,cos}\left(\sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}\,cotg\,\varphi\right),$$

woraus zunächst folgt

E) $$\cos(\psi - \beta_3) = \sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}\,.\,cotg\,\varphi,$$

so dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

Da φ nur Werthe zwischen 0 und 180° annimmt, so ergiebt sich aus den nach φ genommenen Integralen, dass der Minimalwerth von $\sin\varphi$ ist $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$. Ist also J die Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ekliptik, für welche $\varphi = 90°$ ist, so ist das Minimum von $\sin\varphi$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \sin(90° - J) = \cos J.$$

Da also

$$\sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2-\alpha_3^2}}=\sqrt{\frac{\alpha_2^2\,cos^2 J}{\alpha_2^2-\alpha_2^2\,cos^2 J}}=\pm\,cotg\,J$$

ist, so lässt sich Gleichung E) auch schreiben

E*) $$cos\,(\psi-\beta_3)=\pm\,cotg\,J\,.\,cotg\,\varphi.$$

Für $\varphi=90^0$ ist $cos.(\psi-\beta_3)=0$, also $(\psi-\beta_3)=\pm 90^0$. Das zu $\varphi=90^0$ gehörende ψ ist aber die Länge des auf-, resp. absteigenden Knotens, d. h. β_3 ist die Länge des aufsteigenden Knotens $\mp 90^0$.

Geben wir nun, um die Bedeutung der sämmtlichen Constanten kennen zu lernen, den unteren Grenzen der Integrale bestimmte Zahlenwerthe, so folgt aus Gleichung D), dass β_3 der Anfangswerth von ψ ist. Die Anfangslage des Planeten ist also der tiefste oder höchste Punkt der Bahn. Daraus folgt, dass

$$\varphi_0=\left(\frac{\pi}{2}\pm J\right)$$

ist. Letzteres kann man auch aus Gleichung E*) ablesen, denn da

$$\psi_0-\beta_3=0$$

ist, so folgt

$$1=\pm\,cotg\,J\,cotg\,\varphi\,,$$

also, da φ nur positive Werthe zwischen 0^0 und 180^0 annimmt,

$$\varphi_0=\left(\frac{\pi}{2}\pm J\right).$$

β_2 würde sich aus Gleichung C*) als Null ergeben. Um dies zu verificiren, können wir ähnlich, wie bei Jacobi S. 188, folgende Betrachtung anstellen:

Aus

$$cos\,\varphi_0=cos\left(\frac{\pi}{2}\mp J\right)=\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}$$

und der obigen Substitution

$$cos\,\varphi=\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\,.\,cos\,\eta$$

ergiebt sich, dass der Anfangswerth von η Null ist, also Gleichung C*) übergeht in

$$\beta_2=-\int\frac{\sqrt{1+\frac{2}{r\,c^2}}\,.\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2\,m^2}{r}-2\,\alpha_1\,m-\frac{2\,\alpha_2^2}{r^2}}}+\frac{\eta}{\sqrt{2\,\alpha_2^2}}.$$

Nun ist aber φ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Katheten η und $(90^0-\eta)$ sind (vergl. Zeichnung bei Jacobi). η ist also gleich 90^0 vermindert um die Entfernung des Planeten vom aufsteigenden Knoten. Für $r=r_0$ verschwindet das Integral und η geht über in 90^0 vermindert um die Entfernung der Anfangslage des Planeten vom aufsteigenden Knoten, so dass sich für β_2 folgende geometrische Bedeutung ergiebt:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha_2^2}}\left[90^0 - \begin{array}{r}(\text{Entfernung der Anfangslage des Planeten} \\ \text{vom aufsteigenden Knoten})\end{array}\right].$$

Diese Entfernung beträgt aber 90^0, also ist wirklich $\beta_2 = 0$.

Differentiirt man die Gleichungen B), C) und D) nach den entsprechenden Variabelen und vergleicht man die Resultate, so ergiebt sich, dass

$$\frac{dt}{m r^2} = \frac{d\psi}{\alpha_3} \sin^2 \varphi$$

oder

$$\frac{\alpha_3}{m} dt = r^2 \sin^2 \varphi \, d\psi.$$

Demnach ist $\frac{\alpha_3}{m}$ die Projection der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die xy-Ebene, die wirkliche doppelte Flächengeschwindigkeit aber muss sein

$$\frac{\alpha_3}{m} \cdot \frac{1}{\cos J} = \frac{\alpha_3}{m} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2}{m};$$

α_2 also behält die Bedeutung, wie in § 6; α_3 ergiebt sich aus der Gleichung $\alpha_3 = \alpha_2 \cos J$, α_1 endlich ist wiederum die aus dem Princip der lebendigen Kraft entspringende Constante. Diese Constanten ergeben sich sämmtlich aus dem Anfangszustande.

In Betreff der Ausführung der elliptischen Integrale können wir wiederum auf Seegers verweisen.

Anhang.

Da in unserem Probleme t nicht explicite vorkommt und ausserdem das Princip der lebendigen Kraft gilt, so lässt sich alles das, was Jacobi in der 21. Vorlesung sagt, auf dasselbe ausdehnen, so dass man den Weg zur partiellen Differentialgleichung bedeutend abkürzen kann.

Man führe eine neue unabhängige Variabele α durch die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ ein und setze für V eine neue Function $W = V - t\alpha = V - t\frac{\partial V}{\partial t}$, so dass $t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ wird und Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

übergeht in eine Gleichung von der Form

$$2) \qquad \alpha + \psi\left(q_1 \ldots q_\nu \frac{\partial W}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\nu}\right) = 0.$$

Ist W durch Integration ermittelt, so lässt sich leicht zeigen, dass die Integralgleichungen sind

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\ldots,\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_{\nu-1}}=\beta_{\nu-1},\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha}=\tau-t,\\ \dfrac{\partial W}{\partial q_1}=p_1,\ldots,\ \dfrac{\partial W}{\partial q_{\nu-1}}=p_{\nu-1},\ \dfrac{\partial W}{\partial q_\nu}=p_\nu. \end{array}\right.$$

Nun lautet aber das Princip der lebendigen Kraft

$$4)\qquad 0=\alpha+T-U,$$

und es lässt sich zeigen, dass die Gleichungen 2) und 4) identisch sind.

Für alle Probleme, bei denen es sich um Anziehungen nach dem Weber'schen Gesetze handelt, lässt sich also, wenn t nicht explicite vorkommt und das Princip der lebendigen Kraft bestehen bleibt, die partielle Differentialgleichung auf folgendem Wege finden:

Man bringe in der Gleichung der lebendigen Kraft die Transformationen der Hamilton'schen Methode an und setze $p_i=\dfrac{\partial W}{\partial q_i}$, so erhält man sofort die partielle Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung, aus welcher dann die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen folgen.

Um dies für unser Problem zu zeigen und dabei die früheren Transformationen zu benutzen, führen wir in Gleichung 4) ein

$$U=-U_1+\frac{2m}{r},$$

so dass sie übergeht in

$$5)\qquad T+U-\frac{2m}{r}=-\alpha_1$$

oder, nach Gleichung 2) in § 7,

$$\frac{p_1^2}{4m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{rc^2}\right)}+\frac{p_2^2}{2mr^2}+\frac{p_3^2}{2mr^2\sin^2\varphi}-\frac{m}{r}=-\alpha_1.$$

Setzt man also $p_i=\dfrac{\partial W}{\partial q_i}$, so entsteht

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\frac{rc^2}{2+rc^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\right]=\frac{m^2}{r}-m\alpha_1.$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der in § 7 für W abgeleiteten.

IV.

Beiträge zur Molecularphysik.

(Zweite Folge.)

Von

Professor Dr. WITTWER

in Regensburg.

Unter diejenigen physikalischen Disciplinen, welche gegenwärtig nur sehr wenig cultivirt werden, gehört sicherlich die Lehre vom Aether; ist es doch fast so weit gekommen, dass Arbeiten über diesen Gegenstand mit mitleidigem Lächeln begrüsst werden, ja dass es nicht an Schriften fehlt, welche die Existenz des Aethers ganz und gar leugnen. Seitdem die Lehre von der Wärme sich von dem Aether abgewendet, ist eigentlich nur noch die Optik, die Lehre, welche zuerst die Existenz des Aethers nachwies, diejenige, welche ihn hält, aber glücklicherweise fest hält; denn ohne sie wäre er längst über Bord geworfen worden.

Wenn ich es nun wage, im Nachstehenden der gelehrten Welt eine Arbeit vorzulegen, in welcher der Aether eine Hauptrolle spielt, so möge dieses seine Entschuldigung darin finden, dass ich glaube, dass der Aether mit Unrecht vernachlässigt wird. Wenn der Aether, wie die Optik zeigt, einen Bestandtheil der Körper ausmacht, so ist es zu verwundern, dass man ihn in den Lehrbüchern der Chemie vergeblich unter der Reihe der Elemente sucht. Bei der Allgegenwart des Aethers in den Körpern spielt derselbe in der Chemie sicherlich eine nicht weniger wichtige Rolle, als die ist, welche man gegenwärtig dem Sauerstoff einräumt, und es wird eine Zeit kommen, in welcher ein Lehrbuch der Chemie nach Entfernung alles dessen, was vom Aether handelt, nicht weniger lückenhaft aussehen würde, als es heutzutage ein Chemiebuch wäre, das den Sauerstoff ignorirt.

Würde man den Beweis von der Existenz des Aethers nur auf das geringe Hinderniss stützen können, das er dem Enke'schen Kometen in den Weg legt, so wäre es wohl leicht, Mittel zu finden, welche diese Rolle für ihn spielen können; denn man dürfte nur, wie Meibauer* gethan hat, unsere atmosphärische Luft als Gemeingut des ganzen Weltalls erklären und man hätte dabei noch den Nebengewinn, die fatale obere Grenze der Giltigkeit des Mariotte'schen Gesetzes wegräumen zu können. Schwieriger wäre allerdings die Frage, ob diese verdünnte atmosphärische Luft auch den Bedürfnissen der Optik gerecht werden könne. Wir haben übrigens auch einen directen Beweis für die Existenz des Aethers.

Das Licht beruht auf Schwingungen irgend eines Mediums, seines Trägers, und es ist in dieser Beziehung dem Schalle analog, der die ponderablen Körper als Träger hat. Bereits Magnus** hat darauf hingewiesen, dass bei Abwesenheit des Aethers der Raum über dem Quecksilber des Barometers undurchsichtig werden müsste. Meibauer*** hat dagegen eingewendet, dass, wenn die Poren des Glases gross genug seien, um den Aether durchzulassen, auch Spuren von Luft ihren Weg finden, sowie auch, dass in der Toricelli'schen Leere stets Quecksilberdämpfe seien. Ich glaube zwar nicht, dass Luft durch das Barometerglas in das Toricelli-sche Vacuum dringen könne und habe von der Qualification der Quecksilberdämpfe als Lichtträger durchaus keine hohe Meinung, wenn man aber beides zugiebt, so kann doch andererseits nicht geleugnet werden, dass sowohl Luft als auch Quecksilberdämpfe nur einen äusserst geringen Grad von Dichtigkeit haben können. Ich erinnere nur an den bekannten Vorlesungsversuch, der darin besteht, dass man aus einem Recipienten, in dem sich ein Schlagwerk befindet, die Luft auspumpt, worauf sich die Intensität des Schalles in dem Maasse vermindert, in dem ihm der Träger genommen wird. Wäre nun die Luft auch Träger des Lichtes, so müsste offenbar der Raum, der von dem Recipienten der Luftpumpe eingeschlossen ist, weniger durchsichtig werden, denn Abnahme der Durchsichtigkeit ist doch wohl das Analogon zur Abnahme der Fähigkeit, den Schall fortzupflanzen. Hat man aber je gehört, dass dieser eingeschlossene Raum auch bei dem vollständigsten Auspumpen an Durchsichtigkeit verloren hätte? Es ergiebt sich daraus, dass der Träger des Lichtes ein anderer Stoff sein müsse, als einer von denen, die in den Lehrbüchern der Chemie verzeichnet sind, denn diese sind aus dem Recipienten theils ganz entfernt, theils im Zustande der höchsten Verdünnung.

In den meisten Lehrbüchern der Physik findet man den Satz, dass in den optisch dichteren Medien das Licht sich darum langsamer fortbewege, weil der Aether in ihnen dichter sei. Es scheint dabei einerseits die Analogie mit den widerstrebenden Medien zu Grunde gelegt zu werden, wäh-

* Ueber die physische Beschaffenheit unseres Sonnensystems 2. Thl. S. 56.
** Pogg. Ann. Bd. LXXI.
*** A. a. O. S. 55.

rend der Aether bei dem Lichte diese Rolle bekanntlich nicht spielt, andererseits beruft man sich auch auf die bekannte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen angebende Formel

$$1)\qquad v = c\sqrt{\frac{e}{\varrho}},$$

in welcher v die Geschwindigkeit, c eine Constante und ϱ die Dichtigkeit bedeutet, bei welcher Formel e als constant angenommen wird*, was dann die Lichtgeschwindigkeit als der Quadratwurzel der Aetherdichtigkeit umgekehrt proportional ergiebt. Zum grossen Theile liegt der vorerwähnten Ansicht auch folgender Umstand zu Grunde. Man betrachtet die Aethertheilchen als im Verhältniss zu den schweren Atomen ausserordentlich klein, die gegenseitige Wirkung beider Arten von Theilchen als eine anziehende, und in Folge davon schliesst man, um die Molecule herum seien Atmosphären von Aethertheilchen ähnlich wie der Luftkreis um die Erde gelagert**. Dieser Ansicht zufolge muss der Aether in der Nähe der Molecule dichter sein als fern davon, und da allgemein die Lichtgeschwindigkeit in den Körpern geringer ist als im Raum, so folgt unmittelbar, dass grössere Dichtigkeit des Aethers eine geringere Geschwindigkeit des Lichtes bedinge.

Obwohl ich diesen Gegenstand bereits früher*** besprochen habe, glaube ich doch, dass derselbe interessant genug ist, um ihn einer wiederholten Bearbeitung zu unterwerfen.

Cauchy† sagt, dass bei denjenigen Medien, welche die Farben nicht zerstreuen, die Geschwindigkeit des Lichtes der Quadratwurzel der Aetherdichtigkeit direct proportional sei, während andererseits die Formel 1) auf die umgekehrte Proportionalität schliessen lässt, und es wird daher meine Aufgabe sein, zu zeigen, dass und wie beide Formeln übereinstimmen.

Auf Seite 187 Gleichung 15 kommt Cauchy auf die Gleichung:

$$2)\qquad s^2 = S\left\{\frac{m}{k^2 r^2}\,\partial\,\frac{\left[\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3}k^2 r^2\right) f(r)\right]}{\partial r}\right\}.$$

In dieser Gleichung giebt s den reciproken Werth der Elasticitätsaxe an, m ist die Menge materieller Substanz eines Aethertheilchens, welches auf das in Schwingung befindliche eine Einwirkung ausübt, r seine Entfernung, $f(r)$ seine Wirkungsweise, die eine Abstossung vorstellt, wenn ihr das Zeichen — zukommt, k ist eine Grösse, welche durch die Gleichung

$$3)\qquad s^2 = k^2 \Omega^2$$

* Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik I, 695.

** Redtenbacher, das Dynamidensystem 17.

*** S. diese Zeitschrift XIII, 3.

† *Mém. sur la dispersion de la lumière* 193.

bestimmt wird, wenn Ω die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Da S die Summe der Wirkungen aller um das untersuchte Aethertheilchen herum befindlichen angiebt, hat nun Cauchy, um s^2 zu bestimmen, angenommen, der um das Theilchen herum befindliche Aether bilde ein ununterbrochenes Continuum, und so wurde er auf Integrationen geführt. Er bekam die Gleichung

4) $$S[mf(r)] = \int_{r_0}^{r_\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varrho r^2 f(r) \sin p \, \partial p \, \partial q \, \partial r.$$

Hier bedeutet ϱ die Dichtigkeit, p und q sind Hilfswinkel, und zwar ist p der Winkel, welchen der Radius vector r mit einer festen Axe macht, q ist der Winkel zwischen einer durch die feste Axe gelegten festen Ebene und einer beweglichen Ebene, in der sich die nämliche Axe und der Radius vector befinden. Da nun

$$\int_0^{\pi} \sin p \, \partial p = 2$$

und

$$\int_0^{2\pi} \partial q = 2\pi,$$

so erhält man

5) $$S[mf(r)] = 4\pi\varrho \int_{r_0}^{r_\infty} r^2 f(r) \partial r.$$

Mit Hilfe von 5) geht 2) über in

6) $$s^2 = 4\pi\varrho \int_{r_0}^{r_\infty} \frac{\partial\left[\frac{1}{k^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{6}k^2 r^2\right) f(r)\right] \partial r.}{\partial r}$$

Für sehr grosse Werthe von r erhält der Ausdruck

$$\frac{1}{k^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{6}k^2 r^2\right)$$

den Werth $\frac{1}{6} r^2$, für sehr kleine Werthe von r wird er zu $\frac{1}{30} k^2 r^4$. Dadurch wird aus Gleichung 6)

7) $$s^2 = \frac{4\pi\varrho}{3}\left[r^2_\infty f(r_\infty) - \frac{1}{10} k^2 r_0^4 f(r_0)\right].$$

Nach anderen Betrachtungen Cauchy's (p. 185) fällt die Farbenzerstreuung eines Mediums (und ein solches Medium ohne Dispersion ist der Aether im Raume) aus, wenn s^2 dem Werthe von k^2 proportional ist, es muss also $-r^4 f(r)$ gleich einer positiven Constanten, d. i.

8) $$f(r) = -\frac{H}{r^4}$$

sein, wenn H diese Constante bezeichnet. Setzt man diesen Werth von $f(r)$ in 7), so erhält man

$$s^2 = \frac{4\pi}{30}\varrho H k^2. \tag{9}$$

Aus Gleichung 8) zieht Cauchy den Schluss, dass sich die Aethertheilchen mit einer Kraft abstossen, welche dem Biquadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Gegen diese Behandlung der Aufgabe lässt sich einwenden, dass es nicht streng richtig ist, wenn Cauchy ein dreifaches Integral in einem Falle benutzte, in welchem es sich um die Summe von Wirkungen discreter Theilchen handelt, denn wenn auch die Aethertheilchen von einander (für uns) unmessbar wenig entfernt sind, so ist es doch sehr wohl denkbar, dass die Entfernungen je zweier benachbarten Theilchen im Verhältniss zu deren Dimensionen noch immer sehr gross sind, und es muss doch ein anderes Resultat erfolgen, wenn die Aethersubstanz im Raume continuirlich vertheilt ist, wie es die Integration voraussetzt, als wenn sie in einzelne von einander getrennte Theile gruppirt ist. Aus diesem Grunde muss die Integration wenigstens so viel als möglich vermieden werden, und theils darum, theils um die Cauchy'schen Voraussetzungen mit denen Fresnel's in Uebereinstimmung zu bringen, will ich annehmen, die Aethertheilchen seien in der Ruhelage nicht im Raume zerstreut, sondern sie befinden sich in einer Geraden. Die Zulässigkeit dieser Annahme kann wohl nicht bestritten werden, denn die Gleichung 2) gilt ganz allgemein für jede Art der Vertheilung der Aethermolecule, also auch für den von mir vorausgesetzten Fall, und je nach der Gruppirung derselben wird allerdings der Werth von s^2 ein anderer, aber der Satz, dass für den Fall des Ausbleibens der Farbendispersion $\frac{s^2}{k^2} = const.$ sein müsse, wird dadurch nicht im Geringsten alterirt.

Nimmt man also an, die Aetherpunkte liegen alle in einer Geraden, so bleibt nur eine einzige Integration übrig, die Gleichung 5) wird zu

$$Sm\,[f(r)] = \varrho \int_{r_0}^{r_\infty} f(r)\,\partial r \tag{10}$$

und 2) geht über in

$$s^2 = \varrho \int_{r_0}^{r_\infty} \frac{\partial\left[\frac{1}{k^2 r^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3}k^2 r^2\right) f(r)\right]\partial r}{\partial r}. \tag{11}$$

Aus Gleichung 7) wird

$$s^2 = \frac{\varrho}{3}\left[f(r_\infty) - \tfrac{1}{10}\,k^2 r_0^2 f(r_0)\right]. \tag{12}$$

Es wird also $\frac{s^2}{k^2} = const.$, wenn

$$r^2 f(r) = -H \text{ oder}$$

13) $$f(r) = -\frac{H}{r^2},$$

d. i. wenn die Aethertheilchen sich mit einer Kraft abstossen, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. — Da nach Gleichung 3)

$$s^2 = K^2 \Omega^2,$$

so wird

$$\Omega^2 = \frac{\varrho H}{30} \text{ oder auch}$$

14) $$\Omega : \Omega_1 = \sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1}$$

und die Geschwindigkeit des Lichtes ist also der Quadratwurzel der (linearen) Aetherdichtigkeit direct proportional.

Dass der Unterschied zwischen den Gleichungen 8) und 13) nur darauf beruhe, dass man die Aethertheilchen im Raume oder auf einer Geraden annimmt, ergiebt sich daraus, dass man auch bei der Summirung (im Gegensatze zu der Integration) auf die vierte Potenz kommt. Nimmt man nämlich an, die Aethertheilchen seien um ein mittleres herum so gruppirt, dass ihre Vertheilung gegen drei durch das mittlere gelegte auf einander senkrechte Axen gleich ist, eine Annahme, die, da es sich hier um den allgemeinen Raum handelt, sicherlich die naturgemässeste ist, so compensiren sich die einander gegenüberliegenden Theilchen so, dass die der zweiten Potenz von r entsprechenden Glieder sich aufheben und erst die der vierten entsprechenden bleiben, wie ich dieses bereits früher* nachgewiesen habe.

Denkt man sich nun um ein Aethertheilchen Kugelflächen gezogen und kommt es aus der Gleichgewichtslage, so wird es allerdings von den jeweilig in dieser Kugelfläche gelegenen übrigen Theilchen mit einer Kraft in die Gleichgewichtslage zurückgeführt, welche so ist, als stossen sich die Theilchen mit einer Kraft ab, welche dem Biquadrate des Kugelradius umgekehrt proportional ist, aber die gegenseitige Wirkung je zweier Aethertheilchen — und auf diese kommt es hier an — giebt eine Abstossung, welche abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Ein Unterschied zwischen dem vorstehenden Resultate und dem Cauchy's ist allerdings noch da, und dieser ist der, dass die Kraft, welche das Aethertheilchen in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, nicht wie bei Cauchy der ersten, sondern der dritten Potenz der Verschiebung proportional ist. Dieser Unterschied würde sicherlich verschwinden, wenn man die Cauchy'sche Rechnung so durchführte, dass

---

* S. diese Zeitschrift XIII, 3, p. 218.

man auch die höheren Potenzen von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ berücksichtigte, was Cauchy nicht gethan hat.

Ich muss hier noch auf einen weiteren Umstand aufmerksam machen. Wir haben bei der ganzen Frage, ob ein Lichtstrahl mit oder ohne Farbenzerstreuung durch ein Medium gehen soll, nicht mit Elementarstrahlen, sondern mit Strahlenbündeln, mit einer grösseren Quantität paralleler Elementarstrahlen zu thun, denn ein Bündel von polarisirten Strahlen muss doch für sich frei von Farbendispersion sein können, und hier ist zunächst die Art zu berücksichtigen, wie Fresnel die Aufgabe behandelte. Fresnel dachte sich* in sehr kleinen Entfernungen von einander senkrecht auf der Richtung des Lichtstrahls Ebenen aufgestellt, in denen sich die Aetherpunkte befinden. Findet nun eine Verschiebung statt, so ist diese für alle Theilchen, die sich in einer und derselben Ebene befinden, die gleiche, es ist gerade so, als seien die Ebenen gegen einander etwas verschoben. Allerdings wirken nun alle Theilchen der einen Ebene auf jedes einzelne der anderen, aber es ist hierbei für das zunächst betrachtete nur die Thätigkeit der nächstliegenden Atome zu berücksichtigen, da die Wirkungen der ferner gelegenen sich paarweise (in den ersten Gliedern) aufheben. Darum konnte Fresnel von der Annahme ausgehen, als seien die Aethertheilchen in der Gleichgewichtslage in einer Geraden. Wir haben es also hier überhaupt nur mit der linearen Fortpflanzung der Wellen zu thun, und dieser Umstand mag als Rechtfertigung des von mir oben eingeschlagenen Verfahrens dienen.

Soll die Gleichung 1) mit der Gleichung 14) in Uebereinstimmung gebracht werden, so sieht man leicht, dass wir hier zunächst mit der Bedeutung des Ausdrucks e zu thun haben. Derselbe giebt die Elasticität des Mediums an und so lange es sich nur um diejenigen Veränderungen handelt, die während der Schwingungen in einem und demselben Körper vorkommen, mag man e ganz wohl als constant betrachten, allein dieses ist nicht mehr zulässig, wenn man von einem Körper auf den anderen übergeht.

Untersucht man also die Lichtgeschwindigkeit in einem durchsichtigen (einfach brechenden) Körper, so mag die Elasticität des Aethers in diesem durch die geringen Verschiebungen seiner Theilchen wenig genug alterirt werden; hat man es aber mit anderen Elasticitäten zu thun, wenn zwei verschiedene Körper oder die verschiedenen Richtungen eines doppeltbrechenden Krystalles, deren Aetherdichtigkeit von Hause aus verschieden ist, mit einander verglichen werden, so gestaltet sich die Sache anders, denn wenn, was doch wohl *a priori* vorausgesetzt werden muss, die gegenseitige Einwirkung der Aethertheilchen mit abnehmender Entfernung wächst, so lässt sich auch voraussetzen, dass, wenn der ursprüngliche

* *Mém. de l'Acad. de France T. VII. Mém. sur la double réfraction* 105.

Gleichgewichtszustand bei geringerer Dichtigkeit des Aethers gestört wird, das Bestreben, das Gleichgewicht wieder herzustellen, schwächer sein muss, als bei ursprünglich kleinerer Distanz der Aethertheilchen.

Ehe ich auf die Bestimmung der Elasticitätsverhältnisse näher eingehe, möge es mir gestattet sein, die Erscheinungen zu besprechen, welche auftreten, wenn zwei Körper, die sich gegenseitig abstossen, sich gegen einander bewegen.

Die Abstossung sei irgend eine Function der Entfernung r, dann mögen m und x die Menge träger Substanz und die Coordinaten des einen Körpers bedeuten, m_1 und x_1 die des anderen. Der eine Körper wirkt nun auf den anderen gerade so, wie dieser auf ihn, die Wirkung ist also jedesmal gleich $f(r)$, nur muss bei dem einen der beiden Körper in Berücksichtigung des Umstandes, dass beide in entgegengesetzter Richtung thätig sind, bei dem einen Körper dem Ausdrucke $f(r)$ das Zeichen $-$ vorgesetzt werden und ausserdem hat man der Verschiedenheit der Massen Rechnung zu tragen. Man bekommt so die Gleichungen:

15) $$\frac{m\,\partial^2 x}{\partial t^2} = -f(r) \quad \text{und} \quad \frac{m_1\,\partial^2 x_1}{\partial t^2} = f(r).$$

Durch Verbindung beider Gleichungen erhält man:

$$\frac{m\,\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{m_1\,\partial^2 x_1}{\partial t^2} = 0.$$

Wird hierauf mit ∂t multiplicirt und dann integrirt, so ergiebt sich:

$$\frac{m\,\partial x}{\partial t} + \frac{m_1\,\partial x_1}{\partial t} = C$$

oder

$$m v + m_1 v_1 = C,$$

wenn man mit v und v_1 die beiderseitigen Geschwindigkeiten, mit C eine Constante bezeichnet. Sind V und V_1 die Anfangsgeschwindigkeiten, so hat man zur Bestimmung der Constanten

$$m V + m_1 V_1 = C,$$

also

16) $$m v + m_1 v_1 = m V + m_1 V_1.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 1) mit ∂x, beziehungsweise ∂x_1, so erhält man:

17) $$\frac{m\,\partial^2 x\,\partial x}{\partial t^2} = -\partial x\, f(r) \quad \text{und} \quad \frac{m_1\,\partial^2 x_1\,\partial x_1}{\partial t^2} = \partial x_1\, f(r).$$

Da nun $\partial x - \partial x_1 = \partial r$, so ergiebt sich:

$$\frac{m\,\partial^2 x\,\partial x}{\partial t^2} + \frac{m_1\,\partial^2 x_1\,\partial x_1}{\partial t^2} = -f(r)\,\partial r.$$

Durch Integration geht diese Gleichung über in:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} = -\int f(r)\,\partial r + C_1,$$

wenn C_1 eine neue Constante ist, und zu deren Bestimmung hat man unter der Voraussetzung, dass R die ursprüngliche Entfernung und $\int f r\,\partial r = F(r)$ sei,

$$\frac{m V^2}{2} + \frac{m_1 V_1^2}{2} + F(R) = C_1,$$

mithin:

$$18) \qquad \frac{m v^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} = F(R) - F(r) + \frac{m V^2}{2} + \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Die Gleichung 16) zeigt, dass unabhängig von der Zeit sowohl als auch von der Natur der Function $f(r)$ die Summe der Producte aus Masse und Geschwindigkeit beider Körper die gleiche bleibe, und damit auch, dass sich die Bewegung des Schwerpunktes nicht ändert, während die Gleichung 18) lehrt, dass für je gleiche Distanzen auch die Summe der lebendigen Kräfte gleich sei. Stossen sich die beiden Körper ab und nimmt die Abstossung zu, wenn die Entfernung abnimmt, so ist $F(r) > F(R)$, es muss also die Summe $\frac{m v^2 + m_1 v_1^2}{2}$ bei grösserer Annäherung der Körper kleiner werden und zugleich mit r einen kleinsten Werth erreichen, worauf sie wieder wächst, wenn die Körper sich von einander entfernen.

Genau dasselbe Verhalten beobachten wir auch dann, wenn zwei elastische Körper auf einander stossen. Sie pressen sich zusammen und wenn das Maximum der Annäherung erreicht ist, so sucht jeder seine ursprüngliche Gestalt herzustellen. Die Mittelpunkte entfernen sich dabei von einander und in je zwei Augenblicken, in denen diese Entfernung die nämliche ist, ist es auch die Summe der lebendigen Kräfte. Diese Summe hängt von der Natur der Function $f(r)$ ab, und wird letztere für alle Werthe von r, die eine gewisse Grenze ϱ überschreiten, gleich Null, so geht für diese Werthe von r die Gleichung 18) über in:

$$19) \qquad \frac{m v^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m V^2}{2} + \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Formel, welche die Bewegung zweier elastischen Körper vor und nach dem Stosse für diejenigen Momente angiebt, in denen die Körper sich noch nicht oder nicht mehr berühren, und die Gleichungen 16) und 19) dienen auch dazu, die Geschwindigkeiten zu bestimmen, welche zwei auf einander stossende elastische Körper durch den Stoss erhalten.

Es liessen sich die Analogien, welche das Verhalten von sich gegenseitig abstossenden und das von elastischen Körpern zeigen, leicht weiter ausführen. Ich halte dieses für überflüssig und glaube im Vorstehenden hinlänglich nachgewiesen zu haben, dass man berechtigt sei, die Abstossung, die zwei Körper auf einander ausüben, mit der Wirkung eines sie umgebenden absolut elastischen Polsters zu vergleichen, sowie dass nichts im Wege stehe, die für das Verhalten elastischer Körper geltenden Gesetze auf die sich abstossenden anzuwenden.

Zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten e eines Körpers dient bekanntlich das Verfahren, dass man die Ausdehnung sucht, welche derselbe erlangt, wenn eine gewisse Last an ihn angehängt wird, worauf man dann diejenige Last berechnet, welche nothwendig wäre, den Körper auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen unter der Voraussetzung, dass alle späteren Ausdehnungen gerade so erfolgen, wie die erste. Ich mache hier ganz besonders auf den Umstand aufmerksam, dass man sich bei diesem Verfahren wohl bewusst ist, dass der so gefundene Coefficient stets nur eine berechnete Grösse sein kann, da die nachfolgenden Ausdehnungen eines Körpers unter anderen Bedingungen eintreten als die ersten.

Hat man einen Körper von der Länge l und dem Querschnitte 1, an welchem durch Anhängen des Gewichtes P eine Verlängerung $\varDelta l$ hervorgebracht wird, nimmt man ferner ein Gewicht Q so, dass

$$Q:P=l:\varDelta l,$$

also

20) $$Q=P\,.\,\frac{l}{\varDelta l},$$

so giebt Q die Grösse des Elasticitätscoefficienten e, diesen in Gewicht für die Einheit des Querschnittes ausgedrückt, an.

Es seien nun allenfalls von einer gasartigen Substanz beliebig viele Theilchen gegeben, die sich nach der Norm $\frac{A}{r^n}$ abstossen, wenn A und n Constante, r die Entfernung zweier Theilchen bedeuten. Die Theilchen seien in eine verticale Reihe von der Länge l gestellt, das letzte derselben stehe auf einem festen Boden, das erste sei mit einem verschiebbaren Deckel verbunden, dessen Gewicht der Abstossung gleichkommt, welche die eingeschlossenen Theilchen auf das mit ihm verbundene oberste ausüben. Dasjenige Theilchen, welches dem am Deckel befindlichen zunächst in der Entfernung r_1 von ihm steht, übt auf dieses eine Abstossung $\frac{A}{r_1{}^n}$ aus, das zweite die Abstossung $\frac{A}{r_2{}^n}$, das dritte $\frac{A}{r_3{}^n}$ u. s. w., wenn r_2, r_3 u. s. w. die jeweiligen Entfernungen von dem obersten am Deckel befindlichen Theilchen ergeben.

Betrachtet man p als allgemeinen Index, so ist die Summe der Abstossungen aller Theilchen gleich $A\Sigma\frac{1}{r_p{}^n}$, und dieser Summe von Wirkungen muss die des Gewichtes des Deckels gleich sein, wenn Ruhe stattfinden soll.

Wird nun der Deckel durch ein Gegengewicht um die sehr kleine Grösse Δl in die Höhe gehoben, so werden dadurch die eingeschlossenen Theilchen sowohl von dem Deckel, als auch von einander entfernt. Das nächste Theilchen steht jetzt in der Entfernung $r_1 + \Delta r_1$, seine Wirkung ist in $\frac{A}{(r_1 + \Delta r_1)^n}$ übergegangen und der Unterschied gegen früher ist $\frac{-nA\Delta r_1}{r_1^{n+1}}$. Ebenso ergiebt sich für das zweite Theilchen $\frac{-nA\Delta r_2}{r_2^{n+1}}$, für das dritte $\frac{-nA\Delta r_3}{r_3^{n+1}}$, und für alle zusammen wird, wenn wieder p der allgemeine Index ist, der Unterschied gegen früher

$$-n'A\Sigma\frac{\Delta r_p}{r_p^{n+1}}$$

betragen. Dieser Summe nun muss das am Deckel befindliche Gegengewicht gleich sein oder, was dasselbe ist, man muss mit einer dem Werthe dieser Summe gleichkommenden Kraft ziehen, um die Verlängerung Δl der ganzen Reihe zu erhalten. Wir haben also hier das P der Gleichung 20) und können somit setzen:

$$P = nA\Sigma\frac{\Delta r_p}{r_p^{n+1}} = nA\Sigma\frac{1}{r_p^n}\cdot\frac{\Delta r_p}{r_p}, \tag{21}$$

wobei das Zeichen — wegbleibt, weil P an der entgegengesetzten Seite zieht.

Bei dieser Ausdehnung der Reihe haben sich die einzelnen Theilchen nicht nur von dem obersten am Deckel befindlichen, sondern auch unter einander entfernt; sind z. B. die Zwischenräume zwischen je zwei Nachbartheilchen ursprünglich gleich gewesen, so sind sie es jetzt wieder, und hat sich das dem Deckeltheilchen zunächst liegende um Δr_1 von diesem entfernt, so ist auch das zunächst unter ihm befindliche um Δr_1 von ihm selbst weggegangen, und wenn die ursprüngliche Entfernung des dritten Theilchens von dem am Deckel befindlichen $2r_1$ war, so ist es jetzt um $2\Delta r_1 = \Delta r_2$ weiter weg, das nächste um $3\Delta r_1 = \Delta r_3$, das m^{te} unterste um $m\Delta r_1 = \Delta l$. Es ist darum

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{\Delta r_p}{r_p} = \frac{\Delta l}{l}, \tag{22}$$

also eine für alle Theilchen gleiche stets sehr kleine Grösse.

Unter Berücksichtigung der Gleichung 22) geht die Gleichung 21) über in:

$$P = nA\frac{\Delta l}{l}\Sigma\frac{1}{r_p^n}, \tag{23}$$

und wenn man diesen Werth von P in Gleichung 20) einsetzt, so wird:

$$Q = nA\Sigma\frac{1}{r_p^n}. \tag{23a}$$

Man erhält also den Ausdruck für den in Gewicht ausgedrückten Elasticitätscoefficienten e, wenn man die Abstossungsformel mit n multiplicirt.

Würde man das oben angegebene Verfahren umkehren und, statt den Deckel durch angehängtes Gegengewicht in die Höhe zu heben, ihn durch aufgelegtes Gewicht herabdrücken, so würde bei dem Auflegen von

$$P = n A \Sigma \frac{\Delta r_p}{r_p^{n+1}}$$

die angenommene Reihe sich um Δl verkürzen und der Elasticitätscoefficient e wäre wieder durch

$$n A \Sigma \frac{1}{r_p^n}$$

gemessen, obwohl es selbstverständlich nicht möglich ist, die Reihe von Theilchen um die ganze Länge l, d. i. auf gar nichts zusammenzudrücken. Bei unvollkommen elastischen Körpern würde bei bedeutendem Werthe von $\frac{\Delta l}{l}$ die Elasticitätsgrenze überschritten, während die Formel 20) bei grossen Werthen von $\frac{\Delta l}{l}$ nicht genügen würde, weshalb auch in der Praxis eine mit der Dichtigkeit wechselnde Elasticität bei diesen Körpern angenommen wird.

Hätte man, um bei dem oben angeführten Beispiele zu bleiben, zwei Reihen, in denen sich die jeweiligen Entfernungen der Theilchen verhielten wie r zu R, so wäre in der einen derselben

24) $$Q = n A \Sigma \frac{1}{r_p^n}, \text{ in der anderen } Q_1 = n A \Sigma \frac{1}{R_p^n}.$$

Aus diesem Grunde hat man auch bei der Luft je nach ihrer Dichtigkeit eine verschiedene Elasticität angenommen. Die Gleichungen 23) ergeben für verschiedene Dichtigkeiten gleichartiger Medien:

24 a) $$\frac{Q}{Q_1} = \frac{e}{e_1} = \frac{\Sigma \frac{1}{r_p^n}}{\Sigma \frac{1}{R_p^n}} = \frac{\frac{1}{r^n}}{\frac{1}{R^n}}.$$

Die Elasticitätscoefficienten verhalten sich also zu einander umgekehrt wie die n^{ten} Potenzen der Entfernungen zweier Nachbartheilchen, und so lange man verschiedene Dichtigkeiten gleichartiger Medien vergleicht, ist man berechtigt, zu setzen:

25) $$e = \frac{c}{r^n},$$

wenn c eine Constante bedeutet.

Von dem Vorstehenden soll zunächst eine Anwendung auf die Bewegung der Wellen in einer Gasart gemacht werden.

Die Elasticitätsverhältnisse der Luftarten lassen sich so betrachten, als liege dem ganzen Bestreben der letzteren, sich auszudehnen, eine gegenseitige Abstossung der Theilchen zu Grunde, die dem Abstande umgekehrt proportional ist*, wir haben also hier $n = 1$, und die Elasticität lässt sich nach Gleichung 25) bei ihnen ausdrücken durch

26) $$e = \frac{c}{r},$$

wenn c eine für alle Gase gleiche, wohl von der Temperatur, aber nicht von dem Drucke abhängige Grösse bedeutet, und r den Abstand zweier Nachbartheilchen angiebt. Die Dichtigkeit ϱ des Gases (hier handelt es sich nur um die lineare Dichtigkeit) lässt sich ausdrücken durch

27) $$\varrho = \frac{b\,m}{r},$$

wenn b eine neue Constante, m das Atomgewicht angiebt.

Bezeichnet man mit V, v die Geschwindigkeiten des Schalles in verschiedenen Gasen bei ungleichem Drucke, aber gleicher Temperatur, so bekommt man, wenn man von den geringen Verschiedenheiten der bekannten Grösse k absieht, die Gleichung:

28) $$V : v = \sqrt{\frac{E}{P}} : \sqrt{\frac{e}{\varrho}},$$

in welcher E, e die Elasticitätscoefficienten, P, ϱ die Dichtigkeiten angeben. Nimmt man statt dieser Grössen ihre Werthe aus 26) und 27), so ergiebt sich:

29) $$V : v = \sqrt{\frac{\frac{c}{R}}{\frac{b\,M}{R}}} : \sqrt{\frac{\frac{r}{c}}{\frac{b\,m}{r}}} = \sqrt{\frac{1}{M}} : \sqrt{\frac{1}{m}}.$$

Die Geschwindigkeit ist also unabhängig von dem Drucke und umgekehrt proportional der Quadratwurzel des Atomgewichtes eines Gases; man kommt also auf diese Weise auf das längst bekannte Resultat.

Selbstverständlich lässt sich die Sache auch umkehren und aus Beobachtungen oder anderweitig bekannten Wellengeschwindigkeiten das Abstossungsgesetz eines Mediums ermitteln. Ist z. B. bekannt, dass in einem Gase, etwa in der atmosphärischen Luft, die Geschwindigkeit des Schalles von der Dichtigkeit unabhängig sei, so hat man, wenn C einen constanten Factor bedeutet,

30) $$V = C\sqrt{\frac{e}{\varrho}}.$$

* Zwei verschiedene Ableitungen dieses Satzes finden sich in Redtenbacher, Das Dynamidensystem, 66. — Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik I, 300.

In dieser Gleichung ist ϱ zu ersetzen durch $\frac{1}{r}$, da bm der Gleichung 27) als in dem constanten Factor C enthalten betrachtet werden kann, und e muss nach Gleichung 25) substituirt werden durch $\frac{1}{r^n}$.

Die Gleichung 30) ändert sich somit um in:

$$V = E\sqrt{\frac{r}{r^n}}, \tag{31}$$

und hier ist n so zu nehmen, dass V von r unabhängig wird. Es geschieht dieses, wenn

$$n = 1,$$

und man erhält so den oben erwähnten Satz, dass die Elasticitätsverhältnisse eines Gases sich aus einer Abstossung ableiten lassen, welche der Entfernung zweier Gastheilchen umgekehrt proportional ist.

Nach Gleichung 14) verhalten sich in denjenigen Medien, welche die Farben nicht zerstreuen, die Geschwindigkeiten der Lichtwellen wie die Quadratwurzeln der Dichtigkeit des Aethers; man hat also:

$$V : v = \sqrt{P} : \sqrt{\varrho} = \sqrt{\frac{1}{R}} : \sqrt{\frac{1}{r}}. \tag{32}$$

Andererseits hat man wieder:

$$V : v = \sqrt{\frac{E}{P}} : \sqrt{\frac{e}{\varrho}} = \sqrt{\frac{R}{R^n}} : \sqrt{\frac{r}{r^n}}, \tag{33}$$

und die Gleichungen 32) und 33) ergeben:

$$\sqrt{\frac{1}{R}} : \sqrt{\frac{1}{r}} = \sqrt{\frac{R}{R^n}} : \sqrt{\frac{r}{r^n}} \tag{34}$$

oder

$$n = 2.$$

Das Ergebniss der gegenseitigen Einwirkung zweier Aethertheilchen ist also dasselbe, wie in Gleichung 14), sie ist eine Abstossung, welche abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Steht es fest, dass die gegenseitige Wirkung zweier Aethertheilchen eine Abstossung sei, die durch die Formel $\frac{b}{r^2}$ ausgedrückt werden kann, so lassen sich auch die von mir in meinen Beiträgen zur Molecularphysik* gezogenen Schlüsse näher präcisiren.

Massentheilchen und Aethertheilchen ziehen sich an, und diese Anziehung lässt sich durch die Formel $\frac{am\mu}{r^2}$ aus-

---

* Siehe diese Zeitschrift XIII, 3, 219.

drücken, in welcher a eine Constante, m und μ die beiderseitigen Quantitäten träger Substanz, r die Entfernung bedeuten. Die Wirkung muss eine anziehende sein, denn wäre sie eine abstossende und die gegenseitige Thätigkeit je zweier Massentheilchen ebenfalls, so würde bei dieser allgemeinen Abstossung ein grösserer Körper als Aggregat einer Vielheit von einzelnen Theilchen unmöglich sein; würde aber zwischen Aether- und Massentheilchen eine Abstossung, zwischen Massen- und Massentheilchen Anziehung stattfinden, so wäre die Porosität der Körper unmöglich. Aether- und Massentheilchen müssen sich also anziehen. Für das Quadrat der Entfernung als Aenderungsmodus der Anziehung spricht der Umstand, dass das Licht im allgemeinen Raume gerade aus geht, was darauf schliessen lässt, dass ein Massentheilchen auf freien von ihm entfernten Aether keine Wirkung ausübt. Es sättigt sich allerdings mit Aether, den es bis zum Contacte anzieht, und wenn die Summe der Abstossungen, welche die so incorporirten Aethertheilchen auf die noch freien ausüben, eben so gross ist, als die von den Massentheilchen bethätigte Anziehung, so hört jede weitere Wirkung auf. Diese Wirkung muss aber in jeder messbaren Entfernung gleich Null sein, denn sonst müssten in den verschiedenen Entfernungen verschiedene Dichtigkeiten des Aethers folgen und das Licht würde jedesmal gebrochen, wenn es von einer Schicht in die andere ginge, es würde also durch den allgemeinen Raum in einem krummen Wege gehen, was der Beobachtung widerspricht.

Die von Cauchy abgeleiteten Gesetze gelten nur für solche Medien, welche die Farben nicht zerstreuen. Da nun die Dispersion der Farben streng genommen nur bei dem freien Aether ausbleibt, so fragt es sich, wie die Aetherdichtigkeit bei den farbenzerstreuenden Medien beschaffen sei. Ist es wahrscheinlich, dass diejenigen Substanzen, denen eine Farbendispersion zukommt, sich bezüglich der Aetherdichtigkeit dem freien Aether entgegengesetzt verhalten? Sicherlich nicht. Allerdings wird bei diesen Körpern die Beziehung zwischen der mittleren Aetherdichtigkeit und der Geschwindigkeit des Lichtes eine weniger einfache sein, als bei dem freien Aether, wie dies schon die Verschiedenheit der Brechungscoefficienten der einzelnen Farben mit sich bringt; allein dies berechtigt noch nicht zu dem Schlusse, der Aether in dem farbenzerstreuenden Mittel sei dichter, als der im allgemeinen Raume.

Ein Massentheilchen nimmt von den in seiner Nähe befindlichen Aethertheilchen so viel auf, als es zur Sättigung bedarf, und diese legen sich (wir haben es mit Wirkungen zu thun, die im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernungen stehen) unmittelbar auf das Massentheilchen. Sind es ihrer sehr viele, so bilden sie um das Massentheilchen herum eine dickere oder dünnere Rinde, und je dicker diese Rinde ist, um so mehr kommt ihre Wirkung nach aussen derjenigen gleich, welche stattfinden würde, wenn sie alle im Mittelpunkte des Massentheilchens, das ich hier als eine Kugel voraussetzen will, versammelt wären. Diese Wirkung wird aber durch die entgegengesetzte Thätigkeit des Massentheilchens aufgehoben und für den äusseren Aether ist also das ganze System wie gar nicht vorhanden. Es beantwortet sich also die oben gestellte Frage dahin, dass eine Dichtigkeit, grösser, als sie im allgemeinen Raume ist, bei dem die Massentheilchen in geringer Entfernung umgebenden (nicht im Contacte mit ihm befindlichen) Aether nicht eintreten kann, wenn die Zahl der zur Sättigung des Massentheilchens nöthigen Aethertheilchen eine beträchtliche ist. Die Atmosphären von Aethertheilchen, welche sich um die Massentheilchen lagern und mit abnehmender Entfernung von diesen immer dichter werden, wie man sie in so vielen Büchern beschrieben findet, sind also unmöglich.

Bezüglich der Vertheilung des Aethers im allgemeinen Raume lässt sich annehmen, dass, wenn man mit der Distanz zweier benachbarten Theilchen als Radius um eines derselben eine Kugel gezogen denkt, in der Oberfläche dieser Kugel sich wenigstens 12 Aethertheilchen befinden. Es sei nun gesetzt, die Zahl der unmittelbar mit dem Massentheilchen verbundenen Aethertheilchen sei kleiner als diejenige Zahl, welche ein im freien Raume befindliches Aethertheilchen umgiebt, es sei z. B. gesetzt, es seien dieser Aethertheilchen nur 4, so werden sich diese so um das Massentheilchen lagern, dass ihre Mittelpunkte den Ecken eines kleinen Tetraeders entsprechen. Drei dieser Theilchen dienen zur Sättigung des Massentheilchens, das vierte vertritt die Stelle desjenigen Aethertheilchens, welches im Mittelpunkte wäre, wenn sich nicht das Massentheilchen dort befinden würde. In diesem Falle kann offenbar die abstossende Wirkung dieser 4 Aethertheilchen nicht derjenigen gleich sein, welche sie ausüben würden, wenn sie alle im Mittelpunkte wären, oder vielmehr, wenn nach Abzug der zur Neutralisirung des Massentheilchens nöthigen 3 Aethertheilchen eins im Mittelpunkte des Systems sich befinden würde, sondern es wird (nahezu) so sein, als sei ein Aethertheilchen in vier Theile getheilt und jeder dieser Theile bilde das Eck eines Tetraeders, das nun statt der früheren Aetherkugel nach aussen thätig ist. Die nächste Folge davon muss eine tetraedrische Anordnung der benachbarten Aethertheilchen sein. Ist r die Entfernung zweier einander zunächst stehenden im freien Raume befindlichen Aethertheilchen und denkt man sich um den Mittelpunkt eines derselben Kugelflächen mit den Radien r, $2r$, $3r$ u. s. w. gezogen, so werden in diesen Kugelflächen die Mittelpunkte aller übrigen Aethertheilchen liegen. Geschieht das Gleiche um das oben erwähnte Massentheilchen, so werden wegen der tetraedrischen Anordnung in den nächsten Kugeloberflächen weniger Theilchen sein, als im freien Raume, und bis in grösserer Distanz diese eigenthümliche Anordnung unmerkbar wird, werden jedenfalls grössere Verschiedenheiten in den Entfernungen je zweier benachbarten

Aethertheilchen eintreten, als dies ohne die tetraedrische Anordnung der Fall wird.

Ist in einem gegebenen Raume eine beliebige Anzahl sich abstossender Punkte vorhanden, so wird die Summe der gegenseitigen Abstossungen (so lange diese in kleinerer Entfernung grösser sind, als in bedeutender) und damit auch der Druck, den sie gegen aussen ausüben, ein Minimum, wenn die Distanzen zwischen je zwei benachbarten Punkten einander möglichst gleich sind. Sind die Entfernungen ungleich, so wird die Summe ihrer Abstossungen kein Minimum mehr sein; sie üben also einen grösseren Druck nach aussen aus, beanspruchen daher bei gleicher Einwirkung von aussen herein ein grösseres Volumen, und insoweit von Aethertheilchen die Rede ist, die mit Massentheilchen nicht in unmittelbarem Contacte stehen, ist die mittlere Dichtigkeit des Aethers in der Nähe der Massentheilchen geringer, als im allgemeinen Raume, wenn die Massentheilchen zu ihrer Neutralisirung weniger Aethertheilchen bedürfen, als die Zahl derjenigen beträgt, welche sich als nächste Nachbarn um ein im allgemeinen Raume befindliches Aethertheilchen gruppiren, denn es kommen bei ihnen jedenfalls grössere Ungleichheiten der gegenseitigen Entfernungen vor, als bei dem freien Aether.

Bedarf ein Massentheilchen zu seiner Sättigung ebenso viel oder mehr Aethertheilchen, als der nächsten Nachbarn eines im Raume befindlichen Theiles sind, so ist die mittlere Dichtigkeit der Aetherhülle darum her der Dichtigkeit im freien Raume gleich. Eine grössere Dichtigkeit von isolirten Aethertheilchen als im freien Raume giebt es nicht.

Dem Vorstehenden zufolge werden also einzelne Aethertheilchen von dem Massenkern bis zum Contacte angezogen und legen sich dann so um diesen herum, dass ihre gegenseitige Abstossung einen kleinsten Werth erreicht. Für die in der nächsten Nähe befindlichen, nicht incorporirten Theilchen ist es nun nahezu so, als sei ein Aethertheilchen in mehrere Theile gespalten; es ist aber nicht genau so. Bleiben wir bei dem vorhin angenommenen Beispiele, dass die Zahl der incorporirten Aethertheilchen vier betrage, dass sie also um den Massenkern ein Tetraeder bilden, so wird für ein senkrecht gegen eine Tetraederfläche schwingendes freies Aethertheilchen der Kern nicht wie gar nicht vorhanden zu betrachten sein, wenn auch die Hauptwirkung desselben aufgehoben ist; es combinirt sich seine Anziehung mit den Abstossungen der Tetraederecke und die Folge davon ist eine Gesammtwirkung, die wohl der Hauptsache nach abnimmt, wie das Quadrat der jeweiligen Entfernungen wächst, die dieses aber nicht genau thut. Es ist also die Bedingung der Gleichung 14) nicht erfüllt, und Farbenzerstreuung ist die Folge davon.

Gesetzt, es sei ein Massentheilchen gegeben, das sich inmitten eines Oceans von Aethertheilchen befindet, so zieht es deren so viele bis zum vollständigen Contacte an, bis die Anziehung, die es selbst auf ein weiteres, aber freies Aethertheilchen ausübt, durch die Gegenwirkung des bereits gebundenen Aethers aufgehoben wird. Nennt man die Menge materieller träger Substanz des Massentheilchens, der Aetherhülle und des freien Aethertheilchens der Reihe nach m, M und μ und sind a und b die Wirkungsconstanten von Masse und Aether, dann Aether und Aether bei der Einheit der Entfernung und der trägen Substanz, so erhält man den Indifferentismus, wenn

36) $$am\mu = bM\mu, \text{ also } M = \frac{a}{b} m.$$

Bei einem andern Systeme hat man

37) $$am_1\mu = bM_1\mu \text{ oder } M_1 = \frac{a}{b} m_1.$$

Sollen beide Systeme auf einander wirken, so hat man die Thätigkeit der beiden Aetherhüllen (bMM_1), die Wirkung der Aetherhülle M auf den Kern m_1 (aMm_1), die Wirkung der Hülle M_1 auf den Kern m (aM_1m), und ausserdem besteht noch eine gegenseitige Reaction der Kerne m und m_1. Diese letztere sei für die Einheit der Entfernung und der materiellen Substanz gleich c, in der Entfernung r dagegen gleich $cf(r)$, wenn $f(r)$ eine noch unbestimmte Function der Entfernung bezeichnet.

Es ist nun die Gesammtwirkung beider Systeme auf einander zu suchen. Wenn man berücksichtigt, dass nach den oben abgeleiteten Normen a eine Anziehung, b eine Abstossung bedeuten, welche beide abnehmen, wie das Quadrat der Entfernung wächst, und wenn man, dem Vorgange Cauchy's folgend, der Abstossung das Zeichen — giebt, so dass also a und b für sich positive Grössen bedeuten, so hat man, wenn W die Gesammtwirkung angiebt,

38) $$W = cmm_1 f(r) + \frac{a(mM_1 + m_1M)}{r^2} - \frac{bMM_1}{r^2}.$$

Setzt man statt M und M_1 ihre Werthe aus 36) und 37), so ergiebt sich

39) $$W = \left(cf(r) + \frac{a^2}{b\,r^2}\right) mm_1.$$

Diese Formel muss nun mit den Erfordernissen des Schweregesetzes in Uebereinstimmung gebracht werden, denn wir haben hier die Action, welche zwei von einander entfernte Körper gegenseitig ausüben. Das Schweregesetz sagt, dass diese Thätigkeit eine dem Producte der Masse mm_1 direct, dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehung sei, weshalb, wenn c in Gleichung 39) von Null verschieden ist, $f(r)$ gleich $\frac{1}{r^2}$ sein muss. Die Gleichung 39) geht also über in

40) $$W = \left(\pm c + \frac{a^2}{b}\right) \frac{mm_1}{r^2}.$$

Gilt das obere Zeichen bei c, so haben wir zwei Anziehungen und W hat einen positiven Werth, bedeutet also auch eine Anziehung. So weit die Ansprüche des Schweregesetzes reichen, kann man ganz gut das obere Zeichen gelten lassen; wenn man aber die Bedürfnisse der Molecularactionen zu Rathe zieht, so geht dieses nicht mehr, denn die beiden Systeme würden sich bis zum Contacte anziehen und mit der Porosität der Körper wäre es vorbei. Es muss daher eine Wirkungsweise gesucht werden, welche auch die Porosität ermöglicht, welche unter Umständen auch Abstossungen eintreten lässt. Unbedingt ist es nöthig, dass eine der beiden Grössen c oder $\frac{a^2}{b}$ negativ sei, und da, wie sich aus dem Früheren ergiebt, $\frac{a^2}{b}$ positiv sein muss, so folgt, dass man bei c das untere Zeichen zu nehmen hat. Das Newton'sche Schweregesetz ist also repräsentirt durch die Formel

$$W = \left(\frac{a^2}{b} - c\right)\frac{mm_1}{r^2}, \tag{41}$$

und ich halte mich daher für berechtigt, der allgemein herrschenden Annahme entgegen den Satz aufzustellen, dass die Massentheilchen sich nicht anziehen, sondern sich abstossen.

Die Gleichung 41) entspricht der Gleichung 4) meiner früheren Abhandlung: „Entwurf einer Molecularphysik"*, und es besteht nur der Unterschied, dass dort die Anziehung das Zeichen — hat, während ich in meiner gegenwärtigen Schrift ihr das Zeichen + gegeben habe, um in einer und derselben Abhandlung für die gleiche Thätigkeit nicht zweierlei Zeichen zu bekommen. Wie Porosität, Cohäsion und Krystallisation der Körper sich aus Gleichung 41) ableiten lassen, habe ich bereits in der citirten Arbeit (S. 186—191) nachgewiesen, und da ich mich nicht veranlasst sehe, auch nur die geringste Aenderung daran vorzunehmen, so möge es mir gestattet sein, darauf zu verweisen.

Fasst man nun die im Vorstehenden erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

1. Aethertheilchen und Aethertheilchen, sowie auch Massentheilchen und Massentheilchen stossen sich ab;
2. Aethertheilchen und Massentheilchen ziehen sich an;
3. alle Kräfte nehmen ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Oder auch:

1. Es giebt zweierlei träge, materielle Substanzen in der Natur, Aethertheilchen und Massentheilchen;

* Siehe diese Zeitschrift XI, 3.

2. Gleichartiges stösst sich ab, Ungleichartiges zieht sich an;
3. beide Arten von Kräften sind dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional.

Diese Sätze sind die nämlichen, welche ich in meinem „Entwurf einer Molecularphysik“ *a priori* aufgestellt habe und aus denen ich dann verschiedene Molecularerscheinungen ableitete. Jetzt ist es mir gelungen, dieselben aus den vorhandenen Beobachtungen abzuleiten, sie durch Induction zu erhalten.

Es giebt also zweierlei Stoffe in der Natur, und die sogenannte Schwere ist insofern keine allgemeine Eigenschaft der materiellen Substanz, als es eine Materie, den Aether im allgemeinen Raume giebt, der ihr nicht unterworfen ist, während die Massentheilchen und die sie zunächst umgebenden Aethertheilchen Systeme bilden, welche sich allerdings in der von dem Newton'schen Schweregesetze ausgesprochenen Weise anziehen. Diese Systeme oder Verbindungen von Aether- und Massentheilchen sind schwer, wenn man dem Worte „schwer“ den Begriff beilegt, der in den Büchern allgemein üblich ist; die Aethertheilchen im Weltenraume dagegen sind nicht schwer.

Die gegenseitige Annäherung der Körper, welche man als das Ergebniss einer „Schwere“ genannten Thätigkeit zu betrachten gewohnt ist, ist die verschwindend kleine Differenz von Anziehung und Abstossung. Könnte der Aether, welcher in unserer Erde gebunden ist, entfernt werden, und hätte man andererseits soviel Aether beisammen, dass das Quantum seiner trägen Substanz demjenigen der Massentheilchen eines Körpers gleichkommt, so würde eine Anziehung die Folge sein, welche die der Schwere des Körpers vielleicht mehr als millionenmal überträfe. Die Schwerewirkung, diese winzig kleine Differenz der wirklichen Naturkräfte, ist für uns sehr wohl bemerkbar, wie sich leicht daraus ergiebt, wenn es sich darum handelt, einen grösseren Körper, etwa einen Felsblock, in die Höhe zu heben, und dieser Umstand dürfte daher geeignet sein, uns von den uns zur Disposition stehenden Kräften ganz bescheidene Begriffe beizubringen. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn wir es auch alsbald spüren, wenn die Differenzen zwischen Anziehung und Abstossung durch veränderte Gruppirung der Massentheilchen etwas anders werden.

Es kommt hierbei noch eine weitere Thätigkeit in's Spiel: der Druck des Aethers. Die Aethertheilchen sind über den ganzen Weltenraum verbreitet und stossen sich mit ungeheurer Kraft ab, suchen sich daher in jeden ätherleeren oder ätherverdünnten Raum einzudrängen und üben einen bedeutenden Druck auf denselben aus, wenn ihnen der Eintritt verwehrt wird. Dieser Aetherdruck hat ausserordentlich viel Aehnlichkeit mit dem Luftdrucke, den er aber an Stärke weitaus übertrifft. Wir durchwandern die Luft, ohne von einem Widerstande viel zu spüren, der übrigens schon da ist, wie er auch bei dem Aether eintritt (Enke'scher Komet). Der Luftdruck wird sofort wahrnehmbar, wenn wir den mehr oder weniger evacuirten Recipienten von dem Teller der Luftpumpe abheben wollen. Ebenso ist es bei dem ätherverdünnten Raume, und einen solchen haben wir, wie die Brechung des Lichtes lehrt, überall in den Körpern. Wie diese ätherverdünnten Räume entstehen, das habe ich in meinem „Entwurf einer Molecularphysik" in dem Abschnitte „Entstehung einiger Krystallformen des tesseralen Systems" gezeigt. Gerade so, wie durch den Luftdruck die Magdeburger Halbkugeln zusammengepresst werden, ebenso veranlasst der Aetherdruck die Cohäsion der Körper.

Bei der ausserordentlichen Stärke der Kraft, mit der sich die Aethertheilchen abstossen, muss wohl der Widerstand, den sie leisten, wenn man sie einander nähern will, ein sehr bedeutender sein. Dieser Umstand mag mit Ursache sein, warum bei dem auf den Aetherschwingungen beruhenden Lichte nur Transversalschwingungen beobachtet werden. Man sieht die Longitudinalschwingungen darum nicht, weil sie nicht existiren. Jedenfalls ist sicher, dass bei Longitudinalschwingungen grössere Annäherungen der vibrirenden Theilchen vorkommen, als bei (einem Strahlenbündel von) Transversalschwingungen. Auf diesen Umstand hat übrigens schon Fresnel hingewiesen. Er sagt:* *„En effet, la résistance à la compression étant bien plus grande que l'autre force élastique qui est mise en jeu par le simple glissement des tranches, l'onde produite par la première s'étendra beaucoup plus loin que celle qui résultera de la seconde ... Or, il est naturel de supposer que l'intensité de la sensation dépend de l'amplitude des vibrations du nerf optique, et qu'ainsi la sensation de lumière résultant des vibrations normales aux ondes serait sensiblement nulle relativement à celle qui serait produite par les vibrations parallèles à leur surface."*

In dem Vorstehenden habe ich verschiedene Sätze angenommen, welche die Lehrbücher der Physik nicht kennen, und unter ihnen ist wieder ganz besonders das Theorem, dass die Massentheilchen sich abstossen, von Allem, was sich in der Physik seit langer Zeit das Bürgerrecht erworben hat, so abweichend, dass es gar nicht unangemessen sein dürfte, wenn ich im Nachfolgenden eine Rechtfertigung meiner Theorie zu geben versuche.

In jedem Lehrbuche der Physik ist unter den allgemeinen Eigenschaften der Materie, also auch der Körper der Satz zu finden, dass Materie und Materie sich anziehe, und es fehlt nicht an Physikern, welche geneigt sind, diese Anziehung als eine wesentliche Eigenschaft der Körper zu erklären. Wesentliche Eigenschaften, solche, ohne welche wir uns Körper gar nicht

* *Mém. de l'Acad. de France, VII, Mém. sur la double réfraction,* 78.

denken können, bei deren Fehlen ein Körper überhaupt zu existiren gar nicht vermag, kennt die Physik nur drei: die Ausdehnung, Gestalt und Undurchdringlichkeit.* Die Schwere gehört nicht unter die wesentlichen Eigenschaften der Körper, und in der That haben auch die Physiker bis Newton wohl die Körper gekannt, aber nicht gewusst, dass sie sich anziehen. Die Schwere ist aber nicht nur keine wesentliche Eigenschaft der Körper, sondern es wurde auch Newton (meines Wissens von Leibnitz) bei Veröffentlichung seines Gesetzes sogar zum Vorwurfe gemacht, dass er die glücklich beseitigten Qualitäten der Materie wieder einführen wolle. Die *actio in distans* der Körper ist kein von selbst verständliches Axiom, man kann sich sogar nicht einmal erklären, wie diese Wirkung auf die Ferne zu Stande kommt. Die Schwerewirkung ist nur eine Sache der Beobachtung und man kann eigentlich nicht sagen: „Die Körper ziehen sich an", sondern nur: „Die Erscheinungen erfolgen gerade so, als ob sich die Körper anziehen". Man kann die betreffenden Naturerscheinungen vermittelst der bekannten Formel Newton's aus den gegebenen Voraussetzungen ableiten; ob aber wirklich Anziehung der Körper die Ursache der Erscheinungen sei, das weiss man nicht; man kennt die Ursache der Anziehung nicht.

Bei den Gasarten ist es, wie ich oben erwähnte, gerade so, als stiessen sich die einzelnen Theilchen mit einer Kraft ab, welche der Entfernung umgekehrt proportional ist. Redtenbacher nahm auch in der That eine derartige Abstossung an und bestimmte nach ihr sein Gesetz der Aetherwirkung. Jeder Physiker kennt Krönig's Erklärung der Volumverhältnisse der Gase und weiss, dass man eine gegenseitige Abstossung von in dem Gase enthaltenen Stoffen nicht nothwendig hat, wenn man die betreffenden Erscheinungen erklären will. Es ist aber der Erfolg gerade so, als stossen sich die Gastheilchen ab, und ich halte es für zulässig, dass man die entsprechenden mathematischen Formeln in den etwaigen Rechnungen benützt. Es kann ebenso irgend ein Physiker oder Metaphysiker die Ursache der der Schwerewirkung zu Grunde liegenden Erscheinungen finden, er kann möglicherweise zeigen, dass es hier ebenso wenig eine Fernewirkung gebe, als nach Krönig bei der Ausdehnung der Gase, aber die Erscheinungen werden doch sein, als ziehen sich die Körper an, und die betreffenden mathematischen Formeln werden nicht weniger anwendbar, als sie es gegenwärtig sind. Der ganze Unterschied wird nur der sein, dass man einen zweiten Weg gewinnt, auf dem man zu den Ergebnissen der Schwereerscheinungen gelangen kann, gerade so, wie man das Mariotte-sche Gesetz abzuleiten vermag, gleichviel, ob man die Fernewirkung oder die Krönig'sche Hypothese zu Grunde legt.

Trotz der grossen Anwendbarkeit der Newton'schen Formel darf

* Es möge mir hier gestattet sein, den bekannten Versuch, den Aristoteles mit einem Kruge voll Asche gemacht hat, zu ignoriren.

niemals übersehen werden, dass die Schwere keine wesentliche Eigenschaft der materiellen Substanz ist, dass man nur durch Beobachtungen veranlasst wurde, sie vorauszusetzen. Wenn man nun durch weitere Beobachtungen auf Resultate kommt, welche mit den Consequenzen des Schweregesetzes im Widerspruch stehen, so folgt nothwendig, dass ihnen etwas Anderes zu Grunde liegen müsse.

Erscheinungen, welche mit den Consequenzen des Schweregesetzes nicht harmoniren, bietet uns die Porosität der Körper und ganz besonders die Lehre vom Aether, ein Etwas, das, wie die Lehre vom Lichte zeigt, über den ganzen Weltenraum verbreitet ist. Dieser Aether ist nun offenbar eine materielle Substanz und wird in der Rechnung allenthalben als solche behandelt. Fasst man nun das Newton'sche Gesetz so, dass man sagt, alle materielle Substanz ziehe sich an, so müsste, wenn diese Auffassung richtig wäre, der Aether längst zu einer kleineren oder grösseren Anzahl von Haufen vereinigt sein; allein bisher hat er keine Miene gemacht, dieses zu thun. Man kann nun allerdings annehmen, die Aethertheilchen im Raume seien in einer Weise vertheilt, dass die auf sie von den verschiedenen Seiten ausgeübten Anziehungen sich gegenseitig aufheben, aber diese Bedingung hört auf, erfülllt zu sein, sobald die geringste Bewegung eintritt. Ist das Gleichgewicht einmal gestört, so wird die Anziehung nach der einen Seite grösser als nach der andern und ein Zusammenstoss der Aethertheilchen ist die unausbleibliche Folge. Man kann nun weiter annehmen, die Aethertheilchen seien elastisch. In diesem Falle würden sie allerdings nach dem Zusammenstosse sofort sich wieder von einander entfernen, allein dann fragt es sich: Sind die Aethertheilchen Atome oder sind sie es nicht? Sind sie Atome, so können sie nicht elastisch sein, denn der Begriff „elastisches Atom" ist eine *contradictio in adjectis*, da die Elasticität immer wieder Theile voraussetzt, die sich einander nähern, die sich von einander entfernen können. Sind also die Aethertheilchen Atome, so sind sie nicht elastisch, sind sie aber keine Atome, so bestehen sie aus solchen. Wenn nun zwei Aethertheilchen zusammenstossen, so bleiben sie als starre Körper bei einander, wenn sie Atome sind, und wenn sie aus Atomen bestehen, dann rücken diese vermöge des äusseren Stosses bis zum vollständigen Contacte zusammen und bilden dann ein vollkommen starres Aggregat.

Man kommt, wie sich aus dem Vorstehenden wohl ergeben dürfte, bei Zugrundelegung einer auf die materielle Welt wirkenden Anziehungskraft niemals durch, wenn man nicht auch Etwas annimmt, was die einzelnen Atome wieder von einander zu entfernen strebt: eine Abtossung. Anziehung und Abstossung zusammen, nicht eine derselben allein bauen die Welt.

Das Newton'sche Gesetz, das nur Anziehungen kennt, genügt also nicht, um die Gesammtheit der physikalischen Erscheinungen zu erklären, und es ist daher nothwendig, eine Combination von Anziehung und Abstossung zu suchen, welche den Beobachtungen entspricht. Dass dabei die

Newton'sche Norm bis auf den Wortlaut beibehalten werde, ist nicht erforderlich; Hauptsache bleibt immer, dass sich die einschlägigen Erscheinungen durch die neuen Sätze ebenso ungezwungen erklären lassen, als durch Newton's Formel, dass sich aber diesen Sätzen auch die Phänomene der Molecularwelt fügen, bei denen das Gravitationsgesetz bekanntlich nicht ausreicht.

Ich glaube behaupten zu können, dass die von mir oben aufgestellten Sätze den an sie gemachten Forderungen entsprechen; wenigstens ist mir keine Erscheinung bekannt, die damit im Widerspruch stünde.

Die Annahme von Abstossungen ist unumgänglich, und darum kann man so oft in den Büchern über Physik finden, dass, wenn es sich um die Erklärung einer Molecularerscheinung handelt, zur rechten Zeit als *Deus ex machina* eine Abstossung auftritt, die, so wie man sie nicht mehr braucht, verschwindet, um einer Anziehung Platz zu machen. Von Seiten der Mathematiker sind bezüglich der Molecularerscheinungen schon die verschiedensten Formeln aufgestellt worden, die das Gesetz der Molecularkraft auszudrücken haben, und es ist ganz sicher, dass, wenn man die Entfernung r zweier Theilchen als Exponenten benützt und eine von r abhängige Winkelfunction einführt, die so erhaltene Formel selbst ziemlich weitgehenden Anforderungen entspricht, denn man bekommt sehr raschen Wechsel in der Intensität bei kleinen Werthen von r, sowie auch Umkehrung des Sinnes der Wirkung. Ich kann mich bei Betrachtung solcher Formeln nie erwehren, an die alten Epicykeln zu denken. Es ist eine alte Erfahrung, dass sich die sämmtlichen Naturgesetze um so besser bewähren, je einfacher sie sind, und ist es nicht viel einfacher und naturgemässer, sich den mannichfaltigen Wechsel, den man an den Molecularkräften wahrnimmt, aus Differenzen von zwei Kräften zu erklären, die einem einfachen Gesetze gehorchen, als eine einzige Kraft für die ganzen Aenderungen haftbar zu machen und sie dafür einer complicirten Formel zu unterwerfen? Nach welchem Gesetze muss diejenige Kraft wirken, die für sich allein die Thätigkeit ausdrücken soll, welche zwei Magnete in den verschiedenen Stellungen und Entfernungen auf einander ausüben, und wie einfach erklärt sich der ganze Wechsel, wenn man zwei Kräfte einführt?

Ich muss übrigens hier bemerken, dass die erwähnten complicirten Formeln zunächst bei den Molecularerscheinungen ihre Anwendung finden, und wie die Gleichungen 13) und 24) zeigen, treten gerade bei den Molecularentfernungen, wenigstens bei dem Aether solche Kräfte nicht auf. Gerade bei den einander benachbarten Theilen gehorcht die gegenseitige Wirkung einem ganz einfachen Gesetze.

Die von mir oben aufgestellten Sätze enthalten an sich nichts Ungereimtes, denn sie haben längst das Bürgerrecht in der Physik, und es handelt sich also eigentlich nicht um die Einführung neuer Theoreme, sondern nur um die Ausführung der Anwendbarkeit längst anerkannter Gesetze.

Man kann mir entgegenhalten, dass, wenn die *actio in distans* an und für sich schon unerklärbar ist, es noch viel unerklärlicher sein müsse, wen ich dieser *actio* gewissermassen noch ein Stockwerk aufsetze und den einzelnen materiellen Grundstoffen das Vermögen zuschreibe, gegen entfernte Theilchen, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig sind, ein verschiedenes Verhalten zu beobachten. Es ist allerdings richtig, dass diese Art von Auswahl unerklärlich ist, und ich kann darauf nur antworten, dass hier immer vorauszusetzen ist, die Erscheinungen erfolgen gerade so, als ob Gleichartiges sich abstosse u. s. w. Was eigentlich die Ursache davon ist, lässt sich nicht angeben, und wenn ich oben sagte: „Gleichartiges stösst sich ab" u. s. w., so habe ich mich nur dem allgemeinen Sprachgebrauche gefügt. Die Auswahl in die Ferne ist übrigens längst schon bekannt, wenn auch nicht erklärt, und ich brauche hier nur noch an die Doctrinen der Electricität und des Magnetismus zu erinnern. In der Chemie wird sogar gelehrt, dass ein und derselbe Stoff gegen mehr als 60 andere Stoffe ein jedesmal verschiedenes Verhalten beobachten kann.

Man kann mir aber auch den entgegengesetzten Vorwurf machen, dass die von mir angenommenen Fernewirkungen zu wenig seien, denn man kann die Frage aufstellen, wie es sich mit der sogenannten chemischen Kraft verhalte, für die neben meinen oben ausgesprochenen Sätzen eigentlich gar kein Platz mehr ist, während wir doch ihre Wirkungen fortwährend vor Augen haben. Ich gestehe aufrichtig, dass ich an diese chemische Kraft ebenso wenig glaube, als ich es für wahrscheinlich halte, dass die gegenwärtig in den Lehrbüchern der Chemie aufgeführten sogenannten Grundstoffe wirkliche Grundstoffe und nicht Verbindungen von solchen seien. Nimmt man an, die wahren Grundstoffe seien Kugeln von verschiedener Grösse oder sie seien verschiedene Ellipsoide, so lässt sich ganz gut denken, dass diese Elementarkörper bei sehr kleiner gegenseitiger Entfernung eine verschiedene Thätigkeit auf einander ausüben können, ohne dass man darum in die Nothwendigkeit versetzt wäre, an dem, was ich oben anführte, eine Aenderung vorzunehmen oder eine eigene chemische Kraft einzuführen. Der Reichthum der Natur beruht nicht auf der Mannichfaltigkeit der ihr zu Gebote stehenden Mittel, sondern darauf, wie sie die wenigen vorhandenen benützt.

Ich muss mich jedoch damit begnügen, zu zeigen, dass eine eigene chemische Kraft anzunehmen nicht nothwendig sei; ein weiteres Eingehen auf die Sache verbietet der gegenwärtige Stand der Chemie, da man, weil die Grundstoffe unbekannt sind (ich erinnere hier an die verschiedenen Widersprüche, in die man bei Bestimmung der Atomgewichte geräth) gar nichts hat, was man einer Rechnung zu Grunde legen kann, während andererseits auch die Mathematik zu wünschen übrig lässt, denn die Differential- und Integralrechnung reichen nicht aus, wenn man mit endlichen Differenzen zu thun hat, und wenn man jedesmal auf lange Reihen übergehen muss, werden die Rechnungen leicht umfangreicher, als einem lieb ist.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Neue homogene Plancoordinaten.

Die von **Plücker*** eingeführten homogenen Plancoordinaten — die Abstände der variabeln Geraden von den drei Eckpunkten des Fundamentaldreiecks, resp. die Abstände der variabeln Ebene von den vier Eckpunkten des Fundamentaltetraeders — haben den homogenen Punktcoordinaten gegenüber nicht unbeträchtliche analytische und geometrische Nachtheile: es giebt unzählig viele Gruppen von Plancoordinaten**, denen keine reellen Geraden oder Ebenen entsprechen, und die identische Gleichung zwischen den Coordinaten einer Geraden oder Ebene ist vom zweiten Grade. Beide Umstände stören den Parallelismus zwischen den Entwickelungen in homogenen Punkt- und denen in homogenen Plancoordinaten, so dass es mir wünschenswerth schien, andere Plancoordinaten zu verwenden; ich habe die folgenden gewählt.

Man denke sich die variabele Ebene, welche die sechs Kanten des Coordinatentetraeders $A_0 A_1 A_2 A_3$ schneidet; wird dabei

$$\begin{array}{llll} A_0 A_3 & \text{im Verhältniss} & \mu_0 : \mu_3, \\ A_1 A_3 & \quad ,, & \mu_1 : \mu_3, \\ A_2 A_3 & \quad ,, & \mu_2 : \mu_3 \end{array}$$

geschnitten, wobei äussere Theilung mit dem positiven, innere mit dem negativen Zeichen versehen werden möge, so wird jede andere Kante

$$A_i A_k \text{ im Verhältniss } \mu_i : \mu_k$$

getheilt (incl. Vorzeichen). Zu jeder Ebene gehört nur ein Verhältniss $\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$, und zu jeder Gruppe $\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3$, die man auf die vier gleichnamigen Tetraederecken bezieht, eine und nur eine Ebene. Man kann daher vier solche Zahlen als Coordinaten recht wohl verwerthen; um dabei jeder Ebene eine bestimmte Gruppe von μ (nicht blos ein bestimmtes Verhältniss $\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3$) zuzuordnen, kann man eine beliebige Gleichung festsetzen, welche alle Gruppen von μ erfüllen müssen.

---

* **Plücker**, System der analytischen Geometrie 1835. — **Plücker**, Geometrie des Raumes 1846.

** Dieser Ausdruck mag für Geraden- und Ebenencoordinaten verwendet werden.

Diese Gleichung wird man am einfachsten linear wählen; da sonst keine bestimmenden Gründe vorliegen, wird man sie so wählen, dass die Transformationsformeln aus orthogonalen in homogene Coordinaten möglichst einfach werden.

Bezeichnen

$$\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0;\quad \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1;\quad \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2;\quad \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$$

die orthogonalen Coordinaten der Tetraëderecken $A_0\,A_1\,A_2\,A_3$; ferner

$$\mathfrak{U},\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{W},\ \mathfrak{R}$$

die Abstände dieser Ecken von der variabeln Ebene T, und

$$u,\ v,\ w$$

die reciproken Abschnitte von T auf den orthogonalen Axen, so ist bekanntlich

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{1-\alpha_0 u-\beta_0 v-\gamma_0 w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ \mathfrak{V} &= \frac{1-\alpha_1 u-\beta_1 v-\gamma_1 w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ \mathfrak{W} &= \frac{1-\alpha_2 u-\beta_2 v-\gamma_2 w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ \mathfrak{R} &= \frac{1-\alpha_3 u-\beta_3 v-\gamma_3 w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \end{aligned}\right.$$

Hierbei hat man die Wurzel immer positiv zu nehmen und erhält die Abstände $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{R}$ positiv, sobald sie mit dem Ursprunge auf derselben Seite der Ebene T liegen, im Gegenfalle negativ.

Diese Abstände — die Plücker'schen Coordinaten von T — sind den Zahlen $\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3$ proportional; derjenige Werth, mit welchem $\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{R}$ erweitert werden müssen, um die Formeln 1) zur wechselseitigen Transformation möglichst geeignet zu machen, ist $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, der reciproke immer positiv zu nehmende Abstand des Ursprungs des orthogonalen Systems von T. Bezeichnet man die so erweiterten linken Seiten von 1) mit $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}$ und bringt die Gleichungen auf Null, so ergiebt sich für $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}$ die Identität:

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{u}-1) & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0\\ (\mathfrak{v}-1) & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ (\mathfrak{w}-1) & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ (\mathfrak{r}-1) & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{u}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \mathfrak{v}\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} + \mathfrak{w}\begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\\ \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}\\ &\qquad - \mathfrak{r}\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0\\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnet V den Inhalt des Coordinatentetraeders, $g_0 g_1 g_2 g_3$ den Flächeninhalt der den gleichbezeichneten Ecken gegenüberliegenden Tetraederseiten; $a_0 a_1 a_2 a_3$ die Abstände des Ursprungs des orthogonalen Systems von $g_0 g_1 g_2 g_3$, und rechnet man die ins Innere des Tetraeders gerichteten Normalen der Tetraederflächen positiv, so gestaltet sich 2) einfacher zu:

$$3)\qquad \mathfrak{u} \,.\, a_0 g_0 + \mathfrak{v} \,.\, a_1 g_1 + \mathfrak{w} \,.\, a_2 g_2 + \mathfrak{x} \,.\, a_3 g_3 = V.$$

In den absoluten Werthen stimmen 2) und 3) augenscheinlich Glied für Glied überein; von der Richtigkeit der Vorzeichen in 3) überzeugt man sich, wenn man z. B. $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} = \mathfrak{x} = 0$ setzt; dann fällt T mit g_0 zusammen und $\mathfrak{u}$ wird (incl. Vorzeichen) $= \frac{h_0}{a_0}$, wenn h_0 die Tetraederhöhe auf g_0 bezeichnet, und man erhält die auch in den Vorzeichen richtige Gleichung

$$h_0 g_0 = V.$$

Dasselbe erfolgt, wenn man drei andere Plancoordinaten annullirt.

Da man homogene Coordinaten nicht zur Ausführung von Zahlenrechnungen, sondern zur leichtern Erlangung allgemeiner analytisch-geometrischer Sätze verwendet, so schmälert es die Brauchbarkeit unseres Systems nicht, wenn wir einen bestimmten Punkt des Tetraeders als Ursprung der orthogonalen Coordinaten voraussetzen, um einfachere Formeln zu erhalten. Wir nehmen daher den Mittelpunkt der dem Tetraeder innerlich eingeschriebenen Kugel als Ursprung des orthogonalen Systems, denken uns also bei jedem Uebergange aus orthogonalen in tetraedrische Coordinaten erst in orthogonale Coordinaten mit diesem Ursprunge und dann in tetraedrische transformirt. Ist der Radius dieser Kugel $= \varrho$, so geht 3) in die einfachere Form über:

$$4)\qquad \mathfrak{u} g_0 + \mathfrak{v} g_1 + \mathfrak{w} g_2 + \mathfrak{x} g_3 = \frac{V}{\varrho} \equiv V'.$$

Dies zusammenfassend erhält man:

„Unter den neuen Plancoordinaten $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}$ einer Ebene versteht man die Quotienten aus den Abständen der Ebene von den Tetraederecken und von dem Centrum der eingeschriebenen Kugel; sie werden positiv gerechnet für die Tetraederecken, die mit dem Centrum auf derselben Seite der Ebene liegen, im Gegenfalle negativ.

Unter Bezugnahme auf die obigen Bezeichnungen erfüllen sie die Identität:

$$\mathfrak{u} g_0 + \mathfrak{v} g_1 + \mathfrak{w} g_2 + \mathfrak{x} g_3 = V'.$$

Um die Ebene zu finden, deren Coordinaten $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}$ gegeben sind, theile man die Kanten des Tetraeders $A_0 A_1 A_2 A_3$ im Verhältniss $\mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{w} : \mathfrak{x}$, so dass z. B. $A_1 A_3$ im Verhältniss $\mathfrak{v} : \mathfrak{x}$ getheilt wird u. s. w. und rechne dabei äussere Theilung positiv, innere negativ, so liegen die sechs Theilungspunkte auf der gesuchten Ebene. — Oder für die Ebene:

Unter den neuen Plancoordinaten $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{x}$ einer Geraden versteht man die Quotienten aus den Abständen der Geraden von den drei Ecken des Coordinatendreiecks und dem Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises; sie werden positiv gerechnet für die Dreiecksecken, welche mit dem Centrum auf derselben Seite der Geraden liegen, im Gegenfalle negativ; wenn $g_0 g_1 g_2$ die Seitenlängen des Coordinatendreiecks, V' den Quotienten aus Inhalt und Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnen, so erfüllen sie die Identität:

$$\mathfrak{u} g_0 + \mathfrak{v} g_1 + \mathfrak{r} g_2 = V'.$$

Man findet die den Coordinaten $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{r}$ zugehörige Gerade, wenn man die Seiten des Coordinatendreiecks im Verhältnisse $\mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{r}$ theilt und dabei äussere Theilung als positiv, innere als negativ betrachtet; die drei Theilungspunkte liegen auf der gesuchten Geraden."

Es sei mir erlaubt, auf einige Entwickelungen hinzuweisen, die für diese Plancoordinaten Giltigkeit haben, nicht aber für Plücker'sche Plancoordinaten.

1. Alle Transformationen aus orthogonalen oder schiefwinkligen Systemen in homogene Systeme oder homogener Systeme in nichthomogene erfolgen durch lineare Substitutionen.

2. Bezeichnen $\mathfrak{u}_0 \mathfrak{v}_0 \mathfrak{w}_0 \mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{v}_1 \mathfrak{w}_1 \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{u}_2 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{w}_2 \mathfrak{r}_2$ die Coordinaten dreier Ebenen $T_0 T_1 T_2$ und ist $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, bez. $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so geht die Ebene, deren Coordinaten

$$\mathfrak{u} = \lambda_0 \mathfrak{u}_0 + \lambda_1 \mathfrak{u}_1, \qquad \mathfrak{w} = \lambda_0 \mathfrak{w}_0 + \lambda_1 \mathfrak{w}_1,$$
$$\mathfrak{v} = \lambda_0 \mathfrak{v}_0 + \lambda_1 \mathfrak{v}_1, \qquad \mathfrak{r} = \lambda_0 \mathfrak{r}_0 + \lambda_1 \mathfrak{r}_1,$$

durch die Kante $T_0 T_1$, bez. so geht die Ebene mit den Coordinaten

$$\mathfrak{u} = \lambda_0 \mathfrak{u}_0 + \lambda_1 \mathfrak{u}_1 + \lambda_2 \mathfrak{u}_2, \qquad \mathfrak{w} = \lambda_0 \mathfrak{w}_0 + \lambda_1 \mathfrak{w}_1 + \lambda_2 \mathfrak{w}_2,$$
$$\mathfrak{v} = \lambda_0 \mathfrak{v}_0 + \lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2, \qquad \mathfrak{r} = \lambda_0 \mathfrak{r}_0 + \lambda_1 \mathfrak{r}_1 + \lambda_2 \mathfrak{r}_2$$

durch den Punkt $T_0 T_1 T_2$.

3. Transformirt man diese Ebenen in ein anderes homogenes oder nichthomogenes System, so werden die Coordinaten von T aus denen von $T_0 T_1 T_2$ im neuen System mit Hilfe derselben Coefficienten $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$ und auf dieselbe Weise abgeleitet, wie im ursprünglichen System. Der Beweis erfolgt leicht aus 1). Diese Ableitungscoefficienten sind demnach für die Ebenen charakteristisch und kennzeichnen Lagenverhältnisse der Ebenen unter sich.

4. Der fundamentale Satz über den Zusammenhang der Coefficienten $\lambda_0 \lambda_1$ mit den Schnittverhältnissen einer durch $T_0 T_1 T$ geschnittenen Geraden lässt sich für Plücker'sche Coordinaten nur auf Umwegen gewinnen, während er hier auf die leichteste Weise hervortritt: Um das Schnittverhältniss zu bestimmen, welches die drei Ebenen $T_0 T_1 T$ auf einer Geraden G hervorbringen, denke man sich die Ebenen in ein System transformirt, in welchem T_0 und T_1 zwei Coordinatenebenen sind und G die Gegenkante von $T_0 T_1$ ist. Die übrigen beiden Ecken wähle man auf $T_0 T_1$ beliebig.

Sind $A_0 A_1 A$ die Schnittpunkte von $T_1 T_0 T$ mit G, $h_0 h_1$ die Lothe von A_0 und A_1 bez. auf T_0 und T_1, $g_0 g_1 g_2 g_3$ die auf $T_0 T_1$ und den beiden willkürlichen Ebenen liegenden Flächen des Tetraeders, so haben T_0 und T_1 die Coordinaten

$$\mathfrak{u}_0 = \frac{h_0}{\varrho}, \quad \mathfrak{v}_0 = 0, \quad \mathfrak{w}_0 = 0, \quad \mathfrak{r}_0 = 0,$$

$$\mathfrak{u}_1 = 0, \quad \mathfrak{v}_1 = \frac{h_1}{\varrho}, \quad \mathfrak{w}_1 = 0, \quad \mathfrak{r}_1 = 0.$$

Also sind die Coordinaten für T:

$$\mathfrak{u} = \frac{\lambda_0 h_0}{\varrho}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\lambda_1 h_1}{\varrho}, \quad \mathfrak{w} = 0, \quad \mathfrak{r} = 0.$$

Nach der Definition für die Plancoordinaten wird demnach G geschnitten im Verhältniss:

$$A_0 A : A_1 A = \lambda_0 h_0 : \lambda_1 h_1.$$

Hat man demnach zwei Ebenen T und T' aus $T_0\, T_1$ abgeleitet durch die Coefficienten $\lambda_0 \lambda_1$, $\lambda'_0 \lambda'_1$ und werden diese von G geschnitten in A und A', so ist

$$\frac{A_0 A}{A_1 A} : \frac{A_0 A'}{A_1 A'} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} : \frac{\lambda'_0}{\lambda'_1}.$$

Dresden. Dr. Richard Heger.

VIII. Reduction eines vielfachen Integrals.

Setzt man zur Abkürzung:

1) $\qquad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = A, \qquad b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = B,$

2) $\qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \Sigma a x, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = \Sigma b x,$

so ist das zu entwickelnde n-fache Integral:

3) $$P = \int\int \ldots \int \frac{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n}{(1 + A - 2\Sigma a x)(1 + B - 2\Sigma b x)},$$

wo die Integration über alle reellen Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ auszudehnen ist, welche der Bedingung genügen:

4) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1.$$

Für $n = 2$ hat Hermite den Werth des Doppelintegrals P gegeben (*Annales scientif. de l'école normale supérieure. T. II p.* 49. *Paris* 1865).

Statt $x_1, x_2 \ldots x_n$ führe man $y_1, y_2 \ldots y_n$ in P als Integrationsvariabeln mittelst der orthogonalen Substitution ein:

5) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}\, y_1 + c_{2,1}\, y_2 + \ldots + c_{n,1}\, y_n, \\ x_2 &= c_{1,2}\, y_1 + c_{2,2}\, y_2 + \ldots + c_{n,2}\, y_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= c_{1,n} y_1 + c_{2,n} y_2 + \ldots + c_{n,n}\, y_n. \end{aligned}\right.$$

Zwischen den n^2 Coefficienten $c_{r,s}$ bestehen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Relationen:

$$6)\quad \begin{cases} c_{r,1}c_{s,1}+c_{r,2}c_{s,2}+\ldots+c_{r,n}c_{s,n}=0, & r \gtrless s, \\ c^2_{r,1}+c^2_{r,2}+\ldots+c^2_{r,n}=1. \end{cases}$$

Setzt man:

$$7)\qquad a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n=C, \qquad AB-C^2=D^2,$$

so lässt sich leicht zeigen, dass P von A, B, C und D abhängt. Zu den Gleichungen 6) nehme man noch die folgenden:

$$8)\quad \begin{cases} a_1 c_{1,1}+a_2 c_{1,2}+\ldots+a_n c_{1,n}=a, \\ a_1 c_{2,1}+a_2 c_{2,2}+\ldots+a_n c_{2,n}=a', \\ a_1 c_{r,1}+a_2 c_{r,2}+\ldots+a_n c_{r,n}=0, \\ \qquad r=3,4,\ldots n. \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} b_1 c_{1,1}+b_2 c_{1,2}+\ldots+b_n c_{2,n}=b, \\ b_1 c_{2,1}+b_2 c_{2,2}+\ldots+b_n c_{2,n}=b', \\ b_1 c_{r,1}+b_2 c_{r,2}+\ldots+b_n c_{r,n}=0, \\ \qquad r=3,4,\ldots n. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der n Gleichungen 8) ist nach 1) und 6) gleich A. Multiplicirt man die n Gleichungen 8) mit den n Gleichungen 9), so ist nach 6) und 7) die Summe der Producte gleich C. Man findet so:

$$10)\quad a^2+a'^2=A, \quad b^2+b'^2=B, \quad ab+a'b'=C, \quad ab'-a'b=D.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 6), 8) und 9) geben die Gleichungen 5):

$$\Sigma ax=ay_1+a'y_2, \quad \Sigma bx=by_1+b'y_2, \quad x_1^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+\ldots+y_n^2.$$

Die Gleichung 3) nimmt durch die obige Substitution folgende Form an:

$$P=\int\int\ldots\int\frac{\partial y_1\,\partial y_2\ldots\partial y_n}{MN},$$

$$M=1+A-2(ay_1+a'y_2), \qquad N=1+B-2(by_1+b'y_2),$$

wo die Integration über alle reellen Werthe von $y_1, y_2\ldots y_n$ auszudehnen ist, welche der Bedingung genügen:

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 \leq 1.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} &y_1=\cos\theta_1, \quad y_2=\sin\theta_1\cos\theta_2, \quad y_3=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\ldots, \\ &y_{n-1}=\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ &y_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \end{aligned}$$

so nehmen $\theta_1, \theta_2\ldots\theta_n$ alle Werthe von 0 bis π an. Es ist dann:

$$P=\int_0^\pi\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi\frac{(\sin\theta_1)^n(\sin\theta_2)^{n-1}\ldots\sin\theta_n}{MN}\partial\theta_1\,\partial\theta_2\ldots\partial\theta_n,$$

$$\begin{aligned} M&=1+A-2(a\cos\theta_1+a'\sin\theta_1\cos\theta_2), \\ N&=1+B-2(b\cos\theta_1+b'\sin\theta_1\cos\theta_2). \end{aligned}$$

Da M und N nur von θ_1 und θ_2 abhängen, so lassen sich die Integrationen in Beziehung auf $\theta_3, \theta_4\ldots\theta_n$ unmittelbar ausführen. Setzt man $\theta_1=u$, $\theta_2=v$, so ist:

11) $$P=\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}Q,$$

wo:

$$Q=\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{(\sin u)^n\,(\sin v)^{n-1}}{MN}\,\partial u\,\partial v,$$

$$M=1+A-2\,(a\cos u+a'\sin u\cos v),$$
$$N=1+B-2\,(b\cos u+b'\sin u\cos v).$$

Setzt man:

$$R=\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\sin u\,\partial u\,\partial v}{(1-z\sin u\sin v)\,MN},$$

so ist:

$$Q=\frac{1}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial^{n-1}R}{\partial z^{n-1}}\right)_{z=0}.$$

Das Integral R lässt sich vollständig entwickeln. Eine genauere Untersuchung zeigt indessen, dass die Bildung des $(n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten sehr complicirt und mühsam ist, so dass es einfacher zu sein scheint, den Werth von Q für ein gegebenes n direct darzustellen. Durch die Gleichungen 10) sind a, a', b, b' nicht vollständig bestimmt, diese Unbestimmtheit kann nur durch Ausführung des Doppelintegrals Q aufgehoben werden, indem Q nur solche Verbindungen der bemerkten Quantitäten enthalten wird, welche sich in Folge der Gleichungen 10) durch A, B, C ausdrücken lassen. Man kann auch a, a', b, b' bestimmen durch eine neue Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Substitution 5). Nimmt man z. B. $a'=0$, so geben die Gleichungen 10):

$$a=\sqrt{A},\quad b=\frac{C}{\sqrt{A}},\quad b'=\frac{D}{\sqrt{A}}.$$

Es ist dann:

12) $$\left\{\begin{aligned}&Q=\sqrt{A}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{(\sin u)^n\,(\sin v)^{n-1}}{MN}\,\partial u\,\partial v,\\ &M=1+A-2\cos u\sqrt{A},\quad N=(1+B)\sqrt{A}-2C\cos u-2D\sin u\cos v.\end{aligned}\right.$$

Die Anzahl der willkürlichen Coefficienten $c_{r,s}$ ist in diesem Falle gleich $\frac{1}{2}(n^2-5n+6)$. Diese Zahl ist positiv von $n=4$ an, sie verschwindet für $n=2$ und $n=3$. Für $n=2$ und $n=3$ ist die Substitution 5) vollständig bestimmt. Man hat dann die folgenden Gleichungen:

$n=2$.

$$x_1\sqrt{A}=a_1y_2-a_2y_2,\quad x_2\sqrt{A}=a_2y_1+a_1y_2.$$

$n = 3$.

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{A}} y_1 + \frac{b_1 A - a_1 C}{D\sqrt{A}} y_2 + \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{D} y_3,$$

$$x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{A}} y_1 + \frac{b_2 A - a_2 C}{D\sqrt{A}} y_2 + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{D} y_3,$$

$$x_3 = \frac{a_3}{\sqrt{A}} y_1 + \frac{b_3 A - a_3 C}{D\sqrt{A}} y_2 + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{D} y_3.$$

Für $n = 2$ erhält man aus 11) und 12) das von Hermite gefundene Resultat:

$$P = \frac{\pi}{D} \operatorname{arctang} \frac{D}{1 - C}.$$

Für $n = 3$ geben die bemerkten Gleichungen:

$$\frac{4D^2}{\pi} P = \frac{(1+B)A - (1+A)C}{\sqrt{A}} \log\left(\frac{1+\sqrt{A}}{1-\sqrt{A}}\right)^2$$
$$+ \frac{(1+A)B - (1+B)C}{\sqrt{B}} \log\left(\frac{1+\sqrt{B}}{1-\sqrt{B}}\right)^2$$
$$- \sqrt{H} \, . \log \frac{(1+A)(1+B) - 4C + 2\sqrt{H}}{(1+A)(1+B) - 4C - 2\sqrt{H}},$$

wo:

$$H = (A+B)(1+AB) - 2C(1+A)(1+B) + 4C^2,$$

oder auch:

$$4H = \{(1+A)(1+B) - 4C\}^2 - (1-A)^2(1-B)^2.$$

A. Enneper.

IX. Ueber rectificabele Curven.

Den verschiedenen bisher angegebenen Methoden zur Aufsuchung rectificabeler Curven kann man die folgende anreihen, welche auf der identischen Gleichung

$$(u + \sqrt{2uv})^2 + (\sqrt{2uv} + v)^2 = (u + \sqrt{2uv} + v)^2$$

beruht und mittelst deren sich unter Anderem die Functionalgleichung

$$s - x = \psi(s - y)$$

ohne Specialisirung der willkürlich gewählten Function ψ auflösen lässt.

Bezeichnen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ zwei willkürliche Functionen der unabhängigen Variabelen t und ist ferner, wenn A und B willkürliche Constanten bedeuten,

$$1) \qquad x - A = \varphi(t) + \int \sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)} \, . \, dt,$$

$$2) \qquad y - B = \psi(t) + \int \sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)} \, . \, dt,$$

so hat man

$$dx = \left[\varphi'(t) + \sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)}\right] dt,$$
$$dy = \left[\sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)} + \psi'(t)\right] dt,$$

mithin nach dem anfangs erwähnten Satze

$$ds = \left[\varphi'(t) + \sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)} + \psi'(t)\right] dt,$$

und durch Integration

$$3)\qquad s - C = \varphi(t) + \psi(t) + \int \sqrt{2\varphi'(t)\,\psi'(t)}\,.\,dt.$$

Die Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ können leicht so gewählt werden, dass die in den Formeln 1), 2) und 3) vorkommende Integration bequem ausführbar ist; jede solche Wahl liefert eine quadrirbare Curve, bei der x, y und s durch t ausgedrückt sind. Will man die Curve durch eine Gleichung zwischen x und y charakterisiren, so hat man t aus Nr. 1) und 2) zu eliminiren. In analoger Weise lassen sich Gleichungen zwischen x und s oder y und s bilden. Bemerkenswerth für diesen Zweck sind noch die beiden Relationen

$$4)\qquad s - x + A - C = \psi(t), \qquad s - y + B - C = \varphi(t).$$

Nimmt man specieller $A = B = C$ und $\varphi(t) = t$, so geben die Gleichungen 4)

$$s - x = \psi(s - y),$$

und die zugehörige Curve ist durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$x - c = t + \int \sqrt{2\psi'(t)}\,.\,dt,$$
$$y - c = \psi(t) + \int \sqrt{2\psi'(t)}\,.\,dt.$$

Ein sehr einfaches Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$(s-y)^3 = 24a^2(s-x) \quad \text{oder} \quad \psi(t) = \frac{t^3}{24a^2}.$$

Giebt man $\sqrt{2\psi'(t)}$ das positive Zeichen, so hat man

$$x - c = t + \frac{t^2}{4a}, \qquad y - c = \frac{t^2}{4a} + \frac{t^3}{24a^2},$$
$$s - c = t + \frac{t^2}{4a} + \frac{t^3}{24a^2},$$

oder für $c = a$ und durch Elimination von t

$$y = \left(\tfrac{1}{3}x - a\right)\sqrt{\frac{x}{a}} + \tfrac{5}{3}a,$$

$$s = \left(\tfrac{1}{3}x + a\right)\sqrt{\frac{x}{a}} - \tfrac{1}{3}a.$$

Der Bogen s ist hier von der Stelle ab gerechnet, wo $s = 0$, mithin x gleich wird dem speciellen Werthe

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - 2\right) a = 0{,}1038\ldots a.$$

Nimmt man $\sqrt{2\psi'(t)} = \frac{1}{2a}$ mit dem negativen Zeichen, so erhält man im Wesentlichen dasselbe Resultat. SCHLÖMILCH.

X. Geometrische Bestimmung der Ordnung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernfläche.

Dass die Kernfläche einer Fläche n^{ten} Grades vom Grade $4(n-2)$ ist, beweist die analytische Geometrie aus einer Betrachtung der Hesse-schen Determinante.* Einen anderen Nachweis dieser Zahl ist die neuere Geometrie schuldig, welche weder Gleichungen noch Determinanten kennt, und welche deshalb die Kernfläche nicht als Determinantenfläche auffassen kann, sondern als den Ort der Punkte definiren muss, deren quadratische Polarflächen in Kegel degeneriren. Zu einem solchen Nachweis erscheint die Chasles'sche Methode der Charakteristiken** am meisten geeignet, was sofort einleuchtet, wenn man bedenkt, dass die gesuchte Ordnungszahl nichts Anderes als die Anzahl der Kegel ist, welche in dem Systeme der quadratischen Polarflächen vorkommen, die zu den sämmtlichen Punkten irgend einer Geraden gehören, dass aber die Anzahl dieser Kegel aus den drei Charakteristiken jenes Systems der Polarflächen bestimmbar ist. Um jedoch diese Charakteristiken finden zu können, müssen wir einige allgemeinere Betrachtungen über die quadratischen Polarflächen voranschicken.

Die quadratischen oder $(n-2)^{\text{ten}}$ Polarflächen sämmtlicher Punkte des Raumes in Bezug auf eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n bieten eine dreifach unendliche Mannichfaltigkeit dar. Drei beliebig gegebenen Bedingungen genügt also im Allgemeinen eine endliche Anzahl dieser Flächen zweiter Ordnung. Z. B. gehen $(n-2)^3$ von ihnen durch drei gegebene Punkte, weil die $(n-2)^{\text{te}}$ oder quadratische Polarfläche jedes Punktes, der auf der zweiten Polarfläche eines Punktes liegt, diesen letzteren enthält und weil demnach die $(n-2)^3$ Punkte, in welchen sich die zweiten Polarflächen der drei gegebenen Punkte schneiden, $(n-2)^3$ quadratische Polarflächen haben, welche die einzigen sind, die diese drei Punkte enthalten können. Da also die Hinzufügung dreier Bedingungen erforderlich ist, um von den sämmtlichen quadratischen Polarflächen in Bezug auf F_n eine endliche Anzahl auszusondern, eine Fläche zweiter Ordnung aber durch neun Bedingungen endlichdeutig bestimmt ist, so bleiben irgendwelche sechs Bedingungen übrig, denen alle die dreifach unendlich vielen quadratischen Flächen genügen müssen. Wenn nun eine Fläche zweiter Ordnung Doppel-

---

* Siehe Salmon's Analyt. Geometrie des Raumes, von Fiedler bearbeitet, II. Theil S. 25.

** *Comptes rendus*, Band 58, 59, 62 etc.

punkte hat, so ist dies entweder einer, oder es sind einfach unendlich viele oder endlich doppelt unendlich viele. Im ersten Falle ist die Fläche in einen Kegel zweiter Ordnung degenerirt, dessen Mittelpunkt der Doppelpunkt ist, im zweiten Falle in ein Paar von Ebenen, deren Schnittgerade Ort der Doppelpunkte ist, und endlich im dritten Falle in eine doppelt zu denkende Ebene, deren sämmtliche Punkte die Doppelpunkte sind. Da aber ein Kegel durch acht, ein Ebenenpaar durch sechs und eine Ebene durch drei Bedingungen endlichdeutig bestimmt ist, so kommen unter jenen sechs gemeinsamen Bedingungen unterworfenen quadratischen Polarflächen von F_n Kegel in doppelt unendlicher Anzahl, Ebenenpaare in endlicher Anzahl* und doppelt zu denkende Ebenen gar nicht vor. Setzt man diese drei Ausartungen quadratischer Flächen mit den drei Grundgebilden erster Stufe, dem Ebenenbüschel, dem ebenen Strahlbüschel und der geraden Punktreihe in unmittelbare Beziehung, so erhält man, dass die beiden Tangentialebenen, welche jedes Ebenenbüschel mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein hat, zusammenfallen, wenn die Fläche in einen Kegel degenerirt**, ferner, dass die beiden Tangenten, welche jedes ebene Strahlbüschel mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein hat, zusammenfallen, wenn die Fläche in ein Ebenenpaar degenerirt, und endlich, dass die beiden Punkte, welche jede gerade Punktreihe mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein hat, zusammenfallen, wenn die Fläche in eine Doppelebene degenerirt. Demgemäss können wir behufs späterer Anwendung den obigen drei Bemerkungen über die Anzahl der F_n angehörenden degenerirten quadratischen Polarflächen die folgende Gestalt geben:

In der einfach unendlichen Schaar der quadratischen Polarflächen in Bezug auf irgend eine Fläche F_n giebt es

1) zweifach unendlich viele, welche mit jedem Ebenenbüschel zwei zusammenfallende Tangentialebenen gemein haben;
2) endlich viele, welche mit jedem ebenen Strahlbüschel zwei zusammenfallende Tangenten gemein haben;
3) keine, die mit jeder geraden Punktreihe zwei zusammenfallende Punkte gemein hätten.

Um nun die Anzahl der Punkte zu bestimmen, welche, auf irgend einer Geraden l liegend, Kegel zu quadratischen Polarflächen haben, sind zuvörderst die Charakteristiken μ, ν, ϱ der einfach unendlichen Schaar oder des Systems S der quadratischen Polarflächen zu bestimmen, die zu den sämmtlichen Punkten von l gehören; d. h. es ist die Anzahl μ derjenigen Flächen des Systems anzugeben, welche durch irgend einen Punkt P

* Nämlich $10(n-2)^3$, wie weitere Untersuchungen ergeben.

** Man darf nicht übersehen, dass Tangentialebene einer in einen Kegel ausgearteten Fläche jede durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene ist.

gehen, die Anzahl ν derer, welche irgend eine Gerade G berühren, und endlich die Anzahl ϱ derer, welche irgend eine Ebene E berühren.

Die zweite Polarfläche eines Punktes P in Bezug auf F_n ist von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, schneidet demnach l in $n-2$ Punkten, deren $n-2$ quadratische Polarflächen sowohl zu S gehören, als auch durch P gehen müssen. Da ferner ersichtlich, dass diese Bedingungen von keinen anderen, als von diesen $n-2$ Flächen gleichzeitig erfüllt werden, so resultirt:

4) $$\mu = n - 2.$$

Durch jeden Punkt g einer Geraden G gehen also $n-2$ Flächen des Systems S. Diese schneiden G in $n-2$ zweiten Schnittpunkten g'. Da auf diese Weise jedem Punkte g von G $n-2$ Punkte g' zugeordnet sind, und umgekehrt auch zu jedem Punkte g' $n-2$ Punkte g gehören müssen, so giebt es nach einem bekannten Satze $2(n-2)$ Stellen auf G, wo derartig zugeordnete Punkte g und g' zusammenfallen. Es fragt sich nun, wodurch solche Stellen hervorgerufen werden können. Entweder dadurch, dass G dort von einer Fläche des Systems berührt wird, oder dadurch, dass G dort von einer in eine Doppelebene degenerirten Fläche geschnitten wird. Da letzteres nach Satz 3) nicht der Fall sein kann, so folgt jetzt:

5) $$\nu = 2(n-2).$$

Jeder Strahl e eines ebenen Strahlbüschels E wird also von $2(n-2)$ Flächen des Systems S berührt. An jede derselben geht noch eine Tangente e', welche auch zu den Strahlen von E gehört. Da somit jedem Strahle e von E $2(n-2)$ Strahlen e' zugeordnet sind und auch umgekehrt zu jedem Strahle e' $2(n-2)$ Strahlen e gehören, so giebt es also in E $4(n-2)$ ausgezeichnete Strahlen, in denen zwei derartig zugeordnete Strahlen zusammenfallen. Dieses Zusammenfallen kann herrühren erstens dem Satze 4) gemäss von den $\mu = n-2$ Flächen, welche durch den Mittelpunkt des ebenen Strahlbüschels E gehen, zweitens von den ϱ Flächen, welche die Ebene dieses Strahlbüschels berühren, und drittens von den etwa im Systeme vorkommenden in Ebenenpaare degenerirten Flächen. Da solche nach dem Satze 2) überhaupt nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, also bei der allgemeinen Lage der Geraden l nicht vorkommen, so folgt nun:

6) $$\varrho = 3(n-2).$$

Jede Ebene h eines Ebenenbüschels H wird also von $3(n-2)$ Flächen des Systems S berührt. An jede derselben geht noch eine Tangentialebene h', welche auch zu den Ebenen von H gehört. Da auf diese Weise jeder Ebene h $3(n-2)$ Ebenen h' zugeordnet sind, und auch umgekehrt jeder Ebene h' $3(n-2)$ Ebenen h entsprechen müssen, so giebt es in dem Ebenenbüschel H $6(n-2)$ Ebenen, in welche derartig zugeordnete Ebenen h und h' zusammenfallen. Dies sind erstens nach Satz 5) die $\nu = 2(n-2)$ doppelt zu denkenden Tangentialebenen, welche durch die Axe des Ebenenbüschels an die sie berührenden Flächen gelegt werden können, und zweitens die doppelt zu denkenden Ebenen, welche durch die Axe gehen und die etwa vorkommenden in Kegel degenerirten Flächen des Systems berühren, d. h die Ebenen, welche durch die Axe und die Mittelpunkte dieser Kegel gehen. Bezeichnen wir also die Anzahl der in dem Systeme S vorkommenden Kegel k, so erhalten wir:

$$7) \qquad k = 4(n-2).$$

Es könnte sich nun vielleicht noch fragen, ob nicht jeder dieser Kegel quadratische Polarfläche mehrerer Punkte der Geraden l sein könnte. Dies zu erörtern, wollen wir annehmen, die Anzahl der auf l liegenden Punkte X, welche ein und dieselbe quadratische Polarfläche in Bezug auf F_n haben, sei x. Dann entsprechen jedem Punkte X auf l zwei Punkte f als die Schnittpunkte der zu X gehörigen Polarfläche mit l. Durch jeden Punkt f gehen nach Satz 4) $\mu = n - 2$ quadratische Polarflächen. Jede derselben ist Polarfläche zu x Punkten auf l. Demnach entsprechen jedem Punkte f $x(n-2)$ Punkte X. Es giebt also auf l $2 + x(n-2)$ Stellen, wo derartig zugeordnete Punkte f und X zusammenfallen. An solchen Stellen liegt ein Punkt auf seiner eigenen Polarfläche, muss also auch auf F_n liegen. Jene Stellen können also nichts anderes, als die n Punkte sein, in welchen l F_n schneidet. Wir haben also $2 + x(n-2) = n$, woraus folgt $x = 1$. Da nun die Anzahl der im Systeme vorkommenden Kegel nach Satz 7) $4(n-2)$ ist, so giebt es, weil $x = 1$ sich ergab, auch auf der beliebigen Geraden l $4(n-2)$ Punkte, welche Kegel zu quadratischen Polarflächen haben. Demnach ist der Ort aller solcher Punkte oder die Hesse'sche Kernfläche von der Ordnung $4(n-2)$.

H. Schubert, cand. math.

XI. Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide.

1. Wenn sich zwei Punkte auf einem und demselben Kreise gleichförmig, aber mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegen und wenn die gleichzeitigen Lagen beider Punkte durch gerade Linien verbunden werden, so umhüllen diese Linien eine Epicycloide, wenn die Bewegungsrichtung der beiden Punkte eine gleiche, und eine Hypocycloide, wenn sie eine entgegengesetzte ist.

Um diesen Satz zu beweisen, lege man durch das Centrum des Kreises ein Axenkreuz und zwar der Einfachheit halber so, dass die X-Axe durch einen der Punkte geht, in welchen sich die bewegten Punkte begegnen. Alsdann sind, wenn man das Verhältniss der Geschwindigkeiten durch n bezeichnet, wobei n stets grösser als 1 angenommen werden kann, die gleichzeitigen Lagen der zwei Punkte ausdrückbar durch die Gleichungen:

$$x_1 = a\cos\varphi\,, \qquad y_1 = a\sin\varphi\,,$$
$$x_2 = a\cos n\varphi\,, \qquad y_2 = a\sin n\varphi.$$

Indem man nun aus der Gleichung der Verbindungslinie

$$x(\sin n\varphi - \sin\varphi) - y(\cos n\varphi - \cos\varphi) = a\sin(n-1)\varphi$$

und der aus derselben durch Differenziren nach φ erhaltenen Gleichung x und y bestimmt, erhält man schliesslich:

$$x = \frac{a}{n+1}(n\cos\varphi + \cos n\varphi)\,,$$
$$y = \frac{a}{n+1}(n\sin\varphi + \sin n\varphi).$$

Diese beiden Gleichungen stellen aber eine gemeine Epicycloide dar, bei welcher die X-Axe durch einen der Punkte geht, welche vom Centrum am weitesten abstehen. Der Halbmesser des Wälzungskreises ist

$$\frac{a}{n+1},$$

und derjenige des Grundkreises:

$$\frac{a(n-1)}{n+1}.$$

Hierbei war die Bewegungsrichtung der beiden Punkte als gleich angenommen; im entgegengesetzten Falle würde n mit $-n$ zu vertauschen gewesen sein und man würde die Gleichungen der gemeinen Hypocycloide erhalten haben.

2. Aus den obigen Gleichungen für x und y ersieht man sofort, dass die Sehne des Kreises durch den Berührungspunkt in dem constanten Verhältnisse $n:1$ getheilt wird, so dass sich der Satz ergiebt:

Jeder Punkt einer gemeinen Epicycloide theilt die innerhalb des umschriebenen Kreises liegende Strecke seiner Tangente in constantem Verhältniss.

Gleiches gilt für die Hypocycloide, nur dass hier der umschriebene Kreis mit dem eingeschriebenen zu vertauschen ist und der Berührungspunkt die Tangente stets von aussen theilt.

Wenn man die Verbindungslinie der zwei sich bewegenden Punkte in einem andern Verhältniss theilt, so erhält man auch noch eine Epicycloide, aber eine verlängerte oder eine verkürzte; denn durch

$$x = \frac{a}{m+1}(m\cos\varphi + \cos n\varphi)\,,$$
$$y = \frac{a}{m+1}(m\sin\varphi + \sin n\varphi)$$

wird eine solche dargestellt, bei welcher der Halbmesser des Grundkreises

$$\frac{am(n-1)}{n(m+1)}$$

und der des Wälzungskreises

$$\frac{am}{n(m+1)}$$

ist, während der beschreibende Punkt vom Centrum des Wälzungskreises um die Strecke

$$\frac{a}{m+1}$$

absteht. Je nachdem $m \gtrless n$, ist diese Cycloide eine verkürzte oder eine verlängerte.

Wenn insbesondere $m=1$ ist, wenn also die Curve zu untersuchen ist, welche vom Mittelpunkte der Sehne beschrieben wird, so erhält man:

$$x=\frac{a}{2}(\cos\varphi+\cos n\varphi)=a.\cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right).\cos\left(\frac{n-1}{2}\varphi\right),$$

$$y=\frac{a}{2}(\sin\varphi+\sin n\varphi)=a.\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right).\cos\left(\frac{n-1}{2}\varphi\right).$$

Führt man Polarcoordinaten ein, so erhält man den Radius vector

$$r=a\cos\frac{n-1}{2}\varphi$$

und die Anomalie

$$\omega=\frac{n+1}{2}\varphi,$$

so dass die Polargleichung der Curve wird:

$$r=a\cos\frac{n-1}{n+1}\omega.$$

Es ist dies die Curve, welche z. B. von Durège im 9. Bande dieser Zeitschrift untersucht worden ist.

3. Theilt man die Sehne nicht von innen, sondern von aussen in dem constanten Verhältniss $m:1$, so werden die Coordinaten des Theilpunktes

$$x=\frac{a}{m-1}(m\cos\varphi-\cos n\varphi),$$

$$y=\frac{a}{m-1}(m\sin\varphi-\sin n\varphi).$$

Auch diese Gleichungen stellen noch eine Epicycloide dar, bei welcher aber die positive X-Axe durch einen der Punkte geht, welche dem Centrum am nächsten liegen. Der Halbmesser des Grundkreises ist dabei:

$$\frac{am(n-1)}{n(m-1)},$$

derjenige des Wälzungskreises:

$$\frac{am}{n(m-1)},$$

und der Abstand des beschreibenden Punktes vom Centrum des Wälzungskreises:

$$\frac{a}{m-1}.$$

Unter diesen durch äussere Theilung der Sehnen erhaltenen Curven ist auch eine gemeine Epicycloide enthalten; sie entspricht dem speciellen Werthe $m=n$. Die Punkte derselben würden sonach erhalten, wenn man auf jeder Sehne den Punkt sucht, welcher dieselbe von aussen in demselben Verhältnisse theilt, als der Berührungspunkt innen. Diese Epicycloide ist der inneren ähnlich und hat ihre Spitzen in den Scheiteln derselben.

4. Bestimmt man den Winkel z, welchen eine Sehne mit der Tangente an die durch Theilung im Verhältniss $m:1$ erhaltenen Epicycloide bildet, so ergiebt sich

$$tang\, z = \frac{m-n}{m+n}\, tang\, \frac{n-1}{2}\, \varphi.$$

Dieser Werth wird 0 für $m=n$, wie bereits oben erörtert ist. Er wird aber für $m=-n$ unendlich, also $z=90^0$. Die zweite von uns erhaltene gemeine Epicycloide schneidet daher alle Tangenten der ersten rechtwinklig und ist somit eine Evolvente derselben und zwar diejenige, welche sich ergiebt, wenn man die Abwickelung am Scheitel beginnt.

Man erhält daher z. B. die Bogenlänge einer gemeinen Epicycloide vom Scheitel bis zu einem beliebigen Punkte, indem man in diesem eine Tangente an dieselbe legt und zu dem Berührungspunkte derselben und den beiden Schnittpunkten mit dem umschriebenen Kreise den vierten harmonischen Punkt sucht. Die Entfernung desselben vom Berührungspunkte giebt die Bogenlänge an.

5. Auch die oben erwähnte Curve

$$r = a \cos \frac{n-1}{n+1}\, \omega$$

hat mit der ersten Epicycloide einen einfachen Zusammenhang. Sie ist nämlich, wie eine sehr einfache Betrachtung ergiebt, die Fusspunktslinie derselben für einen im Centrum gelegenen Pol. Ueberhaupt ist jede Curve von der Polargleichung

$$r = a \cos m\, \omega$$

die Fusspunktslinie einer Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem

$$m \lesseqgtr 1$$

ist.

6. Von dem zu Anfang bewiesenen Lehrsatze kann man Anwendung machen zur Bestimmung der Catacaustica eines Kreises, wenn der Leuchtpunkt entweder in der Peripherie oder unendlich fern liegt.

Nimmt man im ersten Falle an, die X-Axe gehe durch den Leuchtpunkt und es treffe irgend ein Lichtstrahl im Kreise so auf, dass der Winkel zwischen dem Radius des Einfallspunktes und der Abscissenaxe α ist, so bildet der Radius des Punktes, in welchem der reflectirte Strahl den Kreis wieder trifft, mit derselben den Winkel 2α. Für den Endpunkt des zweimal reflectirten Strahles ist jener Winkel 3α u. s. w.; für den des n-mal reflectirten Strahles $(n+1)\alpha$. Es ist daher, wenn der eine Endpunkt des letzteren gegeben ist durch die Coordinaten

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,$$

der andere Endpunkt bestimmt durch

$$x = a\cos\frac{n+1}{n}\varphi,\quad y = a\sin\frac{n+1}{n}\varphi,$$

und die n^{te} Brennlinie ist als Umhüllende der Verbindungslinie dieser Punkte eine gemeine Epicycloide, welche zu den Halbmessern des Grund- und Wälzungskreises

$$\frac{a}{2n+1} \text{ und } \frac{an}{2n+1}$$

hat.

Wenn hingegen die Strahlen parallel auffallen, so nehme man ihre Richtung zur Y-Axe und bezeichne den Winkel, welchen der Radius eines einfallenden Strahles mit der X-Axe bildet, mit α. Alsdann ist derselbe Winkel für den zweiten Endpunkt des einmal reflectirten Strahles 3α, des zweimal reflectirten Strahles 5α u. s. w., des n-mal reflectirten Strahles $(2n+1)\alpha$. Es ist daher, wenn die Coordinaten des einen Endpunktes des letzteren durch

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi$$

gegeben sind, der andere Endpunkt bestimmt durch

$$x = a\cos\frac{2n+1}{2n-1}\varphi,\quad y = a\sin\frac{2n+1}{2n-1}\varphi,$$

so dass auch für parallel einfallende Strahlen die n^{te} Brennlinie eine Epicycloide ist mit den Halbmessern

$$\frac{a}{2n} \text{ und } \frac{(2n-1)a}{4n}.$$

7. Wenn man in zwei parallele Ebenen zwei gleichgrosse Kreise so legt, dass ihre Mittelpunkte senkrecht über einander liegen, und wenn man ferner in denselben sich zwei Punkte mit verschiedenen Geschwindigkeiten gleichförmig und in gleicher Richtung fortbewegen lässt und die gleichzeitigen Lagen dieser Punkte mit einander verbindet, so entsteht eine Regelfläche. Diese liefert, wenn man sie durch Parallelebenen zu den Kreisebenen schneidet, stets Epicycloiden als Durchschnittslinien. Unter diesen ist zunächst eine gemeine Epicycloide enthalten, welche zugleich für ein in Richtung der Axe unendlich fern liegendes Auge die sichtbare Grenze der Fläche bildet. Zwischen der Schnittfläche, in welcher diese Linie liegt, und der Kreisebene, in welcher sich der langsamer gehende Punkt bewegt, sind die Schnittlinien der Fläche verkürzte, auf der andern Seite dagegen

verlängerte Epicycloiden. Die Ebene, welche von beiden Kreisflächen gleich weit absteht, schneidet die Oberfläche in der oben in 5) besprochenen Schleifenlinie.

Unter den Schnittlinien, welche durch Parallelebenen entstehen, die nicht zwischen den beiden Kreisebenen liegen, ist wieder eine gemeine Epicycloide vorhanden, nämlich jenseits des Kreises, in welchem sich der langsamer gehende Punkt bewegt; die Schnittlinien zwischen dieser Schnittfläche und dieser Kreisebene sind verkürzte, die übrigen verlängerte Epicycloiden.

Zu je einer äusseren giebt es eine ähnliche innere Schnittlinie; legt man irgend eine gerade Linie, so wird das Stück derselben, welches zwischen den beiden Kreisebenen liegt, durch die Ebene jener zwei Schnittlinien harmonisch getheilt. Wenn sich die Punkte in den beiden Kreisen nach entgegengesetzter Richtung bewegen, so werden die Schnittlinien der entstehenden Fläche Hypocycloiden.

8. Wenn die beiden Kreise verschiedene Halbmesser haben, so ändert sich das Resultat nicht wesentlich, denn auch durch

$$x = \frac{1}{m+1}(a m \cos\varphi + b \cos n\varphi),$$

$$y = \frac{1}{m+1}(a m \sin\varphi + b \sin n\varphi),$$

werden Epicycloiden dargestellt, unter denen sich auch, wenn m variirt, zwei gemeine Epicycloiden vorfinden $\left(\text{für } m = \frac{bn}{a} \text{ und } m = -\frac{bn}{a}\right)$. Nur ist die sichtbare Grenze der Fläche keine Epicycloide mehr, sondern eine zusammengesetztere Curve.

Reichenbach i. V. F. E. Eckardt.

XII. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen.

Unter dem vorstehenden Titel giebt Herr Unferdinger im Octoberhefte 1869 der Sitzungsberichte der Wiener Akademie eine Verallgemeinerung des Satzes, den ich im 14. Bande dieser Zeitschrift S. 250 mittelst bestimmter Integrale abgeleitet habe. Der letztere betraf die Aenderung, welche die Summe der Reihe

$$\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} - \frac{1}{z+4} + \dots$$

in dem Falle erleidet, wo die Reihenglieder so umgestellt werden, dass p positive und q negative Glieder auf einander folgen; die Differenz der beiderseitigen Summen beträgt nämlich $\frac{1}{2} l\left(\frac{p}{q}\right)$*. In dem Unferdinger-schen Aufsatze wird eine allgemeinere Reihe, in welcher m positive und n negative Glieder mit einander abwechseln, zum Ausgangspunkte gewählt, nämlich:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+3}+\dots+\frac{1}{z+m}\\
&-\frac{1}{z+m+1}-\frac{1}{z+m+2}-\frac{1}{z+m+3}-\dots-\frac{1}{z+m+n}\\
&+\frac{1}{z+m+n+1}+\frac{1}{z+m+n+2}+\dots+\frac{1}{z+2m+n}\\
&-\frac{1}{z+2m+n+1}-\frac{1}{z+2m+n+2}-\dots-\frac{1}{z+2m+2n}\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und es handelt sich dann um die Bestimmung der Aenderung, welche die Summe erleidet, wenn die Terme so umgestellt werden, dass auf mm_1 positive Glieder nn_1 negative Glieder folgen. Der Verfasser findet als Differenz der beiderseitigen Reihensummen den Ausdruck

$$\frac{m\,lm_1-n\,ln_1}{m+n},$$

welcher für $m=n=1$, $m_1=p$, $n_1=q$ in den früher erwähnten übergeht. Für den Fall $m\,lm_1=n\,ln_1$ verschwindet die obige Differenz.

SCHLÖMILCH.

XIII. Ueber die elektrische Entladung.

In den Sitzungsberichten der Königl. Bayer'schen Akademie der Wissenschaften (1870, I, 2 vom 5. Februar d. J.) theilt Professor Beetz die Resultate einer von Professor von Bezold ausgeführten Untersuchung über die elektrische Entladung mit. Dabei wurden folgende bemerkenswerthe Resultate gewonnen:

1. Bietet man einer elektrischen Entladung nach Durchbrechung einer Funkenstrecke zwei Wege zur Erde dar, einen kurzen

---

* Herr Unferdinger sagt am Ende von § 3 seiner Abhandlung, dass ich zu der genannten Untersuchung durch eine briefliche Mittheilung von seiner Seite angeregt worden sei. In der That hat mir Herr Unferdinger eine Notiz hierüber zukommen lassen, aber auch umgehend die Antwort erhalten, dass mir die Sache nicht neu sei, denn sie war längst für den zweiten Band meines in wenigen Wochen erscheinenden Uebungsbuchs der höheren Analysis redigirt. Uebrigens gehört der Gegenstand zu den Kleinigkeiten, die Jeder findet, der sie finden will.

und einen längeren, durch eine Probeplatte unterbrochenen, so findet bei kleinen Schlagweiten eine Theilung des Entladungsstromes statt. Bei grösseren Funkenstrecken hingegen schlägt die Elektricität nur den kurzen Weg ein und reisst sogar aus dem anderen Zweige gleichnamige Elektricität mit sich fort.

2. Sendet man einen elektrischen Wellenzug in einen am Ende isolirten Draht, so wird derselbe am Ende reflectirt. Die Erscheinungen, welche diesen Vorgang bei alternirenden Entladungen begleiten, scheinen ihren Ursprung der Interferenz der ankommenden und reflectirten Wellen zu verdanken.

3. Eine elektrische Entladung pflanzt sich in gleich langen Drähten gleich rasch fort ohne Rücksicht auf das Material, aus welchem diese Drähte bestehen.

XIV. Zur Geschichte der Telegraphie und des Magnetismus.

In der kleinen Mittheilung auf Seite 66 dieses Jahrganges hat sich ein Irrthum eingeschlichen, auf welchen mich brieflich aufmerksam zu machen Fürst Balthasar Boncompagni in Rom die Gewogenheit hatte. Ueber die auf Seite 66 erwähnte Mittheilung des Barnabiters Bertelli in Neapel berichtete Chasles der Pariser Akademie (*Compt. rend. LXVII*, *p.* 785), führte aber nach J. B. Porta, 1558, irrthümlich „*L. Barbieri*, *secrétaire de la bibliothèque palatine de Parme*, 1609“ unter Denen auf, in deren Werken sich früher, als 1636 (Seite 66 steht fälschlich „als 1836“ und „S. B. Porta“) die Idee eines magnetischen Telegraphen finde. Jene briefliche Mittheilung Bertelli's an Boncompagni ist in dem von Letzterem redigirten *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche* (*Giugno* 1868) enthalten, und die hier in Frage kommende Stelle lautet:

„.... *trovo in un altro documento*, *comunicatomi dal Sig. Abate Luigi Barbieri*, *Segretario della Bibliotheca Palatina di Parma*, ... *Questo documento è un passo d'un opera di Anselmo de Boodt di Bruges intitolata* „*Gemmarum et lapidum historia*“, *e stampata per la prima volta in Hanau nel* 1609.“

Barbieri ist also zur Zeit Bibliothekar in Parma und Seite 66 hätte der Leibarzt Kaiser Rudolph II., Anselm de Boodt in Brügge, genannt werden müssen.

Aus der erwähnten, von Fürst Boncompagni mir gütigst übersandten Juni-Nummer des *Bulletino* habe ich aber ersehen, dass die auf Seite 66 angeführten Quellen dem Wesen nach sehr verschieden, auch wenigstens zum Theil nicht ohne innern Zusammenhang sind, und deshalb sei es vergönnt, etwas ausführlicher auf die betreffende Sachlage einzugehen.

1. Am Schluss des 21. Kapitels des zweiten Buches in: „*Magiae naturalis, sive de miraculis rerum naturalium libri III. Jo. Baptista Porta Neapolitani auctore Neapoli MDLVIII*“ heisst es:

„*Nos non injucundum casu invenimus experimentum, ut arenam albam a nigra separet, vel alio discrimine notabilem, et fortasse experimentum hoc antiquorum fuerit, quod magnes, et ferrum, arenam oleum, et omne traheret. Tandem ejus commoditate per longinqua intervalla allocuntur simul, et simul nuntiant.*“

Porta berichtet also über diese Anwendung des Magnetes nicht wie über eine eigene Sache, sondern wie über ein Experiment eines Andern. Nach einer Andeutung in der Vorrede zu der 1589 erschienenen zweiten Auflage der *Magia naturalis* dürfte die Herausgabe der ersten Auflage ins Jahr 1553 fallen. Der obige Vorschlag zu einem magnetischen Telegraphen stützt sich auf die Voraussetzung von sympathetischen synchronen Schwingungen zweier von einander entfernten Magnetnadeln. Da nun in der 20 Bücher enthaltenden zweiten Auflage der *Magia naturalis* die eben angezogene Stelle nicht mehr vorkommt, so scheint Porta, der sich in der Vorrede zu dieser zweiten Auflage als einen „sorgsamen Forscher in den Geheimnissen der Natur“ bezeichnet, sich inzwischen enttäuscht und von der Unausführbarkeit jenes Vorschlags überzeugt zu haben. Dies dürfte wohl um so mehr anzunehmen sein, als Porta im ganzen 16. Buche (das die Ueberschrift führt: *de invisibilibus literarum notis*) von der „Geheim- und Fern-Schreiberei“ handelt. Im 12. Kapitel (dessen Titel: *quomodo longe loqui possit*) desselben Buches spricht er auch von der Reflexion des Schalles, und in demselben Kapitel schreibt er:

„*Sed tutius et clarius per tubum amicis omnia significare poterimus, sit tubus fictilis, sed melius plumbeus, vel ex aliqua materia optime clausus, ne vox longitudine exinaniatur, nam quicquid loqueris ex una parte, vox incorrupta integra, ut ex ore loquentis prodiit, ita ad alterius aures provenit, quod etiam per aliquot miliaria fieri posse non dubito .... Nos per biscentum passus experti sumus, quum alia commoditas non daretur, et verba ita aperta et clara ex audiebantur, ut per os loquentis prolata erant.*“

An diesen Vorschlag zu einem akustischen Telegraphen (welchen ich 1863 und später nach „Poppe, die Telegraphie, Frankfurt 1848, S. 26“ als ins Jahr 1579 fallend angeführt habe) knüpft Bertelli einen eigenthümlichen Vorschlag zur Verbindung der akustischen und elektrischen Telegraphie für die Zwecke der unterseeischen Telegraphie: „es sollen um eine metallene Röhre isolirte Dräthe spiralförmig gewickelt und mit der Röhre versenkt werden, wobei man ein leichtes und festes Kabel erhielte, das als akustischer und elektrischer Telegraph zugleich dienen könne“.

2. Im 254. Kapitel des zweiten Buches von „*Anselmi Boetii de Boodt Brugensis Belgae ... Gemmarum et Lapidum Historia ... Hanòviae ... MDCIX*“ wird bestimmt ausgesprochen, dass der Magnet nur auf kleine Entfernungen wirken könne:

„*Putant aliqui magnetem aut acum magneticam usui esse ad animi secreta patefacienda amico a nobis centum aut ducentis miliaribus distante, sed vehementer errant. Causam errori praebuit virtus magnetis, quae acum ferream etiam per tabulatum movet, ac deinde facultas poli arctici .... qui ad multa centena miliaria in acum magneticam ut illi arbitrantur agere potest. Existimant enim magnetem, qui tetigit acum ac illi virtutem suam communicavit, similem habere, et talem cumilla consensum: ut si moveatur, exempli gratia decem gradibus orientem versus, etiam tot gradibus acum moveri, etiamsi centum miliaribus ab illo distet. Sed ut dixi falluntur: quia certissimum est magnetem qui ferream acum tetigit, tantum intra certum spacium et exiguum, forte trium aut quatuor pedum illud movere.*“

In der Leydener Ausgabe (besorgt von Adrian Toll, 1636) des Werkes von Anselm de Boodt lautet diese Stelle genau ebenso; desgleichen in der dritten, auch von Toll besorgten Auflage, Leyden 1647. Dieselbe Stelle findet sich in französischer Uebersetzung in dem 1644 in Lyon erschienenen Werk: „*Le parfait joaillier ou histoire des pierreries ... composé par Anselme Boece de Boot ... enrichi par André Toll, Doct. Med. de Leide.*“

3. Trotzdem besingt der Jesuit Famiano Strada in seinen *Prolusiones Academicae* (Rom 1617; Ueb. II, *prolusio* VI, *Acad.* II) den magnetischen Telegraphen und das Telegraphiren mit einem Zeigertelegraphen mit folgenden Versen:

„*Magnesi genus est lapis mirabile, cui si*
Corpora ferri plura, stylosve admoveris; inde
Non modo vim, motumque trahent, quo semper ad Ursam,
Quae lucet vicina polo se vertere tentent:
Verum etiam mira inter se ratione modoque
Quotquot cum lapidem tetigere styli, simul omnes
Conspirare situm motumque videbis in unum.
Ut si forte ex his aliquis Romae moveatur
Alter ad hunc motum, quamvis sit dissitus longe
Arcano se naturae foedere vertat.
Ergo age, si quid scire voles, qui distat amicũ,
Ad quem nulla accedere possit Epistola; sume
Planum, Orbem patulamque, notas elementaque prima,
Ordine, quo discunt pueri, describe per oras
Extremas orbis: medioque repone jacentem,
Qui tetigit magneta, stylum; ut versatilis inde
Litterulam quamcunque velis, contingere possit.
Hujus ad exemplum, simili fabrico veris orbem
Margine descriptum, munitumque indice ferri,
Ferri quod motum magnete accepit ab illo.
Hanc Orbem discessurus sibi portet Amicus,
Conveniatque prius, quo tempore queisve diebus

Exploret, stylus an trepidet, quidve indice signet.
His ita compositis, si clam cupis alloqui Amicum
Quem procul a tete terrai distinet ora;
Orbi adjunge manum, ferrum versatile tracta.
Hic disposta vides elementa in margine toto:
Queis opus est ad verba notis, huc dirige ferrum,
Litterulasque modo hanc, modo et illam cuspide tange,
Dum ferrum per eas iterumque iterumque rotando,
Componas sigillatim sensa omnia mentis.
Mira fides: longe qui distat cernit amicus
Nullius impulsu trepidare volubile ferrum
Nunc huc, nunc illuc discurrere: conscius haeret,
Observatque styli ductum, sequiturque legendo
Hinc atque hinc elementa, quibus in verba coactis
Quid sit opus sentit, ferroque interprete discit.
Quin etium cum stare stylum videt, ipse vicissim
Si quae respondenda putet, simili ratione
Litterulis varie tactis, rescribit amico."

Diese Stelle wurde von Joseph Addison in seinem Journal „The Spectator", Nr. 241, vom 6. December 1721 englisch wiedergegeben, und daraus, glaubt Bertelli, hat Abbé Fr. Moigno die in der 1852 in Paris erschienenen zweiten Auflage seines „*Traité de télégraphie électrique*" (S. 58 u. 59) enthaltene Notiz geschöpft, welche anhebt: „*Strada, dans ses Prolusions, parle d'une correspondance fantastique*", und mit den Worten schliesst: „*Charmant rêve ou opération nécromancienne! Ce passage curieux a été cité par Addison en* 1711". Vor Moigno spricht von jenem magnetischen Telegraphen Georg Bidone in einer die Verse Strada's wiedergebenden geschichtlichen Notiz, welche zuerst Prof. Baruffi in dem Werke: „*L'Annodatore Piemontese..., per Mich. Ponza, vol. VII, p.* 115—116. *Torino*", und dann Rambelli in seinen „*Lettere interno invenzioni e scoperte italiane, Modena* 1844, *lett.* 83" mittheilt.

4. Nun folgt die schon auf S. 66 dieses Jahrgangs in ihrem lateinischen Wortlaute gegebene Stelle aus dem 1632 in Florenz zuerst gedruckten „*Dialogo intorno ai due massimi systemi del mondo Tolemaico e Copernicano*". Galilei begann 1621—1628 seine Dialoge zu schreiben.

5. Vor 1627. Nicht minder deutlich beschreibt (unter Beigabe einer Abbildung) Nicolao Cabeo aus Ferrara in seiner erst 1629 in Ferrara gedruckten, aber früher verfassten „*Philosophia magnetica*" (lib. IV Cap. X p, 301—306), wie der von Anderen erwähnte magnetische Telegraph einzurichten sei, leitet aber dann mit den Worten: „*Sic isti somniant, ne dicam, mentiuntur ... Hunc igitur non effectum probo, sed improbo errorem, ne quis spe vana delusus, nos severas leges subeat nullo eventu*" die Aufführung einer Reihe von gewichtigen Gegengründen ein. Den vierten derselben führt

Bertelli mit den Worten auf: „4. *Che la forza dalla quale dirigesi naturalmente l'ago verso i poli, nelle due bussole è eguale per entrambi gli aghi, mentre la forza della mano, la quale ad arte ritira uno degli aghi, per trasportarlo sulle singole lettere del quadrante, è una forza avventizia, che trovasi soltanto in una bussola, e non nell' altra, quindi l'effetto dynamico delle forze non può essere identico nelle due bussole*". Zum Schluss theilt Cabeo (der Entdecker der magnetischen Bipolarität) mit, dass Andere „*sapienter, ut deterreant ab experimento*" umgekehrt riethen, das Versorium aus Eisen, die im Kreise stehenden Buchstaben aus demselben Magnet herzustellen.

6. Der in den zu Rouen 1828 anonym erschienenen „*Recréations mathématiques*" erwähnte Versuch stimmt der Sache nach mit dem von Cabeo beschriebenen überein, wurde 1636 mit sehr geringen Abänderungen von Wynant van Westen übersetzt, und von ihm war in der französischen Akademie (*Compt. rend. LXVI*, 1109; vergl. auch S. 351—352 im XIV. Jahrgang dieser Zeitschrift) die Rede in Folge einer Notiz in Boncompagni's „*Bulletino di Bibliografia*". Die im Eingange zu meiner heutigen Berichtigung und auf S. 66 erwähnte briefliche Mittheilung Bertelli's an Boncompagni war veranlasst durch eine von Vorstermann van Oijen ausgehende, auf S. 100 der Märznummer des genannten „*Bulletino di Bibliografia*" abgedruckte Hinweisung auf denselben Artikel der „*Recréations mathématiques*".

Ed. Zetzsche.

V.

Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung.

Von

Dr. E. Lommel,
Professor an der Univevsität Erlangen.

Die Beugungserscheinungen lassen sich, je nach der Art und Weise ihrer Entstehung und Beobachtung, in zwei grosse Abtheilungen bringen. Bei der ersten Gruppe ist das am beugenden Schirm ankommende Lichtwellensystem im Allgemeinen kugelförmig; die durchgelassenen Wellentheile entsenden dem Huyghens'schen Princip gemäss nach allen Richtungen Elementarstrahlen, welche interferirend auf einem Auffangschirm das Beugungsbild objectiv erzeugen. In jedem Punkte dieses Bildes wirken alle jene Elementarstrahlen zusammen, welche von sämmtlichen durchgelassenen Wellentheilen aus in diesem Punkte convergirend zusammentreffen. Wir wollen die so charakterisirte Gruppe von Phänomenen nach dem berühmten Physiker, der uns ihre Gesetze kennen lehrte, die Fresnel'schen Beugungserscheinungen nennen.

Bei der zweiten Gruppe von Erscheinungen wird das ankommende Lichtwellensystem stets eben oder als von einem unendlich entfernten Lichtpunkte ausgehend gedacht. Unmittelbar hinter der beugenden Oeffnung befindet sich eine achromatische Sammellinse, welche in ihrer Brennfläche das Beugungsbild entwirft. Dasselbe eignet sich vorzugsweise zur subjectiven Beobachtung, sei es dass man es mittelst eines Fernrohrs oder auch nur mit blosem Auge betrachtet; im ersteren Falle versieht das Objectiv, im letzteren die brechenden Medien des Auges die Rolle der Sammellinse. Das Charakteristische bei dieser Erzeugung eines Beugungsbildes besteht nun darin, dass sämmtliche in einem Punkte desselben interferirenden Elementarstrahlen bei ihrem Durchgang durch die beugende Oeffnung, wo sie ihre Gangunterschiede erhielten, unter sich parallel waren; die Linse bewirkt nur ihre Vereinigung in einem Punkte, ohne an den bereits erlangten Gangunterschieden etwas zu ändern. Diese zweite Gruppe von Beugungserscheinungen, welche durch Interferenz paralleler Strahlen entstehen, bezeichnen wir als Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen, da Fraunhofer zuerst die beschriebene Beobachtungsmethode anwandte.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Arten von Diffractionsphänomenen spricht sich besonders auch aus in der verschiedenen Schwierigkeit ihrer theoretischen Behandlung. Bei den Fresnel'schen Beugungserscheinungen begegnet der Calcul fast unübersteiglichen Schwierigkeiten und ist bis jetzt auch nur für einige ganz einfache Fälle mühsam durchgeführt worden. Die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen dagegen unterwerfen sich mit verhältnissmässiger Leichtigkeit der Analyse, und für eine grosse Mannichfaltigkeit von Einzelfällen gelingt die Herstellung einer geschlossenen Formel, welche Gestalt und Lichtstärke des Beugungsbildes in elegantester Weise ausdrückt. Die Aufgabe, die wir uns hier stellen, besteht nun darin, zu zeigen, dass in den für Theorie und Praxis wichtigsten Fällen die Intensitätsausdrücke für die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen durch Bessel'sche Functionen darstellbar sind. Durch Anwendung dieser neuen Hilfsmittel werden wir namentlich in den Stand gesetzt sein, die Fälle des Kreises, des Kreisrings und Kreisgitters erschöpfender, als dies bisher möglich war, zu behandeln.

Die Intensitätsformeln für die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen sind bekanntlich in hinreichender Ausführlichkeit von Schwerd durch Summation von Reihen, von Littrow und Anderen durch Integrationen entwickelt worden. Es sei jedoch, zum bessern Verständniss des Folgenden und zur grössern Bequemlichkeit des Lesers, gestattet, die Entwickelung des allgemeinen Intensitätsausdrucks hier in möglichster Kürze vorzuführen, wobei ich mir erlaube, den in einer früheren Publication* verfolgten Ideengang beizubehalten.

Es ist leicht zu zeigen, dass das durch schief einfallende Strahlen hervorgerufene Beugungsbild mit dem der senkrechten Incidenz entsprechenden auf einfach gesetzmässige Weise zusammenhängt, und daher aus diesem ohne Weiteres abgeleitet werden kann. Es genügt daher, unsere Betrachtung auf senkrecht einfallende Strahlen zu beschränken.

Wir wählen zu dem Ende die Ebene des beugenden Schirms zur xy-Ebene eines Systems räumlicher Coordinaten, dessen z-Axe, mit der optischen Axe des Fernrohrs zusammenfallend, gegen den Beobachter gerichtet ist; der optische Mittelpunkt des Objectivs liege im Coordinatenanfang. Der Ort des Beugungsbildes ist alsdann eine mit der Brennweite des Objectivs als Radius von dessen optischem Mittelpunkte aus beschriebene Halb-

* Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichts. Grunert's Archiv XXXVI, S. 385.

kugel, welche die Schirmebene selbst zur Basisfläche hat. Es handelt sich nun darum, den Bewegungszustand irgend eines Punktes der Bildfläche zu ermitteln. Die Bewegung desjenigen Punktes der Halbkugel, dessen zugehöriger Radius mit den drei Axen der x, y und z Winkel bildet, deren Cosinus der Reihe nach durch a, b und c vorgestellt sind, ist aber die Resultante aus allen Elementarbewegungen derjenigen Wellenebene, welche die Halbkugel im Punkte (a, b, c) berührt. Denn das zu der genannten Wellenebene gehörige, in die Richtung (a, b, c) gebeugte Strahlenbündel wird ja durch die Wirkung des Objectivs in dem Bildpunkte (a, b, c) zusammengefasst, ohne dass durch die erlittene Brechung neue Gangunterschiede entstehen. Bezeichnen wir nun mit v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit λ die Wellenlänge des einfallenden homogenen Lichts, und zählen wir die Zeit t von jenem Momente an, in welchem der im Coordinatenaufang liegende Aetherpunkt seine Schwingungen begann, so besitzt derselbe zur Zeit t die Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda} vt;$$

die nämliche Phase ist allen Aethertheilchen gemein, welche in der beugenden Oeffnung, d. h. in der Ebene der einfallenden directen Welle liegen. Jeder Punkt (x, y) der beugenden Oeffnung muss nun, nach dem Huyghens'schen Princip, als leuchtender Punkt angesehen werden, der nach allen Seiten Elementarstrahlen aussendet. Derjenige Strahl, welcher die Richtung (a, b, c) verfolgt, hat nun bis zur oben erwähnten Tangentialebene (wenn die Brennweite des Objectivs mit f bezeichnet wird) den Weg $f - (ax + by)$ zurückzulegen, und wird daher mit der Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f + ax + by)$$

daselbst anlangen. Die Excursion, welche der von (x, y) ausgehende, nach (a, b, c) gebeugte Strahl auf jener die Bildfläche berührenden Wellenebene erzeugt, erhält man, wenn man den Sinus dieser Phase multiplicirt mit der Amplitude des Strahls. Um für letztere einen Ausdruck zu gewinnen, denken wir uns aus dem einfallenden Lichte ein Strahlenbündel herausgehoben, dessen senkrechter Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist und alle Elementarstrahlen desselben zu einem einzigen Strahle vereinigt; die Amplitude dieses Strahls wird der Summe der Amplituden aller Elementarstrahlen gleich sein; bezeichnen wir diese Summe mit A, so wird das unendlich dünne Strahlenbündel, welches dem Elemente $dx\,dy$ des Schirmes entspricht, die Amplitude $A\,dx\,dy$ besitzen.

Die Excursion also, welche der vom Punkte (x, y) der beugenden Oeffnung ausgehende Strahl auf der Berührungsebene der Bildfläche erzeugt, wird vorgestellt sein durch

$$A\,dx\,dy \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f + ax + by)$$

Zufolge dem Princip der Uebereinanderlagerung kleiner Bewegungen erhält man die Excursion des Bildpunktes (a, b, c), wenn man alle Excursionen addirt, welche in der zugehörigen Tangentialebene stattfinden, d. h. wenn man das Doppelintegral

$$A\int\int \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - f + ax + by)\, dy\, dx$$

über alle jene Punkte des Schirmes ausdehnt, welche dem Lichte den Durchgang verstatten. Mit Hilfe dieses Integrals lassen sich dann alle Umstände angeben, welche die Oscillation des Punktes (a, b, c) begleiten, also namentlich auch die Lichtstärke, welche er auf der Bildfläche hervorbringt. Da nun das Integral nur von den Coordinaten fa, fb der Projection des Bildpunktes auf die Schirmebene abhängig ist, so können wir uns die im Punkte (a, b, c) der halbkugeligen Bildfläche stattfindende Lichtstärke auf der Schirmebene selbst im Punkte (fa, fb), oder, da es nicht auf die absolute Grösse, sondern nur auf die Gestalt des Bildes ankommt, in irgend einem Punkte des Schirmes aufgetragen denken, dessen Coordinaten den Grössen (a, b) proportional sind. Wir brauchen alsdann statt des halbkugeligen Bildes selbst nur diese seine Projection oder den Grundriss des Bildes weiter zu untersuchen.

Führen wir nun der Kürze wegen die Bezeichnungen

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f) = p, \quad \frac{2\pi a}{\lambda} = q, \quad \frac{2\pi b}{\lambda} = r$$

ein und setzen den Factor A der Einheit gleich, weil ja doch nur die Intensitätsverhältnisse des Bildes in Betracht kommen, so können in dem so abgeänderten Doppelintegral

$$\int\int \sin (p + qx + ry)\, dy\, dx$$

die Grössen q und r, welche den Cosinussen a und b direct, der Wellenlänge λ aber umgekehrt proportional sind, selbst als Coordinaten des Grundrisses angesehen werden.

Um das letztere Integral in der bequemen Form eines Productes aus Amplitude und Phasensinus zu erhalten, lösen wir zunächst den Sinus auf, indem wir den Theil p der Phase, welcher die Zeit in sich schliesst, von dem übrigen Theile, der die Coordinaten x und y enthält, trennen, und erhalten:

$$\sin p \int\int \cos(qx + ry)\, dy\, dx + \cos p \int\int \sin (qx + ry)\, dy\, dx$$
$$= C \sin p + S \cos p,$$

wo abkürzend

$$\int\int \cos (qx + ry)\, dy\, dx = C$$

und

$$\int\int \sin (qx + ry)\, dy\, dx = S$$

gesetzt wurde. Macht man alsdann

$$C = H \cos \varphi \text{ und } S = H \sin \varphi,$$

so nimmt jenes Doppelintegral die Form

$$H \sin (p + \varphi)$$

an, während die Gleichungen

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{S}{C}$$

und

$$H^2 = C^2 + S^2$$

zur Bestimmung von φ und H dienen.

Der Ausdruck H^2 giebt die Lichtstärke des Punktes (q, r) im Beugungsbilde an.

Wenden wir diese Formeln sofort auf die Berechnung der Beugungserscheinung an, welche von einer kreisförmigen Oeffnung hervorgebracht wird; hier müssen offenbar alle durch den Mittelpunkt des Grundrisses, als den Sammelpunkt der directen Strahlen, gezogenen Geraden die nämliche Reihenfolge von Intensitäten zeigen; es genügt daher, blos eine dieser Geraden, z. B. die Abscissenaxe selbst, zu untersuchen. Setzt man zu dem Ende in den Integralen C und S die Ordinate $r = 0$, so bemerkt man leicht, dass das Integral S verschwindet; das Integral C dagegen wird, wenn R den Radius der kreisförmigen Oeffnung bezeichnet:

$$C = \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} \cos q x \, . \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_{-R}^{+R} \cos q x \, . \, \sqrt{R^2 - x^2} \, . \, dx$$

oder, wenn man $x = Ru$ setzt:

$$C = 2 R^2 \int_{-1}^{+1} \cos R q u \, . \, \sqrt{1 - u^2} \, . \, du.$$

Nun ist in dem unten citirten Schriftchen*, auf welches wir noch öfter (mit l. c.) hinzuweisen in der Lage sein werden, die Bessel'sche Function $J^{\nu}(z)$ definirt durch die Gleichung

$$J^{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1 - u^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \, . \, du$$

woraus für $\nu = \frac{1}{2}$ hervorgeht

$$J^{1}(z) = \frac{z}{\pi} \int_{-1}^{+1} \cos z u \, . \, \sqrt{1 - u^2} \, . \, du \, .$$

Setzt man daher in obigem für C gefundenen Ausdruck $Rq = z$, so hat man C in folgender Form

---

* Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868.

$$C = R^2\pi \,.\, \frac{2J^1(z)}{z}$$

durch die Bessel'sche Function $J^1(z)$ ausgedrückt. Die Theorie der Bessel'schen Functionen würde uns nun sofort zur numerischen Berechnung von C die unendlichen Reihen

$$\frac{2J'(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.4} + \frac{z^4}{2.4.4.6} - \frac{z^6}{2.4.6.4.6.8} + \ldots *$$

und

$$J^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, sin\,(z - \tfrac{1}{4}\pi) \left\{ 1 + \frac{3.5.1}{8.16}\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{3.5.7.9.1.3.5}{8.16.24.32}\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \ldots \right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, cos\,(z - \tfrac{1}{4}\pi) \left\{ \frac{3}{8} \,.\, \frac{1}{z} - \frac{3.5.7.1.3}{8.16.24}\left(\frac{1}{z}\right)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{3.5.7.9.11.1.3.5.7}{8.16.24.32.40}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \ldots \right\} **$$

an die Hand geben, von denen die erstere, für jeden Werth von z convergirend, besonders für kleinere Werthe von z sich eignet, die letztere halbconvergente dagegen für grössere Werthe von z bequem ist. In der That hat auch schon Airy*** die erstere Reihe benutzt, um eine Tabelle für die Werthe des Integrals

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} cos\, zu \,.\, \sqrt{1-u^2} \,.\, du$$

zu entwerfen, welche die Functionswerthe für alle um 0,2 von einander verschiedene Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ enthält. Schwerd† hat auf einem ganz anderen Wege, indem er den Kreis als ein 180-Eck berechnete, eine Tabelle hergestellt, welche mit einem Incremente von $15^0 = 0{,}2618$ bis $z = 1125^0 = 19{,}635$ reicht. Die Bemerkung aber, dass C durch die Bessel'sche Function J^1 ausgedrückt wird, führt uns mit Leichtigkeit zu einer noch umfassenderen und genaueren Tabelle der Werthe von C. Schon Bessel†† hat Tabellen der Functionen J^0 und J^1 gegeben, welche jedoch nur bis $z = 3{,}2$ gehen und deshalb für das vorliegende Problem nicht ausreichen. Hansen††† berechnete später für die Bessel'schen Functionen Tafeln von grösserem Umfange, welche meinem oben citirten Schriftchen als Anhang beigegeben sind. Aus diesen ergiebt sich mühelos

* l. c. § 6. ** l. c. § 17.

*** Airy, über die Diffraction eines Objectivs mit kreisrunder Apertur. Poggendorff's Annalen Bd. 45. 1838.

† Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

†† Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1824.

††† Hansen, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung; Schriften der Sternwarte Seeberg. Gotha 1843.

eine Tabelle der Werthe von $C = \frac{2J^1(z)}{z}$ (der Factor $R^2\pi$, welcher den Flächeninhalt der Kreisöffnung vorstellt, ist der Einfachheit wegen $= 1$ gesetzt worden); man braucht ja nur die verdoppelten Werthe von $J^1(z)$ durch das zugehörige Argument zu dividiren. Die so berechnete Tafel folgt am Schlusse dieser Abhandlung (Tab. I); sie reicht mit einem Incremente $= 0{,}1$ bis $z = 20$. In der zweiten Columne finden sich die Werthe von C^2, d. h. die Lichtintensitäten selbst, auf diejenige der Bildmitte als Einheit bezogen, angegeben. Für den Gebrauch der Tabelle in speciellen Fällen erinnern wir uns, dass $z = Rq = \frac{2\pi R a}{\lambda}$ ist; bezeichnen wir nun den Beugungswinkel mit ψ, so ist $a = \cos(90 - \psi) = \sin\psi$, demnach $z = \frac{2\pi R \sin\psi}{\lambda}$. Um einen Zwischenwerth von C, der in der Tabelle nicht vorkommt zu ermitteln, geht man auf die Hansen'sche Tabelle von J^1 zurück, und berechnet nach der Formel

$$J^1(z+\varepsilon) = J^1(z) + a\frac{\varepsilon}{h} + b\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 *$$

den entsprechenden Werth von J^1, um dann sofort auch den geforderten Werth von C zu haben. — In praktischer Hinsicht, behufs der Verification der Theorie durch das Experiment, konnten allerdings die Tabellen von Airy und Schwerd als ausreichend betrachtet werden. Im Hinblick aber auf den geringen Aufwand an Mühe, der zur Herstellung der hier vorliegenden genaueren Tabelle nöthig war, muss die hierdurch erreichte Vervollkommnung der Theorie immerhin willkommen erscheinen, zumal dadurch auch eine genauere Bestimmung der Intensitätsmaxima und der Nullwerthe ermöglicht wurde.

Um die Nullwerthe zu ermitteln, wurde die obige Formel für $J^1(z+\varepsilon)$ benutzt; nachdem man diejenigen Werthe von $J^1(z)$, a, b und c der Hansen'schen Tabelle entnommen hatte, welche einem Nullwerthe von J^1 am nächsten liegen, musste man die cubische Gleichung

$$J^1(z) + a\frac{\varepsilon}{h} + b\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 = 0$$

nach $\frac{\varepsilon}{h}$ auflösen, wo ε die zu dem tabellarischen Werthe von z hinzuzufügende Grösse, h das Increment der Tafel bedeutet. Eine näherungsweise Auflösung (etwa nach der Horner'schen Methode) führt rasch zum Ziele. In Tab. I a sind die so erhaltenen Werthe von z, für welche J^1 und darum auch C verschwindet, zusammengestellt.

Um die Maxima und Minima der Function $\frac{J^1(z)}{z}$ zu bestimmen, wurde

* l. c. Anhang.

der nach ε genommene Differentialquotient von $\frac{J^1(z+\varepsilon)}{z+\varepsilon}$ gleich Null gesetzt. Man gelangt so, unter Vernachlässigung der dritten Potenz von $\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)$, zur quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{3cz}{h}+b\right)\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2+\frac{2bz}{h}\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)+\frac{az}{h}-J^1(z)=0,$$

in welcher der dem Maximum oder Minimum nächstliegende Werth von z unserer Tabelle I, die zugehörigen Werthe von $J^1(z)$, a, b und c aber der Hansen'schen Tabelle entnommen wurden. Eine Eigenschaft der Bessel'schen Functionen gewährte die Möglichkeit, die so gefundenen Werthe einer Controle zu unterwerfen. Es ist nämlich allgemein*

$$\frac{\partial\left[z^{-\nu}J^{\nu}(z)\right]}{\partial z}=-z^{-\nu}J^{\nu+1}(z).$$

oder speciell für $\nu=1$:

$$\frac{\partial\left[z^{-1}J^1(z)\right]}{\partial z}=-z^{-1}J^2(z)$$

Ist nun $z^{-1}J^1(z)$ für irgend einen Werth von z ein Maximum oder Minimum, so verschwindet der Differentialquotient zur Linken, und es muss für denselben Werth von z auch

$$J^2(z)=0$$

sein. Nun ist aber**

$$J^2(z)=\frac{2J^1(z)}{z}-J^0(z),$$

also muss im Falle des Maximums oder Minimums

$$\frac{2J^1(z)}{z}=J^0(z)$$

sein. Indem man daher die Maximal- und Minimalwerthe von $C=\frac{2J^1(z)}{z}$ mit den aus der Hansen'schen Tabelle berechneten zugehörigen Werthen von $J^0(z)$ verglich, hatte man eine Probe für die Richtigkeit der oben angedeuteten Rechnung. — Die gefundenen Resultate sind in Tab. Ib zusammengestellt; die Rubrik C^2 enthält demnach die relativen Lichtstärken der hellsten Stellen der Ringe, von welchen das mittlere Lichtscheibchen umgeben erscheint, bis zum fünften Ringe.

In den Tabellen Ia und Ib findet sich noch eine Columne mit der Ueberschrift „Vielfache von λ"; dieselbe enthält die Werthe von $\frac{2R\sin\psi}{\lambda}$ oder $\frac{z}{\pi}$, d. i. die Gangunterschiede der beiden äussersten Randstrahlen in Wellenlängen ausgedrückt. Man ersieht daraus, dass dunkle Ringe auf-

* l. c. § 3. ** l. c. § 1.

treten, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen beiläufig 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2 Wellenlängen beträgt; helle Ringe dagegen, so oft dieser Gangunterschied 1.6, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7 Wellenlängen ausmacht. Dieses Gesetz wird um so genauer, je grösser z oder je grösser der Beugungswinkel wird. Denn, was zuerst die Nullwerthe anlangt, so nähert sich der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $J^{\nu}(z) = 0$ um so mehr der Grenze π, je mehr z wächst*, oder, was dasselbe heissen will, das Verhältniss aus dieser Differenz und der Zahl π nähert sich der Einheit. Was ferner die Werthe betrifft, welche $C = \frac{2 J^1(z)}{z}$ zu einem Maximum oder Minimum und darum C^2 zu einem Maximum machen, so sind sie, wie wir wissen, zugleich die Wurzelwerthe der Gleichung $J^2(z) = 0$, und unterliegen daher demselben Gesetze.

Man bemerkt ferner, dass das Intervall von einem Nullwerth bis zum nächsten Maximum beiläufig einer Differenz der Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge entspricht. Auch dieses Gesetz wird bei wachsendem Beugungswinkel immer genauer und ist ebenfalls in dem Wesen der Bessel'schen Functionen begründet. Die Nullwerthe entsprechen nämlich den Wurzeln der Gleichung $J^1(z) = 0$, die Maxima den Wurzeln der Gleichung $J^2(z) = 0$. Nun gilt aber der Satz, dass die Differenz der gleichvielten Wurzeln zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um 1 verschieden sind, sich bei wachsendem z der Grenze $\frac{1}{2}\pi$ nähert*.

Für grosse Werthe von z hat man nahezu*:

$$J^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \,.\, \sin\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

folglich

$$C^2 = \left(\frac{2 J^1(z)}{z}\right)^2 = \frac{8}{\pi} \,.\, \frac{\sin^2\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)}{z^3}.$$

Ist nun z einer der Werthe, welcher C^2 zu einem Maximum macht, so liegt bei hinreichend grossem z das nächste Maximum bei $z + \pi$, und hat den Werth

$$C_1^2 = \frac{8}{\pi} \,.\, \frac{\sin^2\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)}{(z + \pi)^3}.$$

Es verhält sich demnach

$$C^2 : C^2_1 = \frac{1}{z^3} : \frac{1}{(z + \pi)^3},$$

d. h. die Intensitätsmaxima verhalten sich nahezu umgekehrt wie die dritten Potenzen der zugehörigen Gangunterschiede, also wie $\frac{1}{16^3} : \frac{1}{27^3} : \frac{1}{37^3} : \frac{1}{47^3} : \frac{1}{57^3} :$ etc.

---

* l. c. § 17.

Auch dieses Gesetz kommt der Wahrheit um so näher, je grösser der Beugungswinkel oder je grösser der Gangunterschied wird. Wie befriedigend dasselbe schon vom zweiten Ringe an eintrifft, erkennt man, wenn man jedes Intensitätsmaximum mit der dritten Potenz des zugehörigen Gangunterschiedes multiplicirt; man erhält die nahezu gleichen Producte 0,0800; 0,0810; 0,0814; 0,0816. Wir sind also jetzt im Stande, nicht blos die Lage, sondern auch die Grösse der Intensitätsmaxima selbst jenseits der Grenze unserer Tabelle anzugeben, soweit es immer verlangt wird.

An der Hand der Theorie der Bessel'schen Functionen haben wir sonach zwar nur genähert giltige, aber einfache und darum den Ueberblick über die Erscheinung erleichternde Gesetze gefunden, welche, wie es scheint bisher übersehen worden sind. Umgekehrt ist aber das vorliegende Problem auch im Stande, uns eine Eigenschaft der Bessel'schen Function J^1 zu enthüllen, was ich hier im Vorbeigehen zeigen will. Da das von einer kreisförmigen Oeffnung hervorgebrachte Beugungsbild rings um die Bildmitte nach allen Richtungen gleich beschaffen sein muss, haben wir unsere Untersuchung auf eine dieser Richtungen, nämlich auf die Abscissenaxe des Grundrisses, beschränkt. Fassen wir jetzt eine ganz beliebige durch die Bildmitte gezogene Gerade ins Auge, so müssen wir längs derselben dieselbe Reihe von Intensitätswerthen oder dieselbe Function C finden, wie längs der Abscissenaxe. Es ist aber ganz allgemein, da auch in diesem Falle das Integral S verschwindet

$$C = \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(qx + ry) \,.\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-R}^{+R} \left[\sin(qx + r\sqrt{R^2-x^2}) - \sin(qx - r\sqrt{R^2-x^2})\right] dx$$

$$= \frac{2}{r} \int_{-R}^{+R} \cos qx \sin(r\sqrt{R^2-x^2}) \,.\, dx$$

oder, wenn $x = Ru$, $Rq = \xi$ und $Rr = \eta$ gesetzt wird,

$$C = \frac{2R^2}{\eta} \int_{-1}^{+1} \cos \xi u \,.\, \sin(\eta\sqrt{1-u^2})\, du\,.$$

Nun haben wir aber bereits für den Bildpunkt, der um $z = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ von der Bildmitte absteht

$$C = R^2\pi \,.\, \frac{2J^1(z)}{z} = R^2\pi \,.\, \frac{2J^1(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

gefunden. Es muss demnach

$$\frac{J^1(\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\frac{1}{\pi\eta}\int\limits_{-1}^{+1}\cos \xi u\,.\,\sin\left(\eta\sqrt{1-u^2}\right).\,du$$

sein; hierin dürfen augenscheinlich ξ und η mit einander vertauscht werden. Setzt man darin $\xi=0$ und $\eta=z$, was einem Zurückgehen auf die Ordinatenaxe gleichkommt, so erhält man

$$J^1(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\sin\left(z\sqrt{1-u^2}\right).\,du\,.$$

Diese beiden Gleichungen sind in dem schon öfter citirten Werkchen (§ 5) auf ganz anderem Wege abgeleitet worden.

Stellen wir uns jetzt weiter die Aufgabe, Gestalt und Lichtstärke des Beugungsbildes zu bestimmen, welches durch eine ringförmige Oeffnung hervorgebracht wird. Der äussere Radius des Ringes sei R, der innere ϱR, wo ϱ einen echten Bruch bedeutet; dann ist

$$C=\int\limits_{-R}^{+R}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\cos qx\,.\,dy\,dx-\int\limits_{-\varrho R}^{+\varrho R}\int\limits_{-\sqrt{\varrho^2R^2-x^2}}^{+\sqrt{\varrho^2R^2-x^2}}\cos qx\,.\,dy\,dx$$

$$=2\int\limits_{-R}^{+R}\cos qx\,.\sqrt{R^2-x^2}\,.\,dx-2\int\limits_{-\varrho R}^{+\varrho R}\cos qx\,.\sqrt{\varrho^2R^2-x^2}\,.\,dx,$$

oder, wenn man im ersten Integral $x=Ru$, im zweiten $x=\varrho R u$ einführt

$$C=2R^2\int\limits_{-1}^{+1}\cos\,(Rqu)\,.\sqrt{1-u^2}\,.\,du-2\varrho^2R^2\int\limits_{-1}^{+1}\cos\,(\varrho Rqu).\sqrt{1-u^2}\,du\,.$$

Setzt man jetzt $Rq=z$ und bedenkt, dass

$$\int\limits_{-1}^{+1}\cos\,zu\,.\sqrt{1-u^2}\,.\,du=\pi\,.\frac{J^1(z)}{z}\,.$$

ist, so hat man

$$C=R^2\pi\,.\,\frac{2J^1(z)}{z}-\varrho^2R^2\pi\,.\,\frac{2J^1(\varrho z)}{\varrho z}$$

Nimmt man die Amplitude und demnach auch die Lichtstärke des gesammten durch die Oeffnung dringenden directen Lichts wie in der vorigen Aufgabe $=1$ an, so hat man diesen Ausdruck noch durch den Flächeninhalt der ringförmigen Oeffnung d. i. durch $R^2\pi\,(1-\varrho^2)$ zu dividiren; dadurch ergiebt sich

$$C'=\frac{1}{1-\varrho^2}\left[\frac{2J^1(z)}{z}-\varrho^2\,.\,\frac{2J^1(\varrho z)}{\varrho z}\right].$$

Die Tab. I setzt uns in den Stand, in jedem einzelnen Falle, d. h. für jeden speciellen Werth von ϱ, die Zahlenwerthe dieses Ausdrucks zu bestimmen.

Um ein Beispiel davon zu geben, sind in Tab. II die Werthe von C' für $\varrho = \frac{1}{2}$, also für eine ringförmige Oeffnung, deren äusserer Radius doppelt so gross ist als der innere, niedergelegt.

Diese Tabelle zeigt uns, dass dunkle Ringe auftreten für folgende Werthe von z:

z	Diff.	Vielfache von λ
3.15		1.0
7.18	4.03	2.3
10.97	3.79	3.5
12.95	1.88	4.1
15.87	2.92	5.0
19.81	3.94	6.3

Für eine volle kreisförmige Oeffnung von gleichem Radius fanden wir den ersten Nullwerth erst bei $z = 3.83$ oder bei einem Gangunterschied von 1.2 Wellenlängen. Wir sehen also, dass der Durchmesser des centralen Lichtscheibchens im Beugungsbilde geringer wird, wenn man die Mitte der Oeffnung mit einer dunkeln Scheibe von halb so grossem Radius bedeckt, und dadurch die Oeffnung zu einer ringförmigen macht. Dafür ist aber der erste helle Ring bedeutend breiter als bei voller Oeffnung; auch der folgende Ring zeigt eine beträchtliche, wenn auch geringere, Breite als der erste; dann folgt ein sehr schmaler, dann wieder ein etwas breiterer Ring; der fünfte Ring endlich kommt dem ersten an Breite nahezu gleich.

Ueberblickt man die in der Rubrik „Vielfache von λ" aufgeführten Werthe, so bemerkt man, dass der Gangunterschied der Randstrahlen beim 5. und 6. dunklen Ring denjenigen beim ersten und zweiten je um 4 Wellenlängen übertrifft, und wird dadurch auf die Vermuthung geleitet, dass die Gruppe der vier ersten Ringe sich periodisch wiederholt. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Vermuthung, indem man den Ausdruck für C' auf die für grössere Werthe von z giltige Form

$$C' = \frac{1}{1-\varrho^2} \cdot \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right) - \sqrt{\varrho} \,.\, \sin\left(\varrho z - \tfrac{1}{4}\pi\right) \right]$$

bringt; wird nämlich dieser Ausdruck für irgend einen Werth von z Null, so muss er auch, wenn wie in unserem speciellen Falle $\varrho = \frac{1}{2}$ ist, auch für $z + 4n\pi$ verschwinden.

