Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXIV. Jahrgang.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1879.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Mechanik und Molecularphysik.

Optik, Akustik und Magnetismus.

I.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten.

Von

Prof. Dr. Beez

zu Plauen i. V.

Unter den von H. Weber und R. Dedekind herausgegebenen mathematischen Werken Riemann's findet sich auch eine in lateinischer Sprache geschriebene Untersuchung des genialen Mathematikers über isotherme Curven, welche er im Juli des Jahres 1861 der Pariser Akademie als Beantwortung einer von ihr gestellten Preisfrage eingereicht hat. Der zweite Theil dieser Abhandlung bildet einen in sich abgeschlossenen, rein mathematischen Excurs mit der Ueberschrift: „*De transformatione expressionis* $\Sigma_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'} ds_\iota ds_{\iota'}$ *in formam datam* $\Sigma_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}$“ und ist hauptsächlich deshalb von hohem Interesse, weil er im Grunde genommen eine vollständige Theorie des sogenannten Riemann'schen Krümmungsmasses enthält, welche man wohl an jener Stelle am wenigsten vermuthet. Insofern darf diese Arbeit als der Abschluss der bereits sieben Jahre zuvor von Riemann in der Habilitationsschrift: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ angestellten Untersuchungen betrachtet werden. Die am Schlusse gegebene Vorschrift zur Ableitung der Covariante (II) ist ein Meisterwerk analytischer Kunst, wenn auch ihre Verification sich nicht so einfach gestaltet, als der verdienstvolle Herausgeber und Interpret Herr R. Dedekind annimmt.*

In dieser zweiten Abhandlung tritt der rein analytische Charakter des Riemann'schen Krümmungsmasses so entschieden in den Vordergrund, dass die am Schlusse gegebene geometrische Interpretation eigentlich als ganz nebensächlich erscheint. Da aber gerade diese Interpretation in der neueren Raumtheorie eine verhängnissvolle Rolle spielt, so halte ich es nicht für unzweckmässig, auch die zweite Schrift Riemann's einer

---

* S. Riemann's Gesammelte mathematische Werke S. 388.

genauen Analyse zu unterwerfen und zu zeigen, dass jene Interpretation auf einer willkürlichen Annahme beruht, die sich metageometrisch nicht beweisen lässt. Hierbei setze ich noch immer die Möglichkeit höherer Räume voraus und stütze mich bei der Betrachtung derselben in erster Linie auf die Analogie mit den aus der Erfahrung abstrahirten Raumgrössen. Wenn ich mich in zweiter Linie der Hilfe der Analysis bediene, so ist dieselbe doch stets nur Mittel, nicht Zweck meiner Untersuchung, während bei den in dies Gebiet einschlagenden Arbeiten anderer Mathematiker zumeist das entgegengesetzte Verhältniss stattfinden dürfte.

I.

Ueber die Transformation des Ausdrucks $\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ in die Form $\Sigma_l\, dx_l^2$; $(i, k, l = 1, 2, \ldots n)$.

Wenn $\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ eine wesentlich positive quadratische Form der n Differentiale $dp_1, dp_2, \ldots dp_n$ darstellt, in welcher die Coefficienten $a_{ik} = a_{ki}$ beliebige unabhängige Functionen der n unabhängigen Variabelen $p_1, p_2, \ldots p_n$ bedeuten, deren Determinante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so kann man die Frage aufwerfen, welchen Bedingungen die Functionen a_{ik} genügen müssen, damit die Form $\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ durch Einführung von n neuen unabhängigen Veränderlichen — an die Stelle der p — in die Summe der Quadrate der Differentiale von diesen neuen Veränderlichen übergehe, folglich zwischen beiden Formen die Gleichung stattfinde

$$1) \qquad \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k = \Sigma_l\, dx_l^2.$$

Bei der Behandlung dieser Gleichung ist es nothwendig, sich zu vergegenwärtigen,* dass die Form $\Sigma\, a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ eine doppelte Reihe von unabhängigen Variabelen enthält, nämlich die in den Functionen a_{ik} enthaltenen n Grössen p und die n Differentiale derselben Grössen dp. Auf der rechten Seite der Gleichung 1) dagegen treten nur die n Variabelen dx auf. Führt man in die linke Seite von 1) statt der Variabelen p ebensoviele, also n von einander unabhängige Functionen der x ein, so stellt 1) eine identische Gleichung dar. Man kann sie daher nach den dx partiell differentiiren, wobei man zu berücksichtigen hat, dass man durch partielle Differentiation der ebenfalls identischen Gleichung

* Die Grundlagen für die Transformation von Differentialausdrücken finden sich, wie schon Herr R. Lipschitz angegeben hat, in *Lagrange, Mécanique analytique, seconde partie, quatrième section, 6.*

$$2)\qquad dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial p_i}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n}dx_n$$

erhält

$$3)\qquad \frac{\partial . dp_i}{\partial . dx_k} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

d. h.: Der partielle Differentialquotient von dp_i nach dx_k ist gleich dem partiellen Differentialquotienten von p_i nach x_k. Führt man die partielle Differentiation der Gleichung 1) nach einer bestimmten Variabelen dx_k aus, indem man die dp und die dx als Variabele, die a_{ik} aber, da sie nur Functionen der p und nicht der dp sind, als constant ansieht, so ergiebt sich

$$4)\qquad \begin{aligned} dx_k &= a_{11}\,dp_1\frac{\partial p_1}{\partial x_k} + a_{12}\,dp_1\frac{\partial p_2}{\partial x_k} + \ldots + a_{1n}\,dp_1\frac{\partial p_n}{\partial x_k} \\ &+ a_{21}\,dp_2\frac{\partial p_1}{\partial x_k} + a_{22}\,dp_2\frac{\partial p_2}{\partial x_k} + \ldots + a_{2n}\,dp_2\frac{\partial p_n}{\partial x_k} \\ &\quad\vdots \\ &+ a_{n1}\,dp_n\frac{\partial p_1}{\partial x_k} + a_{n2}\,dp_n\frac{\partial p_2}{\partial x_k} + \ldots + a_{nn}\,dp_n\frac{\partial p_n}{\partial x_k} \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Form

$$4^*)\qquad dx_k = \Sigma_{ir}\,a_{ir}\,dp_i\frac{\partial p_r}{\partial x_k}.$$

Man kann nun auch umgekehrt die x als n von einander unabhängige Functionen der n unabhängigen Variabelen p ansehen und der Gleichung 2) die Gleichung

$$5)\qquad dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial x_k}{\partial p_2}dp_2 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial p_n}dp_n$$

gegenüberstellen. Aus dieser ergiebt sich durch partielle Differentiation nach dp_i

$$\frac{\partial . dx_k}{\partial . dp_i} = \frac{\partial x_k}{\partial p_i}.$$

Wenn man daher die Gleichung 4) partiell nach dp_i differentiirt, so erhält man

$$6)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial p_i} = a_{i1}\frac{\partial p_1}{\partial x_k} + a_{i2}\frac{\partial p_2}{\partial x_k} + \ldots + a_{in}\frac{\partial p_n}{\partial x_k} = \Sigma_r\,a_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_k}.\,*$$

---

* Die entsprechende Gleichung bei Riemann lautet S. 380 der ges. Werke unter 1)

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \Sigma_\iota\,b_{\nu\iota}\frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}}$$

Riemann findet sie dadurch, dass er in der Gleichung

$$\Sigma_{\iota\iota'}\,b_{\iota\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'} = \Sigma_\iota\,dx_\iota^2$$

statt des Symbols d auf beiden Seiten $d+\delta$ einführt und dadurch zu der Gleichung

Gehen wir jetzt wieder zur Gleichung 1) zurück und differentiiren sie zuerst partiell nach $dp_1, dp_2, \ldots dp_n$, so entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$
8)\quad
\begin{aligned}
a_{11}\,dp_1 + a_{12}\,dp_2 + \ldots + a_{1n}\,dp_n &= dx_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + dx_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial x_n}{\partial p_1},\\
a_{21}\,dp_1 + a_{22}\,dp_2 + \ldots + a_{2n}\,dp_n &= dx_1\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + dx_2\frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \ldots + dx_n\frac{\partial x_n}{\partial p_2},\\
&\cdot\\
&\cdot\\
a_{n1}\,dp_1 + a_{n2}\,dp_2 + \ldots + a_{nn}\,dp_n &= dx_1\frac{\partial x_1}{\partial p_n} + dx_2\frac{\partial x_2}{\partial p_n} + \ldots + dx_n\frac{\partial x_n}{\partial p_n}.
\end{aligned}
$$

Ist nun

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial a}{\partial a_{ik}}$$

der Coefficient von a_{ik} in der Determinante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich aus dem System 8)

$$
\begin{aligned}
a\,dp_i = dx_1 &\left\{\alpha_{1i}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \alpha_{2i}\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \ldots + \alpha_{ni}\frac{\partial x_1}{\partial p_n}\right\}\\
+ dx_2 &\left\{\alpha_{1i}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \alpha_{2i}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \ldots + \alpha_{ni}\frac{\partial x_2}{\partial p_n}\right\}\\
&\cdot\\
&\cdot\\
+ dx_n &\left\{\alpha_{1i}\frac{\partial x_n}{\partial p_1} + \alpha_{2i}\frac{\partial x_n}{\partial p_2} + \ldots + \alpha_{ni}\frac{\partial x_n}{\partial p_n}\right\},
\end{aligned}
$$

folglich erhält man durch partielle Differentiation nach dx_k

$$9)\qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{a}\left\{\alpha_{1i}\frac{\partial x_k}{\partial p_1} + \alpha_{2i}\frac{\partial x_k}{\partial p_2} + \ldots + \alpha_{ni}\frac{\partial x_k}{\partial p_n}\right\} = \Sigma_r \frac{\alpha_{ri}}{a}\frac{\partial x_k}{\partial p_r}$$

übereinstimmend mit Gleichung 2) bei **Riemann**. Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial p_i}{\partial x_k}$ lässt sich aber noch auf andere Weise darstellen. Das System 5)

$$\Sigma_{\iota\iota'}\, b_{\iota\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'} = \Sigma_\iota\, dx_\iota\, \delta x_\iota$$

gelangt, die wir weiter unten mit Hilfe der Variationsrechnung ableiten. Hierauf substituirt er statt $\delta s_{\iota'}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_n}\delta x_n$$

und setzt auf beiden Seiten die Coefficienten von δx einander gleich, wodurch die Gleichung 4) gewonnen wird. In dieser schreibt er für dx_k den Ausdruck $\frac{\partial x_k}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial x_k}{\partial p_2}dp_2 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial p_n}dp_n$ und erhält endlich durch Gleichsetzung der Coefficienten von dp_i die obige Gleichung 6).

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\,dp_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial p_n}\,dp_n,$$
$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\,dp_2 + \ldots + \frac{\partial x_2}{\partial p_n}\,dp_n,$$
$$\vdots$$
$$dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial x_n}{\partial p_2}\,dp_2 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial p_n}\,dp_n$$

giebt, nach dp_1, dp_2, ... dp_n aufgelöst,

$$dp_i = \frac{A_{1i}}{A}\,dx_1 + \frac{A_{2i}}{A}\,dx_2 + \ldots + \frac{A_{ni}}{A}\,dx_n,$$

worin

10)
$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

und

$$A_{ri} = \frac{\partial A}{\partial \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_i}}$$

gesetzt ist. Hieraus erhält man

11)
$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{A_{ki}}{A}.$$

Nun bestehen für die Unterdeterminanten A_{ki} die Gleichungen

$$\frac{A_{1i}}{A}\frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \frac{A_{2i}}{A}\frac{\partial x_2}{\partial p_i} + \ldots + \frac{A_{ni}}{A}\frac{\partial x_n}{\partial p_i} = 1$$

und

$$\frac{A_{1k}}{A}\frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \frac{A_{2k}}{A}\frac{\partial x_2}{\partial p_i} + \ldots + \frac{A_{nk}}{A}\frac{\partial x_n}{\partial p_i} = 0.$$

Setzt man in dieselben die Werthe von $\frac{A_{ki}}{A}$ aus 11), so erhält man

12)
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 1\,*$$

und

13)
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_r}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial p_i}\frac{\partial p_r}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial p_i}\frac{\partial p_r}{\partial x_n} = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung 6) bilde man weiter die Producte

---

* Die Gleichungen 12) und 13) lassen sich auch direct durch partielle Differentiation der Gleichung

$$dp_r = \frac{\partial p_r}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial p_r}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial p_r}{\partial x_n}\,dx_n$$

nach dp_r und dp_i ableiten.

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial p_k}=\left(a_{i1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+a_{i2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\ldots+a_{in}\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial p_k}=\left(a_{i1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}+a_{i2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\ldots+a_{in}\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x_2}{\partial p_k},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial p_k}=\left(a_{i1}\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+a_{i2}\frac{\partial p_2}{\partial x_n}+\ldots+a_{in}\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial p_k}$$

und addire sie, dann kommt wegen 12) und 13), der **Riemann**'schen Gleichung 3) entsprechend,

$$14)\quad \frac{\partial x_1}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial p_k}+\frac{\partial x_2}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial p_k}+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial p_k}=\Sigma_l\frac{\partial x_l}{\partial p_i}\,\frac{\partial x_l}{\partial p_k}=a_{ik}.$$

In ähnlicher Weise kann man die Gleichung 9) verwenden, indem man die folgenden Producte bildet:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_1}=\left(\frac{\alpha_{1i}}{a}\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+\frac{\alpha_{2i}}{a}\frac{\partial x_1}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\alpha_{ni}}{a}\frac{\partial x_1}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_2}=\left(\frac{\alpha_{1i}}{a}\frac{\partial x_2}{\partial p_1}+\frac{\alpha_{2i}}{a}\frac{\partial x_2}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\alpha_{ni}}{a}\frac{\partial x_2}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_n}=\left(\frac{\alpha_{1i}}{a}\frac{\partial x_n}{\partial p_1}+\frac{\alpha_{2i}}{a}\frac{\partial x_n}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\alpha_{ni}}{a}\frac{\partial x_n}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_n}.$$

Durch Addition mit Berücksichtigung von 12) und 13) erhält man hieraus

$$15)\quad \frac{\partial p_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_1}+\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_n}=\Sigma_l\frac{\partial p_i}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial p_k}{\partial x_l}=\frac{\alpha_{ik}}{a},$$ *

womit die Gleichung 4) bei **Riemann** erwiesen ist.