Die Lage und Lichtstärke der Maxima ist in der folgenden kleinen Tabelle angegeben:

z	C'^2	Vielfache von λ
4.82	$0.09633 = \frac{1}{10}$	1.5
8.67	$0.01247 = \frac{1}{80}$	2.8
11.87	$0.00038 = \frac{1}{2660}$	3.8
14.46	$0.00086 = \frac{1}{1165}$	4.6
17.80	$0.00218 = \frac{1}{459}$	5.7

Bei voller Kreisöffnung beträgt die Intensität des ersten hellen Ringes $\frac{1}{57}$, die des zweiten $\frac{1}{241}$ von derjenigen in der Mitte. Wir erkennen also, dass bei unserer ringförmigen Oeffnung die beiden ersten Ringe bedeutend heller sind, als bei der Kreisöffnung; der dritte schmalste Ring ist ausserordentlich lichtschwach, der vierte wieder etwas heller; der fünfte endlich, dem ersten entsprechend, zeigt wieder eine ziemlich grosse Helligkeit. Auch hier wiederholt sich nach je vier Ringen die Reihenfolge der Helligkeiten, indem für die gleichvielten Ringe jeder Gruppe das Gesetz der umgekehrten dritten Potenzen gilt. Die Werthe von z nämlich, welche C' zu einem Maximum oder Minimum machen, werden gefunden, indem man den Differentialquotienten von C' Null setzt; da nun

$$\frac{\partial [z^{-1} J'(z)]}{\partial z} = - z^{-1} J^2(z)$$

ist, so lautet die aufzulösende Gleichung

$$J^2(z) - \varrho^2 . J^2(\varrho z) = 0$$

und nähert sich bei wachsendem z, weil dann

$$J^2(z) = - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos (z - \tfrac{1}{4} \pi)$$

wird, immer mehr der Form

$$\cos (z - \tfrac{1}{4} \pi) - \varrho^{\frac{3}{2}} . \cos (\varrho z - \tfrac{1}{4} \pi) = 0.$$

Genügt also irgend ein Werth von z dieser Gleichung, so muss ihr, wenn $\varrho = \frac{1}{2}$ ist, auch $z + 4 n \pi$ genügen, und die Maxima müssen dasselbe Gesetz der Periodicität befolgen, wie die Nullwerthe. Dann folgt aber von selbst aus dem oben für C' angegebenen genäherten Ausdruck, dass die Intensitäten der gleichvielten Ringe jeder Gruppe den dritten Potenzen von z umgekehrt proportional sind.

Wir kommen also zu folgendem Resultat: In dem Beugungsbild einer ringförmigen Oeffnung, deren äusserer Radius doppelt so gross ist als der innere, wiederholt sich eine Gruppe von vier Ringen je nach einem Gangunterschiede von 4 Wellenlängen; die Intensitäten der gleichvielten Ringe jeder Gruppe verhalten sich umgekehrt wie die dritten Potenzen der zugehörigen Gangunterschiede. Diese Gesetze, für kleinere Gangunterschiede nur angenähert richtig, werden um so genauer, je mehr der Gangunterschied wächst.

Wäre der innere Radius der ringförmigen Oeffnung der n^{te} Theil des äussern, also $\varrho = \frac{1}{n}$, unter n eine ganze Zahl gedacht, so erkennt man aus den gegebenen Ausdrücken leicht, dass alsdann Gruppen von je $2n$ Ringen nach je $2n$ Wellenlängen Gangunterschied wiederkehren würden.

Nehmen wir jetzt an, dass die ringförmige Oeffnung sehr schmal d. h. ϱ nahezu $= 1$ sei. Wir setzen dann $\varrho = 1 - \varepsilon$, wo ε klein genug sei, um seine zweite und höhere Potenzen vernachlässigen zu können. Alsdann ist zunächst

$$C' = \frac{1}{\varepsilon\,(2-\varepsilon)}\left[\frac{2\,J^1(z)}{z} - (1-2\varepsilon)\,.\,\frac{2\,J^1(z-z\varepsilon)}{z-z\varepsilon}\right];$$

man hat aber, wenn ε hinlänglich klein ist:

$$\frac{J^1(z-z\varepsilon)}{z-z\varepsilon} = z^{-1}\,.\,J^1(z) - \frac{\partial\,[z^{-1}\,J^1(z)]}{\partial z}\,.\,z\varepsilon,$$

folglich

$$C' = \frac{2}{2-\varepsilon}\left(2\,z^{-1}\,J^1(z) + z\,.\,\frac{\partial\,[z^{-1}\,.\,J^1(z)]}{\partial z}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}\varepsilon}{z}\,.\,\frac{\partial\,[z\,J^1(z)]}{\partial z}\,.$$

Nun ist aber ganz allgemein*

$$\frac{\partial\,[z^\nu\,J^\nu(z)]}{\partial z} = z^\nu\,.\,J^{\nu-1}(z)$$

also speciell

$$\frac{\partial\,[z\,J^1(z)]}{\partial z} = z\,J^0(z)\,.$$

Demnach erhalten wir

$$C' = (1+\tfrac{1}{2}\varepsilon)\,.\,J^0(z)$$

oder, wenn wie die Lichtstärke in der Mitte des Bildes (d. h. für $z=0$) wie bisher immer zur Einheit wählen, ganz einfach

$$C' = J^0(z)\,.$$

Die Werthe von C' können unmittelbar der Hansen'schen Tabelle entnommen werden. Die dunkeln Ringe treten jetzt ein bei folgenden Werthen von z:

z	Vielfache von λ
2.405	0.766
5.520	1.757
8.654	2.755
11.792	3.754
14.931	4.753
18.071	5.752

* l. c. § 3.

Wir haben hier den Grenzfall vor uns, welchem sich die Beugungserscheinung für eine ringförmige Oeffnung nähert, wenn diese bei gleichbleibendem Radius immer schmaler wird. Wie man sieht, ist das mittlere Lichtscheibchen von noch geringerem Durchmesser als im vorigen Fall; die hellen Ringe, welche es concentrisch umgeben, sind nahezu gleich breit; die dunkeln Ringe treten nämlich auf bei ungefähr $\frac{3}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$ etc. Wellenlängen Gangunterschied. Um die Maxima zu finden, erinnern wir uns aus der Theorie der **Bessel**'schen Functionen der Gleichung*:

$$\frac{\partial\,[z^{-\nu} J^{\nu}(z)]}{z} = -z^{-\nu} J^{\nu+1}(z),$$

welche für $\nu = 0$ in

$$\frac{\partial\,[J^0(z)]}{\partial z} = -J^1(z)$$

übergeht, und erkennen daraus, dass bei einer schmalen ringförmigen Oeffnung die Intensitätsmaxima genau an den Stellen auftreten, wo bei einer vollen Kreisöffnung die dunkeln Ringe erscheinen. Demnach entsprechen die Maxima den Gangunterschieden 1,2; 2,2; 3,2 etc. Wellenlängen.

Die genaueren Zahlenwerthe enthält die folgende kleine Tabelle:

z	J^0	$(J^0)^2$
3.832	− 0.402759	0.162215
7.016	+ 0.300115	0.090069
10.173	− 0.249705	0.062353
13.324	+ 0.218359	0.047681
16.471	− 0.196466	0.038599
19.616	+ 0.180064	0.032423

Da für hinlänglich grosse Werthe von z**

$$J^0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, cos\,(z - \tfrac{1}{4}\pi)$$

ist, so erkennt man, dass die Intensitätsmaxima den Gangunterschieden selbst umgekehrt proportional sind, und zwar um so genauer, je weiter man sich von der Bildmitte entfernt. In der That geben die vorstehenden Werthe von $(J^0)^2$ mit den zugehörigen Argumenten multiplicirt Producte, welche sich mit wachsendem z der Gleichheit nähern.

Durch das Vorhergehende sind wir auch in den Stand gesetzt, die Beugungserscheinung eines aus schmalen concentrischen Ringen zusammengesetzten Kreisgitters zu bestimmen. Das Integral C erscheint jetzt als

* l. c. § 3. ** l. c. § 17.

eine Summe von ebenso vielen Gliedern, als das Gitter Ringe enthält, deren jedes die Form $2\pi R^2 \varepsilon J^0(z)$ besitzt, worin aber ε, R und damit auch z je nach den Dimensionen der entsprechenden Ringe von Glied zu Glied andere Werthe haben.

Nehmen wir z. B. an, dass alle Ringe die gleiche Breite β haben, so ist $R\varepsilon = \beta$ und wir erhalten die Summe

$$2\pi\beta\,[R J^0(z) + R' J^0(z') + R'' J^0(z'') + \ldots],$$

worin $z' = \frac{R'}{R} z$, $z'' = \frac{R''}{R} z$ etc. ist, und welche noch mit $2\pi\beta\,(R + R' + R'' + \ldots)$ dividirt werden müsste, um die Intensität in der Bildmitte auf 1 zurückzuführen. Specialisiren wir noch mehr und setzen $R' = 2R$, $R'' = 3R$ u. s. f., so erhalten wir, die Lichtstärke in der Mitte des Bildes gleich 1 gesetzt, für ein Gitter von n Ringen folgenden Ausdruck:

$$C = \frac{J^0(z) + 2\,J^0(2z) + 3\,J^0(3z) + \ldots + n\,J^0(nz)}{1 + 2 + 3 + \ldots + n};$$

derselbe kann für hinlänglich grosse Werthe von z durch den folgenden angenähert ersetzt werden:

$$C = \frac{2}{n(n+1)} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[\cos(z - \tfrac{1}{4}\pi) + \sqrt{2}\,.\cos(2z - \tfrac{1}{4}\pi)$$
$$+ \sqrt{3}\,.\cos(3z - \tfrac{1}{4}\pi) + \ldots + \sqrt{n}\,.\cos(nz - \tfrac{1}{4}\pi)].$$

Für 3 Ringe ($n = 3$) finden sich die Werthe des ersteren Ausdrucks von $z = 0$ bis $z = 7{,}4$ in Tab. III berechnet. Das mittlere Lichtscheibchen von geringem Durchmesser zeigt sich von abwechselnd dunkeln und hellen Ringen umgeben; die dunkeln Ringe treten auf bei $z = 1{,}09$; $2{,}06$; $2{,}85$; $3{,}93$; $4{,}61$; $5{,}93$; $7{,}33$. Die von ihnen begrenzten hellen Ringe sind von sehr verschiedener Breite und Lichtstärke, doch bilden die fünf ersten eine Gruppe von unverkennbarer Symmetrie. Der dritte Ring (also der mittlere der Gruppe) ist von zwei schmaleren und lichtschwächeren Ringen (dem zweiten und vierten) eingefasst; der erste und fünfte, und zwar namentlich der letztere, sind wieder breiter und lichtstärker. Die Intensität aller fünf Ringe ist verhältnissmässig unbedeutend; wir wollen sie daher *kleine Maxima* nennen. Der sechste helle Ring dagegen zeigt nicht nur eine grössere Breite, sondern auch eine weit beträchtlichere Lichtstärke als seine Vorgänger; wir wollen ihn als *grosses Maximum* bezeichnen. Der siebente dunkle Ring, der ihn umschliesst, entspricht einem Werthe von z, der denjenigen des ersten dunkeln Ringes nahezu um 2π übertrifft. Ein Blick auf die zweite (genäherte) Formel lehrt nun, dass von hier an und zwar jedesmal, wenn z um 2π gewachsen ist, dieselbe Gruppe von fünf kleinen und einem darauffolgenden grossen Maximum sich wiederholen muss. Die späteren Gruppen werden zwar natürlich immer lichtschwächer, aber jede wird in der Aufeinanderfolge ihrer Ringe, sowohl was deren Breite als Intensität betrifft, den Typus der ersten Gruppe nachahmen.

Werden die Ringe des Gitters zahlreicher, so ändert sich darum die Anzahl der grossen Maxima keineswegs; auch behalten sie ihren gegenseitigen Abstand (2π) unverändert bei, nähern sich aber der Bildmitte bis zu einer gewissen Grenze, welche jedoch erst für ein Kreisgitter von unendlich vielen Ringen erreicht wird. Die kleinen Maxima dagegen werden immer zahlreicher, schmaler, lichtschwächer, indem sich zwischen der Bildmitte und dem ersten grossen Maximum oder überhaupt zwischen zwei aufeinanderfolgenden grossen Maximis immer mehr dunkle Ringe einschieben; bei einem Gitter aus n Kreisen ergiebt sich für jede Gruppe die Anzahl der dunkeln Ringe gleich $2n$ Das mittlere Lichtscheibchen und die den grossen Maximis entsprechenden hellen Ringe werden dabei immer mehr eingeengt.

Bei einem Kreisgitter von sehr vielen Ringen verschwinden die kleinen Maxima gegenüber den grossen völlig und diese bleiben allein noch bestehen; das Beugungsbild reducirt sich sonach auf einen mittleren Lichtpunkt, welcher in gleichen Abständen von schmalen hellen Ringen, deren Lichtstärke nach aussen hin immer mehr abnimmt, umgeben ist.

Die Lage der Maxima, der kleinen sowohl wie der grossen, ergiebt sich aus der Gleichung

$$J^1(z) + 2^2 J^1(2z) + 3^2 J^1(3z) + \ldots + n^2 J^1(nz) = 0,$$

oder für hinlänglich grosse z, weil für solche

$$J^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \sin\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

gesetzt werden kann, aus der Gleichung:

$$\sin\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right) + 2^{\frac{3}{2}} \sin\left(2z - \tfrac{1}{4}\pi\right) + 3^{\frac{3}{2}} \sin\left(3z - \tfrac{1}{4}\pi\right) + \ldots$$
$$+ n^{\frac{3}{2}} - \sin\left(nz - \tfrac{1}{4}\pi\right) = 0.$$

Für ein Kreisgitter aus sehr vielen Ringen würde die Auflösung selbst dieser genäherten Gleichung, da die Summation der Sinusreihe wohl schwerlich gelingen dürfte, weitläufig und beschwerlich sein. Um aber dennoch die beiläufige Lage der grossen Maxima, die uns vorzugsweise interessiren, zu ermitteln, genügt folgende einfache Betrachtung.

Wenn in dem genäherten Ausdruck für C, nämlich in

$$C = \frac{2}{n(n+1)} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \tfrac{1}{4}\pi\right) + \sqrt{2}\,.\cos\left(2z - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{3}\,.\cos\left(3z - \tfrac{1}{4}\pi\right) + \ldots + \sqrt{n}\,.\cos\left(nz - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right]$$

die Glieder der eingeklammerten Reihe theils positiv, theils negativ sind und sich daher gegenseitig ganz oder theilweise aufheben, so kann ein grosses Maximum nicht eintreten. Wir werden uns aber einem solchen nähern, wenn alle Glieder positiv werden. Dies tritt augenscheinlich immer ein, wenn $z = 2m\pi$ (unter m eine ganze Zahl verstanden) gesetzt wird; alsdann sind sämmtliche Cosinus einander gleich, nämlich $= \cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$. Jedenfalls kommen wir dem grössten Werth, dessen jene Cosinusreihe fähig ist, noch näher, wenn wir z etwas grösser als $2m\pi$, etwa $z = 2m\pi + \delta$ wählen und δ so bestimmen, dass das Argument des letzten mit dem grössten Factor ($\sqrt{n}$) multiplicirten Cosinus einem geraden Vielfachen von π gleich wird. Hierzu genügt, $n\delta = \frac{1}{4}\pi$, folglich $z = 2m\pi + \frac{\pi}{4n}$ zu nehmen. Dieser Werth ist aber immer noch zu klein; in die Gleichung

$$\sin(z - \tfrac{1}{4}\pi) + 2^{\frac{3}{2}} \sin(2z - \tfrac{1}{4}\pi) + 3^{\frac{3}{2}} \sin(3z - \tfrac{1}{4}\pi) + \ldots$$
$$+ n^{\frac{3}{2}} \sin(nz - \tfrac{1}{4}\pi) = 0$$

gesetzt, bewirkt er nur, dass die letzten mit grossen Factoren multiplicirten Sinus sehr klein und der letzte sogar Null wird; alle übrigen Glieder und daher auch der Werth der ganzen Reihe sind negativ. Setzen wir dagegen $z = 2m\pi + \frac{\pi}{2n}$, so verschwindet das mittlere Glied der Reihe (wenn, bei ungeradem n, ein solches vorhanden ist), und je zwei Sinus, welche gleichweit von dem vorderen und hinteren Ende der Reihe abstehen, werden einander gleich, aber entgegengesetzt, und zwar negativ in der ersten, positiv in der zweiten Hälfte der Reihe. Der Werth der Reihe muss daher, da in ihrer zweiten Hälfte die Factoren grösser sind, positiv ausfallen. Wir können demnach behaupten, dass die Wurzelwerthe der obigen Gleichung, welche den grossen Maximis entsprechen, zwischen $z = 2m\pi + \frac{\pi}{4n}$ und $z = 2m\pi + \frac{\pi}{2n}$ liegen. Beide Werthe nähern sich mit wachsendem n der gemeinschaftlichen Grenze $2m\pi$; da $z = \frac{2\pi R \sin\psi}{\lambda}$ ist, unter R den Abstand zweier aufeinanderfolgenden Ringe und unter ψ den Beugungswinkel verstanden, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Im Beugungsbilde eines Gitters aus sehr vielen gleichweit abstehenden concentrischen Kreisen treten helle Ringe auf, wenn nahezu

$$R \sin\psi = m\lambda,$$

d. h. wenn der Gangunterschied der entsprechenden Strahlen zweier aufeinanderfolgender Gitterringe nahezu (etwas mehr als) eine ganze Anzahl von Wellenlängen beträgt.

Aus dem genäherten Ausdruck für C ergiebt sich ferner noch, dass die Intensitäten der hellen Ringe sich umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Werthe von z, also nahezu umgekehrt wie die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 etc.

Wir ersehen daraus, dass die farbigen, innen violetten, aussen rothen Höfe, welche ein weisser Lichtpunkt durch ein Kreisgitter betrachtet zeigt, wesentlich verschieden sind von den Höfen, welche durch zahlreiche im Gesichtsfeld unregelmässig vertheilte kreisrunde Körperchen (Lycopodiumsporen, Nebelbläschen) erzeugt werden. Diese letzteren entsprechen den hellen Ringen, welche im Beugungsbilde einer einzigen kreisrunden Oeffnung erscheinen* und sind daher, was ihre Lage und Intensität anlangt, den oben für diesen Fall entwickelten Gesetzen unterworfen. Die Höfe des Kreisgitters dagegen sind sehr nahe verwandt mit den durch Stabgitter erzeugten Beugungsspectren.

Ist die Anzahl der Gitterringe eine beschränkte, so lassen sich die grossen Maxima mit hinlänglicher Genauigkeit und ohne grosse Mühe aus der obigen Sinusgleichung finden, indem man von $z = 2m\pi + \frac{\pi}{4n}$ als einer ersten Annäherung ausgeht und die noch hinzuzufügende Correctur ε etwa durch die Newton'sche Näherungsmethode berechnet. Danach wäre

$$\varepsilon = -\frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi) + 2^{\frac{3}{2}}\sin(2z-\frac{1}{4}\pi) + 3^{\frac{3}{2}}\sin(3z-\frac{1}{4}\pi) + \ldots + n^{\frac{3}{2}}\sin(nz-\frac{1}{4}\pi)}{\cos(z-\frac{1}{4}\pi) + 2^{\frac{5}{2}}\cos(2z-\frac{1}{4}\pi) + 3^{\frac{5}{2}}\cos(3z-\frac{1}{4}\pi) + \ldots + n^{\frac{5}{2}}\cos(nz-\frac{1}{4}\pi)}.$$

Bei dem dreiringigen Gitter z. B. findet man für das erste grosse Maximum zunächst $z = 2\pi + \frac{\pi}{12} = 6{,}54$; die vorstehende Formel liefert alsdann $\varepsilon = 0{,}05$, folglich hat man $z = 6{,}59$, denselben Werth, welchen man auch durch Auflösung der Gleichung

$$J^1(z) + 2^2 J^1(2z) + 3^2 J^1(3z) = 0$$

findet.

Diese für ein Kreisgitter mit äquidistanten Ringen abgeleiteten Resultate ergaben sich durch Specialisirung des allgemeineren Ausdrucks

$$2\pi\beta\left[R J^0(z) + R' J^0(z') + R'' J^0(z'')\right],$$

welcher in jedem Falle noch durch

$$2\pi\beta\,(R + R' + R'' + \ldots)$$

dividirt werden muss. Dieser allgemeinere Ausdruck gilt aber für jedes System concentrischer, gleichbreiter, dabei jedoch sehr schmaler Kreisringe, nach welchem Gesetze dieselben auch unter sich gruppirt sein mögen, also namentlich auch, wenn die einzelnen schmalen Ringe ohne dunkle Zwischenräume unmittelbar an einander stossen. Dies ist der Fall bei einer jeden beliebigen ringförmigen Oeffnung, wenn wir uns dieselbe durch concentrische Kreise in schmale Ringe von der Breite $\beta = dR$ zerlegt denken. Wir können also unsere Formel auch auf den schon behandelten Fall der ringförmigen Oeffnung anwenden, und erhalten für sie, wenn sich auf diesem Wege das oben schon gefundene Resultat ergiebt, eine erwünschte Probe.

Ist R der innere, R_1 der äussere Radius der ringförmigen Oeffnung, so hat man in obigem Ausdruck $R = R$, $R' = R + dR$, $R'' = R + 2dR, \ldots$

* Vergl. die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung § 24. Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. XIV.

$R^{(n)} = R + n dR = R_1$, ferner $z' = z + dz$, $z'' = z + 2dz$, ... $z^{(n)} = z + ndz$ $= z_1$ zu setzen. Derselbe lautet alsdann

$$2\pi dR\,[R J^0(z) + (R + dR)\,J^0(z + dz) + (R + 2dR)\,J^0(z + 2dz) + \,..\, + (R + ndR)\,J^0(z + ndz)]$$

oder, wenn man mittelst der Relation

$$z = \frac{2\pi R \sin\psi}{\lambda}$$

R und dR durch z und dz ausdrückt, d. h. $R = \frac{\lambda}{2\pi \sin\psi}\,.\,z$ und dR $= \frac{\lambda}{2\pi \sin\psi}\,.\,dz$ setzt:

$$\frac{\lambda^2}{2\pi \sin^2\psi}\,[z\,J^0(z) + (z + dz)\,J^0(z + dz) + (z + 2dz)\,J^0(z + 2dz) + \ldots + (z + ndz)\,J^0(z + ndz)]\,dz\,,$$

wo die eingeklammerte und noch mit dz multiplicirte Summe nichts Anderes ist, als das bestimmte Integral

$$\int_z^{z_1} z\,J^0(z)\,.\,dz$$

oder auch

$$\int_0^{z_1} z\,J^0(z)\,.\,dz - \int_0^{z} z\,J^0(z)\,.\,dz\,.$$

Nun ist aber allgemein*

$$\int_0^{z} z^\nu\,J^{\nu-1}(z)\,.\,dz = z^\nu\,J^\nu(z)\,,$$

demnach für $\nu = 1$

$$\int_0^{z} z\,J^0(z)\,dz = z\,J^1(z)\,.$$

Der Zähler des gesuchten Ausdrucks ergiebt sich also in folgender Gestalt

$$\frac{\lambda^2}{2\pi \sin^2\psi}\,[z_1\,J^1(z_1) - z\,J^1(z)]\,,$$

der Nenner dagegen heisst

$$2\pi\,dR\,(R + R + dR + R + 2dR + \ldots + R + ndR)$$
$$= \frac{\lambda^2}{2\pi \sin^2\psi}\,(z + z + dz + z + 2dz + \ldots + z + ndz)\,dz$$
$$= \frac{\lambda^2}{2\pi \sin^2\psi}\int_z^{z_1} z\,dz = \frac{\lambda^2}{2\pi \sin^2\psi}\;\frac{z_1^{\,2} - z^2}{2}\,.$$

---

* l. c. § 8.

Wir haben demnach für die ringförmige Oeffnung

$$C = 2 \, . \, \frac{z_1 \, J^1(z_1) - z \, J^1(z)}{z_1^2 - z^2} \, .$$

Ist nun, wie früher angenommen wurde, $R = \varrho R_1$, so hat man auch $z = \varrho z_1$, und der vorstehende Ausdruck wird, wenn der jetzt überflüssig gewordene Index von z_1 wegbleibt:

$$C' = \frac{1}{1-\varrho^2}\left(\frac{2\,J^1(z)}{z} - \varrho^2 . \frac{2\,J^1(\varrho z)}{\varrho z}\right),$$

also genau so, wie oben direct gefunden wurde. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass auch der specielle Fall einer vollen Kreisöffnung für $\varrho = 0$ hierin enthalten ist.

Unter den durch krummlinig begrenzte Oeffnungen hervorgebrachten Beugungserscheinungen bieten die bisher behandelten Fälle (Kreis, Kreisring, Kreisgitter), weil sie experimentell leicht realisirbar sind, das hervorragendste Interesse dar. Die elliptische Oeffnung, welche in experimenteller Hinsicht zunächst in Betracht käme, lässt sich leicht und in bekannter Weise auf die Kreisöffnung zurückführen. Ausserdem lassen sich für andere Begrenzungscurven noch manche Resultate gewinnen, welchen aber nur theoretisches Interesse beigemessen werden kann. Da es jedoch unsere Absicht ist, auf die ausgedehnte Rolle hinzuweisen, welche den Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung zukommt, sei es gestattet, noch eine Gruppe von Fällen kurz zu berühren, welche durch Bessel'sche Functionen wenigstens eine theilweise Lösung finden.

Nehmen wir an, die beugende Oeffnung werde sowohl durch die Abscissen- als Ordinatenaxe symmetrisch halbirt, so verschwindet das Doppelintegral S; beschränken wir ferner unsere Betrachtung auf die Abscissenaxe des Beugungbildes, d. h. setzen wir $r = 0$, so wird das Doppelintegral C

$$C = \int_{-a}^{+a} \int_{-y}^{+y} \cos qx \, . \, dy \, dx = 2 \int_{-a}^{+a} \cos qx \, . \, y \, dx \, .$$

Ist nun $y = (a^2 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$, wo ν reell und $> -\frac{1}{2}$ gedacht wird, so hat man

$$C = 2 \int_{-a}^{+a} \cos qx \, . \, (a^2 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \, . \, dx$$

oder, wenn $x = au$ substituirt und $aq = z$ gesetzt wird

$$C = 2 a^{2\nu} \int_{-1}^{+1} \cos zu \, . \, (1 - u^2)^{\nu - \frac{1}{2}} . \, du \, .$$

Nun ist aber

$$\int_{-1}^{+1} \cos zu\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du = \sqrt{\pi}\,.\,\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{z^\nu}\,J^\nu(z),$$

folglich

$$C = 2^{\nu+1}\,.\,a^{2\nu}\,.\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,.\,\frac{J^\nu(z)}{z^\nu}.$$

Nimmt man die Lichtstärke in der Mitte des Beugungsbildes ($z=0$) zur Einheit, so muss dieser Ausdruck noch durch den Flächeninhalt der Oeffnung, nämlich durch

$$2\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,dx = 2a^{2\nu}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du = 2^{2\nu+1}\,.\,a^{2\nu}\,.\,\frac{[\Gamma(\nu+\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2\nu+1)}$$

dividirt werden. Man hat alsdann

$$C' = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu}\,.\,\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,.\,\frac{J^\nu(z)}{z^\nu}.$$

Setzt man z. B. $\nu = \frac{3}{2}$, so ist

$$y = a^2 - x^2$$

die Gleichung einer Parabel, deren Axe in die Ordinatenaxe fällt, und deren Schenkel die Abscissenaxe in den Punkten $-a$ und $+a$ schneiden; ihr Scheitel ist um dieselbe Grösse a vom Anfangspunkte entfernt. Zwei solche Parabelstücke, welche die Coordinatenaxen in der Entfernung a vom Anfangspunkte durchschneiden, begrenzen, symmetrisch zur Abscissenaxe, die beugende Oeffnung. Da nun*

$$J^{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right),$$

ferner

$$\Gamma(4) = 1.2.3,$$
$$\Gamma(2) = 1$$

so wird die Intensität auf der Abscissenaxe des Beugungsbildes jener parabolisch begrenzten Oeffnung gegeben durch das Quadrat des Ausdrucks

$$C' = \frac{3}{z^2}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) = -\,\frac{3}{z}\;\frac{\partial\left(\frac{\sin z}{z}\right)}{\partial z}.$$

Wie man sieht, verschwindet C' gerade für diejenigen Werthe von z, welche $\frac{\sin z}{z}$ zu einem Maximum oder Minimum machen. Das Quadrat von $\frac{\sin z}{z}$ giebt aber bekanntlich die Lichtstärke an auf der Abscissenaxe des

---

* c. l. § 16.

Beugungsbildes einer rechteckigen Oeffnung von der Breite $2a$; wir erkennen also, dass jene parabolisch begrenzte Oeffnung gerade an jenen Stellen Dunkelheit hervorbringt, an welchen bei einer gleichbreiten rechteckigen Oeffnung die Intensitätsmaxima erscheinen.

Der Fall des Rechtecks ist übrigens auch in unserer allgemeinen Formel für C' enthalten. Setzen wir nämlich $\nu = \frac{1}{2}$, so ist $y = 1$ und wir haben es mit einer rechteckigen Oeffnung von der Höhe 2 und der Breite $2a$ zu thun. Dann hat man

$$C' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{J^{\frac{1}{2}}(z)}{z^{\frac{1}{2}}}$$

oder, weil

$$J^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z$$

ist:

$$C' = \frac{\sin z}{z}.$$

Bedenken wir endlich, dass sämmtliche Intensitätsausdrücke für geradlinig begrenzte Beugungsöffnungen aus *sinus* und *cosinus* zusammengesetzt sind, und dass

$$\sin z = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \cdot J^{\frac{1}{2}}(z) \quad \text{und} \quad \cos z = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \cdot J^{-\frac{1}{2}}(z)$$

ist, so erkennen wir, dass auch alle Aufgaben über die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Oeffnungen durch Bessel'sche Functionen aufgelöst werden können. Für eine dreieckige Oeffnung z. B. findet man folgenden Intensitätsausdruck:

$$H^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\cos\gamma \right\}.$$

Darin ist, wenn mit l, m, n die Cosinus der Winkel bezeichnet werden, welche der gebeugte Strahl resp. mit den drei Seiten u, v, w der dreieckigen Oeffnung bildet,

$$\alpha = -\frac{\pi}{\lambda} ul, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda} vm, \quad \gamma = \frac{\pi}{\lambda} wn$$

d. h. die Argumente α, β, γ sind die mit $\frac{\pi}{\lambda}$ multiplicirten Projectionen der Dreiecksseiten auf die Richtung der gebeugten Strahlen. In Bessel'sche Functionen umgeschrieben, lautet nun der obige Ausdruck nicht minder symmetrisch wie folgt:

$$H^2 = \frac{\pi}{2\gamma^2} \left\{ \left(\frac{J^{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{J^{\frac{1}{2}}(\beta)}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{J^{\frac{1}{2}}(\alpha)}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(\frac{J^{\frac{1}{2}}(\beta)}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{J^{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{\gamma^{-\frac{1}{2}}}\right)\right\}.$$

Aus der gegenwärtigen Untersuchung ergiebt sich also, dass die Bessel'schen Functionen in der Theorie der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen eine überaus umfangreiche Rolle spielen, dass sie so zu sagen der naturgemässe analytische Ausdruck für diese Art mathematisch-physikalischer Probleme sind.

Tab. I. $C = \frac{2}{z} \cdot J^1(z)$.

z	C	C^2	z	C	C^2
0,0	+ 1,000000	1,000000	3,0	+ 0,226039	0,051093
0,1	0,998750	0,997501	3,1	0,194143	0,037691
0,2	0,995008	0,990041	3,2	0,163339	0,026679
0,3	0,988792	0,977709	3,3	0,133735	0,017885
0,4	0,980133	0,960660	3,4	0,105427	0,011114
0,5	0,969074	0,939104	3,5	0,078502	0,006162
0,6	0,955670	0,913305	3,6	0,053037	0,002812
0,7	0,939988	0,883577	3,7	0,029099	0,000846
0,8	0,922105	0,850277	3,8	+ 0,006748	0,000045
0,9	0,902109	0,813800	3,9	— 0,013971	0,000195
1,0	0,880101	0,774577	4,0	0,033022	0,001090
1,1	0,856186	0,733054	4,1	0,050377	0,002537
1,2	0,830482	0,689700	4,2	0,066022	0,004358
1,3	0,803113	0,644990	4,3	0,079952	0,006392
1,4	0,774211	0,599402	4,4	0,092171	0,008495
1,5	0,743916	0,553411	4,5	0,102694	0,010546
1,6	0,712370	0,507471	4,6	0,111545	0,012442
1,7	0,679723	0,462023	4,7	0,118758	0,014103
1,8	0,646130	0,417484	4,8	0,124375	0,015469
1,9	0,611743	0,374229	4,9	0,128447	0,016498
2,0	0,576725	0,332611	5,0	0,131032	0,017169
2,1	0,541231	0,292931	5,1	0,132195	0,017475
2,2	0,505421	0,255450	5,2	0,132009	0,017426
2,3	0,469455	0,220388	5,3	0,130551	0,017043
2,4	0,433488	0,187911	5,4	0,127906	0,016359
2,5	0,397675	0,158141	5,5	0,124159	0,015415
2,6	0,362169	0,131166	5,6	0,119405	0,015257
2,7	0,327112	0,107002	5,7	0,113736	0,012935
2,8	0,292649	0,085643	5,8	0,107251	0,011502
2,9	0,258915	0,067037	5,9	0,100048	0,010009

Tab. I. $C = \frac{2}{z} . J^1(z)$.

z	C	C²	z	C	C²
6,0	−0,092228	0,008506	9,0	+0,054514	0,002971
6,1	0,083890	0,007037	9,1	0,051084	0,002609
6,2	0,075135	0,005645	9,2	0,047263	0,002233
6,3	0,066059	0,004363	9,3	0,043100	0,001857
6,4	0,056762	0,003221	9,4	0,038645	0,001493
6,5	0,047335	0,002240	9,5	0,033950	0,001152
6,6	0,037873	0,001434	9,6	0,029068	0,000844
6,7	0,028460	0,000810	9,7	0,024049	0,000578
6,8	0,019182	0,000368	9,8	0,018947	0,000359
6,9	0,010117	0,000102	9,9	0,013812	0,000190
7,0	−0,001338	0,000001	10,0	0,008695	0,000075
7,1	+0,007085	0,000050	10,1	+0,003643	0,000013
7,2	0,015090	0,000227	10,2	−0,001297	0,000001
7,3	0,022622	0,000511	10,3	0,006081	0,000037
7,4	0,029628	0,000877	10,4	0,010668	0,000113
7,5	0,036066	0,001300	10,5	0,015019	0,000225
7,6	0,041898	0,001755	10,6	0,019100	0,000364
7,7	0,047094	0,002217	10,7	0,022878	0,000523
7,8	0,051630	0,002665	10,8	0,026327	0,000693
7,9	0,055488	0,003078	10,9	0,029422	0,000865
8,0	0,058659	0,003440	11,0	0,032143	0,001033
8,1	0,061138	0,003737	11,1	0,034474	0,001188
8,2	0,062926	0,003959	11,2	0,036402	0,001325
8,3	0,064033	0,004100	11,3	0,037921	0,001438
8,4	0,064473	0,004156	11,4	0,039026	0,001523
8,5	0,064264	0,004129	11,5	0,039718	0,001577
8,6	0,063431	0,004023	11,6	0,040000	0,001600
8,7	0,062004	0,003844	11,7	0,039880	0,001590
8,8	0,060017	0,003602	11,8	0,039370	0,001549
8,9	0,057506	0,003306	11,9	0,038485	0,001481

Tab. I. $C = \frac{2}{z} \cdot J^1(z)$,

z	C	C^2	z	C	C^2
12,0	— 0,037241	0,001386	15,0	+ 0,027347	0,000747
12,1	0,035661	0,001271	15,1	0,026664	0,000710
12,2	0,033768	0,001140	15,2	0,025730	0,000662
12,3	0,031587	0,000997	15,3	0,024559	0,000603
12,4	0,029147	0,000849	15,4	0,023169	0,000536
12,5	0,026477	0,000701	15,5	0,021576	0,000465
12,6	0,023610	0,000557	15,6	0,019800	0,000399
12,7	0,020577	0,000423	15,7	0,017862	0,000319
12,8	0,017411	0,000303	15,8	0,015784	0,000149
12,9	0,014147	0,000200	15,9	0,013588	0,000184
13,0	0,010818	0,000117	16,0	0,011300	0,000127
13,1	0,007458	0,000055	16,1	0,008941	0,000079
13,2	0,004101	0,000016	16,2	0,006539	0,000041
13,3	— 0,000778	0,000001	16,3	0,004115	0,000016
13,4	+ 0,002477	0,000006	16,4	+ 0,001695	0,000102
13,5	0,005637	0,000031	16,5	— 0,000699	0,000000
13,6	0,008671	0,000075	16,6	0,003042	0,000009
13,7	0,011554	0,000133	16,7	0,005313	0,000028
13,8	0,014260	0,000203	16,8	0,007491	0,000056
13,9	0,016766	0,000281	16,9	0,009556	0,000091
14,0	0,019054	0,000363	17,0	0,011490	0,000132
14,1	0,021104	0,000445	17,1	0,013277	0,000176
14,2	0,022903	0,000523	17,2	0,014901	0,000222
14,3	0,024438	0,000597	17,3	0,016349	0,000267
14,4	0,025699	0,000660	17,4	0,017611	0,000310
14,5	0,026680	0,000711	17,5	0,018677	0,000348
14,6	0,027377	0,000749	17,6	0,019539	0,000381
14,7	0,027789	0,000772	17,7	0,020193	0,000407
14,8	0,027918	0,000779	17,8	0,020636	0,000425
14,9	0,027769	0,000771	17,9	0,020868	0,000435

Tab. I. $C = \frac{2}{z} \cdot J^1(z)$.

z	C	C^2	z	C	C^2
18,0	− 0,020888	0,000436	19,0	− 0,011127	0,000123
18,1	0,020702	0,000428	19,1	0,009426	0,000088
18,2	0,020313	0,000412	19,2	0,007659	0,000058
18,3	0,019729	0,000389	19,3	0,005844	0,000034
18,4	0,018960	0,000359	19,4	0,003998	0,000015
18,5	0,018014	0,000324	19,5	0,002141	0,000004
18,6	0,016906	0,000285	19,6	− 0,000292	0,000000
18,7	0,015648	0,000244	19,7	+ 0,091533	0,000002
18,8	0,014254	0,000203	19,8	0,003315	0,000010
18,9	0,012742	0,000162	19,9	0,005037	0,000025
			20,0	0,006683	0,000044

Tab. Ia. Nullwerthe.

z	Vielfache von λ
3,831706	1,219670
7,015587	2,233130
10,173467	3,238315
13,323690	4,241062
16,470631	5,242765
19,615861	6,243923

Tab. Ib. Maxima.

z	C	C^2	Vielfache von λ
0,000000	+ 1,000000	1,000000	0
5,135630	− 0,132279	$0{,}017498 = \frac{1}{57}$	1,634722
8,417236	+ 0,064482	$0{,}004158 = \frac{1}{241}$	2,679300
11,619857	− 0,040008	$0{,}001601 = \frac{1}{625}$	3,698715
14,795938	+ 0,027919	$0{,}000779 = \frac{1}{1284}$	4,709693
17,959820	− 0,020905	$0{,}000437 = \frac{1}{2288}$	5,716788

Tab. II. $C' = \frac{4}{3}\left(\frac{2\,J^1(z)}{z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\,J^1(\frac{1}{2}z)}{\frac{1}{2}z}\right)$

z	C'	z	C'	z	C'	z	C'
0,0	+ 1,000000	5,0	— 0,307268	10,0	+ 0,055271	15,0	+ 0,024441
0,2	0,993748	5,2	0,296735	10,2	0,042336	15,2	0,020341
0,4	0,975175	5,4	0,279577	10,4	0,029779	15,4	0,015195
0,6	0,944629	5,6	0,256756	10,6	0,018051	15,6	0,009194
0,8	0,902763	5,8	0,229307	10,8	+ 0,007532	15,8	+ 0,002549
1,0	0,850444	6,0	0,195651	11,0	— 0,001471	16,0	— 0,004487
1,2	0,788753	6,2	0,164895	11,2	0,008735	16,2	0,011660
1,4	0,718959	6,4	0,130129	11,4	0,014123	16,4	0,018715
1,6	0,642455	6,6	0,095076	11,6	0,017583	16,6	0,025400
1,8	0,560804	6,8	0,060719	11,8	0,019144	16,8	0,031479
2,0	0,475600	7,0	— 0,027951	12,0	0,018912	17,0	0,036741
2,2	0,388500	7,2	+ 0,002441	12,2	0,017061	17,2	0,041012
2,4	0,301157	7,4	0,029804	12,4	0,013817	17,4	0,044149
2,6	0,215188	7,6	0,053615	12,6	0,009460	17,6	0,046057
2,8	0,132128	7,8	0,073497	12,8	— 0,004295	17,8	0,046683
3,0	+ 0,053413	8,0	0,089219	13,0	+ 0,001355	18,0	0,046021
3,2	— 0,019671	8,2	0,100693	13,2	0,007156	18,2	0,044112
3,4	0,086005	8,4	0,107971	13,4	0,012780	18,4	0,041035
3,6	0,144660	8,6	0,111225	13,6	0,017955	18,6	0,036908
3,8	0,194917	8,8	0,110747	13,8	0,022385	18,8	0,031887
4,0	0,236271	9,0	0,106917	14,0	0,025851	19,0	0,026152
4,2	0,268440	9,2	0,100199	14,2	0,028176	19,2	0,019901
4,4	0,291368	9,4	0,091112	14,4	0,029236	19,4	0,013347
4,6	0,305212	9,6	0,080216	14,6	0,028963	19,6	0,006705
4,8	0,310329	9,8	0,068079	14,8	0,027348	19,8	— 0,000184
						20,0	+ 0,006012

Tab. III. $C=\frac{1}{6}\left[J^{0}(z)+2J^{0}(2z)+3J^{0}(3z)\right].$

z	C	z	C
0,0	+ 1,000000	4,0	+ 0,014870
0,2	0,941139	4,2	0,041597
0,4	0,777728	4,4	0,047126
0,6	0,545706	4,6	+ 0,002229
0,8	0,294102	4,8	— 0,056488
1,0	+ 0,072137	5,0	0,118690
1,2	— 0,083193	2,2	0,162169
1,4	0,155481	5,4	0,169240
1,6	0,151041	5,6	0,132822
1,8	0,094530	5,8	+ 0,059006
2,0	— 0,019746	6,0	+ 0,034326
2,2	+ 0,041329	6,2	0,123497
2,4	0,067812	6,4	0,185756
2,6	0,054806	6,6	0,206417
2,8	+ 0,012730	6,8	0,180942
3,0	— 0,038294	7,0	0,124822
3,2	0,076750	7,2	+ 0,051851
3,4	0,087826	7,4	— 0,027370
3,6	0,068539	Grosses Maximum	
3,8	— 0,028211	6,59	+ 0,206468

VI.

Die Theorie der caustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.

Von

Dr. Ferdinand Bösser,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Eutin.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—13.)

Die caustischen Linien und Flächen bieten ein interessantes Beispiel für die ausserordentlich langsame Ausbildung einer wissenschaftlichen Theorie. Durch die Arbeiten von Gergonne, Malus, Quetelet u. A. hat die Lehre von jenen Linien und Flächen eine solche Allgemeinheit und Klarheit gewonnen, dass in dieser Hinsicht nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Die Endresultate sind aber so äusserst einfach, dass sich ihre Entdecker selbst darüber wunderten, dass dieselben so lange verborgen geblieben waren. Dass die Ursache dieser langsamen Entwickelung nicht in einem Mangel an Interesse für den Gegenstand zu suchen ist, dafür zeugen die zahlreichen, zum Theil überaus mühsamen Arbeiten der verschiedensten Mathematiker von Cartesius an bis auf die neuere Zeit. Der Grund könnte vielleicht eher darin gesucht werden, dass man die einfache physikalische Ursache jener Gebilde zu sehr aus den Augen verlor und diese einer Betrachtungsweise unterwarf, welche so zu sagen zu abstract mathematisch war. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass die allgemeinen Sätze, welche so spät und zum Theil durch sehr schwierige analytische Untersuchungen gefunden wurden, sich ganz einfach aus den Principien der Undulationstheorie ableiten lassen.

Die Hauptaufgabe, die wir uns hier gestellt haben, ist jedoch nicht die Zurückführung jener Sätze auf ihre physikalische Grundlage, sondern es soll hier der Weg nachgewiesen werden, den die fragliche Lehre wirklich genommen hat, um zu jenen Endresultaten zu gelangen. Dass dieser Weg durch grössere Berücksichtigung der physikalischen Verhältnisse hätte abgekürzt werden können, mag dann nur anhangsweise dargethan werden.

Die Entwickelung der caustischen Theorie bietet zwei von einander scharf abgegrenzte Perioden dar: in der ersten derselben waren die Untersuchungen fast ausschliesslich auf die Beschaffenheit der einzelnen Brennlinien gerichtet, während die Bemühungen der zweiten vorwiegend die Ausbildung der allgemeinen Theorie jener Linien bezweckten.

Sucht man die ersten Anfänge der Theorie auf, so dürften zunächst zwei Mathematiker zu nennen sein, die zwar jene Lehre noch nicht selbst behandelt, aber doch Principien aufgestellt haben, welche sich für die Behandlung derselben als äusserst fruchtbar erweisen: wir meinen Huyghens und Cartesius.

Das von Huyghens herrührende Princip ist eine einfache Consequenz seiner Undulationstheorie: Nach dieser wird bekanntlich jedes durch eine Lichtwelle getroffene und in Bewegung gesetzte Aethertheilchen der Mittelpunkt neuer, kugelförmiger Wellen. Es möge nun (Fig. 1) A einen leuchtenden Punkt bedeuten; dann wird — wenn wir hier der Einfachheit des Ausdrucks wegen nur die Ebene berücksichtigen — ein jeder um A gezogener Kreis die Form der von diesem Punkte ausgehenden Lichtwellen so lange vorstellen können, als das Licht nach allen Seiten mit gleicher Geschwindigkeit fortschreiten kann. Bedeutet dagegen eine beliebige Curve MN die Grenze des Mittels, in welchem sich A befindet, gegen ein zweites von verschiedener, z. B. geringerer Brechungskraft, dann wird die Form jener Lichtwelle sich ändern. Zieht man nämlich nun einen Kreis um A, der jene Curve MN in zwei Punkten P und S schneidet, dann kann dieser die Welle vorstellen, welche in einer gewissen Zeit um A entstanden sein würde, wenn jene Verschiedenheit der beiden Medien nicht vorhanden wäre. Ohne dieselbe würde also das Licht, während es sich von A bis P oder S fortpflanzt, auch z. B. in der Richtung AOQ ebenso weit fortschreiten. Um den Punkt O, in welchem diese Richtung die Trennungscurve MN trifft, entsteht jedoch eine neue Welle, deren Radius OR zu OQ in dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Lichtes in dem ersten und in dem zweiten Medium steht, so dass der Strahl AO nur bis zur Peripherie dieser neuen Welle fortschreitet, während ein anderer von A bis P oder S gelangt. Da nun ein jeder Punkt der Curve MN zwischen P und S in ähnlicher Weise zum Mittelpunkte einer neuen kreisbogenförmigen Elementarwelle wird, so kann die durch Interferenz dieser Elementarwellen entstehende, zwischen P und Q liegende gebrochene Welle offenbar als die einhüllende Curve aller Kreise definirt werden, deren Mittelpunkte auf der Trennungscurve MN liegen und deren Radien zu dem Abstande der Mittelpunkte von der Kreisperipherie PQS in dem constanten Verhältnisse stehen, welches die Geschwindigkeiten des Lichtes in dem zweiten und in dem ersten Medium zu einander bilden.

Die Form der gebrochenen Welle bleibt nun dieselbe, wenn diese weiter fortschreitet, da die Geschwindigkeit des Lichts in dem neuen Medium gleich bleibt, so dass alle die Curven, welche die verschiedenen Zeitpunkten entsprechenden Wellen darstellen, einander parallel bleiben. Handelt es sich also nicht um die einem einzelnen Zeitpunkte entsprechende Welle, sondern um die allgemeine Form derselben, so kann statt jenes Kreises PQS ein um A mit ganz beliebigem Halbmesser beschriebener Kreis, also auch der Punkt A selbst substituirt werden. Im letzteren Falle hat man also den Satz:

Treffen die von einem Punkte A ausgehenden Strahlen auf die Trennungscurve MN zweier Medien, so ist die gebrochene Welle die einhüllende Curve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen und deren Radien zu der Entfernung der Mittelpunkte von dem Punkte A in dem constanten Verhältnisse stehen, welches die Geschwindigkeiten des Lichtes in dem zweiten und in dem ersten Medium zu einander bilden.

Berücksichtigt man, dass die gebrochenen Strahlen auf der gebrochenen Welle senkrecht stehen, sowie dass statt des genannten Verhältnisses dasjenige gesetzt werden darf, welches die Sinus des Einfalls- und des Brechungswinkels bilden, so kann man dem Satze die Form geben:

Die von A ausgehenden, durch MN gebrochenen Strahlen stehen senkrecht auf der Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen und deren Radien zu der Entfernung der Mittelpunkte von dem leuchtenden Punkte in dem constanten Brechungsverhältnisse stehen.

Man sieht, dass dieser Satz leicht verallgemeinert werden und namentlich sofort auf den Raum übertragen werden kann; doch gehen wir hierauf jetzt noch nicht näher ein, sondern bemerken nur, dass Huyghens selbst schon die gebrochene Welle als die Enveloppe jener Kreise betrachtet, dagegen die Evolute derselben, d. h. die Brennlinie der gebrochenen Strahlen noch nicht bestimmt hat; dass der genannte Satz aber von Zeitgenossen und Späteren gänzlich unbeachtet geblieben zu sein scheint und erst im gegenwärtigen Jahrhundert als Resultat analytischer Untersuchungen neu aufgefunden wurde.

Selbst nachdem dies geschehen war, erkannte man in jener Enveloppe nur die Evolvente der Brennlinie, ohne deren physikalische Bedeutung sogleich zu finden.

Die fragliche Enveloppe lässt sich auch definiren als der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Entfernungen von der brechenden Curve und von einem festen Kreise in einem constanten Verhältnisse stehen. Lässt man nun die brechende Curve ebenfalls einen Kreis sein, dann wird jene Enveloppe der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Kreisperipherien in einem constanten Verhältnisse stehen.

Dieser Definition zufolge sind die genannten Curven identisch mit den berühmten Ovalen des Descartes, die nun zu besprechen wären. Descartes war, wie es scheint, der Erste, welcher zeigte, dass parallel auffallende Strahlen nach der Brechung durch eine Ellipse als Trennungscurve zweier Medien in deren einem Brennpunkte vereinigt werden, wenn das Verhältniss der Excentricität derselben zu ihrer grossen Halbaxe gleich dem constanten Brechungsverhältnisse ist. (Dioptrique S. 92 flgg.) Er suchte nun auch Curven, welche durch Brechung die von einem in endlicher Entfernung liegenden Punkte ausgehenden Strahlen in einem zweiten gegebenen Punkte vereinigen und fand dieselben in den sogenannten Ovalen, oder wie sie seit Herschel genannt werden, den aplanetischen Linien.

Wir wollen die Identität dieser Curven mit den obigen Enveloppen, um nicht zu weitläufig zu werden, nur für den Fall der ersten von den vier Descartes'schen Ovalen nachweisen. Die Construction derselben ist (nach *Géométrie* S. 352) folgende:

In einer Geraden (Fig. 2) sind drei Punkte F, A und G gegeben. Durch A geht unter beliebigem Winkel eine zweite Linie $AR = AG$. Beschreibt man nun um F als Mittelpunkt mit beliebigem Halbmesser $FS > FA$ einen Kreis und zieht eine Gerade ST, so dass AT zu AS in einem constanten Verhältnisse steht; zieht man endlich um G einen Kreis mit dem Radius RT, so sind die Durchschnittspunkte M, M' der Kreise um F und um G Punkte der ersten Ovalen. Zieht man nun um F einen Kreis mit dem Radius FA und um G einen zweiten mit dem Radius GA, dann ist der Abstand des Punktes M von dem um G beschriebenen Kreise gleich AT (weil $GM = RT$) und sein Abstand von dem um F beschriebenen Kreise gleich AS. Allgemein stehen also die Abstände der Punkte M von den beiden Kreisperipherien in dem constanten Verhältnisse $AS : AT$. Betrachtet man z. B. F als den leuchtenden Punkt, den um G mit dem Halbmesser GA beschriebenen Kreis als die brechende Curve, dann giebt nach dem Obigen der Ort des Punktes M die Form der durch den Kreis gebrochenen Welle an.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die anderen Formen der Descartes'schen Ovalen leicht als solche Enveloppen, oder was dasselbe ist, als Evolventen von Brennlinien auffassen. Da jedoch diese Identität erst sehr spät — durch die Untersuchungen von Sturm und von Quetelet — entdeckt wurde, so mag das Vorangehende genügen, um auf das Verdienst des Cartesius aufmerksam zu machen, das demselben für die Untersuchung der in der Theorie der Brennlinien später so wichtig gewordenen Curven gebührt.

Nur eine Bemerkung mag hier noch zugefügt werden, nämlich dass die Ovalen vom vierten Grade sind und im Allgemeinen aus zwei conjugirten Curven bestehen, was in der „*Géométrie*" nicht erwähnt ist und daher ihrem Entdecker entgangen zu sein scheint.

Hatte Huyghens sowohl, wie Descartes nur die Evolventen von Brennlinien untersucht und Letzterer sogar, ohne sie als solche zu erkennen, so gebührt das Verdienst, zuerst die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf jene Curven selbst gelenkt zu haben, dem Deutschen Tschirnhaus. Er geht selbstverständlich von den einfachsten Fällen aus und untersucht zunächst die Catacaustik des Kreises für parallel auffallende Strahlen.

Im Jahre 1682 liess er seine erste Arbeit über diesen Gegenstand in den Leipziger „*Acta eruditorum*" erscheinen und sandte sie gleichzeitig der Pariser Akademie der Wissenschaften zu. Die letztere übergab sie einer aus Lahire, Cassini und Mariotte bestehenden Commission zur Prüfung und diese erkannte Tschirnhaus' Lösung, die er ohne Beweis gegeben hatte, leider als falsch. Er hatte sich dabei offenbar durch gewisse Aehnlichkeiten, welche zwischen der Catacaustik des Kreises für parallele Strahlen und der von ihm angegebenen Curve hinsichtlich der Form und der Quadratur bestehen, zu seinem Irrthume verleiten lassen, auf den wir bei der Besprechung jener Catacaustik zurückkommen werden.

Nach acht Jahren, im Februar 1690, gab er eine berichtigte, allgemeine Methode zur Untersuchung der Catakaustiken, nebst Anwendungen auf verschiedene Beispiele, und veröffentlichte diese Arbeit ebenfalls in den „*Acta eruditorum*". Diese neue Methode beruht auf der Bestimmung der Länge des reflectirten Strahles, wenn diese von dem Einfallspunkte bis zu dem Durchschnitte mit einem unendlich nahen Strahle gerechnet wird. Der Ausdruck, den Tschirnhaus für diese Länge giebt, ist jedoch ziemlich complicirt, da zu dessen Ableitung die damals eben erst erfundene Differentialrechnung noch nicht benutzt wird und darin ausser den Ordinaten — die parallel zur Richtung der einfallenden Strahlen gewählt werden — und deren Zuwachs, sowie dem Zuwachs der Abscissen für einen unendlich nahe auffallenden zweiten Strahl auch die Subnormalen sowohl des ersten, als des zweiten reflectirten Strahles vorkommen. Nennt man nämlich die Ordinate der reflectirenden Curve y, deren Zuwachs e, den Zuwachs der Abscisse o, die Subnormale für den ersten Strahl s und die für den folgenden s_1, so heisst nach Tschirnhaus der Ausdruck für die Länge des reflectirten Strahles, diese vom Einfallspunkt bis zum Durchschnitt mit dem nächsten Strahle gerechnet:

$$l = \frac{(oy^2 + 2s_1 ey - s_1^2 o)(y^2 + s^2)}{(s_1 y - sy - se)(-2y^2 - 2ey - 2ss_1)}.$$

Die Ableitung dieses Ausdrucks hier anzugeben, würde zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass sich derselbe wesentlich vereinfachen lässt, wie folgt: Berücksichtigt man den Zusammenhang, der zwischen der Subnormale s und der Ordinate y auf der einen und den Zunahmen e der Ordinate und o der Abscisse auf der andern Seite stattfindet, und der sich durch die Proportion

$$s : y = e : o$$

ausdrücken lässt, so kann man den obigen Ausdruck schreiben, wie folgt:

$$l = \frac{(y^2 + 2s_1 s - s_1^2)\left(1 + \frac{s^2}{y^2}\right) . o}{\left(\frac{s_1 y - sy - se}{y^2}\right)(-2y^2 - 2ey - 2ss_1)}$$

oder

$$l = \frac{1+\frac{s^2}{y^2}}{-2\left(\frac{s_1 y - s y - s e}{y^2 o}\right)} \cdot \frac{y^2 + 2 s s_1 - s_1^2}{y^2 + e y + s s_1}.$$

Der zweite Factor dieses Ausdrucks convergirt aber für unendlich klein werdende Zunahmen der Abscissen und Ordinaten — und so sollen diese nach Tschirnhaus' Angabe angenommen werden — gegen die Einheit; denn setzt man $s_1 = s + \varDelta s$, so hat man für diesen Factor:

$$\frac{y^2 + 2s(s+\varDelta s) - (s+\varDelta s)^2}{y^2 + ey + s(s+\varDelta s)} = \frac{y^2 + s^2 - \overline{\varDelta s}^2}{y^2 + s^2 + ey + s\varDelta s}$$

und

$$\lim \frac{y^2 + s^2 - \overline{\varDelta s}^2}{y^2 + s^2 + ey + s\varDelta s} = 1.$$

Daher kann dieser Factor offenbar aus dem Ausdruck für l ganz weggelassen werden. Die Bedeutung des übrig bleibenden Factors wird aber sofort klar, wenn man die Zunahmen der Abscissen und Ordinaten als deren Differentialien auffasst. Der Ausdruck wird dann, wenn man auch gleich $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ für $\frac{s^2}{y^2} = \frac{e^2}{o^2}$ setzt:

$$l = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2 \cdot \frac{y\,ds - s\,dy}{y^2\,dx}} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}{-2\,\frac{d\left(\frac{s}{y}\right)}{dx}} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2\,\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Vergleicht man damit den Ausdruck für die Länge des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so ergiebt sich der merkwürdige Satz

$$l = \tfrac{1}{2}\varrho \cdot \cos\tau,$$

wenn τ den Winkel zwischen Tangente und Abscissenaxe — oder also hier auch den Winkel zwischen dem reflectirten Strahle und der Normale — bedeutet.

Um daher die Länge des reflectirten Strahles zu finden, hat man nur den halben Krümmungshalbmesser darauf zu projiciren.

Für den Kreis als reflectirende Curve beweist übrigens auch Tschirnhaus den vorstehenden Satz.

Fragt man nun, wie Tschirnhaus den von ihm angegebenen Ausdruck für l construiren will, so wendet er genau das Princip der Differentialrechnung an. Er macht nämlich die Construction abhängig von der Bestimmung des Verhältnisses von e zu o $\left(\text{d. h. von } \frac{dy}{dx}\right)$, und zu dieser Bestimmung dient die Regel: Alle Ausdrücke, welche y enthalten, sollen auf eine Seite (der Gleichung der Curve), und alle, welche x enthalten, auf die andere Seite geschafft werden; wie sich dann e zu o verhalte, so verhalten sich alle Ausdrücke mit y, multiplicirt mit ihrer Dimensionszahl und dividirt durch y zu allen Ausdrücken mit x, multiplicirt mit ihrer Dimensionszahl und dividirt durch x. Ist so das Verhältniss von $e:o$ gefunden, kann man daraus die übrigen in dem Ausdruck für l vorkommenden Grössen berechnen und daraus die Länge des Strahles finden.

Als Beispiel für die Anwendung seiner allgemeinen Methode wählt Tschirnhaus die Parabel und den Kreis als reflectirende Curven.

Was zunächst die Parabel betrifft, so verzichtet er auf den Nachweis des schon den Alten bekannten Satzes, dass die parallel zur Axe einfallenden Strahlen nach ihrer Reflexion im Brennpunkt der Parabel vereinigt werden. Er lässt vielmehr die parallelen Strahlen senkrecht zur Axe einfallen, um ihre Catacaustik zu untersuchen.

Ist die Scheitelgleichung der Parabel

$$y^2 = 2rx,$$

so liefert die oben aufgestellte Regel das Verhältniss

$$e:o = r:y.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in den allgemeinen Ausdruck für l erhält man diese Länge:

$$l = \frac{y^3 + r^2 y}{2r^2}.$$

(Ebenso würde man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3},$$

also

$$\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1+\frac{r^2}{y^2}}{2\frac{r^2}{y^3}} = \frac{y^3 + r^2 y}{2r^2}$$

erhalten.)

Zu der einfachen geometrischen Construction dieser Länge, die er dann ohne weiteren Beweis giebt, hat ihn vermuthlich folgende Umformung des obigen Ausdruckes in Verbindung mit der Bemerkung, dass die Subnormale der Parabel constant $= r$ ist, geführt:

$$2l = \frac{y \,.\, y^2 + r^2}{r^2} = \frac{y \,.\, 2xr + r^2}{r^2} = \frac{y \,.\, 2x + r}{r}.$$

Um $2l$ zu construiren, hat man also nur die Abscisse rückwärts um ihre eigene Länge zu verlängern, in dem Endpunkte dieser Verlängerung ein Perpendikel auf dieselbe zu errichten und die Normale der Parabel bis zum Durchschnitt mit diesem Perpendikel zu ziehen. Die dadurch abgeschnittene Länge des letzteren ist dann $= \frac{y \cdot 2x + r}{r} = 2l$.

Nachdem Tschirnhaus so die Construction der Länge des reflectirten Strahles und damit die der Brennlinie selbst angegeben, fügt er noch einige Bemerkungen über Rectification und Quadratur hinzu, deren Richtigkeit leicht einzusehen ist. Unter diesen mag hier nur die eine erwähnt werden, dass die Länge der Brennlinie, vom Scheitel an gerechnet, gleich der Summe des einfallenden Strahles (von der Abscissenaxe bis zum Einfallspunkte) und des reflectirten (vom Einfallspunkte bis zur Brennlinie) ist. Der Satz, den er für die Brennlinie der Parabel hier beweist, kann auch einfach aus der oben angegebenen physikalischen Bedeutung der Evolventen der Brennlinien abgeleitet werden und gilt ganz allgemein für jede reflectirende Curve. Denn nach dem dort angegebenen Satze ist, wenn man (Fig. 3) einen jeden reflectirten Strahl wie MR rückwärts um $MQ = MP$ verlängert, der Ort des Punktes P eine Evolvente der Catacaustik AR und folglich werden die Bogen der letzteren durch die Krümmungshalbmesser der ersteren, z. B. QR für den Bogen AR der Catacaustik gemessen; die Linie QR ist aber nach der Construction $= PM + MR$. Bei dieser Gelegenheit sei es gestattet, auf eine noch nicht angegebene Bedeutung der Evolvente AQ hinzuweisen: Ist MT die Tangente an die reflectirende Curve für den Punkt M, dann liegt das Bild des Punktes P diesem Punkte in Bezug auf die Tangente symmetrisch gegenüber, d. h. (da der reflectirte und der einfallende Strahl mit der Tangente gleiche Winkel bilden) im Punkte Q; die Curve AQ ist also auch der Ort der Bilder der Punkte, in denen die einfallenden Strahlen die Axe schneiden und welche statt des in unendlicher Entfernung liegenden Ausgangspunktes der parallelen Strahlen substituirt werden können, während die reflectirten Strahlen senkrecht von der Curve AQ auszugehen scheinen.

Als zweites Beispiel für die Anwendung seiner allgemeinen Methode wählt Tschirnhaus, wie schon gesagt, einen Kreis und bestimmt dessen Catacaustik ebenfalls für parallel einfallende Strahlen. Er rechnet die Länge des einfallenden Strahles von dem zur Richtung der Strahlen senkrechten Durchmesser an und findet aus seiner allgemeinen Formel die Länge des reflectirten Strahles als die Hälfte von der des einfallenden Strahles. Für diese merkwürdige Beziehung giebt Tschirnhaus auch einen einfachen geometrischen Beweis, der hier eine Stelle finden möge, da jene Beziehung für die gesammte Theorie der Catacaustiken wichtig ist und somit eine elementare Begründung desselben ebenfalls wünschenswerth erscheinen muss.

Es seien (Fig. 4) NPL, MOK zwei unendlich nahe, einfallende Strahlen, deren Richtungen nach der Reflexion durch LH, KJ angegeben sein mögen. Es ist dann Bogen $JH = JK - (HL - LK) = KM - LN + LK = 3LK$. Da nun der Abstand der einfallenden und reflectirten Strahlen unendlich klein sein soll, so können statt der Bogen ihre Sehnen und auch statt GK, GL gesetzt werden. Dann ist $JH : KL = HG : GK$ oder auch $= HG : GL = 3:1$ und $LG = \frac{1}{4} LH = \frac{1}{4} LN = \frac{1}{4} LP$.

Aus diesem Satze kann der oben angegebene, dass die Länge des reflectirten Strahles für eine beliebige Curve gleich der Projection des halben Krümmungsradius auf den reflectirten Strahl sei, sofort abgeleitet werden; ebenso der folgende: Für jede reflectirende Curve ist die Länge des reflectirten Strahles gleich dem vierten Theile der Sehne, welche der einfallende Strahl in dem Krümmungskreise der Curve (für den Einfallspunkt) bildet.

Darauf beweist Tschirnhaus, dass die Evolvente der obigen Catacaustik des Kreises die Catacaustik eines Kreises von dem doppelten Radius und für Strahlen sei, welche senkrecht zu den ersteren einfallen. Doch kann der Beweis durch die Bemerkung abgekürzt werden, dass jene Evolvente nichts Anderes als der geometrische Ort der Bilder der Punkte ist, in welchen die einfallenden Strahlen den zu ihnen senkrechten Durchmesser des Kreises schneiden. In dieser abgekürzten Form möge der Beweis hier folgen:

Der Kreis (Fig. 5) MGH sei concentrisch um LFD beschrieben und sein Halbmesser CG gleich dem doppelten Halbmesser CF des ersten Kreises. EO sei ein einfallender Strahl, der nach N reflectirt werde. Das Bild P des Punktes E liegt dann in der Verlängerung von NO, so dass $OP = OE$ ist. Zieht man nun den Radius COQ und verbindet Q mit P, so ist $OQ = CO$, $OP = OE$ und W. $QOP = CON = COE$, folglich Dreieck $OPQ \cong OEC$ und W. $P = E = 90^0$, d. h. QP berührt die Evolvente MPF in P. Macht man nun W. $CQS = CQP$ und verlängert EO bis zum Durchschnitt W mit QS, so ist Dreieck $OQW \cong OQP \cong OCE$ und W. $W = E = 90^0$, folglich auch W. $S = 90^0$ und $PQ = QW = \frac{1}{2} QS$. Daher kann die Evolvente FPM als Catacaustik für den Kreis von MGH angesehen werden.

Dass diese Curve eine Epicycloide sei, scheint mir naturgemässer direct, wie folgt, bewiesen zu werden, statt, wie Tschirnhaus thut, umgekehrt nachzuweisen, dass die betreffende Epicycloide eine Catacaustik sei.

Ist wieder EO ein einfallender Strahl, ON seine Richtung nach der Reflexion, dann liegt das Bild P des Punktes E in der Verlängerung von ON, so dass $NP = OE$ ist. Nun beschreibe man über OQ als Durchmesser einen Kreis, der durch P gehen muss, weil W. $OPQ = 90^0$ ist. Dann entspricht in diesem Kreise der Bogen OP dem Peripheriewinkel $OQP =$ dem Centriwinkel OCE des Kreises $ADFL$, ist also dem Bogen OF dieses Kreises gleich. Daraus folgt, dass die Curve FPM auch durch einen Punkt A

eines auf dem äusseren Umfange des Kreises *FLAD* rollenden Kreises, dessen Halbmesser halb so gross als der des ersteren ist, beschrieben werden kann, d. h. dass die Curve *FPM* eine Epicycloide ist.

Einige Angaben über Rectification und Quadratur, die Tschirnhaus dann folgen lässt, ergeben sich einfach aus den schon dagewesenen Sätzen, so dass das Stück *FN* der Curve gleich $NP = NO + OE = 3NO$ und analog $MP = 3QP$ ist, wonach diese Curven also leicht rectificirt werden können. Die Länge von *FJ* ist daher $= 3JL = \frac{3}{4}CL$ und folglich $JN = \frac{3}{2}CL - \frac{3}{4}CB$ $= \frac{3}{2}BL$. Es gilt demnach die Proportion $FN : NJ = CB : BL$, welche eine leichte Theilung der Curve nach einem gegebenen Verhältnisse anzeigt. Auch steht das Stück *FN* der Evolute zu dem entsprechenden Stück *FP* der Evolvente in einem leicht zu bestimmenden Verhältnisse, denn offenbar findet man entsprechend wie $JN = \frac{3}{2}BL$ das $\frac{3}{2}$fache von *FP*, wenn man das Perpendikel *QT* auf *CG* fällt; dann ist $FP = \frac{3}{2}TG$. Da aber *TG* das Doppelte des entsprechenden Stückes *EF* in dem Kreise *LFD* ist, so hat man auch die Proportion: $FN : FP = EO : 3EF$. Die Evolute von *F* bis *J* ist daher halb so lang, als die Evolvente von *F* bis *M*, wie sich dies auch von vornherein erwarten liess.

Der epicycloidische Raum *GKB* (Fig. 4) lässt sich ebenfalls ohne Integration leicht bestimmen; denn da Winkel $GLK = PLB = OKL$ gesetzt werden darf, wenn *OP* unendlich klein angenommen wird, so hat man das Verhältniss $\triangle GKL : \triangle KOL = KG : KO = 1:2$, also $\triangle KGL = \frac{1}{2}\triangle KOL$ $= \frac{1}{4}$ des Trapezes *KOPL*. Daher ist auch die Summe der kleinen Dreiecke von *G* bis *B*, d. h. der Raum $GKB = \frac{1}{4}$ des halben Kreisabschnittes *KDB* und der Raum $EAB = \frac{1}{4}$ des Quadranten $AFB = \frac{1}{2}$ des Halbkreises über *FB*. Diese Eigenschaft, den Quadranten im Verhältnisse von 1:3 zu theilen, hat unsere Catacaustik mit der Curve gemein, welche Tschirnhaus im Jahre 1682 damit verwechselt hatte; denn da der Raum *FABQ* gleich dem halben Quadranten *FAB* ist, so wird der geometrische Ort der Halbirungspunkte der zwischen den Kreisbogen liegenden Stücke *RK* offenbar den genannten Raum *FABQ* halbiren. Und diese Uebereinstimmung mag zu jenem Irrthume mit beigetragen haben.

Fassen wir nun die Leistungen von Tschirnhaus auf dem von ihm entdeckten Gebiete hier nochmals zusammen, so sehen wir, dass er sich zwar, wie das bei einer neuen Art der Untersuchung sehr natürlich war, auf die einfachsten Fälle beschränkt, dass er diese aber, wie namentlich die Catacaustik des Kreises für parallele Strahlen so gründlich erörtert hat, dass hierüber wenig Neues mehr beigebracht werden konnte, sowie, dass seine Methode, die Catacaustik durch die Länge des reflectirten Strahles zu bestimmen, auch von seinen Nachfolgern beibehalten wurde. Dagegen waren seine analytischen Ableitungen wegen seiner Unbekanntschaft mit der eben erst entdeckten Differentialrechnung noch etwas schwerfällig und sein Ausdruck für jene Länge des reflectirten Strahles nicht immer leicht zu construiren.

Unter den Mathematikern, welche fortschreitend auf dem von Tschirnhaus angegebenen Wege namentlich auch die hierher gehörigen analytischen Methoden ausbildeten, sowie weitere Anwendungen auf verschiedene Curven machten, ist vor allen Johann Bernoulli zu nennen, der sich auch das Verdienst erwarb, neben den durch Reflexion entstehenden Caustiken auch die durch Brechung gebildeten in den Bereich seiner Untersuchung zu ziehen.

Es findet sich im 3. Bande seiner Werke zunächst eine Untersuchung über Catacaustiken und dann am Ende des citirten Bandes ein von den Diacaustiken handelnder Nachtrag.

Das Jahr der Entstehung dieser Arbeiten ist nicht angegeben; nur fallen sie nach dem Titel des Werkes zwischen die Jahre 1727 und 1742, also in eine Zeit, wo die analytische Geometrie bereits einen grossen Umschwung durch die Differentialrechnung erlangt hatte.

So begegnet man denn hier sogleich jenem einfachen analytischen Ausdrucke für die Länge des reflectirten Strahles, der schon oben aus dem von Tschirnhaus gefundenen abgeleitet wurde:

$$l = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-2\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn $y = f(x)$ die Gleichung der reflectirenden Curve ist und die Strahlen parallel der Abscissenaxe auffallen.

Es hätte nun nahe gelegen, nachdem dieser Ausdruck gefunden war, denselben zur unmittelbaren Bestimmung der Coordinaten des Endpunktes des reflectirten Strahles, d. h. der Brennlinie in ähnlicher Weise zu verwerthen, wie der Krümmungshalbmesser zur Bestimmung der Evolute verwendet wird; die allgemeinen Ausdrücke für diese Coordinaten werden nämlich hier ziemlich einfach, denn der reflectirte Strahl macht mit der Ordinate des Einfallspunktes für die reflectirende Curve den Winkel 2τ, wenn τ den Winkel zwischen Nomale und Ordinate oder zwischen Tangente und Abscissenaxe bedeutet. Nennt man daher die Coordinaten des Einfallspunktes y, x, die des entsprechenden Punktes der Catacaustik β, α und die Länge des reflectirten Strahles l, so hat man

$$x - \alpha = l \,.\, \sin 2\tau = l \,.\, \frac{2 \operatorname{tang} \tau}{1 + \operatorname{tang}^2 \tau},$$
$$y - \beta = l \,.\, \cos 2\tau = l \,.\, \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \tau}{1 + \operatorname{tang}^2 \tau},$$

oder wenn für l sein Werth und für

$$tang\,\tau = \frac{dy}{dx} \text{ zur Abkürzung } p,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad " \quad " \quad q$$

gesetzt wird:

$$x - \alpha = \frac{1+p^2}{-2q} \cdot \frac{2p}{1+p^2} = \frac{v}{-q},$$
$$y - \beta = \frac{1+p^2}{-2q} \cdot \frac{1-p^2}{1+p^2} = \frac{1-p^2}{-2q}.$$

Gelingt es nun, aus diesen Gleichungen nebst derjenigen für die reflectirende Curve $y = f(x)$ die Coordinaten y und x zu eliminiren, so bleibt eine Gleichung zwischen α und β als Gleichung der Catacaustik. Doch hat weder Bernoulli dies einfache Verfahren gefunden, noch scheint dasselbe überhaupt auch später viel zur Anwendung gekommen zu sein.

Bernoulli schlägt vielmehr das nämliche Verfahren wie sein Vorgänger Tschirnhaus ein: er sucht zuerst die Länge des reflectirten Strahles nach der angegebenen Formel zu bestimmen und dann Beziehungen aufzusuchen, die zur geometrischen Construction geeignete Anhaltspunkte geben; ein Verfahren, das freilich auch auf concrete Fälle angewandt oft sicherer zum Ziele führt, als die in der allgemeinen Theorie verhältnissmässig leichtere Aufstellung einer Gleichung.

Eine Bemerkung ist ihm auch von Nutzen für seine Methode, nämlich dass der von Tschirnhaus für den Kreis bewiesene Satz, dass die Länge der Catacaustik gleich der Summe des reflectirten und des einfallenden Strahles sei — beide von dem richtig gewählten Anfangspunkte an —, dass dieser Satz also ganz allgemein für alle reflectirenden Curven gilt. Bernoulli beweist diesen Satz so: Wird (Fig. 6) die Brennlinie AJ von A aus abgewickelt, so berührt bekanntlich die Linie fH, FJ u. s. w. die Curve. Beschreibt man nun für zwei unendlich nahe Lagen der Linien JF, Hf den kleinen Bogen bC um J als Mittelpunkt, so ist dieser $\| fF$ und $bf = CF$, also ist BC das Differential von BF; zieht man aber $bD \| AE$, so ist BD das Differential von BE. Da nun W. $DBb = HBG = CBb$ und die W. bei C und D als rechte einander gleich sind, so sind die Dreiecke BbC und BbD congruent und also $BC = BD$, d. h. das Differential von BF gleich dem von BE und also sind diese selbst gleich, vorbehältlich der Zufügung oder Abziehung einer constanten Grösse, falls die Caustik oder der abgewickelte Faden nicht von Null anfangen. Dann ist also die Evolute von A bis J — mit demselben Vorbehalte — auch gleich $JB + BE$.

Wir haben schon oben darauf hingewiesen, dass die Richtigkeit dieser Gleichung sofort erkannt wird, wenn man die Evolvente als den geometrischen Ort des Bildes der Punkte E.. auffasst.

Von einzelnen reflectirenden Curven betrachtet Bernoulli zunächst ebenfalls den Kreis. Er leitet aus seiner mehrgenannten Formel die Länge des reflectirten Strahles als die Hälfte des einfallenden Strahles ab und citirt dafür den geometrischen Beweis von Tschirnhaus. Dann leitet er die Gleichung der Catacaustik und zwar ziemlich weitläufig ab und findet dieselbe wie folgt (nach Beseitigung eines kleinen Druckfehlers):

$$r = \frac{s\sqrt[3]{a^2 s} - \frac{1}{2}a\sqrt[3]{as^2} + \frac{1}{2}a^2}{\sqrt{-a\sqrt[3]{as^2} + a^2}},$$

worin s die vom Mittelpunkte des reflectirenden Kreises auf dem zu der Richtung der einfallenden Strahlen senkrechten Durchmesser gerechneten Abscissen, r die senkrecht dazu genommenen Ordinaten und a den Radius des Kreises bedeuten.

Diese Gleichung giebt Bernoulli Veranlassung, nochmals auf den von Tschirnhaus begangenen Irrthum vom Jahre 1682 zurückzukommen und zu zeigen, dass sich für ein gegebenes s das zugehörige r nicht construiren lasse, wie jener damals gewollt hatte.

Dass die fragliche Curve eine Epicycloide sei, weist er dann ähnlich nach, wie dies schon von Tschirnhaus geschehen war; ebenso, dass sich durch Evolution eine der ersten ähnliche bilden lasse, und bestätigt endlich die von T. gegebenen Eigenschaften der Curve hinsichtlich ihrer Rectification und der Quadratur der hier in Betracht kommenden Räume.

Dann untersucht er die Brennlinie der gemeinen Parabel für parallele, senkrecht zur Axe einfallende Strahlen. Doch hat, wie wir oben angegeben haben, Tschirnhaus diese Curve ebenfalls schon untersucht und bringt daher Bernoulli in dieser Hinsicht ebenso, wie bei der Catacaustik des Kreises, wenig Neues. Die Construction der Länge des reflectirten Strahles scheint mir sogar weniger einfach zu sein, als die von Tschirnhaus angegebene. Er benutzt nämlich den dafür gefundenen Ausdruck:

$$l = \frac{(a + 4x)\sqrt{ax}}{2a} \quad (\text{wo } a = 2r),$$

den er aus der Gleichung $y^2 = ax$ ableitet und der mit dem Tschirnhaus'schen

$$l = \frac{y^3 + r^2 y}{2r^2} = \frac{\left(ax + \frac{a^2}{4}\right)\sqrt{ax}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{4x + a}{2a} \cdot \sqrt{ax}$$

übereinstimmt, unmittelbar, indem er die Proportion bildet:

$$2a : (a + 4x) = \sqrt{ax} : l,$$

d. h. die Ordinate verhält sich zu der gesuchten Länge wie der doppelte Parameter zur Summe des Parameters und der vierfachen Abscisse.

Von Catacaustiken, die durch parallele Lichtstrahlen entstehen, untersucht Bernoulli dann noch diejenigen der gemeinen Cycloide für die beiden Fälle, dass die Strahlen senkrecht zur Axe und dass sie parallel zu derselben einfallen. Am interessantesten sind die Resultate, welche er im zweiten Falle erhalten hat. Die Catacaustik ist dann nämlich ebenfalls eine Cycloide, und zwar eine durch Rollen eines Kreises vom halben Durchmesser der reflectirenden Cycloide auf derselben Grundlinie entstanden. Die Art, wie B. zu diesem Resultate gelangt, ist folgende:

Zunächst leitet er aus der allgemeinen Formel die Länge des reflectirten Strahles ab und findet, dass diese gleich der des einfallenden Strahles (vom Durchschnitt mit der Basis der Cycloide an gerechnet) ist. Ich will diese analytische Ableitung hier nicht wiederholen, sondern nur bemerken, dass jene Gleichheit auch ganz einfach geometrisch gefunden werden kann, wenn man den Krümmungskreis der Cycloide für den Einfallspunkt zu Hilfe nimmt; denn der Krümmungshalbmesser ist für die Cycloide bekanntlich gleich der doppelten Normale. Denkt man sich nun den zur Richtung der einfallenden Strahlen senkrechten, also zur Basis der Cycloide parallelen Durchmesser des Krümmungskreises gezogen, so ist das Stück des einfallenden Strahles vom Durchschnitt mit diesem Durchmesser an gerechnet doppelt so gross, als vom Durchschnitt mit der Basis der Cycloide an gerechnet.

Da nun nach dem von Tschirnhaus gegebenen Satze der reflectirte Strahl im Kreise halb so gross ist, wie der einfallende, so ist er hier gleich dem einfallenden auf die Cycloide bezogen.

Nachdem Bernoulli diese Beziehung aufgefunden hat, beweist er rein geometrisch, dass die Catacaustik eine Cycloide ist. Dieser scharfsinnig durchgeführte Beweis lässt sich noch etwas abkürzen und ist dann folgender:

Es sei (Fig. 7) GB der einfallende, $BH = BG$ der reflectirte Strahl. Zieht man nun $BFP \parallel AE$ und verbindet den so erhaltenen Durchschnittspunkt mit E, dann ist nach einer bekannten Eigenschaft der Cycloide die durch $B \parallel FE$ gezogene Linie BM die Normale, halbirt also den Winkel GBH. Verbindet man nun H und den Durchschnittspunkt M dieser Normalen mit der Basis, so ist $\triangle\, BHM \cong BGM$, folglich $MH = MG$ und W. $MAB = R$. Beschreibt man nun über der zur Axe senkrecht gezogenen MN (wo N den Durchschnitt mit BH bezeichnet) als Durchmesser einen Kreis, so muss dieser durch H gehen. Von diesem Kreise ist nun zu zeigen, dass er von constanter Grösse und dass der Bogen $MH = EM$ ist. Ersteres lässt sich kurz so beweisen: W. $NMB = MBN$; MBN ist also ein gleichschenkliches Dreieck und folglich $\cong EFR$, da die Basis und die spitzen W. REF und NMB gleich sind; folglich ist $NM = RE$. Das zweite findet man ebenso leicht: W. $NHO = CRF$ als Supplemente gleicher Winkel, also ist der dem Peripheriewinkel HNM entsprechende Bogen HM gleich dem dem Centriwinkel CRF in dem Kreise von doppelt so grossem Durchmesser entsprechenden Bogen CF. Nach einer bekannten Eigenschaft der Cycloide ist dieser Bogen gleich der Geraden FB, also auch $HM = FB = EM$. Der Endpunkt H des reflectirten Strahles bewegt sich daher auf einer Cycloide, deren Erzeugungskreis einen halb so grossen Radius hat, als der Erzeugungskreis der reflectirenden Cycloide, und deren Basis gleich der halben Basis der ersteren ist.

Die grosse Zahl der merkwürdigen Eigenschaften der Cycloide wird demnach noch um die vermehrt, dass nicht nur die Evolute und die Evolvente, sondern selbst die Catacaustik eine Curve ganz gleicher Art bildet.

Ausser der Familie der Cycloiden scheint nur noch die logarithmische Spirale diese merkwürdige Eigenschaft zu besitzen, die wir nachher betrachten werden.

Bei dieser Gelegenheit sei es erlaubt, nochmals darauf hinzuweisen, wie naheliegend es erscheinen muss, die Catacaustiken in ähnlicher Weise zu behandeln, wie die Evoluten, und dabei die Länge des reflectirten Strahles in gleicher Weise zu verwenden, wie dort die Länge des Krümmungshalbmessers. Man kann sich beinahe darüber wundern, dass Bernoulli nicht selbst darauf gekommen ist, die Gleichung der Caustik in rechtwinkligen Coordinaten durch Benutzung seiner Formel für den reflectirten Strahl allgemein aufzustellen, da er doch die entsprechende Methode für die Evoluten selbst vielfach angewandt hat, wie aus seiner Untersuchung der Evoluten in demselben Bande seiner Werke hervorgeht.

Wir wollen daher hier nach der besprochenen Methode dieselbe Catacaustik der Cycloide analytisch bestimmen, die vorher geometrisch bestimmt worden ist.

Die Gleichung der reflectirenden Cycloide sei, wenn man nur den aufsteigenden Ast betrachtet und die Abscissen von der Spitze aus zählt:

$$x = a \,.\, \mathrm{Arc\,cos}\,\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

$$\eta - y = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{2y^2 - 2ay}{y^2}\,.\,\frac{y^2}{a}$$

$$= \frac{ay - y^2}{a} \text{ und } y = a - \sqrt{a^2 - a\eta},$$

$$\xi - x = -\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{y}{a}\sqrt{2ay-y^2};$$

$$x = \xi - \sqrt{ay} + \sqrt{ay-y^2}.$$

Also durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung der Cycloide:

$$\xi - \sqrt{a\eta} + \sqrt{a\eta - \eta^2} = v \,.\, Arc\cos\frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a} - \sqrt{a\eta},$$

oder

$$\xi + \sqrt{a\eta - \eta^2} = a \,.\, Arc\cos\left(\frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a}\right),$$

oder

$$= \frac{a}{2} . 2\, Arc\cos\frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a},$$

und wenn

$$Arc\cos\frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a} = w$$

gesetzt wird, so ist

$$\cos w = \frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a}$$

und

$$\cos 2w = 2\cos^2 w - 1 = 2 \,.\, \frac{a^2 - a\eta}{a^2} - 1 = \frac{a^2 - 2a\eta}{a^2} = \frac{a - 2\eta}{a},$$

d. h.:

$$2\, arc\cos\left(\frac{\sqrt{a^2 - a\eta}}{a}\right) = Arc\cos\frac{a - 2\eta}{a},$$

daher auch

$$\xi = \frac{a}{2} \,.\, Arc\cos\frac{a - 2\eta}{a} - \sqrt{a\eta - \eta^2}$$

eine Gleichung, die aus derjenigen der reflectirenden Cycloide gebildet werden kann, wenn ξ für x, η für y und $\frac{a}{2}$ für a gesetzt werden, d. h. die Gleichung einer gemeinen Cycloide, deren Erzeugungskreis zum Radius den halben Radius der reflectirenden Cycloide hat, wie oben geometrisch bewiesen wurde.

Man sieht also, dass auf diese Art die Gleichung der Catacaustik nicht schwieriger zu finden ist, als die der Evolute.

Bernoulli hat aber nicht nur das Verdienst, die Untersuchung der durch parallel einfallende Strahlen gebildeten Catacaustiken durch Auffindung allgemeiner analytischer Formeln erleichtert und auf neue Beispiele ausgedehnt zu haben, sondern hat auch meines Wissens zuerst den weiteren

Schritt auf diesem Gebiete gethan, den Tschirnhaus noch nicht gemacht hatte: er hat nämlich auch die Catacaustiken, welche durch divergent auffallende Strahlen gebildet werden, und dann auch die Diacaustiken in den Bereich seiner Untersuchung gezogen und wir wollen sehen, zu welchen Resultaten er in diesen neuen Zweigen der Theorie der Brennlinien gelangt ist.

Bei den Catacaustiken sowohl, als bei den Diacaustiken hat der Analytiker, wenn die einfallenden Strahlen unter einander parallel sind, den Vortheil, sehr bequem ein festes, rechtwinkliges Coordinatensystem anwenden und dessen Axen den Strahlen parallel, beziehungsweise dazu senkrecht legen zu können.

Diesen Vortheil verliert er, sobald die einfallenden Strahlen von einem in endlicher Entfernung liegenden Punkte ausgehen, und dieser Umstand erschwert die Rechnung ausserordentlich. Eine Erleichterung tritt nur dann ein, wenn die Gleichung der brechenden oder reflectirenden Curve in Polarcoordinaten gegeben ist und der leuchtende Punkt in den Pol fällt, wofür Bernoulli die logarithmische Spirale als ein sehr passendes Beispiel gewählt hat.

Zur Ableitung allgemeiner Regeln für die Untersuchung derjenigen Catacaustiken, welche durch divergent auffallende Strahlen erzeugt werden, wählt B. eine eigenthümliche Combination verschiedener Coordinatensysteme, durch die er seine Formeln zu gewinnen sucht.

Wenn (Fig. 8) D den strahlenden Punkt und ABC die reflectirende Curve vorstellt, sucht er auch hier wieder die Länge des reflectirten Strahles BE zu bestimmen.

Er setzt die Länge des einfallenden Strahles $DB = y$; dann errichtet er in D Perpendikel, DG auf den Strahl DB, und DM auf den folgenden Strahl Db senkrecht. Darauf zieht er die Linie BHL „diesen beiden Perpendikeln parallel" und bezeichnet BH durch dx, welches er constant setzt. Die Länge BE bestimmt er dann als Function von y, dy, d^2y und dx. Die Werthe dieser Stücke selbst aber sollen endlich aus der gegebenen Gleichung der reflectirenden Curve entnommen und in jenen Ausdruck für die Länge des reflectirten Strahles eingesetzt werden. Er erreicht durch diese Methode allerdings einen ziemlich einfachen allgemeinen Ausdruck für jene Länge; doch werden in vielen Fällen die Substitutionen für y, dy, d^2y, dx schwer durchzuführen sein. Der betreffende Ausdruck heisst:

$$l = \frac{y\,dy^2 + y\,dx^2}{dx^2 + dy^2 - 2y\,d^2y}.$$

Was Bernoulli dann über die Rectificirbarkeit auch dieser Caustiken sagt, folgt, wie oben, leicht aus der Bemerkung, dass man (Fig. 9) den geometrischen Ort der Bilder des Punktes D als die Evolvente lk der Brennlinie auffassen kann; man hat dann die Länge des Bogens $LK = Kk - Ll = (KA + AD) - (BL + BD)$.

Anwendungen seiner Regel macht Bernoulli der schwierigen Rechnungen wegen nur auf einige sehr specielle Fälle: auf eine Parabel, wenn der leuchtende Punkt im Scheitel, und auf einen Kreis, wenn der leuchtende Punkt auf dessen Peripherie gelegen ist, sowie endlich auf eine logarithmische Spirale, von deren Pol die Lichtstrahlen ausgehen.

In diesen drei Fällen gestaltet sich jener Ausdruck für die Länge des reflectirten Strahles allerdings einfach, denn wenn erstens die Gleichung einer Parabel gegeben ist:

$$t^2 = ar,$$

so wird y, d. h. der vom Scheitel nach dem Punkte (t, r) gehende Strahl $= \sqrt{r^2 + t^2}$

$$= \sqrt{ar + r^2}; \quad dy = \frac{a + 2r}{2\sqrt{ar + r^2}} dr,$$

(Fig. 10)

$$Gi = dr; \quad gi = dr \cdot \frac{a}{2\sqrt{ar}},$$

$$\overline{Gg}^2 = \frac{a^2}{4ar} dr^2 + dr^2 = \frac{a + 4r}{4r} dr^2,$$

$$\overline{gO}^2 = dy^2 = \frac{a^2 + 4ar + 4r^2}{4ar + 4r^2} dr^2,$$

also

$$\overline{GO}^2 = \overline{Gg}^2 - \overline{gO}^2 = \frac{a\,dr^2}{4r + 4a} = dx^2.$$

Da aber dx, also auch dx^2 constant sein soll, so hat man, wenn man differentiirt:

$$\frac{8\,ar\,dr\,d^2r + 8\,a^2 dr\,d^2r - 4\,a\,dr^3}{(4r + 4a)^2} = 0,$$

also wenn man den Zähler durch $4\,a\,dr$ dividirt:

$$2\,r\,d^2r + 2\,a\,d^2r - dr^2 = 0,$$

$$d^2r = \frac{dr^2}{2r + 2a}.$$

Wenn man

$$dy = \frac{a + 2r}{2\sqrt{ar + r^2}} dr$$

nochmals differentiirt und in den dafür erhaltenen Ausdruck für d^2r den eben gefundenen Werth setzt, so hat man

$$d^2y = \frac{(-a^2 + 2r^2 + ar)\,dr^2}{(2r^2 + 2\,ar)\sqrt{4r^2 + 4ar}},$$

und da

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(a + 4r)}{4r} dr^2$$

wird, so wird der ganze Ausdruck

$$(y\,dx^2 + y\,dy^2) : (dx^2 + dy^2 - 2y\,d^2y)$$

$$= (a+4r)\sqrt{r^2+ar} : 3a = \text{der Länge des reflectirten Strahles.}$$

Um diese zu construiren, hätte man dieselbe als viertes Glied der Proportion anzusehen:

$$3a : (a+4r) = \sqrt{r^2+ar} : l,$$

d. h. der einfallende Strahl verhält sich zu dem reflectirten, wie das Dreifache des Parameters zu der Summe des Parameters und des Vierfachen der Abscisse.

Die Länge des Stückes AL der Catacaustik würde man finden, wenn man die Länge des einfallenden und des reflectirten Strahles addirte; also wäre dieselbe

$$= \frac{(a+4r)\sqrt{r^2+ar}}{3a} + \sqrt{r^2+ar}$$

$$= \frac{(4a+4r)\sqrt{r^2+ar}}{3a}.$$

Eine sehr bequeme Anwendung findet Bernoulli's Verfahren bei der logarithmischen Spirale, deren Pol der leuchtende Punkt ist. Denn da der Winkel, welchen der Radius vector mit der Curve macht, in jedem Punkt der Spirale der gleiche ist, so ist auch das Verhältniss $dx : dy$, welches gleich der Tangente des nämlichen Winkels ist, ebenfalls constant; da aber dx constant ist, so muss auch dy constant und also $d^2y = 0$ sein. Dadurch reducirt sich aber der obige Ausdruck

$$\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,d^2y} \text{ auf } \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = y,$$

d. h. der reflectirte Strahl ist gleich dem einfallenden. Zieht man (Fig. 11) die Linie AC, so ist W. $BAC = BCA$, also ist auch der Winkel, den der Radius vector AC mit der Tangente BC an die Brennlinie macht, constant gleich dem Winkel ABF und die Catacaustik ist daher eine der reflectirenden Spirale vollkommen congruente. Die logarithmische Spirale theilt also mit den Cycloiden die merkwürdige Eigenschaft, dass nicht nur die Evolute, sondern auch die Catacaustik den ursprünglichen Curven ähnlich, beziehungsweise congruent sind; nur entsteht bei der Cycloide die Catacaustik durch parallel einfallende Strahlen, bei der logarithmischen Spirale dagegen muss der leuchtende Punkt mit dem Pol zusammenfallen.

Endlich war die Catacaustik des Kreises bisher nur für parallel einfallende Strahlen untersucht. B. hat diese Gruppe von Catacaustiken um diejenige bereichert, welche durch die Reflexion der von einem auf der Peripherie befindlichen leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen erzeugt wird und hat an dieser Curve ganz analoge Eigenschaften gefunden, wie Tschirnhaus an der von ihm untersuchten.

Die Länge des reflectirten Strahles wird in diesem Falle aus dem allgemeinen Ausdrucke als der dritte Theil des einfallenden Strahles gefunden. Ich übergehe hier diese analytische Ableitung, da man die Richtigkeit der oben angegebenen Beziehung auch durch eine einfache geometrische Betrachtung erkennt und die obigen Beispiele zur Darstellung der von Bernoulli angewandten Methode genügen können. Der geometrische Beweis aber ist vollkommen demjenigen analog, dessen sich Tschirnhaus für den Fall parallel einfallender Strahlen bedient; denn offenbar ändert sich in der betreffenden Figur nichts, als dass der kleine Bogen MN zwischen den Eintrittsstellen der parallelen Strahlen in den Kreis verschwindet und die Punkte M und N zusammenfallen. Dann wird der Bogen HJ zwischen den verlängerten reflectirten Strahlen also nicht mehr das Dreifache, sondern nur das Doppelte des Bogens LK zwischen den Einfallspunkten der parallelen Strahlen und entsprechend GL hier gleich dem dritten Theil von LN sein.

Diese Beziehung ermöglicht eine leichte Construction der Curve; dass dieselbe eine Epicykloide sei, beweisst dann B. etwa folgendermassen: Man beschreibe um den Mittelpunkt A des reflectirenden Kreises einen concentrischen Kreis, dessen Radius der dritte Theil von dem des grössern ist (und der also durch die Spitze E der Catacaustik geht). Stellt nun EQB die Catacaustik, BG einen einfallenden und GF den reflectirten Strahl vor, der die Catacaustik in F berührt, so ziehe man den Radius AG und beschreibe über PG als Durchmesser einen Kreis, der den reflectirten Strahl GE in Q schneiden möge. Wegen der Gleichheit der Winkel BGR und GSQ sind dann die beiden Segmente BGR und BSQ einander ähnlich; man hat also das Verhältniss $BG:GQ=DB:PG=3:1$. Da aber auch FG der dritte Theil von BG ist, so fällt F und Q zusammen, der über GT beschriebene Kreis geht also durch den Berührungspunkt F. Da aber sein Durchmesser auch constant $= \frac{2}{3}$ des Radius des reflectirenden Kreises ist, so hat man nur noch zu zeigen, dass $QP=EP$ ist: Aus der Aehnlichkeit der Segmente BGR und GSQ folgt, dass der Bogen $GQ=\frac{1}{3}GB=PM$ ist; also sind auch die Supplemente dieser Bögen zum Halbkreis, d. h. PE und PQ einander gleich.

Die Catacaustik ist also in der That eine Epicykloide, in der der Radius des Grundkreises und des Erzeugungskreises gleich dem dritten Theil des Radius des reflectirenden Kreises ist, und zwar hat man hier die Specialität der Epicykloide, welche den Namen der Cardioide führt. Die Curve hat mit der Tschirnhaus'schen also gemein, was der Familie der Cykloiden überhaupt zukommt, so namentlich, dass durch ihre Evolution eine ähnliche Curve entsteht. Die andern Bemerkungen, die Bernoulli noch macht, ergeben sich aus der Betrachtung der Figur, so dass das Curvenstück BQ das Vierfache der Geraden GQ ist (weil $4GQ=QG+GB$ ist). Ebenso sieht man leicht, dass die zwischen dem Stück der Catacaustik BQ, der zugehörigen Tangente QG und dem entsprechenden Theile GB des reflectirenden Kreises liegende Fläche $BQGRB$ dreimal so gross als das Segment FGS sein muss; denn betrachtet man die von zwei unendlich nahen einfallenden und von den entsprechenden reflectirten Strahlen gebildeten Dreiecke, so ist das letztere offenbar der dritte Theil des erstern und folglich auch der ganze aus diesen Tangentendreiecken gebildete Raum QGB der dritte Theil des Segments GRB oder das Dreifache des neunmal so kleinen Segmentes GSQ. Die Fläche $EFBRD$ ist demnach das Dreifache des Halbkreises GSP oder ein Drittel des reflectirenden Kreises und die von der ganzen Caustik umschlossene Fläche ist $\frac{2}{3}$ dieses Kreises oder derselbe wird die Curve im Verhältniss von 1 : 2 theilen.

Der wichtige Schritt, den Bernoulli nun weiter auf dem Gebiete der caustischen Linien machte, war der Uebergang zu den durch Brechung entstandenen Curven. Doch werden die analytischen Ausdrücke hier so complicirt, dass sie sich nur auf wenige sehr specielle Fälle wirklich anwenden lassen.

Das Princip, von dem er auch hier wieder ausgeht, ist die Bestimmung der Länge des reflectirten Strahles, und zwar ist die Grundlage dafür die Beziehung, welche zwischen der Summe der Längen eines einfallenden und gebrochenen Strahles und zwischen der entsprechenden Summe für einen unendlich nahe einfallenden Strahl stattfindet und die einfach folgende ist: Wenn das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkls mit $m : n$ bezeichnet wird und die von einem Punkte ausgehenden, unendlich nah an einander auf eine brechende Curve, bezw. e_1 und e_2, sowie die zugehörigen gebrochenen Strahlen b_1 und b_2 genannt werden:

$$\frac{n}{m}e_1 + b_1 = \frac{n}{m}e_2 + b_2$$

Der Beweis ergiebt sich aus der Figur 12: Beschreibt man mit dem einfallenden Strahle AC als Radius den kleinen Bogen CM und entsprechend mit BK den Bogen KL und zieht die Normale NO, so ist der Einfallswinkel $AKN = KCM$ und der Brechungswinkel $BKO = LKC$, folglich ist auch $\sin MCK : \sin SKC = KM : CL = m : n$ oder $CL = \frac{n}{m} KM$.

Daher ist auch $\frac{n}{m} AM + \frac{n}{m} KM$, d. h. $\frac{n}{m} AK = \frac{n}{m} AC + CL$ und $\frac{n}{m} AK + KB = \frac{n}{m} AC + CL + LB = \frac{n}{m} AC + CB$.

Für parallel auffallende Strahlen gilt offenbar dieselbe Beziehung, wenn man die einfallenden Strahlen von einer senkrecht zu ihrer Richtung gezogenen Geraden an rechnet.

Danach ist es nicht schwer, aplanetische Curven zu zeichnen, wie es schon Descartes gethan hatte, und man hat, wenn man sie nach den hier angegebenen Beziehungen construirt, den Vortheil, leicht einzusehen, dass wirklich die von einem Punkte ausgehenden Strahlen durch die Curven wieder in einen Punkt vereinigt werden, während Descartes die Richtigkeit seiner Constructionen nicht beweist.

Da es sich jedoch hier um die caustischen Linien und nicht um aplanetische Curven handelt, so brauche ich auf die Construction der letztern nicht näher einzugehen, sondern will mich nur auf die Bemerkung beschränken, dass die später von Quetelet untersuchten *Caustiques secondaires*, die man als identisch mit den Ovalen des Descartes erkennen wird, auch nach Bernoulli's Methode construirt werden können.

Die Erfolge, die Bernoulli's Untersuchungen der Diacaustiken gehabt haben, sind dagegen nicht sehr hoch anzuschlagen. Man sieht, dass sich durch das Festhalten an dem Princip, zunächst die Länge des gebrochenen Strahles analytisch zu bestimmen und dann die Caustik danach zu construiren, wenig Nutzen für einzelne Fälle ergeben wird. Auch ist mir nicht bekannt, dass später noch Jemand diesen Weg eingeschlagen hätte; vielmehr ist es durch spätere Arbeiten gelungen, die Diacaustiken in einzelnen Fällen als Catacaustiken zu bestimmen oder in anderen Fällen wenigstens eine Evolvente der Diacaustik in brauchbarer Form darzustellen.

Meine Ansicht, dass Bernoulli's Ausdrücke keinen grossen practischen Nutzen haben dürften, wird die Ausführung des Ausdrucks, den er für die Länge des reflectirten Strahles gefunden hat, bestätigen. Derselbe heisst:

$$m^2 dx^2 - n^2 dx^2 + m^2 dy^2 + dy \sqrt{m^2 n^2 dy^2 + m^2 n^2 dx^2 - n^4 dx^2}$$

multiplicirt mit

$$\sqrt{} \left[y^2 + (m^4 y^2 dy^2 + m^2 n^2 y^2 dy^2 + m^2 n^2 y^2 dx^2 - n^4 dx^2 \right.$$
$$+ 2 m^2 y dy . \sqrt{} (m^2 n^2 y^2 dy^2 + m^2 n^2 y^2 dx^2 - n^4 y^2 dx^2))$$
$$\left. : (m^4 d x^2 - 2 m^2 n^2 d x^2 + n^4 d x^2) \right]$$

und das Produckt dividirt durch:

$$[- m^2 y d^2 y - m^2 n y dy d^2 y : \sqrt{} (m^2 dy^2 + m^2 dx^2 - n^2 dx^2)] .$$

Nachdem Bernoulli diesen Ausdruck durch eine sehr langwierige analytische Untersuchung gefunden hat, fügt er denselben die Bemerkung bei: „*Hinc in quavis curva data inveniri potest longitudo radii refracti, substituendo nempe valorem ipsius dx, vel dy et d^2y; nam dx, dy et d^2y, ob curvae datae naturam, sese destruent, et proin orietur longitudo illa in quantitatibus pure algebraicis. Cognita autem illa longitudine, curva caustica construi et determinari potest.*“

Gegen die Richtigkeit dieser Schlüsse — so lange sie auf keinen speciellen Fall angewendet werden — lässt sich nichts einwenden, ob aber nach jenem Ausdruck für „jede beliebige Curve“ ihre Diacaustik construirt werden könne, dürfte um so fraglicher erscheinen, als es Bernoulli selbst nicht gelungen ist, die Anwendung seiner Formeln weiter als auf zwei verhältnissmässig einfache Fälle auszudehnen, bei welchen er allerdings in dem einen Falle (bei der Parabel) die Beschaffenheit der Diacaustik erkannt hat, in dem andern aber beim Kreise mit der Angabe des immerhin noch sehr complicirten Ausdrucks für die Länge des reflectirten Strahles abbricht.

Fassen wir nun die Verdienste Bernoulli's um die Ausbildung der caustischen Theorie noch einmal kurz zusammen, so müssen wirsagen, dass er dieselbe in der That wesentlich weiter geführt hat, als dies vor ihm geschehen war, und namentlich durch Anwendung der Analysis viele interessante Entdeckungen gemacht hat, die vor ihm nicht bekannt gewesen waren. Der Begründer der Lehre von den Brennlinien hatte sich auf die einfachsten Fälle der Reflexion beschränkt; Bernoulli hat die Catacaustiken auch mehrer anderer krummen Linien untersucht und namentlich in dieser Hinsicht auf jene zwei merkwürdigen Curven hingewiesen, welche sowohl durch Evolution ähnliche Curven erzeugen, als auch solche zu ihren Catacaustiken haben, und hatte somit sowohl der von Huygens kurz vorher und dann von verschiedenen Andern ausgebildeten Theorie der Cykloiden einen wichtigen Dienst gethan, als auch nachgewiesen, dass die Curve von Tschirnhaus in ihren Eigenschaften nicht isolirt dasteht, sondern vielmehr als Repräsentantin einer ganzen Familie anzusehen ist. Dann hat er weiter die Theorie der Diacaustiken mit in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen, und wenn, wie wir oben gesehen haben, seine Arbeiten keine bedeutende Ausdehnung der Lehre nach dieser Seite hin zur Folge hatten, so hat er doch das Verdienst immerhin, sehr allgemeine Formeln aufgestellt zu haben; endlich, wenn man darin einen Nutzen finden will, hat er gezeigt, dass eben diese allgemeinen Formeln so complicirt werden, dass sie, um mit einem auf diesem Gebiete sehr verdienten französischen Mathematiker zu reden, auch den unerschrockensten Analytiker entmuthigen können, und dass es sich also um Aufstellung andrer Gesichtspunkte für diese wichtige Theorie handelte, wenn sie weiter gefördert werden sollte.

Verschiedene seiner Zeitgenossen haben sich mit demselben Gegenstande beschäftigt, so sein Bruder Jacob Bernoulli, de la Hire, Hôpital u. A. Leider konnte ich mir jedoch die Schriften dieser Mathematiker nicht verschaffen und kann sie daher hier nur nennen; übrigens scheint es nach zerstreuten Bemerkungen in den verschiedenen neuern Arbeiten auch den genannten Bearbeitern nicht gelungen zu sein, allgemeinere Gesichtspunkte über die Behandlungsweise jener Curven aufzustellen, sondern sie scheinen meistens nur einzelne Fälle in ähnlicher Weise, wie Tschirnhaus und Joh. Bernoulli, behandelt zu haben.

Mit diesen Arbeiten schliesst die erste Entwicklungsperiode der Theorie ab: die Brennlinien verschiedener einzelner Curven waren so genau untersucht, dass in dieser Hinsicht nicht vielmehr geschehen konnte und in der That auch nicht viel mehr geschehen ist; denn wenn auch von Spätern andere Methoden angewandt wurden, so führen dieselben doch meist ebenso, wie diejenige Bernoulli's, zu so complicirten Ausdrücken, dass sie sich im Einzelnen nicht viel weiter anwenden lassen, als auf jene einfachen Fälle, die eben schon früher untersucht waren.

Dagegen führten die neuern Untersuchungen zu sehr interessanten Beziehungen zwischen den Caustiken und gewissen andern Curven, deren Entstehungsart ebenfalls sehr einfach ist und die sich namentlich auch bequem von der Ebene auf den Raum übertragen lassen. Doch war eine lange Zeit nöthig, um die Endresultate zu erzielen, obwohl diese äusserst einfach waren und auf weit kürzerem Wege hätten gefunden werden können.

Die Zeit der Ausbildung dieser allgemeinen Theorie der caustischen Linien und Flächen lässt sich daher jener ersten Periode, in der es sich lediglich um die Untersuchung einzelner Brennlinien handelte, als eine zweite gegenüberstellen; doch schliesst sich diese nicht unmittelbar an die erste an, sondern es liegt zwischen ihnen fasst die ganze zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts, in der für die Ausbildung der Lehre wenig oder nichts geschah; es scheint, dass sich die Mathematiker dieser Zeit durch die Schwierigkeit der Rechnungen, zu denen die früheren Untersuchungen geführt hatten, von der Behandlung dieses Gegenstandes abschrecken liessen.

Erst im Anfange dieses Jahrhunderts wurden die Untersuchungen wieder aufgenommen und neue fruchtbare Principien für dieselben aufgefunden. An der Spitze dieser Entwicklungsperiode steht eine grosse analytische Untersuchung von Malus, die im Jahre 1808 in dem *Journal de l'Ecole polytechnique* erschien und die Aufmerksamkeit der Mathematiker von neuem dem fast vergessenen Gebiete zuführte.

Ich kann hier natürlich nicht die ganze sehr ausführliche Rechnung besprechen, welche Malus in dieser Arbeit durchgeführt hat, sondern will nur kurz die Resultate derselben anführen und deren Richtigkeit prüfen. Er geht davon aus, Beziehungen zwischen geraden Linien aufzusuchen, die nach irgend einem analytisch ausgedrückten Gesetze von allen Punkten einer krummen Fläche ausgehen. Er findet nun, dass es zwei Richtungen auf dieser Fläche giebt, nach denen man zu einem unendlich nahen Punkte fortgehen muss, um zu erreichen, dass der Strahl, welcher von diesem unendlich nahen Punkte ausgeht, den von dem ersten Punkte ausgehenden schneidet; ebenso kann man von dem zweiten Punkte nach einem dritten fortgehen, so dass der von hier ausgehende Strahl den zweiten trifft u. s. f. Dadurch erhält man für jeden Punkt der Fläche zwei Curven (s) und (s'), welche die Eigenschaft besitzen, dass die von den auf ihnen liegenden Punkten ausgehenden Strahlen sich successive schneiden. Diese Geraden bilden demnach zwei developpable Flächen, deren Wendungscurven durch die successiven Durchschnittspunkte der Geraden gehen. Der Strahl, der von dem ursprünglich angenommenen Punkte $x'\ y'\ z'$ ausgeht, gehört also zwei developpablen Flächen an und bildet deren Durchschnitt. Da dasselbe für jeden andern von der krummen Oberfläche ausgehenden Strahl gilt, so hat man den allgemeinen Satz: Wenn ein System von geraden Linien nach demselben analytischen Gesetze von allen Punkten einer Oberfläche ausgeht, so kann dieses System als der geometrische Ort des Durchschnitts zweier Systeme von developpablen Flächen betrachtet werden. Für den Winkel, unter dem sich die developpablen Flächen schneiden, gibt er einen analytischen Ausdruck an; dieser muss offenbar eine Function der Coordinaten des Punkts der krummen Fläche und derjenigen Grössen sein, welche jenes analytische Gesetz ausdrücken soll. Wird der Cosinus dieses Winkels $=0$, so stehn die developpablen Flächen senkrecht aufeinander. Gehn nun die Strahlen von einem Punkte aus, die von einer krummen Oberfläche reflectirt oder gebrochen werden, so findet für die Richtung der reflectirten oder gebrochenen Strahlen ein, analytisch ausdrückbares, für alle Punkte der krummen Fläche geltendes Gesetz statt und finden deshalb die obigen Schlüsse ihre Anwendung. Es wird nun für diesen Fall, wie die Analysis ergibt, für jeden Punkt der Fläche der Cosinus jenes Winkels $=0$, d. h.: Werden Strahlen, die von einem Punkte ausgehn, von einer beliebigen Fläche reflectirt oder gebrochen, so können die reflectirten oder gebrochenen Strahlen als der Durchschnittspunkt zweier sich unter rechtem Winkel schneidenden Systeme von developpablen Flächen betrachtet werden.

Dieses merkwürdige Gesetz weist Malus auch für den Fall nach, dass der strahlende Punkt in unendlicher Entfernung liegt, leugnet aber die Gültigkeit desselben für wiederholte Reflexionen oder Brechungen, während es sich, wie Dupin zuerst nachgewiesen hat, ganz allgemein so aussprechen lässt: Lässt sich ein System von Lichtstrahlen als der Ort des Durchschnitts zweier Systeme sich rechtwinklig schneidender developpabler Flächen betrachten — was immer der Fall ist, wenn die Strahlen zu einer und derselben Fläche normal sind — dann verliert es diese Eigenschaft durch keine Brechung oder Reflexion.

Malus dagegen hatte gefunden, dass, wenn jenes Strahlen-System einer zweiten Brechung oder Reflexion unterworfen würde, so lasse es sich zwar ebenfalls als Ort der Durchnitte zweier Systeme von developpablen Flächen betrachten; doch schnitten sich diese dann im Allgemeinen nicht mehr unter rechten Winkeln. Ich habe mich bemüht, den Grund dieses Irrthums aufzusuchen und glaube denselben in einem Satze gefunden zu haben, der sich auf der S. 86 seiner Abhandlung in dem XIV. Band des *Journal de l'Ecole polytechnique* findet. Er sagt dort: Wenn die Lichtstrahlen, die von einem Punkte ausgehn, auf eine brechende Fläche F treffen, so können die gebrochenen Strahlen als der Ort des Durchschnitts zweier Systeme S, S' von developpablen Flächen betrachtet werden, welche die brechende Fläche F in zwei Reihen von Curven s, s' schneiden und bezeichnet man mit C, C' die Systeme der konischen Flächen, welche durch die Folge der einfallenden Strahlen entstehn, die nach ihrer Brechung jene developpablen Flächen S, S' bilden: dann sind jene developpablen Flächen S, S' zu einander senkrecht, woraus man schliessen könne, dass die konischen Flächen C, C' sich unter einem veränderlichen Winkel schneiden. Aus diesem Schlusse wird dann später abgeleitet, dass die Strahlen nach wiederholter Brechung nicht mehr als Durchschnitt zu einander senkrechter developpabler Flächen zu betrachten seien. Der Schluss, dass sich die konischen Flächen C, C' unter verändertem Winkel schnitten, ist jedoch falsch, wie sich leicht zeigen lässt, wenn man den vorher angegebenen Satz von Dupin als richtig erkannt hat; denn nimmt man letzteren als erwiesen an, so braucht man nur die Strahlen, welche, von einem Punkt ausgehend, durch eine krumme Fläche gebrochen werden und dann als Durchschnitt zu einander senkrechter Systeme von developpablen Flächen angesehen werden können, rückwärts zu verfolgen: Wenn sie in der entgegengesetzten Richtung auf die Oberfläche träfen, als diejenige ist, welche sie durch die Brechung erhalten, so würden sie offenbar nach einer Brechung in dem angegebenen entgegengesetzten Sinne wieder in dem Punkte vereinigt werden. Da nun diese Strahlen nach ihrer Brechung ebenfalls als Durchschnitte sich rechtwinklig schneidender developpabler Flächen anzusehn wären, so würden diese developpablen Flächen offenbar in diesem Falle jene konischen Flächen C, C' sein und auch diese müssen daher in allen Fällen ebenfalls zu einander senkrecht sein — die Richtigkeit des Dupin'schen Satzes vorausgesetzt. Da sich der von Dupin gegebene allgemeine Beweis jedoch auf eine der Optik ferner liegende Betrachtung gründet und sich der davon unabhängige Beweis nur auf die Reflexion bezieht, so will ich den Beweis seines Satzes so lange versparen, bis ich zu dem allgemeinen Theorem von Gergonne gekommen sein werde, von dem das Dupin'sche sich dann nur als ein veränderter Ausdruck herausstellen wird.

Die Malus'sche Arbeit hat jedoch trotz dieses Irrthums das Verdienst, ein für die allgemeine Theorie sehr brauchbares Princip gewonnen zu haben; die Anwendung auf einzelne Fälle hat freilich grosse Schwierigkeiten durch die Complicirtheit der Formeln, so dass sie Malus selbst nur auf Rotationsflächen angewandt hat, wodurch eben nicht viel neue Resultate gewonnen sind, da sich diese meistens ganz einfach aus den schon bekannten Caustiken für ebene Curven ableiten lassen.

Der Malus'sche Satz in der von Dupin gegebenen Form kann nun auch so ausgedrückt werden: Wenn Strahlen normal zu ein und derselben Fläche sind, so haben sie auch nach der Brechung oder Reflexion diese Eigenschaft, nämlich zu einer andern Fläche normal zu sein. Die Bestimmung dieser s. g. orthogonalen Transversalfläche für die gebrochenen Strahlen war nun die Aufgabe für die weitere Ausbildung der caustischen Theorie. Schon vor Dupin's Berichtigung des Malus'schen Theorems hatte Gergonne eine Entdeckung gemacht, die hauptsächlich zur Kenntniss jener Fläche die mittelbare Veranlassung gegeben hat. Er untersuchte nämlich in dem 11. Band der von ihm herausgegebenen *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, der im Jahre 1820 erschien — Dupin veröffentlichte seine Arbeit erst im Jahre 1822 — den Ort, an welchem ein leuchtender Punkt für ein in einem andern, von dem des Punktes durch eine Ebene geschiedenen Medium befindliches Auge zu liegen scheint, also z. B. ein Punkt im Wasser für ein in der Luft befindliches Auge. Der Ort ist offenbar für jede Stellung des Auges verschieden und stellt in der Aufeinanderfolge für die verschiedenen Stellungen des Auges die successiven Durchschnittspunkte benachbarter, von dem Punkt ausgehender Strahlen, d. h. die Diacaustik vor, welche durch die Brechung von Strahlen, die von einem Punkte ausgehn und auf eine Ebene treffen, gebildet wird. Er konnte seine Untersuchung auf die in einer durch den Punkt und das Auge gehende, zur Wasserfläche senkrechte Ebene beschränken und fand, dass die Curve die Evolute einer Ellipse ist. Umgekehrt fand er, dass die Diacaustik für den Uebergang in ein dichteres Mittel die Evolute einer Hyperbel ist. Die analytische Ableitung dieses Resultats kann ich hier übergehn, da sich dasselbe meist in den Lehrbüchern der Analysis als Beispiel für einhüllende Curven findet. (S. z. B. Schlömilch's Comp. d. An. I. S. 132.) Ich werde daher darauf zurückkommen, wenn ich meine Darstellung bis zum Endresultate der Gergonne'schen Untersuchungen durchgeführt haben werde. Gergonne wurde durch die Entdeckung auf die Vermuthung gebracht, dass sich allgemein die Caustiken als Evoluten einfacherer Linien darstellen könnten, eine Vermuthung, die sich vollkommen bestätigt hat.

In einer folgenden Abhandlung von Gergonne (Bd. 14 seiner Annalen) weist er das Malus'sche und das Dupin'sche Theorem analytisch nach und macht einige Zusätze, die leicht daraus folgen, so z. B., dass wenn ein System von Strahlen, die senkrecht zu derselben Fläche sind, verschiedene Brechungen oder Reflexionen erfährt, statt dieser eine einzige Brechung oder Reflexion substituirt werden kann, welche jenen Strahlen dieselbe Richtung ertheilt, die sie nach den wiederholten Brechungen und Reflexionen erhalten.

Die vorher erwähnte Vermuthung Gergonne's scheint auch einige andere Mathematiker veranlasst zu haben, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, und so bringt namentlich schon der 15. Band der Annalen (1824) eine Untersuchung von Sturm, worin er zunächst einen geometrischen Beweis jenes von Gergonne gefundenen Satzes, dass die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nach ihrer Brechung durch eine Gerade auf einem Kegelschnitt senkrecht stehe, giebt und dann ähnliche Untersuchungen für die Diacaustik des Kreises anstellt.

Sturm's Beweis des Gergonne'schen Satzes ist folgender: Ist (Fig. 13) A der leuchtende Punkt, B der ihm in Bezug auf die brechende

Gerade CD gegenüberliegende Punkt, AJ ein einfallender, KJL der gebrochene Strahl, so lege man einen Kreis durch AJB. Dann ist der Einfallswinkel $= AJF$, der Brechungswinkel $= LJF$. Es ist nun zu unterscheiden, ob der Brechungswinkel kleiner oder grösser ist, als der Einfallswinkel. Im ersten Fall (Fig. 13) sei $\frac{a}{c}$ das Brechungsverhältniss, wo also $a > c$. Trägt man nun auf MB das Stück $MG = MA$ ab, dann sind die gleichschenkligen Dreiecke AGM und AJB ähnlich, also Winkel $GAM = BAJ$ und also auch Winkel $JAM = BAG$. Die Dreiecke BAG und JAM sind folglich ähnlich, also $BG : AB = JM : JA = c : a =$ const. Der Punkt M bewegt sich also, da $BG = BM = AM$ constant ist, auf einer Hyperbel. Der gebrochene Strahl JM steht aber senkrecht auf dieser Curve, weil er mit den Radien vectoren Winkel bildet, die sich zu 180° ergänzen ($BMJ = BAJ = ABJ = 180^0 - AMJ$). In ähnlicher einfacher Weise beweist Sturm, dass, wenn der Brechungswinkel grösser als der Einfallswinkel wird, die gebrochenen Strahlen auf einer Ellipse senkrecht stehn.

Bei der Anwendung dieser Betrachtungsweise auf die Diacaustik des Kreises für Strahlen, die von einem Punkte ausgehn, führt Sturm mit grossem Vortheil einen Punkt B von der Eigenschaft ein, dass $CB . CA = CJ^2$ ist, und der also ausserhalb oder innerhalb des Kreises fällt, je nachdem der leuchtende Punkt innerhalb oder ausserhalb desselben liegt. Ist nun AJ ein einfallender Strahl, so legt man durch AJB einen Kreis, an welchen CJ also eine Tangente ist. Der Punkt M, wo der gebrochene Strahl den Hülfskreis zum zweitenmale schneidet, kann dann auf jeden der 3 Bögen fallen, die durch die Punkte A, J und B gebildet werden. Sturm untersucht diese Fälle getrennt; ich gebe hier als Beispiel nur den Fall, wo M auf den Bogen AB fällt. Ist das Brechungsverhältniss $\frac{a}{c}$, so ist $\frac{AJ}{JM} = \frac{a}{c}$. Verlängert man nun BM, so dass $MG : MA = JB : JA$ wird, und zieht AG, dann sind die Dreiecke AJB und AMG ähnlich, weil sie einen gleichen Winkel ($AMG =$ Suppl. $BMA = BJA$) zwischen proportionalen Seiten haben. Folglich ist Winkel $MAG = JAB$ und also Winkel $BAG = JAM$. Die Dreiecke BAG und JAM sind daher ähnlich und geben $BA : BG = JA : JM = a : c$. Folglich ist BG constant $= BM + MG = BM + \frac{b}{a}\ MA$,

wenn $\frac{b}{a} = \frac{MG}{AM} = \frac{JB}{JA} = \frac{BC}{CJ}$ gesetzt wird.

Die Gleichung für BG gibt auch $a . MB + b . MA = c . AB$ (weil $BG . a = AB . c$; denn $BG : AB = JM : JA = c : a$). Der Ort des Punktes M ist also eine Curve, für die die Summe der Producte aus den Radien vectoren und den Constanten a und b constant ist.

Dass der gebrochene Strahl JM senkrecht zu dieser Curve ist, beweist

Sturm vermittelst eines der Mechanik entlehnten Satzes, ohne der Differentialrechnung zu bedürfen. Leichter kann man den Beweis vermittelst derselben führen, wie folgt: Sei $AM = r$, $BM = r'$ und ds das Bogendifferential, so hat man $br + ar' = \text{Const}$; $b\frac{dr}{ds} + a\frac{dr'}{ds} = 0$; $\frac{dr}{ds}$ und $\frac{dr'}{ds}$ sind aber, wie leicht zu sehen, die Sinus der Winkel, welche die Normale mit den Radien vectoren macht. Diese verhalten sich also wie $a : -b$, wenn man die Winkel nach derselben Seite der Normale, oder wie $a : b$, wenn man sie nach verschiedenen Seiten derselben rechnet. Sie verhalten sich also, wie die Sinus der Winkel, welche der Strahl JM mit den Radien vectoren macht, und es muss demnach die Normale mit dem Strahle zusammenfallen.

Fällt der Punkt M auf den Bogen AJ, dann findet Sturm den Ort dieses Punkts in analoger Weise ausgedrückt durch die Gleichung

$$BG = MB - \frac{b}{a} MA \text{ oder } a . MB - b . MA = c . AB,$$

und endlich, wenn M auf JB fällt, hat man

$$\frac{b}{a} MA - MB = BG \text{ oder } b . MA - a . MB = c . AB.$$

Der Beweis, dass der gebrochene Strahl senkrecht auf diesen Curven steht, lässt sich ebenfalls ganz analog dem vorigen führen.

Sturm stellt dann dar, wie die Art dieser Curven von der Lage des leuchtenden Punktes und dem Werth $\frac{c}{a}$ des Brechungsverhältnisses abhängt, welches letztere auch $= -1$ sein kann, so dass die Brechung in Reflexion übergeht.

Alles zusammengefasst, hat man den Satz: Die Caustik des Kreises für Strahlen, die von einem Punkte ausgehn, ist die Evolute einer Curve, für welche die Summe oder Differenz der Producte aus den Radien vectoren und zwei constanten Grössen selbst eine constante Grösse ist. Damit sind diese Caustiken in der That auf die Evoluten einfacherer Curven, denen eine Gleichung des vierten Grades entspricht, zurückgeführt, und diesen letzteren Curven begegnen wir hier schon zum zweitenmale; denn sie stimmen offenbar mit den Ovalen des Descartes überein, welche dieser u. A., namentlich Newton und Bernoulli als aplanetische Linien bestimmt hatten, und es kommen also denselben Curven zwei gleich wichtige und merkwürdige optische Eigenschaften zu.

Zu gleicher Zeit, wie Sturm, beschäftigte sich auch Quetelet mit der Untersuchung der Evolventen der Brennlinien. Hinsichtlich der Caustiken des Kreises war er zu ähnlichen Resultaten, wie Sturm, jedoch auf anderem Wege gelangt. Ihm gebühret das Verdienst, die Natur jener Evolventen, oder der *Caustiques secondaires*, wie er sie nennt, zuerst genauer untersucht und namentlich die auch von Sturm schon angedeuteten Analogien derselben mit Kegelschnitten näher bestimmt zu haben. Dass er zunächst ebenfalls gefunden hat, dass die Catacaustiken und Diacaustiken für die gerade Linie auf Kegelschnitten senkrecht stehn, genüge hier erwähnt zu werden, da diese Entdeckung nicht neu ist und auch der Beweis keine Vorzüge vor dem Sturm'schen darbietet.

Neu ist dagegen die Betrachtung jener Evoluten als einhüllender Curven von Kreisen. Er zeigt diese Beziehung zuerst an der Catacaustik des Kreises und sagt darüber: Die Brennlinie eines Kreises für Strahlen, welche von einem Punkte ausgehn, steht senkrecht auf der Enveloppe derjenigen Kreise, deren Mittelpunkte auf der reflectirenden Kreisperipherie liegen und deren Peripherien beständig durch den leuchtenden Punkt gehen. Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich am leichtesten, wenn man die Evolvente der Brennlinie, wie oben, als den Ort des Bildes des leuchtenden Punktes auffasst; da das Bild dieses Punktes demselben in Bezug auf Tangente des Kreises symmetrisch gegenüberliegt, so kann man offenbar für jeden Punkt des reflectirenden Kreises einen Kreis construiren, dessen Mittelpunkt auf der reflectirenden Kreisperipherie liegt und dessen Peripherie durch den leuchtenden Punkt und sein entsprechendes Bild hindurchgeht; die unendliche Zahl dieser Kreise wird aber von der Curve umhüllt, welche den Ort des Bildes des leuchtenden Punktes bildet (oder auch die Form der reflectirtenden Welle darstellt) und von der die reflectirten Strahlen also senkrecht auszugehen scheinen.

Quetelet selbst bedient sich jedoch dieses Beweises erst in einer spätern Abhandlung (vom Jahre 1829, während die erste aus 1825 ist) und gibt in der erstern einen speciellern Beweis, so dass derjenige für die allgemeine Form seines Satzes nicht daraus abgeleitet werden kann. Dieser allgemeine Satz heisst aber:

Gehen Strahlen von einem Punkte aus und treffen auf eine brechende Curve, so stehn sie nach der Brechung senkrecht auf der Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve liegen und deren Radien zu den Entfernungen der Mittelpunkte von dem leuchtenden Punkte in dem constanten Verhältnisse stehen, dass der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels bildet.

Es ist dies also derselbe Satz, den wir schon im Anfange dieser Darstellung aus den Principien der Undulationstheorie abgeleitet haben. Die Präcisirung der Form dieses Satzes, der sich in der obigen Fassung offenbar nicht auf den Fall anwenden lässt, wo der leuchtende Punkt in unendlicher Entfernung liegt, verdanken wir — ausser Quetelet selbst — namentlich Gergonne und Sarrus.

Eine merkwürdige Beziehung zwischen den Evolventen der Brennlinien und den Kegelschnitten findet sich dann weiter in Quetelet's Abhandlung angegeben: Projicirt man nämlich eine *Caustique secondaire* auf eine Kugeloberfläche, so kann diese Projection auf eine zweite Ebene so projicirt werden, dass diese zweite Projection ein Kegelschnitt wird. Diese merkwürdige Entdeckung ist um so werthvoller, als sie in ganz einfacher Weise, nur durch geschickte Combination einiger bekannter Sätze aus der Projectionslehre und über das Pascal'sche Sechseck abgeleitet ist. Die aus der Projectionslehre benutzten Sätze sind hauptsächlich die beiden folgenden, die man in den betreffenden Lehrbüchern bewiesen findet. (S. z. B. Heis, Stereometrie, Anhang V.) Erstens: Jeder Kreis projicirt sich stereographisch auf die Kugel als Kreis, und zweitens: Der Winkel, den zwei Linien in der Ebene bilden, ändert sich nicht durch die Projection auf die Kugel.

Ist L ein leuchtender Punkt, und werden die Strahlen von einer Kreisperipherie reflectirt, so entsteht eine der schon mehrfach besprochenen *Caustiques secondaires*, die man also auch als Bilder des Punktes L in Bezug auf die Tangenten für alle Punkte des Kreises auffassen kann. Nimmt man nun auf der *Caustique secondaire* 6 Punkte an, so entspricht jedem derselben eine Tangente des Kreises, und die z. B. einem Punkte A entsprechende Tangente ist in allen ihren Punkten gleichweit von dem Punkte A und dem leuchtenden Punkte L entfernt. Ebenso die einem zweiten Punkte B entsprechende Tangente von diesem Punkte und von L; und folglich ist der Durchschnitt a der beiden Tangenten von A, B und L gleichweit entfernt, so dass man um diesen Punkt a einen Kreis beschreiben kann, der durch L, A und B geht und den Quetelet — soweit er zwischen A und B liegt — die *Corde corrélative* dieser Punkte nennt; den Mittelpunkt desselben nennt er *Centre corrélatif*. Ebenso seien nun für je zwei der übrigen Punkte die *Centres corrélatifs* gefunden, so dass den Punkten

$$\begin{array}{llllll} A \text{ u. } B; & B \text{ u. } C; & C \text{ u } D; & D \text{ u. } E; & E \text{ u. } F; & F \text{ u. } A \text{ entsprechen} \\ a; & b; & c; & d; & e; & f, \end{array}$$

so sind diese 6 Punkte a, b, c, d, e und f die Eckpunkte eines dem Kreise umschriebenen Sechsecks. Die Diagonalen ad, be, cf desselben schneiden sich dann nach dem Pascal'schen Satze in einem einzigen Punkte, der m heissen möge. Die beiden *Cordes corrélatives* AB und DE haben dann ihre *Centre* auf derselben Diagonale ad. Die Kreisbögen schneiden sich nach ihrer Definition in dem leuchenden Punkte L und also noch in einem zweiten Punkte R, der dem Punkte L in Bezug auf die Diagonale symmetrisch gegenüberliegt. Daher stehn auch diese beiden Punkte gleichweit von dem Durchschnittspunkte m der Diagonale ad mit den beiden andern Diagonalen be und ef ab und man hat $mL = mR$. Ist entsprechend R' der zweite Durchschnittspunkt der *Cordes corrélatives* BC und EF, so hat man ebenso $mL = mR'$, und wenn endlich R'' der zweite Durchschnittspunkt der *Cordes* CD, FA ist, so ist auch $mL = mR''$. Legt man also durch L einen Kreis um m, so geht dieser auch durch R, R' und R''. In anderen Worten: Wenn man um eine *Caustique secondaire* ein Sechseck aus *Cordes corrélatives* beschreibt, so schneiden sich je zwei gegenüberliegende Seiten desselben, genugsam verlängert, in drei auf demselben Kreise mit L liegenden Punkten. Projicirt man nun die *Cautique* nebst dem Sechseck auf eine ihre Ebene berührende Kugel (den dem Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt als Projectionscentrum genommen), dann projicirt sich jeder der genannten Kreise als Kreis und diese gehn alle durch die Projection des Punktes L. Je zwei *Cordes corrélatives* schneiden sich in einem Punkt und die drei Durchschnittsspunkte liegen mit der Projection von L auf demselben Kreise. Nimmt man die Projection von L als neues Projectionscentrum und projicirt auf die diesem neuen Centrum entsprechende Ebene, dann projiciren sich alle durch das Centrum gehende Kreise als gerade Linien: folglich projiciren sich die sechs *Cordes corrélatives* nun als ein der Projection der *Caustique* eingeschriebenes Sechseck; der Kreis aber, der auch auf der Kugel durch die Projectionen der Punkte R, R' und R'' geht, projicirt sich ebenfalls als gerade Linie, d. h. die neuen Projectionen der Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegender Seiten des in die Projection der *Caustique* beschriebenen Sechsecks liegen auf einer geraden Linie. Diese Eigenschaft kommt aber nur den Kegelschnitten zu und die neue Projection *Caustique secondaire* muss daher ein solcher sein.

Die Formeln, welche Quetelet für die Rectification und Quadratur seiner *Caustiques secondaires* angegeben hat, zeichnen sich durch grosse Einfachheit und durch verschiedene interessante Beziehungen zu den entsprechenden Ausdrücken für Kegelschnitte aus.

Die Identität dieser Curven mit den Ovalen des Descartes, auf die auch Sturm hingewiesen hatte, weist dann Quetelet in einer spätern Abhandlung noch besonders nach.

In der weitern Entwicklung der Theorie der Brennlinien verdanken wir namentlich Gergonne eine Verallgemeinerung und Berichtigung des von Quetelet aufgestellten Satzes: Die Brennlinien für irgend eine Curve und für Strahlen, die von einem Punkte ausgehn, ist die Evolute der einhüllenden Curve aller Kreise, deren Mittelpunkt auf der brechenden (oder reflectirenden) Curve liegt und deren Radius in dem constanten Brechungsverhältnisse zu der Entfernung des Mittelpunkts zu dem leuchtenden Punkte steht.

Es wurde schon oben darauf hingewiesen, dass der Quetelet'sche Satz keine Anwendung findet, wenn die Entfernung des leuchtenden Punktes als unendlich gross und also die einfallenden Strahlen als parallel angesehn werden müssen.

Sarrus gab deshalb für diesen Fall folgenden Satz an, den er aus der Undulationstheorie ableiten wollte, und der sich als vollkommen richtig erwiesen hat:

„Die Caustik für irgend eine Curve und für parallel einfallende Strahlen ist die Evolute der Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf der gegebenen Curve liegen und deren Radien zu den Entfernungen der Mittelpunkte von einer beliebig angenommenen zu den einfallenden Strahlen senkrechten Geraden in dem constanten Brechungsverhältnisse stehen, beziehungsweise ihnen gleich sind (ersteres für die Brechung, letzteres für die Reflexion)."

Es liegt nun nahe, den Quetelet'schen und den Sarrus'schen Satz so zu combiniren, dass man ein Resultat gewinnt, welches sowohl für divergente, als für parallele Strahlen gilt, und dies gelang Gergonne dadurch, dass er im ersten Falle die Radien jener Kreise, um deren Enveloppe es sich handelt, nicht zu der Entfernung der Mittelpunkte von dem leuchten Punkte selbst in dem constanten Verhältnisse stehen lässt, sondern vielmehr zu der Entfernung dieser Mittelpunkte von einer mit beliebigem Radius um den leuchtenden Punkt beschriebenen Kreisperipherie. Setzt man dann den Radius dieses festen Kreises $=0$, so hat man den Quetelet'schen Satz für convergente, setzt man ihn $=\infty$, so hat man den Sarrus'schen Satz für parallele Strahlen.

Weiter lag nun die Vermuthung nahe, dass vielleicht die Curve, zu der die einfallenden Strahlen senkrecht sein sollen, keine Kreisperipherie zu sein brauchte, sondern möglicherweise ganz beliebig angenommen werden dürfe. Diese Vermuthung lag um so näher, als Malus und Dupin schon früher, wie wir oben besprochen haben, nachgewiesen hatten, dass die Strahlen, welche normal zu einer und derselben Fläche stehen, diese Eigenschaft weder durch eine Brechung, noch durch eine Reflexion einbüssen können.

Gergonne untersuchte die Frage analytisch und fand, dass sie in der That zu bejahen sei, so dass er den Satz nun so aussprechen konnte:

„Die Caustik für irgend eine brechende (oder reflectirende) ebene Curve und für Strahlen, welche normal zu einer beliebigen, in derselben Ebene gelegenen Curve sind, ist die Evolute der Enveloppe aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der brechenden (reflectirenden) Curve liegen und deren Radien zu den Entfernungen der Mittelpunkte von jener Curve, auf denen die einfallenden Strahlen senkrecht stehen, in dem constanten Brechungsverhältnisse stehen, beziehungsweise ihnen gleich sind" (ersteres für Brechung, letzteres für Reflexion). Analytisch bewiesen wurde also dieser Satz von Gergonne selbst (*Annales*, T. XV, p. 354 flg.) und musste somit als richtig gelten; doch blieb ein einfacher geometrischer Beweis noch zu wünschen übrig.

Auch sei hier noch bemerkt, dass der Ausdruck etwas einfacher wird, wenn man auf der brechenden Curve den Mittelpunkt zweier concentrischer Kreise sich bewegen lässt, deren Radien in dem bewussten Verhältnisse stehen. Dann wird die Enveloppe des neu angenommenen Kreises offenbar jene Curve selbst, zu der die einfallenden Strahlen senkrecht stehen.

In einer weiteren Untersuchung überträgt Gergonne seinen Satz auf den Raum und bringt damit die allgemeine Theorie der caustischen Linien und Flächen zu der Höhe, die sie überhaupt bis jetzt erreicht hat. Das Resultat seiner analytischen Untersuchungen (Ann. XVI, p. 13) heisst nun, wenn wir zur Vereinfachung, wie oben zwei concentrische Kreise, jetzt zwei concentrische Kugeln annehmen und uns die Bezeichnung „*Surface trajectoire orthogonale*“ hier beizubehalten erlauben, sowie auch die Theoreme für die Brechung und die Reflexion, wie oben, in eins zusammenziehen, folgendermassen:

„Fallen Strahlen, welche auf einer beliebigen Fläche senkrecht stehen, auf eine brechende (reflectirende) Fläche, so denke man sich auf dieser den gemeinschaftlichen Mittelpunkt zweier concentrischen Kugeln, deren Radien in dem constanten Brechungsverhältnisse stehen, sich so bewegen, dass die eine Kugel fortwährend jene *surface trajectoire orthogonale* der einfallenden Strahlen berührt, dann ist die Enveloppe der anderen Kugeln eine ebensolche *surface trajectoire orthogonale* für die gebrochenen (reflectirten) Strahlen.“

Wie das Theorem speciell für Reflexion, und für parallele und für convergente Strahlen sich gestaltet, kann man mit der grössten Leichtigkeit daraus ableiten, ebenso die entsprechenden Sätze für die Ebene daraus bilden.

Es blieb nur noch ein einfacher geometrischer Beweis dafür zu wünschen. Ein solcher war bereits von Dupin („*Application de géométrie*“ Seite 195) für den speciellen Fall der Reflexion gegeben. Ebenso hatte bald darauf Timmermanns einen elementaren Beweis für ebene Curven gegeben (ehe die Sätze auf den Raum ausgedehnt waren) in der „*Corresp. math. et physique*“, T. 1 p. 336. Diesen konnte Gergonne dann ziemlich leicht auf den Raum ausdehnen und wir lassen hier denselben, wie ihn Gergonne giebt, folgen (Ann. XVI, 307):

Nimmt man zwei feste krumme Flächen an und denkt zwei concentrische Kugeln sich so bewegend, dass eine derselben immer die eine, die andere die andere feste Fläche berührt und deren Radien ein constantes Verhältniss haben, so wird der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Kugeln dann eine gewisse Fläche beschreiben, deren Beziehung zu den festen Flächen nachzuweisen ist. Denkt man sich zunächst die beiden letzteren als zwei sich schneidende Ebenen, so kann man durch deren Durchschnitt und das Centrum der Kugeln in einer beliebigen Lage eine dritte Ebene legen. Man sieht nun leicht, dass, wenn man von einem beliebigen andern Punkte dieser dritten Ebene Perpendikel auf die festen Ebenen fällt, diese sich ebenso verhalten, wie die Radien der Kugeln in der ersten Lage. Daher kann jeder Punkt der dritten Ebene als Mittelpunkt zweier Kugeln betrachtet werden, die jener Bedingung genügen, d. h. der Ort dieser Mittelpunkte ist für die zwei festen Ebenen eine durch ihren Durchschnitt gehende Ebene.

Nimmt man nun statt der festen Ebenen zwei krumme Flächen an und ist M ein Punkt der Mittelpunktsfläche der concentrischen Kugeln, P und P_1 die entsprechenden Punkte der Flächen F und F_1, in denen diese Flächen von den aus M auf sie gefällten Perpendikeln getroffen werden, dann denke man sich in den Punkten M, P und P_1 die Berührungsebenen an die resp. Flächen gezogen; dann wird man, statt auf der Mittelpunktsfläche zu unendlich nahen Punkten fortzugehen, auf der entsprechenden Berührungsebene fortgehen können, damit die von diesen Punkten auf die Flächen F und F_1 (beziehungsweise deren Berührungsebenen P und P_1) gefällten Perpendikel in dem constanten Verhältnisse der Perpendikel MP und MP_1 bleiben. Also gilt auch für diese Punkte dasselbe, wie oben, nämlich die Perpendikel auf die Flächen F und F_1 können als einfallende und gebrochene Strahlen, die zu jenen Flächen senkrecht sind, betrachtet werden; damit ist dann also der Satz bewiesen, dass, wenn jene Mittelpunktsfläche eine brechende Oberfläche darstellt, die Enveloppe der Kugeln die zu den einfallenden, beziehungsweise den gebrochenen Strahlen senkrechten Flächen sind.

Es bliebe nun noch übrig, die physikalische Bedeutung der hier vorkommenden einhüllenden Flächen zu untersuchen, beziehungsweise die Richtigkeit des obigen Satzes aus einer einfachen physikalischen Betrachtung abzuleiten.

Die Fläche, zu der die einfallenden Strahlen sämmtlich senkrecht sind, bestimmt die Form der Lichtwelle, welche durch die Strahlen, die gleichzeitig aus jener Fläche ausfahren, bestimmt wird. Denn wenn die Fläche gleichzeitig in allen ihren Punkten zu leuchten anfängt, so bildet sich um jeden dieser Punkte eine kugelförmige Elementarwelle, und aus der Interferenz dieser Elementarwellen entsteht, wenn sich das Licht gleichmässig fortpflanzt, für jeden bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Wellenfläche, welche die Eigenschaft hat, dass alle ihre Punkte von jener leuchtenden Fläche gleichweit abstehen; dass sie also von derselben Form, wie diese ist, und dass alle Strahlen, die auf der leuchtenden Fläche senkrecht stehen, auch auf der Wellenfläche senkrecht sind. Es kann daher zur Bestimmung der Richtungen der einfallenden Strahlen statt der ersteren Fläche auch jede beliebige solche Wellenfläche substituirt werden, also auch eine solche, die schon so weit fortgeschritten ist, dass die brechende Fläche davon geschnitten wird und die also sich in Wirklichkeit bilden würde, wenn das Licht sich auch jenseits der brechenden Fläche mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzte. Die so gedachte Wellenfläche kann weiter als die einhüllende Fläche der Kugeln angesehen werden, deren Mittelpunkte auf der brechenden Fläche liegen, und welche die Wellenfläche selbst berühren. Denn jeder Punkt der brechenden Fläche würde der Mittelpunkt neuer kugelförmiger Elementarwellen sein, deren Radien die Entfernung dieses Punktes von dem entsprechenden Punkte der leuchtenden Fläche zu einer constanten Länge ergänzten (nämlich zu der Länge, um welche jene Wellenfläche von der leuchtenden Welle absteht). Pflanzt sich aber das Licht jenseits der brechenden Fläche mit einer andern Geschwindigkeit fort, als diesseits, dann werden die Radien jener kugelförmigen Elementarwellen nicht mehr die früheren sein, sondern sich zu diesen verhalten wie die Geschwindigkeit des Lichts in den beiden durch die brechende Fläche getrennten Medien. Statt jener Wellenfläche entsteht also nun eine andere welche die einhüllende Fläche aller Kugeln ist, deren Mittelpunkte auf der brechenden Fläche liegen und deren Radien zu der Entfernung der Mittelpunkte von jener ersten Wellenfläche in dem constanten Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Lichtes in dem zweiten und in dem ersten Medium stehen. Während also die einfallenden Strahlen auf der ersten Wellenfläche senkrecht stehen würden, stehen die gebrochenen auf der zweiten senkrecht, und somit wäre der erste Satz auf seine physikalische Grundlage zurückgeführt, wobei nur noch zu bemerken ist, dass bekanntlich statt jenes Verhältnisses der Geschwindigkeiten dasjenige, welches die Sinus des einfallenden und des gebrochenen Strahles bilden, gesetzt werden kann, wie bereits Huyghens bewiesen hat.

Diese physikalische Bedeutung des Gergonne'schen Satzes scheint den meisten Bearbeitern der caustischen Theorie entgangen zu sein, da sie sich in keiner von den bedeutenderen Arbeiten findet.

Die Anwendung des Satzes auf einzelne Curven ist mitunter von grossem Vortheil, da sie die Untersuchung der caustischen Linien und Flächen auf die Betrachtung einfacherer Curven und Flächen zurückführt. Doch ist meines Wissens von dieser Anwendung auf einzelne Fälle bis jetzt kein ausgedehnter Gebrauch gemacht worden; es sind vielmehr vorzugsweise dieselben Caustiken untersucht worden, die schon bekannt waren, und ist daher der Vortheil, den Gergonne's Satz bisher gebracht hat, mehr in der Vereinfachung der Behandlungsweise, als in Bereicherungen der Wissenschaft durch neue Resultate zu suchen.

Zu den einzelnen Fällen, die noch weiter untersucht worden sind, gehört namentlich die Diacaustik des Kreises, mit der sich besonders Vincent de St. Laurent im 17. und 18. Bande der Gergonne'schen Annalen beschäftigt hat. St. Laurent gelangte dabei zu einigen interessanten Beziehungen zwischen Diacaustik und Catacaustik des Kreises und wies in einzelnen Fällen die Identität beider nach, so z. B. diejenige einer Caustik für Strahlen, die von einem in der Peripherie gelegenen Punkte ausgehen, und einer Catacaustik für einen zweiten Kreis, dessen Radius zu dem des ersten das Brechungsverhältniss bildet, das für die Diacaustik gilt.

Ich will jedoch hierbei nicht weiter verweilen, da es sich in Laurent's Arbeit nicht um eine weitere Ausbildung der allgemeinen Theorie, sondern nur um Anwendungen derselben handelt. Die allgemeine Theorie selbst aber ist mit dem Gergonne'schen Satze vorläufig zum Abschluss gekommen und die Geschichte der Entwickelung derselben hat somit ebenfalls mit diesem Satze abzuschliessen.

Kleinere Mittheilungen.

XV. Ueber die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen.

Bezeichnet r eine willkürliche Constante, von welcher die Grössen a und b abhängen, so gilt bekanntlich unter gewissen Bedingungen die Formel:

$$1)\quad \frac{d}{dr}\int_a^b f(x,r)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx + f(b,r)\frac{db}{dr} - f(a,r)\frac{da}{dr}.$$

Eine Erweiterung derselben für den Fall, dass mehrmals nach r differentiirt werden soll, versuchte O. Werner im 18. Theile des Grunert'schen Archivs zu geben und gelangte dabei zu dem Resultate:

$$\frac{d^n}{dr^n}\int_a^b f(x,r)\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^n f(x,r)}{\partial r^n}\,dx + \frac{d^n[b\,f(b,r) - a\,f(a,r)]}{dr^n}$$

$$- \left\{ b\,\frac{d^n f(b,r)}{dr^n} - a\,\frac{d^n f(a,r)}{dr^n} \right\},$$

dessen Richtigkeit seit dem Jahre 1852 nicht bezweifelt worden ist und welches daher in mehrere Werke Eingang gefunden hat, z. B. in das „*Exposé de la théorie des intégrales définies*“ von Dr. Bierens de Haan, sowie in des Verfassers „Compendium der höheren Analysis“. Gleichwohl ist die verallgemeinerte Formel unrichtig und zwar durch Verwechselung von totalen und partiellen Differentialquotienten entstanden, wie zuerst Herr P. H. Schoute, Civilingenieur in Leyden, bemerkt und dem Unterzeichneten brieflich mitgetheilt hat.

Differenzirt man nämlich die Gleichung 1), so erhält man leicht:

$$\frac{d^2}{dr^2}\int_a^b f(x,r)\,dx = \frac{d}{dr}\int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx + \frac{d^2[bf(b,r)-af(a,r)]}{dr^2}$$
$$-\left\{b\,\frac{d^2 f(b,r)}{dr^2} - a\,\frac{d^2 f(a,r)}{dr^2}\right\}$$
$$-\left\{\frac{db}{dr}\cdot\frac{df(b,r)}{dr} - \frac{da}{dr}\cdot\frac{df(a,r)}{dr}\right\}.$$

Andererseits ist nach Nr. 1), wenn man $\frac{\partial f(x,r)}{\partial r}$ an die Stelle von $f(x,r)$ treten lässt:

$$\frac{d}{dr}\int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x,r)}{\partial r^2}\,dx + \frac{\partial f(b,r)}{\partial r}\cdot\frac{db}{dr} - \frac{\partial f(a,r)}{\partial r}\cdot\frac{da}{dr},$$

und wenn dieser Werth in die vorhergehende Gleichung substituirt wird, so folgt:

$$\frac{d^2}{dr^2}\int_a^b f(x,r)\,dx = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x,r)}{\partial r^2}\,dx + \frac{d^2[bf(b,r)-af(a,r)]}{dr^2}$$
$$-\left\{b\,\frac{d^2 f(b,r)}{dr^2} - a\,\frac{d^2 f(a,r)}{dr^2}\right\}$$
$$-\left\{\frac{df(b,r)}{dr} - \frac{\partial f(b,r)}{\partial r}\right\}\frac{db}{dr} + \left\{\frac{df(a,r)}{dr} - \frac{\partial f(a,r)}{\partial r}\right\}\frac{da}{dr}.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Werner'sche Formel durch Identificirung von

$$\frac{df(b,r)}{dr} \text{ mit } \frac{\partial f(b,r)}{\partial r} \text{ und } \frac{df(a,r)}{dr} \text{ mit } \frac{\partial f(a,r)}{\partial r};$$

diese Vertauschung ist aber nicht erlaubt, weil im ersten Ausdrucke b, resp. a als abhängig von r angesehen wird, während der jedesmalige zweite Ausdruck dadurch entstanden ist, dass zunächst $f(x,r)$ partiell nach r differentiirt und dann erst b, resp. a für x gesetzt wurde. Die Werner'sche Formel bedarf hiernach einer Correction, welche für $n=2$ folgendermassen geschrieben werden kann:

$$-\frac{\partial f(b,r)}{\partial b}\left(\frac{db}{dr}\right)^2 + \frac{\partial f(a,r)}{\partial a}\left(\frac{da}{dr}\right)^2.$$

Für die höheren Differentialquotienten werden die Formeln zu complicirt, als dass ihre vollständige Entwickelung von Interesse sein könnte.

Schlömilch.

XVI. Berechnung der hyperbolischen dunklen Büschel in zweiaxigen Krystallen.

(Hierzu Taf. III, Fig. 14.)

Was das schwarze Kreuz beim Ringsystem des Kalkspaths, sind die hyperbolischen Büschel bei den Lemniscaten der zweiaxigen Krystalle; die farbigen Curven sind Linien gleicher Phasendifferenz der beiden interferirenden Strahlen, die schwarzen Büschel sind die Oerter derjenigen interferirenden Strahlen, deren (nahezu) senkrechte Azimute mit denjenigen der gekreuzten Turmeline zusammenfallen. Ich verdanke J. Müller's Aufsatz in Poggendorff's Annalen Band 44, vom Jahre 1838, die gewünschte Einsicht in die Theorie jener Büschel und glaube, dass es nach nunmehr 32 Jahren an der Zeit sein dürfte, zur weiteren Verbreitung mit Hilfe der seither in Anwendung gekommenen Calculationsweise einen Beitrag wie folgender Art zu leisten.* Zur Erleichterung des Vergleiches werde ich die Bezeichnung möglichst beibehalten und Notizen dieses Betreffes einstreuen; andererseits aber soll die folgende Abhandlung auch ganz selbstständig dastehen mit den möglichst wenigen Voraussetzungen.

§ 1.

Es durchlaufe den Krystall der Wellenzug

1) $$Ax + By + Cz = 0;$$

diese Ebene betrachten wir seit Fresnel als Schnitt der Elasticitätsfläche

2) $$v^2 = a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z,$$

wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Planwelle und XYZ die Winkel der Vibrationsrichtung in der Planwelle mit den Elasticitätsaxen abc bedeuten; also

3) $$A \cos X + B \cos Y + C \cos Z = 0$$

und

4) $$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Die beiden der Planwelle 1) zugehörigen Vibrationsrichtungen coincidiren mit dem grössten und kleinsten Fahrstrahl des Schnittes der Elasticitätsfläche, welche wie bei einer Ellipse auf einander senkrecht stehen und gefunden werden aus

5) $$0 = a^2 \cos X \,.\, d\cos X + b^2 \cos Y \,.\, d\cos Y + c^2 \cos Z \,.\, d\cos Z.$$

* So enthält z. B. das in genannten Dingen reichhaltigere Lehrbuch von Jamin über die Krystalle mit zwei Axen nur elf Zeilen Text mit zwei Figuren; Mousson's Physik behandelt die zweiaxigen Krystalle schon gleichmässig wie die einaxigen, aber beide dem Plane und Umfange des Werkes entsprechend kürzer, als letztere bei Jamin behandelt sind, und Beer's „Einleitung in die höhere Optik" sind Studienexcerpte, welche über unsern Gegenstand Nichts enthalten.

Zur Elimination der Differentiale differentiirt man auch 3) und 4) und erhält als Resultat die Gleichung

6) $A(b^2-c^2)\cos Y\cos Z + B(c^2-a^2)\cos Z\cos X + C(a^2-b^2)\cos X\cos Y = 0$,

welche im Vereine mit 3) und 4) zur Bestimmung der beiden ausgezeichneten Richtungen in der Ebene dienen würde.

Allein wir brauchen nur die Ebenen der Vibrationsrichtungen mit der Wellennormale oder vielmehr nur die Schnittlinien dieser zwei Ebenen mit der Krystallfläche.

Diese letztere ist bekanntlich senkrecht zur Mittellinie mit den beiden optischen Axen geschliffen; Mittellinie heisst die Halbirungslinie des spitzen Winkels derselben; sie fällt mit der kleinsten oder grössten Elasticitätsaxe zusammen; im Salpeter, worauf weiter unten Anwendungen gemacht werden, ist das Letztere der Fall; also wenn man $a < b < c$ nimmt, ist die Gleichung der Krystallfläche

7) $$z = 0.$$

Die eine der beiden jüngsterwähnten Schnittlinien hat also die Gleichung von der Form

8) $$y = \tan w \, . \, x$$

und der Winkel w kann das Vibrationsazimut genannt werden, gezählt von der Abscissenaxe weg, die wir mit der Linie der Endigungspunkte der optischen Axen in der Krystallfläche zusammenfallen lassen.

Um die beiden w als Functionen von A, B, C zu erhalten, denke man vorübergehend an diejenige Gerade mit den Richtungscosinussen m, n, p, welche auf der Wellennormale zu 1), auf der Vibrationsrichtung $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ und auf der Geraden 8) senkrecht steht, so hat man

$$mA + nB + pC = 0,$$
$$m\cos X + n\cos Y + p\cos Z = 0,$$
$$m\cos w + n\sin w = 0,$$

woraus entsteht

9) $$C.\tan w \, . \cos X - C.\cos Y + (B - A\tan w) . \cos Z = 0.$$

Um noch $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ zu eliminiren, bilden wir aus 3) und 9) die Proportionen

$$\cos X : \cos Y : \cos Z$$
$$= (B^2 + C^2 - AB\tan w) : (A^2\tan w + C^2\tan w - AB) : (-AC - BC\tan w)$$

und substituiren in 6), worauf die verlangte Gleichung entsteht:

10) $$AB(c^2-a^2)\tan^2 w + [A^2(c^2-a^2) - B^2(c^2-b^2) - (b^2-a^2)]\tan w$$
$$- AB(c^2-b^2) = 0.$$

Zusatz 1. Für $a=b$, wie in den einaxigen Krystallen, hätte diese Gleichung die Wurzeln $\tan w$ und $-\frac{1}{\tan w}$, d. h. die beiden Vibrationsazimute stehen senkrecht aufeinander. Im Salpeter sind die Brechungsexponenten

$$\frac{1}{a} = 1{,}5052, \quad \frac{1}{b} = 1{,}5046, \quad \frac{1}{c} = 1{,}3330,$$

woraus man sieht, inwieweit dies noch als Annäherung behauptet werden darf.

Zusatz 2. Beim Zusammenhalte mit Gleichung 12) a. a. O. dürfte man nur das Vibrationsazimut w von der Axe der y aus zählen.

§ 2.

Statt der bisherigen Orientirung ABC innerhalb des Krystalls bedarf man nun des in der Luft zum Auge gelangenden Lichtstrahles. Da nur steil austretende Strahlen zur Beobachtung gelangen, so darf als Annäherung der Einfluss von c in 2) bei Seite gesetzt und entsprechend dem im Zusatze 1) vorhin Gesagten die ordinäre Brechung angenommen werden:

11) $$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{1}{b},$$

wobei

$$\cos\varphi' = C$$

und

12) $$A = \sin\varphi' . \cos\alpha, \quad B = \sin\varphi' . \sin\alpha,$$

wenn α das Azimut der Ebene des Strahles und Einfallslothes ist, gezählt von der Axe der x zu der Axe der y (wie das Vibrationsazimut w).

Substituirt man die aus 11) und 12) sich ergebenden

$$A = b\sin\varphi . \cos\alpha, \quad B = b\sin\varphi . \sin\alpha$$

in die Gleichung 10) und löst nach $\sin\varphi$ auf, so kommt

13) $$b^2\sin^2\varphi$$
$$= \frac{(b^2-a^2)\tan w}{(c^2-a^2)\tan w - [(c^2-b^2)-(c^2-a^2)\tan^2 w]\sin\alpha\cos\alpha - (2c^2-a^2-b^2)\tan w\sin^2\alpha},$$

d. h. alle Strahlen von bestimmtem Vibrationsazimute w [mit welchen Strahlen des dazu nahe senkrechten Vibrationsazimutes nach 10) vermöge des Analysators zur Interferenz kommen] erscheinen dem Auge unter den vermöge 15) zusammengehörigen Sehwinkeln φ und Azimuten α.

Die Kleinheit des Winkels φ zeigt der Zähler und Zusatz 1.

$\sin\varphi$ und α sind Radius vector (deutliche Sehweite $=1$) und Winkel des Polarcoordinatensystems, und Gleichung 13) giebt sich als diejenige einer Hyperbel zu erkennen, zumal wenn wir das mit dem Factor $\sin\alpha\cos\alpha$ behaftete Glied des Nenners entfernen durch die Transformation

$$\alpha = v + \varrho,$$

nämlich ϱ als Winkel der reellen Axe der fraglichen Hyperbel mit unserer x-Axe bestimmen durch

14) $$R . \cos 2\varrho + S . \tan w . \sin 2\varrho = 0,$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde

15) $$R = (c^2-b^2) - (c^2-a^2)\tan^2 w, \quad S = 2c^2 - a^2 - b^2.$$

Die Gleichung der Hyperbel wird hiermit

16) $$b^2 \sin^2\varphi = \frac{(b^2-a^2)\tan w}{\frac{1}{2}[(b^2-a^2)\tan w + S.\tan.w\ \cos 2\varrho - R.\sin 2\varrho] - (S.\tan w.\cos 2\varrho - R.\sin 2\varrho)\sin^2 v}$$

in den Polarcoordinaten $\sin\varphi$ und v. Die Elimination von ϱ kann übergangen werden.

Zusatz 3. Wenn das Glied $\frac{1}{2}(b^2-a^2)\tan w$ im Nenner fehlen würde, wäre die Hyperbel eine gleichseitige. Zur Uebersicht dessen diene:

$$\frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{g^2} = 1, \quad x = r\cos v, \quad y = r\sin v$$

$$\frac{g^2 h^2}{g^2 - (h^2+g^2)\sin^2 v} = r^2,$$

und wenn $h = g$

$$\frac{h^2}{1 - 2\sin^2 v} = r^2;$$

also wäre die Halbaxe der gleichseitigen Hyperkel

$$h = \frac{1}{b}.\sqrt{\frac{2(b^2-a^2)}{S.\tan w.\cos 2\varrho - R\sin 2\varrho}}.$$

Der Zusatz 1 zeigt, in wie weit die Hyperbeln 16) gleichseitige genannt werdürfen.

§ 3.

Statt der unterlassenen Elimination von ϱ bietet diejenige von R mittelst 14) in 16) den Vortheil, dass $\tan w$ gänzlich aus der Hyperbelgleichung verschwindet und diese sich noch reducirt auf

$$b^2\sin^2\varphi = \frac{(b^2-a^2)\cos 2\varrho}{\frac{1}{2}[(b^2-a^2)\cos 2\varrho + S] - S.\sin^2 v}$$

oder auch, 15) benutzend, auf

17) $$\tfrac{1}{2}b^2\sin^2\varphi = \frac{(b^2-a^2)\cos 2\varrho}{(b^2-a^2)\cos 2\varrho + (2c^2-a^2-b^2)\cos 2v}.$$

Dies ist die Gleichung derjenigen Hyperbel, deren reelle Axe mit der x-Axe den bestimmten Winkel ϱ bildet.

Setzt man aber $v=0$ und betrachtet ϱ nebst φ als variabel, so hat man den geometrischen Ort der Scheitel aller Hyperbeln vor sich

18) $$\tfrac{1}{2}b^2\sin^2\varphi = \frac{(b^2-a^2)\cos 2\varrho}{(2c^2-a^2-b^2)+(b^2-a^2)\cos 2\varrho}$$

oder kurzweg die Scheitelcurve.

Dieselbe hat die Form eines Achters, dessen Verschlingungspunkt ($\varrho = 45^0$) im Ursprung und dessen beide Scheitel in der Axe der x liegen; für diese ist $\varrho = 0$ und

19) $$b^2\sin^2\varphi = \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}.$$

Mit Benutzung von 11) erkennt man, dass diese beiden Scheitel der Scheitelcurve gerade die Endigungspunkte der beiden optischen Axen sind.

Diese Punkte sind noch weiter ausgezeichnet dadurch, dass sämmtliche Hyperbeln 17) je einen derselben enthalten, wie man dort aus der Substitution $v = \varrho$ erkennt. [Von dieser erscheint $v = 0$ und $\varrho = 0$ in 18) und 19) als specieller Fall.]

Zusatz 4. Darum mag es gut sein, sich der Bedeutung der optischen Axe zu erinnern. Vergleichend den Zusatz 1) nennt man a^2, b^2, c^2 die drei Elasticitäten des Krystalls, und die Fresnel'sche Elasticitätsfläche 2) ist der Ausdruck des Satzes, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus der Elasticität proportional sei. Trägt man auf der fraglichen Vibrationsrichtung die Grösse der betreffenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf, so bekommt man die Punkte der Elasticitätsfläche. Um diese in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, setzt man

$$v \cos X = x, \quad v \cos Y = y, \quad v \cos Z = z$$

und findet

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = v^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Eine Schnittebene wie 1) liefert durch Elimination von x

$$\left(b^2 + a^2 \frac{B^2}{A^2}\right) y^2 + \left(c^2 + a^2 \frac{C^2}{A^2}\right) z^2 + 2 a^2 \frac{BC}{A^2} yz = v^4.$$

Verglichen mit dem Schnitte der Kugel $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mittelst derselben Ebene

$$\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right) y^2 + \left(1 + \frac{C^2}{A^2}\right) z^2 + 2 \frac{BC}{A^2} yz = v^2$$

findet man

$$B = 0, \quad v^2 = b^2, \quad \frac{C^2}{A^2} = \frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2};$$

denn

$$C = 0, \; v^2 = c^2$$

ist unmöglich, da die Elasticitätsfläche keinen Kreisschnitt haben kann, dessen Radius gleich der grössten Elasticitätsaxe c ist.

Die dritte Gleichung zur Bestimmung der speciellen Richtungscosinusse A, B, C, welche den zwei Kreisschnitten entsprechen, ist

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

und so findet man

$$C^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} = \cos \varphi' \;\; [\text{s. } 11)]$$

und auch auf diesem Wege die Gleichung 19). Die Normalen der zwei Kreisschnitte sind aber bekanntlich die optische Axe.

§ 4.

Berechnung der Scheitelcurve beim Salpeter und Construction einiger Hyperbeln:

Die im Zusatze 1) schon angegebenen Zahlen habe ich dem *Annuaire du Bureau des Longitudes* entnommen*; ist 0,00005 der grösstmögliche Fehler in diesen Angaben, so ergeben sich die Elasticitäten (Zusatz 4)

$$c^2 = 0{,}56280\,, \quad b^2 = 0{,}44173\,, \quad a^2 = 0{,}44137$$

mit den Fehlern 0,00005, 0,00004, 0,00004.
Also $b^2 - a^2 = 0{,}00036$ mit dem möglichen Fehler 0,00008.

Angesichts dieser Unsicherheit reducirt sich die Gleichung 18) auf

$$\sin^2 \varphi = \frac{(b^2 - a^2) \cos 2\varrho}{b^2 (c^2 - a^2)}\,,$$

wovon eine flüchtige Berechnung ergab

ϱ	$\sin\varphi$	Fehler	φ	Fehler	$\frac{1}{4}$ Meter mal $\sin\varphi$
0^0	0,082	0,009	$4^0\,40'$	$30'$	$20\frac{1}{2}$ Millim.
15^0	0,076	0,008	$4^0\,20'$	$30'$	19 „
30^0	0,058	0,007	$3^0\,20'$	$20'$	$14\frac{1}{2}$ „
45^0	0		0		0

Die Figur III der Tafel 4 enthält diese Punkte der durchaus punktirten Scheitelcurven nebst den zugehörigen Hyperbeln, welche consequenter Weise gleichseitig angenommen werden dürfen (Zusatz 3) und somit durch die Coordinaten der Scheitelcurve vollständig gegeben sind.

Zusatz 5. Die Berechnung des Asymptotenwinkels $2v$ irgend einer Hyperbel 17) aus der Annahme $\varphi = 90^0$ würde auch auf die nahe erfüllte Gleichseitigkeit der Hyperbeln führen, indem im ungünstigsten Falle, nämlich für $\cos 2\varrho = 1$ sich $2v = 89^0\,40'$ (Fehler $3'$) ergäbe. Indessen verstösst diese Discussion gegen die Eingangs § 2 gemachte Einschränkung.

Zusatz 6. A. a. O. sind den numerischen Rechnungen die Werthe zu Grunde gelegt

$$c^2 = 0{,}43626\,, \quad b^2 = 0{,}56081\,, \quad a^2 = 0{,}56109\,,$$

welche einen positiven Krystall bilden, während unser Salpeter negativ ist (die mittlere Elasticität nahe der kleinsten hat).

§ 5.

Zum Verständnisse der Beobachtungen der dunkeln Büschel kann man auf die mehr ursprüngliche Gleichung 13) recurriren. Wir bezeichnen die in unserer Figur gezeichneten Hyperbeln in der umgekehrten Reihenfolge zu derjenigen, nach welcher sie in der Zahlentafel des § 4 enthalten sind, mit I, II, III, IV; dem entsprechend die beiden Coordinatenaxen mit I, als

* Gemessen von Miller. Auch in Beer's Einleitung etc. zu finden.

die dem Scheitelpunkt 0 zugehörigen Hyperbeln. Polarisator und Analysator werden in constanter rechtwinkliger Stellung gegen die Krystallplatte (oder diese gegen jene) successive gedreht; β mag der Winkel des Turmalinkreuzes mit der Abscissenaxe heissen:

$\beta = 0^0$: die Hyperbeln I sind schwarz, die nachbarlichen II begrenzen das dunkle Gebiet, bei III und IV ist Helligkeit;

$\beta = 15^0$: ebenso II schwarz, I dunkel und bei III Uebergang zur Helligkeit in IV;

$\beta = 30^0$: ebenso III schwarz, II und IV Uebergang zur Helligkeit in I;

$\beta = 45^0$: ebenso IV schwarz, III der Uebergang zum hellen Gebiete II und I.

Die erste und vierte Erscheinung werden am häufigsten abgebildet; die eine ist das schwarze Kreuz der zweiaxigen Krystalle, mit dicken Balken Y und dünnerem X, welch letzterer noch an den zwei ausgezeichneten Punkten zusammengeschnürt ist; diese Zusammenschnürung oder der büschelförmige Verlauf von diesen Punkte aus gilt für alle Fälle, da in diesen Punkten alle Hyperbeln, die schwarzen und die hellen sich schneiden; die vierte Erscheinung zeigt die zwei schwarzen Hyperbeln im Azimute 45^0.

Zusatz 7. Die für den Salpeter, wo b^2 wenig von a^2 verschieden ist, so nahe erfüllte Rechtwinklichkeit der Vibrationsazimute erhellt auch ebenso aus der Gleichung 14) unter Benutzung von 15), wie sie oben im Zusatze 1 gefolgert wurde.

Augsburg, am 23. Januar 1870.

Prof. Dr. A. Kurz.

XVII. Notiz über die Rectification von Curven.

Durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ sei eine Curve bestimmt, deren Rectification zu einer Gleichung von der Form $s = \psi(x)$ führt; die Gleichung

$$y_1 = \mu \cdot \varphi(x) + \sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \psi(x)$$

liefert dann gleichfalls eine rectificabele Curve, und zwar ist

$$s_1 = \mu \cdot \psi(x) + \sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \varphi(x)$$

oder

$$s_1 - y_1 = (\mu - \sqrt{\mu^2 - 1})(s - y).$$

Dem Kreise $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ entspricht hiernach für $\mu = \sqrt{2}$ die transcendente Curve

$$y_1 = \sqrt{2(a^2 - x^2)} + a \cdot \arcsin \frac{x}{a}.$$

Schlömilch.

XVIII. Ueber die Anziehung eines Ellipsoides auf einen äusseren Punkt.

Die Anwendung des Ivory'schen Satzes erfordert bekanntlich die Bestimmung der reellen positiven Wurzel der cubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1,$$

worin a, b, c die Halbaxen des anziehenden Ellipsoides, x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes bedeuten, und u die zu bestimmende Unbekannte ist. Für den Fall, dass a, b, c wenig von einander verschieden sind, lässt sich die obige Gleichung näherungsweisse auflösen, und zwar ist bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$u=r^2-\frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{r^2},$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Bezeichnet k die Anziehung der Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1, so erhält man für die Componenten der Anziehung des Ellipsoides auf einen äusseren Punkt die Werthe

$$X=-kM\left(1+\frac{3}{10}\cdot\frac{2a^2-b^2-c^2}{r^2}\right)\frac{x}{r^3},$$

$$Y=-kM\left(1+\frac{3}{10}\cdot\frac{2b^2-c^2-a^2}{r^2}\right)\frac{y}{r^3},$$

$$Z=-kM\left(1+\frac{3}{10}\cdot\frac{2c^2-a^2-b^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3},$$

wobei M die Masse des Ellipsoides bedeutet.

SCHLÖMILCH.

VII.

Die Berechnung des christlichen Osterfestes.

Von

Dr. Hermann Kinkelin,

Professor an der Universität zu Basel.

Die Bestimmung des Osterfestes, das einerseits von der Vertheilung der Wochentage im Jahre, andererseits von dem Wechsel des Mondes abhängt, hat von jeher den Chronologen zu schaffen gemacht. In früherer Zeit gebrauchte man bei der Lösung der Aufgabe eine Reihe von Hilfsgrössen, den Sonnenzirkel, den Sonntagsbuchstaben, die goldene Zahl und die Epakten sammt mehreren dazu gehörigen Tafeln. Seit jedoch Gauss in v. Zach's monatlicher Correspondenz, 1800 (Bd. II, S. 121), eine einzige handliche Formel dafür angegeben hat, nimmt man von ihnen Umgang. Gauss selbst gab keinen directen Beweis seiner Formel, sondern deutete ihn nur an mit dem Beifügen, dass derselbe auf Gründen der höheren Arithmetik beruhe, in Rücksicht auf welche er sich noch auf keine Schrift beziehen könne. Die *Disquisitiones arithmeticae* waren damals noch nicht erschienen. Im Jahre 1816 berichtigte er in Lindenau' und Bohnenberger's Zeitschrift für Astronomie (Bd. I, S. 158) einen der gegebenen Ausdrücke, indem er bei der ersten Publication den Umstand unbeachtet gelassen hatte, dass die im Jahre 4200 anzubringende Mondgleichung auf das Jahr 4300 verschoben wird. Aehnliche, wenn auch nicht so einfache und präcise Formeln entwickelte Delambre in der „*Connaissance des temps*“ (1817, S. 307), und wiederholte sie in der „*Histoire de l'astronomie moderne*“ (Bd. I, S. 16), ohne indess den Nachweis zu leisten, dass sie mit den Gauss'schen gleichbedeutend sind. Ebenso theilten Tittel in *Methodus technica brevis, perfacilis ac perpetuaconstruendi Calendarium ecclesiasticum*, Göttingen 1816, und Piper in Crelle's Journal für Mathematik, 1841 (Band XXII, S. 117), den nämlichen Gegenstand betreffende Formeln mit, jedoch ohne Nachweis ihrer Richtigkeit. Die Gauss'schen Formeln wurden zuerst bewiesen von Ciccolini in *Formole analitiche pel calcolo pasquale, Roma* 1817, welche Schrift mir leider nicht zu Gesicht gekommen ist. Nach dem, was Delambre in der *Histoire de l'astronomie moderne* (Bd. I, S. 46) davon mittheilt, scheint sie etwas weitläufig zu sein. Auch Cisa de Grésy bewies dieselben in den *Memorie della reale accademia di Torino*, 1818 (Bd. XIV, S. 77), giebt aber für die von Gauss so einfach berichtigten Epacte einen äusserst schwerfälligen Ausdruck. Er sowohl, als Ciccolini scheint diese Berichtigung nicht gekannt zu haben. Das Nämliche gilt von R. Martin (*Comptes rendus*, 1855, Bd. XLI, S. 705) und A. Ledieu (*ibid.* S. 707). Ein das Ganze umfassender einfacher Beweis der Gaussschen Formeln fehlt meines Wissens noch und soll im Folgenden gegeben werden.

Die laut der Berichte zweier Bischöfe und eines Rundschreibens Constantin's vom Concil zu Nicäa 325 angenommene Satzung geht dahin, dass der erste Ostertag auf den Sonntag falle, der dem Ostervollmond zunächst folgt. Unter dem Ostervollmond ist der Vollmond zu verstehen, der, nach bestimmten Regeln berechnet, entweder am 21. März, auf den im Jahre des Concils die Frühlingsnachtgleiche fiel, oder zunächst nach demselben eintritt. Sonach handelt es sich darum, 1. die Sonntage im März, 2. den Ostervollmond und 3. den Ostertag selbst für ein gegebenes Jahr zu bestimmen. Da der julianische Kalender in einigen wesentlichen Punkten von dem gregorianischen abweicht, so muss die Rechnung für jeden Kalender besonders geführt werden.

Ueber die angewandten Beziehungen schicke ich voraus, dass

$\left(\frac{A}{B}\right)$ den Rest bedeutet, der bei der Division von A durch B übrig bleibt und also die Werthe 0, 1, 2B, 3 ... —1 haben kann, hingegen

$\left(\frac{A}{B}\right)_g$ die bei dieser Division als Quotient herauskommende ganze Zahl.

I. Die Märzsonntage.

365 Tage = 52 Wochen + 1 Tag geben ein gemeines und 366 Tage = 52 Wochen + 2 Tage ein Schaltjahr. Der 1. Januar rückt daher nach Verfluss eines gemeinen Jahres um eine und nach einem Schaltjahre um zwei Stellen in der Woche vorwärts. Umgekehrt rücken die Januarsonntage um eine oder zwei Einheiten im Datum rückwärts, je nachdem das vorhergehende Jahr ein gemeines oder ein Schaltjahr war. Nun fiel im Jahre 0 des **julianischen Kalenders**, einem Schaltjahre, der erste Sonntag auf den 4. Januar, folglich die Sonntage vom 25. Februar an, welcher der Schalttag ist, auf den 7., 14., 21., 28...., oder allgemein auf den $7u^{\text{ten}}$ März, unter u irgend eine ganze Zahl verstanden. Die drei nächsten Jahre sind gemeine,

ihre Sonntage rücken im Datum um je eine Einheit rückwärts und fallen also bezüglich auf den $7u-1$, $7u-2$, $7u-3^{\text{ten}}$ März. Im Jahre 4, welches wieder ein Schaltjahr ist, wird das Datum der Sonntage vom 25. Februar an um zwei Einheiten kleiner und in den drei folgenden gemeinen Jahren um je eine Einheit, also bezüglich gleich dem $7u-5$, $7u-6$, $7u-7$, $7u-8^{\text{ten}}$ März u. s. f. Man bemerkt leicht, dass sich das Datum der genannten Sonntage durch den allgemeinen Ausdruck

$$S=7u-\left[i+\left(\frac{i}{4}\right)_g\right] \text{März}$$

ergiebt, wo i die Jahrzahl bedeutet und u so zu wählen ist, dass S positiv wird.

Man kann diesen Ausdruck, den Piper a. a. O. verwendet hat, durch Einführung der Grössen

$$1)\qquad b=\left(\frac{i}{4}\right),\quad c=\left(\frac{i}{7}\right)$$

verwandeln. Dadurch nämlich erhält i die Formen

$$i=4x+b=7y+c,$$

woraus

$$x=\frac{7y-b+c}{4}=2y-\frac{y+b-c}{4}.$$

Da das letzte Glied eine ganze Zahl z sein muss, so erhält man der Reihe nach:

$$y=4z-b+c,$$
$$i=28z-7b+8c=28z-8b+8c+b,$$
$$\left(\frac{i}{4}\right)_g=7z-2b+2c,$$

folglich, wenn man $-10c$ in $4c-14c$ verwandelt und sämmtliche durch 7 theilbaren Glieder in ein Glied $7v$ vereinigt,

$$S=2b+4c+7v \text{ März},$$

unter v wieder eine ganze Zahl verstanden.

Die Einführung des **gregorianischen Kalenders** nahm hieran folgende Aenderungen vor. Zunächst wurden im Jahre 1582 10 Tage = 1 Woche + 3 Tage dadurch weggelassen, dass man nach dem 4. October sofort den 15. zählte, um die Frühlingsnachtgleiche, welche inzwischen auf den 11. März zurückgewichen war, wieder auf den 21. zu bringen. Infolge dessen rückten die Sonntage des gregorianischen Jahres um drei Einheiten im Datum vor, da man in der Folge der Wochentage keine Aenderung eintreten liess. Damit ferner die Nachtgleiche auch in Zukunft auf dem Datum des 21. März stehen bleibe oder höchstens einen Tag davon abweiche, d. h. damit das bürgerliche Jahr mit dem astronomischen im Einklang bleibe, verordnete Papst Gregor XIII., dass in den Säcularjahren, deren Säcularzahl nicht durch 4 theilbar ist, der Schalttag weggelassen, dagegen beibehalten werden solle, wenn die Säcularzahl durch 4 theilbar ist. Bei jeder Auslassung des Schalttages rückt das Datum der Sonntage vom 25. Februar an um eine Einheit vor. Bezeichnet man daher die in der Jahrzahl i enthaltene Säcularzahl mit s, so ist die an dem vorhin gefundenen julianischen Datum S der Sonntage in positivem Sinne anzubringende Correction

$$g = 3 + (s - 16) - \left(\frac{s-16}{4}\right)_g = s - \left(\frac{s}{4}\right)_g - 9,$$

von welcher Zahl man je 7 Einheiten mit dem in S vorkommenden letzten Gliede $7v$ vereinigen kann. Um die Osterformel einfach zu gestalten, führen wir statt g eine Zahl n ein, welche um 6 grösser ist als g und von der man ebenfalls je 7 Einheiten weglassen darf. Setzt man demnach der Kürze wegen

2) $$q = \left(\frac{s}{4}\right)_g,$$

so wird

$$n = \left(\frac{s-q-9+6}{7}\right) = \left(\frac{s-q-3}{7}\right) = \left(\frac{s-q-3+7}{7}\right)$$

oder

3) $$n = \left(\frac{4+s-q}{7}\right)$$

und $g = n - 6$. Hierdurch wird das Datum der Sonntage vom 25. Februar an verwandelt in

4) $$S = 2b + 4c + n - 6 + 7v \text{ März},$$

und derjenigen vom 1. Januar bis 24. Februar im gemeinen Jahre

$$S' = 2b + 4c + n + 4 + 7v \text{ Januar}$$

und im Schaltjahr gleich

$$2b + 4c + n + 5 + 7v,$$

wenn man -14 mit $7v$ vereinigt. Will man den ersten Sonntag im Jahre wissen, so ist sein Datum gleich $\left(\frac{S'}{7}\right)$ und giebt

5) $$\begin{cases} \text{im gemeinen Jahre den } \left(\dfrac{2b+4c+n+4}{7}\right) \text{ Januar,} \\ \text{,, Schaltjahre ,, } \left(\dfrac{2b+4c+n+5}{7}\right) \text{ ,,} \end{cases}$$

Die Formeln 4) und 5) gelten auch für den julianischen Kalender, wenn man $g=0$ oder $n=6$ setzt, und sind somit ganz allgemein.

II. Der Ostervollmond.

Die kirchlichen Neumonde fallen nicht mit den astronomischen zusammen, sondern werden cyclisch bestimmt. Es sind nämlich 19 julianische Jahre von 365,25 Tagen sehr nahe gleich 235 synodischen Monaten von 29,53059 Tagen, und der Unterschied beträgt nur 0,0613 Tage, um welchen Betrag die ersten grösser sind als die letzteren. Nach 19 Jahren, einem sogenannten Meton'schen Cyclus, werden die Neumonde wieder auf die nämlichen Tage im Jahre fallen. Die Vertheilung der 235 Monate geschieht im julianischen Kalender auf folgende Weise. Die Monate, d. h. die Zeiträume von einem Neumond bis zum nächsten erhalten vom ersten Neumond des ersten Jahres im Cyclus an gerechnet abwechselnd 30 und 29 Tage, und in den Jahren, wo 13 Neumonde vorkommen, wird nach dem 13. Neumond ein Monat von 30 Tagen eingeschaltet, am Ende des 19. Jahres aber ein solcher von 29 Jahren. Der Februar zählt hierbei beständig zu 28 Tagen (immerwährender Kalender), so dass in den Schaltjahren derjenige Monat, in welchen der 25. Februar als Schalttag fällt, in Wirklichkeit um einen Tag vergrössert wird. Diese Anordnung giebt in der That 115 Monate zu 29 und 120 Monate zu 30 Tagen, welche zusammen ebenso viel ausmachen, als 19 Jahre zu 365 Tagen.

Durch diese Einrichtung, welche vermuthlich von Sosigenes, dem Bearbeiter des julianischen Kalenders, herrührt, wird bewirkt, dass vom ersten Neumond eines Jahres bis zum ersten Neumond des nächsten Jahres entweder $354 = 365 + 19 - 30$ oder $384 = 365 + 19$ Tage verfliessen und dass somit in jedem folgenden Jahre der erste Neumond ein um 19 Einheiten grösseres Datum trägt, wobei 30 zu subtrahiren sind, wenn dieses über den 30. Januar hinausgeht. Nur das 19. Jahr des Cyclus macht hiervon eine Ausnahme, indem das Datum des ersten Neumondes im ersten Jahre des folgenden Cyclus nur um 18 oder $18 - 30$ grösser wird.

Die Römer nahmen als das erste Jahr eines solchen Cyclus ein solches an, in welchem der erste Neumond auf das Neujahr fiel. Dionysius Exiguus dagegen, welcher um 544 die Kirchenrechnung ordnete, wählte für das erste Jahr das Jahr 0 der christlichen Zeitrechnung, in welchem der 23. März ein Neumond war. Da hiermit der 23. Januar als Neumond des Jahres 0 gegeben ist und der erste Neumond in jedem folgenden Jahre innerhalb eines Cyclus um 19 Tage vorrückt, nach 19 Jahren aber wieder auf die nämlichen Tage fällt, so muss das Datum desselben im Jahre i gleich sein dem

$$23 + 19 \cdot \left(\frac{i}{19}\right) - 30w \text{ Januar,}$$

wo w so zu wählen ist, dass der Ausdruck positiv und < 30 ist. Setzt man der Kürze halber

$$a = \left(\frac{i}{19}\right), \tag{6}$$

so kann man denselben in der Form $\left(\frac{23 + 19a}{30}\right)$ Januar schreiben.

Infolge der über das erste Jahr des 19jährigen Cyclus getroffenen Verfügung erhält der erste volle Monat jedes Jahres 30 Tage, der zweite 29 der dritte wieder 30 u. s. w. Der dritte Neumond des Jahres fällt demnach 59 Tage später als der erste, somit auf das nämliche Datum im März, wie dieser im Januar, und der vierte 30 Tage später als der dritte. Da nun die Vollmonde nach kirchlicher Vorschrift 13 Tage später als die Neumonde fallen, so tritt der Ostervollmond, auch **Ostergrenze** genannt, 13 Tage nach dem dritten oder vierten Neumonde ein und trägt das Datum des

$$\left(\frac{23+19a}{30}\right)+13 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{23+19a}{30}\right)+13+30 \text{ März}.$$

Die Differenz zwischen dem 21. März und dem Datum des Ostervollmondes soll aber weniger als 30 Tage betragen, folglich ist in beiden Fällen das Datum des julianischen Ostervollmondes der

$$21+\left(\frac{23+19a+13-21}{30}\right) \text{ März}$$

oder

7) $$V=21+\left(\frac{19a+15}{30}\right) \text{ März}.$$

Man pflegt die Zahl $a+1$, welche den Rang des Jahres i in einem dionysianischen Cyclus von 19 Jahren, dem sogenannten **Mondzirkel**, angiebt, die **goldene Zahl** zu nennen.

Anders verfuhren **Aloysius Lilius**, der Verfasser des **gregorianischen Kalenders** und die zu dessen Prüfung niedergesetzte päpstliche Commission. Sie bezeichneten die Tage des Januars vom 1. an mit den Zahlen 0, XXIX, XXVIII, ... III, II, I, welche die **Epacten** (Ergänzungstage) bedeuten, d. h. das Alter des Mondes am 1. Januar, der Tag des letzten Neumondes im vorigen Jahre als der erste Tag gezählt. Diese Zahlenreihe wiederholt sich vom 31. Januar an in der nämlichen Weise bis zum 31. December für alle Tage des Jahres im immerwährenden Kalender. Die Epacten XXIV und mit ihr alle folgenden rücken am 6. Februar, 6. April, 4. Juni, 2. August, 30. September und 28. November um je 1 Tag zurück und kommen also dann auf die nämlichen Tage, welche die Epacten XXV haben. Die Epacten XXV werden, wenn die goldene Zahl $a+1>11$ oder $a>10$ ist, mit arabischen Ziffern 25 geschrieben, und vom 5. Februar, 5. April, 3. Juni, 1. August, 30. August, 29. September und 27. November auf die vorhergehenden Tage, die die Epacten XXVI haben, gesetzt, wobei jedoch die übrigen Epacten ihre Stellen unverändert beibehalten.

Durch diese sinnreiche Combination von abwechselnden Monaten von 30 und 29 Tagen mit am Ende gewisser Jahre eingeschalteten Monaten von 30 Tagen bewirkten sie für den immerwährenden Kalender, dass 1. in einem Cyclus von 19 julianischen Jahren oder 235 Monaten die Neumonde wieder auf die nämlichen Daten fallen, 2. dass der Monat, in den das Neujahr fällt, immer 30 Tage zählt, und 3. dass der vierte Monat des Jahres ebenfalls 30 Tage enthält, falls der dritte Vollmond vor dem 21. März eintritt. Von der dritten Bestimmung giebt es zwei Ausnahmen: Wenn nämlich ihr zufolge der vierte Neumond auf den 6. April fiele (der Vollmond auf den 19.), so wird er auf den 5. zurückversetzt, und wenn er auf den 5. April fiele (der Vollmond auf den 18.) und gleichzeitig die goldene Zahl

$a+1>11$ oder $a>10$ ist, so wird er auf den 4. verlegt. Vergl. Chr. Clavius (*Explicatio calendarii*, Opp. Bd. V S. 101, *Mogunt.* 1612) und Chr. Wolff (*Elementa mathes.*, Bd. III, *Chronologia.*)

Die Differenz von 0,0613 Tagen, um welche 19 julianische Jahre grösser sind als 235 synodische Monate, macht in 310 Jahren einen vollen Tag aus, um welchen die kirchlichen Neumonde den astronomischen vorgehen. Seit der Aufstellung des julianischen Festkalenders im Jahre 544 waren bis zum Jahre 1582, wo der gregorianische eingeführt wurde, 1038 Jahre verflossen, so dass der Unterschied der kirchlichen und der astronomischen Neumonde 3 Tage betrug. Um die Uebereinstimmung wieder herzustellen, verminderte man das Datum der ersteren zunächst um 3 Einheiten und stellte dadurch den ersten Neumond des Jahres i auf den

$$\left(\frac{23+19a-3}{30}\right)=\left(\frac{20+19a}{30}\right) \text{ Januar.}$$

Die Correction der Daten durch die Auslassung von 10 Tagen im October 1582 verwandelte das vorige in den

$$\left(\frac{30+19a}{30}\right)=\left(\frac{19a}{30}\right) \text{ Januar.}$$

Hieraus erhält man nun in gleicher Weise, wie im julianischen Kalender, den Ostervollmond

$$V=21+\left(\frac{19a+13-21}{30}\right)=21+\left(\frac{19a-8+30}{30}\right) \text{ März}$$

oder

$$V=21+\left(\frac{19a+22}{30}\right) \text{ März,}$$

wovon nur die beiden obenerwähnten Fälle eine Ausnahme machen.

Das Datum des julianischen und des gregorianischen Ostervollmondes kann durch die gemeinschaftliche Formel

$$V=21+d, \tag{8}$$

wo

$$d=\left(\frac{19a+m}{30}\right) \tag{9}$$

ausgedrückt werden. Im julianischen Kalender ist beständig $m=15$ und im gregorianischen von 1582 bis 1599 $m=22$.

Die Zahl d und mit ihr die Zahl m unterliegt im gregorianischen Kalender für die folgenden Jahrhunderte zwei Correctionen, welche die Sonnen- und die Mondgleichung genannt werden.

Die Sonnengleichung rührt davon her, dass der Schalttag in 400 Jahren dreimal weggelassen wird und somit das Datum des Ostervollmondes, der sich nach der Länge des julianischen Jahres von 365,25 Tagen richtet, bei jeder Weglassung um einen Tag vorrückt. Bezeichnet man die Sonnengleichung mit h, so ist, wie bei der Correction g der Sonntagsdaten,

$$h = (s - 16) - \left(\frac{s-16}{4}\right)_g = s - q - 12,$$

welcher Ausdruck zu m addirt werden muss.

Die Mondgleichung entspringt aus der Differenz von 19 julianischen Jahren und 235 synodischen Monaten. Sie beträgt in 19 Jahren 0,0613 Tage, d. h. in 310 Jahren 1 Tag und in 2480 Jahren 8 Tage, welche vom Datum des Ostervollmondes abgezogen werden müssen. Sie wird angebracht, indem man, von den Säcularjahren 1800, 4300, 6800 u. s. w. ausgehend, sieben Gruppen von je drei Jahrhunderten und nach ihnen eine solche von vier Jahrhunderten bildet, so zwar, dass die Mondgleichung in jeder folgenden Gruppe um eine Einheit grösser ist, als in der vorhergehenden, somit in 2500 Jahren um 8 Einheiten zunimmt. Die Mondgleichung wird die Form haben:

$$k = \left(\frac{\alpha + 8.s}{25}\right)_g + \beta,$$

wo α und β constante, noch zu bestimmende Zahlen sind. Denn erstens nimmt dieser Ausdruck um 8 zu, wenn s um 25 zunimmt, und zweitens bilden seine Werthe für um je 1 Einheit fortschreitende s abwechselnd 7 Gruppen von 3 und eine von 4 gleichen Zahlen, wie es bei der Mondgleichung sein soll. Die Constante α bestimmt sich dadurch, dass, um eine Gruppe von 4 gleichen Werthen von k zu geben, die Division bei der ersten Säcularzahl s dieser Gruppe aufgehen muss, demnach

$$\left(\frac{\alpha + 8s}{25}\right) = 0, \qquad \alpha = 25\delta - 8s,$$

unter δ eine ganze Zahl verstanden. Das Säcularjahr 3900 ist das erste der Gruppe 3900, 4000, 4100, 4200 von unveränderlicher Mondgleichung. Setzt man also $s = 39$ und wählt für δ die Zahl 13, die den kleinsten positiven Werth von α giebt, so wird $\alpha = 13$ und

$$k = \left(\frac{13 + 8s}{25}\right)_g + \beta.$$

Da endlich die Mondgleichung im Jahre 1800, wo $s = 18$, zum ersten Mal angebracht wurde und den Werth 1 hatte, so ergiebt sich $\beta = -5$ und

10) $$k = p - 5, \quad \text{wo } p = \left(\frac{13 + 8s}{25}\right)_g.\text{*}$$

---

* Man kann auch setzen:

$$p = \left(\frac{s - \left(\frac{s-17}{25}\right)}{3}\right)_g,$$

welche Formel Delambre gebraucht hat. Bis zum Jahre 4199 ist einfach

$$p = \left(\frac{s}{3}\right)_g,$$

wie Gauss zuerst angegeben hatte.

Durch die beiden Correctionen h und k an dem gregorianischen Ostervollmond wird m, von dem man je 30 Einheiten wegnehmen darf, gleich $\left(\frac{22+h-k}{30}\right)$ oder

$$11)\qquad m=\left(\frac{15+s-p-q}{30}\right).$$

Um endlich auch den zwei Ausnahmefällen, wo die Formel 9) ein um einen Tag zu weit vorgerücktes Datum giebt, Rechnung zu tragen, nämlich wenn $V = 19.$ April $= 21 + 29.$ März, folglich $d = 29$, sowie wenn $d = 28$ und gleichzeitig $a > 10$ ist, so kann man von d noch die Correction

$$12)\qquad f=\left(\frac{d+\left(\frac{a}{11}\right)_g}{29}\right)_g$$

abziehen, welche nur in diesen zwei Fällen $= 1$, sonst aber $= 0$ ist.

Lilius bestimmte die Neumonde eines Jahres aus den Epacten. Da im Vorigen der erste Neumond im Jahre schon direct gefunden wurde, so erhält man umgekehrt die Epacten dadurch, dass man das Datum dieses Neumondes von 31 subtrahirt, da der Monat, in den das Neujahr fällt, immer 30 Tage zählt. Sie werden demnach von 1582 bis 1599 gleich

$$31-\left(\frac{19a}{30}\right)=\left(\frac{31-19a+30a}{30}\right)=\left(\frac{1+11a}{30}\right).$$

Bringt man an ihnen die Sonnen- und die Mondgleichung wie bei dem Ostervollmond an, aber in umgekehrtem Sinne, so werden die gregorianischen Epacten allgemein

$$13)\qquad E=\left(\frac{1+11a+k-h}{30}\right)=\left(\frac{11a+p+q-s+8}{30}\right).$$

Der julianische Kalender kennt in Wirklichkeit die Epacten nicht. Was man gewöhnlich die julianischen Epacten nennt, ist eine aus der goldenen Zahl $a+1$ berechnete Zahl, nämlich

$$14)\qquad E'=\left(\frac{11.(a+1)}{30}\right)=\left(\frac{11a+11}{30}\right).$$

Die Differenz der julianischen von den gregorianischen Epacten ist während eines Jahrhunderts constant und dient gewöhnlich dazu, die letzteren aus den ersteren zu rechnen.

III. Der Ostertag.

Der Ostertag wird am nächsten auf den Ostervollmond folgenden Sonntag gefeiert und es muss an ihm die Differenz D der Daten eines Sonntags nach dem 25. Februar und des Ostervollmonds wenigstens 1 und höchstens 7 betragen. Daher ist D gleich $\left(\frac{S-V}{7}\right)$ zu setzen mit der Bedingung, dass der Rest 0 durch 7 ersetzt werde, oder D gleich $\left(\frac{S-V+6}{7}\right)+1$ ohne weitere Bedingung. Die Substitution von S und V aus den Formeln 4) und 8) giebt nach Verwandlung von $-d$ in $6d-7d$ und Wegwerfung der im Zähler vorkommenden Vielfachen von 7:

15) $$D=e+1,\quad \text{wo}\quad e=\left(\frac{2b+4c+6d+n}{7}\right).$$

Die Differenz D ist die Anzahl der Tage, um welche Ostern dem Ostervollmond nachfolgt. Addirt man sie zu dem Datum V desselben, so erhält man das Datum des Osterfestes:

16) $$P=22+d+e \text{ März},$$

oder auch, falls diese Zahl grösser als 31 ausfällt,

$$P=d+e-9 \text{ April}.$$

Die zwei mehrerwähnten Ausnahmen haben nur dann einen Einfluss, wenn der um einen Tag zu weit vorgerückte Ostervollmond selbst ein Sonntag, der berichtigte daher ein Samstag ist und dadurch Ostern eine Woche zu spät, nämlich beziehungsweise auf den 26. oder 25. April käme. Wenn also bei $d=29$ die Rechnung den 26. April als Ostertag giebt, so ist er auf den 19., und wenn sie bei $d=28$ den 25. April giebt und gleichzeitig $a>10$ ist, so ist er auf den 18. anzusetzen.

Die **Zusammenstellung** der Resultate giebt folgende Vorschrift:

Man setze die Jahrzahl $=i$, die darin enthaltene Säcularzahl $=s$ und bestimme der Reihe nach:

$$p=\left(\frac{13+8s}{25}\right)_g,\quad q=\left(\frac{s}{4}\right)_g,$$

$$m=\left(\frac{15+s-p-q}{30}\right),\quad n=\left(\frac{4+s-q}{7}\right),$$

$$a=\left(\frac{i}{19}\right),\quad b=\left(\frac{i}{4}\right),\quad c=\left(\frac{i}{7}\right),$$

$$d=\left(\frac{19a+m}{30}\right),\quad e=\left(\frac{2b+4c+6d+n}{7}\right),$$

so ist das Osterdatum

$$P=22+d+e \text{ März}=d+v-9 \text{ April},$$

die beiden zuletzt behandelten Fälle des gregorianischen Kalenders ausgenommen. Im julianischen Kalender ist beständig $m=15$, $n=6$.

Will man eine unter allen Umständen giltige Formel für den gregorianischen Kalender haben, so subtrahire man in den Ausdrücken für e und P von d die Correction f, wodurch man erhält:

$$f=\left(\frac{d+\left(\frac{a}{11}\right)_g}{29}\right)_g,\quad e=\left(\frac{2b+4c+6(d-f)+n}{7}\right),$$

$$P=21+(d-f)+e \text{ März}=(d-f)+e-9 \text{ April}.$$

Der erste Sonntag eines gemeinen Jahres fällt auf den

$$\left(\frac{2b+4c+n+4}{7}\right) \text{ Januar}$$

und eines Schaltjahres auf den

$$\left(\frac{2b+4c+n+5}{7}\right) \text{ Januar.}$$

Die goldene Zahl ist gleich

$$a+1.$$

Die Epacten sind im gregorianischen Kalender:

$$\left(\frac{8+11a+p+q-s}{30}\right)=\left(\frac{53+11a-m}{30}\right),$$

und im julianischen:

$$\left(\frac{11+11a}{30}\right).$$

1. Beispiel: Im Jahre 1870 ist für den gregorianischen Kalender

$$p=\left(\frac{13+8.18}{25}\right)_g=6, \quad q=\left(\frac{18}{4}\right)_g=4,$$

$$m=\left(\frac{15+18-6-4}{30}\right)=23, \quad n=\left(\frac{4+18-4}{7}\right)=4.$$

Diese beiden Werthe gelten für das ganze XIX. Jahrhundert. Ferner ist

$$a=\left(\frac{1870}{19}\right)=8, \quad b=\left(\frac{1870}{4}\right)=2, \quad c=\left(\frac{1870}{7}\right)=1,$$

$$d=\left(\frac{19.8+23}{30}\right)=25, \quad f=\left(\frac{25+\left(\frac{8}{11}\right)}{29}\right)_g=0,$$

$$e=\left(\frac{2.2+4.1+6.25+4}{7}\right)=1,$$

$$P=22+25+1=48. \text{ März} = 17. \text{ April.}$$

Für den julianischen Kalender ist

$$d=\left(\frac{19.8+15}{30}\right)=17, \quad e=\left(\frac{2.2+4.1+6.17+6}{7}\right)=4,$$

$$P=22+17+4=43. \text{ März} = 12. \text{ April.}$$

2. Beispiel: Im Jahre 1954 ist im gregorianischen Kalender

$$p=\left(\frac{13+8.19}{25}\right)_g=6, \quad q=\left(\frac{19}{4}\right)_g=4,$$

$$m=\left(\frac{15+19-6-4}{30}\right)=24, \quad n=\left(\frac{4+19-4}{7}\right)=5,$$

$$a=\left(\frac{1954}{19}\right)=16, \quad b=\left(\frac{1954}{4}\right)=2, \quad c=\left(\frac{1954}{7}\right)=1,$$

$$d=\left(\frac{19.16+24}{30}\right)=28,\quad f=\left(\frac{28+\left(\frac{16}{11}\right)_g}{29}\right)=1,$$

$$d-f=27,\quad e=\left(\frac{2.2+4.1+6.27+5}{7}\right)=0,$$

$$P=22+27+0=49.\text{ März }=18.\text{ April.}$$

3. **Beispiel:** Im Jahre 1981 des gregorianischen Kalenders ist, wie im vorigen Beispiel, $m=24$, $n=5$, ferner:

$$a=\left(\frac{1981}{19}\right)=5,\quad b=\left(\frac{1981}{4}\right)=1,\quad c=\left(\frac{1981}{7}\right)=0,$$

$$d=\left(\frac{19.5+24}{30}\right)=29,\quad f=\left(\frac{29+\left(\frac{5}{11}\right)_g}{25}\right)=1,$$

$$d-f=28,\quad e=\left(\frac{2.1+4.0+6.28+5}{7}\right)=0,$$

$$P=22+28+0=50.\text{ März }=19.\text{ April.}$$

Die zwei letzten Beispiele gehören den beiden von Gauss ausgenommenen Fällen an. In der That würde ohne die Correction f im zweiten Beispiel

$$e=6,\quad P=22+28+6=56.\text{ März}=25.\text{ April},$$

und im dritten

$$e=6,\quad P=22+29+6+57.\text{ März}=26.\text{ April}$$

geworden sein, also jedesmal Ostern eine Woche zu spät eintreten.

VIII.

Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen.

(2. Artikel.)

Von

Dr. Th. Kötteritzsch,

Lehrer an der Fürstenschule zu Grimma.

In einer früheren* dasselbe Problem behandelnden Abhandlung habe ich die allgemeinen Grundzüge angegeben, nach welchen verfahrend man zur Lösung des vorgelegten Problemes gelangen konnte, gleichgiltig, welcher Art die Function der beiden Variablen m und p, oder $f_0(m, p)$ war, deren Werthe für specielle ganze positive m und p die Coefficienten der Unbekannten in dem vorgelegten System Gleichungen vertraten.

In dem Folgenden soll zunächst kurz die Möglichkeit des vorgelegten Problemes betrachtet werden und dann sollen mit einem vorgelegten beliebigen System Gleichungen einige Umformungen vorgenommen werden, die theils, wenn übrigens die Bedingungen günstig sind, auf eine Vereinfachung der Aufgabe hinwirken oder die genauere Aufschlüsse über die Beschaffenheit der Coefficientenfunction $f_0(m, p)$ geben, wenn das gegebene System Gleichungen keine Widersprüche enthalten soll oder endlich, die die Entwickelung irgend einer der Unbekannten in einen Kettenbruch zur Folge haben. Ferner soll durch Einführung des Begriffes der inversen Coefficientenfunction die Berechnung von Systemen mit complicirteren Coefficientenfunctionen zurückgeführt werden auf solche mit einfacheren Coefficientenfunctionen. Einige Beispiele werden alsdann die Anwendung der dargethanen allgemeinen Sätze vor Augen führen und die Fruchtbarkeit des vorgelegten Problemes für Entwickelungen und Summirungen von Reihen oder Kettenbrüchen zeigen. Endlich soll noch kurz die Wichtigkeit des vorgelegten

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik 1869. 6. Heft.

Problemes für die schwierigsten physikalischen Aufgaben angedeutet werden, wofür specielle Beispiele beizubringen ich mir für spätere Zeit vorbehalte.

§ 1.

Ueber die Möglichkeit, ein System unendlich vieler linearer Gleichungen aufzulösen.

Ist zur Auflösung vorgelegt das System

$$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left|\sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, f_0(m,p)\, x_p = \varphi_m\right|,$$

so erfordert die Auflösung dieses Systemes die Bestimmung solcher Werthe für die Unbekannten x_p, dass dieselben, eingesetzt in das vorgelegte System, jede einzelne Gleichung desselben zu einer identischen machen. Der Grundgedanke, der bei der Auflösung eines solchen Systemes verfolgt werden muss, und der auch in der früheren Abhandlung verfolgt wurde, ist der, dass man zunächst p und m nur bis zu derselben endlichen positiven ganzen Zahl anwachsen lässt und diese Zahl selbst dann zunehmen lässt. Die Grenze, bis zu welcher man diese Zahl wachsen lassen muss, bestimmt sich durch den Umstand, dass die Differenz zwischen den linken und rechten Seiten der einzelnen Gleichungen des vorgelegten Systemes kleiner werden muss, als jede noch so kleine Grösse δ. Will man also mit endlicher Rechnung zu Stande kommen, so müssen die einzelnen Glieder der linken Seiten der einzelnen Gleichungen so angeordnet werden, dass diejenigen, welche grössere Werthe besitzen, nachdem man in ihnen die Werthe für die Unbekannten eingesetzt hat, am weitesten links stehen. Ferner muss, eine so grosse Anzahl Gleichungen des vorgelegten Systemes benützt werden, dass die Aenderung, die irgend eine der Unbekannten, etwa x_r erleidet, wenn man die Anzahl n der Gleichungen, mittelst derer die ersten n Unbekannten, unter ihnen auch x_r, bestimmte, um eine beliebige Anzahl vermehrt, kleiner bleibt, als irgend eine noch so kleine Grösse ε. Man erkennt hieraus ohne Weiteres, dass die Auflösung eines Systemes unendlich vieler Gleichungen nur möglich ist, wenn das allgemeine Gesetz gegeben ist, nach welchem sowohl die Werthe der Coefficienten der Unbekannten als auch die Werthe der rechten Seiten der einzelnen Gleichungen bestimmt werden.

Es ist ferner nach dem angegebenen Begriffe über die Auflösung eines Systemes unendlich vieler Gleichungen klar, dass man nur einen einzigen bestimmten Werth für eine jede Unbekannte findet, dass also auch jede Aufgabe eindeutig bestimmt ist, die auf ein System unendlich vieler linearer Gleichungen führt, sofern nur das System in dem angegebenen Sinne auflösbar ist.

Endlich kann man von einem System unendlich vieler linearer Gleichungen wieder zurückkommen auf ein System mit einer endlichen Anzahl von Gleichungen, wenn man die rechten Seiten der überzähligen Gleichungen im ersten System der Null gleich setzt und ebenso alle Coefficienten der Unbekannten, die einen von der Nummer der Gleichung (m) verschiedenen Index (p) führen. Es kommt diess darauf hinaus, dass man denjenigen Unbekannten x, deren Index grösser ist als die Anzahl der Gleichungen, den Werth Null beilegt. Es darf aber der Uebergang von einem System unendlich vieler linearer Gleichungen auf ein solches mit endlicher Anzahl nicht ohne Weiteres mit den Werthen der Unbekannten, die aus dem ersteren Systeme gefunden worden sind, vorgenommen werden, weil in diesen immer der besondere Uebergang vom Endlichen auf das Unendliche enthalten ist, wohl ist aber ein solcher Uebergang ohne Weiteres in den in der früheren Abhandlung gegebenen allgemeinen Formeln gestattet.

§ 3.

Zusammenhang zwischen der allgemeinen Methode der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen und der früher angegebenen speciellen.

Verschwand in der m^{ten} Gleichung des gegebenen Systemes

$$1)\qquad \begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left| \sum_0^{\infty}{}_p\, f_0(m,p)\, x_p = \varphi_m \right|$$

der Coefficient $f_0(m,m)$ nicht, so liess sich das System 1) immer auf die Form bringen

$$2)\qquad \begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left| \sum_0^{\infty}{}_p\, f_m(p)\, x_p = (\varphi_m) \right|,\quad f_m(p) = 0,\quad \text{so lange } m < p;$$

die durch die beiden Systeme 1) und 2) bestimmten Werthe von x_p sind nothwendig identisch.

Ist $$R = \Sigma \pm f_0(0,0)\, f_0(1,1)\, f_0(2,2) \ldots f_0(p,p) \ldots$$
die Determinante des Systemes 1) so ändert sich R nicht, wenn man an die Stelle der Elemente der m^{ten} Horizontalreihe dieselben Elemente vermehrt um die mit einem vor der Hand noch willkürlichen Factor μ_1^m multiplicirten Elemente der 0^{ten} Horizontalreihe setzt, wenn man also statt $f_0(m,p)$ setzt $f_0(m,p) + \mu_1^m f_0(0,p)$. Bestimmt man ferner μ_1^m dadurch, dass
$$f_0(m,0) + \mu_1^m f_0(0,0) = 0 \text{ für jedes } m \text{ ausser für } m = 0,$$
so erhält man
$$R = \Sigma \pm f_0(0,0)\, [\mu_1^1 f_0(0,1) + f_0(1,1)]\, [\mu_1^2 f_0(0,2) + f_0(2,2)] \ldots \\ [\mu_1^m f_0(0,m) + f_0(m,m)] \ \ldots,$$
eine neue Determinante, in deren 0^{ter} Verticalreihe alle Elemente mit Ausnahme des 0^{ten} verschwinden.

In dieser neuen Determinante multipliciren wir die Elemente der 1^{ten} Horizontalreihe mit μ_2^m und addiren sie dann zu den Elementen der m^{ten} Horizontalreihe, schreiben also statt

$$\mu_1^m f_0(0,p) + f_0(m,p)$$
$$\mu_2^m [\mu_1^1 f_0(0,p) + f_0(1,p)] + [\mu_1^m f_0(0,p) + f_0(m,p)]$$
für jedes m ausser für $m=0$ und $m=1$, und bestimmen μ_2^m dadurch, dass
$$\mu_2^m [\mu_1^1 f_0(0,1) + f_0(1,1)] + [\mu_1^m f_0(0,1) + f_0(m,1)] = 0.$$
Hierdurch hat sich aber wiederum der Werth der Determinante R nicht geändert, wohl aber sind jetzt auch in der 1^{ten} Verticalreihe alle Elemente mit Ausnahme des 0^{ten} und 1^{ten} verschwunden.

Denken wir uns nun die eben angegebene Operation so weit als überhaupt möglich fortgesetzt, so erhält man für R eine neue Form, in welcher in der p^{ten} Verticalreihe nur die Elemente vom 0^{ten} bis zum p^{ten} nicht verschwinden. In der That können auch von diesen eben genannten Elementen in besonderen Fällen noch einige verschwinden, sicher aber verschwindet das p^{te} Element nicht, wenn alle Gleichungen des Systemes 1) von einander unabhängig sind und $f_0(m,m)$ für jedes m nicht verschwindet.

Vergleicht man nun mit dem eben erlangten Resultate die dem System 2) entsprechende Determinante und die Bedingungen, unter denen dieselbe besteht, so findet man leicht, dass die früher mit λ^n_p bezeichneten Grössen identisch sind mit den eben jetzt unter der Bezeichnung μ^n_p in die Rechnung eingeführten Grössen, und dass die Elemente, welche, wie angegeben wurde, in der Schlussform von R auftreten, nichts Anderes sind, als die im System 2) mit $f_m(p)$ bezeichneten Functionen. Hierdurch ist aber nachgewiesen, dass
$$R \equiv f_0(0)\, f_1(1)\, f_2(2) \ldots f_p(p) \ldots$$
eine identische Gleichung ist.

Schreibt man R in der Form:
$$R = {}_0\alpha_p f_0(0,p) + {}_1\alpha_p f_0(1,p) + {}_2\alpha_p f_0(2,p) + \ldots + {}_n\alpha_p f_0(n,p) + \ldots$$
so ist es nun auch nicht schwer, die Werthe der Partialdeterminanten α ausgedrückt durch die Functionen $f_0(m,p)$ und $f_m(p)$ anzugeben. Aus dem System 1) folgt nämlich

$$\text{3)} \qquad x_p = \frac{1}{R}\left\{ {}_0\alpha_p \varphi_0 + {}_1\alpha_p \varphi_1 + {}_2\alpha_p \varphi_2 + \ldots + {}_m\alpha_p \varphi_m + \ldots \right\}$$

und mit diesem Werthe von x_p ist identisch der Werth von x_p, wie er sich aus dem System 2) ergiebt; dieser Werth ist aber

$$\text{4)} \quad x_p = \frac{1}{f_p(p)}\Big\{ {}_pA_p(\varphi_p) - {}_pA_{p+1}(\varphi_{p+1}) + A_{p+2}(\varphi_{p+2}) + \ldots$$
$$+ (-1)^m\, {}_pA_{p+m}(\varphi_{p+m}) + \ldots \Big\}.$$

Ordnet man die rechte Seite dieser Gleichung anders an, indem man schreibt

$$\text{5)} \qquad x_p = {}_0B_p \varphi_0 + {}_1B_p \varphi_1 + {}_2B_p \varphi_2 + \ldots + {}_mB_p \varphi_m + \ldots,$$

so besteht nun die Identtität der rechten Seiten der Gleichungen 3) und 5) für jedes beliebige Gesetz, nach welchem die Functionswerthe φ_m gebildet sind, weil über dessen Beschaffenheit noch keinerlei Voraussetzung gemacht wurde. Es müssen also auch die Coefficienten desselben Functionswerthes φ_m in den Gleichungen 3) und 5) einander gleich sein, d. h. es besteht das System Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} R_0 B_p = {}_0\alpha_p \\ R_1 B_p = {}_1\alpha_p \\ R_2 B_p = {}_2\alpha_p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_m B_p = {}_m\alpha_p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Die Werthe der einzelnen B erhält man aber auf folgende Weise. Es ist

$$7)\quad (\varphi_q) = {}_qD_0(\varphi_0) + {}_qD_1(\varphi_1) + {}_qD_2(\varphi_2) + \ldots + {}_qD_{q-1}(\varphi_{q-1}) + {}_qD_q\,\varphi_q$$

wo die Coefficienten D leicht aus der früher zur Berechnung von (φ_q) angegebenen Formel entnommen werden können in der Gestalt

$$8)\quad {}_qD_r = \frac{(-1)^{r+1}}{f_r(r)}\Big\{ {}_{r+1}C_0 f_0(q,0) - {}_{r+1}C_1 f_0(q,1) + {}_{r+1}C_2 f_0(q,2) \mp \ldots + (-1)^r\, {}_{r+1}C_r f_0(q,r) \Big\}$$

$${}_qD_q = 1\,.$$

Der Coefficient von φ_m in (φ_q) ist daher

so lange $m > q$ gleich 0,

" " $m = q$ " 1

und wenn $m < q$, etwa $m = q - s$, so kommt φ_m nur vor in der Reihe der Glieder:

$${}_qD_m(\varphi_m) + {}_qD_{m+1}(\varphi_{m+1}) + {}_qD_{m+2}(\varphi_{m+2}) + \ldots + {}_qD_{m+s-1}(\varphi_{m+s-1})\,.$$

Entwickelt man nun jedes der hier vorkommenden (φ) nach der Gleichung 7) so erhält man als Coefficienten von φ_m:

$$\begin{aligned} &{}_qD_m \\ &+ {}_qD_{m+1}\left[{}_{m+1}D_m\,.\right] \\ &+ {}_qD_{m+2}\left[{}_{m+2}D_{m+1}\ {}_{m+1}D_m + {}_{m+2}D_m\right] \\ &+ {}_qD_{m+3}\left[{}_{m+3}D_{m+2}\left({}_{m+2}D_{m+1}\ {}_{m+1}D_m + {}_{m+2}D_m\right)\right. \\ &\left.+\ {}_{m+3}D_{m+1}\ {}_{m+1}D_m + {}_{m+3}D_m\right] \\ &+ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Man erkennt hieraus bereits leicht das allgemeine Bildungsgesetz dieses Werthes, das sich so darstellen lässt, dass, wenn Werth dieses Coefficienten ist

$${}_qD_m\ {}_qG_m + {}_qD_{m+1}\ {}_qG_{m+1} + {}_qD_{m+2}\ {}_qG_{m+2} + \ldots + {}_qD_{m+s-1}\ {}_qG_{m+s-1}$$

$$\begin{aligned} &{}_qG_m = 1\,. \\ &{}_qG_{m+1} = {}_{m+1}D_m\ {}_qG_m \\ &{}_qG_{m+2} = {}_{m+2}D_{m+1}\ {}_qG_{m+1} + {}_{m+2}D_m\ {}_qG_m \\ &{}_qG_{m+3} = {}_{m+3}D_{m+2}\ {}_qG_{m+2} + {}_{m+3}D_{m+1}\ {}_qG_{m+1} + {}_{m+3}D_m\ {}_qG_m \\ &\cdot\ \cdot \\ &{}_qG_{m+r} = {}_{m+r}D_{m+r-1}\ {}_qG_{m+r-1} + {}_{m+r}D_{m+r-2}\ {}_qG_{m+r-2} + \ldots \\ &\qquad + {}_{m+r}D_m\ {}_qG_m\,. \end{aligned}$$

$$\cdot\ \cdot$$

Vermittels der Gleichung 8) gelingt es, den Coefficienten von φ_m auszudrücken durch die Functionswerthe von $f_0(m, p)$ und $f_m(p)$, allein; denken wir uns dies vollbracht und den dadurch entstandenen Werth durch ${}_qE_m$ angedeutet, so liefert dann die Gleichung 4),

$$9) \quad {}_mB_p = \frac{1}{f_p(p)} \Big\{ {}_pA_p\,{}_pE_m - {}_pA_{p+1}\,{}_{p+1}E_m + {}_pA_{p+2}\,{}_{p+2}E_m \mp \ldots + (-1)^n\,{}_pA_{p+n}\,{}_{p+n}E_m + \ldots \Big\}.$$

Nach den Gleichungen 6) ist aber dieser Werth von ${}_mB_p$ multiplicirt mit $f_0(0) f_1(1) f_2(2) \ldots f_p(p) \ldots$ gleich der Partialdeterminante ${}_m\alpha_p$.

Aus dem zuletzt eingeschlagenen Wege erkennt man leicht, wie man noch andere Partialdeterminanten berechnen kann.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Beziehungen zwischen den Werthen, die bei der gewöhnlichen Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen erscheinen und derer, die bei der in der frühern Abhandlung angegebenen Lösungsmethode auftreten, erlauben nun auch die Resultate, die bei der einen Auflösungsmethode erlangt sind, auf die andere überzutragen.

§ 3.

Transformation des ursprünglich gegebenen Systemes von Gleichungen.

$$1) \quad \begin{matrix} 0 \\ m \\ \infty \end{matrix} \left| \sum_0^\infty {}^p f_0(m, p)\, x_p = \varphi_m \right|.$$

Betrachtet man die Coefficientenfunction $f_0(m, p)$ als Function von m und ebenso φ_m, so kann man allgemein setzen

$$f_0(m, p) = f_0(m-1, p) + {}_{m-1}\Delta^1_p; \quad \varphi_m = \varphi_{m-1} + \nabla^1_{m-1}$$
$${}_{m-1}\Delta^1_p = {}_{m-2}\Delta^1_p + {}_{m-2}\Delta^2_p; \quad \nabla^1_{m-1} = \nabla^1_{m-2} + \nabla^2_{m-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_1\Delta^{m-1}_p = {}_0\Delta^{m-1}_p + {}_0\Delta^m_p; \quad \nabla^{m-1}_1 = \nabla^{m-1}_0 + \nabla^m_0.$$

Durch diese Substitutionen kann man nun leicht das gegebene System Gleichungen transformiren. Lässt man nämlich die 0te Gleichung unverändert, zieht die 0te von der 1ten, die 1te von der 2ten, die 2te von der 3ten u. s. w. ab, so entsteht das neue System:

$$\begin{matrix} 0 \\ m \\ \infty \end{matrix} \left| \sum_0^\infty {}^p\, {}_{m-1}\Delta^1_p\, x_p = \nabla^1_{m-1} \right|,$$

wenn ${}_{-1}\Delta^1_p = f_0(0, p); \ \nabla^1_{-1} = \varphi_0$.

In dem neuen Systeme ziehen wir wiederum von jeder Gleichung die nächst vorhergehende ab und erhalten das System:

$$\begin{matrix} 0 \\ m \\ \infty \end{matrix} \left| \sum_0^\infty {}^p\, {}_{m-2}\Delta^2_p\, x_p = \nabla^2_{m-2} \right|,$$

wenn ${}_1\Delta^2_p = {}_0\Delta^1_p, \ {}_{-2}\Delta^2_p = f_0(0, p); \ \nabla^2_{-1} = \nabla^1_0, \ \nabla^2_{-2} = \varphi_0$.

Fahren wir in der angegebenen Weise der Transformation so weit als überhaupt möglich ist, fort, so entsteht schliesslich das System:

$$2)\qquad \begin{array}{c}0\\ m\\ \infty\end{array}\left|\sum_0^{\infty} p\; {}_0\Delta_p^m\, x_p = \nabla_0^m\right|,$$

wenn ${}_0\Delta_p^0 = f_0(0, p)$ und $\nabla_0^0 = \varphi_0$.

Offenbar sind die Werthe der Unbekannten x_p, welche aus dem System 2) hervorgehen, nicht verschieden von den Werthen, welche aus dem ursprünglichen Systeme folgen. Ist nun $f_0(m, p)$ eine rationale ganze algebraische Function r^{ten} Grades in Bezug auf m, so verschwinden bekanntlich alle ${}_0\Delta_p^s$, deren $s > r$ ist. Die Determinante des Systemes 2) enthält also dann Horizontalreihen, deren sämmtliche Elemente verschwinden, folglich verschwindet auch die Determinante selbst und das System 2) enthält einen Widerspruch, also auch das System 1). Wir erhalten so den Satz:

Sollen durch ein System Gleichungen wie 1) sämmtliche Unbekannte x_p bestimmt sein, so darf die Coefficientenfunction $f_0(m, p)$ keine ganze rationale algebraische Function in Bezug auf m sein.

Hierin liegt zugleich der analytische Ausdruck für die Unbestimmtheit oder Unmöglichkeit eines Problemes, das etwa auf ein System unendlich vieler linearer Gleichungen führen sollte, dessen Coefficientenfunction $f_0(m, p)$ in Bezug auf m eine ganze rationale algebraische Function ist.

Kann man $f_0(m, p)$ sowohl wie φ_m als Functionen der stetig Variablen m betrachten und ist es erlaubt, beide als Functionen von m nach dem Taylor'schen Lehrsatze zu entwickeln, so kann man das System 2) noch weiter dahin umgestalten, dass man anstatt der Differenzen die Differentialquotienten nach m in die Rechnung einführt. Unter den gemachten Voraussetzungen ist nämlich, wenn man den r^{ten} Differentialquotienten von $f_0(m, p)$ nach m kurz mit $f^r{}_0(m, p)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}{}_0\Delta^n{}_p &= f_0^n(0, p) + A^1{}_n f_0^{n+1}(0, p) + A^2{}_n f_0^{n+2}(0, p) + \dots\\ {}_0\Delta_p{}^{n+1} &= \phantom{f_0^n(0, p) + A^1{}_n\,} f_0^{n+1}(0, p) + A^1{}_{n+1} f_0^{n+2}(0, p) + \dots,\end{aligned}$$

wobei die mit A bezeichneten Werthe Coefficienten sind, die nur von den Werthen der an ihnen stehenden Indexe abhängen. Was die Werthe der A selbst anlangt, die für uns weniger von Wichtigkeit sind, so erhält man dieselben leicht aus der symbolischen Formel

$${}_0\Delta^r{}_p = \left(e^{\frac{\partial f_0(m, p)}{\partial m}} - 1\right)^r,$$

die den Werth von ${}_0\Delta^r{}_p$ giebt, wenn man die rechte Seite entwickelt und statt

$$\left[\frac{\partial f_0(m, p)}{\partial m}\right]^s$$

schreibt

$$\left[\frac{\partial^s f_0(m,p)}{\partial m^s}\right]_{m=0}.$$

Lässt man nun die 0^{te} Gleichung des Systemes 2) unverändert, zieht dann von der 1^{ten} Gleichung ab die mit A^1_1 multiplicirte 2^{te} Gleichung, von der neu entstandenen Gleichung die mit $A^2_1 - A^1_1\, A^1_2$ multiplicirte 3^{te} Gleichung u. s. f., so bleibt schliesslich die Gleichung:

$$f'_0(0,0)\,x_0 + f'_0(0,1)\,x_1 + f'_0(0,2)\,x_2 + \ldots + f'_0(0,p)\,x_p + \ldots = \varphi'_0,$$

die wir als 1^{te} Gleichung des neuen Systemes betrachten.

Behandelt man in ähnlicher Weise alle folgenden Gleichungen des Systemes 2), indem man immer von einer gerade zu transformirenden Gleichung dieses Systemes die mit leicht zu findenden Factoren multiplicirten folgenden Gleichungen abzieht, so erhält man aus dem System 2) das neue System

$$3)\qquad \begin{matrix}0\\m\\\infty\end{matrix}\left|\sum_0^\infty{}^p f_0^m(0,p)\,x_p = \varphi_0^m\right|,$$

das sich von dem System 2) dadurch unterscheidet, dass an Stelle der n^{ten} Differenzen nach m der Werth des n^{ten} Differentialquotienten von $f_0(m,p)$ und φ_m für $m=0$ gesetzt ist.

Um eine Kettenbruchentwickelung für die Unbekannten zu erhalten gehen wir aus von der Form 2), § 2, nämlich

$$\begin{matrix}0\\m\\\infty\end{matrix}\left|\sum_0^\infty{}^p f_m(p)\,x_p = (\varphi_m)\right|\quad f_m(p)=0 \text{ für } p<m.$$

In diesem Systeme multipliciren wir die m^{te} Gleichung mit (φ_{m+1}), die $(m+1)^{te}$ mit (φ_m), ziehen dann beide Gleichungen von einander ab und betrachten die neue Gleichung als die m^{te} des neuen Systemes; setzen wir dabei noch

$$(\varphi_{m+1})\,f_m(p) - (\varphi_m)\,f_{m+1}(p) = \psi_m(p),$$

so lautet das neue System, vorausgesetzt, dass keiner der Functionswerthe (φ_n) verschwindet,

$$4)\qquad \begin{matrix}0\\m\\\infty\end{matrix}\left|\sum_0^\infty{}^p \psi_m(p)\,x_p = 0\right|.$$

In diesem System transformiren wir jede einzelne Gleichung, z. B. die m^{te} dadurch, dass wir zu ihr hinzuaddiren die mit $\mu^m{}_{m+3}$ multiplicirte $(m+3)^{te}$, dann die mit $\mu^m{}_{m+4}$ multiplicirte $(m+4)^{te}$, die mit $\mu^m{}_{m+5}$ multiplicirte $(m+5)^{te}$ u. s. f. und bestimmen die Werthe der μ durch das System Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} \mu^m{}_{m+3}\,\psi_{m+3}(m+3) = -\psi_m(m+3) \\ \mu^m{}_{m+3}\,\psi_{m+3}(m+4) + \mu^m{}_{m+4}\,\psi_{m+4}(m+4) = -\psi_m(m+4) \\ \mu^m{}_{m+3}\,\psi_{m+3}(m+5) + \mu^m{}_{m+4}\,\psi_{m+4}(m+5) + \mu^m{}_{m+5}\,\psi_{m+5}(m+5) \\ \qquad = -\psi_m(m+5) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ist die gemachte Voraussetzung, dass keiner der Functionswerthe (φ_m) verschwindet, erfüllt, so erhalten, weil $\psi_m(m)$ nicht verschwinden kann, die aus dem Systeme 5) folgenden Werthe der μ eine bestimmte brauchbare Grösse derart, dass in der m^{ten} transformirten Gleichung des Systemes 4) sämmtliche Coefficienten der Unbekannten x verschwinden mit einziger Ausnahme der Coefficienten von x_m, x_{m+1} und x_{m+2}, nämlich $\psi_m(m)$, $\psi_m(m+1)$, und $\psi_m(m+2)$, so dass statt des Systemes 4) das neue System

$$6)\quad \begin{matrix}0\\m\\\infty\end{matrix}\left|\sum_0^{\infty}{}^p\, \psi_m(p)\, x_p = 0\right|, \quad \psi_m(p) = 0 \text{ für } p < m \text{ und } p > m+2$$

erscheint.

Da aber die die Unbekannten x enthaltenden Systeme von Gleichungen 4 und 6 nur unter der Voraussetzung gelten, dass die Anzahl der Gleichungen in derselben Art, wie die Anzahl der Unbekannten ins Unendliche wächst, so folgt, dass, wenn wir ein ins Unbegrenzte Wachsen durch $\underset{n=\infty}{Lim}$ andeuten, für die Systeme 4) und 6) genauer zu schreiben ist

$$7)\quad \underset{n=\infty}{Lim}\ \begin{matrix}0\\m\\n-1\end{matrix}\left|\sum_0^{n}{}^p\, \psi_m(p)\, x_p = 0\right|, \quad f_n(n)\, x_n = (\varphi_n).$$

$$8)\quad \underset{n-\infty}{Lim}\ \begin{matrix}0\\m\\n-2\end{matrix}\Big|\psi_m(m)\, x_m + \psi_m(m+1)\, x_{m+1} + \psi_m(m+2)\, x_{m+2}$$
$$+ [\mu^m{}_{m+3}\, \psi_{m+3}(n) + \mu^m{}_{m+4}\, \psi_{m+4}(n) + \ldots + \mu^m{}_{n-1}\, \psi_{n-1}(n) + \psi_m(n)]\, x_n = 0\Big|$$
$$\psi_{n-1}(n-1)\, x_{n-1} + \psi_{n-1}(n)\, x_n = 0.$$
$$\varphi_n(n)\, x_n = (\varphi_n).$$

Das System Gleichungen 5) hat eine Form, die leicht auf die frühere Normalform für die Auflösung eines Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen gebracht werden kann; man braucht zu diesem Zwecke nämlich nur die Ordnung der Gleichungen sich umgekehrt zu denken. Folgen nun aus dem System 5) solche Werthe der Unbekannten μ und ist der Werth von $x_n = \dfrac{(\varphi_n)}{f_n(n)}$ so beschaffen, dass das Glied

$[\mu^m{}_{m+3}\, \psi_{m+3}(n) + \mu^m{}_{m+4}\, \psi_{m+4}(n) + \ldots + \mu^m{}_{n-1}\, \psi_{n-1}(n) + \psi_m(n)]\, x_n$

für jedes m, das der Bedingung genügt: $\underset{n=\infty}{Lim}\ 0 \leqq m \leqq n-1$, vernachlässigt werden kann gegen die übrigen noch in derselben Gleichung mit vorkommenden Glieder, so geht das System 8) über in

$$9)\quad \underset{n=\infty}{Lim}\ \begin{matrix}0\\m\\n-2\end{matrix}\left|\psi_m(m)\, x_m + \psi_m(m+1)\, x_{m+1} + \psi_m(m+2)\, x_{m+2} = 0\right|.$$
$$\psi_{n-1}(n-1)\, x_{n-1} + \psi_{n-1}(n)\, x_n = 0$$
$$f_n(n)\, x_n = (\varphi_n).$$

Die ersten $n-1$ Gleichungen dieses Systemes erlauben nun leicht die Entwickelung des Quotienten zweier Unbekannten mit aufeinanderfolgendem Index in einen Kettenbruch. Es ist nämlich

$$\frac{x_m}{x_{m+1}} = -\frac{\psi_m(m+1)}{\psi_m(m)} - \frac{\frac{\psi_m(m+2)}{\psi_m(m)}}{\frac{x_{m+1}}{x_{m+2}}}$$

$$= -\frac{\psi_m(m+1)}{\psi_m(m)} + \cfrac{\frac{\psi_m(m+2)}{\psi_m(m)}}{\frac{\psi_{m+1}(m+2)}{\psi_{m+1}(m+1)} + \cfrac{\frac{\psi_{m+1}(m+3)}{\psi_{m+1}(m+1)}}{\frac{x_{m+2}}{x_{m+3}}}}$$

. . . .

Ist zur Abkürzung

$$\frac{\psi_{m+r}(m+r+1)}{\psi_{m+r}(m+r)} = a_{m+r}\,,$$

$$\frac{\psi_{m+r}(m+r+2)}{\psi_{m+r}(m+r)} = b_{m+r}\,,$$

so erhält man

$$\frac{x_m}{x_{m+1}} = -a_m + \cfrac{b_m}{a_{m+1} - \cfrac{b_{m+1}}{a_{m+2} - \cfrac{b_{m+2}}{a_{m+3} - \cfrac{\vdots}{\quad - \cfrac{b_{n-2}}{\frac{x_{n-1}}{x_n}}}}}}\,,$$

dabei ist nach dem System 9)

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = -\frac{\psi_{n-1}(n)}{\psi_{n-1}(n-1)}\,, \qquad x_n = \frac{(\varphi_n)}{f_n(n)}\,,$$

und zur Berechnung des Werthes irgend einer der Unbekannten, etwa der x_p, hat man

$$10)\quad \begin{aligned} x_p &= \frac{x_p}{x_{p+1}}\;\frac{x_{p+1}}{x_{p+2}}\;\frac{x_{p+2}}{x_{p+3}}\cdots\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot x_n\,,\\ &= -\frac{x_p}{x_{p+1}}\cdot\frac{x_{p+1}}{x_{p+2}}\cdot\frac{x_{p+2}}{x_{p+3}}\cdots\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\;\frac{\psi_{n-1}(n)}{\psi_{n-1}(n-1)}\;\frac{(\varphi_n)}{f_n(n)}\,. \end{aligned}$$

Abgesehen von den Voraussetzungen, unter denen aus dem System 8) das System 9) hergeleitet werden konnte, wurde noch die Bedingung gestellt, dass keiner der Functionswerthe (φ_m) verschwinde. Verschwinden aber solche Functionswerthe und ist etwa $(\varphi_q) = 0$, $(\varphi_r) = 0$, $(\varphi_s) = 0 \ldots$, so hat dies für das System 4) keine andere Wirkung, als dass anstatt der Coefficientenfunction ψ_q, ψ_r, ψ_s ... die frühere Coefficientenfunction f_q, f_r, f_s ... in das System 4) eintritt, indem man die q^{te}, r^{te}, s^{te} ... Gleichung des ursprünglichen Systemes von Gleichungen ohne Weiteres in das System

4) aufnimmt und dass man übrigens, wie früher an zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen gezeigt wurde, irgend zwei Gleichungen des ursprünglichen Systemes, deren rechte Seiten nicht verschwinden, benützt, um aus ihnen eine neue Gleichung mit verschwindender rechter Seite abzuleiten.

§ 4.

Die inverse Coefficientenfunction.

In § 2 ist angezeigt worden, dass die Auflösung des gegebenen Systemes Gleichungen

$$1)\qquad \begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p f_0(m,p)\,x_p=\varphi_m\right|$$

die Form hat

$$x_p=\sum_0^\infty{}^n F_0(p,n)\,\varphi_n,$$

oder wenn man die Werthe aller Unbekannten x zusammenstellt:

Das System

$$1)\qquad \begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p f_0(m,p)\,x_p=\varphi_m\right|$$

wird aufgelöst durch das System

$$2)\qquad \begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p F_0(m,p)\,\varphi_p=x_m\right|.$$

Denkt man sich das System 2) als das ursprüglich gegebene, also die φ als die Unbekannten, so muss nothwendig auch, weil jedem φ des Systemes 2) nur ein einziger bestimmter Werth zukommt, das System 1) die Lösung des Systemes 2) darstellen.

Zwei solche Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen wie 1) und 2), von denen also das eine die Lösung des andern darstellt, nennen wir inverse Systeme*. Ueber zwei solche inverse Systeme lassen sich nun ohne Weiteres folgende Sätze aussprechen:

1. Das inverse System eines gegebenen Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen ist wiederum ein System unendlich vieler linearer Gleichungen.

2. Das inverse System eines gegebenen Systemes hat zum inversen System das gegebene System.

3. In dem inversen Systeme wächst die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten auf genau dieselbe Weise ins Unendliche, wie im ursprünglichen Systeme.

* Enthält das gegebene System linearer Gleichungen eine endliche Anzahl derselben, so nennt man dasjenige System das inverse desselben, dessen rechte Seite je eine Unbekannte multiplicirt in die Determinante des ursprünglichen Systemes enthalten.

4. Kennt man die Coefficientenfunction des inversen Systemes, so erhält man das inverse System des ursprünglichen Systemes, indem man die genannte Coefficientenfunction an die Stelle der Coefficientenfunction des ursprünglichen Systemes setzt und ausserdem die Rollen der Unbekannten x und der Bekannten φ, beide mit gleichem Index, mit einander vertauscht.

Durch diesen letzten Satz 4) sind wir in den Stand gesetzt, sofort das inverse System eines gegebenen Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen zu bilden, sobald wir die Coefficientenfunction des inversen Systemes kennen. Wir nennen diese Coefficientenfunction die **inverse Coefficientenfunction** und drücken die Beziehung, dass $F_0(m, p)$ die inverse Coefficientenfunction des Systemes mit der Coefficientenfunction $f_0(m, p)$ sei, analytisch kurz aus durch

$$J f_0(m,p) = F_0(m,p).$$

Die Aufgabe, welche jetzt allein noch zu lösen ist, reducirt sich nun darauf, $J f_0(m, p)$ zu bestimmen, wenn $f_0(m, p)$ gegeben ist.

Durch Vergleichung der p^{ten} Gleichung des Systemes 2) mit der Gleichung 3), § 2, erhält man ferner

$$\frac{{}_r\alpha_p}{R} = F_0(p, r) = J f_0(p, r).$$

Nun ist gemäss der Bedeutung von ${}_r\alpha_p$ und R

$$f_0(0, q)\frac{{}_0\alpha_p}{R} + f_0(1, q)\frac{{}_1\alpha_p}{R} + f_0(2, q)\frac{{}_2\alpha_p}{R} + \ldots + f_0(m, q)\frac{{}_m\alpha_p}{R} + \ldots$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } q = p \\ 0 & \quad ,, \quad q \gtrless p. \end{cases}$$

Es ist daher auch, wenn man für $\frac{{}_r\alpha_p}{R}$ seinen Werth $J f_0(p, r)$ einsetzt:

$$3^*)\quad \begin{aligned} &f_0(0, q)\, J f_0(p, 0) + f_0(1, q)\, J f_0(p, 1) + f_0(2, q)\, J f_0(p, 2) + \ldots \\ &\qquad + f_0(m, q)\, J f_0(p, m) + \ldots = \begin{cases} 1 & \text{wenn } q = p \\ 0 & \quad ,, \quad q \gtrless p. \end{cases}\end{aligned}$$

Da diese Gleichung gilt, welchen Werth auch p und q aus der Reihe der positiven Zahlen von 0 bis ∞ annehmen mag, so folgt, dass die $\underset{n=\infty}{Lim}$ $(n+1)^2$ Werthe, welche $J f_0(m, p)$ annehmen kann, wenn m und p alle Zahlen von 0 bis n durchlaufen, sich ergeben als Lösungen der $\underset{n=\infty}{Lim}\, n+1$ Systeme von $\underset{n=\infty}{Lim}\, n+1$ linearen Gleichungen der Form:

$$\sum_0^\infty {}^p f_0(p, 0)\, J f_0(0, p) = 1,$$
$$\overset{1}{\underset{\infty}{m}}\left|\sum_0^\infty {}^p f_0(p, m)\, J f_0(0, p) = 0\right|,$$

$$\sum_0^\infty {}_p f_0(p,0)\, Jf_0(1,p) = 0,$$

$$\sum_0^\infty {}_p f_0(p,1)\, Jf_0(1,p) = 1,$$

$$\left.\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\right| \sum_0^\infty {}_p f_0(p,m)\, Jf_0(1,p) = 0 \Big|,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left.\begin{array}{c}0\\m\\n-1\end{array}\right| \sum_0^\infty {}_p f_0(p,m)\, Jf_0(n,p) = 0 \Big|,$$

$$\sum_0^\infty {}_p f_0(p,n)\, Jf_0(n,p) = 1.$$

Diese Gleichungen sind sämmtlich linear und es folgt daraus: hat man für $Jf_0(m,p)$ irgend eine Function beliebig angenommen, die der Gleichung 3) für ein beliebiges p und q genügt, so ist dieselbe auch der einzig mögliche Werth, den $Jf_0(m,p)$ besitzt.

Die Gleichung 3*) stellt auch das Product der q^{ten} Verticalreihe in der Determinante des ursprünglichen Systems mit der p^{ten} Horizontalreihe der Determinante des inversen Systemes dar, wenn die Multiplication nach demselben Gesetze ausgeführt wird, wie es für die Multiplication der Determinanten gilt. Da dieses Gesetz offenbar auch dann noch gilt, wenn die Anzahl der Elemente einer jeden Determinante auf gleiche Weise ins Unbegrenzte wächst, und da in der durch die Multiplication erscheinenden Determinante alle Elemente, mit Ausnahme der in der Diagonalreihe stehenden, die sämmtlich der Einheit gleich sind, verschwinden, so folgt der auch für Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen giltige Satz: Die Determinanten inverser Systeme sind zu einander reciprok.

Die Sätze 1 bis 3 in diesem Paragraphen können nun leicht und bestimmter in der analytischen Formel zusammengefasst werden:

Ist

I) $$Jf_0(m,p) = F_0(m,p),$$

so ist auch

$$JF_0(m,p) = f_0(m,p).$$

Sind zur Auflösung vorgelegt die beiden Systeme:

3) $$\left.\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\right| \sum_0^\infty {}_p f_0(m,p)\, x_p = \varphi_m \Big|$$

und

4) $$\left.\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\right| \sum_0^\infty {}_p f_0(p,m)\, x_p = \varphi_m \Big|,$$

so unterscheiden sich diese beiden Systeme, die wir ebenfalls wie in dem Falle, wenn die Anzahl der Gleichungen beider endlich ist, conjugirt nennen wollen, dadurch von einander, dass die r^{te} Horizontalreihe der Coefficienten der linken Seiten des einen Systems die r^{te} Verticalreihe im andern Systeme ist. Ist nun die Auflösung des Systems 3):

5) $$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, F_0(m,p)\,\varphi_p = x_m \right|,$$

so lehrt eine einfache Betrachtung der Gleichung 3), § 2, dass die Lösung des Systems 4) dargestellt wird durch das System

6) $$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_{0}^{\infty}{}_{m}\, F_0(p,m)\,\varphi_p = x_m \right|.$$

In den Systemen 5) und 6) ist der Satz ausgesprochen: D i e i n v e r s e n S y s t e m e e i n a n d e r c o n j u g i r t e r S y s t e m e s i n d w i e d e r c o n j u g i r t e S y s t e m e.

Auf die Coefficientenfunctionen übertragen, lautet dieser Satz:

Ist

II) $$Jf_0(m,p) = F_0(m,p),$$

so ist auch

$$Jf_0(p,m) = F_0(p,m).$$

Hat man ferner zur Auflösung das System

$$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, f_0(m,p)\,x_p = \varphi_m \right|$$

und wird dasselbe gelöst durch

$$Jf_0(m,p) = F_0(m,p),$$

so steht die Auflösung dieses Systems in nahem Zusammenhange mit der Auflösung des folgenden Systems:

$$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, \psi(p)\, f_0(m,p)\,y_p = \varphi_m \right|,$$

wo $\psi(p)$ ein nur vom Argumente p abhängiger Factor ist; setzt man nämlich $\psi(p)\,y_p = x_p$, so geht das vorgelegte System über in das frühere. Um also y_p zu erhalten, hat man den Werth von x_p, wie er sich aus dem ersten System ergiebt, noch durch $\psi(p)$ zu dividiren, oder um den Werth von y_m zu erhalten, muss man die inverse Coefficientenfunction des ersten Systems durch $\psi(m)$ dividiren, folglich hat man:

$$J\,\psi(p) f_0(m,p) = \frac{1}{\psi(m)}\,F(m,p) = \frac{1}{\psi(m)}\,Jf_0(m,p),$$

oder:

III) $$J\,\psi(p)\,f_0(m,p) = \frac{1}{\psi(m)}\,Jf_0(m,p).$$

Ist ferner die Auflösung von

$$\overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\, f_0(m,p)\,x_p = \varphi_m \right|$$

gegeben durch

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^m F_0(m,p)\,\varphi_p = x_m\right|,$$

so gelingt auch die Auflösung des Systems

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p \chi(m)\,f_0(m,p)\,x_p = \varphi_m\right|,$$

wo $\chi(m)$ ein nur vom Argumente m abhängiger, nicht verschwindender Factor ist, leicht durch das erste System. Dividirt man nämlich in dem letzteren System die m^{te} Gleichung durch $\chi(m)$, so entsteht das neue System:

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p f_0(m,p)\,x_p = \frac{\varphi_m}{\chi(m)}\right|,$$

das verglichen mit dem ersten Systeme die Auflösung haben muss:

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p F_0(m,p)\,\frac{\varphi_p}{\chi(p)} = x_m\right|$$

oder

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p \frac{1}{\chi(p)}\,F_0(m,p)\,\varphi_p = x_m\right|.$$

Auf die Coefficientenfunctionen übertragen, liegt hierin der Satz:

IV) $$J\chi(m)\,f_0(m,p) = \frac{1}{\chi(p)}\,Jf_0(m,p).$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Sätze III) und IV) in einem einzigen Lehrsatze durch Worte auszudrücken; in Zeichen geschieht dies durch

V) $$J\psi(p)\,\chi(m)\,f_0(m,p) = \frac{1}{\psi(m)\,\chi(p)}\,Jf_0(m,p).$$

Ist ferner zur Auflösung vorgelegt:

$$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p f_0(m,p)\,x_p = \varphi_m\right|$$

und hat $f_0(m,p)$ die Form:

7.) $$f_0(m,p) = {}_m\psi_0\,{}_0\chi_p + {}_m\psi_1\,{}_1\chi_p + {}_m\psi_2\,{}_2\chi_p + \dots + {}_m\psi_r\,{}_r\chi_p + \dots,$$

wo die Functionen ψ und χ als Argumente ihre Indices gebrauchen, so nehmen wir noch die beiden Systeme an:

8) $$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p {}_m\psi_p\,u_p = \varphi_m\right|$$

und

9) $$\begin{array}{c}0\\m\\\infty\end{array}\left|\sum_0^\infty{}^p {}_m\chi_p\,x_p = u_m\right|.$$

Entnimmt man aus dem Systeme 9) den Werth von u_p und setzt denselben ein in das System 8), so wird die m^{te} Gleichung dieses Systems:

$$\sum_0^\infty{}^p {}_m\psi_p\left[\sum_0^\infty{}^n {}_p\chi_n\,x_n\right] = \varphi_m.$$

In dieser Gleichung ist aber der Coefficient von x_p:

10) $${}_m\psi_0\,{}_0\chi_p + {}_m\psi_1\,{}_1\chi_p + {}_m\psi_2\,{}_2\chi_p + \dots + {}_m\psi_r\,{}_r\chi_p + \dots = f_0(m,p).$$

Das zur Auflösung vorgelegte System kann also gedacht werden als das Resultat der zur Auflösung vorgelegten beiden Systeme 8) und 9).

Die Coefficientenfunction $f_0(m,p)$ ist gebildet nach demselben Gesetze, nach welchem das p^{te} Element der m^{ten} Horizontalreihe in der Determinante gebildet werden muss, die das Product der Determinanten der beiden Systeme 8) und 9) darstellt; nennen wir also R die Determinante des vorgelegten Systems und R_1 und R_2 resp. die Determinanten der Systeme 8) und 9), so gilt die Gleichung:

$$\mathrm{R} = R_1\, R_2.$$

Ist nun

$$J f_0(m,p) = F_0(m,p),$$

so ist auch

$$1 = F_0(p,0)\, f(0,p) + F_0(p,1)\, f_0(1,p) + F_0(p,2)\, f_0(2,p) + \dots$$
$$+ F_0(p,m)\, f_0(m,p) + \dots,$$

oder, wenn man die Werthe von $f_0(m,p)$ einsetzt:

$$= \mathrm{R}\, F_0(p,0)\,({}_0\psi_0\,{}_0\chi_p + {}_0\psi_1\,{}_1\chi_p + {}_0\psi_2\,{}_2\chi_p + \dots + {}_0\psi_r\,{}_r\chi_p + \dots)$$
$$+ \mathrm{R}\, F_0(p,1)\,({}_1\psi_0\,{}_0\chi_p + {}_1\psi_1\,{}_1\chi_p + {}_1\psi_2\,{}_2\chi_p + \dots + {}_1\psi_r\,{}_r\chi_p + \dots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \mathrm{R}\, F_0(p,m)\,({}_m\psi_0\,{}_0\chi_p + {}_m\psi_1\,{}_1\chi_p + {}_m\psi_2\,{}_2\chi_p + \dots + {}_m\psi_r\,{}_r\chi_p + \dots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ist hierin M der Coefficient von ${}_m\chi_p$, so ist

$$M = \mathrm{R}\, F_0(p,0)\,{}_0\psi_m + \mathrm{R}\, F_0(p,1)\,{}_1\psi_m + \dots + \mathrm{R}\, F_0(p,m)\,{}_m\psi_m + \dots.$$

Ist ferner

$$J\,{}_m\chi_p = {}_mX_p,$$

so ist auch

$$1 = {}_pX_0\,{}_0\chi_p + {}_pX_1\,{}_1\chi_p + \dots + {}_pX_m\,{}_m\chi_p + \dots = \frac{R_2}{R_2},$$

oder

$$R_1 R_2 = R_1 R_2\,{}_pX_0\,{}_0\chi_p + R_1 R_2\,{}_pX_1\,{}_1\chi_p + \dots + R_1 R_2\,{}_pX_m\,{}_m\chi_p + \dots = \mathrm{R};$$

es ist also auch

$$M = R_1\,[R_2\,{}_pX_m].$$

Durch Vergleichung der beiden für M gefundenen Werthe entsteht nun:

$$R_1\,[R_2\,{}_pX_m] = [\mathrm{R}\, F_0(p,0)]\,{}_0\psi_m + [\mathrm{R}\, F_0(p,1)]\,{}_1\psi_m + \dots + [\mathrm{R}\, F_0(p,m)]\,{}_m\psi_m + \dots$$

Ist ferner

$$J\,{}_m\psi_p = {}_m\Psi_p,$$

und multipliciren wir die vorige Gleichung mit ${}_r\Psi_m$, und addiren darauf alle so entstehenden Gleichungen, wenn m alle ganzzahligen Werthe von 0 bis ∞ annimmt, so entsteht:

$$R_1\, R_2 \sum_0^{\infty} {}^m\, {}_r\Psi_m\, {}_pX_m = \sum_0^{\infty} {}^m [F_0(p,0)\, {}_r\Psi_m\, {}_0\psi_m + F_0(p,1)\, {}_r\Psi_m\, {}_1\psi_m + \dots]\,\mathrm{R}.$$

Oder, wenn man beachtet, dass

$$\mathrm{R} = R_1 R_2$$

und dass

$$\sum_0^\infty{}^m\, {}_r\Psi_m\, {}_s\psi_m = \begin{cases} 1, & \text{wenn } r = s, \\ 0, & \;\;,,\;\; r \gtrless s, \end{cases}$$

$$F_0(p,r) = {}_r\Psi_0\, {}_pX_0 + {}_r\Psi_1\, {}_pX_1 + {}_r\Psi_2\, {}_pX_2 + \ldots + {}_r\Psi_s\, {}_pX_s + \ldots.$$

Hierin ist der Satz ausgesprochen:

Ist

$$f_0(m,p) = {}_m\eta_0\, {}_0\chi_p + {}_m\Psi_1\, {}_1\chi_p + \ldots + {}_m\Psi_r\, {}_rX_p + \ldots$$

und

$$J\, {}_m\psi_p = {}_m\Psi_p, \quad J\, {}_m\chi_p = {}_mX_p,$$

so ist auch

VI) $$J f_0(m,p) = \sum{}^r J\, {}_p\psi_r \,.\, J\, {}_m\chi_r = \sum{}^r {}_p\Psi_r\, {}_mX_r.$$

Hat $f_0(m,p)$ die allgemeinere Form:

$$f_0(m\, p) = {}_m\overset{0}{a}_p + {}_m\overset{1}{a}_p + {}_m\overset{2}{a}_p + \ldots + {}_m\overset{r}{a}_p + \ldots,$$

so kann dieselbe auf die Form im Lehrsatz VI) gebracht werden, wenn

11) $$\frac{{}_m\overset{r}{a}_p}{{}_m\overset{r}{a}_q} = \frac{{}_n\overset{r}{a}_p}{{}_n\overset{r}{a}_q} \quad \text{oder} \quad \frac{{}_m\overset{r}{a}_p}{{}_n\overset{r}{a}_p} = \frac{{}_m\overset{r}{a}_q}{{}_n\overset{r}{a}_q}.$$

Es erfüllt nämlich nicht nur die Form von $f_0(m,p)$ im Lehrsatz VI) die in den Gleichungen 11) ausgesprochene Bedingung, wie man leicht erkennt, wenn man

$${}_m\overset{r}{a}_p = {}_m\psi_r\, {}_r\chi_p$$

setzt, sondern man kann auch umgekehrt mittels der Gleichungen 11) die Functionswerthe von ${}_m\psi_r$ und ${}_r\chi_p$ bis auf constante in sie multiplicirte Factoren ermitteln; so folgt z. B. aus

$$\frac{{}_0\overset{r}{a}_0}{{}_0\overset{r}{a}_q} = \frac{{}_r\chi_0}{{}_r\chi_q}, \quad {}_r\chi_q = \frac{{}_r\chi_0}{{}_0\overset{r}{a}_0}\, {}_0\overset{r}{a}_q$$

und aus

$$\frac{{}_0\overset{r}{a}_0}{{}_m\overset{r}{a}_0} = \frac{{}_0\psi_r}{{}_m\psi_r}, \quad {}_m\psi_r = \frac{{}_0\psi_r}{{}_0\overset{r}{a}_0}\, {}_m\overset{r}{a}_0,$$

wodurch alle χ und ψ bestimmt sind bis auf diejenigen, welche den Werth von $f_0(0,0)$ bilden; für diese ist aber

$${}_0\overset{r}{a}_0 = {}_0\psi_r\, {}_r\chi_0$$

giltig für ein beliebiges r.

Es sei endlich in dem zur Auflösung vorgelegten System

$$\overset{0}{\underset{\infty}{m}} \left| \sum_0^\infty{}^p\, f_0(m,p)\, x_p = \varphi_m \right|$$

$$f_0(m,p) = \varphi_0(m,p) + \psi_0(m,p),$$

wo die Functionen $\varphi_0(m,p)$ und $\psi_0(m,p)$ weiter keinen besonderen Beschränkungen unterliegen mögen.

Alsdann ist nach 3), § 2,

$$J f_0(m,p) = \frac{{}_m\alpha_p}{\mathrm{R}}.$$

Die Determinante R ist aber bekanntlich gleich der Summe aller der Determinanten, die man erhält, wenn man in der ursprünglichen Determinante, die als Elemente nur die Functionswerthe $\varphi_0(m,p)$ enthält, alle möglichen Combinationen bildet, indem man statt einer Horizontalzeile mit den Functionswerthen $\varphi_0(m,p)$ eine solche mit den Functionswerthen $\psi_0(m,p)$ substituirt, bis man auf die Determinante kommt, die nur die Functionswerthe $\psi_0(m,p)$ enthält.

Bezeichnen wir eine dieser Determinanten mit R_ν, so sei auch

$$R = \sum\nolimits^{\nu} R_\nu.$$

Deuten wir entsprechend die Elemente, welche zu R_ν gehören, durch $\overset{\nu}{{}_m a_\mu}$ an, so ist auch

$${}_m\alpha_p = \sum\nolimits^{\nu} R_\nu . J\, \overset{\nu}{{}_m a_p};$$

setzt man die gefundenen Werthe von R und ${}_m\alpha_p$ in die vorige Gleichung $J f_0(m,p) = \frac{{}_m\alpha_p}{R}$ ein, so erhält man den Satz:

Ist

$$f_0(m,p) = \varphi_0(m,p) + \psi_0(m,p),$$

so ist

$$\text{VII)} \qquad J f_0(m,p) = J\left[\varphi_0(m,p) + \psi_0(m,p)\right] = \frac{\sum^{\nu} R_\nu\, J\, \overset{\nu}{{}_m a_p}}{\sum^{\nu} R_\nu},$$

wenn R_ν irgend eine der Elementardeterminanten bezeichnet, die man erhält, wenn man zur Bildung der Horizontalreihen entweder nur die Functionswerthe $\varphi_0(m,p)$ oder $\psi_0(m,p)$ benützt, deren Element allgemein durch $\overset{\nu}{{}_m a_p}$ bezeichnet ist, und wenn das Zeichen $\sum^{\nu}$ andeutet, dass alle Combinationen, welche bei der Bildung der Elementardeterminanten gewonnen werden können, genommen werden sollen.

Durch die Sätze I) bis VII) in diesem Paragraphen ist die eingangserwähnte Aufgabe gelöst, nämlich die Reduction der Berechnung complicirterer inverser Coefficientenfunctionen auf die Berechnung einfacherer inverser Coefficientenfunctionen.

§ 5.

Anwendungen der bisherigen Theorie auf specielle Systeme von Gleichungen.

Es sei

$$f_0(m,p) = \alpha_p{}^m.$$

Das zur Auflösung vorgelegte System lautet also:

$$\text{1)} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ m \\ \infty \end{array}\left| \sum_{}^{\infty}{}^{p}\, \alpha_p{}^m\, x_p = \varphi_m \right|,$$

und es sind α_p und φ_m vor der Hand noch unbestimmte Functionen resp. von p und m.

Bereits früher wurde das System aufgelöst, in welchem $\varphi_m = t^m$ war; die dort gefundenen Werthe von $f_n(q)$ sind auch hier wieder brauchbar, da in beiden fraglichen Systemen die linken Seiten identisch übereinstimmen. Es ist daher auch hier

$$f_n(q) = (\alpha_q - \alpha_0)(\alpha_q - \alpha_1)(\alpha_q - \alpha_2) \ldots (\alpha_q - \alpha_{n-1}).$$

Nach den früheren Formeln finden wir ferner für die (φ_n) die Werthe:

$$(\varphi_0) = \varphi_0,$$
$$(\varphi_1) = \varphi_1 - \alpha_0 \varphi_0,$$
$$(\varphi_2) = \varphi_2 - (\alpha_0 + \alpha_1)\varphi_1 + \alpha_0\alpha_1\varphi_0,$$
$$(\varphi_3) = \varphi_3 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)\varphi_2 - (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)\varphi_1 - \alpha_0\alpha_1\alpha_2\varphi_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\varphi_n) = \varphi_n + \varphi_{n-1}\sum_n \alpha'_n + \varphi_{n-2}\sum_{rs}\alpha'_r\alpha'_s + \varphi_{n-3}\sum_{rsq}\alpha'_r\alpha'_s\alpha'_q + \ldots$$
$$+ \varphi_0\alpha'_0\alpha'_1\alpha'_2 \ldots \alpha'_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wenn in dem Werthe von (φ_n) allgemein $\alpha'_r = -\alpha_r$ und das Zeichen Σ mit den darunter stehenden Indices bedeutet, dass die symmetrische Function aus der Reihe der Elemente α'_0, α'_1, $\alpha'_2 \ldots \alpha'_{n-1}$ und von der Form der einzelnen Glieder angenommen werde, als das eine hinter Σ angeführte angiebt.

Man erkennt leicht das Bildungsgesetz der (φ_n) für ein endliches n und kann durch den Schluss vom n^{ten} Gliede auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied die allgemeine Giltigkeit der eben für (φ_n) angegebenen Form auch für ein in's Unendliche wachsendes n nachweisen; dasselbe gilt, wie schon früher bemerkt wurde, von $f_n(q)$, und da die Determinante des vorgelegten Systems von Gleichungen das Product

$$f_0(0)\, f_1(1)\, f_2(2)\, f_3(3) \ldots f_n(n) \ldots$$

ist, so erkennt man daraus, dass das vorgelegte System Gleichungen so lange von einander unabhängige Gleichungen enthält, als sämmtliche α_p von einander verschieden sind.

Man erhält ferner nach den früheren Formeln:

$${}_pA_p = 1,$$
$${}_pA_{p+1} = \frac{1}{\alpha_p - \alpha_{p+1}},$$
$${}_pA_{p+2} = \frac{1}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2})},$$
$${}_pA_{p+3} = \frac{1}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2})(\alpha_p - \alpha_{p+3})},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_pA_{p+m} = \frac{1}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2}) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+m})},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Auch die Reihe dieser Werthe A kann durch den Schluss vom n^{ten} Gliede auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied als allgemein giltig nachgewiesen werden.

Setzt man die eben gefundenen Werthe in die Formel für x_p 4), § 2, ein, so entsteht:

$$x_p = \frac{1}{(\alpha_p-\alpha_0)(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)\dots(\alpha_p-\alpha_{p-1})(\alpha_p-\alpha_{p+1})(\alpha_p-\alpha_{p+2})\dots}$$
$$\Big\{ \varphi_0 \alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{p-1} \alpha'_{p+1} \alpha'_{p+2} \dots,$$
$$+ \varphi_1 \sum\nolimits^1 \alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{p-1} \alpha'_{p+1} \alpha'_{p+2} \dots$$
$$+ \varphi_2 \sum\nolimits^2 \alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{p-1} \alpha'_{p+1} \alpha'_{p+2} \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \varphi_m \sum\nolimits^m \alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{p-1} \alpha'_{p+1} \alpha'_{p+2} \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots \Big\},$$

wobei das Zeichen $\sum^m$ allgemein bedeutet, dass man aus der Reihe der Elemente $\alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_{p-1} \alpha'_{p+1} \alpha'_{p+2} \dots$ symmetrische Functionen bilde, deren jedes Glied die Form des hinter $\sum^m$ angeführten hat und soviel weniger Elemente der eben hingeschriebenen Reihe enthalte, als der innerhalb des Zeichens Σ stehende Werth (m) besagt.

Der eben für x_p gewonnene Werth erlangt eine sehr übersichtliche Form, wenn wir die Function:

$$Z_p = \frac{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{p-1})(z-\alpha_{p+1})(z-\alpha_{p+2})\dots}{(\alpha_p-\alpha_0)(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)\dots(\alpha_p-\alpha_{p-1})(\alpha_p-\alpha_{p+1})(\alpha_p-\alpha_{p+2})\dots}$$

einführen. Entwickelt man nämlich Z_p nach Potenzen von z, so mag die Entwickelung lauten:

$$Z_p = {}_pA_0 + {}_pA_1 z + {}_pA_2 z^2 + {}_pA_3 z^3 + \dots + {}_pA_m z^m + \dots,$$

und es zeigt sich, dass allgemein ${}_pA_m$ gerade der Coefficient von φ_m in dem Werthe von x_p darstellt. Es ist also auch

2) $$x_p = {}_pA_0 \varphi_0 + {}_pA_1 \varphi_1 + {}_pA_2 \varphi_2 + \dots + {}_pA_m \varphi_m + \dots$$

Aus der Gleichung 2) folgt nun:

$$J \alpha_p^m = {}_mA_p,$$

und umgekehrt nach I), § 4:

$$J_m A_p = \alpha_p^m.$$

Soll nun wirklich die Gleichung 2) einen brauchbaren Werth für jedes x_p darstellen, so muss nach § 1 der Rest der Reihe in dem Werthe von x_p durch Vermehrung der in dem System 1) benützten Gleichungen für ein beliebiges p kleiner gemacht werden können, als irgend eine noch so kleine Grösse δ. Eine hierauf bezügliche Untersuchung kann aber erst weiter geführt werden, nachdem man den Functionen φ_m und α_p ihre bestimmten Formen gegeben hat.

Es sei

1) $$\alpha_p = \overline{2p+1}^2 \pi^2.$$

Alsdann ist:

$$Z_p = \frac{\left(1-\frac{z}{\alpha_0}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_{p-1}}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_{p+1}}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_{p+2}}\right)\cdots}{\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_0}\right)\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_{p-1}}\right)\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}}\right)\left(1-\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+2}}\right)\cdots}$$

$$= \frac{\frac{1}{1-\frac{z}{\overline{2p+1}^2\pi^2}}\left(1-\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{5^2\pi^2}\right)\cdots}{\left[\frac{1}{1-\frac{u}{\overline{2p+1}^2\pi^2}}\left(1-\frac{u}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{u}{5^2\pi^2}\right)\cdots\right]_{u=(2p+1)^2\pi^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{1-\frac{z}{(2p+1)^2\pi^2}}\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{z}}{\left[\frac{1}{1-\frac{u}{(2p+1)^2\pi^2}}\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{u}\right]_{u=\overline{2p+1}^2\pi^2}}$$

$$= \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{z}}{1-\frac{z}{(2p+1)^2\pi^2}}$$

$$= \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}\left(1-\frac{z}{2^2.2!}+\frac{z^2}{2^4.4!}-\frac{z^3}{2^6.6!}\pm\cdots\right)$$

$$\left(1+\frac{z}{\varrho}+\frac{z^2}{\varrho^2}+\frac{z^3}{\varrho^3}+\cdots\right),\quad \text{wenn } \varrho=(2p+1)^2\pi^2,$$

$$= \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}\cdot\Big\{1+\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2^2.2!}\right)z+\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho.2^2.2!}+\frac{1}{2^4.4!}\right)z^2$$

$$+\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{\varrho^2.2^2.2!}+\frac{1}{\varrho.2^4.4!}+\frac{1}{2^6.6!}\right)z^3$$

$$+\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{\varrho^r}-\frac{1}{\varrho^{r-1}.2^2.2!}+\frac{1}{\varrho^{r-2}.2^4.4!}\mp\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{r-1}}{\varrho.2^{2r-2}(2r-2)!}+\frac{(-1)^r}{2^{2r}(2r)!}\right)z^r+\cdots\Big\}.$$

Hiernach ist:

$$J(\overline{2p+1}\,\pi)^{2m} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi}\Big\{\frac{1}{M^p}-\frac{1}{M^{p-1}2^2.2!}+\frac{1}{M^{p-2}2^4.4!}$$

$$\mp\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{M.2^{2p-2}(2p-2)!}+\frac{(-1)^p}{2^{2p}(2p)!}\Big\},$$

wenn

$$M=(2m+1)^2\pi^2.$$

Schreiben wir hierfür in leicht verständlicher Abkürzung:

$$J(\overline{2p+1}\,\pi)^{2m} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi}\cdot {}_mW_p, \tag{3}$$

so ist nach V), § 4, auch:

$$J\,(\overline{2p+1}\,\pi)^{2m} = J\,(2p+1)^{2m}\,\pi^{2m} = \frac{1}{\pi^{2p}}\,J\,(2p+1)^{2m},$$

also auch:

$$4)\qquad J(2p+1)^{2m} = \frac{4\,(-1)^m\,\pi^{2p-1}}{2m+1}\;{}_mW_p,$$

und nach I), § 4:

$$5)\quad J\,\frac{4\,(-1)^m}{(2m+1)\,\pi}\;{}_mW_p = \frac{(2p+1)\,\pi\,(-1)^p}{4}\;J\;{}_mW_p = J\,(2p+1)^{2m}\,\pi^{2m},$$

demnach auch:

$$6)\qquad J\;{}_mW_p = \frac{4\,(-1)^p}{(2p+1)\,\pi}\;J\,(2p+1)^{2m}\,\pi^{2m}.$$

Ist

$$f_0\,(m,p) = (2m+1)^{2p}\,\pi^{2p},$$

so ist nach II), § 4, die Lösung des Systemes:

$$\begin{array}{c|c|} 0 & \\ m & \sum\limits_0^\infty{}^p\,(2m+1)^{2p}\,\pi^{2p}\,x_p = \varphi_m \\ \infty & \end{array}$$

gegeben durch

$$7)\qquad J\,(2m+1)^{2p}\,\pi^{2p} = \frac{4\,(-1)^p}{(2p+1)\,\pi}\cdot{}_pW_m.$$

Es sei ferner noch

$$\varphi_m = z^m,$$

alsdann entsteht für den Werth von x_p einfach:

$$x_p = Z_p = \frac{4\,(-1)^p}{(2p+1)\,\pi}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\sqrt{z}}{1-\dfrac{z}{(2p+1)^2\,\pi^2}} = (-1)^p\,\frac{\overline{2p+1}\,\pi\,\cos\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\left(\dfrac{2p+1}{2}\,\pi\right)^2-\dfrac{z}{4}}.$$

Unter den gemachten Annahmen, nämlich:

$$a_p = (2p+1)^2\,\pi^2,\quad \varphi_m = z^m,$$

erfüllt nun der für x_p gefundene Werth die an ihn nach § 1 zu stellenden Bedingungen für ein beliebiges z.

Der hier für x_p gefundene Werth giebt nun auch durch Substitution in das zur Auflösung vorgelegte System Gleichungen zu neuen Entwickelungen Gelegenheit. Substituirt man nämlich in die m^{te} Gleichung:

$$\sum_0^\infty{}^p\,[(2p+1)^2\,\pi^2]^m\,x_p = z^m,$$

so entsteht:

$$\pi^{2m}\,\frac{\pi\cos\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2-\dfrac{z}{4}} - (3\pi)^{2m}\,\frac{3\pi\,.\cos\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2-\dfrac{z}{4}} + (5\pi)^{2m}\,\frac{5\pi\,.\cos\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)^2-\dfrac{z}{4}} \mp \ldots = z^m.$$

Oder wenn wir die Gleichung mit $\sec\frac{1}{2}\sqrt{z}$ multipliciren und alsdann statt z $4u^2$ schreiben: $(\sqrt{z} = u)$

$$\pi^{2m}\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-u^2}-(3\pi)^{2m}\frac{\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-u^2}+(5\pi)^{2m}\frac{\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-u^2}\mp\ldots=(2u)^{2m}\sec u,$$

eine Gleichung, die richtig ist für jedes ganze positive m und aus der für $m=0$, die bekannte Entwickelung:

$$\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-u^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-u^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-u^2}\mp\ldots=\sec u$$

folgt.

Es sei

2) $$\alpha_p=(p+1)^2\pi^2.$$

Alsdann ist

$$Z_p=\frac{\frac{1}{1-\frac{z}{(p+1)^2\pi^2}}\left(1-\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{3^2\pi^2}\right)\ldots}{\left[\frac{1}{1-\frac{u}{(p+1)^2\pi^2}}\left(1-\frac{u}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{u}{3^2\pi^2}\right)\ldots\right]_{u=(p+1)^2\pi^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{z}}\sin\sqrt{z}}{1-\frac{z}{(p+1)^2\pi^2}\left[\frac{1}{1-\frac{u}{(p+1)^2\pi^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\sin\sqrt{u}\right]_{u=(p+1)^2\pi^2}}$$

$$=(-1)^p\frac{2}{1-\frac{z}{(p+1)^2\pi^2}}\cdot\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

$$=2.(-1)^p\left(1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^3}{7!}\pm\ldots\right)$$
$$\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\frac{z^3}{k^3}+\ldots\right),$$

wenn $k=(p+1)^2\pi^2$,

$$=2.(-1)^p\left\{1+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{3!}\right)z+\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k.3!}+\frac{1}{5!}\right)z^2\right.$$
$$+\left(\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k^2.3!}+\frac{1}{k.5!}-\frac{1}{7!}\right)z^3$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{k^r}-\frac{1}{k^{r-1}.3!}+\frac{1}{k^{r-2}.5!}-\frac{1}{k^{r-3}.7!}\pm\ldots\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(-1)^{r-1}}{k(2r-1)!}+\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\right)+\ldots\right\}.$$

Hieraus folgt als Werth der inversen Coefficientenfunction:

$$8)\quad J[(p+1)^2\cdot\pi^2]^m = 2.(-1)^m \left\{\frac{1}{N^p} - \frac{1}{N^{p-1}\,3!} + \frac{1}{N^{p-2}.\,5!} \mp \ldots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\right\},$$
$$\text{wenn } N = (m+1)^2\,\pi^2.$$

Aus dieser Gleichung 8) lassen sich mit Hilfe der Sätze in § 4 leicht eine grosse Anzahl anderer ableiten, namentlich wenn man noch die vorhin unter 1) gewonnenen Resultate mit benützt. Wir übergehen diese Ableitungen hier, da dieselben zu weit vom Ziele dieser Arbeit abführen.

Ist nun speciell noch $\varphi_m = z^m$, so wird $x_p = Z_p$ und es genügt wiederum der für x_p gefundene Werth den in § 1 an ihn gestellten Bedingungen.

Setzt man die für die Unbekannten x_p gefundenen Werthe ein in irgend eine der Gleichungen des ursprünglich gegebenen Systemes, z. B. in die m^{te}, so erhält man:

$$\frac{2\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\left\{\frac{\pi^{2m}}{1-\frac{z}{\pi^2}} - \frac{(2\pi)^{2m}}{1-\frac{z}{2^2\pi^2}} + \frac{(3\pi)^{2m}}{1-\frac{z}{3^2\pi^2}} \mp \ldots\right\} = z^m,$$

eine Gleichung, die giltig bleibt, welchen ganzen positiven Werth m auch annehmen möge

Die eben gewonnene Entwickelung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\pi^{2m}.\frac{2\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\left\{1^{2m}.\frac{\pi^2}{\pi^2-z} - 2^{2m}\frac{2^2\pi^2}{2^2\pi^2-z} + 3^{2m}\frac{3^2\pi^2}{3^2\pi^2-z} \mp \ldots\right\} = z^m.$$

Oder, wenn man durch $\pi^{2m}.\dfrac{2\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ dividirt und dann $z = u^2$ setzt:

$$1^{2m}.\frac{\pi^2}{\pi^2-u^2} - 2^{2m}\frac{2^2\pi^2}{2^2\pi^2-u^2} + 3^{2m}\frac{3^2\pi^2}{3^2\pi^2-u^2} - 5^{2m}\frac{5^2\pi^2}{5^2\pi^2-u^2} \pm \ldots = \frac{u^{2m+1}}{2\,\pi^{2m}}\csc u.$$

Für $m = 0$ entsteht hieraus:

$$\frac{\pi^2}{\pi^2-u^2} - \frac{2^2\pi^2}{2^2\pi^2-u^2} + \frac{3^2\pi^2}{3^2\pi^2-u^2} - \frac{5^2\pi^2}{5^2\pi^2-u^2} \pm \ldots = \frac{u}{2}\csc u.$$

Eine Entwickelung für die Cosecante, die symmetrischer verläuft, als die gewöhnlich unter ähnlicher Form für diese Function gegebene Entwickelung.

§ 6.

Es sei

$$f_0(m,p) = \frac{1}{a_p + b_m},$$

wo a_p nur von p, b_m nur von m abhängig ist.

Das zur Auflösung vorgelegte System linearer Gleichungen lautet demnach:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}0\\m\\n\end{array}\left| \sum_0^n{}^p \frac{x_p}{a_p+b_m} = \varphi_m \right|.$$

Wir stellen zunächst die Normalform

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}0\\m\\n\end{array}\left| \sum_0^n{}^p f_m(p)\, x_p = (\varphi_m) \right|,$$

$$f_m(p) = 0 \text{ für } p < m,$$

her. Zu diesem Zwecke multipliciren wir zunächst allgemein die m^{te} Gleichung mit $a_0 + b_m$, wodurch das gegebene System übergeht in:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}0\\m\\n\end{array}\left| \sum_0^n{}^p \frac{a_0+b_m}{a_p+b_m} x_p = \varphi_m(a_0+b_m) \right|.$$

In diesem System ziehen wir nun die 0^{te} Gleichung von jeder folgenden ab; dadurch fällt in allen folgenden Gleichungen die Unbekannte x_0 fort und der Coefficient von x_p in der m^{ten} Gleichung wird:

$$\frac{a_0+b_m}{a_p+b_m} - \frac{a_0+b_0}{a_p+b_0} = \frac{(b_0-b_m)(a_0-a_p)}{(a_p+b_m)(a_p+b_0)}.$$

Anstatt des gegebenen Systemes erhalten wir also das neue:

$$\sum_0^n{}^p \frac{a_0+b_0}{a_p+b_0} x_p = \varphi_m(a_0+b_0)$$

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}1\\m\\n\end{array}\left| \sum_1^n{}^p \frac{(b_0-b_m)(a_0-a_p)}{(a_p+b_m)(a_p+b_0)} x_p = \varphi_m(a_0+b_m) - \varphi_0(a_0+b_0) \right|.$$

Bringen wir in dem System für $m \geqq 1$ den allen Gliedern der linken Seite der m^{ten} Gleichung gemeinschaftlichen Factor $b_0 - b_m$ auf die rechte Seite und setzen wir:

$$x^1{}_p = \frac{a_0-a_p}{b_0+a_p} x_p,$$

$$\varphi^1{}_m = \frac{\varphi_m(a_0+b_m) - \varphi_0(a_0+b_0)}{b_0-b_m},$$

so entsteht aus dem letzteren System für $m \geqq 1$ das neue System:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}1\\m\\n\end{array}\left| \sum_1^n{}^p \frac{x^1{}_p}{a_p+b_m} = \varphi^1{}_m \right|.$$

Dieses neue System ist ganz wie das ursprünglich gegebene geformt, mit dem einzigen Unterschiede, dass der niedrigste Index m nicht 0, sondern 1 ist. Aus dem zuletzt erlangten Systeme muss sich daher das neue ableiten lassen:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c}2\\m\\n\end{array}\left| \sum_2^n{}^p \frac{x^2{}_p}{a_p+b_m} = \varphi^2{}_m \right|,$$

wenn

$$x^2{}_p = \frac{a_1 - a_p}{b_1 + a_p} x^1{}_p = \frac{a_1 - a_p}{b_1 + a_p} \frac{a_0 - a_p}{b_0 + a_p} x_p,$$

$$\varphi^2{}_m = \frac{\varphi^1{}_m (a_1 + b_m) - \varphi_1{}^1 (a_1 + b_1)}{b_1 - b_m}.$$

Aus dem vorigen Systeme folgt nun das fernere System:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c} 3 \\ m \\ n \end{array} \left| \sum_3^n{}^p \frac{x^3{}_p}{a_p + b_m} = \varphi^3{}_m \right| \text{ u. s. f.}$$

Hiermit ist aber die gesuchte Normalform des gegebenen Systemes gefunden, indem wir von dem gegebenen Systeme sowohl, wie von dem transformirten allemal nur die erste (beginnende) Gleichung beibehalten. Die gesuchte Normalform ist daher:

$$\lim_{n=\infty} \begin{array}{c} 0 \\ m \\ n \end{array} \left| \sum_m^n{}^p \frac{x_p{}^m}{a_p + b_m} = \varphi^m{}_m \right|.$$

Dabei ist aber

$$x_p^m = \frac{(a_0 - a_p)(a_1 - a_p)(a_2 - a_p)\ldots(a_{m-1} - a_p)}{(b_0 + a_p)(b_1 + a_p)(b_2 + a_p)\ldots(b_{m-1} + a_p)} x_p.$$

Nach unserer früheren Bezeichnung ist also:

$$1)\quad f_m(p) = \frac{(a_0 - a_p)(a_1 - a_p)(a_2 - a_p)\ldots(a_{m-1} - a_p)}{(b_0 + a_p)(b_1 + a_p)(b_2 + a_p)\ldots(b_{m-1} + a_p)(b_m + a_p)}$$

$$(\varphi_m) = \varphi_m{}^m,$$

$$2)\quad x_p = \frac{1}{f_p(p)} \{ {}_pA_p \varphi_p^p - {}_pA_{p+1} \varphi_{p+1}^{p+1} + {}_pA_{p+2} \varphi_{p+2}^{p+2} + \ldots$$
$$+ (-1)^m {}_pA_{p+m} \varphi_{p+m}^{p+m} + \ldots \},$$

wo, wie man leicht findet,

$${}_pA_p = 1,$$

$${}_pA_{p+1} = \frac{b_{p+1} + a_{p+1}}{a_p - a_{p+1}},$$

$${}_pA_{p+2} = \frac{b_{p+1} + a_p}{a_p - a_{p+1}} \frac{b_{p+2} + a_{p+2}}{a_p - a_{p+2}}$$

$${}_pA_{p+3} = \frac{(b_{p+1} + a_p)(b_{p+2} + a_p)(b_{p+3} + a_{p+3})}{(a_p - a_{p+1})(a_p - a_{p+2})(a_p - a_{p+3})}$$

$${}_pA_{p+4} = \frac{(b_{p+1} + a_p)(b_{p+2} + a_p)(b_{p+3} + a_p)(b_{p+4} + a_{p+4})}{(a_p - a_{p+1})(a_p - a_{p+2})(a_p - a_{p+3})(a_p - a_{p+4})}$$

. . . .

Um nun $J \frac{1}{a_p + b_m}$ zu finden, bestimmen wir den Coefficienten von φ_m im Werthe von x_p. Hierzu ist aber

$$\varphi^0{}_m = \varphi_m,$$

$$\varphi^1{}_m = \frac{a_0 + b_m}{b_0 - b_m} \varphi_m - \frac{a_0 + b_0}{b_0 - b_m} \varphi_0,$$

$$\varphi^2{}_m = \frac{a_1+b_m}{b_1-b_m}\varphi^1{}_m - \frac{a_1+b_1}{b_1-b_m}\varphi^1{}_1$$

$$= \frac{a_0+b_m}{b_0-b_m}\frac{a_1+b_m}{b_1-b_m}\varphi_m - \frac{a_0+b_1}{b_0-b_1}\frac{a_1+b_1}{b_1-b_m}\varphi_1 - \frac{a_0+b_0}{b_1-b_0}\frac{a_1+b_0}{b_0-b_m}\varphi_0,$$

$$\varphi^3{}_m = \frac{a_2+b_m}{b_2-b_m}\varphi^2{}_m - \frac{a_2+b_2}{b_2-b_m}\varphi^2{}_2$$

$$= \frac{a_0+b_m}{b_0-b_m}\frac{a_1+b_m}{b_1-b_m}\cdot\frac{a_2+b_m}{b_2-b_m}\varphi_m - \frac{a_0+b_2}{b_0-b_2}\frac{a_1+b_2}{b_1-b_2}\frac{a_2+b_2}{b_2-b_m}\varphi_2$$

$$- \frac{a_0+b_1}{b_0-b_1}\frac{a_1+b_1}{b_2-b_1}\frac{a_2+b_1}{b_1-b_m}\varphi_1 - \frac{a_0+b_0}{b_1-b_0}\frac{a_1+b_0}{b_2-b_0}\frac{a_2+b_0}{b_0-b_m}\varphi_0,$$

$$\varphi^4{}_m = \frac{(a_0+b_m)(a_1+b_m)(a_2+b_m)(a_3+b_m)}{(b_0-b_m)(b_1-b_m)(b_2-b_m)(b_3-b_m)}\varphi_m$$

$$- \frac{(a_0+b_3)(a_1+b_3)(a_2+b_3)(a_3+b_3)}{(b_0-b_3)(b_1-b_3)(b_2-b_3)(b_3-b_m)}\varphi_3$$

$$- \frac{(a_0+b_2)(a_1+b_2)(a_2+b_2)(a_3+b_2)}{(b_0-b_2)(b_1-b_2)(b_3-b_2)(b_2-b_m)}\varphi_2$$

$$- \frac{(a_0+b_1)(a_1+b_1)(a_2+b_1)(a_3+b_1)}{(b_0-b_1)(b_2-b_1)(b_3-b_1)(b_1-b_m)}\varphi_1$$

$$- \frac{(a_0+b_0)(a_1+b_0)(a_2+b_0)(a_3+b_0)}{(b_1-b_0)(b_2-b_0)(b_3-b_0)(b_0-b_m)}\varphi_0$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,$$

$$\varphi^m_m = \frac{(a_0+b_m)(a_1+b_m)\ldots(a_{m-1}+b_m)}{(b_0-b_m)(b_1-b_m)\ldots(b_{m-1}-b_m)}\varphi_m$$

$$- \frac{(a_0+b_{m-1})(a_1+b_{m-1})\ldots(a_{m-1}+b_{m-1})}{(b_0-b_{m-1})(b_1-b_{m-1})\ldots(b_{m-1}-b_m)}\varphi_{m-1}$$

$$- \frac{(a_0+b_{m-2})(a_1+b_{m-2})\ldots}{(b_0-b_{m-2})(b_1-b_{m-2})\ldots}$$

$$\frac{\ldots(a_{m-2}+b_{m-2})(a_{m-1}+b_{m-2})}{\ldots(b_{m-3}-b_{m-2})(b_{m-1}-b_{m-2})(b_{m-2}-b_m)}\varphi_{m-2}$$

$$- \frac{(a_0+b_{m-3})(a_1+b_{m-3})\ldots}{(b_0-b_{m-3})(b_1-b_{m-3})\ldots}$$

$$\frac{\ldots(a_{m-3}+b_{m-3})(a_{m-2}+b_{m-3})(a_{m-1}+b_{m-3})}{\ldots(b_{m-4}-b_{m-3})(b_{m-2}-b_{m-3})(b_{m-1}-b_{m-3})(b_{m-3}-b_m)}\varphi_{m-3}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$- \frac{(a_0+b_0)(a_1+b_0)(a_2+b_0)\ldots(a_{m-1}+b_0)}{(b_1-b_0)(b_2-b_0)(b_3-b_0)\ldots(b_{m-1}-b_0)(b_0-b_m)}\varphi_0.$$

Setzt man die erhaltenen Werthe der A und φ^m_m in die vorige Gleichung 2) ein, so erhält man als Coefficient von φ_m:

$$\lim_{n=\infty}\frac{(b_0+a_p)(b_1+a_p)\ldots(b_n+a_p)}{(a_0-a_p)(a_1-a_p)\ldots(a_{p-1}-a_p)(a_{p+1}-a_p)(a_{p+2}-a_p)\ldots(a_n-a_p)}$$

$$\times\frac{(a_0+b_m)(a_1+b_m)\ldots(a_{p-1}+b_m)(a_{p+1}+b_m)(a_{p+2}+b_m)\ldots(a_n+b_m)}{(b_0-b_m)(b_1-b_m)\ldots(b_{m-1}-b_m)(b_{m+1}-b_m)\ldots(b_n-b_m)},$$

oder:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(a_p+b_0)(a_p+b_1)\dots(a_p+b_n)}{(a_p-a_0)(a_p-a_1)(a_p-a_{p-1})(a_p-a_{p+1})(a_p-a_{p+2})\dots(a_p-a_n)}$$
$$\times \frac{(b_m+a_0)(b_m+a_1)\dots(b_m+a_n)}{(b_m-b_0)(b_m-b_1)\dots(b_m-b_{m-1})(b_m-b_{m+1})(b_m-b_{m+2})\dots(b_m-b_n)}$$
$$\times \frac{1}{b_m+a_p}.$$

Vertauschen wir noch in diesem Ausdrucke die Indexe p und m mit einander, so stellt dann derselbe die gesuchte inverse Coefficientenfunction $J\dfrac{1}{a_p+b_m}$ dar. Um eine kürzere Formel für dieselbe zu erhalten, führen wir die Functionen ein:

$$\begin{aligned} G(u) &= (u+a_0)(u+a_1)(u+a_2)\dots(u+a_n), \\ H(v) &= (v+b_0)(v+b_1)(v+b_2)\dots(v+b_n), \\ G'(u) &= (u-a_0)(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n), \\ H'(v) &= (v-b_0)(v-b_1)(v-b_2)\dots(v-b_n). \end{aligned}$$

Alsdann entsteht:

$$J\frac{1}{a_p+b_m} = \frac{H(a_m)}{\left[\dfrac{1}{u-a_m}G'(u)\right]_{u=a_m}} \cdot \frac{G(b_p)}{\left[\dfrac{1}{v-b_p}H'(v)\right]_{v=b_p}} \cdot \frac{1}{a_m+b_p}.$$

Das behandelte System von Gleichungen enthält nun so lange keinen Widerspruch, als das Product der durch Gleichung 1) definirten Functionen $f_m(m)$ nicht verschwindet. Verschwindet daher in dem Product dieser Functionen der Nenner nicht, so darf auch der Zähler nicht zu Null werden, oder es müssen die sämmtlichen mit a bezeichneten Functionswerthe von einander verschieden sein. Verschwindet der Nenner oder wird derselbe unendlich, so darf im ersten Falle auch der Zähler in nicht höherer Ordnung zu Null, im zweiten Falle in nicht niederer Ordnung unendlich werden, als der Nenner. Sind diese Bedingungen erfüllt, so müssen noch die Functionswerthe φ_m die Eigenschaft haben, dass der vermittelst der inversen Coefficientenfunction leicht darstellbare Werth irgend einer der Unbekannten x sich nur um einen Werth δ ändert, der kleiner bleibt, als irgend eine noch so kleine gegebene Grösse ε, wenn man die Anzahl n der Gleichungen, die die Werthe der ersten n Unbekannten lieferten, um eine beliebige Anzahl vermehrt.

Die Auflösung des eben behandelten Systemes von Gleichungen kann in einem bestimmten Falle leicht auf die Auflösung des im vorigen Paragraphen behandelten Systemes zurückgeführt werden. Ist nämlich die Coefficientenfunction

$$f_0(m,p) = \frac{1}{b_m+a_p} = \frac{1}{t_m-\alpha_p}$$

so beschaffen, dass entweder sämmtliche t dem absoluten Werthe nach grösser sind als sämmtliche α, oder in derselben Beziehung sämmtliche α grösser sind als sämmtliche t, so kann man die Entwickelung der Coefficientenfunction $\frac{1}{t_m - \alpha_p}$ im ersten Falle vornehmen nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{\alpha_p}{t_m}$, im zweiten Falle nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{t_m}{\alpha_p}$. Da die Rechnung in beiden Fällen ziemlich dieselbe ist, so führen wir sie nur durch für den Fall, für welchen die Entwickelung

$$\frac{1}{t_m\left(1-\frac{\alpha_p}{t_m}\right)} = \frac{1}{t_m}\left\{1+\frac{\alpha_p}{t_m}+\left(\frac{\alpha_p}{t_m}\right)^2+\left(\frac{\alpha_p}{t_m}\right)^3+\left(\frac{\alpha_p}{t_m}\right)^4+\ldots\right\}$$

eine convergente ist. In diesem Falle kann nämlich das System

$$\lim_{n=\infty} \begin{matrix} 0 \\ m \\ n \end{matrix}\left| \sum_0^n{}^p \frac{1}{t_m - a_p} x_p = \varphi_m \right|,$$

oder das System

$$\lim_{n=\infty} \begin{matrix} 0 \\ m \\ n \end{matrix}\left| \sum_0^n{}^p \frac{1}{1-\frac{a_p}{t_m}} x_p = \varphi_m t_m \right|$$

gelöst werden mit Hilfe der beiden einfacheren Systeme:

A) $$\lim_{n=\infty} \begin{matrix} 0 \\ m \\ n \end{matrix}\left| \sum_0^n{}^p \frac{1}{(t_m)^p} \mu_p = \frac{\varphi_m}{t_m} \right|,$$

B) $$\lim_{n=\infty} \begin{matrix} 0 \\ p \\ n \end{matrix}\left| \sum_0^n{}^q (\alpha_q)^p x_q = \mu_p \right|.$$

Nach § 4 entsteht nämlich nicht nur das wirklich zu lösende System aus den beiden Systemen A) und B), sondern es kann auch die inverse Coefficientenfunction des wirklich zu lösenden Systemes leicht aus den inversen Coefficientenfunctionen der Systeme A) und B) abgeleitet werden, während diese Coefficientenfunctionen selbst wieder leicht aus dem im vorigen Paragraphen behandelten Systeme beschafft werden können.

Nach VI), § 4, ist

$$J\frac{1}{1-\frac{\alpha_p}{t_m}} = \sum{}^r J\left(\frac{1}{t_p}\right)^r J(\alpha_r)_m.$$

Nach § 5 ist aber, wenn wir ganz die dortige Bezeichnung beibehalten,

$$J(\alpha_r)^m = {}_mA_r.$$

Um ferner $J\left(\frac{1}{t_p}\right)^r$ zu erhalten, benützen wir den Satz II) in § 4 und die Resultate in § 5. Es findet sich dann

$$J\left(\frac{1}{t_p}\right)^r = {}_rA'_p,$$

wenn ${}_rA'_p$ erklärt wird durch die Relation:

$$\frac{\left(z-\frac{1}{t_0}\right)\left(z-\frac{1}{t_1}\right)\left(z-\frac{1}{t_2}\right)\cdots\left(z-\frac{1}{t_{r-1}}\right)\left(z-\frac{1}{t_{r+1}}\right)\left(z-\frac{1}{t_{r+2}}\right)\cdots}{\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_0}\right)\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_1}\right)\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_{r-1}}\right)\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_{r+1}}\right)\left(\frac{1}{t_r}-\frac{1}{t_{r+2}}\right)}$$

$$= {}_rA'_0 + {}_rA'_1\, z + {}_rA'_2\, z^2 + \ldots + {}_rA'_p\, z^p + \ldots .$$

Es ist daher

$$J\,\frac{1}{1-\frac{\alpha_p}{t_m}} = \sum\nolimits_r {}_mA_r\, {}_rA'_p\,,$$

und nach IV), § 4,

$$J\,\frac{1}{t_m-\alpha_p} = t_p \sum\nolimits_r {}_mA_r\, {}_rA'_p\,.$$

Bei Vergleichung dieser Formel mit der früher für das vorgelegte System Gleichungen erlangten Werthe der inversen Coefficientenfunction bekommen wir hier die allgemeine Summationsformel:

$$t_p \sum\nolimits^r {}_mA_r\, {}_rA'_p = \frac{H(-\alpha_m)}{\left[\frac{1}{u-\alpha_p}\,G'(u)\right]_{u=\alpha_m}} \cdot \frac{G(t_p)}{\left[\frac{1}{v-t_p}\,H'(v)\right]_{v=t_p}} \cdot \frac{1}{t_p-\alpha_m}\,.,$$

die giltig ist, wenn man in den früheren für H, G, H' und G' angegebenen Werthen allgemein statt a_m, $-\alpha_m$, statt b_m, t_p setzt und deren weitere Giltigkeitsbedingungen dieselben sind, wie die, unter denen überhaupt die beiden durchgeführten Lösungsarten des vorgelegten Systemes möglich waren.

Die analoge Summenformel, die folgen würde, wenn wir annähmen, dass sämmtliche α grösser als sämmtliche t sind, kann leicht in analoger Weise hergeleitet werden.

Wir gehen nun dazu über, den in der allgemeinen Berechnung des vorgelegten Systemes von Gleichungen noch unbestimmt gelassenen Werthen der a, b und φ specielle Formen zu geben. Es sei zunächst

$$\varphi_m = -\frac{1}{a'_0 + b_m}\,.$$

Alsdann findet man

$$\varphi^m{}_m = -\frac{(a_0-a'_0)(a_1-a'_0)(a_2-a'_0)\ldots(a_{m-1}-a'_0)}{(a'_0+b_0)(a'_0+b'_1)(a'_0+b_2)\ldots(a'_0+b_m)}$$

und

$$x_m = \frac{1}{f_m(m)}\left\{ {}_mA_m\,\varphi_m^m - {}_mA_{m+1}\,\varphi_{m+1}^{m+1} + {}_mA_{m+2}\,\varphi_{m+2}^{m+2} \mp \ldots \right\}$$

$$= (-1)^m \frac{(a_m+b_0)(a_m+b_1)\ldots(a_m+b_m)}{(a_0-a_m)(a_1-a_m)\ldots(a_{m-1}-a_m)}$$

$$\times \frac{(a'_0-a_0)(a'_0-a_1)\ldots(a'_0-a_n)(a_m+b_{m+1})(a_m+b_{m+2})\ldots(a_m+b_n)}{(a_m-a'_0)(a'_0+b_0)(a'_0+b_1)\ldots(a'_0+b_n)(a_m-a_{m+1})(a_m-a_{m+2})\ldots(a_m-a_n)}$$

$$x_m = \frac{(a_m+b_0)(a_m+b_1)\dots(a_m+b_n)(a'_0-a_0)(a'_0-a_1)\dots}{(a_m-a_0)(a_m-a_1)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}$$
$$\frac{(a'_0-a_n)}{(a_m-a'_0)(a'_0+b_0)\dots(a'_0+b_n)}.$$

Auf denselben Werth von x_m muss man im Allgemeinen, so lange n endlich ist, stets nothwendig auch kommen, wenn man den angenommenen Werth von $\varphi_m = -\frac{1}{a'_0+b_m}$ in die obige allgemeine Formel zur Lösung des vorgelegten Systemes von Gleichungen einsetzt. Dieser Werth ist aber:

$$\frac{(a_m+b_0)(a_m+b_1)\dots\dots(a_m+b_n)}{(a_m-a_0)(a_m-a_1)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}$$
$$\sum_0^n{}^p \frac{G(b_p)}{\left[\frac{1}{v-b_p}H'\right]_{v=b_p}} \cdot \frac{-1}{(a_m+b_p)(a'_0+b_p)}.$$

Vergleicht man die beiden für x_m gefundenen Werthe, so entsteht bei Weglassung gleicher Factoren die allgemeine Summenformel:

$$\sum_0^n{}^p \frac{(a_0+b_p)(a_1+b_p)\dots(a_n+b_p)}{(b_p-b_0)(b_p-b_1)\dots(b_p-b_{p-1})\,b_p-b_{p+1})\dots(b_p-b_n)}$$
$$\times\frac{1}{(a_m+b_p)(a'_0+b_p)}$$
$$=\frac{(a'_0-a_0)(a'_0-a_1)\dots(a'_0-a_n)}{(a'_0-a_m)(a'_0+b_0)(a'_0+b_1)\dots(a'_0+b_n)}.$$

Diese Formel gilt unter denselben Bedingungen, unter denen das vorgelegte System Gleichungen überhaupt auflösbar ist und sie gilt auch noch für ein unendlich grosses n, wenn die beiden Werthe von x_m (m allgemein eine beliebige ganze positive Zahl zwischen 0 und n incl.), aus denen diese Summenformel abgeleitet wurde, durch endliche Ausdrücke der gebrauchten Form darstellbar sind.

Wenden wir im Besondern auf diese Summenformel die erlaubte Substitution an:

$$b_p = p\,;\quad a_m = u+m,$$

so entsteht auf der linken Seite:

$$\sum_0^n{}^p (-1)^{n-p}\frac{(u+p)(u+p+1)(u+p+2)\dots(u+p+n)}{(u+p+m)(a'_0+p)\,.\,p\,!\,(n-p)!}$$
$$=(-1)^n\frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n)}{n\,!\,(u+m)\,a'_0}\Big\{1-\frac{n}{1}\cdot\frac{u+n+1}{u}\cdot\frac{a'_0}{a'_0+1}\cdot\frac{u+m}{u+m+1}$$
$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{u+n+1}{u}\cdot\frac{u+n+2}{u+1}\cdot\frac{a'_0}{a'_0+1}\cdot\frac{a'_0+1}{a'_0+2}\cdot\frac{u+m}{u+m+1}\cdot\frac{u+m+1}{u+m+2}+\dots\Big\}.$$

Die in Klammern eingeschlossene Summe lässt sich nach der Gaussi'schen Bezeichnungsweise kürzer darstellen durch

$$F\begin{pmatrix}-n & u+n+1 & u+m & a'_0 & 1\\ u & u+m+1 & a'_0+1 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite der Summenformel giebt dagegen:

$$(-1)^n \frac{(u-a'_0)(u-a'_0+1)\ldots(u-a'_0+n)}{(u-a'_0+m)\,a'_0(a'_0+1)(a'_0+2)\ldots(a'_0+n)}$$

oder, wenn wir Γ-Functionen einführen nach der Relation:

$$\Gamma a+1=a\,\Gamma a\,,$$

$$(-1)^n \frac{\Gamma u-a'_0+n+1\;\Gamma a'_0}{(u-a'_0+m)\;\Gamma u-a'_0\;\Gamma a'_0+n+1}\,.$$

Aus der allgemeinen Summenformel entsteht also nach den angeführten Substitutionen:

$$F\begin{pmatrix}-n & u+n+1 & u+m & a'_0 & \\ u & u+m+1 & a'_0+1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{(u+m)}{u-a'_0+m}$$

$$\frac{\Gamma n+1\;\Gamma u\;\Gamma a'_0+1\;\Gamma u-a'_0+n+1}{\Gamma u+n+1\;\Gamma u-a'_0\;\Gamma a'_0+n+1}\,.$$

Ist noch $m=n$, so entsteht hieraus die Pfaff'sche Summenformel

$$F\begin{pmatrix}-n & u+n & a'_0 & \\ u & a'_0+1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{\Gamma n+1\;\Gamma u\;\Gamma a'_0+1\;\Gamma u-a'_0+n}{\Gamma u+n\;\Gamma u-a'_0\;\Gamma a'_0+n+1}\,.$$

Ist dagegen $u=a'_0$, so erhält man wegen des in der vorigen Formel im Nenner vorkommenden Factors $\Gamma u-a'_0=\Gamma 0=\infty$

$$F\begin{pmatrix}-n & u+n+1 & u+m & \\ u+1 & u+m+1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0$$

giltig so lange $m\leqq n$ und so lange die Elemente dieser hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung den Bedingungen für die Lösbarkeit des zu Grunde gelegten Systemes genügen.

Ist ferner bei weiterer Specialisirung

$$a_m=2m+1;\quad b_m=2m,\quad a'_0=2n+3,$$

so erhält man bei Substitution dieser Werthe in den obigen allgemeinen Werth von x_m

$$x_m=(-1)^{n-m+1}\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(2m+1)}{2^{n-m+1}\,(n-m+1)!\;(4n+3)(4n+1)\ldots(2n+m+3)}\,.$$

Ist dagegen

$$a_m=2m+3,\quad b_m=2m;\quad a'_0=2n+5,$$

so entsteht:

$$x_m=(-1)^{n-m+1}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)\ldots(2m+3)(2m+2)}{2^{n-m+1}\,(n-m+1)!\;(4n+5)(4n+3)\;\ldots(2n+m+5)}\,.$$

Bildet man nun für den vorigen Fall

$$\varphi_0\,\xi^{2n+2}+x_n\,\xi^{2n}+x_{n-1}\,\xi^{2n-2}+\ldots x_{n-m}\,\xi^{2(n-m)}+\ldots+x_0$$

$$=\frac{1.2.3\ldots 2n+2}{1.3.5\ldots 4n+3}\,P^{2n+2}(\xi),$$

für den letzten Fall:

$$\xi\,\{\varphi_0\,\xi^{2n+2}+x_n\,\xi^{2n}+x_{n-1}\,\xi^{2n-2}+\ldots+x_{n-m}\,\xi^{2(n-)m}+\ldots+x_0\}$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(2n+3)}{1.3.5\ldots(4n+5)}\,P^{2n+3}(\xi),$$

so findet man, dass $P^{2n+2}(\xi)$ oder $P^{2n+3}(\xi)$ gerade der Coefficient von α^{2n+2} oder α^{2n+3} ist in der Entwickelung von $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\xi+\alpha^2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von α. Diesen Zusammenhang zwischen den Kugelfunctionen und den Lösungen des durch die angegebenen Substitutionen entstehenden Systemes linearer Gleichungen hat zuerst Gauss erkannt; vergl. dessen *Methodus uova integr. valores etc.*, und Jacobi auf einem ganz andern Wege streng nachgewiesen, vergl. dessen: Ueber Gauss's neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden, Journal von Crelle Bd. 1.

Während die bisherigen Specialfälle ein endliches, wenn auch im Allgemeinen unbeschränktes n voraussetzten, möge nun hier noch ein Fall Platz finden, in welchem wir ohne Weiteres n sich dem Unendlichen nähern lassen.

Ist nämlich

$$a_{2p}=(2p+1)z; \quad a_{2p+1}=-(2p+1)z,$$
$$b_{2p}=-2pz; \quad b_{2p-1}=2pz,$$

so findet sich:

$$\frac{H(v)}{G'(u)}=\frac{v\,.\,(v+2z)(v-2z)(v+4z)(v-4z)(v+6z)(v-6z)\ldots}{(u-z)(u+z)(u-3z)(u+3z)(u-5z)(u+5z)(u-7z)\ldots}$$

$$\frac{G(u)}{H'(u)}=\frac{(u+z)(u-z)(u+3z)(u-3z)(u+5z)(u-5z)(u+7z)\ldots}{v\,.\,(v-2z)(v+2z)(v-4z)(v+4z)(v-6z)(v+6z)\ldots}$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{6n+m}{6n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\ldots$$

$$\cos\frac{q\pi}{2n}=\frac{(n-q)\pi}{2n}\cdot\frac{n+q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{2n}\cdot\frac{3n+q}{4n}\cdot\frac{5n-q}{4n}\cdot\frac{5n+q}{6n}\cdot\frac{7n-q}{6n}\ldots,$$

also ist auch

$$\frac{H(v)}{G'(u)}=-\frac{\sin\frac{v\pi}{2z}}{\cos\frac{u\pi}{2z}}.$$

$$\frac{G(u)}{H'(v)}=\frac{\cos\frac{u\pi}{2z}}{\sin\frac{v\pi}{2z}}.$$

Das Bestehen dieser letzteren Gleichung erfordert aber, dass n als ungerade Zahl sich dem Unendlichen nähere, wie man sofort erkennt, wenn man rechter Hand die Werthe von $\cos\frac{u\pi}{2z}$ und $\sin\frac{v\pi}{2z}$ so einsetzt, dass sich in den einzelnen Factoren bei Ausführung der Division die einzelnen Nenner wegheben.

Denken wir uns nun in den beiden letzten Gleichungen z als constant, dagegen u und v als veränderlich, so entsteht für

$$\frac{H(a_m)}{\left[\frac{1}{u-a_m}G'(u)\right]_{u=a_m}} = -\frac{\sin\overline{m+1}\frac{\pi}{2}}{\left[\frac{1}{u-\overline{m+1}z}\cos\frac{u\pi}{2z}\right]_{u=\overline{m+1}z}}$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\frac{\pi}{2z}(-1)^{\frac{m}{2}}} = \frac{2z}{\pi}, \text{ wenn } m \text{ gerade},$$

$$= \frac{\sin m\frac{\pi}{2}}{\left[\frac{1}{u+mz}\cos\frac{u\pi}{2z}\right]_{u=-mz}} = \frac{2z}{\pi}, \text{ wenn } m \text{ ungerade.}$$

Es ist also immer, gleichgiltig, welchen Werth m habe:

$$\frac{H(a_m)}{\left[\frac{1}{u-a_m}G'(u)\right]_{u=a_m}} = \frac{2z}{\pi}.$$

Aehnlich findet man auch

$$\frac{G(b_p)}{\left[\frac{1}{v-b_p}H'(v)\right]_{v=b_p}} = \frac{2z}{\pi}.$$

Man erhält also in dem angenommenen Falle für die inverse Coefficientenfunction:

$$J\frac{1}{a_p+b_m} = \frac{4z^2}{\pi^2}\frac{1}{a_m+b_p}.$$

Die inverse Coefficientenfunction unterscheidet sich also nur durch einen constanten Factor von der ursprünglichen Coefficientenfunction.

Die letztere Formel giebt nun, wenn man die Werthe von a_m und b_p einsetzt:

1) wenn m gerade $= 2r$, p gerade $= 2s$,

$$J\frac{1}{a_m+b_p} = \frac{4z}{\pi^2}\frac{1}{2(r-s)+1},$$

2) wenn m gerade $= 2r$, p ungerade $= 2s-1$,

$$J\frac{1}{a_m+b_p} = \frac{4z}{\pi^2}\frac{1}{2(r+s)+1},$$

3) wenn m ungerade $= 2r+1$, p gerade $= 2s$,

$$J\frac{1}{a_m+b_p} = \frac{4z}{\pi^2}\frac{-1}{2(r+s)+1},$$

4) wenn m ungerade $= 2r+1$, p ungerade $= 2s-1$,

$$J\frac{1}{a_m+b_p} = \frac{4z}{\pi^2}\frac{-1}{2(r-s)+1}.$$

Man erhält also für die Unbekannten x die Werthe:

$$x_{2r}=\frac{4z}{\pi^2}\left\{\frac{\varphi_0}{2r+1}+\frac{\varphi_1}{2r+3}+\frac{\varphi_2}{2r-1}+\frac{\varphi_3}{2r+5}+\frac{\varphi_4}{2r-3}\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_5}{2r+7}+\frac{\varphi_6}{2r-5}+\frac{\varphi_7}{2r+9}+\cdots\right\}$$

$$x_{2r+1}=-\frac{4z}{\pi^2}\left\{\frac{\varphi_0}{2r+1}+\frac{\varphi_1}{2r-1}+\frac{\varphi_2}{2r+3}+\frac{\varphi_3}{2r-3}+\frac{\varphi_4}{2r+5}\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_5}{2r-5}+\frac{\varphi_6}{2r+7}+\frac{\varphi_7}{2r-7}+\cdots\right\},$$

wobei, der Herleitung dieser Formeln gemäss, die eingeklammerten Reihen mit einem solchen Functionswerthe von φ schliessen müssen, dass dessen Index eine ungerade Zahl ist, während die Lösbarkeit des Problemes selbst erfordert, dass die Functionswerthe φ solchen Bedingungen genügen, die die Convergenz der eingeklammerten Reihen erfordert. Die sonstige Beschaffenheit der Functionswerthe φ ist ganz willkürlich. Dieser letztere Umstand berechtigt uns, noch einige bemerkenswerthe Folgerungen aus denjenigen Relationen zu ziehen, die man erhält, wenn man die gefundenen Werthe der Unbekannten x einsetzt in das ursprünglich gegebene System von Gleichungen. Es ist die $(2m-1)^{\text{te}}$ Gleichung des vorgelegten Systemes:

$$\frac{x_0}{(1+2m)z}+\frac{x_1}{(-1+2m)z}+\frac{x_2}{(3+2m)z}+\frac{x_3}{(-3+2m)z}$$
$$+\frac{x_4}{(5+2m)z}+\frac{x_5}{(-5+2m)z}+\cdots=\varphi_{2m-1},$$

dagegen die $(2m)^{\text{te}}$ Gleichung:

$$\frac{x_0}{(1-2m)z}+\frac{x_1}{(-1-2m)z}+\frac{x_2}{(3-2m)z}+\frac{x_3}{(-3-2m)z}$$
$$+\frac{x_4}{(5-2m)z}+\frac{x_5}{(-5-2m)z}+\cdots=\varphi_{2m}.$$

Setzen wir nun in diese Gleichungen die für x gefundenen Werthe ein, indem wir beide sich ergebende Formeln durch ein doppeltes Vorzeichen andeuten, so entsteht:

$$\frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{1}+\frac{\varphi_1}{3}+\frac{\varphi_2}{-1}+\frac{\varphi_3}{5}+\frac{\varphi_4}{-3}+\frac{\varphi_5}{7}+\cdots\right]\right.$$
$$-\frac{1}{-1\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{1}+\frac{\varphi_1}{-1}+\frac{\varphi_2}{3}+\frac{\varphi_3}{-3}+\frac{\varphi_4}{5}+\frac{\varphi_5}{-5}+\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{3\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{3}+\frac{\varphi_1}{5}+\frac{\varphi_2}{1}+\frac{\varphi_3}{7}+\frac{\varphi_4}{-1}+\frac{\varphi_5}{9}+\cdots\right]$$
$$-\frac{1}{-3\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{3}+\frac{\varphi_1}{1}+\frac{\varphi_2}{5}+\frac{\varphi_3}{-1}+\frac{\varphi_4}{7}+\frac{\varphi_5}{-3}+\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{5\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{5}+\frac{\varphi_1}{7}+\frac{\varphi_2}{3}+\frac{\varphi_3}{9}+\frac{\varphi_4}{1}+\frac{\varphi_5}{11}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{-5\pm 2m}\left[\frac{\varphi_0}{5}+\frac{\varphi_1}{3}+\frac{\varphi_2}{7}+\frac{\varphi_3}{+1}+\frac{\varphi_4}{9}+\frac{\varphi_5}{-1}+\ldots\right]$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Big\}=\begin{cases}\varphi_{2m-1}\\ \varphi_{2m}\end{cases}.$$

Diese Gleichung gilt nun für Werthe von φ, die innerhalb sehr weiter Grenzen willkürlich angenommen werden können, sie gilt also identisch, und es müssen nun die Coefficienten der einzelnen Functionswerthe φ dieser Forderung der Identität genügen, oder es ist

$$3)\quad \frac{4}{\pi^2}\varphi_{2m-1}\left\{\frac{1}{(1+2m)^2}+\frac{1}{(1-2m)^2}+\frac{1}{(3+2m)^2}+\frac{1}{(3-2m)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(5+2m)^2}+\frac{1}{(5-2m)^2}+\ldots\right\}=\varphi_{2m-1}.$$

$$4)\quad \frac{4}{\pi^2}\varphi_{2m}\left\{\frac{1}{(1-2m)^2}+\frac{1}{(1+2m)^2}+\frac{1}{(3-2m)^2}+\frac{1}{(3+2m)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(5-2m)^2}+\frac{1}{(5+2m)^2}+\ldots\right\}=\varphi_{2m}.$$

$$5)\quad \frac{4}{\pi^2}\varphi_{2s}\left\{\frac{1}{1\pm 2m}\cdot\frac{1}{-2s+1}+\frac{1}{1\mp 2m}\,\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{3\pm 2m}\,\frac{1}{-2s+3}\right.$$
$$+\frac{1}{3\mp 2m}\,\frac{1}{2s+3}+\frac{1}{5\pm 2m}\,\frac{1}{-2s+5}+\frac{1}{5\mp 2m}\,\frac{1}{2s+5}$$
$$\left.+\frac{1}{7\pm 2m}\,\frac{1}{-2s+7}+\frac{1}{7\mp 2m}\,\frac{1}{2s+7}+\ldots\right\}=0.$$

$$6)\quad \frac{4}{\pi^2}\varphi_{2s-1}\left\{\frac{1}{1\pm 2m}\,\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{\mp 2m+1}\,\frac{1}{-2s+1}+\frac{1}{3\pm 2m}\,\frac{1}{2s+3}\right.$$
$$+\frac{1}{\mp 2m+3}\cdot\frac{1}{-2s+3}+\frac{1}{5\pm 2m}\,\frac{1}{2s+5}+\frac{1}{\mp 2m+5}$$
$$\left.\frac{1}{-2s+5}+\frac{1}{7\pm 2m}\,\frac{1}{2s+7}+\frac{1}{\mp 2m+7}\,\frac{1}{-2s+7}+\ldots\right\}=0.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) ziehen wir die für ein beliebiges reelles ganzes positives m giltige Entwickelung:

$$\frac{1}{(1+2m)^2}+\frac{1}{(1-2m)^2}+\frac{1}{(3+2m)^2}+\frac{1}{(3-2m)^2}+\frac{1}{(5+2m)^2}$$
$$+\frac{1}{(5-2m)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{4},$$

die für den einfachsten Fall $m=0$ übergeht in die bekannte Formel:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) dagegen ergiebt sich:

$$\frac{1}{1\pm 2m}\,\frac{1}{1-2s}+\frac{1}{1\mp 2m}\,\frac{1}{1+2s}+\frac{1}{3\pm 2m}\,\frac{1}{3-2s}+\frac{1}{3\mp 2m}\,\frac{1}{3+2s}$$
$$+\frac{1}{5\pm 2m}\,\frac{1}{5-2s}+\ldots=0,$$

eine Gleichung, die gilt für ein beliebiges reelles ganzes positives s und m, so lange $s \gtrless m$.

In ganz analoger Weise, wie das in diesem Paragraphen behandelte System linearer Gleichungen gelöst wurde, lassen sich auch solche Systeme lösen, deren Coefficientenfunction auf die Form gebracht werden kann:

$$f_0(m, p) = \frac{\alpha_p + \beta_m}{a_p + b_m},$$

wo α und a beliebige Functionswerthe des Argumentes p, β und b beliebige Functionswerthe des Argumentes m bedeuten, die aber für ein beliebiges p und q den Bedingungen genügen:

$$a_p\, \alpha_q = a_q\, \alpha_p; \quad b_p\, \beta_q = b_q\, \beta_p.$$

Man vergleiche ferner hierzu noch das System beliebig vieler linearer Gleichungen, dessen Lösung mitgetheilt wurde von Dr. E. Heine im Journal von Crelle Bd. 57: „Ueber die Zähler und Nenner von Kettenbrüchen."

§ 7.

Anwendung auf Kettenbrüche.

Soll eine Function von x, etwa $f(x)$ in einen Kettenbruch entwickelt werden, so kann diese Entwickelung entweder vorgenommen werden, wenn man ein System Gleichungen kennt von der Form:

$$1) \quad \left\{\begin{array}{l} f_0 = \mu_1 f_1 - \nu_1 f_2 \\ f_1 = \mu_2 f_2 - \nu_2 f_3 \\ f_2 = \mu_3 f_3 - \nu_3 f_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n = \mu_{n+1} f_{n+1} - \nu_{n+1} f_{n+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{array}\right.$$

wo nun die mit f bezeichneten Grössen wiederum Functionen von x sind oder indem man ohne Weiteres die aus diesen Gleichungen abgeleitete Form des Kettenbruches:

$$2) \quad f_1 = \cfrac{f_0}{\mu_1 - \cfrac{\nu_1}{\mu_2 - \cfrac{\nu_2}{\mu_3 - \cfrac{\nu_3}{\mu_4 - \cdots}}}} \quad \textit{in inf.}$$

angiebt. Es treten nun die beiden Aufgaben auf: 1) die Werthe der μ und ν zu bestimmen, wenn die Function f_1 und die Form des Kettenbruches gegeben ist, 2) die Function f_1 zu bestimmen, wenn der Kettenbruch gegeben ist. Diese letztere Aufgabe schliesst selbstverständlich die Frage nach der Convergenz oder Divergenz des Kettenbruches mit ein.

Bezeichnet man nun die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche des Kettenbruches durch

$$\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \dots \frac{Z_n}{N_n}, \dots,$$

so dass

$$3) \qquad \frac{Z_1}{N_1} = \frac{f_0}{\mu_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{f_0\,\mu_2}{\mu_1\,\mu_2 - \nu_1}.$$

Zwischen den einzelnen Z und N bestehen nun bekanntlich folgende Relationen:

$$4) \qquad \begin{aligned} Z_n &= \mu_n Z_{n-1} - \nu_{n-1} Z_{n-2}; \\ N_n &= \mu_n N_{n-1} - \nu_{n-1} N_{n-2}, \end{aligned}$$

$$5) \qquad \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{\nu_n N_{n-1}}{N_{n+1}} \left(\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}\right).$$

und es ist offenbar für $n = \infty = w$

$$\frac{Z_w}{N_w} = f_1.$$

Multiplicirt man sämmtliche Gleichungen, die sich aus 5) ergeben, wenn man linker Hand mit

$$\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1} = f_0 \frac{\nu_1}{N_1 N_2}$$

beginnt und mit

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_n}{N_n}.$$

schliesst, so erhält man

$$6) \qquad \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_n}{N_n} = f_0 \frac{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3 \dots \nu_n}{N_n \,.\, N_{n+1}}; \quad Z_{n+1} N_n - Z_n N_{n+1} = f_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_n.$$

Addirt man ferner sämmtliche Gleichungen, die sich aus der ersten der Gleichungen 6) ergeben, wenn man linker Hand mit

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_n}{N_n}$$

beginnt und mit

$$\frac{Z_w}{N_w} - \frac{Z_{w-1}}{N_{w-1}}$$

schliesst, so folgt

$$7) \qquad \varphi - \frac{Z_n}{N_n} = f_0 \,.\, \nu_1 \,.\, \nu_2 \dots \nu_n \left(\frac{1}{N_n \,.\, N_{n+1}} + \frac{\nu_{n+1}}{N_{n+1}\,N_{n+2}} + \dots\right).$$

Die Gleichung 7), die man noch zur bequemeren Behandlung mit N_n multipliciren kann, gilt nun identisch. Hat man nun aus 4) die allgemeine Form von N_n erkannt, so liefert, wenn überhaupt die Aufgabe bestimmt ist, die Gleichung 7) so viel Bedingungen, als noch unbekannte Grössen in N_n enthalten sind, in Form eines Systemes (beliebig vieler) linearer Gleichungen. Die Auflösung dieses Systemes liefert den Werth von N_n und damit dann auch durch die Gleichungen 4) den allgemeinen Werth von μ_n und ν_n, wordurch aber auch die Entwickelung in den Kettenbruch so gut wie geschehen ist*.

Ist aber der Kettenbruch bereits gegeben, so liefern die Gleichungen 4) die allgemeine Form von Z_n und N_n. Hat man dieselbe festgestellt, so kann man die ebenfalls identisch giltige zweite Gleichung der Gleichungen 6) benutzen, um die Constanten zu bestimmen, die in der allgemeinen erkannten Form von Z_n und N_n vorkommen. Die Bestimmung dieser Constanten führt wiederum auf ein System (beliebig vieler) linearer Gleichungen (wenn die Aufgabe bestimmt ist, auf so viele, als Constanten in N_n und Z_n zu bestimmen sind). Die Auflösung des Systemes führt auf die Kenntniss der Werthe dieser Constanten, das Einsetzen der Werthe derselben in die allgemeine Form von Z_n und N_n auf die Kenntniss des Werthes des n^{ten} Näherungsbruches $\frac{Z_n}{N_n}$ des gegebenen Kettenbruches und $\frac{Z_n}{N_n}$ für $n = \infty$ auf den Werth des Kettenbruches, im Allgemeinen in der Form des Quotienten zweier unendlicher Reihen. Die Kenntniss von $\frac{Z_n}{N_n}$ für ein beliebiges n lässt nun aber leicht auch noch Restuntersuchungen zu, wodurch nun alle Fragen, die mit der oben genannten zweiten Hauptaufgabe für Kettenbrüche im Zusammenhange stehen, gelöst sind.

§ 8.

Anwendung auf physikalische Probleme.

Die Zurückführung physikalischer Thatsachen auf die einfachsten Erklärungsprincipien, die nur die Wirkung zwischen punktförmigen Massen behandeln können, führt in der Regel auf partielle Differentialgleichungen. Die Integration derselben ist der mathematische Ausdruck für die Wechselwirkung endlich ausgedehnter Massen, die allein unserer Beobachtung zugänglich sind. Eine der wichtigsten Anwendungen der Mathematik auf die Physik besteht also in der Integration partieller Differentialgleichungen.

Es hat in der Regel keine Schwierigkeit, eine Function zu finden, die der partiellen Differentialgleichung genügt, oder, mit anderen Worten, es kann die Kenntniss einer Lösung der partiellen Differentialgleichung vorausgesetzt werden. Dabei unterscheidet sich aber die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung von der allgemeinen Lösung einer ge-

* Als Beispiel vergleiche man hierzu: Gauss „*Methodus nova integr. val. ect.*“ Die Entwickelung von

$$\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

in einen Kettenbruch.

wöhnlichen Differentialgleichung dadurch, dass die erstere unendlich viele willkürliche Constanten, die letztere nur eine beschränkte (genau bestimmte) Anzahl solcher Constanten besitzt.

Mit solchen allgemeinen Lösungen partieller Differentialgleichungen, in denen die Constanten beliebige Werthe haben, ist aber so gut wie noch nichts erreicht, vielmehr liegt die Hauptschwierigkeit des Problemes der Integration partieller Differentialgleichungen darin, die Constanten so zu bestimmen, dass das Integral gewissen gegebenen Bedingungen genügt.

Um diesen Bedingungen zu genügen, kann man nun so verfahren, dass man sich die Function u, welche das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung darstellen möge, so dass sie zugleich den gegebenen Nebenbedingungen genügt, entwickelt denkt in eine Reihe, deren Argument in zweckmässiger Weise aus gewissen Lösungen der partiellen Differentialgleichung zusammengesetzt ist. Die Anwendung der gegebenen Bedingungen auf die Function u führt auf identisch gültige Gleichungen, aus denen nun weiter Systeme von (linearen) Gleichungen abzuleiten sind, deren Lösungen die Werthe der zu bestimmenden Constanten liefern.

Die Lösung derartiger Systeme von linearen Gleichungen wird im Allgemeinen gelingen, mit Hilfe des Satzes VII, § 4, wenn es gelingt, gewisse einfache Fälle zu bestimmen, in denen sich die inverse Coefficientenfunction, gemäss der Eigenthümlichkeit des Argumentes der Function u, leicht ergiebt.

IX.

Ueber die Ursache der ungleichen Leitungsfähigkeit der Gase für Wärme.

Von

Dr. MOHR in Bonn.

Der Druck, welchen Gase gegen eine Wand ausüben, den wir mit Spannung bezeichnen und mit Quecksilberhöhen messen, ist die Summe der Anstösse, welche die wägbaren Theile des Gases gegen die Wand ausüben. Die vollkommene Elasticität des Gases bedingt, dass hierbei kein Theil der Bewegung in Wärme umgesetzt wird. Die Spannung des Gases bleibt immer dieselbe. Sie hängt von der Temperatur des Gases und der Natur des in dem Gase vorhandenen chemischen Elementes oder Verbindung ab.

Bei gleicher Spannung enthalten die Gase sehr ungleiche Mengen wägbarer Substanz, und diese wird relativ durch das specifische Gewicht des Gases ausgedrückt. Die absolute Summe der Bewegung des auf die Wand stossenden Gases besteht aus dem Product von dem Gewichte der wägbaren Substanz, multiplicirt mit dem Quadrate der Geschwindigkeit der einzelnen Körpertheilchen.

Nehmen wir 1 Liter Wasserstoffgas und 1 Liter Sauerstoffgas in 2 Cubikdecimetern an, welche durch eine nicht permeable, aber bewegliche Wand getrennt wird, so erleidet diese Wand von beiden Seiten einen gleichen Druck, also keine Verschiebung. Nun ist im Liter Sauerstoff 16 mal so viel wägbare Substanz, als in dem Wasserstoff vorhanden; da aber beide einen gleichen Druck ausüben, so müssen sich die Wasserstoffatome rascher bewegen, als die des Sauerstoffs.

Setzen wir die Geschwindigkeit der Wasserstoffatome $= w$ und die der Sauerstoffatome $= s$, und die specifischen Gewichte wie $1:16$, so ist wegen des gleichen Druckes

$$1 w^2 = 16 s^2,$$

also:

$$w^2 : s^2 = 16 : 1,$$

oder:

$$w : s = \sqrt{16} : \sqrt{1} = 4 : 1.$$

Allgemein verhalten sich die relativen Geschwindigkeiten der Atome zweier Gase bei gleicher Temperatur umgekehrt wie die Quadratwurzeln ihrer specifischen Gewichte.

Nehmen wir das leichteste Gas, den Wasserstoff, als Einheit des specifischen Gewichts an, so erhalten wir nach obigem Satze die folgenden relativen Geschwindigkeiten der Gasatome:

Substanz.	$A.$ Specifisches Gewicht.	$\sqrt{A}.$	Relative Geschwindigkeit. Wasserstoff = 100. $\left(\frac{100}{\sqrt{A}}\right).$
Wasserstoff . . .	1	1	100
Ammoniak . . .	8,5	2,915	34,3
Wasser	9	3	33,3
Stickstoff	14	3,74	26,8
Kohlenoxyd . . .	14	3,74	26,8
Luft	14,5	3,807	26,3
Sauerstoff. . . .	16	4	25
Schwefelwasserstoff	17	4,13	24,2
Salzsäure	18,25	4,272	23,4
Kohlensäure . . .	22	4,69	21,4
Chlor	35,5	5,958	16,7
Bromwasserstoff .	40,5	6,364	15,7
Jodwasserstoff . .	64	8	12,5
Brom	80	8,94	11,2
Jod.	127	11,269	8,87

Die Zahlen dieser Tafel werden auf eine merkwürdige Weise durch die Resultate unterstützt, welche Magnus * über die ungleiche Leitungsfähigkeit der Gase für Wärme erhalten hat. Er mass die Zeit, welche ein Thermometer nothwendig hatte, um in einer Glasröhre eingeschlossen, die von einer constanten Temperatur umgeben war, um eine bestimmte Zahl Grade zu steigen, und zwar in 2 Versuchsreihen von 20° auf 80° C. und von 20° auf 90° C. Da die nur 20 Millim. weite und 100 Millim. lange Glasröhre an allen Stellen vom Dampfe siedenden Wassers umgeben war, so konnte

* Poggendorff, Annalen 112, 502.

von Luftströmungen nur ein sehr kleiner Theil zur Wirkung zukommen. Die von Magnus erhaltenen Resultate sind im Mittel der Beobachtungen folgende:

Es waren erforderlich, um das Thermometer zu erwärmen:

in:	von 20 auf 80°:	von 20 auf 90°:
Wasserstoff . . .	1 Minute,	1,41 Minute,
atmosphärischer Luft	3,5 „	5,23 „
Ammoniak	3,5 „	5,37 „
Kohlensäure . . .	4,25 „	6,37 „

Geschieht die Uebertragung der Wärme von den Wänden der Glasröhre auf das Thermometer durch die Schwingungen der Gasatome, so muss die Geschwindigkeit derselben daran einen grossen Antheil haben.

Die Wirkung der Masse ist schon in die obige Formel eingegangen, indem bei dem besondern Falle angenommen wurde, dass in dem Sauerstoff 16 mal so viel wägbare Substanz als im Wasserstoff anschlage.

Leitungsfähigkeit und Zeit der Erwärmung stehen nothwendig in einem umgekehrten Verhältnisse.

Berechnen wir nun die Magnus'schen Resultate in der Art, dass wir die Leitungsfähigkeit des Wasserstoffs = 100 setzen, und die anderen Gase als umgekehrte Werthe, indem wir 100, resp. 141 durch die Erwärmungszeiten dividiren, so ergeben sich folgende Zahlen:

Substanz.	Aus dem specifischen Gewicht berechnete Geschwindigkeit. $H = 100$.	Aus der Versuchsreihe 20 — 80°.	Aus der Versuchsreihe 20 — 90°.
Wasserstoff . . .	100	$\frac{100}{1} = 100$	$\frac{141}{1,41} = 100$
Atmosphärische Luft	26,72	$\frac{100}{3,5} = 28,5$	$\frac{141}{5,23} = 26,9$
Ammoniak . . .	34	$\frac{100}{3,5} = 28,5$	$\frac{141}{5,37} = 26,3$
Kohlensäure . . .	21,4	$\frac{100}{4,25} = 23,5$	$\frac{141}{6,57} = 22,2$

Wasserstoff, Luft und Kohlensäure stimmen ausgezeichnet; für Luft berechnete Geschwindigkeit 26,72, gefunden 26,9; für Kohlensäure berechnet 21,4, gefunden 22,2. Die unter der obigen Voraussetzung der mechanischen Theorie der Affinität gefundenen Zahlen stimmen mit den Versuchen im ersten Falle bis auf 0,18 Procent, im zweiten bis auf 0,8 Procent. Ammoniak stimmt weniger gut, im günstigsten Falle um 5,5 Procent. Ammoniak und Luft, deren specifische Gewichte sich wie 8,5 und 14,5 verhalten, haben bei Magnus gleiche Erwärmungszeiten. Da aber diese Versuche überhaupt keine sehr scharfen Messungen zulassen, sowie denn auch nur halbe und Viertelminuten aufgeführt werden, so kann man aus den Differenzen von so nahe zusammenfallenden Gasen, wie Luft und Ammoniak, keine nachtheiligen Schlüsse ziehen. Die specifischen Gewichte von Wasserstoff und Kohlensäure verhalten sich wie 1:22, dagegen von Ammoniak zu Luft wie 1:1,7; nun kommt aber noch hinzu, dass vom specifischen Gewichte die Quadratwurzel gezogen wird, wodurch das Verhältniss noch mehr abgeschwächt wird. Die Differenz der Quadratwurzeln beträgt bei Wasserstoff und Kohlensäure 3,6904, dagegen bei Luft und Ammoniak nur 0,304, ist also im ersten Falle mehr wie 12mal so gross. Die grösste Uebereinstimmung zwischen Versuch und Theorie findet also dort statt, wo die Wahrscheinlichkeit eines richtigen Resultates die grösste ist.

Die aufgestellte Ansicht, dass sich die Geschwindigkeiten der Gasatome bei gleichem Drucke umgekehrt wie die Quadratwurzeln der specifischen Gewichte verhalten, findet also in den Magnus'schen Versuchen eine experimentelle Stütze, und die bis jetzt unerklärte grosse Leitungsfähigkeit des Wasserstoffs gegen alle anderen Gase findet in der ungleichen Geschwindigkeit der Gase ihre Begründung, ohne dass man genöthigt wäre, dem Wasserstoff eine metallische Natur zuzuschreiben.

Hierhin gehört auch die bekannte Erscheinung, dass derselbe galvanische Strom durch einen gleich dicken Platindraht geführt im kohlensauren Gase glüht, im Wasserstoff aber noch dunkel bleibt. Bunzen führt dieselbe Erscheinung in seinen gasometrischen Methoden (S. 265) für Kohlensäure und Sauerstoff an, wo der Platindraht immer zuerst und am hellsten in der Kohlensäure glühte, und erklärt die Erscheinung dahin, dass die Kohlensäure unter dem gemeinschaftlichen Einfluss von Leitung und Strahlung ihre Wärme schwieriger abgiebt, als das Sauerstoffgas. An die Stelle dieser Erklärung setzen wir jetzt die bestimmtere, dass das kohlensaure Gas vermöge der geringeren Geschwindigkeit seiner Gasatome gegen Sauerstoff im Verhältniss von 21,4 zu 25 den Platindraht seltener berührt und ihm also weniger Wärme entzieht, und die geringere Geschwindigkeit der Kohlensäure gegen Sauerstoff geht aus dem gleichen Drucke bei ungleichem specifischen Gewichte (22:16) hervor.

Die meisten Autoren, welche über diesen Gegenstand gearbeitet haben, nehmen an, dass die Wärme der einzige Grund von der Spannung der Gase sei. Clausius (Sammlung II, 234) drückt dies so aus: „Man weiss nach dem Gay-Lussac'schen Gesetz, dass der Druck eines vollkommenen Gases bei constantem Volum in gleichem Verhältniss mit der von —273° C. an gerechneten Temperatur, welche wir die absolute Temperatur nennen, wächst, und es folgt daraus, dass die absolute Temperatur der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung proportional ist."

Zunächst nehme ich an, dass der Druck der Gase auf ihre Umgebung von der Grösse der ganzen Bewegung, welche die Gasatome besitzen, abstammt. Nach der Lehre vom absoluten Nullpunkt, die ich selbst nicht annehme, aber denjenigen gegenüber, welche sie annehmen, gebrauchen darf, lässt sich die Summe der Wärme, welche in einem Gase enthalten ist, aus seiner specifischen Wärme und seinem specifischen Gewichte berechnen.

2 Liter Wasserstoffgas wiegen 0,17878 Gramm und 1 Liter Sauerstoffgas wiegt 1,43028 Gramm. Ihre mittlere specifische Wärme (nämlich zweimal die des Wasserstoffs und einmal die des Sauerstoff getheilt durch 3) beträgt 0,2371 gegen Wasser als Einheit. Bei 0° besitzen beide Gase 273° absolute Temperatur; die Summe der darin enthaltenen Wärme beträgt also

$$273 . 1,60906 . 0,2371 = 104,13 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Verbrennt man die 3 Liter oder 1,60906 Gramm Knallgas, so entwickeln sie (weil 1 Gramm Wasserstoff oder 9 Gramm Knallgas 34462 W. E. ausgeben)

$$\frac{34462 . 1,60906}{9} = 6161,2 \text{ W.E.}$$

Die Summe dieser Wärme muss nun vorher in dem Knallgase in irgend einer Form von Bewegung vorhanden gewesen sein, weil eine Bewegung nicht aus Nichts entstehen kann. Ich habe sie als chemische Bewegung aufgestellt, die von der Wärme als solcher verschieden ist, aber beim Austreten durch die chemische Verbindung als Wärme frei wird. Dass die chemische Bewegung raumerfüllend ist, ergab sich aus der ungleichen Ausdehnung der Allotropien von Schwefel, Phosphor, Selen, Arsen, Kohlenstoff u. a. Die specifische Wärme allein kann hier keine bedeutende Rolle spielen, denn sie ist für die Gase vor der Verbrennung 1,61.0,2371 = 0,38 und nach der Verbrennung 1,61, weil sie zur Gewichtseinheit des Wassers = 1 ist. Es sind also durch die Verbrennung selbst 1,61 — 0,38 = 1,23 W. E. scheinbar verschwunden, stecken aber in dem neugebildeten Wasser.

Unter Annahme des absoluten Nullpunktes würde sich die Bewegung so vertheilen:

ganze austretende Bewegung im Knallgas	6161, 2 W. E.,
geht ab reine Wärme	— 104,13 „ „
bleiben für chemische Bewegung . . .	. 6057,07 W. E.

Nehmen wir nun an, dass die 1,23 W. E., welche das Wasser mehr enthält, als das Knallgas, bereits im Calorimeter mit gemessen, also nicht weiter zu berücksichtigen seien, so würden wir das auffallende Resultat haben, dass die als Wärme vorhandene Bewegung nur

$$\frac{104,13 . 100}{6161,2} = 1,68 \text{ Procent}$$

von der ganzen bei der chemischen Verbindung austretenden Wärme sind.

Dass diese Summe von Bewegung vorher in dem Knallgase vorhanden gewesen sein muss, lässt sich nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft nicht in Abrede stellen, weil der chemische Vorgang der Verbindung nur die Bedingung, aber nicht die Ursache der Wärmeentwickelung sein kann. Wie es möglich sei, dass verschiedene Bewegungen an demselben Atom zu gleicher Zeit haften können, ist vorläufig schwer zu begreifen. Die Coexistenz verschiedener Schwingungen ist eine allgemein bekannte Thatsache. Eine gespannte Saite aus Stahldraht kann zu gleicher Zeit tönen, sichtbar und warm sein, von einem Magnete angezogen werden, einen elektrischen Strom führen und alle Affinitäten des Eisens und Kohlenstoffs in sich tragen. Während die tönende Saite als Ganzes nach den Gesetzen der Pendelbewegung hin- und herschwingt, besitzen ihre kleinsten Theile diejenigen Bewegungen, welche als Licht- und Wärmestrahl aus ihr austreten und als elektrischer Strom darin Leitung finden.

Wird ein Gas abgekühlt, so tritt zuerst diejenige Bewegung aus, welche wir Wärme nennen und die schon als solche vorhanden war; wird es weiter abgekühlt, so tritt auch ein grosser Theil von derjenigen Bewegung, welche die chemischen Eigenschaften bedingt, als Wärme aus, und das zur Flüssigkeit verdichtete Glas (CO_2, Cl, SO_2, C_2N, NO, ClH, NH_3 etc.) behält nur einen kleinen Theil als Flüssigkeit übrig. Von dieser kann es in einzelnen Fällen (CO_2) bei grösserer Kälte noch einen Theil verlieren, indem es in den festen Zustand übergeht. Von den permanenten Gasen (H, N, O) können wir Wärme entziehen, aber nicht den Theil der raumerfüllenden Bewegung, welche nicht Wärme ist, und welche wir chemische Affinität, Qualität, nennen. Wie weit wir bei den permanenten Gasen von diesem Punkte, wo sie auch chemische Bewegung abgeben, noch entfernt sind, können wir nicht wissen, weil die Gase eben permanent sind. Wir können aber nach Gay-Lussac's Regel nicht schliessen, dass die Gase bei —273° C. keinen Raum mehr einnehmen und nach Mariotte's Gesetz nicht, dass die Gase bei —273° C. wohl den Raum wie bei 0°, aber keine Spannung mehr besitzen. Beides schliesst einen physikalischen Widerspruch ein, denn ein Körper, der keinen Raum einnimmt, hat aufgehört zu existiren, und Raum einnehmen ohne Widerstand nach aussen, ohne Spannung, ist ebenfalls undenkbar.

Die chemische Bewegung ist eine dem Atom anhaftende Bewegung, die aber durch ungleiche Schwingungszahl und Grösse der Excursion nicht Wärme ist. Sie bedingt neben der Wärme den Cohäsionszustand des Elementes. Sie ist entweder gar nicht übertragbar, wie bei den permanenten Gasen, oder nur als Wärme übertragbar, wie bei den sich verdichtenden Gasen, und daher kommt es, dass wir bei chemischen Verbindungen den frei werdenden Theil der Bewegung nur als Wärme messen können. Der besondere Fall, dass in der galvanischen Kette die frei werdende Bewegung erst als elektrischer Strom auftritt, macht keine Ausnahme, da sich der

Strom bei seinem Verschwinden sogleich in Wärme umsetzt und nur als solche der Quantität nach gemessen werden kann.

Hat sich Sauerstoff mit Wasserstoff chemisch zu Wasser verbunden, so verlieren sie ihren permanenten Zustand und das Aequivalent sind die 34462 W. E., welche 1 Gramm Wasserstoff beim Verbrennen ausscheidet. Aber das Wasser enthält selbst noch chemische Bewegung, die durch seinen Frier- und Siedepunkt bezeichnet ist. Der Sauerstoff des Wassers kann noch einmal Bewegung ausgeben, wenn er in eine feuerbeständigere Verbindung übergeht, und dies geschieht, wenn er in Zinkoxyd übertritt. Dieser Vorgang findet bei der Auflösung des Zinkes in verdünnter Schwefelsäure statt, und die hierbei austretende Wärme ist kleiner, als wenn sich Zink mit gasförmigem Sauerstoff verbindet, weil der Sauerstoff bei seiner Verbindung mit Wasserstoff schon einen grossen Theil seiner chemischen Bewegung ausgegeben hat. Die bei der Auflösung von Zink in verdünnter Schwefelsäure auftretende Wärme entsteht:

1. aus der grösseren Feuerbeständigkeit des Sauerstoffs im Zinkoxyd im Vergleich zu der im Wasser;
2. aus der grösseren Feuerbeständigkeit der Schwefelsäure im schwefelsauren Zinkoxyd gegen die im freien Zustande;
3. weniger der zur Vergasung des Wasserstoffs und Wiederherstellung im permanenten Zustande verwendeten Wärme.

Verhindert man die Vergasung des Wasserstoffs durch Oxydation, so wird die unter 3 aufgeführte Wärmemenge erspart und die freiwerdende Wärmemenge steigt um diese Grösse, weniger derjenigen Wärmemenge, welche der ausgeschiedene, vorher mit dem Sauerstoff verbundene Körper als chemische Bewegung aufnimmt. Hierin liegt die Erklärung der Zweikammersäule: weil Kupfer eine geringere Verbrennungswärme als Wasserstoff hat, so wird Wärme erspart, wenn man statt gasförmigen Wasserstoffs metallisches Kupfer ausscheidet (Daniell's Batterie); weil Stickoxydgas eine geringere Verbrennungswärme als Wasserstoff hat, so findet derselbe Gewinn an Wärme, resp. Strom statt, wenn man Stickoxyd statt Wasserstoff ausscheidet (Grove's Batterie).

Die durch den chemischen Vorgang in der Zelle frei werdende Bewegung erscheint in der Kette erst als Strom, im folgenden Augenblicke aber als Wärme, und die Wärme ist das messbare Aequivalent des Stromes. Die bei der Auflösung von Zink in verdünnten Säuren frei werdende Wärme ist absolut dieselbe Grösse, der Vorgang mag innerhalb oder ausserhalb der Kette vor sich gegangen sein. Die Wärme in der Kette ist keine Qualität des Stromes, kein Accessorium, sondern das absolute und einzige Aequivalent desselben, wenn er verschwunden ist.

Anmerkung. Der vorstehende Aufsatz wurde mir von Professor Poggendorff ohne Erklärung und Angabe der Gründe zurückgeschickt, nachdem derselbe schon an 40 Mittheilungen von mir und zwar vom Jahre 1832 an in seine Annalen aufgenommen hatte. Ich schreibe dies einer Gereiztheit des Herrn Prof. Poggendorff zu, weil ich ihm in meiner „Allgemeinen Theorie der Bewegung und Kraft" S. 82 den Vorwurf gemacht habe, dass er 1842 den Aufsatz von Dr. J. R. Maier in Heilbronn, der jetzt der Angelpunkt der ganzen neueren Physik geworden ist, zurückgewiesen habe. In der That gab er dadurch eine grosse Kurzsichtigkeit zu erkennen, die aber dadurch erklärt werden kann, dass er noch heute ein Anhänger der Contacttheorie ist, folglich mit der Lehre von der Erhaltung der Kraft auf einem gespannten Fusse stehen muss. Wer den chemischen Vorgang in der Säule und zugleich die Bewegung elektro-magnetischer Maschinen für eine Wirkung des Contacts erklärt, kann unmöglich für eine Lehre stimmen, welche jede neue Bewegung aus dem Verbrauch einer bereits vorhandenen Bewegung ableitet. Der Einwand, dass die Abhandlung von Maier und auch eine von mir im Jahre 1837 eingesandte über die Natur der Wärme keine „neuen experimentalen Untersuchungen enthalte", kann nicht mehr angenommen werden, da doch viele Abhandlungen von Clausius, welche gesammelt zwei Bände gaben, und auch von Anderem in die Annalen aufgenommen wurden, ohne dass sie experimentelle Untersuchungen enthielten. Ein Journal ist ein öffentliches Verkehrsmittel, worauf, wie auf der Eisenbahn, Jeder zugelassen werden muss, welcher bezahlt, und die Bezahlung besteht hier in einem neuen wissenschaftlichen Inhalt. Diesen zu beurtheilen hat allerdings der Herausgeber das Recht und die Pflicht; allein dann muss er auch die Fähigkeit dazu haben, die Herrn Poggendorff gänzlich abgeht, wie aus dem Maier'schen Falle klar ist. Kein Journal ist so voll sinnentstellender Druckfehler, als seine Annalen, und das kommt daher, dass er oft den Sinn der Abhandlungen nicht versteht und bei einigermassen undeutlichem Manuscript ein *qui pro quo* setzt, da er den Verfassern nicht einmal Correctur zukommen lässt. Kein Naturforscher wird die Bedeutung experimenteller Untersuchungen verkennen oder unterschätzen; es ist dies der bekannte Weg der Induction. Aber auch die Deduction hat ihre hohen Vortheile. Der Gedanke Maier's, dass die Bewegung ein Aequivalent in Wärme habe, hat die Physik mehr gefördert, als hundert Abhandlungen mit blossen Wägungen und Messungen. Die Entdeckung des Sauerstoffs hat die Chemie nicht weiter gebracht, sondern die Erkennung und Erklärung desselben als Element wurde die Grundlage einer neuen Wissenschaft. Im vorliegenden Falle waren die Thatsachen bereits durch Magnus festgestellt, aber es fehlte die Erklärung. Wozu hier neue Untersuchungen unternehmen, wenn die vorhandenen noch nicht erklärt sind? Die Thatsache gewinnt erst ihre Bedeutung, wenn sie in die Reihe der Erscheinungen eingeordnet wird und damit in einen bestimmten Zusammenhang tritt.