Die Gleichung 14) ist der Form nach dieselbe, wie die Gleichung 7) in meiner früheren Arbeit: „Zur Theorie des Krümmungsmasses etc.", ** nur besteht der Unterschied, dass in jener Abhandlung die Form von n Variabelen $\Sigma_{ik}\,a_{ik}\,dp_i\,dp_k$ aus einer Form von $n+1$ Variabelen $\Sigma_l\,dx_l^2$ mit Zuhilfenahme einer Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1})=c$ entstanden war, woraus die auch gegenwärtig geltende Beziehung $a_{ik}=a_{ki}$ sich ergab. Trotz dieses Unterschiedes aber ist die weitere Rechnung zum Theil ganz identisch mit der früheren. Differentiirt man nämlich die Gleichung 14)

$$\Sigma_l\frac{\partial x_l}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_k}=a_{ik}$$

nach p_r und die analog gebildeten

$$\Sigma_l\frac{\partial x_l}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_r}=a_{ir},\quad \Sigma_l\frac{\partial x_l}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial x_l}{\partial p_r}=a_{kr}$$

bezüglich nach p_k und p_i, so erhält man

---

* Die Gleichung 14) kann unmittelbar durch Substitution von 5) in 1), die Gleichung 15) aber mit Hilfe des Differentialparameters der Gleichung 1) erhalten werden.

** S. diese Zeitschrift Bd. XX, S. 424.

$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l'}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_k} + \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_r} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r},$$
$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} + \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_r} = \frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k},$$
$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} + \Sigma_l \frac{\partial x_l}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_i} = \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i}.$$

Durch Subtraction der ersten Gleichung von der Summe der beiden letzten kommt

$$2\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r},$$

folglich, wenn wir die schon früher adoptirte Christoffel'sche Bezeichnungsweise

$$\left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} + \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r}\right)$$

auch jetzt beibehalten,

$$16)\qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right|.$$

Auf dieselbe Weise bilde man

$$17)\qquad \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \left|\begin{matrix} ks \\ r \end{matrix}\right|$$

und differentiire 16) nach p_s, 17) nach p_i, so ergiebt sich

$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} + \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_i \partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_s}\left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right|,$$
$$\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} + \Sigma_l \frac{\partial^3 x_l}{\partial p_k \partial p_s \partial p_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left|\begin{matrix} ks \\ r \end{matrix}\right|,$$

woraus man endlich durch Subtraction die Gleichung

$$18)\qquad \begin{aligned} \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} - \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} &= \frac{\partial}{\partial p_s}\left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right| - \frac{\partial}{\partial p_i}\left|\begin{matrix} ks \\ r \end{matrix}\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial p_k \partial p_s} + \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial p_i \partial p_r} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial p_i \partial p_k}\right) \end{aligned}$$

ableitet. Um nun weiter die linke Seite dieser Gleichung durch die Coefficienten a_{ik} und deren Derivirte auszudrücken, multiplicire man die Gleichungen

$$\left|\begin{matrix} ik \\ 1 \end{matrix}\right| = \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial p_1},$$
$$\left|\begin{matrix} ik \\ 2 \end{matrix}\right| = \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial p_2},$$
$$\vdots$$
$$\left|\begin{matrix} ik \\ n \end{matrix}\right| = \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_n} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_n} + \ldots + \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial p_n}$$

der Reihe nach mit $\frac{\partial p_1}{\partial x_l}, \frac{\partial p_2}{\partial x_l}, \ldots \frac{\partial p_n}{\partial x_l}$ und addire, so kommt

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} \Sigma_\mu \frac{\partial x_1}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_k} \Sigma_\mu \frac{\partial x_2}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} + \ldots + \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \Sigma_\mu \frac{\partial x_l}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \Sigma_\mu \frac{\partial x_n}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} = \Sigma_\mu \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l}.$$

Wegen der Gleichungen 12) und 13) reducirt sich das Ganze auf

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} = \Sigma_\mu \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l}.$$

In gleicher Weise bildet man

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} = \Sigma_\nu \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l}.$$

Somit erhält man das Product

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} = \Sigma_{\mu\nu} \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l}$$

und durch Vertauschung der Indices

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} = \Sigma_{\mu\nu} \left|\begin{matrix} ir \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} ks \\ \nu \end{matrix}\right| \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l}.$$

Die Einführung dieser Werthe in 18) giebt

$$\begin{aligned} &\Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} - \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \\ &= \Sigma_l \Sigma_{\mu\nu} \left\{ \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} ir \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} ks \\ \nu \end{matrix}\right| \right\} \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l} \\ &= \Sigma_{\mu\nu} \left\{ \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} ir \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} ks \\ \nu \end{matrix}\right| \right\} \Sigma_l \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Die Summe $\Sigma \frac{\partial p_\mu}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial x_l}$ hat aber nach 18) den Werth $\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}$, folglich erhält man als Endresultat

$$19) \quad \frac{\partial}{\partial p_s} \left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right| - \frac{\partial}{\partial p_i} \left|\begin{matrix} ks \\ r \end{matrix}\right| + \Sigma_{\mu\nu} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \left\{ \left|\begin{matrix} ir \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} ks \\ \nu \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| \right\} = 0$$

oder

$$19^*) \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial p_k \partial p_s} + \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial p_i \partial p_r} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial p_i \partial p_k} \right) \\ &+ \Sigma_{\mu\nu} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \left\{ \left|\begin{matrix} ir \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} ks \\ \nu \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} rs \\ \nu \end{matrix}\right| \right\} = 0. \end{aligned}$$

Wenn die Functionen a_{ik} nebst ihren ersten und zweiten Derivirten dieser Gleichung genügen, d. h. bewirken, dass die linke Seite identisch verschwindet, dann lässt sich die quadratische Form von n Differentialen $\Sigma a_{ik} dp_i dp_k$ in die Summe der Quadrate der n Differentiale $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$ transformiren, ohne Rücksicht darauf, ob

1. die Form von n Differentialen $\Sigma a_{ik} dp_i dp_k$ aus einer Form $\Sigma_l dy_l^2$ von $n+1$ Differentialen $dy_1, dy_2, \ldots dy_{n+1}$ und einer Gleichung $f(y_1, y_2, \ldots y_n, y_{n+1}) = c$ zwischen den $n+1$ Variabelen y hervorgegangen, oder ob

2. die Form von n Differentialen $\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k$ aus einer Form $\Sigma_l\,dy_l^2$ von $n+k$ Differentialen und k simultanen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f_1(y_1, y_2, \ldots y_{n+k}) &= c_1,\\
f_2(y_1, y_2, \ldots y_{n+k}) &= c_2,\\
&\;\;\vdots\\
f_k(y_1, y_2, \ldots y_{n+k}) &= c_k
\end{aligned}
$$

zwischen den $n+k$ Variabelen y entstanden ist, oder ob endlich

3. die Form $\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k$ auf eine solche Form $\Sigma_l\,dy_l^2$ gar nicht zurückzuführen ist — ein Fall, dessen Möglichkeit wohl erst noch einer näheren Untersuchung bedarf.

II.

Ableitung einer quadrilinearen Form F, deren Coefficienten den Ausdrücken 19) gleich sind.

Der Ausdruck 19*) ist bis auf den Factor -2 identisch mit dem Riemann'schen (I)

$$
\frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota}\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota}\,\partial s_{\iota'''}}
$$
$$
+ \tfrac{1}{2}\Sigma_{\nu\nu'}\left(p_{\nu,\iota',\iota'''}\,p_{\nu',\iota,\iota''} - p_{\nu,\iota,\iota'''}\,p_{\nu',\iota',\iota''}\right)\frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B} = 0.
$$

Bezeichnet man den Ausdruck links durch $(\iota\iota', \iota''\iota''')$, so lässt sich die linke Seite der Gleichung 19*) durch $-\frac{1}{2}(rksi)$ ausdrücken. Um das Bildungsgesetz der Gleichung

$$(rksi) = 0$$

besser übersehen zu können, soll man nach Riemann's Vorschrift das Aggregat der zweiten Variationen

A) $\quad \delta\delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k - 2\,d\delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k + dd\,\Sigma a_{ik}\,\delta p_i\,\delta p_k$

entwickeln und die Variationen des zweiten Grades d^2, $d\delta$, δ^2 so bestimmen, dass

B) $\quad \delta'\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k - \delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta' p_k - d\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta' p_k = 0,$

C) $\quad \left\{\begin{aligned} &\delta'\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k - 2\,d\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta' p_k = 0,\\ &\delta'\,\Sigma a_{ik}\,\delta p_i\,\delta p_k - 2\,\delta\,\Sigma a_{ik}\,\delta p_i\,\delta' p_k = 0 \end{aligned}\right.$

werde, während δ' eine beliebige Variation bedeute. Auf diese Weise finde man, dass das Aggregat A)

II) $\quad = \Sigma(rksi)(dp_r\,\delta p_k - dp_k\,\delta p_r)(dp_s\,\delta p_i - dp_i\,\delta p_s)$

werde. Die beiden Ausdrücke in C) leitet man aus B) dadurch her, dass man in ihm einmal das Zeichen δ mit d, das andere Mal d mit δ vertauscht.

Man überzeugt sich nun leicht, dass man bei stricter Befolgung der Riemann'schen Vorschrift nicht zu dem gewünschten Ziele gelangt.

Denn bildet man zunächst nach dem Schema A) diejenigen Ausdrücke, welche die zweiten Variationen der Coefficienten a_{ik} enthalten, und bezeichnet das Aggregat aller noch übrigen Glieder mit Δ_2, so kommt

$$\delta^2 \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k - 2\, d\delta\, \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta p_k + d^2 \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta p_k$$
$$= \Sigma \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r\, \partial p_s}\, dp_i\, dp_k\, \delta p_r\, \delta p_s - 2\Sigma \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r\, \partial p_s}\, dp_i\, \delta p_k\, dp_r\, \delta p_s$$
$$+ \Sigma \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r\, \partial p_s}\, \delta p_i\, \delta p_k\, dp_r\, dp_s + \Delta_2.$$

Da sich das Zeichen Σ auf alle Indices i, k, r, s, welche sämmtlich die Reihe $1, 2, \ldots n$ durchlaufen, bezieht, so ergiebt sich, wenn man in der zweiten Summe k und r, in der dritten i und r, k und s vertauscht,

$$\delta^2 \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k - 2\, d\delta\, \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta p_k + d^2 \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta p_k$$
$$= \Sigma \left\{ \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r\, \partial p_s} - 2 \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial p_k\, \partial p_s} + \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial p_i\, \partial p_k} \right\} dp_i\, dp_k\, \delta p_r\, \delta p_s + \Delta_2;$$

das erste Glied aber in der Gleichung

$$(r k s i) = 0$$

lautet

$$\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial p_r\, \partial p_s} - \frac{\partial^2 a_{ir}}{\partial p_k\, \partial p_s} - \frac{\partial^2 a_{ks}}{\partial p_i\, \partial p_r} + \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial p_i\, \partial p_k}.$$

Um dieses zu erhalten, hat man in dem Riemann'schen Schema A) statt

$$2\, d\delta\, \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta p_k$$

zu schreiben

$$d\delta\, \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta p_k + \delta d\, \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, dp_k$$

und also statt des Ausdruckes A) den folgenden zu entwickeln:

$$\delta^2 \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k - d\delta\, \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta p_k - \delta d\, \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, dp_k + d^2 \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta p_k = 0.$$

Um aber bei der Ausrechnung sicher zu sein, dass wir auch sämmtliche Glieder auseinanderhalten, führen wir nach dem Vorgange des Herrn R. Lipschitz* noch zwei neue Variationszeichen d' und δ' ein und legen unserer weiteren Entwickelung die Form

$$F =$$

1) $$-\tfrac{1}{2}\{\delta\delta' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k - d\delta' \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta p_k - \delta d' \Sigma a_{ik}\, \delta' p_i\, dp_k + d d' \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta' p_k\}$$

zu Grunde. Wenn man in derselben statt δ' und d' bezüglich δ und d einführt, so erhält man bis auf den constanten Factor $-\tfrac{1}{2}$ wieder die Riemann'sche Form A). Wir setzen zur Abkürzung

---

* S. Lipschitz: „Ueber ganze homogene Functionen von n Differentialen", Borchardt's Journal Bd. 72, S. 16 flg., und desselben Verfassers „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges", Bd. 82, S. 317 flg. An der zuletzt citirten Stelle weist Herr Lipschitz nach, dass es nur einer leichten Umformung bedürfe, um von der Gleichung 37) seiner zuerst genannten Abhandlung ebenfalls auf die Riemann'sche Form A) zu gelangen. Wenn ich trotzdem den directen Weg zur Verificirung der letzteren einschlage, so geschieht es aus dem Grunde, weil derselbe geringere Schwierigkeiten darbietet, als der von Herrn Lipschitz eingeschlagene Weg zum Beweis der Formel 37).

$$2)\qquad \delta'\Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta p_k - \delta\,\Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k - d'\Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta' p_k = J,$$
$$3)\qquad \delta'\Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k - d'\Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta' p_k - d\,\Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k = K$$

und können dann die Gleichung 1) auch schreiben

$$4)\qquad F = \tfrac{1}{2} dJ - \tfrac{1}{2}\delta K.$$

Zuvörderst mögen nun die zur Bildung von J vorgeschriebenen Variationen ausgeführt werden. Es ist

$$\delta'\Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta p_k = \Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} d'p_i\, \delta p_k\, \delta' p_r + \Sigma a_{ik}\, \delta' d' p_i\, \delta p_k + \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta'\delta p_k$$
$$-\delta\,\Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k = -\Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} d'p_i\, \delta' p_k\, \delta p_r - \Sigma a_{ik}\, \delta\, d'p_i\, \delta' p_k - \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta\delta' p_k$$
$$-d'\Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta' p_k = -\Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \delta p_i\, \delta' p_k\, d'p_r - \Sigma a_{ik}\, d'\delta p_i\, \delta' p_k - \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, d'\delta' p_k,$$

worin die Summenzeichen auf alle Indices i, k, r, welche sämmtlich die Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$ durchlaufen, sich beziehen. Durch Addition dieser drei Gleichungen erhalten wir, da $\delta\delta' p_k = \delta'\delta p_k$ und $\Sigma a_{ik}\, \delta' d' p_i\, \delta p_k = \Sigma a_{ik}\, d'\delta' p_k\, \delta p_i$ ist,

$$J = \Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} d'p_i\, \delta p_k\, \delta' p_r - \Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} d'p_i\, \delta' p\ \ \delta p_r - \Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \delta p_i\, \delta' p_k\, d'p_r - 2\,\Sigma a_{ik}\, \delta\, d'p_i\, \delta' p_k.$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Indices lassen sich das zweite und dritte Glied rechts beziehendlich auch schreiben

$$\Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} d'p_i\, \delta' p_k\, \delta p_r = \Sigma \frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} d'p_i\, \delta' p_r\, \delta p_k,$$
$$\Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \delta p_i\, \delta' p_k\, d'p_r = \Sigma \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i} \delta p_k\, \delta' p_r\, d'p_i.$$

Man erhält daher

$$5)\qquad \begin{aligned} J &= \Sigma\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k} - \frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i}\right) d'p_i\, \delta p_k\, \delta' p_r - 2\,\Sigma a_{ik}\, \delta\, d'p_i\, \delta' p_k \\ &= -2\left\{\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right| d'p_i\, \delta p_k\, \delta' p_r + \Sigma a_{ik}\, \delta\, d'p_i\, \delta' p_k\right\} \end{aligned}$$

und in gleicher Weise

$$6)\qquad K = -2\left\{\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k\, \delta' p_r + \Sigma a_{ik}\, d\,d'p_i\, \delta' p_k\right\}.$$

Setzen wir nun fest, dass die Indices i, k, r, s bezüglich den Variationen d, d', δ, δ' zuertheilt werden, so erhalten wir aus Gleichung 4) in Verbindung mit 5) und 6)

$$7)\qquad \begin{aligned} F &= \delta\left\{\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k\, \delta' p_s + \Sigma a_{is}\, d\,d'p_i\, \delta' p_s\right\} \\ &\quad - d\left\{\Sigma \left|\begin{matrix} kr \\ s \end{matrix}\right| d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s + \Sigma a_{ks}\, \delta\, d'p_k\, \delta' p_s\right\}. \end{aligned}$$

Bei der Ausführung der angezeigten Variationen erhält man im Ganzen 14 Glieder, von denen sich vier gegenseitig aufheben. Die noch übrigen zehn lassen sich auf folgende Weise schreiben:

$$
8)\quad \begin{aligned}
F = &\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial p_r} \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} kr \\ s \end{vmatrix} \right\} dp_i\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s \\
&+ \Sigma \left\{ \frac{\partial a_{is}}{\partial p_r} - \begin{vmatrix} ir \\ s \end{vmatrix} \right\} d d' p_i\, \delta p_r\, \delta' p_s \\
&- \Sigma \left\{ \frac{\partial a_{ks}}{\partial p_i} - \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} \right\} dp_i\, \delta d' p_k\, \delta' p_s + \Sigma \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} dp_i\, d'p_k\, \delta\delta' p_s \\
&- \Sigma \begin{vmatrix} kr \\ s \end{vmatrix} d'p_k\, \delta p_r\, d\delta' p_s + \Sigma a_{ks}\, d d' p_k\, \delta\delta' p_s - \Sigma a_{ks}\, \delta d' p_k\, d\delta' p_s .
\end{aligned}
$$

Da nun

$$
\begin{vmatrix} ir \\ s \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial p_r} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{ir}}{\partial p_s} \right), \quad \begin{vmatrix} rs \\ i \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial p_s} + \frac{\partial a_{is}}{\partial p_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial p_i} \right),
$$

so folgt

$$
\begin{vmatrix} ir \\ s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} rs \\ i \end{vmatrix} = \frac{\partial a_{is}}{\partial p_r},
$$

also wird

$$
\frac{\partial a_{is}}{\partial p_r} - \begin{vmatrix} ir \\ s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rs \\ i \end{vmatrix} \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\partial a_{ks}}{\partial p_i} - \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} is \\ k \end{vmatrix};
$$

folglich erhalten wir für F den Ausdruck:

$$
9)\quad \begin{aligned}
F = &\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial p_r} \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} kr \\ s \end{vmatrix} \right\} dp_i\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s + \Sigma \begin{vmatrix} rs \\ i \end{vmatrix} d d' p_i\, \delta p_r\, \delta' p_s \\
&- \Sigma \begin{vmatrix} is \\ k \end{vmatrix} dp_i\, \delta d' p_k\, \delta' p_s + \Sigma \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} dp_i\, d'p_k\, \delta\delta' p_s \\
&- \Sigma \begin{vmatrix} kr \\ s \end{vmatrix} d'p_k\, \delta p_r\, d\delta' p_s + \Sigma a_{ks}\, d d' p_k\, \delta\delta' p_s - \Sigma a_{ks}\, \delta d' p_k\, d\delta' p_s .
\end{aligned}
$$

Nun giebt die Gleichung 6)

$$
6^*)\quad \begin{aligned}
&\delta' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k - d' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta' p_k - d \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k \\
&= -2 \left\{ \Sigma \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} dp_i\, d'p_k\, \delta' p_s + \Sigma a_{is}\, d d' p_i\, \delta' p \right\}.
\end{aligned}
$$

Nach Riemann's Vorschrift würde die zweite Variation $d d' p_i$, welche noch ganz willkürlich ist, so zu bestimmen sein, dass

$$
10)\quad \delta' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k - d' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta' p_k - d \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k = 0,
$$

folglich auch

$$
10^*)\quad \Sigma a_{is}\, d d' p_i\, \delta' p_s + \Sigma \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} dp_i\, d'p_k\, \delta' p_s = 0
$$

ist. Da die Variationen $\delta' p_s$ unabhängig von einander sind, so müssen die Factoren von $\delta' p_s$, damit der Gleichung 10*) genügt werde, sämmtlich verschwinden. Dies giebt das folgende Gleichungssystem:

$$
11)\quad \Sigma_i a_{is}\, d d' p_i + \Sigma_{ik} \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} dp_i\, d'p_k = 0
$$

oder in ausführlicher Darstellung

$$a_{11}\, dd'p_1 + a_{21}\, dd'p_2 + \ldots + a_{n1}\, dd'p_n = -\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ 1 \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k,$$

$$a_{12}\, dd'p_1 + a_{22}\, dd'p_2 + \ldots + a_{n2}\, dd'p_n = -\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ 2 \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k,$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{1n}\, dd'p_1 + a_{2n}\, dd'p_2 + \ldots + a_{nn}\, dd'p_n = -\Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ n \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k,$$

woraus

$$a\, dd'p_\nu =$$

$$-\left\{\alpha_{\nu 1}\, \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ 1 \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k + \alpha_{\nu 2}\, \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ 2 \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k + \ldots + \alpha_{\nu n}\, \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ n \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k \right\}$$

oder

11*) $$dd'p_\nu = -\Sigma_\mu \frac{\alpha_{\nu\mu}}{a} \Sigma_{ik} \left|\begin{matrix} ik \\ \mu \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k$$

gefunden wird. In derselben Weise, wie dd', sind die zweiten Variationen $d\delta'$, $\delta d'$, $\delta\delta'$ zu bestimmen. Man hat also im Ganzen folgende vier Bedingungsgleichungen nöthig:

12)
$$\begin{aligned}
&\delta' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k - d' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta' p_k - d \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k \\
&= -2 \left\{ \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right| dp_i\, d'p_k\, \delta' p_s + \Sigma a_{is}\, dd'p_i\, \delta' p_s \right\} = 0, \\
&d' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, \delta' p_k - d \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k - \delta' \Sigma a_{ik}\, dp_i\, d'p_k \\
&= -2 \left\{ \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right| dp_i\, \delta' p_k\, d'p_s + \Sigma a_{is}\, d\delta' p_i\, d'p_s \right\} = 0, \\
&\delta' \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, d'p_k - \delta \Sigma a_{ik}\, \delta' p_i\, d'p_k - d' \Sigma a_{ik}\, \delta' p_i\, \delta p_k \\
&= -2 \left\{ \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right| \delta p_i\, d'p_k\, \delta' p_s + \Sigma a_{is}\, \delta d' p_i\, \delta' p_s \right\} = 0, \\
&d' \Sigma a_{ik}\, \delta p_i\, \delta' p_k - \delta \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k - \delta' \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta p_k \\
&= -2 \left\{ \Sigma \left|\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right| \delta p_i\, \delta' p_k\, d'p_s + \Sigma a_{is}\, \delta\delta' p_i\, d'p_s \right\} = 0;
\end{aligned}$$

durch Addition der ersten und zweiten Gleichung ergiebt sich

$$d \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k = 0$$

und ebenso aus der dritten und vierten Gleichung

$$\delta \Sigma a_{ik}\, d'p_i\, \delta' p_k = 0.$$

Man genügt sämmtlichen Bedingungen, wenn man überhaupt festsetzt, dass für drei beliebige Variationen δ, δ', δ''

$$\delta \Sigma a_{ik}\, \delta' p_i\, \delta'' p_k = 0$$

sei. Nimmt man speciell für δ' und δ'' das Differentialzeichen d, so hat man

13) $$\delta \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k = 0.$$

Hierdurch ist die Riemann'sche Vorschrift zur Bildung der zweiten Variationen auf das isoperimetrische Problem zurückgeführt: die Grössen

p als Functionen einer unabhängigen Variabelen t so zu bestimmen, dass die erste Variation des Integrals $\int\limits_{t_0}^{t} \Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{dp_k}{dt} dt$ innerhalb der Grenzen t_0 und t verschwindet. Denn die Bedingung

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t} \Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{dp_k}{dt} \cdot dt = \int\limits_{t_0}^{t} \delta \Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{dp_k}{dt} \cdot dt = 0$$

führt unmittelbar auf die Gleichung

$$\delta \Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k = 0.$$

Mit der soeben erwähnten Aufgabe hängt aber auf das Engste zusammen ein zweites isoperimetrisches Problem, nämlich die Grössen p als Functionen der Variabelen t so zu bestimmen, dass die erste Variation des Integrals

$$\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{dp_k}{dt}}\, dt$$

Null werde. Wenn wir die Möglichkeit eines gekrümmten Raumes von n Dimensionen zugeben, so würde dieses Integral die Länge einer von dem Punkte $(p_1, p_2, \ldots p_n)_{t=t_0}$ bis zu dem Punkte $(p_1, p_2, \ldots p_n)_{t=t}$ gezogenen Linie ausdrücken. Unsere Aufgabe verlangt also, dass diese Linie zu einem Maximum oder Minimum gemacht werde. Die beiden isoperimetrischen Probleme werden nun aber identisch, wenn man die Variabele t in der Weise bestimmt, dass sie selbst eine kürzeste Linie des n-fachen Raumes darstellt, und hieraus erklärt sich denn ganz einfach der Zusammenhang zwischen der quadrilinearen Form F, welche zu der quadratischen Form $\Sigma a_{ik}\, dp_i dp_k$ covariant ist, und den kürzesten Linien des n-fachen Raumes, dessen Linearelement durch die Quadratwurzel aus derselben Form, also durch $\sqrt{\Sigma a_{ik}\, dp_i dp_k}$ gegeben ist. Um unsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, es sei f eine Function der Grössen p_i, wie der ersten Differentialquotienten $\frac{dp_i}{dt} = p'_i$, welche die Variabele t explicite nicht enthält. Legt man sich nun die Aufgabe vor, die Grössen p_i als Functionen von t so zu bestimmen, dass das Integral

$$\varphi = \int f\, dt$$

zwischen den Grenzen t_0 und t ein Maximum oder Minimum sei, so hat man zunächst die erste Variation dieses Integrals Null zu setzen. Es ist aber

$$\delta f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i + \Sigma \frac{\partial f}{\partial p'_i} \delta p'_i,$$

folglich

$$\delta \varphi = \int \Sigma \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \, dt + \int \Sigma \frac{\partial f}{\partial p'_i} \delta p'_i \, dt.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen t_0 und t, so kommt, da

$$\int \frac{\partial f}{\partial p'_i} \delta p'_i \, dt = \int \frac{\partial f}{\partial p'_i} \frac{d \delta p_i}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial p'_i} \delta p_i - \int \frac{d \frac{\partial f}{\partial p'_i}}{dt} \delta p_i \, dt$$

gesetzt werden kann,

$$\delta \varphi = \left[\Sigma \frac{\partial f}{\partial p'_i} \delta p_i \right]_{t=t_0}^{t=t} - \int_{t_0}^{t} \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial p'_i}}{dt} \right) \delta p_i \, dt = 0,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der Grössen δp_i, welche an den Grenzen verschwinden, das Gleichungssystem

14) $$\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial p'_i}}{dt} = 0$$

entsteht. Setzen wir jetzt $\sqrt{f}$ statt f, so geht diese Gleichung über in

15) $$\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{d \frac{\partial f}{\partial p'_i}}{dt} - \frac{d . f^{-\frac{1}{2}}}{dt} . \frac{\partial f}{\partial p'_i} = 0.$$

Beiden Systemen, sowohl 14) als 15), genügt man durch die Bestimmung, dass f gleich einer Constanten sei. Es ist also $f = c$ sowohl ein Integral von 14) als von 15). Für

$$f = \Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} . \frac{dp_k}{dt}$$

nimmt die Gleichung 14) folgende Gestalt an:

16) $$\Sigma \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r} \frac{dp_i}{dt} . \frac{dp_k}{dt} - 2 \frac{d}{dt} \Sigma a_{ir} \frac{dp_i}{dt} = 0$$

oder ausgeführt

16*) $$\Sigma \left| \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right| \frac{dp_i}{dt} \frac{dp_k}{dt} + \Sigma a_{ir} \frac{d^2 p_i}{dt^2} = 0.$$

Die Gleichung 15) aber giebt

17) $$\frac{1}{\sqrt{\Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} . \frac{dp_k}{dt}}} \left\{ \Sigma \left| \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right| \frac{dp_i}{dt} \frac{dp_k}{dt} + \Sigma a_{is} \frac{d^2 p_i}{dt^2} \right\}$$
$$+ 2 \Sigma a_{ir} \frac{dp_i}{dt} . \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{\Sigma a_{ik} \frac{dp_i}{dt} . \frac{dp_k}{dt}}} = 0.$$

Das gemeinschaftliche Integral von 16*) und 17) ist

$$\Sigma a_{ik}\frac{dp_i}{dt}\cdot\frac{dp_k}{dt}=c,$$

folglich ist

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\Sigma a_{ik}\frac{dp_i}{dt}\cdot\frac{dp_k}{dt}}\,.dt=\sqrt{c}\,.(t-t_0).$$

Wenn man daher $c=1$ und $t_0=0$ setzt, so ist t selbst eine kürzeste Linie, wodurch die oben aufgestellte Behauptung erwiesen ist.