X.

Berechnung der beim Wasser zur Erwärmung und Ausdehnung nöthigen Wärmemenge oder der Wärmemenge bei constantem Druck und Volum.

Von

Dr. Mohr.

Wenn ein Körper durch Wärmezufuhr ausgedehnt wird, so vermehren sich die Anzahl seiner Vibrationen und zugleich erweitern sie ihre Amplitude. Die erstgenannte Menge stellt die fühlbare Wärme dar, und die auf die Erweiterung der Amplituden verwendete wird latent, d. h. sie hört auf Wärme zu sein.

Ich habe diesen Satz schon 1837 in Baumgartner's Zeitschrift für Physik V, S. 427 in folgender Form ausgedrückt: „Sensible Wärme ist solche, welche eine Vermehrung der Vibrationszahl zur Folge hat; latente ist solche, welche, ohne die Anzahl der Vibrationen zu ändern, nur auf die Grösse der Excursion oder auf die Veränderung des Aggregatzustandes Einfluss hat."

Bei Gasen können wir die Ausdehnung bei gleichzeitiger Erwärmung durch starre Wände verhindern, man kann aber dann die verwendete Wärme nicht messen, weil die Wände daran Theil nehmen. Man hat deshalb bei Gasen die zur Ausdehnung verwendete Wärme auf einem Umwege aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles berechnet und sie zu 29,43 Procent der ganzen Wärme gefunden. Die Details der Berechnung finden sich in meiner mechanischen Theorie der chemischen Affinität S. 49.

Bei Flüssigkeiten kann man die Ausdehnung bei Erwärmung nicht verhindern, man kann aber die Kraft der Ausdehnung durch Compression messen.

Bei festen Körpern ist noch kein Mittel gefunden worden, die auf Ausdehnung und Erwärmung einzeln verwendeten Wärmemengen zu messen oder zu berechnen.

Wenn man diese Grössen bei einer Flüssigkeit experimental bestimmen wollte, so müsste man eine durch Wärme ausgedehnte Flüssigkeit durch einen äusseren gemessenen Druck auf das Volum einer anderen Temperatur zurückbringen, und die dann frei werdende Wärme würde der Erweiterung der Amplituden entsprechen, weil durch den Druck diese Erweiterung wieder zurückgeführt würde. Allein die hierbei sich entbindende Wärme ist so ausserordentlich klein, dass sie an sich durch kein Thermometer angegeben wird, zudem müssen die Wände bei dem ungeheuren Druck so massiv sein, dass sie bei der guten Leitungsfähigkeit der Metalle für Wärme jede Messung unmöglich machen würden.

Es bleiben also jetzt keine anderen Wege übrig, als die Compression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf Wärmeentwickelung nach Atmosphärendruck zu messen, und andererseits die Ausdehnung der Flüssigkeit durch Wärme ohne Rücksicht auf die geleistete Arbeit. Aus beiden Grössen zusammen lässt sich die Aufgabe lösen. Die Ausdehnung ist bei vielen Flüssigkeiten genau gemessen, aber die Compression bei nur wenigen. Da das Wasser als die wichtigste aller Flüssigkeiten in beiden Rücksichten mit Sorgfalt untersucht ist, so wollen wir damit die Berechnung vornehmen.

Als Thatsachen stellen wir die Resultate voran, worauf sich die Berechnung gründet.

Temperatur.	Volum des Wassers.	Zusammendrückbarkeit durch 1 Atmosphäre in Milliontel des Volums.
4^0 C	1	50
25	1,00293	46
50	1,01205	44
75	1,02570	42
100	1,04315	40

Die Wasservolumina sind die von Desprete ermittelten (Müller's Physik, z. 6. Aufl. II, 579). Die Compressionen sind von Grassi ermittelt (s. *Annal. d. Chimie et de Physique* 3^0 *ser. XXXI*, 437; Krönig's Journal für die Physik des Auslandes II, 129, und Clausius gesammelte Schriften II, 18).

Die Compressionsfähigkeit nimmt nach oben ab, was theoretisch leicht einzusehen ist. Da mit der Erwärmung die Zahl der Vibrationen zunimmt, dagegen der messende Atmosphärendruck gleich bleibt, so muss bei vermehrter Vibrationszahl die Wirkung eine kleinere werden, weil mehr Vibrationen zu comprimiren sind. Die Zahlen für 75^0 und 100^0 C. sind nach der Differenz von 25^0 und 50^0 mit je zwei Milliontel interpolirt.

Der Gang der Berechnung ist folgender:

1. Für 25^0 C. Da das Wasser sich von $+ 4^0$ bis 25^0 um 0,002930 ausdehnt und für jede Atmösphäre Druck um 0,000046 zusammengedrückt wird, so würde die Ausdehnung von 2930 Milliontel durch $\frac{2930}{46} = 63{,}7$ Atmosphären vollkommen wieder aufgehoben werden und die mechanische Arbeit der Ausdehnung durch diese Grösse gemessen sein. Denken wir uns ein Cubikdecimeter Wasser als Würfel und dass sich das Wasser nur nach oben ausdehnen könnte, so wird die senkreccte Ausdehnun nach oben von 4 auf 25^0 in Länge ausgedrückt $\frac{1}{10} \cdot 0{,}002390 = 0{,}000239$ Meter Höhe haben. Der Druck einer Atmosphäre auf ein Quadratdecimeter beträgt 103,3 K^0, folglich obige 63,7 Atmosphären sind $= 103{,}3 \times 63{,}7 = 6580{,}21$ K, und da die Ausdehnung des Wassers durch den Compressionsdruck dieser Grösse an Druck gleich gefunden worden ist, so ergiebt sich die Summe der Bewegung aus Druck und Hubhöhe $= 6580{,}21 \times 0{,}000293 = 1{,}925$ K^0M. Da nun 424 Kilogrammmeter = 1 Wärmeeinheit sind, so entsprechen diese 1,925 K^0M.

$$\frac{1{,}925}{424} = 0{,}00455 \text{ W.E.}$$

Zur Erwärmung von 1 K^0 Wasser von 4 auf 25^0 gehören 21 W.E.; es verhält sich also die Wärme, welche nöthig ist, das Wasser auszudehnen, zu jener, welche zur Erwärmung verwendet wird

wie 0,00455 : 21 oder wie 1 : 4615

oder die latent gewordene Wärme beträgt

0,0217 Procent von der fühlbar gebliebenen.

2. Für 50^0 C. Das Volum des Wassers ist 1,012050 und die Zusammendrückung für eine Atmosphäre = 0,000044; um die Ausdehnung von 0,012050 aufzuheben, wird $\frac{0{,}012050}{0{,}000044} = 273{,}9$ Atmosphärendruck nothwendig, welche 28293,87 K^0 wiegen. Für $\frac{1}{10}$ Meter Höhe beträgt die Hebung 0,001205 M., und die Summe der Bewegung

$$28293{,}87 \times 0{,}001205 = 34{,}089 \text{ K}^0\text{M.},$$

und diese entsprechen

$$\frac{34{,}089}{424} = 0{,}0804 \text{ W.E.}$$

Nun enthält aber ein K^0 Wasser von 4 auf 50^0 erwärmt 46^0 Zuwachs, und weil das Kilogramm auch Wasser ist, 46 W.E. Darnach beträgt die auf die Ausdehnung verwendete Wärme $\frac{0{,}0804}{46} = 0{,}175$ Procent von der frei gebliebenen Wärme.

3. Bei 75^0 C. Volum des Wassers 1,0257 und Zusammendrückbarkeit 0,000042. Zum Aufheben der Ausdehnung sind erforderlich $\frac{0{,}025700}{0{,}000042} = 612$ Atmosphären; diese wiegen 63219,6 K^0, und für die Hebung von $\frac{1}{10} \cdot 0{,}0257$

beträgt die Summe der Bewegung $63219{,}6 \times 0{,}00257 = 162{,}47$ K⁰M.; diese sind gleich $\frac{162{,}47}{424} = 0{,}383$ W.E. Im Ganzen sind aber zur Erwärmung von 4 auf 75^0 $71^0 = 71$ W.E. verwendet worden, und der auf Ausdehnung verwendete Antheil beträgt

$$\frac{0{,}383}{71} = 0{,}539 \text{ Procent.}$$

4. Bei 100^0. Volum des Wassers 1,043150; Compressibilität für eine Atmosphäre = 0,000040. Zur Zurückführung auf das Volum bei 4^0 sind erforderlich $\frac{0{,}043150}{0{,}000040} = 1078{,}8$ Atmosphären; diese wiegen 110924,64 K^0, und auf 0,004315 M. Höhe gehoben, giebt 478,64 K^0 M. $= \frac{478{,}64}{424}$ W.E. $= 1{,}129$ W.E.

Im Wasser selbst sind aber $100 - 4 = 96$ W.E. enthalten, also der auf Ausdehnung verwendete Antheil beträgt

$$\frac{1{,}129}{96} = 1{,}176 \text{ Procent.}$$

Die auf Ausdehnung verwendete Wärme beträgt also bei den verschiedenen Temperaturen in Procenten von der fühlbar gebliebenen

bei 25^0	bei 50^0	bei 75^0	bei 100^0
0,0217 Procent	0,175 Procent	0,539 Procent	1,176 Procent.

Zieht man die auf Ausdehnung verwendete Wärme von der Einheit ab, so bleibt die Wärme bei constantem Volum übrig. Man muss bei obigen Zahlen das Komma um zwei Stellen links schieben, weil sie Procente vorstellen. Es ist alsdann C = Wärme bei constantem Druck und c = Wärme bei constantem Volum

bei 25^0	bei 50^0	bei 75^0	bei 100^0
$C = 1$,	$C = 1$	$C = 1$	$C = 1$
$c = 0{,}999783$	$c = 0{,}99825$	$c = 0{,}99461$	$c = 0{,}98824$.

Eine Untersuchung über denselben Gegenstand ist von Clausius vorgenommen worden und in Poggendorff's Annalen Bd. 125, S. 353 und flgg. enthalten. Die von ihm gefundenen Zahlen sind überall viel grösser als die von mir berechneten. So beträgt nach ihm bei 50^0 die latent gewordene Wärme 3,58 Procent, während sie nach obiger Darstellung nur 0,175 Procent beträgt, also etwa den zwanzigsten Theil von 3,58 Procent. Dies kann jedoch nicht wunderbar erscheinen, wenn man die verschiedene Art der Herleitung betrachtet. Die obige Entwickelung geht von bekannten Grössen und Thatsachen aus und schreitet mit einfachen Schlüssen bis zum Resultate weiter. Es müsste also darin ein logischer oder ein Rechenfehler nachgewiesen werden, um das Resultat anzugreifen. Obgleich ich bis jetzt keinen solchen darin entdecken konnte, so soll doch nicht damit gesagt sein, dass vier Augen nicht oft mehr sehen als zwei. Clausius berechnet seine Zahlen nach einer Formel, die sich auf theoretische Voraussetzungen gründet und worin der sogenannte absolute Nullpunkt (-273^0 C.) eingeht, so dass die Temperatur 25^0 mit der Grösse $273+25=298$ in der Formel figurirt. Ich halte diesen Satz vom absoluten Nullpunkt für sehr problematisch, weil dessen Durchführung zu einer physikalischen und physischen Unmöglichkeit führt. Wenn nämlich die Gase sich durch jeden Grad unter 0 um $\frac{1}{273}$ ihres Volums bei 0^0 zusammenziehen sollen, so folgt daraus, dass sie bei -273^0 gar keinen Raum mehr einnehmen, denn $1-\frac{273}{273}$ ist $=0$. Ein Ding, was aber keinen Raum mehr einnimmt, hat aufgehört zu existiren. Da die Gase ungleiche Ausdehnungscoefficienten haben, so würde es ebenso viele absolute Nullpunkte geben. Abhängigkeit von der Natur eines einzelnen Gases ist mit dem Begriff absolut nicht in Einklang zu bringen. Indem man das Widersinnige dieses Schlusses gefühlt hat, führte man die Sache auf das Mariotte'sche Gesetz hinüber, liess das Gas sein Volum von 0^0 behalten und nur die Spannung für jeden Grad unter Null um $\frac{1}{273}$ der Spannung bei 0^0 abnehmen. Man kam dann zu dem Schlusse, dass das Gas bei -273^0 keine Spannung mehr habe, aber seinen Raum wie bei 0^0 erfülle. Es ist das fast noch ein grösserer Widerspruch, als der Verlust des Gewichtes, denn wodurch kann ein Gas seinen Raum behaupten als durch Spannung? Es hat also nichts genutzt, dass man die Gay-Lussac'sche Regel mit Hilfe des Mariotte'schen Gesetzes zur Hinterthüre wieder einführte, indem nun zwei physische Unmöglichkeiten in einem Punkte zusammenlaufen.

Berechnen wir eine der von Clausius gefundenen Zahlen rückwärts bis auf das Volum des Wassers, so können wir darin eine Controle der Richtigkeit haben. Bei 50^0 soll die latente Wärme des Wassers, welche auf Ausdehnung verwendet wurde (Pogg. Ann. 125, S. 374) 0,0358 von der fühlbaren betragen. Da diese letztere von 4^0 an 46 W.E. beträgt, so haben wir $\frac{x}{46}=0{,}0358$, woraus $x=1{,}6468$ W.E. (oben 0,0804 W.E.); diese entsprechen $1{,}6468 \,.\, 424 = 698{,}24$ K^{0}M. (oben 34,084). Setzen wir nur denjenigen Decimalbruch welcher zu 1 gefügt das Volum des Wassers bei 50^0 ausdrückt $=x$, so haben wir

$$\frac{x}{0{,}000044} \,.\, 103{,}3 \,.\, \frac{x}{10} = 698{,}24 \text{ K}^0\text{M.}$$

oder

$$x^2 = \frac{698{,}24 \,.\, 0{,}00044}{103{,}3} = 0{,}0036,$$

also $x=\sqrt{0{,}0036}=0{,}06$ und das Volum des Wassers bei $50^0=1{,}060$, statt 1,01205.

Diese grosse Abweichung von der unmittelbaren Messung zeigt, dass die Voraussetzungen von Clausius nicht zutreffen.

Bei dem Wasser ist die auf Ausdehnung verwendete und latent werdende Wärme, wie die Versuche zeigen, ein sehr kleiner Bruchtheil der fühlbar bleibenden, und der Werth steigt mit der Temperatur.

Anmerkung. Auch dieser Artikel wurde mir von Poggendorff zurückgestellt, und hier ist doch klar, dass die Behandlung desselben Gegenstandes in Bd. 125, S. 374 seiner Annalen durch Clausius sich ebenfalls nicht auf eigne experimentale Untersuchungen gründet, im Gegentheil berechnet Clausius diese Resultate unter Zugrundelegung einer sehr zweifelhaften Formel, während ich meine unmittelbar an vorhandene Messungen und Wägungen anschliesse, die, weil noch kein Gebrauch davon gemacht worden ist, so gut wie neue sind. Mit wie wenig Kritik Poggendorff bei der Redaction seiner Annalen zu Werke geht, zeigt ein Passus im letzten Hefte (Bd. 139, S. 651), der ihm durchgegangen ist. Es heisst hier: „Nach übereinstimmenden Versuchen von Dufour, Depretz, Kopp und Duvernoy ist die Ausdehnung (des Wassers) vom Zustande seiner grössten Dichtigkeit bis zum Gefrierpunkt fasst doppelt so gross, als die bis zur Siedehitze" Statt dessen ist umgehrt die Ausdehnung von $+ 4^0$ bis 100^0 112,6 mal so gross als von 4^0 bis 0^0. Es ist dies keine berechtigte Eigenthümlichkeit des Verfassers, wofür der Herausgeber nicht verantwortlich wäre, sondern ein Schnitzer.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber die developpable Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist.

Im XIII. Bande dieser Zeitschrift ist auf Seite 328 eine einfache Relation aufgestellt zwischen den Distanzen der Berührungspunkte P und P_1 zweier Flächen vom Punkte der Wendecurve der developpabeln Fläche, welche denselben umschrieben ist, den Krümmungsmassen in den Punkten P und P_1 und den Krümmungshalbmessern der Normalschnitte beider Flächen, welche durch die Verbindungslinie der bemerkten Punkte gehen. Diese Relation lässt sich aus einer andern Gleichung herleiten, welche sich durch Betrachtung von nur einer Fläche und einer ihr umschriebenen developpabeln Fläche ergiebt, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Auf einer Fläche sei eine beliebige Curve C gegeben, die berührenden Ebenen längs derselben hüllen eine developpable Fläche ein. Sei (x, y, z) ein Punkt der Curve C, ferner (ξ, η, ζ) der Punkt der Wendecurve der developpabeln Fläche, welcher dem Punkte (x, y, z) entspricht. Die Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) zur Fläche mit den Coordinatenaxen bildet, seien a, b, c. Längs der Curve C können x, y, z als Functionen einer Variabeln t angesehen werden. Zur Bestimmung von ξ, η, ζ hat man die Gleichungen:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} &(\xi - x)\cos a + (\eta - y)\cos b + (\zeta - z)\cos = 0,\\ &(\xi - x)\frac{\partial \cos a}{\partial t} + (\eta - y)\frac{\partial \cos b}{\partial t} + (\zeta - z)\frac{\partial \cos c}{\partial t} = 0,\\ &(\xi - x)\frac{\partial^2 \cos a}{\partial t^2} + (\eta - y)\frac{\partial^2 \cos b}{\partial t^2} + (\zeta - z)\frac{\partial^2 \cos c}{\partial t^2} = H, \end{aligned}\right.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$2)\quad \frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial \cos a}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial \cos b}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\,\frac{\partial \cos c}{\partial t} = H.$$

Nimmt man:

$$3)\quad \begin{cases} (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=D^2, \\ \dfrac{\xi-x}{D}=\cos\alpha, \quad \dfrac{\eta-y}{D}=\cos\beta, \quad \dfrac{\zeta-z}{D}=\cos\gamma, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen 1):

$$4)\quad \begin{cases} \cos\alpha\,.\cos a+\cos\beta\,.\cos b+\cos\gamma\,.\cos c=0, \\ \cos\alpha\dfrac{\partial\cos a}{\partial t}+\cos\beta\dfrac{\partial\cos b}{\partial t}+\cos\gamma\dfrac{\partial\cos c}{\partial t}=0, \\ \cos\alpha\dfrac{\partial^2\cos a}{\partial t^2}+\cos\beta\dfrac{\partial^2\cos b}{\partial t^2}+\cos\gamma\dfrac{\partial^2\cos c}{\partial t^2}=\dfrac{H}{D}. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen findet man:

$$5)\quad \begin{cases} \cos a\dfrac{\partial\cos\alpha}{\partial t}+\cos b\dfrac{\partial\cos\beta}{\partial t}+\cos c\dfrac{\partial\cos\gamma}{\partial t}=0, \\ \dfrac{\partial\cos a}{\partial t}\dfrac{\partial\cos\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial\cos b}{\partial t}\dfrac{\partial\cos\beta}{\partial t}+\dfrac{\partial\cos c}{\partial t}\dfrac{\partial\cos\gamma}{\partial t}=-\dfrac{H}{D}, \\ \cos a\dfrac{\partial^2\cos\alpha}{\partial t^2}+\cos b\dfrac{\partial^2\cos\beta}{\partial t^2}+\cos c\dfrac{\partial^2\cos\gamma}{\partial t^2}=\dfrac{H}{D}. \end{cases}$$

Zufolge der Gleichungen 3) sind α,β,γ die Winkel, welche die Tangente zur Wendecurve im Punkte (ξ,η,ζ) mit den Coordinatenaxen bildet. Sei:

$$6)\quad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial\cos\alpha}{\partial t}, & \dfrac{\partial\cos\beta}{\partial t}, & \dfrac{\partial\cos\gamma}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2\cos\alpha}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2\cos\beta}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2\cos\gamma}{\partial t^2} \end{vmatrix}=M,$$

$$7)\quad \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial\cos\alpha}{\partial t}, & \dfrac{\partial\cos\beta}{\partial t}, & \dfrac{\partial\cos\gamma}{\partial t} \end{vmatrix}=N.$$

Mittels der Gleichungen 4) und 5) findet man leicht:

$$N^2=\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}\right)^2,$$

$$MN=\frac{H}{D}\left\{\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Durch Elimination von N zwischen diesen Gleichungen folgt:

$$8)\quad M^2=\left(\frac{H}{D}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Bezeichnet man das Bogenelement der Wendecurve der developpabeln Fläche durch ∂s, ist ϱ der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius im Punkte (ξ,η,ζ), so hat man:

$$9)\qquad \left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2.$$

Ferner ist nach 6):

$$M=\pm\frac{1}{r\varrho^2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 9) giebt die Gleichung 8):

$$10)\qquad \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2=\left(\frac{H}{D}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial t}\right)^4}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen 5) und der Gleichung:

$$\cos\alpha\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}+\cos\beta\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}+\cos\gamma\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}=0$$

entwickele man die Werthe der Differentialquotienten von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nach t und substituire dieselben in die Gleichung 9), dann folgt:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{H}{D}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2}.$$

Hierdurch geht die Gleichung 10) über in:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2=\left(\frac{D}{H}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2\right\}^2,$$

d. i. nach 2):

$$11)\qquad \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2=D^2\cdot\left\{\frac{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial t}}\right\}^2.$$

Der Factor von D^2 auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung lässt sich mittels der zweiten der Gleichungen 4) auf eine sehr einfache Form bringen, wenn man x, y, z als Functionen zweier Variabeln ansieht; um hier keine anderen Theorien zu Hilfe zu nehmen, soll eine directe Herleitung der betreffenden Form gegeben werden.

Bezeichnet man durch ∂p das Bogenelement einer Curve C_1 auf der Fläche, legt durch die Tangente derselben und die Normale zur Fläche eine Ebene, so hat man für den Krümmungshalbmesser R der Schnittcurve im Punkte (x, y, z) die Gleichung:

$$\frac{1}{R}=\frac{d\cos a}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial p},$$

oder, da $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ Functionen von x, y, z sind:

$$\frac{1}{R}=\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos a}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos a}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial x}{\partial p}$$
$$+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial y}{\partial p}$$
$$+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial z}{\partial p}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$12)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{R}=&\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial x}{\partial p}\\&+\left(\frac{\partial\cos a}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial y}{\partial p}\\&+\left(\frac{\partial\cos a}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\cos b}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\cos c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial z}{\partial p}.\end{aligned}\right.$$

Die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p}$ sind die Cosinus der Winkel, welche die Tangente zur Curve C_1 im Punkte (x,y,z) mit den Coordinatenaxen bildet. Die Curve C_1 sei der Durchschnitt der Fläche mit der Normalebene, welche durch die Verbindungslinie der Punkte (ξ,η,ζ) und (x,y,z) geht. Es ist dann nach 3):

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\cos\alpha,\qquad \frac{\partial y}{\partial p}=\cos\beta,\qquad \frac{\partial z}{\partial p}=\cos\gamma.$$

Die Gleichung 12) wird hierdurch:

$$13)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{R}=&\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial x}\right)\cos\alpha\\&+\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial y}\right)\cos\beta\\&+\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial z}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial z}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial z}\right)\cos\gamma.\end{aligned}\right.$$

Mittels der beiden ersten Gleichungen 4) und der Gleichung

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

folgt:

$$\left(\cos\alpha\frac{\partial\cos a}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\cos\gamma\frac{\partial\cos c}{\partial x}\right)\cos\alpha=$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial\cos a}{\partial x}, & \frac{\partial\cos b}{\partial x}, & \frac{\partial\cos c}{\partial x}\\ \cos a, & \cos b, & \cos c\\ \frac{\partial\cos a}{\partial t}, & \frac{\partial\cos b}{\partial t}, & \frac{\partial\cos c}{\partial t}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \cos a, & \cos b, & \cos c\\ \frac{\partial\cos a}{\partial t}, & \frac{\partial\cos b}{\partial t}, & \frac{\partial\cos c}{\partial t}\end{vmatrix}}{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2}.$$

Das Product der beiden Determinanten ist gleich:

$$\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial\cos b}{\partial t}-\frac{\partial\cos b}{\partial x}\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)\frac{\partial\cos b}{\partial t}+\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial\cos c}{\partial t}-\frac{\partial\cos c}{\partial x}\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)\frac{\partial\cos c}{\partial t}.$$

Transformirt man auf ähnliche Weise die beiden übrigen Terme auf der rechten Seite der Gleichung 13), so geht dieselbe über in:

14) $$\frac{\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\right)^2}{R}$$
$$=\left(\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial y}-\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial z}\right)\frac{\partial\cos a}{\partial t}$$
$$+\left(\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial x}-\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial z}\right)\frac{\partial\cos b}{\partial t}$$
$$+\left(\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial x}-\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial x}+\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial y}-\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial y}\right)\frac{\partial\cos c}{\partial t}.$$

Wegen:

$$\frac{\partial\cos a}{\partial t}=\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\cos a}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\cos a}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

ist:

$$\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial y}-\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial z}$$
$$=\left(\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial\cos b}{\partial y}-\frac{\partial\cos a}{\partial y}\frac{\partial\cos b}{\partial x}+\frac{\partial\cos a}{\partial x}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos a}{\partial z}\frac{\partial\cos c}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\cos b}{\partial y}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos b}{\partial z}\frac{\partial\cos c}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$-\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial\cos a}{\partial y}, & \frac{\partial\cos b}{d y}, & \frac{\partial\cos c}{\partial y}\\ \frac{\partial\cos a}{\partial z}, & \frac{\partial\cos b}{\partial z}, & \frac{\partial\cos c}{\partial z}\end{vmatrix}.$$

Die Determinante auf der rechten Seite verschwindet infolge der Gleichungen:

$$\cos a\frac{\partial x}{\partial t}+\cos b\frac{\partial y}{\partial t}+\cos c\frac{\partial z}{\partial t}=0,$$
$$\cos a\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\cos b\frac{\partial\cos b}{\partial y}+\cos c\frac{\partial\cos c}{\partial y}=0,$$
$$\cos a\frac{\partial\cos a}{\partial z}+\cos b\frac{\partial\cos b}{\partial z}+\cos c\frac{\partial\cos c}{\partial z}=0.$$

Der Factor von $\frac{\partial x}{\partial t}$ ist gleich $\frac{1}{r'r''}$, wenn r' und r'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche im Punkte (x,y,z) sind. Es ist also:

$$\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos b}{\partial y}-\frac{\partial\cos b}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial y}+\frac{\partial\cos a}{\partial t}\frac{\partial\cos c}{\partial z}-\frac{\partial\cos c}{\partial t}\frac{\partial\cos a}{\partial z}=\frac{1}{r'r''}\frac{\partial x}{\partial t}.$$

Mit Hilfe der vorstehenden und zweier analogen Gleichungen erhält man aus 14):

$$\frac{r'r''}{R}=\frac{\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \cos a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \cos b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial \cos c}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \cos a}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \cos c}{\partial t}\right)^2}.$$

Hierdurch geht die Gleichung 11) über in:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2=D^2\left(\frac{R}{r'r''}\right)^2,$$

oder:

$$\frac{\varrho}{r}=\frac{D.R}{r'r''},$$

was die zu Anfang bemerkte Gleichung ist.

Bei dieser Gelegenheit möge folgende Bemerkung Platz finden über die developpabeln Flächen, welche eine gegebene Fläche längs einer bestimmten Curve berühren können. Die Gleichungen der Generatrix seien:

15) $$\frac{\xi-x}{\cos X}=\frac{\eta-y}{\cos Y}=\frac{\zeta-z}{\cos Z}.$$

Sieht man x, y, z, $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ als Functionen einer Variabeln t an, so muss folgende Gleichung stattfinden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \cos X, & \cos Y, & \cos Z \\ \frac{\partial \cos X}{\partial t}, & \frac{\partial \cos Y}{\partial t}, & \frac{\partial \cos Z}{\partial t} \end{vmatrix}=0.$$

Bedeuten g und h zwei Unbestimmte, so kann man setzen:

16) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}&=g\cos X+h\frac{\partial \cos X}{\partial t}, \\ \frac{\partial y}{\partial t}&=g\cos Y+h\frac{\partial \cos Y}{\partial t}, \\ \frac{\partial z}{\partial t}&=g\cos Z+h\frac{\partial \cos Z}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Da die Generatrix 15) in der berührenden Ebene

$$(\xi-x)\cos a+(\eta-y)\cos b+(\zeta-z)\cos c=0$$

liegt, so ist:

17) $$\cos X\cos a+\cos Y\cos b+\cos Z\cos c=0.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 16) resp. mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, bildet die Summe der Producte, so erhält man mit Rücksicht auf:

$$\cos a\frac{\partial x}{\partial t}+\cos b\frac{\partial y}{\partial t}+\cos c\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

und die Gleichung 17):

$$h\left(\cos a \frac{\partial \cos X}{\partial t} + \cos b \frac{\partial \cos Y}{\partial t} + \cos c \frac{\partial \cos Z}{\partial t}\right) = 0.$$

Für den Fall, dass $h=0$ geben die Gleichungen 15) und 16):

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial y}{\partial t}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial z}{\partial t}}.$$

Durch diese Gleichungen ist die Tangentenfläche der Curve bestimmt. Nimmt man:

$$\cos a \frac{\partial \cos X}{\partial t} + \cos b \frac{\partial \cos Y}{\partial t} + \cos c \frac{\partial \cos Z}{\partial t} = 0,$$

so giebt die vorstehende Gleichung in Verbindung mit 17):

$$\cos X \cos a + \cos Y \cos b + \cos Z \cos c = 0,$$

$$\cos X \frac{\partial \cos a}{\partial t} + \cos Y \frac{\partial \cos b}{\partial t} + \cos Z \frac{\partial \cos c}{\partial t} = 0.$$

Die Gerade 15) ist dann der Durchschnitt beider Ebenen:

$$(\xi - x)\cos a + (\eta - y)\cos b + (\zeta - z)\cos c = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{\partial \cos a}{\partial t} + (\eta - y)\frac{\partial \cos b}{\partial t} + (\zeta - z)\frac{\partial \cos c}{\partial t} = 0,$$

woraus unmittelbar folgt, dass die developpable Fläche die Enveloppe der berührenden Ebenen längs der gegebenen Curve ist.

A. Enneper.

XX. Das Parallelogramm der Bewegungen in der Wellenlehre.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1—3.)

I. Durchläuft ein Punkt (der Hilfspunkt) gleichförmig die Peripherie eines Kreises, so macht seine Projection auf einen Durchmesser dieses Kreises eine einfache (Pendel-) Schwingung. Diese Darstellung der einfachen Schwingung ist so anschaulich und schliesst sich der analytischen Formel für diese Bewegungsart so eng an, dass sie sich für Schulzwecke, und für solche ist das Vorliegende lediglich geschrieben, als Grundlage für die Pendel- und Wellenbewegung sehr empfiehlt. Auch bietet sie den Vortheil, dass sich die bei der Lehre von der Pendelbewegung auftretenden Begriffe in anschaulichster Weise definiren lassen. Bezeichnet m den Mittelpunkt eines Kreises, sind p und q die Endpunkte eines Durchmessers, etwa des verticalen und durchläuft der Hilfspunkt von p aus die Peripherie, sich im Sinne des Uhrzeigers bewegend, so wird der Ausschlag der Projection auf den horizontalen Durchmesser durch $y = a \sin 2\pi \frac{t}{\delta}$ ausgedrückt. Hier bezeichnet δ die Umlaufszeit des Hülfspunktes resp. die Schwingungsdauer seiner Projection.

Fasst man m als Theilchen eines fadenförmigen Körpers auf, dessen Längsaxe in der Ruhelage auf der Ebene des Kreises in m senkrecht steht, und ist x die Entfernung des Punktes m vom Mittelpunkt der Wellenerregung, v die Geschwindigkeit der Welle, so beginnt m seine Bewegung zur Zeit $t - \frac{x}{v}$. Man hat also, wenn man t von dem Moment der Wellenerregung ab rechnet, für die Ausschläge von m

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\delta}\left(t - \frac{x}{v}\right) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

wenn $\lambda = \delta v$ die Wellenlänge bezeichnet. Hatte der Punkt m im Augenblick, wo die Wellenerregung ihn erreicht, einen gewissen Abstand von der Ruhelage oder hatte der Hilfspunkt, von seinem Ausgangspunkt aus gerechnet, einen dem Centriwinkel A entsprechenden Bogen durchlaufen, so geht die letztere Gleichung über in

$$y = a \sin \left\{\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + A\right\}.$$

Die hier auftretende Grösse A heisst die Phase des Punktes m. Nach dem Gesagten ist sie als der Centriwinkel des Bogens zu definiren, den der Hilfspunkt zur Zeit $t = \frac{x}{v}$,* also in dem Moment durchlaufen hat, wo m von der Wellenbewegung ergriffen wird. Zum Vergleich gebe ich hier die Definitionen des Begriffs Phase von namhaften Autoren. Selbstredend lassen diese Definitionen in Bezug auf Wissenschaftlichkeit Nichts zu wünschen übrig, dem Schüler aber machen sie wegen des Mangels an Anschaulichkeit grosse Schwierigkeit. So sagt z. B.

*Airy (On the undulatory theorie of optics p. 17): By the phase of a wave, we shall denote the situation of a particle in a wave, considered as affecting its displacement and motion.**

Thomson and Tait (treatise on natural philosophy p. 37): The Phase of a simple harmonic motion at any instant is the fraction of the whole period which has elapsed since the moving point last passed through its middle position in the positive direction.

Beer (Einleitung in die höhere Optik, p. 89) giebt für den Ausschlag des Theilchens die Gleichung

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \xi - v\tau).$$

wenn die Zeit von dem willkürlich gewählten Momente τ ab und die Ab-

---

* Consequenter Weise nimmt Airy den ganzen Ausdruck $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + A$ als Maass der Phase.

scissen von demjenigen Punkte aus gerechnet werden, der zur Abscisse ξ hat. Bezeichnet man $v\tau - \xi$ durch A, so ist

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A).$$

Die Constante A, welche hier auftritt, heisst die Phase der Wellenbewegung.

Wie man sieht, herrscht auch nicht einmal die nöthige Uebereinstimmung in Bezug auf den Begriff Phase. Die eben gegebene Definition schliesst sich dem Sinne nach an die Beer'sche an.

Statt die Bewegung des einzelnen Punktes in der Wellenbewegung und die Wellenbewegung selbst als gleich wichtige Momente hinzustellen, empfiehlt es sich für den Unterricht, die Art der Bewegung des Punktes als das Wichtigste hinzustellen, die Wellenbewegung erst in zweiter Linie folgen zu lassen. Es entspricht das Gesagte auch der physikalischen Bedeutung beider in der Lehre von Licht und Schall. Die Attribute der Bewegung des Punktes werden als charakteristische Kennzeichen wahrgenommen. Die Wellenbewegung hat mit der Empfindung und Wahrnehmung Nichts zu thun.

II. Selbst zur Erklärung der Interferenzerscheinungen ist es am zweckmässigsten, nur ein Theilchen ins Auge zu fassen. Wie sich dann die Resultate der Rechnung mit Hilfe des Vorigen vor die Anschauung bringen lassen, soll jetzt gezeigt werden. Es werden dabei zwei Wellen von gleicher Länge und von gleicher Intensität vorausgesetzt.

Die beiden concentrischen Kreise (Fig. 1) haben die Radien a und b, wo $a > b$. Befindet sich ein Punkt vermöge der einen Wellenbewegung in e (der Hilfspunkt in d), vermöge der andern in k (der Hilfspunkt in g), so findet man seine wirkliche Lage, indem man die Parallellage construirt, wovon dm und gm zwei aneinanderstossende Seiten sind, und vom Endpunkte f der Diagonale ein Perpendikel fn fällt. Der schwingende Punkt ist dann in n, denn $kn = gh = me$. Der grösste Werth des Ausschlags ist offenbar mf. Die resultirende Schwingung hat mit den componirenden gleiche Dauer. Weil nämlich dm und gm in gleichen Zeiten gleiche Centriwinkel beschreiben, so gilt dasselbe für mf. Und haben dm und gm jedes eine ganze Drehung gemacht, so hat mf dasselbe gethan.

Ist $dmp = B$ die Phase des Punktes bezüglich der einen und $gmp = A$ die Phase bezüglich der anderen Wellenbewegung, so ist fmp die Phase des Punktes m für die resultirende Bewegung. Für die Tangente dieses Phasenwinkels fmp hat man

$$\frac{mn}{nf} = \frac{me + mk}{de + gk} = \frac{b \sin B + a \sin A}{b \cos B + a \cos A}.$$

Der Ausschlag ist $mf = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(A - B)}$. Bekanntlich stimmt das hier durch directe Anschauung gewonnene Resultat mit den Ergebnissen der Rechnung überein. Werden die Bewegungen des Punktes m in Folge beider Wellenbewegungen ausgedrückt durch

$$y = a \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + A \right\} \text{ und}$$

$$y = b \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + B \right\},$$

so ist die resultirende Bewegung

$$y = c \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + C \right\},$$

wo c und C sich durch die Gleichungen $c \cos C = a \cos A + b \cos B$ und $c \sin C = a \sin A + b \sin B$ bestimmen. Man hat dann wie oben

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(A - B)$$

$$tg\, C = \frac{a \sin A + b \sin B}{a \cos A + b \cos B}.$$

Um sich die Aenderung der resultirenden Amplitude bei verändertem Phasenunterschiede zu veranschaulichen, nehme man die Phase von m unter dem Einflusse der einen Wellenbewegung $= 0$, d. h. man drehe das Parallelogramm $dmgf$ um m bis md mit mp zusammenfällt. Aendert man dann den Phasenunterschied, so ergiebt sich die resultirende Amplitude als Seite eines Dreiecks. Die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind die Amplituden der Theilschwingungen und schliessen das Supplement des Phasenwinkels als Winkel ein. Beschreibt man um p in Fig. 2 einen Kreis mit der grösseren Theilamplitude, legt an pd in p den gegebenen Phasenunterschied A an, so ist em die resultirende Amplitude, deren Extreme also $md = a + b$ und $mf = a - b$ sind.

Diese Methode gestattet auch ohne Weiteres den Phasenunterschied für eine gegebene resultirende Amplitude zu construiren. Will man die gewonnenen Resultate mittelst des für Schulzwecke so sehr geeigneten Eisenlohr'schen Interferenzapparats vor die Anschauung bringen, so hat man der Wellenleiste eine solche Lage zu geben, dass der Abstand des Anfangs derselben von der ersten Nadel der sovielte Theil einer Wellenlänge beträgt, als die gefundene Phase von $2R$ ist.

Besonders einfach gestaltet sich die Construction, wenn die Theilschwingungen gleiche Amplituden haben. Das Parallelogramm wird dann ein Rhombus. Der Phasenunterschied für eine gegebene resultirende Amplitude ist der Centriwinkel derjenigen Sehne, deren Abstand vom Mittelpunkt des Kreises (Radius-Amplitude der Theilschwingung) der halben resultirenden Amplitude gleich ist.

III. Vielleicht werde ich bei einer anderen Gelegenheit das hier gegebene Princip noch weiter verfolgen. Hier möge nur noch der Beweis Platz finden, dass die Anzahl der Stösse zweier Töne in einer gewissen Zeit der Differenz der Schwingungszahlen für dieselbe Zeit gleich ist.

Die Schwingungsdauer sei δ resp. δ', wo $\delta > \delta'$, die Amplituden seien gleich und zwar $= c$. Wir denken uns zwei Hilfspunkte von a (Fig. 3) ausgehend, die Peripherie des Kreises durchlaufend.

Im Moment, wo der sich schneller bewegende Punkt zum ersten Male wieder nach a zurückgekehrt ist, befindet sich der sich langsamer bewegende in b. Der Bogen ba wurde letzterer in der Zeit $\delta - \delta'$ durchlaufen, wodurch sich die Länge dieses Bogens zu $\frac{\delta - \delta'}{\delta} 2 c \pi$ ergiebt. Die Amplitude ist jetzt nicht mehr das Maximum $2c$, sondern sie ist nach dem Früheren geringer, nämlich die von m ausgehende Diagonale des aus ma und mb zu bildenden Parallelogramms. Das Maximum wird wieder eintreten, wenn der Phasenunterschied 2π geworden ist. Die zwischen zwei Maximis verfliessende Zeit ist also gleich derjenigen Zeit, worin der sich schneller bewegende Punkt $2 c \pi : \frac{\delta - \delta'}{\delta} 2 c \pi$ mal die ganze Peripherie durchläuft. Es ist also Zeit zwischen zwei Maximis: $\frac{\delta \delta'}{\delta - \delta'}$, Zahl der Maximis in der Zeiteinheit: $\frac{\delta - \delta'}{\delta \delta'} = \frac{1}{\delta'} - \frac{1}{\delta}$ und darin liegt der Satz.

Schliesslich darf ich nicht unerwähnt lassen, dass ich die erste Anregung zum Vorliegenden der im Artikel 58 der Physik von Thomson und Tait gegebenen Construction verdanke.

Duisburg, den 20. December 1869.

KRUMME.

XXI. Bemerkung zu der Bestimmung der Abplattungsgrenzen für das Erdsphäroid $\left(\frac{1}{304}\text{ und }\frac{1}{578}\right)$ aus der Nutation.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 4 u. 5.)

Im fünften Buche seiner *Mécanique céleste* Satz 14 findet Laplace bei Untersuchung der Nutation der Erdaxe die Formel

$$\frac{2C - A - B}{C} = \frac{0{,}00519323}{1 + \beta \,.\, 0{,}748493}.$$

Hierin ist β eine gewisse aus den Bewegungen und der Masse des Mondes zu berechnende Constante; C das Trägheitsmoment der Erde für die Rotationsaxe, A und B die Trägheitsmomente für zwei äquatoriale Axen. Indem nun das Verhältniss der Trägheitsmomente berechnet wird, ergeben sich zwei Grenzen für die Abplattung:

1. wenn die Erde homogen vorausgesetzt wird, sich also der Einfluss der Vertheilung der Dichte eliminirt: $\frac{1}{304}$;

2) wenn die Masse der Erde im Mittelpunkte concentrirt gedacht wird, also ebenfalls jener Einfluss hinwegfällt: $\frac{1}{578}$.

Abgesehen nun von den Correctionen, deren die von Laplace benutzten Zahlenwerthe gemäss neuerer Beobachtungen bedürfen mögen, ist es doch auffällig, dass aus der Nutation eine obere Grenze der Abplattung folgt, die schon kleiner ist als die geodätisch bestimmte; da nun aber die Voraussetzung für die obere Grenzen den thatsächlichen Verhältnissen über die Vertheilung der Erdmasse durchaus nicht entspricht, sondern diese Vertheilung sich sehr beträchtlich von der Homogenität entfernt und der Voraussetzung für den kleinern Werth nähert, so scheint es, als müsse dieser astronomisch bestimmte Werth der Abplattung sich beträchtlich von dem geodätisch bestimmten entfernen.

Folgende kleine Rechnung wird aber zeigen, dass dieser Schluss nicht gerechtfertigt ist, weil sich nachweisen lässt, dass das Verhältniss $\frac{2C-A-B}{B}$ constant ist für alle congruenten Rotationsellipsoide, die aus ähnlichen homogenen Schichten bestehen, gleichgiltig, wie sich die Dichte von Schicht zu Schicht ändert.

Wenn nun auch Laplace nachgewiesen hat, dass die Erde nicht aus ähnlichen Schichten bestehen kann, sondern dass die Ellipticitäten der Niveaus nach dem Mittelpunkte zu abnehmen müssen, so liegt doch gewiss der wirkliche Zustand der Erde bei der geringen Abplattung der obersten Schicht der Zusammensetzung aus ähnlichen Schichten sehr nahe, und es kann damit der aus dieser Voraussetzung abgeleitete Werth der Abplattung $\frac{1}{304}$ als sehr nahe übereinstimmend mit den wirklichen Verhältnissen angesehen werden.

Die Berechnung der Trägheitsmomente gestaltet sich folgendermassen:

1. Berechnung des Trägheitsmoments einer unendlich dünnen homogenen von ähnlichen Rotationsellipsoiden begrenzten Schicht in Bezug auf die Rotationsaxe. Das Trägheitsmoment eines unendlich dünnen homogenen Ringes vom Querschnitte q, dem Radius r und der Dichte ϱ beträgt für seine Axe:

$$T_r = 2\pi r^3 \varrho q.$$

Die ellipsoidische Schicht lässt sich in Kreisringe vom Querschnitte (Fig. 1)

$$L L_1 M M_1 = \frac{\partial x}{\partial \gamma} . d\gamma . dy$$

und dem Radius $r = x$ zerlegen, wo xy die Coordinaten des Punktes L in der Ellipse $\alpha\gamma$ bezeichnen. Nun ist aber

$$x = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - y^2};$$

bezeichnet c die kleine, a die grosse Halbaxe des Erdsphäroids, so ist ferner nach der Voraussetzung ähnlicher Schichten:

$$\alpha = \frac{a}{c}\gamma, \quad \text{also } x = \frac{a}{c}\sqrt{\gamma^2 - y^2},$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma = \frac{a}{c} \cdot \frac{\gamma\, d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}.$$

Mithin ist das Trägheitsmoment des Ringes mit dem Querschnitte $LL_1\,MM_1$, wenn die Dichte der Schicht $\alpha\gamma$ gleich ϱ gesetzt wird:

$$T_r = 2\pi \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma\, dy\, \varrho \,.\, x^3$$
$$= 2\pi\varrho \,.\, \frac{a^4}{c^4} \cdot \gamma\,(\gamma^2 - y^2)\, d\gamma\, dy.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment der ganzen Schicht zu

$$T_s = 4\pi\varrho\, \frac{a^4}{c^4}\, \gamma\, d\gamma \,.\, \int_0^\gamma (\gamma^2 - y^2)\, dy$$
$$= \frac{8}{3}\pi\, \frac{a^4}{c^4} \cdot \varrho\, \gamma^4 d\gamma.$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Ellipsoides ist folglich

$$1) \qquad C = \frac{8\pi a^4}{3 c^4} \int_0^c \varrho \gamma^4\, d\gamma.$$

2. Berechnung des Trägheitsmoments einer homogenen von ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schicht in Bezug auf eine Aequatoraxe.

Wir zerlegen die homogene Schicht durch parallele Ebenen senkrecht zur Axe des Moments in elliptische, ähnliche, unendlich dünne Ringe. Die Ebene eines Ringes stehe um ξ vom Mittelpunkte des Ellipsoides ab; dann sind die Halbaxen $\nu\lambda$ des Ringes (Fig. 2):

$$\nu = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}, \quad \lambda = \frac{c}{a}\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}.$$

Ein Punkt des Ringes stehe um r vom Mittelpunkte des Ringes ab und habe gegen den Aequator die Anomalie φ; dann beträgt das Ringelement am Ende von r:

$$r\, d\xi\, d\varphi \,.\, \frac{\partial r}{\partial \gamma} d\gamma,$$

also ist das Trägheitsmoment des Ringes

$$T_\varrho = 4\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\, \frac{\partial r}{\partial \gamma}\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi.$$

Nun ist

$$r^2 = \frac{\nu^2 \lambda^2}{\nu^2 \sin^2\varphi + \lambda^2 \cos^2\varphi} = \frac{a^2\gamma^2 - c^2\xi^2}{a^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma} d\gamma = \frac{a^2 \gamma}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)\,(a^2 \gamma^2 - c^2 \xi^2)}},$$

also

$$T_\varrho = 4 \varrho \, d\xi \, d\gamma \,.\, a^2 \gamma \, (a^2 \gamma^2 - c^2 \xi^2) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{a^2 + c^2}{a c^3} \pi \varrho \gamma \, (a^2 \gamma^2 - c^2 \xi^2) \, d\xi \, d\gamma \,.$$

Mit Hilfe dieses Werthes ergiebt sich für das Integral über die Schicht $\alpha\gamma$:

$$T_\sigma = 2\pi \,.\, \frac{a^2 + c^2}{a c^3} \varrho \gamma \, d\gamma \int\limits_0^{\alpha} (a^2 \gamma^2 - c^2 \xi^2) \, d\xi$$

$$= \frac{4\pi a^2 (a^2 + c^2)}{3 c^4} \varrho \gamma^4 \, d\gamma \,.$$

Hieraus folgt

$$A = B = \frac{4\pi a^2 (a^2 + c^2)}{3 c^4} \int\limits_0^{c} \varrho \gamma^4 \, d\gamma .$$

Vergleicht man hiermit den oben gefundenen Werth von

$$C = \frac{8\pi a^4}{3 c^4} \int\limits_0^{c} \varrho \gamma^4 \, d\gamma ,$$

so ergiebt sich der Beweis des Satzes:

Das Verhältniss der Trägheitsmomente eines aus homogenen ähnlichen Schichten zusammengesetzten Rotationsellipsoides für die Rotations- und für eine Aequatoraxe ist nur abhängig von den Dimensionen, nicht aber abhängig von dem Gesetze, nach welchem die Dichte von Schicht zu Schicht variirt.

Richard Heger.

XI.

Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole.

Von

Dr. Friedrich Grelle,

Professor am Polytechnikum zu Hannover.

Die Methode der Trennung der operativen Symbole, kurzweg auch der Operationscalcul genannt, scheint in Deutschland weniger Eingang und Anwendung gefunden zu haben als in England und Frankreich. Während nämlich englische wie französische Mathematiker: Gregory, Murphy, Carmichael, Servois und Andere sich mit Vorliebe dieser Methode bedienen, existirt meines Wissens in der deutschen Literatur nur eine Uebersetzung des Carmichael'schen Werkes über diesen Gegenstand. In der Recension dieser Uebersetzung (siehe diese Zeitschrift Jahrgang II, S. 72) wird richtig bemerkt, dass der Operationscalcul ohne Frage ein vortreffliches Reproductionsmittel, aber auch nur dieses, sei. In der That, der Grund für seine Zulässigkeit liegt nur in dem voraus geführten Nachweis der Richtigkeit seiner Resultate. Diesen Nachweis zu liefern zunächst in Betreff der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen gewisser Art ist der Zweck folgender Abhandlung. Vielleicht lenkt sie von Neuem die Aufmerksamkeit der deutschen Mathematiker auf ein Operationsverfahren, welches seiner Einfachheit, Einheitlichkeit und Kürze halber einen Platz in den Lehrbüchern der Integralrechnung verdient.

I. Die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

Die allgemeinste Form dieser Gleichungen ist:

1) $D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + a_{n-2} D^{n-2} y + \ldots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = fx,$

wo y eine Function von x, D^p die p^{te} Abgeleitete von y nach x, d. i.: $\frac{d^p y}{dx^p}$, und $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ Constante bedeuten.

Angenommen die n Wurzeln der in k algebraischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0, \tag{2}$$

seien:

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3 \ldots k_n,$$

so hat man, wenn die Summen der Combinationen ohne Wiederholung der $(n-1)$ ersten dieser Wurzeln beziehentlich zur 1^{ten}, $2^{ten} \ldots$ Classe mit S_1, $S_2 \ldots$ bezeichnet werden und man die eine Combination bildenden Elemente als Factoren betrachtet:

$$\left\{\begin{aligned} a_{n-1} &= -(k_n + S_1), \\ a_{n-2} &= +(k_n S_1 + S_2), \\ a_{n-3} &= -(k_n S_2 + S_3), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_2 &= (-1)^{n-2}.(k_n S_{n-3} + S_{n-2}), \\ a_1 &= (-1)^{n-1}.(k_n S_{n-2} + S_{n-1}), \\ a_0 &= (-1)^n . k_n S_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Durch Einführung dieser Werthe in die gegebene Gleichung 1) kommt diese auf die Form:

$$\begin{aligned} D^n y &- S_1 D^{n-1} y + S_2 D^{n-2} y - S_3 D^{n-3} y + - \ldots \\ &+ (-1)^{n-2} S_{n-2} D^2 y + (-1)^{n-1} S_{n-1} D y \\ &- k_n D^{n-1} y + k_n S_1 D^{n-2} y - k_n S_2 D^{n-3} y + - \ldots \\ &+ (-1)^{n-2} k_n S_{n-3} D^2 y + (-1)^{n-1} k_n S_{n-2} D y + (-1)^n k_n S_{n-1} y = f(x), \end{aligned}$$

oder wenn:

$$\left\{\begin{aligned} &D^{n-1} y - S_1 D^{n-2} y + S_2 D^{n-3} y - + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-3} S_{n-3} D^2 y + (-1)^{n-2} S_{n-2} D y + (-1)^{n-1} S_{n-1} y = u \end{aligned}\right. \tag{4}$$

gesetzt wird:

$$D u - k_n u = f(x),$$

welche Differentialgleichung erster Ordnung bekanntlich die Lösung hat:

$$u = e^{k_n x} \left\{ \int e^{-k_n x} f x \, dx + C_n \right\}. \tag{5}$$

Hiermit ist zunächst gezeigt, dass die Gleichung 1) n^{ter} Ordnung zurückführbar ist auf die Gleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} &D^{n-1} y - S_1 D^{n-2} y + S_2 D^{n-3} y - + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-3} S_{n-3} D^2 y + (-1)^{n-2} S_{n-2} D y + (-1)^{n-1} S_{n-1} y \\ &\qquad = e^{k_n x} \left\{ \int e^{-k_n x} f x \, dx + C_n \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

deren Coefficienten zusammenfallen mit denen der algebraischen Gleichung $(n-1)^{ten}$ Grades, welche sich durch Division von (2) durch $k - k_n$ ergiebt.

Dieselbe Gleichung 6) kommt aber auch dadurch zu Stande, dass man in 1) das operative Symbol D zunächst von der zugehörigen Function y trennt, diese als gemeinschaftlichen Factor sämmtlicher Glieder linker Hand zieht, den andern Factor:

$$N = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

durch das Product seiner linearen Factoren:

$$7) \qquad N = (D-k_1)(D-k_2)\ldots(D-k_n)$$

ersetzt, $D-k_n$ weg dividirt, die übrigen Factoren wieder ausmultiplicirt und endlich die rechte Seite in Rücksicht auf die Definition:

$$8) \qquad (D-k_n)^{-1} f(x) = e^{k_n x} \left\{ \int e^{-k_n x} fx\, dx + C_n \right\}$$

in einen realen Werth transformirt.

Was für den Factor $D-k_n$ bewiesen, gilt für jeden andern; nachdem also durch Division mit $D-k_n$ die gegebene Gleichung n^{ter} Ordnung verwandelt ist in eine Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, kann man diese durch Division mit $D-k_{n-1}$ auf eine $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen u. s. w. fort, bis linker Hand nur noch y — die gesuchte Function — übrig geblieben.

Dieser Nachweis von der Anwendbarkeit der Methode der Trennung der operativen Symbole auf die Lösung von Gleichungen von der Form 1) bedurfte keinerlei Voraussetzung über die Art der Wurzeln $k_1, k_2 \ldots k_n$ — ob reell oder imaginär, ob gleich oder ungleich —; das angegebene Verfahren ist also unter allen Umständen zulässig. Je nachdem aber die betreffenden Wurzeln die eine oder andere Qualität haben, erscheinen die Schlussformeln, deren Kenntniss die Rechnung bedeutend vereinfacht, unter verschiedenen Formen, weshalb dieselben im Folgenden unter allen Modalitäten entwickelt werden sollen.

α) Die Wurzeln $k_1, k_2 \ldots k_n$ sind ungleich.

Nach den Divisionen mit $D-k_n$ und mit $D-k_{n-1}$ hat man:

$$y(D-k_1)\ldots(D-k_{n-2})$$
$$= e^{k_{n-1}x} \left[\int e^{(k_n - k_{n-1})x} \left\{ \int e^{-k_n x} fx\, dx + C_n \right\} dx + C_{n-1} \right],$$

oder, wenn die eine Integration rechter Hand ausgeführt wird, indem man

$$e^{(k_n - k_{n-1})x}\, dx = du, \qquad \frac{e^{(k_n - k_{n-1})x}}{k_n - k_{n-1}} = u,$$
$$\int e^{-k_n x} fx\, dx = v, \qquad e^{-k_n x} fx\, dx = dv$$

setzt:

$$y(D-k_1)\ldots(D-k_{n-2})$$
$$= \frac{e^{k_n x}}{k_n - k_{n-1}} \left\{ \int e^{-k_n x} fx\, dx + C_n \right\} + \frac{e^{k_{n-1} x}}{k_{n-1} - k_n} \left\{ \int e^{-k_{n-1} x} fx\, dx + C_{n-1} \right\}.$$

So fortfahrend erhält man:

$$y(D-k_1)\dots(D-k_{n-3})$$

9)
$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{k_n x}}{(k_n-k_{n-1})(k_n-k_{n-2})}\left\{\int e^{-k_n x} fx\,dx + C_n\right\}\\
&+ \frac{e^{k_{n-1} x}}{(k_{n-1}-k_n)(k_{n-1}-k_{n-2})}\left\{\int e^{-k_{n-1} x} fx\,dx + C_{n-1}\right\}\\
&+ \frac{e^{k_{n-2} x}}{(k_{n-2}-k_n)(k_{n-2}-k_{n-1})}\left\{\int e^{-k_{n-2} x} fx\,dx + C_{n-2}\right\},
\end{aligned}$$

und endlich, wenn die Abgeleitete von 7) nach D für $D=k_n, k_{n-1}\dots k_2, k_1$ kurzweg beziehentlich mit $N'_n, N'_{n-1}\dots N'_2, N'_1$ bezeichnet wird:

10)
$$y=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{e^{k_p x}}{N'_p}\left\{\int e^{-k_p x} fx\,dx + C_p\right\}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass man auch den ganzen Factor N auf einmal wegdividiren kann. Der rechter Hand erscheinende Bruch

11)
$$\frac{1}{N}=\frac{1}{(D-k_1)(D-k_2)\dots(D-k_n)}$$

wird darauf gerade so in Theilbrüche zerlegt, als ob D eine algebraische Grösse sei und jeder mit fx multiplicirte Theilbruch alsdann nach 8) in ein Integral umgesetzt.

Auch für den Fall complexer Wurzeln führt dasselbe Verfahren zum richtigen Resultat.

Ist nämlich:

12)
$$\begin{cases} k_1=p+qi,\\ k_2=p-qi,\end{cases}$$

und setzt man:

13)
$$\begin{aligned}
(p-k_3+qi)(p-k_4+qi)\dots(p-k_n+qi)&=m+ni,\\
(p-k_3-qi)(p-k_4-qi)\dots(p-k_n-qi)&=m-ni,
\end{aligned}$$

so erhält man zunächst nach 10) als die den Wurzeln 12) entsprechenden Theile der gesuchten Function:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{(p+qi)x}}{2qi(m+ni)}\left\{\int e^{-(p+qi)x} f(x)\,dx + C_1\right\}\\
-&\frac{e^{(p-qi)x}}{2qi(m-ni)}\left\{\int e^{-(p-qi)x} f(x)\,dx + C_2\right\},
\end{aligned}$$

was durch die Benutzung der bekannten Definition:

$$e^{\pm six}=\cos(sx)\pm i\sin(sx)$$

auf die Form:

14)
$$\frac{e^{px}}{q(m^2+n^2)}\left\{\begin{aligned}&(m\sin qx - n\cos qx)\int e^{-px}\cos qx\, f(x)\,dx\\ &-(n\sin qx + m\cos qx)\int e^{-px}\sin qx\, f(x)\,dx\end{aligned}\right\}$$
$$+ e^{px} A\sin(qx+B)$$

gebracht werden kann. Die Integrationsconstanten A und B sind so eingeführt, dass

$$\frac{C_1}{2qi(m+ni)} - \frac{C_2}{2qi(m-ni)} = A \sin B,$$
$$\frac{C_1}{2q(m+ni)} + \frac{C_2}{2q(m-ni)} = A \cos B.$$

Derselbe Werth 14) ergiebt sich aber auch, wenn man 11) unter Voraussetzung 12) in reelle Theilbrüche zerlegt. Die den Wurzeln 12) entsprechenden Brüche:

$$\frac{1}{2qi(m+ni)}\,\frac{1}{D-(p+qi)} - \frac{1}{2qi(m-ni)}\,\frac{1}{D-(p-qi)}$$

setzen sich nämlich zusammen zu:

$$\frac{1}{q(m^2+n^2)}\left\{\frac{mq}{(D-p)^2+q^2} - n\frac{D-p}{(D-p)^2+q^2}\right\}.$$

Dividirt man aus, multiplicirt darauf mit fx und erweitert die Definition 8) in:

$$15)\qquad (D-k_n)^{-p} f(x) = e^{k_n x}\int^p e^{-k_n x} f(x)\,dx^p,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{q(m^2+n^2)}\left\{\begin{aligned} &mq\Big[e^{+px}\int^2 e^{-px} f(x)\,dx^2 - q^2 e^{px}\int^4 e^{-px} f(x)\,dx^4 + \\ &\qquad q^4 e^{px}\int^6 e^{-px} f(x)\,dx^6 - + \ldots\Big] \\ &-n\Big[e^{px}\int e^{-px} f(x)\,dx - q^2 e^{px}\int^3 e^{-px} f(x)\,dx^3 + \\ &\qquad q^4 e^{px}\int^5 e^{-px} f(x)\,dx^5 - + \ldots\Big]\end{aligned}\right\},$$

welcher Ausdruck sich unter Benutzung der leicht abzuleitenden Formel:

$$16)\qquad \int^n P\,dx^n = \frac{1}{2\ldots(n-1)}\left\{x^{n-1}\int P\,dx - (n-1)\,x^{n-2}\int x P\,dx \right.$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,x^{n-3}\int x^2 P\,dx$$
$$\left. - + \ldots \pm \int x^{n-1} P\,dx\right\}$$

in 14) verwandelt.

β) Unter den Wurzeln seien n-gleiche:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{m-1} = k_m.$$

Dividirt man zunächst die den ungleichen Wurzeln entsprechenden Factoren:

$$(D-k_n),\ (D-k_{n-1})\ldots(D-k_{m+1})$$

weg, so bleibt zu behandeln übrig:

$$17)\qquad y\,(D-k_m)^m = \sum_{p=m+1}^{p=n} \frac{e^{k_p x}\left\{\int e^{-k_p x} f(x)\,dx + C_p\right\}}{N_p},$$

wo:

$$N_p = \frac{d\,[(k_p-k_n)(k_p-k_{n-1})\ldots(k_p-k_{m+1})]}{d\,(k_p)}.$$

Dividirt man jetzt mehrere Male nach einander mit $(D-k_m)$, so erkennt man bald als Schlussresultat:

$$18)\quad\left\{\begin{aligned} y = &\sum_{p=m+1}^{p=n}\left[\frac{e^{k_p x}\left\{\int e^{-k_p x} f(x)\,dx + C_p\right\}}{N_p\,(k_p-k_m)^m} + \frac{e^{k_m x}\int^m e^{-k_m x} f(x)\,d_x^m}{N_p\,(k_m-k_p)}\right.\\ &\left. - \frac{e^{k_m x}\int^{m-1} e^{-k_m x} f(x)\,dx^{m-1}}{N_p\,(k_m-k_p)^2} + - \ldots \pm \frac{e^{k_m x}\int e^{-k_m x} f(x)\,dx}{N_p\,(k_m-k_p)^m}\right]\\ &+ e^{kx}\,(C_{m-1}\,x^{m-1} + C_{m-2}\,x^{m-2} + \ldots + C_1 x + C_0).\end{aligned}\right.$$

Dieses ist wieder genau derselbe Werth, welcher sich ergiebt, wenn man, D als algebraische Grösse betrachtend, wie folgt zerlegt:

$$19)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{1}{(D-k_m)^m\,(D-k_{m+1})\ldots(D-k_n)} &= \frac{A_{m+1}}{D-k_{m+1}} + \frac{A_{m+2}}{D-k_{m+2}} + \ldots\\ &+ \frac{A_n}{D-k_n} + \frac{A_m}{(D-k_m)^m}\\ &+ \frac{A_{m-1}}{(D-k_m)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{D-k_m}.\end{aligned}\right.$$

Die Uebereinstimmung der Coefficienten A_{m+1}, $A_{m+2}\ldots A_n$ mit denen im ersten Theile der Summe rechter Hand in 18) erkennt man sogleich und die der übrigen durch folgende Betrachtung. Sei:

$$20)\qquad (D-k_{m+1})\ldots(D-k_n) = \frac{1}{\varphi(D)},$$

so giebt 19):

$$21)\qquad \varphi(D) = A_m + (D-k_m)\,A_{m-1} + (D-k_m)^2\,A_{m-2} + \ldots,$$

woraus durch Differentiation nach D und nachheriger Vertauschung des D mit k_m folgt:

$$\begin{aligned} A_m = \varphi(D)_{D=k_m} &= \frac{1}{(k_m-k_{m+1})\ldots(k_m-k_n)}\\ &= \frac{1}{(k_{m+1}-k_{m+2})\ldots(k_{m+1}-k_n)}\,\frac{1}{k_m-k_{m+1}}\\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+ \frac{1}{(k_n-k_{m+1})\ldots(k_n-k_{n-1})}\,\frac{1}{k_m-k_n} = \sum_{p=m+1}^{p=n}\frac{1}{N_p\,(k_m-k_p)}\end{aligned}$$

$$A_{m-1} = \varphi^1(D)_{D=k_m} = -\sum_{p=m+1}^{p=n} \frac{1}{N_p\,(k_m - k_p)^2}$$

$$A_{m-2} = \tfrac{1}{2}\,\varphi''(D)_{D=k_m} = +\sum_{p=m+1}^{p=n} \frac{1}{N_p\,(k_m - k_p)^3}$$

und so fort. Multiplicirt man also nach Bestimmung der Coefficienten die Gleichung 19) mit $f(x)$, transformirt jeden Summenden rechter Hand mit Rücksicht auf 15) in ein Integral, so ergiebt sich als gesuchte Lösung wieder 18).

Beispiel.

Für:

$$\frac{d^5 y}{dx^5} + 4\frac{d^3 y}{dx^3} = \sin 3x$$

ist:

$$y = \frac{1}{D^3\,(D^2+4)}\sin 3x = \frac{1}{4}D^{-3}\sin 3x - \frac{1}{16}D^{-1}\sin 3x + \frac{1}{16}\frac{D}{D^2+4}\sin 3x$$

$$= -\frac{\cos 3x}{135} + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 + C_3 \sin(2x + C_4).$$

II. Die partiellen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

Wir beschäftigen uns zunächst mit Gleichungen von der Form:

$$22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + a_{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + a_{n-2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \ldots \\ &\qquad + a_1\frac{\partial^n z}{\partial x\,\partial y^{n-1}} + a_0\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f(x,y). \end{aligned}\right.$$

Indem wir wieder von der algebraischen Gleichung 2) ausgehen und das System 3) benutzen, wird 22) reducirt auf die Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} - S_1\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\partial y} + S_2\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-3}\partial y^2} - + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-3} S_{n-3}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^2\partial y^{n-3}} + (-1)^{n-2} S_{n-2}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x\,\partial y^{n-2}} \\ &\qquad + (-1)^{n-1} S_{n-1}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} = u, \end{aligned}\right.$$

falls u die Lösung der Gleichung:

$$24)\quad \frac{\partial u}{\partial x} - k_n\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y),$$

also:

$$25)\quad u = F(x,y) + \psi(y + k_n x)$$

ist, wo die Function F definirt wird durch:

$$26)\quad F(x, y - k_n x) = \int f(x, y - k_n x)\,dx$$

und $\psi(y+k_n x)$ eine ganz beliebige von $t=y+k_n x$ abhängige Function bedeutet.

Dieselbe Gleichung 23) lässt sich auch folgendermassen aus 22) ableiten.

Bezeichnet man die p^{te} Abgeleitete von z nach x mit $D^p z$, von z nach y mit $D_1^p z$, so kann man 22) zunächst schreiben:

27) $$D^n z + a_{n-1} D^{n-1} D_1 z + a_{n-2} D^{n-2} D_1^2 z + \ldots + a_0 D_1^n z = f(x,y).$$

Wird jetzt z von den operativen Symbolen D und D_1 getrennt, so muss sich unter den gemachten Voraussetzungen der Factor von z zerlegen lassen in die nach D und D_1 linearen Factoren:

$$D-k_1 D_1,\quad D-k_2 D_1,\ \ldots\ D-k_n D_1.$$

Man erhält also durch Division mit $D-k_n D_1$ aus 27):

28) $$z(D-k_1 D_1)(D-k_2 D_1)\ldots(D-k_{n-1} D_1) = (D-k_n D_1)^{-1} f(x,y).$$

Nach 8) ist aber:

$$(D-k_n D_1)^{-1} f(x,y) = e^{k_n x D_1}\left\{\int e^{-k_n x D_1} f(x,y)\,dx + \psi(y)\right\};$$

führt man demnach noch die Definition ein:

29) $$e^{a x D_1} f(x,y) = f(x, y+ax),\quad e^{a y D} f(x,y) = f(x+ay, y),$$

welche auch als Consequenz der Trennung der operativen Symbole aus der Formel des Taylor'schen Lehrsatzes betrachtet werden kann:

$$f(x+h) = f(x) + hDf(x) + \frac{h^2}{2}D^2 f(x) + \ldots = e^{hD}.f(x),$$

so findet man leicht vollständige Uebereinstimmung der Gleichungen 28) und 23), was bewiesen werden musste.

Nachdem die rechte Seite in 28) in ein Integral übertragen, giebt die weitere Division der so erhaltenen Gleichung durch $D-k_{n-1}D_1$:

$$z(D-k_1 D_1)\ldots(D-k_{n-2} D_1) = e^{k_{n-1} x D_1}$$
$$\left[\int e^{(k_n-k_{n-1}) x D_1} dx \left\{\int e^{-k_n x D_1} f(x,y)\,dx + \psi y\right\} + \varphi(y)\right],$$

oder wenn man eine Integration ausführt, indem man setzt:

$$e^{(k_n-k_{n-1}) x D_1} dx = du,\quad \frac{e^{(k_n-k_{n-1}) x D_1}}{(k_n-k_{n-1}) D_1} = u,$$

$$\int e^{-k_n x D_1} f(x,y)\,dx = v,\quad e^{-k_n x D_1} f(x,y)\,dx = dv:$$

$$z(D-k_1 D_1)\ldots(D-k_{n-1} D_1)$$
$$= \frac{e^{k_n x D_1}}{k_n-k_{n-1}}\left\{\int e^{-k_n x D_1} dx \int f(x,y)\,dy + \psi_n(y)\right\}$$
$$+ \frac{e^{k_{n-1} x D_1}}{k_{n-1}-k_n}\left\{\int e^{-k_{n-1} x D_1} dx \int f(x,y)\,dy + \psi_{n-1}(y)\right\}.$$

So fortfahrend erhält man schliesslich:

$$30)\quad z=\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{e^{k_p x D_1}\int e^{-k_p x D_1}\,dx\overset{n-1}{\int} f(x,y)\,dy^{n-1}}{N'_p}+\psi_p(y+k_p x)\right],$$

wo $N'p$ wieder die frühere Bedeutung [siehe 10)] hat.

Beispiel:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-10\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}+35\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}-50\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}+24\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=e^{2x+3y}.$$

Die betreffende algebraische Gleichung hat die vier Wurzeln 1, 2, 3, 4; deshalb ist:

$$Z=\frac{e^{xD_1}\int e^{-xD_1}\,dx\overset{3}{\int} e^{2x+3y}\,dy^3}{-6}+\frac{e^{2xD_1}\int e^{-2xD_1}\,dx\overset{3}{\int} e^{2x+3y}\,dy^3}{2}$$

$$+\frac{e^{3xD_1}\int e^{-3xD_1}dx\overset{3}{\int} e^{2x+3y}\,dy^3}{-2}+\frac{e^{4xD_1}\int e^{-4xD_1}\,dx\overset{3}{\int} e^{2x+3y}\,dy^3}{6}$$

$$+\psi_1(y+x)+\psi_2(y+2x)+\psi_3(y+3x)+\psi_4(y+4x)$$

$$=\frac{e^{2x+3y}}{280}+\sum_{p=1}^{p=4}\psi_p(y+px).$$

Bei der Anwendung der partiellen Differentialgleichungen auf die Lösung physikalischer Probleme ist der schwierigere Theil der Rechnung meistens der, eine Function zu suchen, welche nicht nur einer gegebenen Differentialgleichung, sondern auch gewissen gegebenen Bedingungen genügt, wodurch die willkürlichen ψ-Functionen der allgemeinen Lösung bestimmt werden. In der gewöhnlichen Weise ausgehend von particulären Integralen, wählt man wo möglich letztere gleich so, dass sie einige oder alle Bedingungen erfüllen, und bildet aus der particulären Lösung die allgemeine. Aber auch diesen meistens wichtigeren Theil des mathematischen Problems behandelt man häufiger weit einfacher, wenn man die allgemeine Lösung 30) statt einer particulären als Ausgangspunkt nimmt.

So hat man z. B. für die bekannte Gleichung aus der Theorie der Schwingungen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

wenn nach y integrirt wird:

$$z=e^{ayD}\psi_1(x)+e^{-ayD}\psi_2(x)=\psi_1(x+ay)+\psi_2(x-ay).$$

Soll die Lösung die Bedingungen erfüllen:

$$\text{für } y=0 \text{ ist } z=f(x) \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}=F(x),$$

so erhält man zur Bestimmung der beiden bis jetzt ganz willkürlichen Functionen ψ_1 und ψ_2:

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = f(x),$$
$$a\psi'_1(x) - a\psi'_2(x) = F(x),$$

woraus:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int F x\, dx + C,$$
$$\psi_2(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int F x\, dx - C,$$

also schliesslich:

$$z = \frac{1}{2}\left[f(x+ay) + f(x-ay)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-ay}^{x+ay} F(x)\, dx$$

folgt. (Vergl.: Riemann, „Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff, S. 111—113.)

Das Hauptmoment der vorstehenden Beweise liegt offenbar darin, dass Gleichungen n^{ter} Ordnung auf Gleichungen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführbar waren. Für partielle Differentialgleichungen, in denen Abgeleitete verschiedener Ordnungen vorkommen, scheint, im Allgemeinen wenigstens, diese Reduction nicht möglich zu sein, weshalb wir die Anwendbarkeit des Operationscalculs auf Gleichungen dieser Art prüfen müssen durch den Versuch: ob die erzielte Lösung der Gleichung genüge.

Setzt man in:

$$31)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + c\frac{\partial z}{\partial x} + d\frac{\partial z}{\partial y} + fz = 0$$
$$z = e^{\alpha x + \beta y}.v,$$

wo v eine Function von x und y bedeutet, und bestimmt α und β aus:

$$2\alpha + 2a\beta + c = 0,$$
$$2a\alpha + 2b\beta + d = 0,$$

so wird 31) reducirt auf:

$$32)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k.v = 0.$$

Nach 30) würde die Lösung dieser Gleichung sein:

$$33)\qquad v = e^{-axD_1}\left\{ e^{x\sqrt{pD_1^2-k}}\,\psi_1(y) + e^{-x\sqrt{pD_1^2-k}}\,\psi_2(y)\right\},$$

wenn

$$p = a^2 - b.$$

Verwandelt man jeden Factor in eine unendliche Reihe:

$$e^{x\sqrt{pD_1^2-k}}.\psi_1(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(x\sqrt{pD_1^2-k})^n}{1.2.3\ldots n}\,\psi_1(y),$$

$$e^{-x\sqrt{pD_1^2-k}}.\psi_2(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n(x\sqrt{pD_1^2-k})^n}{1.2.3\ldots n}\,\psi_2(y)$$

und setzt:

$$\psi_1(y) + \psi_2(y) = f(y),$$
$$\sqrt{pD^2_1-k}\,[\psi_1(y) - \psi_2(y)] = F(y),$$

so ergiebt sich:

$$34)\quad v=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n f(y-ax)$$
$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}(pD_1^2-k)^n F(y-ax).$$

Dass in der That dieser Werth die allgemeine Lösung der Gleichung 32) ist, zeigt seine Einsetzung in dieselbe. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=a^2\sum\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n f''(y-ax)$$
$$+a^2\sum\frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)}(pD_1^2-k)^n F''(y-ax)$$
$$-2a\sum\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}(pD_1^2-k)^n f'(y-ax)$$
$$-2a\sum\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n F'(y-ax)$$
$$+\sum\frac{x^{2n-2}}{1\ldots(2n-2)}(pD_1^2-k)^n f(y-ax)$$
$$+\sum\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}(pD_1^2-k)^n F(y-ax)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-a\sum\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n f''(y-ax)$$
$$-a\sum\frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)}(pD_1^2-k)^n F''(y-ax)$$
$$+\sum\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}(pD_1^2-k)^n f'(y-ax)$$
$$+\sum\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n F'(y-ax)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sum\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n f''(y-ax)$$
$$+\sum\frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)}(pD_1^2-k)^n F''(y-ax).$$

In diesen Gliedern geht n von 0 bis ∞, mit Ausnahme von

$$\sum\frac{x^{2n-2}}{1\ldots(2n-2)}(pD_1^2-k)^n f(y-ax),$$
$$\sum\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}(pD_1^2-k)^n F(y-ax),$$
$$\sum\frac{x^{2n-1}}{1\ldots(2n-1)}(pD_1^2-k)^n f'(y-ax),$$

wo $n=0$ nicht mehr zulässig ist. Vertauscht man deshalb in den beiden ersten dieser Glieder — im letzten ist es nicht nothwendig, weil sich alle Glieder dieser Art sogleich aufheben — n mit $(n+1)$, so hat nunmehr der Index überall dasselbe Intervall. Formt man also um:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{2n-2}}{1\ldots(2n-2)}(pD_1^2-k)^n f(y-ax)$$
$$=\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^{n+1} f(y-ax)$$
$$=\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}(pD_1^2-k)^n\,[pf''(y-ax)-kf(y-ax)],$$

so zeigt die nunmehrige Einsetzung, dass der Werth 34) der vorgelegten Gleichung genügt.

Die Reduction von 31) auf 32) geschah nur, um die Ausdrücke etwas zu vereinfachen. Man hätte auch direct von 31) ausgehen können. Hierbei wäre man auf Grössen von der Form:

$$e^{x\sqrt{\alpha D_1^2+\beta D_1+\gamma}}\,.\,\varphi(y)$$

gestossen und hätte nunmehr

$$\sqrt{\alpha D_1^2+\beta D_1^2+\gamma}\,.\,\varphi(y)=f(y)$$

setzen müssen.

Wir nehmen als Beispiel die Gleichung zwischen der Temperatur z, der Zeit y und der Ordinate x eines in allen Schnitten winkelrecht zur x-Axe gleichmässig erwärmten Körpers:

$$35)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Die allgemeine Lösung ist.

$$z=e^{-\frac{x}{a}\sqrt{D_1}}\,.\,\psi_1(y)+e^{-\frac{x}{a}\sqrt{D_1}}\,\psi_2(y)$$

oder wenn man die Exponentialgrössen in Reihen verwandelt und darauf:

$$\psi_2(y)+\psi_1(y)=f(y),$$
$$\sqrt{D_1}\,[\psi_2(y)-\psi_1(y)]=F(y)$$

setzt:

$$z=f(y)+\frac{x^2}{2.a^2}f'(y)+\frac{x^4}{2.3.4a^4}f''(y)+\cdots$$
$$+\frac{x}{a}F(y)+\frac{x^3}{2.3.a^3}F'(y)+\frac{x^5}{2.3.4.5.a^5}F''(y)+\cdots$$

Soll z für $y=0$ den Werth $\varphi(x)$ erhalten, so hat man:

$$\varphi(x)=\varphi'(x)_{x=0}+x.\varphi'(x)_{x=0}+\frac{x^2}{2}\varphi''(x)_{x=0}+\frac{x^3}{2.3}\varphi'''(x)_{x=0}+\cdots$$
$$=f(y)_{y=0}+\frac{x}{a}F(y)_{y=0}+\frac{x^2}{2a^2}f'(y)_{y=0}+\frac{x^3}{2.3.a^3}F'(y)_{x=0}+\cdots,$$

woraus:

$$f(y)_{y=0}=\varphi(x)_{x=0},\quad \frac{1}{a}F(y)_{y=0}=\varphi'(x)_{x=0},$$
$$\frac{1}{a^2}f'(y)_{y=0}=\varphi''(x)_{x=0},\quad \frac{1}{a^3}F'(y)_{y=0}=\varphi'''(x)_{x=0},$$

$$\frac{1}{a^4} f''(y)_{y=0} = \varphi^{IV}(x)_{x=0}, \quad \frac{1}{a^5} F''(y)_{y=0} = \varphi^{V}(x)_{x=0}$$

u. s. w. folgt. Nach Fourier's Satz ist aber:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda) \cos\alpha\,(\lambda - x),$$

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda) \sin\alpha\,(\lambda - x),$$

$$\varphi''(x) = -\frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda) \cos\alpha\,(\lambda - x)$$

. . . .

Man erhält demnach:

$$f(y) = f(y)_{y=0} + y\, f'(y)_{y=0} + \frac{y^2}{2} f''(y)_{y=0} + \dots$$

$$= \varphi(x)_{x=0} + y\, a^2 \varphi''(x)_{x=0} + \frac{y^2 a^4}{2} \varphi^{IV}(x)_{x=0} + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, [1 - \alpha^2 a^2 y + \frac{\alpha^4 a^4 y^2}{2} - + \dots]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi\lambda \cos\alpha\lambda\, e^{-\alpha^2 a^2 y},$$

oder wegen:

$$\int_0^\infty e^{-mz^2} \cos\beta z\, dz = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4m}}$$

$$f(y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda)\, e^{-\frac{2^2}{4a^2 y}}.$$

Durch ähnliche Schlüsse erhält man, ausgehend von:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi'(\lambda) \cos\alpha\,(\lambda - x)$$

$$F(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi'(\lambda)\, e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2 y}} = \frac{\bullet}{2a\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda)\, e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2 y}} \frac{\lambda}{2ay}.$$

Verwandelt man endlich $e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2y}}$ in eine Reihe und setzt darauf die Werthe von $f(y)$ und $F(y)$ in 36) ein, so ergiebt sich:

$$37)\quad \left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda\left[1-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2y}+\frac{(\lambda-x)^4}{2.4^2.a^4y^2}-+\ldots\right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda\, e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2y}}. \end{aligned}\right.$$

(Vergl. Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, S. 107—109.)

Soll die gesuchte Function zwei Bedingungen genügen, z. B.:

für $y=0$ sei $z=\varphi(x)$,

„ $x=0$ „ $z=0$,

so kann man den nunmehrigen Werth von z, wie folgt, aus 37) ableiten. Zunächst ist:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda\, e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2y}}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{0}^{+\infty}$$

Die zweite Bedingung entstand aber hier, indem man sich den Körper den halben unendlichen Raum, von der yz-Ebene aus nach Seite der positiven x etwa, ausfüllend dachte. Es kommen also nur positive x in Frage, weshalb man die Function $\varphi(x)$ auf das Gebiet der negativen x beliebig fortführen, z. B. $\varphi(-x)=\varphi(+x)$ oder $\varphi(-x)=-\varphi(+x)$ u. s. w. setzen kann. Geschieht Letzteres eben wegen der zweiten der gegebenen Bedingungen, so ergiebt sich sogleich durch Vertauschung des $+\lambda$ mit $-\lambda$ im ersten der beiden letzten Integrale rechter Hand:

$$z=\frac{1}{2a\sqrt{\pi y}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda\left[e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2y}}-e^{-\frac{(\lambda+x)^2}{4a^2y}}\right].$$

(Riemann's Vorlesungen, S. 124, I.)

XII.

Ueber Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben.

Von

W. Graffweg

zu Maria-Laach bei Niedermendig.

(Hierzu Taf. V, Fig. 1 u. 2.)

Zur näheren Begrenzung der vorgelegten Aufgabe werde bemerkt, dass hier zunächst nur ein einziger Uebergang von Strahlen aus einem dioptrischen Mittel in ein zweites behandelt wird. Mit Hilfe der einzigen Oberfläche, die also gesucht wird und der brechenden Substanz die Eigenschaft ertheilt, homogene, von einem Punkte ausgehende Lichtstrahlen oder ihre Verlängerungen genau in einen Punkt zusammenzulenken, lassen sich alsdann Linsen bilden, indem das Mittel durch eine zweite Fläche abgeschnitten wird, welche zu den in ihm sich bewegenden Strahlen senkrecht steht. Es tritt nun ein doppelter Fall ein, je nachdem der abzubildende Punkt eine endliche oder unendliche Entfernung von seinem Bilde hat. Bei Annahme des letzteren ergiebt sich ein Resultat, welches zu leicht aus rein geometrischen Betrachtungen gewonnen wird, als dass es nicht längst gefunden werden musste. Schon Cartesius fand, dass das gestreckte Rotationsellipsoid und das zweischalige Rotationshyperboloid die in Rede stehende Eigenschaft für die der Axe parallelen Strahlen besitzen.

Auch wenn der leuchtende Punkt im Endlichen liegt, muss die Grenzfläche des Mittels eine Rotationsoberfläche sein, wovon man sich unschwer überzeugt, wenn man sich die Linse um die den Lichtpunkt und sein Bild verbindende Linie gedreht denkt. Denn das Bild behält hierbei immer seine Lage; diese Unveränderlichkeit aber ist nicht möglich, wenn nicht ein jeder Strahl bei einer beliebigen Drehung der Linse überall dieselbe Abrundung der Oberfläche trifft, d. h. wenn nicht diese eine Rotationsoberfläche ist. Daher führt sich unsere Aufgabe auf die viel einfachere zurück:

„eine Linie als Grenze eines in einer Ebene gelegenen dioptrischen Mittels zu bestimmen, welches die in derselben Ebene verlaufenden homogenen Lichtstrahlen, die von einem Punkte im Endlichen oder Unendlichen ausgehen, in einen mathematischen reellen oder ideellen Punkt zusammenlenkt."

2. Der leuchtende Punkt A in der Axe der X habe die Abscisse $-a$ und es sei a eine positive Grösse, die entweder endlich ist oder für den Fall paralleler Strahlen als unendlich angenommen werden soll. (Fig. 1.) Der Vereinigungspunkt B liege gleichfalls in der OX in der Entfernung b vom Anfangspunkte O, in den wir den Scheitel der Curve legen wollen, so dass die Lichtstrahlen von der negativen Richtung der X sich zur positiven hin bewegen, und in B ein reelles oder ideelles Bild erhalten wird, je nachdem die Abscisse dieses Punktes $\gtrless 0$ angenommen wird. Ein zweiter von A ausgehender Strahl AP bilde mit dem Axenstrahle AO den Winkel ω, welchen wir, wie alle noch vorkommenden Winkel in der Richtung von $+OX$ zur $+OY$ hin als positiv zählen wollen. Er treffe die Curve in P, dessen Coordinaten x, y seien. Die in P berührende Linie PT schliesse mit der OX den Winkel α ein. Dann ist auch α der Winkel, um welchen sich die Ordinate PQ nach jener soeben bestimmten Richtung um P herumdrehen muss, um mit der Normale NPM zusammenzufallen. Der grösseren Deutlichkeit wegen trennen wir jetzt die einzelnen Fälle, die je nach der Lage von A, B, T, O vorkommen können, von einander. Es sind deren drei. Denn ist t die Abscisse von T, worin die Tangente die OX trifft, so kann zunächst $t \lesseqgtr x$ sein, um den Uebergangsfall $t=x$, der die Scheiteltangente für $x=y=0$ charakterisirt, nicht zu berücksichtigen. Ist nun $t<x$, so kann noch $t \gtrless -a$ sein, wofern a endlich bleibt. Untersuchen wir nun zuerst, was stattfindet, wenn

$$x > t > -a$$

ist. Da bei positiven Ordinaten sowohl α als ω kleiner als ein Rechter sind, so ist durch die positive Grösse $\alpha-\omega$ der Winkel gegeben, um den sich der Strahl AP drehen muss, um in die Tangente zu gelangen. Daher ist der Einfallswinkel i von der Normale zum Strahl hin gerechnet:

$$i = \frac{\pi}{2} - \alpha + \omega.$$

Wird nun noch mit β der Brechungswinkel von der Normale PM zum gebrochenen Strahle PB hin bezeichnet, so ist

$$\text{I)} \qquad n.\sin\beta = m.\sin i = m\cos(\alpha-\omega),$$

wenn m der Brechungsexponent des Mittels, worin der leuchtende Punkt A liegt, ist, und n der des zweiten Mittels, das die abgelenkten Strahlen in sich enthält. Weil nun ferner der Winkel von der Ordinate PQ und dem gebrochenen Strahle PB eingeschlossen, aus α und β sich zusammensetzt, so ist der Abstand QB des Vereinigungspunktes vom Fusspunkte der Ordinate durch die Beziehung

II) $$y . tang(\alpha+\beta) = QB$$

gegeben. Um hieraus die Formeln für negative Ordinaten abzuleiten, brauchen wir nur die ganze Figur um die OX als ihre feste Axe wieder in die Ebene des Papieres umlegen, was analytisch geschieht, indem wir mit Beibehaltung des Zeichens von QB die Zeichen der Winkel und Ordinate wechseln. Es kommt:

$$-n \sin\beta = m \cos(\alpha-\omega) \text{ und } y . tang(\alpha+\beta) = QB,$$

oder unter der Bestimmung, dass β immer durch I) gegeben sei,

III) $$y\, tang(\alpha-\beta) = QB.$$

Daher gelten, wenn α und ω nur von 0 bis $\pm\frac{\pi}{2}$ gezählt werden, so dass $\cos\alpha$ und $\cos\omega$ immer >0 bleiben, die Formeln I), II) für positive Ordinaten, I), III) aber für negative, so lange

$$x > t > -a$$

ist.

3. Suchen wir jetzt die Beziehungen für die übrigen Fälle. Ist zunächst $t > x$, so haben wir, indem wir einstweilen α bis π wachsen lassen, für positive Ordinaten immer die Formeln I) und II), auch wenn $\alpha-\omega > \frac{\pi}{2}$ wird. Dann ist nämlich bei immer wachsendem α die Normale durch den Strahl AP gegangen und auf dessen untere Seite getreten, so dass nun i negativ ausfällt. Weil es aber für die folgende Rechnung bequemer ist, den $\cos\alpha$ immer positiv zu halten, so führen wir statt α seinen Nebenwinkel α_0 ein, indem wir $\pi+\alpha_0$ statt α setzen, weil α_0 nach jener unveränderlichen Richtung gemessen, negativ werden muss. Wir haben

$$n \sin\beta = -m \cos(\alpha_0-\omega) \text{ und } y . tang(\alpha_0+\beta) = QB,$$

oder mit Beibehaltung der Formel I): $n \sin\beta = m \cos(\alpha-\omega)$ ergiebt sich für QB die Formel III): $y\, tang(\alpha_0-\beta) = QB$, so lange die Ordinaten positiv sind. Hieraus leiten wir, wie früher, für negative Ordinaten die Formeln I) und II) ab.

Der dritte Fall, wo $t < -a$ ist, ergänzt diesen zweiten. Denn da aus $n \sin\beta = m \cos(\alpha-\omega)$ dasselbe β folgt, auch wenn α mit ω vertauscht wird, der Einfallswinkel i aber negativ gerechnet werden muss, weil er kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bleiben muss, so verschaffen sich I) und III) für positive, I) und II) aber für negative Ordinaten Geltung.

Daher ist die Abscisse b des Punktes B durch die Gleichung

IV) $$x + y . tang(\alpha \pm \beta) = b$$

gegeben, worin bei positiven y das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem T zwischen Q und A liegt oder nicht, während bei negativen Ordinaten das Umgekehrte stattfindet. Diese Gleichung wird nun mit Hilfe der Beziehungen

$$n.\sin\beta = m.\cos(\alpha-\omega) \text{ und } \tang\alpha = \frac{dy}{dx}$$

in die Differentialgleichung der Curve verwandelt.

4. Setzen wir $\frac{dy}{dx} = y'$, so finden wir, da $\cos\alpha$ immer positiv bleibt, die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{1}{+\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{y'}{+\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ferner ist, wenn r die Länge des ursprünglichen Strahles AP bedeutet:

$$\cos\omega = \frac{x+a}{r}, \quad \sin\omega = \frac{y}{r}$$

und daher:

$$n\sin\beta = m\frac{(x+a)+yy'}{r\sqrt{1+y'^2}} = m\frac{r'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

wenn r' die Ableitung von r nach x ist. Hieraus gewinnt man

$$\cotg\beta = \frac{\sqrt{n^2(1+y'^2)-m^2r'^2}}{mr'}$$

und

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{y'\sqrt{n^2(1+y'^2)-m^2r'^2}+m'r'}{\sqrt{n^2(1+y'^2)-m^2r'^2}-my'r'},$$

oder, indem wir durch Multiplication von Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{n^2(1+y'^2)-m^2r'^2}+myr'$$

die Irrationalität des letzteren entfernen:

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{n^2y'+mr'\sqrt{n^2(1+y'^2)-m^2r'^2}}{n^2-m^2r'^2}.$$

Hieraus leitet man unmittelbar die Formel für $\tang(\alpha-\beta)$ ab, indem man der Wurzel das Zeichen — giebt.

Daher ist die Differentialgleichung der Curve:

$$\text{V)} \qquad x-b+\frac{n^2yy' \pm mr'\sqrt{(n^2-m^2r'^2)y^2+n^2y^2y'^2}}{n^2-m^2r'^2} = 0,$$

worin das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Punkt T zwischen A und Q liegt oder nicht, mögen nun die Ordinaten positiv oder negativ sein.

Ist ω beständig $=0$, so wird

$$n\sin\beta = m\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

so dass die Ableitung $r'=1$ einzusetzen ist, um aus V) die Gleichung für den Fall paralleler Strahlen zu erhalten.

Schaffen wir durch Multiplication der beiden Gleichungen V) in einander die Irrationalität weg, so muss das resultirende Product

$$(x-b)^2+2\frac{n^2yy'(x-b)}{n^2-m^2r'^2}+\frac{n^4y^2y'^2-m^2r'^2(n^2-m^2r'^2)y^2-m^2r'^2n^2y^2y'^2}{(n^2-m^2r'^2)^2}=0$$

zwei Lösungen geben, weil es die beiden Differentialgleichungen in sich enthält. Da der Zähler des letzten Gliedes durch $n^2-m^2r'^2$ dividirbar ist, so erhalten wir durch diese Aufhebung und nach Multiplication mit dem Nenner, der übrig bleibt:

$$n^2(x-b)^2+2n^2(x-b)yy'+n^2y^2y'^2-m^2r'^2(x-b)^2-m^2r'^2y^2=0,$$

oder

$$n^2\frac{\{(x-b)+yy'\}^2}{(x-b)^2+y^2}=m^2r'^2$$

oder endlich

$$n.\frac{x-b+yy'}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}=\pm mr'.$$

Beide Seiten sind vollständige Differentialquotienten, und wenn wir die Grösse $\sqrt{(x-b)^2+y^2}$, das ist die Länge des gebrochenen Strahles, mit s bezeichnen, so erhalten wir:

VI) $$n(s-b)=\pm m(r-a),$$

oder, wenn $r'=1$ gesetzt werden soll:

VII) $$n(s-b)=\pm mx$$

als Gleichungen der gesuchten Curven mit Bestimmung solcher Constanten, dass dieselben den Anfangspunkt O aufnehmen.

5. Betrachten wir zuerst den Fall paralleler Strahlen. Um rein analytisch die beiden Zeichen von mx zu unterscheiden, setzen wir aus der rationellen Gleichung VII):

$$n^2s^2=(nb\pm mx)^2=n^2(x-b)^2+n^2y^2,$$

oder:

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2-2nb(n\mp m)x=0$$

und ihrer Ableitung

$$n^2yy'+(n^2-m^2)x-nb(n\mp m)=0$$

sowohl y^2, als auch yy' in die Differentialgleichung V) ein. Als rationelles Glied kommt:

$$\frac{(x-b)(n^2-m^2)+nb(n\mp m)-(n^2-m^2)x}{n^2-m^2}$$

oder

$$\frac{m(m\mp n)b}{n^2-m^2}.$$

Das irrationale Glied aber ist:

$$\frac{m}{n^2-m^2}\sqrt{\frac{(n^2-m^2)\{2nb(n\mp m)x-(n^2-m^2)x^2\}+\{nb(n\mp m)-(n^2-m^2)x\}^2}{n^2}}$$

oder

$$\frac{mb(n\mp m)}{n^2-m^2}.$$

Daher wird mit Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners die Gleichung V) durch Trennung der Zeichen in folgende zwei Beziehungen zerlegt:

$$mb(m \mp n) + mb(n \mp m) = 0, \quad mb(m \mp n) - mb(n \mp m) = 0.$$

Der ersteren Gleichung geschieht nur durch die oberen, der zweiten nur durch die unteren Zeichen Genüge. Daher entspricht der Kegelschnitt

$$ns = mx + nb$$

der Bedingung, dass die Curve in O ihre convexe Seite den Lichtstrahlen aussetze, die Curve

$$ns = nb - mx$$

aber der Bedingung, dass sie hier ihre concave Seite den Strahlen zuwende. Setzt man in jenen Gleichungen der Reihe nach m und n gleich 1, so erhält man bei der richtigen Bestimmung des Zeichens von b nach der Natur der Sache die vier Linsen, welche parallele Strahlen in einen reellen oder ideellen Vereinigungspunkt zusammenlenken. Wir begnügen uns, hier das leicht zu entwickelnde und bekannte Resultat beizufügen. Das gestreckte Rotationsellipsoid mit einem Medium gefüllt, dessen Brechungsexponent der reciproken Excentricität desselben gleich ist, vereinigt die der Rotationsaxe parallel auffallenden Strahlen in dem von dem brechenden Scheitel entfernter liegenden Brennpunkte. Wird es aber zur Hälfte von jenem Mittel umgeben, so divergirt es dieselben Strahlen, die aus dem leeren Raume parallel der Axe auffallen, so dass die Verlängerungen derselben alle den entfernter liegenden Brennpunkt aufnehmen. Ferner die hohle Schale eines Rotationshyperboloids von einem Mittel erfüllt, dessen Brechungsexponent seiner Excentricität gleich ist, lenkt die im Medium verlaufenden und der Axe parallelen Strahlen in den in der andern Schale gelegenen Brennpunkt. Umhüllt aber das gleiche Mittel die Schale, so divergirt es jene Strahlen, so dass ihre Verlängerungen durch den im Mittel sich befindenden Brennpunkt gehen.

6. Kehren wir jetzt zur Gleichung der Curve VI):

$$m(r-a) = \pm n(s-b)$$

zurück, welche die aus dem Endlichen kommenden Strahlen wieder vereinigt. Zur Unterscheidung der beiden Curven können wir wie in Nr. 5 verfahren, indem wir aus

$$n.\frac{x-b+yy'}{s} = \pm m.\frac{x+a+yy'}{r}$$

und aus

$$s^2 = (x-b)^2 + y^2$$

das yy' und y^2 ziehen, um es in die Differentialgleichung V) zu substituiren. Wir wollen aber hier ein bequemeres Verfahren einschlagen. Ist nämlich $m < n$ und $b > 0$, so dass die gesuchte Oberfläche ein reelles Bild in dem Mittel hervorbringen muss, so kann ihre Gleichung nicht

$$m(r-a) = +n(s-b)$$

sein. Denn sie würde für den Fall, dass $ma = nb$ wäre, eine Kugel

$$mr = ns$$

sein müssen, welches bekanntlich unmöglich ist. Daher kann der Gleichung V) mit dem positiven Wurzelzeichen nur die Lösung

VIII) $$mr + ns = ma + nb$$

entsprechen. Hieraus aber folgt, dass der Gleichung V) mit dem negativen Wurzelzeichen nur durch die Formel:

IX) $$mr - ns = ma - nb$$

Genüge geschieht.

Rechnen wir daher die Länge des wirklichen ursprünglichen Strahles von seinem Anfangspunkte bis zum Brechungspunkte und von diesem wieder bis zum reellen Vereinigungspunkte als positive Grössen, während der Abstand des Brechungspunktes vom ideellen Vereinigungspunkte als negative Länge des Strahles eingeführt wird, so gewinnen wir folgende kurze Aussprache des gefundenen Resultats. Die gesuchten Oberflächen sind die geometrischen Oerter des so gelegenen Punktes P, dass die algebraische Summe der Producte der Strahlenlängen und der zugehörigen Brechungsexponenten der Mittel, worin sie sich bewegen, eine constante Grösse bleibt:

$$m.AP \pm n.BP = k.$$

Beachten wir aber, dass in einem Mittel der Lichtstrahl n-mal so langsam sich fortbewegt, wenn sein Brechungsexponent n ist, als im leeren Raume, wofür der Brechungsexponent 1 ist, so können wir die Oberflächen einfach als solche charakterisiren, welche bewirken, dass bei convergirenden Linsen die gleichzeitig ausgehenden Strahlen gleichzeitig im reellen Vereinigungspunkte ankommen, und dass bei Linsen, welche die Strahlen noch divergent lassen, die Zeit, welche der Strahl braucht, um vom Ausgangspunkt zur brechenden Fläche zu gelangen, vermindert um das Zeitintervall, das die weitergehende Welle anwendet, um eine ebenso lange Strecke vom Auffallspunkte an zu durchlaufen, als dieser vom ideellen Vereinigungspunkte absteht, immer eine und dieselbe Grösse sein muss.

Der erhaltene Satz erlaubt zugleich, sofort zu erkennen, ob und inwieweit ein in den Gleichungen VIII) und IX) enthaltener Curvenzweig zu einer Linse tauglich ist. Ehe wir aber zu der kurzen Discussion jener Gleichungen übergehen, sei noch bemerkt, dass wir drei ihrer Natur nach verschiedene Oberflächen aus ihnen gewinnen müssen. Denn eine Oberfläche wird von der Linse in Anspruch genommen, welche ein reelles Bild geben soll, und zwar nur eine, weil es gleichgiltig ist, ob wir den leuchtenden Punkt oder sein Bild mit der optisch dichteren Masse umgeben. Die zweite und dritte Linse sind Verkleinerungslinsen, bei deren einer der Lichtpunkt im dichteren Medium liegt, während bei der andern dieses nicht stattfindet. Als vierte und fünfte Linse kommen nun Vergrösserungslinsen, je nachdem der Lichtpunkt wieder im Medium liegt oder nicht. Nun aber dient die Grenzfläche der ersten Verkleinerungslinse auch als Begrenzungsfläche der zweiten Vergrösserungslinse, und die Oberfläche der zweiten

Verkleinerungslinse ist dieselbe, wie die der ersten Vergrösserungslinse, so dass die fünf Linsen nur drei verschiedene Oberflächen erheischen.

Discussion der erhaltenen Gleichungen.

7. Machen wir die erste der Gleichung $mr + ns = k$ in Bezug auf Parallelcoordinaten rational, so erhalten wir eine Gleichung vierten Grades, welche in unserem eigenthümlichen Doppelpolcoordinatensystem, das wir beibehalten, die Form hat

$$(mr + ns - k)(mr - ns - k)(-mr + ns - k)(-mr - ns - k) = 0.$$

Die rational gemachte Gleichung von VIII) enthält also auch, wie schon zu errathen war, die Gleichung IX), so dass wir nur eine Gleichung für alle möglichen Fälle zu erörtern haben. Da ferner dieselben Gleichungen bleiben, wenn $-k$ statt $+k$ substituirt wird, so haben wir diese Constante nur entweder als positiv oder negativ anzusetzen. Einen zweiten Hauptfall haben wir, wenn $k=0$ wird, den wir später betrachten werden.

Setzen wir ferner m beständig gleich 1, so haben wir, weil für ein positives k, wie wir es annehmen wollen, die Gleichung $-r-ns-k$ niemals geometrische Bedeutung gewinnt, nur die drei Formeln zu betrachten:

$$\text{X)} \qquad r + ns = k, \quad r - ns = k, \quad ns - r = k.$$

Sie stellen alle Curven dar, auch wenn der Brechungsexponent n immer grösser als 1 genommen wird. Denn setzt man $n = \frac{1}{n}$ und führt nach der Multiplication mit n statt der Grösse nk wieder k ein, so erhält man Gleichungen, welche sich von den früheren nur durch die Vertauschung von r mit s unterscheiden. Man beachte aber noch, dass bei unserer Annahme, dass $n > 1$ sei, die Punkte A und B ihre Rollen wechseln, und dass von A aus auch nach der negativen Richtung der x die Strahlen sich verbreiten dürfen. Die Gestalt der Curven hängt daher von k und der Entfernung e der beiden Punkte A und B allein ab. Sie charakterisirt sich, wie leicht einzusehen ist, nach der Lage der Scheitel. Da nun der zwischen A und B liegende Scheitel durch die Beziehung:

$$r + s = e,$$

der über B hinausliegende durch

$$r - s = e$$

und endlich der vor A liegende Scheitel durch

$$s - r = e$$

bestimmt wird, so ergiebt die Verbindung einer dieser 3 Gleichungen mit einer der drei Gleichungen X) augenblicklich, ob ein Scheitel reell sei oder nicht. Denn reell ist er nur, wenn seine beiden Coordinaten positiv sind. Die allgemeinen Formen jener Lösungen sind:

$$s = \pm \frac{k \pm e}{n \pm 1}, \quad r = \pm \frac{ne \pm k}{n \pm 1},$$

woraus erhellt, dass die Scheitel reell oder imaginär werden, je nachdem eine der Bedingungen $k \gtreqless e$ mit einer der drei folgenden $ne \gtreqless k$ zusammentrifft. Dieser Combinationen, wovon eine jede eine bestimmte Art der Curven specialisirt, und zwei der Gleichungen X) mit Ausschluss der dritten als solche bezeichnet, denen ein geometrisches Bild entspricht, sind zwar neun, werden aber, weil $n > 1$ bleiben muss, auf fünf zurückgeführt.

8. Als erste Combination heben wir hervor:

$$ne > k > e,$$

durch welche Bedingungen $n > 1$ bestimmt wird. Die Gleichungen

$$r + ns = k, \quad r + s = e$$

ergeben als Coordinaten des zwischen A und B liegenden Scheitels O die Grössen

$$r_0 = \frac{ne - k}{n - 1} = AO \quad \text{und} \quad s_0 = \frac{k - e}{n - 1} = BO.$$

Daher wird, indem wir diese Werthe in $r + ns = k$ einsetzen, die Gleichung mit der Gleichung VIII), wie vorauszusehen war, identisch, und kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{r - r_0}{s_0 - s} = n \quad \text{oder} \quad \frac{r - AO}{BO - s} = n.$$

(Fig. 2.) Daraus lesen wir folgenden Satz: Die Oberfläche der in O beginnenden Linse, welche in sich bei B die von A kommenden Strahlen vereinigt, wird durch die Durchschnittskreise zweier mit A und B concentrischer und in O beim Anfangszustande sich berührender und sich so verändernder Kugeln beschrieben, dass die um B gelegte ihren Radius n-mal so langsam verkürzt, als die um A gelegte Kugel ihren Radius ausdehnt. Man erkennt leicht, dass diese Sphären die Lichtwellen selber enthalten. Die so erhaltene Oberfläche ist zur Strahlenvereinigung brauchbar von O an zu beiden Seiten der Axe AW bis zu den Punkten, worin die von AD aus gezogene Tangente die Oberfläche berührt. Indem die Geometrie aber von dem aus dem vorliegenden Mittel entstehenden Hindernisse vollständig absieht, giebt sie uns noch einen zweiten unbrauchbaren Curventheil DU. Wir finden den zweiten Scheitel U aus den Gleichungen

$$r + ns = k \quad \text{und} \quad r - s = e.$$

Es kommt:

$$r' = \frac{k + ne}{n + 1} = AU, \quad s' = \frac{k - e}{n + 1} = BU.$$

Sehr leicht findet man auch aus jener Eigenschaft der Curven eine geometrische Construction der Tangente und Normale. Um es nur anzudeuten: Ist P ein beliebiger Punkt, PQ das Stück, um welches der Radius r zugenommen hat, PS aber das, um welches s abgenommen hat, so geht die in P Tangirende durch den Mittelpunkt des die Punkte PRS aufnehmenden Kreises, während die Normale PM denselben Kreis berührt. Letztere theilt den Winkel APB in zwei solche Theile APM und MPB, deren Sinus sich wie $n:1$ zu einander verhalten. Hieraus folgt nach einer kleinen Rechnung, dass die Länge der durch A gehenden Tangente, von A bis zum Berührungspunkte D gemessen,

$$\sqrt{\frac{n^2 e^2 - k^2}{n^2 - 1}}$$

ist, und dass der Sinus des Winkels DBA, den der äusserste noch nach B kommende Strahl BD mit dem unabgelenkten Axenstrahl AB den Werth

$$\sin(DBA) = \frac{\sqrt{n^2 e^2 - k^2}}{ne}$$

hat.

Lassen wir nun umgekehrt den Radius des mit A concentrischen Kreises n-mal so schnell verkürzen, als der um B gezeichnete Kreis sich ausdehnt, so erhalten wir die Gleichung der Curve

$$ns - r = k,$$

welche die eben behandelte

$$ns + r = k$$

zur rationalen Gleichung vierten Grades completirt; denn die Gleichungen

$$ns - r = k \text{ und } s + r = e$$

ergeben als Coordinaten eines neuen reellen Scheitels V:

$$s_1 = \frac{k + e}{n + 1} = BV \text{ und } r_1 = \frac{ne - k}{n + 1} = AV,$$

welche Werthe beide positiv sind. Führen wir diese Werthe ein, so kommt als Gleichung der Curve:

$$\frac{r - AV}{s - BV} = n$$

oder, um die Natur des Curvenzweiges besser hervortreten zu lassen:

$$\frac{AV - r}{BV - s} = n.$$

Dieser Zweig umgiebt unsere erste Curve; aber sein vorderer, dem leuchtenden Punkte A zugewandter Theil ergiebt uns keine Lösung der Aufgabe. Der andere Theil ist jedoch für zwei Linsen anwendbar. Der zweite Scheitel hat nämlich die aus den Gleichungen

$$ns - r = k \text{ und } r - s = e$$

berechneten Coordinaten

$$r'' = \frac{ne + k}{n - 1} = AW, \quad s'' = \frac{k + e}{n - 1} = BW,$$

durch deren Einführung in $ns - r = k$ diese die mit der Gleichung IX) übereinstimmende Form erhält:

$$n(s - BW) = r - AW \text{ oder } \frac{AW - r}{BW - s} = n,$$

oder auch, wenn wir die Länge AT der durch A gehenden und die Curve in

T berührenden Linie und den diesem Radius coordinirten zweiten Radius BT substituiren, die Form

$$\frac{r - AT}{s - BT} = n.$$

Dehnt sich daher eine mit A concentrische Kugel vom Radius AT n-mal so schnell aus, als eine zweite um B als Centrum gelegene Kugel vom Radius BT ebenfalls ausdehnt, so beschreiben die Kugeln durch ihre Durchschnittskreise eine Oberfläche, welche gefüllt von einem Medium mit dem Brechungsexponenten n eine Vergrösserungslinse für den im Mittel liegenden Punkt B ist, und dem Auge vor W denselben in A erscheinen lässt, und welche, von demselben brechenden Mittel umgeben, als Verkleinerungslinse dient, indem die aus A kommenden Strahlen so abgelenkt werden, dass die Verlängerungen der gebrochenen Strahlen den Punkt B in sich aufnehmen. Eine kleine Rechnung ergiebt die Länge von AT als

$$\sqrt{\frac{n^2 e^2 - k^2}{n^2 - 1}},$$

das ist dieselbe Grösse, die wir für AD fanden, und das coordinirte BD ist gleich

$$\frac{1}{n}\left\{k - \sqrt{\frac{n^2 e^2 - k^2}{n^2 - 1}}\right\}.$$

9. Von den Bedingungsgleichungen $ne > k > e$ kann man nun in doppelter Weise zu den Grenzfällen übergehen, indem man einmal $ne = k$ und dann $k = e$ werden lässt. Ein dritter denkbarer Fall wäre, wenn zugleich $ne = k$ und $k = e$ würde. Da aber diese Combination der Bedingungsgleichungen verlangt, dass $n = 1$ sei, so kann hierbei von einer Ablenkung der Strahlen nicht die Rede sein.

Es sei nun zunächst $k = e$, während ne noch $> k$ bleibt. Wir haben die Formen

$$ns + r = k = e \quad \text{und} \quad ns - r = k = e,$$

deren geometrisches Bild wir also aus dem Vorhergehenden ableiten. Für die Scheitel O und U galten bei der früheren Curve die Beziehungen

$$AO = \frac{ne - k}{n - 1} \quad \text{und} \quad AU = \frac{ne + k}{n + 1}.$$

Wächst nun entweder e oder nimmt k ab, so rücken offenbar die Scheitel O und U näher nach B hin und fallen endlich, wenn $k = e$ wird, ganz mit dem Punkte B zusammen, so dass von dem ganzen inneren Oval nur der reelle Punkt B übrig bleibt. Die Complementcurve $ns - r = e$ aber behält ihre dioptrische Natur und dient, wie die frühere, als Vergrösserungs- und Verkleinerungslinse, und unterscheidet sich von jener nur dadurch, dass ihre Gestalt von zwei Constanten n und k oder e allein abhängig ist.

Bei dem zweiten Grenzfalle, wo $ne = k$ wird, während $k > e$ bleibt, fallen die Scheitel der verschiedenen Ovale, nämlich O und V, in einander zusammen, weil

$$AO = \frac{ne-k}{n-1} \text{ und } AV = \frac{ne-k}{n+1},$$

beide gleich 0 werden. Die Curve bildet also in dem Punkte A eine Schlinge, welche die beiden früher von einander geschiedenen Ovale zu einem Curvenzuge vereinigt. Der innere Theil ist als Grenzfläche einer Linse unbrauchbar, weil die von A aus an die Curve gezogene Tangente zur Länge die Null hat; das ist in A selbst berührt. Der äussere Curvenzweig aber gewinnt an Brauchbarkeit über die ganze Ausdehnung hin bis zu dem Punkte A der Schlinge.

10. Die vierte Combination der Bedingungsgleichungen ist:

$$ne < k > e.$$

Hierdurch wird das n nicht bestimmt, da es infolge der Ungleichheiten noch $\gtreqless 1$ sein kann. Den mittleren Fall schliessen wir aus. Die beiden übrigen Fälle aber geben ein und dieselbe Curve. Denn setzt man, wofern $n > 1$ ist, $n = \frac{1}{m}$, so gehen jene Bedingungen in folgende über:

$$e < mk > me,$$

welche Beziehungen dieselbe Curve erheischen, welche von den obigen Be dingungen verlangt wird. Nehmen wir daher $n > 1$ an. Die Curve

$$ns + r = k$$

hat zwischen A und B keinen Scheitel mehr, weil diese Gleichung mit

$$s + r = e$$

zusammengenommen kein positives r als Coordinate des Scheitels mehr liefert. Die Scheitel liegen daher ausserhalb A und B und haben die Coordinaten:

$$AO = \frac{k-ne}{n+1} \text{ und } BO = \frac{k+e}{n+1}$$

für den Scheitel O, für U aber

$$AU = \frac{k-ne}{n+1} \text{ und } BO = \frac{k+e}{n+1},$$

wie sich leicht ergiebt. Die ganze innere Curve ist daher unbrauchbar für eine Linse, wie die herzustellenden Gleichungen sowohl, als die Figur lehrt. Dafür wird aber die äussere Curve, deren Gleichung

$$ns - r = k$$

ist, ihrer ganzen Ausdehnung nach anwendbar. Mit Hilfe der Gleichung

$$r - s = e$$

erhält die Curve die Form:

$$ns - r = n\left(\frac{e+k}{n-1}\right) - \frac{ne+k}{n-1},$$

wo $\frac{e+k}{n-1}$ und $\frac{ne+k}{n-1}$ die Coordinaten BW und AW des Scheitels W sind, mit Hilfe der Gleichung $s - r = e$ aber die Form:

$$ns - r = n\left(\frac{k-e}{n-1}\right) - \frac{k-ne}{n-1},$$

wo $\frac{k-e}{n-1}$ und $\frac{k-ne}{n-1}$ die Coordinaten BV und AV des Scheitels V sind. Wir haben daher sowohl:

$$\frac{AW - r}{BW - s} = n, \text{ als auch } \frac{r - AV}{s - BV} = n.$$

Füllen wir daher die durch Rotation dieser Curve um AB entstehende Fläche mit einem Medium vom Brechungsexponenten n, so haben wir, wie aus den letzteren Gleichungen erhellt, nach dem früher Gesagten eine Linse, welche dem Auge ausserhalb derselben überall den leuchtenden Punkt B in A erscheinen lässt. Ist das Auge vor W, so haben wir zum vierten Male ein Mikroskop, welches den Lichtpunkt in sich einschliesst und dem Auge seine convexe Fläche zukehrt. Schaut das Auge von C aus, so erblickt es den Punkt B nach A hin seitlich verschoben. Liegt das Auge endlich vor V, so sieht es den Gegenstand verkleinert, und wir haben hier die erste und, wie wir gleich sehen werden, die einzige Verkleinerungslinse, die den Lichtpunkt in sich enthält und ihre concave Seite dem Auge zuwendet. Umgeben wir aber die Oberfläche mit dem Brechungsmittel, so werden durch dieses die aus A kommenden Lichtstrahlen so abgelenkt, als wenn sie aus B kämen, und wir haben bei W eine Verkleinerungslinse, die vierte dieser Art, und bei V die erste und einzige Vergrösserungslinse, die den leuchtenden Punkt von sich ausschliesst und ihm ihre convexe Seite zukehrt, während endlich für das Auge im Mittel über C der Punkt A seitlich nach B verschoben erscheint.

11. Hiermit haben wir alle fünf Linsen und die drei verschiedenen Begrenzungsflächen, welche die Gleichungen VIII) und IX) nach Nr. 6 liefern mussten. Da wir aber erst die Fälle für $k \geqq e$ untersucht haben, so erübrigt noch, $k < e$ zu setzen. Hiermit ist zugleich $k < ne$ gegeben, so dass die letzte Combination der Bedingungsgleichungen

$$ne > k < e$$

ist.

Da die Gleichung

$$ns + r = k$$

mit keiner der drei Gleichungen

$$r + s = e, \quad r - s = e, \quad s - r = e$$

einander zugeordnete Scheitelcoordinaten ergiebt, die beide zugleich positiv wären, so hat diese Gleichung gar kein geometrisches Gebilde, und es tritt hier statt ihrer zum ersten Male die dritte der Gleichungen X) ein, nämlich $r - ns = k$, um mit der Form $ns - r = k$ den ganzen geometrischen Ort der rationalen Gleichung vierten Grades darzustellen. Beide Curven haben für $r + s = e$ positive Scheitelcoordinaten, und ihre Gleichungen, auf diese bezogen, sind

$$ns - r = n\left(\frac{e+k}{n+1}\right) - \frac{ne-k}{n+1}$$

und

$$r - ns = \frac{ne+k}{n+1} - n\frac{e-k}{n+1},$$

woraus man ersieht, dass diese zwischen A und B liegenden Scheitel keine Lösungen unserer Aufgabe bieten. Ferner haben beide Curven über B hinaus ihren zweiten Scheitel, für den $r-s=e$ ist. Bezieht man auf diese die Gleichungen, so kommen:

$$ns - r = n\left(\frac{e+k}{n-1}\right) - \frac{ne+k}{n-1}$$

und

$$r - ns = \frac{ne-k}{n-1} - n\left(\frac{e-k}{n-1}\right),$$

welche uns lehren, dass wir hier zum fünften und sechsten Male jene früheren Vergrösserungs- und Verkleinerungslinsen erhalten, je nachdem sie mit dem dioptrischen Mittel gefüllt oder davon umgeben werden.

12. Jetzt erübrigt nur noch, den zweiten Hauptfall, den wir in Nr. 7 erkannten wo k verschwindet, zu betrachten. Die beiden letzteren Gleichungen X) fallen in eine und dieselbe, in

$$ns = r$$

zusammen, während $ns + r = 0$ keine Bedeutung gewinnt. Jene Gleichung stellt aber einen Kreis dar, auf die zwei einander zugeordneten Pole A und B bezogen, und so gelangen wir zu dem bekannten Satze, dass auch Kugeln als Grenzflächen für Vergrösserungs- und Verkleinerungslinsen dienen.

XIII.

Ueber die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischer Gleichungen.

Von

Dr. E. Hess,

Privatdocent an der Universität Marburg.

Die sogenannten einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischer Gleichungen mit zwei Unbekannten, d. h. diejenigen ganzen homogenen symmetrischen Functionen solcher Wurzeln, welche die Form haben:

$$1)\qquad \sum x^p y^q = x_1{}^p y_1{}^q + x_2{}^p y_2{}^q + \ldots + x^p{}_n y^q{}_n,$$

wo p und q ganze Zahlen, $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots x_n, y_n$ das System der n Simultanwurzeln der beiden gegebenen Gleichungen

$$2)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ \psi(x,y) = 0 \end{cases}$$

bedeuten, lassen sich in sehr übersichtlicher Weise als Summen von Producten gewisser Determinanten, deren Elemente aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen gebildet sind, oder auch recurrirend als Summen von Producten solcher Determinanten in gleiche symmetrische Functionen niederer Ordnung darstellen. Die Herleitung einiger solcher Relationen, welche auch zur praktischen Berechnung jener Functionen geeignet sind, soll im Folgenden zunächst für einige specielle Fälle und schliesslich für den allgemeinsten sich hier darbietenden Fall ausgeführt werden.

Man erhält die gesuchte symmetrische Function 1) bekanntlich als Glied einer Entwickelung nach der von Poisson zuerst angegebenen Methode* auf folgende Weise:

Sind die beiden algebraischen Gleichungen 2) gegeben, so setze man:

---

* Vergl. Serret, Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von Wertheim. Bd. I, S. 472 flgg.

3) $$t = x + \alpha y \text{ oder } x = t - \alpha y,$$
wo t eine neue Veränderliche, α eine unbestimmte Constante bedeutet.

Hierdurch erhält man:
$$\varphi(t - \alpha y, y) = 0,$$
$$\psi(t - \alpha y, y) = 0,$$
aus welchen Gleichungen durch Elimination von y eine Endgleichung in t:

4) $$\chi(t, \alpha) = 0$$
erhalten wird, deren Wurzeln sind:
$$x_1 + \alpha y_1,\ x_2 + \alpha y_2 \ldots x_w + \alpha y_w.$$

Um nun die symmetrische Function $\Sigma x^p y^q$ zu finden, suche man die Summe der $p+q^{\text{ten}}$ Potenzen von t, welche nach bekannten Regeln rational durch die Coefficienten der Endgleichung 4), in welcher ausser den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen noch die unbestimmte Grösse α vorkommt, ausgedrückt wird, so erhält man:

5) $$\sum (x + \alpha y)^{p+q} = M_0 + M_1 . \alpha + M_2 \alpha^2 + \ldots + M_q \alpha^q + \ldots + M_{p+q} . \alpha^{p+q}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von α:
$$\sum x^{p+q} = M_0, \quad \binom{p+q}{1} \sum x^{p+q-1} y = M_1, \ldots$$
$$\ldots \binom{p+q}{q} \sum x^p y^q = M_q, \ldots \sum y^{p+q} = M_{p+q}.$$
Man bekommt also für die gesuchte symmetrische Function den Werth:

6) $$\sum x^p y^q = \frac{1}{\binom{p+q}{q}} M_q,$$
wenn M_q der Coefficient des α^q auf der rechten Seite der Gleichung 5) ist.

Die Endgleichung 4) in t, deren Grad w im Allgemeinen $m.n$ ist, wenn m und n die Grade der beiden gegebenen Gleichungen sind, wird die Form haben:

7) $$\mathfrak{A}_0 t^w + \mathfrak{A}_1 t^{w-1} + \ldots + \mathfrak{A}_{w-1} t + \mathfrak{A}_w = 0,$$
worin:

8) $$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} = -(A_{1,0} + \alpha A_{0,1}) = \sum x + \alpha \sum y \\
&\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} = A_{2,0} + \alpha A_{1,1} + \alpha^2 A_{0,2} = \sum x_1 x_2 + \alpha \sum x_1 y_2 + \alpha^2 \sum y_1 y_2 \\
&-\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = -(A_{3,0} + \alpha A_{2,1} + \alpha^2 A_{1,2} + \alpha^3 A_{0,3}) \\
&\qquad = \sum x_1 x_2 x_3 + \alpha \sum x_1 x_2 y_3 + \alpha^2 \sum x_1 y_2 y_3 + \alpha^3 \sum y_1 y_2 y_3 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&(-)^w \frac{\mathfrak{A}_w}{\mathfrak{A}_0} = (-)^w (A_{w,0} + \alpha A_{w-1,1} + \alpha^2 A_{w-2,2} + \alpha^w A_{0,w}) \\
&\qquad = \sum x_1 x_2 \ldots x_w + \alpha \sum x_1 x_2 \ldots x_{w-1} y_w + \alpha^2 \sum x_1 x_2 \ldots \\
&\qquad \ldots x_{w-2} y_{w-1} y_w + \ldots + \alpha_w \sum y_1 y_2 \ldots y_w.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Ausdrücken sind die Grössen

$$A_{1,0},\ A_{2,0} \dots A_{w,0}$$

die Coefficienten der Endgleichung in x der Gleichungen 2), und ebenso

$$A_{0,1},\ A_{0,2} \dots A_{0,w}$$

die Coefficienten der Endgleichung in y, wenn in diesen beiden Gleichungen durch den Coefficienten von x^w und y^w, welcher gleich $\mathfrak{A}_0$ ist, dividirt worden ist. Die Bedeutung der übrigen Grössen $A_{r-s,s}$, bei welchen beide Indices von Null verschieden sind, ist ebenfalls leicht zu erkennen. So ist z. B.:

$$A_{1,1} = \sum x_1 y_2 = x_1 y_2 + x_1 y_3 + \dots + x_1 y_w + x_2 y_3 + \dots + x_{w-1} y_w$$
$$+ y_1 x_2 + y_1 x_3 + \dots + y_1 x_w + y_2 x_3 + \dots + y_{w-1} x_w,$$

d. h. die Summe aller solcher Combinationen der Simultanwurzeln zu **je zweien**, bei welchen die Indices des x und y verschieden sind. Allgemein ist:

$$(-)^r . A_{r-s,s} = \sum x_1 . x_2 \dots x_{r-s} . y_{r-s+1} . y_{r-s+2} \dots y_w,$$

d. h. gleich der Summe aller möglichen Producte, bei welchen $r-s$ Wurzeln x in s Wurzeln y multiplicirt sind und bei welchen die Indices sämmtlicher Factoren von einander verschieden sind.

Die Grössen $A_{r-s,s}$, deren Bezeichnung durch Indices sich hiernach rechtfertigt, sind nun auf bekannte Weise aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen zusammengesetzt; diejenigen, deren einer Index Null ist, sind die Coefficienten einer der beiden Endgleichungen; die anderen sind nach einem ähnlichen Bildungsgesetze, wie die ersteren, aus den Coefficienten der beiden Gleichungen zusammengesetzt. Auf die Art der Abhängigkeit der Grössen $A_{r-s,s}$ von den gegebenen Coefficienten soll jetzt nicht näher eingegangen, sondern dieselben als bekannte Functionen jener Coefficienten angesehen werden.*

Die gesuchte symmetrische Function

$$\sum x^p y^q$$

ist, wie oben gezeigt wurde, der durch $\binom{p+q}{q}$ dividirte Coefficient des α^q in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\sum (x + \alpha y)^{p+q},$$

welcher sich bekanntlich als folgende Determinante der Coefficienten der Endgleichung 7) in t darstellen lässt:

---

* Vergl. „Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg", Nr. 5, Juli 1869, an welcher Stelle der Zusammenhang der Grössen $A_{r-s,s}$ mit den Coefficienten der gegebenen Gleichungen von mir genauer betrachtet und übersichtlich darzustellen versucht worden ist.

$$9)\left\{\sum t^{p+q} = \left(-\frac{1}{\mathfrak{A}_0}\right)^{p+q} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_0 & \dots & 0 & 0 \\ 3\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ (p+q-1)\mathfrak{A}_{p+q-1} & \mathfrak{A}_{p+q-2} & \mathfrak{A}_{p+q-3} & \dots & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_0 \\ (p+q)\mathfrak{A}_{p+q} & \mathfrak{A}_{p+q-1} & \mathfrak{A}_{p+q-2} & \dots & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_1 \end{vmatrix}\right.$$

$$10)\ \sum (x+\alpha y)^{p+q} = (-)^{p+q} \begin{vmatrix} A_{1,0}+\alpha A_{0,1} & 1 \\ 2(A_{2,0}+\alpha A_{1,1}+\alpha^2 A_{0,2}) & A_{1,0}+\alpha A_{0,1} \\ 3(A_{3,0}+\alpha A_{2,1}+\alpha^2 A_{1,2}+\alpha^3 A_{0,3} & A_{2,0}+\alpha A_{1,1}+\alpha^2 A_{0,2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (p+q-1)(A_{p+q-1,0}+\alpha A_{p+q-2,1}+\dots & \\ \dots+\alpha^{p+q-1} A_{0,p+q-1}) & A_{p+q-2,0}+\alpha A_{p+q-3,1}+\dots \\ & \dots+\alpha^{p+q-2} A_{0,p+q-2} \\ (p+q)(A_{p+q,0}+\alpha A_{p+q-1,1}+\dots & \\ \dots+\alpha^{p+q-1} A_{1,p+q-1}+\alpha^{p+q} A_{0,p+q}) & A_{p+q-1,0}+\alpha A_{p+q-2,1}+\dots \\ & \dots+\alpha^{p+q-1} A_{0,p+q-1} \end{vmatrix}$$

Ich will mit den einfachen Fällen beginnen und die Coefficienten von

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,$$

welchen resp. die Functionen

$$\sum x^p y^q,\quad (p+q)\sum x^{p+q-1} y,\quad \binom{p+q}{2}\sum x^{p+q-2} y^2$$

entsprechen, aus der Entwickelung dieser Determinanten ableiten, um dann zur Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes für

$$\binom{p+q}{q}\sum x^p y^q,$$

den Coefficienten des α^q, überzugehen.

Für den Coefficienten des α^0 erhält man den bekannten Ausdruck:

$$11)\left\{\sum x^{p+q} = (-)^{p+q} \begin{vmatrix} A_{1,0} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2A_{2,0} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 3A_{3,0} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ (p+q-1)A_{p+q-1,0} & A_{p+q-2,0} & A_{p+q-3,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\ (p+q)A_{p+q,0} & A_{p+q-1,0} & A_{p+q-2,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0} \end{vmatrix} = (-)^{p+q} S_{p+q,0},\right.$$

Setzt man hierin für

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{p+q}$$

ihre Werthe aus 8) ein, so erhält man

$$\binom{p+q}{q} \sum x^p y^q,$$

wenn man den Coefficienten von α^q aus der Entwickelung dieser Determinante bestimmt. Die Determinante 9) erhält dann folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ A_{1,0} + \alpha A_{0,1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ A_{p+q-3,0} + \alpha A_{p+q-4,1} + \ldots + \alpha^{p+q-3} A_{0,p+q-3} & \ldots & A_{1,0} + \alpha A_{0,1} & 1 \\ A_{p+q-2,0} + \alpha A_{p+q-3,1} + \ldots + \alpha^{p+q-2} A_{0,p+q-2} & \ldots & A_{2,0} + \alpha A_{1,1} + \alpha^2 A_{0,2} & A_{1,0} + \alpha A_{0,1} \end{vmatrix},$$

welcher sich direct aus der Endgleichung in x ergeben haben würde.

Der Coefficient des α^1 lässt sich auf folgende Weise aus der Determinante 10) erhalten:

$$(p+q) \sum x^{p+q-1} y = (-)^{p+q} \Bigg\{ A_{0,1} . S_{p+q-1,0} + \begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 \\ A_{1,1} & A_{1,0} \end{vmatrix} . S_{p+q-2,0}$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 \\ A_{1,1} & A_{1,0} & 1 \\ A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} \end{vmatrix} . S_{p+q-3,0} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \ldots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A_{p+q-2,1} & A_{p+q-2,0} & A_{p+q-3,0} & \ldots & A_{1,0} \end{vmatrix} S_{1,0} +$$

$$+\begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 \\ 3A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ (p+q)\,A_{p+q-1,1} & A_{p+q-1,0} & A_{p+q-2,0} & \dots & A_{1,0} \end{vmatrix} .1 \Bigg\}$$

$$12)\quad = (-)^{p+q} \{ s_{0,1} \,.\, S_{p+q-1,0} + s_{1,1}\, S_{p+q-2,0} + s_{2,1}\, S_{p+q-3,0} + \dots$$
$$\dots + s_{p+q-2,1} \,.\, S_{1,0} + S_{p+q-1,1} \},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$13)\quad \begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{k,1} & A_{k,0} & A_{k-1,0} & \dots & A_{1,0} \end{vmatrix} = s_{k,1} \text{ und } \begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 \\ 3A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ kA_{k,1} & A_{k,0} & A_{k-1,0} & \dots & A_{1,0} \end{vmatrix} = S_{k,1}.$$

Der in 12) in der Parenthese stehende Ausdruck kann aber in eine Determinante zusammengefasst werden, welche den Factor $(p+q)$ erhält. Denn wenn man sämmtliche Determinanten $s_{k,1}$ nach den Elementen der ersten Colonne zerlegt und die leicht zu beweisende Relation berücksichtigt:

$$14)\quad S_{i,0} + S_{i-1,0}\, s_{1,0} + S_{i-2,0} \,.\, s_{2,0} + \dots + S_{1,0} \,.\, s_{i-1,0} = i \,.\, s_{i,0},$$

wo

$$s_{i,0} = \begin{vmatrix} A_{1,0} & 1 & \dots & 0 \\ A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{i,0} & A_{i-1,0} & \dots & A_{1,0} \end{vmatrix},$$

so erhält man:

$$A_{0,1}\,(S_{p+q-1,0} + S_{p+q-2,0} \,.\, s_{1,0} + S_{p+q-3,0}\, s_{2,0} + \dots$$
$$+ S_{1,0}\, s_{p+q-2,0}) = (p+q-1)\, A_{0,1} \,.\, s_{p+q-1,0}$$
$$- A_{1,1}\,(S_{p+q-2,0} + S_{p+q-3,0} \,.\, s_{1,0} + S_{p+q-4,0}\, s_{2,0} + \dots$$
$$\dots + S_{1,0}\, s_{p+q-3,0}) = -(p+q-2)\, A_{1,1} \,.\, s_{p+q-2,0}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(-)^{p+q-3} A_{p+q-3,1}\,(S_{2,0} + S_{1,0} \,.\, s_{1,0}) = (-)^{p+q-3} \,.\, 2\, A_{p+q-3,1} \,.\, s_{2,0}$$
$$(-)^{p+q-2} A_{p+q-2,1}\,(S_{1,0}) \qquad = (-)^{p+q-2} \,.\, 1\, A_{p+q-2,1}\, s_{1,0}.$$

Addirt man diese Ausdrücke zu den entsprechenden, welche durch Zerlegung der Determinante $S_{p+q-1,1}$ nach den Elementen der ersten

Colonne erhalten werden, so resultirt eine Determinante $s_{p+q-1,1}$, in welcher alle Elemente der ersten Colonne den Factor $(p+q)$ haben.

Man erhält daher

$$(p+q)\sum x^{p+q-1}y = (-)^{p+q}(p+q)\,.\,s_{p+q-1,1}$$

oder

$$15)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum x^{p+q-1}y = (-)^{p+q}s_{p+q-1,1} \\ &= (-)^{p+q}\begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{p+q-1,1} & A_{p+q-1,0} & A_{p+q-2,0} & \dots & A_{1,0} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Die einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischer Gleichungen, bei welchen der Exponent der einen Wurzel gleich 1 ist, lassen sich hiernach immer durch eine Determinante darstellen, so dass

$$\sum x^k y = (-)^{k+1}s_{k,1} \quad \text{und ebenso} \quad \sum x y^l = (-)^{l+1}s_{1,l}.$$

Es kommt diesen symmetrischen Functionen eine besondere Wichtigkeit in der Theorie der algebraischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu, indem dieselben z. B. mit den Summen der gleichen Potenzen der einen Unbekannten die Elemente derjenigen Determinanten bilden, welche, ähnlich wie die Glieder einer Sturm'schen Reihe für eine Gleichung mit einer Unbekannten, zur Erkenntniss der Anzahl reeller Simultanlösungen dienen können, welche in einem gewissen Gebiete liegen. Die Ausdrücke, welche eine solche Reihe bilden, sind zuerst von Hermite angegeben, und in ihnen sind diese symmetrischen Functionen durch T mit entsprechenden Indices bezeichnet.*

Der Coefficient des α^2 in der Entwickelung der Determinante 10), welcher die Function

$$\binom{p+q}{2}\sum x^{p+q-2}y^2$$

liefert, wird durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das oben angewandte, zunächst in folgender Form erhalten:

---

* Vergl. Brioschi in dieser Zeitschrift, Bd. II S. 200.

$$16)\quad \left\{\begin{array}{l} \binom{p+q}{2}\sum x^{p+q-2}y^2 \\ =(-)^{p+q}\left\{\begin{array}{l} s_{0,1}\cdot(p+q-1)\,s_{p+q-2,1}+s_{1,1}(p+q-2)\,s_{p+q-3,1} \\ \qquad +s_{2,1}(p+q-3)\,s_{p+q-4,1}+\dots \\ \qquad \dots+s_{p+q-3,1}\cdot 2s_{1,1}+s_{p+q-2,1}\cdot s_{0,1} \\ +s_{0,2}\cdot S_{p+q-2,0}+s'_{1,2}\cdot S_{p+q-3,0}+s'_{2,2}\cdot S_{p+q-4,0}+\dots \\ \qquad \dots+s'_{p+q-3,2}\,S_{1,0}+S'_{p+q-2,2} \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

wo

$$s'_{i,2}=-\begin{vmatrix} A_{0,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ A_{2,2} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ A_{i-1,2} & A_{i-1,0} & A_{i-2,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\ A_{i,2} & A_{i,0} & A_{i-1,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0} \end{vmatrix}$$

und

$$S'_{p+q-2,2}=-\begin{vmatrix} 2A_{0,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3A_{1,2} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 4A_{2,2} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ (p+q-1)A_{p+q-3,2} & A_{p+q-3,0} & A_{p+q-4,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\ (p+q)A_{p+q-2,2} & A_{p+q-2,0} & A_{p+q-3,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Von den in 16) in der Parenthese stehenden Gliedern lassen sich zunächst die beiden letzten Glieder der beiden Reihen zu einer Determinante zusammenfassen, so dass

$$s_{d+q-2,1}\cdot s_{0,1}+S'_{p+q-2,2}=S_{p+q-2,2}$$

$$=\begin{vmatrix} A_{0,1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2A_{0,2} & A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3A_{1,2} & A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ (p+q-1)A_{p+q-3,2} & A_{p+q-3,1} & A_{p+q-3,0} & A_{p+q-4,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\ (p+q)A_{p+q-2,2} & A_{p+q-2,1} & A_{p+q-2,0} & A_{p+q-3,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante liefert alsdann mit den übrigen Gliedern der zweiten und dem ersten Gliede der ersten Reihe in 16) zusammengenommen, wie durch Zerlegen der Determinanten $s'_{i,2}$ nach den Elementen der ersten Colonne sofort zu erkennen ist, wieder analog, wie oben:

$$
= (p+q) \left| \begin{matrix}
A_{0,1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{0,2} & A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{1,2} & A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
A_{p+q-3,2} & A_{p+q-3,1} & A_{p+p-3,0} & A_{p+q-4,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\
A_{p+q-2,2} & A_{p+q-2,1} & A_{p+q-2,0} & A_{p+q-3,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0}
\end{matrix} \right| ,
$$

so dass schliesslich, wenn noch von den übrigen Gliedern der ersten Reihe in 16) je zwei, welche gleichweit von der Mitte abstehen, zusammengefasst werden, sich ergiebt:

$$
17) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\binom{p+q}{2} \sum x^{p+q-2} y^2 \\
&= (-)^{p+q} (p+q) \left\{ s_{p+q-2,2} + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p+q-3} s_{p+q-2-i,1}\, s_{i,1} \right\}.
\end{aligned} \right.
$$

Nach dieser Formel ist z. B.:

$$
\sum x^7 y^2 = (-)^9 \frac{9}{36} \left\{ s_{7,2} + s_{6,1} \cdot s_{1,1} + s_{5,1}\, s_{2,1} + s_{4,1} \cdot s_{3,1} \right\}
$$

und

$$
\sum x^8 y^2 = (-)^{10} \frac{10}{45} \left\{ s_{8,2} + s_{7,1}\, s_{1,1} + s_{6,1}\, s_{2,1} + s_{5,1}\, s_{3,1} + \frac{s^2_{4,1}}{2} \right\}
$$

und analog

$$
\sum x^2 y^8 = \frac{2}{9} \left\{ s_{2,8} + s_{1,7}\, s_{1,1} + s_{1,6}\, s_{1,2} + s_{1,5}\, s_{1,3} + \frac{s^2_{1,4}}{2} \right\}.
$$

Man sieht hieraus, dass die einförmigen symmetrischen Functionen, bei welchen die Exponenten beider Wurzeln grösser als 1 sind, nicht mehr durch eine Determinante der Coefficienten $A_{r-s,s}$, wohl aber als eine Summe von Producten solcher Determinanten $s_{i,j}$ dargestellt werden können.

Um nun die allgemeine Formel für

$$
\sum x^p y^q
$$

herleiten zu können, sollen zuvor noch, entsprechend den oben angewendeten Abkürzungen, folgende symbolische Bezeichnungen eingeführt werden:

$$
18)\; s_{p,q} = \begin{vmatrix}
A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{0,2} & A_{0,1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{0,3} & A_{0,2} & A_{0,1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
A_{0,q} & A_{0,q-1} & A_{0,q-2} & \dots & A_{0,1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{1,q} & A_{1,q-1} & A_{1,q-2} & \dots & A_{1,1} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
A_{2,q} & A_{2,q-1} & A_{2,q-2} & \dots & A_{2,1} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
A_{p-1,q} & A_{p-1,q-1} & A_{p-1,q-2} & \dots & A_{p-1,1} & A_{p-1,0} & A_{p-2,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\
A_{p,q} & A_{p,q-1} & A_{p,q-2} & \dots & A_{p,1} & A_{p,0} & A_{p-1,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0}
\end{vmatrix}.
$$

Durch $S_{p,q}$ werde eine ganz analog gebildete Determinante bezeichnet, in welcher nur die Elemente der ersten Colonne mit den entsprechenden Factoren

$$1,2,3 \dots q, q+1, q+2 \dots p+q-1, p+q$$

multiplicirt sind.

Ferner sei:

$$
19\alpha)\; \left\{\begin{aligned}
s'_{p,q} &= (-)^{q-1} \begin{vmatrix}
A_{0,q} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{1,q} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
A_{2,q} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
A_{p-1,q} & A_{p-1,0} & A_{p-2,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\
A_{p,q} & A_{p,0} & A_{p-1,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\mu=p} (-)^{\mu+q-1} A_{\mu,q} \cdot s_{p-\mu,0}
\end{aligned}\right.
$$

und ebenso:

$$
19\beta)\left\{\begin{aligned}
S'_{p,q} = (-)^{q-1} &\begin{vmatrix}
q\,A_{0,q} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
(1+q)\,A_{1,q} & A_{1,0} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
(2+p)\,A_{2,q} & A_{2,0} & A_{1,0} & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
(p+q-1)\,A_{p-1,q} & A_{p-1,0} & A_{p-2,0} & \dots & A_{1,0} & 1 \\
(p+q)\,A_{p,q} & A_{p,0} & A_{p-1,0} & \dots & A_{2,0} & A_{1,0}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\mu=p} (-)^{\mu+q-1}\,(\mu+q)\,A_{\mu,q}\cdot s_{p-\mu,0}.
\end{aligned}\right.
$$

Alsdann ist

$$s_{p,q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} s'_{0,\lambda}\cdot s_{p,q-\lambda} + s'_{p,q}$$

und

$$S_{p,q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} S'_{0,\lambda}\cdot s_{p,q-\lambda} + S'_{p,q}.$$

Durch Zerlegen der Determinanten $s_{p,q}$ und $S_{p,q}$ nach dem Laplaceschen Determinantensatze leitet man ferner leicht folgende Relationen her:

$$20)\qquad s_{p,q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} s_{0,q-\lambda}\cdot s'_{p,\lambda} + s'_{p,q} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda}\cdot s'_{p,\lambda},$$

$$21)\qquad S_{p,q} = S'_{p,q} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} S_{0,q-\lambda}\cdot s'_{p,\lambda},$$

wobei in Formel 20), wie auch in 19)

$$s_{0,0} = 1$$

angenommen ist.

Ausserdem ergiebt sich durch Anwendung der bereits oben gebrauchten Formel 14) leicht folgende:

$$22)\qquad S'_{p,q} + \sum_{i=0}^{i=p-1} S_{p-i,0}\cdot s'_{i,q} = (p+q)\,s'_{p,q},$$

sowie die Formel 14) die ganz analoge:

$$22\alpha)\qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=q-1} S_{0,q-\nu}\cdot s_{0,\nu} = q\cdot s_{0,q}$$

liefert.

Endlich soll noch zur Abkürzung:

$$23)\qquad (-)^{p+q}\binom{p+q}{q}\sum x^p y^q = T_{p,q}$$

gesetzt werden, so dass sich aus $T_{p,q}$ sofort die symmetrische Function

$$\sum x^p y^q$$

ergiebt, wenn erstere durch

$$(-)^{p+q}\binom{p+q}{q}$$

dividirt wird.

Wenn man nun die Determinante 10), von der letzten Colonne anfangend, in Summen von Determinanten, diese einzeln wieder nach dem Laplace'schen Determinantensatze zerlegt, so erhält man für den Coefficienten des α^q folgenden Ausdruck:

$$24)\qquad T_{p,q} = \sum_{j=1}^{j=q}\sum_{i=0}^{i=p} T_{p-i,\,q-j}\,.\,s'_{i,j},$$

wobei zu beachten ist, dass für die beiden gleichzeitigen Grenzwerthe $i=p$, $j=q$ der Summand $T_{0,0}\,.\,s'_{p,q}$ den Werth $S'_{p,q}$ erhält.

Fasst man sämmtliche Summanden, die dem Werthe $i=p$ entsprechen, zusammen, so erhält man, gemäss der Formel 21):

$$25)\qquad T_{p,q} = S_{p,q} + \sum_{j=1}^{j=q}\sum_{i=0}^{i=p-1} T_{p-i,\,q-j}\,.\,s'_{i,j}.$$

Durch Absonderung der den Werthen $i=0$ und $j=q$ entsprechenden Summen nimmt der Ausdruck folgende Gestalt an:

$$25\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} T_{p,q} = S_{p,q} &+ \sum_{j=1}^{j=q-1} T_{p,\,q-j}\,.\,s'_{0,j}\\ &+ \sum_{i=0}^{i=p-1} T_{p-i,0}\,s'_{i,q} + \sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1} T_{p-i,\,q-j}\,.\,s'_{i,j}.\end{aligned}\right.$$

Wenn man nun hierin successive für

$$T_{p,q-1},\ T_{p,q-2}\ \dots\ T_{p,1}$$

die Werthe einsetzt, wie sie sich aus dieser allgemeinen Recursionsformel ergeben, so gelangt man, indem man fortwährend die Relation 20) berücksichtigt, zu folgender Formel, in welcher statt der Grössen $s'_{i,j}$ jetzt die Grössen $s_{i,j}$ und ebenso statt der $T_{p,q-j}$ die $S_{p,q-j}$ vorkommen:

$$\begin{aligned} T_{p,q} = S_{p,q} &+ \sum_{j=1}^{j=q-1} S_{p,\,q-j}\,.\,s_{0,j}\\ &+ \sum_{i=0}^{i=p-1} S_{p-i,0}\,s_{i,q} + \sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1} T_{p-i,\,q-j}\,.\,s_{i,j},\end{aligned}$$

oder

$$26)\quad \left\{ \begin{aligned} T_{p,q} = \sum_{j=0}^{j=q-1} S_{p,q-j} \cdot s_{0,j} + \sum_{i=0}^{i=p-1} S_{p-i,0} \cdot s_{i,q} \\ + \sum_{j=1}^{j=q-1} \sum_{i=1}^{i=p-1} T_{p-i,q-j} \cdot s_{i,j}. \end{aligned} \right.$$

Die beiden ersten Summen lassen sich nun endlich noch zusammenfassen in $(p+q) s_{p,q}$. Denn setzt man für $S_{p,q-j}$ und für $s_{i,q}$ die aus den Formeln 21) und 20) sich ergebenden Ausdrücke, so erhält man für die beiden ersten Summen in 26):

$$\sum_{j=0}^{j=q-1} \left\{ S'_{p,q-j} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-j-1} S_{0,q-j-\lambda} \cdot s'_{p,\lambda} \right\} s_{0,j}$$
$$+ \sum_{i=0}^{i=p-1} \left\{ S_{p-i,0} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda} \cdot s'_{i,\lambda} \right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in folgenden umformen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda} \left\{ S'_{p,\lambda} + \sum_{i=0}^{i=p-1} S_{p-i,0} \cdot s'_{i,\lambda} \right\}$$
$$+ \sum_{j=0}^{j=q-1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-j-1} S_{0,q-j-\lambda} \cdot s'_{p,\lambda} \cdot s_{0,j}.$$

Der erste Summand dieses Binoms liefert nach Formel 22):

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda} \cdot (p+\lambda) \cdot s'_{p,\lambda};$$

der zweite lässt sich, indem man die Glieder der Summe nach den wachsenden Werthen von λ ordnet, offenbar schreiben:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} \left\{ s'_{p,\lambda} \sum_{j=0}^{j=q-\lambda-1} S_{0,q-\lambda-j}\, s_{0,j} \right\}$$

und liefert vermöge Formel 22α):

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q-1} s'_{p,\lambda} \cdot (q-\lambda) \cdot s_{0,q-\lambda},$$

wofür auch

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s'_{p,\lambda} (q-\lambda) \cdot s_{0,q-\lambda}$$

geschrieben werden kann, da der dem Werthe $\lambda=q$ entsprechende Summand gleich Null wird.

Die beiden ersten Summen in 26) liefern also hiernach:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda} \cdot (p+\lambda)\, s'_{p,\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s'_{p,\lambda} \cdot (q-\lambda) \cdot s_{0,q-\lambda}$$
$$= (p+q) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} s_{0,q-\lambda} \cdot s'_{p,\lambda} = (p+q)\, s_{p,q}$$

nach Formel 20), wie zu beweisen war.

Hiernach erhält man also die Relation:

$$27)\qquad T_{p,q}=(p+q)\,s_{p,q}+\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1}T_{p-i,q-j}\,.\,s_{i,j}\,,$$

also z. B.:

$$\begin{aligned}T_{5,4}=9\,.\,s_{5,4}&+T_{4,3}\,.\,s_{1,1}+T_{3,3}\,.\,s_{2,1}+T_{2,3}\,.\,s_{3,1}+T_{1,3}\,.\,s_{4,1}\\&+T_{4,2}\,.\,s_{1,2}+T_{3,2}\,.\,s_{2,2}+T_{1,1}\,.\,s_{4,3}+T_{2,1}\,.\,s_{3,3}\\&+T_{3,1}\,.\,s_{2,3}+T_{4,1}\,.\,s_{1,3}+T_{1,2}\,.\,s_{4,2}+T_{2,2}\,.\,s_{2,2}.\end{aligned}$$

Es liegt nun nahe, für die T auf der rechten Seite wieder ihre Werthe einzusetzen und so schliesslich eine Formel herzuleiten, in welcher nur die Determinanten s vorkommen. Dieselbe wird in dem gewählten Beispiele:

$$-\binom{9}{4}\sum x^5y^4=9\left\{\begin{aligned}&s_{5,4}+s_{4,3}\,.\,s_{1,1}+s_{3,3}\,.\,s_{2,1}+s_{2,3}\,.\,s_{3,1}\\&\quad+s_{1,3}\,.\,s_{4,1}+s_{4,2}\,.\,s_{1,2}+s_{3,2}\,.\,s_{2,2}\\&\quad+s_{3,2}\,.\,s^2_{1,1}+2s_{2,2}\,s_{2,1}\,s_{1,1}\\&\quad+2s_{1,2}\,s_{3,1}\,s_{1,1}+s_{1,2}\,s^2_{2,1}\\&\quad+s_{2,1}\,.\,s^3_{1,1}\end{aligned}\right\}.$$

Die allgemeine Formel lässt sich durch folgende Betrachtungen erhalten:

Man setze in die Gleichung 27) für $T_{p-i,q-j}$ den Werth, der sich aus dieser allgemeinen Formel ergiebt, ein, nämlich:

$$T_{p-i,\,q-j}=(p-i+q-j)\,s_{p-i,\,q-j}+\sum_{t=1}^{t=q-j-1}\sum_{r=1}^{r=p-i-1}T_{p-i-r,\,q-j-t}\,s_{r,t}\,,$$

so erhält man

$$28)\left\{\begin{aligned}T_{p,q}&=(p+q)\,s_{p,q}+\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1}(p-i+q-j)\,s_{p-i,\,q-j}\,.\,s_{i,j}\\&\quad+\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1}\left\{\sum_{t=1}^{t=q-j-1}\sum_{r=1}^{r=p-i-1}T_{p-i-r,\,q-j-t}\,s_{r,t}\right\}s_{i,j}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist aber

$$\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1}(p-i+q-j)\,s_{p-i,q-j}.s_{i,j}=(p+q)\,\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1}s_{p-i,\,q-j}\,.\,s_{i,j}\,,$$

da sich immer je zwei der Summanden, deren Gesammtzahl $(p-1)(q-1)$ beträgt, nämlich

$$(p+q-i-j)\,s_{p-i,q-j}\,s_{i,j}$$

und

$$(i+j)\,s_{i,j}\,.\,s_{p-i,q-j}\,,$$

zu

$$(p+q)\,s_{p-i,\,q-j}\,s_{i,j}$$

zusammenfassen lassen und nach Heraussetzung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{p+q}{2}$ die einzelnen Summanden sämmtliche Combinationen

$$s_{p-i,\,q-j}\,.\,s_{i,j}.$$

darstellen, die erhalten werden, wenn man die beiden Zahlen p und q in alle möglichen (positiven) Summanden zu je zweien (die Null ausgenommen) zerlegt, und von denen immer zwei gleichweit von der Mitte abstehende einander gleich werden.

Die vierfache Summe in 28) lässt sich, wenn man die einzelnen Summanden nach den aufeinanderfolgenden Werthen von r und t ordnet, auf folgende Form bringen:

$$\sum_{t=1}^{t=q-2}\sum_{r=1}^{r=p-2}\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} T_{p-i-r,q-j-t}\cdot s_{i,j}\cdot s_{r,t},$$

wofür wir der Einfachheit wegen schreiben wollen:

$$\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} T_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\cdot s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}.$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe werden erhalten, indem man die beiden Zahlen p und q in alle möglichen Summanden zu je dreien,

$$p-i_1-i_2,\, i_1,\, i_2 \text{ und } q-j_1-j_2,\, j_1,\, j_2$$

zerlegt und die sämmtlichen Combinationen

$$T_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\, s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}$$

bildet, von denen natürlich immer diejenigen, bei denen i_1 und i_2 oder j_1 und j_2 verschieden sind, doppelt vorkommen und deren Gesammtzahl

$$\binom{p-1}{2}.\binom{q-1}{2}$$

beträgt.

Hierdurch ist also für $T_{p,q}$ folgender Ausdruck erhalten:

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} T_{p,q}=(p+q)\Big\{ s_{p,q} &+ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1} s_{p-i,q-j}\cdot s_{i,j}\Big\}\\ &+\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} T_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_1}\, s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man nun für

$$T_{p-i_1-i_2,\,q-j_1-j_2}$$

wieder den Werth, wie er sich aus der Formel 27) ergiebt, ein, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} T_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\, s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}$$

$$=\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2}(p-i_1-i_2+q-j_1-j_2)\cdot s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\cdot s_{i_1,j_1}\, s_{i_2,j_2}+Q$$

$$=(p+q)\tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\cdot s_{i_1,j_1}\cdot s_{i\ ,j_2}+Q.$$

Denn von sämmtlichen Summanden der ersten Summe lassen sich im Allgemeinen immer drei Paare zusammenfassen, nämlich:

$$\begin{Bmatrix} (p-i_1-i_2+q-j_1-j_2)\, s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}.s_{i_2,j_2} \\ +(i_2+j_2)\, s_{i_2,j_2}.s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2} \end{Bmatrix} s_{i_1,j_1}$$
$$+\begin{Bmatrix} (p-i_1-i_2+q-j_1-j_2)\, s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}.s_{i_1,j_1} \\ +(i_1+j_1)\, s_{i_1,j}.s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2} \end{Bmatrix} s_{i_2,j_2}$$
$$+\begin{Bmatrix} (i_1+j_1)\, s_{i_1,j_1}.s_{i_2,j_1} \\ +(i_2+j_2)\, s_{i_2,j_2}.s_{i_1,j_2} \end{Bmatrix} s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2},$$

deren Summe giebt

$$2\,(p+q)\, s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}.s_{i_1,j_1}.s_{i_2,j_2};$$

falls zwei Factoren einander gleich werden, so erhält man

$$(p+q)\, s_{p-2i_1,q-2j_1}.s^2_{i_1,j_1}$$

als die Summe der drei Glieder

$$\begin{Bmatrix} (p-2i_1+q-2j_1)\, s_{p-2i_1,q-2j_1}\, s_{i_1,j_1} \\ +(i_1+j_1)\, s_{i_1,j_1}.s_{p-2i_1,q-2j_1} \end{Bmatrix} s_{i_1,j_1} + \{(i_1+j_1)\, s_{i_1,j_1}.s_{i_1,j_1}\} s_{p-2i_1,q-2j_1}$$

und endlich wenn alle drei Factoren einander gleich werden, welcher Fall nur dann eintritt, wenn p und q beide durch 3 theilbar sind, das eine Glied

$$\frac{p+q}{3}.s^3_{\frac{p}{3},\frac{q}{3}}.$$

Setzt man also den Factor $\frac{p+q}{3}$ der Summe voraus, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2}(p-i_1-i_2+q-j_1-j_2).s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\, s_{i_1,j_2}.s_{i_2,j_2}$$
$$=\frac{p+q}{3}\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=q-2}s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}.s_{i_1,j_1}.s_{i_2,j_2},$$

wobei die einzelnen Glieder der auf der rechten Seite stehenden Summe die sämmtlichen Combinationen $s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}'.s_{i_1,j_1}.s_{i_2,j_2}$ darstellen, die erhalten werden, wenn die Zahlen p und q auf alle Arten in Summanden zu je dreien zerlegt werden und welche auf die oben angegebene Art zu je 6 oder je 3 zusammengefasst werden können.*

Der oben zur Abkürzung durch Q bezeichnete Ausdruck stellt eine sechsfache Summe dar, die auf folgende Form gebracht werden kann:

$$Q=\sum_{j=1}^{j=q-3}\sum_{i=1}^{i=p-3}T_{p-i_1-i_2-i_3,\, q-j_1-j_2-j_3}.s_{i_1,j_1}.s_{i_2,j_2}\, s_{i_3,j_3},$$

so dass man für $T_{p,q}$ jetzt den Ausdruck hat:

---

* Die Gesammtsumme der Coefficienten aller Glieder des Summenausdrucks beträgt, wie leicht nachzuweisen:

$$\binom{p}{3}\binom{q-1}{2}+\binom{q}{3}\binom{p-1}{2}=\tfrac{1}{3}(p+q)\binom{p-1}{2}\binom{q-1}{2}.$$

$$30)\quad \left\{\begin{aligned} T_{p,q} = (p+q)\Bigg\{ & s_{p,q} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1} s_{p-i,q-j}\cdot s_{i,j} \\ & + \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} s_{p-i_1-i,q-j_1-j_2}\cdot s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}\Bigg\} \\ & + \sum_{j=1}^{j=q-3}\sum_{i=1}^{i=p-3} T_{p-i_1-i_2-i_3,\,q-j_1-j_2-j_3}\cdot s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}\cdot s_{i_3,j_3}. \end{aligned}\right.$$

Man sieht leicht, wie diese Schlüsse fortzusetzen sind, und findet bei fortgesetzter Anwendung dieses Verfahrens, dass das letzte Glied der Summe, die auf diese Weise für $T_{p,q}$ erhalten wird, falls $p > q$ ist, sein wird:

$$\frac{p+q}{q}\sum_{j=1}^{j=q-(q-1)}\sum_{i=1}^{i=p-(q-1)} s_{p-i_1-i_2-i_3-\ldots-i_{q-1},\,q-j_1-j_2-j_3-\ldots-j_{q-1}}$$
$$\cdot\, s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}\cdot s_{i_3,j_3}\ldots s_{i_{q-1},j_{q-1}}$$

oder einfacher:

$$\frac{p+q}{q}\sum_{i=1}^{i=p-(q-1)} s_{p-i_1-i_2-i_3-\ldots-i_{q-1},1}\cdot s_{i_1,1}\cdot s_{i_2,1}\cdot s_{i_3,1}\ldots s_{i_{q-1},1}.$$

Man hat also schliesslich folgende allgemeine Formel:

$$\begin{aligned} T_{p,q} = (p+q)\Bigg\{ & s_{p,q} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=q-1}\sum_{i=1}^{i=p-1} s_{p-i,q-j}\cdot s_{i,j} \\ & + \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{j=q-2}\sum_{i=1}^{i=p-2} s_{p-i_1-i_2,q-j_1-j_2}\, s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2} + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=p-(q-1)} s_{p-i_1-i_2-\ldots-i_{q-1},1}\cdot s_{i_1,1}\cdot s_{i_2,1}\ldots s_{i_{q-1},1}\Bigg\} \end{aligned}$$

oder, wenn für $T_{p,q}$ sein Werth

$$(-)^{p+q}\binom{p+q}{q}\sum x^p y^q$$

gesetzt wird:

$$31)\quad \left\{\begin{aligned} \sum x^p y^q = \frac{(-)^{p+q}\,q}{\binom{p+q-1}{p}}\Bigg\{ & s_{p,q} \\ & + \sum_{\mu=2}^{\mu=q}\Bigg[\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{j=q-(\mu-1)}\sum_{i=1}^{i=p-(\mu-1)} s_{p-i_1-i_2-\ldots-i_{\mu-1},\,q-j_1-j_2-\ldots-j_{\mu-1}} \\ & \times s_{i_1,j_1}\cdot s_{i_2,j_2}\ldots s_{i_{\mu-1},j_{\mu-1}}\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

z. B.:

$$\sum x^6 y^4 = \frac{1}{21}\left\{ s_{6,4} + [s_{5,3}\, s_{1,1} + s_{4,3}\, s_{2,1} + s_{3,3}\, s_{3,1} + s_{2,3}\, s_{4,1} + s_{1,3} s_{5,1} \right.$$
$$+ s_{5,2}\, s_{1,2} + s_{4,2}\, s_{2,2} + \tfrac{1}{2} s^2_{3,2}]$$
$$+ [s_{4,2} s^2_{1,1} + 2.s_{3,1} s_{2,1}\, s_{1,1} + 2\, s_{2,2} s_{3,1} s_{1,1} + s_{2,2} . s^2_{2,1}$$
$$+ 2\, s_{1,2}\, s_{4,1}\, s_{1,1} + 2.s_{1,2}\, s_{3,1} . s_{2,1}]$$
$$\left. + [s_{3,1}\, s^3_{1,1} + \tfrac{3}{2}.s^2_{2,1}.s^2_{1,1}] \right\}.$$

Der Factor irgend eines der in der Parenthese stehenden Terme lässt sich nach dem Obigen und nach den Regeln der Combinatorik sofort angeben; so ist in dem Beispiele der Factor von $s^2_{2,1}.s^2_{1,1}$ gleich

$$\frac{1.2.3}{1.2.1.2} = \frac{3}{2};$$

dagegen würde z. B. der Factor von

$$s_{p-1-1-1-2-2,\, q-2-2-2-3-3} \cdot s^3_{1,2} \cdot s^2_{2,3}$$

gleich

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10$$

sein, indem natürlich der in den obigen Formeln der symbolischen Schreibweise wegen herausgesetzte Factor $\frac{1}{\mu}$ von vornherein mit den entsprechenden Gliedern verbunden und aufgehoben werden kann.

Die abgeleiteten Formeln 24), 25), 27) und 31) geben Anlass zu vielen interessanten Betrachtungen und weiteren Entwickelungen, die aber jetzt nicht verfolgt werden sollen, sondern einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben mögen. Nur das Eine sei noch bemerkt, dass die Summe der sämmtlichen Factoren aller in der Parenthese in 31) vorkommenden Glieder (mit Einschluss von $s_{p,q}$) immer gleich

$$\frac{\binom{p+q-1}{p}}{q},$$

also gleich dem reciproken Werthe des vor der Parenthese stehenden Coefficienten sein muss. [So wird in dem obigen Beispiele, in welchem $p=6$, $q=4$ war, diese Summe gleich 21.] Der Beweis für diese Behauptung ergiebt sich sofort, da

$$1 + \tfrac{1}{2}\binom{p-1}{1}\binom{q-1}{1} + \tfrac{1}{3}\binom{p-1}{2}\binom{q-1}{2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{q-1}\binom{p-1}{q-2}\binom{q-1}{q-2} + \frac{1}{q}\binom{p-1}{q-1}\binom{q-1}{q-1}$$

$$=\frac{\binom{q}{1}+\binom{q}{2}\binom{p-1}{1}+\binom{q}{3}\binom{p-1}{2}+\ldots+\binom{q}{q-1}\binom{p-1}{q-2}+\binom{p-1}{q-1}}{q}$$

$$=\frac{\binom{q+p-1}{q-1}}{q}$$

ist, und es kann dieser Satz, abgesehen von anderen Folgerungen, die sich aus ihm ergeben, auch immer zu einer leichten Controle für die Richtigkeit der Rechnung bei Anwendung der Formel 31) benutzt werden.

XIV.

Ueber Punktsysteme auf Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. Emil Weyr in Prag.

---

1. Wenn C_4^3 eine Curve dritter Ordnung ist, welche in δ einen Doppelpunkt besitzt, so kann man bekanntlich vom Doppelverhältniss von vier Punkten der Curve sprechen. Unter dem Doppelverhältniss von vier Punkten a, b, c, d der Curve verstehen wir das Doppelverhältniss jener vier Strahlen, welche den Doppelpunkt der Curve mit den vier Punkten verbinden.

Ist einmal der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer C_4^3 in dieser Art festgestellt, so kann man auch projectivische Punktsysteme auf der Curve C_4^3 betrachten.

Zwei Systeme von einander entsprechenden Punkten der Curve C_4^3 heissen projectivisch, wenn das Doppelverhältniss von vier Punkten des einen Systemes gleich ist dem Doppelverhältnisse der entsprechenden vier Punkte des andern.

Hieraus erhellt sofort, dass auch zwei projectivische Punktsysteme auf einer C_4^3 durch die Feststellung dreier Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, und dass man aus diesen zu jedem Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern Systemes unter Zuhilfenahme des Strahlenbüschels δ construiren könne.

Befinden sich zwei projectivische Punktsysteme auf der Curve C_4^3, welche die besondere Eigenschaft besitzen, dass in ihnen Vertauschungsfähigkeit herrscht, d. h. dass jedem Punkte der Curve immer derselbe Punkt entspricht, ob man ihn nun zu dem einen oder dem andern Systeme rechnet, so bilden die beiden Punktsysteme eine quadratische Involution von Punkten der Curve C_4^3. Es versteht sich von selbst, dass sich eine quadratische Involution (welche wir unter der Bezeichnung „Involution" immer verstehen wollen) aus dem Doppelpunkte δ durch eine Strahleninvolution projiciren wird. Hieraus folgt aber sofort, dass eine Punktinvolution auf C_4^3 durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist.

2. Nachdem wir die Begriffe projectivischer und involutorischer Punktsysteme auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte festgestellt haben, müssen wir, ehe zur weiteren Betrachtung solcher Systeme geschritten werden kann, die einzelnen Punkte der Curve C_4^3 — des Trägers der Punktsysteme — näher untersuchen.

Sämmtliche Punkte der Curve C_4^3 mit alleiniger Ausnahme des Doppelpunktes δ sind einfache Punkte der Curve, d. h. jeder von ihnen besitzt nur eine einzige Tangente, welche die Curve in einem, dem betrachteten Punkte unendlich nahen Punkte — seinem Nachbarpunkte — schneidet.

Durch den Doppelpunkt δ gehen jedoch zwei Zweige der Curve, welche in δ von je einer Geraden berührt werden. Der Doppelpunkt besitzt zwei Tangenten — die Doppelpunktstangenten, welche wir kurz mit G_1, G_2 bezeichnen wollen — und somit auch zwei Nachbarpunkte.

Die Doppelpunktstangenten verbinden den Doppelpunkt mit seinen beiden Nachbarpunkten.

Aus dem Doppelpunkte δ geht nach jedem Punkte a_1 der Curve ein vollkommen bestimmter Strahl $\delta a_1 = A_1$ — der unserem Punkte a_1 entsprechende Doppelpunktsstrahl — und die nach den beiden Nachbarpunkten von δ gehenden Strahlen sind die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2.

3. Befinden sich auf einer Curve C_4^3 zwei projectivische oder involutorische Punktsysteme, so kann man jeden Punkt der Curve zu einem der Systeme einmal rechnen; den Doppelpunkt δ jedoch zweimal, indem man ihm entweder den einen oder den andern seiner Nachbarpunkte substituirt. Befinden sich also auf C_4^3 zwei projectivische Punktsysteme, so werden dem Doppelpunkte in jedem derselben zwei Punkte entsprechen. Befindet sich auf C_4^3 eine Punktinvolution, so werden dem Doppelpunkte zwei Punkte entsprechen.

4. Indem wir uns vor Allem speciell zur Betrachtung von involutorischen Punktsystemen auf C_4^3 wenden, möge zunächst bemerkt werden, dass man die auftretenden Involutionen in zwei Arten eintheilen könne, nämlich in die „centralen" und die „allgemeinen".* Die centralen Involutionen entstehen dadurch, dass man durch einen festen Punkt o der Curve C_4^3 Strahlen A, B ... zieht, welche auf der Curve die Punktenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ ... resp. bestimmen.

Diese Punktenpaare bilden, weil sie sich aus dem Doppelpunkte δ in einer Strahleninvolution $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... projiciren, eine Punktinvolution auf C_4^3.

„Schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem und demselben auf der Curve C_4^3 liegenden Punkte o, so ist die

* Theorie mehrdeutiger Elementargebilde etc., I. Theil, Art. 11.

Involution eine centrale. Den Punkt o nennen wir das Centrum der Involution."

Hieraus folgt unmittelbar:

„Eine centrale Involution auf C_4^3 ist bestimmt, sobald man ein Paar entsprechender Punkte oder das Centrum der Involution kennt."

Im letzten Falle schneidet jede durch das Centrum gelegte Gerade die Curve C_4^3 in einem Punktenpaare der Involution, und im ersten Falle ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie des Paares entsprechender Punkte und der Curve das Centrum der Involution, wodurch dieser Fall auf den letzteren zurückgeführt ist.

Man erkennt sofort, dass man jeden Punkt der Curve C_4^3 als das Centrum einer derartigen Involution betrachten kann, welche wir als die dem Punkte zugeordnete centrale Involution bezeichnen.

Die Strahleninvolution, in welcher sich eine centrale Punktinvolution vom Doppelpunkte δ aus projicirt, soll als die dem Centrum zugeordnete Strahleninvolution am Doppelpunkte bezeichnet werden.

Diese Strahleninvolution liegt mit der besprochenen centralen Punktinvolution perspectivisch.

5. Betrachten wir nun eine centrale Punktinvolution auf einer Curve C_4^3 etwas näher.

Ist o das Centrum der Involution, so findet man den, einem beliebigen Punkte x_1 von C_4^3 entsprechenden Punkt x_2 als dritten Schnittpunkt des von o nach x_1 gezogenen Strahles X mit der Curve.

Hieraus erkennt man augenblicklich, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes δ ein Paar entsprechender Punkte vorstellen; denn legt man durch o einen bei δ unendlich nahe vorbeigehenden Strahl g, so wird er die Curve in diesen beiden Nachbarpunkten schneiden.

„Alle centralen Involutionen auf einer C_4^3 besitzen ein gemeinschaftliches Punktenpaar, nämlich die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes."

Hieraus erklärt sich, warum eine centrale Involution durch ein einziges Punktenpaar bestimmt erscheint.

Projicirt man alle centralen Involutionen aus dem Doppelpunkte δ durch Strahleninvolutionen, so werden diese nothwendigerweise die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 zum gemeinschaftlichen Strahlenpaare besitzen.

„Alle Strahleninvolutionen am Doppelpunkte, welche die auf C_4^3 auftretenden centralen Involutionen projiciren, enthalten die beiden Doppelpunktstangenten als ein Paar entsprechender Strahlen."

Legt man durch das Centrum o der betrachteten Involution den schneidenden Strahl so, dass er die Curve C_4^3 in o tangirt, so schneidet er sie in einem unendlich nahe zu o fallenden Punkte und dann noch in dem diesem entsprechenden Punkte o', welcher bekanntlich (als Durchschnitt der Tangente von o mit der Curve) der Tangentialpunkt von o genannt wird.

„Dem Centrum einer centralen Involution entspricht dessen Tangentialpunkt.“

Die centrale Involution, deren Centrum o ist, wird, wie jede Involution zweiten Grades, zwei (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte v_{12}, w_{12} besitzen. Es wird somit zwei durch o gehende Strahlen V, W geben, welche C_4^3 in zusammenfallenden Punkten schneiden, d. h. in denselben berühren.

Es werden somit V und W die beiden von o aus an die Curve gehenden Tangenten sein.

„Durch jeden Punkt o der Curve lassen sich an dieselbe zwei Tangenten V, W legen, deren Berührungspunkte v_{12}, w_{12} die Doppelpunkte der centralen Involution sind, deren Centrum o ist.“

Die beiden nach v_{12} und w_{12} aus δ gehenden Strahlen V_{12} und W_{12} sind daher die beiden Doppelstrahlen der Strahleninvolution, in welcher sich die centrale Punktinvolution aus δ projicirt.