Aus den Gleichungen 12) ergeben sich nun entsprechend den Gleichungen 11) und 11*) die zweiten Variationen

$$dd'p_\nu=-\Sigma_\mu\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\Sigma_{ik}\begin{vmatrix}ik\\ \mu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k,\quad d\delta'p_\nu=-\Sigma_\mu\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\Sigma_{is}\begin{vmatrix}is\\ \mu\end{vmatrix}dp_i\,\delta'p_s,$$

$$d'\delta p_\mu=-\Sigma_\nu\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\Sigma_{kr}\begin{vmatrix}kr\\ \nu\end{vmatrix}d'p_k\,\delta p_r,\quad \delta\delta'p_\mu=-\Sigma_\nu\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\Sigma_{rs}\begin{vmatrix}rs\\ \nu\end{vmatrix}\delta p_r\,\delta'p_s.$$

Demnach wird in Gleichung 9)

$$\begin{aligned}\Sigma\begin{vmatrix}rs\\ i\end{vmatrix}dd'p_i\,\delta p_r\,\delta'p_s&=\Sigma\begin{vmatrix}rs\\ \nu\end{vmatrix}dd'p_\nu\,\delta p_r\,\delta'p_s\\&=-\Sigma_{ikrs}\Sigma_{\mu\nu}\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\begin{vmatrix}ik\\ \mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}rs\\ \nu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta p_r\,\delta'p_s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\begin{vmatrix}is\\ k\end{vmatrix}dp_i\,\delta d'p_k\,\delta'p_s&=\Sigma\begin{vmatrix}is\\ \mu\end{vmatrix}dp_i\,\delta d'p_\mu\,\delta'p_s\\&=-\Sigma_{ikrs}\Sigma_{\mu\nu}\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\begin{vmatrix}is\\ \mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}kr\\ \nu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta p_r\,\delta'p_r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\begin{vmatrix}ik\\ s\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta\delta'p_s&=\Sigma\begin{vmatrix}ik\\ \mu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta\delta'p_\mu\\&=-\Sigma_{ikrs}\Sigma_{\mu\nu}\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\begin{vmatrix}ik\\ \mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}rs\\ \nu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta p_r\,\delta'p_s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\begin{vmatrix}kr\\ s\end{vmatrix}d'p_k\,\delta p_r\,d\delta'p_s&=\Sigma\begin{vmatrix}kr\\ \nu\end{vmatrix}d'p_k\,\delta p_r\,d\delta'p_\nu\\&=-\Sigma_{ikrs}\Sigma_{\mu\nu}\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\begin{vmatrix}is\\ \mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}kr\\ \nu\end{vmatrix}dp_i\,d'p_k\,\delta p_r\,\delta'p_s.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\Sigma a_{is}\,dd'p_i\,\delta\delta'p_s=&\;dd'p_1\,\{a_{11}\,\delta\delta'p_1+a_{21}\,\delta\delta'p_2+\ldots+a_{n1}\,\delta\delta'p_n\}\\&+dd'p_2\,\{a_{12}\,\delta\delta'p_1+a_{22}\,\delta\delta'p_2+\ldots+a_{n2}\,\delta\delta'p_n\}\\&\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\&\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\\&+dd'p_n\,\{a_{1n}\,\delta\delta'p_1+a_{2n}\,\delta\delta'p_2+\ldots+a_{nn}\,\delta\delta'p_n\}.\end{aligned}$$

Vertauscht man in 11) d, d' mit δ, δ' und setzt die so erhaltenen Werthe der eingeklammerten Reihen in diesen Ausdruck ein, so kommt

$$\Sigma a_{is}\,dd'p_i\,\delta\delta'p_s=-\Sigma_\nu\,dd'p_\nu\,\Sigma_{rs}\begin{vmatrix}rs\\ \nu\end{vmatrix}\delta p_r\,\delta'p_s,$$

folglich, wenn man 11*) berücksichtigt,

$$\Sigma a_{is}\, d\delta' p_i\, \delta\delta' p_s = \Sigma_{ikrs}\, \Sigma_{\mu\nu} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \begin{vmatrix} ik \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} rs \\ \nu \end{vmatrix} dp_i\, \delta' p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s.$$

In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich

$$\Sigma a_{is}\, \delta\delta' p_i\, d\delta' p_s = \Sigma_{ikrs}\, \Sigma_{\mu\nu} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \begin{vmatrix} is \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} kr \\ \nu \end{vmatrix} dp_i\, \delta' p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s.$$

Somit erhält man endlich

$$F = \Sigma_{ikrs} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_r} \begin{vmatrix} ik \\ s \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} kr \\ s \end{vmatrix} + \Sigma \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \left(\begin{vmatrix} is \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} kr \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ik \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} rs \\ \nu \end{vmatrix} \right) \right\} dp_i\, \delta' p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s$$

und wenn man noch r mit s und die Zeichen δ und δ' vertauscht,

$$F = \Sigma_{ikrs} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_s} \begin{vmatrix} ik \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} ks \\ r \end{vmatrix} + \Sigma \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a} \left(\begin{vmatrix} ir \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ks \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ik \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} rs \\ \nu \end{vmatrix} \right) \right\} dp_i\, \delta' p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s.$$

Der Coefficient von $dp_i\, \delta' p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s$ stimmt aber mit der linken Seite der Gleichung I, 19) überein; es verschwindet also die Form F identisch, wenn die Form $\Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ von n Differentialen sich in die Summe der Quadrate von ebensoviel Differentialen $\Sigma_i\, dx_i^2$ transformiren lässt.

(Schluss folgt.)

II.

Ueber die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung.

Von

Dr. Ad. Hochheim,

Professor.

(Schluss.)

Abschnitt II.

Die Polarflächen der windschiefen Flächen $\underset{t.e}{W}$ und $\underset{t.\infty}{W}$.

33. **Die Gleichungen der Polarflächen eines Punktes bezüglich einer windschiefen Fläche 2).** Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes k, so ist die Gleichung der quadratischen Polarfläche desselben*

57a) $\xi_1(2x_1x_3 + x_2x_4) + \xi_2(3x_2^2 + x_1x_4) + \xi_3x_1^2 + \xi_4x_1x_2 = 0$

oder

57b) $\xi_3x_1^2 + 3\xi_2x_2^2 + \xi_4x_1x_2 + 2\xi_1x_1x_3 + \xi_2x_1x_4 + \xi_1x_2x_4 = 0;$

dagegen die der Polarebene

58) $(2\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)x_1 + (3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_2 + \xi_1^2x_3 + \xi_1\xi_2x_4 = 0.$

34. **Die quadratische Polarfläche.** Nach Gleichung 57b) ist die quadratische Polarfläche eines Punktes k bezüglich einer windschiefen Fläche 2) eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung, welche die Gerade T in sich enthält,

und zwar ist die Fläche $\underset{k}{Pq}$

bezüglich der Fläche $\underset{t.e}{W}$ ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche, dessen Axen durch die Wurzeln der Gleichung

$$\xi_4^3A^3 - \xi_4^2(\xi_3 + 3\xi_2)A^2 + \xi_4(3\xi_2\xi_3 - \xi_1^2 - \tfrac{1}{4}\xi_4^2)A + 3\xi_1^2\xi_2 = 0$$

bestimmt sind.

bezüglich der Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Hauptaxe der Geraden $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ parallel läuft.

Die Fläche $\underset{k}{Pq}$ wird von der Ebene $x_1=0$ in den beiden Geraden

$$x_1=0,\quad x_2=0,$$
$$x_1=0,\quad 3\xi_2 x_2+\xi_1 x_4=0,$$

dagegen von der Ebene $x_2=0$ in den Geraden

$$x_2=0,\quad x_1=0,$$
$$x_2=0,\quad \xi_3 x_1+2\xi_1 x_3+\xi_2 x_4=0$$

geschnitten und von jeder dieser Ebenen in dem Schnittpunkte der zugehörigen Schnittlinien berührt.

Aus den Gleichungen 2) und 57b) lässt sich schliessen:

Eine windschiefe Fläche 2) wird von der zugehörigen quadratischen Polarfläche eines Punktes k in einer Raumcurve sechster Ordnung geschnitten, welche aus der Linie T und einer Raumcurve vierter Ordnung besteht.

Die Projection der Schnittcurve vierter Ordnung auf $x_3=0$ entspricht den Gleichungen

$$59)\quad \begin{cases} x_1=0, \\ \xi_3 x_1^3+\xi_4 x_1^2 x_2+\xi_2 x_1^2 x_4+3\xi_2 x_1 x_2^2-\xi_1 x_1 x_2 x_4-2\xi_1 x_2^3=0; \end{cases}$$

dieselbe besteht also aus der Schnittkante der beiden Ebenen $x_1=0$, $x_3=0$ und einer Curve dritter Ordnung.

Setzt man $\xi_2=\xi_3=0$, so gehen die Gleichungen 57b) und 59) über in

$$\xi_4 x_1 x_2+2\xi_1 x_1 x_3+\xi_1 x_2 x_4=0$$

und

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad \xi_4 x_1^2-\xi_1 x_1 x_4-2\xi_1 x_2^2=0.$$

Daraus folgt: Befindet sich der Pol k auf der Schnittkante der beiden Ebenen $x_2=0$, $x_3=0$, so ist die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 2) ein hyperbolisches Paraboloid.

In diesem Falle besteht die Projection (auf $x_3=0$) der räumlichen Schnittcurve

der windschiefen Fläche $\underset{t.e}{W}$ und der zugehörigen quadratischen Polarfläche aus den beiden Geraden

$$x_1=0,\quad x_3=0,$$
$$x_2=0,\quad x_3=0$$

und einer Hyperbel.

der windschiefen Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ und der zugehörigen quadratischen Polarfläche aus den beiden Geraden

$$x_1=0,\quad x_3=0,$$
$$x_2=0,\quad x_3=0$$

und einer Parabel.

Verlegt man den Pol k in die Kante $x_2=0$, $x_4=0$, so ist die quadratische Polarfläche desselben bezüglich einer windschiefen Fläche 2) ebenfalls stets ein hyperbolisches Paraboloid, doch findet eine Degeneration der Projection der Schnittcurve nicht statt.

Es mögen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 der Relation

$$\xi_2^3+\xi_1\xi_2\xi_4+\xi_1^2\xi_3=0$$

genügen, so gehen die Gleichungen 59) über in

$x_1=0, \quad \xi_1 x_2-\xi_2 x_1=0, \quad (\xi_1\xi_4+\xi_2^2)x_1^2+\xi_1\xi_2 x_1 x_2-\xi_1^2 x_1 x_4-2\xi_1^2 x_2^2=0.$

Liegt demnach der Pol k auf der windschiefen Fläche 2) selbst, so besteht die Projection der Schnittcurve aus der Geraden $x_1=0$, $x_3=0$, der Projection der durch k gehenden Generatrix, und wenn die Fundamentalfläche

$\underset{t.e}{W}$ ist, aus einer Hyperbel. $\underset{t.\infty}{W}$ ist, aus einer Parabel.

35. **Die Polarebene.** Die Polarebene des Punktes k 58) wird von der Linie T in dem Punkte durchstochen, in welchem eine durch k gehende Tangentialebene eine windschiefe Fläche 2) berührt.

Eine windschiefe Fläche 2) wird von der zugehörigen Polarebene des Punktes k in einer Curve dritter Ordnung geschnitten, deren Projection auf $x_3=0$ der Gleichung

$$60)\quad (2\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4)x_1^3+(3\xi_2^2+\xi_1\xi_4)x_1^2x_2+\xi_1\xi_2x_1^2x_4-\xi_1^2x_1x_2x_4 \\ -\xi_1^2x_2^3=0$$

entspricht. Diese Projection besteht, wenn der Pol k in der Ebene $x_1=0$ liegt, aus drei Geraden, von denen zwei zusammenfallen. Die Polarebene enthält in diesem Falle die Linie T in sich.

Ferner ergiebt sich aus Gleichung 58):

α) Gleitet der Pol k auf dem hyperbolischen Paraboloid

$$61)\quad 2\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4=0$$

fort, welches betrachtet werden kann als der geometrische Ort der Systeme von geraden Linien, welche den Gleichungen

$$\xi_1=\lambda\xi_2, \quad 2\lambda\xi_3=-\xi_4,$$
$$\xi_1=-\lambda\xi_4, \quad 2\lambda\xi_3=\xi_2$$

entsprechen,

so steht die Polarebene desselben bezüglich der Fläche $\underset{t.e}{W}$ stets lothrecht auf der Ebene $x_1=0$.

so geht die Polarebene desselben bezüglich der Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ immer durch den Schnittpunkt der Ebenen $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$.

β) Befindet sich der Punkt k auf dem Mantel eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Gleichung

$$62)\quad 3\xi_2^2+\xi_1\xi_4=0$$

ist (im vorliegenden Falle ein parabolischer Cylinder), so steht die Polarebene desselben bezüglich einer windschiefen Fläche 2) auf der Ebene $x_2=0$ stets lothrecht.

γ) Liegt der Punkt k auf der doppelt gekrümmten Raumcurve, in der das Hyperboloid 61) von dem Kegel 62) geschnitten wird, so enthält die Polarebene die Schnittkante der Ebenen $x_3=0$, $x_4=0$ in sich und ihre Lage ist von den Coordinaten ξ_3 und ξ_4 ganz unabhängig.

δ) Genügen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 der Relation

$$\xi_2^3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \xi_1^2\xi_3 = 0,$$

so geht die Gleichung 60) über in

$$\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1 = 0, \quad (\xi_1\xi_4 + 2\xi_2^2)x_1^2 - \xi_1\xi_2 x_1 x_2 - \xi_1^2 x_1 x_4 - \xi_1^2 x_2^2 = 0.$$

Liegt der Punkt k auf einer windschiefen Fläche 2), so ist die Polarebene desselben Tangentialebene an diesem Punkte. Die Ebene $\underset{k}{Pe}$ schneidet die windschiefe Fläche in der durch k gehenden Generatrix und in einem Kegelschnitte, welcher die Generatrix im Punkte k und in der Linie T durchschneidet. Die Projection desselben ist, wenn die Fundamentalfläche

$\underset{t.e}{W}$ ist, eine Hyperbel. $\qquad$ $\underset{t.\infty}{W}$ ist, eine Parabel.

Die Ebene $\underset{k}{Pe}$ berührt die Fläche $\underset{k}{Pq}$ in diesem Falle im Punkte k ebenfalls und schneidet sie zugleich in zwei durch k gehenden Geraden, nämlich in den Inflexionstangenten der zugehörigen windschiefen Fläche, von denen die eine die durch k gehende Generatrix der windschiefen Fläche ist.

Befindet sich der Punkt k auf der Raumcurve, in der eine windschiefe Fläche 2) von dem Kegel

$$3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4 = 0$$

geschnitten wird, so geht die zweite Inflexionstangente im Punkte k stets durch die Gerade

$$x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Da eine windschiefe Fläche 2) von einer Geraden G nur in drei Punkten durchstochen werden kann, von denen jeder in einer Generatrix liegt, so lässt sich schliessen, dass dieselbe auch der dritten Classe angehört.

36. **Die Diametralflächen.** Da die Diametralflächen einer Fläche die Polarflächen unendlich ferner Punkte sind, so kann man aus den Relationen 57) und 58) die Gleichungen der Diametralflächen einer windschiefen Fläche 2) ableiten, indem man den Pol k in die Unendlichkeit fortrücken lässt.

A. Die Diametralflächen der windschiefen Fläche $\underset{t.e}{W}$.

Zur Einführung von Cartesischen Coordinaten setzen wir x für $\frac{x_1}{x_4}$, y für $\frac{x_2}{x_4}$, z für $\frac{x_3}{x_4}$ und bezeichnen die Winkel, unter denen eine Gerade G des Sehnensystems, zu dem die Diametralflächen conjugirt sein sollen, zu den neuen Axen geneigt ist, mit φ, ψ, χ; dann ergeben sich als Gleichungen der Diametralflächen:

$$63) \quad \begin{cases} x^2 \cos\chi + 3y^2 \cos\psi + 2xz\cos\varphi + x\cos\psi + y\cos\varphi = 0, \\ 2x\cos\varphi\cos\chi + 3y\cos^2\psi + z\cos^2\varphi + \cos\varphi\cos\psi = 0. \end{cases}$$

Die Diametralfläche zweiter Ordnung der windschiefen Fläche $W_{t,s}$, welche einem Strahlenbündel conjugirt ist, ist demnach im Allgemeinen ein Hyperboloid.

Lässt man das Strahlenbündel der Ebene $x=0$ parallel laufen, so geht die demselben conjugirte Diametralfläche zweiter Ordnung über in einen hyperbolischen Cylinder, dessen Generatrix auf der Ebene $z=0$ lothrecht steht, während die Diametralebene mit der Coordinatenebene $y=0$ zusammenfällt.

Legt man das Strahlenbündel parallel der Ebene $y=0$, so ist die demselben conjugirte Diametralfläche zweiter Ordnung ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Axe mit der Y-Axe zusammenfällt; die Diametralebene steht in diesem Falle lothrecht auf der Ebene $y=0$.

Ist jeder Strahl des Bündels der Z-Axe parallel, so besteht die Diametralfläche zweiter Ordnung aus zwei Ebenen, welche beide mit der Ebene $x=0$ zusammenfallen.

B. Die Diametralflächen der windschiefen Fläche $W_{t,\infty}$.

Wir führen ebenfalls Cartesische Coordinaten ein und zwar setzen wir x' für $\frac{x_2}{x_1}$, y' für $\frac{x_3}{x_1}$ und z' für $\frac{x_4}{x_1}$, ferner bezeichnen wir die Winkel, unter denen ein Strahl des Bündels gegen die Axen des Coordinatensystems geneigt ist, mit φ', ψ', χ'. Die Gleichungen der Diametralflächen sind dann

64) $(3x'^2+z')\cos\varphi'+x'\cos\chi'+\cos\psi'=0, \quad 3x'\cos\varphi'+\cos\chi'=0.$

Die Diametralfläche zweiter Ordnung der windschiefen Fläche $W_{t,\infty}$ ist demnach ein parabolischer Cylinder, dessen Generatrix auf der Ebene $y'=0$ lothrecht steht. Dieselbe geht über in zwei Ebenen, wenn das Strahlenbündel der Ebene $x'=0$ parallel läuft. Die Diametralebene ist stets der Ebene $x'=0$ parallel; ihre Lage ist von der Grösse des Winkels ψ' unabhängig. Allen Strahlenbündeln also, für welche das Verhältniss $\frac{\cos\varphi'}{\cos\chi'}$ denselben Werth besitzt, ist dieselbe Diametralebene conjugirt. Ist ein Strahlenbündel der Ebene $z'=0$ parallel, so fällt die demselben conjugirte Diametralebene mit der Ebene $x'=0$ zusammen.

37. **Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 2).** Mit Hilfe von Gleichung 2) findet man als Gleichung derselben

$$65\text{a)} \qquad \begin{vmatrix} 2x_3 & x_4 & 2x_1 & x_2 \\ x_4 & 6x_2 & 0 & x_1 \\ 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$65\text{b)} \qquad 4x_1^4=0.$$

Die Hesse'sche Fläche einer windschiefen Fläche 2) wird demnach gebildet von vier Ebenen, die alle mit der Ebene $x_1 = 0$ zusammenfallen.

Für $\xi_1 = 0$ geht die Gleichung 57a) über in

66) $$\xi_2(3x_2^2 + x_1x_4) + \xi_3x_1^2 + \xi_4x_1x_2 = 0.$$

Liegt demnach der Pol k in der Ebene $x_1 = 0$, so ist die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 2) ein Kegel, und zwar

bezüglich der Fläche $\underset{t.c}{W}$ ein hyperbolischer Cylinder.	bezüglich der Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ ein parabolischer Cylinder.

Die Generatrix steht stets auf der Ebene $x_3 = 0$ lothrecht. Die Spitzen aller dieser Kegel, deren Pole in der Ebene $x_1 = 0$ liegen, befinden sich in dem Schnittpunkte der drei Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Dieser Punkt ist demzufolge jedem Punkte der Ebene $x_1 = 0$ reciprok und ist zugleich der Rückkehrpunkt der Linie T.

Die Projection der Raumcurve vierter Ordnung, in der eine windschiefe Fläche 2) von dem Kegel $\underset{k}{Pq}$ geschnitten wird, auf $x_3 = 0$ besteht aus zwei Geraden, welche mit der Kante $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ zusammenfallen, und einem Kegelschnitte.

Für $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ erhält man aus 57a)

67) $$x_1 = 0, \quad \xi_3x_1 + \xi_4x_2 = 0.$$

Befindet sich also der Punkt k in der Linie T, so besteht die Fläche $\underset{k}{Pq}$ aus zwei Ebenen, von denen die eine mit der Ebene $x_1 = 0$ zusammenfällt, die zweite die erste in der Linie T schneidet.

Setzt man $\xi_1 = 0$, so geht die Gleichung 58) über in

68) $$\xi_4x_1 + 3\xi_2x_2 = 0.$$

Die Polarebene jedes Punktes der Hesse'schen Fläche bezüglich einer windschiefen Fläche 2) enthält die Linie T in sich.

38. **Parabolische Punkte.** Die Curve der parabolischen Punkte auf einer windschiefen Fläche 2) entspricht den Gleichungen

69) $$x_2^3 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_4 = 0, \quad x_1^4 = 0;$$

sie gehört demnach der zwölften Ordnung an und besteht aus vier Geraden, von denen jede dreifach zu rechnen ist, und die alle vier mit der Linie T zusammenfallen.

Die Schnittpunkte einer windschiefen Fläche 2) der Fläche $\underset{k}{Pq}$ und der Hesse'schen Fläche sind die Berührungspunkte der stationären Tangentenebenen, welche sich vom Punkte k aus an die windschiefe Fläche legen lassen.

39. **Der Tangentenkegel.** Werden vom Punkte k aus alle möglichen Tangenten an eine windschiefe Fläche 2) gelegt, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes derselben

$$\begin{aligned} & 27\{x_2^3 + x_1(x_1x_3 + x_2x_4)\}^2\{\xi_2^3 + \xi_1(\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)\}^2 \\ & + 4\{\xi_1(2x_1x_3 + x_2x_4) + \xi_2(3x_2^2 + x_1x_4) + \xi_3x_1^2 + \xi_4x_1x_2\}^3 \\ & \times\{\xi_2^3 + \xi_1(\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)\} - 18\{x_2^3 + x_1(x_1x_3 + x_2x_4)\} \\ & \times\{\xi_1(2x_1x_3 + x_2x_4) + \xi_2(3x_2^2 + x_1x_4) + \xi_3x_1^2 + \xi_4x_1x_2\} \\ \text{70 a)}\quad & \times\{(2\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)x_1 + (3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_2 + \xi_1^2x_3 + \xi_1\xi_2x_4\} \\ & \times\{\xi_2^3 + \xi_1(\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)\} \\ & - \{\xi_1(2x_1x_3 + x_2x_4) + \xi_2(3x_2^2 + x_1x_4) + \xi_3x_1^2 + \xi_4x_1x_2\}^2 \\ & \times\{(2\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)x_1 + (3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_2 + \xi_1^2x_3 + \xi_1\xi_2x_4\}^2 \\ & + 4\{x_2^3 + x_1(x_1x_3 + x_2x_4)\} \\ & \times\{(2\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)x_1 + (3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_2 + \xi_1^2x_3 + \xi_1\xi_2x_4\}^3 = 0. \end{aligned}$$

Der Tangentenkegel gehört demnach der sechsten Ordnung an, und zwar besteht er aus einer Doppelebene, welche den Punkt k und die Linie T enthält, und einem Kegel vierter Ordnung.

Genügen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ der Gleichung 2), so geht die Gleichung 70 a) über in

$$\text{70 b)}\quad \left\{\begin{aligned} & \{(2\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4)x_1 + (3\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_2 + \xi_1^2x_3 + \xi_1\xi_2x_4\}^2 = 0, \\ & \{\xi_2x_1 - \xi_1x_2\}^2 = 0, \\ & (\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)^2x_1^2 - 2\xi_1^2(\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_1x_4 + 2\xi_1\xi_2(\xi_2^2 + \xi_1\xi_4)x_1x_2 \\ & + 4\xi_1^3\xi_2x_1x_3 - \xi_1^2(3\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_4)x_2^2 - 4\xi_1^4x_2x_3 + 2\xi_1^3\xi_2x_2x_4 \\ & + \xi_1^4x_4^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Liegt also der Punkt k auf der windschiefen Fläche selbst, so besteht der der windschiefen Fläche umschriebene Kegel aus einem Kegel zweiter Ordnung und vier Ebenen, von denen zwei mit der Tangentialebene am Punkte k zusammenfallen, die beiden anderen ebenfalls zusammenfallen und die Linie T enthalten. Lässt man den Punkt k in die Linie T fallen, so verschwinden die Gleichungen 70 b) ganz.

Der Tangentenkegel einer windschiefen Fläche 2) gehört der dritten Classe an.

40. **Die Inflexionstangenten,** welche sich von einem Punkte k an eine windschiefe Fläche 2) ziehen lassen. Setzt man, um Cartesische Coordinaten einzuführen, $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$, ferner $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4}$, $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_4}$, $\zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4}$, so ergeben sich zur Bestimmung der Coordinaten der Berührungspunkte die Gleichungen

$$\text{71)}\quad \left\{\begin{aligned} & y^3 + x(xz + y) = 0, \\ & \zeta x^2 + 3\eta y^2 + xy + 2\xi xz + \eta x + \xi y = 0, \\ & (2\xi\zeta + \eta)x + (3\eta^2 + \xi)y + \xi^2 z + \xi\eta = 0. \end{aligned}\right.$$

Von einem Punkte k können demnach im Allgemeinen sechs Inflexionstangenten an die windschiefe Fläche $W_{t.e}$ gezogen werden.

Setzt man $\xi = 0$, so nehmen die vorigen Gleichungen die Gestalt an

$$y^3 + x(xz+y) = 0, \quad \zeta x^2 + 3\eta y^2 + xy + \eta x = 0, \quad x + 3\eta y = 0.$$

Befindet sich also der Punkt k in der YZ-Ebene, so ist jede von demselben ausgehende Gerade, welche die Linie T schneidet, eine Inflexionstangente der Fläche $W_{t.e}$, ausserdem lässt sich noch eine Inflexionstangente ziehen, deren Berührungspunkt die Coordinaten

$$-\frac{\eta}{\zeta}, \quad \frac{1}{3\zeta}, \quad \frac{y\eta\zeta - 1}{27\eta^2\zeta}$$

besitzt.

Wird $x' = \frac{x_2}{x_1}$, $y' = \frac{x_3}{x_1}$, $z' = \frac{x_4}{x_1}$, ferner $\xi' = \frac{\xi_2}{\xi_1}$, $\eta' = \frac{\xi_3}{\xi_1}$, $\zeta' = \frac{\xi_4}{\xi_1}$ gesetzt, so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten der Berührungspunkte die Gleichungen

$$\text{72)} \quad \left\{\begin{aligned} x'^3 + y' + x'z' &= 0, \\ 3\xi' x'^2 + \zeta' x' + 2y' + x'z' + \xi' z' + \eta' &= 0, \\ (3\xi'^2 + \zeta')x' + y' + \xi' z' + 2\eta' + \xi'\zeta' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Da sich aus diesen Gleichungen nur drei Werthe für jede der Unbekannten ergeben, so folgt:

Von einem Punkte k lassen sich an die windschiefe Fläche $W_{t.\infty}$ im Allgemeinen drei Inflexionstangenten ziehen.