Es sind somit $V_{12}W_{12}A_1A_2$, $V_{12}W_{12}B_1B_2$, $V_{12}W_{12}G_1G_2 \ldots$ lauter Gruppen harmonischer Strahlen.

Ebenso theilt das Strahlenpaar δo, $\delta o'$ den Winkel von V_{12} und W_{12} harmonisch.

6. Die Betrachtung des vorhergehenden Artikels liefert die einfache Lösung einiger Aufgaben, die wir hier in aller Kürze behandeln wollen.

Aufgabe: „Eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt δ ist gegeben; man soll in einem ihrer Punkte o die Tangente construiren.“

Man lege durch 0 zwei beliebige, die Curve in den Punktenpaaren a_1a_2, b_1b_2 resp. schneidenden Strahlen A, B und projicire diese Punktenpaare aus dem Doppelpunkte δ durch die Strahlenpaare A_1A_2, B_1B_2; diese zwei Strahlenpaare fixiren die Strahleninvolution, in welcher sich die dem 0 zugeordnete centrale Punktinvolution projicirt.

Nach Art. 5 wird der dem Strahle $\overline{\delta o}$ involutorisch entsprechende Strahl die Curve im Tangentialpunkte o' von o schneiden, dessen Verbindungslinie o' die Tangente in diesem Punkte ist.

Den $\overline{\delta o}$ involutorisch entsprechenden Strahl findet man am bequemsten mittels des Satzes vom vollständigen Vierseit.*

Zieht man die Verbindungslinie von (AB_1) mit (BA_2) und jene von (AA_1) mit (BB_2) [unter (XY) verstehe ich im Allgemeinen den Schnittpunkt der Geraden X und Y], so wird der von δ nach dem Schnittpunkte dieser Verbindungslinien gezogene Strahl die Curve C_4^3 im Tangentialpunkte o' von o schneiden und $T = \overline{oo'}$ ist die verlangte Tangente des Punktes o.

* Verbindet man die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits mit einem willkürlichen Punkte seiner Ebene, so erhält man drei Strahlenpaare in Involution.

Das vollständige Vierseit ist hier gebildet aus den Strahlen A, B und den erwähnten zwei Verbindungslinien.

Hiermit haben wir gleichzeitig die Aufgabe gelöst: den Tangentialpunkt eines Punktes der Curve zu construiren.

Aufgabe: „Die beiden von einem Punkte o der Curve C_4^3 an dieselbe gehenden Tangenten zu construiren."

Der Punkt o bestimmt als Centrum auf der Curve eine centrale Involution, von welcher wir aus der vorhergehenden Aufgabe bereits zwei Punktenpaare $a_1 a_2$, $b_1 a_2$ und die sie projicirenden Strahlenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ besitzen. Die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} der Strahleninvolution, welcher diese beiden Strahlenpaare angehören, gehen, wie aus dem vorigen Artikel noch erinnerlich sein dürfte, durch die Berührungspunkte v_{12}, w_{12} der beiden von o aus an C_4^3 gezogenen Tangenten V, W und sind zugleich die Doppelpunkte der betrachteten centralen Involution.

Die beiden Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} erhält man einfach mittels eines beliebigen, durch den Doppelpunkt δ gehenden Constructionskreises K. Die beiden Strahlenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bestimmen auf diesem Kreise zwei Punktenpaare, resp. $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$ einer Punktinvolution, so dass der Schnittpunkt p von $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$ mit $\overline{\beta_1 \beta_2}$ das Centrum dieser auf K entstehenden Punktinvolution darstellt.

Die von p an K gezogenen beiden Tangenten berühren den Kreis in zwei Punkten ν_{12}, ω_{12}, welche mit δ verbunden, die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} liefern; diese schneiden C_4^3 in den Berührungspunkten v_{12}, w_{12} der verlangten Tangenten. Man hat nunmehr die Geraden $\overline{ov_{12}} = V$ und $\overline{ow_{12}} = W$ zu ziehen, um die verlangten Tangenten zu erhalten.

Die Aufgabe hat zwei reelle oder imaginäre Auflösungen, je nachdem sich nämlich von p aus an den Kreis K zwei reelle oder imaginäre Tangenten ziehen lassen. Es giebt nur zwei Lagen des Punktes o, für welche die beiden von ihm an C_4^3 gezogenen Tangenten zusammenfallen, und dies geschieht nur für die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes. In der That, liegt der Punkt o unendlich nahe bei δ auf der Tangente G_1, so fallen die von ihm an C_4^3 gehenden Tangenten mit der zweiten Doppelpunktstangente G_2 zusammen, während G_1 als die im Punkte o an die Curve gezogene Tangente anzusehen ist. Ebenso fallen die beiden von dem auf G_2 liegenden Nachbarpunkte des Doppelpunktes an C_4^3 gehenden Tangenten mit G_1 zusammen, während G_2 die in diesem Nachbarpunkte an C_4^3 gezogene Tangente darstellt.

7. Aus dem zu Ende des vorhergehenden Artikels Gesagten geht sofort hervor, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes (resp. der Doppelpunkt selbst) solche Punkte, für welche die beiden an die Curve gehenden Tangenten reell sind, von solchen trennt, für welche diese Tangenten imaginär sind.

Durch den Punkt δ wird also die Curve C_4^3 in zwei Theile zerlegt.

Der eine Theil enthält lauter solche Punkte, aus denen sich an die Curve zwei reelle Tangenten legen lassen, während der andere Theil — die Schleife — solche Punkte enthält, für welche die beiden durch sie gehenden Tangenten imaginär sind.

8. Der Doppelpunkt δ einer Curve C_4^3 kann von zweierlei wesentlich verschiedener Art sein. Erstens er ist ein eigentlicher Doppelpunkt, d. h. die Curve C_4^3 geht zweimal mit reellen Zweigen durch denselben. Dies wird dann eintreten, wenn die beiden Doppelpunktstangenten $G_1 G_2$ reell sind. Zweitens: Er ist ein isolirter Doppelpunkt, dann nämlich, wenn das Tangentenpaar $G_1 G_2$ desselben imaginär ist. In diesem Falle liegt der Punkt δ vereinzelt (als Einsiedler) abseits des reellen Curventheiles.

Ist δ ein eigentlicher Doppelpunkt, so werden wir beide in Artikel 7 erwähnten Theile der Curve antreffen.

Wenn dagegen der Doppelpunkt isolirt ist, so wird keine Schleife der Curve existiren und es werden sich von jedem Punkte der Curve an dieselbe zwei Tangenten ziehen lassen.

9. Als einen Zwischenfall kann man jenen auffassen, in welchem die beiden Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen. Hierdurch wird er zu einem Rückkehrpunkte oder zu einer Spitze.

In diesem Falle besitzt somit die Curve in δ eine Spitze.

10. Wir haben ganz allgemein gezeigt, dass sich aus jedem Punkte o einer Curve C_4^3 ein reelles oder imaginäres Tangentenpaar ziehen lässt, dessen Berührungspunkte wir als Schnittpunkte der Curve mit den Doppelstrahlen der dem Punkte o zugeordneten Strahleninvolution am Doppelpunkte erhielten.

Da die im Punkte o an die Curve gezogene Tangente für zwei zusammenfallende Tangenten gilt, so erkennt man, dass (wie es des Doppelpunktes wegen auch sein muss) die Curve C_4^3 von der vierten Classe ist, d. h. es werden sich von einem beliebigen Punkte der Ebene an sie vier Tangenten legen lassen. Wie wir gezeigt haben, besitzen die sämmtlichen den einzelnen Punkten der Curve C_4^3 zugeordneten Strahleninvolutionen am Doppelpunkte δ die beiden Tangenten $G_1 G_2$ desselben zu gemeinschaftlichen Strahlenpaaren. Wenn diese beiden Tangenten zusammenfallen, so werden sie einen allen diesen Involutionen gemeinsamen Doppelstrahl darstellen. Jede dieser Involutionen wird ausser diesem Doppelstrahle noch einen zweiten besitzen.

Hieraus schliesst man, dass in diesem Falle eine von den beiden, aus einem Punkte der Curve an sie gezogenen Tangenten durch die Verbindungslinie des Punktes mit dem Doppelpunkte, welcher hier in einen Rückkehrpunkt übergegangen ist, ersetzt wird.

Von den vier Tangenten, die durch den betrachteten Punkt gehen, wird eine durch diese Verbindungslinie ersetzt und es bleiben somit nur drei eigentliche Tangenten zurück.

Aus diesem Grunde ist eine Curve dritter Ordnung, welche einen Rückkehrpunkt besitzt, nur von der dritten Classe.

11. Zieht man von einem Punkte o der Curve C_4^3 an dieselbe die beiden Tangenten V und W, welche sie resp. in v_{12} und w_{12} berühren, so sind v_{12} und w_{12} zwei Punkte, welche den Punkt o zum gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen. Zwei solche Punkte nennen wir zwei harmonisch zugeordnete oder conjugirte Punkte der Curve.*

Jedem Punkte der Curve ist ein anderer Punkt derselben harmonisch zugeordnet, welchen man erhält, wenn man aus dem Tangentialpunkte des ersteren an die Curve die zweite Tangente legt.

Nach Früherem sind aber zwei conjugirte Punkte v_{12}, w_{12} die Doppelpunkte der centralen Involution, welche der gemeinschaftliche Tangentialpunkt der beiden Punkte auf der Curve bestimmt. Wir erkennen daher leicht die Richtigkeit folgenden Satzes:

„Zwei conjugirte Punkte der Curve C_4^3 sind die Doppelpunkte jener centralen Involution, welche der gemeinschaftliche Tangentialpunkt der beiden Punkte auf der Curve bestimmt."

Die von δ nach zwei conjugirten Punkten v_{12}, w_{12} gehenden Strahlen V_{12}, W_{12} sind die Doppelstrahlen der Strahleninvolution, in der sich die zum Centrum o gehörige centrale Involution aus δ projicirt. Zu dieser Strahleninvolution gehören, wie bekannt, die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 als ein Paar entsprechender Strahlen, weshalb die vier Strahlen G_1, G_2, V_{12}, W_{12} vier harmonische Strahlen sein müssen.

„Verbindet man zwei conjugirte Punkte der Curve C_4^3 mit dem Doppelpunkte, so erhält man zwei Strahlen, welche den Winkel der Doppelpunktstangenten harmonisch theilen."**

Hieraus folgt aber sofort, dass die nach den conjugirten Punktenpaaren der Curve gehenden Strahlen aus dem Doppelpunkte eine Strahleninvolution bilden, deren Doppelstrahlen die beiden Doppelpunktstangenten sind. Folglich bilden die conjugirten Punktenpaare der Curve eine Punktinvolution, deren Doppelpunkte die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes sind.

„Die Paare conjugirter Punkte einer Curve C_4^3 bilden eine quadratische Involution, deren Doppelpunkte die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes sind."

„Zwei conjugirte Punkte bilden mit den beiden Nachbarpunkten des Doppelpunktes ein System von vier harmonischen Punkten."

---

* Hesse, Crelle, Bd. 36.

** Hesse, Crelle ibid.

12. Ist der Doppelpunkt δ der Curve ein eigentlicher, d. h. sind die beiden Doppelstrahlen G_1, G_2 der eben betrachteten Strahleninvolution reell, so wird von den zwei Strahlen eines Paares dieser Involution der eine in der einen der beiden, von den Doppelpunktstangenten gebildeten Winkelflächen liegen, während sein zugeordneter Strahl in der andern Winkelfläche sich befinden muss.

Dasselbe gilt dann von zwei conjugirten Punkten der Curve. Somit:

„Besitzt eine Curve C_4^3 einen eigentlichen Doppelpunkt, so befindet sich der eine von zwei conjugirten Punkten allemal auf der Schleife der Curve, während der zweite sich am andern Theile der Curve befindet“,

oder:

„Zieht man von einem Punkte einer Curve C_4^3 mit eigentlichem Doppelpunkte die beiden Tangenten an die Curve, so liegt der Berührungspunkt einer derselben immer auf der Schleife, während der zweite dem übrigen Theile der Curve angehört.“

Da sich aus einem Punkte der Schleife an die Curve keine reelle Tangente legen lässt, so folgt unmittelbar, dass kein Punkt der Schleife als Tangentialpunkt auftreten könne.

13. Aufgabe: „Eine Curve dritter Ordnung C_4^3 mit einem Doppelpunkte δ ist gegeben; man soll die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 construiren.“ Die Auflösung ist in den Betrachtungen des Artikels 11 enthalten.

Nimmt man zwei Punkte o, o' der Curve (welche nicht auf der Schleife liegen) und legt durch sie an die Curve resp. die Tangentenpaare V, W: V', W' (nach Art. 6), so liefern deren Berührungspunktenpaare die Strahlen $V_{12}\,W_{12}$, $V'_{12}\,W'_{12}$. Diese zwei Strahlenpaare bestimmen eine Involution, deren Doppelstrahlen die gesuchten Doppelpunktstangenten G_1, G_2 sind.

Diese erhält man in bekannter Weise mittels eines durch δ gelegten Constructionskreises K.

14. Die Betrachtung der an dem in vorigem Artikel verwendeten Constructionskreise entstehenden Figur führt zu einer Lösung folgender Aufgabe:

„Eine Curve dritter Ordnung C_4^3 mit einem Doppelpunkte ist gegeben; man soll ihre Inflexionspunkte construiren.“

Nimmt man zu den zwei Punkten o, o' des vorigen Artikels einen dritten Punkt o'', so liefert dieser zwei neue Tangenten V'', W'', welche man von ihm an C_4^3 legen kann, und die Verbindungslinien V''_{12}, W''_{12} ihrer Berührungspunkte mit dem Doppelpunkte δ liefern ein drittes Strahlenpaar der im vorigen Artikel betrachteten Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Doppelpunktstangenten G_1, G_2 sind.

Ordnet man nun den von δ nach o, o' nach o'' gehenden Strahlen $\delta o = O$, $\delta o' = O'$, $\delta o'' = O''$ die Strahlenpaare $V_{12}\,W_{12}$, $V'_{12}\,W'_{12}$, $V''_{12}\,W''_{12}$

resp. zu, so wird das Strahlenbüschel $OO'O''$ mit der Strahleninvolution $V_{12}W_{12}\ldots$ in projectivische Beziehung gesetzt.

Die Strahlenpaare dieser Involution bestimmen auf dem Constructionskreise K eine Punktinvolution $v_{12}w_{12}$, $v'_{12}w'_{12}$, $v''_{12}w''_{12}$, so zwar, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt p gehen. Es werden also die Strahlen $\overline{v_{12}w_{12}} = O_1$, $\overline{v'_{12}w'_{12}} = O'_1$, $\overline{v''_{12}w''_{12}} = O''_1$ durch einen und denselben Punkt, durch das perspectivische Centrum p der auf K entstehenden Involution hindurchgehen.

Jedem Strahlenpaare der Involution δ ist in dieser Weise ein Strahl des Büschels p projectivisch zugeordnet. Es werden daher mittels der Involution δ die beiden Büschel p und $OO'O''\ldots$ in projectivische Beziehung gesetzt; den Strahlen O, O', O'' resp. entsprechen die Strahlen O_1, O'_1, O''_1 und jedem vierten Strahle O''' des ersten Büschels wird jener Strahl O'''_1 des zweiten Büschels p entsprechen, welcher mit ersterem demselben Strahlenpaare der Involution δ zugeordnet ist. Da G_1, G_2 die Doppelstrahlen der Involution δ sind, so ist klar, dass ihre Schnitte g_1, g_2 mit K die Doppelpunkte der auf K entstehenden Punktinvolution sind, so dass p als Schnittpunkt der beiden in g_1, g_2 an K gelegten Tangenten erscheint. Den Strahlen G_1, G_2 entsprechen, wenn man sie zum Büschel $OO'\ldots$ rechnet, im Büschel p resp. die Strahlen $\overline{pg_2}$, $\overline{pg_1}$.

Die beiden projectivischen Büschel p, δ erzeugen einen Kegelschnitt Σ, welcher durch p, δ und die drei Punkte (OO_1), $(O'O'_1)$, $(O''O''_1)$ bestimmt ist. Der Kegelschnitt Σ wird den Kreis K ausser in δ noch in drei weiteren Punkten s_1, s_2, s_3 schneiden, und es lässt sich leicht zeigen, dass die drei aus δ nach diesen Punkten geführten Strahlen $\overline{\delta s_1}$, $\overline{\delta s_2}$, $\overline{\delta s_3}$ die Curve C_4^3 in den drei Inflexionspunkten i_1, i_2, i_3 schneiden.

Wenn man unter einem Inflexionspunkte der Curve C_4^3 einen Punkt i_1 derselben versteht, für welchen eine von den beiden aus ihm an die Curve gehenden Tangenten mit der in ihm an C_4^3 gelegten Tangente zusammenfällt, so ist klar, dass einer von den beiden dem Strahle $\overline{\delta i_1}$ in der Involution auf δ entsprechenden Strahlen mit $\overline{\delta i_1}$ zusammenfällt, und folglich wird das dem $\overline{\delta i_1}$ entsprechende Strahlenpaar der Involution den Kreis K in einem Punktenpaare treffen, von dem ein Punkt der Schnittpunkt von K mit $\overline{\delta i_1}$ ist. Daraus geht jedoch sofort hervor, dass der dem $\overline{\delta i_1}$ im Büschel p projectivisch entsprechende Strahl sich mit $\overline{\delta i_1}$ auf K schneiden müsse, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Da nun der Kegelschnitt Σ den Kreis K ausser in δ nur noch dreimal schneiden kann, so ist klar, dass eine Curve C_4^3 nur drei Inflexionspunkte besitzen kann.

Dieselben sind dann sämmtlich reell, wenn der Doppelpunkt δ ein isolirter ist, und es sind zwei imaginäre, wenn δ ein eigentlicher Doppelpunkt ist.

Die angegebene Construction wird einfacher gestaltet werden können, wenn δ ein eigentlicher Doppelpunkt ist. Denn in diesem Falle stellen seine beiden Tangenten $G_1 G_2$ die Doppelstrahlen der verwandten Involution auf δ vor und schneiden den Constructionskreis K in den Doppelpunkten g_1, g_2 der auf K entstehenden Punktinvolution. Die beiden Kreistangenten in g_1, g_2 schneiden sich im Scheitel p und entsprechen projectivisch den beiden Strahlen G_1, G_2, so dass man, um die Projectivität festzusetzen, nur noch eines Punktes o der Curve C_4^3 bedarf.

15. Das Hauptmerkmal einer auf C_4^3 befindlichen centralen Punktinvolution ist, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes sich entsprechen. Umgekehrt muss jede auf C_4^3 liegende Involution eine centrale sein, wenn für sie die Nachbarpunkte des Doppelpunktes ein Paar entsprechender Punkte bilden. Denn in der That wird eine derartige Involution bestimmt sein, sobald man noch ein Punktenpaar, etwa $a_1 a_2$, kennt. Die Verbindungsgerade $\overline{a_1 a_2}$ trifft C_4^3 in einem dritten Punkte O, den man als Centrum einer Involution betrachten kann, welche mit der gegebenen offenbar das Punktenpaar $a_1 a_2$ und ferner das Nachbarpunktenpaar des Doppelpunktes gemeinschaftlich hat und daher mit ihr identisch sein muss.

Wir werden von dieser Betrachtung eine mehrfache Anwendung zu machen haben.

16. Betrachtet man den Fall, wo einer der drei Inflexionspunkte, z. B. i_1, das Centrum einer Involution ist, so folgt aus dem Artikel 5 sofort, dass derselbe zugleich ein Doppelpunkt der Involution sein muss. Denn im Allgemeinen entspricht dem Centrum einer Involution der Tangentialpunkt desselben; da aber die Tangente eines Inflexionspunktes in diesem die Curve in drei unendlich nahen Punkten schneidet, so ist ein Inflexionspunkt sein eigener Tangentialpunkt und folglich, als Centrum einer Involution betrachtet, zugleich ein Doppelpunkt derselben.

Deshalb kann man vom Inflexionspunkte i_1 nur eine einzige Tangente θ_1 an die Curve C_4^3 legen, deren Berührungspunkt t_1 der zweite Doppelpunkt der betrachteten Involution ist.

Die von δ nach i_1 und t_1 gezogenen Strahlen sind demnach die Doppelstrahlen der Involution, in welcher sich die Punktinvolution aus dem Doppelpunkte projicirt, und hieraus folgt dann sofort, dass, wenn eine durch i_1 willkürlich gezogene Gerade G die Curve in den beiden Punkten a_1, a_2, den Doppelstrahl $\overline{\delta t_1}$ im Punkte i'_1 schneidet, der letztere dem Inflexionspunkte conjugirt harmonisch ist bezüglich des Punktenpaares $a_1 a_2$.

Dies giebt den für Curven dritter Ordnung im Allgemeinen bekannten Satz:

„Legt man durch einen Inflexionspunkt der Curve C_4^3 Transversalen und construirt die ihm conjugirten harmonischen Punkte bezüglich der auf den Transversalen durch die Curve bestimmten Strecken, so liegen sie in einer und derselben durch den Doppelpunkt gehenden Geraden (δt_1), welche die Curve C_4^3 im Berührungspunkte der vom Inflexionspunkte an dieselbe gelegten Tangente schneiden."

Die Gerade $\overline{\delta t_1}$ ist bekanntlich die harmonische Polare des Inflexionspunktes i_1.

Ebenso erkennt man aus dem Vorhergehenden, dass die harmonische Polare eines Inflexionspunktes conjugirt harmonisch zu dem aus δ nach ihm gehenden Strahle bezüglich des Paares der Doppelpunktstangenten ist.

17. Jeder Kegelschnitt C_2 wird die Curve C_4^3 in sechs Punkten schneiden. Nimmt man daher vier Punkte der Curve C_4^3 zu Scheiteln eines Kegelschnittsbüschels, so wird jeder Kegelschnitt desselben die Curve C_4^3 in einem Punktenpaare schneiden, und es werden die Punkte von C_4^3 in dieser Weise eindeutig und offenbar zugleich vertauschungsfähig, d. h. involutorisch auf einander bezogen. Jedem Punkte der Curve C_4^3 entspricht jener Punkt, in welchem der durch erstere gehende Kegelschnitt des Büschels die Curve C_4^3 zum sechsten Male schneidet.

Noch mehr: diese entstehende Punktinvolution ist eine centrale, denn ein Kegelschnitt des betrachteten Büschels wird durch den Doppelpunkt (resp. unendlich nahe vorüber) gehen und daselbst die Curve C_4^3 in den beiden Nachbarpunkten des Doppelpunktes schneiden, welche daher als ein Paar entsprechender Punkte der Involution angehören. Wir erhalten daher folgenden Satz:

„Die Kegelschnitte eines Büschels, dessen vier Scheitel auf der Curve C_4^3 liegen, bestimmen auf der Curve Punktenpaare einer centralen Involution, d. h. Punktenpaare, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt der Curve gehen."

Bekanntlich ist dieser Satz ganz allgemein für Curven dritter Ordnung giltig und wurde der feste Punkt der Gegenpunkt des Büschelvierecks genannt. Wir sind zu dem Satze durch eine besondere Betrachtung gelangt.

Unter den Curven des Büschels zweiter Ordnung giebt es drei Grenzfälle, welche durch Geradenpaare dargestellt werden; wenn wir diese ins Auge fassen und festhalten, dass man die vier Scheitel eines solchen Büschels auf C_4^3 beliebig wählen darf, so ergiebt sich der Satz:

„Liegen vier Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 auf einer Curve C_4^3 dritter Ordnung und man zieht die drei Gegenseitenpaare des durch sie gebildeten vollständigen Vierecks, so bestimmt jedes Seitenpaar auf C_4^3 ein Punktenpaar und es gehen dann die drei Geraden, welche die Punkte dieser drei Punktenpaare verbinden, durch einen und denselben Punkt der Curve C_4^3."

Wenn man also die Geradenpaare $\overline{s_1 s_2}$, $\overline{s_3 s_4}$, $\overline{s_2 s_3}$, $\overline{s_1 s_4}$, $\overline{s_1 s_3}$, $\overline{s_2 s_4}$ zieht, so werden sie die Curve in den Punktenpaaren $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ resp. schneiden, und dann treffen sich die drei Geraden $\overline{\alpha\alpha_1}$, $\overline{\beta\beta_1}$, $\overline{\gamma\gamma_1}$ in einem und demselben Punkte o der Curve C_4^3.

Der Punkt o ist das Centrum der Involution, welche das Kegelschnittsbüschel $(s_1 s_2 s_3 s_4)$ auf der Curve C_4^3 bestimmt. Es ist nicht schwer einzusehen, dass es der Punkt sein wird, in welchem die Tangenten des Kegelschnittes $(s_1 s_2 s_3 s_4 \delta)$ im Punkte δ die Curve C_4^3 schneiden.

18. Aus dem Satze des vorigen Artikels lassen sich ohne Mühe die wichtigsten, gewöhnlich bei Curven dritter Ordnung angeführten Sätze nachweisen.

Wir wollen in aller Kürze einzelne folgen lassen:

„Legt man durch die drei Punkte, welche eine Gerade G mit der Curve C_4^3 gemein hat, drei willkürliche Transversalen, so schneidet jede die Curve in zwei Punkten; die so erhaltenen sechs Punkte liegen allemal auf einem und demselben Kegelschnitte."

Seien $\alpha\alpha_1 o$ die Schnitte von G und C_4^3, G_1, G_2, G_3 die durch sie geführten Transversalen, und $s_1 s_2$, $s_3 s_4$, $a_1 a_2$ deren resp. Schnittpunkte mit der Curve. Betrachten wir das Curvenbüschel zweiter Ordnung, welches die vier Punkte s_1, s_2, s_3, s_4 zu Scheiteln hat, zu welchem offenbar das Geradenpaar $G_1 G_2$ als Grenzfall gehört. Das Büschel wird auf C_4^3 eine centrale Involution bestimmen, für welche offenbar o das Centrum sein wird, denn der Grenzkegelschnitt $(G_1 G_2)$ trifft C_4^3 im Punktenpaare $\alpha\alpha_1$, und folglich ist der dritte Schnitt o der Geraden $\overline{\alpha\alpha_1}$ das Centrum der Involution. Die durch o gehende Gerade G_3 schneidet C_4^3 im Punktenpaare $a_1 a_2$ der Involution, woraus folgt, dass der durch $s_1 s_2 s_3 s_4$ und einen dieser Punkte gehende Kegelschnitt auch den zweiten enthalten muss. Es liegen also wirklich die sechs Punkte s_1, s_2, s_3, s_4, a_1, a_2 auf einem und demselben Kegelschnitte, wie behauptet wurde.

In derselben Weise erledigt sich der umgekehrte Satz:

„Verbindet man die sechs Schnittpunkte der Curve C_4^3 mit einem Kegelschnitt paarweise durch drei Gerade, so treffen diese die Curve in drei Punkten, welche auf einer und derselben Geraden liegen."

Specielle Fälle der beiden vorhergehenden Sätze sind folgende:

„Zieht man aus den drei Schnittpunkten einer Geraden mit der Curve C_4^3 an letztere je eine Tangente, so wfrd die Curve in den drei Berührungspunkten von einem und demselben Kegelschnitte berührt."

„Zwei Gerade schneiden die Curve C_4^3 in sechs Punkten; verbindet man jeden Schnittpunkt der einen Geraden mit einem der andern, so erhält man drei Gerade, welche die Curve in drei weiteren, auf einer und derselben Geraden liegenden Punkten treffen."

In diesem Falle ist der Kegelschnitt $(s_1 s_2 s_3 s_4 a_1 a_2)$ in das verwandte Geradenpaar übergegangen.

Wenn die beiden Geraden unendlich nahe bei einander liegen und man verbindet einen Schnittpunkt der einen mit dem unendlich nahen Schnittpunkte der andern, so erhält man offenbar die Tangente der Curve C_4^3 in dem betrachteten Punkte.

Der letzte Satz lautet dann folgendermassen:

„Zieht man in den drei Schnittpunkten einer Geraden G mit der Curve C_4^3 die drei Tangenten, so schneiden diese die Curve in drei auf einer und derselben Geraden* liegenden Punkten",

oder:

„Liegen drei Punkte der Curve C_4^3 auf einer und derselben Geraden, so liegen auch ihre drei Tangentialpunkte auf einer und derselben Geraden."

Aus diesem Satze folgt unmittelbar der nachstehende:

„Die drei Inflexionspunkte einer Curve C_4^3 liegen in einer und derselben Geraden."

Denn da ein Inflexionspunkt sein eigener Tangentialpunkt ist, so muss die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte die Curve noch in einem Punkte schneiden, welcher sein eigener Tangentialpunkt, also ebenfalls ein Inflexionspunkt ist.

Wird die Gerade G des ersten Satzes in diesem Artikel eine von den Inflexionstangenten, so erhält man folgenden Satz:

„Legt man durch einen Inflexionspunkt der Curve C_4^3 drei willkürliche Transversalen, so liegen die sechs Schnittpunkte derselben mit der Curve auf einem und demselben Kegelschnitt."

Werden diese drei Transversalen unendlich nahe an einander genommen, so erhält man nachstehenden Satz:

„Legt man durch einen Inflexionspunkt der Curve C_4^3 eine Transversale, so schneidet sie die Curve in zwei Punkten, in denen letztere von einem und demselben Kegelschnitt dreipunktig berührt wird."**

Wird die durch den Inflexionspunkt gezogene Transversale eine Tangente der Curve, so ergiebt sich:

„In dem Berührungspunkte der von einem Inflexionspunkte an die Curve C_4^3 gezogenen Tangente wird die Curve von einem Kegelschnitte in sechs unendlich nahen Punkten geschnitten."

Dieser Satz rührt von Plücker her.

Wenn der Curve C_4^3 ein vollständiges Vierseit $abcdef$ eingeschrieben ist, so lässt sich leicht nachweisen, dass die Tangenten der Curve in zwei

---

* *Retta sattelite* nach Cremona.

** Poncelet, *Analyse des Transversales.* Crelle, Bd. 8.

Gegenecken, z. B. in e und f, sich in C_4^3 schneiden müssen, d. h. dass je zwei Gegenecken ein Paar conjugirter Punkte sind.

Wenn man nämlich die übrigen vier Ecken $abcd$ zu Scheiteln eines Kegelschnittsbüschels nimmt, so ist klar, dass die Geradenpaare (ad, cb) (ab, cd) als zwei Grenzfälle dem Büschel angehören, und da sie C_4^3 in Paaren zusammenfallender Punkte resp. in f und e schneiden, so sind e und f die Doppelpunkte der centralen Involution, welche das Kegelschnittsbüschel $(abcd)$ auf C_4^3 bestimmt. Das Centrum der Involution ist dann der Schnittpunkt der Curventangenten in e und f, welcher deshalb auf C_4^3 liegen muss. Daher der bekannte Satz: *

„Ist ein vollständiges Vierseit der Curve C_4^3 eingeschrieben, so sind seine drei Gegeneckenpaare drei Paare conjugirter Punkte."

Hieraus folgt unmittelbar, dass die beiden Doppelpunktstangenten die zwei durch δ gehenden, dem vollständigen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte berühren.

Man kann auf diese Art je zwei conjugirte Punkte e und f zu Gegenecken einer unendlichen Menge von der Curve C_4^3 eingeschriebener vollständiger Vierseite nehmen. Die durch diese zwei Punkte gehenden Seitenpaare solcher Vierseite bilden zwei projectivische Involutionen, deren Erzeugniss die Curve C_4^3 ist. Die nach dem Doppelpunkte δ gehenden Strahlen sind Doppelstrahlen, welche einander projectivisch entsprechen.

19. Die sämmtlichen bereits bekannten, für alle Curven dritter Ordnung geltenden Sätze, welche wir im vorigen Artikel aus einem einzigen Satze abgeleitet hatten, lassen sich auf verschiedene andere Arten nachweisen und oft in bestimmtere Fassung bringen.

Betrachten wir zunächst ein Kegelschnittsbüschel, dessen Curven die Linie C_4^3 in zwei Punkten q, p berühren. Jeder Kegelschnitt wird demnach die Curve noch in einem Punktenpaare schneiden, und wir wissen bereits, dass die so entstehenden Punktenpaare eine centrale Punktinvolution auf C_4^3 bilden. Das Centrum o der Involution lässt sich leicht finden, wenn man einen der beiden Grenzfälle des Kegelschnittsbüschels betrachtet, und zwar jenen, welcher durch die doppelt zählende Gerade $\overline{qp}$ dargestellt ist. Offenbar wird der dritte Schnittpunkt r von $\overline{qp}$ mit C_4^3 ein Doppelpunkt der Involution sein, und daher ist der Tangentialpunkt r', wenn r das Centrum der Involution.

Ein zweiter Grenzfall des Kegelschnittsbüschels wird durch das Paar von Tangenten dargestellt, welche man in pq an C_4^3 legen kann. Diese Tangenten schneiden C_4^3 resp. in den Tangentialpunkten p', q' von p und q, und es folgt dann sofort wieder der Satz, dass p', q', r' in einer Geraden liegen.

* Cremona, ebene Curven, S. 245.

Die betrachtete Involution wird ausser r noch einen zweiten Doppelpunkt haben, nämlich den Berührungspunkt der zweiten, von r' an C_4^3 gehenden Tangente. Es wird somit einen Kegelschnitt geben, welcher die Curve C_4^3 in p, q und dann in diesem Berührungspunkte tangirt.

Man kann fragen: welche Lage müssen die beiden Punkte p, q besitzen, damit sich ein Kegelschnitt beschreiben lässt, welcher die Curve C_4^3 in beiden gleichzeitig osculirt. Es wird dies offenbar dann eintreten, wenn p und q ein entsprechendes Punktenpaar der verwendeten Involution sind, oder wenn p, q und r' in derselben Geraden liegen, d. h. mit anderen Worten, wenn r ein Inflexionspunkt der Curve ist. Dies giebt also abermals den vorletzten Satz des 18. Artikels.

Es ist auch der Fall erwähnenswerth, in welchem p und q zwei conjugirte Punkte der Curve sind, daher zwei Punkte, welche denselben Tangentialpunkt besitzen.

In diesem Falle wird p' mit q' zusammenfallen und daher wird der Tangentialpunkt von p und q ebenfalls ein Doppelpunkt werden.

Hieraus folgt aber, dass die Tangente in diesem Tangentialpunkte und die Tangente im Punkte r sich in einem und demselben Punkte r' vor C_4^3 schneiden müssen, oder dass r' der zweite Tangentialpunkt von p und q sein muss.

In Form eines Satzes kann man das letzte Ergebniss folgendermassen bringen:

> „Zieht man aus einem Punkte $(p'q')$ der Curve C_4^3 an dieselbe die in p und q berührenden Tangenten, so ist der Tangentialpunkt r' von $(p'q')$ zugleich der Tangentialpunkt des dritten Schnittpunktes r von C_4^3 mit $\overline{pq}$."

20. Rücken die beiden Punkte p und q unendlich nahe zu einander, so wird das Kegelschnittsbüschel solche Kegelschnitte enthalten, welche in p die Curve C_4^3 vierpunktig berühren. Die durch solche Kegelschnitte auf C_4^3 bestimmte centrale Involution muss dann offenbar den zweiten Tangentialpunkt p'' von p zum Centrum haben, weil der erste Tangentialpunkt p' einen Doppelpunkt der Involution darstellt.

> „Die Kegelschnitte, welche in einem Punkte p die Curve C_4^3 vierpunktig berühren, bestimmen auf derselben eine centrale Involution, deren Centrum der zweite Tangentialpunkt p'' von p ist."

Unter allen solchen Kegelschnitten wird es somit einen geben, welcher die Curve C_4^3 überdies in einem Punkte einfach (zweipunktig) berührt, und zwar wird der Berührungspunkt der zum ersten Tangentialpunkte p' conjugirte Punkt von C_4^3 sein. Ferner wird es einen Kegelschnitt geben, welcher C_4^3 in p fünfpunktig berührt, d. h. daselbst fünf aufeinander folgende Punkte mit C_4^3 gemein hat. Seinen sechsten Schnittpunkt mit C_4^3 wird man daher finden, wenn man $\overline{p''p}$ zieht und den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit C_4^3 bestimmt.

„Den Schnittpunkt des die Curve C_4^3 in einem ihrer Punkte p fünfpunktig berührenden Kegelschnittes mit der Curve findet man als dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie von p mit dem zweiten Tangentialpunkte p'' von p."

Soll es einen Kegelschnitt geben, welcher C_4^3 in p sechspunktig berührt, so muss p mit dem zweiten Doppelpunkte der Involution zusammenfallen, d. h. der dem ersten Tangentialpunkte p' von p conjugirte Punkt muss p sein, woraus folgt, dass dann p' ein Inflexionspunkt der Curve sein müsse. Dies liefert wieder den letzten Satz des 18. Artikels.

21. Wenn von den neun Scheiteln eines Curvenbüschels dritter Ordnung sieben auf unserer Curve C_4^3 liegen, so werden offenbar die Curve des Büschels auf C_4^3 Punktenpaare einer Involution bestimmen, welche central sein muss, da die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes ein Paar entsprechender Punkte vorstellen. Diese Involution ist insofern bemerkenswerth, als sie von dem achten ausserhalb C_4^3 liegenden Scheitel des Büschels unabhängig ist und durch Annahme der auf C_4^3 liegenden sieben Scheitel vollkommen bestimmt erscheint.

Seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 die sieben auf C_4^3 willkürlich angenommenen Scheitel des Curvenbüschels, so gehen bekanntlich alle Curven dritter Ordnung, welche auch durch einen achten, beliebig auf C_4^3 angenommenen Punkt a_1 gehen, noch durch einen neunten Punkt a_2, welcher, weil C_4^3 eine von den Curven ist, auf C_4^3 liegen muss. Es ist nun klar, dass die beiden Punkte a_1, a_2 ein Punktenpaar der obenerwähnten Involution bilden, wodurch gleichzeitig gezeigt ist, dass die Involution wirklich durch die sieben Scheitel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bestimmt erscheint und vom achten Scheitel des Curvenbüschels ganz unabhängig ist.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

„Alle Curven dritter Ordnung, welche durch sieben auf C_4^3 willkürlich angenommene Punkte hindurchgehen, bestimmen auf C_4^3 eine centrale Punktinvolution, d. h. solche Punktenpaare, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt der Curve gehen."

Durch die gegebenen sieben Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kann man nun 21 Grenzfälle von Curven dritter Ordnung legen, d. h. Curven dritter Ordnung, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Legt man nämlich durch zwei der sieben Punkte eine Gerade und durch die fünf anderen einen Kegelschnitt, so stellen beide zusammen eine durch die sieben Punkte gehende Curve dritter Ordnung vor. Dies kann man $\frac{6.7}{2} = 21$ mal vornehmen.

Die durch zwei Punkte gelegte Gerade schneidet C_4^3 in einem dritten Punkte, welcher mit dem sechsten Schnittpunkte des durch die fünf übrigen

Punkte gelegten Kegelschnittes ein Punktenpaar der betrachteten centralen Involution bildet. Man wird daher aus den sieben Punkten einundzwanzig Punktenpaare der centralen Involution ableiten können.

Offenbar kann man das Ergebniss der vorhergehenden Betrachtung in folgender Form aussprechen:

„Ist ein Siebeneck einer Curve C_4^3 eingeschrieben, so schneidet jede seiner einundzwanzig Seiten die Curve in einem Punkte, welcher mit dem sechsten Schnittpunkte des durch die ausserhalb der Seite gelegenen fünf Ecken gehenden Kegelschnittes ein Punktenpaar einer centralen Involution bildet.

Jede dem Siebeneck umschriebene Curve dritter Ordnung schneidet C_4^3 in einem Punktenpaare derselben Involution."

Wir können das Centrum o dieser Involution als den Gegenpunkt der sieben Punkte, aus denen die Involution fliesst, bezeichnen.

22. Wenn die sieben Punkte unendlich nahe in die Lage 1 rücken, so erhält man ein Curvennetz dritter Ordnung, dessen Curven mit C_4^3 in 1 eine siebenpunktige Berührung eingehen. Diese Curven bestimmen auf C_4^3 eine centrale Punktinvolution, deren Centrum o man leicht findet. Der in 1 fünfpunktig berührende Kegelschnitt und die Tangente von 1 repräsentiren offenbar zusammen eine Curve des Netzes. Der Kegelschnitt schneidet nun nach Artikel 20 C_4^3 auf der Verbindungslinie von 1 und die Tangente schneidet C_4^3 im ersten Tangentialpunkte von 1.

Die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte trifft C_4^3 im erwähnten Centrum o.

Alle Curven dritter Ordnung, welche C_4^3 in 1 achtpunktig berühren, werden durch einen festen Punkt von o gehen, den man als den dritten Schnittpunkt der Curve mit $\overline{o1}$ erhält und welcher der dritte Tangentialpunkt von 1 ist.

XV.

Vier combinatorische Probleme.

Von

ERNST SCHRÖDER

in Pforzheim.

I und II.

Bei meiner Beschäftigung mit Abfassung eines elementaren Lehrbuches wurde mir die Frage von Interesse: auf wie viele Arten eine Summe von n Gliedern (oder auch ein Product von n Factoren) sich eigentlich schreiben lasse? Die beiden Fundamentaleigenschaften der Addition, welche auch der Multiplication zukommen, sind bekanntlich: das Commutationsgesetz, welches für den einfachsten Fall durch die Formel ausgedrückt wird:

$$a+b=b+a,$$

und allgemein gefasst aussagt, dass die Reihenfolge oder Anordnung der Glieder beliebig ist; ferner das Associationsgesetz, welches im einfachsten Falle durch die Formel dargestellt wird:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

und überhaupt aussagt, dass die Gruppirung der Glieder, ihre Zusammenfassung oder Einschliessung mittels Klammern ebenfalls beliebig ist. Wie viele Darstellungen einer Summe sich durch verschiedene Anordnung der Glieder ergeben, ist nun längst untersucht, und führte (bei durchweg verschiedenen Gliedern) auf die bekannte Permutationszahl

$$1.2.3\ldots n=n!;$$

hingegen habe ich nirgends die entsprechende Aufgabe behandelt gefunden, zu untersuchen, wieviel verschiedene Darstellungen einer Summe sich dadurch ergeben, dass man die Glieder jedesmal in anderer Weise durch Parenthesen verbindet, ohne übrigens die Reihenfolge derselben zu ändern. Dieses letztere Problem soll nun gelöst werden. Alle möglichen Darstellungen der n-gliedrigen Summe überhaupt erhält man, wenn die auf alle Arten gruppirten Glieder noch sämmtlich permutirt werden, und findet sich ihre Anzahl, indem man die von uns gesuchte Anzahl der möglichen Gruppirungen mit der Anzahl $n!$ der Anordnungen multiplicirt.

Es liegt jedoch nahe, die Aufgabe auf zweierlei Arten zu verstehen. Erstens kann man nämlich verlangen, dass eine Summe aus mehreren Zahlen durch fortschreitende (additive) Verknüpfung von immer nur zwei Zahlen ausgerechnet werde, so etwa, wie dies z. B. bei einem Producte von n Factoren nothwendig geschehen muss, oder man kann auch zweitens das gleichzeitige Addiren mehrerer Zahlen als eine neue, von der ebenerwähnten verschiedene Operation zulassen. Es bieten sich also zwei Probleme, welche ich der Kürze halber zusammen behandeln und durch die Chiffren I und II unterscheiden will. Bei dem ersten Problem muss jede Darstellung der n-gliedrigen Summe volle $n-2$ Parenthesen enthalten; bei dem zweiten Problem dürfen von diesen Parenthesen noch beliebig viele in Wegfall kommen. In beiden Fällen bezeichne ich mit α_n die gesuchte Anzahl der möglichen Gruppirungen oder Associationen der n in bestimmter Ordnung aufeinanderfolgenden Glieder.

Es ist dann

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha^2{}_1 = 1,$$

ferner

ad I. $\alpha_3 = 2\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4 = 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3$ etc.,

ad II. $\alpha_3 = \alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1^4 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2$ etc.,

und man findet, dass allgemein die Recursion besteht:

$$1)\quad \begin{cases} \text{I.} & \alpha_{n+1} = \sum\limits_{a=1}^{a=n} \alpha_a \alpha_{n+1-a}, \\ \text{II.} & \alpha_{n+1} = S \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!} \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}, \end{cases}$$

wo die Summe S sich erstreckt über alle positiven ganzzahligen Wurzeln (incl. 0) der Gleichung:

$$2)\qquad 1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \ldots + n.a_n = n + 1.$$

Die Gleichung 1) II. gilt auch für den ersten Fall, wenn man noch die Forderung

$$3)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2$$

hinzunimmt, indem sich alsdann die Gleichung 1) I. in etwas anderer Darstellung ergiebt.

Um diese Recursionen zunächst einzusehen, bedenke man ad I, dass die $n+1$-gliedrige Summe jedenfalls in letzter Instanz durch Zusammenfassung der Glieder zu einer zweigliedrigen gemacht sein muss; dies kann aber nur geschehen durch Zusammenfassung der a-ersten, desgleichen der $n+1-a$-letzten Glieder, wo $a=1, 2 \ldots n$ ist. Die erste Gliedergruppe lässt sich aber laut Definition der α auf α_a, die zweite auf α_{n+1-a} Arten durch verschiedenartige Association ihres Inhalts in Untergruppen eintheilen, also die beiden Gliedergruppen mit einander verbunden auf $\alpha_a . \alpha_{n+1-a}$

Arten, mithin die ganze Summe auf soviel Arten, als diese für $a=1, 2 \ldots n$ gebildeten Producte zusammengenommen angeben.

Ad II wird die ganze Summe in letzter Instanz zerlegt erscheinen in $a_1, a_2 \ldots a_n$, beziehungsweise $1, 2 \ldots n$-gliedrige Summen, wobei aber, da die Gliederzahl im Ganzen $n+1$ betragen muss, die Relation 2) besteht. Diese Partialsummen sind resp. $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ verschiedener Darstellungen fähig, genauer gesagt: eine jede der a_m m-gliedrigen Theilsummen lässt sich durch verschiedenartige Association ihrer Glieder auf α_m Arten darstellen; sämmtliche $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ Theilsummen in einer bestimmten Ordnung mit einander verknüpft, lassen sich also auf $\alpha_1^{a_1} \cdot \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}$ Arten weiter gliedern.

Diese Theilsummen können aber in $p = \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1 !\, a_2 ! \ldots a_n !}$ verschiedenen Anordnungen mit einander verknüpft werden, wobei indessen zu beachten ist, dass die vorgeschriebene Ordnung der Glieder gewahrt werden muss; hat man sich also jene Theilsumme mitsammt den Parenthesen, welche sie enthalten, permutirt gedacht, so musste die ursprüngliche Reihenfolge der Glieder durch Versetzung derselben (ohne Veränderung der Parenthesen) wiederhergestellt sein. Darnach ist die Anzahl der möglichen Darstellungen einer letztinstanzlich in a_1 eingliedrige, a_2 zweigliedrige ... und a_n n-gliedrige Theilsummen zerlegten Summe gleich

$$p \cdot \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n},$$

und die Anzahl der Darstellungen dieser Summe überhaupt wird gefunden, wenn man diese Zahl für alle Arten letztinstanzlicher Zerlegungen bildet und summirt.

Mit Hilfe der also bewiesenen Recursionen 1) kommt es jetzt darauf an, die Zahlen α_n independent als Functionen von n darzustellen. Auf den ersten Blick scheint dieses sehr schwierig, da die Recursionen nicht einmal linear sind und schon bei linearen Recursionen mit ohne Ende wachsender Gliederzahl die Aufgabe allgemein noch nicht gelöst ist.

Ihre Lösbarkeit in dem gegenwärtigen Falle verdankt die Aufgabe einem zufälligen Umstande, dem, dass die Coefficienten p eben die Permutationszahlen sind.

Setzt man nämlich für eine beliebige, nur hinreichend kleine Zahl z:

4) $$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n z^n,$$

und bezeichnet mit Jacobi den Coefficienten von z^n in der Entwickelung einer Function $\Phi(x)$ nach steigenden Potenzen von z mit $[\Phi(z)]_{z^n}$, so zeigt sich durch Vergleichung der Recursion 1) I. mit dem polynomischen Satze, dass dieselbe auch, wie folgt, geschrieben werden kann:

5) I. $$\alpha_{n+1} = [F(z)^2]_{z^{n+1}}.$$

Desgleichen ist in 1) II. rechter Hand die Summe aller Glieder, für welche $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ constant $= a$ ist, einerlei mit $[F(z)^a]_{z^{n+1}}$, und da a alle Werthe von 2 bis $n+1$ annehmen kann, so schreibt sich 1) II. auch, wie folgt:

5) II. $$\alpha_{n+1} = \sum_{a=2}^{a=n+1} [F(z)^a]_{z^{n+1}}.$$

Zur Vereinfachung dieser Formeln 5) könnte noch n für $n+1$ geschrieben werden; sie würden dann aber nur für $n>1$ Giltigkeit haben. Diese Darstellung der gesuchten Zahlen kann nun nebst dem Werthe $\alpha_1 = 1$ in die Gleichung 4) einsetzen, durch welche man ihre erzeugende Function $F(z)$ definirt ist. Dadurch ergiebt sich eine Relation, aus welcher es gelingt, diese erzeugende Function selbst zu bestimmen; zunächst nämlich:

I. $$F(z) = z + \sum_{n=2}^{n=\infty} z^n [F(z)^2]_{z^n};$$

II. $$F(z) = z + \sum_{n=2}^{a=\infty} \sum_{n=a}^{n=\infty} z^n [F(z)^a]_{z^n};$$

nachdem noch bei II die Summationsordnung umgekehrt worden.

Nach der Bedeutung des Symbols $[\Phi(z)]_{z^n}$ ist aber

$$\sum_{n=a}^{n=\infty} z^n [\Phi(z)]_{z^n} = \Phi(z),$$

wenn die in eine Mac Laurin'sche Reihe entwickelte Function $\Phi(z)$ mit der a^{ten} Potanz von z beginnt. Da in der That $F(z)$ mit dem Gliede $\alpha_1 z$, sowie $F(z)^a$ mit $\alpha_1{}^a z^a$ beginnt, so wird also:

6) $$\begin{cases} \text{I.} & F(z) = z + F(z)^2, \\ \text{II.} & F(z) = z + \sum\limits_{a=2}^{a=\infty} F(z)^a = z + \dfrac{F(z)^2}{1 - F(z)}. \end{cases}$$

In beiden Problemen haben wir demnach eine bezüglich $F(z)$ quadratische Gleichung gewonnen, aus welcher diese Function berechnet werden kann. Man findet jedesmal zwei Werthe, von welchen der eine zu verwerfen ist, weil die Reihenentwickelung der Function mit dem Terme z beginnen, also die 0^{te} Potenz von z herausfallen muss. Die richtigen Werthe sind nach Auflösung jener quadratischen Gleichungen:

7) $$\begin{cases} \text{I.} & F(z) = \tfrac{1}{2}\{1 - (1 - 4z)^{\frac{1}{2}}\}, \\ \text{II.} & F(z) = \tfrac{1}{4}\{1 + z - [1 - z(6 - z)]^{\frac{1}{2}}\}, \end{cases}$$

wenn unter den $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Potenzen diejenigen Werthe verstanden werden, welche die Binomialreihe liefert.

Diese beiden Functionen sind nun lediglich noch nach Potenzen von z zu entwickeln, damit der Coefficient von z^n aus ihnen entnommen werden könne. Ad 1 bietet dies nicht die geringste Schwierigkeit, und erhält man:

8) I. $$\alpha_n = (-1)^{n-1}\, 2^{2n-1}\, (\tfrac{1}{2})_n\,,$$
oder, in einer für die Rechnung bequemeren Form dargestellt:
$$\alpha_n = \frac{2}{n-2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-3)}, \quad \text{für } n > 3,$$
woraus beiläufig auch die Recursion
$$\alpha_{n+1} = 2\,\frac{2n-1}{n+1}\,\alpha_n$$
folgt.

Ad II wird man zuerst durch Anwendung des Binomialtheorems nach Potenzen von $z(6-z)$, hierauf die einzelnen Glieder durch abermalige Anwendung desselben nach Potenzen von z selbst entwickeln. Das Ordnen nach Potenzen von z geht bequemer von statten, wenn man auch die abbrechenden Binomialreihen noch ins Unendliche fortsetzt. So wird nun:

8) II. $$\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4} \sum_{a=0}^{a=n} (\tfrac{1}{2})_a\, (a)_{n-a}\, 6^{2a-n}.$$

Ordnet man die durch diesen Summenausdruck dargestellte Reihe nach fallenden Potenzen von 6 an und setzt sie ins Unendliche fort, so convergirt die entstehende Reihe, so lange nicht einzelne Glieder unendlich werden, für alle möglichen complexen Werthe von n, da der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder mit wachsendem Stellenzeiger der Grenze $\frac{1}{9}$ zustrebt. Man erhält so einen analytischen Ausdruck für eine Function, durch welche nicht nur die Reihe der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, interpolirt, sondern überhaupt die Grösse α_n im ganzen Bereich der Zahlenebene als Function von n explicirt wird. Ist jedoch n eine natürliche Zahl, so vereinfacht sich die obige Gleichung wegen $(a)_{n-a} = 0$ für $2a < n$, und zerfällt in die beiden folgenden:

9) II. $$\left\{\begin{aligned} \alpha_{2n} &= -\tfrac{1}{4} \sum_{c=0}^{c=n} (\tfrac{1}{2})_{n+c}\, (n+c)_{n-c}\, 6^{2c}, \\ \alpha_{2n+1} &= \tfrac{1}{4} \sum_{c=0}^{c=n} (\tfrac{1}{2})_{n+c+1}\, (n+c+1)_{n-c}\, 6^{2c+1}, \end{aligned}\right.$$

deren Glieder auch noch nach dem Schema $(\alpha)_\beta\,(\beta)_\gamma = (\alpha)_\gamma\,(\alpha-\gamma)_{\beta-\gamma}$ umgeformt werden könnten. Für die Berechnung bequemer sind die Ausdrücke:

10) II. $$\left\{\begin{aligned} \alpha_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{a=0}^{a=n} \frac{(-1)^{n-a}\,(2n+2a-3)!\,3^{2a}}{(n+a-2)!\,(n-a)!\,(2a)!}, \\ \alpha_{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{a=0}^{a=n} \frac{(-1)^{n-a}\,(2n+2a-1)!\,3^{2a+1}}{(n+a-1)!\,(n-a)!\,(2a+1)!}, \end{aligned}\right.$$

in welchen jedoch $n > 1$, resp. > 0 sein muss. Die allgemeine Ausführung der Summation ist mir nicht gelungen. Nach 8) I und 10) II berechnet man leicht die ersten Werthe der Coefficienten, etwa von α_1 bis α_{10}:

I.	1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,
II.	1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049.

Eine sechsgliedrige Summe z. B. lässt sich demnach, Alles in Allem genommen, schon auf 141840 Arten überhaupt anschreiben; ersetzte man das + Zeichen durch irgend ein anderes, weder commutatives, noch associatives Functionszeichen, so würden sich ebenso viele verschiedene Werthe des Rechenergebnisses herausstellen.

Schliesslich eine Bemerkung über die Zulässigkeit der angestellten Betrachtungen. Für die Giltigkeit derselben war es erforderlich, dass die vorkommenden Reihen convergirten. *A posteriori* lässt sich nun leicht einsehen, dass ad I: $mod\, z < \frac{1}{4}$, und ad II: $mod\, z < 3 - 2\sqrt{2} = 0,17157\ldots$ sein muss, wenn die Reihe für $F(z)$ convergiren soll, da dieses die kleinsten Werthe von z sind, für welche die Derivirten von $F(z)$ unendlich werden, nämlich die Grundzahl der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Potenz in 7) verschwindet. Wegen 6) musste überdies z ad II so klein gedacht werden, dass $mod\, F(z) < 1$ wurde. — Das Verhältniss zweier aufeinanderfolgender Coefficienten α nähert sich bei wachsendem Stellenzeiger ad I der Grenze 4, ad II der Grenze $3 + 2\sqrt{2} = 5,828427\ldots.$ Schwieriger dürfte ad II die Aufgabe sein, die Art des Unendlichwerdens von α_n selbst für $lim\, n = \infty$ zu bestimmen.

Es ist nebenbei das für die Zahlentheorie nicht uninteressante Resultat gefunden, dass die für die Coefficienten α angegebenen Ausdrücke 8) bis 10) stets ganze Zahlen sein müssen, was namentlich ad II schwer direct zu beweisen sein dürfte.

III und IV.

Verwandt mit den beiden vorigen Problemen sind die beiden folgenden, bei denen es auf die Anordnung der Elemente (Glieder), die bisher eine vorgeschriebene war, nicht ankommen soll.

III. Es sind n Elemente gegeben, z. B. körperliche, im Raume bewegliche Individuen, die ich abermals Glieder nennen will. Von diesen kettet man irgend zwei dadurch an einander, dass man sie mit einer geschlossenen, etwa einfach zusammenhängenden und sich selbst nicht schneidenden Oberfläche — einer Zelle gleich — umhüllt. Diese Hülle sammt ihrem Inhalt wird nun als neues Glied betrachtet und auf die neue Menge von nunmehr $n-1$ Elementen die nämliche Operation so lange fortgesetzt angewendet, bis der ganze Complex schliesslich zu einem zweigliedrigen geworden ist. Es fragt sich, wievielerlei Complexionen durch diesen Process erhältlich sind, d. h. auf wieviel Arten derselbe vollzogen werden kann.

IV. Man theilt die n Elemente auf beliebige Weise in Gruppen, nämlich eventuell in einige eingliedrige, einige 2, 3 ... $n$gliedrige; jede Gruppe von mehr als einem Elemente umschliesst man durch eine geschlossene Oberfläche und lässt die letztere sammt ihrem Inhalt als ein den übrigen coordinirtes Element gelten. Die neue Menge von (selbstverständlich weniger als n) Elementen wird demselben Process wiederholt unterworfen, so lange es beliebt, beziehungsweise so lange es angeht, indem die Einschliessung analog den vorigen Problemen nur so weit gehen darf, dass der resultirende Complex noch aus mehr als einem Elemente besteht. Es soll die Anzahl der Complexionen gefunden werden, welche durch diesen Process gebildet werden können.

In den beiden Problemen will ich die gesuchte Anzahl der möglichen associativen Gliederungen des n-gliedrigen Complexes mit β_n bezeichnen und unter der Annahme aufsuchen, dass alle Elemente als individuell verschieden betrachtet werden. Den Gegensatz dieser Probleme mit den beiden vorigen wird man am besten kennzeichnen, wenn man III und IV als ein Problem der freien oder ungeordneten, hingegen I und II als ein Problem der bedingten oder geordneten Association hinstellt. Es ist auch *a priori* ersichtlich, dass $\beta_n > \alpha_n$, aber $< n!\, \alpha_n$ sein wird; denn nimmt man die Elemente wie die Glieder einer Summe in eine Reihe geordnet an und lässt die Klammern durch geschlossene Oberflächen vertreten, so sieht man, dass die α_n bedingten Associationen sich sämmtlich unter den β_n freien vorfinden, und umgekehrt auch die β_n freien unter den bedingten nach Permutation ihrer Elemente; dieses gilt sowohl, wenn man die Probleme I und III, als wenn man II und IV unter sich vergleicht. Aus den für die Probleme III und IV angegebenen Bestimmungen geht nämlich hervor, dass eine Permutation der Elemente keine Aenderung bewirkt und zu keiner neuen Complexion führt, wenn sie nur die Wirkung hat, dass die von ein und derselben Hülle umschlossenen, einander coordinirten Elemente unter sich vertauscht werden; zu einer neuen Gliederung führt das Permutiren nur, sofern einzelne Elemente aus der gedachten Hülle heraus- und andere dafür hereintreten.

Selbstredend durfte keine der Hüllenflächen eine andere schneiden. Wollte man auch Einschliessung eines einzelnen Elementes zulassen (jedoch keine mehrfache), so wäre β_n noch mit 2^n zu multipliciren und bei fernerer Zulassung einer Einschliessung des ganzen Complexes mit 2^{n+1}.

Die Methode, deren ich mich nun zur Ermittelung der gesuchten Zahlen bediene, ist der vorigen ähnlich, wenngleich sich die Ausführung (namentlich ad IV) interessanter gestaltet.

Ich stelle zuerst eine Recursion zur Berechnung der Grössen β_n auf. Man hat:

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_1^2 = 1,$$

ferner:

III. $\beta_3 = 3\beta_1\beta_2, \quad \beta_4 = 4\beta_1\beta_3 + 3\beta_2^2, \quad \beta_5 = 5\beta_1\beta_4 + 10\beta_2\beta_3$ etc.,

IV. $\beta_3 = \beta_1^3 + 3\beta_1\beta_2, \quad \beta_4 = \beta_1^4 + 6\beta_1^2\beta_2 + 4\beta_1\beta_3 + 3\beta_2^2$ etc.,

und allgemein:

$$11) \left\{ \begin{array}{ll} \text{III.} & \beta_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{a=n} (n+1)_a \, \beta_a \beta_{n+1-a}, \\ \text{IV.} & \beta_{n+1} = S \dfrac{(n+1)! \, \beta_1^{a_1} \beta_2^{a_2} \ldots \beta_n^{a_n}}{a_1! \, a_2! \ldots a_n! \, (1!)^{a_1} (2!)^{a_2} \ldots (n!)^{a_n}}, \end{array} \right.$$

wo die Summe S wieder auszudehnen ist über die Wurzeln der Gleichung 2). Auch hier geht die Gleichung 11) IV in 11) III über, wenn noch die Forderung III hinzugezogen wird, welche ausdrückt, dass ad III die Elemente sich nur zu weit associiren dürfen. Ich kann es deshalb unterlassen, die Formel 11) III zu rechtfertigen, was leicht wie bei I geschehen könnte, und wende mich sogleich zu dem Beweise der Recursion 11) IV.

Um dieselbe einzusehen, bedenke man zunächst, dass der oben angegebene Umhüllungsprocess auch in umgekehrter Ordnung ausgeführt werden kann; oben dachten wir zuerst die innersten Hüllen, dann successive die äusseren, sie umschliessenden gebildet; offenbar resultirt aber die nämliche Complexion, wenn man zuerst die äussersten und dann successive die eingeschlossenen Hüllen ausbildet, also gewissermassen Intussusception statt Juxtaposition anwendet, wenn ich mich der Ausdrücke bedienen darf, welche bei der Frage über die Anlagerung organischer Zellenschichten gebraucht werden. Denken wir uns also die $n+1$ ursprünglichen Elemente zunächst in $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ Gruppen vertheilt, nämlich a_1 isolirte Elemente, ferner a_2 Gruppen von 2 Elementen, ebenso a_3 Gruppen von 3..., endlich a_n Gruppen von n Elementen, und jede dieser letzteren Gruppe von einer einfachen Hülle umschlossen, so können wir die sämmtlichen Complexionen offenbar erhalten, indem wir erstens diese Eintheilung auf alle möglichen Arten machen — was auf so viele Arten geschehen kann, als wieviel Systeme von Wurzeln die Gleichung 2) besitzt —, indem wir dann zweitens für eine jede dieser Eintheilungen alle möglichen Complexionen aufsuchen. Für eine bestimmte erstmalige Eintheilung ergeben sich nun aber alle zu derselben gehörigen Complexionen, indem man zuerst die Inhalte der Hüllen ebenso durch associative Gliederung (Intussusception) weiter behandelt, was sich laut Definition der β bei den a_1 isolirten Elementen auf je β_1, bei den a_2 stets zwei Elemente haltenden Hüllen auf je β_2... und bei den a_n immer n Elemente umfassenden Hüllen auf je β_n Arten thun lässt, bei allen Gliedern zusammen also auf

$$\beta_1^{a_1} \beta_2^{a_2} \ldots \beta_n^{a_n}$$

verschiedene Arten, indem man alsdann sämmtliche von einander verschiedenen Complexionen aufstellt, die sich noch durch Permutation der ursprünglichen Elemente aus den bisherigen ergeben. Durch Permutation der

Elemente überhaupt erhält man nun $(n+1)!$ mal so viele Complexionen als bisher. Von diesen stimmen aber alle diejenigen mit einander überein, bei welchen nur der Inhalt einer der bisher betrachteten Hüllen eine Permutation erlitten hat, ohne dass Elemente aus einer Hülle in die andere übergingen; es fallen also je $1!, 2! \ldots n!$ Complexionen zusammen, was beziehungsweise $a_1, a_2 \ldots a_n$ mal vorkommt; deshalb ist nun die obige, mit $(n+1)!$ multiplicirte Zahl durch $(1!)^{a_1} (2!)^{a_2} \ldots (n!)^{a_n}$ zu dividiren. Es fallen aber auch noch alle diejenigen Complexionen zusammen, bei welchen die Permutation nur die Folge hatte, dass eine der Hüllen mit einer andern, ebensoviel Elemente umfassenden Hülle, oder ein isolirtes Element mit einem andern sich vertauschte; deshalb ist die bisherige Anzahl noch durch $a_1! \, a_2! \ldots a_n!$ zu dividiren.

Nachdem so die Recursion 11) etablirt ist, schreite ich zur independenten Bestimmung der Zahlen β_n. Zu dem Ende werde allgemein

12) $$\beta_n = n! \, \alpha_n$$

gesetzt, wodurch die Recursion die einfachere Gestalt annimmt:

13) $$\left\{\begin{array}{ll} \text{III.} & \alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \sum\limits_{a=1}^{a=n} \alpha_a \, \alpha_{n+1-a}, \\ \text{IV.} & \alpha_{n+1} = \mathbf{S} \dfrac{\alpha_1^{a_1} \, \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}}{a_1! \, a_2! \ldots a_n!}, \end{array}\right.$$

und werde abermals durch die Festsetzung 4) eine erzeugende Function $F(z)$ der Coefficienten α_n eingeführt. Dass die Definition dieser Function jedenfalls für ein hinreichend kleines z einen Sinn besitzt, ergiebt sich daraus, dass α_n ad III, IV kleiner ist als α_n ad I, resp. II, wonach also die Reihe für $F(z)$ bei III und IV mindestens innerhalb eines ebenso grossen Kreises convergiren muss, als die bei I, resp. II.

Das Problem III kann nun sogleich vollständig erledigt werden, denn ähnlich wie früher kann für diesen Fall die Gleichung 13) geschrieben werden:

III. $$\alpha_{n+1} = \tfrac{1}{2} [F(z)^2]_{z^{n+1}},$$

und geht daraus die Relation hervor:

III. $$F(z) = z + \tfrac{1}{2} F(z)^2.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung berechnet sich:

III. $$F(z) = 1 - (1 - 2z)^{\frac{1}{2}},$$

und ist folglich (wenn $mod\, z < \frac{1}{2}$ gedacht wird):

III. $$\alpha_n = (-1)^{n-1} (\tfrac{1}{2})_n \, 2^n$$

oder:

III. $$\beta_n = (-1)^{n-1} n! \, (\tfrac{1}{2})_n \, 2^n = 1.1.3.5.7 \ldots (2n-3),$$

wo die Anzahl der Factoren gleich n gemacht ist. Dies ist die Anzahl der Arten, auf welche sich auch ein Product von n Factoren ausrechnen lässt, wenn die Berechnung von $a.b$ für einerlei gilt mit der von $b.a$. Es ist z. B.:

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 3, \quad \beta_4 = 15, \quad \beta_5 = 105 \text{ etc.}$$

Es gelingt aber, auch die Aufgabe IV zu lösen, wenn man bemerkt, dass nach Herrn Weierstrass (Crelle's Journal, Bd. 51 S. 1 flgg.) sich $e^{F(z)}$ mindestens innerhalb desselben Bereiches nach Potenzen von z entwickeln lässt, wie die (hierbei beliebig gedachte) Function $F(z)$ selbst, und zwar, dass ein beliebiger Coefficient in dieser Entwickelung ist:

$$14) \qquad [e^{F(z)}]_{z^{n+1}} = \sum \frac{\alpha_1^{a_1}\, \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}\, \alpha_{n+1}^{a_{n+1}}}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!\, a_{n+1}!},$$

wo die Summe Σ sich erstreckt über alle positiven ganzen Wurzeln (incl. 0) der Gleichung

$$15) \qquad 1.a_1 + 2.a_2 + \ldots + n.a_n + (n+1).a_{n+1} = n+1.$$

Es giebt aber nur ein einziges Werthsystem der a, in welchem a_{n+1} von 0 verschieden ist; dieses ist dasjenige, für welches $a_{n+1} = 1$ und alle übrigen a gleich 0 sind. Die über alle Wurzeln der letzteren Gleichung 15) erstreckte Summe Σ in 14) übertrifft also die frühere Summe S in 13) IV, erstreckt über die Wurzeln der Gleichung 2), nur um das Glied α_{n+1}; in den übrigen Gliedern stimmen beide Summen wegen $\frac{\alpha_{n+1}^0}{0!} = 1$ genau überein, und kann man also die Recursion 13) IV schreiben:

$$16)\,\text{IV.} \qquad \alpha_{n+1} = [e^{F(z)}]_{z^{n+1}} - \alpha_{n+1},$$

oder für $n > 1$:

$$17)\,\text{IV.} \qquad \alpha_n = \tfrac{1}{2}\, [e^{F(z)}]_{z^n}.$$

Einsetzung dieses Werthes in den Ausdruck 4) von $F(z)$ lehrt, dass diese Function die Relation befriedigt:

$$18)\,\text{IV.} \qquad F(z) = \tfrac{1}{2}\, \{z - 1 + e^{F(z)}\},$$

dass sie also eine Wurzel der transscendenten Gleichung ist:

$$19) \qquad 2F + 1 - e^F = z.$$

Es handelt sich darum, diese Gleichung aufzulösen, wozu man das Theorem von Lagrange oder die Burmann'sche Reihe benutzen könnte. Diese Reihe liefert gerade diejenige Wurzel der transcendenten Gleichung, welche den Werth $F = 0$ in sich fasst und nach Potenzen von z — mit z^1 beginnend — entwickelt werden kann, welche also die von uns gesuchte Wurzel ist; es convergirt die gedachte Reihe, beiläufig gesagt, für

$$mod\, z < 2\, log\, 2 - 1 = 0{,}386294 \ldots.$$

Die Auflösung der Gleichung 19) nach der Unbekannten F hat übrigens ein allgemeineres Interesse, als es bei einem flüchtigen Blicke scheint, da sich auch die Gleichung

$$\mu x + \nu + e^{\alpha x + \beta} = 0$$

durch eine lineare Substitution für z und Multiplication mit einer Constanten auf die Form 19) bringen lässt. Ebenso geht die Gleichung 19) selbst durch Einsetzung von $F = x + log\,2$ in die bequemere Form über:

$$20)\qquad f(x) = x + \gamma - e^x = 0,$$

worin $\gamma = log\,2 + \frac{1-z}{2}$ eine gegebene Grösse bedeutet; in dieser letzteren Form möge die Gleichung nach x aufgelöst werden.

Statt der Burmann'schen Reihe, welche stets nur eine einzige bestimmte Wurzel der Gleichung darstellt, ziehe ich vor, die von mir (Mathematische Annalen, Bd. 2 S. 330) angegebene Formel 23) oder 24) anzuwenden, da sie bei passender Annahme der im Convergenzbereich willkürlichen Zahl x eine jede der Wurzeln liefert. Stellt x_1 irgend eine dieser Wurzeln vor, so kann darnach x (noch auf unzählige Arten) so angenommen werden, dass

$$21)\qquad x_1 = x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n f(x)^n}{n!} \gamma_{n-1}$$

wird, worin

$$\gamma_{n-1} = d^n_{f(x)} \cdot x$$

oder

$$22)\qquad \gamma_{n-1} = \lim_{\varepsilon=0} d_\varepsilon^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - e^{x+\varepsilon} + e^x}\right)^n$$

bedeutet. Hiernach würde die directe Bestimmung der Coefficienten γ_{n-1} unserer Reihenentwickelung von x_1 zwar ausführbar sein; jedoch ist dieselbe sogar für niedrige Werthe von n schon mit äusserst mühsamen Rechnungen verknüpft. Wir suchen deshalb jetzt eine Reihenentwickelung für diese Coefficienten auf. Zu dem Ende möge das Ergebniss 22) in folgender Form geschrieben werden:

$$23)\qquad \gamma_n = \lim_{\varepsilon=0} d_\varepsilon^n \left(1 - y\,\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)^{-n-1},$$

indem wir zur Abkürzung $e^x = y$ setzen. Da nun

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1$$

ist, so wird man unter der Annahme $mod\, y < 1$ die zu differenzirende Function in 23) für hinreichend kleine ε nach dem binomischen Satze in eine Reihe nach Potenzen von $y\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ entwickeln können, und da die Differentiation einer unbedingt convergirenden Potenzreihe gliedweise ausgeführt werden kann, so wird

$$\gamma_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} (-1)^\alpha (-n-1)_\alpha\, y^\alpha \lim_{\varepsilon=0} d_\varepsilon^n \left(\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)^\alpha.$$

Die in dieser Reihe noch auftretenden Grenzwerthe sind aber die bekannten, schon von Ubbo Meyer behandelten Coefficienten (Grunert's Archiv, Bd. 9 S. 101 flgg.), welche ich in einer nur wenig abweichenden Weise bezeichnen will nach dem Schema:

$$24)\qquad \left[\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)^{a}\right]_{\varepsilon^n} = \frac{1}{n!}\lim_{\varepsilon=0} d_{\varepsilon}^{n}\left(\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right)^{a} = B_n^{(a)}.$$

Ueber diese Coefficienten, über welche ich bald einige Mittheilungen zu machen gedenke, kann man auch Schlömilch's Compendium der höheren Analysis (II. Bd. 1. Lief.) vergleichen. Dieselben können recurrent berechnet werden nach der Differenzengleichung:

$$25)\qquad (n+a)\,B_n^{(a)} = a\,\{B_n^{(a-1)} + B_{n-1}^{(a)}\},$$

neben welche die Anfangswerthe $B_0^{(a)} = B_0^{(0)} = 1$ und $B_n^{(0)} = 0$ zu stellen sind.

Beachtet man noch, dass $(-n-1)_a = (-1)^a\,(n+a)_a$ ist, so hat man nun:

$$26)\qquad y_n = n!\sum_{a=0}^{a=\infty}(n+a)_a\,B_n^{(a)}\,y^a,$$

oder auch, wenn man allgemein

$$27)\qquad \frac{(n+a)!}{a!}\,B_n^{(a)} = \mathfrak{B}_n^{(a)}$$

setzt:

$$28)\qquad y_n = \sum_{a=0}^{a=\infty}\mathfrak{B}_n^{(a)}\,y^a.$$

Bekanntlich ist $\mathfrak{B}_n^{(a)}$ gleich der Summe aller Combinationen mit Wiederholungen zur n^{ten} Classe aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots a$, wenn diese Combinationen als Producte aufgefasst werden, und nimmt die Differenzengleichung 25) für die letzteren Grössen die einfachere Form an:

$$29)\qquad \mathfrak{B}_n^{(a)} = \mathfrak{B}_n^{(a-1)} + a\,\mathfrak{B}_{n-1}^{(a)},\quad \mathfrak{B}_0^{(a)} = \mathfrak{B}_0^{(0)} = 1,\quad \mathfrak{B}_n^{(0)} = 0.$$

Die Convergenz der Reihen 26) oder 28) für $mod\, y < 1$ kann auch direct aus dem Umstande geschlossen werden, dass $B_n^{(a)}$ eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von a ist, z. B.:

$$30)\qquad \left\{\begin{array}{l} B_1^{(a)} = \dfrac{a}{2},\quad B_2^{(a)} = \dfrac{a\,(3a+1)}{24},\quad B_3^{(a)} = \dfrac{a^2\,(a+1)}{48},\\[2ex] \qquad B_4^{(a)} = \dfrac{a\,(15a^3+30a^2+5a-2)}{5760}\ \text{etc.,}\end{array}\right.$$

dass also das Verhältniss $B_n^{(a+1)} : B_n^{(a)}$ für $a = \infty$ sich der Grenze 1 nähert.

Die gefundene Reihe für y_n gestattet noch eine Umformung, welche sehr merkwürdig scheint. Bekanntlich ist nämlich für einen ganzen positiven Exponenten a:

$$31)\qquad B_n^{(a)} = \frac{(-1)^a}{(n+a)!} \sum_{c=0}^{c=a} (-1)^c (a)_c\, c^{n+a},$$

und wird dieser Ausdruck in 26) eingesetzt, alsdann (nach Auflösung der Binomialcoefficienten in Facultätenquotienten) reducirt, so lässt sich (bedingungsweise) die Ordnung der Summation umkehren und die zweite Summation nach dem Vorbilde der Exponentialreihe ausführen. Man erhält schliesslich:

$$32)\qquad \gamma_n = \sum_{c=0}^{c=\infty} \frac{c^{n+c}}{c!} \left(\frac{y}{e^y}\right)^c.$$

Diese Reihe behält für complexe, wie für reelle Werthe von n einen Sinn. Da der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder:

$$\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c+n} \cdot \frac{y}{e^y},$$

sich für $c=\infty$ der Grenze $e \cdot \frac{y}{e^y}$ nähert, so convergirt die Reihe überhaupt, so lange

$$mod(y\, e^{-y}) < e^{-1}$$

ist; für $y=1$ divergirt dieselbe noch. Aber nicht für alle innerhalb dieses Convergenzgebietes liegenden Werthe von y ist die Reihe äquivalent mit der bisherigen, durch 28) dargestellten Function γ_n, sondern nur für diejenigen Punkte y dieses Gebietes, in welche der Punkt $y=0$ stetig übergehen kann, ohne die Curve

$$mod(y\, e^{-y}) = e^{-1}$$

zu überschreiten. Diese Curve, als deren Gleichung sich, wenn $y=u+iv$ gesetzt wird, in rechtwinkligen Coordinaten u, v ergiebt:

$$u^2 + v^2 = e^{2(u-1)},$$

besitzt einen Doppelpunkt in $y=1$; sie hat die Gestalt einer einfachen Schleife, welche in Bezug auf die u-Achse symmetrisch verläuft. Der Scheitel dieser Schleife ist der Punkt $y=-0{,}28153\ldots$; der geschlossene, durchaus convexe Theil derselben liegt ganz innerhalb des mit dem Radius 1 um den Punkt $y=0$ beschriebenen Kreises, und erreicht die Ordinate v ihren Maximalwerth $0{,}40237\ldots$ für $u=0{,}20319\ldots$; von dem Knotenpunkte $y=1$ an gabelt sich die Curve in zwei immer steiler ansteigende unendliche Aeste, welche dortselbst den stumpfen Winkel $2\, arctg \sqrt{2}$ einschliessen. Convergenzgebiet ist nun die von dem geschlossenen Theile der Schleife eingeschlossene Fläche (für welche stets $u<1$ ist) nebst dem scheitelrecht gegenüberstehenden unendlichen Flächenraum zwischen den gabelförmigen Aesten (für den überall $u>1$ ist); jedoch ist zur Giltigkeit der Gleichung 32) die Bedingung $real.\, y<1$ erforderlich. Nur unter dieser Voraussetzung bezüglich y bestehen auch die späteren Transformationen.

Es gelingt nämlich auch, die Reihen 32) oder 28) durch eine rationale Function von y zu summiren, wie ich jetzt zeigen will.

Da meine schon citirte Formel 23) (Math. Annalen, Bd. 2 S. 330) auch in der Form 21) (*ibid.*) geschrieben werden kann, und da die Derivirten

$$f^{(1)}(x) = 1 - e^x = 1 - y, \quad f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = \ldots = - y$$

sämmtlich lineare Functionen von y sind, so muss der Entwickelungscoefficient γ_n, auf den Nenner $\{f^{(1)}(x)\}^{2n+1}$ gebracht, beziehungsweise mit $(1-y)^{2n+1}$ multiplicirt, eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von y werden, was auch schon aus 22) gefolgert werden könnte. Entwickelt man aber $(1-y)^{2n+1}$ nach dem binomischen Satze, multiplicirt damit die Gleichung 28) und ordnet rechts nach Potenzen von y an, so ergiebt sich erstens aus der Forderung, dass die Coefficienten der höheren Potenzen, als y^n, verschwinden müssen, eine neue Relation der Combinationssummen $\mathfrak{B}$, nämlich:

$$\text{33)} \qquad \sum_{c=0}^{c=a} (-1)^c (2n+1)_c \mathfrak{B}_n^{(a-c)} = 0 \text{ für } a > n,$$

und zweitens bleibt übrig:

$$\text{34)} \quad \begin{cases} (1-y)^{2n+1} \cdot \gamma_n = \sum\limits_{a=0}^{a=n} y^a \sum\limits_{c=0}^{c=a} (-1)^c (2n+1)_c \mathfrak{B}_n^{(a-c)} \\ \qquad = \sum\limits_{c=0}^{c=n} \mathfrak{B}_n^{(c)} y^c \sum\limits_{a=0}^{a=n-c} (-1)^a (2n+1)_a y^a, \end{cases}$$

womit die Reihen 28) oder 32) summirt sind. Darnach lässt sich auch für einen Werth y' von y, dessen reeller Theil $real.y' > 1$ ist, die Summe der Reihe 32) angeben; man braucht nämlich nur in 34) für das explicite erscheinende y denjenigen innerhalb des Convergenzgebietes liegenden Werth zu nehmen, welcher durch die Bedingungen

$$y e^{-y} = y' e^{-y'} \text{ und } real.y < 1$$

bestimmt ist. Bezeichnet man den Coefficienten von y^a in der ersten Reihe 34) zur Abkürzung mit $\vartheta_n^{(a)}$, so dass also nach 33) $\vartheta_n^{(n+a)} = 0$ ist, so lassen sich unter Benutzung der aus 27) nebst 31) hervorgehenden Werthe:

$$\mathfrak{B}_n^{(1)} = 1, \quad \mathfrak{B}_n^{(2)} = 2^{n+1} - 1, \quad \mathfrak{B}_n^{(3)} = \tfrac{1}{2}(3^{n+2} - 2^{n+3} + 1) \text{ etc.}$$

auch die ersten Coefficienten $\vartheta_n^{(a)}$ für jedes n berechnen, und findet man z. B.:

$$\vartheta_n^{(1)} = 1, \quad \vartheta_n^{(2)} = 2^{n+1} - (2n+2),$$

$$\vartheta_n^{(3)} = \tfrac{1}{2}\{3^{n+2} - (2n+3)\,2^{n+2} + 2n(2n+2) + 3\} \text{ etc.};$$

auch bemerkt man, dass allgemein $\vartheta_n^{(n)} = n!$ ist.

Um nun zu unserem ursprünglichen Problem zurückzukehren, haben wir nur $F = 0$, also $x = -\log 2$ oder $y = \frac{1}{2}$ anzunehmen, damit $x_1 = F(z)$ nach Potenzen von z entwickelt erscheine. Da alsdann $f(z) = -\dfrac{z}{2}$ wird, so ergiebt sich als Coefficient von z^n in 21):

$$\alpha_n = \frac{\gamma_{n-1}}{2^n . n!}, \quad \text{also} \quad \beta_n = \frac{1}{2^n} \gamma_{n-1},$$

und darnach sind für die gesuchte Zahl der Complexionen die Ausdrücke gefunden [vergl. 28), 32) und 34)]:

35) IV. $$\beta_{n+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{\mathfrak{B}_n^{(a)}}{2^{n+a}},$$

36) IV. $$\beta_{n+1} = \tfrac{1}{2} \sum_{c=1}^{c=\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{n+c} e^{-\frac{c}{2}}}{c!},$$

37) IV. $$\beta_{n+1} = \sum_{c=0}^{c=n} \mathfrak{B}_n^{(c)} \sum_{a=0}^{a=n-c} (-1)^a (2n+1)_a \, 2^{n-c-a}.$$

Die erste Reihe 35) convergirt wie eine geometrische, deren Quotient $\frac{1}{2}$ ist; jedoch nehmen anfangs die Glieder eine Zeit lang zu. Es ist z. B. für $n = 3$:

$$32 \beta_4 = 832 = \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{a^2 (a+1)^2 (a+2)(a+3)}{3 . 2^{a+3}},$$

eine Reihe, von der man schon 24 Glieder berücksichtigen muss, um die Summe auf eine ganze Einheit genau zu finden.

Bedeutend schlechter convergirt die zweite Reihe 36), nämlich wie eine geometrische, deren Quotient $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = 0{,}96414\ldots$ ist; dieselbe hat jedoch den Vorzug, für alle, auch für complexe Werthe von n einen Sinn zu behalten und also zur vollständigen Explication von β_{n+1} als Function von n dienlich zu sein. Setzt man für

$$\left(\frac{c}{2}\right)^n = e^{n \log \frac{c}{2}}$$

die Exponentialreihe ein, so lässt sich diese Function nach Potenzen von n entwickeln, nämlich:

38) $$\beta_{n+1} = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{\delta_a n^a}{a!}, \quad \text{wo} \quad \delta_a = \tfrac{1}{2} \sum_{c=1}^{c=\infty} \frac{\left(\log \frac{c}{2}\right)^a \left(\frac{c}{2}\right)^c e^{-\frac{c}{2}}}{c!}.$$

Wird der Ausdruck von δ_a (der, beiläufig gesagt, wiederum für jedes a einen Sinn besitzt und nach Potenzen von a entwickelt werden könnte) mit dem von β_{a+1} aus 36) verglichen, so zeigt sich leicht, dass $\delta_a < \beta_{a+1}$, und folgt daraus, dass die erste Reihe 38) mindestens in demselben Bereiche für n convergiren muss, als für z die Reihe $F(z)$; diese Reihe 38) convergirt aber überhaupt in der ganzen Zahlenebene, da die Function β_{n+1} in 36) nebst ihren Derivirten für kein endliches n unendlich werden kann, da sie also eine sogenannte synektische Function ist. Das Gleiche gilt von den Entwickelungscoefficienten δ_n und deren ferneren Entwickelungscoefficienten ohne Ende fort, welche sämmtlich als Functionen ihres Stellenzeigers völlig explicirt erhalten werden und in den Gliedern ihrer Reihenentwickelung mit Potenzen höherer (iterirter) Logarithmen der halben Summationsvariabeln $\log\log\frac{c}{2}$, $\log\log\log\frac{c}{2}$ etc. behaftet sind.

Die Gleichung 37) giebt endlich für ganze positive Argumente den Werth derFunction β_{n+1} in geschlossener Form, als ein Aggregat von ganzen Zahlen. Darnach ist z. B.

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 4, \quad \beta_4 = 26, \quad \beta_5 = 236 \ldots.$$

Der Quotient $\beta_{n+1} : \beta_n$ nähert sich für $n = \infty$ der selbst unendlichen Grenze

$$n\,(2\log 2 - 1).$$

Beträchtlich schwieriger dürfte die Lösung der vorstehenden Probleme für den Fall sein, dass unter den ursprünglichen Elementen einzelne einander gleich sind.

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Tangentialcurven der Kegelschnitte.

(Hierzu Taf. V, Fig. 3 — 8.)

An einen Kegelschnitt seien alle möglichen Tangenten gezogen und auf jeder Tangente werde nach links der Punkt markirt, welcher um t von der der Tangente zugehörigen Ordinate entfernt ist. Der geometrische Ort aller dieser Punkte auf den Tangenten soll bestimmt werden.

Das Coordinatensystem sei rechtwinklig, die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes

$$y = f(x).$$

Sind xy die Coordinaten eines Punktes des Kegelschnittes, so sind die des entsprechenden Punktes des geometrischen Ortes:

$$\xi = x - t,$$
$$\eta = y - t f'(x).$$

Durch Elimination von x und y aus den drei vorhandenen Gleichungen ergiebt sich die Gleichung des geometrischen Ortes.

1. Der gegebene Kegelschnitt sei eine Parabel, ihre Gleichung:

$$y^2 = p\,(x - t);$$

dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\eta = \pm \frac{2\xi\sqrt{p} - t\sqrt{p}}{2\sqrt{\xi}},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \frac{\sqrt{p}\,(2\xi + t)}{4\xi\sqrt{\xi}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \mp \frac{\sqrt{p}\,(2\xi + 3t)}{8\xi^{5/2}}.$$

(Fig. 1.) Die Curve besteht aus zwei zur x-Axe symmetrischen Theilen, welche die y-Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote haben und sich im Punkte $\left(\frac{t}{5}, 0\right)$ schneiden. So lange $x < \frac{t}{2}$ ist, kehren beide Theile der

x-Axe die convexe Seite zu; wächst x über $\frac{t}{2}$ hinaus, so wenden beide derselben die concave Seite zu.

Setzen wir

$$\alpha)\qquad \eta_1 = \pm\sqrt{p\xi},$$

$$\beta)\qquad \eta_2 = \frac{\pm t}{2}\sqrt{\frac{p}{\xi}},$$

so ist

$$\gamma)\qquad \eta = \eta_1 - \eta_2.$$

α) ist die Gleichung einer Parabel, die der oben gegebenen congruent, deren Scheitel aber mit dem 0-Punkte zusammenfällt; η_2 gleich der Ableitung von η_1 multiplicirt mit t repräsentirt eine Curve (Fig. 2), die wir die Ableitungscurve nennen wollen; sie besteht aus zwei zur x-Axe symmetrischen Theilen, die ihr die convexe Seite zukehren und die beiden Axen zu Asymptoten haben.

Construirt man demnach die Parabel α) und die zugehörige Ableitungscurve β) und trägt immer von η_1 das zugehörige η_2 ab, so ergiebt sich stets eine Ordinate des geometrischen Ortes.

Aus γ) folgt, dass

$$\int_0^\xi \eta\, d\xi = \int_0^\xi \eta_1\, d\xi - \int_0^\xi \eta_2\, d\xi = \tfrac{2}{3}\,\eta_1\xi - \eta_1 t,$$

d. h. die Fläche, welche von der y-Axe, einer Ordinate η, der Abscisse ξ und den dazwischenliegenden Theilen der Curve begrenzt wird, ist gleich dem Inhalt eines Theiles der Hilfsparabel, der über der Abscisse ξ liegt, vermindert um das Rechteck, welches die Ordinate η_1 der Hilfsparabel und die Strecke t zu Seiten hat.

2. Die gegebene Curve sei eine Ellipse, ihre Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a(x-t) - (x-t)^2\right\};$$

dann ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\eta = \pm\left\{\frac{b}{a}\sqrt{2a\xi - \xi^2} - t\frac{b}{a}\frac{(a-\xi)}{\sqrt{2a\xi - \xi^2}}\right\},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{b}{a}\left\{\frac{\xi^3 - 3a\xi^2 + 2a^2\xi + a^2 t}{(2a\xi - \xi^2)^{3/2}}\right\},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm ab\,\frac{\xi^2 - \xi(2a - 3t) - 3at}{(2a\xi - \xi^2)^{5/2}}.$$

Die Curve besteht aus zwei Theilen, die symmetrisch zur x-Axe liegen zwischen der y-Axe und der Linie $x = 2a$ (Fig. 3), welche beide Asymptoten derselben sind. Die beiden Theile durchschneiden sich in der x-Axe in dem Punkte

$$[\tfrac{1}{2}(t+2a-\sqrt{t^2+4a^2}),0];$$
bis zu diesem wenden beide der x-Axe die convexe Seite, darüber hinaus die concave Seite zu.

Für

$$\xi=\sqrt{\tfrac{9}{4}t^2+a^2}-(\tfrac{3}{2}t-a)$$
hat jeder Theil einen Beugungspunkt.

Wir setzen:

$$\alpha_1)\qquad \eta_1=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2a\xi-\xi^2},$$

$$\beta_1)\qquad \eta_2=\pm t\frac{b}{a}\frac{(a-\xi)}{\sqrt{2a\xi-\xi^2}},$$

so ist

$$\gamma_1)\qquad \eta'=\eta_1-\eta_2.$$

α_1) ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 4), die der gegebenen congruent ist, deren linker Scheitel aber im 0-Punkte liegt. β_1) ist die Gleichung der zugehörigen Ableitungscurve; diese besteht aus zwei Theilen, welche sich im Punkte $(a,0)$ schneiden und die y-Axe, sowie die Linie $x=2a$ zu Asymptoten haben; sie kehren der x-Axe stets die convexe Seite zu und jeder besitzt im Punkte $(a,0)$ einen Beugungspunkt. Construirt man also diese beiden Hilfscurven α_1) und β_1) und subtrahirt η_2 jedesmal von dem entsprechenden η_1, so erhält man stets eine Ordinate des geometrischen Ortes.

Aus γ_1) folgt ferner:

$$\int_0^a\eta\,d\xi=\int_0^a\eta_1\,d\xi-\int_0^a\eta_2\,d\xi \quad\text{und}\quad \int_0^a\eta\,d\xi=\frac{ab\pi}{4}-tb.$$

Da nun für η_2 ein Zeichenwechsel eintritt, wenn $\xi=a$ wird, so ist der Flächenraum, der von dem geometrischen Orte, der y-Axe und der Linie $x=2a$ eingeschlossen wird, unabhängig von der Grösse t.

Alle Tangentialcurven der Ellipse schliessen demnach mit den beiden Geraden einen constanten Flächenraum ein, und zwar ist dieser gleich $ab\pi$, d. h. gleich dem Inhalte der Ellipse selbst.

Es sei $a=b=r$, so ist

$$\eta=\pm\left\{\sqrt{2r\xi-\xi^2}-t\frac{(r-\xi)}{\sqrt{2r\xi-\xi^2}}\right\}$$
die Gleichung für die Tangentialcurve des Kreises.

Die Gleichungen der beiden Hilfscurven sind in diesem Falle:

$$\eta_1=\sqrt{2r\xi-\xi^2},$$
$$\eta_2=t\frac{(r-\xi)}{\sqrt{2r\xi-\xi^2}}.$$

Der Flächenraum jeder Tangentialcurve des Kreises ist $=r^2\pi$ gleich dem Inhalte des Kreises selbst.

3. Die Gleichung der gegebenen Hyperbel sei

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}[2a(x-t)+(x-t)^2],$$

dann ist die Gleichnng des geometrischen Ortes:

$$\eta=\pm\left\{\frac{b}{a}\sqrt{2a\xi+\xi^2}-t\,\frac{b}{a}\,\frac{(a+\xi)}{\sqrt{2a\xi+\xi^2}}\right\},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\pm\frac{b}{a}\,\frac{(\xi^3+3a\xi^2+2a^2\xi+a^2t)}{(2a\xi+\xi^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\mp ab\,\frac{[\xi^2+\xi(2a+3t)+3at]}{(2a\xi+\xi^2)^{5/2}}.$$

Die Curve besteht aus vier Theilen, die symmetrisch zur x-Axe liegen. (Fig. 5.) Zwei davon liegen auf der rechten Seite der x-Axe und haben dieselbe zur Asymptote; sie kehren bis zu dem Punkte

$$\left(-\frac{2a-t}{2}+\sqrt{\frac{4a^2+t^2}{4}},\ 0\right),$$

wo sie sich schneiden, der x-Axe die convexe Seite, dann die concave Seite zu. Die beiden Theile auf der linken Seite der y-Axe haben die Linie

$$x=-2a$$

zur Asymptote, kehren erst der x-Axe die convexe Seite zu bis

$$\xi=-(a+\tfrac{3}{2}t)-\sqrt{a^2+\tfrac{9}{4}t^2},$$

wo beide Beugungspunkte haben.

Zwischen der y-Axe und der Linie $x=-2a$ befindet sich kein Theil der Curve.

Es sei

α_2) $$\eta_1=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2a\xi+\xi^2},$$

β_2) $$\eta_2=\pm\frac{tb}{a}\,\frac{(a+\xi)}{\sqrt{2a\xi+\xi^2}},$$

also

γ_2) $$\eta=\eta_1-\eta_2.$$

Die Hilfscurven, deren man sich zur Construction bedienen kann, sind demnach eine der gegebenen congruente Hyperbel (Fig. 6), deren rechter Scheitel mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, ferner die Ableitungscurve derselben; letztere besteht aus vier getrennten Theilen, deren Asymptoten

$$x=0,\quad y=\pm\frac{tb}{a},\quad x=-2a$$

sind.

Aus γ_2) folgt endlich:

$$\int_0^\xi \eta\, d\xi = \int_0^\xi \eta_1 d\xi - \int_0^\xi \eta_2\, d\xi = \frac{\xi\eta_1}{2} - \eta_1 t - \frac{ab}{2} t \left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta_1}{b}\right).$$

Magdeburg, im Mai 1869. Dr. Hochheim.

XXIII. Bemerkung über die algebraische Lösbarkeit der Gleichungen.

Es sei

$$1)\qquad F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten endliche, von einander ganz unabhängige Quantitäten sind. Die Wurzeln selbst können dann nicht unendlich werden.

Anders verhält es sich mit ihren partiellen Ableitungen nach den Coefficienten a, etwa nach a_m; denn wird zur Abkürzung $\frac{\partial x}{\partial a_m} = z$ gesetzt, und eliminirt man x aus der Gleichung 1) und der folgenden:

$$z F'(x) + 1 = 0,$$

so ergiebt sich für z die folgende Gleichung m^{ten} Grades:

$$\begin{vmatrix}
1 & a_1 & . & . & a_m & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_1 & . & . & a_m & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & 1 & a_1 & . & a_m \\
mz & (m-1)a_1 z & . & . & a_{m-1}z+1 & 0 & 0 \\
0 & mz & . & . & . & a_{m-1}z+1 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & mz & . & . & . & a_{m-1}z+1
\end{vmatrix} = 0,$$

die durch

$$2)\qquad D z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_{m-1} z + 1 = 0$$

dargestellt sein möge, wo D die Discriminante der Gleichung 1) ist, während die b ganze Functionen der a sind. Ist b_r der erste nicht identisch verschwindende Coefficient, dann werden, wenn sich D der Null nähert, r der Wurzeln der Gleichung 2) unendlich, und zwar wie $\frac{1}{\sqrt[r]{D}}$.

Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung 1) eine algebraische Wurzel habe, sei nun $\sqrt[\mu]{f}$ eine in irgend einen Term des Wurzelausdrucks eingehende einfache Irrationalität, wobei f als ganze Function der a vorausgesetzt werden darf. Dann wird offenbar bei der Differentiirung nach einem der a diese Irrationalität reproducirt, und zwar tritt $f^{1-\frac{1}{\mu}}$ im Nenner auf. Da nun z nur für $D=0$ unendlich werden kann, so muss f bis auf einen numerischen Factor mit D übereinstimmen, ferner, da r eine ganze Zahl ist, $\mu=2$ sein.

Gestattet also die Gleichung 1) eine algebraische Lösung, dann muss die Quadratwurzel aus ihrer Discriminante die in die Lösung eingehende einfache Irrationalität sein.

Bildet man auf ähnliche Weise eine Gleichung für $\frac{\partial z}{\partial a_m}$ wie für z, dann findet man, dass $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2_m}$ für $D=0$ unendlich wird, wie $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$ u. s. f.

Da x für unendliche Werthe der a nicht unendlich wird, kann man der algebraischen Wurzel die Form geben:

$$3)\qquad x=r_0+\sqrt[\lambda_1]{A_1}+\sqrt[\lambda_2]{A_2}+\ldots,$$

wo r_0 eine ganze Function ist, und die A irrationale Functionen irgendwelcher Ordnung bedeuten, in denen aber gar keine Nenner auftreten. Sagt man von einer Function der a, sie sei vom Gewichte g, wenn sie die Eigenschaft hat, durch Substitution von $k^\varrho a_\varrho$ für a_ϱ den k^g-fachen Werth anzunehmen, dann muss x, also auch jeder der Terme r_0, $\sqrt[\lambda_1]{A_1}\ldots$ vom Gewichte 1 sein, wornach z. B. r_0 nur ein numerisches Vielfaches von a_1 sein kann. Die Discriminante ist vom Gewichte $m(m-1)$. Ist daher $\sqrt[n]{P+Q\sqrt{D}}$ eine in $\sqrt[\lambda]{A}$ vorkommende Irrationalität zweiter Ordnung, dann muss, wenn sich $\frac{m(m-1)}{2}+q$ (wo q das Gewicht von Q bezeichnet) in ν Primfactoren zerlegen lässt, $\sqrt[\lambda]{A}$ eine Irrationalität von der Ordnung $\nu+1$ sein.

Nach 2) kann man dadurch einen Ausdruck für z erhalten, dass man in 3) a_ϱ durch $\frac{b_\varrho}{D}$ (speciell a_1 durch 0) ersetzt. Dadurch möge A in A', P in P' u. s. w., D in $D'=\frac{G}{D^{2m-3}}$ übergehen. Aus $\Sigma\sqrt[\lambda]{A'}$ müssen sich dann durch Multiplication mit $\sqrt{D}$ sämmtliche negative Potenzen von D entfernen lassen, und die so erhaltene Function muss mit

$$z\sqrt{D}=\sum\frac{1}{\lambda}\,\frac{\frac{\partial A}{\partial a_m}\cdot\sqrt{D}}{A}\sqrt[\lambda]{A}=\sum\sqrt[\lambda]{B}$$

übereinstimmen. Die B sind ähnlich gebaut wie die A; nur werden statt $\sqrt[n]{P+Q\sqrt{D}}\ldots$ in $\sqrt[\lambda]{B}$ im Allgemeinen andere Irrationalitäten zweiter Ordnung, $\sqrt[n]{R+S\sqrt{D}}\ldots$ vorkommen, und in wenigstens einer der letzteren darf weder R, noch S durch D theilbar sein, weil dann $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2_m}$ nicht wie $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$ unendlich werden könnte.

Schafft man aus $\sqrt[\lambda]{A}$ durch Multiplication mit $\sqrt{D}$ sämmtliche negativen Potenzen von D fort, dann wird sich wenigstens eins der Binome $P' + Q'\sqrt{D'}$ durch Multiplication mit der $\left[\frac{m(m-1)}{2}+q\right]^{\text{ten}}$ Potenz von $\sqrt{D}$ in $R+S\sqrt{D}$ verwandeln, wo keine der ganzen Functionen R und S durch D theilbar ist.

Geht Q für $a_1=0$ in eine Function vom Grade s über und bezeichnet T eine ganze Function, dann kann man

$$Q' = \frac{T}{D^s},$$

also

$$P' + Q'\sqrt{D'} = P' + \frac{T}{D^s}\cdot\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{D^{2m-3}}}$$

setzen. Dies giebt, während $\sqrt{G}$ nothwendig rational ist, für m die Bedingungsgleichung

$$\frac{m(m-1)}{4}+\frac{q}{2}-\frac{2m-3}{2}-s=0 \text{ oder } =\tfrac{1}{2},$$

und wegen $q \geqq 2s$

$$\frac{m(m-1)}{2}-(2m-3)=0 \text{ oder } =1,$$

welche für $m>4$ nicht mehr erfüllt ist. Uebrigens sieht man leicht, dass für kleinere Werthe von $mq=s=0$ sein muss, Q also nur ein numerischer Factor von $\sqrt{D}$ sein kann.

Hadersleben. H. Krey.

XXIV. Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung.

1. Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, bezogen auf ein beliebiges schiefwinkliges Parallelcoordinatensystem, lautet:

1) $ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3+lx^2+fxy+gy^2+hx+iy+k=0.$

Soll der Coordinatenanfangspunkt ein Punkt der Curve sein, so muss

$$k=0,$$

und wenn er überdies ein Doppelunkt der Curve sein soll, so muss auch noch

$$h=0,\ i=0$$

sein, so dass sich die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit einem

Doppelpunkte, wenn man diesen zum Coordinatenanfangspunkt nimmt, in der Form:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 = 0$$

schreiben lässt.

Um den Schnittpunkt der Curve mit der Abscissenaxe zu erhalten, hat man $y = 0$ zu setzen, was die Gleichung

$$ax^3 + ex^2 = 0$$

liefert.

Unterdrückt man den vom Doppelpunkte herrührenden Factor x^2, so bleibt:

$$ax + e = 0,$$

woraus sich

$$x = -\frac{e}{a}$$

ergiebt. Soll nun die Abscissenaxe eine Tangente der Curve im Doppelpunkte sein, so muss

$$e = 0$$

sein. Ebenso ergiebt sich, dass

$$g = 0$$

sein müsse, wenn auch die Ordinatenaxe eine Tangente der Curve im Doppelpunkte sein soll.

Die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte kann demnach, wenn man die Doppelpunktstangenten zu Coordinatenaxen wählt, in die Form:

$$ax^3 + bx^2y + bxy^2 + dy^3 + fxy = 0$$

gebracht werden.

Setzt man $f = -m$, so geht die letzte Gleichung über in

2) $$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = mxy,$$

was also die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist, wenn man die Doppelpunktstangenten zu Coordinatenaxen, also den Doppelpunkt selbst zum Coordinatenanfangspunkt nimmt.

2. Eine durch den Doppelpunkt gehende Gerade T wird die Curve dritter Ordnung ausser im Doppelpunkte noch in einem andern Punkte p schneiden, dessen Coordinaten man leicht, wie folgt, bestimmen kann.

Die Gleichung einer durch den Doppelpunkt gehenden Geraden T ist:

3) $$y = tx,$$

da der Doppelpunkt zugleich der Coordinatenanfangspunkt ist. Führt man den Werth von y aus Gleichung 3) in die Gleichung 2) ein, so ergiebt sich:

$$x^3(a + bt + ct^2 + dt^3) = mx^2t,$$

und wenn man den vom Doppelpunkte herrührenden Factor x^2 unterdrückt, so bleibt

$$x(a + bt + ct^2 + dt^3) = mt,$$

woraus sich für die Abscisse des Punktes p der Werth

$$4)\qquad x=\frac{mt}{a+bt+ct^2+dt^3}$$

ergiebt. Gleichung 3) liefert endlich für die Ordinate von p den Ausdruck:

$$5)\qquad y=\frac{mt^2}{a+bt+ct^2+dt^3}.$$

Die Gleichungen 4) und 5) lehren, dass jedem Werthe von t ein bestimmter Punkt p der Curve dritter Ordnung entspricht, während Gleichung 3) zeigt, dass umgekehrt auch jedem Punkte der Curve ein bestimmter Werth von t entspricht.

Wir wollen der Kürze halber die Grösse t als den Parameter des entsprechenden Curvenpunktes p bezeichnen.

3. Nachdem wir den Begriff des Parameters eines Punktes unserer Curve festgestellt haben, wollen wir zum Beweise des nachstehenden fruchtbaren Satzes schreiten:

„Bildet man das Product der Parameter der $3n$ Schnittpunkte unserer Curve dritter Ordnung mit einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung, so ist es allemal gleich der n^{ten} Potenz einer constanten, nur von der Curve dritter Ordnung abhängigen Grösse."

Ordnet man die allgemeine Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung nach den fallenden Potenzen der Abscisse, so nimmt sie die Form an:

$$\begin{aligned}&A_0x^n+(B_0+B_1y)\,x^{n-1}+(C_0+C_1y+C_2y^2)\,x^{n-2}+\dots\\ 6)\qquad&\dots+(L_0+L_1y+L_2y^2+\dots+L_ny^n)=0.\end{aligned}$$

Um nun die Parameterwerthe der Schnittpunkte dieser Curve n^{ter} Ordnung mit unserer Curve dritter Ordnung zu erhalten, braucht man blos aus 4) und 5) die Werthe von x und y nach 6) einzuführen. Man erhält auf diese Art die Gleichung:

$$\frac{A_0m^nt^n}{u^n}+\left(B_0+B_1\frac{mt^2}{u}\right)\frac{m^{n-1}t^{n-1}}{u^{n-1}}+\dots$$
$$\dots+\left(L_0+L_1\frac{mt^2}{u}+L_2\frac{m^2t^4}{u^2}+\dots+L_n\frac{m^nt^{2n}}{u^n}\right)=0,$$

wobei der Kürze wegen

$$a+bt+ct^2+dt^3=u$$

gesetzt wurde.

Schafft man den Nenner u^n fort, so bleibt:

$$A_0m^nt^n+(B_0u+B_1mt^2)\,m^{n-1}t^{n-1}+\dots$$
$$\dots+(L_0u^n+L_1mu^{n-1}t^2+\dots+L_nm^nt^{2n})=0.$$

Diese Gleichung ist in t vom Grade $3n$, wie es auch sein muss, da eine Curve dritter Ordnung von einer Curve n^{ter} Ordnung in $3n$ Punkten geschnitten wird.

Der Coefficient von t^{3n} ist, wie man leicht erkennt, die Grösse L_0d^n, und das von t freie Glied ist L_0a^n. Wenn man also das Product der sämmtlichen $3n$ Wurzeln der obigen Gleichung kurz mit $\Pi(t)$ bezeichnet, so ist nach einem allgemein bekannten Satze:

$$\Pi(t) = (-1)^{3n} \frac{L_0 a^n}{L_0 d^n},$$

oder also:

$$\Pi(t) = \left(-\frac{a}{d}\right)^n.$$

Bezeichnet man die nur von der Curve dritter Ordnung abhängige Constante $\left(-\frac{a}{d}\right)$ kurz mit k, so ist:

$$7) \qquad \Pi(t) = k^n,$$

wodurch der von uns aufgestellte Satz bewiesen ist.

4. Der vorstehende Satz lässt eine so vielfache und interessante Anwendung zu, dass sich durch ihn der Geometer wie mit einem Schlage im Besitze eines, alle die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte betreffenden Fragen beherrschenden Hilfsmittels befindet.

Es mag uns erlaubt sein, nur einige der zunächstliegenden Anwendungen des besagten Satzes zu machen.

Da man aus der Gleichung 7), wenn $(3n-1)$ von den Parametern bekannt sind, den erübrigenden n^{ten} unzweideutig finden kann, so liefert dies sofort folgenden, auch für Curven dritter Ordnung im Allgemeinen bekannten Satz:

„Alle Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $(3n-1)$ auf einer Curve dritter Ordnung vierter Classe liegende Punkte hindurchgehen, gehen noch durch einen weiteren festen Punkt dieser Curve hindurch.“ *

5. Wenn eine willkürliche Gerade G unsere Curve dritter Ordnung in drei Punkte t_1, t_2, t_3 schneidet, deren drei Parameter durch dieselben drei Buchstaben bezeichnet sein mögen, so ist:

$$8) \qquad t_1 t_2 t_3 = k.$$

Ist die Gerade G eine Tangente, welche im Punkte t_1 berührt, während sie die Curve überdies im Punkte t_2 schneidet, so ist t_2 der Tangentialpunkt von t_1 und es muss nach 8), wenn man statt t_1 und t_2, t_1 setzt und statt t_3 dann t_2:

$$9) \qquad t_1^2 t_2 = k,$$

welche Gleichung die Beziehung zwischen einem Punkte und dessen Tangentialpunkte darstellt.

Aus 9) folgt:

$$t_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{t_2}},$$

---

* Vergl. Cremona's ebene Curven, S. 65 der deutschen Ausgabe.

woraus folgt, dass man aus einem Punkte t_2 der Curve an sie zwei Tangenten legen könne, deren Berührungspunkte $+\sqrt{\frac{k}{t_2}}$ und $-\sqrt{\frac{k}{t_2}}$ sind und welche harmonisch liegen bezüglich der beiden Doppelpunktstangenten.

Wenn G eine Inflexionstangente ist und wenn j der Inflexionspunkt ist, so muss nach 8):

$$j^3 = k$$

sein. Man erhält also drei Inflexionspunkte, nämlich:

$$j_1 = \sqrt[3]{k}, \quad j_2 = \alpha \sqrt[3]{k}, \quad j_3 = \alpha^2 \sqrt[3]{k},$$

wobei $\sqrt[3]{k}$ den absoluten Werth der Cubikwurzel aus k vorstellt und mit α die imaginäre Cubikwurzel der Einheit bezeichnet ist.

Da man

$$j_1 j_2 j_3 = k$$

hat, so folgt sofort der bekannte Satz:

„Die drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte liegen in einer Geraden."

Man könnte noch eine ganze Menge von Anwendungen der Gleichungen 8) und 9) machen, insbesondere auch auf die von Herrn Professor Durège behandelten, der Curve dritter Ordnung um- und eingeschriebenen Vielecke und die Steiner'schen Polygone; doch müssen wir dies dem Leser überlassen.

6. Wenn unsere Curve dritter Ordnung von einem beliebigen Kegelschnitte in den sechs Punkten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 geschnitten wird, so ist nach 7):

$$10) \qquad t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = k^2.$$

Verbindet man die sechs Schnittpunkte paarweise durch Gerade, so erhält man drei neue Schnittpunkte auf der Curve, welche, wie bekannt, in derselben Geraden liegen. Denn die drei Schnittpunkte der Geraden $\overline{t_1 t_2}$, $\overline{t_3 t_4}$, $\overline{t_5 t_6}$ mit der Curve sind resp. $\frac{k}{t_1 \cdot t_2}$, $\frac{k}{t_3 \cdot t_4}$, $\frac{k}{t_5 \cdot t_6}$, und da das Product ihrer Parameter wegen 10) gleich k ist, so folgt nach 8) sofort, dass sie auf einer und derselben Geraden liegen.

Für die neun Schnittpunkte einer beliebigen Curve dritter Ordnung mit unserer Curve dritter Ordnung ist nach 7):

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 = k^3,$$

und wenn also

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 = k^2$$

ist, so muss

$$t_7 t_8 t_9 = k$$

sein, was den bekannten Satz liefert:

„**Liegen von den neun Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung sechs auf einem Kegelschnitt, so liegen die drei übrigen auf einer Geraden.**“

Um die Mittheilung nicht über die Massen auszudehnen, müssen wir uns mit den wenigen Sätzen begnügen, aus denen jedoch hervorgehen dürfte, wie fruchtbar und leicht verwendbar unser Hauptsatz ist.

Prag. Dr. EMIL WEYR.

XXV. Ueber die Anziehung des dreiaxigen Ellipsoides auf einen äusseren Punkt.

Für den Fall, dass die Halbaxen a, b, c eines den äusseren Punkt xyz anziehenden Ellipsoides wenig von einander verschieden sind, habe ich auf S. 216 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift die Werthe der Anziehungscomponenten bis auf Grössen zweiter Ordnung genau angegeben, dabei aber infolge eines Schreibfehlers einen Term weggelassen, der noch zur zweiten Ordnung gehört. Die richtigen Werthe, auf welche mich Herr Dr. Grube in Schleswig aufmerksam gemacht hat und die ich nachträglich verificirt habe, sind

$$X = -\frac{kMx}{r^3}\left\{1 + \tfrac{3}{10}\cdot\frac{2a^2 - b^2 - c^2}{r^2} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{(b^2 - a^2)\,y^2 + (c^2 - a^2)\,z^2}{r^4}\right\},$$

woraus die Werthe von Y und Z durch Buchstabenvertauschung folgen.

SCHLÖMILCH.

XVI.

Die Grundformeln der analytischen Geometrie der Ebene in homogenen Coordinaten.

Von

Dr. RICHARD HEGER,

Gymnasial-Lehrer in Dresden.

Vorbemerkung.

Mit den nachfolgenden Entwickelungen hoffe ich dem mathematischen Publikum insofern einen Dienst zu erweisen, als ich mich bemüht habe, die grundlegenden Rechnungen und Sätze über analytische Geometrie der Ebene in homogenen Coordinaten möglichst vollständig, einfach und knapp darzustellen, so dass ich hoffen darf, es werde durch Berufung auf meine bescheidene Arbeit die Verwendung homogener ebener Coordinaten einige Erleichterung und Abkürzung erfahren.

---

§ 1. Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden in der Ebene.

1. Unter den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P versteht man die senkrechten Abstände dieses Punktes von den drei Seiten g_1, g_2, g_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$. Dieses Dreieck heisst das Coordinatendreieck oder Axendreieck; die Geraden, auf denen seine drei Seiten liegen, heissen die Coordinatenaxen des ebenen homogenen Coordinatensystems.

Die Coordinate x_k ($k=1$ oder 2 oder 3) wird positiv gerechnet, wenn P mit A_k auf derselben Seite von g_k liegt; im Gegenfalle negativ.

2. Bezeichnet Δ die doppelte Fläche des Coordinatendreiecks, so werden für jede Lage von P die Coordinaten des Punktes durch die Gleichung verbunden:

$$1)\qquad g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta.$$

Das Trinom links werde künftig kurz mit D bezeichnet, die Gleichung also mit

$$D = \Delta$$

abgekürzt.

3. **Uebergang von einem Descartes'schen orthogonalen System zu einem homogenen.**

Unbeschadet der Allgemeinheit wird der Ursprung des orthogonalen Systems im Innern des Axendreiecks des homogenen Systems angenommen.

Im orthogonalen Systeme habe g_k die Gleichung

$$a_k x + b_k y - 1 = 0.$$

Der Ursprung des orthogonalen Systems hat von dieser Geraden den Abstand

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}},$$

wobei die Wurzel immer positiv gerechnet werden mag.

Legt man durch den Punkt P mit den Coordinaten xy eine Parallele zu g_k, so hat der Ursprung dieser Parallelen den Abstand

$$e'_k = \frac{a_k x + b_k y}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Die Wurzel werde auch hier positiv gerechnet. Dann wird

$$e'_k \lesseqgtr 0,$$

je nachdem die durch den Ursprung zu g_k gezogene Parallele P von g_k trennt oder nicht.

Hieraus folgt, dass für jede Lage von P

$$x_k = e_k - e'_k = \frac{1 - a_k x - b_k y}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Hieraus folgen die Transformationsformeln:

$$2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - a_1 x - b_1 y}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ x_2 &= \frac{1 - a_2 x - b_2 y}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ x_3 &= \frac{1 - a_3 x - b_3 y}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}. \end{aligned} \right.$$

Dividirt man die rechten Seiten von 2) Glied für Glied durch die Wurzeln und löst die drei linearen Gleichungen nach 1, x und y auf, so erhält man aus der Lösung für 1 nach gehöriger Reduction die Gleichung 1); die Lösungen nach x und y geben diese Coordinaten als **homogene lineare Functionen der homogenen Coordinaten.**

Die Transformation aus orthogonalen in homogene Systeme geschieht demnach durch lineare, die reciproke Transformation durch homogene lineare Substitutionen.

4. Um von einem homogenen System in ein anderes überzugehen, denke man sich beide auf dasselbe orthogonale System bezogen. Man setze zunächst voraus, dass beide Axendreiecke ein Flächenstück gemein haben, und lege den Ursprung des orthogonalen Systems in dieses Flächenstück. Dann stelle man die Formeln 2) für beide Systeme auf und löse die zweimal drei Gleichungen nach $1, x, y$. Indem man nun diese Lösungen paarweise einander gleichsetzt, erhält man drei Gleichungen, auf deren linken Seiten homogene lineare Functionen der Coordinaten des einen Systems, auf deren rechten homogene lineare Functionen des andern Systems stehen. Hieraus folgt:

Die Transformation aus einem homogenen System in ein anderes homogenes geschieht durch homogene lineare Substitutionen.

Dass die obige Einschränkung auf diesen Satz einflusslos ist, erkennt man leicht. Denn wenn die beiden Axendreiecke sich ausschliessen, so construire man ein Dreieck, welches keines der beiden ausschliesst, und transformire aus dem ursprünglichen Dreieck in dies Hilfsdreieck und dann aus dem Hilfsdreieck in das neue Dreieck.

5. Sind h_1, h_2, h_3 die von den gleichbezifferten Ecken auf die gleichbezifferten Gegenseiten des Axendreiecks gefällten Höhen, so sind die Coordinaten der Eckpunkte

$$\begin{array}{llll} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \text{für} & & & \\ A_1: & h_1 & 0 & 0 \\ A_2: & 0 & h_2 & 0 \\ A_3: & 0 & 0 & h_3. \end{array}$$

Sei ϱ der Radius des vom Dreieck umschlossenen eingeschriebenen Kreises, O sein Centrum, S der Schwerpunkt des Dreiecks, so sind die Coordinaten

$$\begin{array}{llll} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \text{für} & & & \\ O: & \varrho & \varrho & \varrho \\ S: & \frac{1}{3}h_1 & \frac{1}{3}h_2 & \frac{1}{3}h_3. \end{array}$$

6. **Das Dreipunktsystem.** Unter den homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden T versteht man die Quotienten aus den Abständen derselben von den Ecken A_1, A_2, A_3 des Coordinatendreiecks und dem Abstande von dem willkürlich in der Ebene angenommenen Fixpunkte C. Man giebt u_k das positive Vorzeichen, wenn A_k und C auf derselben Seite von T liegen; im Gegenfalle das negative. Die drei Punkte A_1, A_2, A_3 heissen Hauptpunkte des Systems.

7. **Zum Uebergange aus einem orthogonalen Systeme in ein homogenes** seien die orthogonalen Coordinaten der Hauptpunkte gegeben, und zwar $\alpha_k \beta_k$ für A_k; die orthogonalen Coordinaten der Geraden T, d. i. die reciproken Axenabschnitte derselben seien u und v. Die

Coordinaten von C in Bezug auf A_1, A_2, A_3 seien r_1, r_2, r_3. Setzt man nun, was unbeschadet der Allgemeinheit geschieht, das Centrum C als Ursprung des orthogonalen Systems voraus, so liefert die Entwickelung in 3):

$$3)\qquad \begin{aligned} u_1 &= 1 - \alpha_1 u - \beta_1 v, \\ u_2 &= 1 - \alpha_2 u - \beta_2 v, \\ u_3 &= 1 - \alpha_3 u - \beta_3 v. \end{aligned}$$

8. Löst man diese Gleichungen nach 1) auf, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ u_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ u_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung liefert:

$$4)\qquad g_1 r_1 \,.\, u_1 + g_2 r_2 \,.\, u_2 + g_3 r_3 \,.\, u_3 = \varDelta.$$

Diese Gleichung erfüllen die drei homogenen Coordinaten jeder Geraden; das Trinom links werde durch $\mathfrak{U}$ bezeichnet, die Gleichung 4) also durch

$$\mathfrak{U} = \varDelta$$

abgekürzt.

9. Alle Geraden, welche eine Coordinate gemein haben, für welche also z. B. u_k ein und denselben gegebenen Werth hat, enveloppiren einen Punkt P. Derselbe liegt auf $A_k C$ und theilt die Strecke $A_k C$ im Verhältniss

$$A_k P : PC = -u_k.$$

Wählt man nun drei Zahlen u'_1, u'_2, u'_3, welche 4) erfüllen, und construirt die Gerade, welche $A_1 C$ im Verhältniss $(-u'_1)$, $A_2 C$ im Verhältniss $(-u'_2)$ theilt, so sind u'_1 und u'_2 die auf A_1 und A_2 bezüglichen Coordinaten der Geraden, und die dritte Coordinate derselben kann von u'_3 nicht verschieden sein. Hieraus folgt: Durch drei Zahlen u_1, u_2, u_3, welche die Gleichung 4) erfüllen, ist stets eine Gerade eindeutig bestimmt, welche diese Zahlen zu Coordinaten hat.*

10. Die Transformation aus einem orthogonalen System in ein homogenes, oder aus einem homogenen Systeme in ein anderes erfolgt durch homogene lineare Substitutionen.

11. Die Coordinaten der Seiten des Axendreiecks sind

für

$$\begin{array}{cccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ A_2 A_3: & \dfrac{h_1}{r_1} & 0 & 0 \\ A_3 A_1: & 0 & \dfrac{h_2}{r_2} & 0 \\ A_1 A_2: & 0 & 0 & \dfrac{h_3}{r_3}. \end{array}$$

* Den Umstand, dass Gleiches von den Plücker'schen Geradencoordinaten nicht gilt, darf ich zu Gunsten der von mir vorgeschlagenen Coordinaten auslegen.

Jede durch das Centrum C gehende Gerade hat zu Coordinaten:

$$u_1 = \pm\infty,\quad u_2 = \pm\infty,\quad u_3 = \pm\infty.$$

§ 2. Gleichung der Geraden und des Punktes in homogenen Coordinaten des Punktes und der Geraden.

1. **Gleichung der Geraden in homogenen Punktcoordinaten.**

Die Gleichung einer Geraden T im orthogonalen Systeme sei:

$$(T \equiv)\; ax + by - 1 = 0.$$

Unter Benutzung der früheren Bezeichnungen hat man für die Punkte von T die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,x_1 + a_1x + b_1y - 1 &= 0,\\ \sqrt{a_2^2+b_2^2}\,x_2 + a_2x + b_2y - 1 &= 0,\\ \sqrt{a_3^2+b_3^2}\,x_3 + a_3x + b_3y - 1 &= 0,\\ ax + by - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt für x_1, x_2, x_3:

$$\begin{vmatrix}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,.\,x_1 & a_1 & b_1 & 1\\ \sqrt{a_2^2+b_2^2}\,.\,x_2 & a_2 & b_2 & 1\\ \sqrt{a_3^2+b_3^2}\,.\,x_3 & a_3 & b_3 & 1\\ 0 & a & b & 1\end{vmatrix} = 0,$$

d. i.: **die Gleichung der Geraden in homogenen Punktcoordinaten lässt sich in die Form bringen:**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

worin a_1, a_2, a_3 drei die Gerade charakterisirende Constanten sind.

Ebenso leicht folgt: Alle Punkte, deren Coordinaten der mit drei willkürlichen Constanten gebildeten homogenen linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

genügen, liegen auf einer durch diese Constanten eindeutig bestimmten Geraden.

2. Die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte P' und P'' mit den Coordinaten x'_k und x''_k geht, hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x'_1 & x'_2 & x'_3\\ x''_1 & x''_2 & x''_3\end{vmatrix} = 0.$$

3. **Lehrsatz.** **Jeder Punkt P, deren Coordinaten x_k aus denen zweier gegebenen Punkte P' und P'' mit den Coordinaten x'_k und x''_k abgeleitet werden nach**

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k,\quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

liegt auf der Geraden $P'P''$.

Beweis. Die so berechneten drei Werthe x_1, x_2, x_3 sind in der That die Coordinaten eines Punktes, denn sie erfüllen die Gleichung

$$D = \Delta.$$

Setzt man sie in die Gleichung der Geraden $P'P''$ ein, so erhält man links:

$$\begin{vmatrix} \lambda' x'_1 + \lambda'' x''_1 & \lambda' x'_2 + \lambda'' x''_2 & \lambda' x'_3 + \lambda'' x''_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet identisch.

4. Transformirt man die Coordinaten von P, P', P'' in ein neues System und sind hier die Coordinaten ξ_k, ξ'_k, ξ''_k, so haben die Transformationsformeln folgende allgemeine Gestalt:

$$\xi'_k = A_k x'_1 + B_k x'_2 + C_k x'_3,$$
$$\xi''_k = A_k x''_1 + B_k x''_2 + C_k x''_3,$$
$$\xi_k = A_k x_1 + B_k x_2 + C_k x_3.$$

Hieraus folgt:

$$\xi_k = \lambda' \xi'_k + \lambda'' \xi''_k.$$

Hiernach haben die Coefficienten λ' und λ'' eine vom Coordinatensystem unabhängige, nur von der gegenseitigen Lage der drei Punkte abhängige Bedeutung.

Um dieselbe zu ermitteln, nehmen wir ein hierfür möglichst geeignetes Coordinatensystem, in welchem P' auf A_1, P'' auf A_2 liegt. Die Coordinaten der drei Punkte sind hier

für

	x_1	x_2	x_3
P'	h_1	0	0
P''	0	h_2	0
P	$\lambda' h_1$	$\lambda'' h_2$	0.

Es verhält sich nun

$$P''P : P''P' : PP' = \lambda' : 1 : \lambda'',$$

wenn die Strecken AB mit gleichen Vorzeichen behaftet werden, welche vom Punkte A zum Punkte B in gleicher Richtung durchlaufen werden.

Hiernach ist P derjenige Punkt, welcher die Strecke $P'P''$ im Verhältniss

$$P''P : PP' = \lambda' : \lambda''$$

theilt, wobei ein positives Verhältniss dem innern, ein negatives dem äussern Theilpunkte zugehört.

Hieraus folgt: Die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden $P'P''$ können unter der Form

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k$$

dargestellt werden.

5. Das Punktenpaar PP''' ist dem Paare $P'P''$ harmonisch conjugirt, sobald

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$x'''_k = \mu' x'_k + \mu'' x''_k, \quad \mu' + \mu'' = 1$$

und

$$\lambda' : \lambda'' = -\mu' : \mu''.$$

6. Lehrsatz. Die Coordinaten jedes Punktes der Ebene können unter der Form

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k + \lambda''' x'''_k, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1$$

dargestellt werden, wenn x'_k, x''_k, x'''_k die Coordinaten dreier nicht in derselben Geraden gelegenen Punkte sind.

Beweis. Man verbinde P''' mit P und schneide durch $P''P'$. Der Schnittpunkt Π habe die Coordinaten ξ_k. Man kann nun die vier Coefficienten

$$\lambda''', \mu, \lambda'', \lambda'$$

immer so wählen, dass zugleich

a) $$\mu : \lambda''' = P'''P : P\Pi, \quad \mu'' + \lambda''' = 1,$$

b) $$\lambda'' : \lambda' = P'\Pi : \Pi P'', \quad \lambda'' + \lambda' = \mu''.$$

Alsdann ist nach den vorigen Nummern:

$$x_k = \lambda''' x'''_k + \mu \xi_k,$$
$$\xi_k = \frac{\lambda''}{\mu} x''_k + \frac{\lambda'}{\mu} x'_k,$$

woraus folgt:

$$x_k = \lambda''' x'''_k + \lambda'' x''_k + \lambda' x'_k,$$

wie zu beweisen war.

Die Bestimmung der λ ist eindeutig, es wird also unter dieser Form jeder Punkt, und zwar nur auf eine Weise dargestellt.

7. Die Coordinaten der Spuren der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

auf den drei Coordinatenaxen ergeben sich aus den Gleichungspaaren:

für die Spur auf g_1: $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta$;

für die Spur auf g_2: $a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0$, $g_3 x_3 + g_1 x_1 = \Delta$;

für die Spur auf g_3: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, $g_1 x_1 + g_2 x_2 = \Delta$.

Die Coordinaten des Durchschnitts der zwei Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0$$

sind die Lösungen des Systems

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0,$$
$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta.$$

8. Lehrsatz. Bei dieser homogenen Coordinatenbestimmung giebt es eine und nur eine homogene lineare Function,

deren zugehörige Variabelnsysteme sämmtlich unendlich grosse Werthe erhalten. Man hat also für Rechnungen mit homogenen Dreieckscoordinaten anzunehmen, dass es eine und nur eine Gerade giebt, deren Punkte sämmtlich unendlich fern sind.

Beweis. Sei, um dies zu beweisen,

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden,

$$T_\infty \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden mit lauter unendlich fernen Punkten, so muss das System

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0,$$
$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \varDelta$$

für beliebige Werthe von a_1, a_2, a_3 unendlich grosse Lösungen geben.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist

$$A_1 : A_2 : A_3 = g_1 : g_2 : g_3,$$

wie zu beweisen war.

Die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist demnach

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = 0.$$

9. Lehrsatz. Sind T' und T'' die linken Seiten der wie gewöhnlich auf Null reducirten Gleichungen zweier Geraden, so wird die linke Seite einer beliebig durch den Schnittpunkt $T'T''$ gelegten Geraden dargestellt durch

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'',$$

worin μ' und μ'' zwei Constante bedeuten, deren Verhältniss die Gerade T eindeutig charakterisirt.

Beweis. Sollen die Geraden

$$T = 0, \quad T' = 0, \quad T'' = 0$$

einen gemeinsamen Punkt enthalten, so muss die Determinante des Systems dieser drei Gleichungen verschwinden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hierfür ist die nothwendige und ausreichende Bedingung:

$$a_k = \mu' a'_k + \mu'' a''_k,$$

wie zu beweisen war.

10. Lehrsatz. Sind $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, so lässt sich die linke Seite der Gleichung einer jeden Geraden aus den linken Seiten der Gleichungen der gegebenen Geraden ableiten durch

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''',$$

wobei T durch das Verhältniss $\mu' : \mu'' : \mu'''$ eindeutig bestimmt ist.

Soll diese Dartellung möglich sein, so müssen sich die μ so bestimmen lassen, dass

$$a_k = \mu' a'_k + \mu'' a''_k + \mu''' a'''_k; \quad k = 1, 2, 3.$$

Dies ist eindeutig und für endliche Werthe von μ', μ'', μ''' möglich, sobald

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. sobald die gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen.

11. Soll die Gerade $T=0$ mit $T'=0$ parallel gehen, so ist ausreichend und nothwendig, dass T durch den Schnittpunkt $T'\,T_\infty$ geht; es muss sich also T unter der Form darstellen lassen:

$$T = \mu' T' + \mu'' T_\infty.$$

Soll T überdies einen gegebenen Punkt x'_k enthalten, so müssen μ', μ'' so bestimmt werden, dass

$$\mu'(a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3) + \mu''(g_1 x'_1 + g_2 x'_2 + g_3 x'_3) = 0,$$

d. i.:

$$\mu' : \mu'' = -\Delta : T'_1,$$

wenn T'_1 abkürzend für $a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3$ gesetzt wird. Also ist die Gleichung der Parallelen zu T' durch P':

$$(a_1 \Delta - g_1 T'_1)\,x_1 + (a_2 \Delta - g_2 T'_1)\,x_2 + (a_3 \Delta - g_3 T'_1)\,x_3 = 0.$$

12. Gleichung des Punktes in homogenen Geradencoordinaten.

Die Gleichung des Punktes in gewöhnlichen Geradencoordinaten sei

$$\alpha u + \beta v - 1 = 0.$$

Man füge hierzu die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} u_1 + \alpha_1 u + \beta_1 v - 1 &= 0, \\ u_2 + \alpha_2 u + \beta_2 v - 1 &= 0, \\ u_3 + \alpha_3 u + \beta_3 v - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Das Zusammenbestehen dieser vier Gleichungen bedingt das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ u_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ u_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung des Punktes in homogenen Coordinaten kann demnach als homogene lineare Function der Coordinaten dargestellt werden. Sie werde künftig in der Form benutzt:

$$(P \equiv)\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

worin α_1, α_2, α_3 drei Constanten sind, welche den Punkt eindeutig bestimmen.

13. Die Gleichung des gemeinsamen Punktes der beiden Geraden T' und T'' mit den Coordinaten u'_k und u''_k ist:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

14. **Lehrsatz:** Jede Gerade T, deren Coordinaten aus denen zweier gegebener Geraden T', T'' durch die Formeln abgeleitet werden können:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k; \quad k = 1, 2, 3; \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

geht durch den Punkt $T' T''$ (so werde immer der Schnittpunkt von T' und T'' bezeichnet).

Beweis. Die so berechneten u_1, u_2, u_3 erfüllen die Gleichung

$$\mathfrak{U} = \Delta,$$

sind also in der That drei Coordinaten einer Geraden. Sie erfüllen die Gleichung des Punktes $T' T''$ (13).

15. Da die Transformation aus einem homogenen Systeme in ein anderes durch homogene lineare Substitutionen erfolgt, so ist, wenn $T\,T'\,T''$ (aus Nr. 14) in einem beliebigen System die Coordinaten $\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{u}'_k$, $\mathfrak{u}''_k$ haben:

$$\mathfrak{u}_k = \lambda' \mathfrak{u}'_k + \lambda'' \mathfrak{u}''_k.$$

Die Coefficienten λ', λ'' haben mithin eine vom System unabhängige, von der gegenseitigen Lage der drei Geraden allein abhängige Bedeutung.

Um dieselbe zu erkennen, bezeichnen wir die dem Fixpunkte zugewandten Seiten der Geraden als positive Seiten und wählen ein Axendreieck, in welchem A_3 auf dem Schnittpunkte $T' T''$ und A_1 auf T'', A_2 auf T' willkürlich, doch so liegen, dass sich C im Innern des Dreiecks befindet.

Die Coordinaten von T' und T'' sind demnach:

$$\begin{array}{llll} & & u_1 \quad u_2 \quad u_3 & \\ \text{für} & T': & \dfrac{h_1}{r'} \quad 0 \quad 0, & \\ \text{für} & T'': & 0 \quad \dfrac{h_2}{r''} \quad 0, & \end{array}$$

mithin sind die Coordinaten für T:

$$u_1 = \lambda' \cdot \frac{h_1}{r'}, \quad u_2 = \lambda'' \cdot \frac{h_2}{r''}.$$

Bezeichnet allgemein $A^\wedge B$ einen spitzen oder stumpfen, von zwei Geraden A, B gebildeten Winkel, so gilt zunächst ohne Rücksicht auf Vorzeichen:

$$r u_1 = g_2 \sin T^\wedge T'',$$
$$r u_2 = g_1 \sin T^\wedge T',$$

wenn r den Abstand des Fixpunktes von T bezeichnet. Hiernach ist:

$$\sin T^\wedge T'' : \sin T^\wedge T'' = \frac{\lambda'}{r'} : \frac{\lambda''}{r''}.$$

Bezeichnet man den von den positiven Rändern von $T' T''$ begrenzten Winkel als inneren, sein Supplement als äusseren Winkel der beiden Geraden, so findet man rücksichtlich der Vorzeichen die Regel:

Ist das Theilverhältniss $\lambda' : \lambda''$ positiv oder negativ, so theilt T den äusseren oder beziehentlich äusseren Winkel $T' T''$, und umgekehrt.

16. Werden die Coordinaten des Paares $T T'''$ aus denen von $T' T''$ abgeleitet durch

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$u'''_k = \mu' u'_k + \mu'' u''_k, \quad \mu' + \mu'' = 1,$$

und ist

$$\lambda' : \lambda'' = - \mu' : \mu'',$$

so bilden die vier Geraden ein harmonisches Bündel, und zwar ist das Paar $P P'''$ dem Paare $P' P''$ harmonisch conjugirt.

17. **Lehrsatz.** Die Coordinaten jeder Geraden T lassen sich aus den Coordinaten dreier Geraden T', T'', T''', die nicht denselben Punkt enthalten, nach den Formeln ableiten:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1.$$

Beweis. Zur Bestimmung der λ hat man die Gleichungen:

$$u_1 = \lambda' u'_1 + \lambda'' u''_1 + \lambda''' u'''_1,$$
$$u_2 = \lambda' u'_2 + \lambda'' u''_2 + \lambda''' u'''_2,$$
$$u_3 = \lambda' u'_3 + \lambda'' u''_3 + \lambda''' u'''_3.$$

Diese liefern endliche und eindeutige Werthe für die λ, da ja nach der Voraussetzung die Determinante dieses Systems nicht verschwindet.

18. Die Gleichung des auf der Geraden T' gelegenen unendlich fernen Punktes sei

$$\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 = 0.$$

Dann muss

$$\alpha'_1 u'_1 + \alpha'_2 u'_2 + \alpha'_3 u'_3 = 0.$$

Ist e der Abstand irgend einer zu T' parallelen Geraden T von T', so hat T die Coordinaten

$$u_k = \frac{r' u'_k + e}{r' + e}.$$

Setzt man dies in die Gleichung des unendlich fernen Punktes ein, so erhält man nach einfacher Reduction:

$$r' (\alpha'_1 u'_1 + \alpha'_2 u'_2 + \alpha'_3 u'_3) + (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\, e = 0.$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

19. **Lehrsatz:** Sind $P' P''$ die linken Seiten der Gleichungen zweier Punkte, so kann die linke Seite der Gleichung jedes Punktes P der Geraden $P' P''$ auf die Form gebracht werden:

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'',$$

die Gleichung von P also auf die Form

$$(P \equiv)\ \mu' P' + \mu'' P'' = 0.$$

20. Lehrsatz: Sind P', P'', P''' die linken Seiten der Gleichungen dreier, nicht in derselben Geraden gelegenen Punkte, so kann die linke Seite der Gleichung eines beliebigen Punktes P auf die Form gebracht werden:

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''',$$

die Gleichung von P also auf die Form

$$(P \equiv)\ \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''' = 0.$$

Durch die μ ist in beiden Fällen der Punkt eindeutig bestimmt.

§ 3. Vermischte Aufgaben über Punkt und Gerade.

1. Für die nachfolgenden Rechnungen ist es zum Theil vortheilhaft, sich der Plücker'schen Geradencoordinaten zu bedienen.

Unter den Plücker'schen Coordinaten einer Geraden versteht man die Abstände $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ der variabeln Geraden von den drei Ecken des Axendreiecks. Dabei wollen wir die Vorzeichen ebenso bestimmen, wie bei den hier verwendeten homogenen Geradencoordinaten. Die Plücker'schen Coordinaten werden unter Benutzung der bisherigen Bezeichnungen aus orthogonalen Coordinaten durch die Formeln abgeleitet:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{1 - \alpha_1 u - \beta_1 v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\mathfrak{u}_2 = \frac{1 - \alpha_2 u - \beta_2 v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\mathfrak{u}_3 = \frac{1 - \alpha_3 u - \beta_3 v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Man gewinnt die reciproken Transformationsformeln, indem man rechter Hand die Trinomien Glied für Glied durch den gemeinsamen Nenner $\sqrt{u^2 + v^2}$ theilt, die Gleichungen nach

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}},\quad \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

auflöst und die letzten beiden Lösungen durch die erste dividirt; dann erscheinen u, v als Quotienten homogener linearer Functionen der Plücker'schen Coordinaten.

Um aus einem Plücker'schen System in ein anderes zu transformiren, beziehe man beide auf dasselbe orthogonale System und setze die Lösungen für

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

aus beiden homogenen Systemen berechnet, einander gleich.

Man erhält dann für den Uebergang aus einem Plücker'schen System ins andere homogene lineare Substitutionen.

Aus der Abhängigkeit der Lösungen für

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

erhält man für die drei Plücker'schen Coordinaten einer Geraden die Gleichung:

$$g_1^2 u_1^2 + g_2^2 u_2^2 + g_3^2 u_3^2 - 2 g_1 g_2 \cos\gamma_3 u_1 u_2 - 2 g_2 g_3 \cos\gamma_1 u_2 u_3 \\ - 2 g_3 g_1 \cos\gamma_2 u_3 u_1 = \Delta^2$$

2. Bestimmung des Abstandes eines Punktes P' von einer Geraden T', deren Gleichung in Punktcoordinaten gegeben ist.

Sei

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Geraden. Setzt man in T die Coordinaten eines nicht auf der Geraden T gelegenen Punktes P' ein, so erhält T einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man die Gleichung $T=0$ und die Coordinaten von P in ein anderes Dreiecksystem, so geht

$$T=0 \text{ in } \mathrm{T}=0,\quad T(x'_k) \text{ in } \mathrm{T}(\xi'_k)$$

über. Da nun $\mathrm{T}(\xi'_k)$ aus $T(x'_k)$ nur dadurch entstanden ist, dass man für x_k gleich grosse Werthe, durch ξ_k und die neuen Constanten ausgedrückt, eingesetzt hat, so hat sich der Zahlenwerth von $T(x_k)$ beim Uebergang in die neue Form $\mathrm{T}(\xi'_k)$ nicht geändert.

Der Werth, welchen das Polynom der Gleichung einer Geraden erhält, wenn man die Coordinaten eines beliebigen Punktes hineinsetzt, ändert sich demnach beim Uebergang in ein neues System nicht.

Denken wir uns nun die Transformation in ein neues System ausgeführt, welches die Axen x_1 und x_2 des alten Systems, statt der Axe x_3 dagegen die Gerade T enthält, so ist die Gleichung derselben im neuen System:

$$A \xi_3 = 0.$$

Also gilt für jeden Punkt P', wenn ξ_3 der Abstand desselben von T ist:

$$A \xi'_3 = a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3.$$

Wenden wir diese Formel auf die drei Eckpunkte des Coordinatendreiecks an, bezeichnen mit u_k die Plücker'schen Coordinaten von T und beachten, dass für alle Punkte auf derselben Seite von T das Polynom T ein und dasselbe Vorzeichen erhält, so erhalten wir

$$u_1 = \frac{a_1 h_1}{A},\quad u_2 = \frac{a_2 h_2}{A},\quad u_3 = \frac{a_3 h_3}{A}.$$

Setzt man diese Coordinaten in die Endgleichung von 1) ein, so erhält man:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 \cos\gamma_3 - 2 a_2 a_3 \cos\gamma_1 - 2 a_3 a_1 \cos\gamma_2.$$

Da nach unseren Voraussetzungen der Abstand vom Fixpunkte immer positiv zu nehmen ist, so hat man für A die positive oder negative Wurzel zu nehmen, je nachdem

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \gtrless 0;$$

denn dann wird in der That stets

$$(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) : A > 0.$$

Erweitert man die Gleichung einer Geraden mit ± 1, je nachdem $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \gtrless 0$, und hierauf mit der positiven Wurzel aus A^2, so entsteht eine neue Gleichung, wieder von der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

in welcher jedoch $A=1$ ist. Die so reducirte Form der Gleichung einer Geraden heisse die **Normalform der Gleichung der Geraden.**

Ist $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden in der Normalform, so sind die Plücker'schen Coordinaten derselben:

$$\mathfrak{u}_k = a_k h_k.$$

Der Abstand r des Fixpunktes von dieser Geraden ist:

$$r = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3.$$

Die homogenen Coordinaten dieser Geraden sind also:

$$u_k = \frac{a_k h_k}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3}.$$

Der Abstand e eines beliebigen Punktes von dieser Geraden ist:

$$e = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

3. **Zur Transformation aus einem homogenen Punktcoordinatensystem ins andere** seien die Gleichungen der neuen Axen in Bezug aufs alte System und zwar in der Normalform gegeben; der Fixpunkt werde im Innern des neuen Dreiecks angenommen. Es seien dieselben für die neue

$$\begin{aligned}
X_1\text{-Axe:}\quad & a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0,\\
X_2\text{-Axe:}\quad & a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 = 0,\\
X_3\text{-Axe:}\quad & a'''_1 x_1 + a'''_2 x_2 + a'''_3 x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Dann sind die Transformationsformeln die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}
X_1 &= a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3,\\
X_2 &= a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3,\\
X_3 &= a'''_1 x_1 + a'''_2 x_2 + a'''_3 x_3.
\end{aligned}$$

4. **Bestimmung des Abstandes einer Geraden T' von einem Punkte P, dessen Gleichung in Geradencoordinaten gegeben ist.**

Setzt man die Coordinaten u'_k einer Geraden in die Gleichung eines Punktes ein, so erhält dieselbe im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man zu einem neuen Dreipunktsystem, so bleibt dieser Werth ungeändert, da ja für die Coordinaten dabei ihnen gleiche Werthe eingesetzt werden. Wählt man nun ein solches neues System, in welchem P selbst Coordinatenpunkt ist, so ist die Gleichung von P im neuen System:

$$A U = 0,$$

wenn mit U die auf P bezogenen Coordinaten verstanden werden. Es ist mithin

$$A U' = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3.$$

Wendet man diese Formeln auf die Seiten des Coordinatendreiecks an und bezeichnet mit x_1, x_2, x_3 die Coordinaten von P, so erhält man:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 h_1}{A}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 h_2}{A}, \quad x_3 = \frac{\alpha_3 h_3}{A}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \varDelta$$

ein, so erhält man

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Also ist

$$U' = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} (\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3).$$

Hiernach erscheint es zweckmässig, die Gleichung eines Punktes so zu kürzen, dass in der gekürzten Form

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1;$$

diese Form möge als die Normalform der Gleichung eines Punktes bezeichnet werden.

Die Normalform der in beliebig erweiterter Form gegebenen Gleichung des Punktes

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

lautet demnach

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_3 = 0.$$

Ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

die Gleichung eines Punktes in der Normalform, so hat die Linie T', deren Coordinaten u'_1, u'_2, u'_3 sind, den Abstand von P:

$$e = r U' = r (\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3).$$

5. Zur Transformation aus einem Dreipunktsystem in ein anderes seien die Gleichungen der neuen Coordinatenpunkte in Bezug auf das alte System in der Normalform gegeben, und zwar

für den Punkt U_1: $\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 = 0$,
„ „ „ U_2: $\alpha''_1 u_1 + \alpha''_2 u_2 + \alpha''_3 u_3 = 0$,
„ „ „ U_3: $\alpha'''_1 u_1 + \alpha'''_2 u_2 + \alpha'''_3 u_3 = 0$.

Alsdann sind die Transformationsformeln für u_k die Lösungen des Systems

$$U_1 = \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3,$$
$$U_2 = \alpha''_1 u_1 + \alpha''_2 u_2 + \alpha''_3 u_3,$$
$$U_3 = \alpha'''_1 u_1 + \alpha'''_2 u_2 + \alpha'''_3 u_3,$$

wobei U_k die Coordinaten im neuen System bezeichnen.

6. Ein Punkt P mit den Coordinaten x_k habe die Normalgleichung

$$(P \equiv)\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

so ist

$$x_k = \alpha_k h_k, \quad \alpha_k = \frac{x_k}{h_k};$$

also ist die Gleichung von P in der Normalform:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1 + \frac{x_2}{h_2} u_2 + \frac{x_3}{h_3} u_3 = 0.$$

Eine Gerade T mit den Coordinaten u_k habe die Gleichung in Normalform:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so ist

$$a_k h_k = r u_k, \quad a_k = \frac{r u_k}{h_k};$$

also ist die Gleichung der Geraden T in der Normalform:

$$\frac{r u_1}{h_1} x_1 + \frac{r u_2}{h_2} x_2 + \frac{r u_3}{h_3} x_3 = 0.$$

7. Bestimmung der Entfernung zweier Punkte P und P'.

Zieht man durch P und P' Gerade in den Richtungen beziehentlich $A_i A_k$ und $A_l A_n$, so erhält man mit der Geraden $PP' = \delta$ zusammen ein Dreieck, in welchem δ dem Winkel γ_k oder dem Winkel $180^0 - \gamma_k$ gegenüberliegt, je nachdem die Differenzen

$$\delta_i = x_i = x'_i \text{ und } \delta_l = x_l - x'_l$$

verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben. Die beiden übrigen Seiten sind:

$$\frac{x_i - x'_i}{\sin \gamma_k}, \quad \frac{x_l - x'_l}{\sin \gamma_k}.$$

Hiernach gilt allgemein:

$$\delta^2 = \frac{1}{\sin^2 \gamma_k} (\delta^2_i + \delta^2_l + 2\delta_i \delta_l \cos \gamma_k).$$

Um einen symmetrischen Ausdruck zu erhalten, bilde man $g^2_k \delta^2$, wende diese Formel für alle Cyclen der Indices 1, 2, 3 an und addire; man benutze

$$\frac{g^2_k}{\sin^2 \gamma_n} = \frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{\varDelta^2};$$

alsdann erhält man

$$\delta^2 = \frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{2\varDelta^2 (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_1 \delta_2 \cos \gamma_3 + \delta_2 \delta_3 \cos \gamma_1 + \delta_3 \delta_1 \cos \gamma_2).$$

8. Bestimmung des Winkels zwischen zwei Geraden T und T' aus den Coordinaten derselben.

Aus den Formeln für Transformation aus homogenen in orthogonale Coordinaten folgt:

$$ru = r \begin{vmatrix} u_1 & 1 & \beta_1 \\ u_2 & 1 & \beta_2 \\ u_3 & 1 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

$$rv = -r \begin{vmatrix} u_1 & 1 & \alpha_1 \\ u_2 & 1 & \alpha_2 \\ u_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Ferner bilde man analoge Formeln durch Vertauschung von u, v, r, u_1, u_2, u_3 gegen $u', v', r', u'_1, u'_2, u'_3$. Der gemeinsame Divisor aller vier Werthe ist bekanntlich gleich der doppelten Dreiecksfläche. Entwickelt man die vier Zähler als Functionen der u_k und bildet

$$\cos TT' = rr'(uu' + vv'),$$

so erhält man

$$\cos T^{\wedge}T' = \frac{rr'}{\Delta^2}(u_1u'_1g_1^2 + u_2u'_2g_2^2 + u_3u'_3g_3^2$$
$$+ [u_1u'_2 + u_2u'_1]\,g_1g_2\cos\gamma_3 + [u_2u'_3 + u_3u'_2]\,g_3g_2\cos\gamma_1$$
$$+ [u_3u'_1 + u_1u'_3]\,g_1g_3\cos\gamma_2).$$

Dabei ist für $T^{\wedge}T'$ derjenige Winkel zu nehmen, den die dem Fixpunkte zugewandten Ränder von T und T' begrenzen.

9. Berechnung der Dreiecksfläche aus den Coordinaten der Ecken.

Das Dreieck habe die Ecken B', B'', B'''; dieselben haben die homogenen Coordinaten x'_k, x''_k, x'''_k, und bezogen auf ein orthogonales Hilfssystem, dessen Ursprung im Innern des Axendreiecks liegt, $x'y', x''y'', x'''y'''$.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = R$$

zerfällt in das Product zweier Determinanten; es ergiebt sich

$$R = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)}}.$$

Das Product des ersten und letzten Factors ist

$$\frac{\Delta}{h_1h_2h_3},$$

wenn $\Delta\, h_1 h_2 h_3$ die doppelte Fläche und die Höhen des Axendreiecks bedeuten. Ferner ist der mittle Factor das Doppelte der gesuchten Dreiecksfläche. Hieraus folgt die gesuchte Fläche zu:

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2 h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix}.$$

Ueber die Bedeutung des Vorzeichens der Dreiecksdeterminante

$$DD(B_1 B_2 B_3) \equiv \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix},$$

wird wie folgt entschieden:

Zwei Dreiecke $B_i B_k B_l$ und $B_r B_s B_t$ heissen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die Bewegung von B_k nach B_l, beziehentlich von B_s nach B_t, von B_i, beziehentlich B_r aus gesehen unter gleicher oder unter entgegengesetzten Richtungen erscheint.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke $B_i B_k B_l$ und $B_r B_s B_t$ sind gleichen oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem ihre Determinanten

$$DD(B_i B_k B_l) \text{ und } DD(B_r B_s B_t)$$

gleichen oder entgegengesetzten Zeichens sind.

Beweis: Permutirt man zunächst die Ecken ein und desselben Dreiecks, so dass aus der Ordnung $B_1 B_2 B_3$ die Ordnung $B_i B_k B_l$ entsteht, so ist

$$DD(B_i B_k B_l) = \pm DD(B_1 B_2 B_3),$$

je nachdem ikl eine gerade oder ungerade Permutation von 123 ist. Nun sind aber alle geraden Permutationen von 123 zugleich cyklisch; in diesem Falle erscheint in der That die Bewegung von B_k nach B_l, von B_i aus gesehen, in derselben Richtung, wie die Bewegung $B_2 B_3$ von B_1 aus gesehen. Jede ungerade Permutation der drei Elemente kann aus einer cyklischen durch Vertauschung der letzten beiden Elemente abgeleitet werden; ist ikl cyklisch, so ist ilk ungerade, und es ist alsdann

$$DD(B_i B_l B_k) = -DD(B_1 B_2 B_3).$$

Die Bewegungen $B_l B_k$ und $B_k B_l$ erscheinen von jedem Punkte aus unter verschiedenen Richtungen.

Ersetzt man in dem Dreiecke $B_1 B_2 B_3$ und in der zugehörigen Determinante einen Punkt B_i durch irgend einen andern Punkt B_j der Ebene, so wird das neue Dreieck mit dem ursprünglichen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sein, je nachdem B_i und B_j auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die beiden anderen Ecken gehenden Geraden liegen. Da nun aber die linke Seite der Gleichung der Geraden $P'P''$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x'_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Werthe gleichen oder entgegengesetzten Zeichens erhält, je nachdem man für die laufenden Coordinaten x_k die Coordinaten x'''_k von auf derselben oder entgegengesetzten Seiten der Geraden $P'P''$ gelegten Punkten setzt, so sind demnach die Bedingungen identisch, unter welchen durch die Substitution B_j für B_i das Dreieck seinen Sinn und die zugehörige Determinante ihr Zeichen wechselt, q. e. d.

Die Determinante des Axendreiecks

$$DD(A_1 A_2 A_3) \equiv h_1 h_2 h_3$$

ist positiv. Die Formel

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2 h_1 h_2 h_3} DD(B_1 B_2 B_3)$$

liefert demnach einen positiven oder negativen Werth, je nachdem das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ mit dem Axendreieck $A_1 A_2 A_3$ desselben Sinnes ist oder nicht.

Berechnung der Dreiecksfläche aus den Normalgleichungen der Ecken.

Sind die Gleichungen der Ecken in der Normalform für $B^{(k)}$:

$$\alpha_1^{(k)} u_1 + \alpha_2^{(k)} u_2 + \alpha_3^{(k)} u_3 = 0,$$

so ist bekanntlich

$$x_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} h_i.$$

Setzt man diese Werthe nach R, so lässt sich $h_1 h_2 h_3$ als Factor absondern. Hiernach ergiebt sich die Dreiecksfläche aus den Gleichungen der Ecken zu

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2} \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \alpha''_1 & \alpha''_2 & \alpha''_3 \\ \alpha'''_1 & \alpha'''_2 & \alpha'''_3 \end{vmatrix}.$$

Die Höhen und die Winkel des Dreiecks lassen sich aus Fläche und Seiten berechnen.

10. Berechnung der Höhen eines Dreiecks aus den Gleichungen und den Coordinaten der Seiten.

Das Dreieck $B'B''B'''$ habe die Seiten $G'G''G'''$ und die Höhen $H'H''H'''$. Die Gleichungen der Seiten in Normalform seien

$$G^{(k)} \equiv a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + a_3^{(k)} x_3 = 0.$$

Bezeichnet klm einen Cyklus von 123, so hat man:

$$\Delta = g_1 x_1^k + g_2 x_2^k + g_3 x_3^k,$$
$$H_k = a_1^k x_1^k + a_2^k x_2^k + a_3^k x_3^k,$$
$$0 = a_1^l x_1^k + a_2^l x_2^k + a_3^l x_3^k,$$
$$0 = a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + a_1^m x_3^k.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \Delta & g_1 & g_2 & g_3 \\ H_k & a_1^k & a_2^k & a_3^k \\ 0 & a_1^l & a_2^l & a_3^l \\ 0 & a_1^m & a_2^m & a_3^m \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man:

$$R = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 \end{vmatrix}, \quad R_k = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ a_1{}^l & a_2{}^l & a_3{}^l \\ a_1{}^m & a_2{}^m & a_3{}^m \end{vmatrix},$$

so folgt:

$$H_k = \frac{\varDelta . R}{R_k}.$$

Sind $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ die Coordinaten von G_k, und ist

$$R' = \begin{vmatrix} \varrho'_1 u'_1 & \varrho'_2 u'_2 & \varrho'_3 u'_3 \\ \varrho''_1 u''_1 & \varrho''_2 u''_2 & \varrho''_3 u''_3 \\ \varrho'''_1 u'''_1 & \varrho'''_2 u'''_2 & \varrho'''_3 u'''_3 \end{vmatrix}, \quad R'_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varrho_1{}^l u_1{}^l & \varrho_2{}^l u_2{}^l & \varrho_3{}^l u_3{}^l \\ \varrho_1{}^m u_1{}^m & \varrho_2{}^m u_2{}^m & \varrho_3{}^m u_3{}^m \end{vmatrix},$$

so erhält man mit Hilfe der oben entwickelten Formel durch

$$a_i^{(k)} = \frac{\varrho_i^{(k)} u_i^{(k)}}{h_i}:$$

$$H_k = \frac{R'}{R'_k}.$$

11. Berechnung der Fläche eines Dreiecks aus den Gleichungen und den Coordinaten der Seiten.

Unter Benutzung der soeben gebrauchten Bezeichnungen bilde man das Product:

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = R . B_1 B_2 B_3 . \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\varDelta}.$$

Stellt man das Product als Determinante dar und berücksichtigt, dass

$$a_1{}^i x_1{}^k + a_2{}^i x_2{}^k + a_3{}^i x_3{}^k \begin{cases} = H_k \\ = 0 \end{cases}, \text{ je nachdem } i \begin{matrix} = k \\ \gtrless k \end{matrix},$$

so erhält man:

$$H_1 . H_2 . H_3 = R . B_1 B_2 B_3 . \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\varDelta}.$$

Setzt man für die Höhen die oben berechneten Werthe ein, so erhält man die gesuchte Dreiecksfläche zu

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\varDelta^4}{2 h_1 h_2 h_3} . \frac{R^2}{R_1 R_2 R_3}$$

aus den Gleichungen der Seiten, und zu

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\varDelta . R'^2}{2 . R'_1 R'_2 R'_3}$$

aus den Coordinaten der Seiten.

12. Berechnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks aus den Gleichungen und Coordinaten der Seiten.

Die Formeln der vorigen beiden Abschnitte liefern:

$$\tfrac{1}{2} H_k G_k = G_k . \frac{\varDelta . R}{2 . R_k} = \frac{\varDelta^4}{2 h_1 h_2 h_3} . \frac{R^2}{R_k R_l R_m}$$

und

$$G_k \cdot \frac{R'}{2R'_k} = \frac{\Delta . R'^2}{2 . R'_k R'_l R'_m}.$$

Hieraus folgt:

$$G_k = \frac{\Delta . R'}{R'_l R'_m}$$

aus den Coordinaten der Seiten, und

$$G_k = g_1 g_2 g_3 \cdot \frac{R}{R_l R_m}$$

aus den Gleichungen der Seiten.

Nach der Formel

$$\sin B_m = \frac{H_k}{G_l}$$

findet sich

$$\sin B_m = \frac{\Delta . R_m}{g_1 g_2 g_3}$$

aus den Gleichungen der Seiten, und

$$\sin B_m = \frac{R'_m}{\Delta}.$$

§ 4. Sätze über Curven zweiter Ordnung.

1. Sind

$$f(x,y) = 0 \text{ und } \varphi(u,v) = 0$$

Gleichungen n^{ten} Grades zwischen den orthogonalen Punkt- und Plancoordinaten eines variabeln Punktes, beziehentlich einer enveloppirenden Geraden, so werden dieselben beim Uebergang zu homogenen Coordinaten zunächst in allgemeine (nicht homogene) Functionen derselben verwandelt. Multiplicirt man diejenigen Glieder dieser Functionen, deren Grad hinter höchsten Grade um δ Einheiten zurückbleibt, mit

$$\left(\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3}{\Delta}\right)^\delta, \text{ beziehentlich } \left(\frac{g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3}{\Delta}\right)^\delta,$$

so erhalten alle Glieder ein und denselben Grad.

Die Gleichung einer jeden Curve n^{ten} Grades oder n^{ter} Classe in homogenen Coordinaten kann demnach als homogene Function n^{ten} Grades derselben dargestellt werden. Wir setzen künftig bei Anwendung homogener Coordinaten immer diese Darstellungsweise voraus. Bei Anwendung Plücker'scher Coordinaten ist Gleiches nicht möglich, sobald ungerade Werthe von δ vorkommen; es lässt sich dann die Function n^{ten} Grades nur in die Summe einer homogenen Function n^{ten} und einer $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades verwandeln.

Die Transformationsformeln lehren, dass die Gleichungen in homogenen Punkt- und Plancoordinaten nicht homogene Gleichungen in orthogonalen Coordinaten von demselben Grade liefern.

Wird ein Dreieck zu Grunde gelegt, das eine unendlich ferne Seite $(A_1 A_2)$ hat, so haben alle im Endlichen gelegenen Punkte einen constanten (unendlich grossen) Abstand (x_3) von derselben. Diese unendlich grosse Coordinate verschmilzt im Allgemeinen mit Coefficienten der Gleichung zu endlichen Constanten; aus der homogenen Gleichung zwischen $x_1 x_2 x_3$ wird eine nichthomogene Gleichung zwischen den Abständen des variabeln Punktes von zwei Geraden, d. i. eine Gleichung in Descartes'schen Coordinaten.

Um zu bestimmen, wie sich die Plancoordinaten für ein solches System umgestalten lassen, lege man durch A_3 eine Parallele T' zur variabeln Geraden T; sie hat von T den Abstand $\mathfrak{u}_3$, von $A_1 A_2$ die Abstände $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$; T schneide auf $A_3 A_1$ und $A_3 A_2$ die Strecken $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ ab, welche von A_3 nach A_1 und A_2 positiv gerechnet werden mögen. Haben nun $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ die (unendlichen) Längen s_1 und s_2, so ist:

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_3 s_1 \,.\, u, \quad \text{also } u_1 = u_3 \,.\, s_1 \,.\, u,$$

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 s_2 \,.\, v, \quad \text{also } u_2 = u_3 \,.\, s_2 \,.\, u.$$

Setzt man dies in eine homogene Gleichung der u_k ein, so hebt sich u_3 hinweg; die unendlichen Werthe $s_1 s_2$ verschmelzen im Allgemeinen mit den Coefficienten zu endlichen Constanten und es erübrigt eine nicht homogene Gleichung zwischen den reciproken Abschnitten der variabeln Geraden auf zwei sich schneidenden Axen, d. i. zwischen den orthogonalen Plancoordinaten.

Hat das Axendreieck eine unendlich ferne Ecke A_3, so laufen also $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ parallel. Die variable Gerade schneidet dann von den unendlichen Seiten $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ von A_3 aus gerechnet dasselbe Stück v_3 ab, von A_1 und A_2 aus gerechnet seien die Abschnitte v_1 und v_2, und zwar positiv nach A_3 zu.

Alsdann verhält sich

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3$$

und man kann daher in die Gleichungen für Plancoordinaten die u_k durch die v_k ersetzen. Nun ist v_3 für alle Geraden constant und verschmilzt im Allgemeinen mit den Coefficienten zu endlichen Constanten.

Die Gleichungen in Plancoordinaten gehen demnach in Bezug auf ein System mit einer unendlich fernen Ecke in nicht homogene Gleichungen zwischen den Abschnitten der variabeln Geraden auf den beiden parallelen Axen über.

Bezieht man Gleichungen in Punktcoordinaten auf ein solches System, so verändert sich die Bedingungsgleichung zwischen den drei Coordinaten eines Punktes zu

$$x_1 + x_2 = d,$$

wenn d den senkrechten Abstand der parallelen Axen angiebt.

2. Gleichung der Tangente an einen Punkt x'_k einer Curve $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. Gleichung des Tangentialpunktes in einer enveloppirenden Geraden u'_k einer Curve $\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0$.

Die Gleichung der Tangente ist die Grenze, welcher sich die Gleichung der Sehne durch die Punkte x'_k und $x'_k + \varDelta'_k$ nähert, wenn die $\varDelta'_k$ verschwinden, d. i. die Grenze von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \varDelta'_1 & \varDelta'_2 & \varDelta'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Für verschwindende $\varDelta_k$ geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 1 & \dfrac{dx'_2}{dx'_1} & \dfrac{dx'_3}{dx'_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet $f_k^{(i)}$ den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_k} \text{ für } x_k = x_k^{(i)},$$

so gelten für die Zeilen dieser Determinante folgende Gleichungen:

$$x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + x'_3 f'_3 = 0,$$

$$f'_1 + \frac{dx'_2}{dx'_1} f'_2 + \frac{dx'_3}{dx'_1} f'_3 = 0,$$

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \varDelta,$$

$$g_1 x'_1 + g_2 x'_2 + g_3 x'_3 = \varDelta,$$

$$g_1 + \frac{dx'_2}{dx'_1} g_2 + \frac{dx'_3}{dx'_1} = 0.$$

Man bilde unter Benutzung von drei willkürlichen Hilfsgrössen die von Null verschiedene Determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \end{vmatrix}$$

und multiplicire damit die obige Tangentengleichung. Stellt man das Product linker Hand als eine Determinante dar, so erhält man unter Rücksicht auf die obigen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} (lx_1 + mx_2 + nx_3) & \varDelta & (x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3) \\ (lx'_1 + mx'_2 + nx'_3) & \varDelta & 0 \\ \left(l + m\dfrac{dx'_2}{dx'_1} + n\dfrac{dx'_3}{dx'_1}\right) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante reducirt sich auf das Product dreier Diagonalglieder; beseitigt man die beiden constanten Factoren

$$2\varDelta \text{ und } l + m\frac{dx'_2}{dx'_1} + n\frac{dx'_3}{dx'_1},$$

so bleibt als Gleichung der Tangente an $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ im Punkte x'_k:

$$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3 = 0.$$

In analoger Weise verfährt man für die Bestimmung der Gleichung des Tangentialpunktes der Curve $\varphi(n_1 n_2 n_3)=0$ in der Geraden u'_k; sie lautet:

$$u_1\varphi'_1 + u_2\varphi'_2 + u_3\varphi'_3 = 0.$$

3. Die Curven zweiten Grades sind zugleich Curven zweiter Classe, und umgekehrt.

Sei die Gleichung einer Curve zweiten Grades

$$f \equiv a_{11}x^1_2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

so erhält man die Gleichung derselben Curve in Plancoordinaten, wie folgt:

Bezeichnet A einen noch unbestimmten Coefficienten, r den Abstand der Tangente vom Fixpunkte, so ist bekanntlich

$$Aru_1 - f'_1h_1 = 0,\quad Aru_2 - f'_2h_2 = 0,\quad Aru_3 - f'_3h_3 = 0$$

oder

$$f'_1 - Ar\frac{u_1}{h_1} = 0,\quad f'_2 - Ar\frac{u_2}{h_2} = 0,\quad f'_3 - Ar\frac{u_3}{h_3} = 0.$$

Diese drei Gleichungen sind linear nach x_k. Fügt man die Gleichung des Tangentialpunktes in Normalform, geordnet nach x'_k, hinzu:

$$\frac{u_1}{h_1}x'_1 + \frac{u_2}{h_2}x'_2 + \frac{u_3}{h_3}x'_3 = 0,$$

so erfordert der Verein dieser vier Gleichungen das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten der Tangenten an $f=0$.

Sei die Gleichung einer Curve zweiter Classe in Plancoordinaten

$$\varphi(u_1u_2u_3) \equiv \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0,$$

so erhält man ähnlich wie oben die Gleichung derselben Curve in homogenen Punktcoordinaten.

Aus der Gleichung des Tangentialpunktes in der Tangente u'_k

$$\varphi'_1u_1 + \varphi'_2u_2 + \varphi'_3u_3 = 0$$

folgt, wenn x_k die Coordinaten des Tangentialpunktes bedeuten:

$$Ax_k = \varphi'_kh_k,\quad \varphi' - A\frac{x_k}{h_k} = 0.$$

Nimmt man zu den nach letzter Form gebildeten und nach den u' geordneten drei Gleichungen noch die Gleichung der Tangente in Normalform, geordnet nach u'_k, nämlich

$$\frac{rx_1}{h_1}u'_1 + \frac{rx_2}{h_2}u'_2 + \frac{rx_3}{h_3}u'_3 = 0,$$

so erhält man die gewünschte Gleichung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \frac{x_1}{h_1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \frac{x_2}{h_2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \frac{x_3}{h_3} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Lehrsatz: Liegt der Punkt P' nicht auf der Curve zweiten Grades $f=0$, so ist

$$T \equiv f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der Polaren von P' in Bezug auf den Kegelschnitt $f=0$; d. h. legt man ein geradliniges Büschel durch P' als Centrum, so werden P' und derjenige Punkt, in welchem ein Strahl die Gerade T schneidet, von den Schnittpunkten dieses Strahls mit dem Kegelschnitt harmonisch getrennt.

Beweis. Sei P'' ein beliebiger Punkt von T, und seien x_k die Coordinaten eines Punktes, in welchem $P'P''$ die Curve schneidet, so sind λ_1 und λ_2 so zu bestimmen, dass

1) $$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

2) $$x_k = \lambda_1 x'_k + \lambda_2 x''_k,$$

3) $$f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Setzt man in 3) die Werthe für x_k aus 2) ein und ordnet die Glieder nach Potenzen von λ', so erhält man:

$$\lambda'^2 (f'_1 x'_1 + f'_2 x'_2 + f'_3 x'_3) + 2\lambda'\lambda'' (f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3) + \lambda''^2 (f''_1 x''_1 + f''_2 x''_2 + f''_3 x''_3) = 0.$$

Da P'' auf $T=0$ liegt, so ist der Coefficient von $2\lambda'\lambda''$ gleich Null, und es bleibt demnach zu Bestimmung der λ:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-(f' : f'')}.$$

Hiernach erhält man für die beiden Schnittpunkte zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von $\lambda' : \lambda''$, q. e. d.

5. Die Formeln

$$x_1^i f_1^k + x_2^i f_2^k x_3^i f_3^k \quad \text{und} \quad x_1^k f_1^i + x_2^k f_2^i + x_3^k f_3^i$$

sind identisch. Genügt also ein Punkt P_i der Gleichung der Polaren für P_k, d. i. der Gleichung

$$x_1^i f_1^k + x_2^i f_2^k + x_3^i f_3^k = 0,$$

so genügt auch P_k der Gleichung der Polaren für P_i:

$$x_1^k f_1^i + x_2^k f_2^i + x_3^k f_3^i = 0.$$

Die Polaren der Punkte einer Geraden bilden demnach ein Strahlenbüschel, dessen Träger der Pol der Geraden ist; die Pole der Strahlen eines Büschels liegen auf einer Geraden, der Polaren des Büschelcentrums.

6. Die Polare jedes Punktes ist eindeutig bestimmt, sobald es keinen Punkt giebt, für welchen zugleich

$$f'_1 = 0, \quad f'_2 = 0, \quad f'_3 = 0,$$

d. h. sobald die Discriminante der Gleichung $f = 0$ von Null verschieden ist,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist dieselbe gleich Null und sind ihre Minoren von Null verschieden, so zerfällt $f = 0$ in das Product zweier nicht identischer linearer Factoren, der Kegelschnitt degenerirt zu zwei Geraden. Der Schnittpunkt derselben, für welchen $f'_1 = f'_2 = f'_3 = 0$, hat jede beliebige Gerade zur Polaren.

Sind die Minoren gleich Null, so dass also

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{12} : a_{22} : a_{23} = a_{13} : a_{23} : a_{33},$$

so werden die linearen Factoren identisch; jeder Kegelschnitt degenerirt zu einer (doppelt zu denkenden) Geraden. Jeder Punkt derselben hat jede Gerade zur Polaren.

In jedem Falle giebt es wenigstens eine Gerade, die einem gegebenen Punkte als Polare zugeordnet ist.

Die Polare wird unendlich fern für den Punkt, dessen Coordinaten das System lösen:

$$\begin{aligned} f'_1 - k g_1 &= 0, \\ f'_2 - k g_2 &= 0, \\ f'_3 - k g_3 &= 0, \\ g_1 x'_1 + g_2 x'_2 + g_3 x'_3 &= \varDelta. \end{aligned}$$

Diesem Systeme entsprechen alle Punkte der Ebene nur dann, wenn

$$f = (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3)^2;$$

dann degenerirt der Kegelschnitt zu der unendlich entfernten Geraden.

Dieser Fall bleibt von der folgenden Betrachtung ausgeschlossen. In jedem andern Falle müssen unzählige Punkte existiren, deren Polaren endliche Gerade sind. Diese Punkte können nicht auf einer Linie vertheilt liegen, sondern erfüllen Theile der Ebene continuirlich.