Beschreibt man von dem Punkte k aus einen Tangentenkegel

um die windschiefe Fläche $W_{t.e}$, so besitzt derselbe im Allgemeinen sechs Cuspidalkanten.	um die windschiefe Fläche $W_{t.\infty}$, so besitzt er im Allgemeinen drei Cuspidalkanten.

41. **Die gemischte Polarfläche zweier Punkte k und k'.** Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die tetraedrischen Coordinaten des Punktes k, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 die des Punktes k', so ist die Gleichung der gemischten Polarfläche dieser beiden Punkte bezüglich einer windschiefen Fläche 2)

$$\text{73)} \quad \begin{aligned} &\{2(\xi_1\xi'_3 + \xi_3\xi'_1) + \xi_2\xi'_4 + \xi_4\xi'_2\}x_1 \\ &+ (6\xi_2\xi'_2 + \xi_1\xi'_4 + \xi_4\xi'_1)x_2 + 2\xi_1\xi'_1 x_3 + (\xi_1\xi'_2 + \xi_2\xi'_1)x_4 = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

Liegt der Punkt k fest und gleitet der Punkt k' auf der Ebene

$$2(\xi_1\xi'_3 + \xi_3\xi'_1) + \xi_2\xi'_4 + \xi_4\xi'_2 = 0$$

fort, so dreht sich die Ebene $Pe_{kk'}$ um den Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Aehnliche Resultate lassen sich mit Leichtigkeit aufstellen.

Befinden sich die beiden Punkte k und k' in der Hesse'schen Fläche, so enthält die Ebene $\underset{kk'}{Pe}$ die Linie T in sich. Dasselbe findet statt, wenn einer der beiden Punkte in der Linie T liegt, der andere eine beliebige Lage ausserhalb der Hesse'schen Fläche hat. Lässt man aber beide Punkte in die Linie T fallen, so verschwindet die Gleichung 73).

42. **Die erste Polare einer Geraden** G. Durch zwei Punkte k und k' sei eine Gerade G gelegt. Construirt man die quadratische Polarfläche jedes Punktes derselben bezüglich einer windschiefen Fläche 2), so erhält man ein Büschel von Hyperboloiden, dessen Basis die Raumcurve ist, in der sich die beiden Flächen $\underset{k}{Pq}$ und $\underset{k'}{Pq}$ schneiden; derselbe entspricht also den Gleichungen

$$74)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi_1(2x_1x_3+x_2x_4)+\xi_2(3x_2^2+x_1x_4)+\xi_3 x_1^2+\xi_4 x_1x_2=0, \\ \xi'_1(2x_1x_3+x_2x_4)+\xi'_2(3x_2^2+x_1x_4)+\xi'_3 x_1^2+\xi'_4 x_1x_2=0. \end{array}\right.$$

Da jede der Flächen $\underset{k}{Pq}$ und $\underset{k'}{Pq}$ die Linie T in sich enthält, so besteht die erste Polare der Geraden G bezüglich einer windschiefen Fläche 2) aus der Geraden T und einer Raumcurve dritter Ordnung.

Die Projection der Raumcurve dritter Ordnung auf $x_2=0$ entspricht der Gleichung

$$75)\quad \begin{array}{l} x_1^3\{(\xi_3\xi'_4-\xi_4\xi'_3)(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)+3(\xi_2\xi'_3-\xi_3\xi'_2)^2\} \\ +2x_1^2x_3\{(\xi_1\xi'_4-\xi_4\xi'_1)(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)-6(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)(\xi_2\xi'_3-\xi_3\xi'_2)\} \\ +x_1^2x_4\{(\xi_3\xi'_1-\xi_1\xi'_3)(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)+(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)^2 \\ \qquad -(\xi_3\xi'_4-\xi_4\xi'_3)(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)\} \\ +12x_1x_3^2(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)^2-2x_1x_3x_4(\xi_1\xi'_4-\xi_4\xi'_1)(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1) \\ -x_1x_4^2(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)\{2(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)+(\xi_3\xi'_1-\xi_1\xi'_3)\} \\ +x_4^3(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)^2=0. \end{array}$$

Befindet sich die Gerade G in der Ebene $x_1=0$, so besteht die Projection der ersten Polaren derselben auf $x_2=0$ aus vier Geraden, von denen drei mit der Linie T zusammenfallen, die vierte der Gleichung

$$x_1\{(\xi_3\xi'_4-\xi_4\xi'_3)(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)+3(\xi_2\xi'_3-\xi_3\xi'_2)^2\}+x_4(\xi_2\xi'_4-\xi_4\xi'_2)^2=0$$

entspricht.

Für $\xi_2=\xi'_2=0$ verschwindet die Gleichung 75).

Durchschneidet endlich die Linie G die Gerade T, so besteht die Projection der ersten Polaren auf $x_2=0$ ebenfalls aus vier Geraden, von denen drei mit der Linie T zusammenfallen, die vierte die Gleichung

$$x_1\{3\xi_3^2\xi'^2_2-\xi_4\xi'_2(\xi_3\xi'_4-\xi_4\xi'_3)\}+2x_3\xi_4^2\xi'_1\xi'_2+x_4\xi_4\xi'_2(\xi_4\xi'_2-\xi_3\xi'_1)=0$$

besitzt.

43. **Die Pole einer Ebene** E. Drei Punkte k, k', k'' mögen sich in der Ebene E befinden, aber nicht in einer Geraden liegen; ihre tetraedri-

schen Coordinaten seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi''_1, \xi''_2, \ldots$. Wird die Ebene E als Polarebene bezüglich einer windschiefen Fläche 2) betrachtet, so ergeben sich zur Bestimmung der Coordinaten der Pole die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\xi_1\ (2x_1x_3+x_2x_4)+\xi_2\ (3x_2^2+x_1x_4)+\xi_3\ x_1^2+\xi_4\ x_1x_2=0,\\
&\xi'_1\ (2x_1x_3+x_2x_4)+\xi'_2\ (3x_2^2+x_1x_4)+\xi'_3\ x_1^2+\xi'_4\ x_1x_2=0,\\
&\xi''_1(2x_1x_3+x_2x_4)+\xi''_2(3x_2^2+x_1x_4)+\xi''_3x_1^2+\xi''_4x_1x_2=0.
\end{aligned}$$

Man findet mit Hilfe derselben

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{x_4}=0,\ =A\alpha, &&\frac{x_2}{x_1}=\tfrac{0}{0},\ =\frac{1}{A},\\
&\frac{x_2}{x_4}=0,\ =\alpha, &&\frac{x_3}{x_1}=\infty,\ =-\frac{\xi+\eta(3\alpha+A)+A\alpha(\zeta A+1)}{2\xi A^2\alpha},\\
&\frac{x_3}{x_4}=\tfrac{0}{0},\ =-\frac{\xi+\eta(3\alpha+A)+A\alpha(\zeta A+1)}{3\xi A}, &&\frac{x_4}{x_1}=\infty,\ =\frac{1}{A\alpha},
\end{aligned}$$

in denen $A, \alpha, \xi, \eta, \zeta$ Functionen der Coordinaten der Punkte k, k', k'' sind.

Betrachtet man die Ebene E als Polarebene bezüglich einer windschiefen Fläche 2), so kann jeder Punkt der Linie T als Pol derselben angesehen werden, ausserdem existirt nur noch ein einziger Punkt, welcher Pol derselben ist.

Construirt man also zu allen Punkten der Ebene E die quadratischen Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 2), so gehen dieselben durch die Linie T und durch einen Punkt, den Pol dieser Ebene.

Enveloppen der Polarebenen.

44. **Die zweite Polarfläche einer Geraden G.** Gegeben sei die Linie G, welche durch die Punkte k und k' gehen möge. Die Coordinaten des Punktes k seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, die des Punktes k' $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, dann lassen sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Geraden bezeichnen durch $\xi_1+\lambda\xi'_1,\ \xi_2+\lambda\xi'_2,\ \xi_3+\lambda\xi'_3,\ \xi_4+\lambda\xi'_4$. Das System der Polarebenen aller Punkte der Geraden G bezüglich einer windschiefen Fläche 2) entspricht demnach der Gleichung

$$\text{76)}\quad \begin{aligned}
&(2\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4)x_1+(3\xi_2^2+\xi_1\xi_4)x_2+\xi_1^2x_3+\xi_1\xi_2x_4\\
&+\lambda\{(2(\xi_1\xi'_3+\xi_3\xi'_1)+\xi_2\xi'_4+\xi_4\xi'_2)x_1+(6\xi_2\xi'_2+\xi_1\xi'_4+\xi_4\xi'_1)x_2\\
&\qquad+2\xi_1\xi'_1x_3+(\xi_1\xi'_2+\xi_2\xi'_1)x_4\}\\
&+\lambda^2\{(2\xi'_1\xi'_3+\xi'_2\xi'_4)x_1+(3\xi'^2_2+\xi'_1\xi'_4)x_2+\xi'^2_1x_3+\xi'_1\xi'_2x_4\}=0,
\end{aligned}$$

in der man λ alle möglichen Werthe ertheilen kann. Man erhält aus dieser als Gleichung derjenigen Fläche, welche das Ebenensystem einhüllt, die Relation

$$\text{77)}\quad \begin{aligned}
&4\{(2\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4)x_1+(3\xi_2^2+\xi_1\xi_4)x_2+\xi_1^2x_3+\xi_1\xi_2x_4\}\\
&\times\{(2\xi'_1\xi'_3+\xi'_2\xi'_4)x_1+(3\xi'^2_2+\xi'_1\xi'_4)x_2+\xi'^2_1x_3+\xi'_1\xi'_2x_4\}\\
&-\{(2(\xi_1\xi'_3+\xi_3\xi'_1)+\xi_2\xi'_4+\xi_4\xi'_2)x_1+(6\xi_2\xi'_2+\xi_1\xi'_4+\xi_4\xi'_1)x_2\\
&+2\xi_1\xi'_1x_3+(\xi_1\xi'_2+\xi_2\xi'_1)x_4\}^2=0.
\end{aligned}$$

Die zweite Polarfläche der Geraden G bezüglich einer windschiefen Fläche 2) ist demnach ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze mit dem Schnittpunkte der drei Ebenen $\underset{k}{Pe}$, $\underset{k'}{Pe}$ und $\underset{kk'}{Pe^{\bullet}}$ zusammenfällt.

Aus der Gleichung 77) ergiebt sich ferner:

α) Befindet sich die Gerade G in der Hesse'schen Fläche, so schneiden sich alle Ebenen des Systems in der Linie T.

β) Durchsticht die Gerade G die Linie T, so degenerirt der Polarkegel derselben in zwei Ebenen, welche sich decken und die Gerade T in sich enthalten.

γ) Liegt die Gerade G in der Ebene $x_2 = 0$, so fällt die Spitze des umhüllenden Kegels mit dem Schnittpunkte der drei Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ zusammen.

45. **Die gemischte Polarfläche zweier Geraden G und G'.** Die Gerade G gehe durch die beiden Punkte k und k', dagegen G' durch die Punkte k'' und k'''. Sind die Coordinaten dieser Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \quad \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \quad \xi''_1, \xi''_2, \ldots, \quad \xi'''_1, \xi'''_2, \ldots,$$

so ist die Gleichung des Systems der gemischten Polarebenen [bezüglich einer windschiefen Fläche 2)] von zwei Punkten, deren einer sich auf der Geraden G, der andere auf der Geraden G' fortbewegt,

$$\begin{aligned}
&\{2(\xi_1\xi''_3 + \xi_3\xi''_1) + \xi_2\xi''_4 + \xi_4\xi''_2\}\,x_1 \\
&+ (6\xi_2\xi''_2 + \xi_1\xi''_4 + \xi_4\xi''_1)\,x_2 + 2\xi_1\xi''_1 x_3 + (\xi_1\xi''_2 + \xi_2\xi''_1)\,x_4 \\
&+ \lambda\{(2(\xi'_1\xi''_3 + \xi'_3\xi''_1) + \xi'_2\xi''_4 + \xi'_4\xi''_2)\,x_1 + (6\xi'_2\xi''_2 + \xi'_1\xi''_4 + \xi'_4\xi''_1)\,x_2 \\
&\qquad + 2\xi'_1\xi''_1 x_3 + (\xi'_1\xi''_2 + \xi'_2\xi''_1)\,x_4\} \\
&+ \mu\{(2(\xi_1\xi'''_3 + \xi_3\xi'''_1) + \xi_2\xi'''_4 + \xi_4\xi'''_2)\,x_1 + (6\xi_2\xi'''_2 + \xi_1\xi'''_4 + \xi_4\xi'''_1)\,x_2 \\
&\qquad + 2\xi_1\xi'''_1 x_3 + (\xi_1\xi'''_2 + \xi_2\xi'''_1)\,x_4\} \\
&+ \lambda\mu\{(2(\xi'_1\xi'''_3 + \xi'_3\xi'''_1) + \xi'_2\xi'''_4 + \xi'_4\xi'''_2)\,x_1 \\
&\qquad + (6\xi'_2\xi'''_2 + \xi'_1\xi'''_4 + \xi'_4\xi'''_1)\,x_2 + 2\xi'_1\xi'''_1 x_3 + (\xi'_1\xi'''_2 + \xi'_2\xi'''_1)\,x_4\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus findet man die Gleichung der Enveloppe dieses Ebenensystems

$$\begin{aligned}
&\{(2(\xi_1\xi''_3 + \xi_3\xi''_1) + \xi_2\xi''_4 + \xi_4\xi''_2)\,x_1 + (6\xi_2\xi''_2 + \xi_1\xi''_4 + \xi_4\xi''_1)\,x_2 \\
&\quad + 2\xi_1\xi''_1 x_3 + (\xi_1\xi''_2 + \xi_2\xi''_1)\,x_4\} \\
&\times\{(2(\xi'_1\xi'''_3 + \xi'_3\xi'''_1) + \xi'_2\xi'''_4 + \xi'_4\xi'''_2)\,x_1 + (6\xi'_2\xi'''_2 + \xi'_1\xi'''_4 + \xi'_4\xi'''_1)\,x_2 \\
&\quad + 2\xi'_1\xi'''_1 x_3 + (\xi'_1\xi'''_2 + \xi'_2\xi'''_1)\,x_4\} \\
78)\quad &= \{(2(\xi_1\xi'''_3 + \xi_3\xi'''_1) + \xi_2\xi'''_4 + \xi_4\xi'''_2)\,x_1 + (6\xi_2\xi'''_2 + \xi_1\xi'''_4 + \xi_4\xi'''_1)\,x_2 \\
&\quad + 2\xi_1\xi'''_1 x_3 + (\xi_1\xi'''_2 + \xi_2\xi'''_1\,x_4\} \\
&\times\{(2(\xi'_1\xi''_3 + \xi'_3\xi''_1) + \xi'_2\xi''_4 + \xi'_4\xi''_2)\,x_1 + (6\xi'_2\xi''_2 + \xi'_1\xi''_4 + \xi'_4\xi''_1)\,x_2 \\
&\quad + 2\xi'_1\xi''_1 x_3 + (\xi'_1\xi''_2 + \xi'_2\xi''_1)\,x_4\}.
\end{aligned}$$

Führt man die in 17) angegebenen Abkürzungen ein, so ergiebt sich:

Die gemischte Polarfläche der beiden Geraden G und G' ist ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche, und zwar ist dieselbe der geometrische Ort der Systeme von geraden Linien, welche den Gleichungen

$$\underset{kk''}{Pe} = \gamma . \underset{kk'''}{Pe}, \quad \gamma . \underset{k'k'''}{Pe} = \underset{k'k'}{Pe}, \quad \underset{kk'}{Pe} = \gamma . \underset{k'k''}{Pe}, \quad \gamma . \underset{k'k''}{Pe} = \underset{kk'''}{Pe}$$

entsprechen.

Für besondere Lagen der Geraden G und G' lassen sich die Resultate mit Leichtigkeit aus der Gleichung 78) ermitteln.

46. **Die gemeine Polarfläche einer Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 2).** Ist die Gleichung der Ebene E

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0,$$

so lässt sich nach 18) die Gleichung der gemeinen Polarfläche in der Form aufstellen:

$$\text{79a)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 2x_3 & x_4 & 2x_1 & x_2 \\ a_2 & x_4 & 6x_2 & 0 & x_1 \\ a_3 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\text{79b)} \qquad \begin{aligned} &2(a_1 a_3 + 2 a_2 a_4) x_1^3 - 2(a_2 a_3 + 6 a_4^2) x_1^2 x_2 - a_3^2 x_1^2 x_3 \\ &- 2 a_3 a_4 x_1^2 x_4 + a_3^2 x_1 x_2 x_4 + 12 a_3 a_4 x_1 x_2^2 - 3 a_3^2 x_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Das System der Polarebenen aller Punkte der Ebene E bezüglich einer windschiefen Fläche 2) wird demnach eingehüllt von einer windschiefen Fläche derselben Ordnung, deren Doppellinie und einfache Leitlinie ebenfalls mit der Linie T zusammenfallen.

Die Ebene $x_1 = 0$ berührt diese Fläche längs der ganzen Doppellinie und schneidet sie zugleich in drei zusammenfallenden Geraden. Die andere Tangentialebene in irgend einem Punkte der Doppellinie fällt mit der des Hyperboloids

$$\text{80)} \qquad \begin{aligned} 2(a_1 a_3 + 2 a_2 a_4) x_1^2 - 2(a_2 a_3 + 6 a_4^2) x_1 x_2 - a_3^2 x_1 x_3 - 2 a_3 a_4 x_1 x_4 \\ + a_3^2 x_2 x_4 + 12 a_3 a_4 x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

zusammen.

Für besondere Lagen der Ebene E nimmt die Gleichung 79b) eine einfachere Gestalt an.

Setzt man $a_3 = 0$, so ergiebt sich

$$\text{81)} \qquad x_1^2 = 0, \quad a_2 x_1 - 3 a_4 x_2 = 0.$$

Steht also die Ebene E lothrecht zu der Ebene $x_3 = 0$, so wird die gemeine Polarfläche derselben bezüglich einer windschiefen Fläche 2) gebildet aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_1 = 0$ zusammenfallen, die dritte die Linie T in sich enthält. Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn die Ebene E durch die Kante der Ebenen $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ geht.

Für $a_2 = a_3 = 0$ erhält man

$$\text{82)} \qquad x_1^2 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Läuft also die Ebene E

der Coordinatenebene $x_1 = 0$ parallel, so besteht die gemeine Polar-

der Coordinatenebene $x_4 = 0$ parallel, so besteht die gemeine Polarfläche bezüglich der windschiefen Fläche $\underset{t.e}{W}$ | fläche bezüglich der windschiefen Fläche $\underset{t.\infty}{W}$

aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_1 = 0$, die dritte mit der Ebene $x_2 = 0$ zusammenfallen.

Ist $a_3 = a_4 = 0$, d. h. geht die Ebene E durch die Linie T der windschiefen Fläche 2), so verschwindet die Gleichung 79b) vollständig.

47. **Die gemischte Polarfläche zweier Ebenen E und E' bezüglich einer windschiefen Fläche 2).** Es sei die Gleichung der Ebene E

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

und die der Ebene E'

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 = 0,$$

dann entspricht die gemischte Polarfläche nach 26) der Relation

$$\text{83a)} \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & 2x_3 & x_4 & 2x_1 & x_2 \\ a'_2 & x_4 & 6x_2 & 0 & x_1 \\ a'_3 & 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ a'_4 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\text{83b)} \quad \begin{aligned} &2\{a_1 a'_3 + a_3 a'_1 + 2(a_2 a'_4 + a_4 a'_2)\} x_1^3 - 2(a_2 a'_3 + a_3 a'_2 + 12 a_4 a'_4) x_1^2 x_2 \\ &- 2 a_3 a'_3 x_1^2 x_3 - 2(a_3 a'_4 + a_4 a'_3) x_1^2 x_4 + 12(a_3 a'_4 + a_4 a'_3) x_1 x_2^2 \\ &+ 2 a_3 a'_3 x_1 x_2 x_4 - 6 a_3 a'_3 x_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Construirt man also zu jedem Punkte der Ebene E die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 2) und betrachtet E' als Polarebene jeder dieser Flächen zweiter Ordnung, so ist der geometrische Ort der zugehörigen Pole ebenfalls eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren Doppellinie und einfache Leitlinie mit der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zusammenfallen.

Die Ebene x_1 berührt auch diese windschiefe Fläche längs der ganzen Doppellinie und die andere Tangentialebene in einem Punkte dieser Linie fällt stets mit der des Hyperboloids

$$\text{84)} \quad \begin{aligned} &2\{a_1 a'_3 + a_3 a'_1 + 2(a_2 a'_4 + a_4 a'_2)\} x_1^2 - 2(a_2 a'_3 + a_3 a'_2 + 12 a_4 a'_4) x_1 x_2 \\ &- 2 a_3 a'_3 x_1 x_3 - 2(a_3 a'_4 + a_4 a'_3) x_1 x_4 + 12(a_3 a'_4 + a_4 a'_3) x_2^2 \\ &+ 2 a_3 a'_3 x_2 x_4 = 0 \end{aligned}$$

in diesem Punkte zusammen.

Die Gleichung 83b) gestaltet sich einfacher, wenn man einer oder beiden Ebenen besondere Lagen ertheilt.

Für $a_3 = 0$ erhält man

$$\text{85)} \quad \left\{ \begin{aligned} &x_1 = 0, \\ &2\{a_1 a'_3 + 2(a_2 a'_4 + a_4 a'_2)\} x_1^2 - 2(a_2 a'_3 + 12 a_4 a'_4) x_1 x_2 \\ &\qquad - 2 a_4 a'_3 x_1 x_4 + 12 a_4 a'_3 x_2^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

d. h.: Steht die Ebene E auf der Coordinatenebene $x_3 = 0$ lothrecht, so besteht die gemischte Polarfläche

bezüglich der Fläche $\underset{t.e}{W}$ aus einem hyperbolischen Cylinder, bezüglich der Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ aus einem parabolischen Cylinder,

dessen Generatrix lothrecht auf der Ebene $x_3 = 0$ steht, und aus der Ebene $x_1 = 0$.

Lage und Gestalt dieser gemischten Polarfläche bleiben in diesem Falle unverändert, wenn man der Ebene E' alle möglichen Lagen ertheilt, die verschiedenen Werthen von a'_1 entsprechen.

Setzt man $a_3 = a_4 = 0$, so ergiebt sich

86) $$x_1^2 = 0, \quad (a_1 a'_3 + 2 a_2 a'_4) x_1 - a_2 a'_3 x_2 = 0.$$

Enthält also die Ebene E die Linie T in sich, so besteht die gemischte Polarfläche aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene $x_1 = 0$ zusammenfallen, die dritte die Linie T ebenfalls enthält.

Es sei $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, dann geht die Relation 83b) über in

87) $$x_1 = 0, \quad 2a'_2 x_1^2 - 12 a'_4 x_1 x_2 - a'_3 x_1 x_4 + 6 a'_3 x_2^2 = 0.$$

Fällt also die Ebene E mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammen, so besteht die gemischte Polarfläche

bezüglich der Fläche $\underset{t.e}{W}$ aus einem hyperbolischen Cylinder, bezüglich der Fläche $\underset{t.\infty}{W}$ aus einem parabolischen Cylinder,

dessen Generatrix auf der Ebene $x_3 = 0$ lothrecht steht, und aus einer Ebene, welche auf $x_1 = 0$ liegt.

Das Resultat bleibt unverändert, wenn man die Lage von E' entsprechend verschiedenen Werthen von a'_1 ändert.

Wenn $a_3 = a_4 = 0$ und $a'_3 = a'_4 = 0$ ist, d. h. wenn die beiden Ebenen E und E' sich in der Linie T schneiden, so verschwindet die Gleichung 83b).

Es sei endlich $a_1 = a_3 = 0$ und $a'_2 = a'_4 = 0$, dann ergiebt sich

88) $$x_1 = 0, \quad a_2 x_1 x_2 + a_4 x_1 x_4 - 6 a_4 x_2^2 = 0,$$

d. h.: Geht die Ebene E durch die Kante $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, die Ebene E' durch $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, so degenerirt die gemischte Polarfläche in eine Ebene, welche mit $x_1 = 0$ zusammenfällt, und einen Cylinder zweiter Ordnung, dessen Generatrix lothrecht auf $x_3 = 0$ steht.

Das Resultat ist unabhängig von den beiden Grössen a'_1 und a'_3.

III.

Die allgemeinen Wurzelformen der Quadrics, Cubics und Quartics von Clebsch und Aronhold.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Durch die neuesten Fortschritte auf dem Gebiete der modernen Algebra sind so viele neue Gesichtspunkte für die Theorie der Gleichungen, insbesondere der Gleichungen der ersten vier Grade, gewonnen worden, dass unter Anderem die sogenannten allgemeinen Wurzelformen der letzteren in keinem der besseren Handbücher der höheren Algebra mehr fehlen dürften. Zu diesem Zwecke wollen wir versuchen, im Folgenden eine möglichst elementare Darstellung dieser speciellen Probleme der modernen Algebra zu geben.

I. Die Wurzelform der quadratischen Gleichungen (Quadrics) von Clebsch.

Um die Quadric*

$$f(x) = (a, b, c)^\wedge(x, 1)^2 = ax^2 + 2bx + c = 0$$

aufzulösen, gehe man aus von den Substitutionen

$$u = (ax + b)\xi + (bx + c)\eta, \quad v = \xi - x\eta.$$

Alsdann ist

$$f(x) \, . \, f(\xi, \eta) = u^2 + \overline{D}_2 v^2,$$

wo die Form $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ kurz mit $f(\xi, \eta)$ und die Discriminante der quadratischen Form mit $\overline{D}_2$ bezeichnet ist, also

$$\overline{D}_2 = ac - b^2.$$

Für $f(x) = 0$ erhält man sofort die rein quadratische Gleichung

$$u^2 + \overline{D}_2 v^2 = 0,$$

folglich

---

* Die Bezeichnungen rühren von Cayley her.

$$\frac{u}{v} = \pm \sqrt{-\overline{D}_2}.$$

Demgemäss ist nun

$$\frac{u}{v} = \frac{(ax+b)\xi + (bx+c)\eta}{\xi - x\eta} = \pm \sqrt{-\overline{D}_2},$$

und daher für beliebige Werthe von ξ und η

$$x = -\frac{b\xi + c\eta \pm \xi\sqrt{b^2 - ac}}{a\xi + b\eta \mp \eta\sqrt{b^2 - ac}}.$$

Für $\xi = 1$, $\eta = 0$ geht diese allgemeine Form in die gewöhnliche Wurzelform über.

II. Die Wurzelform der kubischen Gleichungen (Cubics) von Clebsch.

Um die Cubic

$$f(x) = (a, b, c, d)^\wedge(x, 1)^3 = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

aufzulösen, geht man aus von den Substitutionen

$$u = (ax+b)\xi^2 + 2(bx+c)\xi\eta + (cx+d)\eta^2, \quad v = \xi - x\eta.$$

Alsdann ist

$$f(x) \cdot f^2(\xi, \eta) = u^3 + 3C_{3,2}(\xi, \eta)uv^2 + C_{3,3}(\xi, \eta)v^3,$$

worin

$$(ac - b^2)\xi^2 + (ad - bc)\xi\eta + (bd - c^2)\eta^2 = C_{3,2}(\xi, \eta),$$

$$(2b^3 - 3abc + a^2d)\xi^3 + 3(b^2c + abd - 2ac^2)\xi^2\eta$$
$$- 3(bc^2 + acd - 2b^2d)\xi\eta^2 - (2c^3 - 3bcd + ad^2)\eta^3 = C_{3,3}(\xi, \eta)$$

gesetzt ist. Die Transformirte geht für $f(x) = 0$ über in

$$u^3 + 3C_{3,2}uv^2 + C_{3,3}v^3 = 0$$

und kann durch die Cardanische Formel aufgelöst werden. Man erhält nämlich

$$\frac{u}{v} = \sqrt[3]{1} \cdot A + \sqrt[3]{1^2} \cdot B,$$

und durch Einsetzung in die Gleichung

$$A^3 + B^3 = -C_{3,3}(\xi, \eta), \quad AB = -C_{3,2}(\xi, \eta).$$

Daher sind A und B die beiden Wurzeln der Quadric

$$z^2 + C_{3,3}z - C_{3,2}^3 = 0$$

und es wird sein

$$A^3 \text{ und } B^3 = -\tfrac{1}{2}C_{3,3} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{C_{3,3}^2 + 4C_{3,2}^3}.$$

Bezeichnet man nun die Discriminante der kubischen Form $f(x)$ mit $\overline{D}_3$, so ist bekanntlich

$$\overline{D}_3 = a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2$$

und man findet ohne viele Schwierigkeiten die Relation

$$C_{3,3}^2 + 4C_{3,2}^3 = \overline{D}_3 \cdot f^2(\xi, \eta).$$

Es ist demnach

$$A^3 \text{ und } B^3 = \tfrac{1}{2}(-C_{3,3} \pm f(\xi, \eta)\sqrt{D_3}),$$

wobei die Bedingung

$$AB = -C_{3,2}$$

erfüllt sein muss. Demzufolge gelangt man zu der allgemeinen Wurzelform

$$\frac{(ax+b)\xi^2 + 2(bx+c)\xi\eta + (cx+d)\eta^2}{\xi - x\eta} = \sqrt[3]{1}\,A + \sqrt[3]{1^2}\,B,$$

welche Gleichung in Bezug auf x linear ist und worin ξ und η ganz willkürliche Grössen sind.