Die Polaren aller Punkte laufen parallel, sobald sich λ und μ so bestimmen lassen, dass für willkürliche Werthe von x'_k und x''_k das System erfüllt wird:

$$\begin{aligned} \lambda f'_1 + \mu f''_1 - g_1 &= 0, \\ \lambda f'_2 + \mu f''_2 - g_2 &= 0, \\ \lambda f'_3 + \mu f''_3 - g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hierzu ist nothwendig und ausreichend, dass

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f''_1 & g_1 \\ f'_2 & f''_2 & g_2 \\ f'_3 & f''_3 & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich in sechs Glieder auflösen, deren jedes ein Glied

$$x'_i x''_k \; (i=1,2,3;\; k=1,2,3)$$

mit einer gewissen Determinante multiplicirt enthält. Die Coefficienten von $x'_i x''_i$ verschwinden identisch.

Von den übrigen sind die Coefficienten von $x'_i x''_k$ und $x'_k x''_i$ entgegengesetzt gleich. Hiernach bleiben als Bedingung dafür, dass die fragliche Determinante unabhängig von x'_k und x''_k verschwindet, die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_1 \\ a_{12} & a_{22} & g_2 \\ a_{13} & a_{23} & g_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & g_1 \\ a_{12} & a_{23} & g_2 \\ a_{13} & a_{33} & g_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{23} & a_{33} & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Verein dieser Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante aus den Minoren der Discriminante, mithin das Verschwinden der Discriminante selbst.

Die Function f zerfällt demnach in zwei reelle lineare Factoren.

Dieselben seien M und N und mögen die Coefficienten a_k und b_k haben; alsdann geht das obige System über in:

$$(\lambda M' + \mu M'')\, b_1 + (\lambda N' + \mu N'')\, a_1 - g_1 = 0,$$
$$(\lambda M' + \mu M'')\, b_2 + (\lambda N' + \mu N'')\, a_2 - g_2 = 0,$$
$$(\lambda M' + \mu M'')\, b_3 + (\lambda N' + \mu N'')\, a_3 - g_3 = 0.$$

Die Werthe $\lambda M' + \mu M''$, $\lambda N' + \mu N''$ sind constante Factoren; kürzt man sie durch m und n ab, multiplicirt die drei Gleichungen der Reihe nach mit $x_1 x_2 x_3$ und addirt, so erhält man:

$$m N = -n M + (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3).$$

Hieraus folgt [§ 2, 8], dass M und N parallel laufen. Auch dieser Fall, in welchem die Curve zu zwei parallelen Geraden degenerirt, werde vor der Hand von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

7. Jede Gerade kann als Polare mindestens eines Punktes betrachtet werden.

Sei die Gleichung der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

und sei k ein zu bestimmender Factor, so lösen die Coordinaten des gesuchten Poles das System:

$$f'_1 - k a_1 = 0,$$
$$f'_2 - k a_2 = 0,$$
$$f'_3 - k a_3 = 0,$$
$$g_1 x'_1 + g_2 x'_2 + g_3 x'_3 = \Delta.$$

Dieses System liefert lauter unendliche Werthe von x'_k, sobald die Determinante desselben unabhängig von a_k verschwindet. Dies tritt ein, wenn die drei den a_k zugehörigen Minoren von

$$U_1 = \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3,$$
$$U_2 = \alpha''_1 u_1 + \alpha''_2 u_2 + \alpha''_3 u_3,$$
$$U_3 = \alpha'''_1 u_1 + \alpha'''_2 u_2 + \alpha'''_3 u_3,$$

wobei U_k die Coordinaten im neuen System bezeichnen.

6. Ein Punkt P mit den Coordinaten x_k habe die Normalgleichung

$$(P \equiv)\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

so ist

$$x_k = \alpha_k h_k, \quad \alpha_k = \frac{x_k}{h_k};$$

also ist die Gleichung von P in der Normalform:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1 + \frac{x_2}{h_2} u_2 + \frac{x_3}{h_3} u_3 = 0.$$

Eine Gerade T mit den Coordinaten u_k habe die Gleichung in Normalform:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so ist

$$a_k h_k = r u_k, \quad a_k = \frac{r u_k}{h_k};$$

also ist die Gleichung der Geraden T in der Normalform:

$$\frac{r u_1}{h_1} x_1 + \frac{r u_2}{h_2} x_2 + \frac{r u_3}{h_3} x_3 = 0.$$

7. Bestimmung der Entfernung zweier Punkte P und P'.

Zieht man durch P und P' Gerade in den Richtungen beziehentlich $A_i A_k$ und $A_l A_n$, so erhält man mit der Geraden $PP' = \delta$ zusammen ein Dreieck, in welchem δ dem Winkel γ_k oder dem Winkel $180^0 - \gamma_k$ gegenüberliegt, je nachdem die Differenzen

$$\delta_i = x_i = x'_i \text{ und } \delta_l = x_l - x'_l$$

verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben. Die beiden übrigen Seiten sind:

$$\frac{x_i - x'_i}{\sin \gamma_k}, \quad \frac{x_l - x'_l}{\sin \gamma_k}.$$

Hiernach gilt allgemein:

$$\delta^2 = \frac{1}{\sin^2 \gamma_k} (\delta^2_i + \delta^2_l + 2 \delta_i \delta_l \cos \gamma_k).$$

Um einen symmetrischen Ausdruck zu erhalten, bilde man $g^2_k \delta^2$, wende diese Formel für alle Cyclen der Indices 1, 2, 3 an und addire; man benutze

$$\frac{g^2_k}{\sin^2 \gamma_n} = \frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{\varDelta^2};$$

alsdann erhält man

$$\delta^2 = \frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{2 \varDelta^2 (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_1 \delta_2 \cos \gamma_3 + \delta_2 \delta_3 \cos \gamma_1 + \delta_3 \delta_1 \cos \gamma_2).$$

8. Bestimmung des Winkels zwischen zwei Geraden T und T' aus den Coordinaten derselben.

Aus den Formeln für Transformation aus homogenen in orthogonale Coordinaten folgt:

$$ru = r\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \beta_1 \\ u_2 & 1 & \beta_2 \\ u_3 & 1 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

$$rv = -r\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \alpha_1 \\ u_2 & 1 & \alpha_2 \\ u_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Ferner bilde man analoge Formeln durch Vertauschung von u, v, r, u_1, u_2, u_3 gegen $u', v', r', u'_1, u'_2, u'_3$. Der gemeinsame Divisor aller vier Werthe ist bekanntlich gleich der doppelten Dreiecksfläche. Entwickelt man die vier Zähler als Functionen der u_k und bildet

$$\cos TT' = rr'(uu' + vv'),$$

so erhält man

$$\cos TT' = \frac{rr'}{\Delta^2}(u_1u'_1g_1^2 + u_2u'_2g_2^2 + u_3u'_3g_3^2$$
$$+ [u_1u'_2 + u_2u'_1]\,g_1g_2\cos\gamma_3 + [u_2u'_3 + u_3u'_2]\,g_3g_2\cos\gamma_1$$
$$+ [u_3u'_1 + u_1u'_3]\,g_1g_3\cos\gamma_2).$$

Dabei ist für TT' derjenige Winkel zu nehmen, den die dem Fixpunkte zugewandten Ränder von T und T' begrenzen.

9. Berechnung der Dreiecksfläche aus den Coordinaten der Ecken.

Das Dreieck habe die Ecken B', B'', B'''; dieselben haben die homogenen Coordinaten x'_k, x''_k, x'''_k, und bezogen auf ein orthogonales Hilfssystem, dessen Ursprung im Innern des Axendreiecks liegt, $x'y', x''y'', x'''y'''$.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = R$$

zerfällt in das Product zweier Determinanten; es ergiebt sich

$$R = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)}}.$$

Das Product des ersten und letzten Factors ist

$$\frac{\Delta}{h_1h_2h_3},$$

wenn $\Delta\, h_1 h_2 h_3$ die doppelte Fläche und die Höhen des Axendreiecks bedeuten. Ferner ist der mittle Factor das Doppelte der gesuchten Dreiecksfläche. Hieraus folgt die gesuchte Fläche zu:

In dem ausgeschlossenen Falle bleiben in der Gleichung $\varphi=0$ noch zwei unabhängige Constanten.

Da die Discriminante verschwindet, so zerfällt φ in zwei lineare Factoren; dieselben seien ψ und χ mit den Coefficienten α_k und β_k. Alsdann gehen die Gleichungen

$$\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\alpha_{i3}=0$$

über in

$$\begin{aligned}\alpha_1 B+\beta_1 A&=0,\\ \alpha_2 B+\beta_2 A&=0,\\ \alpha_3 B+\beta_3 A&=0.\end{aligned}\qquad \begin{aligned}A&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\\ B&=\beta_1+\beta_2+\beta_3.\end{aligned}$$

Diesem System kann nur genügt werden, wenn $A=0$ und $B=0$. In diesem Falle degenerirt demnach die Curve zu zwei unendlich entfernten Punkten.

13. In jedem durch 11) nicht ausgeschlossenen Falle kann man immer ein solches ganz im Endlichen gelegenes Dreieck auffinden, dessen Ecken die Pole der Gegenseiten sind. **Ein solches Dreieck heisst ein sich selbst conjugirtes Dreieck.**

Man wähle hierzu eine Gerade T_1, deren Pol P_1 im Endlichen liegt, ferner eine Gerade T_2 durch P_1, welche T_1 schneidet und deren Pol P_2 im Endlichen (auf T_1) liegt; der Pol von P_1P_2 ist alsdann der Schnittpunkt P_3 der Geraden T_2 und T_1. $P_1P_2P_3$ ist demnach ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Die Pole der Seiten des Axendreiecks sind im Allgemeinen:

$$\begin{aligned}&\text{Pol von } A_2A_3:\ \varphi'_1=0,\\ &\ ,,\quad ,,\quad A_3A_1:\ \varphi'_2=0,\\ &\ ,,\quad ,,\quad A_1A_2:\ \varphi'_3=0.\end{aligned}$$

Transformirt man die Gleichung der Curve auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck, so muss demnach

$$\varphi'_1\equiv\alpha_1u_1,\quad \varphi'_2\equiv\alpha_2u_2,\quad \varphi'_3\equiv\alpha_3u_3,$$

d. i. die auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck transformirte Gleichung der Curve zweiter Classe lautet:

$$\alpha_1u_1^2+\alpha_2u_2^2+\alpha_3u_3^2=0.$$

14. Stellt man die Gleichungen eines Kegelschnitts, der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck für Punktcoordinaten bezogen ist, in Plancoordinaten dar, so erhält man (§ 4, 3):

$$\frac{g_1^2u_1^2}{a_1}+\frac{g_2^2u_2^2}{a_2}+\frac{g_3^2u_3^2}{a_3}=0.$$

Stellt man analog die Gleichung eines Kegelschnitts, der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck für Plancoordinaten bezogen ist, in Punktcoordinaten dar, so erhält man (§ 4, 3):

$$\frac{g_1^2x_1^2}{\alpha_1}+\frac{g_2^2x_2^2}{\alpha_2}+\frac{g_3^2x_3^2}{\alpha_3}=0.$$

Jedes sich selbst conjugirte Dreieck für Punktcoordinaten ist demnach ein ebensolches Dreieck für Plancoordinaten und umgekehrt.

Da man bei der Construction eines sich selbst conjugirten Dreiecks in Punktcoordinaten von einem willkürlichen Puncte, und bei der analogen Construction für Plancoordinaten von einer beliebigen Geraden ausgeht, so folgt hieraus, dass ein Punkt und eine Gerade gleichzeitig für Punkt- und für Plancoordinaten Pol und Polare sind, dass demnach **die für denselben Kegelschnitt in Punkt- und in Plancoordinaten definirten Pol und Polare sich auf dieselben Objecte beziehen.**

Hieraus folgt weiter, dass alle Curven zweiten Grades, für welche ein oder mehr als ein Coefficient unendlich gross wird, sowie die Paare von Parallelen eine Gruppe bilden, welche sich mit derjenigen Gruppe der Curven zweiter Classe deckt, für welche Coefficienten unendlich werden, nebst den unendlich entfernten Punktenpaaren.

15. Eintheilung der Gebilde zweiter Ordnung nach den Formen der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezogenen Gleichungen in Punkt- oder Plancoordinaten.

Die Gleichung sei

in Punktcoordinaten: $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$,

in Plancoordinaten: $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0$.

A. Zwei oder ein Coefficient in einer oder der andern Gleichung sind gleich Null:

1) a. $a_2 = 0, \quad a_3 = 0,$ also $\alpha_2 = \infty, \quad \alpha_3 = \infty.$

Die Gleichung wird

$$a_1 x_1^2 = 0$$

in Punktcoordinaten; für Plancoordinaten löst sie sich in die Bedingungen auf:

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

bedeutet also eine (doppelt zu denkende) Gerade.

b. $\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$ also $a_2 = \infty, \quad a_3 = \infty;$

Gleichung in Plancoordinaten:

$$\alpha_1 u_1^2 = 0;$$

in Punktcoordinaten löst sie sich auf zu

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

bedeutet demnach einen (doppelt zu denkenden) Punkt.

2) a. $a_3 = 0, \quad a_1 : a_2 > 0,$ also $\alpha_3 = \infty, \quad \alpha_1 : \alpha_2 > 0.$

Gleichung in Punktcoordinaten: $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0$,

„ „ Plancoordinaten: $u_3^2 = 0$.

Der ersteren kann durch reelle Punkte nur genügt werden, wenn zugleich

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Die Gleichung bedeutet einen Punkt.

b. $\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 : \alpha_2 > 0, \quad$ also $\quad a_3 = \infty, \quad a_1 : a_2 > 0.$

Gleichung in Plancoordinaten: $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0,$

„ „ Punktcoordinaten: $x_3^2 = 0.$

Der ersten Gleichung entspricht nur eine reelle Gerade, nämlich:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \text{d. i.} \quad x_3 = 0.$$

3) a. $a_3 = 0, \quad a_1 : a_2 < 0, \quad$ also $\quad \alpha_3 = \infty, \quad \alpha_1 : \alpha_2 < 0.$

Gleichung in Punktcoordinaten: $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0,$

„ „ Plancoordinaten: $u_3 = 0, \quad \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0.$

Die erstere Gleichung zerfällt in das Product zweier reeller linearer Factoren von der Form

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)(b_1 x_1 - b_2 x_2) = 0.$$

Die zweiten Bedingungen lehren dasselbe, denn aus

$$g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 = \varDelta$$

und

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0$$

bestimmen sich zwei reelle Werthpaare u_1 und u_2, welche entgegengesetzt gleiche Verhältnisse haben.

Hiernach bedeutet die Gleichung in dieser Form zwei sich schneidende Geraden; dieselben bilden mit den Axen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein harmonisches Büschel.

b. $\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 : \alpha_2 < 0, \quad$ also $\quad a_3 = \infty, \quad a_1 : a_2 < 0.$

Gleichung in Plancoordinaten: $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0,$

„ „ Punktcoordinaten: $x_3 = 0, \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0.$

Die erste Gleichung zerfällt in zwei reelle Factoren:

$$(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)(\beta_1 u_1 - \beta_2 u_2) = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0$$

und

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 = 2\varDelta$$

bestimmen sich zwei reelle Werthpaare von x_1 und x_2, welche entgegengesetzt gleiche Verhältnisse haben.

Die Gleichungen bedeuten demnach zwei auf $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ und ($x_3 = 0$) gelegene Punkte, welche von $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ harmonisch getrennt werden.

16. B. Keiner der beiden Coefficienten ist Null oder unendlich gross.

Die weitere Unterscheidung erfolgt in Rücksicht auf den Punkt, dessen Polare unendlich fern ist, und auf die Geraden, deren Pole unendlich fern sind.

1. Der Pol, dessen Polare unendlich fern ist, ist selbst unendlich fern, sobald (11):

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist; für

$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2$$

reducirt sich diese Bedingung auf

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0;$$

ist $\varphi=0$ in der allgemeinen Form gegeben, so liefert sie

$$\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} + \alpha_{22} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} = 0.$$

Beide Formen zeigen an, dass $\varphi=0$ erfüllt wird für

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1;$$

die Curve wird also von der unendlich fernen Geraden tangirt.

Für Punktcoordinaten lässt sich die angegebene Bedingung ausdrücken wie folgt:

$$\frac{g_1^2}{a_1} + \frac{g_2^2}{a_2} + \frac{g_3^2}{a_3} = 0.$$

17. 2. **Der Pol der unendlich fernen Geraden — das Centrum der Curve — ist ein im Endlichen gelegener Punkt.**

Wir setzen, ohne die Allgemeinheit zu stören, voraus, dass in den beiden Gleichungen ein und desselben Kegelschnitts

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \quad \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0,$$

wo also

$$\alpha_k \cdot a_k = g^2{}_k,$$

die Coefficienten folgende Vorzeichen haben:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0,$$

also auch

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 < 0.$$

Das Trägheitsgesetz für quadratische Formen lehrt, dass bei der Transformation der Gleichungen von einem sich selbst conjugirten Dreieck auf ein anderes die Anzahl der positiven Coefficienten unverändert bleibt.

18. **Lehrsatz.** Transformirt man die Gleichungen eines Kegelschnitts von einem sich selbst conjugirten Dreieck zu einem andern, ohne die Gleichungen durch constante Factoren zu kürzen oder zu erweitern, so **ist die Summe der Coefficienten in beiden Gleichungen unveränderlich.**

Beweis. Die beiden sich selbst conjugirten Dreiecke seien $A_1 A_2 A_3$ und $A'_1 A'_2 A'_3$. Die Coordinaten im neuen Systeme seien für Punkte X_k, für Geraden U_k, im alten Systeme x_k und u_k; die Gleichungen der Curve im neuen Systeme seien

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0, \quad \alpha_1 U_1^2 + \alpha_2 U_2^2 + \alpha_3 U_3^2 = 0.$$

Wendet man die in §3, 3 gebrauchten Bezeichnungen an, so erhält man als Bedingung dafür, dass $A_1 A_2 A_3$ ein sich selbst conjugirtes Dreieck ist, die beiden Systeme von je drei Gleichungen:

$$1) \quad \left.\begin{aligned} a_1 a'_i a'_k + a_2 a''_i a''_k + a_3 a'''_i a'''_k &= 0 \\ \alpha_1 \alpha'_i \alpha'_k + \alpha_2 \alpha''_i \alpha''_k + \alpha_3 \alpha'''_i \alpha'''_k &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i,k = 1,2 \text{ oder} \\ &2,3 \text{ oder } 3,1. \end{aligned}$$

Da die Transformationsformeln auf der rechten Seite Geraden- und Punktgleichungen in Normalform enthalten, so erfüllen die Coefficienten noch die zwei Gruppen von je drei Gleichungen:

$$
2)\quad \begin{gathered}
a_1^{i2} + a_2^{i2} + a_3^{i2} - 2a_1^i a_2^i \cos\gamma_3 - 2a_2^i a_3^i \cos\gamma_1 - 2a_3^i a_1^i \cos\gamma_2 = 1, \\
\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i = 1, \\
i = 1, 2, 3.
\end{gathered}
$$

Die Summen der Coefficienten in den transformirten Gleichungen werden zu

$$
3)\quad \begin{gathered}
a_1(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) + a_2(a_1''^2 + a_2''^2 + a_3''^2) + a_3(a_1'''^2 + a_2'''^2 + a_3'''^2), \\
\text{und} \\
\alpha_1(\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) + \alpha_2(\alpha_1''^2 + \alpha_2''^2 + \alpha_3''^2) + \alpha_3(\alpha_1'''^2 + \alpha_2'''^2 + \alpha_3'''^2).
\end{gathered}
$$

Berechnet man aus der ersten Gruppe von 2) die Trinome

$$a_1^{i2} + a_2^{i2} + a_3^{i2}$$

und substituirt in die erste Formel 3), so erhält man unter Berücksichtigung des ersten Systemes 1) die Constanz der Coefficientensumme in der Gleichung des Kegelschnitts für Punktcoordinaten.

Die zweite der Formeln 3) lässt sich in Rücksicht auf das zweite System 1) schreiben:

$$\alpha_1(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)^2 + \alpha_2(\alpha''_1 + \alpha''_2 + \alpha''_3)^2 + \alpha_3(\alpha'''_1 + \alpha'''_2 + \alpha'''_3)^2.$$

Nimmt man hierzu das zweite System 2), so erhält man die Constanz der Summe der Coefficienten in der Gleichung für Plancoordinaten.

19. Die Gleichung des Centrums ist (16):

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Seine Coordinaten sind demnach

$$x_k = \frac{\alpha_k h_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Da nun der Nenner dieses Ausdrucks für alle sich selbst conjugirten Dreiecke beständig bleibt, ferner auch die Zahl der positiven α_k sich nicht ändert, so zerfallen die centralen Kegelschnitte in zwei Gruppen: in der einen Gruppe liegt in Bezug auf alle sich selbst conjugirten Dreiecke das Centrum in einem der drei unbegrenzten äusseren Winkelfelder des Axendreiecks; in der andern Gruppe liegt er in einem der drei Felder, welche durch eine Axe und die Verlängerungen der beiden anderen begrenzt werden.

Bezeichnet man mit c_k die Coordinaten des Centrums, so lassen sich die Gleichungen eines Kegelschnittes demnach auf die Formen bringen:

$$\frac{g_1^2 h_1}{c_1} x_1^2 + \frac{g_2^2 h_2}{c_2} x_2^2 + \frac{g_3^2 h_3}{c_3} x_3^2 = 0$$

und

$$\frac{c_1}{h_1} u_1^2 + \frac{c_2}{h_2} u_2^2 + \frac{c_3}{h_3} u_3^2 = 0;$$

die so reducirten Gleichungen gehen bei der Transformation für andere sich selbst conjugirte Dreiecke ohne Aufnahme von Erweiterungscoefficienten in Gleichungen derselben Form in Bezug auf das neue System über.

Lässt man nun das Centrum mit A_3 zusammenfallen, so bleibt bei der ersten Gruppe das Verhältniss der (verschwindenden) Coordinaten $c_1 : c_2$ positiv; die Gleichung gewinnt demnach die Form

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 1.$$

Bei der zweiten Gruppe bleibt das Verhältniss $c_1 : c_2$ negativ und die Gleichung erhält die Form

$$a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 = 1.$$

Die Kriterien in (17) und (19) bestimmen die Curve als Parabel, Ellipse oder Hyperbel.

Rückt A_3 ins Unendliche, so geht $A_1 A_2$ durch's Centrum, wird Diameter. Bei der Ellipse liegt das Centrum auf derselben Seite von A_1 und A_2, bei der Hyperbel werden A_1 und A_2 durch's Centrum getrennt. Im ersten Falle haben c_1 und c_2 entgegengesetzte, im letzten Falle gleiche (positive) Vorzeichen.

Die Gleichung für Plancoordinaten nimmt hiernach die Formen an:

$$\text{für Ellipse: } \alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 = 1,$$
$$\text{für Hyperbel: } \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 = 1.^*$$

20. Die Bedingung dafür, dass zwei Dreiecke für einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind, lässt sich wie folgt ausdrücken:

Es seien $x'_k x''_k x'''_k$ die Coordinaten der Ecken, $u'_k u''_k u'''_k$ die der Seiten des einen Dreiecks in Bezug auf das andere. Der beiden Dreiecken zugehörige Kegelschnitt habe auf das zum Axendreieck gewählte Dreieck die Gleichungen:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a\ x_3^2 = 0$$

oder

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

Dann ist nothwendig und ausreichend, dass die Polare von x'_k durch x''_k und x'''_k, und die von x''_k durch x'''_k geht; es muss demnach das System gelten:

$$a_1 x'_1 x''_1 + a_2 x'_2 x''_2 + a_3 x'_3 x''_3 = 0,$$
$$a_1 x'_1 x'''_1 + a_2 x'_2 x'''_2 + a_3 x'_3 x'''_3 = 0,$$
$$a_1 x''_1 x'''_1 + a_2 x''_2 x'''_2 + a_3 x''_3 x'''_3 = 0.$$

Hieraus erhält man die gesuchte Bedingung in Form einer verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} x'_1 x''_1 & x'_2 x''_2 & x'_3 x''_3 \\ x''_1 x'''_1 & x''_2 x'''_2 & x''_3 x'''_3 \\ x'''_1 x'_1 & x'''_2 x'_2 & x'''_3 x'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aehnlich findet man die gleichwerthige Bedingung:

$$\begin{vmatrix} u'_1 u''_1 & u'_2 u''_2 & u'_3 u''_3 \\ u''_1 u'''_1 & u''_2 u'''_2 & u''_3 u'''_3 \\ u'''_1 u'_1 & u'''_2 u'_2 & u'''_3 u'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

* Die Gleichungen, welche auf ein zweiaxiges System bezogen sind, dessen Axen und Punkte auf einem Diameter so liegen, dass sie durch die Enden des Diameters harmonisch getrennt werden und dessen Axen dem conjugirten Diameter parallel sind, lassen ebenso fruchtbare Untersuchungen zu, wie die auf conjugirte Diameter bezogenen Gleichungen in Punktcoordinaten.

21. **Lehrsatz: Sind zwei Dreiecke für einen Kegelschnitt sich selbst conjugirt, so sind sie beide einem Kegelschnitte eingeschrieben und einem Kegelschnitte umschrieben.**

Jeder dem Axendreieck umschriebene oder eingeschriebene Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0,$$

beziehentlich

$$\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{31}u_3u_1 = 0.$$

Sollen $x'_k x''_k x'''_k$ in einem solchen Kegelschnitt liegen, beziehentlich $u'_k u''_k u'''_k$ einen solchen Kegelschnitt berühren, so muss das System erfüllt sein:

$$\begin{gathered}
a_{12}x'_1x'_2 + a_{23}x'_2x'_3 + a_{31}x'_3x_1 = 0,\\
a_{12}x''_1x''_2 + a_{23}x''_2x''_3 + a_{31}x''_3x''_1 = 0,\\
a_{12}x'''_1x'''_2 + a_{23}x'''_2x'''_3 + a_{31}x'''_3x'''_1 = 0,
\end{gathered}$$

beziehentlich

$$\begin{gathered}
\alpha_{12}u'_1u'_2 + \alpha_{23}u'_2u'_3 + \alpha_{31}u'_3u'_1 = 0,\\
\alpha_{12}u''_1u''_2 + \alpha_{23}u''_2u''_3 + \alpha_{31}u''_3u''_1 = 0,\\
\alpha_{12}u'''_1u'''_2 + \alpha_{23}u'''_2u'''_3 + \alpha_{31}u'''_3u'''_1 = 0.
\end{gathered}$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass drei Punkte in einem um das Axendreieck beschriebenen Kegelschnitt liegen, beziehentlich dafür, dass drei Gerade einen dem Axendreieck eingeschriebenen Kegelschnitt berühren, das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} x'_1x'_2 & x'_2x'_3 & x'_3x'_1 \\ x''_1x''_2 & x''_2x''_3 & x''_3x''_1 \\ x'''_1x'''_2 & x'''_2x'''_3 & x'''_3x'''_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u'_1u'_2 & u'_2u'_3 & u'_3u'_1 \\ u''_1u''_2 & u''_2u''_3 & u''_3u''_1 \\ u'''_1u'''_2 & u'''_2u'''_3 & u'''_3u'''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese beiden Determinanten sind Glied für Glied den unter (21) angeführten gleich, wie sich leicht nachweisen lässt.

22. **Lehrsatz:** Gruppirt man sechs Punkte eines Kegelschnitts zu zwei Dreiecken, so lässt sich stets ein und nur ein Kegelschnitt finden, für welchen beide Dreiecke sich selbst conjugirt sind. Gruppirt man sechs Tangenten eines Kegelschnittes zu zwei Dreiecken, so lässt sich stets ein und nur ein Kegelschnitt finden, für welchen beide Dreiecke sich selbst conjugirt sind.

Beweis: Zum Beweise des ersten Theiles beziehe man die drei Punkte der einen Gruppe $x'_k x''_k x'''_k$ auf das aus den Punkten der andern gebildete Dreieck; dann annulliren die $x'_k x''_k x'''_k$ die erste Determinante in (21), mithin auch die erste Determinante in (20).

Gesetzt, es sei

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$$

die Gleichung des beiden Dreiecken conjugirten Kegelschnittes, so müssen (21) die Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{gathered}
a_1x'_1x''_1 + a_2x'_2x''_2 + a_3x'_3x''_3 = 0,\\
a_1x''_1x'''_1 + a_2x''_2x'''_2 + a_3x''_3x'''_3 = 0,\\
a_1x'''_1x'_1 + a_2x'''_2x'_2 + a_3x'''_3x'_3 = 0.
\end{gathered}$$

Dieses System ist erfüllbar, da die Determinante verschwindet; aus irgend zweien der drei Gleichungen folgt dann das Verhältniss

$$a_1 : a_2 : a_3$$

eindeutig, q. e. d.

Ebenso erfolgt der Beweis des zweiten Theiles.

23. Beweis des Pascal'schen Satzes.

Liegen die drei Punkte, in welchen sich die gegenüberliegenden Seitenpaare eines Sechsecks schneiden, in einer Geraden, so ist das Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben.

Das Sechseck sei $P_1 \Pi_1 P_2 \Pi_2 P_3 \Pi_3$; seine Gegenseitenpaare sind alsdann:

$$\begin{aligned} &P_1 \Pi_1 \text{ und } \Pi_2 P_3, \\ &\Pi_1 P_2 \text{ und } P_3 \Pi_3, \\ &P_2 \Pi_2 \text{ und } \Pi_3 P_1. \end{aligned}$$

Man beziehe $P_1 P_2 P_3$ auf das Axendreieck $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$; haben dann $P_1 P_2 P_3$ die Coordinaten x'_k, x''_k, x''_k, so sind die Gleichungen der Seiten des Sechsecks: .

$$\begin{aligned} (P_1 \Pi_1) &\equiv x'_3 x_2 - x'_2 x_3 = 0, & (\Pi_2 P_3) &\equiv x'''_3 x_1 - x'''_1 x_3 = 0, \\ (\Pi_1 P_2) &\equiv x''_3 x_2 - x''_2 x_3 = 0, & (P_3 \Pi_3) &\equiv x'''_2 x_1 - x'''_1 x_2 = 0, \\ (P_2 \Pi_2) &\equiv x''_1 x_3 - x''_3 x_1 = 0, & (\Pi_3 P_1) &\equiv x'_1 x_2 - x'_2 x_1 = 0. \end{aligned}$$

Es müssen sich nach der Voraussetzung des Satzes sechs Coefficienten $\lambda \lambda'$, $\mu \mu'$, $\nu \nu'$ so bestimmen lassen, dass

$$\lambda (P_1 \Pi_1) + \lambda' (\Pi_2 P_3) \equiv \mu (P_2 \Pi_1) + \mu' (P_3 \Pi_3) \equiv \nu (P_2 \Pi_2) + \nu' (\Pi_3 P_1).$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'''_3 \lambda' &= x'''_2 \mu' & &= - x''_3 \nu - x'_2 \nu', \\ x'_3 \lambda &= x''_3 \mu - x'''_1 \mu' & &= x'_1 \nu', \\ x'_2 \lambda + x'''_1 \lambda' &= x''_2 \mu & &= - x''_1 \nu. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\nu = - \frac{x''_2}{x''_1} \mu, \quad \nu' = \frac{x'_3}{x'_1} \lambda.$$

Dann bleiben die drei Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned} x'''_3 \lambda' - x'''_2 \mu' \qquad &= 0, \\ \frac{x'_2 x'_3}{x'_1} \lambda + x'''_3 \lambda' - \frac{x''_3 x''_2}{x''_1} \mu \qquad &= 0, \\ x'_3 \lambda \qquad - x''_3 \mu + x'''_1 \mu' &= 0, \\ x'_2 \lambda + x'''_1 \lambda' - x''_2 \mu \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein derselben wird bedingt durch das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x'''_3 & 0 & -x'''_2 \\ \frac{x'_2 x'_3}{x'_1} & x'''_3 & \frac{x''_3 x''_2}{x''_1} & 0 \\ x'_3 & 0 & -x''_3 & x'''_1 \\ x'_2 & x'''_1 & -x''_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man multiplicire die erste Colonne mit x'_1, die dritte mit x''_1, subtrahire die erste Zeile von der zweiten, subtrahire hierauf die mit $\frac{x'''_1}{x'''_3}$ multiplicirte erste Zeile von der letzten Zeile und multiplicire die nun entstandene letzte Colonne mit x'''_3. In der zweiten Colonne der resultirenden Determinante sind alle Glieder ausser dem ersten Null, und die Determinante verschwindet also für

$$\begin{vmatrix} x'_1 x'_2 & x''_1 x''_2 & x'''_1 x'''_2 \\ x'_2 x'_3 & x''_2 x''_3 & x'''_2 x'''_3 \\ x'_3 x'_1 & x''_3 x''_1 & x'''_3 x'''_1 \end{vmatrix} = 0,$$

q. e. d.

Nimmt man nun an, der directe Pascal'sche Satz gälte für irgend ein eingeschriebenes Sechseck nicht, so gruppire man dessen Ecken zu den beiden Dreiecken und verfahre ganz wie oben. Dann kann der Verein der Gleichungen für $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ nicht zusammen bestehen, oder, da ν und ν' immer nach den dort bezeichneten Formeln gewählt werden können, so kann der Verein der vier Gleichungen für $\lambda\lambda'$ und $\mu\mu'$ nicht bestehen, mithin kann die am Schluss angeführte Determinante nicht verschwinden; das ist aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, dass das Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben sein soll.

Der Beweis für den Brianchon'schen Satz verfolgt genau denselben Gang.

XVII.

Ueber die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung:

$$1)\qquad \sum_{r=0}^{r=m} (a_r + b_r x^{\varrho})\, x^{m-r}\, y^{(m-r)} = \sum_{r=0}^{r=p} c_r x^{r\varrho}.$$

Von

Dr. R. Most in Stettin.

Betrachtungen über die allgemeinen Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungen hat Fuchs* angestellt; bezeichnet man mit f ganze Functionen nach x, so sind die Nullpunkte der Function f_0 in der Gleichung:

$$f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + \cdot\ \cdot + f_n y = 0,$$

die singulären Punkte des Integrals y; nennt man dieselben a, so giebt es nach Fuchs für jeden Punkt a m particuläre Integrale von der Form

$$(x-a)^{\lambda} \cdot \varphi\,(x-a),$$

wo φ eine in der Umgebung von a eindeutige Function ist, so dass es möglich ist, die Function y um jeden singulären Punkt herumzuführen; die Grössen λ ergeben sich dabei als die Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades. Fallen mehrere der Wurzeln λ zusammen, so hat Fuchs gezeigt, dass die ausfallenden Integrale durch neue Formen, welche $log\,(x-a)$ enthalten, ersetzt werden können. Es soll zunächst unten gezeigt werden, dass es eine allgemeine Methode giebt, nach der die neuen Integrale zu bestimmen sind, wenn unter beliebigen Integralen $F(\lambda_1;\ \lambda_2,\ \lambda_3 . x)$, $F(\lambda_2;\ \lambda_1,\ \lambda_3 . x)$ etc. mehrere dadurch gleich werden, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ etc. wird. Diese allgemeine Methode ist wie für die meisten linearen Differentialgleichungen, so besonders für die vorliegende Gleichung 1) bedeutungsvoll, da es sich zeigen wird, dass die Fundamentalgrössen, aus denen die Integrale gebildet werden, die Wurzeln zweier Gleichungen m^{ten} Grades sind. Neben der Gleichheit der Fundamentalgrössen ist auch noch der Fall berücksichtigt worden,

---

* Borchardt, Bd. 66 S. 134.

dass ihre Differenzen ganze Zahlen werden; sonst sind nur noch die einflussreichen Bedingungen

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0 \text{ oder } b_0 = b_1 = \ldots = b_{r-1} = 0$$

in Rechnung gezogen, alle weiteren Specialuntersuchungen aber zu Gunsten der Uebersichtlichkeit verschoben worden.

Folgende drei Formen sind für die particulären Integrale in Anwendung gekommen:

1. Reihen: Wie sich schon aus der Gestalt der Gleichung

$$2)\ (a_0 + b_0 x)\, x^m \frac{d^m y}{d x^m} + (a_1 + b_1 x)\, x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \ldots + (a_m + b_m x)\, y = 0$$

vermuthen lässt, sind die Reihen nur für die singulären Punkte Null und Unendlich von einfacherer Gestalt; sie erscheinen für diese Punkte als hypergeometrische Reihen m^{ter} Ordnung, wenn man das Binomium als eine solche Reihe 1^{ter} Ordnung und die gewöhnliche hypergeometrische Reihe als die 2^{ter} Ordnung zählt. Von der Entwickelung der Reihen für den dritten singulären Punkt $x = -\frac{a_0}{b_0}$ habe ich Abstand genommen, da die Coefficienten derselben, wie sich aus den bestimmten Integralen entnehmen lässt, aus Functionen gebildet sind, welche man aus hypergeometrischen Reihen m^{ter} Ordnung dadurch erhält, dass man die Variable der Einheit gleich setzt; für die hypergeometrischen Reihen 2^{ter} Ordnung entstehen dadurch keine Schwierigkeiten, da sich $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ bekanntlich durch Gammafunctionen ausdrücken lässt; für hypergeometrische Reihen höherer Ordnung ist mir das aber nur in ganz besonderen Fällen gelungen.

2. Bestimmte Integrale: Bei denselben entstehen verschiedene Formen, je nachdem a_0 und b_0 von Null verschieden sind oder eine der Bedingungen

$$a_0 = \ldots a_{r-1} = 0 \text{ und } b_0 = \ldots b_{r-1} = 0$$

eintritt; in allen Fällen aber erscheinen die Integrale als $m-1$-fache. Eine genauere Discussion eines derselben, in Analogie dessen, auf welches Riemann* bei der Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung hingewiesen und welches Thomae** eingehend betrachtet hat, scheint für eine selbstständige Untersuchung geeigneter.

3. Bestimmte Differentiale: In dieser Weise glaube ich die Differentiale einer Function $\psi(ux)$ nach u, für welche u nach der Ausführung der Differentiationen einen bestimmten Werth erhält, bezeichnen zu dürfen; wird das bestimmte Integral als Rechnungsoperation genommen, so liegt die Analogie auf der Hand. Zu einer umfangreichen Benutzung dieser Formen bedarf es allerdings noch einer sicher gegründeten Theorie complexer Dif-

---

* Riemann: Ueber die durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen, S. 20.

** Schlömilch's Zeitschrift, 14. Jahrg. S. 48.

ferentialquotienten. Auch die bestimmten Differentiale treten hier als $m-1$-fache auf.

Von einer Darstellung der Function y durch vielfache oder allgemeiner durch complexe Differentiale nach x nehme ich Abstand, einerseits, weil Malmstèn * die Methode vollständig angegeben hat, nach der die so gestalteten Integrale der Gleichung 2) gefunden werden können, andererseits, weil für die übersichtliche Aufstellung des allgemeinen Integrals, welches noch der Arbeit Malmstèn's hinzuzufügen wäre, die $2m$ Fundamentalconstanten nicht geeignet erscheinen.

Von besonderem Nutzen in den nachstehenden Betrachtungen zeigt sich die Umformung der Gleichung 2) in eine Form, wie sie Riemann für den Fall $m=2$ aufgestellt hat**; übrigens hat schon Malmstèn auf den Zusammenhang der beiden Formen hingewiesen***, indess dabei das Wesen der auftretenden Constanten nicht richtig erkannt; es sind, wie sich zeigen wird, negative Facultätencoefficienten.

I.

Es seien $F(\lambda_1, x)$, $F(\lambda_2, x)$ Integrale einer Gleichung:

$$f_0 x \frac{d^m y}{d x^m} + f_1 x \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \dots f_m(x)\, y = 0,$$

wo ein Integral ausfällt, weil $\lambda_1 = \lambda_2$ ist; man denke sich die Constanten der Functionen f um Weniges verändert, wodurch dieselben in f' übergehen, so werden die Grössen λ_1 und λ_2 noch nicht zusammenfallen. Da nun $F(\lambda_1, x)$ und $F(\lambda_2, x)$ Integrale sind, so muss

$$f'_0(x) \frac{d^m \cdot \dfrac{F(\lambda_2, x) - F(\lambda_1, x)}{\lambda_2 - \lambda_1}}{d x^m} + \dots + f'_m(x) \frac{F(\lambda_2) - F(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0$$

sein; lässt man die Functionen f' stetig in die Functionen f übergehen, so geht $\dfrac{F(\lambda_2) - F(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ in $\dfrac{dF(\lambda_1)}{d\lambda_1}$ über; fallen drei Grössen λ_1, λ_2, λ_3 zusammen, so kommt man entsprechend zu dem Integral $\dfrac{d^2 F(\lambda_1)}{d\lambda_1^2}$ etc. Werden also r Wurzeln λ bei Integralen $e^{\lambda x}$ oder $(x-a)^\lambda$ gleich, so sind

$$x e^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x} \dots x^{r-1} e^{\lambda x}$$

und andererseits

$$(x-a)^\lambda \log(x-a),\ (x-a)^\lambda \log^2(x-a) \dots (x-a)^\lambda \log^{r-1}(x-a)$$

die neuen Integrale.

Complicirter wird aber die Ableitung, wenn das particuläre Integral nicht nur das eine charakterisirende λ_α, sondern auch die übrigen $\lambda_a, \lambda_b \dots \lambda_\varphi$,

---

* Crelle, Bd. 39 S. 99.

** A. a. O. S. 19.

*** Crelle, Bd. 39 S. 107.

d. h. diejenigen λ in $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$, welche λ_α nicht sind, enthält; sollen die letzteren Grössen das Integral nicht charakterisiren, so muss innerhalb desselben $F(\lambda_\alpha; \lambda_a, \lambda_b \ldots \lambda_q)$ ihre Vertauschung möglich sein, d. h. das Integral muss in Bezug auf $\lambda_a, \lambda_b \ldots \lambda_q$ symmetrisch sein. Man übersieht nun, dass die Differentialquotienten

$$\left[\frac{d^p\, F(\lambda_\alpha; \lambda_a \ldots \lambda_q)}{d\lambda_\alpha^p}\right]_\lambda, \quad \left[\frac{d^p\, F(\lambda_\alpha; \lambda_a \ldots \lambda_q)}{d\lambda_a^{\nu_1}\, d\lambda_b^{\nu_2} \ldots d\lambda_q^{\nu_q}}\right]_\lambda,$$

wo das zur Klammer gesetzte Zeichen bedeuten soll, dass nach der Differentiation alle Grössen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ den gemeinschaftlichen Werth λ annehmen, unverändert bleiben, welche Werthe aus $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ die Grössen $\lambda_\alpha, \lambda_a \ldots \lambda_q$ auch annehmen, wenn es nur verschiedene sind. Setzt man:

$$\lambda_\alpha = \lambda + \varepsilon_\alpha, \; \lambda_a = \lambda + \varepsilon_a \ldots \lambda_q = \lambda + \varepsilon_q,$$

so ist:

$$\begin{aligned}
F(\lambda_\alpha; \lambda_a \ldots \lambda_q) = [F] &+ \left[\frac{dF}{d\lambda_\alpha}\right]\varepsilon_\alpha + \left[\frac{dF}{d\lambda_a}\right]\sum \varepsilon_x \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda^2_\alpha}\right]\varepsilon^2_\alpha + \left[\frac{d^2F}{d\lambda_\alpha\, d\lambda_a}\right]\varepsilon_\alpha \sum \varepsilon_x \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda^2_a}\right]\sum \varepsilon^2_x \\
&+ \left[\frac{d^2F}{d\lambda_a\, d\lambda_b}\right]\sum \varepsilon_x \varepsilon_y \\
&+ \frac{1}{2\,3}\left[\frac{d^3F}{d\lambda^3_\alpha}\right]\varepsilon^3_\alpha + \ldots + \frac{1}{2.3}\left[\frac{d^3F}{d\lambda^3_a}\right]\sum \varepsilon^3_x \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^3F}{d\lambda^2_a\, d\lambda_b}\right]\sum \varepsilon^2_x \varepsilon_y \\
&+ \left[\frac{d^3F}{d\lambda_a\, d\lambda_b\, d\lambda_c}\right]\sum \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z,
\end{aligned} \tag{3}$$

wo zu allen eckigen Klammern λ gehört und die Grössen $x, y, z \ldots$ alle möglichen Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen $a, b \ldots q$ durchzumachen haben. Lässt man α der Reihe nach die Werthe $1, 2 \ldots r$ annehmen, so erhält man die r Integrale, welche mit $F(\lambda_1), F(\lambda_2) \ldots F(\lambda_r)$ bezeichnet werden sollen. Die Integrale werden sämmtlich aus dem ersten gebildet, indem man die Indices desselben um 1, sodann um 2, endlich um $r-1$ erhöht, wobei ε_1 als Erhöhung von ε_r anzusehen ist; jedes Integral kann also auch aus dem vorhergehenden gebildet werden, indem man die Indices desselben um 1 erhöht. Da sich die Differentialquotienten der rechten Seite in der Gleichung 3) durch Erhöhung der Indices, wie oben bemerkt wurde, nicht ändern, so sollen dieselben bei der Erhöhung der Indices unberührt bleiben und als nach dem ersten Integral $F(\lambda_1; \lambda_2 \ldots \lambda_r)$ bestimmt angesehen werden. Denkt man sich nun in dieser Weise die r Integrale nach der Gleichung 3) hingeschrieben, so gehen sie alle für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_r = 0$ in $F(\lambda) = [F]_\lambda$ über, wodurch das erste neue Integral erhalten ist. — Subtrahirt man nun je zwei auf einander folgende der r Gleichungen, so wird sich zeigen, dass der Ausdruck der rechten Seite der neuen $r-1$ Gleichungen je den Factor $\varepsilon_r - \varepsilon_s$ enthält, so dass sich ergiebt:

$$F_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{F(\lambda_1) - F(\lambda_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \left[\frac{dF}{d\lambda_1}\right] - \left[\frac{dF}{d\lambda_2}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda_1^2}\right](\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \left[\frac{d^2F}{d\lambda_1\, d\lambda_2}\right]\sum_{3\ldots r}\varepsilon_\alpha$$
$$- \left[\frac{d^2F}{d\lambda_2\, d\lambda_3}\right]\sum_{3\ldots r}\varepsilon_\alpha - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda_2^2}\right](\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_1^3}\right](\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) + \ldots.$$

In entsprechender Weise denke man sich durch Erhöhung der Indices die übrigen Ausdrücke $F_1(\lambda_2, \lambda_3) \ldots F_1(\lambda_{r-1}, \lambda_r)$ gebildet. Dieselben sind Integrale der Differentialgleichung $f'_0 y^{(m)} + \ldots f'_m y = 0$; lässt man die Functionen f' in f übergehen, so wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_r = 0$; man erhält also $\left[\frac{dF}{d\lambda_1}\right] - \left[\frac{dF}{d\lambda_2}\right]$ als das zweite neue Integral. Nun bilde man entsprechend:

$$F_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{F_1(\lambda_1, \lambda_2) - F_1(\lambda_2, \lambda_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

und die dazu gehörigen Ausdrücke

$$F_2(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \text{ etc.},$$

so erhält man durch $\varepsilon_1 = \ldots \varepsilon_r = 0$ das dritte neue Integral:

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda_1^2}\right] - \left[\frac{d^2F}{d\lambda_1\, d\lambda_2}\right] + \left[\frac{d^2F}{d\lambda_2\, d\lambda_3}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2F}{d\lambda_2^2}\right],$$

und ebenso aus $F_3(\lambda_1 \ldots \lambda_4)$ das vierte neue Integral:

$$\frac{1}{2.3}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_1^3}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_1^2\, d\lambda_2}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_1\, d\lambda_2^2}\right] - \frac{1}{2.3}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_2^3}\right]$$
$$+ \left[\frac{d^3F}{d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3}\right] + \frac{2}{1.2}\left[\frac{d^3F}{d\lambda_2^2\, d\lambda_3}\right]$$
$$- \left[\frac{d^3F}{d\lambda_2\, d\lambda_3\, d\lambda_4}\right].$$

Schreitet man in derselben Weise fort durch Differenzenbildung und Division der jeweiligen ersten Differenz mit

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_5,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_6 \ldots \varepsilon_1 - \varepsilon_r,$$

so erhält man r Integrale von der allgemeinen Form:

$$4)\qquad \sum^{\mu + a\nu_1 + b\nu_2 + \ldots k\nu_k = s} (-1)^{a+b+\ldots k} \frac{\Pi(a+b+\ldots k)}{\Pi(\mu)\,\Pi(a)\,\Pi^a(\nu_1)\ldots\Pi(k)\,\Pi^k(\nu_k)}$$
$$\left[\frac{d^sF}{d\lambda_1^\mu\, d\lambda_{\alpha+1}^{\nu_1} \ldots d\lambda_{\alpha+a}^{\nu_1}\, d\lambda_{\beta+1}^{\nu_2} \ldots d\lambda_{\beta+b}^{\nu_2}\, d\lambda_{\gamma+1}^{\nu_3}\ \cdot}\right]_\lambda^*,$$

wo

---

* $\Pi(0) = 1$ und für ganze Zahlen $\Pi(\mu) = 1.2\ldots\mu$. Ferner $\Pi^k(\nu_k) = [\Pi(\nu_k)]^k$.

$$\lambda_{\alpha+1}\lambda_{\alpha+2}\dots\lambda_{\alpha+a}\lambda_{\beta+1}\lambda_{\beta+2}\dots$$

die auf einander folgenden Grössen aus $\lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_r$ bedeuten und

$$\mu, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_k, a, b \dots k$$

alle möglichen ganzen positiven Werthe mit Einschluss der Null annehmen müssen, welche der Bedingungsgleichung

$$\mu + a\nu_1 + b\nu_2 + \dots k\nu_k = s$$

entsprechen. Für das letzte Integral ist $s=r-1$.

Der Factor

$$\frac{1}{\Pi(\mu)\,\Pi^a(\nu_1)\,\Pi^b(\nu_2)\dots\Pi^k(\nu_k)}$$

rührt von der erweiterten Taylor'schen Reihe her; es ist also noch zu zeigen, dass durch die oben angedeutete Rechnungsoperation des alternirenden Subtrahirens und Dividirens die übrigen Factoren hinzutreten müssen, d. h. es muss für

$$5)\quad \psi_0{}^k(\varepsilon_1) = \varepsilon_1{}^\mu \sum_{2\dots r}^{a\nu_1+b\nu_2+\dots k\nu_k=s-\mu} (\varepsilon_{\alpha+1}\dots\varepsilon_{\alpha+a})^{\nu_1}\,(\varepsilon_{\beta+1}\dots\varepsilon_{\beta+b})^{\nu_2}\,(\varepsilon_{\varkappa+1}\dots\varepsilon_{\varkappa+k})^{\nu_k},$$

wo

$$a, b \dots k, \mu, \nu_1 \dots \nu_k$$

unverändert bleiben,

$$\alpha+1 \dots \alpha+a, \beta+1 \dots \varkappa+1 \dots \varkappa+k$$

alle möglichen Werthe ohne Wiederholung aus den Elementen $2, 3 \dots r$ annehmen,

$$\psi_s^k(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_s) = (-1)^{a+b+\dots k}\frac{\Pi(a+b+\dots k)}{\Pi(a)\,\Pi(b)\dots\Pi(k)}$$

sein, wenn

$$\psi_1{}^k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\psi_0{}^k(\varepsilon_1) - \psi_0{}^k(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad \psi_2{}^k(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \frac{\psi_1{}^k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \psi_1{}^k(\varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

etc. ist.

Zunächst ergiebt sich für den einfachsten Ausdruck $\psi_0{}^0 = \varepsilon_1{}^s$:

$$\psi_1{}^0 = \frac{\varepsilon_1{}^s - \varepsilon_2{}^s}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \sum^{\mu_1+\mu_2=s-1} \varepsilon_1{}^{\mu_1}\varepsilon_2{}^{\mu_2},$$

wo μ_1 und μ_2 alle möglichen positiven ganzen Zahlen, mit Einschluss der Null, werden, welche der Bedingung

$$\mu_1 + \mu_2 = s - 1$$

genügen; darnach ist:

$$\psi_2{}^0 = \frac{\sum^{\mu_1+\mu_2=s-1}\varepsilon_1{}^{\mu_1}\varepsilon_2{}^{\mu_2} - \sum^{\mu_1+\mu_2=s-1}\varepsilon_2{}^{\mu_1}\varepsilon_3{}^{\mu_2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \sum^{\mu_1+\mu_2+\mu_3=s-2}\varepsilon_1{}^{\mu_1}\varepsilon_2{}^{\mu_2}\varepsilon_3{}^{\mu_3},$$

also schliesslich

$$\psi^0{}_{s-1} = \sum^{\mu_1+\dots\mu_{s-1}=1}\varepsilon_1{}^{\mu_1}\dots\varepsilon_{s-1}^{\mu_{s-1}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_{s-1}$$

und somit

$$\psi^0_s = \frac{(\varepsilon_1 + \ldots \varepsilon_{s-1}) - (\varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_s)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_s} = 1.$$

Da nun offenbar

$$\psi^1_0 = \sum_{2\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+1}\, \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+2} = \sum_{1\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+1}\, \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+2} - \varepsilon_1^{\nu_1} \sum_{1\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+1} + \varepsilon_1^{2\nu_1},$$

$$\psi^2_0 = \sum_{2\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha}\, \varepsilon^{\nu_2}_{\beta} = \sum_{1\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha}\, \varepsilon^{\nu_2}_{\beta} - \varepsilon_1^{\nu_1} \sum_{1\ldots r} \varepsilon^{\nu_2}_{\beta} - \varepsilon_1^{\nu_2} \sum_{1\ldots r} \varepsilon^{\nu_1}_{\alpha} + 2\,\varepsilon_1^{\nu_1+\nu_2}$$

ist, wo die Summenausdrücke auf der rechten Seite Grössen darstellen, welche bei der Erhöhung aller Indices um 1 unverändert bleiben, so sieht man, dass bei dem Fortschreiten zu höheren ψ_s die ersten Glieder verschwinden müssen, da der Exponent von ε_1 in ihnen niedriger ist, als im letzten Gliede; $\psi^1_{2\nu_1}$ und $\psi^2_{\nu_1+\nu_2}$ werden also je dem Coefficienten des letzten Gliedes gleich, so dass es genügt, die Aufmerksamkeit auf diesen zu richten: Formt man ψ_0^k in derselben Weise, wie die Ausdrücke ψ_0^1, ψ_0^2 um, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{-\mu}\, \psi_0^k = & \sum_{1\ldots r} - \varepsilon_1^{\nu_1} \sum_{1\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+1}} - \varepsilon_1^{\nu_2} \sum_{1\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_2}_{\beta+1}} - \ldots - \varepsilon_1^{\nu_k} \sum_{1\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_k}_{\varkappa+1}} \\
6) \qquad & + \varepsilon_{1\,2\nu_1} \sum_{1\ldots r} \overline{(\varepsilon_{\alpha+1} \cdot \varepsilon_{\alpha+2})^{\nu_1}} + \ldots \\
& \ldots + 2\,\varepsilon_1^{\nu_1+\nu_2} \sum_{1\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+1}\, \varepsilon^{\nu_2}_{\beta+1}} + \ldots \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& (-1)^{a+b+\ldots k} \frac{\Pi(a+b+\ldots k)}{\Pi(a)\ldots\Pi(k)}\, \varepsilon_1^{a\nu_1+b\nu_2+\ldots k\nu_k},
\end{aligned}$$

wo der Strich andeutet, dass das dadurch bezeichnete Element in der Summengrösse des Ausdrucks 5) fehlt. Durch Induction überzeugt man sich von der Richtigkeit des Endgliedes. Es sei:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^{-\mu}\, \psi_0^k(a+1) = & \sum_{2\ldots r} (\varepsilon_{\alpha+1} \ldots \varepsilon_{\alpha+a+1})^{\nu_1} \ldots (\varepsilon_{\varkappa+1} \ldots \varepsilon_{\varkappa+k})^{\nu_k} \\
= & \sum_{1\ldots r} - \varepsilon_1^{\nu_1} \sum_{2\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_1}_{\alpha+a+1}} - \varepsilon_1^{\nu_2} \sum_{2\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_2}_{\beta+1}} - \ldots \\
& \ldots - \varepsilon_1^{\nu_k} \sum_{2\ldots r} \overline{\varepsilon^{\nu_k}_{\varkappa+1}};
\end{aligned}$$

die auf der rechten Seite auftretenden Summenausdrücke können nach Gleichung 6) umgeformt werden und geben dann einen Endausdruck mit der Potenz $\varepsilon_1^{(a+1)\nu_1+b\nu_2+\ldots k\nu_k}$, zu der folgende Coefficientensumme gehört:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{a+1+b+\ldots+k}\, \Pi(a+b+\ldots k) \left[\frac{1}{\Pi(a)\,\Pi(b)\ldots\Pi(k)}\right. \\
& \left. + \frac{1}{\Pi(a+1)\,\Pi(b-1)\ldots\Pi(k)} + \ldots + \frac{1}{\Pi(a+1)\,\Pi(b)\ldots\Pi(k-1)}\right] \\
= & (-1)^{a+1+b+\ldots+k} \frac{\Pi(a+1+b+\ldots+k)}{\Pi(a+1)\,\Pi(b)\ldots\Pi(k)}.
\end{aligned}$$

Entsprechend ist der Ausdruck $\varepsilon_1^{-\mu}\,\psi_0^{k+1}$ zu behandeln, wo unter das Summenzeichen der Gleichung 5) noch ein Element $\varepsilon_\lambda^{\nu_l}$ tritt.

Hat nun das erste der r gleichen Integrale die Form

$$(x-a)^{\lambda_1}\,\varphi\,(\lambda_1\,;\;\lambda_2\ldots\lambda_r),$$

so werden die r neuen Integrale folgende:

$$(x-a)^{\lambda}\,\varphi\,.$$

$$(x-a)^{\lambda}\,[\varphi_1+log(x-a)\,\varphi]$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$7)\qquad (x-a)^{\lambda}\Big[\varphi_{r-1}+log\,(x-a)\,\varphi_{r-2}+\frac{1}{\Pi(2)}log^2(x-a)\,\varphi_{r-3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{\Pi\,(r-2)}\,log^{r-2}(x-a)\,\varphi_1$$

$$+\frac{1}{\Pi\,(r-1)}\,log^{r-1}\,(x-a)\,.\,\varphi\Big],$$

wo φ_s allgemein aus dem Ausdruck 4) erhalten wird, indem man φ an die Stelle von F setzt. Es zeigt sich also, dass nicht nur die zu den höchsten Potenzen von $log\,(x-a)$ gehörigen φ in allen r Integralen, wie schon Fuchs bemerkt hat*, unter einander gleich sind, sondern auch die zu den nächst höheren Potenzen gehörigen und ebenso die darauf folgenden u. s. w. — Uebrigens hat Borchardt** schon einmal die zweite Form

$$\frac{dF}{d\lambda_1}-\frac{dF}{d\lambda_2}$$

bei zwei zusammenfallenden Integralen in Anwendung gebracht, um ein von Spitzer gegebenes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung abzuleiten.

II.

Um der Gleichung 2) die von Riemann bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung gebrauchte Form zu geben und um Gleichungen der neuen Form in die alte Form 2) zu verwandeln, gebraucht man folgende Formeln:

$$x^n\,\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n y}{(d.\,log\,x)^n}-C_1^{\,n}\,\frac{d^{n-1}y}{(d.\,log\,x)^{n-1}}+C_2^{\,n}\,\frac{d^{n-2}y}{(d.\,log\,x)^{n-2}}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\,C_{n-1}^{n}\,\frac{dy}{d.\,log\,x},$$

$$8)\qquad \frac{d^n y}{(d.\,log\,x)^n}=C_0^{-n}\,\frac{d^n y}{dx^n}\,x^n+C_1^{-n+1}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\,x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}^{-1}\,\frac{dy}{dx}\,x.$$

wo die Constanten C die Facultätencoefficienten in der von Schlömilch festgestellten Bezeichnung sind, also die C_k^n die Coefficienten der Gleichung

---

* Borchardt, Bd. 66 S. 136 und Bd. 68 S. 356.

** Borchardt, Bd. 57 S. 79 und 81.

$$u^{n|1} = u(u+1)\dots(u+n-1) = C_0^n u^n + C_1^n u^{n-1} + C_2^n u^{n-2} + \dots + u C_{n-1}^n$$

sind, die C_k^{-n} aber die Form haben:

$$C_k^{-n} = \frac{1}{\Pi(n)}\left[n_0 n^{n+k} - n_1(n-1)^{n+k} + n_2(n-2)^{n+k} - \dots\right.$$

Die zweite Gleichung unter 8) ist es, welche **Malmstèn*** ableiten wollte; er hielt aber die Coefficienten für Summen von Producten, die durch Combinationen mit Wiederholung aus den ganzen Zahlen gebildet sind. — Die Gleichungen 8) sind leicht durch Induction zu beweisen, wenn man sich auf die Beziehungen

$$C_p^n + n C_{p-1}^n = C_p^{n+1},$$

$$C_p^{-n+p} + (n+1-p)\, C_{p-1}^{-n-1+p} = C_p^{-n-1+p}$$

stützt.** Uebrigens wäre die zweite Gleichung unter 8) auch nach den allgemeinen Gleichungen*** über Differentiation der zusammengesetzten Fnnctionen abzuleiten. — Mit Hilfe der ersten Gleichung unter 8) nimmt die Differentialgleichung 2) folgende Form an:

$$9)\quad (d_0 + e_0 x)\frac{d^m y}{(d.\log x)^m} + (d_1 + e_1 x)\frac{d^{m-1} y}{(d.\log x)^{m-1}} + \dots + (d_m + e_m x)y = 0,$$

wo

$$10\text{a})\quad \begin{aligned} d_p &= C_0^{m-p} a_p - C_1^{m-p+1} a_{p-1} + C_2^{m-p+2} a_{p-2} - \dots (-1)^p C_p^m a_0, \\ e_p &= C_0^{m-p} b_p - \quad \dots\dots\dots\dots \quad (-1)^p C_p^m b_0. \end{aligned}$$

Führt man Gleichung 9) mit Hilfe der zweiten Gleichung unter 8) auf die Form 2) zurück, so erhält man:

$$10\text{b})\quad \begin{aligned} a_p &= d_p + C_1^{-m+p} d_{p-1} + C_2^{-m+p} d_{p-2} + \dots + C_p^{-m+p} d_0, \\ b_p &= e_p + \quad \dots\dots\dots\dots \quad + C_p^{-m+p} e_0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 10a) und 10b) ergeben sich bei Benutzung einer beliebigen Variablen u noch folgende merkwürdige Beziehungen:

$$10\text{c})\quad \begin{aligned} &a_0 u^{m|-1} + a_1 u^{m-1|-1} + \dots + a_{m-1} u^{1|-1} + a_m = d_0 u^m + d_1 u^{m-1} + \dots \\ &\qquad \dots + d_{m-1} u + d_m = d_0(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\dots(u-\alpha_m), \\ &b_0 u^{m|-1} + b_1 u^{m-1|-1} + \dots + b_m = e_0 u^m + e_1 u^{m-1} + \dots + e_m \\ &\qquad = e_0(u-\beta_1)(u-\beta_2)\dots(u-\beta_m); \end{aligned}$$

die Wurzeln α und β werden sich später als die eigentlichen Fundamentalconstanten der particulären Integrale ergeben. — Die Beziehungen 10a), b) und c) finden erklärlicherweise selbstständig, unabhängig von der Differentialgleichung, statt; so kann man z. B. aus 10a) und 10c) durch Determinantenbeziehungen 10b) ableiten.

Durch die Form 9) kann man die allgemeine Differentialgleichung

$$1\text{a})\quad (a_0 + b_0 x^\varrho)x^m \frac{d^m y}{dx^m} + (a_1 + b_1 x^\varrho)x^{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + (a_m + b_m x^\varrho)\, y = 0$$

---

* Crelle, Bd. 39 S. 99.

** In Bezug auf die Grössen C siehe Schlömilch, Compendium, Theil II S. 29 u. 30.

*** Schlömilch, Compendium, Theil II S. 5, Gleichung 5 u. 6.

auf den einfachen Fall $\varrho=1$ zurückführen. Dieselbe geht nach 8) und 9) über in

$$(d_0+e_0x^\varrho)\frac{d^my}{(d.\log x)^m}+(d_1+e_1x^\varrho)\frac{d^{m-1}y}{(d.\log x)^{m-1}}+\ldots+(d_m+e_mx^\varrho)\,y=0;$$

setzt man $x^\varrho=\xi$, so erhält man die Gleichung

$$11)\quad (d_0+e_0\xi)\varrho^m\frac{d^my}{(d.\log\xi)^m}+(d_1+e_1\xi)\varrho^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{(d.\log\xi)^{m-1}}+\ldots+(d_m+e_m\xi)y=0,$$

welche mit Gleichung 9) vollkommen übereinstimmt und nur darin abweicht, dass ihre Fundamentalconstanten

$$\frac{\alpha_1}{\varrho},\ \frac{\alpha_2}{\varrho}\ldots\frac{\alpha_m}{\varrho}\ \text{und}\ \frac{\beta_1}{\varrho},\ \frac{\beta_2}{\varrho}\ldots\frac{\beta_m}{\varrho}$$

sind und dass an Stelle von d_0 und e_0 die Werthe von $d_0\varrho^m$ und $e_0\varrho^m$ auftreten.

III.

Soll das Integral der Gleichung 2) in der Form

$$y=x^\lambda\sum_{n=0}^{n=\infty}A_nx^n$$

gegeben werden, so setze man:

$$\varphi_n(a)=a_0(\lambda+n)^{m|-1}+a_1(\lambda+n)^{m-1|-1}+\ldots+a_{m-1}(\lambda+n)+a_m,$$

also nach 10c):

$$\begin{aligned}\varphi_n(a)&=d_0(\lambda+n)^m+d_1(\lambda+n)^{m-1}+\ldots+d_{m-1}(\lambda+n)+d_m\\&=d_0(\lambda+n-\alpha_1)(\lambda+n-\alpha_2)\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (\lambda+n-\alpha_m);\end{aligned}$$

bezeichnet $\varphi_n(b)$ die entsprechend aus b oder e gebildete Function, so ist:

$$\begin{aligned}A_n&=-\frac{\varphi_{n-1}(b)}{\varphi_n(a)}A_{n-1}\\&=(-1)^n\frac{\varphi_{n-1}(b)\,\varphi_{n-2}(b)\ldots\varphi_0(b)}{\varphi_n(a)\,\varphi_{n-1}(a)\ldots\varphi_1(a)}A_0\\&=(-1)^n\frac{(\lambda-\beta_1)^{n|1}(\lambda-\beta_2)^{n|1}\ldots(\lambda-\beta_m)^{n|1}}{(\lambda-\alpha_1+1)^{n|1}(\lambda-\alpha_2+1)^{n|1}\ldots(\lambda-\alpha_m+1)^{n|1}}\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^nA_0\end{aligned}$$

und

$$\varphi_0(a)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_m)=0.$$

Bei der Ableitung von A_n ist vorausgesetzt, dass ausser $\varphi_0(a)$ kein anderes $\varphi(a)$ der Null gleich sei.

Bezeichnet man die m particulären Integrale mit $y_1, y_2\ldots y_m$, so ist mit Fortlassung des constanten Factors:

$$12)\quad y_q=x^{\alpha_q}F\begin{pmatrix}\alpha_q-\beta_1,\ \alpha_q-\beta_2\ldots\alpha_q-\beta_m & \frac{-b_0}{a_0}x\\ \alpha_q-\alpha_1+1,\ \alpha_q-\alpha_2+1\ldots\alpha_q-\alpha_m+1 & \end{pmatrix}$$

wenn man mit

$$F\begin{pmatrix}a_1,\ a_2\ldots a_m & u\\ b_1,\ b_2\ldots b_m & \end{pmatrix}$$

die hypergeometrische Reihe m^{ter} Ordnung:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_1^{n|1} \dots a_m^{n|1}}{b_1^{n|1} \dots b_m^{n|1}} u^n$$

bezeichnet.

Entsprechend ergeben sich m particuläre Integrale nach x^{-1}:

$$13)\quad y_q = x^{\beta_q} F\left(\begin{matrix} \alpha_1 - \beta_q,\ \alpha_2 - \beta_q \dots \alpha_m - \beta_q \\ \beta_1 - \beta_q + 1,\ \beta_2 - \beta_q + 1 \dots \beta_m - \beta_q + 1 \end{matrix}\ \frac{-a_0}{b_0} x^{-1}\right),$$

wo q alle Werthe von 1 bis m annimmt. Aus der Betrachtung von

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)_{n=\infty}$$

ergiebt sich über das Convergenzgebiet der Reihen Folgendes: Beschreibt man um den Punkt Null einen Kreis, dessen Peripherie durch den zweiten singulären Punkt $x = -\frac{a_0}{b_0}$ geht, so gelten die Integrale 12) innerhalb, die Integrale 13) ausserhalb desselben.

Ist $b_0 = b_1 = \dots = b_{r-1} = 0$, so erhält man, wenn $\beta_{r+1} \dots \beta_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$b_r u^{m-r|1} + b_{r+1} u^{m-r-1|1} + \dots + b_m = 0$$

sind, die m Integrale:

$$14)\quad y_q = x^{\alpha_q} F\left(\begin{matrix} \alpha_q - \beta_{r+1},\ \alpha_q - \beta_{r+2} \dots \alpha_q - \beta_m \\ \alpha_q - \alpha_1 + 1,\ \alpha_q - \alpha_2 + 1 \dots \alpha_q - \alpha_m + 1 \end{matrix}\ \frac{-b_r}{a_0} x\right),$$

welche in der ganzen Ebene mit Ausschluss des Punktes Unendlich gelten.

Ist $a_0 = a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$, so erhält man, wenn $\alpha_{r+1} \dots \alpha_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$a_r u^{m-r|1} + a_{r+1} u^{m-r-1|1} + \dots + a_m = 0,$$

die m Integrale:

$$15)\quad y_q = x^{\beta_q} F\left(\begin{matrix} \alpha_{r+1} - \beta_q,\ \alpha_{r+2} - \beta_q \dots \alpha_m - \beta_q \\ \beta_1 - \beta_q + 1,\ \beta_2 - \beta_q + 1 \dots \beta_m - \beta_q + 1 \end{matrix}\ \frac{(-1)^{r+1} a_r}{b_0} x^{-1}\right),$$

welche in der ganzen Ebene mit Ausschluss des Punktes Null gelten.

Die Reihenausdrücke 12) und 14) werden unbrauchbar, wenn $\alpha_q - \alpha_s$, die in 13) und 15), wenn $\beta_s - \beta_q$ eine negative ganze Zahl wird. Indess bleibt die Methode unverletzt: Bei der Ableitung der Integrale 12) und 14) war vorausgesetzt, dass alle $\varphi(a)$ ausser $\varphi_0(a)$ von Null verschieden seien; entsprechend liegt der Ableitung der Integrale 13) und 15) die Voraussetzung zu Grunde, dass alle $\varphi(b)$ ausser $\varphi_0(b)$ von Null verschieden sind. Ist nun aber in den Reihenausdrücken 12) und 14) etwa $\varphi_s(a) = 0$, so wird:

$$A_n = (-1)^{n-s} \frac{\varphi_{n-1}(b)\ \varphi_{n-2}(b) \dots \varphi_s(b)}{\varphi_n(a)\ \varphi_{n-1}(a) \dots \varphi_{s+1}(a)} A_s$$

und

$$A_{s-1} = A_{s-2} = \dots = A_0 = 0;$$

für das ausfallende Integral y_r, bei welchem $\alpha_r - \alpha_s = -s$ ist, erhält man also, mit Fortlassung des constanten Factors, das neue Integral

$$12a)\quad y'_r = x^{\alpha_r + s} F\left(\begin{matrix} \alpha_r - \beta_1 + s \dots \alpha_r - \beta_m + s \\ \alpha_r - \alpha_1 + s + 1 \dots \alpha_r - \alpha_m + s + 1 \end{matrix}\ \frac{-b_0}{a_0} x\right).$$

Werden in einem Integral mehrere Ausdrücke $\alpha_r - \alpha_s$, $\alpha_r - \alpha_i$ etc. negative ganze Zahlen, so hat man bei der Bildung des Integrals 12a) nur diejenige negative Zahl zu berücksichtigen, welche den grössten absoluten Werth hat.

Bei 13) erhält man für das ausfallende Integral y_r, für welches

$$\beta_s - \beta_r = -s$$

ist:

$$13\text{a})\quad y'_r = x^{\beta_r - s}\, F\left(\begin{matrix}\alpha_1 - \beta_r + s \ldots \alpha_m - \beta_r + s \\ \beta_1 - \beta_r + s + 1 \ldots \beta_m - \beta_r + s + 1\end{matrix}\; \frac{-a_0}{b_0}\, x^{-1}\right).$$

Entsprechend sind bei 14) und 15) die ausfallenden Integrale zu ersetzen.

IV.

Ist $z = \psi(x)$ ein Integral der Gleichung

$$16)\quad (f_0 + g_0 x)\frac{d^{m-1} z}{(d.\log x)^{m-1}} + (f_1 + g_1 x)\frac{d^{m-2} z}{(d.\log x)^{m-2}} + \ldots + (f_{m-1} + g_{m-1} x) z = 0,$$

so ist

$$1)\qquad y = \int (u - A)^\gamma (B - u)^\delta\, \psi[(u - A)x]\, du,$$

wo die Grenzen des Integrals 2 Wurzeln der Gleichung

$$(u - A)^{\gamma+1} (B - u)^\delta\, \psi\, [(u - A)\, x] = 0$$

in Bezug auf u sind, ein Integral der Gleichung

$$9)\qquad (d_0 + e_0 x)\frac{d^m y}{(d.\log x)^m} + \ldots + (d_m + e_m x)\, y = 0,$$

indem mit Hilfe einer beliebigen Variablen u die Beziehungen zwischen d, e und f, g, γ, δ ausgedrückt werden durch

$$17)\quad \begin{aligned} \varphi(d, u) &= d_0 u^m + d_1 u^{m-1} + \ldots + d_m \\ &= (u + \gamma + \delta + 1)\,(f_0 u^{m-1} + f_1 u^{m-2} + \ldots + f_{m-1}), \\ \varphi(e, u) &= e_0 u^m + c_1 u^{m-1} + \ldots + e_m \\ &= (B - A)\,(u + \gamma + 1)\,(g_0 u^{m-1} + g_1 u^{m-2} + \ldots + g_{m-1}); \end{aligned}$$

2) ist

$$y = \int (u - A)^\gamma\, e^{A-u}\, \psi\left(\frac{x}{u - A}\right) du$$

mit Grenzen aus

$$(u - A)^{\gamma+1}\, e^{A-u}\, \psi\left(\frac{x}{u - A}\right) = 0,$$

ein Integral der Gleichung:

$$9\text{a})\quad d_0\frac{d^m y}{(d.\log x)^m} + (d_1 + g_0 x)\frac{d^{m-1} y}{(d.\log x)^{m-1}} + \ldots + (d_m + g_{m-1} x)\, y = 0,$$

wo

$$\varphi(d, u) = (\gamma + 1 - u)\,(f_0 u^{m-1} + f_1 u^{m-2} + \ldots + f_{m-1})$$

ist.

3) ist

$$y = \int (u - A)^\gamma\, e^{A-u}\, \psi[(u - A)]\, x\, du,$$

mit Grenzen aus

$$(u - A)^{\gamma+1}\, e^{A-u}\, \psi[(u - A)\, x] = 0,$$

ein Integral der Gleichung

$$9\text{b})\quad e_0 x\frac{d^m y}{(d.\log x)^m} + (f_0 + e_1 x)\frac{d^{m-1} y}{(d.\log x)^{m-1}} + \ldots + (f_{m-1} + e_m x)\, y = 0,$$

wo

$$\varphi(e,u) = (\gamma + 1 + u)(g_0 u^{m-1} + g_1 u^{m-2} + \ldots + g_{m-1})$$

ist.

Beweis. 1. Man setze in 16) für z den Werth $\psi(x)$ ein und dann $(u - A)x$ an die Stelle von x; multiplicirt man nun beide Seiten mit

$$(u - A)^\gamma (B - u)^{\delta - 1}$$

und integrirt nach u zwischen den in 1) angegebenen Grenzen, so hat man auf der linken Seite die beiden Integrale

$$J = \int (u - A)^\gamma (B - u)^{\delta - 1} \psi(u - A)x\,du$$

und

$$J_1 = \int (u - A)^{\gamma+1} (B - u)^{\delta - 1} \psi(u - A)x\,du,$$

für welche die Beziehung gilt:

$$\left[f_0 \frac{d^{m-1} J}{(d.\log x)^{m-1}} + f_1 \frac{d^{m-2} J}{(d.\log x)^{m-2}} + \ldots + f_{m-1} J\right]$$
$$+ x\left[g_0 \frac{d^{m-1} J_1}{(d.\log x)^{m-1}} + g_1 \frac{d^{m-2} J_1}{(d.\log x)^{m-2}} + \ldots + g_{m-1} J_1\right] = 0.$$

Da nun

$$\frac{d.\psi(v.x)}{d.\log x} = \frac{d\,\psi(v.x)}{d.\log v}$$

ist, so wird

$$\frac{dy}{d.\log x} = \int (u - A)^{\gamma+1} (B - u)^\delta \frac{d.\psi(u - A)x}{du} du$$

oder nach partieller Integration:

$$\frac{dy}{d.\log x} = -(\gamma + 1)y + \delta.J_1;$$

andererseits ist

$$J_1 = (B - A)J - y,$$

also

$$\delta J_1 = \frac{dy}{d.\log x} + (\gamma + 1)y,$$

$$\delta(B - A)J = \frac{dy}{d.\log x} + (\gamma + \delta + 1)y.$$

Setzt man diese Werthe in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich:

$$d_r = f_r + (\gamma + \delta + 1)f_{r-1}, \qquad d_0 = f_0, \qquad d_m = (\gamma + \delta + 1)f_{m-1},$$
$$e_r = [g_r' + (\gamma + 1)g_{r-1}](B - A), \quad e_0 = g_0(B - A), \quad e_m = (\gamma + 1)e_{m-1}(B - A).$$

2. Man setze $\frac{x}{u - A}$ in die Gleichung 16) ein, multiplicire mit $u^{\gamma+1} e^{A-u}$ und integrire, so erhält man zu den Coefficienten f gehörig das Integral

$$J = \int (u - A)^{\gamma+1} e^{A-u} \psi\left(\frac{x}{u - A}\right) du$$

und zu den Coefficienten g gehörig das ad 2) mit y bezeichnete Integral; es ergiebt sich:

$$\frac{dy}{d.\log x} = -\int (u-A)^{\gamma+1} e^{A-u} \frac{d.\psi\left(\frac{x}{u-A}\right)}{du} du$$
$$= (\gamma+1)\, y - J;$$

also, wenn man für J den sich hieraus ergebenden Werth einsetzt, muss

$$d_r = -f_r + (\gamma+1) f_{r-1}$$

werden.

3) Man setze $(u-A)\,x$ in die Gleichung 16) ein, multiplicire mit $(u-A)^\gamma e^{A-u}$ und integrire, dann gehört zu den Coefficienten f das ad 3) mit y bezeichnete Integral und bei den Coefficienten g tritt das Integral

$$J = \int (u-A)^{\gamma+1} e^{A-u} \psi(u-A)\, x\, dx$$

auf.

Es ist

$$\frac{dy}{d.\log x} = \int (u-A)^{\gamma+1} e^{A-u} \frac{d.\psi(u-A)\,x}{du} du$$
$$= -(\gamma+1)\, y + J.$$

Setzt man den hieraus für J erhaltenen Werth ein, so wird:

$$e_r = g_r + (\gamma+1)\, g_{r-1}.$$

Mit Hilfe der drei aufgestellten Theoremata lässt sich nun die Differentialgleichung 1) in den drei verschiedenen Fällen durch bestimmte Integrale integriren.

I. a_0 und b_0 sind von Null verschieden.

Der Kürze wegen sollen Differentialgleichungen s^{ter} Ordnung, welche die Form 9) mit näher zu bezeichnenden Coefficienten haben, durch $D^s = 0$ bezeichnet werden. Führt man nun die Differentialgleichung 2) in die Form 9) $D^m = 0$ mit den Coefficienten d und e über, so ist nach dem ersten Theorema dieses Abschnittes

$$y = \int u^{-\beta_1 - 1} (1-u)^{\beta_1 - \alpha_1} F_{m-1}(ux)\, du$$

mit Grenzen aus

$$u^{-\beta_1} (1-u)^{\beta_1-\alpha_1} F_{m-1}(ux) = 0,$$

wo $F_{m-1}(x)$ ein Integral der Gleichung $D^{m-1} = 0$ ist, deren Coefficienten die Constanten in den Reihen

$$\frac{\varphi(d,u)}{u-\alpha_1} \text{ und } \frac{\varphi(e,u)}{u-\beta_1}$$

sind. Beide Ausdrücke stellen Reihen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nach u vor, da nach 10c) und 17) α_1 und β_1 Wurzeln resp. der Gleichungen $\varphi(d,u)=0$ und $\varphi(e,u)=0$ sind.

Bringt man nun Theor. 1 der Reihe nach $m-1$-mal in Anwendung, so wird

$$y = \int \prod_{r=1}^{r=m-1} \left[u_r^{-\beta_r-1} (1-u_r)^{\beta_r-\alpha_r}\right] F_1(u_1.u_2 \ldots u_{m-1}\, x)\, du_1\, du_2 \ldots du_{m-1},$$

wo Π, wie man wohl sieht, als Productzeichen gebraucht ist, $F_1(x)$ aber ein Integral der Gleichung

$$(d_0+e_0 x)\frac{d.F_1}{d.\log x}-(d_0\alpha_m+e_0\beta_m x)F_1=0,$$

d. h.

$$F_1=x^{\alpha_m}(d_0+e_0 x)^{\beta_m-\alpha_m}$$

ist.

Das particuläre Integral y_m wird also schliesslich

18) $$y_m=x^{\alpha_m}\int\prod_{r=1}^{r=m-1}[u_r^{\alpha_m-\beta_r-1}(1-u_r)^{\beta_r-\alpha_r}] \\ (d_0+e_0 u_1\dots u_{m-1}x)^{\beta_m-\alpha_m}du_1\dots du_{m-1},$$

wo die Grenzen folgende sind:

für u_1 zwei Wurzeln aus: $u_1^{\alpha_m-\beta_1}(1-u_1)^{\beta_1-\alpha_1}$
$(d_0+e_0 u_1\dots u_{m-1}x)^{\beta_m-\alpha_m}=0$,

„ u_2 „ „ „ $u_2^{\alpha_m-\beta_2}(1-u_2)^{\beta_2-\alpha_2}$
$(d_0+e_0 u_2\dots u_{m-1}x)^{\beta_m-\alpha_m}=0$,

. . . .

. . . .

. . . .

für u_{m-1} zwei Wurzeln aus: $u_{m-1}^{\alpha_m-\beta_{m-1}}(1-u_{m-1})^{\beta_{m-1}-\alpha_{m-1}}$
$(d_0+e_0 u_{m-1}x)^{\beta_m-\alpha_m}=0$.

Bedenkt man, dass α_m und β_m jede beliebige der m Wurzeln α und β, α_r und β_r aber jede beliebige der $m-1$ Wurzeln α und β, welche α_m und β_m nicht sind, sein können, so erkennt man, dass der Ausdruck 18), abgesehen von den verschiedenen Grenzwerthen $0, 1, \infty$ und $\frac{1}{kx}$, $[\Pi(m)]^2$ verschiedene Integrale darstellt.

Entwickelt man $(d_0+e_0u_1\dots u_{m-1}x)^{\beta_m-\alpha_m}$ nach Potenzen von $\frac{e_0}{d_0}x$, was bei den Integrationsgrenzen 0 und 1 immer gestattet ist, so lange

$$\mathrm{mod}\,x<\mathrm{mod}\,\frac{d_0}{e_0}$$

ist, und drückt die von 0 bis 1 genommenen Integrale durch Gammafunctionen aus, so erhält man bis auf einen constanten Factor die Reihen 12); entwickelt man nach $\frac{d_0}{e_0 x}$, wozu

$$\mathrm{mod}\,x>\mathrm{mod}\,\frac{d_0}{e_0}$$

sein muss, so erhält man die Reihen 13).

Wird $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$, so erhält man nach 4), indem man der Kürze wegen

$$d_0+e_0u_2u_3\dots u_m x=X$$

setzt, an Stelle der ausfallenden Integrale die drei neuen:

$$y_1 = \left[x^{\alpha_1} \int U\, du_2 \ldots du_m\right]_{\alpha_3=\alpha_2=\alpha_1},$$
$$y_2 = \left[x^{\alpha_1} \int U \log \frac{x u_2 \ldots u_m (1-u_2)}{X}\, du_2 \ldots du_m\right]_{\alpha_3=\alpha_2=\alpha_1},$$
$$y_3 = \left[x^{\alpha_1} \int U \left(\log^2 \frac{x.u_2\ldots u_m}{X} + 2 \log \frac{x.u_2\ldots u_m(1-u_3)}{X} \log (1-u_3)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \log^2 (1-u_2)\right) du_2 \ldots du_m\right]_{\alpha_3=\alpha_2=\alpha_1},$$

wo

$$U = \prod_{r=2,\, s=1}^{r=m,\, s=m-1} \left[u_r^{\alpha_1-\beta_s-1} (1-u_r)^{\beta_s-\alpha_r}\right] X^{\beta_m-\alpha_1}$$

ist.

Für $\beta_1=\beta_2=\beta_3$ erhält man die neuen Formen

$$y_1 = \left[x^{\alpha_m} \int V\, du_2 \ldots du_m\right]_{\beta_3=\beta_2=\beta_1},$$
$$y_2 = \left[x^{\alpha_m} \int V \log \frac{X\, u_2}{1-u_2}\, du_2 \ldots du_m\right]_{\beta_3=\beta_2=\beta_1},$$
$$y_3 = \left[x^{\alpha_m} \int V \left(\log^2 X - 2 \log \frac{X.u_3}{1-u_3} \log \frac{1-u_2}{u_2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \log^2 \frac{1-u_2}{u_2}\right) du_2 \ldots du_m\right]_{\beta_3=\beta_2=\beta_1},$$

wo

$$V = \prod_{r=1,\, s=2}^{r=m-1,\, s=m} \left[u_s^{\alpha_m-\beta_s-1} (1-u_s)^{\beta_s-\alpha_r}\right] X^{\beta_1-\alpha_m}$$

ist.

II. $b_0 = b_1 = \ldots = b_{r-1} = 0.$

Für diesen, wie für den nächsten Fall lassen sich drei verschiedene Integralformen aufstellen, wenn r nicht gleich m ist; wird $r=m$, so ist die erste Form nicht möglich:

A) Man führe die erste Differentialgleichung durch 8) über in die Form:

$$19)\quad d_0 \frac{d^m y}{(d.\log x)^m} + d_1 \frac{d^{m-1} y}{(d.\log x)^{m-1}} + \ldots + (d_r + e_r x) \frac{d^{m-r} y}{(d.\log x)^{m-r}} + \ldots$$
$$\ldots + (d_m + e_m x)\, y = 0,$$

wo die Grössen d ihre frühere Bedeutung, gemäss 10 a), haben, für die Grössen e aber folgende Beziehungen gelten:

$$e_{r+p} = C_0^{m-r-p} b_{r+p} - C_1^{m-r-p+1} b_{r+p-1} + \ldots + (-1)^p C_p^{m-r} b_r,$$
$$\psi(e,u) = b_r u^{m-r|1} + b_{r+1} u^{m-r-1|1} + \ldots + b_m = e_r u^{m-r} + e_{r+1} u^{m-r-1} + \ldots$$
$$\ldots + e_m = e_r (u-\beta_{r+1})(u-\beta_{r+2}) (u-\beta_m).$$

Nach Theor. 2) ergiebt sich als Integral der Gleichung 19):

$$y = \int u_1^{\alpha_1 - 1} e^{-u_1} F_{m-1}\left(\frac{x}{u_1}\right) d u_1$$

mit den Grenzen aus $u^{\alpha_1} e^{-u} F_{m-1}\left(\frac{x}{u}\right) = 0$, wenn $F_{m-1}(x)$ ein Integral der Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form 19) ist, bei der die Grössen e unverändert geblieben sind, die anderen Coefficienten aber die Constanten der Reihe

$$-\frac{\varphi(d,u)}{u-\alpha_1}$$

sind. Bringt man so Theor. 2) r-mal in Anwendung, so ist

$$y = \int \prod_{s=1}^{s=r} u_s^{\alpha_s - 1} e^{-u_1 - u_2 - \ldots - u_r} F_{m-r}\left(\frac{x}{u_1 u_2 \ldots u_r}\right) du_1 \ldots du_r,$$

wo $F_{m-r}(x)$ ein Integral der Gleichung $D^{m-r} = 0$ ist, bei der noch die Coefficienten e aus 19) unverändert sind, die anderen aber die Constanten der Reihe

$$(-1)^r \frac{\varphi(d,u)}{(u-\alpha_1)\ldots(u-\alpha_r)}$$

sind.

Nach 18) erhält man den Ausdruck für F_{m-r}, so dass das particuläre Integral folgendes ist:

$$20)\quad y_m = x^{\alpha_m} \int \prod_{s=1}^{s=r} u_s^{\alpha_s - \alpha_m - 1} \prod_{s=r+1}^{s=m-1} \left[u_s^{\alpha_m - \beta_s - 1} (1-u_s)^{\beta_s - \alpha_s}\right] e^{-u_1 - \ldots - u_r}$$
$$\left[(-1)^r d_0 + e_r \frac{u_{r+1} \ldots u_{m-1}}{u_1 \ldots u_r} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} du_1 \ldots du_{m-1}$$

mit den Grenzen

für u_1 zwei Wurzeln aus:

$$u_1^{\alpha_1 - \alpha_m} e^{-u_1} \left[(-1)^r d_0 + e_r \frac{u_{r+1} \ldots u_{m-1}}{u_1 \ldots u_r} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} = 0,$$

für u_2 zwei Wurzeln aus:

$$u_2^{\alpha_2 - \alpha_m} e^{-u_2} \left[(-1)^r d_0 + e_r \frac{u_{r+1} \ldots u_{m-1}}{u_2 \ldots u_r} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} = 0,$$

. . . .

. . . .

für u_r zwei Wurzeln aus:

$$u_r^{\alpha_r - \alpha_m} e^{-u_r} \left[(-1)^r d_0 + e_r \frac{u_{r+1} \ldots u_{m-1}}{u_r} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} = 0,$$

für u_{r+1} zwei Wurzeln aus:

$$u_{r+1}^{\alpha_m - \beta_{r+1}} (1-u_{r+1})^{\beta_{r+1} - \alpha_{r+1}} \left[(-1)^r d_0 + e_r u_{r+1} \ldots u_{m-1} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} = 0,$$

. . . .

. . . .

für u_{m-1} zwei Wurzeln aus:

$$u_{m-1}^{\alpha_m - \beta_{m-1}} (1-u_{m-1})^{\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}} \left[(-1)^r d_0 + e_r u_{m-1} x\right]^{\beta_m - \alpha_m} = 0.$$

B) Aus dem Beweis des Theor. 1) übersieht man, dass dasselbe sich auch auf die Gleichung 19) anwenden lässt. Nach demselben ist

$$y = \int u^{-\beta_{r+1}-1}(1-u)^{\beta_{r+1}-\alpha_{r+1}} F_{m-1}(\ x),$$

wenn $F_{m-1}(x)$ ein Integral einer Gleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form 19) ist, bei der die von x freien und die zu x gehörigen Coefficienten die Constanten resp. der Reihen

$$\frac{\varphi(d,u)}{u-\alpha_{r+1}} \quad \text{und} \quad \frac{\psi(e,u)}{u-\beta_{r+1}}$$

sind. Wendet man dasselbe Theorem $m-r$-mal an, so ist

$$y = \int \prod_{s=r+1}^{s=m} [u_s^{-\beta_s-1}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s}]\, F_r(u_{r+1}\ldots u_m x)\, du_{r+1}\ldots du_m,$$

wenn $F_r(x)$ ein Integral der Gleichung

$$\text{19a)} \quad h_0 \frac{d^r F}{(d.\log x)^r} + h_1 \frac{d^{r-1}F}{(d.\log x)^{r-1}} + \ldots + (h_r + e_r x)\, F = 0$$

ist, in der die Grössen h die Constanten der Reihe

$$\frac{\varphi(d,u)}{(u-\alpha_{r+1})\ldots(u-\alpha_m)}$$

sind. Nach Theor. 2) ist aber

$$F_r(x) = \int \prod_{s=1}^{s=r-1} u_s^{\alpha_s-1} e^{-u_1-\ldots-u_{r-1}} F_1\left(\frac{x}{u_1\ldots u_{r-1}}\right) du_1\ldots du_{r-1},$$

wenn $F_1(x)$ ein Integral der Gleichung

$$(-1)^{r-1} d_0 \frac{dF_1}{d.\log x} + [(-1)^r d_0\alpha_r + e_r x]\, F_1 = 0$$

ist, d. h. wenn

$$F_1(x) = x^{\alpha_r} e^{(-1)^r \frac{e_r}{d_0} x}$$

ist. Somit erhält man das particuläre Integral:

$$\text{20a)} \quad y_r = x^{\alpha_r} \int \prod_{s=1}^{s=r-1} u_s^{\alpha_s-\alpha_r-1} \prod_{s=r+1}^{s=m} [u_s^{\alpha_r-\beta_s-1}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s}]$$
$$e^{-u_1-\ldots-u_{r-1}+(-1)^r \frac{u_{r+1}\ldots u_m}{u_1\ldots u_{r-1}}\frac{e_r}{d_0}x}\, du_1 . du_{r-1} du_{r+1} . du_m$$

mit den Grenzen

für u_m zwei Wurzeln aus:

$$u_m^{\alpha_r-\beta_m}(1-u_m)^{\beta_m-\alpha_m} e^{(-1)^r \frac{u_{r+1}\ldots u_m}{u_1\ldots u_{r-1}}\frac{e_r}{d_0} x} = 0,$$

für u_{m-1} zwei Wurzeln aus:

$$u_{m-1}^{\alpha_r-\beta_{m-1}}(1-u_{m-1})^{\beta_{m-1}-\alpha_{m-1}}\,e^{(-1)^r\frac{u_{r+1}\dots u_{m-1}}{u_1\dots u_{r-1}}\frac{e_r}{d_0}x}=0,$$

. . . .

. . . .

für u_{r-1} zwei Wurzeln aus:

$$u_{r-1}^{\alpha_{r-1}-\alpha_r}\,e^{-u_{r-1}}\,e^{(-1)^r\frac{1}{u_1\dots u_{r-1}}\frac{e_r}{d_0}x}=0,$$

. . . .

. . . .

für u_1 zwei Wurzeln aus:

$$u_1^{\alpha_1-\alpha_r}\,e^{-u_1+(-1)^r\frac{e_r x}{u_1 d_0}}=0.$$

Man übersieht, dass die Grenzbedingungen in 20) und 20a) mannichfach geändert werden können, da die Wurzeln unter sich vertauschbar sind; auch können die beiden Formen der Grenzbedingungen beliebig abwechselnd auf einander folgen, wenn nur die beiden Endbedingungen dieselbe Form behalten. — Entwickelt man die Function von x unter dem Integralzeichen in 20a) in Reihen nach x und integrirt für $u_1, u_2 \dots u_{r-1}$ von 0 bis ∞, für $u_{r+1}\dots u_m$ von 0 bis 1, so erhält man die Reihe 14), da $d_0=a_0$ und $e_r=b_r$ ist.

C) Die Gleichung 19a) hat noch Integrale, welche von den eben aufgestellten wesentlich abweichen, da sie mit Hilfe der Wurzeln $\mu, \mu^2 \dots \mu^r$ aus der Gleichung $\mu^r-1=0$ gebildet werden. Drückt man das particuläre Integral y_r durch das neue F_r aus, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
y_r = x^{\alpha_r}\int_0^1 &\prod_{s=1}^{s=r-1} u_s^{\frac{s}{r}-1}(1-u_s)^{\alpha_r-\alpha_s-\frac{s}{r}}\\
\text{20b)}\qquad &\prod_{s=r+1}^{s=m}\left[u_s^{\alpha_r-\beta_s-1}(1-u_s)^{\beta_s-\alpha_s}\right]\\
&\sum_{s=1}^{s=r} e^{\mu^s r\left(u_1.u_{r-1}\,u_{r+1}.u_m\frac{-b_r}{a_0}x\right)^{\frac{1}{r}}}du_1\dots du_{r-1}\,du_{r+1}\dots du_m.
\end{aligned}
$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Integral in eine Reihe nach x und berücksichtigt, dass $\sum_{s=1}^{s=r}\mu^{ps}$ nur gleich r wird, wenn p ein Vielfaches von r ist, sonst aber verschwindet, so kann man 20b) durch Gammafunctionen bis auf einen constanten Factor in die Reihe 14) überführen, was bei der umfangreichen Geltung dieser Reihe als ein allgemeiner Beweis für das Integral 20b) gelten kann.

III. $a_0 = a_1 = a_{r-1} = 0$.

Man führe die vorliegende Gleichung durch 8) in die Form

$$21)\quad e_0 x \frac{d^m y}{(d \log x)^m} + e_1 x \frac{d^{m-1} y}{(d.\log x)^{m-1}} + \dots$$
$$\dots + (d_r + e_r x) \frac{d^{m-r} y}{(d.\log x)^{m-r}} + \dots + (d_m + e_m x)\, y = 0,$$

wo die Grössen e durch 10a), die Grössen d aber durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$d_{r+p} = C_0^{m-r-p} a_{r+p} - C_1^{m-r-p+1} a_{r+p-1} + \dots + (-1)^p C_p^{m-r} a_r,$$
$$\psi(d, u) = a_r u^{m-r|1} + a_{r+1} u^{m-r-1|1} + \dots + a_m$$
$$= d_r u^{m-r} + d_{r+1} u^{m-r-1} + \dots + d_m$$
$$= d_r (u - \alpha_{r+1})(u - \alpha_{r+2}) \dots (u - \alpha_m).$$

Mit Hilfe der Theor. 1) und 3) kann nun die Gleichung 21) ganz entsprechend, wie Gleichung 19) behandelt werden; man erhält folgende Integrale:

$$\text{A)}\quad y_m = x^{\alpha_m} \int \prod_{s=1}^{s=r} u_s^{\alpha_m - \beta_s - 1} \prod_{s=r+1}^{s=m-1} [u_s^{\alpha_m - \beta_s - 1} (1 - u_s)^{\beta_s - \alpha_s}]$$
$$e^{-u_1 - \dots u_r} [d_r + e_0 u_1 \dots u_{m-1} x]^{\beta_m - \alpha_m} du_1 \dots du_{m-1},$$

$$\text{B)}\quad y_r = x^{\beta_r} \int \prod_{s=1}^{s=r-1} u_s^{\beta_r - \beta_s - 1} \prod_{s=r+1}^{s=m} [u_s^{\beta_r - \beta_s - 1} (1 - u_s)^{\beta_s - \alpha_s}]$$
$$e^{-u_1 - \dots - u_{r-1} + \frac{d_r}{e_0} \frac{1}{u_1 \dots u_{r-1} u_{r+1} \dots u_m x}}$$
$$du_1 \dots du_{r-1}\, du_{r+1} \dots du_m,$$

wo über die Grenze analoge Bedingungen gelten, wie bei 20) und 20a),

$$\text{C)}\quad y_r = x^{\beta_r} \int_0^1 \prod_{s=1}^{s=r-1} u_s^{\frac{s}{r} - 1} (1 - u_s)^{\beta_r - \beta_s - \frac{s}{r}}$$
$$\prod_{s=r+1}^{s=m} [u_s^{\beta_r - \alpha_s - 1} (1 - u_s)^{-\beta_s + \alpha_s}]$$
$$\sum_{s=1}^{s=r} e^{\mu^s r (u_1 \dots u_{r-1} u_{r+1} \dots u_m \frac{-a_r}{b_0} x^{-1})^{\frac{1}{r}}}$$
$$du_1 \dots du_{r-1}\, d u_{r+1} \dots du_m.$$

V.

Die Analogie der bestimmten Differentiale mit den bestimmten Integralen ist so vollkommen, dass es genügen wird, dieselbe in einzelnen Fällen zu zeigen, da es dann leicht ist, dieselbe über sämmtliche in dem vorigen Abschnitte aufgestellte Formen auszudehnen. Selbstverständlich müssen die gebrauchten Ausdrücke noch einen Werth haben; wie weit das allgemein stattfindet, muss eine Theorie complexer Differentialquotienten feststellen.

I. Ist $z = x^{\alpha}\psi(x)$, wo $\psi(x)$ eine für $x=0$ endliche Function ist, ein Integral der Gleichung 16), so ist:

$$y = x^{\alpha}\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}(1-u)^{\delta}\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0}$$

ein Integral der Gleichung 9), wenn die Bedingungen 17) gelten, für die, der Einfachheit halber, $B=1$ und $A=0$ gesetzt ist. — Setzt man $x^{\alpha}\psi x$ in die Gleichung 16) ein und dann ux an die Stelle von x, multiplicirt man ferner mit $\frac{(1-u)^{\delta-1}}{u^{\alpha}}$ und nimmt dann das Differential, so treten die beiden Ausdrücke auf:

$$D_1 = x^{\alpha}\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}u(1-u)^{\delta-1}\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0},$$

$$D = x^{\alpha}\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}(1-u)^{\delta-1}\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0},$$

also $y = D - D_1$

$$\frac{dy}{d.\log x} = x^{\alpha}\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}\; u(1-u)^{\delta}\frac{d.\psi(ux)}{du}}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0} + \alpha y$$

$$= x^{\alpha}\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma}(u-1)^{\delta}\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma}}\right]_{u=0} + (\alpha-1)y + \delta.D_1$$

$$= x^{\alpha}\left[u\,\frac{d^{-\alpha-\gamma}u(1-u)^{\delta}\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma}}\right]_{u=0} - (\gamma+1)y + \delta.D_1,$$

also, da der erste Ausdruck der rechten Seite verschwindet:

$$\delta.D_1 = \frac{dy}{d.\log x} + (\gamma+1)y,$$

$$\delta.D = \frac{dy}{d.\log x} + (\gamma+\delta+1)y;$$

man erhält also dieselben Ausdrücke für D und D_1, welche man im Abschnitte IV für J und J_1 gewann. Es ergiebt sich damit das Integral:

$$y_m = x^{\alpha_m}$$

$$22) \quad \left[\frac{d^{\sum\limits_{r=1}^{r=m-1}(\beta_r-\alpha_m)} \prod\limits_{r=1}^{r=m-1}(1-u_r)^{\beta_r-\alpha_r}(d_0+e_0 u_1 \dots u_{m-1}\, x)^{\beta_m-\alpha_m}}{\prod\limits_{r=1}^{r=m-1} du_r^{\beta_r-\alpha_m}}\right]_{u_1=u_2=\dots u_{m-1}=0.}$$

Die Ausdrücke $\left[\frac{d^\lambda (1-u)^\mu}{du^\lambda}\right]_{u=0}$ zeigen ähnliche Beziehungen wie die Gammafunctionen, was für ihren Gebrauch wichtig ist; es ist nämlich:

$$\left[\frac{d^{\lambda+1}(1-u)^{\mu+1}}{du^{\lambda+1}}\right]_{u=0} = -(\mu+1)\left[\frac{d^\lambda (1-u)^\mu}{du^\lambda}\right]_{u=0},$$

andererseits aber auch

$$= \left[(1-u)\frac{d^{\lambda+1}(1-u)^\mu}{du^{\lambda+1}}\right]_{u=0} - (\lambda+1)\left[\frac{d^\lambda (1-u)^\mu}{du^\lambda}\right]_{u=0},$$

also muss, da $\left[u\frac{d^{\lambda+1}(1-u)^\mu}{du^{\lambda+1}}\right]_{u=0}$ verschwindet,

$$\left[\frac{d^{\lambda+1}(1-u)^\mu}{du^\lambda}\right]_{u=0} = (\lambda-\mu)\left[\frac{d^\lambda (1-u)^\mu}{du^\lambda}\right]_{u=0}$$

sein.

Entwickelt man in 22) das Binomium in Reihen nach x, so kann man mit Hilfe der aufgestellten Beziehungen zu den Reihen 12) gelangen.

II. Ist $z = x^\beta \psi(x)$, wo $\psi(x)$ für $x = \infty$ endlich ist, ein Integral der Gleichung 16), so ist

$$y = x^\beta \left[\frac{d^{\beta-\gamma-1}(1-u)^\delta \psi\left(\frac{x}{u}\right)}{du^{\beta-\gamma-1}}\right]_{u=0}$$

ein Integral der Gleichung 9). — Man setze $\left(\frac{x}{u}\right)^\beta \psi\left(\frac{x}{u}\right)$ ein und multiplicire mit $u^{\beta+1}(1-u)^{\delta-1}$, dann gehört D zu den Coefficienten e und D_1 zu den Coefficienten d, und ferner ergiebt sich:

$$\delta . D_1 = (\gamma+1)\, y - \frac{dy}{d.\log x},$$

$$\delta . D = (\gamma+\delta+1)\, y - \frac{dy}{d.\log x},$$

also

$$y_m = x^{\beta_m}$$

$$22\text{a})\quad \left[\frac{d^{\sum\limits_{r=1}^{r=m-1}(\beta_m-\alpha_r)} \prod\limits_{r=1}^{r=m-1}(1-u_r)^{\beta_r-\alpha_r}(d_0 u_1\ldots u_{m-1}x^{-1}+e_0)^{\beta_m-\alpha_m}}{\prod\limits_{r=1}^{r=m-1} du_r^{\beta_m-\alpha_r}}\right]_{u_1=\ldots u_{m-1}=0.}$$

III. Ist $z=x^\alpha\,\psi(x)$, wo $\psi(x)$ für $x=0$ endlich ist, ein Integral der Gleichung 16), so ist

$$y=x^\alpha\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}\,e^{-u}\,\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0}$$

ein Integral der Gleichung 9b), denn es ist

$$\frac{dy}{d.\log x}+(\gamma+1)\,y=x^\alpha\left[\frac{d^{-\alpha-\gamma-1}\,u\,e^{-u}\,\psi(ux)}{du^{-\alpha-\gamma-1}}\right]_{u=0}.$$

VI.

Die Gleichung 1) kann, wie im zweiten Abschnitt gezeigt ist, durch Substitution von ξ für x^ϱ auf die Form

$$(d_0+e_0\xi)\,\varrho^m\frac{d^m y}{(d.\log\xi)^m}+\ldots(d_m+e_m\xi)\,y=\sum_{r=0}^{r=p}c^r\,\xi^r$$

gebracht werden. Setzt man nun

$$y=z+k_0+k_1\xi+\ldots k_{p-1}\xi^{p-1},$$

so kann $k_0\ldots k_{p-1}$ so bestimmt werden, dass das von y und seinen Derivirten freie Glied bis auf eine Constante verschwindet. Dazu muss

$$k_{p-1}\,\varphi(e,\overline{p-1}\,.\,\varrho)=c_p,$$

$$k_{p-2}\,\varphi(e,p-2\,.\,\varrho)+k_{p-1}\,\varphi(d,p-1\,.\,\varrho)=c_{p-1},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$k_0\,\varphi(e,0)+k_1\,\varphi(d,\varrho)=c_1$$

sein, wo $\varphi(d,u)$ und $\varphi(e,u)$ die in 10c) und 17) aufgestellten Functionen sind. Es ist dann z zu bestimmen als Integral der Gleichung

$$(d_0+e_0\xi)\,\varrho^m\frac{d^m z}{(d.\log\xi)^m}+\ldots(d_m+e_m\xi)\,z=c_0-d_m k_0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $\log\xi$, so erhält man eine Gleichung von der Normalform $D^{m+1}=0$, deren $2(m+1)$ Fundamentalconstante folgende sind:

$$0,\ \frac{\alpha_1}{\varrho},\ \frac{\alpha_2}{\varrho}\ldots\frac{\alpha_m}{\varrho}\ \text{und}\ -1,\ \frac{\beta_1}{\varrho},\ \frac{\beta_2}{\varrho}\ldots\frac{\beta_m}{\varrho},$$

so dass man ausser den m Integralen $z_1, z_2, \ldots z_m$, welche der Differentialgleichung

$$(d_0+e_0\xi)\,\varrho^m \frac{d^m z}{(d.\log\xi)^m}+\ldots (d_m+e_m\xi)\,z=0$$

genügen, noch das Integral

$$z_0=F\left(\begin{array}{cc}\frac{-\beta_1}{\varrho},\ \frac{-\beta_2}{\varrho}\ldots\frac{-\beta_m}{\varrho} & \frac{-b_0}{a_0}\xi\\ \frac{-\alpha_1}{\varrho}+1,\ \frac{-\alpha_2}{\varrho}+1\ldots\frac{-\alpha_m}{\varrho}+1 & \end{array}\right)$$

erhält, das der Kürze wegen durch die hypergeometrische Reihe angedeutet ist, aber auch in den anderen Formen ausgedrückt werden kann. Das vollständige Integral der Gleichung 1) ist hiernach:

$$y=\frac{c_0-d_m k_0}{d_m}z_0+C_1 z_1+\ldots C_m z_m+k_0+k_1\xi+\ldots k_{p-1}\xi^{p-1},$$

wo $C_1 \ldots C_m$ die m beliebigen Constanten sind.

Bezeichnet man die hypergeometrische Reihe

$$\xi^r F\left(\begin{array}{cc}r-\frac{\beta_1}{\varrho},\ r-\frac{\beta_2}{\varrho}\ldots r-\frac{\beta_m}{\varrho} & \frac{-b_0}{a_0}\xi\\ r-\frac{\alpha_1}{\varrho}+1,\ r-\frac{\alpha_2}{\varrho}+1\ldots r-\frac{\alpha_m}{\varrho}+1 & \end{array}\right)$$

durch F_r, so kommt man mit Hilfe von Betrachtungen, wie sie bei Ableitung der Gleichung 12) angestellt wurden, auch zu folgendem Integral:

$$y=C_1 z_1+C_2 z_2+\ldots C_m z_m+\frac{c_0 F_0}{\varphi(d,0)}+\frac{c_1 F_1}{\varphi(d,\varrho)}+\ldots+\frac{c_p F_p}{\varphi(d,p\varrho)};$$

dasselbe gilt der hypergeometrischen Reihen wegen nur so lange, als

$$\mathrm{mod}\,\xi<\mathrm{mod}\,\frac{a_0}{b_0}$$

ist; wird

$$\mathrm{mod}\,\xi>\mathrm{mod}\,\frac{a_0}{b_0},$$

so setze man:

$$F_{-r}=\xi^r F\left(\begin{array}{cc}\frac{\alpha_1}{\varrho}-r,\ \frac{\alpha_2}{\varrho}-r\ldots\frac{\alpha_m}{\varrho}-r & \frac{-a_0}{b_0}\xi^{-1}\\ \frac{\beta_1}{\varrho}-r+1,\ \frac{\beta_2}{\varrho}-r+1,\ \frac{\beta_m}{\varrho}-r+1 & \end{array}\right);$$

dann ist das vollständige Integral:

$$y=C_1 z_1+\ldots C_m z_m+\frac{c_0 F_{+1}}{\varphi(e,-\varrho)}+\frac{c_1 F_{+0}}{\varphi(e,0)}+\frac{c_2 F_{-1}}{\varphi(e,\varrho)}+\ldots\frac{c_p F_{-p+1}}{\varphi(e,p-1.\varrho)}.$$

XVIII.

Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel.

Von

W. Veltmann in Bonn.

In den „*Comptes rendus*" von 1868 hat über diese im 55. Bande von Crelle's Journal veröffentlichte Theorie eine Discussion stattgefunden zwischen Herrn Helmholtz und Herrn Bertrand, in welcher schliesslich Ersterer Recht behalten zu haben glaubt. Bertrand's Einwürfe sind in der That vielfach etwas vag und es scheint, dass er selbst über einzelne Punkte nicht ganz im Klaren war. Ich halte es daher nicht für überflüssig, die Helmholtz'sche Abhandlung nochmals einer genauen Kritik zu unterwerfen. Die in derselben gegebenen Herleitungen werde ich dabei so umändern, dass die innere Natur der aufgestellten Sätze mehr hervortritt, wo sich dann klar zeigen wird, dass es sich keineswegs der Mühe lohnt, auf jene Theorie phantastische Systeme zur Erklärung von Anziehungsphänomenen u. dergl. zu gründen.

Wenn u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit in einer Flüssigkeitsmasse sind, so kann man für u, v, w in einem bestimmten Augenblicke beliebige Functionen von x, y, z nehmen; man erhält immer eine mögliche Bewegung. Wir nennen Strömungslinien die Linien, in deren Punkten die Tangente die Richtung der Geschwindigkeit angiebt. Dieselben bestimmen sich durch die Differentialgleichung

$$dx : dy : dz = u : v : w.$$

Die Linien liegen neben einander und schneiden sich nicht. Sie sind stetig gekrümmt, falls u, v, w stetige Functionen sind.

Ist die Flüssigkeit eine tropfbare, so müssen u, v, w der Gleichung genügen:

$$1) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Einer Strömungslinie entlang geht dann die Bewegung in allen Punkten derselben nach übereinstimmender Richtung.

Lässt man u, v und w zugleich in irgend einer Weise von der Zeit t abhängen, so erhält man immer eine mögliche Bewegung, da sich die in jedem Augenblicke nöthigen Kräfte aus den Bewegungsgleichungen bestimmen lassen. Bei einer tropfbaren Flüssigkeit aber muss stets der Gleichung 1) genügt werden.

Legt man in einer incompressiblen Flüssigkeit durch die Punkte einer geschlossenen ebenen Curve die Strömungslinien, so umschliessen diese einen Raum, aus welchem augenblicklich keine Flüssigkeit aus- und in welchen keine eintritt. Schneidet man diesen Raum der Quere nach durch beliebige Flächen, so treten durch alle diese Flächen in der Zeit dt gleiche Flüssigkeitsmengen. Ist der Querschnitt eines solchen Strömungscanals unendlich klein, so ist daher in allen Punkten desselben das Product aus dem Querschnitt und der Geschwindigkeit eine constante Grösse. Eine Strömungslinie ist entweder eine geschlossene Curve oder die Enden derselben befinden sich an der freien Oberfläche der Flüssigkeit. Sie können weder an einer festen Wand, noch an einer Fläche liegen, an deren anderer Seite die Geschwindigkeit senkrecht zu dieser Fläche $= 0$ ist. Ist die Flüssigkeit rings von festen Wänden begrenzt, so müssen an der Grenzfläche geschlossene Strömungslinien liegen. Verfolgt man dieselben von irgend einer an nach beiden Seiten, so wird, unter der Voraussetzung wenigstens, dass der Raum ein einfach zusammenhängender ist, die umschlossene Fläche immer kleiner und verwandelt sich zuletzt in einen Punkt. Man sieht leicht, dass die so erhaltenen beiden Punkte sich durch eine Linie verbinden lassen, um welche sich sämmtliche Strömungslinien in geschlossenen Curven herumlegen, die auf der Linie selbst zu Punkten werden.

Vorstehendes umfasst sämmtliche Bewegungen, welche bei Flüssigkeiten vorkommen können, und es bedarf also für keine derselben irgend besonderer Mittel, „um sie der Vorstellung zugänglich zu machen“ (Helmholtz, S. 27).

Flächen, welche von allen Strömungslinien rechtwinklig geschnitten werden, kann man die Niveauflächen derselben oder der Geschwindigkeiten nennen. Solche existiren nicht immer.

Wenn

$$\text{2)} \qquad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0, \quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0, \quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=0,$$

wenn also

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz$$

das vollständige Differential einer Function φ darstellt, so ist

$$\varphi = Const.$$

die gemeinschaftliche Gleichung der Niveauflächen. Die Function φ nennen wir mit Helmholtz das Potential der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit in einem Punkte P, zerlegt nach der Richtung gegen einen um r abstehenden Punkt Q, ist

$$=\frac{d\varphi}{dr}.$$

Sind P und Q zwei Punkte einer Strömungslinie, so ist $d\varphi$ die Differenz der Werthe von φ auf zwei benachbarten Niveauflächen und dr ist der Abstand dieser Flächen. Auf einer Niveaufläche ist also die resultirende Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Abstande von der benachbarten Niveaufläche.

Die Niveauflächen können sich in diesem Falle nicht schneiden; sie können auch keine Umhüllungsfläche haben. Wo nämlich zwei benachbarte Niveauflächen einander schnitten oder tangirten, würde die resultirende Geschwindigkeit unendlich gross. In einem einfach zusammenhängenden Raume ist deshalb bei tropfbaren Flüssigkeiten eine solche Bewegung nicht möglich, da die Niveauflächen sich nothwendig in der Linie schneiden müssten, welche die zu Punkten gewordenen Strömungslinien verbindet. (Helmholtz, S. 31.)

Wenn

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz$$

kein vollständiges Differential ist, so kann möglicherweise ein integrirender Factor $\frac{1}{f}$ existiren, so dass also

$$u=f\frac{d\varphi}{dx},\quad v=f\frac{d\varphi}{dy},\quad w=f\frac{d\varphi}{dz}.$$

Dann ist ebenfalls

$$\varphi=const.$$

die Gleichung der Niveauflächen, da auf einer durch diese Gleichung dargestellten Fläche

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz=0,$$

und folglich auch

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=0.$$

Die resultirende, sowie auch die nach irgend einer Richtung zerlegte Geschwindigkeit erhält man auf gleiche Weise aus φ, wie in dem vorigen Falle, nur dass man noch den Werth von f in dem betreffenden Punkte als Factor hinzufügen muss. Die nach irgend einer Richtung zerlegte Geschwindigkeit ist

$$=f\cdot\frac{d\varphi}{dr}.$$

Auf einer Niveaufläche sind die resultirenden Geschwindigkeiten dem Abstande der benachbarten Niveaufläche umgekehrt und dem Werthe von f direct proportional. Die Niveauflächen können sich in diesem Falle schneiden; jedoch muss dann die Function f in der von den Strömungslinien umschlungenen Durchschnittslinie, resp. der Umhüllungsfläche unendlich klein werden, und zwar in solcher Weise, dass $f\frac{d\varphi}{dr}$ endlich bleibt.

Wenn
$$udx + vdy + wdz$$
weder ein vollständiges Differential ist, noch durch einen integrirenden Factor zu einem solchen gemacht werden kann, so existiren keine Niveauflächen. Der Durchschnittslinie der Niveauflächen würde dann eine Linie entsprechen, um welche sich ebenfalls die Strömungslinien in geschlossenen Curven herumlegen. Eine solche Linie (und folglich eine wirklich rotirende Bewegung) ist hier jedoch ebenso wenig, wie in dem vorigen Falle nothwendig vorhanden.

Wenn ein Geschwindigkeitspotential existirt und man nimmt als Coordinatenanfang einen Punkt P innerhalb der Flüssigkeit, so kann man für demselben unendlich nahe Punkte das Potential φ nach der Taylor'schen Reihe entwickeln:
$$\begin{aligned}\varphi = q &+ q_x x + q_y y + q_z z \\ &+ q_{xx}\frac{x^2}{2} + q_{yy}\frac{y^2}{2} + q_{zz}\frac{z^2}{2} \\ &+ q_{xy}\frac{xy}{2} + q_{xz}\frac{xz}{2} + q_{yz}\frac{yz}{2},\end{aligned}$$
wo q die Werthe der Differentialquotienten für $x = y = z = 0$ bedeutet. Durch Drehung der Coordinatenaxen kann man die Producte fortschaffen, so dass
$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_0 &+ ax + by + cz \\ &+ a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2\end{aligned}$$
wird. Man erhält dann:
$$u = \frac{d\varphi}{dx} = a + 2a_1 x, \quad v = \frac{d\varphi}{dy} = b + 2b_1 y, \quad w = \frac{d\varphi}{dz} = c + 2c_1 z$$
als die bis auf Grössen der zweiten Ordnung genauen Werthe der Geschwindigkeiten. Für
$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$
wird resp.
$$u = a, \quad v = b, \quad w = c.$$

Durch jeden Punkt der Flüssigkeit kann man also drei zu einander senkrechte Ebenen legen, so dass in jeder dieser Ebenen die senkrecht zu derselben zerlegte Geschwindigkeit in der Nähe des Punktes constant ist; sie hat dort ein Maximum oder ein Minimum. Helmholtz betrachtet deshalb (S. 30) eine solche Bewegung als eine Bewegung ohne Rotation. Wir werden sie demgemäss Parallelbewegung nennen, ohne jedoch mit diesem Ausdruck einen andern Begriff zu verbinden, als den hier angegebenen. Obige Herleitung gilt übrigens nicht blos für tropfbare Flüssigkeiten, sondern auch für Gase.

Seite 31 will Helmholtz zu dieser Bewegung eine Rotationsbewegung hinzufügen. Er denkt sich zu dem Ende einen um den Punkt P rotirenden festen Körper, dessen Drehungscomponenten ξ, η, ζ. Die hiervon in dem (unendlich nahen) Punkte x, y, z herrührenden Geschwindigkeiten werden mit denjenigen in demselben Punkte der Flüssigkeit zusammengesetzt, wodurch also

$$u = a + 2a_1 x + \zeta y - \eta z,$$
$$v = b + 2b_1 y + \xi z - \zeta x,$$
$$w = c + 2c_1 z + \eta x - \xi y$$

wird. Es ist also jetzt

$$3)\qquad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 2\zeta, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 2\xi, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = 2\eta.$$

Nun waren aber für die ursprüngliche Parallelbewegung die Ausdrücke links $=0$ und da x, y, z unendlich klein sind, so haben sich u, v, w nur um unendlich kleine Grössen geändert. Die Aenderungen der Differentialquotienten derselben sollten also ebenfalls unendlich klein sein, was aber den vorigen Gleichungen widerspricht. Es rührt das daher, dass die durch obige für jedes Flüssigkeitselement ausgeführte Zusammensetzung erhaltene Bewegung eine in allen Punkten unstetige ist. Im Grunde genommen findet also hier gar keine, geschweige denn eine bestimmte Zusammensetzung aus Rotation und Parallelbewegung statt.

In den „*Comptes rendus*“ von 1868, S. 223 des 2. Bandes, setzt Helmholtz für den besondern Fall, wo $w=0$, auf eine ganz andere Weise die Bewegung aus einer Parallelbewegung und einer Rotation zusammen. Er nimmt nämlich

$$u = u_0 - py, \quad v = v_0 + px$$

und wählt p so, dass in dem betreffenden Punkte

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = -2p.$$

Dann ist

$$\frac{du_0}{dy} - \frac{dv_0}{dx} = 0.$$

und die Geschwindigkeiten u_0 und v_0 stellen daher eine Parallelbewegung dar. Legt man demnach den Wassertheilchen die Geschwindigkeiten u_0 und v_0 bei und fügt zu diesen noch die Geschwindigkeiten eines festen, sich mit der Geschwindigkeit p um die Axe der z drehenden Körpers hinzu, so erhält man die wirklichen Geschwindigkeiten. Die Coördinatenaxen sind hier für alle Punkte dieselben; sie werden nicht, wie vorhin, durch einen Punkt des betreffenden Wassertheilchens gelegt. Eine Unstetigkeit findet daher jetzt nicht statt. Mit der Lage der Coordinatenaxen ändern sich aber für einen bestimmten Punkt x und y, während bei unveränderter Richtung derselben u, v und p constant bleiben. Eine Zerlegung in einer bestimmten Weise findet also auch hier nicht statt.

Wir können deshalb die Definition der Rotationsgeschwindigkeit mit ihren Componenten ξ, η und ζ nur als eine rein analytische, durch die Gleichungen 3) gegebene betrachten. Von der Lage und Richtung der Coordinatenaxen ist dieselbe, wie sich durch Transformation der Coordinaten ergiebt, unabhängig.

Die bekannte Bedingung dafür, dass

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

einen integrirenden Factor habe, drückt sich mit Rücksicht auf die Gleichung 3) aus durch:

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Die resultirende Geschwindigkeit muss also in jedem Punkte auf der Rotationsaxe senkrecht stehen. Die von Helmholtz sogenannten Wirbellinien liegen daher auf den Niveauflächen.

Lässt man eine Flüssigkeit sich wie einen festen Körper bewegen, setzt man also in einem bestimmten Augenblicke:

$$u = a + \zeta y - \eta z, \quad v = b + \xi z - \zeta x, \quad w = c + \eta x - \xi y,$$

wo a, b, c, ξ, η, ζ constant, so sind die Wirbellinien parallele gerade Linien und obige Bedingung wird hier:

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

Die durch a, b, c dargestellte Parallelbewegung (im gewöhnlichen Sinne) ist also senkrecht zu den Wirbellinien gerichtet. Nimmt man irgend eine Wirbellinie zur z-Axe, so wird

$$u_1 = a_1 + \zeta_1 y_1,$$
$$v_1 = b_1 - \zeta_1 x_1,$$
$$\varphi = \frac{a_1 + \zeta_1 y_1}{b_1 - \zeta_1 x_1},$$
$$f = \frac{(b_1 - \zeta_1 x_1)^2}{\zeta_1}.$$

Die Niveauflächen sind Ebenen, welche sich in der Linie

$$y_1 = -\frac{a_1}{\zeta_1}, \quad x_1 = -\frac{b_1}{x_1}$$

schneiden. Die Strömungslinien legen sich als immer kleiner werdende Kreise um diese herum. Im Allgemeinen steht dagegen eine Linie, welche durch zu Punkten gewordene Strömungslinien (also durch wahre Centra der Rotation) gebildet wird, zu den Wirbellinien in keiner näheren Beziehung.

Aus 3) ergiebt sich die der Gleichung 1) analoge Beziehung

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Man erhält also eine mögliche Bewegung, wenn man die Winkelgeschwindigkeiten als lineare Geschwindigkeiten und die Wirbellinien als Strömungslinien betrachtet. Für die Wirbellinien gilt deshalb dasselbe, was oben (S. 452) für die Strömungslinien bewiesen ist. Das Product aus dem Querschnitt eines Wirbelfadens und der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ist constant. Die Wirbellinien können innerhalb der Flüssigkeit nirgends enden. (Helmholtz, S. 36.)

Seite 38 giebt Helmholtz noch eine dritte Zerlegung in Parallelbewegung und Rotation, jedoch nur unter der beschränkenden Bedingung, dass alle Wirbellinien geschlossene Linien sind. Wenn dies nicht stattfindet, soll man sich in den Punkten ausserhalb der Flüssigkeit Geschwindigkeiten denken, so dass die an der Grenze endenden Wirbellinien verlängert und ausserhalb geschlossen erscheinen. Die Zerlegung ist (S. 40 und 38):

$$
4)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\alpha. & \left\{\begin{aligned} u &= u_1 + u_2,\\ v &= v_1 + v_2,\\ w &= w_1 + w_2,\end{aligned}\right.\\[2ex]
\beta. & \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{(y-b)\,\zeta-(z-c)\,\eta}{r^3}\,ds,\\ v_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{(z-c)\,\xi-(x-a)\,\zeta}{r^3}\,ds,\\ w_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{(x-a)\,\eta-(y-b)\,\xi}{r^3}\,ds,\end{aligned}\right.\\[2ex]
\gamma. & \left\{\begin{aligned} u_2 &= \int\frac{(x-a)\,k}{r^3}\,ds,\\ v_2 &= \int\frac{(y-b)\,k}{r^3}\,ds,\\ w_2 &= \int\frac{(z-c)\,k}{r^3}\,ds,\end{aligned}\right.
\end{array}\right.
$$

wo ds das Raumelement im Punkte a, b, c und r die Distanz dieses Punktes von x, y, z ist, die über den ganzen Raum auszudehnende Integration aber sich auf die dem Raumelement angehörenden Grössen $a, b, c, \xi, \eta, \zeta$ bezieht, während x, y, z als Constante behandelt werden. Die Integrale u_1, v_1, w_1, die als der Rotation angehörig zu betrachten sind und in welchen für diejenigen Theile des Raumes, die keine Wirbelfäden enthalten,

$$\xi=\eta=\zeta=0$$

zu nehmen ist, sind ganz bestimmte Werthe. Die Integrale u_2, v_2, w_2, in welchen k eine Function von a, b, c bedeutet, die innerhalb der Flüssigkeit überall $=0$ ist, stellen eine Parallelbewegung dar, da sie den Gleichungen 2) und wegen der bekannten Eigenschaft des Potentials auch den Gleichungen 1) genügen. Die Function k ist so zu wählen, dass u_2, v_2, w_2 resp. zu u_1, v_1, w_1 hinzugefügt, für jeden Punkt x, y, z die richtigen Werthe von u, v, w ergeben; im Uebrigen ist sie ausserhalb der Flüssigkeit ganz willkürlich. Sofern u, v, w dadurch erhalten werden können, dass man zu u_1, v_1, w_1 eine Parallelbewegung hinzufügt, kann die Function k immer entsprechend gewählt werden; denn die Gleichungen 4)γ enthalten die allgemeine Auflösung der Gleichungen 1) und 2).

Damit aber mit u_1, v_1, w_1 eine Parallelbewegung zu der wirklichen Bewegung zusammengesetzt werden könne, müssen die Integrale u_1, v_1, w_1 für sich den Gleichungen 1) und 3) genügen. Um dies nachzuweisen, denken wir uns die Integrationen zunächst über den ganzen Raum mit Ausnahme einer beliebigen Kugel ausgeführt, deren Mittelpunkt der Punkt x, y, z. Hierfür haben wir dann, da r nirgends $=0$ wird,

$$2\pi\left(\frac{du_1}{dy}-\frac{dv_1}{dx}\right)=\int\Big(-3(y-b)\frac{(y-b)\zeta-(z-c)\eta}{r^5}+\frac{\zeta}{r^3}$$

$$+3(x-a)\frac{(z-c)\xi-(x-a)\zeta}{r^5}+\frac{\zeta}{r^3}\Big)ds$$

$$=\int\frac{-3(y-b)^2\zeta+3(y-b)(z-c)\eta+r^2\zeta+3(x-a)(z-c)\xi-3(x-a)^2\zeta+r^2\zeta}{r^5}ds$$

$$=-\int\left(\frac{-3(x-a)(z-c)\xi-3(y-b)(z-c)\eta-3(z-c)^2\zeta}{r^5}+\frac{\zeta}{r^3}\right)ds$$

$$=-\frac{d}{dz}\int\frac{(x-a)\zeta+(y-b)\eta+(z-c)\zeta}{r^3}ds$$

$$=\frac{d}{dz}\int\frac{q\cos v}{r^2}ds,$$

wenn q die resultirende Rotationsgeschwindigkeit in dem Raumelement ds und v der Winkel der Rotationsaxe mit dem von dem Punkte x, y, z ausgehenden Radius vector dieses Elements ist. Führen wir die Integration zunächst für einen bestimmten Wirbelfaden aus, dessen Querschnitt dp und dessen von einem bestimmten Punkte aus gerechnete Länge l ist. Das Raumelement ist dann $dp\,.\,dl$ und obiges Integral wird:

$$\int\frac{q\cos v}{r^2}dp\,dl.$$

Da $q\,dp$ in der ganzen Länge des Wirbelfadens constant und da

$$\cos v\,dl=dr$$

ist, so verwandelt sich das Integral in:

$$q\,dp\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{q\,dp}{r}+const.$$

Die Integration erstreckt sich über die ganze Länge des Wirbelfadens, mit Ausnahme des Stückes, welches etwa in obiger Kugel liegt. Schneidet der Faden diese nicht, so bildet ein und dasselbe r die obere und die untere Grenze. Schneidet er die Kugel, so sind die Grenzen zwei Radien der letzteren. In dem einen wie in dem andern Falle verschwindet das Integral. Es verschwindet daher auch das über den ganzen Raum mit Ausnahme jener Kugel ausgedehnte Integral

$$\int q\,dp\int\frac{dr}{r^2}=\int\frac{q\cos v}{r^2}ds.$$

Um den Differentialquotienten

$$\frac{d}{dz}\int\frac{q\cos v}{r^2}ds$$

zu erhalten, muss man dieses Integral für einen benachbarten, um dr_1 von dem Mittelpunkte entfernten Punkt bilden. Legt man auch um diesen Punkt eine die vorige umschliessende und osculirende Kugel, so ist für den ganzen Raum ausserhalb letzterer das Integral $=0$. Seine Zunahme für den Raum ausserhalb der früheren Kugel ist also gleich dem Werthe desselben in dem Zwischenraum der beiden Kugeln. Nimmt man nun die Kugeln unendlich klein, so ist für diesen Zwischenraum ν der Winkel von r mit einer constanten Richtung, derjenigen der Rotationsaxe in dem Punkte x, y, z. Das Integral für den Zwischenraum stellt dann die Attraction der äussern Kugel minus der Attraction der inneren gegen den Mittelpunkt von jener dar, zerlegt nach der Richtung der Rotationsaxe. Da aber die Attraction der grösseren Kugel gegen ihren eigenen Mittelpunkt $=0$ ist, so wird jene Differenz gleich der Repulsion der kleineren Kugel gegen den Mittelpunkt der grösseren. Dieselbe ist bekanntlich $=\frac{4}{3}\pi q\, dr_1$, ihre Componente also nach der Richtung der Rotationsaxe, mit welcher dr_1 den Winkel μ bilde,

$$=\tfrac{4}{3}\pi q\, dr_1 \cos\mu.$$

Man hat also

$$\frac{d}{dr_1}\int\frac{q\cos\nu}{r^2}\,ds=\tfrac{4}{3}\pi q\cos\mu$$

$=\frac{4}{3}\pi q$, wenn dr_1 nach der Richtung der Rotationsaxe, $=0$, wenn dr_1 senkrecht dazu genommen ist. Nach der z-Axe wird $\cos\mu=\frac{\zeta}{q}$, mithin

$$\frac{d}{dz}\int\frac{q\cos\nu}{r^2}\,ds=\tfrac{4}{3}\pi\zeta.$$

Für den Raum ausserhalb der unendlich kleinen Kugel ist demnach

$$2\pi\left(\frac{du_1}{dy}-\frac{dv_1}{dx}\right)=\tfrac{4}{3}\pi\zeta.$$

Für den inneren Raum dagegen erhalten wir

$$2\pi\left(\frac{du_1}{dy}-\frac{dv_1}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\int\frac{\zeta\cos\beta}{r^2}\,ds$$
$$-\frac{d}{dy}\int\frac{\eta\cos\gamma}{r^2}\,ds-\frac{d}{dx}\int\frac{\xi\cos\gamma}{r^2}\,ds+\frac{d}{dx}\int\frac{\zeta\cos\alpha}{r^2}\,ds,$$

wo α, β, γ die Winkel des Radius vector mit den Coordinatenaxen sind. Das erste und vierte Glied sind offenbar jedes $=\frac{4}{3}\pi\zeta$, da hier nach den Richtungen differentiirt ist, auf welche sich die Winkel β, α beziehen. Das zweite und dritte Glied sind $=0$, weil hier diese Richtungen mit der z-Axe, auf welche sich der Winkel γ bezieht, rechte Winkel bilden. Man erhält also

$$2\pi\left(\frac{du_1}{dy}-\frac{dv_1}{dx}\right)=\tfrac{8}{3}\pi\zeta,$$

was mit dem für den äusseren Raum erhaltenen Werthe $4\pi\zeta$ giebt. Es ist demnach für den ganzen Raum

$$\frac{du_1}{dy} - \frac{dv_1}{dx} = 2\zeta.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$\frac{dv_1}{dz} - \frac{dw_1}{dy} = 2\xi, \quad \frac{dw_1}{dx} - \frac{du_1}{dz} = 2\eta.$$

Die Gleichungen 1) verificiren sich für u_1, v_1, w_1 in Bezug auf den Raum ausserhalb der Kugel durch Differentiation unter den Integralzeichen. Innerhalb der Kugel aber ist

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{dv_1}{dy} = \frac{dw_1}{dz} = 0,$$

weil hier die Differentiation immer nach einer Richtung geschieht, welche senkrecht ist gegen beide das Integral zusammensetzende Attractionscomponenten.

Die durch die Gleichungen 4) gegebene Zerlegung in Rotation und Parallelbewegung ist also vollkommen zulässig und für den Fall, dass nur geschlossene Wirbellinien existiren, eine ganz bestimmte. Muss man aber diese Linien erst verlängern, um sie in geschlossene zu verwandeln, so kann dies auf sehr mannichfaltige Weise geschehen; die Componenten der Rotation und folglich auch diejenigen der Parallelbewegung sind unbestimmt. Man kann sogar ganz ausserhalb der Flüssigkeit geschlossene Wirbelfäden annehmen. Da für diese obige Entwickelung die Gleichungen 2) ergiebt, so stellen sie in den Integralen u_1, v_1, w_1 eine Parallelbewegung dar. Es lässt sich auf diese Weise ein beliebiger Theil der durch u_2, v_2, w_2 dargestellten Parallelbewegung, oder auch, wie Helmholtz S. 43 bemerkt, diese ganz in die Integrale u_1, v_1, w_1 hineinbringen.

Inwiefern geschlossene Wirbelfäden nothwendig sind, damit den Gleichungen 3) genügt werde, ist aus obiger Entwickelung leicht zu ersehen. Das Integral

$$\int^s \frac{q \cos \nu}{r^2} ds$$

ist für irgend einen Wirbelfaden nur dann $=0$, wenn dessen Enden vom Punkte x, y, z gleichen Abstand haben. Dies ist aber in Bezug auf alle Punkte nur möglich, wenn der Wirbelfaden ein geschlossener ist. Unter derselben Bedingung ist auch $\frac{d}{dz}$ dieses Integrals $=0$. Welche Bedeutung die Gleichung

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

aus welcher die Constanz des Productes aus Querschnitt und Winkelgeschwindigkeit folgt, für obige Entwickelung hat, liegt ebenfalls auf der Hand.

Seite 40 und 41 entwickelt Helmholtz einen Satz, welcher im Grunde genommen nur eine einfache Interpretation der Gleichungen 4), mit Fortlassung von u_2, v_2, w_2 ist. Man kann den Satz nämlich so ausdrücken:

Um die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte P, soweit sie der Rotation, d. h. den Integralen u_1, v_1, w_1 in den Gleichungen 4) angehört, zu finden, lasse man den Punkt P um die Rotationsaxe eines jeden Raumelements mit dessen Rotationsgeschwindigkeit rotiren, multiplicire die Geschwindigkeit, welche P hierdurch erhält, mit dem Raumelement, und dividire durch die dritte Potenz der Distanz, sowie durch 2π. Alle so erhaltenen unendlich kleinen Geschwindigkeiten setze man zu einer einzigen zusammen.

Nennt man wieder ν den Winkel der Rotationsaxe mit dem Radius vector, so ist die Geschwindigkeit, welche der Punkt P durch die Rotation um ein Raumelement unmittelbar erhält,

$$= q\, r \sin \nu,$$

was mit den übrigen Factoren

$$\frac{q\, ds}{2\pi r^2} \sin \nu$$

giebt.

Dies stimmt nun allerdings ganz mit dem Gesetze der Wirkung elektrischer Ströme überein; etwas besonders Auffallendes finde ich aber darin nicht.

Eine Function der Punkte des Raumes, die in jedem Punkte eine bestimmte Grösse hat, als anziehende Masse betrachtet, bestimmt eine andere Function, die, nach einer beliebigen Richtung differentiirt, die nach dieser Richtung zerlegte Anziehung liefert, wie auch die Anziehung von der Entfernung abhängen mag. Die Aufgabe, aus der ersten Function die zweite und also die Anziehungen zu finden, liefert für diese ganz bestimmte Werthe und Richtungen. Die umgekehrte Aufgabe, aus der in jedem Punkte gegebenen Richtung und Grösse von Kräften mit Potential die wirkenden Massen und das Gesetz der Anziehung zu finden, ist sehr unbestimmt. Sie lässt unter Anderem allgemein die Einschränkung zu, dass als Anziehungsgesetz nur das Newton'sche gelten solle.

Eine Function der Punkte des Raumes, die in jedem Punkte nicht blos eine bestimmte Grösse, sondern auch eine bestimmte Richtung hat, als rechtwinklig gegen ihre Richtung ablenkende Kraft betrachtet, bestimmt Kräfte, die entweder durch Differentiation einer gewissen Function nach den verschiedenen Richtungen erhalten werden können oder auch nicht; in jedem Falle sind aber die Kräfte durch die Function und das Gesetz der Wirkung vollständig bestimmt. Umgekehrt, wenn Kräfte beliebig, mit oder ohne Potential, gegeben sind, so lässt sich immer eine Function nach Grösse und Richtung und ein Wirkungsgesetz finden, so dass jene Kräfte eine Folge davon sind. Auch hier kann man mancherlei Einschränkungen hinzufügen, ohne dass die Lösung unmöglich wird. Die Einschränkung, welche wir mit Helmholtz angenommen haben, ist diese: das Wirkungsgesetz darf nur die directe Abhängigkeit von dem Abstande des abgelenkten Punktes von der Richtungstangente der wirkenden Function und die umgekehrte der dritten Potenz der Distanz von dem wirkenden Element sein. Wir haben gefunden, dass unter dieser Einschränkung, welche das Gesetz der Wirkung elektrischer Ströme enthält, das Problem allgemein, bei beliebiger Beschaffenheit der Kräfte, gelöst werden kann. Elektrische Ströme können so im Raume angebracht werden, dass sie beliebig gegebene Kraftwirkungen hervorbringen. In dem besondern Falle, wo die Kräfte ein Potential haben, kann man denselben Zweck auch durch anziehende Massen erreichen. Letzteres war bekannt, Ersteres hat Helmholtz bewiesen. Das Eine hat ebenso wenig etwas Auffallendes und kann ebenso wenig veranlassen, sich den verborgensten Naturgeheimnissen auf der Fährte zu wähnen, wie das Andere.

Seite 46 nimmt Helmholtz in einer Flüssigkeit einzelne geradlinige und unendlich lange, also geschlossene Wirbelfäden an. Die Sätze, die er hierfür entwickelt, setzen voraus, dass die ganze Bewegung durch die Integrale u_1, v_1, w_1 der Gleichungen 4) dargestellt sei. Unter dieser Annahme folgt allerdings unmittelbar aus der Interpretation, welche oben von den Gleichungen 4) gegeben wurde, dass bei einem einzigen Wirbelfaden alle Theilchen sich um denselben im Kreise herumbewegen. Sind zwei Fäden vorhanden, so haben diese ebenfalls gegenseitig tangentiale Bewegung und laufen also wie Doppelsterne einer um den andern herum.

Aber wo sind denn die Wirbelfäden ausserhalb der Flüssigkeit, welche in den Integralen u_1, v_1, w_1 die Parallelbewegung repräsentiren? Würden diese nicht bei der Ermittelung der Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten mit zu berücksichtigen sein? Helmholtz setzt keineswegs voraus, dass die ganze Bewegung durch die blos über die geradlinigen Wirbelfäden sich erstreckenden Integrale u_1, v_1, w_1 dargestellt sei; denn er schliesst ausdrücklich S. 47 „gemäss einer früheren Bemerkung", d. h. durch Anbringung von äusseren Wirbelfäden, die Integrale u_2, v_2, w_2 in u_1, v_1, w_1 mit ein. Jene Voraussetzung würde übrigens auch nichts weiter bedeuten, als dass die Flüssigkeit gar keine Bewegung hätte, da die Integrale u_1, v_1, w_1 blos für einzelne unendlich dünne Wirbelfäden unendlich klein sind.

Was Helmholtz S. 54 über die Bewegung kreisförmiger Wirbelfäden aufstellt, ist ebenfalls eine einfache Folgerung der Gleichungen 4). Für diejenigen Punkte, welche in der Ebene des Kreises liegen, also auch für die Punkte des Wirbelfadens selbst, sind die auf die früher (S. 461) angegebene Weise erhaltenen Elementargeschwindigkeiten parallel zu der Axe des Kreises. Da alle Theile des Fadens gleiche Rotationsgeschwindigkeit und gleichen Querschnitt haben, so ist die Summe dieser Elemente für Punkte in gleicher Entfernung von der Axe gleich. Der Wirbelfaden bewegt sich also parallel zur Axe, bleibt dabei kreisförmig und sein Durchmesser ändert sich nicht. Sind zwei parallel-concentrische Fäden vorhanden, so ist die Wirkung eines jeden auf sich selbst eine ebensolche Bewegung. Die Wirkung des einen auf den andern aber zerlegt sich in eine solche parallel zur Axe und senkrecht zu derselben, also in ein Fortschreiten und ein Verengen oder Erweitern des Ringes. Bei gewissen Werthen der Durchmesser, der Rotationsgeschwindigkeiten u. s. w. können dann solche eigenthümliche Bewegungen stattfinden, wie sie Helmholtz angiebt. Alles dies setzt jedoch voraus, dass die Integrale u_2, v_2, w_2 in u_1, v_1, w_1 enthalten seien. Eine solche besondere Voraussetzung macht aber Helmholtz nicht, obgleich er keine äusseren Wirbelfäden zu Hilfe nimmt. Ueberdies sind auch hier die Geschwindigkeiten, für welche die Sätze von Helmholtz wirklich richtig sein würden, bei sehr dünnen Wirbelfäden und mässiger Rotationsgeschwindigkeit sehr klein. Die Experimente, welche Herr Helmholtz am Schlusse anführt, zeigen klar, dass er jene Erscheinungen nicht etwa von ganz besonderen Bedingungen abhängig machen wollte, unter welchen sie allenfalls stattfinden könnten, sondern dass er der Meinung war, zwei solche Wirbelringe müssten in Wirklichkeit stets einer durch den andern abwechselnd hindurchschlüpfen!

Kleinere Mittheilungen.

XXVI. Ueber zwei bestimmte Integrale.

D'Alembert hat im Art. 66 seiner Abhandlung „*Sur les différentielles réductibles aux arcs des sections coniques* (*Opuscules mathématiques par Mr. d'Alembert*, *Tôme VII*, 1780)“ gezeigt, wie man das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}} \log(1-nx^2)\, dx$$

auf elliptische Integrale zurückführen könne. Dies Resultat scheint wenig beachtet worden und in Vergessenheit gerathen zu sein. Legendre, der in seinem „*Traité des fonctions elliptiques*“ mit grosser Sorgfalt diejenigen Integrale zusammenstellt, die sich auf elliptische zurückführen lassen, erwähnt obiges Integral nicht, und auch in ähnlichen Zusammenstellungen neuerer Werke über elliptische Functionen finde ich dasselbe nicht.

D'Alembert benutzt das von Euler (*Nov. com. ac. Petrop.*, *T. VI*) gefundene Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Gattung. Auffallenderweise ist es d'Alembert entgangen, dass vermittelst des in demselben Bande der Petersburger Commentare enthaltenen Euler'schen Additionstheoremes für die elliptischen Integrale erster Gattung sich auch das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}} \log(1-nx^2)$$

auf elliptische Integrale zurückführen lasse.

Ich beginne mit dem letzten Integral, für welches die Entwickelung sich einfacher gestaltet.

Zwischen den Variablen x, u, die in der Weise von einander abhängen, dass

$$1)\qquad x=\frac{\sqrt{1-nu^2}}{\sqrt{1-u^2}},$$

findet bekanntlich die Differentialgleichung statt:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}+\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-nu^2)}}=0.$$

Aus 1) folgt

$$1-nx^2=\frac{1-n}{1-nu^2},$$

folglich

$$2)\qquad log\,(1-nx^2)=log\,(1-n)-log\,(1-nu^2).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}\,log\,(1-nx^2)-\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-nu^2)}}\,log\,(1-nu^2)$$
$$=log\,(1-n)\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}},$$

oder, wenn man beachtet, dass für $x=0$, $u=1$, und für $x=1$, $u=0$ ist:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}\,log\,(1-nx^2)=\tfrac{1}{2}log\,(1-n)\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}.$$

Um das erste Integral auf elliptische Integrale zurückzuführen, benutzt d'Alembert das Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Gattung:

$$\frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\frac{\sqrt{1-nu^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du=n\,d\,(xu).$$

Hieraus und aus 2) ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,log\,(1-nx^2)\,dx-\frac{\sqrt{1-nu^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,log\,(1-nu^2)\,du$$
$$=log\,(1-n)\,\frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-n\,log\,(1-nu^2)\,d\,(xu),$$

oder

$$2\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,log\,(1-nx^2)\,dx=log\,(1-n)\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$+n\int\limits_0^1 log\,(1-nu^2)\,d\,(xu),$$

und durch theilweise Integration

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}} \log(1-nx^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\log(1-n)\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$+ n^2 \int_0^1 \frac{x u^2\,du}{1-nu^2},$$

oder nach 1)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}} \log(1-nx^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\log(1-n)\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$+ n^2 \int_0^1 \frac{u^2\sqrt{1-u^2}}{(1-nu^2)^{3/2}}\,du.$$

Dies ist die von d'Alembert gegebene Formel. Bringt man noch das Integral

$$\int_0^1 \frac{u^2\sqrt{1-u^2}}{(1-nu^2)^{3/2}}\,du$$

auf die Normalform, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}} \log(1-nx^2)\,dx = \left(\tfrac{1}{2}\log[1-n]-2\right)\int_0^1 \frac{\sqrt{1-nx^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$+ (2-n)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-nx^2)}}.$$

Das erste Integral hängt demnach ab von dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung mit dem Modul n, das zweite von dem erster und zweiter Gattung mit demselben Modul n.

Schleswig, im Juni 1870. Dr. F. Grube.

XXVII. Ueber die Loxodromen der Kegelflächen.

Durch die Winkel

$$X, Y, Z; \quad X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2$$

seien drei zu einander orthogonale Richtungen im Raume bestimmt; diese

Winkel sollen sämmtlich Functionen einer Variabeln t sein. Bezeichnen p und p_1 zwei beliebige Functionen von t, so kann man setzen:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \cos X}{\partial t} = p \cos X_2, \quad \frac{\partial \cos X_1}{\partial t} = p_1 \cos X_2, \\ &\frac{\partial \cos X_2}{\partial t} = -p \cos X - p_1 \cos X_1. \end{aligned}\right.$$

Durch Vertauschung von X, X_1, X_2 mit Y, Y_1, Y_2 und Z, Z_1, Z_2 ergeben sich sechs weitere Gleichungen. Ist T eine der Quantitäten $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$, so findet für T die Differentialgleichung dritter Ordnung statt:

$$2)\quad \partial\frac{\frac{1}{p_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{p}{p_1}T}{\partial t}+\frac{p_1}{p}\frac{\partial T}{\partial t}=0.$$

Für gegebene Werthe von p und p_1 sind $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ die drei Integrale der vorstehenden Differentialgleichung.

Wird die Spitze einer Kegelfläche zum Anfangspunkte orthogonaler Coordinaten genommen, so finden für einen Punkt (x, y, z) desselben die Gleichungen statt:

$$3)\quad x = v \cos X, \quad y = v \cos Y, \quad z = v \cos Z.$$

Für die Loxodrome, welche die Kanten der Kegelfläche unter dem constanten Winkel a schneiden, ist

$$\frac{x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = \cos a \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}},$$

oder nach 1) und 3):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \cos a \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + p^2 v^2\right\}},$$

d. i.:

$$4)\quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = p \cot a.$$

Seien

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \lambda, \mu, \nu; \quad l, m, n$$

die Winkel, welche die Tangente, Hauptnormale und Axe der Krümmungsebene der Loxodrome mit den Coordinatenaxen bilden. Bezeichnet man durch ϱ den Krümmungshalbmesser, durch r den Torsionsradius und durch ∂s das Bogenelement der Loxodrome, so ist:

$$5)\quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{p v}{\sin a};$$

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos X \cos a + \cos X_2 \sin a, \\ \cos\beta &= \cos Y \cos a + \cos Y_2 \sin a, \\ \cos\gamma &= \cos Z \cos a + \cos Z_2 \sin a. \end{aligned}\right.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

7) $$p_1 \sin a = p \tan g u,$$

so folgt:

8) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{p}{\cos u};$$

9) $$\left\{\begin{array}{l} \cos\lambda = (\cos a \cos X_2 - \sin a \cos X)\cos u - \cos X_1 \sin u, \\ \cos\mu = (\cos a \cos Y_2 - \sin a \cos Y)\cos u - \cos Y_1 \sin u, \\ \cos\nu = (\cos a \cos Z_2 - \sin a \cos Z)\cos u - \cos Z_1 \sin u; \end{array}\right.$$

10) $$\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + p \tan g u \cot a;$$

11) $$\left\{\begin{array}{l} \cos l = (\cos a \cos X_2 - \sin a \cos X)\sin u + \cos X_1 \cos u, \\ \cos m = (\cos a \cos Y_2 - \sin a \cos Y)\sin u + \cos Y_1 \cos u, \\ \cos n = (\cos a \cos Z_2 - \sin a \cos Z)\sin u + \cos Z_1 \cos u. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen 6), 9) und 11) geben:

12) $$\left\{\begin{array}{l} \cos X = \cos\alpha \cos a - (\cos\lambda \cos u + \cos l \sin u)\sin a, \\ \cos Y = \cos\beta \cos a - (\cos\mu \cos u + \cos m \sin u)\sin a, \\ \cos Z = \cos\gamma \cos a - (\cos\nu \cos u + \cos n \sin u)\sin a. \end{array}\right.$$

Für einen Kreiskegel ist $\frac{p}{p_1}$ constant, nach 7) ist dann auch u constant; die Gleichungen 8) und 9) zeigen dann, dass $\frac{\varrho}{r}$ ebenfalls constant ist. Nimmt man umgekehrt $\frac{\varrho}{r}$ constant, setzt:

13) $$\frac{\varrho}{r} = g \cot a,$$

wo g eine Constante bedeutet, so geben die Gleichungen 4), 7), 8) und 10):

14) $$\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{g - \sin u}{\cos u}\cot a, \quad \frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{g - \sin u}{\sin u}\cos a.$$

15) $$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\cos u}{g - \sin u}.$$

Führt man mittels der Gleichungen 14) in die Gleichung 2) u statt t als unabhängige Variabele ein, so folgt:

16) $$\left\{\begin{array}{l} \partial \dfrac{\cos^2 a \dfrac{g - \sin u}{\sin u}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{g - \sin u}{\cos u}\dfrac{\partial T}{\partial u}\right) + \sin^2 a \cot u . T}{\partial u} \\ \qquad + \tan g u \dfrac{\partial T}{\partial u} = 0. \end{array}\right.$$

Man verificirt leicht, dass $\sin u + g \cot^2 a$ ein particuläres Integral der vorstehenden Differentialgleichung ist, mit dessen Hilfe sich die Ordnung derselben um eine Einheit verringern lässt. Um die beiden anderen particulären Integrale zu finden, ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren; die auszuführenden Rechnungen scheinen indessen sehr weitläufig und beschwerlich zu sein. Man gelangt durch folgende Betrachtungen unmittelbar zur Kenntniss der sämmtlichen Integrale der Differentialgleichung 16).

Für die Helix einer Cylinderfläche ist bekanntlich $\frac{\varrho}{r}$ constant. Nimmt man die Kanten der Cylinderfläche parallel zur Axe der z, ist b der constante Winkel, welchen die Helix mit den Kanten bildet, so hat man:

$$\frac{\varrho}{r} = \cot b. \tag{17}$$

$$18)\quad \left\{\begin{array}{lll} \cos\alpha = \sin b \cos w, & \cos l = \cos b \cos w, & \cos\lambda = -\sin w, \\ \cos\beta = \sin b \sin w, & \cos m = \cos b \sin w, & \cos\mu = \cos w, \\ \cos\gamma = \cos b. & \cos n = -\sin b. & \cos\nu = 0. \end{array}\right.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist w ein beliebiger Winkel. Aus 13) und 16) folgt:

$$\frac{\cos b}{g\cos a} = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{1}{\sqrt{(\sin^2 a + g^2\cos^2 a)}}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 11) und 18) geben:

$$19)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos X}{\sin a} = \dfrac{1 - g\sin u}{\sqrt{(\sin^2 a + g^2\cos^2 a)}}\cos a\cos w + \cos u \sin w, \\ \dfrac{\cos Y}{\sin a} = \dfrac{1 - g\sin u}{\sqrt{(\sin^2 a + g^2\cos^2 a)}}\cos a\sin w - \cos u\cos w, \\ \cos Z \,.\, \sqrt{(\sin^2 a + g^2\cos^2 a)} = g\cos^2 a + \sin u \sin^2 a. \end{array}\right.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass der Werth $T = \cos Z$ der Gleichung 16) genügt. Die Gleichung zur Bestimmung von w ergiebt sich leicht auf folgende Art. Nach 18) ist $\cos\alpha\sin w - \cos\beta\cos w = 0$, also auch:

$$\sin w\frac{\partial x}{\partial u} - \cos w\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

d. i. nach 2):

$$(\sin w\cos X - \cos w\cos Y)\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u} + \partial\frac{\sin w\cos X - \cos w\cos Y}{du}$$
$$= (\cos w\cos X + \sin w\cos Y)\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Mittels der Gleichungen 15) und 19) folgt:

$$\cos a\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\sqrt{(\sin^2 a + g^2\cos^2 a)}}{g - \sin u}, \tag{20}$$

durch welche Gleichung w bestimmt ist. Bedeutet h eine Constante, so folgt aus 15):

$$v = \frac{h}{g - \sin u}.$$

Setzt man diesen Werth von v und die Werthe von $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ aus 19) in die Gleichungen 3), so folgt durch Elimination von w und u:

$$g^2\frac{x^2+y^2}{(h\sin a)^2}=\frac{1-g^2}{h^2}z^2+\sin^2 a+2\frac{z}{h}\sqrt{(\sin^2 a+g^2\cos^2 a)}.$$

Je nachdem $g \gtrless 1$, kann man setzen:

$$\frac{h^2\sin^2 a}{g^2-1}=\pm B^2,\quad \frac{g^2h^2}{(g^2-1)^2}=A^2;$$

es ist dann

$$\frac{\{z\pm\sqrt{(A^2-B^2)}\}^2}{A^2}+\frac{x^2+y^2}{B^2}=1$$

oder

$$\frac{\{z\pm\sqrt{(A^2+B^2)}\}^2}{A^2}-\frac{x^2+y^2}{B^2}=1.$$

Für eine plane Loxodrome ist nach 13) $g=0$. Man hat dann die folgenden Gleichungen, in denen h eine beliebige Constante ist:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=-\frac{\tan a}{\sin u},$$

$$x.h\sin u=\cos a\cos w+\sin a\cos u\sin w,$$

$$y.h\sin u=\cos a\sin w-\sin a\cos u\cos w,$$

$$z.h=\sin a.$$

Die Loxodrome liegt in einer Parallelebene zur xy-Ebene.

Die obigen Betrachtungen lassen sich leicht auf eine beliebige developpable Fläche ausdehnen. Schneidet eine Curve die Generatricen einer abwickelbaren Fläche unter dem constanten Winkel a, soll diese Curve gleichzeitig die Helix einer Cylinderfläche sein, so hat man folgende Gleichungen:

$$x=\int q\cos X\,\partial u+v\cos X,$$

$$y=\int q\cos Y\,\partial u+v\cos Y,$$

$$z=\int q\cos Z\,\partial u+v\cos Z,$$

$$\partial\frac{v(g-\sin u)}{\partial u}+q(g-\sin u)=0,$$

wo q eine beliebige Function von u bedeutet und $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ durch die Gleichungen 19) und 20) bestimmt sind.

Die Gleichungen 4), 8) und 10) gehen durch Substitution des Werthes von p aus 5) über in:

21) $$\frac{\partial v}{\partial s}=\cos a,$$

22) $$v\cos u=\varrho\sin a,$$

$$\frac{v\cos u}{r}=v\frac{\partial\sin u}{\partial s}+\sin u\cos a.$$

Setzt man in der letzten Gleichung links aus 22) $v\cos u=\varrho\sin a$ und rechts aus 21) $\cos a=\frac{\partial v}{\partial s}$, so folgt:

23) $$\frac{\varrho}{r}\sin a = \frac{\partial v \sin u}{\partial s}.$$

Nimmt man u als unabhängige Variabele, so geben die Gleichungen 4) und 7):

24) $$p\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u}\tang a, \quad p_1\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\tang u}{\cos a}.$$

Bedeutet h eine Constante, so hat man für eine sphärische Curve

$$\left(r\frac{\partial \varrho}{\partial s}\right)^2 + \varrho^2 = h^2$$

oder

$$\pm\,\partial\frac{\sqrt{(h^2-\varrho^2)}}{\partial s} = \frac{\varrho}{r}.$$

Für eine sphärische Loxodrome geht die vorstehende Gleichung nach 22) und 23) über in

$$\pm\,\partial\frac{\sqrt{(h^2\sin^2 a - v^2\cos^2 u)}}{\partial s} = \partial\frac{v\sin u}{\partial s}.$$

Ist g eine Constante, so folgt

$$\pm\sqrt{(h^2\sin^2 a - v^2\cos^2 u)} = v\sin u - g$$

oder

25) $$v^2 - 2gv\sin u + g^2 = h^2\sin^2 a.$$

Die Gleichung 23) wird hierdurch:

$$\frac{\varrho}{r}\sin a = \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s},$$

d. i. nach 21):

26) $$\frac{\varrho}{r} = \frac{v}{g}\cot a.$$

Nun ist nach 21) v eine lineare Function von s, nach 26) ist dieses auch mit $\frac{\varrho}{r}$ der Fall, folglich ist die sphärische Loxodrome gleichzeitig eine kürzeste Linie einer Kegelfläche.

Aus 25) folgt

27) $$v = g\sin u + \varDelta, \quad \varDelta = \sqrt{(h^2\sin^2 a - g^2\cos^2 u)}.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen 24) über in

28) $$p\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{g\cos u}{\varDelta}\tang a, \quad p_1\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{g\sin u}{\varDelta}\frac{1}{\cos a}.$$

Nimmt man in der Gleichung 2) u statt t als unabhängige Variabele, so folgt mittels der Gleichungen 28):

29) $$\partial\,\frac{\frac{\cos^2 a}{g^2}\frac{\varDelta}{\sin u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varDelta}{\cos u}\frac{\partial T}{\partial u}\right) + \sin^2 a\cot u\,.\,T}{\partial u} + \tang u\frac{\partial T}{\partial u} = 0.$$

Man bemerkt leicht, dass $T = \sin u$ ein particuläres Integral der vorstehenden Differentialgleichung ist. Da nun $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ die drei particulären Integrale sind, so kann man folgende Gleichungen aufstellen, wobei die Constanten weggelassen sind, welche sich auf eine Drehung des Coordinatensystems beziehen:

$$30)\quad \left\{\begin{aligned} \cos X &= \cos b \cos w + \sin b \sin w \cos u,\\ \cos Y &= \cos b \sin w - \sin b \cos w \cos u,\\ \cos Z &= \sin b \sin u. \end{aligned}\right.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist b eine Constante, w eine näher zu bestimmende Function von u. Der Werth von b ergiebt sich unmittelbar auf folgende Weise. Die Verbindungslinie der Spitze der Kegelfläche mit dem Mittelpunkte der Kugelfläche, welche die Loxodrome enthält, werde zur Axe der z genommen. Da h der Radius der Kugelfläche ist, so hat man für einen Punkt (x, y, z) der Loxodrome die Gleichung

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = h^2,$$

d. i. nach 3) und 30):

$$v^2 - 2 v z_0 \sin b \sin u + z_0^2 = h^2.$$

Setzt man hierin aus 25):

$$2 g v \sin u = v^2 + g^2 - h^2 \sin^2 a,$$

so folgt:

$$v^2 (g - z_0 \sin b) - z_0 \sin b\,(g^2 - h^2 \sin^2 a) + g\,(z_0^2 - h^2) = 0.$$

Da nun v nicht constant ist, so folgt

$$g = z_0 \sin b, \quad z_0 \sin b\,(g^2 - h^2 \sin^2 a) = g\,(z_0^2 - h^2)$$

oder

$$31)\quad \frac{\sin b}{g} = \frac{\cos b}{h \cos a} = \frac{1}{\sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)}}, \quad z_0 = \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)}.$$

Mittels der Gleichungen 1), 28), 30) und 31) folgt

$$32)\quad \left\{\begin{aligned} \cos Z \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)} &= g \sin u,\\ \cos Z_2 \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)} &= \Delta \,.\, \cot a,\\ \cos Z_1 \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)} &= -g \frac{\cos u}{\sin a}. \end{aligned}\right.$$

Mittels

$$\cos Z \,.\, \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)} = g \sin u, \quad v = g \sin u + \Delta, \quad z = v \cos Z$$

folgt:

$$33)\quad z \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)} = g \sin u\,(g \sin u + \Delta).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 6), 11) und 32) giebt

$$34)\quad \cos n - \frac{v}{g} \cot a \cos \gamma + \frac{z \cos^2 a}{g \sin a} = -\frac{\sin a}{g} \sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)}.$$

Nun ist nach 26) $\frac{\varrho}{r}$ eine lineare Function von s; hieraus folgt:

$$35)\quad \left\{\begin{aligned} \cos l - \frac{v}{g} \cot a \,.\, \cos \alpha &= \xi_0 - \frac{x \cos^2 a}{g \sin a},\\ \cos m - \frac{v}{g} \cot a \,.\, \cos \beta &= \eta_0 - \frac{y \cos^2 a}{g \sin a},\\ \cos n - \frac{v}{g} \cot a \,.\, \cos \gamma &= \zeta_0 - \frac{z \cos^2 a}{g \sin a}, \end{aligned}\right.$$

wo ξ_0, η_0, ζ_0 Constanten sind *. Aus 34) und der letzten Gleichung 35) folgt:

36) $$\zeta_0 = -\frac{\sin a}{g}\sqrt{(g^2 + h^2 \cos^2 a)}.$$

Wegen
$$x = v\cos X,\quad y = v\cos Y,\quad z = v\cos Z$$
giebt die Summe der Quadrate der Gleichungen 35):
$$1 + \left(\frac{v}{g}\right)^2 \cot^2 a = \left(\frac{v}{g}\right)^2 \frac{\cos^4 a}{\sin^2 a} + \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$$
$$- 2v\,(\xi_0 \cos X + \eta_0 \cos Y + \zeta_0 \cos Z)\,\frac{\cos^2 a}{g \sin a}.$$

Setzt man hierin für $\cos Z$, ζ_0 ihre Werthe aus 32) und 36), ferner
$$v = g \sin u + \varDelta,$$
so folgt:

37) $$\xi_0^2 + \eta_0^2 = 2\,(\xi_0 \cos X + \eta_0 \cos Y)\,(g \sin u + \varDelta)\,\frac{\cos^2 a}{g \sin a}.$$

Nach 3), 6) und 11) ist
$$x\cos X + y\cos Y + z\cos Z = v,$$
$$\cos\alpha\cos X + \cos\beta\cos Y + \cos\gamma\cos Z = \cos a,$$
$$\cos l\cos X + \cos m\cos Y + \cos n\cos Z = -\sin a\sin u.$$

Die Gleichungen 35) resp. mit $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ multiplicirt und addirt, geben, mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen:
$$-\sin a\sin u = \xi_0\cos X + \eta_0\cos Y + \zeta_0\cos Z$$
oder, da nach 32) und 36)
$$\zeta_0\cos Z = -\sin a\sin u,$$
so ist
$$\xi_0\cos X + \eta_0\cos Y = 0.$$
Diese Gleichung in Verbindung mit 37) giebt
$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = 0,\ \text{d. h.}\ \xi_0 = 0,\ \eta_0 = 0.$$
Die erste Gleichung 35) giebt für $\xi_0 = 0$:
$$\cos l - \frac{v}{g}\cot a\cos\alpha + \frac{x\cos^2 a}{g\sin a} = 0.$$
Setzt man hierin:
$$\cos l = (\cos a\cos X_2 - \sin a\cos X)\sin u + \cos X_1\cos u,$$
$$\cos\alpha = \cos a\cos X + \sin a\cos X_2,$$
$$x = v\cos X,\quad v = g\sin u + \varDelta,$$
so folgt:
$$\cos X_1\cos u = \sin a\sin u\cos X + \frac{\varDelta.\cos a}{g}\cos X_2.$$

Mittels dieses Werthes von $\cos X_2$ geht die Gleichung
$$\cos^2 X + \cos^2 X_1 + \cos^2 X_2 = 1$$
über in

* Vergl. hierüber Zeitschrift f. Math. u. Phys., Jahrg. XII S. 510.

$$
38)\quad \begin{cases} \left\{\frac{\sin a}{g}\cos X_2 + \frac{\Delta.\sin u\cos a}{h^2\cos^2 a + g^2\cos^2 u}\cos X\right\}^2 \\ = \left(\frac{\cos u}{h^2\cos^2 a + g^2\cos^2 u}\right)^2 \{h^2\cos^2 a + g^2\cos^2 u - (h^2\cos^2 a + g^2)\cos^2 X\}. \end{cases}
$$

Nun ist nach 30) und 31):

$$
\cos X\sqrt{(h^2\cos^2 a + g^2)} = h\cos a\cos w + g\cos u\sin w.
$$

Mit Rücksicht auf 28) ist ferner

$$
\cos X_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial\cos X}{\partial t} = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\cos X}{\partial u} = \frac{\Delta.\cot a}{g\cos u}\frac{\partial\cos X}{\partial u}.
$$

Setzt man diese Werthe von $\cos X$ und $\cos X_2$ in die Gleichung 38), so folgt:

$$
\Delta^2\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{g h\cos a\sin u}{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}\right)^2 = \left(\frac{g^2\cos^2 u}{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}\right)^2\frac{g^2 + h^2\cos^2 a}{\cos^2 a}
$$

oder

$$
39)\quad \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{g h\cos a\sin u}{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a} = -\frac{g^2\cos^2 u}{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}\,\frac{\sqrt{(g^2 + h^2\cos^2 a)}}{\Delta.\cos a}.
$$

Der Term auf der rechten Seite muss negativ genommen werden, wenn der Werth von $\cos X$ aus 30) der Gleichung 29) für $T = \cos X$ genügen soll. Einfacher gelangt man zur Bestimmung des Vorzeichens durch die Bemerkung, dass die Gleichungen 29), 30) und 39) für $g = h\sin a$ zu denselben Gleichungen führen müssen, wie die Gleichungen 16), 19) und 20) für $g = 0$. Setzt man

$$
\cos w = \frac{h\cos a\cos w_1 - g\cos u\sin w_1}{\sqrt{(g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}},
$$

$$
\sin w = \frac{g\cos u\cos w_1 + h\cos a\sin w_1}{\sqrt{(g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a)}},
$$

so geben die Gleichungen 30), 31) und 39):

$$
\cos X = \cos w_1\sqrt{\frac{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}{g^2 + h^2\cos^2 a}},
$$

$$
\cos Y = \sin w_1\sqrt{\frac{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}{g^2 + h^2\cos^2 a}},
$$

$$
\cos Z = \frac{g\sin u}{\sqrt{(g^2 + h^2\cos^2 a)}},
$$

$$
\frac{\cos a}{\sqrt{(g^2 + h^2\cos^2 a)}}\frac{\partial w_1}{\partial u} = -\frac{g^2\cos^2 u}{g^2\cos^2 u + h^2\cos^2 a}\,\frac{1}{\sqrt{(h^2\sin^2 a - g^2\cos^2 u)}}.
$$

Die Werthe von $\cos w_1$ und $\sin w_1$ lassen sich durch die Thetafunctionen Jacobi's mit complexen Argumenten ausdrücken.

Die sphärische Loxodrome liegt auf der Kegelfläche

$$
x^2 + y^2 + \{z - \sqrt{(g^2 + h^2\cos^2 a)}\}^2 = h^2.
$$

Liegt die Spitze der Kegelfläche auf der Kugelfläche, so ist

$$
g^2 = h^2\sin^2 a.
$$

Man hat dann die folgenden einfacheren Gleichungen:

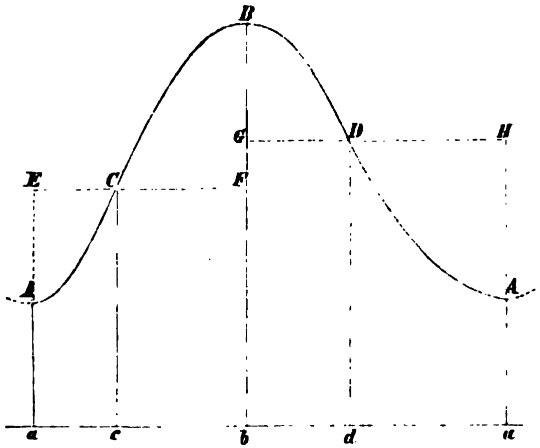
$$\cos X = \cos a \cos w + \sin a \sin w \cos u,$$
$$\cos Y = \cos a \sin w - \sin a \cos w \cos u,$$
$$\cos Z = \sin a \sin u,$$
$$v = 2h \sin a \sin u, \quad \frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{\tang a}{\sin u}.$$

A. ENNEPER.

XXVIII. Ueber die Berechnung der mittleren Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur.

Um die mittlere Temperatur eines Tages aus der höchsten und tiefsten Temperatur desselben Tages zu bestimmen, werden in den meteorologischen Handbüchern mehrere Anweisungen gegeben, welche wohl auf empirischem Wege gefunden worden sein dürften, da einer theoretischen Ableitung der betreffenden Ausdrücke nirgends Erwähnung geschieht. In den nachfolgenden Zeilen wird nun eine mathematische Herleitung der Ausdrücke versucht.

Die Aufgabe ist unbestimmt; indessen ist, wenn man einen normalen Verlauf der Temperatur voraussetzt, dieser Verlauf an gewisse Hauptbedingungen geknüpft, welche, gehörig berücksichtigt, eine brauchbare und ungezwungene Lösung der Aufgabe ermöglichen. Die Tagestemperatur muss nämlich während eines Tages in ihrer Abhängigkeit vom Sonnenstande bei normalem Witterungsverlaufe von einem kleinsten Werthe bis zu einem grössten Werthe stetig zunehmen und von letzterem bis zum nächsten Minimum stetig abnehmen. Construirt man nun die Temperaturcurve eines



Tages, indem man die Zeiten als Abscissen und die Temperaturen als Ordinaten aufträgt, so wird man ausser dem tiefsten und höchsten Punkte A und B noch die beiden Wendepunkte C und D, in welchen die Curve aus der Convexität in die Concavität oder aus der Concavität in die Convexität übergeht, als charakteristische Punkte anzusehen haben; lässt man ferner die Temperaturcurve mit dem tiefsten Punkte A beginnen, so wird sie mit dem zweiten Minimum A_1 endigen, und es liegt in der Natur der Sache, dass zwei aufeinanderfolgende Minima der Temperatur als gleich gross, also $Aa = A_1 a_1$ angenommen werden können. Durch die fünf Punkte A, C, B, D und A_1 theilt sich die Temperaturcurve in vier Theile, deren Eigenthümlichkeiten sich am passendsten mit jenen der Sinuslinie, d. i. der Linie von der Gleichung

$$1) \qquad y = a . \sin m x$$

vergleichen lassen, wenn für jeden Theil der betreffende Wendepunkt als Coordinatenanfangspunkt angenommen wird und die positiven Richtungen der Coordinatenaxen gegen den Maximal-, beziehungsweise Minimalpunkt gerichtet sind. Zieht man durch C und D die Linien EF und GH parallel zur Abscissenaxe und setzt man $Aa = A_1 a = t$ (Minimaltemperatur), $Bb = T$ (Maximaltemperatur), ferner $Cc = t_1$, $Dd = t_2$, endlich die Abscissen (Zeiten) $ab = Z$, $ac = z_1$ und $ad = z_2$, und berücksichtigt man noch, dass $aa_1 = 24$ (Stunden) ist, so sind unter Zugrundelegung der Gleichung 1) — wenn man derselben die passendere Form $y = a . \sin \frac{\pi}{2u} x$ giebt, wofür $x = u$, $y = a$ wird — die Gleichungen der Curventheile CA, CB, DB und DA_1 nachstehende:

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} CA \ldots y = (t_1 - t) . \sin \dfrac{\pi}{2 z_1} x, \\ CB \ldots y = (T - t_1) . \sin \dfrac{\pi}{2(Z - z_1)} x, \\ DB \ldots y = (T - t_2) \sin \dfrac{\pi}{2(z_2 - Z)} x, \\ DA_1 \ldots y = (t_2 - t) . \sin \dfrac{\pi}{2(24 - z_2)} x. \end{array} \right.$$

Die mittlere Ordinate einer Curve wird gefunden, wenn man die Fläche durch die Abscisse dividirt; um daher die mittlere Temperatur eines Tages zu erhalten, hat man die Fläche der Temperaturcurve durch 24 zu dividiren. In unserem Falle besteht die Fläche der Temperaturcurve aus den vier Theilen:

$$\begin{aligned} ACca &= ECca - ECA, \\ CBbc &= CFbc + CBF, \\ BDdb &= GDdb + BDG, \\ DA_1 a_1 d &= DHa_1 d - DHA_1. \end{aligned}$$

Somit ist die Gesammtfläche der Temperaturcurve gleich

$$\begin{aligned}&(ECca + CFbc + GDdb + DHa_1d)\\&+(-ECA + CBF + BDG - DHA_1)\\&= z_1 t_1 + (Z - z_1)\,t_1 + (z_2 - Z)\,t_2 + (24 - z_2)\,t_2\\&+(-ECA + CBF + BDG - DHA_1),\end{aligned}$$

somit die mittlere Temperatur

$$\begin{aligned}t_m &= \tfrac{1}{24}\left[z_1 t_1 + (Z - z_1)\,t_1 + (z_2 - Z)\,t_2 + (24 - z_2)\,t_2\right]\\&+ \tfrac{1}{24}\left[-ECA + CBF + BDG - DHA_1\right].\end{aligned} \tag{3}$$

In der zweiten Klammer kommen die Flächen der vier Sinuslinien vor. Für die Linie

$$y = a \,.\, \sin \frac{\pi}{2u}\,x$$

wäre die Fläche gleich

$$a\int_0^u \sin\frac{\pi}{2u}\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\,a u;$$

daher haben wir

$$\begin{aligned}\text{Fläche } ECA &= \frac{2}{\pi}\,z_1\,(t_1 - t),\\ \text{,, } \quad CBF &= \frac{2}{\pi}\,(Z - z_1)\,(T - t_1),\\ \text{,, } \quad BDG &= \frac{2}{\pi}\,(z_2 - Z)\,(T - t_2),\\ \text{,, } \quad DHA_1 &= \frac{2}{\pi}\,(24 - z_2)\,(t_2 - t),\end{aligned}$$

folglich

$$t_m = \frac{1}{24}\left[z_1 t_1 + (Z - z_1)\,t_1 + (z_2 - Z)\,t_2 + (24 - z_2)\,t_2\right]$$
$$+\frac{1}{12\pi}\left[-z_1\,(t_1 - t) + (Z - z_1)\,(T - t_1) + (z_2 - Z)\,(T - t_2) - (24 - z_2)\,(t_2 - t)\right],$$

oder nach einigen Abkürzungen

$$\begin{aligned}t_m &= \frac{1}{24}\left[(24 - Z)\,t_2 + Z t_1\right]\\&+ \frac{1}{12\pi}\left[24 t + (z_2 - z_1)\,(T - t) - (24 - Z)\,t_2 - Z t_1\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Noch ist in Rechnung zu bringen, dass die beiden Sinuslinien CA und CB in ihrem Anfangspunkte C und die beiden Sinuslinien DB und DA_1 in ihrem Anfangspunkte D eine gemeinschaftliche Tangente haben. Allgemein ist bei der Linie $y = a \sin \frac{\pi}{2u}\,x$ die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der im Anfangspunkte gezogenen geometrischen Tangente gleich $\frac{\pi}{2}\frac{a}{u}$; wir haben daher

$$5)\qquad \frac{t_1-t}{z_1}=\frac{T-t_1}{Z-z_1}$$

und

$$6)\qquad \frac{T-t_2}{z_2-Z}=\frac{t_2-t}{24-z_2},$$

woraus

$$Z t_1 = T z_1 + Z t - z_1 t \text{ und } (24-Z)\, t_2 = 24\, T - z_2\, T + z_2\, t - Z t,$$

somit durch Addition

$$7)\qquad (24-Z)\, t_2 + Z t_1 = 24\, T - (z_2 - z_1)(T-t)$$

folgt. Setzt man diesen Werth in 4) ein, so erhält man, wenn man reducirt und statt π seinen Werth substituirt

$$8)\qquad \begin{aligned} t_m &= T-(T-t)\,[0{,}637 - 0{,}0114\,(z_2-z_1)] \\ &= 0{,}363\,.\,T + 0{,}637\,.\,t + 0{,}0114\,(z_2-z_1)(T-t), \end{aligned}$$

wo (z_2-z_1) die Zeit vom vormittägigen bis zum nachmittägigen Wendepunkte bedeutet. Giebt man der Gleichung 8) die drei Formen

$$9)\qquad t_m = \tfrac{1}{2}(T+t) + [0{,}0114\,(z_2-z_1) - 0{,}137]\,(T-t),$$

$$10)\qquad t_m = \tfrac{1}{3}(T+2t) + [0{,}0114\,(z_2-z_1) + 0{,}030]\,(T-t)$$

und

$$11)\qquad t_m = \tfrac{1}{7}(3\,T+4t) + [0{,}0114\,(z_2-z_1) - 0{,}065]\,(T-t),$$

so erhält man, wenn man darin die letzten Ausdrücke rechts vernachlässigt, die in meteorologischen Handbüchern angeführten Näherungsformeln

$$9')\qquad t'_m = \tfrac{1}{2}(T+t),$$

$$10')\qquad t''_m = \tfrac{1}{3}(T+2t)$$

und

$$11')\qquad t'''_m = \tfrac{1}{7}(3\,T+4t).$$

Wie man sieht, ist von den drei letzten Gleichungen die Gleichung 10') als die ungenaueste anzusehen; besser ist 9') und am besten ist 11'). Die Gleichung 9') wird meistens zu grosse, 10') immer zu kleine und 11') in der Regel etwas zu kleine Werthe liefern.

Es lässt sich übrigens allgemein statt 8) auch schreiben:

$$12)\qquad t_m = \frac{1}{p+q}(p\,T+q\,t) + \left[0{,}0114\,(z_2-z_1) - \left(\frac{p}{p+q} - 0{,}363\right)\right](T-t).$$

Wählt man nun für q und p solche ganze Zahlen, dass, je nach dem Werthe von (z_2-z_1), d. i. entsprechend der Lage des Beobachtungsortes und der Jahreszeit,

$$\frac{p}{p+q} - 0{,}363 \text{ nahe gleich } 0{,}0114\,(z_2-z_1)$$

wird, so erhält man

$$12') \qquad t'''_m = \frac{1}{p+q}(pT+qt)$$

als diejenige Gleichung, welche vor allen ähnlich gebauten den Vorzug verdient.

Hierdurch ist bei aller Einfachheit eine Verschärfung der Berechnungsweise geboten, welche sich namentlich zur Ermittelung der mittleren Monatstemperatur aus der mittleren höchsten und tiefsten Temperatur des Monats eignen möchte, indem die Voraussetzung eines nahezu normalen Verlaufes der mittleren Monatstemperaturcurve in den meisten Fällen statthaft sein wird.

Fiume, im August 1870. Prof. E. Stahlberger.

XXIX. Ueber Spectra negativer Elektroden und lange gebrauchter Geissler'scher Röhren.

In der Zwischenzeit von Brewster's und Miller's Arbeiten bis zu den epochemachenden von Bunsen und Kirchhoff vollzog sich der Fortschritt der Spectralanalyse vorzüglich auf elektrischem Gebiete. Man lernte die Metalllinien von jenen trennen, die von den Bestandtheilen der Luft herrühren, und Dove lenkte bereits 1858 die Aufmerksamkeit auf die verschiedenen Spectra an einer positiven und an einer negativen Elektrode*; er hob die unmessbar rasche Umwandlung des einen Spectrums in das andere bei der Commutation und die eventuellen Aufschlüsse, die man auf diesem Wege über die Beschaffenheit des Nordlichtes bekommen könne, hervor. Gleichfalls 1858 begann Plücker seine berühmten Arbeiten über die Spectra in Geissler'schen Röhren. Im selben Jahre verglich auch van der Willigen das Luftspectrum an der positiven und negativen Elektrode und constatirte die dem letzteren eigenthümlichen drei Maxima**. Die chemischen und astronomischen Triumphe der Spectralanalyse nahmen in den nächsten Jahren nach Bunsen's und Kirchhoff's Auftreten alle Thätigkeit in Anspruch und so blieben Dove's und van der Willigen's Beobachtungen bis vor Kurzem ohne Fortsetzung und eingehendere Bearbeitung. Aber an die mit verdünnten Gasen gefüllten Röhren knüpfte sich die räthselhafteste Entdeckung, welche die Spectralanalyse seit Bunsen und Kirchhoff bereicherte, die mehrfacher Spectra eines und desselben Stoffes, welche von Plücker und Hittorf gemacht***, durch Wüllner be-

---

* Pogg. Ann. 1858, Bd. CIV, S. 184—188.
** Pogg. Ann. 1859, Bd. CVI, S. 626 flgg.
*** Philos. Trans. 1865, Bd. 155, S. 1 flgg.

stätigt und ausgedehnt wurde*. Sie wurde vor wenigen Monaten von Dubrunfaut bestritten**, indem er das zweite Wasserstoffspectrum Wüllner's durch Stickstoffreste im Gase erklären wollte. Wüllner hat aber seine Entdeckung dieser Erklärung gegenüber aufrecht erhalten***, und dass er dies zu thun berechtigt war, hat unsere, im Folgenden mitgetheilte Untersuchung vollständig bestätigt. Dennoch müssen in Plücker's und Wüllner's Entdeckung die thatsächlichen Erscheinungen von der theoretischen Auslegung unterschieden werden, und wir werden auf die wichtige Frage nach der Mehrheit der Spectra eines Stoffes als solchen am Schlusse der vorliegenden Arbeit nochmals zurückkommen. 1865 veröffentlichte Waltenhofen eine interessante Arbeit über die Reihenfolge, in welcher Spectrallinien bei fortgesetzter Verdünnung verschwinden†. Bereits im Jahre 1858 hat Plücker auch das eigenthümliche magnetische Verhalten des Lichtes am negativen Pole entdeckt††. Da dessen Erklärung jedoch bis heute nicht von jeder Schwierigkeit befreit ist, so musste sich hierdurch das Interesse an der spectralanalytischen Verschiedenheit zwischen dem Lichte im positiven Theile des elektrischen Funkens und dem Lichte an der negativen Elektrode steigern.

Indem wir im October vorigen Jahres beschlossen, die Studien Dove's und van der Willigen's aufzunehmen, waren wir von drei Gedanken vorzüglich geleitet: erstens hofften wir über das magnetische Licht Aufschlüsse zu erlangen; zweitens musste es uns nach den älteren Angaben möglich scheinen, spectralanalytische Kennzeichen für negativ-elektrische Zustände zu bekommen und dadurch negative Elektricität vielleicht in grossen irdischen und himmlischen Erscheinungen entdecken zu können; drittens durften wir erwarten, vielleicht zwischen den mehrfachen Spectris eines Stoffes im engen Theile und den mehrfachen Spectris je nach der Elektrode einen Zusammenhang zu entdecken.

Sicher aber mussten wir neue Thatsachen auffinden, wenn wir den Unterschied des Lichtes an den beiden Elektroden nicht blos bei Luft, sondern bei den einzelnen Gasen aufsuchten. Wir durften voraussetzen, dass Stickstoff und atmosphärische Luft übereinstimmen würden, und dass Wasserstoffgas, Sauerstoffgas etc. Neues geben würden. In der That verschafften wir uns drei Geissler'sche Röhren, eine Stickstoffröhre, eine Wasserstoff-

*) Festschrift der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zur 50jährigen Jubelfeier der Universität Bonn. Bonn, bei A. Markus. 1868. S. 7. — Pogg. Ann. 1868, Bd. CXXXV, S. 496 flgg., 1869, Bd. CXXXVII, S. 337 flgg.

**) Compt. rend. T. 69, S. 1245. T. 70, S. 448.

***) Compt. rend. T. 70 S. 125.

†) Sitzungsber. d. k. Akad. d. W. math.-naturw. Cl., Bd. LI, II. Abth., 1865, S. 535 flgg.

††) Pogg. Ann. 1858, Bd. CIII, S. 88 flgg.

röhre und eine Sauerstoffröhre, bezeichnet entsprechend mit N, H und O, und wir fanden am negativen Pole von N die van der Willigen'schen drei Maxima, am negativen Pol von H ein grüngelbes Maximum, am negativen Pol von O sechs Maxima: ein rothes, ein gelbgrünes, ein grünes, ein grünblaues, ein blaues und ein violettes. Diese drei Spectra beobachteten wir bereits November, aber wir wollten von den sämmtlichen Spectris dieser Röhren sorgfältige Zeichnungen anfertigen und diese mit einer gleichzeitigen Zeichnung des Sonnenspectrums combiniren, um unsere Resultate durch Beziehung auf die nächstliegenden Fraunhofer'schen Linien sowohl selbst mit Beobachtungen der *Aurora borealis*, des Zodiacallichtes, der Protuberanzen und anderer kosmischen Lichterscheinungen vergleichen zu können, als auch für spätere Beobachter unsere Wahrnehmungen verwendbarer zu machen.

Diese Beobachtungen machten wir mit einem gewöhnlichen Spectralapparate, der ein Steinheil'sches Flintglasprisma besitzt. Um sowohl den Beobachtungen, als auch den Zeichnungen ein grösstmögliches Mass von Genauigkeit zu geben, wandten wir uns an Herrn Professor Hlasiwetz, und derselbe stellte uns mit grösster Liberalität den in seinem Besitze befindlichen, vom Professor, nunmehrigen Hofrath, Ritter v. Schrötter und Herrn Starke sehr zweckmässig construirten, mit drei Prismen versehenen grossen Spectralapparat zu Gebote. Sollten die Zeichnungen* die nöthigen Details, einen genügend grossen Massstab und die erforderliche Genauigkeit besitzen, so konnten sie nur in einem längeren Zeitraume vollendet werden. Inzwischen erschien in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie vom 10. Januar eine Mittheilung Secchi's, worin er nebst Anderem, was sich direct auf die Sonne bezieht, auch erwähnt, dass er mehrfache Spectra desselben Stoffes je nach dem engen oder weiten Theile der Geissler-schen Röhren wahrnimmt**. Er schreibt diese verschiedenen Spectra demselben Stoffe bei verschiedener Temperatur zu. Insbesondere glaubt er der Erste zu sein, der im engen und weiten Theile einer Geissler'schen Röhre verschiedene Spectra sieht. Aber eine Arbeit über die Schichtung des elektrischen Lichtes, die Einer von uns am 3. Januar 1860 veröffentlichte, knüpfte bereits an eine solche Beobachtung des Hofrathes v. Ettingshausen an***.

---

* Dieselben fertigt Prof. Kuhn an.

** Compt. rend. T. 70 S. 82.

*** Sitzgsber. d. k. Akad. d. W. math.-naturw. Cl., XLIII. Bd. 1861, S. 15 flgg. S. 16 sagt der Verfasser der Arbeit: „Ich hielt es daher für interessant, zu untersuchen, ob die obenerwähnte Verschiedenheit der Spectra in den verschieden weiten Theilen der Geissler'schen Röhren von einer Verschiedenheit des Spectrums einer und derselben Substanz je nach der Weite der Röhre oder von einer Anordnung verschiedener Stoffe herrührt."

Durch langen Gebrauch erlitten zwei unserer Stickstoffröhren und eine Wasserstoffröhre Modificationen, auf welche wir später zurückkommen. Neben den Beobachtungen am grossen Apparate stellten wir am kleinen Apparate Vergleichungen mittels des sogenannten „Vergleichsprismas" an. Wir verglichen die drei Spectra am negativen Pole mit den von Plücker zunächst berücksichtigten Spectris der capillaren Theile der drei Röhren, sowie auch mit dem Spectrum des Quecksilbers. In letzterer Beziehung sei erwähnt, dass wir eine möglichst vollständige Vergleichung mit allen Metallspectris beabsichtigen. Das Resultat unserer bisherigen Vergleichungen ist folgendes: von den drei Maximis am negativen Pole der Stickstoffröhre stimmt das am wenigsten brechbare (gelbgrüne) mit der hellsten Sauerstofflinie, d. h. mit der hellsten Linie im engen Theile der Sauerstoffröhre. Das zweite Maximum stimmt mit gar keiner Linie eines engen Theiles; das dritte Maximum stimmt mit einem schwachen Bande im engen Theile der Stickstoffröhre, wobei wir vorläufig nur von unmodificirten Röhren sprechen. Das Maximum am negativen Pole des Wasserstoffes stimmt mit keiner Linie im engen Theile einer unmodificirten Röhre. Von den fünf Maximis am negativen Pole der Sauerstoffröhre stimmt das gelbgrüne Maximum mit einer Linie im engen Theile der Sauerstoffröhre, das blaugrüne Maximum mit einer Linie im engen Theile der Stickstoffröhre, das violette Maximum mit der violetten Quecksilberlinie, das grüne und das blaue Maximum jedoch stimmt mit keiner Linie im engen Theile der drei unmodificirten Röhren. Von den Uebereinstimmungen schwächerer Linien behalten wir uns vor, bei späterer Gelegenheit vollständigere Mittheilung zu machen. Auch müssen wir beifügen, dass die Vergleichungen nur jene Genauigkeit besitzen, die der kleine Apparat gestattet. Wir haben ferner die drei negativen Spectra unter einander verglichen und gefunden, dass gar keine Maxima übereinstimmen; doch findet sich das violette Maximum am negativen Pole des Sauerstoffes als deutliche Linie auch am negativen Pole des Stickstoffes. Da beide Röhren von Geissler mittels der Quecksilberluftpumpe hergestellt sind, so kann das Auftreten der violetten Quecksilberlinie in beiden Fällen keine Verwunderung erregen. Unter Berücksichtigung des Quecksilberspectrums, von dem noch eine oder die andere Linie ausser der erwähnten mit schwachen Linien in den Röhren stimmt, ergiebt sich jedenfalls aus den vorliegenden Beobachtungen bereits das wichtige Resultat, dass man, abgesehen von Quecksilber- und später zu erwähnenden Natriumspuren, mindestens sechs verschiedene Spectra in drei Röhren hat.

Indem am grossen Apparate die Beobachtungen sehr lange fortgesetzt wurden, ergab sich nicht nur die von Wüllner beobachtete Veränderung der Wasserstoffröhre, sondern auch eine nicht minder interessante Modification der Stickstoffröhre. Die modificirte Wasserstoffröhre ergab das von Wüllner *H*II benannte, von Bettendorff in der Festschrift zum Bonner Jubiläum gezeichnete Spectrum. Indem der Eine von uns sowohl dieses, als das Spectrum im engen Theile der noch nicht modificirten Stickstoffröhre zeichnete, ergab sich mit unwiderleglicher Evidenz, dass dieses Spectrum nicht von Stickstoffresten in der Wasserstoffröhre herrühren kann, dass also Wüllner gegen Dubrunfaut in dieser Beziehung unbedingt Recht hat.

Was die Modification der Stickstoffröhre betrifft, so nahm sie folgenden Verlauf. Während anfangs das negative Glimmlicht in scharfer Begrenzung und wenig ausgebreitet den negativen Poldraht umgab und der jenseits des dunklen Raumes befindliche Theil des betreffenden weiteren Röhrenstückes wenig hell war, wurde nach einiger Zeit das Glimmlicht grösser und füllte den ganzen Raum um den negativen Poldraht bis zum Glase; zugleich war auch der jenseits des dunklen Raumes befindliche Theil des betreffenden Röhrenstückes heller geworden. Da trat eine weitere Veränderung der Röhre derart ein, dass das Glimmlicht nahezu verschwand, das Licht an der Uebergangsstelle von der capillaren Röhre zum Stücke am negativen Pole sich schichtete und eine hellere Stelle zeigte, das Licht im engen Theile an Helligkeit abnahm und zugleich lavendelblau wurde, und endlich auch im Stücke am positiven Pole dunkle Schichten auftraten. Binnen einer halben Stunde war, nachdem einmal diese Erscheinungen sichtbar geworden waren, die Modification vollendet. War dies geschehen, so verschwanden die während des Ueberganges wahrnehmbaren Schichten wieder gänzlich. Dagegen trat nun eine wunderschöne und äusserst lebhafte Fluorescenz ein, und zwar nicht nur am negativen Pole, sondern wohl in dem am negativen Pole befindlichen Röhrenstücke, aber daselbst nun jenseits des dunklen Raumes, gegen den engen Theil der Röhre zu am lebhaftesten. Auch dort, wo der positive Poldraht das Glas berührte, trat eine deutliche Fluorescenzwirkung hervor. Ja zuweilen war die Fluorescenz in allen Theilen der Röhre bis zum dunklen Raume deutlich sichtbar, und nur gerade am negativen Pole war Dunkelheit. Zugleich war am positiven Pole eine dem Glimmlicht im späteren Stadium ähnliche Lichtumfluthung eingetreten. In der capillaren Röhre bemerkte man ab und zu, namentlich während des Umwandlungsprocesses, hell leuchtende gelbe Punkte. Sie traten an dem Ende der Röhre auf, das dem negativen Pole näher liegt. Der Spectralanalysis unterworfen, ergaben diese gelben Punkte ein Natriumspectrum von äusserster Lebhaftigkeit. Hervorzuheben ist noch, dass die lavendelblaue Färbung des engen Theiles nicht plötzlich auftritt, sondern sie wird zuerst an der dem negativen Pole zunächstliegenden Stelle der Capillarröhre sichtbar und breitet sich von da immer mehr nach der Mitte aus. Eine Commutation beschleunigt in diesem Stadium die Umwandlung, und nach derselben ist sie binnen Kurzem vollständig vollbracht.

Wenn man eine modificirte Stickstoffröhre der Untersuchung mit dem kleinen Apparate und dem Vergleichsprisma unterwarf, so ergab sich folgende merkwürdige Thatsache: die drei Maxima, die man am negativen

Pole der unmodificirten Stickstoffröhre findet, sind jetzt in allen Theilen der Röhre sichtbar. Am negativen und positiven Pol, namentlich am letzteren, sieht man beinahe nur die drei Maxima. In der Mitte ist ein reicheres Spectrum, aber mit Ausnahme einiger schwacher Nebenlinien stimmen dieses Spectrum und das am negativen Pol der unmodificirten Stickstoffröhre überein — um ganz deutlich zu sein: nicht blos auf die drei Maxima, sondern ferner noch auf zahlreiche andere sichtbare Linien bezieht sich diese Uebereinstimmung, und nur in wenigen schwachen Nebenlinien lässt sich eine Verschiedenheit bemerken. Es ist also in dieser Röhre das, was van der Willigen und Andere als das negative Spectrum der Luft betrachteten, durch alle Theile wahrnehmbar. Die Beobachtung gewinnt an Interesse, wenn wir uns erinnern, dass nun auch der positive Pol wie von Glimmlicht umfluthet ist und dass die Fluorescenz des Glases jetzt keineswegs mehr am negativen Pole allein oder vorzüglich auftritt, sondern dass sie auch jenseits des dunklen Raumes und am positiven Pole bemerkbar ist, ja manchmal jenseits des dunklen Raumes viel stärker als am negativen Pole, ja sogar bisweilen nur bis zum dunklen Raume, äusserst lebhaft, ohne sich über denselben hinaus zu erstrecken. In solcher Weise bekommt nach langem Gebrauch eine Stickstoffröhre ebenso, wie eine Wasserstoffröhre ein neues Spectrum, was wir, wenn wir vom negativen Pol der unmodificirten Röhre nichts wüssten, als NII in analoger Art auffassen könnten, wie Wüllner das Spectrum in der durch langen Gebrauch modificirten Wasserstoffröhre als HII betrachtet.

Nun wissen wir aber, dass es das Spectrum des negativen Poles ist, das sich in der modificirten Röhre in allen Theilen findet. Ist vielleicht etwas Aehnliches auch bei der modificirten Wasserstoffröhre der Fall? Wir haben wohl nicht nöthig, erst darauf hinzuweisen, welch merkwürdiger Zusammenhang sich in diesem Falle zwischen den Spectris am negativen Pole und den neuen Spectris im engen Theile durch langen Gebrauch modificirter Röhren ergäbe und wie dadurch HII Wüllner's in eine höchst beachtenswerthe Relation gebracht wäre. Nun, die Beobachtung zeigt am negativen Pol einer Wasserstoffröhre ein grüngelbes Maximum, dem zwei schwache: eine grüne und grüngelbe Linie vorangehen, und zwei schwache: eine blaugrüne und eine blaue folgen, die mit dem grünblauen und blauen Maximum des negativen Poles der Sauerstoffröhre übereinstimmen. Im engen Theile der modificirten Röhre ist die Natriumdoppellinie am hellsten, gehört aber natürlich nicht zu HII. Was von HII im kleinen Apparat sichtbar ist, sind fünf Linien, die mit den am negativen Pol der Wasserstoffröhre bemerkbaren vollständig übereinstimmen, nur dass das Maximum nicht so deutlich hervortritt. Ueberhaupt zeigen sich bei den eben besprochenen Spectris manche relative Helligkeitsunterschiede, auf die wir für diesmal noch nicht eingehen. Die Auslegung dieser Thatsachen ergiebt sich von selbst und wird durch folgende merkwürdige Beobachtung noch evidenter.

Wir pumpten auf einer zweistiefligen Luftpumpe eine Röhre so lange aus, bis die Barometerprobe ihren niedersten Stand erreicht hatte und sich zeigte, man könne nicht weiter. Die abgeschmolzene Röhre zeigte im engen Theile eine Uebereinanderlagerung des gewöhnlichen Sauerstoff-, Wasserstoff- und Stickstoffspectrums; die Sauerstofflinien waren davon die relativ hellsten. Am negativen Pole der Röhre sah man auch, wie meist bei Luftröhren, drei Maxima, neben denen wenig mehr wahrzunehmen war; bei näherer Prüfung zeigte sich aber, dass diese drei Maxima nicht die gewöhnlichen waren, sondern mit den drei Wasserstofflinien, d. h. $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ stimmten.

Ein besonderes Interesse nehmen noch die Fluorescenzerscheinungen in Anspruch. Längst ist die Fluorescenzwirkung des elektrischen Funkens bemerkt worden, insbesondere findet man aber allgemein die Fluorescenzwirkung des Lichtes am negativen Pol hervorgehoben. Diese Sprechweise, die man noch in allen Büchern angewendet findet, gehört aber jedenfalls Anschauungen über das elektrische Licht an, welche mit den durch die Spectralanalyse rectificirten nicht mehr übereinstimmen. Durch die Spectralanalyse ist es höchst wahrscheinlich geworden, dass die Zusammensetzung des von einem glühenden Körper ausgesendeten Lichtes nicht von der Ursache des Glühzustandes, z. B. Verbrennungsprocess, elektrischer Strom etc., sondern nur von der materiellen Beschaffenheit des glühenden Körpers abhängt. Was ist Fluorescenz anderes, als die Wirkung ultravioletter Lichtbestandtheile? Warum sollte also hier etwas Anderes gelten? Dadurch, dass nun mit der Verbreitung des sichtbaren Spectrums des Lichtes am negativen Pole durch die ganze Röhre eine analoge Ausbreitung der Fluorescenzwirkung Hand in Hand geht, wird die richtige Auffassung der Fluorescenzwirkung in markanter Weise unterstützt. Eine interessante Beobachtung ist es auch, dass bei einer modificirten Stickstoffröhre die Fluorescenzwirkung unter gewissen Umständen durch Stromtheilung wie verstärkt erscheint. Man kann sich dieselbe kaum anders erklären, als dass im letzteren Falle gerade der die Fluorescenzwirkung bedingende materielle Träger einen mindestens relativ grösseren Antheil an der Strahlenemission erhält. Also auch diese Beobachtung ist nur mit der von uns vertretenen Ansicht von der Fluorescenzwirkung des elektrischen Lichtes einer plausiblen Deutung fähig. — Um es nochmals kurz und mit anderer Ausdrucksweise zu sagen: Es verhält sich mit den ultravioletten Strahlen, wie mit den sichtbaren, sie werden von den Stoffen, wenn dieselben glühen, emittirt, sind für dieselben charakteristisch, wie Spectrallinien, aber unabhängig von der Glühursache, sei dieselbe chemisch oder, wie in unserem Falle, elektrisch. Dass sich dies durch unsere Untersuchung bestätigte, dürfte der Beachtung würdig sein.

Kehren wir jetzt nochmals auf die Frage der mehrfachen Spectra einfacher Stoffe zurück, sowie auf die Spectra positiven und negativen Lichtes.

Die Verbreitung der Spectra des negativen Lichtes in modificirten Röhren, sowie das Wasserstoffspectrum am negativen Pole unserer selbsterzeugten Röhre scheinen für den stofflichen Ursprung dieser Spectra zu sprechen. Sollte bei dem Zusammenhang der Spectra modificirter Röhren mit denen des negativen Lichtes nicht auch der stoffliche Ursprung dieser zweiten Spectra wahrscheinlich sein?

Die Thatsache, dass der negative Pol einer neuen Röhre schon dasselbe Spectrum besitzt, wie der enge Theil der lange gebrauchten, legen wir also dahin aus, dass ein bestimmtes Stoffgemenge, durch dieses Spectrum charakterisirt, am negativen Pole glüht. Jedenfalls glüht sodann dieses selbe Gemenge bei der modificirten Röhre auch im engen Theile, sei es, dass sich durch den langen Gebrauch dieses Stoffgemenge selbst immer mehr entwickelt, z. B. aus dem Gase, oder sei es, dass es durch Verschwinden des Hauptstoffes, indem z. B. derselbe von den Elektroden absorbirt wird, zur überwiegenden Geltung in der ganzen Röhre kommt. In dem „Stoffgemenge" dürften sich übrigens Stoffe in grösserer Anzahl befinden. Die von uns bereits begonnene Reduction der einzelnen Linien auf einzelne Stoffe wird eine unserer nächsten Aufgaben bilden.

Prof. Dr. Edm. Reitlinger.
Prof. Moriz Kuhn.

XXX. Krümmungsverhältnisse eines Curvenbüschels in einem Scheitel.

Hat man ein Curvenbüchel n^{ter} Ordnung und construirt in einem der n^2 Scheitel die Krümmungsmittelpunkte der einzelnen Curven, so wollen wir uns die Frage stellen, was für einen Ort die sämmtlichen Krümmungsmittelpunkte erfüllen.

Bezieht man das Curvenbüschel auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der in Betracht gezogene Curvenscheitel ist, so stellt sich die Gleichung der Curven des Büschels in der Form

$$1)\qquad \varphi = u + \lambda v = 0$$

dar, wobei u und v die Gleichungspolynome zweier Curven des Büschels sind, welche für $x=0$, $y=0$ gleichzeitig verschwinden.

Bezeichnet man die zwei Differentialquotienten von φ nach x mit φ_1, φ_{11} und jene nach y mit φ_2, φ_{22}, endlich den nach x und y mit φ_{12}, so erhält man bekanntlich:

$$2)\qquad \frac{dy}{dx} = p = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

$$3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{\varphi_{11} + 2p\,\varphi_{12} + p^2\varphi_{22}}{\varphi_2}.$$

Für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes c der Curve 1) ergeben sich nach den gemachten Voraussetzungen die Werthe:

4) $$\xi = -\frac{1+p^2}{q} \cdot p,$$

5) $$\eta = \frac{1+p^2}{q},$$

woraus sofort folgt (wie auch *a priori* eingesehen werden kann):

6) $$p = -\frac{\xi}{\eta}.$$

Berücksichtigt man den ersten Theil der Doppelgleichung 1), so ergiebt sich:

$$p = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{\xi}{\eta} = -\frac{u_1+\lambda v_1}{u_2+\lambda v_2},$$

woraus folgt:

7) $$\lambda = \frac{\eta u_1 - \xi u_2}{\xi v_2 - \eta v_1}.$$

Hierbei haben etwa u_1 und u_2 dieselbe Bedeutung wie φ_1 und φ_2, d. h. es sind die ersten Differentialquotienten von u nach x und y.

In ähnlicher Weise kann man 3) nach Berücksichtigung von 1) und 6) in die Form bringen:

8) $$q = \frac{(u_{11}+\lambda v_{11}) - 2\frac{\xi}{\eta}(u_{12}+\lambda v_{12}) + \frac{\xi^2}{\eta^2}(u_{22}+\lambda v_{22})}{(u_2+\lambda v_2)},$$

und wenn man statt q den aus 5) fliessenden Werth

$$q = \frac{1+p^2}{\eta} = \frac{\xi^2+\eta^2}{\eta^3}$$

einsetzt, so geht die Gleichung 8) über in

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\eta^3} = \frac{(u_{11}+\lambda v_{11})\eta^2 - 2\xi\eta(u_{12}+\lambda v_{12}) + \xi^2(u_{22}+\lambda v_{22})}{\eta^2(u_2+\lambda v_2)}.$$

Setzt man schliesslich an die Stelle von λ den sich in 7) darstellenden Werth, so erhält man nach einer einfachen Umformung und nach Unterdrückung des sich in beiden Nennern einfindenden Factors η^3 eine Gleichung, welche man in der Form

9) $$A\xi^3 + B\eta^3 + C\xi^2\eta + D\xi\eta^2 + E(\xi^2+\eta^2) = 0$$

schreiben kann, wobei abkürzend

$$(v_{11}u_1 - u_{11}v_1) = A, \quad (v_{22}u_1 - u_{22}v_1) = B,$$
$$2(u_{12}v_2 - v_{12}u_2) - (u_{22}v_1 - v_{22}u_1) = C, \quad (u_{11}v_2 - v_{11}u_2) - 2(u_{12}v_1 - v_{12}u_1) = D,$$
$$(v_1u_2 - v_2u_1) = E$$

gesetzt wurde. Die Grössen A, B, C, D, E sind von ξ und η unabhängige constante Grössen, da man in der ganzen Entwickelung, die sich auf den von uns speciell in Betracht gezogenen Büschelscheitel bezieht, $x=0$,

$y=0$ zu setzen hat, so dass also $u_1, v_1, u_2, v_2, u_{11}, v_{11}, u_{22}, v_{22}, u_{12}, v_{12}$ die Werthe des Differentialquotienten von u und v sind, nachdem man hierin $x=0$, $y=0$ gesetzt hat.

Die Gleichung 9), eine Beziehung zwischen den Coordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes irgend einer Curve unsers Büschels im betrachteten Scheitel, stellt somit die Gleichung des von den sämmtlichen Krümmungsmittelpunkten erfüllten Ortes dar.

Wie man sofort erkennt, ist 9) die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, welche im Coordinatenanfangspunkte (weil die Glieder der ersten und nullten Potenz fehlen) einen Doppelpunkt besitzt. Die Tangenten dieses Doppelpunktes haben dann bekanntlich die Gleichung

$$\xi(\xi^2+\eta^2)=0$$

oder

$$\xi^2+\eta^2=0,$$

woraus sofort folgt, dass sie durch die beiden imaginären Kreispunkte hindurchgehen.

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

„Construirt man in einem Scheitel eines Curvenbüschels die Krümmungsmittelpunkte der einzelnen Curven, so erfüllen sie eine Curve dritter Ordnung vierter Classe, welche den Scheitel zu einem Doppelpunkte besitzt und daselbst die zwei nach den imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen berührt."

Diese Curve, C_4^3 wollen wir sie nennen, besitzt also immer einen isolirten Doppelpunkt, und da dessen Tangenten nach den Kreispunkten gehen, so ist die Strahleninvolution, für welche diese Tangenten die Doppelstrahlen sind, eine Involution rechter Winkel. Die Curve C_4^3 hat somit die Eigenschaft, dass je zwei ihrer conjugirten Punkte vom Doppelpunkte δ aus unter rechten Winkeln gesehen werden.

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist bestimmt, sobald man diesen und sechs weitere Punkte, oder sobald man die Tangenten des Doppelpunktes und vier weitere Punkte kennt.

Für unsere Curve C_4^3 sind offenbar die Doppelpunktstangenten gleichzeitig mit dem Doppelpunkte bestimmt, da sie dessen Verbindungslinien mit den imaginären Kreispunkten sind. Die Curve C_4^3 der Krümmungsmittelpunkte wird sonach vollkommen bestimmt sein, sobald man ihren Doppelpunkt und vier weitere Punkte kennt. Bezüglich des Curvenbüschels drückt sich dies folgendermassen aus.

„Sind die Krümmungsradien von vier Curven eines Büschels in einem Scheitel der Grösse und der Richtung nach bekannt, so kann man den Krümmungsradius jeder fünften Curve in demselben Scheitel lineal construiren."

Es sei also etwa δ der Scheitel des Curvenbüschels und 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 die Krümmungscentra der vier Curven C_1, C_2, C_3, C_4 des Büschels im Scheitel δ, somit $\overline{\delta 0_1}$, $\overline{\delta 0_2}$, $\overline{\delta 0_3}$, $\overline{\delta 0_4}$ deren Krümmungsradien. Man verlangt nun den Krümmungsradius $\overline{\delta 0_5}$ jener Curve C_5 des Curvenbüschels zu construiren, welche die durch δ beliebig gelegte Gerade O_5 zur Normale hat.*

Den Endpunkt 0_5 des fraglichen Krümmungsradius wird man nach Früherem als den Schnittpunkt der Normale 0_5 mit der Curve C_4^3 dritter Ordnung erhalten, welche durch 0_1, 0_2, 0_3. 0_4 hindurchgeht, in δ einen Doppelpunkt besitzt und daselbst die beiden nach den imaginären Kreispunkten gehenden Strahlen berührt.

Diese Curve C_4^3 kann man sich nun einfach als das Erzeugniss zweier ein-zweideutiger Büschel herstellen, von denen das eindeutige einen der vier Punkte 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 z. B. 0_1 und das zweideutige den Doppelpunkt δ zum Scheitel hat. (Vergl.: „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde“ etc. B. G. Teubner, 1869. II. Theil, Art. 18.)

Bestimmt man den Directionskegelschnitt R („Theorie“, I. Th. Art. 22) bezüglich des Strahlenpaares $\overline{\delta 0_4}$, $\overline{0_1 0_4}$, so erhält man für denselben folgende Tangenten: Die Gerade $\overline{0_1 0_4}$, welche wir als Tangente I bezeichnen wollen; die Tangente II als Verbindungslinie des Schnittpunktes von $\overline{\delta 0_2}$ und $\overline{0_2 0_4}$ mit dem Schnittpunkte von $\overline{0_1 0_2}$ und $\overline{\delta 0_4}$; die Tangente III als Verbindungslinie des Schnittpunktes von $\overline{\delta 0_3}$ und $\overline{0_1 0_4}$ mit dem Schnittpunkte von $\overline{0_1 0_3}$ und $\overline{\delta 0_4}$. Ferner muss der Kegelschnitt R die Doppelpunktstangenten der Curve C_4^3, welche hier von δ nach den imaginären Kreispunkten gehen, berühren, d. h. der Punkt δ ist ein Brennpunkt des Kegelschnittes R. Wir kennen somit drei Tangenten I, II, III und den Brennpunkt δ des Directionskegelschnittes, wodurch dieser vollkommen bestimmt ist. Fällt man von δ auf I, II, III resp. die Perpendikel $\overline{\delta 1}$, $\overline{\delta 2}$, $\overline{\delta 3}$ und legt durch deren Fusspunkte 1, 2, 3 den Kreis K, so kann man mittels desselben beliebig viele Tangenten von R und damit auch beliebig viele Punkte von C_4^3 construiren. Jede Tangente von R schneidet nämlich $\overline{0_1 0_4}$ und $\overline{\delta 0_4}$ in zwei Punkten, welche mit δ und 0_1 verbunden, zwei sich in einem Punkte von C_4^3 schneidende Gerade geben.

Um nun den auf 0_5 liegenden Punkt der Curve zu finden, sei m der Schnittpunkt von 0_5 mit $\overline{0_1 0_4}$; über $\overline{\delta m}$ als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis, welcher K ausser in 1 noch in einem zweiten Punkte schneidet,

---

* Hierbei ist zu bemerken, dass man weder das Curvenbüschel $C_1 C_2 C_3 C_4 \ldots$ noch die Curve C_5 insbesondere kennen müsse, sondern dass es genügt, die vier Krümmungscentren 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 und den Scheitel δ zu kennen.

welcher mit m verbunden eine Tangente des Directionskegelschnittes R liefert, welche $\overline{\delta O_4}$ in n schneiden möge. Die Gerade $\overline{O_1 n}$ schneidet alsdann den Strahl O_5 im verlangten Punkte O_5, wodurch unsere Aufgabe gelöst erscheint.

Da die Curve C_4^3 die unendlich weite Gerade in drei Punkten schneidet, so giebt es unter den sämmtlichen von uns betrachteten Krümmungshalbmessern drei, welche unendlich gross sind. Solchen aber entspricht je eine Curve des Büschels, welche im Scheitel δ einen Inflexionspunkt besitzt. Wir können demnach sagen:

„Unter den Curven eines Büschels giebt es für jeden Scheitel drei, welche in ihm einen Inflexionspunkt besitzen."

Da, wie wir gesehen haben, durch vier Krümmungslinien die Gesammtheit der übrigen bestimmt ist, so kann man folgenden Satz als bewiesen betrachten:

„Wenn zwei Curvenbüschel einen gemeinsamen Scheitel besitzen und in diesem vier Curven des einen Büschels vier Curven des andern osculiren, so osculirt jede Curve des einen Büschels die sie berührende Curve des zweiten Büschels in dem besagten Scheitel."

Durch Combination der beiden letzten Sätze gelangt man sofort zu folgendem:

„Haben vier Curven eines Büschels einen der Büschelscheitel zum Inflexionspunkte, so haben denselben Scheitel alle übrigen Curven zum Inflexionspunkte."

Denn das Strahlenbüschel, dessen Scheitel der betreffende Büschelscheitel ist, enthält vier Strahlen (die vier Inflexionstangenten), welche mit vier Curven des Büschels in Osculation sind. Somit sind alle Strahlen des Büschels mit allen Curven des Büschels in Osculation, d.h. der Scheitel ist für alle Curven ein Inflexionspunkt.

Aus dem letztbewiesenen Satze folgt unmittelbar die bekannte Grundeigenschaft sycigetischer Curvenbüschel dritter Ordnung:

„Alle Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung hindurchgehen, besitzen diese Punkte gleichfalls zu Inflexionspunkten."

Denn bekanntlich liegen die neun Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung zwölfmal zu dreien auf einer Geraden, die neun Scheitel eines Curvenbüschels dritter Ordnung bildend. Durch jeden Inflexionspunkt gehen vier Gerade, von denen jede zwei der übrigen acht Inflexionspunkte enthält; man kann demnach jede solche Gerade mit zweien durch die sechs nicht auf ihr liegenden Inflexionspunkte gehenden Geraden als eine Curve dritter Ordnung betrachten, und zwar ist es offenbar eine Curve, welche im betrachteten Scheitel einen Inflexionspunkt besitzt. Für jeden Scheitel erhält man vier solche Curven, welche in ihm Inflexion besitzen, und somit werden nach dem letzten Satze alle Curven, welche durch die neun Inflexionspunkte hindurchgehen, in diesen Inflexion haben.

Ist das von uns in Betracht gezogene Curvenbüschel ein Kegelschnittsbüschel mit den Scheiteln α, β, γ, δ, und man denkt sich die Curve C_4^3 der Krümmungsmittelpunkte für den Scheitel δ bestimmt, so sind diejenigen drei Kegelschnitte des Büschels, welche in δ eine Inflexionstangente besitzen, die drei Grenzkegelschnitte des Büschels und die Inflexionstangenten sind die Strahlen $\overline{\delta\alpha}$, $\overline{\delta\beta}$, $\overline{\delta\gamma}$, und folglich sind die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte die Richtungen der zu $\overline{\delta\alpha}$, $\overline{\delta\beta}$, $\overline{\delta\gamma}$ senkrechten Geraden.

Diese drei Richtungen sind zugleich die drei Schnittpunkte der Curve C_4^3 mit der unendlich weiten Geraden der Ebene.

Mittels dieser Bemerkung ist es nicht schwer, folgende Aufgabe aufzulösen:

„Es ist ein Curvenbüschel (C) gegeben; man soll ein Kegelschnittsbüschel construiren, welches mit dem Büschel (C) einen Scheitel δ gemein hat und in diesem Scheitel das Büschel (C) osculirt.“

Seien C_1, C_2, C_3 jene drei Curven des Büschels (C), welche in δ Inflexionstangenten besitzen, und A_1, A_2, A_3 seien die drei Tangenten von C_1, C_2, C_3 in δ; ferner sei C_4 eine beliebige vierte Curve des Büschels. Construirt man einen willkürlichen Kegelschnitt*, welcher C_4 in δ osculirt und A_1, A_2, A_3 resp. in α, β, γ schneidet, so ist das Kegelschnittsbüschel ($\alpha\beta\gamma\delta$) ein solches, welches Curve für Curve das Büschel (C) in δ osculirt. Dies folgt sofort nach dem vorvorletzten Satze, da wir hier im Kegelschnittsbüschel vier Curven (die drei Inflexionstangenten A_1, A_2, A_3 und den angenommenen Kegelschnitt) haben, welche vier Curven (C_1, C_2, C_3, C_4) des Büschels (C) in δ osculiren.

Prag, im September 1870. Dr. EMIL WEYR.

XXXI. Bemerkungen zu zwei Aufsätzen des Herrn Mohr.

Herr Mohr hat im 4. Hefte dieser Zeitschrift, S. 269 und 277, zwei Aufsätze veröffentlicht: „Ueber die Ursache der ungleichen Leitungsfähigkeit der Gase für Wärme“ und „Berechnung der beim Wasser zur Erwärmung und Ausdehnung nöthigen Wärmemenge oder der Wärmemenge bei constantem Druck und Volumen“, welche mir zu einigen kurzen Bemerkungen Veranlassung geben.

* Etwa den Krümmungskreis von C_4 in δ.

In dem ersten Aufsatze gelangt er zu dem Resultate, dass die specifisch leichteren Gase die Wärme besser leiten müssen, als die schwereren, weil die leichteren Atome bei gleicher Temperatur eine grössere Geschwindigkeit haben, als die schwereren. Er betrachtet diese Erklärung der verschiedenen Wärmeleitung als neu und sagt z. B. auf S. 272: „Die bis jetzt unerklärte grosse Leitungsfähigkeit des Wasserstoffes gegen alle anderen Gase findet in der ungleichen Geschwindigkeit der Gase ihre Begründung, ohne dass man genöthigt wäre, dem Wasserstoff eine metallische Natur zuzuschreiben."

Nun habe ich aber schon im Jahre 1862 eine ziemlich ausgedehnte Abhandlung über die Wärmeleitung der Gase publicirt*, in welcher ich die Wärmeleitung aus der Molecularbewegung erklärt und ihren Zusammenhang mit dem specifischen Gewichte bestimmt nachgewiesen habe. Am Schlusse der Abhandlung sind die darin gewonnenen Resultate übersichtlich in vier kurze Sätze zusammengefasst, deren letzter lautet: „Das Wärmeleitungsvermögen ist bei leichteren Gasen grösser als bei schwereren, und muss daher insbesondere beim Wasserstoff bedeutend grösser sein, als bei allen anderen Gasen."

Ich muss vermuthen, dass Herr Mohr diese Abhandlung nicht gekannt hat, was mich aber insofern befremdet, als er selbst meine Abhandlungensammlung, in welcher auch diese Abhandlung sich befindet, citirt hat.

Auch eine andere, in dem ersten Aufsatze von Mohr erwähnte Erscheinung, nämlich dass bei gleich starkem galvanischem Strome ein in Kohlensäure befindlicher Platindraht schon glühen kann, während ein in Wasserstoff befindlicher ebensolcher Draht noch dunkel ist, habe ich in einer besondern Abhandlung vom Jahre 1852 weitläufig besprochen**.

In seinem zweiten Aufsatze berechnet Herr Mohr für Wasser den Unterschied zwischen der specifischen Wärme bei constantem Drucke und bei constantem Volumen, und erhält dabei andere Resultate, als ich gefunden habe***. Diese Abweichung erklärt sich, abgesehen von anderen auf die Rechnungsweise bezüglichen Umständen, hinlänglich daraus, dass Herr Mohr nur die äussere Arbeit betrachtet, welche das Wasser bei der Ausdehnung thun kann, während meiner Ansicht nach auch die innere Arbeit in Betracht kommen muss, welche sich nur unter Zuhilfenahme des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bestimmen lässt.

Bonn, 5. October 1870. R. Clausius.

---

* Poggendorff's Annalen, Bd. 115 S. 1, und Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, Bd. II S. 277.

** Pogg. Ann., Bd. 87 S. 501.

*** Pogg. Ann., Bd. 125 S. 374, und Abhandlungensammlung, Bd. II S. 19.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

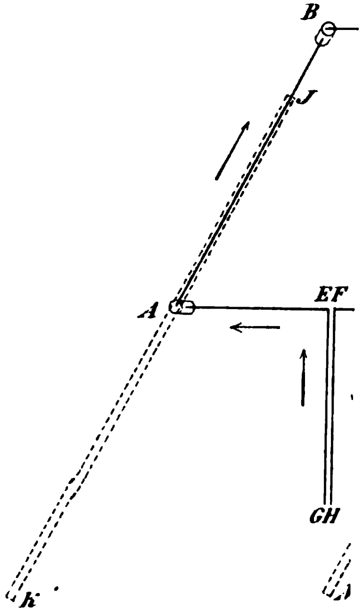
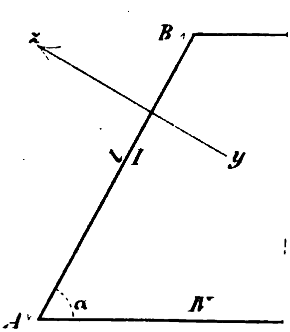


Fig. 2.



Fi

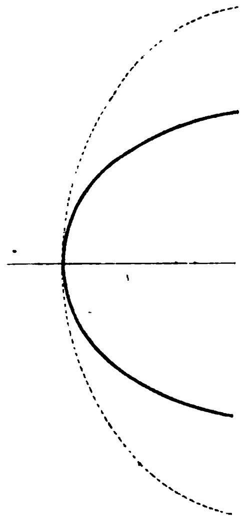
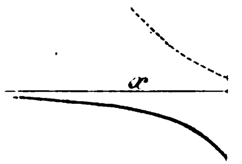


Fig.



Zei

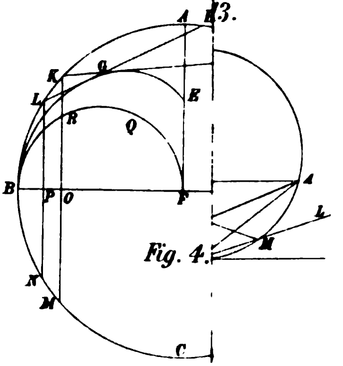


Fig. 4.

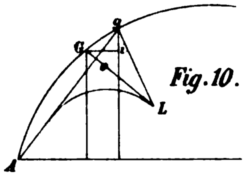
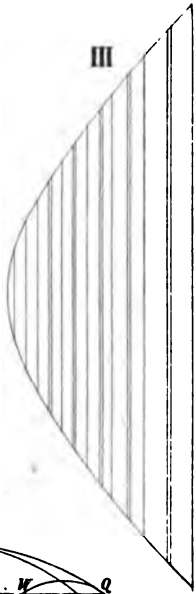


Fig. 10.

III



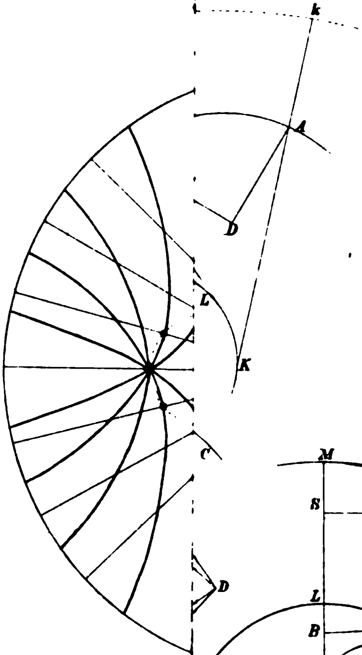


Fig. 7

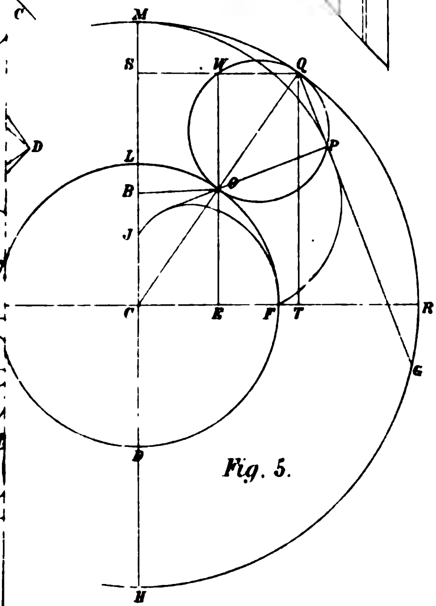
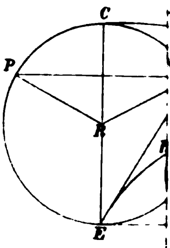


Fig. 5.



ESCHEBACH & SCHAEFER LITH. LPZ.

Fig. 1.

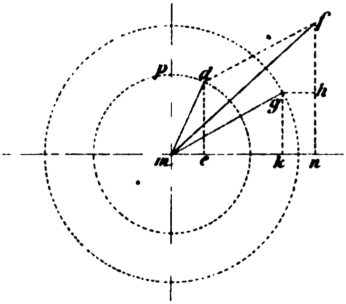


Fig. 2.

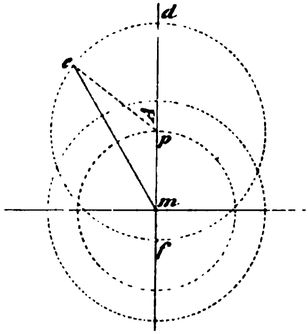


Fig. 3.

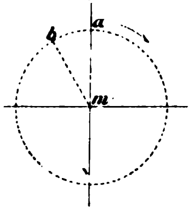


Fig. 4.

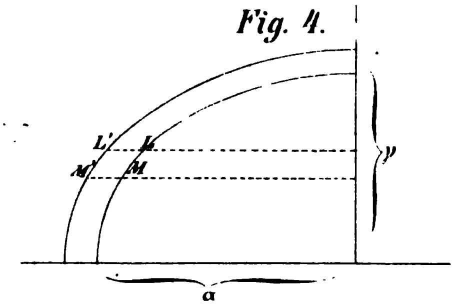
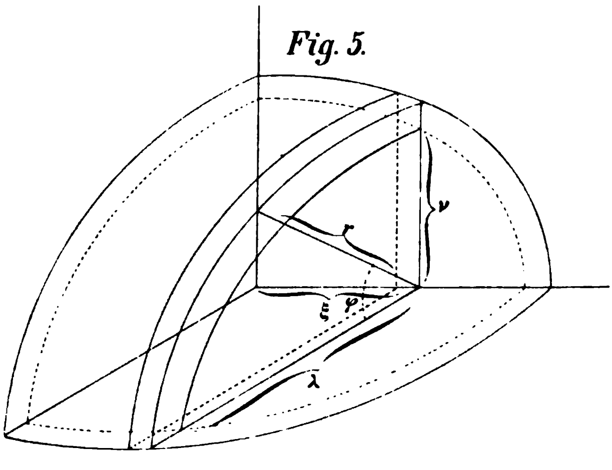
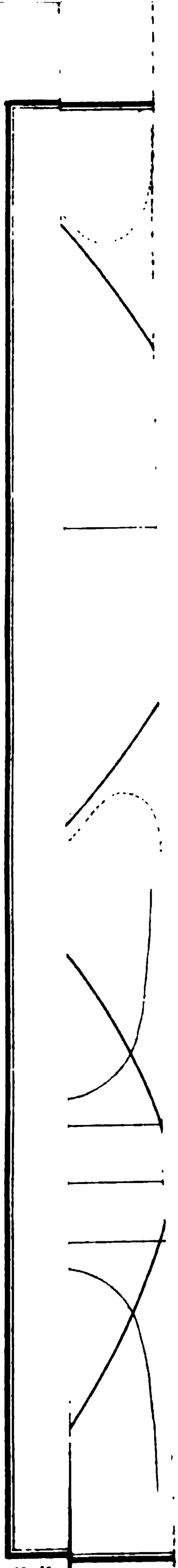


Fig. 5.



sik



Zeits

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

Fünfzehnter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1870.

Inhalt.

Literaturzeitung.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von Dr. OTTO HESSE, ord. Prof. am Polytechnicum zu München, II. Auflage. Leipzig, B. G. Teubner.

Felice la gioventù alemanna che è educata nelle matematiche da tali professori! *) rief vor acht Jahren, als er die eben erschienene Raumgeometrie des Hrn. Hesse gelesen, Hr. Luigi Cremona aus, nunmehr selbst unter den Pioniren geometrischer Forschung der Vordersten Einer. Die deutsche Jugend hat sich empfänglich gezeigt für das Vortreffliche, was ihr geboten war. Wir sind Zeugen des fast unerhörten Ereignisses, wie ein ziemlich umfangreiches mathematisches Werk, welches sich in den bisher schwer zugänglichen und selten erklommenen Höhen unserer Wissenschaft bewegt, durch die überaus geschickte Führung des pfadkundigen Verfassers sich in verhältnissmässig kurzer Frist als Gegenstand allgemein verbreiteten Studiums herausstellt, dergestalt, dass eine neue Auflage nöthig geworden, um der allerorts laut ertönenden Nachfrage zu genügen.

Der Inhalt des Werkes übt eine doppelte Anziehungskraft aus, entsprechend seinem doppelten Charakter, der in Folgendem besteht. Man kann es ansehen als geometrische Theorie der aus Punkten, Ebenen und Flächen zweiten Grades zusammengesetzten Raumgebilde und ihrer polaren Eigenschaften unter Hinzuziehung der Analysis als eines Hülfsmittels, oder als geometrische Illustration zu einer sehr vollständig durchgeführten Theorie der homogenen Functionen ersten und zweiten Grades mehrerer Variabeln. Dieser doppelte Charakter des Buches entspringt aus der besonderen Beanlagung seines Verfassers, dem es ebenso leicht wird, mit sichtendem Scharfblick unter einer grossen Anzahl von Gleichungen und Variabeln verschiedener Gattungen Ordnung zu halten, aus jeder sich gelegentlich darbietenden neuen Combination derselben den grössten Vortheil für die Behandlung des ihm vorliegenden Problems

*) Rivista italiana, 10. Febbrario 1862.

zu ziehen, oder bei innerlicher Betrachtung eines von Linien und Flächen durchzogenen Raumes die nützlichsten Vorstellungen zu gestalten, zu fixiren und für seine Zwecke wirksam zu variiren, mit einem Worte eines Mannes, dem algebraische sowohl wie geometrische Phantasie stets bereites Rüstzeug sind.

Nicht weniger als der Inhalt hat die Form des Werkes Anziehungskraft ausgeübt, und zwar ebensowohl durch die kunstreiche Anordnung des Stoffes, auf die wir sofort zurückkommen, als durch den bewunderungswürdig ausgebildeten Sinn des Verfassers für Symmetrie der Rechnung, den das kleinste Detail seiner Formeln erkennen lässt, ein Sinn, den vor Allen er theils durch mündliche Lehre, theils durch das gute Beispiel, welches er in seinen Abhandlungen gab, der neueren mathematischen Generation eingeimpft hat.

Die zweite Auflage weicht von der ersten, was Specialitäten im Gange der Darstellung betrifft, mehrfach ab und bringt auch wesentlich Neues. Um diese Veränderungen der Reihe nach besprechen zu können, muss ich zunächst den allgemeinen Plan des Werkes in Erinnerung bringen. Es beginnt mit der Ebene in Punktcoordinaten und leitet schon in den ersten Vorlesungen einen bei der ferneren Behandlungsweise der Probleme durchgehenden Gedanken ein, der in der Einführung gewisser Multiplicatoren*) besteht, eine Methode, bekannte geometrische Sätze abzuleiten und neue zu finden, deren Fruchtbarkeit in der vierten Vorlesung über das Pascal'sche Sechseck sich reichlich zu erkennen giebt. Die sechste Vorlesung macht dann den Leser mit Grundlage der ferneren symmetrischen Behandlung der Probleme der homogenen Coordinaten**) bekannt.

Aber in der voraufgehenden fünften Vorlesung tritt der leitende Faden des Werkes zuerst deutlich zu Tage, jener originelle Dualismus

*) Sind $A=0$, $A_1=0$, $A_2=0$ die Gleichungen von drei Ebenen, so ist $A+\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2=0$, wenn λ_1 und λ_2 beliebige Grössen bezeichnen, die Gleichung aller Ebenen, welche durch den Durchschnittspunkt der drei ersten gehen. Sind die Gleichungen $A=0$, $A_1=0$, $A_2=0$ so beschaffen, dass es zwei Werthe λ_1 und λ_2 giebt, vermöge deren die Gleichung $A+\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2=0$ identisch erfüllt ist, so schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden. Die Variirung dieses Gedankens, der, wenn ich nicht irre, von Plücker herrührt, ist im Texte gemeint.

**) Wenn man an den homogenen Coordinaten bisweilen aussetzen hört, dass sie ein blosses algebraisches Instrument ohne geometrische Bedeutung sind, so ist dies nicht ganz richtig. Wenn man in der Gleichung einer Fläche statt der Coordinaten x, y, z die Quotienten $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{z}{p}$, also vier Variabeln einführt, so hat dies den guten geometrischen Sinn, dass man die Gleichung aller der gegebenen Fläche nach dem Parameter p variabeln ähnlichen Flächen aufstellt. Hält man dies fest, so ist es leicht, manche scheinbar rein algebraische Operation geometrisch zu interpretiren.

der Anordnung des Stoffes, der in kunstvoller Durchflechtung zweier reciproker Vorstellungsweisen dem Leser mit jeder neuen Vorlesung eine neue Ueberraschung bereitet.

Die Seele dieses Dualismus ist, geometrisch zu reden, die Reciprocität von Punkt und Ebene, seine wahre Grundlage ist aber wohl algebraischer Natur. Zunächst die lineare Gleichung $ux + vy + wz = 1$ kann bei Variation der Coordinaten x, y, z und wenn u, v, w ungeändert bleiben, angesehen werden als Gleichung aller Punkte einer Ebene oder der Ebene selbst, wenn indessen u, v, w variiren und x, y, z constant bleibt, ist sie die Gleichung aller Ebenen, die durch einen Punkt gehen, der mithin bei dieser Veränderlichkeit der einzige ruhende Pol ist; man kann die Gleichung ansehen als Gleichung dieses Punktes. Diese übrigens bekanntlich auch sonst hervortretende Reciprocität zwischen Punkt und Ebene führt zu neuen Sätzen, wenn man sie auf die Theorie der Flächen zweiten Grades anwendet. Die Bemerkung, dass man eine Fläche ebensowohl als Ort der Punkte, die auf ihr liegen, wie als Enveloppe ihrer Tangentenebenen ansehen kann, ist es, die sich hier nützlich erweist und den Dualismus begründet, der sich algebraisch in der Reciprocität der homogenen Functionen kundgiebt.*) Dieser in Hrn. Hesse's Werk so sinnreich durchgeführte Dualismus setzt der Bestim-

*) Man findet die Enveloppe eines durch Variation der Parameter α, β, ... in $f(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots) = 0$ entstehenden Flächensystems durch Elimination von α, β, ... aus den Gleichungen $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, ... Sucht man hiernach die Enveloppe der Ebenen $ux + vy + wz + rp = 0$, wenn u, v, w, r gemäss einer homogenen Relation zweiten Grades $F(u, v, w, r) = 0$ variiren, so hat man aus den Gleichungen

$$x\,du + y\,dv + z\,dw + p\,dr = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial w}dw + \frac{\partial F}{\partial r}dr = 0$$

eines der Differentiale zu eliminiren und die Coefficienten der übrigen gleich Null zu setzen; bildet man, was auf dasselbe hinausläuft, die Gleichungen

$$\lambda x + \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad \lambda y + \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \text{ u. s. w.},$$

denkt sich aus diesen Gleichungen u, v, w, r bestimmt und in $F = 0$ eingesetzt, so fällt λ heraus und man erhält eine andere homogene Gleichung zweiten Grades $f(x, y, z, p) = 0$ für die Enveloppe. Fehlen in der Gleichung $F = 0$ die Glieder mit den Potenzen und Produkten von u, v, w, so liefern die Gleichungen $\lambda x + \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ u. s. w. einen Punkt als Enveloppe.

Die Functionen f und F sind einander reciprok und wenn man setzt $x = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}$, $y = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v}$ u. s. w., so folgt $f = F = ux + vy + wz + rp$ und $u = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$, $v = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$ u. s. w.

mung der Flächen zweiten Grades durch Punkte einerseits (9. Vorl.), ihre Bestimmung durch Tangentenebenen andererseits (11. Vorl.) entgegen. Der 10. Vorlesung über Pol und Polarebene steht gegenüber die 12. über harmonische Polarebenen. Dem Kegel als Grenzfall der Gleichung in Punktcoordinaten wird ein durch einen Kegelschnitt begrenztes Stück Ebene, die Grenzfläche, gegenüber gestellt (14. u. 15. Vorl.). Endlich stehen sich ebenso gegenüber die schönen Vorlesungen 16 und 17 über das Poltetraeder in Bezug auf mehrere Flächen, die Hr. Cremona für *le più belle in questo libro, que e tutto bello da capo a fondo* erklärte. Nun ändert sich mit dem Gegenstand der Charakter des Werkes, insofern die algebraische Seite in den Vordergrund tritt. Es handelt sich nun um das Hauptaxenproblem, mit welchem die elliptischen Coordinaten verflochten sind. Dann folgen noch die Capitel über Focallinien, Rotationsflächen, Kreisschnitte, eine kurze Darstellung der Hauptsätze von der Krümmung der Flächen, und wir sind am Schluss der alten Ausgabe. Zu dieser summarischen Uebersicht wäre nur hinzuzufügen, dass das Werk die Bedingungen zu seinem Verständniss für Anfänger bei sich führt, indem die der Algebra Unkundigen aus der 7. u. 8. Vorl. die nöthigen Grundbegriffe über Determinanten und homogene Functionen schöpfen können. An diesem allgemeinen Plane ist kaum etwas geändert, dagegen Folgendes im Einzelnen.

Die Vorlesungen 1 bis 6 incl. sind bis auf Unwesentliches geblieben wie sie waren. Diese und die folgende Vorlesung (Determinanten und homogene Functionen) sind bedeutend erweitert. Nachdem in der 7. Vorl. das Multiplicationstheorem der Determinanten ausführlicher dargelegt ist und mit einem Beispiel versehen, welches gewisse lineare Ausdrücke transformiren lehrt und dessen Nutzen sich sofort in einer interessanten Anmerkung zeigt, wo die von Jacobi geleistete Integration einer Differentialgleichung, der Verallgemeinerung einer von Euler behandelten Differentialgleichung, in wenigen Zeilen durch einige Umformung auf ganz leichte Weise erreicht wird, sind noch einige Hauptsätze über Functionaldeterminanten beigebracht. Die 8. Vorlesung ist eine wahre Fundgrube von Beispielen geschickter Determinantenrechnung. Nach Vorführung einiger Sätze über homogene Functionen wird das Tetraedervolum ausgedrückt, die Bedingung, dass vier Punkte in einer Ebene liegen, aufgestellt, dann die sieben Formen abgeleitet, welche man der Bedingung für die Involution ertheilen kann, dann folgt das Tetraedervolum als Product zweier gegenüberliegender Kanten, deren kürzester Entfernung und des Sinus ihres Winkels, die Länge der Tangenten von einem Punkte an einen Kegelschnitt, die Diagonalpunkte eines Vierecks, dessen Ecken als Schnittpunkte zweier Kegelschnitte gegeben sind, endlich das merkwürdigste Beispiel ist die Herleitung des Hyperboloids als Ort einer sich auf drei andern bewegenden Geraden. Giebt man den Gleichungen der festen Geraden besondere Formen und legt sie zweckmässig zum Coordinatensystem, so lässt sich die Aufgabe bekanntlich leicht lösen und man gelangt auch unschwer zum Kegel, dessen Geraden der festen und der beweglichen in ihren verschiedenen Lagen parallel sind. In dem in Rede stehenden Beispiel wird die Position aber ohne Kriegslist und von der ungünstigsten Seite erstürmt, die Gleichungen der Geraden sind in der allgemeinsten Form angenommen und zwar ist jede Gerade durch drei Gleichungen gegeben. Da lernt der Schüler dann, wie man durch geeignetes „Concentriren der Gleichungen“ (Ausdruck des Hrn. Hesse) es vermeidet, mit einer Determinante aus 18^2 Elementen zu operiren und wie man durch Benutzung zu Tage tretender Vortheile doch schliesslich auf die eleganteste Weise zum Resultate gelangt.

In den folgenden Vorlesungen, bis zur 17. incl., deren Inhalt die dualistisch behandelten allgemeinen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades bilden, ist nichts wesentliches geändert. Die wenigen Aenderungen bestehen in der Milderung einiger dem Verständniss nachtheiligen Kürzen der ersten Ausgabe. (S. 121 statt 93 der I. Ausg. und die reciproke Stelle S. 140, 141 statt S. 111 der älteren Ausg., ferner noch Zusätze auf S. 177 u. 181.)

Wichtiger sind die Aenderungen, welche bei der Coordinatentransformation beginnen. Die in den voraufgehenden Vorlesungen abgehandelten allgemeinen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades führten nun zur Trennung des Kegels von der übrigen Familie und unterschieden diese nur in Flächen mit und ohne Mittelpunkt, wobei die parallele Coordinatentransformation für Punkt- und Ebenencoordinaten angegeben wurde (13. Vorl.). Die weitere Transformation der Flächen zweiten Grades auf die Hauptaxen, durch welche die Familie in ihre Arten zerfällt, erheischt die vollständige lineare Coordinatentransformation. Aus der Verallgemeinerung beider Probleme des Hauptaxenproblems und der Coordinatentransformation ist die allgemeine Theorie der homogenen Formen zweiten Grades entsprungen. Im Gegensatze zur älteren Ausgabe, die mit dieser beginnt und die speciellen Probleme nachher behandelt, verfolgt die neue Ausgabe den richtigen Weg, welcher hier auch der geschichtliche ist, Coordinatentransformation und Transformation auf die Hauptaxen voranzustellen, nachher aber dem Bedürfniss des Lesers gerecht zu werden und den höheren analytischen Zusammenhang der speciellen, zu Gunsten der geometrischen Probleme ersonnenen Operationen klarzulegen.

Schon die 20. Vorl. über Coordinatentransformation enthält neues. Nachdem wir uns von neuem gefreut über die originelle Auffassung des schiefwinkligen Coordinatensystems als Grenzfall des tetraedrischen, wenn drei Tetraederecken ins Unendliche rücken (ähnlich wie schon früher

(16. Vorl.) die conjugirten Halbmesser als Grenzfall des Poltetraeders eingeführt wurden), finden wir die Sätze über die Entwickelungscoëfficienten von Potenzen und Produkten orthogonaler Substitutionen durch Hinzuziehung der Transformationsformeln für Ebenencoordinaten symmetrischer abgeleitet und bedeutend vermehrt, indem sie sich auf die Entwickelung des Produkts $X^a Y^b Z^c$, wenn X, Y, Z orthogonal-lineare Functionen von x, y, z sind, nach Potenzen von x, y, z beziehen. Wir werden hier zu merkwürdigen Sätzen über die Theilung der Einheit im Quadrate geführt und auf neuem Wege zu einer Formel von Jacobi.

Die 19. Vorl. enthält das Problem der Transformation der Gleichung einer Oberfläche zweiten Grades auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen, welches analytisch sich als Problem der gleichzeitigen Transformation einer homogenen Form zweiten Grades und einer quadratischen Form in zwei quadratischen Formen erweist und auf die Eintheilung der Flächenfamilie in ihre Arten führt. Hieran schliesst sich dann die 20. Vorl., die, wesentlich algebraischer Natur, das Problem der 19. Vorl. ganz allgemein behandelt und zwei homogene Formen mit beliebig vielen Variabeln in zwei quadratische Formen überführt. Diese Vorlesung, welche in schönem Schwunge die Ergebnisse der Untersuchungen von Cauchy, Jacobi, Kummer und Borchardt an uns vorüberführt, ist ein Meisterstück. Wir sehen dieses schwierige Problem nach jeder Richtung befriedigend gelöst und zwar in so glatter, durchsichtiger Weise, dass wir kaum begreifen können, wo es hier die Schwierigkeiten zu überwinden gab. Und doch hat es zur Aufklärung dieser Fragen der Anstrengungen der ersten Mathematiker bedurft, ehe es z. B. gelang, den Fall gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung zu erledigen, in welchen man vielmehr erst eine klare Einsicht gewann, als es Kummer durch eine wahre Divination gelungen war, die Grösse, von welcher die Reellität der Wurzeln einer gewissen cubischen Gleichung abhängt, in Quadrate zu zerlegen. Damit der jugendliche Leser nicht wähne, es sei alles so glatt abgegangen, und um den Männern gerecht zu werden, welche an diesem Gebäude mitgebaut haben, ist in einem Anhange zur 20. Vorl. die Geschichte des Problems kurz angeführt.

Nun folgt in der 21. u. 22. Vorl. das Problem der Hauptaxen bei Curven und Flächen zweiten Grades in seiner allgemeinen Auffassung, wo die ganze Gruppe der durch die analytische Operation gleichzeitig auf die Hauptaxen transformirten Curven und Flächen ins Auge gefasst wird, nämlich die zweifache confocale Curvenschaar und die dreifache confocale Flächenschaar und damit in innigem Zusammenhange stehend die Lamé'schen Coordinaten. Hier waren in der alten Ausgabe an einigen Stellen Entwickelungen von Sätzen bei den Curven nur angedeutet, die sich später bei den Flächen ausgeführt fanden, wodurch dem Studium eine Schwierigkeit erwuchs. Dem ist abgeholfen bis auf eine Stelle, wo in der 21. Vorl. die sehr nützliche Formel 17 abzuleiten dem Leser überlassen ist, der vermuthlich einfach darauf losrechnen wird, während die allgemeinere Formel sich in der 22. Vorl. §. 301 fast ohne Rechnung durch Schlüsse ergiebt. Jacobi sagte einmal bei einer ähnlichen Gelegenheit: „Wenn wir zuerst in der Wüste herumgeirrt sind, so ziehen wir mit um so grösserer Freude in das gelobte Land ein.“

Zu den in der älteren Ausgabe gegebenen Anwendungen und Ausführungen des Vorigen, den Vorl. 23 u. 24 über geodätische Linien auf dem Ellipsoid und über Focalcurven ist in der neuen Ausgabe noch die gänzlich neue Vorl. 25 über die Axen des Körpers hinzugefügt, die ich gleichzeitig mit einer anderen neuen, den Anhang bildenden Vorlesung am Schlusse dieser Inhaltsschilderung besprechen werde.

In den Vorlesungen über Rotationsoberflächen und über Kreisschnitte (27 u. 28) ist in der neuen Ausgabe entschiedener und ausführlicher Bezug genommen auf die algebraische Theorie der 20. Vorl., indem sie die geometrische Illustration bilden zu dem Falle gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung. So ist in Vorl. 27 die Stelle S. 379 neu, in der Vorlesung über Kreisschnitte theils neu, theils verändert, S. 398 u. ff. So bilden diese Vorlesungen gleichsam den Abschluss zu der in dem Werke vorgetragenen geometrisch-algebraischen Lehre, die in der 20. Vorl. sich zur höchsten Allgemeinheit erhebt und deren besondere algebraische Schwierigkeit: der Fall gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung auch besonderen geometrischen Verhältnissen entspricht; bei den Rotationsflächen werden zwei Axen der Flächen gleich, bei den Kreisschnitten die zwei Axen der Curve, in welcher eine Ebene die Fläche schneidet.

Endlich die 29., 30., 31. Vorl. handeln von der Krümmung der Flächen im Allgemeinen. Dieser kurze Abriss der Lehre von der Krümmung der Flächen enthält die wichtigsten Resultate von Meusnier, Euler, Monge, Dupin, von dessen Theorem in der neuen Ausgabe zwei schöne Beweise gegeben sind, dringt aber nicht bis zu Gauss vor und hat auch wohl wesentlich den Zweck, in dieses Gebiet die hier von den Franzosen etwas vernachlässigte Symmetrie hineinzutragen.

Es bleibt uns noch übrig, den Inhalt der zwei neuen Vorlesungen anzugeben, welche der neuen Auflage zur nicht geringen Zierde gereichen. Beide enthalten Anwendungen der im Werke vorgetragenen Methoden auf mechanische Probleme und zwar allerdings solche, die bisher eine elegantere Behandlung sehr erwünscht erscheinen liessen. Die erste Vorlesung beschäftigt sich mit der Bestimmung der Hauptaxen der Körper. Nennen wir mit dem Verfasser Axen der Körper in Bezug auf einen vorgeschriebenen Punkt, drei rechtwinklige Coordinatenaxen X, Y, Z, in Bezug auf welche die Integrale $\int XY dm$, $\int XZ dm$, $\int YZ dm$

verschwinden, und **Hauptaxen** des Körpers seine Axen, wenn der vorgeschriebene Punkt der Schwerpunkt des Körpers ist, so lässt sich das Resultat der Vorlesung zusammenfassen, wie folgt. Jeder Körper bestimmt ein System confocaler Flächen des zweiten Grades, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt des Körpers ist, dessen Hauptaxen die Hauptaxen des Körpers sind und deren drei Normalen in jedem Punkte des Raumes mit den drei Axen des Körpers für diesen Punkt zusammenfallen. Höchst interessant ist die Ableitung dieser Sätze. Der Verfasser geht aus von der Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Ebenencoordinaten u, v, w, r, deren Coefficienten die Integrale $\int dm$, $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int z\,dm$, $2\int xy\,dm$, $2\int xz\,dm$, $2\int yz\,dm$, $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$ sind, der demnach die Form $\int (xu + yv + zw + r)^2\, dm = 0$ gegeben werden kann, da u, v, w, r mit der Integration nichts zu schaffen haben. Diese Fläche ist ein imaginäres Ellipsoid, dem das erwähnte System confocaler Flächen seinerseits confocal ist. Von der Annahme dieser Fläche aus gelangt der Verfasser mit der ihm eigenthümlichen zierlichen Eleganz zum Resultate; und wenn in der That kein Grund vorhanden ist, unter der Schaar der reellen confocalen Flächen eine besonders hervorzuheben und auf sie den Körper zu beziehen, so eignet sich gerade jenes imaginäre Ellipsoid dazu, erstens weil die Aufstellung seiner Gleichung nur die Kenntniss der obigen zehn Integrale voraussetzt und nicht die Auflösung einer Gleichung dritten Grades und in seiner Gleichung auch kein willkürlicher Parameter vorkommt, wie in der der reellen Flächenschaar, über den man erst zu verfügen hätte, dann aber besonders wegen der Leichtigkeit, mit der aus seiner Gleichung alle Axeneigenschaften des Körpers folgen. Es ist demnach ganz gerechtfertigt, wenn Hr. Hesse diese Oberfläche als charakteristisch für den Körper in die Mechanik einführt und ihr einen besonderen Namen beilegt. Er nennt sie das imaginäre Bild des Körpers. Um den hier gelungenen Fortschritt zu würdigen, reicht es aus, einen Blick auf die Behandlung desselben Gegenstandes bei Poisson (Traité de Mec. Livre IV, Chap. II) zu werfen.

Die Planetenbewegung (Anhang) steht insofern mit dem Werke im Zusammenhange, als die Methoden des Verfassers auch hier gute Dienste leisten. Das wichtigste darin ist ein, wie wir glauben, vollständig neues Verfahren, das letzte Integral der Bewegungsgleichungen des Planeten zu finden. Kurz gefasst ist der Inhalt der Vorlesung etwa folgender: Die Bewegungsgleichungen des Planeten sind für eine räumliche Bewegung aufgestellt, also drei Differentialgleichungen erster Ordnung $x'' = -\frac{\varkappa^2 x}{r^3}$ u. s. w., $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zuerst wird nachgewiesen, dass die Bahn des Planeten eben ist, indem gezeigt wird, dass das Volum des Tetraeders, dessen vier Ecken die Sonne und drei successive Lagen des Planeten bilden, verschwindet. Es werden alsdann die Flächensätze abgeleitet, die auf Grund jener Betrachtung mit dem Tetraeder die Ebene der Planetenbahn liefern. Dann folgt die Gleichung der lebendigen Kraft. Durch geschickte Combination der Gleichung der lebendigen Kraft, der Flächensätze und der Gleichung $rr' = xx' + yy' + zz'$ erhält der Verfasser diese Gleichung:

$$r'^2 = 2h + \frac{2\varkappa^2}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

(h und c Constanten), aus der sich sofort das fünfte Integral in r und t ergiebt. Ausserdem folgt durch Differentiation:

$$r'' = -\frac{\varkappa^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^3}.$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Bewegung des Planeten auf dem Radiusvector, von der Bewegung des Radiusvectors selbst gänzlich abgesehen. „Wenn man daher," wie sich Hr. Hesse ausdrückt, „auf dem Radiusvector eines Planeten lebte, ohne eine Vorstellung von der Bewegung des Radiusvectors um die Sonne zu haben, so könnte man die Bewegung des Planeten auf dem Radiusvector nicht durch das Newton'sche Gesetz, dass die Anziehung geschähe umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Planeten von der Sonne, erklären; es müsste noch die umgekehrte dritte Potenz der Entfernung zu Hülfe genommen werden."

Vorstehende Gleichung hat aber noch den oben berührten Vortheil, dass sie uns das sechste Integral und zwar in dreifacher Form mit der grössten Leichtigkeit abwirft. Combiniren wir sie mit einer der Gleichungen $x'' = -\frac{\varkappa^2 x}{r^3}$ u. s. w., z. B. mit der ersten, so kann man an beiden Gleichungen das Verfahren der Integration, welches zu den Flächensätzen führt, anwenden. Multiplicirt man die zweite mit r, die erste mit x und zieht sie von einander ab, so erhält man

$$rx'' - r''x = -\frac{c^2}{r^3}x$$

und wegen der zweiten:

$$rx'' - r''x = \frac{c^2}{\varkappa^2}x'',$$

also durch Integration:

$$rx' - r'x = \frac{c^2}{\varkappa^2}x' + b_0.$$

Solcher Gleichungen giebt es noch zwei. Indessen wenn man auch nur eine braucht, so zeigt sich dieser Ueberfluss in den Händen des Hrn. Hesse doch sehr nützlich, indem er mit Hülfe aller vorhandenen Gleichungen durch mannigfaltige Combinationen die Planetenbewegung schliesslich so definirt, dass die Sonne im Brennpunkte einer Rotationsoberfläche zweiten Grades liegt und dass der Planet sich in der Schnittcurve einer durch die Sonne gelegten Ebene mit der Rotationsoberfläche bewegt. Die Keppler'schen Gesetze sind sämmtlich abgeleitet und zum Schluss findet man noch das Wichtigste über das Zweikörperproblem angegeben, worauf das Buch mit einer Frage schliesst; wir möchten diese Besprechung auch mit einer Frage schliessen: Wie sollen wir die eigenthümliche Lehre nennen, die uns in dem Buche vorgetragen, die zugleich so vielseitig und doch so einheitlich, die so fein gegliedert ist und doch ein compactes Ganze bildet? Man hat sie algebraische Geometrie genannt, ebenso gut könnte man sie geometrische Algebra nennen. Ich schlage vor, sie nach dem Manne, der die deutsche mathematische Literatur um das erste klassische Lehrbuch bereicherte, zu nennen: Hesse'sche Geometrie.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

Die Landen'sche Substitution in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. Von F. J. RICHELOT. Aus einer Correspondenz mit Prof. Schröter. Königsberg, Verlag von Hübner u. Matz. 1868.

Die von Landen gegebene Transformation des elliptischen Integrales erster Art lässt sich bekanntlich nach Jacobi's Schreibweise folgendermassen darstellen:

$$\sin am\,(u_1, \varkappa) = \frac{K_1}{K_1'}\,\sin am\left(\frac{K_1'}{K_1}\,u_1, \varkappa'\right)\sin am\left(\frac{K_1'u}{K_1} + K_1', \varkappa'\right),$$

worin

$$\varkappa' = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}, \qquad \varkappa_1 = \sqrt{1-\varkappa^2} \text{ u. s. w.}$$

ist. Analog der Formel $\sin 2u = 2 \sin u \cdot \sin (u + \pi)$ gestattet die obige Relation eine fortgesetzte Anwendung, mittelst deren der Amplitudensinus zunächst in ein Produkt aus $2n$ Factoren und schliesslich in ein unendliches Produkt verwandelt werden kann, aus welchem nachher durch logarithmische Differentiation wieder eine Partialbruchentwickelung für eine andere elliptische Function folgt. Der berühmte Verfasser, den man als den Veteran aus der Entstehungszeit der Theorie elliptischer Functionen bezeichnen könnte, knüpft nun an den obigen, schon vor langer Zeit von ihm ausgesprochenen Gedanken wieder an, um zu zeigen, dass sich auf dem angedeuteten Wege nicht nur einige, sondern alle elliptische Functionen mit Einschluss von Z und Θ entwickeln lassen, dass also jener Gedanke weit mehr als ein speciell auf den Amplitudensinus anwendbarer Kunstgriff ist. Das Einzige, was das angedeutete, seinem Principe nach sehr einfache Verfahren einigermaassen beeinträchtigt, dürfte eine gewisse Weitläufigkeit sein, welche die genaue Rechtfertigung des Ueberganges vom Endlichen zum Unendlichen mit sich bringt; der Verfasser hat diesen Punkt absichtlich ausser Betrachtung gelassen und es lässt sich daher im voraus nicht beurtheilen, ob man über denselben kurz hinwegkommen kann.

Ausser mehreren brieflich ausgesprochenen Bemerkungen des Hrn. Prof. Schröter ist noch der von demselben hinzugefügte Anhang werthvoll; derselbe enthält einige elegante geometrische Untersuchungen über die von Landen und Gauss herrührenden Transformationen der elliptischen Integrale.

SCHL.

Bibliographie

vom 1. October bis 31. December 1869.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1869, I, 4. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Journal für reine und angewandte Mathematik. Herausgegeben von C. W. Borchardt. 71. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Mathematische Annalen. Herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. 2. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. $5^1/_3$ Thlr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1872 mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (108) für 1870. Herausgegeben von W. Foerster unter Mitwirkung von Powalky und Becker. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von C. Bruhns. 4. Jahrg. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 12 Ngr.

Annalen der Münchener Sternwarte. 8. Supplementband. Verzeichniss von 6323 teleskopischen Sternen zwischen $+3^0$ und $+9^0$ Declination. München, Franz. $1^5/_6$ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Herausgegeben von C. Jelinek und C. Fritsch. Neue Folge. 4. Bd. Jahrg. 1867. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Die Fortschritte der Physik. 22. Jahrg. (1866). Herausgegeben von Quincke, Schwalbe und Wangerin. Berlin, G. Reimer. $3^1/_6$ Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Herausgegeben von Guthe. 19. Jahrg. 1. Heft. Januar bis Juni 1869. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 7 Ngr.

Reine Mathematik.

RIEMANN, B., Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendungen. Vorlesungen für den Druck bearb. von K. Hattendorff. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

WINCKLER, A., Ueber einige vielfache Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

MATTHIESSEN, L., Commentar zu der Beispielsammlung von E. Heis. Cöln, Du Mont-Schauberg. $^2/_3$ Thlr.

SCHLÖMILCH, P., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. $^2/_3$ Thlr.

HESSE, O., Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. $3^1/_3$ Thlr.

WEYR, E., Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. Leipzig, Teubner. $1^1/_3$ Thlr.

GEISER, J., Einleitung in die synthetische Geometrie für höhere Realschulen und Gymnasien. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

DUDA, Th., Versuch einer naturgemässen Entwickelung der Aehnlichkeitslehre. Brieg, Bänder's Buchh. $^1/_6$ Thlr.

PREUSS, W., Elemente der Planimetrie. Bremen, Kühtmann. $^1/_6$ Thlr.

WAGENER, E., Schule der Elementarmathematik. 1. Thl. Planimetrie und Stereometrie. 2. Aufl. Hamburg, Nolte. $^1/_2$ Thlr.

ZETZSCHE, K., Leitfaden für den Unterricht in der ebenen und räumlichen Geometrie. Chemnitz, Brunner. 18 Ngr.

BROCKMANN, J., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

FLOHR, A., Der mathematische Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen, zugleich als Einführung in die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Osnabrück, Meinders. $^1/_3$ Thlr.

SCHLOTKE, J., Stereoskopische Figuren für das Studium der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Hamburg, Friedrichsen & Comp. $1^1/_5$ Thlr.

Angewandte Mathematik.

ZEUNER, G., Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig, Felix. 2 Thlr.

KINKELIN, H., Die Elemente der Lebensversicherungsrechnung. Basel, Schweighauser. $^1/_2$ Thlr.

BREMIKER, C., Studien über höhere Geodäsie. Berlin, Weidmann. $^2/_3$ Thlr.

HANSEN, P. A., Supplement zu den „geodätischen Untersuchungen, betr. die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks.“ Leipzig, Hirzel. $^2/_3$ Thlr.

BAUERNFEIND, C. M., Elemente der Vermessungskunde. 3. Aufl. 1. Abth. Stuttgart, Cotta. pro compl. $4^1/_3$ Thlr.

NOWAK, Th., Das barometrische Höhenmessen mit dem Aneroid. 2. Aufl. Wien, Lehmann & Wentzel. 12 Ngr.

ELSCHING, A., Anleitung zum Nivelliren mit Quecksilber- und Metallbarometern. Salzburg, Glonner. 16 Ngr.

HEYNE, W., Das Traciren von Eisenbahnen; vier Beispiele. 3. Aufl. Wien, Beck'sche Univers.-Buchh. $4^1/_3$ Thlr.

BORCHERS, E., Die praktische Markscheidekunst unter Anwendung des Theodolithen etc. Hannover, Rümpler. $5^1/_3$ Thlr.

WEHRLE, L., Projective Abhandlung über Steinschnitt, dargestellt durch Constructionen an Mauerflächen, Gewölben etc. 2. Lfg. Zürich, Kraut & Bosshart. $1^2/_3$ Thlr.

REBHANN, G., Theorie des Erddrucks und der Futtermauern. 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. 1 Thlr. 24 Ngr.

RITTER, A., Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen. 2. Aufl. 2. Abth. Hannover, Rümpler. 1 Thlr.

HENRICI, J., Elementarmechanik des Punktes und des starren Systems. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

SCHELL, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch für technische Hochschulen. 3. Lfg. Leipzig, Teubner. 28 Ngr.

ALBRECHT, Th., Ueber die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hülfe des elektrischen Telegraphen. Leipzig, Engelmann. $1^1/_3$ Thlr.

VALENTINER, W., Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Leipzig, Engelmann. $1^2/_3$ Thlr.

OPPOLZER, Th., Geographische Coordinaten des Leuchtthurms zu Aden. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss d. J. 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. 7. Bericht (Schluss). Sternschnuppenbeobachtungen von E. Weiss. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

SPOERER, G., Reise nach Indien zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. Aug. 1868. Vortrag. Leipzig, Engelmann. 6 Ngr.

KLEIN, H., Die Sonnen- und Mondfinsternisse mit vorzugsweiser Berücksichtigung der Ergebnisse der totalen Sonnenfinsterniss d. J. 1868. Kreuznach, Voigtländer. 12 Ngr.

Argelander, A., Beobachtungen und Rechnungen über veränderliche Sterne. Bonn, Marcus. 2 Thlr.

Lesser, O., Tafeln der Pomona mit Rücksicht auf die Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars. Leipzig, Engelmann. $1^2/_3$ Thlr.

Schmidt, J., Astronomische Beobachtungen über Meteorbahnen und deren Ausgangspunkte. Athen, Wilberg. $^5/_6$ Thlr.

Dreydorff, G., Pascal, sein Leben und seine Kämpfe. Leipzig, Duncker & Humblot. $2^4/_5$ Thlr.

Physik.

Encyclopädie der Physik; herausgegeben von G. Karsten. 20. Lfg. Leipzig, Voss. 1 Thlr. 26 Ngr.

Karsten, G., J. Harms und G. Weyer, Einleitung in die Physik. Leipzig, Voss. $8^2/_3$ Thlr.

Müller, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 10. Aufl. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. $1^1/_3$ Thlr.

Schabus, J., Grundzüge der Physik. 5. Aufl. Wien, Gerold. $2^2/_5$ Thlr.

Hofmeister, H., Leitfaden der Physik. 2. Aufl. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 1 Thlr.

Burbach, O., Physikalische Aufgaben zur elementar-mathematischen Behandlung. Gotha, Thienemann. $^1/_3$ Thlr.

Reis, P., Lehrbuch der Physik für Gymnasien etc. 1. Hälfte. Leipzig, Quandt & Händel. $^5/_6$ Thlr.

Schellen, H., Die Spectralanalyse in ihren Anwendungen. Braunschweig, Westermann. $3^2/_3$ Thlr.

Boltzmann, L., Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_6$ Thlr.

Stefan, L., Ueber die Grundformeln der Elektrodynamik. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

Waltenhofen, A. v., Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit von Eisen und Stahl. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Ditscheiner, L., Krystallographische Untersuchungen. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_3$ Thlr.

Bruhns, C., Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen, angestellt im J. 1867 an 25 königl. sächs. Stationen. 4. Jahrg. Leipzig, Günther. $2^1/_3$ Thlr.

Hann, J., Untersuchungen über die Winde der nördlichen Hemisphäre und ihre klimatologische Bedeutung. (Akad.) Wien, Gerold. 14 Ngr.

Mühry, A., Ueber die Lehre von den Meeresströmungen. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. $^{2}/_{3}$ Thlr.

Mühry, A., Untersuchungen über die Theorie und das allgemeine geographische System der Winde. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. $1^{2}/_{3}$ Thlr.

Dove, H. W., Gedächtnissrede auf Alex. v. Humboldt. Berlin, Dümmler. $^{1}/_{4}$ Thlr.

Brück, R., Etude sur la physique du globe. Brüssel, Mucquardt's Verlags-Expedition. 1 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Jacob Bernoulli, von Director GIESEL. Programm der Realschule erster Ordnung zu Leer 1869.

Der Verfasser des uns vorliegenden Programmes ist gar vielfach vom Schicksale herumgeworfen worden. War seine Geschichte der Variationsrechnung in Torgau entstanden, so kam seine Entstehung des Newton-Leibnitz'schen Prioritätsstreites in Delitzsch heraus, und den neuesten wissenschaftlichen Freundesgruss schickt er uns in Gestalt dieser Biographie weit aus dem fernen Ostfriesland zu. Doch woher auch die Sendung stammte, immer war sie uns gleich schätzbar, immer eine Quelle neuer Freude über den Ernst der Forschung, über die Fülle der Vorkenntnisse, mit welchen Giesel seine geschichtlichen Untersuchungen ins Werk setzt. So können wir auch heute nur unser Lob über die Darstellung der mathematischen Leistungen Jacob Bernoulli's aussprechen. Die Entdeckung der Integration von Differentialgleichungen (wobei leider in dem Resultate der Rechnung S. 8 ein unangenehmer Druckfehler stehen geblieben ist), die Anfänge der Variationsrechnung, die erstmals als ein wissenschaftliches Ganze behandelte Wahrscheinlichkeitsrechnung treten dem Leser klar vor Augen und regen ihn an, selbst jene Abhandlungen und Schriften einmal zur Hand zu nehmen, welche man nur mit Unrecht als überwundenen Standpunkt betrachten würde, so weit auch die Wissenschaft inzwischen fortgeschritten ist. Auch der an die isoperimetrische Aufgabe und an die Brachistochrone sich knüpfende Streit der beiden Brüder Bernoulli ist in unserem Programme in seinem Verlaufe richtig aufgefasst und behandelt. Dagegen müssen wir Einsprache einlegen wider die Auffassung des Charakters Jacob Bernoulli's, welche in der ganzen Biographie sich kundgiebt und zu welcher Giesel sich durch den Brief von Joh. Bernoulli an Leibnitz vom 26. Februar 1701 hat verleiten lassen. In diesem Briefe ist nämlich folgende Anklage ausgesprochen. Jacob Bernoulli habe in Gemeinschaft mit Samuel Battier irgend einen Brief, dessen Inhalt nicht angegeben ist, als von Johann verfasst an eine gewisse nicht genannte Person untergeschoben und die darauf geschriebene Antwort zu unterschlagen gewusst. Später habe Johannes diese Thatsachen erfahren, und beide Thäter hätten im privaten Kreise ihre Schuld eingestanden und abgebeten. Johannes will aber diese Erzählung nur Leibnitz allein anvertrauen (*Haec tibi in aures dicta sunto*), was wohl den ersten Herausgeber des Briefes veranlasste jene ganze Stelle zu unterdrücken. Hat nun Johannes die Wahrheit gesagt, so ist, wie uns scheint, auch nicht von einem Falsificate und einem Betruge, wie Giesel S. 7 Anmerkung 10 sich ausdrückt, sondern von einer unschuldigen Mystification die Rede. Wäre der Inhalt des Briefes irgendwie verfänglicher Natur gewesen so hätte Johannes gewiss nicht darüber geschwiegen; so discret war er nie, wenn er selbst der Verschwiegenheit dessen, an den er schrieb, sicher zu sein glaubte, und bei Leibnitzen vollends that er sich gar keinen Zwang an Aber wir gehen weiter, wir glauben die ganze Erzählung nicht, denn auch einer Mystification halten wir Jacob für unfähig. Das Datum jenes Ereignisses soll unmittelbar mit dem Umzuge Johann's nach Gröningen zusammenfallen, d. h. also in das Jahr 1695. Jacob war damals 41 Jahre alt, also über das Alter hinaus, in welchem ein ernster, sogar griesgrämiger, seit drei Jahren brustkranker Mann schlechte Witze der Art ausführt. Johann andrerseits dürfen wir zutrauen, dass er auch Unwahres sagte, wo es ihm passte. Sollen wir an den Brief erinnern, welchen er am 5. Juli 1719 an Newton richtete und in welchem er mit der Formel *per omnia humanitatis sacra obtestor* beschwört, er sei nicht Verfasser jener durch Leibnitz veröffentlichten Zuschrift, welche doch von ihm herrührte? Sollen wir an den Aufsatz im *Journal des Savans* von 1698 erinnern, in welchem Johann in Abrede stellt, dass Jacob seine Methode zur Lösung des isoperimetrischen Problems richtig errathen habe, während gegenwärtig an dem Scharfsinn, welchen Jacob durch diese Hypothese an den Tag legte, nicht gezweifelt werden kann? Sollen wir den Brief an Leibnitz vom 10. September 1706 ins Gefecht führen, durch welchen Johann sich die durch eigene Kraft gelungene Erfindung der Integralrechnung zuschreibt, er, der doch der Schüler, wenn auch bald selbstständig arbeitende Schüler seines Bruders war? Wir bedürfen dieser Beweismittel kaum. Sagt doch Giesel selbst S. 10 Anmerk. 19 mit Bezug auf die letztangeführte Stelle: „wie so manche andere Behauptung Johann's ist auch diese unrichtig." Und unrichtig, fügen wir hinzu, wird dann wohl auch die Anschuldigung vom Februar 1701, also aus einer Zeit sein, wo es Johann unbedingt darauf ankam, Jacob in den Augen der gelehrten Welt herabzusetzen. Einen vollgiltigen unmittelbaren Beweis freilich haben wir nicht, dass gerade hier eine Unrichtigkeit, sagen wir geradezu eine Lüge vorhanden, aber wir wissen, dass Johannes einer solchen fähig war, wir wissen von Jacob's Charakter dagegen nichts Ungünstiges. Wenn aber nach dieser Auseinandersetzung der Brief von 1701 nicht bestimmend auf uns wirken kann, so sind wir ausser

Stande uns dem anzuschliessen, was Giesel S. 11 bemerkt, dass dem Jacob mehr Schuld als dem Johann an dem unliebsamen öffentlichen Bruderzwiste zu geben sei. Jacob war nun einmal der Lehrer seines Bruders, und wenn dieser sich überhebend Alles aus sich selbst geschöpft haben wollte, so war es nur natürlich, dass Jacob ihm einmal öffentlich auf die Finger klopfte, und es war auch ganz gesund für den hochmüthigen jungen Mann. Darin freilich verurtheilen wir Jacob, dass er die Abfertigung eine zu derbe werden liess, und wir freuen uns hier wieder mit Giesel zusammenzutreffen, der uns unsere so weit abweichende Meinung nicht verübeln wird. *Amicus Plato, amicior veritas.* Von sonstigen Bemerkungen möchten wir nur noch beifügen. Hermann in seinem Nekrologe Jacob's (*Acta Erudit.* 1706) hat S. 42 von einer Berufung desselben nach Heidelberg im Jahre 1684 gesprochen. Dieselbe Angabe findet sich bei Battier in seiner der Gesammtausgabe von Jac. Bernoulli's Werken vorgeschickten Biographie S. 17, und Giesel endlich hat sie S. 7 wiederholt. Wir müssen bezweifeln, ob wirklich von einer solchen Berufung schon in bestimmter Weise die Rede war. Die Senatsacten der hiesigen Universität von 1684, welche wir zu diesem Zwecke verglichen haben, enthalten wenigstens kein Wort in dieser Beziehung. Natürlich ist damit nicht ausgeschlossen, dass in privater Weise eine Anfrage an Jacob Bernoulli gestellt worden sein kann. CANTOR.

Pascal, sein Leben und seine Kämpfe, von Dr. JOH. GEORG DREYDORFF, Pastor der reformirten Kirche zu Leipzig. Leipzig, Verlag von Duncker und Humblot. 1870.

Es giebt Werke, welche gleich bei ihrem Erscheinen die allgemeine Anerkennung sich erwerben durch ihren gediegenen Inhalt, durch die Uebersichtlichkeit der den Stoff beherrschenden und für den Leser zurechtlegenden Anordnung, durch den Reiz der geistvollen Sprache. Wieder andere Schriften erwerben sich wenigstens allgemeine Aufmerksamkeit durch die Tendenz, welche ihnen zu Grunde liegt, wegen des absichtlichen oder zufälligen Zusammentreffens eben dieser Tendenz mit den grossen die Zeit erfüllenden Fragen. Um wie viel freudiger müssen wir nun gar ein Buch begrüssen, welches die Verdienste der erstgenannten Gattung besitzt, während ihm nicht minder jene in zweiter Reihe genannten Vorzüge zukommen. Beides dürfen wir in dem uns zur Besprechung vorliegenden Bande erkennen und rühmend hervorheben. Herr Dreydorff hat seinen Pascal ebenso wie die ganze einschlagende Literatur, soweit sie dem Theologen verständlich sein konnte, aufs Gründlichste studirt, er hat aus diesem Materiale ein Lebensbild zu schaffen gewusst, welches darin von fast allen früheren Schilderungen Pascal's vortheilhaft abweicht, dass, wo Sprünge vorkommen, klaffende Risse, über welche man sonst mit einem Salto mortale hinüberzusetzen liebte, unser Verfasser sich wenigstens um den Ursprung dieser Spalten kümmert, nachforscht, wie sie entstanden sind und wie tief sie eindringen. „Plötzlich entsteht und vergeht überhaupt Nichts. Alles, was wir nicht als positiv widerlegt betrachten können, pflegen wir aus einer Periode des Lebens in die nächstfolgende mit hinüberzunehmen; ja wir streben recht absichtlich darnach, das früher Dagewesene zu bewahren und, sei es auch in merklich veränderter Gestalt, mit den Voraussetzungen eines neugewonnenen Standpunktes ausgleichend zu vermitteln“ (S. 47). Diese Sätze sind sicherlich wahr, und wie vollständig auch solche Schriftsteller davon überzeugt waren, welche in Pascal's Biographie keinen Gebrauch davon machten, erweist sich daraus, dass sie plötzliche Krankheit, Visionen, fast Irrsinn zu Hilfe zogen, und um das eine Unwahrscheinliche zu erklären, dem Leser das weit Unwahrscheinlichere aufzwangen, an einen geistesgeschwächten Verfasser der *Pensées* und der *Historia Cycloidis* zu glauben. Bei Herrn Dreydorff dagegen sehen wir einen einheitlichen Pascal vor uns, ganz aus einem Gusse entstanden, zwar keinen fehlerfreien Helden, kein Ideal eines tadellosen Menschen, aber auch keinen dem Irrenhause Entgangenen. Die Form seines Buches ist anziehend und fesselnd, und wenn der Freisinn des Verfassers uns nicht mit Nothwendigkeit an seine Stellung als Theolog erinnert, so sind wir die Letzten, ihm aus dieser freien Anschauung einen Vorwurf zu machen. Endlich ist die Zeit, in welcher das Werk erscheint, die günstigste, die sich dazu treffen liess. Einestheils ist die Frage wegen der gefälschten Pascal'schen Briefe gerade jetzt entschieden worden, so dass seine Stellung in der Entwicklung der Naturwissenschaften keinen Streitpunkt mehr abgeben kann, und anderntheils kann das politisch-religiöse Interesse an Pascal nie grösser, nie gerechter gewesen sein als gegenwärtig, wo wieder ein ganz ähnlicher Kampf ausgefochten wird, wie in der Mitte des XVII. Jahrhunderts. Die Concilsbriefe finden heute kaum weniger aufmerksame Leser als damals die Provinzialbriefe, ihrem Ursprung wird kaum weniger eifrig nachgespürt, und was deren Inhalt betrifft, so ist der Streit Döllinger's und seiner Anhänger gegen die Infallibilisten dem der Jansenisten gegen die Jesuiten in mehr als einer Beziehung an die Seite zu stellen.

Wenn wir dieser allgemeinen Anerkennung des Dreydorff'schen Buches sogleich auch eine Bemängelung auf dem Fuss folgen lassen, so wird der geehrte Verfasser sich vielleicht mit seinen eigenen, auf den ersten Provinzialbrief bezüglichen Worten trösten: „dass wohlmeinende Kritiker ein Buch unter die Loupe nehmen, um sich unter den zahllosen Beifallsklatschern die aristokratischen Rechte des gebildeten Beobachters zu wahren, als welchen man sich eben dadurch beweist, dass man auch dem Trefflichsten seine schwache Seite abmerkt und auch im günstigsten Falle nicht Alles und nicht Alles darum zu loben findet, was und weil es von der Menge gelobt wird“ (S. 134). Aber Scherz bei Seite, wir glauben dem Gelehrten und seinem Werke nur dann volle Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, wenn wir dem Leser ebenso sagen, was er in dem Buche nicht suchen darf, als was er auch ungesucht darin finden wird. Nicht suchen darf er Pascal den Mathematiker, nicht suchen Pascal den Physiker.

Wir verübeln es dem Verfasser nicht, wenn er S. 8 von dem trockenen Rechte und der noch viel trockeneren Mathematik spricht; wenn er S. 34 im fortlaufenden Texte die ganze naturwissenschaftliche Würdigung Pascal's in die Worte kleidet: „In das Jahr 1646 und in die nächstfolgenden (1647 bis 1648) fallen seine physikalischen Entdeckungen hinsichtlich der Bedeutung des atmosphärischen Druckes, über das Gewicht der Quecksilbersäule u. a., die wir für die wichtigsten halten müssen, die ihm gelungen sind;" wenn er S. 483 die Cycloidenuntersuchung nur in einer Anmerkung erwähnt; wenn er S. 83 die Schilderung Pascal's durch Fontaine [*cet homme que non seulement toute la France, mais toute l'Europe a admiré. Son esprit toujours vif, toujours agissant était d'une étendue, d'une élévation, d'une fermeté, d'une pénétration et d'une netteté au delà de ce qu'on peut croire*] so wortreich und übertreibend nennt, dass es einem die Uebersetzung in unsere Sprache verleidet. Das Alles, sagen wir, verübeln wir Herrn Dreydorff keineswegs, aber dafür muss er es auch uns zu Gute halten, wenn wir durch Abdruck dieser Stellen unsere nächsten Leser überzeugen, dass unsere Einschränkung gerechtfertigt war, er habe die einschlagende Literatur erschöpft, so weit sie dem Theologen verständlich sein konnte. Sein Buch ist dadurch noch lange kein schlechtes geworden! Jedenfalls hätte irgend ein anderer Verfasser es nicht besser gemacht, welchem vor allen die mathematischen und physikalischen Schriften Pascal's zugänglich gewesen wären.

Die grossen Naturforscher und Mathematiker des XVII. Jahrhunderts zeichnen sich insgesammt durch eine Mittelstellung zwischen den exacten Wissenschaften und anderen Wissenszweigen, besonders der Theologie aus: Galilei und Newton, Leibnitz und Pascal sind zeugende Beispiele. Die beiden Ersteren bieten freilich durch ihre theologische Seite nichts so Glänzendes, dass man es nicht gern im Verborgenen liesse, und darum werden Schriften über Galilei und Newton genügen können, die von einem mathematischen oder physikalischen Verfasser herrühren. Leibnitz stellt das entgegengesetzte Extrem dar; gross in allen seinen Geistesäusserungen kann er gar nicht von einem Einzelnen erschöpfend gewürdigt werden; der Philosoph und der Mathematiker, der Staatsmann und der Historiker, der Theolog und der Sprachgelehrte können jeder von seinem Standpunkte aus über Leibnitz schreiben, sie werden sich nur gegenseitig ergänzen und vervollständigen. Von Pascal endlich sind wenigstens zwei Behandlungen nothwendig, will man ihn ganz kennen lernen und in seiner kulturhistorischen Bedeutung richtig schätzen. Der Theolog und der Mann der exacten Wissenschaften finden in seinem Wirken reichen Stoff zur Besprechung, und was der Eine von ihnen als Ergebniss seiner Forschung mittheilt, kann und darf man nicht von dem Andern fordern. Nur Eins darf man verlangen: dass der Theolog so schreibe, dass der mathematische Leser sich bei ihm orientiren könne, dass der Mathematiker sich die Mühe nicht verdriessen lasse, auch dem Theologen verständlich zu werden.

Herr Dreydorff hat von seinem Standpunkte aus diese so eingeengte Aufgabe gelöst. Es ist ihm gelungen, die für uns Laien wenigstens recht verwickelten Streitfragen, welche nicht blos zwischen Jesuiten und Jansenisten, sondern später zwischen den Jansenisten unter einander verhandelt wurden, so zu beleuchten, dass wir wenigstens glauben dürfen einen Einblick darein gewonnen zu haben. Aber an diesem müssen wir uns freilich genügen lassen und verweisen unsere Fachgenossen, welche es nach gleicher Kenntniss gelüstet, ohne welche Pascal's Leben und Wirken nie ganz begriffen werden kann, auf das uns vorliegende Buch selbst. Zu referiren dagegen gestatten wir uns über die wesentlichen Lebensmomente Pascal's, über dessen Geistes- und Gemüthsentwicklung, wie sie von Herrn Dreydorff aufgefasst wurden. Wir werden also keineswegs die ganze Biographie in gleichmässigem Auszuge mittheilen, sondern nur die Theile besonders hervorheben, welche uns durch Auffassungsweise oder Darstellung bemerkenswerth erscheinen, oder zu welchen wir Ergänzungen hinzuzufügen haben.

An die Spitze stellen wir die vortreffliche Charakterschilderung (S. 58): „Das eigenthümlich Weibliche in Pascal's Empfindungsweise und in seinem tiefen und reichen Gemüthsleben ist nur schwer zu verkennen. Jedes Gefühl, das sich seiner bemächtigt, nimmt den Charakter der Leidenschaft an, und wie sehr man auch die Schärfe und Klarheit seines Verstandes bewundern mag, seine eigentliche Grösse und der Hauptnerv seines Lebens ist nicht auf diesem Gebiete zu suchen; nicht die unerbittliche Consequenz philosophischer Principien, sondern die noch grössere Gewalt seines pathologischen Fühlens und Begehrens, in welchen er nur entweder siegen oder unterliegen kann, ist die stärkste Triebfeder seiner Gedanken, seiner Entwürfe, seiner Handlungen. Aus dem Uebergewicht des Gefühls über die Rechte des klaren und besonnenen Verstandes erklärt sich die Unruhe und Hast, das Abrupte und nicht Vorauszuahnende seiner wechselnden Entschliessungen.“ Wir möchten diesen Sätzen, welche wir gern mitunterschreiben, einzelne Beispiele unvereinbarlicher Handlungen hinzufügen, welchen der Leser in Pascal's Leben begegnet. Neben höchster Opferfähigkeit, neben der Liebe zur Armuth (S. 441) findet er ein kleinliches Markten und Feilschen um wenige Thaler in dem Erbschaftshandel mit Jaqueline (S. 48). Neben eckelhafter Angeberei Fortons, er glaube nicht genügend auf Autorität hin (S. 36) ein mannhaftes Aussprechen des Satzes, Päpste und Concilien seien nicht frei von Irrthum (S. 309) und neben diesem wieder ein unehrenhaftes Verleugnen seiner Freunde von Portroyal in dem 15. Provinzialbriefe, um nicht mit diesen als Ketzer zu erscheinen (S. 287). Oder um Beispiele anzuführen, welche in dem uns vorliegenden Buche nicht erwähnt sind, man vergleiche doch nur die Hochschätzung Torricelli's, welche Pascal in seinen physikalischen Werken an den Tag legt mit der wegwerfenden Behandlung desselben Gelehrten in einer mathematischen Schrift; man erinnere sich der Verachtung aller exacten Forschung in den letzten Lebensjahren, welche geradezu durch die denkwürdige Abhandlung über die Cycloide unterbrochen wird. Alle diese Gegensätze sind bei Pascal ganz eigentlich charakteristisch, sie stellen jene klaffenden Risse dar, von denen auf der ersten Seite dieser Besprechung die Rede war. Leugnen lassen sie sich nicht, ebensowenig voraussagen; es bleibt nur übrig was Herr Dreydorff als Aufgabe bezeichnet (S. 59): „Man muss sich begnügen ihn hinterher zu verstehen.“ Und dazu hilft uns wieder rückwärts die Kenntniss von Pascal's Charakter, welche wir aus unserem Buche uns verschafft haben.

Blaise Pascal wurde den 19. Juni 1623 geboren. Die Mutter starb schon 1626 oder 1628. Der Vater gewöhnte ihn von früher Jugend an zu selbstständigem Denken und Arbeiten, und so war Blaise Pascal gar bald, und jedenfalls nachdem der Vater 1638 sich aus politischen Gründen ein Jahr lang als Flüchtling verborgen halten musste, schon im Alter von 15 Jahren der eigentlichen Erziehung entwachsen, seine weiche biegsame Gemüthsart in einer Zeit sich selbst überlassen, in welcher sie von fester Hand in eine bleibende Form hätte gebracht werden müssen. Der Verstand des Knaben arbeitete freilich unbeirrt und in der begonnenen Bahn verharrend weiter. „Wie Denken-können nur allmälig erlernt wird, so kann Denkenmüssen nicht an einem Tage wieder verlernt werden, wenn Einer nun einmal sich selbst zum Segen oder zum Fluche vom Baume der Erkenntniss gegessen hat.“ Diese Wahrheit, welche Herr Dreydorff gelegentlich äussert (S. 95), ist für Pascal ganz besonders wahr und giebt uns z. B. auch den Schlüssel für die schon mehrerwähnten Cycloidenforschungen. Aber das Leben des Gemüths gehorchte nicht dem Verstande als Alleinherrscher; wer vielmehr gerade des jungen Pascal Umgebung bildete, der übte auf ihn einen übermächtigen Einfluss aus. Den Vater traf im Januar 1646 das Unglück, sich am Bein zu verletzen (S. 25). Die ihn behandelnden Aerzte gehörten zu den Jansenisten, jener eigenthümlichen Schule innerhalb des französischen Katholicismus, welche, abgesehen von dogmatischen Fragen, deren Erörterung wir geflissentlich vermeiden, besonders durch thatkräftige Frömmigkeit, durch ein mildthätiges, den Freuden der Welt abgewandtes Leben sich auszeichnet, ähnlich etwa den Pietisten unter den deutschen Protestanten des XVIII. Jahrhunderts. Pascal erfasste die gleiche Richtung mit einer Leidenschaftlichkeit, die es seiner Ueberzeugung weit zuvorthat. Selbst unbekehrt versucht er sich als Bekehrer, als rücksichtsloser Eiferer. Der Schwester Jaqueline flösst er den Hang zum Klosterleben ein, den Kapuziner Forton denuncirt er wegen allzufreien Denkens bezüglich des Glaubens auf Autorität hin, nachdem er dessen Herzensmeinung in wahrhaft hinterlistiger Weise erforscht hat (S. 87), und zu diesen Handlungen bestimmt ihn sein wilderregtes Gemüth in demselben Jahre 1667, in derselben Stadt Rouen, in welcher er in Gemeinschaft mit dem Festungsintendanten Petit seine Versuche über den leeren Raum anstellte und veröffentlichte! Bald sollten aus dieser wissenschaftlichen Thätigkeit sich Folgerungen ergeben, welche rückwirkten auf seine Gemüthsentwicklung, auf sein ganzes Leben.

Wir bedauern es, dass Herr Dreydorff nicht jene physikalische Abhandlung und die an dieselbe sich anknüpfende Polemik in ausgiebigerem Maasse benutzt hat. Der köstliche Brief, welchen Pascal's Vater damals an Pater Noel richtete, ist ihm zwar nicht entgangen, und er findet in demselben mit Fug und Recht das Vorbild für die unübertreffliche Form der Provinzialbriefe (S. 15), aber auch Pascal's eigenen Schriftstücke verdienen Berücksichtigung ebenso wie die unglücklichen Stylübungen seiner Gegner. Diese Gegner sind nämlich Jesuiten. Bei dem gerechten Aufsehen, welches Pascal's Entdeckungen zwischen den Jahren 1647 und 1651 in und ausserhalb Frankreichs aller Orten erregten, ist es leicht begreiflich, dass auch die Anfeindungen und die Vertheidigungen des genialen jungen Gelehrten, die geradezu niederträchtige Kampfweise seiner Gegner und seine an muthigen Ausfällen reiche Defensive ebenso allgemein bekannt wurden. Klingt nun auch in Pascal's Streitschriften noch kein Hass gegen die Jesuiten im Allgemeinen durch, sind sogar freundliche Ausdrücke über diesen Orden nachzuweisen, wer mag dafür einstehen, wie viel oder wie wenig davon ernst gemeint ist, wie wenig oder wie viel dagegen der Ironie angehört, welche Pascal schon in diesen Briefen meisterlich zu handhaben weiss? Ist doch derselbe Zweifel, „ob Pascal die Verderber der christlichen Moral gleich zu Anfang seiner ersten Bekanntschaft mit ihnen (worunter Herr Dreydorff erst das Jahr 1656 versteht) recht gründlich, recht gewissenhaft gehasst hat" (S. 217), auch in jener Periode noch gerechtfertigt, wo Pascal seine Pfeile nicht gegen den Einzelnen, sondern gegen die Gesammtheit richtet. Ja dieses stylistische Zusammentreffen bestärkt uns nur in unserer Ansicht, dass die Briefe gegen Pater Noel und gegen den Rector von Montferrand für Arnault und seine Freunde die Veranlassung boten keinen Anderen als Pascal mit der Abfassung der Provinzialbriefe zu betrauen, für Pascal sich dieser Aufgabe zu unterziehen.

Vielleicht hätte eine genauere Berücksichtigung dieser wissenschaftlich-polemischen Thätigkeit Herrn Dreydorff auch noch besser über die Schwierigkeit von Pascal's Rückfalle in die Weltlichkeit hinweggeholfen, als ihm schon jetzt die Erklärung dieser Periode gelungen ist. Pascal kommt, ein schon bekannter Gelehrter, nach Paris. Seine Berühmtheit bei solcher Jugend nöthigt ihn gewissermassen in mannichfache Gesellschaft. Hatte seine Reise nach Paris gleich theilweise den Zweck, sich in gute ärztliche Behandlung zu geben, da er von Kind auf schwächlich und leidend war, so verkehrt er doch mit der Welt. Männer der exacten Wissenschaften, aber auch des öffentlichen Lebens bilden seinen täglichen Umgang. Ihr Einfluss muss obsiegen, muss die noch nicht in Saft und Blut verwandelte religiöse Neigung verdrängen und weltlichere Gelüste an ihre Stelle setzen. Inzwischen starb der Vater am 24. September 1651. Ein Erbschaftshandel mit Jaqueline, bei welchem Pascal — jetzt an ein wenn nicht ausschweifendes doch kostspieliges Leben gewöhnt — nur die Möglichkeit „diese Lebensweise noch für längere Zeit behaupten zu können" (S. 48), vor Augen sieht, entfremdet ihn der Schwester, welche durch ihn, aber in weit nachhaltigerer Weise, zur Frömmigkeit gelangt war, welche jetzt im Kloster zu Portroyal ihren Beruf zu vollenden Gelegenheit hat. Es bedurfte eines wirklichen Ereignisses, um den so veränderten Pascal den Jansenisten wieder in die Arme zu treiben. Herr Dreydorff findet dasselbe gewiss mit Recht nicht in der sogenannten Brückengeschichte (S. 61), von welcher man viel zu viel Aufsehen gemacht hat, sondern in einer unglücklichen Liebe (S. 56), welche schon Faugère mehr als nur wahrscheinlich zu machen wusste.

Liessen sich nicht sichere Spuren dieser Liebe in den von Faugère beigezogenen Stellen der Gedanken (*Pensées*) verfolgen, ein Nachweis etwa aus Störungen der gewohnten Thätigkeit wäre geradezu unmöglich. So wie aber die Sache liegt, setzt uns umgekehrt jene Thätigkeit in den Stand, das Datum der Katastrophe genauer zu bestimmen. Bereits 1647 hatte Pascal ein grosses Werk über den Luftdruck und verwandte Dinge versprochen. In seinem Nachlasse fanden sich zwei vollendete kleine Abhandlungen: *Traité de l'équilibre des liqueurs* und *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*, entweder Vorarbeiten zu jenem Werke, oder nach anderer Annahme als Ersatz desselben in Folge der Unlust Pascal's an breitspurigen Schriften. Die Abfassung dieser Abhandlungen wird in das Jahr 1653 gesetzt. Ferner fanden sich noch kurze Bruchstücke eines in Theile, Bücher, Kapitel und Abschnitte einzutheilenden Lehrgebäudes dieser Gegenstände. Wann wollte Pascal ein solches verfassen? Wann hat er die Absicht aufgegeben? Die Antwort auf diese Fragen wird eine verschiedene sein, je nach der Bedeutung, welche man den erwähnten Abhandlungen beilegt; auf das Datum dieses Fragmentes ist also kein Gewicht zu legen. Wir bedürfen dessen aber auch nicht, um dem Sommer 1654 einen wissenschaftlichen Inhalt zu geben, welcher einen gleich erfüllten vorhergehenden Winter voraussetzt. Der 29. Juli, der 24. August, der 27. October 1654 sind nämlich die Daten jener drei Briefe Pascal's an Fermat, in welchen die Grundlage zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt ist und welche selbst das arithmetische Dreieck nicht nur als schon erfunden, sondern als bereits zu mannichfachem Gebrauche ausgebildet voraussetzen. Und ebenso gesichert ist das Datum von Pascal's Sichzurückziehen zu den Tröstungen strenger Frömmigkeit. „Zu Ende des Monats September 1654 erscheint

Pascal gebrochenen Geistes und auch körperlich leidender als je zuvor bei seiner Schwester Jaqueline, um ihr zu beichten" (S. 63), und als Tag der vollständigen Bekehrung giebt Pascal selbst auf jenem merkwürdigen Papierstreifen, den er bis an sein Lebensende in sein Oberkleid eingenäht mit sich herumtrug, den 23. November desselben Jahres an (S. 65). Diese beiden Daten und die des zweiten und dritten Briefes an Fermat lösen vereinigt die gestellte Aufgabe. Der Brief vom 24. August gehört zu dem Klarsten und Elegantesten, was die mathematische Literatur besitzt. Damals können Pascal's Gedanken von keinem zerstreuenden Kummer beeinträchtigt gewesen sein. In dem Beichtstuhl zeigt er sich schon zerrissen und zu Boden geworfen. Folglich trat die Katastrophe jenes Romans, zu dem uns freilich sogar der Name der Heldin fehlt, zwischen Ende August und Ende September 1654 ein. Der nachher noch geschriebene Brief vom 27. October beeinträchtigt diese Vermuthung keineswegs, begründet dagegen die Annahme, dass erst am 23. November die Bekehrung Pascal's vollendet war. Jener Brief ist nämlich eine einfache Empfangsanzeige und höfliche Ablehnung weiteren Verkehrs, wie wir beide von einem Manne erwarten dürfen, dessen Kopf eingenommen ist von unwissenschaftlichen Sorgen. Aus demselben Briefe ersehen wir aber auch, dass Pascal den letztverflossenen Samstag, also leichtnachweislich den 24. October (wir wissen nämlich dass der 23. November ein Montag war), in gelehrter Gesellschaft zubrachte. Damals, schon vier Wochen nach dem Beichtgange zu Jaqueline, war Pascal folglich noch nicht im Reinen mit sich, aus den gewohnten Kreisen endgiltig auszuscheiden, wenn er auch schon die Thürklinke in der Hand hielt, und erst an dem wiederholt genannten Montage vollzog sich nach langem Geisteskampfe, dessen Beweis wir mit Herrn Dreydorff in jenem amulettartigen Papierstreifen finden, die völlige Lossagung von der Weltlichkeit.

Pascal begiebt sich am 7. Januar 1655 auf das Land, wo er bald mit den frommen jansenistischen Einsiedlern um die Wette ascetischen Uebungen und dem Lesen der heiligen Schrift sich widmet. Das Jahr 1655 ist es aber auch, in welchem der Streit zwischen Jansenisten und Jesuiten ausbricht, ein Kampf, der bei der praktisch entgegengesetzten Richtung beider über kurz oder lang einmal entbrennen musste, sei es nun über diesen oder jenen dogmatischen Punkt. Um so leichter fällt es uns, unserem ausgesprochenen Vorhaben gemäss das Dogmatische selbst unberücksichtigt zu lassen und nur zu wiederholen, was wir schon behauptet haben. Nicht zufälligerweise wurde Pascal zum Kämpen in diesem Streite ausersehen, nicht aus blosem Gehorsam erfüllte er das von ihm Verlangte. Er war durch seine Vergangenheit dazu bestimmt. Nicht als ob er mit besserem Rüstzeuge gewappnet gewesen wäre als die anderen Freunde, nicht als ob er die Waffen der Theologie besonders leicht oder gern gehandhabt hätte, aber wenn die Theologie ihm fremd war, so kannte er doch die Theologen, die ihm gegenüberstanden, es waren ihm altbekannte Gegner, es waren Jesuiten!

Haben wir bisher nur Dinge besprochen, welche hauptsächlich in dem „Pascal's Leben" überschriebenen ersten Buche des uns vorliegenden Werkes (S. 3—109) enthalten waren, so kann und muss von diesem Punkte an unser Referat sich kurz fassen. Ein Auszug aus dem zweiten Buche „Pascal's-Polemik" (S. 113—344) würde entweder zu einem grossen Aufsatze anschwellen oder gar zu dürftig und farblos erscheinen. Wir verweisen weit lieber unsere Leser auf den hier genannten Abschnitt selbst. Mit gleicher Kürze gehen wir über das dritte und letzte Buch „Pascal's Niederlage" (S. 347—462) hinweg. Nicht als ob dasselbe einen Auszug nicht zuliesse oder nicht verdiene, aber hier schwimmen Biographie und dogmatische Kritik so sehr in einander über, das wir darauf verzichten, uns den Vorwurf des Urtheils über Dinge, die wir selbst eben erst kennen gelernt haben, zuzuziehen. Wir wollen nur, um unserer kurzen Biographie Pascal's eine Art von Abschluss zu geben, die Daten einiger Begebenheiten feststellen.

Die Provinzialbriefe erscheinen vom 23. Januar 1656 an bis zum 24. Februar 1657. Zwischen den 5. und 6. Brief fällt auf den 24. Februar 1656 das Wunder vom heiligen Dorn, welches Herrn Dreydorff den Anlass zu einer vortrefflichen Abschweifung über Wunderglaube und Mythenbildung (S. 357—384, besonders S. 361) gegeben hat. Entgegnungen der Jesuiten, besonders die gelungene Flugschrift *Rabat-Joye des Jansenistes* öffnet Pascal die Augen über die thatsächliche Situation (S. 385). Er sieht sich im Eifer des Gefechtes weiter geführt, als es ihm lieb ist, er muss sich selbst gegen den Vorwurf der Ketzerei vertheidigen oder in offenen Bruch zur katholischen Kirche treten. Letzteres kann Pascal nicht mit seinem Gewissen vereinigen, denn für ihn gilt genau dasselbe, was wir bei anderer Gelegenheit von Galilei zu behaupten Anlass nahmen. Er kann unter Umständen dem Papste gegenübertreten, aber „er beklagt, dass er sich zwischen Gott und dem Papst sehe" (S. 403), er bleibt dabei guter Katholik, er will es wenigstens bleiben. Dieser innere Kampf reibt den durch lange Kränklichkeit, durch abschwächende Bussübungen, durch angestrengte Geistesarbeit geschwächten Körper vollends auf. Die „Gedanken", welche in dem Jahre 1658 entstanden sind, zeigen in ihrer aphoristischen Gestalt die Unmöglichkeit einer ununterbrochenen regelmässigen Thätigkeit. Vielleicht dürfen wir auch annehmen, dass sich Pascal's ein wenn auch unbewusster Widerwille gegen Theologie und damit zusammenhängender schriftstellerischer Thätigkeit bemächtigt hatte, denn aus der Cycloidenuntersuchung, deren Datum durch das Preisausschreiben vom Juni 1658 festgestellt ist, wie aus den daran anknüpfenden Veröffentlichungen vom Januar 1659 strahlt das geistige Bild des Verfassers in alter Helle hervor. Es ist derselbe klare Gedankengang, derselbe Reichthum der Ideen, wie in den Arbeiten der früheren Jahre; nur der Charakter ist verbittert, die Polemik, welche gegen Torricelli und gegen den Pater Lalouère geführt wird, ist persönlicher, als wir es von Pascal gewöhnt sind. Diese Veröffentlichung ist die letzte, zu welcher Pascal sich bekannte, das vorletzte Schriftstück, welches wir überhaupt von ihm besitzen.

Einen Brief nämlich hat er sicherlich noch geschrieben, an Styl und Inhalt, an Ernst und Begeisterung des Verfassers der Provinzialbriefe und der Gedanken gleich würdig; aber er hat ihn nicht unterschrieben. Er begnügte sich, der ungenannte Secretär zu bleiben und Ehre wie Verantwortlichkeit seiner Schwester Jaqueline zu überlassen. Jaqueline, das ungeniessbare Geschöpf, wie wir sie mit Herrn Dreydorff (S. 25) in ihrer Jugend nennen müssen, hatte sich im Laufe der Jahre zur Glaubensheldin entwickelt. Am 8. Juni 1661 erschien ein Formular, durch dessen Unterschrift von Seiten aller Diener und Dienerinnen der Kirche der dogmatische Streit endgiltig geschlichtet werden sollte. Geschlichtet! Das heisst, der jansenistischen Partei war geradezu befohlen, ihre Meinung aufzugeben, ihre Führer zu verleugnen, oder aber bei der Unterschrift des Hilfsmittels jesuitischer Moralisten des heimlichen Rückhaltes sich zu bedienen. Gegen Beides empörte sich Pascal's Stolz und Gewissen. Ihm selbst wurde freilich die Unterschrift nicht abverlangt, wohl aber seiner Schwester als Nonne, und ihr theilte er seine Ansichten, seine Entrüstung mit. Jaqueline, in dem freudigen Vorgefühle eines erwünschten Märtyrthums, richtet den von ihrem Bruder vorgeschriebenen Protest an eine der Nonnen von Portroyal. Die Bemühung war vergeblich. Am 22. Juni unterzeichneten die Nonnen das Formular und auch Jaqueline musste diesen Act der Untreue an sich selbst vollziehen. Ihr Herz brach. Sie starb den 4. October desselben Jahres. Zehn Monate später folgte ihr der Bruder in das Grab. Blaise Pascal starb den 19. August 1662.

Unter vielen Fragen, welche an die Ereignisse von 1661 sich anknüpfen, ragt diejenige hervor, welche Herr Dreydorff schon S. 321 aufwirft, wer der consequentere Vertreter seiner Richtung genannt zu werden verdient, der Verweigerer der Unterschrift oder der sie leistete? Er sieht sich veranlasst, den Letzteren als den Folgerichtigeren anzuerkennen: so lange die Jansenisten innerhalb des Katholicismus bleiben wollten, mussten sie sich schliesslich unterwerfen. Doch fast liessen wir uns verleiten, hier den theologischen Kern näher zu berühren, und das wollen wir ja nicht! Wir verweisen also wiederholt auf das hiermit besprochene Buch, aus welchem wir selbst so Vieles gelernt haben, zur Erläuterung aller dieser Schwierigkeiten. Wir dürfen vielleicht andererseits hoffen, dass unser Referat einiges Material zur Lösung anderer Schwierigkeiten enthalte, welche nach unserer Meinung wenigstens bisher nicht genügend überwunden worden sind.

CANTOR.

Studien über höhere Geodäsie von Dr. C. Bremiker. Berlin 1869. Weidmann'sche Buchhandlung. gr. 8.

Schon im Jahre 1856 hat sich der Herr Verfasser in einer in den Astronomischen Nachrichten S. 1022 abgedruckten Abhandlung damit beschäftigt, diejenigen Aufgaben der Geodäsie, welche man nach dem Vorgange von Legendre und Anderen mittelst sphäroidischer Trigonometrie zu lösen gewöhnt ist, in möglichst elementarer Weise mit Umgehung der diesen Problemen von Haus aus fremden geodätischen Linie zu lösen. Inzwischen ist es ihm gelungen, den Relationen für den Uebergang von einer astronomisch bestimmten Station eines geodätischen Dreiecksnetzes zu einer anderen beliebig weit entfernten eine grössere Durchbildung zu geben, und wir finden sie in vorliegender Schrift völlig streng in geschlossener und zur Rechnung geeigneter Form aufgestellt und durch Beispiele erläutert. Wir können uns der Ansicht des Herrn Verfassers, dem oft behandelten Problem eine für die Praxis erwünschte durchsichtige und bequeme Lösung gegeben zu haben, vollständig und um so mehr anschliessen, als derselbe seine grosse Einsicht in die Anforderungen der rechnenden Astronomie und Geodäsie anderweit genugsam bethätigt hat. Konnten wir uns auch nicht allenthalben mit den gegebenen Auseinandersetzungen einverstanden erklären, so betraf dies doch immer nur mehr die Hauptaufgabe der Studien des Herrn Verfassers nicht wesentlich angehende Punkte.

In der Einleitung wird insbesondere nachzuweisen versucht, dass die geodätische Linie nicht nothwendig in die Geodäsie gehöre und ihr Name auch viel richtiger der als Feldlinie benannten und den geodätischen Messungen mehr entsprechenden Curve gebühre. Diese letztere, auf welche (ohne jedoch einen Namen einzuführen) bereits 1867 Herr von Andrae im ersten Bande der dänischen Gradmessung aufmerksam gemacht hat, ist charakterisirt durch die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte die die Curve tangirende Normalebene der krummen Fläche auch die beiden Endpunkte der Curve enthält. Der Herr Verfasser weist auch noch auf andere als Hilfslinien auf dem Sphäroid verwendbare Curven hin, untersucht indessen nur die Feldlinie und die beiden sie einhüllenden Verticalschnitte in einem letzten Abschnitte des Werkchens etwas eingehender. Diese drei Curven sollen vor allen anderen den geodätischen Messungen entsprechen und hinsichtlich der Winkelmessungen müssen wir dem beistimmen. Dass das Abstecken einer sogenannten Geraden auf einer krummen Fläche aber auch in einer geodätischen Linie erfolgen kann, geht aus deren Eigenthümlichkeit hervor, wonach jedes Linienelement als die Projection der Verlängerung eines der beiden benachbarten auf die krumme Fläche aufgefasst werden kann. Bedenken wir ferner, dass die geodätische Linie zwischen zwei Punkten auch für irgend zwei andere ihrer Punkte geodätische Linie ist, die Feldlinie eine entsprechende elegante Eigenschaft nicht hat, und erwägen wir noch, dass zur Theorie der geodätischen Linie nur die Kenntniss der Coefficienten des Linienelementes erforderlich ist (was von Herrn Weingarten in den Astronomischen Nachrichten 1733 und 1782 aufs Neue in Erinnerung gebracht, aber zuerst von Gauss hervorgehoben wurde), so möchten wir der geodätischen Linie und nicht der Feldlinie den Vorrang einräumen.

Die successive Berechnung der Längen und Breiten, wie der Azimute der Stationen eines beobachteten trigonometrischen Netzes bedarf indessen der Hinzunahme einer Hilfslinie auf der krummen Fläche gar nicht; die gegebenen Formeln beweisen, dass die Reduction auf das Sehnendreieck und die weitere Rechnung mit den Sehnen ganz vortheilhaft ist; doch wird vorgeschlagen, erstere im Falle beobachteter Dreiecke durch die Reduction der die Punkte verbindenden Curven auf die zugehörende Sehne zu ersetzen, welcher nun freilich wieder zur Ermittelung der Curvenlängen eine Rechnung auf dem Sphäroide vorausgehen muss, die sich jedoch für so kleine Dreiecke bekanntlich ganz bequem anstellen lässt und wobei die Frage, ob als Curve geodätische Linie, Feldlinie oder Verticalschnitt zu wählen sei, wegen der hier nur unmerklichen Längenverschiedenheit der genannten bedeutungslos wird. Die Genauigkeit der Formeln ist schon für siebenstellige Logarithmen so gross, dass die berechneten Unterschiede der astronomischen Coordinaten von der Schärfe der geodätischen Messung nichts verloren gehen lassen. Die von Punkt zu Punkt fortschreitende Rechnung führt auch zu den entfernten Punkten des Netzes, ohne dass man nöthig hätte, diese mit dem Anfangspunkte direct zu verbinden. Dies würde nur Sinn haben, wenn von zahlreichen Uebergangspunkten keiner astronomisch bestimmt worden wäre. Die Angabe der auf dem Sphäroid gemessenen und bekanntlich von dessen Dimensionen ziemlich unabhängigen kürzesten Entfernung der beiden astronomisch bestimmten Stationen böte dann allerdings den Vortheil, in gedrängter Weise die Messungsresultate zusammen zu fassen. Nehmen wir nun mit dem Verfasser aber zahlreiche astronomische Stationen an, so erhalten wir durch Vergleichung der Messungen und Rechnungen Gleichungen zur Ermittelung einer möglichst anschliessenden mittleren Erdoberfläche, etwa eines oscillirenden Sphäroides. Das hierbei einzuschlagende Ausgleichungsverfahren wird durch allgemeine Gleichungen erläutert.

Hierbei kommt der Herr Verfasser auch auf die Definition einer Meridianebene und auf die Lothstörungen zu sprechen. Diese sind die Abweichungen der wahren Lothrichtung von der Lothrichtung der mittleren angeschmiegten Oberfläche. Sie äussern sich als Störung in Breite und Länge, und wie uns eine leichte Rechnung zeigte, auch Astronomische Nachrichten 1245 von General T. F. Schubert angegeben worden ist, nicht minder in Azimut, wofür sie dem Product aus Längenstörung und

Sinus der geographischen Breite gleich wird*. Nach Herrn Dr. Bremiker's nicht weiter durch Rechnung begründeter Meinung ist der Einfluss der Lothstörung auf Azimut aber genau so zu vernachlässigen, wie derjenige auf die Horizontalwinkel, und er motivirt dies durch den Satz, dass gestörte und ungestörte Meridianebene sich im Pole schneiden (S. 8), an welchem auch wir nichts auszusetzen haben, dem der Herr Verfasser indess S. 23 selbst nicht treu bleibt, indem er dort die ungestörte Meridianebene allgemein durch Normale und einen nicht näher fixirten Coordinatenanfang legt, welches letztere Verfahren durchaus nicht gebilligt werden kann.

Ungestört bleiben ausser den Horizontalwinkeln nur alle Winkel zwischen der Polrichtung und beliebigen Objecten, woraus freilich die Geodäsie keinen Nutzen zu ziehen vermag, da hier die Normale eben ganz ausser Betracht bleibt. Geometrische Nivellements ferner geben immer den wahren Höhenunterschied (enthalten also die ganze Störung), wenn nur die Distanzen angemessen klein genommen werden. Nimmt man sie aber grösser als einige Hundert Meter, so würde man schon einen kleinen Einfluss einer rein ellipsoidischen Gestalt der Erde verspüren können. Die über grössere Entfernungen bewirkten trigonometrischen Nivellements enthalten die Lothstörungen in anderer Form als die geometrischen, und bei genauerer Kenntniss der Strahlenbrechung würden aus der Verbindung geometrischer und gegenseitiger trigonometrischer Nivellements ebenfalls Gleichungen für die Lothstörung resultiren, die jedoch ausser der Entfernung der Stationen auch noch die Erhebung der wahren (gestörten) Oberfläche über die mittlere enthalten werden und zur Berechnung derselben bei bekannten Lothstörungen dienen könnten. Wenn also S. 7 gesagt wird, dass ein auf verschiedenen Wegen in sich zurückkehrendes trigonometrisches Nivellement nicht nothwendig Null als Höhenunterschied ergeben müsse, so unterliegt dies keinem Zweifel, ohne dass man deshalb Discontinuitäten, wie der Herr Verfasser, vorauszusetzen braucht.

Die Formeln für Breiten-, Längen- und Azimutalunterschiede, zuerst allgemein aufgestellt, werden mit Rücksicht auf Bessel's Erdsphäroid specialisirt und dazu drei Hilfstafeln beigegeben, die jedem Rechner willkommen sein werden. Die erste Tafel gewährt in einfacher Weise die schärfste Berechnung des Unterschieds von geographischer und reducirter Breite; die zweite giebt die Krümmungsradien in verschiedenen Azimuten unter verschiedenen Breiten und erleichtert die Berechnung der zur Reduction auf das Sehnendreieck nothwendigen Depressionen der Sehnen unter den Ortshorizont. Die dritte Tafel endlich dient zur Reduction von Bogen auf Sehne.

Für kürzere Entfernungen scheint es uns etwas genauer zu sein, als

* In recht klarer Weise behandelt diesen Gegenstand das 1858 ersch[ienene] Werk: „*Ordnance Survey*“ von Oberstlieutenant H. James, pag. 609 seq

wie es S. 40 entwickelt ist, besser beide Depressionswinkel einer Sehne gleich gross anzunehmen, indem man sie mit dem arithmetischen Mittel der äussersten Krümmungen berechnet und nicht diese einzeln zur Bestimmung der respectiven Depressionen zu benutzen. Dafür sprechen auch schon die Beispiele S. 56—58.

Noch könnte man erinnern, dass in dem grösseren Beispiele immer von einem Dreiecke und S. 43 seq. auch vom sphärischen Excess eines solchen die Rede ist, ohne dass man recht weiss, wo ein solches zu suchen ist. Die aus den sechs Verticalschnitten gebildete dreieckige Figur ist kein Dreieck im gewöhnlichen Sinne und hat noch viel weniger einen sphärischen Excess.

Am Ende der Abhandlung stellt der Herr Verfasser in Aussicht, die zum Abschlusse des Ganzen fehlenden Differentialformeln vielleicht, wenn es seine Berufsgeschäfte gestatten würden, nachzuliefern und wir wünschen im Interesse der Sache, dass dieser Zeitpunkt recht bald eintreten möge, um damit den Schritt zu einer wesentlichen Bereicherung der praktischen Geodäsie vollendet zu sehen.

Sternwarte Hamburg, im Januar 1870.

F. R. Helmert.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 30. April 1870.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1870 Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 4 Thlr.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 14. Band von den Jahren 1868 und 1869. Göttingen, Dietrich. 9 Thlr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Cl. 29. Bd. Wien, Gerold. 16⅔ Thlr.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von C. Bruhns. 4. Jahrgang 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 12 Ngr.

—— 2. Supplementheft. Ebendaselbst. 6 Ngr.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1872. Herausgegeben von C. ¯mikbr. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

Repertorium der technischen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Journalliteratur. Herausgegeben von SCHOTTE. Jahrgang 1870 1. Heft. Leipzig, Quandt & Händel. pro compl. 3 Thlr.

Jahresbericht der norddeutschen Seewarte für 1869; erstattet von W. v. FREEDEN. Hamburg, Mauke. $^{1}/_{5}$ Thlr.

Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik und Instrumentenkunde. Herausgegeben von PH. CARL. 6. Band 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 4⅔ Thlr.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. I. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 3 Thlr.

Archiv für Mathematik und Physik. Herausgegeben von J. A. GRUNERT. 51. Theil 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Acta nova regiae societatis scientiarum Upsalensis. Ser. III, Vol. VII, Fasc. 1. Upsala, Akademische Buchhandlung. 3⅓ Thlr.

Annuario marittimo per l'anno 1870, *compilato presso l'i governo centrale marittimo.* 20. *annata.* Triest, literarisch-artistische Anstalt. 1⅓ Thlr.

Reine Mathematik.

MAYR, A., Construction der Differentialgleichungen aus particulären Integralen. Würzburg, Kellner. 1⅙ Thlr.

ZELEWSKI, A. v., Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. Breslau, Goerlich & Coch. 8 Ngr.

UNFERDINGER, F., Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

METZLER, Die symmetrische Function $\int x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ldots$ Darmstadt, Schlapp. ⅓ Thlr.

WEYR, E., Ueber Curvenbüschel. (Akad.) Wien, Gerold. 1⅓ Ngr.

BRUHNS, C., Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Decimalen. Leipzig, Tauchnitz. 1¼ Thlr.

HENRICH, F., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Wiesbaden, Limbarth. 24 Ngr.

HELMES, J., Die Elementarmathematik. 4. Bd. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Hannover, Hahn. 26 Ngr.

HENRICH, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie. Wiesbaden, Limbarth. 15 Ngr.

SONNET, H., *Premiers éléments du calcul infinitésimal.* Paris, Hachette. $1^{3}/_{5}$ Thlr.

Angewandte Mathematik.

DOERGENS, R., Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze. 1. Theil. Die perspectivischen Projectionen. Berlin, Schroppsche Landkartenhandlung. ¾ Thlr.

RÜHLMANN, R., Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig, Barth. 1⅓ Thlr.

NEUMANN, C., Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig, Teubner. ⅓ Thlr.

OPPOLZER, TH., Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. 1. Bd. Leipzig, Engelmann. 4⅔ Thlr.

—— Definitive Bestimmung der Bahn des Planeten Angelina (64). (Akad.) Wien, Gerold. 9 Ngr.

HANSEN, P. A., Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge, mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintretenden Vorüberganges. (Sächs. Gesellschaft der Wissensch.) Leipzig, Hirzel. 1 Thlr.

MÄDLER, H. v., Reden und Abhandlungen über Gegenstände der Himmelskunde. Berlin, Oppenheim. 2⅔ Thlr.

VALENTINER, G., *Determinatio orbitae Cometae V anni* 1863. Berlin, Calvary & Comp. 14 Ngr.

KEPLERI, J., *Opera omnia, ed. Ch. Frisch. Vol. VIII.* Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 3⅓ Thlr.

Physik.

DITSCHEINER, L., Ueber den Gangunterschied und das Intensitätsverhältniss der bei Reflexion an Glasgittern auftretenden parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahlen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

LANG, V. v., Ueber die Lichtgeschwindigkeit im Quarze. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

MAGNUS, G., Ueber Emission, Absorption und Reflexion der bei niederer Temperatur ausgestrahlten Wärmearten. (Akad.) Berlin, Dümmler. ⅓ Thlr.

HANKEL, W., Elektrische Untersuchungen. 8. Abhandlung. Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. (Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.) Leipzig, Hirzel. 24 Ngr.

KIECHL, F., Versuche zur Bestimmung des calorischen Aequivalentes der Elektricität. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

OBERMAYER, A. v., Experimentelle Bestimmung des Leitungswiderstandes in Platinblechen. (Akad.) Wien, Gerold. 5 Ngr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1869.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. *De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes.* Abel Transon. *N. ann. math. XXVIII*, 222.
2. *Discussion de la fraction* $\frac{a x^2 + b x + c}{a' x^2 + b' x + c'}$. Darboux. *N. ann. math. XXVIII*, 81.
3. *Sur un point remarquable dans le plan d'un polygone.* Kruschwitz. *N. ann. math. XXVIII*, 530.
4. *Courbes engendrées par roulement.* Geoffroy. *N. ann. math. XXVIII*, 548.
5. Trajectorie des Mittelpunktes der Kugel eines Centrifugalapparates. Am Ende. Grun. Archiv XLIX, 110.

   Vergl. Ellipse. Epicycloide. Homographie. Hyperbel. Kegelschnitt. Kreis. Krümmung 117, 118, 120. Spirale.

Analytische Geometrie des Raumes.

6. Die constanten Relationen bei den Dreiecken und tetraedrischen Coordinaten. Toeplitz. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 253.
7. *Sur le nombre des droites qui satisfont à quatre conditions données.* Halphen. *Compt. rend. LXVIII*, 142.
8. *Des cycliques et des cyclides.* Darboux. *Compt. rend. LXVIII*, 1311.
9. *Si par le milieu de chaque arête d'un tétraèdre on fait passer un plan perpendiculaire à l'arête opposée, les six plans ainsi obtenus passent par un même point.* Lez et Dugrais. *N. ann. math. XXVIII*, 173.

   Vergl. Astronomie 13. Cartographie. Homographie. Krümmung 109, 120, 121, 122, 123, 124. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Approximation.

10. Ein Näherungswerth für $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Horvath. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 80.

    Vergl. Gleichungen 81.

Architectur.

11. Untersuchung einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundrisse überwölbt werden kann. Staudigl. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 97.

Astronomie.

12. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wenn dieselben geocentrisch nahe in einem grössten Kreise liegen. Tietjen. Astr. Nachr. LXXIII, 353.

13. *Application de la géométrie analytique à la détermination des orbites des planètes.* Michal. *Compt. rend. LXVIII*, 176.
14. Bemerkungen über das Problem der drei Körper. Radau. Astr. Nachr. LXXII, 101.

B.

Bestimmtes Integral.

15. *Sur un problème de calcul intégral.* J. A. Serret. *Compt. rend. LXVIII*, 1132. — *Crofton ibid.* 1469.
16. Ueber die Integrale von $sin x^n . dx$, $cos x^n . dx$ und $sin x^m . cos x^n . dx$ innerhalb bestimmter Grenzen. Oettinger. Grun. Archiv XLIX, 51.
17. Ueber einige Integrale, welche die Bessel'schen Functionen $J_{(x)}^{(h)}$ enthalten. H. Weber. Crelle LXIX, 222.
18. Die Fourier-Bessel'sche Function. Heine. Crelle LXIX, 128.
19. Beitrag zur Theorie der Function $P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma, \\ \alpha', \beta', \gamma', x\end{pmatrix}$. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 48.
20. Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört. Du Bois Reymond. Crelle LXIX, 65.

Brennpunkt.

21. *Détermination des foyers dans les coniques.* De Saint-Germain. *N. ann. math. XXVIII*, 230.
22. *Lorsqu'une ellipse eu roulant sur une droite a fait un tour entier l'arc décrit par le foyer est égal à la circonference ayant pour diamètre le grand axe.* Morel. *N. ann. math. XXVIII*, 314. — *Jasseron ibid.* 420.

C.

Cartographie.

23. *Sur les formules et les calculs qui ont servi à construire la grande carte gnomonique de l'Europe et des contrées adjacentes.* Thoulet. *Compt. rend. LXVIII*, 380.
24. Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen. Von der Mühll. Crelle LXIX, 264.

Combinatorik.

25. *Sur les combinaisons complètes.* Melon. *N. ann. math. XXVIII*, 168.

Cubikwurzel.

26. Vereinfachtes Verfahren für die Ausziehung der Cubikwurzel aus Zahlen. Gouzy. Grun. Archiv XLIX, 101.
Vergl. Kettenbrüche.

Cylinderfunction.

Vergl. Bestimmte Integrale 17, 18.

D.

Determinanten.

27. *Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants. N. ann. math. XXVIII*, 97. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 161.]
28. Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen. Dietrich. Crelle LXIX, 190.
29. Ein Determinantensatz. Hesse. Crelle LXIX, 319.
Vergl. Gleichungen 83.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

30. *Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XXVIII*, 49, 145, 193. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 165.]
31. *Note sur les surfaces du troisième ordre.* Sartiaux. *N. ann. math. XXVIII*, 27.

Differentialgleichungen.

32. *Théorie du facteur pour l'intégration des expressions différentielles du premier ordre.* Collet. *Compt. rend. LXVIII,* 799.
33. *Sur l'intégration de quelques équations différentielles du second ordre par la méthode du facteur.* Andréiewsky. *Compt. rend. LXVIII,* 716.
34. *Sur les équations simultanées aux différences partielles du premier ordre.* Korkine. *Compt. rend. LXVIII,* 1460.
35. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen. Lipschitz. Crelle LXIX, 109.

Differentialrechnung.

36. *Sur le passage des différences aux différentielles.* Genocchi. *N. ann. math. XXVIII,* 345.
37. *Sur un passage du Traité du calcul différentiel de M. Serret.* Lemoine. *N. ann. math. XXVIII,* 526.

Differenzenrechnung.

38. *Relations entre la différence et la dérivée d'un même ordre quelconque.* Genocchi. Grun. Archiv XLIX, 342.

E.

Elasticität.

39. *Sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXVIII,* 569.

Electrodynamik.

40. *Sur la distribution unique de l'électricité à la surface des conducteurs.* Volpicelli. *Compt. rend. LXVIII,* 976.
    Vergl. Potential 164.

Ellipse.

41. *Propriétés nouvelles des diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole.* Dostor. *N. ann. math. XXVIII,* 481.
42. *Perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde d'une ellipse.* Cohen. *N. ann. math. XXVIII,* 523.
43. *Lieu d'un point tel que les deux tangentes menées de ce point à une ellipse donnée interceptent sur une droite fixe une longueur constante.* Hilaire. *N. ann. math. XXVIII,* 362.
44. *Théorème sur deux droites tangentes d'une ellipse.* Valabregue. *N. ann. math. XXVIII,* 237.
45. *Moyen simple de mener la normale à l'ellipse.* Puillotte. *N. ann. math. XXVIII,* 269.
46. *Théorème de Joachimsthal.* Gérono. *N. ann. math. XXVIII,* 472.
47. *Construction de la polaire d'un point relativement à une ellipse.* Willière. *N. ann. math. XXVIII,* 535.
48. Ueber den Flächeninhalt eines einer Ellipse umschriebenen Parallelogramms. Grunert. Grun. Archiv XLIX, 45.
49. *Théorème sur une ellipse et une hyperbole homofocales.* Millasseau. *N. ann. math. XXVIII,* 421.
50. *Théorèmes sur deux ellipses telles que les demiaxes de la première coïncident en direction avec ceux de la seconde, mais soient respectivement proportionnels à leurs carrés.* Pellet. *N. ann. math. XXVIII,* 87.
51. *Enveloppe des ellipses concentriques à aire constante dont les axes ont la même direction.* Olga Ermanska. *N. ann. math. XXVIII,* 321. — Kruschwitz *ibid.* 542.
52. *Lieu du centre d'une ellipse du grandeur constante.* Preverez. *N. ann. math. XXVIII,* 427.
53. *Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'aire constante circonscrite à un triangle.* Fazrineau. *N. ann. math. XXVIII,* 549.
    Vergl. Brennpunkt 22. Hyperbel 94. Spirale 178.

Ellipsoid.

51. *Lieu des pôles d'un plan fixe donné par rapport à un ellipsoide tournant.* Schlegel. *N. ann. math. XXVIII,* 542.

Vergl. Ellipse 42. Potential 162.

Epicycloiden.

55. *Sur la double génération de l'épicycloides planes.* Fouret. *N. ann. math. XXVIII,* 162.
56. *Epicycloide à trois rebroussements.* Millasseau. *N. ann. math. XXVIII,* 418. — Willière *ibid.* 470.

F.

Factorenfolge.

57. *Sur la théorie élémentaire des produits infinis.* Genocchi. *N. ann. math. XXVIII,* 121.
58. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Producte. G. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 152.

Function.

59. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Mertens. Crelle LXIX, 289.
60. Reduction von $arctg\,(\xi+i\eta)$ auf die Normalform $x+iy$. Unferdinger. Grun. Archiv XLIX, 478.
61. Ueber den Werth von $arctg\,(\xi+i\eta)$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 77.

Vergl. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Homogene Functionen. Invarianten. Kettenbrüche. Partialbrüche. Quadratische Formen. Sturm's Functionen. Substitutionen. Ultraelliptische Functionen.

G.

Geodäsie.

62. Ueber den Zusammenhang von aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecken mit ebenen Dreiecken von gleichen Seiten. Weingarten. Astr. Nachr. LXXIII, 65.
63. Die Berechnung der Veränderungen in einem veränderlichen Dreiecksnetze. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 62.
64. Beiträge zur Theorie der Ausgleichung trigonometrischer Netze. Helmert. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 174.

Vergl. Pendel.

Geometrie (höhere).

65. Ueber die Erzeugung solcher geometrischer Curven, welche durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt sind. Olivier. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 209.
66. Ueber das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und den linearen Strahlencomplex. Reye. Crelle LXIX, 365.

Geschichte der Mathematik.

67. *Sur l'étymologie du mot Algorithme. N. ann. math. XXVIII,* 188.
68. Zwei Beiträge zur Biographie Keppler's. Peinlich. Grun. Archiv XLIX, 460.
69. *Débats entre Mr. Chasles et divers autres savants sur la science du XVII siècle. Compt. rend. LXVIII,* 17 — 1533. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 205.
70. *Rapport fait à l'académie royale des sciences des Pays-Bas relativement aux lettres communiquées par M. Chasles à l'académie des sciences de Paris en tant qu'elles se rapportent à Huygens.* Grun. Archiv XLIX, 81.
71. Die Entdeckung der Gravitation und Pascal. H. Hankel. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 165.

72. *Sur quelques découvertes de Blaise Pascal.* Delègue. *N. ann. math. XXVIII,* 287.
73. Die Ruinen von Uranienborg und Stjerneborg im Sommer 1868. D'Arrest. Astr. Nachr. LXXII, 209.
74. *Sur la biographie de Sadi Carnot.* Chasles. *Compt. rend. LXVIII,* 115.
75. Nekrolog von August Ferdinand Möbius († 26. Sept. 1868). Bruhns. Astr. Nachr. LXXII, 287.
76. Lebensskizze von Rehuel Lobatto. Matthes. Grun. Archiv XLIX, 332.
Vergl. Operationscalcul.

Gleichungen.

77. *Théorème sur les équations algébriques.* C. Jordan. *Compt. rend. LXVIII,* 257.
78. *Sur les fonctions de Sturm.* Brioschi. *Compt. rend. LXVIII,* 1318.
79. *Sur le théorème de Sturm.* Kronecker. *Compt. rend. LXVIII,* 1078.
80. *Sur la règle des signes de Descartes.* Parpaite. *N. ann. math. XXVIII,* 269.
81. *Sur la méthode d'approximation de Newton.* Darboux. *N. ann. math. XXVIII,* 17.
82. Ueber einen *casus irreducibilis* in reellen Grössen. Unferdinger. Grun. Archiv XLIX, 484.
83. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 129.
84. Zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten. Unferdinger. Grun. Archiv XLIX, 474.

H.

Homogene Functionen.

85. Ueber eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten. Clebsch. Crelle LXIX, 355.
Vergl. Determinanten. Invarianten. Quadratische Formen.

Homographie.

86. *Homographie et perspective.* Housel. *N. ann. math XXVIII,* 492.

Hydrodynamik.

87. *Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile, contenue dans un vase à parois verticales pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXVIII,* 221, 290. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 263.]
88. *Rapport sur un mémoire de M. Maurice Levy relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes particulièrement à leur écoulement rectiligne et permanent.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXVIII,* 582.
89. *Sur les principes fondamentaux de l'hydrostatique.* Moutier. *N. ann. math. XXVIII,* 241.
90. *Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques.* Boussinesq. *Compt. rend. LXVIII,* 905. — De Caligny *ibid.* 980, — Reech *ibid.* 1099.
91. *Sur le mouvement des liquides.* D'Estocquois. *Compt. rend. LXVIII,* 1207.

Hyperbel.

92. *Construire une hyperbole connaissant une asymptote deux tangentes et un point.* Willière. *N. ann. math. XXVII,* 548.
93. *Trouver la courbe telle que si l'on mène une tangente quelconque terminée aux axes, cette tangente soit partagée en deux parties égales par le point de contact.* Morel. *N. ann. math. XXVIII,* 272.
94. *Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse et à toutes les hyperboles équilatères qui ont même centre que l'ellipse et qui passent par ses foyers.* Pellet. *N. ann. math. XXVIII,* 466.
95. *Lieu du sommet des hyperboles équilatères qui ont le même centre et sont tangentes à tous les points d'une courbe plane donnée.* Schlegel. *N. ann. math. XXVIII,* 467.

Vergl. Ellipse 41, 49.

I.

Imaginäres.

96. *De l'interprétation des imaginaires en physique mathématique.* De Chancourtois. *Compt. rend. LXVIII*, 127.
97. *Calcul des équipollences.* Hoüel. *N. ann. math. XXVIII*, 289, 337.
98. *Sur un paradoxe algébrique.* Catalan. *N. ann. math. XXVIII*, 456.
Vergl. Functionen 60, 61.

Integrirender Factor.

Vergl. Differentialgleichungen 32, 33.

Interpolation.

99. *Sur l'interpolation.* Tisserand. *Compt. rend. LXVIII*, 1101.

Invarianten.

100. *Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales.* De Campaux. *N. ann. math. XXVIII*, 395.
101. Neuer und directer Beweis eines Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Aronhold. Crelle LXIX, 185.
102. Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. Gordan. Crelle LXIX, 323.

K.

Kegelschnitte.

103. Den Kegelschnitt von gegebener Charakteristik und gegebenem Brennpunkte zu bestimmen, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade in einem in derselben gegebenen Punkte berührt. Grunert. Grun. Archiv XLIX, 136.
104. Ueber Kegelschnitte. Bauer. Crelle LXIX, 293.
105. *Former l'équation des coniques qui passent par deux points imaginaires conjugués.* Guret. *N. ann. math. XXVIII*, 515.
106 *Coniques qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui passent par deux points dont un réel, l'autre imaginaire.* Burtaire. *N. ann. math. XXVIII*, 424.
107. Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 158. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 243.]
108. *Polygone inscrit dans une conique.* Fouret. *N. ann. math. XXVIII*, 544. — Willière *ibid.* 547.
109. *Lieu décrit à l'aide de deux coniques passant par les quatre sommets d'un rectangle et tangentes à une droite.* Saltel. *N. ann. math. XXVIII*, 438.
110. *Problème sur deux coniques se déplaçant de manière que leur quatre axes restent tangents à quatre cercles.* Hioux. *N. ann. math. XXVIII*, 178.
111. *Deux coniques tangentes une droite au même point.* Farineau. *N. ann. math. XXVIII*, 460.
Vergl. Brennpunkt 21. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 117. Parabel.

Kettenbrüche.

112. Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird. C. G. J. Jacobi. Crelle LXIX, 29.
Vergl. Quadratwurzel.

Kreis.

113. Angenäherte Construction von π. Grassmann. Grun. Archiv XLIX, 3.
114. *Mener entre deux droites une tangente à un cercle de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.* Morel. *N. ann. math. XXVIII*, 232.

115. *Théorèmes sur le quadrilatère inscriptible.* Figa Bartolomeo. *N. ann. math. XXVIII*, 174. — Morel *ibid.* 317.
116. *Sur les tangentes communes à deux cercles.* Dupain. *N. ann. math. XXVIII*, 458.

Krümmung.

117. Ueber die Krümmungsradien der Kegelschnitte. Ligowski. Grun. Archiv XLIX, 367.
118. *Lois de la courbure dans certaines transformations de courbes planes.* Abel Transon. *N. ann. math. XXVIII*, 114.
119. *Sur les courbures des surfaces* Roger. *Compt. rend. LXVIII*, 366.
120. *Courbure en un point multiple d'une courbe ou d'une surface.* Painvin. *Compt. rend. LXVIII*, 131.
121. *De la courbure inclinée et de son application à la théorie des surfaces.* Aoust. *Compt. rend. LXVIII*, 528.
122. *Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche.* Painvin. *Compt. rend. LXVIII*, 796.
123. *Lieu des centres de courbure principaux correspondants aux points d'une surface gauche qui sont situés sur une génératrice.* Brocard. *N. ann. math. XXVIII*, 463.
124. *Conoides droits tels que les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires.* Pellet. *N. ann. math. XXVIII*, 372. — Geoffroy *ibid.* 450.

M.

Maxima und Minima.

125. Ueber eine Aufgabe aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Grunert. Grun. Archiv XLIX, 68.
Vergl. Variationsrechnung.

Mechanik.

126. Ueber astatische Systeme von Punkten. Grunert. Grun. Archiv XLIX, 369.
127. *Note concernant la mécanique des atomes.* Lucas. *Compt. rend. LXVIII*, 1313.
128. Die Beschleunigung eines bewegten Punktes zerlegt nach dem Radius vector und senkrecht zu demselben. Ligowski. Grun. Archiv XLIX, 238.
129. *Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable.* Radau. *Compt. rend. LXVIII*, 145.
130. Betrachtungen über die Flächensätze. Radau. Astr. Nachr. LXXIII, 337.
131. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer rotirenden Geraden. Am Ende. Grun. Archiv XLIX, 121.
132. *Sur le mouvement d'une sphère glissant ou roulant sur un plan horizontal.* Resal. *Compt. rend. LXVIII*, 1158.
133. Ueber eine Construction, durch welche man sich die Bewegungszustände einer Reihe von Punkten bei interferirender longitudinaler Wellenbewegung veranschaulichen kann. Matthes. Grun. Archiv XLIX, 486.
Vergl. Astronomie 14. Elasticität. Electrodynamik. Hydrodynamik. Optik. Pendel. Potential. Schwerpunkt. Wärmetheorie.

Methode der kleinsten Quadrate.

134. Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Lüroth. Astr. Nachr. LXXIII, 187.

O.

Oberflächen.

135. *Sur les équations fondamentales du problème de la déformation des surfaces.* Aoust. *Compt. rend. LXVIII*, 1095.
136. *Sur une méthode de transformation des surfaces.* Habich. *N. ann. math. XXVIII*, 253.
137. *Surface développable circonscrite à une surface de vis.* Wickersheime. *N. ann. math. XXVIII*, 134.
138. *Sur la représentation sphérique des surfaces.* Darboux. *Compt rend. LXVIII*, 253.
139. Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades. Geiser. Crelle LXIX, 197.

140. Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. Clebsch. Crelle LXIX, 142.
Vergl. Cartographie 24. Determinanten in geometrischer Anwendung 31. Krümmung 119, 120, 121, 123, 124.

Oberflächen zweiter Ordnung.

141. *Axes des surfaces du second degré obtenus par une sphère concentrique. Housel. N. ann. math. XXVIII,* 280.
142. *Théorème sur deux surfaces du second degré. Barbier. N. ann. math. XXVIII,* 38.
143. *Sur certains plans ayant un rapport anharmonique constant. Fouret. N. ann. math. XXVIII,* 86. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 279.]
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 30. Ellipsoid.

Operationscalcül.

144. *Sur une formule de Leibnitz. Tardy. N. ann. math. XXVIII,* 69.

Optik.

145. Die Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 1.

P.

Parabel.

146. *Paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle rectangle isoscèle. N. ann. math. XXVIII,* 379. — *Hilaire ibid.* 381.
147. *Problème sur deux paraboles tournant de manière que leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence. Montcoq. N. ann. math. XXVIII,* 32.
148. *Nouvelle parabole engendrée par la développée d'une parabole. Millasseau. N. ann. math. XXVIII,* 323.

Partialbrüche.

149. *Sur la décomposition des fractions rationelles. De Saint-Germain. N. ann. math. XXVIII,* 369.

Pendel.

150. *Sur le pendule à oscillations elliptiques. Resal. Compt. rend. LXVIII,* 638. — *Tissot ibid.* 715.
151. *Sur le pendule conique. Combescure. N. ann. math. XXVIII,* 388.
152. Der Pendel als geodätisches Instrument. Unferdinger. Grun. Archiv XLIX, 309.
153. Elementarer Beweis des vollständigen Ausdrucks für die Dauer der Pendelschwingungen. Matthes. Grun. Archiv XLIX, 358.

Perspective.

154. *Points correspondans dans un certain sens sur deux plans dont un contient la perspective d'une figure tracée sur l'autre. Cahen. N. ann. math. XXVIII,* 426.
155. *Chercher le côté du triangle équilatéral dont un triangle quelconque donné est la projection. Jasseron. N. ann. math. XXVIII,* 312. — *Le Besgue ibid.* 555.
Vergl. Homographie.

Planimetrie.

156. Zur Theorie der geraden Linien. v. Pfeil. Grun. Archiv XLIX, 178.
157. Bildung rationaler Dreiecke. Grassmann. Grun. Archiv XLIX, 1.
158. Die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke des vollständigen Vierseits liegen in gerader Linie. Bermann. Grun. Archiv XLIX, 366.
159. *Construire un triangle connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés. Kiepert. N. ann. math. XXVIII,* 40.
160. *Théorème sur des triangles et les circonférences circonscrites. Retsin. N. ann. math. XXVIII,* 530.
161. Ueber das Sehnenviereck. Noeggerath. Grun. Archiv XLIX, 118.

Potential.

162. Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids. Grube. Crelle LXIX, 359.
163. Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders. Mertens. Crelle LXIX, 286.

164. Ableitung des Potentiales bewegter elektrischer Massen aus dem Potentiale für den Ruhezustand. **Loschmidt.** Zeitschr. Math. Phys. XIV, 141.

Q.

Quadratische Formen.

165. *Sur la résultante de trois formes quadratiques ternaires.* *Radau.* *Compt. rend. LXVIII*, 327. *N. ann. math. XXVIII*, 358.
166. Die Zerfällung der Form $\left[(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)\ldots(\alpha^2_{n-1}+\beta^2_{n-1})\right]^m$ in die Summe zweier Quadrate. **Unferdinger.** Grun. Archiv XLIX, 116.

Quadratwurzel.

167. Ueber die Formen der Zahlen, deren Quadratwurzeln in Kettenbrüchen dargestellt, Perioden von einer gewissen Anzahl Stellen haben. **Seeling.** Grun. Archiv XLIX, 4.
Vergl. Approximation.

R.

Reihen.

168. *Sur un caractère de convergence des series.* *Doucet.* *N. ann. math. XXVIII*, 266.
169. Ueber Verschiedenheit von Reihensummen bei geänderter Ordnung der Glieder. **Schlömilch.** Zeitschr. Math. Phys. XIV, 250.
170. *Sur la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.* *Gilbert.* *N. ann. math. XXVIII*, 434.
171. $\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3}+\ldots$ *Chatelain.* *N. ann. math. XXVIII*, 533.
172. *Sur la série de Laplace.* *Darboux.* *Compt. rend. LXVIII*, 324.

S.

Schwerpunkt.

173. Ueber den Schwerpunkt der Doppelpyramide, des Pyramidalstumpfes und der schief abgeschnittenen Säule. **Most.** Grun. Archiv XLIX, 351.
174. Ueber eine allgemeine Methode, geometrisch den Schwerpunkt beliebiger Polygone und Polyeder zu bestimmen. **Most.** Grun. Archiv XLIX, 355.

Sphärik.

175. *Trouver le rayon d'une sphère solide.* *Lionnet.* *N. ann. math. XVIII*, 529.
176. Ueber einen Irrthum, der sich in mehreren Lehrbüchern der Trigonometrie findet. **Nell.** Grun. Archiv XLIX, 104.
177. Ueber eine zwei sphärische Ellipsen betreffende Aufgabe. **Enneper.** Zeitschr. Math. Phys. XIV, 147.

Spirale.

178. *Les centres de courbure d'une spirale d'Archimède, qui correspondent à des points situés sur un même rayon recteur appartiennent à une même ellipse.* *Brocard et Grassat.* *N. ann. math. XXVIII*, 328.
179. *Propriétés de la spirale équiangle prouvées géométriquement.* *Whitworth.* *N. ann. math. XXVIII*, 5.
180. Ueber die Spirale, bei welcher in jedem Punkte Krümmungshalbmesser und Radius vector gleich sind. **Schlömilch.** Zeitschr. Math. Phys. XIV, 162.

Stereometrie.

181. Ueber Polyeder. **Becker.** Zeitschr. Math. Phys. XIV, 65.

Sturm's Functionen.

Vergl. Gleichungen 78, 79.

Substitutionen.

182. Ueber die Auflösung der Gleichung $\alpha_1 x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots + \alpha_n x_n^{\lambda_n} = f$ u. C. G. J. **Jacobi.** Crelle LXIX, 1.
Vergl. Ultraelliptische Functionen 189.

T.

Trigonometrie.

183. *Quelques équations trigonométriques.* Aoust. *N. ann. math. XXVIII*, 374.
184. $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$. *Joffroy. N. ann. math. XXVIII*, 42.
185. *Propriétés du triangle rectangle.* *Dostor. N. ann. math. XXVIII*, 433.
186. *Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives.* *Fasbender.* Grun. Archiv XLIX, 115. — *Hackel ibid.* 348.
187. *Théorème sur les transversales. Netto. N. ann. math. XXVIII*, 518. — *Cohen ibid.* 520. — *Gérono ibid.* 522.

U.

Ultraelliptische Functionen.

188. *Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les 27 droites des surfaces du troisième ordre. C. Jordan. Compt. rend. LXVIII*, 865.
189. *Sur les équations de la géométrie. Jordan. Compt. rend. LXVIII*, 656.

V.

Variationsrechnung.

190. Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. A. Mayer. Crelle LXIX, 280.

W.

Wärmetheorie.

191. Entwurf einer Theorie der Gase. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 81.
192. *Sur le mouvement de la température dans le corps compris entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques. Mathieu. Compt. rend. LXVIII*, 590.

Z.

Zahlentheorie.

193. Ueber die einfachen Zahlensysteme. G. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 121.
194. *Sur les nombres premiers à* m *renfermées dans la formule* $ax+b$. *Morel. N. ann. math. XXVIII*, 238.
195. *Théorème sur les plus grands communs diviseurs de deux suites de nombres qui multipliés terme par terme donnent le même produit. André. N. ann. math. XXVIII*, 78.
196. Die Elferprobe und die Probe für die Modul 9, 13 und 101. Anton. Grun. Archiv XLIX, 241.
197. *Nombre des solutions entières et positives de l'équation* $x+y+z=N$. *Schlegel. N. ann. math. XXVIII*, 91.
198. *Nombre des solutions de l'équation* $x+y+z=n$. *Bignon. N. ann. math. XXVIII*, 415.
199. *Sur la partition des nombres. Catalan. N. ann. math. XXVIII*, 407.
200. *Sur quelques équations indéterminés. Le Besgue. N. ann. math. XXVIII*, 452.
201. Ueber das Pell'sche Problem und einige damit zusammenhängende Probleme aus der Zahlenlehre. Oettinger. Grun. Archiv XLIX, 193.
202. *Tout cube parfait augmenté de* 3, 4 *ou* 5 *unités d'un ordre quelconque n'est pas un cube parfait. Laisant. N. ann. math. XXVIII*, 315.
203. Lösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3+u^3=0$ in ganzen Zahlen. Grassmann. Grun Archiv XLIX, 49.
204. *Sur les racines des nombres. Barrachina. N. ann. math. XXVIII*, 265.
205. Sätze, die mit der Theorie der Potenzreste in Verbindung stehen. F. Meyer. Grun. Archiv XLIX, 168.
206. Ueber einige Eigenschaften der Trigonalzahlen. Stern. Crelle LXIX, 370.

Vergl. Factorenfolge 58. Planimetrie 157. Quadratische Formen. Quadratwurzel.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von B. Riemann. Für den Druck bearbeitet und herausgegeben von K. Hattendorff. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn.

Riemann hat als Lehrer der Göttinger Hochschule vorzüglich über folgende Gegenstände gelesen:

1. über Abel'sche Functionen;
2. über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Physik,

und

3. über die mathematische Theorie der Schwere, des Magnetismus und der Elektricität.*

Da Riemann selbst nur Weniges von seinen mathematischen Untersuchungen veröffentlichte, so traten bei dessen Lebzeiten schon ein Paar von seinen Schülern, Prym und Roch, nachdem ihnen die Erlaubniss des Meisters bereitwilligst ertheilt, mit Arbeiten des Lehrers über den ersten Gegenstand hervor. — Auch schon zwei Jahre vor Riemann's zu frühem Tode veröffentlichte Durège, gestützt auf Riemann's Arbeiten, „die Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse". Die beiden folgenden Jahre 1865 und 1866 haben uns noch Arbeiten über Abel'sche Functionen gebracht. Ich erinnere an Neumann's Arbeiten und an die von Clebsch und Gordan. Auch diese Arbeiten verdanken zum Theil fast ganz, zum Theil weniger den Untersuchungen Riemann's ihre Entstehung.

Da Riemann's Arbeiten auf dem ersten Gebiete geradezu epochemachend gewesen sind, so lässt sich wohl mit Recht erwarten, dass das mathematische Publikum begierig sein wird, Riemann's Vorlesungen über den zweiten und dritten Gegenstand kennen zu lernen. Herr Hattendorff, ein Schüler Riemann's, hat neuerdings, mit Erlaubniss der Frau Professor Riemann, die nachgelassenen Papiere des grossen Mathematikers benutzend, die Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen

* Wie ich höre, werden nächstens auch Riemann's Vorlesungen über diesen dritten Gegenstand von einem seiner Schüler veröffentlicht werden.

herausgegeben. Ich habe mir nur zur Aufgabe gesetzt, dem geehrten Leser dieser Zeitschrift kurz vorzuführen, was Herr Hattendorff in seinem Buche bietet, und ausserdem habe ich einerseits zu zeigen unternommen, ob derselbe wiedergiebt, was Riemann in den letzten Jahren seinen Zuhörern vorgeführt hat, und andererseits, wie der Herr Herausgeber sich dieser Aufgabe entledigt.

Zur Orientirung des geehrten Lesers halte ich es für nothwendig, den grössten Theil der Vorrede des Herrn Herausgebers wörtlich wiederzugeben. Die Vorrede lautet:

„Die Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, sind von Riemann während seiner akademischen Thätigkeit in Göttingen gehalten, und zwar im Winter 1854/55, im Winter 1860/61 und im Sommer 1862. Ueber den grössten Theil derselben findet sich neben einer Reihe kürzerer Notizen eine zusammenhängende Ausarbeitung von Riemann's eigener Hand vor. Dieselbe ist allerdings in der Form, in welcher sie vorliegt, nicht zur Veröffentlichung bestimmt gewesen. Man hat sie vielmehr als sorgfältige Vorbereitung für den mündlichen Vortrag anzusehen. Darnach würde man durchaus gegen Riemann's Absicht gehandelt haben, wenn man seine Ausarbeitung wörtlich hätte zum Abdruck bringen wollen. Doch ist dieselbe für die Herausgabe von grosser Wichtigkeit, insofern der Gedankengang und die Entwickelung der Formeln fast durchweg beibehalten werden konnte und musste. Dass ich bei der Redaction mir freie Hand gehalten habe, rechne ich mir nicht als besonderes Verdienst an, aber ich muss es erwähnen, weil in dieser Beziehung ich allein die Verantwortung zu tragen habe. Die Einleitung ist wörtlich abgedruckt. Sie trägt im Manuscripte die Bezeichnung: Michaelis 1854. Die zusammenhängende Bearbeitung enthält von dieser Einleitung nur den ersten Satz und fängt dann sofort mit den bestimmten Integralen (§ 2) an.

„Ausser Riemann's eigenem Manuscripte habe ich die in der Wintervorlesung 1860/61 von mir gemachten Aufzeichnungen und das darnach ausgearbeitete Heft zu Grunde gelegt. Diese enthalten, was Gedankengang und Formeln betrifft, dasselbe, wie das Manuscript; sie gehen aber an verschiedenen Stellen über den Inhalt des letzteren hinaus. So sind die §§ 36 bis 40 etwas ausführlicher behandelt, als in Riemann's Handschrift. Die §§ 71 bis 73, 79 bis 97, 101, 107 bis 113 sind in der Wintervorlesung 1860/61 neu hinzugekommen. Am Schlusse des Semesters hat Riemann auch noch die Bewegung eines Ringes in einer unendlichen Flüssigkeit, analog der Dirichlet'schen Aufgabe von der Kugel, behandelt. Er hat sich jedoch darauf beschränkt, in die partielle Differentialgleichung Ringcoordinaten einzuführen und für die Lösung den Weg im Grossen vorzuschreiben. Bei der Durchführung der Rechnung bleibt mir noch ein Punkt aufzuklären, und ich möchte deshalb das Problem für eine besondere Bearbeitung vorbehalten."

In der Einleitung sind einige geschichtliche Data über mathematische Physik gegeben und darauf wird auf den grossen Werth hingewiesen, den die partiellen Differentialgleichungen für diese Wissenschaft haben.

Es folgt alsdann der erste Abschnitt mit der Ueberschrift: „Bestimmte Integrale". Nachdem der Begriff der Stetigkeit einer Function festgestellt, wird erläutert, was ein einfaches, bestimmtes Integral ist. Dann werden die Eigenschaften des bestimmten Integrals besprochen und es wird festgesetzt, was man unter einem bestimmten Integrale zu verstehen hat, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen Werth der Variabeln, der zwischen den Grenzen des Integrals liegt, unendlich wird. Und nun wird zuletzt noch der Fall erledigt, wenn die Grenzen unendlich werden.

Dann folgt das bestimmte Doppelintegral, die Herleitung des Werthes des bestimmten Integrals aus dem des unbestimmten, und ferner die Benutzung des Doppelintegrals, um den Werth eines bestimmten, einfachen Integrals zu ermitteln, wenn man den des unbestimmten nicht finden kann. Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{x^{k-1} - x^{g-1}}{\log x}\, dx.$$

Dann werden noch einige andere bestimmte Integrale behandelt, die für die späteren Untersuchungen von Wichtigkeit sind. Dahin gehören:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta y}{y}\, dy \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \cos \gamma y\, dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx + k \cos bx}{k^2 + x^2}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos \beta x\, dx.$$

Nachdem der Werth des letzten Integrals

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

abgeleitet, sagt der Herausgeber: „Der Werth β unterliegt keiner Beschränkung; aber $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ist positiv zu nehmen.“ Ebenso schreibt der Bearbeiter früher, nachdem derselbe die Gleichung gefunden

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}:$$

„Hier ist die Quadratwurzel mit positivem Zeichen zu nehmen.“ Der Lehrer dagegen hat die Bemerkung gemacht:

„Die Gleichungen sind nur so lange giltig, als α eine **reelle, positive** Grösse ist.“

Dass die Quadratwurzel mit positivem Zeichen zu nehmen, ist schon früher, bei der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

aus welcher die vorige abgeleitet, ausdrücklich bemerkt worden.

Der zweite Abschnitt handelt von den unendlichen Reihen. Zuerst wird definirt, wann eine unendliche Reihe convergent genannt wird. Dann werden die convergenten Reihen in zwei Classen getheilt, in Reihen, die nur positive Glieder enthalten, und in solche, die aus positiven und negativen bestehen.

Darauf folgt die Untersuchung der Reihe

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots = f(x),$$

nachdem auf die Geschichte dieser Reihe aufmerksam gemacht ist. Zunächst wird die Summe der $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Glieder dieser obigen Reihe hergeleitet und darauf der Grenzwerth dieser Summe bestimmt für den Fall, dass $n = \infty$ und unter der Bedingung, dass

$$0 < x < \pi.$$

Der Herausgeber leitet hierauf aus der Sinus- die Cosinusreihe ab, indem derselbe in der obigen Gleichung statt $f(x)$

$$2 f(x) \sin x$$

schreibt. Dadurch geht der Werth von a_m über in

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2 f(\alpha)\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin m\alpha\,.\,d\alpha.$$

Der Bearbeiter führt nun eine Grösse durch die Gleichung ein

$$b_h = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\cos h\alpha\,.\,d\alpha$$

und gewinnt die Beziehung

$$a_m = b_{(m-1)} - b_{(m+1)},$$

Mit Hilfe dieser Beziehung wird alsdann die Gleichung gewonnen

$$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_m \cos m x + \ldots$$

Diese Cosinusreihe wird nun auf das Beispiel

$$f(x) = x$$

angewandt und es wird dabei erwähnt, dass diese Gleichung auch dann noch giltig ist, wenn

$$x = 0 \text{ und wenn } x = \pi.$$

Früher ist von dem Herrn Bearbeiter bemerkt:

„Vorläufig notiren wir also als Giltigkeitsintervall der (Cosinus-) Reihe

$$\pi > x > 0.\text{“}$$

Hier muss ich bemerken, dass Riemann den vom Herrn Herausgeber verfolgten Weg **nicht** eingeschlagen hat. Riemann nahm an, dass $f(x)$ eine periodische Function sei, deren Werth sich nicht ändere, wenn x sich um ganze Vielfache von 2π ändere. Riemann setzte alsdann die Form

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_m \sin m x + \ldots \\ c + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_m \cos m x + \ldots \end{array}\right\} = f(x),$$

die Geschichte dieser Reihe erwähnend, voraus. Nachdem die Werthe von a_m, b_m und c bestimmt waren, wurde darauf hingewiesen, dass unter gewissen Bedingungen eine Function sich allein durch eine Sinus- oder auch durch eine Cosinusreihe darstellen lasse.

Ich glaube, es wäre wohl am Platze gewesen, wenn Herr Hattendorff in der Vorrede auseinandergesetzt hätte, welcher durchaus triftige Grund ihn bewogen, von dem Gange, den der Lehrer beim Vortrage eingeschlagen, hier abzuweichen.

Bevor die Summation der Fourier'schen Reihe vorgenommen, wird nun bewiesen, dass

$$\text{46)} \qquad \int_0^b f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin \beta} \, d\beta = \frac{\pi}{2} f(0)$$

und

$$\text{47)} \qquad \int_c^b f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin \beta} \, d\beta = 0.$$

Auf einen Theil des Beweises, den Schluss desselben, muss ich den geehrten Leser besonders aufmerksam machen. Dieser Fall ist der, wenn $f(\beta)$ unendlich wird für einen Werth von β, der zwischen c und b liegt. Der Herausgeber sagt auf Seite 74 flgg. wörtlich:

„Endlich ist noch der Fall zu berücksichtigen, dass für einen Werth c_1 der Variabeln, der zwischen c und b liegt, der Functionswerth $f(c_1) = \infty$ wird, während er für beliebig nahe an c_1 gelegene Werthe von β endlich bleibt. Dann hat man zu untersuchen, ob das Integral

$$\int_{\beta}^{c_1} f(\beta)\, d\beta = F(\beta) \text{ für } c_1 \geqq \beta \geqq c$$

und das Integral

$$\int_{c_1}^{\beta} f(\beta)\, d\beta = F_1(\beta) \text{ für } b \geqq \beta \geqq c_1$$

einen bestimmten endlichen Werth besitzt, der für $\beta = c_1$ zu Null wird. Ist dies der Fall, so bleibt der Satz giltig, denn es ist

$$\int_{c}^{b} f(\beta)\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta = \int_{c}^{c_1-\delta} f(\beta)\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta + \int_{c_1-\delta}^{c_1} f(\beta)\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

$$+ \int_{c_1}^{c_1+\varepsilon} f(\beta)\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta + \int_{c_1+\varepsilon}^{b} f(\beta)\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta.$$

Auf das erste und letzte Integral der rechten Seite ist der Satz [Gleichung 47) d. R.] ohne Weiteres anwendbar, selbst wenn man die positiven Grössen δ und ε unendlich nahe an 0 bringt. Was das zweite Integral auf der rechten Seite betrifft, so ist zu beachten, dass $c_1 - \delta$ und c_1 beide zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Für Werthe von β, die zwischen $c_1 - \delta$ und c_1 gewählt werden, ist also der Quotient

$$\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}$$

durchaus endlich und stetig. Sein grösster Werth sei M, sein kleinster m. Wir können $c_1 - \delta$ und c_1 so nahe an einander nehmen, dass zwischen ihnen $f(\beta)$ keine Zeichenänderung erleidet. Folglich ist nach § 6 der Werth des Integrals

$$\int_{c_1-\delta}^{c_1} f(\beta)\,\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$

zwischen den Grenzwerthen

$$M\int_{c_1-\delta}^{c_1} f(\beta)\, d\beta \quad \text{und} \quad m\int_{c_1-\delta}^{c_1} f(\beta)\, d\beta$$

enthalten, d. h. zwischen

$$M.\, F(c_1 - \delta) \text{ und } m.\, F(c_1 - \delta).$$

„Lassen wir nun δ unendlich abnehmen und beachten, dass nach der **Voraussetzung**

$$\lim F(c_1 - \delta) = 0$$

ist, so sehen wir, dass auch

$$\lim \int_{c_1-\delta}^{c_1} f(\beta)\,\frac{\sin h\beta}{\sin \beta}\,d\beta = 0.$$

Durch ganz dieselben Schlüsse findet sich aber

$$\lim \int_{c_1}^{c_1+\varepsilon} f(\beta)\,\frac{\sin h\beta}{\sin \beta}\,d\beta = 0$$

und folglich ist auch in diesem Falle

$$\lim \int_{c}^{b} f(\beta)\,\frac{\sin h\beta}{\sin \beta}\,d\beta = 0.$$

„Dieselbe Betrachtung wiederholt sich, wenn eine Unstetigkeit der eben beschriebenen Art an einer endlichen Anzahl von Stellen vorhanden ist.

„Der Satz 47) gilt jetzt also unter folgenden Bedingungen: Es ist $0 < c < b \leqq \frac{\pi}{2}$. Zwischen den Grenzen c und b darf die Function nur an einer endlichen Anzahl von Stellen Maxima und Minima haben oder endliche Sprünge erleiden. Wird sie innerhalb der Grenzen an einzelnen Stellen unendlich, so darf dies nur in der Weise geschehen, dass das Integral

$$\int f(\beta)\,.\,d\beta$$

einen bestimmten **endlichen Werth** besitzt, wenn es von der Unstetigkeitsstelle aus einerseits bis zu voraufgehenden, andererseits bis zu nachfolgenden Werthen von β erstreckt wird.

„Genügt die Function $f(\beta)$ denselben Bedingungen zwischen den Grenzen 0 und b, so gilt der Satz 46). Denn wir nehmen dann 0 kleiner, als die Abscisse der zunächst bei 0 gelegenen Stelle, in welcher ein Maximum oder ein Minimum oder eine Unstetigkeit stattfindet. Zerlegen wir nun das Integral, das von 0 bis b erstreckt werden soll, in eins von 0 bis c und ein zweites von c bis b, so gilt von dem ersten der Satz 46) und von dem zweiten der Satz 47). Und daher ist auch in diesem Falle

$$\lim \int_{0}^{b} f(\beta)\,\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin \beta}\,.\,d\beta = \frac{\pi}{2}\,.\,f(0).$$

„Wenn die Function auch auf das Gebiet der negativen Abscissen ausgedehnt ist, so kann es sein, dass gerade für $\beta = 0$ ein Sprung stattfindet. Wir haben dann zu unterscheiden $f(+0)$ und $f(-0)$, d. h.

die erste Ordinate auf der positiven Seite und die erste Ordinate auf der negativen Seite. In der Gleichung 46) ist zu nehmen $f(+0)$."

Ich glaube, an dieser Stelle bedarf es keines Wortes von meiner Seite. Der folgende, von Riemann gegebene Beweis wird dem geehrten Leser genügen, um zu sehen, in welcher ausgezeichneten Weise der Schüler den Meister zu übertreffen weiss.

Riemann hat hierüber gesagt:

Es kann auch der Fall eintreten, dass $f(\beta) = \infty$ wird für irgend einen Werth von β, der zwischen den Integrationsgrenzen liegt. Es fragt sich, ob auch in diesem Falle die Gleichungen 46) und 47) noch Geltung haben. Die Antwort lautet: Ja, wenn innerhalb der Integrationsgrenzen

$$\int f(\beta)\, d\beta = F(\beta)$$

stets endlich und stetig bleibt. Wird $f(\beta)$ für $\beta = c_1$ unendlich, so ist auch noch

$$M \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} f(\beta)\, d\beta \gtrless \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin \beta}\, d\beta \lesseqgtr m \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} f(\beta)\, d\beta,$$

wenn M den grössten und m den kleinsten Werth bezeichnet, den $\frac{\sin h\beta}{\sin\beta}$ während des kleinen Intervalles von $c_1 - \varepsilon$ bis $c_1 + \varepsilon$ annehmen kann, vorausgesetzt, dass $f(\beta)$ während dieses Intervalles sein Zeichen nicht ändert. [Sollte indessen $f(c_1+0)$ ein anderes Zeichen haben, als $f(c_1-0)$, so kann man das Integral

$$\int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} \text{ zerlegen in } \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1} \text{ und } \int_{c_1}^{c_1+\varepsilon}$$

und auf jedes dieser beiden Integrale das obige Verfahren anwenden.] Aus dem Gesagten folgt, dass

$$M\,\{\,F(c_1+\varepsilon) - F(c_1-\varepsilon)\,\} > \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta$$
$$\lesseqgtr m\,\{\,F(c_1+\varepsilon) - F(c_1-\varepsilon)\,\}.$$

Mit abnehmendem ε nähern sich die beiden Grenzen, zwischen welchen der Werth des Integrals liegt, dem Werthe Null, mithin ist für ein unendlich kleines ε

$$\lim \int_{c_1-\varepsilon}^{c_1+\varepsilon} f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin\beta}\, d\beta = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichungen 46) und 47) auch dann noch giltig bleiben, wenn $f(\beta)$ zwischen den Grenzen des Integrals eine endliche Anzahl Male unendlich wird, vorausgesetzt, dass nur

$$\int f(\beta)\, d\beta = F(\beta)$$

an diesen Stellen stets endlich bleibt und keine Sprünge zeigt.

Es folgt nun, wie schon erwähnt, die Summation der Fourier'schen Reihe und die Erweiterung der Grenzen, innerhalb welcher diese Reihe noch giltig ist, ferner die Ausdehnung der Reihe und des Lehrsatzes auf Functionen von zwei und mehreren Variabeln.

Hierauf folgt nun der dritte Abschnitt mit der Ueberschrift: „Differentialgleichungen". Nachdem in der Einleitung auf den Unterschied zwischen den gewöhnlichen Differentialgleichungen und den partiellen hingewiesen, wird die weitere Eintheilung der Differentialgleichungen nach Graden und Ordnungen gegeben, und alsdann werden ein paar Methoden der Lösung besprochen, die auch bei den partiellen Differentialgleichungen zur Anwendung kommen. Dass Riemann an dieser Stelle weder eine vollständige Theorie der Differentialgleichungen, noch früher eine vollständige Lehre von den bestimmten Integralen und den unendlichen Reihen gegeben, wird der geehrte Leser in Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen nicht erwarten. Der bisher besprochene Theil von diesen Vorlesungen ist nur als Vorbereitung für das Nachfolgende anzusehen. Riemann sah sich genöthigt, solche vorbereitende Uebungen seiner „Lehre von den partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung" vorauszuschicken, da unter seinen Zuhörern immer mehrere waren, die sich erst wenig mit mathematischen Studien beschäftigt hatten. Ich habe es für nöthig gehalten, hier auf die Verhältnisse, unter denen Riemann seine Vorlesungen hielt, aufmerksam zu machen, um dadurch den von Riemann verfolgten Plan zu erklären. Der Herr Herausgeber scheint es für unnütz gehalten zu haben, auf diesen Punkt einzugehen, da ein hierauf bezüglicher Passus in der Vorrede nicht vorhanden ist. Ein paar Worte der Vorrede, die den ersten Theil des dritten Abschnittes betreffen, bitte ich nicht misszuverstehen. Diese Worte lauten:

> „Ausser Riemann's eigenem Manuscripte habe ich die in der Wintervorlesung 1860/61 von mir gemachten Aufzeichnungen und das darnach ausgearbeitete Heft zu Grunde gelegt. Diese enthalten, was Gedankengang und Formeln betrifft, dasselbe, wie das Manuscript; sie gehen aber an verschiedenen Stellen über den Inhalt des letzteren hinaus. So sind die §§ 36 bis 40 etwas ausführlicher behandelt, als in Riemann's Handschrift" etc.

Ich will hierzu mir die Bemerkung erlauben, dass Riemann 1862 noch über den Inhalt dieser §§ 36 bis 40 hinausgegangen und diesem noch die Methode der mechanischen Quadratur bei Differentialgleichungen hinzugefügt hat.

Die zweite Abtheilung des dritten Abschnittes bildet die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen. Nachdem darauf aufmerksam gemacht, dass die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von ganz besonderem Interesse, weil viele mathematisch-physikalische Untersuchungen auf solche Gleichungen führen, wird an der folgenden von 2 unabhängigen Variabeln

$$l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial t}+n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial x}+q\frac{\partial u}{\partial t}+r\,u=0$$

erläutert, dass es unendlich viele particuläre Lösungen dieser Gleichungen giebt. Es folgt nun hieraus, dass eine vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung nicht, wie die einer gewöhnlichen, aus einer Summe von Producten besteht, deren Anzahl gleich der Zahl ist, welche die Ordnung der Differentialgleichung angiebt, sondern dass bei den partiellen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung aus einer unendlich grossen Anzahl von Producten besteht, von welchem jedes einzelne Product aus einer particulären Lösung in eine willkürliche Function hervorgegangen ist. Zugleich wird darauf hingewiesen, dass es in der Regel gar keine Schwierigkeiten hat, particuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen aufzufinden, dass vielmehr, z. B. bei der Untersuchung physikalischer Probleme, die Schwierigkeit darin liegt, der Lösung eine solche Form zu geben, in der sie gewisse Nebenbedingungen erfüllt. — Schliesslich wird das einzuschlagende Verfahren an den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit gegebenen Nebenbedingungen erläutert.

Es folgt jetzt der vierte Abschnitt mit der Ueberschrift: „Bewegung der Wärme in festen Körpern.“ Riemann, Fourier's Untersuchungen folgend, sieht auch die Wärme als eine Flüssigkeit an, die den Körper durchströmt. — Nach einigen allgemeinen Erörterungen über die Temperatur fester Körper wird zunächst der einfache Fall behandelt, dass ein Körper von der YZ-Ebene aus in der Richtung der positiven X-Axe sich ins Unendliche ausdehnt und den halben unendlichen Raum erfüllt. Es wird ferner vorausgesetzt, dass eine Wärmeströmung nur in der Richtung der X-Axe vorhanden, und dass in einer Ebene, die parallel der YZ-Ebene ist, die Temperatur zu gleicher Zeit in allen Punkten dieselbe ist. Die partielle Differentialgleichung, welche in diesem Falle den Temperaturzustand des Körpers ausdrückt, nimmt die einfache Form an:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die Nebenbedingungen, denen in diesem Falle die Function u zu genügen hat, sind

$$u=f(x), \text{ wenn } t=0$$

und

$$u=\varphi(t), \text{ wenn } x=0.$$

Die Methode der Lösung besteht darin, dass man schreibt

$$u = u_1 + u_2.$$

Es wird nun u_1 so bestimmt, dass dieser Werth der Differentialgleichung genügt und ausserdem den Bedingungen

$$u_1 = f(x), \text{ wenn } t = 0$$

und

$$u_1 = 0 \text{ für } x = 0.$$

Ferner muss u_2 der Differentialgleichung genügen und die Bedingungen erfüllen:

$$u_2 = 0, \text{ wenn } t = 0,$$

und

$$u_2 = \varphi(t), \text{ wenn } x = 0.$$

Bevor der allgemeine Werth von u_2 aufgesucht, wird erst der specielle Fall behandelt, dass u_2, also auch u_1 in der YZ-Ebene constant ist.

Bei der Untersuchung des allgemeinen Falles schreibt der Herausgeber auf Seite 131:

„Nun lässt sich aber durch **Reihenentwickelung** zeigen, dass

$$e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \cdot t^{-\frac{3}{2}} = 0 \text{ für } t = 0.\text{“}$$

Der Herr Bearbeiter hätte wohlgethan, wenn derselbe den Beweis für seine Behauptung gegeben hätte.

Riemann hat gesagt: Je kleiner t wird, desto mehr nähert sich

$$log\left[e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \cdot t^{-\frac{3}{2}}\right] = -\frac{x^2}{4a^2t} - \frac{3}{2} \, log\, t$$

dem Werthe $-\infty$; folglich ist

$$e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \cdot t^{-\frac{3}{2}} = 0 \text{ für } t = 0.$$

Am Schlusse dieser Untersuchungen wird der Fall näher ins Auge gefasst, wenn $\varphi(t)$ eine periodische Function ist, und darauf werden die gewonnenen Resultate auf die Temperatur der Erde angewandt. Möglich ist diese Anwendung, wenn man dieselbe auf einen kleinen Theil der Erdoberfläche beschränkt und nur auf geringe Tiefen unter derselben ausdehnt, da man einen kleinen Theil der Erdoberfläche als eben ansehen kann und da der Durchmesser der Erde im Vergleich mit kleinen Tiefen als unendlich angesehen werden darf.

Der zweite Fall ist der, dass ein Körper von zwei parallelen unendlichen Ebenen begrenzt wird, von denen die eine, wie vorhin, die YZ-Ebene ist und die andere dieser ersteren parallel liegt, in der Entfernung c. Unter den früher erwähnten Voraussetzungen muss u folgende Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u = f(x), \text{ wenn } t = 0,$$

$$u = \varphi(t), \text{ wenn } x = 0,$$

$$u = \psi(t), \text{ wenn } x = c.$$

In analoger Weise, wie vorhin, wird geschrieben:

$$u = u_1 + u_2 + \text{ etc. etc.}$$

Darauf wird der Wärmezustand einer Kugel ins Auge gefasst und zunächst der specielle Fall untersucht, dass eine Kugel vom Radius c im luftleeren Raume oder in einem Gase erkalte, und dass die Temperatur nur von dem Radius r, der Entfernung des Theilchens vom Mittelpunkte und von der Zeit t abhängig sei. Es ergiebt sich unter diesen Bedingungen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial (r\,u)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 (r\,u)}{\partial x^2}.$$

Die Nebenbedingungen für u sind:

$$u = F(x), \text{ wenn } t = 0$$

und

$$u = \psi(t), \text{ wenn } r = c.$$

Diese Aufgabe stimmt offenbar im Wesentlichen mit der letzten überein, da auch für den Mittelpunkt der Kugel noch die dritte Bedingung hinzukommen muss. Am deutlichsten tritt aber die Verwandtschaft der beiden Fälle hervor, wenn man statt einer Vollkugel eine Hohlkugel in Untersuchung zieht.

Die §§ 71 bis 73, die der Herr Herausgeber seinem eigenen Hefte entlehnt hat, wie der Herr in der Vorrede sagt, enthalten die Untersuchung des Wärmezustandes einer Kugel für den Fall, dass die Temperatur von allen drei Coordinaten x, y und z oder von r, θ und φ abhängig ist, d. h. von der Entfernung des Theilchens vom Mittelpunkte, von dem Complemente der Breite und von der Länge des Ortes. In diesem Falle muss u folgender Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)}{\sin\theta\, \partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Als Nebenbedingungen sind angenommen: Die Temperatur in der Oberfläche der Kugel soll stets gleich Null sein und die Anfangstemperatur der Kugel eine gegebene Function von r, θ und φ, oder

$$u = F(r, \theta, \varphi) \text{ für } t = 0,$$
$$u = 0 \text{ für } r = c.$$

Der Herausgeber schreibt nun

$$u = V . X$$

und setzt voraus, dass V nur von t und r und X nur von θ und φ abhängig sei. Statt der obigen Differentialgleichung erhält derselbe nun die beiden

$$\text{I)} \qquad \frac{\partial \left(\sin\theta \frac{\partial X}{\partial \theta} \right)}{\sin\theta\, \partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} = \alpha X,$$

$$\text{II)} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \alpha V\right\}.$$

Herr Dr. Hattendorff sagt nun wörtlich auf Seite 175 flgg.:

„Um zu einer Lösung der partiellen Differentialgleichung I) zu gelangen, machen wir die Bemerkung, dass der reciproke Werth der Entfernung zweier Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1)

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

der partiellen Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Führen wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten r, θ, φ und resp. r_1, θ_1, φ_1 ein, so erhalten wir

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r_1 \cos\gamma + r_1^2}},$$

wenn zur Abkürzung geschrieben wird

$$\cos\theta \,.\, \cos\theta_1 + \sin\theta \,.\, \sin\theta_1 \,.\, \cos(\varphi - \varphi_1) = \cos\gamma.$$

Die partielle Differentialgleichung geht dann über in

$$\text{III)} \qquad \frac{\partial\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} = 0.$$

„Setzen wir nun voraus, dass $r > r_1$ sei, so lässt sich T nach negativen Potenzen von r entwickeln

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{(n)}\, r_1^{\,n}}{r^{n+1}}.$$

In dieser unendlichen Reihe sind $P_0, P_1 \ldots P_n \ldots$ Functionen von $\cos\gamma$, und es ist nicht schwer, einen Ausdruck für P_n zu finden. Es zeigt sich, dass P_n eine ganze Function n^{ten} Grades von $\cos\theta$, $\sin\theta \,.\, \cos\varphi$ und $\sin\theta \,.\, \sin\varphi$. Führt man statt der Potenzen von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ und statt der Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Cosinus und Sinus der Vielfachen von θ und resp. φ ein, so ergiebt sich leicht, dass sowohl von θ als von φ höchstens das n-fache vorkommt. Die Coefficienten der Entwickelung enthalten θ_1 und φ_1. Die Function P_n darf man hiernach als bekannt ansehen. Sie genügt einer partiellen Differentialgleichung, die sich leicht herstellen lässt. Man braucht nur in die Gleichung III) für T die unendliche Reihe einzuführen und für sich = 0 zu setzen, was mit derselben Potenz von r multiplicirt ist. Dadurch ergiebt sich

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial P_n}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

„Von dieser partiellen Differentialgleichung ist P_n eine particuläre Lösung. Daraus kann man die allgemeine Lösung herleiten, indem man mit einer willkürlichen Function von θ_1 und φ_1, sowie mit $d\theta_1$ und $d\varphi_1$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und 2π in Beziehung auf φ_1, 0 und π in Beziehung auf θ_1 integrirt. Die willkürliche Function wollen wir mit

$$\sin\theta_1 \,.\, f(\theta_1, \varphi_1)$$

bezeichnen. Dann ist also

$$X_{(n)} = \int_0^\pi \sin\theta_1 \, d\,\theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1)\, P_n \, d\,\varphi_1$$

die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\text{IV)} \qquad \frac{\partial\left(\sin\theta \dfrac{\partial X_n}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} + n\,(n+1)\,X_n = 0.$$

„Jede Function, welche dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, wird eine Kugelfunction n^{ten} Ranges genannt.“

Nun folgen ein paar geschichtliche Bemerkungen über Kugelfunctionen etc. Der Herausgeber sagt dann weiter:

„Um diese Betrachtung auf die partielle Differentialgleichung I) anwenden zu können, haben wir dort nur X_n statt X zu schreiben und die vorläufig unbestimmt gelassene Constante $\alpha = -n\,(n+1)$ zu setzen. n ist $= 0$ oder gleich einer beliebigen positiven ganzen Zahl.

Die partielle Differentialgleichung II) geht jetzt über in

$$\text{II*)} \qquad \frac{\partial V_n}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial V_n}{\partial r}\right)}{\partial r} - n\,(n+1)\,V_n\right\}.$$

Wir setzen dann

$$X_n \,.\, V_n = u_n$$

und gelangen zu dem Resultate, dass der partiellen Differentialgleichung I) die Function

$$n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Genüge leistet“ etc. etc.

Das, was der Herausgeber auf den letzten zwei Seiten gesagt hat, ist der Hauptsache nach Jedem, der sich die neueren Arbeiten über Kugelfunctionen einmal angesehen hat, bekannt. Wer sie nicht kennt, wird auch schwerlich das Obige vollständig verstehen. — Als Riemann am Schlusse des Jahres 1860 diese Vorlesungen hielt, denen Herr Hattendorff das Vorige entlehnt haben will, gab es nur in einzelnen Schriften zerstreute Aufsätze über Kugelfunctionen; die Arbeiten von Heine und von Sidler waren damals noch nicht erschienen. Herr Dr. Hattendorff, der künftige Professor des Aachener Polytechnikums, hat deshalb vielleicht geglaubt, es sei nothwendig, dass er hier seinen Lehrer und Meister verbessere. Mit Hilfe dessen, was er in den Büchern von Heine oder von Sidler gefunden, sucht derselbe einen Werth zu bestimmen, der als Function von θ und φ der Differentialgleichung I) genügt. Wie vollständig dem Herrn dieser Versuch gelungen, überlasse ich dem Urtheile des geehrten Lesers. Schliesslich, als es nun aber darauf ankommt, eine Function

$$F(r, \theta, \varphi)$$

nach Kugelfunctionen zu entwickeln, giebt der Herr Professor den kühnen Flug wieder auf, folgt seinem Lehrer und verweist auf die Arbeit von Dirichlet in Crelle's Journal Bd. 17.

Ich kann es durchaus nicht billigen, es zeugt meiner Ansicht nach von sehr wenig Pietät, dass der Herausgeber bedeutende Aenderungen vorgenommen, ohne mit einem Worte sein Verfahren anzudeuten, geschweige denn zu rechtfertigen.

Ich lasse nun nachfolgen, was Riemann im Winter 1860/61 über diesen Gegenstand vorgetragen hat. (Im Sommer 1862 ist von ihm dieser Fall nicht behandelt.)

Riemann zerlegte die ursprüngliche Differentialgleichung nicht, wie der Herausgeber, in zwei, sondern in folgende drei Gleichungen:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \alpha u = 0,$$

$$2)\qquad \frac{\partial\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\sin\theta\, \partial\theta} - \frac{\alpha u}{\sin^2\theta} = \beta u,$$

$$3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha^2}{r^2}\left[\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \beta u\right].$$

Bezeichnet man ein particuläres Integral der ersten Gleichung mit Φ, so kann man schreiben:

$$\Phi = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Da Φ sich nicht ändern darf, wenn φ sich um ganze Vielfache von 2π ändert, so muss m eine ganze Zahl sein, ja man darf hinzusetzen: eine positive, da man die Werthe von Φ, welche einem positiven und einem gleich grossen negativen m angehören, sich vereinigt denken kann in obiger Form oder in der Gleichung

$$\Phi_{(m)} = a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi.$$

Setzt man diesen Werth für u ein, so gewinnt man die Beziehung

$$\alpha = m^2.$$

Die Gleichung 2) geht nun über in

$$2\text{a)}\qquad \frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta}-\frac{m^2u}{\sin^2\theta}=\beta u.$$

Da das erste Glied dieser Gleichung sowohl positiv, als auch negativ sein kann, ohne dass u negativ zu sein braucht, so folgt, dass β negativ sein muss. Da ferner m alle Zahlenwerthe von 0 bis ∞ annehmen kann, so wird β die Form

$$-n(n+1)$$

annehmen müssen, und auch n wird alle Werthe von Null bis unendlich durchlaufen müssen, da sonst für ein unendlich grosses m das erste Glied unendlich werden müsste für einen beliebigen Werth von θ.

Die Gleichung 2a) erhält nun die Form

$$2\text{b)}\qquad \frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta}-\frac{m^2u}{\sin^2\theta}=-n(n+1)u$$

und die Gleichung 3) geht über in

$$3\text{a)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}-n(n+1)u\right\}.$$

Eine particuläre Lösung der Gleichung 2b) sei

$$P_{(m,n)},$$

dann wird

$$u=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}(a_{m,n}\cos m\varphi+b_{m,n}\sin m\varphi)\,.\,P_{(m,n)}$$

den beiden Gleichungen 1) und 2) genügen. — Ist die obige Doppelsumme

$$=\sum_{n=0}^{n=\infty}X_{(n)},$$

oder ist

$$\begin{aligned}X_{(n)}=&\,P_{(n,0)}\,.\,a_{(n,0)}\\&+P_{(n,1)}\left\{a_{(n,1)}\,.\,\cos\varphi+b_{(n,1)}\,.\,\sin\varphi\right\}\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&+P_{(n,n)}\left\{a_{(n,n)}\,.\,\cos n\varphi+b_{(n,n)}\,.\,\sin n\varphi\right\},\end{aligned}$$

so nennt man $X_{(n)}$ eine Kugelfunction n^{ten} Ranges von θ und φ. Der Werth von $X_{(n)}$ hat offenbar $\overline{2n+1}$ willkürliche Constante. Diese willkürlichen Constanten müssen nun so bestimmt werden, dass sie nicht allein der Gleichung

4) $$\frac{\partial X_{(n)}}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial X_{(n)}}{\partial r}\right)}{\partial r} - n(n+1)\,X_{(n)}\right\}$$

genügen, sondern dass auch die gegebenen Grenzbedingungen erfüllt werden. Gehen die Werthe von

$$P_{(n,m)}\,.\,a_{(n,m)} \quad \text{und} \quad P_{(n,m)}\,.\,b_{(n,m)}$$

für $t=0$ über in

$$g_{(n,m)} \quad \text{und} \quad h_{(n,m)},$$

so gewinnt man als Nebenbedingung die Gleichung

$$F(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{g_{(n,m)}\,.\,\cos m\varphi + h_{(n,m)}\,.\,\sin m\varphi\right\}.$$

Da nun Dirichlet in der früher genannten Abhandlung nachgewiesen, dass eine Function sich nur auf eine Weise nach Kugelfunctionen entwickeln lässt, so ist also, wenn

5) $$F(r,\theta,\varphi) = \sum Y_{(n)},$$

5a) $$Y_{(n)} = \sum_{m=0}^{m=n}\left\{g_{(n,m)}\,.\,\cos m\varphi + h_{(n,m)}\,.\,\sin m\varphi\right\}.$$

Es hat mithin $X_{(n)}$ nicht allein der Differentialgleichung 4) zu genügen, sondern dieser Werth muss für $t=0$ übergehen in den Werth $Y_{(n)}$ der Gleichung 5a). Da ferner die zweite Bedingung ist, dass $u=0$, wenn $r=c$, so muss auch $X_{(n)}$ verschwinden, wenn $r=c$ wird.

Um $X_{(n)}$ eine Form zu geben, die der Differentialgleichung 4) genügt, schrieb Riemann:

$$X_{(n)} = e^{-a^2\lambda^2{}_{(n)}t}\,.\,Z,$$

und setzte voraus, dass Z eine von t unabhängige Function sei. Dieser Werth wurde nun für $X_{(n)}$ substituirt und dadurch eine gewöhnliche Differentialgleichung für Z gewonnen. Diese Gleichung für Z wird erfüllt durch

6) $$Z = q_\mu\,.\,r^\mu + q_{\mu+1}\,.\,r^{\mu+1} + \ldots.$$

Mit Hilfe der Grenzbedingung $X_{(n)}=0$, oder auch $Z=0$, wenn $r=c$, erhält der Herr Herausgeber für die Coefficienten der Gleichung 6) den Werth

$$q_{(n,k)} = \frac{\int_0^c y_{(n)}\,r^2 f\left(\lambda_{(n,k)}, r\right)dr}{\int_0^c \left\{r f\left(\lambda_{(n,k)}, r\right)\right\}^2 dr},$$

während der Lehrer noch aus diesem den einfacheren hergeleitet:

$$q_{(n,k)} = \frac{2\,.\,\lambda_{(n,k)}}{c^2\left\{f'\left(\lambda_{(n,k)}\,.\,c\right)\right\}^2}\int_0^c Y_{(n)}\,f\left(\lambda_{(n,k)}, r\right) r^2\,dr.$$

Der Herr Herausgeber schliesst hiermit das Capitel „Bewegung der Wärme in festen Körpern" ab, während Riemann im Winter 1860/61 noch die Fälle behandelt hat, wenn die Temperatur in der Oberfläche nicht gleich Null, sondern einmal eine Function der Länge und Breite oder $=\psi(\theta, \varphi)$ und zweitens eine periodische Function der Zeit ist. Der Herr Professor Hattendorff hält es natürlich auch nicht der Mühe werth, sich wegen dieses Verfahrens zu rechtfertigen.

Riemann wandte zum Schlusse dieser Untersuchungen die gefundenen Resultate auf den Wärmezustand der Erde an, während der Herr Herausgeber in § 70 ein ähnliches Raisonnement der Untersuchung des Wärmezustandes einer Kugel vorangehen lässt. — Zunächst will ich dem geehrten Leser den § 70 des Herrn Professors Hattendorff vorführen und dann nachfolgen lassen, was ich im Winter 1860/61 während der Vorlesung notirt habe, damit der Leser ein klares Bild davon erhält, in welcher eigenthümlichen Weise der Herr Herausgeber wiedergiebt, was sein Lehrer gelehrt hat. Der § 70 lautet:

„Wir wollen nun allgemein die Temperatur der Erde betrachten. Die Erde hat zwei Wärmequellen, nämlich die Wärme der Sonne und die Wärme des Weltalls, welche ja auch ohne die Sonne durch die Fixsterne bedingt ist. Hiernach können wir die Ermittelung der Temperatur der Erde gleich in zwei Aufgaben zertheilen, indem wir ihre anfängliche Temperatur als Summe von zwei Zuständen denken und darauf einmal die Sonne wirken lassen und das andere Mal das Weltall. Dies Princip ist von uns oft angewandt; es ist eine blosse Folge davon, dass der ganze Wärmeaustausch nur von den Differenzen der Temperatur abhängt. Nehmen wir die Temperatur des Weltalls zum Nullpunkt, so kommen wir für den zweiten Theil unserer Aufgabe auf die Untersuchung der §§ 64 bis 69.

„Um die Einwirkung der Sonne für die gesammte Erdkugel in einem Problem zu behandeln, würden wir in den vorhergehenden Entwickelungen noch nicht ausreichende Hilfsmittel besitzen. Es müsste nämlich die Temperatur der Oberfläche als Function nicht nur der Zeit, sondern auch von Länge und Breite angesehen werden. Ziehen wir aber ein nicht zu ausgedehntes Gebiet der Oberfläche allein in Betracht, so können wir dafür die Temperatur vom Orte unabhängig nehmen und nur als periodische Function der Zeit ansehen. Dieser Fall ist dann nach Anleitung der §§ 53 und 54 zu behandeln, da der Radius der Erde in Vergleich zu den uns zugänglichen Tiefen sehr gross ist und das betreffende Oberflächenstück als eben angesehen werden darf.

„Wenn wir also für alle einzelnen Punkte der Oberfläche eine periodische Aenderung der Temperatur annehmen, aber mit derselben Zeitperiode, wie es ja auch das Jahr ist, so wird sich auch hier eine periodische Aenderung im Innern nur auf eine dünne Schicht erstrecken.

Gehen wir von der Oberfläche ab auf jeder Normalen in's Innere, so wird die periodische Aenderung bald verschwinden und die Wärme sich nur mit der Tiefe langsam ändern. Abgesehen von der Oberflächenschicht ist daher der Theil der Wärme im Innern, welcher von der Sonne herrührt, constant. Zu dieser Wirkung der Sonne müssen wir dann noch die Temperatur hinzufügen, welche sich aus der Temperatur 0 des Weltalls ergiebt, indem die Erde allmälig erkaltet. Wir beobachten nur die Summe von beiden Wirkungen. Dabei zeigt sich, dass in den uns zugänglichen Tiefen die Temperatur bei gleichen Tiefen fast constant ist. Es lässt sich also die von der veränderten Tiefe herrührende Aenderung der Gesammtwärme in ihrer Abhängigkeit von der Tiefe durch Beobachtung bestimmen. In den tieferen Schichten rührt aber von der Sonne eine Wärme her, die mit der Tiefe sich so gut wie gar nicht ändert. Diese fällt also bei der Herstellung der Temperaturdifferenz für zwei verschiedene Tiefen heraus. Wir können demnach freilich nicht die Temperatur u selbst finden, die vom Weltraume herrührt, wohl aber $\frac{\partial u}{\partial x}$, weil in diesem Differentialquotienten das constante Glied der Sonne sich aufhebt. Haben wir auf diese Weise $\frac{\partial u}{\partial x}$, zunächst nur für die tieferen Schichten, als Function von x bestimmt, so nehmen wir das darin ausgesprochene Gesetz auch für die Oberflächenschicht als giltig an und würden durch Integration nach x die Function u selbst erlangen, wenn wir ihren Werth für irgend ein x kennen. Es ist aber [nach § 69 I) oder auch § 64 3)] für $x=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=hu.$$

„Es kommt also nur noch auf den Coefficienten h an, der sich aus seinen Bestandtheilen bestimmen lässt. Damit haben wir dann u selbst, d. h. die Temperatur, welche stattfinden würde bei einer nur im Weltraume erkaltenden Erde, welche dem Einflusse der Sonne nicht ausgesetzt ist. Dann lässt sich auch der Werth von u nach Verlauf einer unendlich langen Zeit finden und es ergiebt sich hieraus das interessanteste Resultat von Fourier's Theorie. Aus der Temperaturzunahme, welche in der Tiefe constant (etwa 1° auf 100′) ist, hat Fourier berechnet, dass die Temperatur, welche aus dem Weltall folgt, auf der Oberfläche der Erde jetzt höchstens $\frac{1}{30}{}^\circ$ mehr betrage als künftig, wenn in grösseren Tiefen die Temperaturzunahme mit der Tiefe ganz verschwunden sein wird. Die Temperatur der grösseren Tiefe selbst können wir nicht finden, weil wir nicht wissen, in welchem Grade der Erkaltung sich die Erde befindet. Poisson berechnete die innerste Temperatur einmal bei der Annahme, dass die Erde schon im äussersten Stadium des Erkaltungsprocesses sich befinde. Er fand eine ungeheure Temperatur für den Mittelpunkt der Erde. Doch berechtigt uns Nichts zu dieser Annahme, und zur Berechnung des Erkaltungsgrades wären durch sehr lange Zeiträume getrennte Beobachtungen nöthig. Für die Erdoberfläche ist aber der Process der Erkaltung so gut wie vollendet. Uebrigens hat die Wärmetheorie weniger physikalische Aufschlüsse über die Verbreitung der Wärme gegeben, als dass sie für die Rechnung wichtige Resultate geliefert."

Ich kann nicht umhin, hier dem geehrten Leser zu gestehen, dass ich nie grösseren Nonsens und grössere Widersprüche im schönsten Deutsch vereint gefunden habe in einem wissenschaftlichen Werke. Der ganze § 70 eignet sich meiner Ansicht nach ausgezeichnet für eine mathematische Bierzeitung. Wie werden die Herren Zuhörer des Herrn Herausgebers entzückt gewesen sein ob der hohen Weisheit ihres Herrn Docenten!*

Riemann hat über diesen Gegenstand gesagt:

„Man kann drei Ursachen unterscheiden, von denen die Temperatur der Erde herrührt:

1. die innere Erdwärme (ursprüngliche Wärme der Erde);
2. die Wärmeeinwirkung der Sonne

und

3. die Einwirkung des übrigen Weltalls.

Man kann daher u, die Temperatur der Erde betrachten als eine Summe von drei Functionen

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

wenn u_1 die Temperatur bezeichnet, die durch die Einwirkung des Weltalls allein in der Erde entstehen würde; ferner wenn u_2 die Temperatur be zeichnet, die die Erde allein durch die Sonnenwärme annehmen würde, und wenn u_3 die Temperatur bezeichnet, die die Erde haben würde, wenn weder die Sonne, noch das übrige Weltall vorhanden wären. — Nehmen wir die Temperatur des Weltalls zum Nullpunkt unserer Scala an, so ist

$$u = u_2 + u_3.$$

Die Temperatur u_2 ist periodisch nach der Zeit, und zwar giebt es hier eine jährliche und eine tägliche Periode (in der Nähe des Aequators eine tägliche und eine halbjährliche). Da durch Versuche festgestellt ist, dass die periodischen Temperaturschwankungen in der Erde nur bis zu einer Tiefe von ungefähr 50′ dringen, so muss u_2 in grösserer Tiefe constant sein. Die Erfahrung zeigt ferner, dass ungefähr mit 116′ Tiefe die Temperatur

---

* Der Herr Professor Hattendorff hat früher als Privatdocent in Göttingen über diesen Gegenstand gelesen.

der Erde um 1° C. zunimmt. Es lässt sich daher der Werth $\frac{\partial u_3}{\partial r}$ annähernd bestimmen. Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{\partial u_3}{\partial r}.$$

Da aber u_2, wie vorhin gesagt, in Tiefen über 50′ constant, so ist dort

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u_3}{\partial r}=-\frac{0{,}01}{116}.$$

Annähernd ist mithin auch noch in der Nähe der Erdoberfläche

$$\frac{\partial u_3}{\partial r}=-\frac{1}{11600}.$$

Nach früheren Untersuchungen (§ 63 des Herausgebers) ist

$$k\frac{\partial u_3}{\partial r}+Hu_3=0,$$

wenn k den inneren Leitungscoefficienten und H den äusseren Leitungscoefficienten einer Kugel bezeichnet, die Wärme ausströmt. Hieraus folgt, dass

$$u_3=\frac{k}{H}\cdot\frac{1}{11600}.$$

Setzt man für k den grössten Werth und für H den kleinsten, den die Versuche über die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde ergeben haben, so findet man mit Fourier, da k ungefähr $=4H$,

$$u_3=\frac{1}{30}{}^0\,\mathrm{C}.$$

Es ist also heute an der Erdoberfläche die Temperatur, welche von der eigenen Wärme der Erde herrührt, höchstens $\frac{1}{30}$° C. Zu einer Zeit, wo diese Temperatur z. B. 4° betrug, musste die Temperatur mit der Tiefe mindestens 120 Mal schneller wachsen als jetzt; mithin musste die Temperatur mit je einem Fuss Tiefe um je einen Grad zunehmen. Diese Thatsache scheint von Geologen nicht genug beachtet zu werden.

Die experimentellen Untersuchungen von Bischoff in Bonn stimmen in ihren Resultaten sehr gut mit den mathematischen überein.“

Ich bin fest überzeugt und mit mir gewiss der geehrte Leser, besonders aber Riemann's Schüler, dass, wenn Riemann die von Herrn Dr. Hattendorff besorgte Ausgabe seiner Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen sähe, er wenigstens den §70 dieser Ausgabe nicht als sein geistiges Eigenthum wieder erkennen würde. Was der Herausgeber ausspricht, ist zum Theil gerade das Gegentheil von Dem, was Riemann in der Vorlesung gesagt hat. Ich will nur noch einmal an die letzten paar Reihen erinnern. Die geologischen Studien des Herrn Professors scheinen ihn zu Ansichten geführt zu haben, die gewiss verdienten, allgemein bekannt zu werden.

Der fünfte Abschnitt enthält die Schwingungen elastischer Körper. Die erste Abtheilung: „Schwingungen einer gespannten Saite", umfasst die Untersuchungen von d'Alembert und von Dan. Bernoulli. Zwei Punkte will ich nur berühren. Auf Seite 186 schreibt der Herausgeber:

„Es wird also bei einer Verlängerung um $l'-l$ die Spannungszunahme

$$P'-P=q\,.\,\frac{l'-l}{l}$$

sein, worin q einen durch Versuche noch näher zu bestimmenden Factor bezeichnet."

Würde es nicht einfacher und verständlicher gewesen sein, zu sagen: q ist der Elasticitätsmodul der Saite?

Auf der folgenden Seite sind die Differentialgleichungen für die Transversal- und Longitudinalschwingungen einer Saite aufgestellt; aber weder hier, noch später hält es der Herr Bearbeiter der Mühe werth, zu sagen: die Longitudinalschwingungen hängen von dem Elasticitätsmodul der Saite, die Transversalschwingungen dagegen von der Spannung derselben ab etc. etc. Wozu wendet der Herr Professor Mathematik zur Untersuchung physikalischer Probleme an, wenn derselbe nicht zu physikalischen Resultaten gelangt? — Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dass Riemann auf jede physikalische Wahrheit, worauf die mathematischen Formeln deuteten, sorgfältig aufmerksam machte.

Die zweite Abtheilung des fünften Abschnittes trägt die Ueberschrift: „Schwingungen elastischer fester Körper." Der ganze fünfte Abschnitt hat die Ueberschrift:

„Schwingungen elastischer Körper".

Ob die Saiten, die von dem Herrn Herausgeber in eine besondere Abtheilung neben den elastischen **festen** Körpern gebracht werden, von diesem Herrn zu den luftförmigen oder den tropfbarflüssigen, elastischen Körpern gezählt werden, darüber lässt uns der Herr Profesor leider in Zweifel.

Zunächst wird auf die Arbeiten von Sophie Germain hingewiesen und darauf wird Kirchhoff's Aufsatz im 40. Bande von Crelle's Journal erwähnt. Dann werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt für das Innere und für die Oberfläche eines Körpers, ferner mit Hilfe des d'Alembert'schen Princips die Gleichungen für die Bewegung. Darauf werden die elastischen Kräfte selbst einer Untersuchung unterzogen. Der Begriff des Potentials wird eingeführt und die mechanische Arbeit der elastischen Kräfte bei einer unendlich kleinen Verschiebung bestimmt. Für die elementare Arbeit der inneren elastischen Kräfte wird folgende Bezeichnung gewählt:

$$-\delta\int\int\int\Phi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz.$$

Alsdann wird gezeigt, dass die Function Φ die Grössen u, v, w, welche die

Verschiebung eines Punktes (x, y, z) ausdrücken, nicht enthalten kann, sondern eine Function ist von folgenden Grössen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X_{(x)}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = Y_{(z)} = Z_{(y)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = Y_{(y)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = Z_{(x)} = X_{(z)},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = Z_{(z)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = X_{(y)} = Y_{(x)}.$$

Endlich wird noch nachgewiesen, dass die Function Φ sich durch eine Summe von Quadraten, die die obigen Grössen enthalten, ausdrücken lasse. Der Herr Professor sagt nun auf Seite 218 über die Function Φ wörtlich:

> „Die **Erfahrung** hat gezeigt, dass die Constanten in der Function Φ stets solche Werthe haben, dass die Function wesentlich positiv ist.“

Auf welchem Wege der Herr Bearbeiter zu dieser „**Erfahrung**“ über die Function Φ gelangt ist, darüber schweigt er leider.

Mit Hilfe des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten oder nach dem Principe des Lagrange ist

$$\delta(\Omega + \Theta) = 0,$$

wenn

$$\Omega = -\int\int\int \Phi \, dx \, dy \, dz$$

das Potential der inneren elastischen Kräfte bezeichnet und wenn Θ das Potential der äusseren Kräfte ausdrückt.

Aus der obigen Gleichung folgt, da die Variationen von x, y und z unabhängig von einander sind, dass für das Gleichgewicht

$$\varrho X + \frac{\partial X_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial X_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial X_{(z)}}{\partial z} = 0,$$
$$\varrho Y + \frac{\partial Y_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{(z)}}{\partial z} = 0,$$
$$\varrho Z + \frac{\partial Z_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial Z_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial Z_{(z)}}{\partial z} = 0,$$
$$\Xi + \alpha X_{(x)} + \beta X_{(y)} + \gamma X_{(z)} = 0,$$
$$H + \alpha Y_{(x)} + \beta Y_{(y)} + \gamma Y_{(z)} = 0,$$
$$Z + \alpha Z_{(x)} + \beta Z_{(y)} + \gamma Z_{(z)} = 0.$$

Der Herausgeber führt hier sowohl, wie auch an einer andern Stelle nur diese sechs Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts auf, ohne die folgenden drei zu erwähnen:

$$X_{(y)} = Y_{(x)}, \quad Y_{(z)} = Z_{(y)}, \quad Z_{(x)} = X_{(z)}.$$

Da die elastischen Kräfte nicht die Grössen u, v, w enthalten, sondern, wie schon erwähnt, Functionen sind von

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

so kann man den Werthen von u, v und w, welche den obigen neun Gleichungen genügen, noch Werthe hinzufügen, welche folgende Form haben:

1) $$a = a_0 + cy - bz,$$
2) $$v = b_0 + az - cx,$$
3) $$w = c_0 + bx - ay.$$

Darauf werden die speciellen Fälle besprochen, wenn $\Theta = 0$ und wenn $\Phi = 0$. Der dritte Fall ist, wenn $\Theta = A$ ist. — Da nach einem Satze der Variationsrechnung

$$\delta(\Omega + \Theta) = 0$$

mit der Bedingung $\Theta = A$ erfüllt wird, wenn

$$\delta(\Omega + \mu\Theta) = 0,$$

so müssen für diesen Fall die ersten sechs Gleichungen folgende Form annehmen:

$$\frac{\partial X_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial X_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial X_{(z)}}{\partial z} + \mu\varrho X = 0,$$
$$\frac{\partial Y_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{(z)}}{\partial z} + \mu\varrho Y = 0,$$
$$\frac{\partial Z_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial Z_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial Z_{(z)}}{\partial z} + \mu\varrho Z = 0,$$
$$\alpha X_{(x)} + \beta X_{(y)} + \gamma X_{(z)} + \mu \Xi = 0,$$
$$\alpha Y_{(x)} + \beta Y_{(y)} + \gamma Y_{(z)} + \mu H = 0,$$
$$\alpha Z_{(x)} + \beta Z_{(y)} + \gamma Z_{(z)} + \mu Z = 0.$$

Die übrigen drei Gleichungen (die der Herausgeber wieder nicht berührt) bleiben dieselben. μ bezeichnet eine Grösse, die von A abhängig ist. Genügen die Werthe u_1, v_1, w_1 den früheren Gleichungen, so werden die Werthe

$$\frac{u_1}{\mu},\quad \frac{v_1}{\mu},\quad \frac{w_1}{\mu}$$

diese befriedigen. — Schliesslich wird dann noch gezeigt, dass, wenn die Werthe

$$u_1,\quad v_1,\quad w_1$$

den Gleichungen für das Gleichgewicht eines Körpers genügen, dass es dann nicht auch noch eine andere Reihe von Werthen

$$u_2,\quad v_2,\quad w_2$$

geben kann, wenn nicht

$$u_2 - u_1 = a_0 + cy - bz,\quad v_2 - v_1 = b_0 + az - cx,\quad w_2 - w_1 = c_0 + bx - ay.$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wird nun der Fall untersucht, dass ein Körper überall g l e i c h e Constitution besitzt, oder wie der Herr Herausgeber verbessert hat, „d a s s e i n K ö r p e r i n B e t r e f f d e r

Elasticität eine nach **allen Richtungen symmetrische** Constitution besitzt."

Mit Hilfe der Lamé'schen Transformationen nimmt nun Φ folgende Form an:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu\,(X^2_{(x)} + Y^2_{(y)} + Z^2_{(z)}) + \tfrac{1}{2}\mu\,(Y^2_{(z)} + Z^2_{(x)} + X^2_{(y)}).$$

Die Componenten der elastischen Kräfte werden jetzt

$$X_{(x)} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$Y_{(y)} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Z_{(z)} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die drei früher verlorenen Gleichungen zeigen sich bei dem Herausgeber nun wieder in folgender Form:

$$Y_{(z)} = Z_{(y)} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$Z_{(x)} - X_{(z)} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$X_{(y)} = Y_{(x)} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

θ bezeichnet in diesen Gleichungen die Aenderung der Volumeneinheit.

Mit Hilfe dieser Werthe vereinfachen sich nun die Gleichungen, welche den Gleichgewichtszustand ausdrücken, und die, welche die Bewegung eines Körpers in seinen einzelnen Theilen bestimmen, bedeutend.

Das erste Beispiel, worauf nun diese Resultate angewandt werden, ist:

„Auf die Oberfläche eines Körpers von beliebiger Gestalt, der von keinen beschleunigenden Kräften getrieben wird, soll eine allenthalben gleiche, gegen die Oberfläche gerichtete Druckkraft einwirken."

Das zweite Beispiel bildet die Untersuchung eines Cylinders, dessen Basis von Zugkräften angegriffen wird.

Das dritte Beispiel für die Untersuchung bildet auch ein Cylinder, dessen Mantel aber von Zugkräften ergriffen wird.

Ein viertes Beispiel bildet die Untersuchung eines Cylinders, der auf Torsion in Anspruch genommen wird.

Dann folgt die Untersuchung der Schwingungen einer gespannten Membran von constanter Dicke, und zwar werden die beiden Fälle untersucht, wenn die Membran ein Rechteck ist und wenn sie einen Kreis bildet.

Es folgt nun der letzte, der sechste Abschnitt: „Bewegung der Flüssigkeiten". Es werden zunächst die allgemeinen Bewegungsgleichungen für compressible Flüssigkeiten aufgestellt. Diese sind:

$$1)\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},$$

2) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},$$

3) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Zu diesen kommt dann noch hinzu:

4) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0$$

und

5) $$p = \Phi(\varrho).$$

Ist die Flüssigkeit aber incompressibel, so ist

5a) $$\varrho = const.$$

Der Herr Bearbeiter sagt nun wörtlich auf Seite 268:

„Man kann aber für incompressible Flüssigkeiten die Gleichung 5a) mit 4) verbinden. Es folgt nämlich aus der Gleichung 5a) sofort, dass das **totale Differential** von ϱ gleich Null sein muss, d. h.:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0.$$

Führt man in 4) die Differentiationen aus, so erhält man

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

und dies mit der vorigen Differentialgleichung verbunden, giebt

4a) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.“$$

Hier beweist der Herr Professor wenigstens das Eine sehr deutlich, dass derselbe nicht einmal **die ersten Elemente der Differentialrechnung** anzuwenden versteht. Mehr hinzuzufügen halte ich für überflüssig.

Es schreibt der Herr Bearbeiter dann weiter:

„§ 101.

„Die partiellen Differentialgleichungen 1), 2), 3) des vorigen Paragraphen lassen sich zu einer einzigen Gleichung zusammenziehen, wenn die Componenten der äusseren Kräfte X, Y, Z die nach den Coordinaten genommenen Derivirten einer Function V des Ortes sind, d. h. wenn die Gleichungen gelten:

a) $$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

„Dies trifft bei den in der Natur vorkommenden Kräften immer(?) zu und daher ist es wichtig, gerade diesen Fall besonders zu behandeln

„Wir setzen zur Abkürzung:

$$\text{b)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=P,\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Q,\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=R. \end{aligned}$$

„Multipliciren wir die Gleichungen 1), 2), 3) des vorigen Paragraphen der Reihe nach mit dx, dy, dz und addiren, so ergiebt sich für compressible Flüssigkeiten:

$$\text{c)}\quad dV-\frac{1}{\varrho}\Phi(\varrho)\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}dx+\frac{\partial\varrho}{\partial y}dy+\frac{\partial\varrho}{\partial z}dz\right)=Pdx+Qdy+Rdz;$$

dagegen für incompressible Flüssigkeiten:

$$\text{c*)}\quad dV-\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=Pdx+Qdy+Rdz.$$

„In beiden Fällen ist der Ausdruck auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen ein vollständiges Differential, folglich muss auch

$$Pdx+Qdy+Rdz$$

ein solches sein, d. h. es muss

$$\text{d)}\qquad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=0$$

sein. — Führt man an P, Q und R Differentiationen wirklich aus, so sieht man, dass zu dem Bestehen der letzten drei Gleichungen die nothwendige und hinreichende Bedingung ist:

$$\text{e)}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

d. h. es muss

$$udx+vdy+wdz=d\varphi$$

ein vollständiges Differential sein. Darnach ist

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\text{f)}\qquad \begin{aligned} P&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right],\\ Q&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right];\\ R&=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right]. \end{aligned}$$

„Die Gleichungen c) und c*) lassen sich dann integriren und man erhält für compressible Flüssigkeiten:

$$\text{I)}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)=V-\int\frac{\partial p}{\partial\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{\varrho}+T;$$

dagegen für incompressible Flüssigkeiten:

$$\mathrm{I}^*)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}+\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)=V-\frac{p}{\varrho}+T.$$

„Die Integrationsconstante T ist von x, y, z unabhängig, kann aber noch eine Function von t sein.

„Die Gleichungen e), welche erfüllt sein müssen, wenn die eben ausgeführte Integration zulässig ist, lassen sich noch weiter vereinfachen. Wir wollen voraussetzen, die Gleichungen e), oder was dasselbe ist, die Gleichungen d) seien zu einer gewissen Zeit t erfüllt. Differentiiren wir die erste der Gleichungen f) nach y und die zweite nach x, so findet sich durch Subtraction:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{dt}+\frac{\partial\left(\frac{\partial \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{\partial \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)}{\partial y}\right)}{\partial x}=0,$$

d. h.:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial t}=0.$$

„Durch entsprechende Behandlung der zweiten und dritten und resp. der dritten und ersten der Gleichungen f) ergiebt sich

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial t}=0.$$

„In diesen drei Gleichungen spricht sich aus, dass die Differenzen auf der linken Seite der Gleichungen e) von der Zeit unabhängige, constante Werthe haben. Sie sind also immer $=0$, wenn sie in irgend einem Momente den Werth 0 haben, z. B. zur Zeit $t=0$. Demnach finden die Gleichungen I) und resp. I*) statt, wenn die Anfangswerthe der Geschwindigkeit u_0, v_0, w_0 partielle Derivirte derselben Function sind, d. h. wenn

$$\mathrm{g})\qquad \frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v_0}{\partial z}-\frac{\partial w_0}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial z}=0.\text{“}$$

Die Gleichungen g) bilden also die vereinfachte Bedingung, unter der die Gleichungen I und I*) giltig sind? — Wodurch die Gleichungen g) einfacher sind als die allgemeinen e), scheint Geheimniss des Herrn Professors zu sein, wenn derselbe nicht etwa glaubt, dass ein mathematischer Ausdruck einfacher wird, wenn man sämmtlichen Grössen Indices giebt. — Ich muss aber auch noch den ausgezeichneten Beweis mit ein paar Worten berühren, durch den der Herr Professor zu der berühmten Vereinfachung gelangt. Der Herr setzt voraus, dass zu einer bestimmten Zeit, z. B. $t=0$, die Gleichungen e) giltig sind, dass also

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right]^{t=0}=0,$$

und beweist dann auf einem weiten Umwege, dass nun auch

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right]^{t=0}}{\partial t} = 0.$$

Eines solchen Beweises bedarf es aber durchaus nicht, wenn derselbe nicht etwa dazu dienen soll, dem mathematischen Publikum zu zeigen, wie gross die Fähigkeiten des Herrn Herausgebers sind.

Riemann hat an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn nur zu irgend einer bestimmten Zeit, z. B. zur Zeit $t=0$, die Gleichungen e) Geltung haben, dass dann auch stets für diesen Moment die Gleichungen I) und I*) giltig sind, selbst wenn nicht allgemein die Annahme gemacht wird, dass X, Y und Z die Derivirten einer Function nach x, y und z sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich, wenn man bedenkt, dass die Gleichungen I) und I*) durch Integrationen entstehen, die unabhängig von t sind.

Es folgen nun die Untersuchungen über die Fortpflanzung der Schwingungen in einem compressibeln Medium. Es wird hier von vornherein die beschränkende Voraussetzung gemacht, dass die Dichte sich so wenig ändert, dass die Dichte ϱ während der Bewegung, dividirt durch die Dichte $\varDelta$ während der Ruhe, also

$$\frac{\varrho}{\varDelta} = 1 + s,$$

und dass s ein sehr kleiner Bruch sei.

Zuerst wird der Fall untersucht, wenn nur Bewegung parallel der X-Axe vorhanden in einer unendlichen Flüssigkeit. Darauf wird der Fall behandelt, dass sich im Punkte $x=0$ eine feste Wand befindet. Drittens wird der Fall besprochen, wenn die Bewegung von allen drei Coordinaten abhängig ist. Besonders von Interesse ist bei diesem Falle noch, dass die sechsfachen Integrale, zu denen die Anwendung des Fourier'schen Lehrsatzes führt, sich auf Doppelintegrale zurückführen lassen.

Den Schluss des Buches bildet die Untersuchung der Bewegung eines festen Körpers in einer unbegrenzten, incompressibeln Flüssigkeit, und zwar das Dirichlet'sche Beispiel: „Die Bewegung einer Kugel".

Der Herr Herausgeber hat am Schlusse jedes der letzten drei Abschnitte einige Literatur angeführt; wie unvollständig indessen diese Literatur ist, kann der geehrte Leser daraus ersehen, dass nicht einmal die Arbeit von de Saint-Vénant: „Die Biegung prismatischer Körper" erwähnt ist. Ja noch mehr. Nicht einmal Riemann's eigene Arbeit* „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungs-

* Band VIII der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

weite" findet Platz, obgleich dieselbe die vorhin erwähnte Untersuchung über die Fortpflanzung der Bewegung in einem compressibeln Medium als einen speciellen Fall in sich schliesst. Es hätte sich um so mehr wohl erwarten lassen, dass der Herr Professor diese Arbeit citirt hätte, da derselbe dann wenigstens noch einen Grund mehr gehabt, weshalb derselbe auf Riemann's jüngste Vorlesungen im Sommer 1862 gar keine Rücksicht genommen. Riemann hat im Sommer 1862 ungefähr dasselbe über Schwingungen von endlicher Weite in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen vorgetragen, was sich in der genannten Arbeit findet. Der Hauptgrund, der den Herrn Professor bewogen hat, sich um Riemann's jüngste Vorlesungen über diesen Gegenstand nicht zu kümmern, wird wahrscheinlich der gewesen sein, den derselbe in seiner Broschüre* ausspricht: „Es hat viel für sich, ganz nach eigenem Sinne und ganz aus einem Guss zu arbeiten. Und es ist so süss, auf die fertige Arbeit blicken zu können mit dem Gedanken: Ich habe Alles selbst gemacht."

Schliesslich muss ich aber noch einmal auf den letzten Theil der citirten Vorrede zurückkommen. Dieser Theil lautet:

> „Am Schlusse des Semesters hat Riemann auch noch die Bewegung eines Ringes in einer unendlichen Flüssigkeit, analog der Dirichlet'schen Aufgabe von der Kugel behandelt. Er hat sich jedoch darauf beschränkt, in die partielle Differentialgleichung Ringcoordinaten einzuführen und für die Lösung den Weg im Grossen vorzuschreiben. Bei der Durchführung der Rechnung bleibt mir noch ein Punkt aufzuklären und ich möchte deshalb das Problem für eine besondere Bearbeitung vorbehalten."

Zunächst will ich bemerken, dass, soviel mir bekannt, Riemann nie den Ausdruck „Ringcoordinaten" gebraucht hat, sondern wahrscheinlich ist der von Riemann benutzte Ausdruck „Semipolarcoordinaten" identisch mit den Ringcoordinaten des Herrn Professors. Riemann hat auch nicht den von dem Herrn Bearbeiter an mehreren anderen Stellen beliebten Ausdruck „Ungleichung" statt „Ungleichheit" angewandt. Auch diese Verbesserung scheint der Herr Professor für nothwendig gehalten zu haben.

Was nun aber die Theorie der Bewegung eines Ringes in einer Flüssigkeit betrifft, so muss ich das in der Vorrede Gesagte mindestens als ungenau bezeichnen. Meine Aufzeichnungen, die ich im März 1861 während der Vorlesung gemacht habe, enthalten vier particuläre Lösungen der Differentialgleichung in folgender Form:

$$\sum\sum\left\{\begin{array}{l} a_{\mu,\nu}\,.\,f(t)\,.\cos\mu\psi\,.\cos\nu\varphi+b_{\mu,\nu}\,.\,f(t)\,.\cos\mu\psi\,.\sin\nu\varphi \\ +\,c_{\mu,\nu}\,.\,f(t)\,.\sin\mu\psi\,.\sin\nu\varphi+d_{\mu,\nu}\,.\,f(t)\,.\sin\mu\psi\,.\cos\nu\varphi \end{array}\right\}.$$

---

* Elliptische Functionen aus dem Nachlasse von Gauss. Ein Beitrag zu einem Schreib- und Druckfehlerverzeichniss von Dr. Hattendorff.

$f(t)$ bezeichnet vier verschiedene hypergeometrische Reihen. Nur eine dieser vier Reihen hat die Eigenschaft, dass sie ausserhalb des Ringes stetig bleibt und in der Oberfläche desselben einen bestimmten Werth annimmt. Der Werth dieser Reihe ist folgender:

$$f(t)=t^{\frac{1}{2}+\nu}\left[1-\frac{\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}}{1}\cdot\frac{\frac{\nu+\mu}{2}+\frac{1}{4}}{\nu+1}t^2\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{5}{4}\right)}{1.2}\cdot\frac{\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\frac{5}{4}\right)}{(n+1)(\nu+2)}.t^4-+-\ldots\right].$$

Unvollendet hat Riemann die Lösung der Aufgabe nur insofern gelassen, als er den Werth der willkürlichen Constanten nicht so bestimmt hat, dass sie den aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen; indessen ist von Riemann der Weg hierhin zu gelangen zum Theil noch geebnet, zum Theil vorgezeichnet. Aus diesem Grunde möchte ich daher den Herrn Professor Hattendorff bitten, den folgenden Satz der Vorrede als unwahr zu streichen:

„Er (Riemann) hat sich jedoch darauf beschränkt, in die partielle Differentialgleichung Ringcoordinaten einzuführen und für die Lösung den Weg im Grossen vorzuschreiben."

Ferner möchte ich den Herrn Herausgeber noch ersuchen, statt:

„Bei der Durchführung der Rechnung bleibt mir noch ein Punkt aufzuklären"

zu schreiben:

„Bei der Durchführung der Rechnung ist mir Einiges (oder auch vielleicht — Manches) unklar geblieben; ich werde daher" etc.

Ich halte diese Verbesserung deshalb für nothwendig, damit der Leser nicht etwa auf den Gedanken komme, Riemann habe seinen Schülern Unfertiges vorgeführt. Der Herr Professor Hattendorff findet dann auch vielleicht noch Platz, um zu erklären, ob in Riemann's handschriftlichem Nachlasse auf diesen Gegenstand Bezügliches sich vorfindet oder nicht.

Lüneburg, im Februar 1870.

Dr. F. Gödecker.

Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften, Rectoratsrede von C. v. Littrow. Wien, Gerold.

Durch eine Reihe von astronomischen Thatsachen sucht der Verfasser zu beweisen, „dass es den Sinnen der Griechen an der Schule für genaue Beobachtung gebrach, dass sie als Naturforscher zu sehen noch nicht gelernt hatten", oder, wie er sich S. 15 ausdrückt, „dass es den Alten selbst an der primitivsten Beobachtungsgabe gefehlt habe". Diese Ansicht erscheint dem Referenten ziemlich oberflächlich; sie steht ohnehin im Widerspruche mit der eigenen Angabe des Verfassers (S. 5), wonach die Griechen sich von der Bewegung des in unseren Breiten so schwer sichtbaren Planeten Mercur eine verhältnissmässig genaue Kunde verschafft haben, die uns erst durch das Fernrohr vermittelt worden ist. Gerade diese Thatsache beweist, dass die Alten recht gut beobachten konnten, wenn sie wollten; aber sie wollten eben nicht. Der Grund hiervon ist jedem klar, der die Geschichte der griechischen Philosophie etwas näher kennt. Schon Zenon aus Elea leugnete die unendliche Theilbarkeit und suchte die Nichtexistenz des Raumes, sowie die Unmöglichkeit der Bewegung (der Pfeil, Achilles und die Schildkröte) nachzuweisen; dabei war es ihm aber keineswegs um blose Sophistereien zu thun, sondern, wie schon Tennemann richtig bemerkt hat, um einen apagogischen Beweis des Satzes, dass alle Sinnesanschauung trüglich sei. Diese letztere Ansicht zieht sich mit der Beharrlichkeit eines Axioms durch die gesammte griechische Philosophie hindurch und erhält ihren schärfsten Ausdruck bei Platon, welchem die sinnlich erkennbare Welt als wesenloses Schattenbild erscheint, wogegen die Wahrheit einzig und allein in der Welt der Ideen lebt, die aber schlechterdings nicht durch Beobachtung, sondern nur durch reines Denken erkennbar ist. (Vergl. den Anfang des 7. Buches vom Staate.) Dem entsprechend lässt Platon den Sokrates (im Phädon) sagen, „er habe sich zwar sehr für Physik interessirt; aber was er auch gemeint verstanden zu haben, sei ihm bei weiterem Nachdenken wieder undeutlich geworden, und so glaube er, die Götter wollten nicht, dass Menschen die Naturgesetze erkennen sollten.“ Wenn sich aber die eminentesten Griechen in einem solchen Sinne aussprechen, so ist es nicht wunderlich, dass ihre Landsleute die Naturerscheinungen mit ebenso wenig Ernst betrachteten, wie wir ein Schattenspiel oder die bunt wechselnden Bilder des Kaleidoscops. — Erst mit dem Erlöschen der griechischen Philosopie überhaupt verlor sich das Misstrauen gegen die Sinnesanschauung, und von diesem Augenblicke an traten Astronomen wie Hipparchos, Sosigenes, Ptolemäus etc. auf, von denen wohl Niemand behaupten wird, „dass es ihnen selbst an der primitivsten Beobachtungsgabe gefehlt habe“.

Im Uebrigen enthält das Schriftchen einige hübsche Bemerkungen zur Geschichte der Astronomie. In sprachlicher Beziehung ist der häufig wiederkehrende ungeschickte Gebrauch des Wortes „ausnehmen“ lästig, z. B.: „man kann in den Plejaden elf Sterne ausnehmen“, oder „kleine Sterne neben hellen lassen sich im Zwielichte weit eher ausnehmen, als in tiefer Nacht“ und so öfter. Solche niederösterreichische Provincialismen gehören nicht in die Schriftsprache, der so gute Worte, wie „beobachten“, „wahrnehmen“, „unterscheiden“ u. a. zu Gebote stehen.

SCHLÖMILCH.

Ueber die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des elektrischen Telegraphen. Von Dr. Th. Albrecht, Assistent am Centralbureau der europäischen Gradmessung zu Berlin. Leipzig, Verlag von Engelmann 1869.

Der Verfasser sagt in der Vorrede: „In den letzten Jahrzehnten ist bereits eine grössere Zahl telegraphischer Längenbestimmungen ausgeführt und ein reicher Schatz von Erfahrungen hierbei gesammelt worden, so dass es mir von Interesse schien, eine Zusammenstellung der wesentlichsten Wahrnehmungen dieser Art vorzunehmen und unter Berücksichtigung dieser Erfahrungen die verschiedenen Methoden der telegraphischen Längenbestimmung hinsichtlich ihrer leichten und bequemen Handhabung näher zu untersuchen. Ich habe versucht, in der vorliegenden Schrift eine solche Discussion zu liefern, und neben der Angabe der bequemsten und sichersten Verfahrungsweisen mein Bestreben besonders auch auf Untersuchung des Genauigkeitsgrades sowohl der astronomischen Zeitbestimmung und der resultirenden Längendifferenz, als auch der einzelnen Reductionselemente gerichtet, weil durch eine solche Betrachtung wesentliche Momente zur Beurtheilung der Güte der einzelnen Methoden erlangt werden. Zugleich schien mir erwünscht, eine kurze Anleitung zur Ausführung und Berechnung der Längenbestimmungen zu geben, weil ich hoffe, dass eine solche gerade jetzt, wo eine grössere Zahl telegraphischer Längenbestimmungen zum Zwecke der europäischen Gradmessung ausgeführt werden, von einiger Bedeutung sein könnte."

Um mit wenigen Worten die Leistung des Verfassers zu charakterisiren, darf man sagen, dass derselbe eine zeitgemässe Idee mit äusserst anerkennenswerther Sorgfalt ausgeführt hat. Auch für Diejenigen, welche nicht gerade Astronomen von Fach sind, dürfte die vorliegende Schrift manches Interessante enthalten, wie z. B. die genaue Untersuchung über persönliche Fehler und deren Variationen.

Schlömilch.

Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Decimalen. Bearbeitet von Dr. C. Bruhns, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie in Leipzig. Verlag von B. Tauchnitz. Leipzig 1870.

Der wesentlichste Unterschied zwischen den vorliegenden und den älteren Tafeln von Bremiker und Schrön besteht darin, dass die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 0° bis 5° 59′ von Secunde zu Secunde angegeben sind, während sie darüber hinaus von zehn zu zehn Secunden fortgehen. Der übrige Inhalt des Werkes ist der gewöhnliche, wie dies der Natur der Sache nach nicht anders sein kann. Ueber die Correctheit desselben lässt sich begreiflicherweise für jetzt kein Urtheil fällen; doch kann man erwarten, dass eine fünfmalige Correctur, bei welcher die Tafeln von Bremiker und Schrön, der *Thesaurus logarithmorum* von Vega und Taylor's *Table of logarithms* nach einander benutzt wurden, eine grosse Zuverlässigkeit bieten werde. Die typographische Ausstattung ist eine sehr sorgfältige und zeichnet sich namentlich durch einen äusserst scharfen (dem Referenten fast zu scharfen) Typenschnitt aus.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. bis 31. Mai 1870.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der k. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1869, II, 4. Heft, und 1870, I, 1. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Reine Mathematik.

Hankel, H., Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen, Fues. ⅔ Thlr.

Thomae, J., Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Halle, Nebert. 2 Thlr.

Baltzer, R., Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl. Leipzig, Hirzel. 1⅔ Thlr.

Gundelfinger, J., Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Tübingen, Fues. ⅓ Thlr.

Mehler, F. G., Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und deren Anwendungen. Elbing, Neumann-Hartmann. ⅓ Thlr.

Weissenborn, H., Beitrag zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. Eisenach, Bärecke. 16 Ngr.

Wiegand, A., Erster Cursus der Planimetrie. 9. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

Kapoustin, P., *Méthode graphique pour diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales avec une exactitude aussi approximative qu'on puisse le désirer.* Moscou, Sutthoff. 16 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Wehrle, J., Projective Abhandlung über Steinschnitt. 4. Lief. Zürich, Kraut & Bosshart. 1⅔ Thlr.

Anleitung zur Ausführung einzelner Theile der bei Grundsteuervermessungsarbeiten vorkommenden trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen. Berlin, geh. Oberhofbuchdruckerei. 1 Thlr.

Steinhauser, A., Ueber die geometrische Construction der Stereoscopbilder. Graz, Leykam. ⅓ Thlr.

Eberhard, K., Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere verticale Axen rotirenden Flüssigkeit. Berlin, Calvary & Comp. 16 Ngr.

Hagen, G., Ueber die Bewegung des Wassers in cylindrischen nahezu horizontalen Leitungen. (Akad.) Berlin, Dümmler. 12 Ngr.

Physik.

Hann, J., Die Wärmeabnahme mit der Höhe von der Erdoberfläche und ihre jährliche Periode. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Schieck, Ueber atmosphärische Elektricität. Oldenburg, Schulze. 8 Ngr.

Bähr, J. K., Ueber die Einwirkung der Reibungselektricität auf das Pendel. Dresden, Türk. ⅓ Thlr.

Reichenbach, O., Die Gestaltung der Erdoberfläche nach bestimmten Gesetzen. Berlin, Lüderitz. ⅓ Thlr.

Schellen, H., Der electromagnetische Telegraph. 5. Aufl. 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von Dr. OSKAR SCHLÖMILCH, königl. sächs. Hofrath und Professor, Ritter des k. s. C.-V.-O. etc. Zweiter Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1870.

Der Verfasser sagt im Vorwort: „Da ich in der Vorrede zum ersten Theile des vorliegenden Werkes mich hinreichend über dessen Zweck ausgesprochen habe, so bedarf es nur weniger Worte zur Einführung des zweiten Theiles. Die Aufgaben des ersten Capitels enthalten zwar nichts Neues, aber sie bilden nun einmal das unentbehrliche Handwerkszeug der Integralrechnung und konnten daher nicht wegbleiben. In den übrigen Capiteln dagegen wird man fast durchaus neue Beispiele finden und zwar nur solche, die zu eleganten Resultaten führen und dadurch das Interesse des Studirenden wach erhalten. Aus dem letzteren Grunde habe ich auch die meisten Beispiele zur Integration von Differentialgleichungen in das Gewand geometrischer Aufgaben gekleidet."

Inhalt.

Capitel I. Integration von entwickelten Functionen einer Variabelen. § 1: Grundformeln und allgemeine Regeln. § 2: Integration rationaler Functionen (56 Beispiele). § 3: Fortsetzung. Integration durch Zerlegung in Partialbrüche (25 Beispiele). § 4: Integration irrationaler Functionen (40 Beispiele). § 5: Fortsetzung. Integration durch Rationalisirung (28 Beispiele). § 6: Integration exponentialer und logarithmischer Functionen (22 Beispiele). § 7: Integration goniometrischer Functionen (45 Beispiele). § 8: Integration cyclometrischer Functionen (26 Beispiele). § 9: Integration mittels unendlicher Reihen (24 Beispiele).

Capitel II. Quadraturen und Rectificationen. § 10: Die Quadratur ebener Curven (30 Beispiele). § 11: Vermischte Aufgaben über Quadraturen (9 Beispiele). § 12: Die Rectification ebener Curven (34 Beispiele). § 13: Vermischte Aufgaben über Rectificationen (2 Beispiele). § 14: Quadratur und Rectification zweier besonderen Gattungen von Curven. § 15: Die Rectification räumlicher Curven (20 Beispiele).

Capitel III. Cubaturen und Complanationen. § 16: Die Cubatur begrenzter Volumina (32 Beispiele). § 17: Die Complanation von Cylinderflächen (18 Beispiele). § 18: Die Complanation von Umdrehungsflächen (20 Beispiele).

Capitel IV. Einfache bestimmte Integrale. § 19: Berechnung der Werthe von bestimmten Integralen (57 Beispiele). § 20: Transformationen bestimmter Integrale (12 Beispiele). § 21: Die Variation der Constanten (18 Beispiele).

Capitel V. Reihen, Producte und bestimmte Integrale. § 22: Entwickelung bestimmter Integrale in Reihen oder Producte (15 Beispiele). § 23: Summirung von Reihen mittels bestimmter Integrale (9 Beispiele).

Capitel VI. Die Doppelintegrale und ihre geometrischen Anwendungen. § 24: Allgemeine Formeln und Regeln. § 25: Cubaturen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Coordinaten (36 Beispiele). § 26: Cubaturen durch Doppelintegrale in räumlichen Polarcoordinaten (8 Beispiele). § 27: Complanationen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Coordinaten (24 Beispiele). § 28: Complanationen durch Doppelintegrale in räumlichen Polar coordinaten (7 Beispiele). § 29: Vermischte Aufgaben über Doppelintegrale (7 Beispiele).

Capitel VII. Die dreifachen Integrale. § 30: Allgemeine Formeln und Regeln. § 31: Beispiele für dreifache Integrationen (21 Beispiele).

Capitel VIII. Die Mittelwerthe gegebener Functionen. § 32: Einfachste Fälle der Bestimmung von Mittelwerthen (3 Beispiele). § 33: Die mittleren Radien von Curven, Flächen und Körperräumen (11 Beispiele). § 34: Die näherungsweise Darstellung von Functionen einer Variabelen (5 Beispiele). § 35: Die näherungsweise Darstellung von Functionen zweier Variabelen (2 Beispiele).

Capitel IX. Differentialgleichungen erster Ordnung. § 36: Allgemeine Regeln. § 37: Einfache lineare Differentialgleichungen (30 Beispiele). § 38: Homogene lineare Differentialgleichungen (20 Beispiele). § 39: Differentialgleichungen verschiedener Grade (35 Beipiele). § 40: Die Evolventare (4 Beispiele). § 41: Die Trajectorien (12 Beispiele). § 42: Die Rollcurven (10 Beispiele).

Capitel X. Differentialgleichungen höherer Ordnungen. § 43: Die einfachsten Formen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung (38 Beispiele). § 44: Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (12 Beispiele). § 45: Homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung (8 Beispiele). § 46: Functionalgleichungen (6 Beispiele).

Teorica delle funzioni di variabili complesse. Dal Dott. Felice Casorati. Pavia, Tipografia dei fratelli Fusi.

L'ouvrage dont nous venons de transcrire le titre doit compter, sans contredit, parmi les plus importantes productions scientifiques de ces dernières années. Son but est l'exposition complète de cette branche d'analyse que Cauchy a fondée, et dont Riemann a été le second créateur.

Les découvertes de Cauchy ont trouvé dans notre pays de lumineux interprètes et doivent aux géomètres français d'importantes additions. Mais jusqu'ici la doctrine de Riemann ne nous était guère connue que par les ouvrages de ses disciples, écrits presque tous dans une langue dont l'étude est malheureusement trop sacrifiée chez nous aux prétendues exigences littéraires de l'esprit français. Aussi devons-nous nous réjouir de la publication d'un livre dont la langue est facilement intelligible à tout Français un peu lettré, et composé, en outre, avec un remarquable talent par un géomètre qui, tout jeune encore, a su déjà si bien se rendre maître du vaste ensemble des théories qui gravitent autour de son sujet principal.

Le premier volume, le seul qui ait paru jusqu'à ce jour, se compose de deux parties principales, dont la première, sous le titre d'*Introduction*, contient un aperçu historique du développement de la théorie des quantités complexes. Cet aperçu, qui formerait à lui seul un excellent mémoire, est un résumé substantiel et méthodique des plus grandes découvertes de l'analyse moderne, où la part de chaque géomètre est indiquée et appréciée avec autant de clarté que de profondeur. Les cent quarante-trois pages que l'auteur a consacrées à cet objet seront un précieux secours pour tous ceux qui voudront se mettre au courant des hautes théories analytiques, et qui, privés de ce fil conducteur, ne sauraient comment s'orienter au milieu de tant de travaux, différents par l'esprit comme par la forme, et dont rien ne leur indique d'avance la dépendance mutuelle, non plus que l'ordre dans lequel il convient de les étudier.

Cette introduction est divisée en deux chapitres, dont le premier contient l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, une des plus importantes applications des quantités complexes, dans laquelle l'emploi de ces quantités a été la condition nécessaire des découvertes d'Abel et de Jacobi. M. Casorati trace le tableau des progrès successifs de cette branche de l'analyse, depuis les travaux de Fagnani et d'Euler, jusqu'à ceux de Cayley, d'Eisenstein, d'Hermite, de Weierstrass.

Le second chapitre traite plus particulièrement des variables complexes et des fonctions de ces variables. L'auteur commence naturellement par l'exposé des travaux de Cauchy sur ce sujet; il établit nettement et avec impartialité la part qui revient à ce grand analyste dans des découvertes dont quelques auteurs allemands semblent parfois trop disposés à attribuer tout l'honneur à leurs compatriotes.

Citons, à ce propos, quelques pages de la remarquable étude que M. Beltrami a consacrée au livre de M. Casorati, dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, t. VII, 1869, p. 36 et suiv. Ces pages nous paraissent éminemment propres à faire saisir les points de contact entre l'oeuvre de Cauchy et celle de Riemann, et à montrer ce que le second doit au premier:

„Un de ces points de contact se présente dès les premiers pas que l'on fait dans la théorie générale des fonctions, savoir: dans la conception même de la fonction. Déjà Cauchy avait reconnu qu'il convient de faire abstraction de toute supposition, explicite ou implicite, de l'existence d'une formule analytique de nature quelconque, et de ne considérer que la dépendance qui doit avoir lieu entre la valeur de la variable et celle de la fonction. Mais, dans le passage de la variabilité réelle à la variabilité complexe, Cauchy avait donné à ce principe une extension trop grande, ce qui l'avait conduit à distinguer par une appellation spéciale (*monogènes*) les fonctions auxquelles Riemann, mieux inspiré, a cru devoir réserver exclusivement la dénomination de *fonctions* (d'une variable complexe). Ce point est très-clairement exposé par M. Casorati dans son préambule historique, ainsi que dans les premiers chapitres de la deuxième section...

„Quant à la définition d'une fonction au moyen de propriétés caractéristiques suffisantes, ce sujet n'est pas encore traité dans le volume publié, bien que l'auteur laisse entrevoir à plusieurs reprises dans l'*introduction* (p. 134—136, par exemple) toute l'importance de ce nouveau point de vue, qui, employé primitivement dans les méthodes de la physique mathématique, et introduit ensuite avec beaucoup d'avantages dans l'analyse pure, semble se rapprocher singulièrement de celui de la géométrie moderne, suivant lequel les propriétés des figures s'établissent comme conséquences de quelques données caractéristiques, sans faire aucun usage des équations analytiques.

„Parmi les nombreux mérites qui appartiennent à Cauchy en ce qui touche au perfectionnement général de la science, on doit mettre en première ligne celui d'avoir constamment soutenu, dès le commencement de sa carrière scientifique, la nécessité de bien délimiter l'étendue et la signification de tout symbole que l'on veut introduire et employer dans l'analyse. En revenant sans cesse sur la discussion des meilleures règles à suivre pour parvenir à ce but, règles qu'il a successivement modifiées sans jamais aboutir à leur donner une forme définitive, il a montré clairement que, si l'on n'était pas encore entré dans la seule voie qui conduit sûrement au but, la nécessité d'atteindre ce but ne lui en paraissait pas moins absolue. Et en cela il était dans le vrai. Seulement Cauchy, entraîné, comme cela se voit si souvent, au delà des justes bornes par son ardeur à réagir contre l'abus du symbole, a péché par l'excès contraire, en établissant plus d'une fois ses définitions de façon à interrompre arbitrairement la continuité des variables, et à perdre ainsi de vue le guide infaillible qui aurait dû le diriger.

„Malgré l'imperfection des résultats, l'idée première est tellement vraie, et les considérations qu'il a développées en plusieurs endroits sont si justes, que plus d'un lecteur du tome IV des *Exercices d'analyse et de physique mathématique* a dû trouver de lui-même la véritable voie qui mène à la solution de la difficulté...

„La première section de l'ouvrage de M. Casorati est, en grande partie, consacrée à l'exacte détermination du sens qu'il faut attacher aux fonctions simples d'une variable complexe, et les exemples qu'il a choisis nous sembles on ne peut mieux appropriés à ce but, sous le double rapport de la continuité et de la conservation des propriétés caractéristiques.

Les restrictions qui, comme nous le disions tout à l'heure, ont été imposées mal à propos par Cauchy à la continuité de la variable complexe qui entre dans une fonction donnée, proviennent surtout de ce qu'il prétendait séparer les diverses séries de valeurs dont est susceptible une fonction à plusieurs déterminations, et considérer chacune d'elles comme une fonction séparée. De cette manière, en supposant les valeurs de la fonction placées sur les valeurs correspondantes de la variable (ce que toutefois Cauchy n'avait pas coutume de faire), le champ des valeurs de la fonction devenait simple, mais contenait inévitablement des lignes de discontinuité. Riemann, le premier, a remarqué que, en concevant les divers champs correspondants de cette manière aux diverses séries de valeurs de la fonction, chacun d'eux présentait bien de telles lignes de discontinuité; mais que chacun de ces champs devait nécessairement se raccorder en formant la continuité avec un autre le long d'une de ces lignes, et que l'on pouvait ainsi obtenir un champ entièrement continu, composé de plusieurs couches superposées et connexes, et comprenant la totalité des valeurs de la fonction. Cette remarque a été, sans doute, un trait de génie; mais nous ne porterons pas atteinte à la sagacité de l'illustre novateur, en affirmant que son admirable invention ne pouvait plus se faire longtemps attendre, du jour où l'on commencerait à pénétrer au fond des idées de Cauchy. Ce qui frappe le plus, en effet, dans cette découverte, ce n'est pas tant la conception primitive que la sûreté avec laquelle Riemann s'en rend maître, et en dévoile, du premier coup, la puissance et la fécondité, par la construction de l'édifice colossal et majestueux que quelques instants lui ont suffi pour élever.“

Indiquons maintenant rapidement le contenu des divers chapitres de la seconde partie du volume, où l'auteur entre dans l'exposition de la théorie.

Cette partie est divisée en quatre sections, comprenant chacune plusieurs chapitres.

Section I. Opérations arithmétiques et formules simples correspondantes.

Chapitre I. *Opérations arithmétiques. Extension de l'idée de nombre, et, par suite aussi, des opérations. Continuité.*

Chapitre II. *Réprésentation géométrique des nombres, et constructions correspondantes aux opérations arithmétiques.* — L'auteur y donne une démonstration très-précise et très-complète du célèbre théorème de Jacobi, sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction monodrome d'une seule variable, ayant plus de deux périodes. Le Chapitre se termine par une exposition de la représentation sur la sphère des valeurs d'une variable complexe, suivant la méthode indiquée par Riemann, dans ses leçons orales, et publié par Neumann (*Vorlesungen über Riemann's Théorie der Abel'schen Integrale*).

Chapitre III. *Conventions particulières pour e^z et lz.*

Section II. Idée de fonction et distinctions fondamentales qui s'y rapportent.

Chapitre I. *Fonctions réelles d'une variable réelle.* — L'auteur y traite avec détail des diverses espèces de discontinuité, qui avaient déjà été distinguées par M. Neumann*. Seulement, M. Casorati ne classe pas parmi les discontinuités les valeurs infinies que M. Neumann désigne sous le nom de *discontinuités polaires*, les valeurs réciproques de la fonction étant continues, et les infinis pouvant disparaître au moyen d'une transformation homographique analogue à celle qui changerait toutes les sections coniques en ellipses.

Chapitre II. *Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.*

Chapitre III. *Fonctions complexes de variables réelles.*

Chapitre IV. *Fonctions d'une variable complexe.* — Une fonction de $z=x+yi$ est une fonction dont la valeur ne dépend que de celle du binôme $x+yi$, et qui ne changerait pas si l'on remplaçait les valeurs réelles de x et de y par des valeurs complexes quelconques, pourvu que le binôme $x+yi$ restât invariable. Une telle fonction w a une dérivée déterminée par rapport à z. Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y};$$

* Voyez aussi Natani, *Die höhere Analysis, besonders abgedruckt aus dem Mathematischen Wörterbuche*, p. 462.

et si l'on pose $w = u + vi$, u et v étant réels, chacune de ces dernières quantités satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Cette question est traitée avec beaucoup de détails particuliers à l'auteur, et qui jettent un grand jour sur cette question délicate.

Chapitre V. *Interprétations géométriques de la condition renfermée dans l'idée de fonction d'une variable entièrement indépendante. Recherches géométriques relatives à certaines fonctions particulières.* — Après avoir exposé l'interprétation géométrique des conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

telle qu'on la retrouve dans l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet*, l'auteur s'occupe de celle qui a été donnée par Gauss, et qui consiste en ce que les réseaux infinitésimaux qui représentent les valeurs correspondantes de la variable et de la fonction sont composés d'éléments semblables chacun à chacun. Discussion de la représentation des fonctions z^2, z^n, e^z, $\sin z$, $\sin am\, z$ et de leurs fonctions inverses.

Section III. Revue des expressions analytiques.

Chapitre I. *Classification.* — Distinction des fonctions en algébriques et transcendantes, monodromes et polydromes etc.

Chapitre II. *Séries.* — Influence de l'ordre des termes d'une série. Opérations rationelles sur les séries; différentiation, intégration. Séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable; cercle de convergence. Séries contenant des puissances négatives. Séries simples ou doubles, à périodicité simple ou double. Influence du groupement des termes d'une série double. Étude des séries Θ, simples ou multiples. Cette étude, fondée sur une application de la série de Fourier, et présentée par l'auteur avec une remarquable simplicité, semble destinée à entrer, tôt ou tard, dans les traités d'algèbre à la suite de la théorie des fonctions exponentielles et circulaires.

Chapitre III. *Produits infinis.* — La théorie de ces produits, tant simples que multiples, est traitée d'une manière analogue à la théorie des séries infinies.

Chapitre IV. *Intégrales.* — Ce chapitre renferme l'exposé des découvertes capitales de Cauchy. L'auteur développe avec beaucoup de soin l'idée d'intégration le long d'un contour donné. Le théorème fondamental relatif à l'intégration d'une différentielle exacte

---

* *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques*, p. 8. In-8; 1859. Librairie Gauthier-Villars (*rare*).

$$u\,dx + v\,dy$$

le long d'un contour fermé est démontré de deux manières différentes: d'abord par la méthode de Cauchy, reproduite par les auteurs français; puis par la méthode de Riemann, fondée sur des considérations analogues à celles que Gauss avait employées dans son mémoire sur l'attraction des ellipsoides. Examen des intégrales des fonctions

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2-1}, \quad \frac{1}{(z-\gamma)^{n+1}}.$$

Section IV. Analyse des manières dont les fonctions peuvent se comporter, dans l'hypothèse de la monodromie, autour des diverses valeurs de la variable.

Chapitre I. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et finie.* — Démonstration de la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(x)\,dx}{x-z}.$$

Théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction monodrome, continue et finie suivant les puissances entières et positives de $z-\gamma$. Conséquences. Indices d'ordre des zéros.

Chapitre II. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et infinie* (dans le sens indiqué au chapitre I de la section II). — Détermination d'une fonction rationelle, infinie de la même manière que la fonction proposée. Indices d'ordre des infinis. Expression de l'indice d'un point au moyen de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int d\,l\,w$.

Chapitre III. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle, isolément, elle est discontinue.* — Théorème de Laurent. Propriétés des fonctions fondées sur la distinction des discontinuités en séparées et non séparées des infinis.

Chapitre IV. *Examen des manières dont une fonction peut se comporter pour la valeur ∞ de la variable, en supposant qu'autour de cette valeur elle doive être monodrome et continue.* — L'auteur emploie la représentation sur la sphère de Riemann, considérée comme résultant de la déformation du plan. Il introduit le plan antipode, dont l'idée est due à M. Neumann, et qui correspond au changement de la variable z en $\frac{1}{z}$.

Chapitre V. *Comment se comportent, autour de chaque valeur de la variable, la dérivée et l'intégrale d'une fonction, par comparaison avec la fonction elle-même.*

Ces indications, nécessairement incomplètes, ne peuvent donner qu'une idée bien imparfaite de la richesse des matières contenues dans le volume de M. Casorati. Tous ceux qui liront cet ouvrage désireront, comme nous, avec impatience, que le savant professeur nous donne bientôt la suite, qui doit traiter des parties plus élevées de la théorie qu'il a si bien approfondie, et qu'il expose avec tant de lucidité.

Bordeaux. J. Hoüel.

Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Von Jos. Schlesinger, Privatdocent am k. k. polytechnischen Institut und Professor an der öffentlichen Oberrealschule des ersten Bezirks in Wien. Mit Holzschnitten im Texte. Wien, Druck und Verlag von C. Gerold's Sohn. 1870.

Die darstellende Geometrie ist seit der Zeit, wo ihr Monge eine hohe Ausbildung und eine scheinbar vollendete Gestalt verlieh, ziemlich unverändert geblieben, und wenn auch einzelne Geometer (wie z. B. der verdienstvolle Gugler) rein geometrische Untersuchungen mit der descriptiven Geometrie verflochten, so wurden hierdurch zwar schätzenswerthe, aber doch etwas äusserliche Zusätze gewonnen, welche keine wesentliche Umgestaltung bewirkten. In den letzten 10 Jahren dagegen hat sich nach zwei Seiten hin das Bedürfniss geltend gemacht, die darstellende Geometrie in einem andern, als dem bisherigen Sinne aufzufassen. Von theoretischer Seite wies Professor Fiedler schon im Jahre 1863 (s. Jahrg. VIII, S. 444 der vorliegenden Zeitschrift) darauf hin, dass die darstellende Geometrie mit der sogenannten neueren Geometrie in eine engere systematische Verbindung treten und sich namentlich der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften bemächtigen müsse; eine Ansicht, der schon die einfache Bemerkung zur Stütze dient, dass z. B. die Collineation im Wesentlichen auf eine Centralprojection hinauskommt. Aber auch von Seiten der Praxis ergab sich die Nothwendigkeit jener engeren Verbindung, nachdem Prof. Culmann in seiner gegenwärtig auf allen polytechnischen Instituten eingebürgerten „graphischen Statik" gezeigt hatte, dass viele Aufgaben aus der Statik der Bauconstructionen, wie sie namentlich bei Entwürfen von Futtermauern, steinernen und eisernen Brücken etc. vorkommen, durch Constuction rascher und übersichtlicher, als durch Rechnung lösbar sind, sobald man die Lehren der neueren Geometrie zu Hilfe nimmt. Nach diesen Vorgängen war es ohne Zweifel ein zeitgemässer Gedanke, die darstellende Geometrie „im Sinne der neueren Geometrie" zu behandeln, und es bedarf nur noch eines kurzen Referates über die Art und Weise, in welcher der Verfasser seine Aufgabe gelöst hat.

Das Werk zerfällt in sieben Abschnitte, deren erster mehr vorbereitender Natur ist und eine kurze Repetition der nöthigen stereometrischen Sätze und der zugehörigen Constructionen giebt. Der zweite Abschnitt behandelt „das Projiciren in der Ebene" und die hieraus entspringenden projectivischen Verwandtschaften der Congruenz, Aehnlichkeit, Affinität, Collineation, die involutorischen Punktreihen und Strahlenbüschel, Pole und Polaren, sowie schliesslich die Reciprocität. Abschnitt III ist den verschiedenen Projectionsmethoden gewidmet und enthält daher die gewöhnliche descriptive Geometrie, sowie die Lehre von der axonometrischen und der centralen Projection. Im vierten Abschnitte werden diejenigen Flächen untersucht, welche man sich durch Bewegung von Geraden oder Curven entstanden denken kann; der fünfte Abschnitt lehrt die Construction der Durchschnitte gegebener Flächen, der sechste beschäftigt sich mit Beleuchtungsconstructionen, der siebente mit geometrischen Orten in der Ebene und im Raume.

Aus dieser allgemeinen Uebersicht wird man schon die ungemeine Reichhaltigkeit des vorliegenden Werkes erkennen, wobei noch besonders hervorzuheben ist, dass der Verfasser nicht nur in der Behandlungsweise, sondern auch materiell vielfach Neues giebt, wie z. B. in dem interessanten Abschnitte über die Flächen. Die Darstellung ist überall klar und wird durch geschickt entworfene Figuren zweckmässig unterstützt. Hiermit sei das Werk den Freunden der descriptiven Geometrie bestens empfohlen.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. bis 15. Juni 1870.

Periodische Schriften.

Annalen der königl. Sternwarte bei München, herausgegeben von LAMONT. 17. Bd. München, Franz. 1⅔ Thlr.

—— 9. Supplementsband, enthaltend: Verzeichniss von 4793 telescopischen Sternen zwischen 3° und 6° Declination. Ebendas. 1⅓ Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. 19. Jahrg. 2. Heft, Juli — December 1869. Ed. H. GUTHE. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅓ Thlr.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1869, II, 4. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Reine Mathematik.

SCHRÖN's, L., Logarithmen. 10. Stereotypausgabe. Braunschweig, Vieweg. 1⅙ Thlr.

CREMONA, L., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Flächen in synthetischer Behandlung. Uebersetzt von M. Curtze. Berlin, Calvary & Comp. 2⅔ Thlr.

GANDTNER, O., und F. JUNGHANS, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch. 2. Th. 2. Aufl. Berlin, Weidmann. 24 Ngr.

UNFERDINGER, J., Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrales

$$\int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\, dy\, dz.$$

(Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

WINKLER, A., Ueber einige zur Theorie der bestimmten Integrale gehörige Formeln und Methoden. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Oppolzer, Th., Bestimmung einer Kometenbahn. 2. Abhdlg. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Lichtenberger, C., Tabelle zur Stellung der Uhren auf mittlere Zeit etc. Trier, Groppe. 3 Ngr.

Physik.

Meyerstein, M., Das Spectrometer. 2. Aufl. Göttingen, Deuerlich. ⅓ Thlr.

Lang, N. v., Krystallographisch-optische Bestimmungen. (Akad.) Wien, Gerold.

Literaturzeitung.

Recension.

Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie. Von J. C. Becker. Zürich, Druck und Verlag von Fr. Schulthess. 1870.

Der Zweck des vorliegenden Schriftchens ist ein doppelter; einerseits soll dasselbe wieder auf die tiefen Untersuchungen Kant's und Schopenhauer's über die Quellen und Grenzen unserer Erkenntniss aufmerksam machen, andererseits stellt es sich die Aufgabe, das gute Recht der unmittelbaren Anschauung gegen eine gewisse speculative Mathematik zu vertreten, die wo möglich sogar die Axiome der Geometrie durch Integralrechnung begründen möchte. Referent hält diese historischen und kritischen Untersuchungen des Verfassers für um so zeitgemässer, als gegenwärtig selbst Empiriker vom reinsten Wasser, nämlich die Physiologen, sich auf ihrem Wege der Kant'schen Weltansicht immer mehr nähern; sagt doch z. B. Helmholtz geradezu in seiner Abhandlung über das Sehen (Preuss. Jahrb, 1866), dass seine Forschungen ihn schliesslich zu demselben Resultate geführt hätten, welches Kant durch eine mühsame Dialectik erreicht habe. Unter diesen Umständen dürfte ein näheres Eingehen auf die vier Abhandlungen des Verfassers mindestens von Interesse sein.

In Nr. 1 wird die Natur des Raumes nach den Ansichten von Kant und Gauss besprochen und dabei an eine Bemerkung des Letzteren angeknüpft, welche folgendermassen lautet (II. Bd. S. 177 der Werke): „Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist .... in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung des materiellen Unterschiedes Anderen nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können. Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht; aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äusseren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset." Sonderbarerweise findet sich die von Gauss angegriffene Stelle in Kant's Hauptwerke, der Kritik der reinen Vernunft, gar nicht; die einzige Stelle, welche Gauss gemeint haben kann, steht zu Anfang des § 13 der „Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik", aber in dieser handelt es sich nur um den Nachweis, dass es Unterschiede giebt, die begrifflich gar nicht ausdrückbar sind, sondern lediglich in der Anschauung bestehen. Rechte und linke Hand z. B. haben dieselben Bestandtheile in gleicher Anordnung (auf den Daumen folgt allemal der Zeigefinger u. s. w.); wer also (wie Hegel) die Anschauung ignorirt und mit dem Begriffe Alles construirt zu haben glaubt, müsste demnach beide Hände für identisch erklären und den rechten Handschuh über die linke Hand ziehen können; in der That besteht aber die Verschiedenheit, dass die Anordnung der gleichen Bestandtheile nach zwei entgegengesetzten Richtungen geht, und Das lässt sich durch keinen Begriff, sondern einzig und allein durch Anschauung erkennen. Dies und nichts weiter wollte Kant an jener Stelle nachweisen; in dieser simpeln Bemerkung gleich einen „Beweis" für die rein subjective Bedeutung des Raumes zu finden, ist Kant gar nicht eingefallen; dazu gehörten noch ganz andere Untersuchungen, von denen der Verfasser das Nöthigste mittheilt und mit eigenen guten Anmerkungen begleitet.

Die zweite Abhandlung, betreffend „die Axiome der Geometrie", richtet sich hauptsächlich gegen die kleine Schrift Riemann's „über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (aus dem Nachlasse herausgegeben von Dedekind). Schon der Titel dieser Schrift verräth eine gewisse Unklarheit, die nachher scharf hervortritt, wenn Riemann behauptet, „dass die Thatsachen, welche Euklid in Form von Axiomen ausgesprochen, wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, d. h. nur Hypothesen seien u. s. w." Hier verwechselt der berühmte Mathematiker nichts Geringeres, als äusserliche Thatsachen und innere Gesetze der Anschauung, oder kürzer: Zufälliges und Nothwendiges. Eine äusserliche Thatsache besitzt allerdings nur eine empirische Gewissheit (präciser: einen bestimmten Grad von Wahrscheinlichkeit), und hieraus wird nie eine absolute Gewissheit, weil es immer freisteht, sich die Sache anders zu denken, und weil jeden Augenblick neue Erfahrungen auftauchen können, wodurch die Ansicht in der That eine andere wird (Cromwell war vielleicht ein Heuchler, vielleicht auch nicht); aber von den Principien der Geometrie gilt diese Möglichkeit des Andersseins am allerwenigsten. Man denke sich doch, wenn man kann, zwei Gerade, die sich in drei Punkten schneiden; man skizzire doch, wenn man kann, eine Gerade zwischen zwei Punkten, die länger ist als ein Kreisbogen zwischen denselben Punkten; da hilft nun einmal kein Gerede, es geht eben nicht. Ein Satz aber, dessen Gegentheil nicht einmal gedacht werden kann, ist keine mehr oder minder wahrscheinliche Hypothese, er ist vielmehr eine unerschütterliche absolute Wahrheit. Referent kann daher dem Verfasser nur beistimmen, wenn er Riemann's subtile Untersuchungen über die Eigenschaften eines ausgedehnten Mannichfaltigen wenigstens für die Geometrie nicht für besonders werthvoll erachtet. Ausserdem macht der Verfasser noch darauf besonders aufmerksam, dass Riemann offenbar die Mathematik für eine Wissenschaft aus blossen Begriffen ansieht, was sie nach Kant's klassischer Untersuchung, welche der Verfasser geschickt reproducirt, entschieden nicht ist.

In der dritten Abhandlung „über die Grundbegriffe der Geometrie und die Bewegung als Hilfsmittel bei geometrischen Untersuchungen" findet sich eine ziemliche Reihe kritischer Bemerkungen. Zunächst polemisirt der Verfasser gegen die Wunderlichkeiten in Trendelenburg's „logischen Untersuchungen". Der genannte Philosoph setzt nämlich vorläufig den ausdehnungslosen Punkt (wo er ihn hernimmt und wohin er ihn setzt, erfährt man nicht); dieser Punkt strebt über sich selbst hinaus (woher diese Unruhe?) und dehnt sich zur Linie, nachher erweitert sich die Linie zur Fläche und letztere verdickt sich zum Körper.(!) Hierzu bemerkt der Verfasser: „man stelle sich einmal recht lebhaft vor, wie der ausdehnungslose Punkt sich gleichwohl ausdehnt", und zeigt dann ganz richtig, dass die Vorstellungen von Fläche, Linie und Punkt lediglich durch Abstractionen gewonnen werden, welche den Raum als Gegenstand reiner Anschauung schon voraussetzen. Im weiteren Verlaufe seiner Untersuchungen kommt der Verfasser noch einmal auf die Riemann'sche Schrift zurück, um die Stellung der analytischen Geometrie zur rein anschaulichen synthetischen Geometrie zu charakterisiren; Referent kann auch diese Partie nur als eine gelungene bezeichnen.

Die vierte Abhandlung, „zur Methode der Geometrie", bespricht die von Mehreren (auch u. A. vom Referenten) gemachten Versuche, an die Stelle des Euklidischen Systemes ein natürlicheres zu setzen. Der Verfasser ist nun zwar von Euklid sehr wenig erbaut, aber auch mit jenen Versuchen nicht recht zufrieden, weil sie der unmittelbaren Anschauung immer noch nicht soviel Rechte zugestehen, als er verlangt. Wer selbst einen solchen Versuch gemacht hat, wird dem Referenten zugeben, dass es nicht leicht ist, das rechte Maass hierin zu treffen, und es bleibt daher nur der Wunsch übrig, dass der Verfasser, der offenbar ein guter Mathematiker ist, seine Ideen in einem Lehrbuche der Elementargeometrie verwirklichen möge. Erst wenn dieses jedenfalls bemerkenswerthe Werk vorliegt, würde sich über die Sache weiter reden lassen.

Referent gesteht gern, dass er die kleine, aber gehaltvolle Schrift mit steigendem Interesse gelesen hat, und er empfiehlt sie deshalb Allen, die einigen Sinn für die Philosophie der Mathematik besitzen. Von Herzen aber unterschreibt er den Ausspruch des Verfassers: „Man glaubt, Kant als einen überwundenen Standpunkt hinter sich zu haben, während man im Gegentheil kaum angefangen hat, ihn zu begreifen." SCHLÖMILCH.

Antikritik.

Die partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von Bernhard Riemann. Für den Druck bearbeitet und herausgegeben von K. Hattendorff. Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn. 1869.

Meine Bearbeitung von Riemann's Vorlesung ist in dieser Literaturzeitung (1870, S. 45—75) ausführlich besprochen worden. Der Herr Recensent giebt einen Ueberblick über den Gedankengang des Buches und hebt dabei eine Reihe von Punkten heraus, in denen ich mich sowohl gegen Riemann, als auch gegen die Wissenschaft vergangen haben soll. Ich habe mich, wenn auch nur mit Widerstreben, entschlossen, auf die einzelnen Ausstellungen einzugehen.

Erster Punkt.

Es handelt sich um drei Integrale und die dazu gemachten Bemerkungen, nämlich (§§ 17 und 18 meiner Bearbeitung):

„33) $$\int_0^\infty e^{-xx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

„Es kann hier nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel gelten, weil die Function unter dem Integral wesentlich positiv ist."

$$\int_0^\infty e^{-\alpha xx}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

„Auch hier ist die Quadratwurzel mit positivem Zeichen zu nehmen."

„35) $$\int_0^\infty e^{-\alpha xx}\cos\beta x\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta\beta}{4\alpha}},$$

worin β keiner Beschränkung unterliegt, aber $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ positiv zu nehmen ist."

Der Herr Recensent spricht sich darüber nicht aus, wo hier ein Fehler stecken soll. Er sagt nur:

„„Der Lehrer dagegen hat die Bemerkung gemacht: Die Gleichungen sind nur so lange giltig, als α eine reelle, positive Grösse ist.""

Hierzu darf ich wohl bemerken, dass dies in meiner Bearbeitung nicht vernachlässigt ist. Das zweite der drei Integrale ist aus 33) hergeleitet durch die Substitution $x = ay$. Die Integrationen nach x und nach y sollen von 0 bis ∞ durch das Gebiet der positiven reellen Zahlen erstreckt werden. Deshalb ist bei Einführung der Substitution besonders notirt: $a > 0$, d. h.

doch in Worten: α ist reell und grösser als 0. Nachher wird $a\alpha = \alpha$ gesetzt. Was also der Herr Recensent dem Lehrer in den Mund legt, ist in der Bearbeitung gesagt. Der Lehrer und die Bearbeitung würden indessen mit jener Bemerkung allein zu wenig gesagt haben. Riemann's Manuscript fügt durchaus correct hinzu, dass $\sqrt{\pi}$ sowohl, als $\sqrt{\alpha}$ positiv zu nehmen sind. Ich habe mich streng an das Manuscript gehalten.

Zweiter Punkt.

Es handelt sich um Fourier's Reihen. Gegen die Herleitung der Reihe, die nach den Sinus der Vielfachen des Arguments fortschreitet, hat der Herr Recensent Nichts einzuwenden. Die Reihe, die nach den Cosinus fortschreitet, hätte ebenso behandelt werden können. Sie wird hier aber auf einem sehr einfachen Wege aus der Sinusreihe abgeleitet. Der Herr Recensent „muss hier bemerken, dass Riemann diesen Weg nicht eingeschlagen". Er glaubt, „es wäre wohl am Platze gewesen, wenn ich in der Vorrede auseinandergesetzt hätte, welcher durchaus triftige Grund mich bewogen, von dem Gange, den der Lehrer beim Vortrage eingeschlagen, abzuweichen".

Ich bin nun allerdings der Meinung, dass die Vorrede zu lang geworden wäre, wenn ich den Gedankengang der einzelnen Paragraphen darin hätte begründen sollen. Doch will ich dem Herrn Recensenten den durchaus triftigen Grund nicht verschweigen: ich habe mich streng an Riemann's Manuscript gehalten.

Der Herr Recensent scheint auch nicht einverstanden zu sein mit dem, was ich über das Giltigkeitsintervall der Cosinusreihe habe drucken lassen. Die Sache ist aber vollständig in Ordnung. Da nämlich die Cosinusreihe aus der Sinusreihe abgeleitet ist, so darf man zunächst auch für sie nur das Giltigkeitsintervall der Sinusreihe nehmen, nämlich $\pi > x > 0$. In dem Beispiele $f(x) = x$ wird dann mit Absicht darauf aufmerksam gemacht, dass hier die Reihe auch noch für $x=0$ und $x=\pi$ den Functionswerth giebt. Ob dies allgemein von der Cosinusreihe gelte, bleibt allerdings eine offene Frage. Der Herr Recensent scheint mir nun vorwerfen zu wollen, dass ich diese offene Frage übersehen oder vertuscht habe. Das ist aber nicht der Fall. Der Herr Recensent hätte nur den citirten Satz:

„Vorläufig notiren wir als Giltigkeitsintervall der Reihe

$$\pi > x > 0\text{"}$$

nicht aus dem Zusammenhange reissen sollen. Er hätte unmittelbar vorher lesen können:

„Ob die abgeleitete Reihe allgemein für $x=0$ und $x=\pi$ noch giltig ist, lässt sich mit Sicherheit noch nicht beurtheilen."

Der Herr würde dann die definitive Antwort auch da gefunden haben, wo sie gegeben werden kann, nämlich nach Durchführung der Dirichlet-schen Summirung (S. 80 meiner Bearbeitung).

Dritter Punkt.

Es handelt sich um die beiden Sätze von **Dirichlet**:

$$\lim \int_0^b f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0)$$

und

$$\lim \int_c^b f(\beta) \frac{\sin h\beta}{\sin\beta} d\beta = 0,$$

wenn

$$\frac{\pi}{2} \geqq b > c > 0.$$

Der Herr Recensent hebt den Fall heraus, dass $f(\beta)$ zwischen c und b unendlich wird. Ich muss bemerken, dass **Riemann**'s Manuscript diesen Fall bei Seite lässt. Ich habe mich also an das halten müssen, was **Riemann** mündlich vorgetragen, sowie an die jedem Mathematiker zu Gebote stehende Literatur. Die Verantwortung für das, was ich habe drucken lassen, trage ich allein. Der Herr Recensent druckt die ganze Stelle wörtlich ab und fügt dann hinzu: „Ich glaube, an dieser Stelle bedarf es keines Wortes von meiner Seite."

Das glaube ich, der Herausgeber, allerdings auch. Es wäre mir aber angenehm gewesen, wenn der Herr Recensent seine Ausstellungen vorgebracht hätte. Das fett gedruckte Wort „**Voraussetzung**" bringt mich auf die Vermuthung, dass der Herr Recensent wissen will, wo diese Voraussetzung gemacht sei. Er braucht nur eine gute halbe Seite zurückzugehen zu den Worten: Ist dies der Fall ... Dies, d. h das unmittelbar vorher Gesagte. Es ist aber in der That nicht nöthig, bei diesem Punkte länger zu verweilen, da ich das Urtheil über die Darstellung den Fachgenossen überlassen darf.

Ich übergehe auch die folgende Stelle (S. 55 der Recension) und bemerke nur, dass der Herr Recensent hier die Güte hat, ein Stück der von mir vernachlässigten Vorrede zu schreiben. Ich habe nun einmal keinen Geschmack für lange Vorreden. Hätte ich die mir bis dahin unbekannten Wünsche des Herrn berücksichtigen wollen, meine Vorrede wäre am Ende so lang geworden, wie die Recension, und ich habe einen grossen Widerwillen gegen alles überflüssige Schreiben.

Vierter Punkt.

Der Herr Recensent verlangt von mir den Beweis dafür, dass sich durch Reihenentwickelung zeigen lässt:

$$\lim e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} t^{-\frac{3}{2}} = 0 \text{ für } t = 0.$$

Diesen Beweis wird der Herr Recensent im Stande sein, jedem Schüler zu führen; es wäre also unartig von mir, vorzugreifen. Ich darf vielleicht den Herrn erinnern an die Reihe für $e^{+\frac{x^2}{4a^2t}}$. Diese könnte man mit $t^{+\frac{1}{2}}$ multipliciren. Das Resultat könnte man in den Nenner, die Einheit in den Zähler setzen und fragen, was aus dem Bruche wird für $t=0$.

Fünfter Punkt.

Es handelt sich um die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Nebenbedingungen lauten:

$$u=F(r,\theta,\varphi)\text{ für }t=0,$$
$$u=0\text{ für }r=0.$$

Die partielle Differentialgleichung muss in der Recension, wenn man den Herrn Recensenten verstehen soll, mit (1), d. h. arabisch Eins, bezeichnet werden. Alsdann muss man auf S. 58 der Recension statt

$$n=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$$

lesen:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n,$$

und unmittelbar vorher vor: „die Function" schreiben: (1) d. h. arabisch Eins, statt (I), d. h. römisch Eins.

Dann ist das Citat im Wesentlichen correct. Wenn der Herr Recensent, anstatt „etc. etc." zu setzen, ruhig weiter gelesen und namentlich den Zusammenhang mit dem folgenden Paragraphen aufgefasst hätte, so würde er vielleicht eingesehen haben, dass bedeutende Aenderungen nicht vorgenommen sind. Die Redaction — das steht auch in meiner kurzen Vorrede — habe ich zu verantworten. Ich lasse mich aber auf eine Discussion nur ein, wenn mir nachgewiesen ist: Hier liegt ein Fehler. Die Frage, ob Jemand ohne andere Kenntniss der Kugelfunctionen den § 72 verstehen werde, kann ich mit dem Herrn Recensenten am allerwenigsten besprechen. Es kommt für das Verständniss mathematischer Deductionen immer viel auf den guten Willen an.

Sechster Punkt.

Der Herr Recensent citirt den § 70 meiner Bearbeitung, der von der Anwendung der Wärmetheorie Fourier's auf die Erdtemperatur handelt. Der Herr setzt nach wörtlicher Wiedergabe des Paragraphen das Folgende hinzu:

„„Ich kann nicht umhin, hier dem geehrten Leser zu gestehen, dass ich nie grösseren Nonsens und grössere Widersprüche im schönsten Deutsch vereint gefunden habe in einem wissenschaftlichen Werke. Der ganze § 70 eignet sich meiner Ansicht nach ausgezeichnet für eine mathematische Bierzeitung.““

Dieser zarten und geschmackvollen Kritik habe ich gar nichts zu erwidern. Ich muss aber bemerken, dass der § 70 nicht von mir herrührt, sondern aus Riemann's Manuscript abgedruckt ist. Die Handschrift ist in meinen Händen. Ich bin gern bereit, sie Jedem, der es wünscht, zur Ansicht vorzulegen. Einen Besuch des Herrn Recensenten muss ich mir allerdings verbitten.

Siebenter Punkt.

Der Herr Recensent stellt in Beziehung auf die schwingenden Saiten zwei Fragen, nämlich:

„„Würde es nicht einfacher und verständlicher gewesen sein, zu sagen: q ist der Elasticitätsmodul der Saite?““

und:

„„Der Herr Bearbeiter hält es nicht der Mühe werth, zu sagen: Die Longitudinalschwingungen hängen von dem Elasticitätsmodul der Saite, die Transversalschwingungen dagegen von der Spannung derselben ab. Wozu wendet der Herr Professor Mathematik auf physikalische Probleme an, wenn derselbe nicht zu physikalischen Resultaten gelangt?““

Der Herr Recensent fügt dann hinzu:

„„Ich brauche wohl nicht zu bemerken, dass Riemann auf jede physikalische Wahrheit, worauf die mathematischen Formeln deuteten, sorgfältig aufmerksam machte.““

Da ich das ganze Capitel über die schwingenden Saiten fast wörtlich aus Riemann's Manuscript genommen habe, so sieht der geehrte Leser, dass der Herr Recensent nicht, wie er beabsichtigte, Riemann gegen Hattendorff, sondern Riemann gegen Riemann ins Feld führt. Uebrigens ist der Name „Elasticitätsmodul“ kein physikalisches Resultat, und der Satz von den Longitudinal- und Transversalschwingungen ist für den denkenden Leser deutlich genug in den ersten drei Formeln auf S. 187 enthalten.

Achter Punkt.

Der Herr Recensent ist im Zweifel darüber, ob ich die Saiten zu den „luftförmigen oder den tropfbarflüssigen“ Körpern zähle. Ich habe kein Interesse daran, diesen Zweifel aufzuklären. Der Herr hätte sich die ganze Nörgelei über die Ueberschrift „Schwingungen elastischer fester Körper“ sparen können. Wenn es ihm auf die Sache ankam, brauchte er nur den ersten Absatz von § 79 zu lesen.

Ich muss diese und einige andere Kleinlichkeiten übergehen und kann mich namentlich nicht dabei aufhalten, dem Herrn die „verlorenen" Gleichungen (2) von S. 206 auf Schritt und Tritt nachzutragen. Ich will nur bemerken, dass leider am Schluss des § 85 ein Druckfehler stehen geblieben ist. Es muss, wie man leicht sieht, heissen:

$$y_z = z_y = 0,$$
$$z_x = x_z = 0,$$
$$x_y = y_x = 0.$$

Neunter Punkt.

Im Anfange des § 100 ist auseinandergesetzt, dass ein Flüssigkeitstheilchen, welches zur Zeit t im Punkte (x, y, z) sich befand, nach Ablauf des nächsten Zeitdifferentials dt, also zur Zeit $t + dt$, im Punkte

$$(x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ z + w\,dt)$$

angekommen ist. Dasselbe Theilchen hat zur Zeit t die Dichtigkeit ϱ, zur Zeit $t + dt$ die Dichtigkeit

$$\varrho + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)dt.$$

Soll nun im besondern Falle die Dichtigkeit constant sein, so sieht man, dass

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$$

zu setzen ist. Dies geschieht zu Ende des § 100. Der Herr Recensent sieht darin den Beweis, dass ich nicht einmal die ersten Elemente der Differentialrechnung anzuwenden verstehe. Er hält es für überflüssig, mehr hinzuzufügen. Ich auch.

Zehnter Punkt.

Es handelt sich bei den hydrodynamischen Grundgleichungen um die Bedingungen für das Vorhandensein einer Potentialfunction. Diese Bedingungen lauten dahin, dass während des Verlaufes der Bewegung zu jeder Zeit

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

sein muss. Nun wird im § 101 bewiesen, dass diese drei Gleichungen zur Zeit $t + dt$ noch giltig sind, wenn sie es zur Zeit t waren. Die Bedingungen sind demnach zu jeder Zeit erfüllt, wenn sie es in irgend einem Momente sind, z. B. für $t=0$. Die vereinfachten Bedingungen bestehen also darin, dass die obigen drei Gleichungen zur Zeit $t=0$ erfüllt sein müssen. Ich habe dies in den Formeln durch den an u, v, w angehängten Index 0 ausgedrückt.

Der Herr Resensent erklärt nun die Vereinfachung für mein besonderes Geheimniss. Er überlegt, ob ich vielleicht glaubte, ein mathematischer Ausdruck werde dadurch einfacher, dass man allen Grössen Indices giebt. Er citirt etwas als meinen „ausgezeichneten" Beweis, was ich nie gedacht, geschweige denn gedruckt habe, und fordert das Publikum auf, danach über meine Fähigkeiten zu urtheilen.

Es lässt sich wohl nicht leugnen, dass der Herr Recensent sich hier etwas weit aufs Feld gewagt hat. Ich ziehe daraus keinen Schluss auf seine Fähigkeiten. Aber das liegt auf der Hand, dass der Herr sich besser dabei gestanden hätte, wenn er vor der Recension hätte versuchen wollen, den Gedankengang des citirten Paragraphen zu verstehen. Was der Herr Recensent an dieser Stelle Riemann in den Mund legt, mag der Herr in der Vorlesung so aufgefasst haben. Riemann hat es aber nicht gesagt.

Elfter Punkt.

Der Herr Recensent wendet sich noch einmal gegen die Vorrede. Er macht mir einen Vorwurf daraus, dass ich in meiner Vorrede das Wort „Ringcoordinaten" gebrauche, das Riemann im Vortrage nicht gebraucht hat. Es ist dem Herrn wahrscheinlich, dass ich „Semipolarcoordinaten" gemeint habe. Was „Ringcoordinaten" sind, kann der Herr Recensent von jedem Mathematiker erfahren, und was andererseits unter „Semipolarcoordinaten" zu verstehen ist, darüber brauche ich mir von dem Herrn Recensenten keinen Aufschluss zu holen. Doch das ist Nebensache. Ich habe in der Vorrede eine Aufgabe zu besonderer Veröffentlichung vorbehalten, weil in der Durchführung der von Riemann vorgezeichneten Rechnung noch ein Punkt aufzuklären ist. Der Herr Recensent schüttet nun mit einer wahren Hast das Füllhorn seines Heftes aus. Ich kann dem Herrn zur Beruhigung sagen, dass mir das von ihm Vorgebrachte und vielleicht noch etwas mehr bekannt ist, und doch noch ein Punkt, ein einziger Punkt, Herr Recensent, aufzuklären bleibt. Es scheint dem Herrn Recensenten bekannt zu sein, dass eine Hauptaufgabe bei partiellen Differentialgleichungen darin besteht, die willkürlichen Constanten der allgemeinen Lösung aus den Bedingungen des Problems zu bestimmen. Nach Riemann's eigenem Ausspruche (§ 41 am Ende) liegt darin häufig der wichtigste Punkt der Frage. Der Herr Recensent sagt selbst, dass Riemann bei der vorliegenden Aufgabe diese Coëfficientenbestimmung in der Vorlesung nicht durchgeführt hat. Und weil ich sage:

> „Riemann hat sich darauf beschränkt, für die Lösung den Weg im Grossen vorzuschreiben",

fühlt der Herr Recensent die sittliche Verpflichtung, mich der Unwahrheit zu zeihen!

Der Herr giebt sich die Miene, als müsse er Riemann in Schutz nehmen gegen meine Nachrede, er habe Unfertiges gegeben. Diese Nachrede habe ich nicht geführt. Wenn ich die Aufgabe von der Bewegung des Ringes veröffentliche, dann kann man Rechenschaft von mir verlangen über das, was ich vorgefunden habe. Ich werde diese Rechenschaft nicht schuldig bleiben. Wer das, was ich bis jetzt von Riemann's Arbeiten herausgegeben habe, mit unbefangenem Auge prüfen will, der kann mir nicht nachsagen, dass ich mich ruhmsüchtig vorgedrängt habe. Ich bin mir bewusst, mit Liebe und Treue gearbeitet zu haben, und ich glaube, es ist nicht nöthig, Riemann gegen Anmassungen von meiner Seite zu schützen. Und wenn es nöthig wäre, und wenn der Recensent, Herr Dr. Fr. Gödecker in Lüneburg, den Beruf und das Recht dazu gehabt hätte, durch diese Recension wäre er des Rechtes verlustig gegangen, durch diese Recension, die von blinder Animosität dictirt ist. Geht doch der Herr in seinem Eifer gegen mich so weit, dass er Riemann's Manuscript eine Bierzeitung nennt, weil er sich einbildet, es sei von mir geschrieben. Riemann wird dadurch nicht herabgesetzt, und die höhnischen Redensarten, die gegen mich geschleudert werden, machen mich auch nicht schlechter. Wenn aber der Herr Dr. Fr. Gödecker um Nichts und wieder Nichts es wagt, mit der Beschuldigung der Unwahrheit die Reinheit meines Namens anzutasten, so weiss ich, dass dafür die Verachtung jedes Mannes von Ehre auf ihm lastet, eine Verachtung, die auch nicht gemildert werden kann durch das Mitleid, das man mit dem wissenschaftlichen Theile seines Angriffes fühlen muss.

Hannover, den 20. Juni 1870. K. Hattendorff.

Bibliographie

vom 15. Juni bis 1. August 1870.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1870, 2. Abth. 1. Heft. Wien, Gerold. pro compl. 8 Thlr.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C. W. Borchardt. 72. Th., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft; herausgegeben von A. Auwers und A. Winnecke. 5. Jahrg., 1. u. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. à ½ Thlr.

Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, redig. von R. Wolf. 15. Jahrg., 1. Heft. Zürich, Höhr. pro compl. 1 Thlr.

Reine Mathematik.

Gauss', C. F., Werke. 1. Bd. 2. Abdruck. Göttingen, Rente. 4 Thlr. 12 Ngr.

Koppe, K., Anfangsgründe der algebraischen Analysis. Essen, Bädecker. ⅔ Thlr

CLEBSCH, A., Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen fünfter Ordnung. Göttingen, Dieterich. 24 Ngr.

FAHLE, H., Leitfaden des mathematischen Unterrichts für die drei ersten Gymnasialclassen. 2. Aufl. Danzig, Anhuth. 27 Ngr.

HENRICH, F., Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie, mit zahlreichen Aufgaben. Wiesbaden, Limbarth. ½ Thlr.

Angewandte Mathematik.

STEINHAUSER, A., Ueber die geometrische Construction der Stereoskopbilder. Graz, Leykam. ½ Thlr.

SCHELL, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. 4. Lief. Leipzig, Teubner. 28 Ngr.

HÖLTSCHL, J., Das Höhenmessen mit Metallbarometern und die Ausmittelung der Ablesecorrectionen. Wien, Beck's Univ.-Buchh. 16 Ngr.

ENGELMANN, R., Resultate aus Beobachtungen auf der Leipziger Sternwarte. I. Beobachtungen am Meridiankreis. Leipzig, Engelmann. 2½ Thlr.

CHOULANT, O., Die Hauptergebnisse der mit der europäischen Gradmessung verbundenen Höhenbestimmungen im Königreich Sachsen. Freiberg, Engelhardt. ⅚ Thlr.

ZINKEN, gen. SOMMER, H., Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig, Vieweg. 1⅚ Thlr.

WÖHLER, A., Ueber die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

ROBERT, P. de, *Principes de thermodynamique.* 2. éd. Turin, Löscher. 3⅓ Thlr.

Physik.

KOHLRAUSCH, F., Leitfaden der praktischen Physik, zunächst für das physikalische Prakticum in Göttingen. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

LANG, V. v., Ueber eine neue Untersuchungsmethode für die Gasdiffusion. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

PUSCHL, C., Ueber eine kosmische Anziehung, welche die Sonne durch ihre Strahlen ausübt. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

NEUMANN, C., Beobachtungen über die Schwingungen gestrichener Saiten. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Spectralanalyse in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaftlichen Nachträgen von H. E. Roscoe. Autorisirte deutsche Ausgabe, bearbeitet von Schorlemmer. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1870. X und 300.

Das vorliegende Werk reiht sich den vorzüglichen, im besten Sinne populären naturwissenschaftlichen Werken, die wir in neuerer Zeit von englischen Autoren erhalten haben, würdig an.

Die Vorlesungen beginnen mit den einfachsten Erörterungen über die Zerlegbarkeit des weissen Lichtes und schliessen mit einer eingehenden Orientirung über die neuesten Resultate, die für die physische und chemische Beschaffenheit der Sonne, für die Beschaffenheit und die Bewegung der Fixsterne, für die Spectren der Nebelflecke und Cometen erlangt worden sind. Die Deductionen sind scharf und klar, die Beschreibung der Versuche, durch vorzüglich entworfene und ausgeführte Holzschnitte unterstützt, ist in hohem Grade anschaulich und lebendig.

Um auch einem tiefergehenden wissenschaftlichen Bedürfniss entgegenzukommen, hat nun der Verfasser jeder Vorlesung eine Reihe von Originalabhandlungen oder Auszügen aus solchen beigegeben, welche eine hervorragende Bedeutung für Spectralanalyse und ihre Anwendung erlangt haben. In welch hohem Grade dadurch der wissenschaftliche Werth des vortrefflichen Buches gesteigert wird, erhellt am Besten durch Aufzählung eines Theiles der mitgetheilten Abhandlungen. Nach der ersten Vorlesung folgen u. A. Abhandlungen aus Newton's klassischer Optik, die Fundamentalversuche über Farbenzerstreuung enthaltend; Bunsen's und Roscoe's Untersuchungen über die chemisch wirksamen Strahlen der Sonne. Nach der zweiten Vorlesung: Ein Theil der Abhandlung Kirchhoff's und Bunsen's (Poggendorff CX, 167 flgg.) über die Spectralreactionen der Salze der Alkali- und der Erdalkalimetalle; ein Theil der zweiten grossen Abhandlung derselben Forscher (Poggendorff CXIII, 337) über die Methode, den Spectralapparat zu benutzen; die Abhandlung Bunsen's (Poggendorff CXIX, 10) über die graphische Darstellung von Spectralbeobachtungen.

Der dritten Vorlesung sind angehängt: Ein Auszug aus Kirchhoff's und Bunsen's zweiter Abhandlung über die Reactionen der Rubidium- und Cäsiumverbindungen; Kirchhoff's Abhandlung zur Geschichte der Spectralanalyse (Poggendorff CXVIII, 94).

Der vierten Vorlesung sind beigefügt: Huggins' Zeichnung der Metallspectra; ein Auszug aus Huggins' Abhandlung über die Spectra einiger chemischer Elemente (Phil. Trans. 1864, S. 139), nebst den zugehörigen Tabellen; Beschreibung des Mikrospectroskops von Sorby und Browning.

Nach der fünften Vorlesung, welche die Resultate der spectroskopischen Sonnenbeobachtungen enthält, folgen ein Auszug aus Angström's *Recherches sur le spectre solaire*, *Ups.* 1868; die interessanten Mittheilungen Lockyers über die Beobachtung der Protuberanzspectren an der unverfinsterten Sonne, vom 20. October 1868 beginnend, nach den *Proc. of the Roy. Soc. of London*, *Vol. XVII*, 1868—1869; sowie die klassischen Beobachtungen Zöllner's über die Protuberanzen nach Poggendorff CXXXVIII, S. 139, nebst einer vorzüglich ausgeführten Wiedergabe der jener Abhandlung beigegebenen chromo-lithographirten Abbildung der rothen Bilder von 19 Protuberanzformen. Dieser Vorlesung ist ferner Kirchhoff's grosse Zeichnung des Sonnenspectrums von $A-G$ und Angström's Ergänzung für den Raum $G-H_2$ beigegeben.

Die sechste Vorlesung, der Spectroskopie der Planeten und der Fixsterne gewidmet, wird durch eine chromo-lithographische Tafel mit sieben Fixsternspectren, dem Sonnenspectrum, dem Wasserstoffspectrum, dem Stickstoffspectrum und zwei Kohlenstoffspectren (Leuchtgas und Cyangas) ergänzt, ferner durch Auszüge aus Huggins' Abhandlungen über die Mikroskopie des Mars, über die Versuche, die Bewegung gewisser Fixsterne aus den Spectren zu erkennen; dann die Mittheilung Zöllner's über sein neues Reversionsspectroskop; die Tabellen zu Kirchhoff's Zeichnung des Sonnenspectrums und der hellen Spectrallinien der Elemente; die Tabelle der Linien des Cer, Lanthan, Didym, Palladium, Platin, Iridium, Ruthenium; die Tabelle der Haupteisenlinien von Thalén und Angström.

Den Schluss des Werkes bildet ein reichhaltiger Literaturnachweis.

R. Heger.

Die Kepler'schen Gesetze; eine neue elementare Ableitung derselben aus dem Newton'schen Anziehungsgesetze. Von Dr. H. Müller, Professor am Gymnasium zu Lahr. Braunschweig, Druck und Verlag von Fr. Vieweg & Sohn. 1870.

Das vorliegende, fünf Druckbogen umfassende Schriftchen zerfällt in drei Abschnitte, von welchen die beiden ersten als Einleitungen zu betrachten sind. Im ersten Abschnitte werden die Kegelschnitte soweit untersucht, als es für die Theorie der Planetenbewegung erforderlich ist; der zweite Abschnitt enthält eine elementare Herleitung der nöthigen Sätze aus der Dynamik mit Einschluss des Principes der Erhaltung der Flächen bei Centralbewegungen und des Satzes von der lebendigen Kraft; nach diesen Vorarbeiten wird im letzten Abschnitte die Centralbewegung nach dem Newton'schen Anziehungsgesetze discutirt. Der Verfasser geht hierbei fast genau denselben Weg wie die analytische Mechanik. Bezeichnet nämlich K die Anziehung der Sonne auf eine in der Entfernung 1 befindliche Masseneinheit, so sind bekanntlich die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Kx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ky}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

und diese liefern einerseits die Flächengleichung

$$r^2\,d\theta = A\,dt \text{ oder } v = \frac{A}{q},$$

andererseits mittels des Satzes von der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}v^2 = B + \frac{K}{r},$$

worin A und B Integrationsconstanten sind, v die Geschwindigkeit, r den Radius vector und q den Abstand des anziehenden Mittelpunktes von der durch den angezogenen Punkt gehenden Tangente an der Bahn bezeichnet. Durch Elimination von v entsteht die Gleichung

$$\frac{A^2}{2q^2} = B + \frac{K}{r},$$

welche eine charakteristische, rein geometrische Eigenschaft der gesuchten Trajectorie darstellt und zur Bestimmung der letzteren dient. Bis zu dieser Stelle ist der Gang des Verfassers völlig einwurfsfrei; im Folgenden aber begnügt sich der Verfasser mit dem Nachweise, dass die obige Eigenschaft den Kegelschnitten zukommt, und das ist, streng genommen, nicht ausreichend. Zufolge des Werthes

$$q = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

ist nämlich die obige Gleichung eine Differentialgleichung zweiten Grades, die mehrere verschiedene Auflösungen zulassen könnte; der Verfasser hat daher nur bewiesen, dass die Planetenbahnen Kegelschnitte sein können, nicht aber, dass sie Kegelschnitte sein müssen. Das Letztere dürfte sich auch schwerlich auf elementarem Wege beweisen lassen, wenigstens nur mit den grossen Weitläufigkeiten, welche bei jeder Reduction eines Integrales auf den Grenzwerth einer Summe unvermeidlich sind. Sonach hat der Verfasser immerhin das Mögliche geleistet und, wie Referent gern anerkennt, in einer durchaus klaren Darstellung. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. October 1870.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1869. I. Bd. Berlin, Dümmler. 10 Thlr.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 30. Bd. Wien, Gerold. 11⅓ Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Jahrgang 1870, 1. Abth. 1. Heft. Wien, Gerold. pro 1.—10. Heft 8 Thlr.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1870, I, 3. und 4. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, herausgegeben von C. v. Littrow. Dritte Folge, 16. Bd., Jahrg. 1866. Wien, Wallishauser. 2⅓ Thlr.

Journal des Collegiums für Lebensversicherungswissenschaft zu Berlin. 2. Bd. 2. Heft. Berlin, Weber's Verlagsconto. ⅓ Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von J. A. Grunert. 52. Theil 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Mathematische Annalen, herausgegeben von A. Clebsch u. C. Neumann. 3. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 5⅓ Thlr.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'académie imp. de St. Petersbourg. Tome IV, livr. 3. Leipzig, Voss. 17 Ngr.

Reine Mathematik.

Curtze, M., Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (circa 1320—1382). Berlin, Calvary & Comp. 12 Ngr.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Bd.: Aufgaben aus der Integralrechnung. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

Spitz, C., Erster Cursus der Differential- und Integralrechnung. 1. Lief. Leipzig, Winter. 1⅓ Thlr.

Unferdinger, J., Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrales

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\, \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\, dy\, dz.$$

(Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Zmurko, L., Studien im Gebiete numerischer Gleichungen, mit Zugrundelegung der analytisch-geometrischen Anschauung im Raume. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Thlr. 16 Ngr.

Lalande, J., Tafeln der fünfstelligen Logarithmen. 4. neu bearbeitete Auflage. Leipzig, Holtze. 18 Ngr.

Nell, A., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen. 2. Aufl. Darmstadt, Diehl. 24 Ngr.

Ballauf, L., Lehrbuch der Arithmetik und Elemente der Algebra. 1. Theil. Oldenburg, Stalling. 1 Thlr.

Stubba, A., Sammlung algebraischer Aufgaben. 6. Aufl. Altenburg, Pierer. ⅔ Thlr.

Weyr, E., Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

——, Geometrische Mittheilungen. I u. II. (Akad.) Wien, Gerold. à 2 Ngr.

Lemkes, H., *Theoria fractionum continuarum ascendentium.* Berlin, Calvary & Comp. ⅙ Thlr.

Frobenius, G., *De functionum analyticarum unius variabilis per series infinitas repraesentatione.* Berlin, Calvary & Comp. ⅙ Thlr.

Loewenherz, L., *De curvis tangentialibus curvarum algebraicarum.* Berlin, Calvary & Comp. ⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Kanner, M., Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik. Berlin, Weber's Verlagsconto. ⅙ Thlr.

Scherling, Chr., Vorschule und Anfangsgründe der descriptiven Geometrie. Hannover, Hahn. 21 Ngr.

Niemtschik, R., Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten. (Akad.) Wien, Gerold. ¼ Thlr.

Generalbericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1869. Berlin, G. Reimer. 1⅙ Thlr.

Bauernfeind, C. M., Das bayerische Präcisions-Nivellement. (Akad.) München, Franz. 1⅙ Thlr.

HOFFMANN, F., Ueber Tracirung von Eisenbahnlinien im offenen und coupirten Terrain. Wien, v. Waldheim. 1 Thlr. 22 Ngr.

SCHIELE, L., Theorie der Ausweichgleise. Umgearbeitet von A. E. FRIEDRICH. 3. Aufl. Weimar, Voigt jun. ½ Thlr.

EICKEMEYER, F., Das Massennivellement und dessen praktischer Gebrauch. Leipzig, Teubner. ⅚ Thlr.

FÖRSTER, W., Metronomische Beiträge. Nr. 1. Berlin, Möser. ½ Thlr.

RITTER, A., Lehrbuch der technischen Mechanik. 2. Aufl. Hannover, Rümpler. 4⅚ Thlr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 1. Theil. 5. Aufl. 1. u. 2. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

——, dasselbe. 3. Theil, 2. Aufl. 1. u. 2. Lief. Ebendas. 1 Thlr.

HEINZERLING, F., Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken- und Hochbau-Constructionen. Leipzig, Felix. 2⅚ Thlr.

FUNCKE, G. H., Zur Theorie des Rollens. Göttingen, Rente. 1½ Thlr.

Taschenbuch des Ingenieurs, herausgegeben von dem Verein „die Hütte". 8. für Fuss- und Metermass umgearbeitete Auflage. Berlin, Ernst & Korn. 1⅚ Thlr.

OPPOLZER, TH., Definitive Bahnbestimmung des Planeten (59) „Elpis". (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

——, Ueber den Venusdurchgang des Jahres 1874. (Akad.) Wien, Gerold. 14 Ngr.

RADAKOWITSCH, N., Ueber den Kreisprocess der mechanischen Wärmetheorie und die Constanz der specifischen Wärmen der Gase. Göttingen, Dieterich. 16 Ngr.

Physik.

TYNDALL, J., Faraday und seine Entdeckungen. Autorisirte deutsche Uebersetzung, herausgegeben durch H. HELMHOLTZ. Braunschweig, Vieweg. 1⅚ Thlr.

BAENITZ, C., Lehrbuch der Physik. Berlin, Stubenrauch. 17½ Ngr.

ROSCOE, H., Die Spectralanalyse. Autorisirte deutsche Uebersetzg., bearb. v. SCHORLEMMER. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr.

REITLINGER, E., und M. KUHN, Ueber Spectra negativer Elektroden und lange gebrauchter Geissler'scher Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

HELMHOLTZ, H., Die Lehre von den Tonempfindungen. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3½ Thlr.

STEFAN, J., Ueber die Erregung longitudinaler Schwingungen in der Luft durch transversale. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

STERN, Ueber die Resonanz der Luft im freien Raume. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

LOSCHMIDT, J., Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasen ohne poröse Scheidewände. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

WEDELSTÄDT, L. v., Elektricität, Wärme, Licht. Berlin, Lüderitz. 18 Ngr.

SCHELLEN, H., Der elektromagnetische Telegraph. 5. Auflage. 3. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

BRUHNS, C., Meteorologische Beobachtungen, angestellt auf der Leipziger Universitätssternwarte in den Jahren 1868 und 1869. Leipzig, Hinrichs. 1 Thlr.

PRESTEL, M., Der Sturmwarner und Wetteranzeiger. Emden, Haynel. ¾ Thlr.

DOVE, H. W., Darstellung der Wärmeerscheinungen durch fünftägige Mittel. 3. Theil, enthaltend die Abweichungen von 1863—1869. (Akad.) Berlin, Dümmler. 2⅓ Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1869.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Akustik.

207. *On the theory of sound.* *Moon.* *Phil. Mag. XXXVII*, 189.

Analytische Geometrie der Ebene.

208. Die harmonischen Polarcurven. Bretschneider. Grun. Archiv L, 475.
209. *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes. Habich. Annali mat. Ser. 2, II*, 134.
210. Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen. Durège. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 368.

Vergl. Gleichungen 281. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung. Maxima und Minima 306. Rectification. Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

211. *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Codazzi. Annali mat. Ser. 2, II*, 101, 269. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 200.]
212. *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. Aoust. Annali mat. Ser. 2, II*, 39. [Vergl. Bd. XI, Nr. 149.]
213. *Mémoire sur les lignes spiriques. De la Gournerie. Journ. mathém. XXXIV*, 9, 103.
214. Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten. Richelot. Crelle LXX, 137.

Vergl. Ellipsoid. Krümmungslinien. Maxima und Minima 307. Oberflächen, Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

215. Ueber die Elimination des Knotens in dem Problem der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXIV, 81; LXXV, 113.
216. Ueber die Flächenintegrale in dem Probleme der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXIV, 85.
217. Eine Transformation der Differentialgleichungen der Bewegung in dem Problem der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXIV, 89.
218. Ueber die lineare Transformation in dem Problem der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXV, 115.
219. Ueber eine Transformation in dem Problem der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXV, 121.
220. Ueber die Integration der Störungsglieder in dem Problem der drei Körper. Weiler. Astr. Nachr. LXXV, 123.

221. Bemerkungen über das Problem der drei Körper. Radau. Astr. Nachr. LXXIV, 145.
222. Einige Bemerkungen, betreffend die Berechnung von Cometenbahnen. Klinkerfues. Astr. Nachr. LXXV, 81.
223. Ueber die scheinbare und absolute Grösse der Sonne. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 525.

Attraction.

224. *Théorie nouvelle de la gravitation. Leray. Compt. rend. LXIX*, 615.
225. *Sur la théorie de la pesanteur. Lecoq de Boisbaudran. Compt. rend. LXIX*, 703.
226. *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique rationelle et entière de la distance d'un centre fixe. Björling.* Grun. Archiv L, 56.
227. Zur Theorie des Potenziales. Grünwald. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 521.
228. Zur Potentialtheorie. Kronecker. Crelle LXX, 246.
229. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. Mertens. Crelle LXX, 1.
230. Ueber die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axe senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe. Grube. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 267.

Vergl. Geschichte der Mathematik 275.

B.

Bestimmte Integrale.

231. Beweis eines Hilfssatzes in der Theorie der bestimmten Integrale. Hankel. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 436. [Vergl. Nr. 20.]
232. *Sur quelques intégrales définies. Liouville. Journ. mathém. XXXIV*, 298, 300.
233. Ueber drei Integrationen innerhalb des Gebildes $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots=1$. Most. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 422.
234. *Sopra alcune proprietà degl' integrali euleriani di prima e seconda specie. Matthiessen. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 21.

Vergl. Elliptische Integrale. Ultraelliptische Functionen.

C.

Combinatorik.

235. *Sur les assemblages de lignes. Camille Jordan.* Crelle LXX, 185.

Conforme Abbildung.

236. Zur Abbildung des Rechteckes auf der Kreisfläche. Jochmann. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 532.
237. Ueber einige Abbildungsaufgaben. H. A. Schwarz. Crelle LXX, 105.
238. Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. H. A. Schwarz. Crelle LXX, 121.
239. Ueber conforme Kartenprojectionen. Grunert. Grun. Archiv L, 176.

D.

Determinanten.

240. *Applications nouvelles des déterminants à l'algèbre et à la géométrie. Versluys.* Grun. Archiv L, 157, 210.
241. *On two remarkable resultants arising out of the theory of rectifiable logarithmic waves. Sylvester. Phil. Mag. XXXVII*, 375.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

242. Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 445.
243. *Recherches des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi à la même quadrique. Casey. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 303.

Differentialgleichungen.

244. Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht. Du Bois-Reymond. Crelle LXX, 299.
245. *Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie.* *Lipschitz.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 288.
246. *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* *Imschenetzky.* Grun. Archiv L, 278.
247. *Sopra una equazione a differenziali parziali del primo ordine.* *Schlaefli.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 89.
248. Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Prym. Crelle LXX, 354.
249. *Sur une certaine classe d'équations différentielles du second ordre.* *Laguerre.* *Compt. rend. LXIX*, 1125.

Vergl. Elasticität 253.

Differenzenrechnung.

250. *The story of an equation in differences of the second order.* *Sylvester.* *Phil. Mag. XXXVII*, 225.
251. Die Recursionsformel
$$(B+An)\,\varphi(n)+(B'-A'n)\,\varphi(n+1)+(B''+A''n)\,\varphi(n+2)=0.$$
J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 349.

E.

Elasticität.

252. *Sur le mouvement vibratoire des plaques.* *Emile Mathieu.* *Journ. mathém. XXXIV*, 241.
253. *Sur une équation aux différences partielles du quatrième ordre et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide.* *Emile Mathieu.* *Journ. mathém. XXXIV*, 378. *Compt. rend. LXIX*, 1019.
254. *Sur un potentiel de deuxième espèce et sur l'équilibre intérieur des solides élastiques.* *De Saint-Venant.* *Compt. rend. LXIX*, 1107.

Elektricität.

255. *Theoria nova phaenomenis electricis applicanda.* *Neumann.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 120.
256. *Upon the new conception of elektrodynamic phenomena suggested by Gauss.* *Clausius.* *Phil. Mag. XXXVII*, 445.
257. *On some elektromagnetic phenomena considered in connexion with the dynamical theory.* *Strutt.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 1.
258. Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Strome. Loschmidt. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 344.
259. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Conductoren. Kötteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 290. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 27.]

Ellipsoid.

Vergl. Attraction 220. Geschichte der Mathematik 275. Krümmungslinien. Maxima und Minima 307.

Elliptische Integrale.

260. *Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.* *Hermite.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 97.
261. *Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique.* *Didon.* *Journ. mathém. XXXIV*, 230.

F.

Factorenfolge.

262. *Sui prodotti infiniti.* *Dini.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 28.

Functionen.

263. Ueber die Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt. Du Bois-Reymond. Crelle LXX, 10.
264. *Sur les fonctions entières à diviseurs binômes. Hill.* Crelle LXX, 103.
   Vergl. Bestimmte Integrale. Elliptische Integrale. Factorenfolge. Homogene Differentialausdrücke. Homogene Functionen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Ultraelliptische Functionen.

G.

Gammafunctionen.

Vergl. Bestimmte Integrale 234.

Geodäsie.

265. Ueber die Anzahl der Winkel- und Sinusgleichungen bei Ausgleichung trigonometrischer Dreiecksnetze. Boguslaw von Proudsynski. Astr. Nachr. LXXV, 87.
266. Ueber die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks auf die eines ebenen oder sphärischen. Weingarten. Astr. Nachr. LXXV, 91.
267. Ueber die Ablenkung der Lothlinie in grossen Höhen. Wittstein. Astr. Nachr. LXXIV, 251.
268. Ueber die Genauigkeit der Winkelgleichung des Stampfer'schen Nivellirinstrumentes. Schell. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 329.

Geometrie (höhere).

269. Ueber die Construction eines einfachen Polygons, welches einem gegebenen gleichnamigen Polygon zu gleicher Zeit eingeschrieben und umschrieben ist. Nawrath. Grun. Archiv L, 1.
270. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. Olivier. Crelle LXX, 156.
271. Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. Sturm. Crelle LXX, 212.
272. *Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie, e i loro punti d'intersezione con superficie di secondo grado. Reye. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 129, 222.

Geschichte der Mathematik.

273. Eine Uranometrie aus dem X. Jahrhundert. Schjellerup. Astr. Nachr. LXXIV, 97.
274. *Débats entre Mr. Chasles et divers autres savants sur la science du XVII siècle. Compt. rend. LXIX*, 5—684 [Vergl. Nr. 69.]
275. Zur Geschichte des Mac Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide. Grube. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 261.
276. Ein merkwürdiger Brief des 18jährigen Lagrange an Fagnano. Grunert. Grun. Archiv L, 223.
277. Nekrolog von Dr. Wilhelm Günther. Galle. Astr. Nachr. LXXV, 173.

Gleichungen.

278. Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. Rosanes & Pasch. Crelle LXX, 169.
279. *Sulla forma quadratica de'fattori irridutibili delle equazione binomie. Trudi. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 150.
280. *Théorèmes sur les équations algébriques. Camille Jordan. Journ. mathém. XXXIV*, 139.
281. *Sur la recherche des racines des équations à trois termes de tous les degrés à l'aide de la cubo-cycloïde. Montucci. Compt. rend. LXIX*, 525, 664, 755.
282. *Sur l'expression la plus simple de certaines fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré. M. Roberts. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 224.

283. *Sur une équation du 16ème degré. Camille Jordan.* Crelle LXX, 182.
284. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 426. [Vergl. Nr. 83.]

H.

Homogene Differentialausdrücke.

285. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Christoffel. Crelle LXX, 46, 241.
286. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Lipschitz. Crelle LXX, 71.

Homogene Functionen.

287. Ueber eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten. Clebsch. Crelle LXX, 175. [Vergl. Nr. 85.]

Hydrodynamik.

288. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Kirchhoff. Crelle LXX, 289.
289. *Théorie des expériences de Savart sur la forme que prend une veine liquide après s'être choquée contre un plan circulaire. Boussinesq. Compt. rend. LXIX,* 45, 128.
290. *Sur le mouvement relatif de l'eau dans les aubes de la roue Poncelet. Resal. Compt. rend. LXIX,* 1184.
291. *On the uniform motion of an imperfect fluid. Moseley. Phil. Mag. XXXVII,* 370.

I.

Imaginäres.

292. Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Lie. Crelle LXX, 346.
Vergl. Analytische Geometrie ber Ebene 210.

K.

Kegelschnitte.

293. Ueber ein geometrisches Kennzeichen der Art des durch fünf gegebene Tangenten, durch fünf gegebene Punkte u. s. w. bestimmten Kegelschnittes. Grelle. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 388.
294. *Sugli assi delle coniche situate in una superficie del secondo ordine. Reye. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 1.
295. *De triangulo, cujus latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum conjugatos. Siebeck. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 65.
296. *Observatio geometrica. Steph. Smith. Ann. mat. Ser.* 2, *II*, 318.
Vergl. Kreis. Maxima und Minima 306.

Kettenbrüche.

297. *On a new continued fraction applicable to the quadrature of the circle. Sylvester. Phil. Mag. XXXVII*, 373.

Kreis.

298. Satz vom gleichseitigen Dreieck und einem dem umschriebenen Kreise concentrischen Kreis. Grunert. Grun. Archiv L, 115.
Vergl. Conforme Abbildung 236. Kettenbrüche.

Krümmung.

299. Construction des Krümmungskreises für Fusspunktscurven. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 516.

Krümmungslinien.

300. *Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoide. M. Roberts. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 13.

S.

Schwerpunkt.

345. Graphische Bestimmung des Schwerpunktes des Trapeziums. Grunert. Grun Archiv L, 212.

Singularitäten.

346. *Sur les singularités élevées des courbes planes.* *De la Gournerie.* *Journ. mathém. XXXIV*, 425.

Stereometrie.

347. Ueber Polyeder. Becker. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 337. [Vergl. Nr. 181.]

T.

Trigonometrie.

348. Ueber die Winkel, welche drei aus den Spitzen eines Dreiecks nach den Gegenseiten gezogene Transversalen mit letzteren bilden. Bretschneider. Grun. Archiv L, 103. [Vergl. Nr. 186.]
349. Ueber einen Satz vom sphärischen Dreieck. Unferdinger. Grun. Archiv L, 107. [Vergl. Nr. 186.]

U.

Ultraelliptische Functionen.

350. *Sugli integrali iperellittici.* *Gordan.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 346. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 296.]
351. Ueber das Additionstheorem der Abel'schen Functionen. H. Weber. Crelle LXX, 193.
352. Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale. H. Weber. Crelle LXX, 314.

Vergl. Krümmungslinien.

W.

Wärmelehre.

353. *Équations fondamentales dans la théorie mécanique de la chaleur.* *Reech.* *Compt. rend. LXIX*, 913.
354. Anwendung der Lehre vom Stosse elastischer Körper auf einige Wärmeerscheinungen. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 478.
355. *Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points.* *Boussinesq.* *Journ. mathém. XXXIV*, 265.
356. *Construction générale des courants de chaleur en un point quelconque d'un milieu athermane, homogène ou hétérogène.* *Boussinesq.* *Compt. rend. LXIX*, 329.
357. *Sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques.* *E. Mathieu.* *Journ. mathém. XXXIV*, 65.
358. *Sur les fonctions caractéristiques des divers fluides.* *Massieu.* *Compt. rend. LXIX*, 858, 1057.
359. *Sur la détente des gaz.* *Moutier.* *Compt. rend. LXIX*, 1137.

Vergl. Mechanik 313.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

360. *On vital force according to age and the english life-table.* *Edmonds.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 18.

Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Z.

Zahlentheorie.

361. *Sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes.* *Hill.* Crelle LXX, 282.
362. Ueber relative Primzahlen. Schemmel. Crelle LXX, 191.

Kugel.

301. Ueber die Halbmesser der fünf Berührungskugeln einer dreiseitigen Pyramide. Unferdinger. Grun. Archiv L, 110.
302. Eine geometrische Eigenschaft der 16 Kugeln, welche vier beliebig gegebene Kugeln berühren. Schubert. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 506.
303. Metrische Relationen zwischen den Radien der 16 Kugeln, die vier Kugeln berühren. Schubert. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 513.

Vergl. Conforme Abbildung 238.

Kugelfunctionen.

304. Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen. Most. Crelle LXX, 163.

M.

Magnetismus.

305. *On the hydrodynamical theory of magnetism.* *Challis.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 42.

Maxima und Minima.

306. Ueber die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte und ihrer Krümmungskreise, insbesondere auch über die Maxima und Minima dieser Sehnen. Grunert. Grun. Archiv L, 69.
307. Ueber das an Volumen grösste, einem dreiaxigen Ellipsoide einbeschriebene Tetraeder. Grelle. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 372.

Mechanik.

308. *Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la mécanique.* *Piarron de Mondesir.* *Compt. rend. LXIX*, 1351.
309. *Mémoire sur les groupes de mouvements.* *Camille Jordan.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 167, 322.
310. *Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable.* *Radau.* *Journ. mathém. XXXIV*, 167.
311. *The parallelogramm of forces.* *Preece.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 428.
312. Aufgaben über die schiefe Ebene. Krumme. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 437.
313. *On the descent of a solid body on an inclined plane when subjected to alternations of temperature.* *Moseley.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 99.
314. *On the mechanical principles involved in the sailing flight of the albatros.* *Hutton.* *Phil. Mag. XXXVIII*, 130.
315. *On the mechanical impossibility of the descent of glaciers by their weight only.* *Moseley.* *Phil. Mag. XXXVII*, 229, 363.
316. Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 382.

Vergl. Akustik. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

317. Ueber die Bestimmung der Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten. W. Jordan. Astr. Nachr. LXXIV, 209. — Andrae ibid. 283.

O.

Oberflächen.

318. *Sur quelques propriétés générales des surfaces courbes.* *Roger.* *Compt. rend. LXIX*, 1071.
319. *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante.* *Beltrami.* *Annali mat. Ser.* 2, *II*, 232.
320. Die cyklischen Flächen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 393.
321. *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques.* *Darboux.* *Compt. rend. LXIX*, 392.
322. *Sur l'équation aux 27 droites des surfaces du troisième degré.* *Cam. Jordan.* *Journ. mathém. XXXIV*, 147.

323. Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. Geiser. Crelle LXX, 249.
324. *Sur quelques torses sextiques.* Cayley. *Annali mat. Ser. 2, II*, 99, 219.

Oberflächen zweiter Ordnung.

Vergl. Attraction 229, 230. Determinanten in geometrischer Anwendung 243. Geometrie (höhere) 272. Kegelschnitte 294.

Optik.

325. Ueber Isophoten. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 310. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 96.]
326. Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XIV, 376.
327. Die Gesetze der Lichtbrechung. Kudelka. Grun. Archiv L, 18, 121, 241.
328. Fresnel's Hypothese zur Erklärung der Aberrationserscheinungen. Veltmann. Astr. Nachr. LXXV, 145.
329. *On a theory of the dispersion of light.* Challis. *Phil. Mag. XXXVIII*, 268.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 209.

P.

Planimetrie.

330. *Sur la somme des angles d'un triangle.* Bertrand. *Compt. rend. LXIX*, 1265.
331. Ueber einen Satz vom Dreieck. Scheele. Grun. Archiv L, 113.
332. Ueber Transversalen im Dreieck. Most. Grun. Archiv L, 238.
333. Ueber Fermat's geometrischen Satz. Stammer. Grun. Archiv L, 111.
334. Der Lehrsatz des Matthew Stewart. Bretschneider. Grun. Archiv L, 11.

Vergl. Zahlentheorie 369.

Potential.

Vergl. Attraction. Elasticität 254.

Q.

Quadratische Formen.

335. *Sur le nombre* F(k) *des classes de formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant* —k, *dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.* Liouville. *Journ. mathém. XXXIV*, 1.
336. *Nouveau théorème concernant les fonctions numériques* F(k). Liouville. *Journ. mathém. XXXIV*, 260.
337. *Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est* >0 *et* $\equiv 3 \pmod 8$. Liouville. *Journ. mathém. XXXIV*, 299.
338. *Théorème concernant les nombres entiers* $\equiv 5 \pmod{12}$. Liouville. *Journ. mathém. XXXIV*, 7.
339. Ueber ternäre quadratische Formen. Bachmann. Crelle LXX, 365.
340. *Sur la forme ternaire* $x^2+2y^2+3z^2$. Liouville. *Journ. mathém. XXXIV*, 359.

R.

Rectification.

341. *Sur la rectification de quelques courbes.* Booth. *Annali mat. Ser. 2, II*, 81.

Reihen.

342. *De seriebus quibusdam annotationes.* Lindmann. Grun. Archiv L, 219.
343. Ueber die Summirung gesetzmässig ausgewählter Reihenglieder. Most. Grun. Archiv L, 239.
344. Zur Theorie der durch die Heine'sche Reihe

$$1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdot x^2+\ldots$$

darstellbaren Functionen. Thomae. Crelle LXX, 258.

Vergl. Elliptische Integrale 260.

363. *Sur la somme des diviseurs de* n. *Liouville. Journ. mathém.* XXXIV, 263.
364. *De la fonction numérique* ϱ_2(n). *Liouville. Journ. mathém.* XXXIV, 302.
365. *Intorno ad alcune forme di numeri primi. Genocchi. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 256.
366. *Intorno ad un teorema di Cauchy. Genocchi. Annali mat. Ser.* 2, *II*, 216.
367. Ueber Perioden. Seeling. Grun. Archiv L, 232.
368. *Procédé pour résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée* $A + Bt^2 = u^2$. *Khanikof. Compt. rend. LXIX*, 185.
369. Ueber rationale Dreiecke. Bretschneider. Grun. Archiv L, 118.
370. Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$. Goetting. Crelle LXX, 363.

Vergl. Quadratische Formen.

Verbesserungen

in den fünfstelligen logarithmischen und trigonometrischen Tafeln von O. Schlömilch.

Seite 44 ist bei $\sin 5^0 0'$ statt 0,08715 zu lesen 0,08716.

„ 44 sind die beiden Differenzen ($D.$ 1')

$\sin 5^0 10'$	0,09005	
		28,9
20'	0,09295	
		28,9
30'	0,09585	

in 29,0 umzuändern, weil letztere Zahl etwas genauere Werthe liefert.

„ 47. Die Differenz zwischen $\sin 23^0 40'$ und $\sin 23^0 50'$ ist aus demselben Grunde nicht $= 26,7$, sondern $= 26,6$ zu nehmen.

„ 49. Ebenso ist die Differenz zwischen $\sin 32^0 40'$ und $\sin 32^0 50'$ nicht $= 24,4$, sondern $= 24,5$ zu setzen.

„ 52 ist neben $\tan g\,\alpha = 50$ angegeben $\tan g\,\frac{1}{2}\alpha = 24,9$ statt des genaueren Werthes $\tan g\,\frac{1}{2}\alpha = 25,0$.

„ 158 ist zu verbessern, dass das Königreich Württemberg zu den Staaten gehört, welche den Fuss decimal theilen.