Bestimmt man $\xi:\eta$ derartig, dass

$$C_{3,2}(\xi, \eta) = 0 \text{ (Resolvente)}$$

wird, so wird die Gleichung in u, v rein kubisch und

$$\frac{u}{v} = -\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{C_{3,3}(\xi, \eta)},$$

mithin ist einfacher

$$\frac{(ax+b)\xi^2 + 2(bx+c)\xi\eta + (cx+d)\eta^2}{\xi - x\eta} = -\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{C_{3,3}(\xi, \eta)}.$$

Die Quadric $C_{3,2}$ und die Cubic $C_{3,3}$ haben die merkwürdige Eigenschaft, dass die Wurzeln der ersteren einzeln den drei Wurzeln der Hauptgleichung $f(x) = 0$ äquianharmonisch, die der zweiten harmonisch zugeordnet sind. Um dies zu beweisen, bezeichne man irgend eine der Wurzeln $\xi:\eta$ allgemein mit z; alsdann ist

$$\begin{aligned} C_{3,2}(z) = -\frac{a^2}{9}\,&[(x_1 + J_1 x_2 + J_2 x_3)z + (x_2 x_3 + J_1 x_3 x_1 + J_2 x_1 x_2)] \\ \times\;&[(x_1 + J_2 x_2 + J_1 x_3)z + (x_2 x_3 + J_2 x_3 x_1 + J_1 x_1 x_2)] = 0, \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z}{x_3 - z} = -J_2 \text{ oder } -J_1, \quad \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - z}{x_2 - z} = -J_1 \text{ oder } -J_2.$$

Drückt man ebenso die Cubic $C_{3,3}(z)$ durch symmetrische Functionen der Wurzeln von $f(x)$ aus, so hat man

$$\begin{aligned} C_{3,3}(z) = \frac{a^3}{27}\,&[(x_1 - 2x_2 + x_3)z + (x_2 x_3 - 2x_3 x_1 + x_1 x_2)] \\ \times\;&[(x_2 - 2x_3 + x_1)z + (x_3 x_1 - 2x_1 x_2 + x_2 x_3)] \\ \times\;&[(x_3 - 2x_1 + x_2)z + (x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + x_3 x_1)] = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - z}{x_3 - z} &= -1 \text{ oder } 2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}, \\ \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - z}{x_2 - z} &= -1 \;\;\text{,,}\;\; 2 \;\;\text{,,}\;\; \tfrac{1}{2}, \\ \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} : \frac{x_2 - z}{x_3 - z} &= -1 \;\;\text{,,}\;\; 2 \;\;\text{,,}\;\; \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

oder in einfachster Gestalt

$$x_1x_3 - \tfrac{1}{2}(x_1+x_3)(x_2+z) + x_2z = 0,$$
$$x_1x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)(x_3+z) + x_3z = 0,$$
$$x_2x_3 - \tfrac{1}{2}(x_2+x_3)(x_1+z) + x_1z = 0.$$

Zur allgemeinen Orientirung möge noch bemerkt werden, dass die Form $C_{3,2}$ die quadratische, die Form $C_{3,3}$ die kubische Covariante von $f(x)$ genannt werden.

III. Die Wurzelform der biquadratischen Gleichungen (Quartics) von Aronhold.

Um die Quartic

1) $f(x) = (a, b, c, d, e)^\wedge(x, 1)^4 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$

aufzulösen, bezeichne man die vier Wurzeln mit x_1, x_2, x_3, x_4 und gehe aus von der Identität

$$2)\ \Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & \tfrac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4) \\ b, & \tfrac{1}{4}a(x_1+x_2)(x_3+x_4), & d \\ \tfrac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4), & d, & e \end{vmatrix} = 0.$$

Die in der positiven Diagonale dieser Determinante gelegenen Functionen der Wurzeln von $f(x)$ sind keine vollständig symmetrischen, sondern lassen die dreifachen Variationen

$$x_1x_2 + x_3x_4, \quad (x_1+x_2)(x_3+x_4),$$
$$x_1x_3 + x_2x_4, \quad (x_1+x_3)(x_2+x_4),$$
$$x_1x_4 + x_2x_3, \quad (x_1+x_4)(x_2+x_3)$$

zu. Deswegen wird die Determinante eine Resolvente der Quartic sein. Da die drei Variationen einen Theil von c bilden, so nehme man an

$$\tfrac{1}{2}a(x_1x_2+x_3x_4) = c + 2\lambda.$$

Man gelangt auf diese Weise zu der bekannten Δ-Determinante von Aronhold, nämlich

$$3)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & (c+2\lambda) \\ b & (c-\lambda) & d \\ (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + J_{4,2}\lambda - J_{4,3} = 0,$$

worin $J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2$ (quadratische Invariante), $J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$ (kubische Invariante) ist.

Da diese Determinante stets verschwindet, wenn die Quartic 1) gleich Null ist, so ist die Determinante

$$4)\quad \begin{vmatrix} 0 & \eta^2 & -\eta\xi & \xi^2 \\ \eta^2 & a & b & (c+2\lambda) \\ -\eta\xi & b & (c-\lambda) & d \\ \xi^2 & (c+2\lambda) & d & e \end{vmatrix} = \Phi^2,$$

d. h. ein vollständiges Quadrat. Um dies darzulegen und zugleich die trinomische, quadratische Form von Φ darzustellen, entwickeln wir die Determinante 4). Wir erhalten daraus

$$\Phi^2 = \xi^4 \begin{vmatrix} a & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} + 2\xi^3\eta \begin{vmatrix} a & b \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix} + 2\xi^2\eta^2 \begin{vmatrix} b & c-\lambda \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix}$$
$$+ \xi^2\eta^2 \begin{vmatrix} a & c+2\lambda \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix} + 2\xi\eta^3 \begin{vmatrix} b & d \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix} + \eta^4 \begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ d & e \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten dieses Ausdruckes lassen sich durch die partiellen Differentialquotienten von Δ ersetzen; es ist nämlich

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right) = d^2 - ce + e\lambda = \begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ d & e \end{vmatrix},$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right) = -2(cd - be + 2d\lambda) = -2 \begin{vmatrix} b & d \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix},$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right) = 3c^2 - 2bd - ae + 6c\lambda = \begin{vmatrix} a & c+2\lambda \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b & c-\lambda \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix},$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right) = -2(bc - ad + 2b\lambda) = -2 \begin{vmatrix} a & b \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix},$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right) = b^2 - ac + a\lambda = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix},$$
$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial \lambda}\right) = ae - 4bd + 3c^2 - 12\lambda^2 = 4 \begin{vmatrix} b & c-\lambda \\ c+2\lambda & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c+2\lambda \\ c+2\lambda & e \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt nun

$$5) \quad \Phi^2 = \left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\xi^4 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\xi^3\eta + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right)\xi^2\eta^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\xi\eta^3 + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\eta^4.$$

Berücksichtigt man die Relationen

$$6) \quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right) = 0,$$

$$7) \quad \left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial\Delta}{\partial \lambda}\right) = 6\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)} = 6\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)},$$

$$8) \quad 2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial c}\right) - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial \lambda}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)} = \frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)},$$

so erhält man ohne Schwierigkeiten aus 5)

$$9) \quad \begin{aligned} \Phi &= \pm\left[\xi^2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)} - \frac{1}{2}\xi\eta\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}} + \eta^2\sqrt{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)}\right] \\ &= \pm\frac{\left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right),\ -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right),\ \left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\right]\hat{}\left[\xi, \eta\right]^2}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial b}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial d}\right)^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial e}\right)}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die drei möglichen Werthe von Φ, die sich durch Einsetzung der Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung 3) ergeben, mit φ, ψ und χ, so erhält man, vom Vorzeichen abgesehen, dieselben in symmetrischen Functionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 ausgedrückt:

$$
10)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{4\varphi}{a} &= (x_1+x_2-x_3-x_4)\xi^2 - 2(x_1x_2-x_3x_4)\xi\eta \\
&\quad + (x_1x_2[x_3+x_4] - x_3x_4[x_1+x_2])\eta^2, \\
\frac{4\psi}{a} &= (x_1-x_2+x_3-x_4)\xi^2 - 2(x_1x_3-x_2x_4)\xi\eta \\
&\quad + (x_1x_3[x_2+x_4] - x_2x_4[x_1+x_3])\eta^2, \\
\frac{4\chi}{a} &= (x_1-x_2-x_3+x_4)\xi^2 - 2(x_1x_4-x_2x_3)\xi\eta \\
&\quad + (x_1x_4[x_2+x_3] - x_2x_3[x_1+x_4])\eta^2.
\end{aligned}\right.
$$

Bezeichnet man ferner eine der vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, z. B. x_1, allgemein mit x, addirt die drei Gleichungen und dividirt durch 4, so resultirt

$$
6)\quad \begin{aligned}
&(ax+b)\xi^2 + (ax^2+4bx+3c)\xi\eta - \left(d+\frac{e}{x}\right)\eta^2 \\
&= \frac{(ax+b)\xi^3 + 3(bx+c)\xi^2\eta + 3(cx+d)\xi\eta^2 + (dx+e)\eta^3}{\xi - x\eta} = \varphi+\psi+\chi,
\end{aligned}
$$

wo ξ und η zwei willkürliche Grössen sind, also auch für eine von beiden Null gesetzt werden kann. Setzt man aus 5) für φ, ψ, χ die Werthe ein, welche man erhält, wenn man in die partiellen Differentialquotienten von $\varDelta$ nacheinander die Wurzelwerthe λ_1, λ_2, λ_3 der Resolvente 3) $\varDelta=0$ einführt, so gelangt man zu den bekannten Formeln von Aronhold, nämlich

$$
12)\quad \begin{aligned}
&\frac{(a,b,c,d,e)^\wedge(\xi,\eta)^{3\wedge}(x,1)}{\xi - x\eta} \\
&= \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_1, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_1, \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right)_1, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_1, \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_1\right]^\wedge[\xi,\eta]^4}, \\
&\quad \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_2, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_2, \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right)_2, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_2, \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_2\right]^\wedge[\xi,\eta]^4}, \\
&\quad \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial e}\right)_3, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial d}\right)_3, \tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial c}\right)_3, -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\varDelta}{\partial b}\right)_3, \left(\frac{\partial\varDelta}{\partial a}\right)_3\right]^\wedge[\xi,\eta]^4}.
\end{aligned}
$$

Man kann diesen Ausdrücken noch eine andere Form geben, indem man die biquadratische Covariante der Function $f(\xi,\eta)$

$$
\begin{aligned}
C_{4,4}(\xi,\eta) = (ac-b^2)\xi^4 + 2(ad-bc)\xi^3\eta + (ae+2bd-3c^2)\xi^2\eta^2 \\
+ 2(be-cd)\xi\eta^3 + (ce-d^2)\eta^4
\end{aligned}
$$

einführt. Man erhält offenbar

$$
13)\quad \frac{(a,b,c,d,e)^\wedge(\xi,\eta)^{3\wedge}(x,1)}{\xi - x\eta} = \pm\sqrt{\lambda_1 f - C_{4,4}} \pm\sqrt{\lambda_2 f - C_{4,4}} \pm\sqrt{\lambda_3 f - C_{4,4}}.
$$

Betrachtet man die Quadrics φ, ψ, χ als die Factoren einer Sextic, so haben die Wurzeln dieser, wie Hesse schon im Jahre 1851 gezeigt hat, die merkwürdige Eigenschaft, dass jedes Werthepaar $\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_2}{\eta_2}$ je zweien Wurzeln der Quartic $f(x)$ harmonisch zugeordnet ist. Diese Sextic ist die bikubische Covariante der Quartic, nämlich

$$
14)\quad \begin{aligned}
C_{4,6}(\xi,\eta) = {} & (2b^3 - 3abc + a^2d)\xi^6 + (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c)\xi^5\eta \\
& + 5(abe - 3acd + 2b^2d)\xi^4\eta^2 + 10(ad^2 - b^2e)\xi^3\eta^3 \\
& - 5(ade - 3bce + 2bd^2)\xi^2\eta^4 \\
& - (ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2)\xi\eta^5 - (2d^3 - 3cde + be^2)\eta^6.
\end{aligned}
$$

Um das Theorem von Hesse noch auf eine andere Art zu beweisen, schreibe man die erste Gleichung in 10)

$$
\begin{aligned}
& \frac{4\varphi}{a\eta^2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)} \\
& = \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 - 2\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) + \frac{x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = 0
\end{aligned}
$$

und setze der Kürze wegen $\frac{\xi_1}{\eta_1} = z_1$, $\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta_1$; alsdann wird

$$
\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = \tfrac{1}{2}(z_1 + \zeta_1), \quad \frac{x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} = z_1\zeta_1.
$$

Aus den Identitäten

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} - \frac{(x_1 + x_2)(x_1x_2 - x_3x_4)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} + x_1x_2 = 0, \\
\frac{x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} - \frac{(x_3 + x_4)(x_1x_2 - x_3x_4)}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4} + x_3x_4 = 0
\end{aligned}
$$

folgen die Relationen

$$
15)\quad \left\{ \begin{aligned}
x_1x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(z_1 + \zeta_1) + z_1\zeta_1 = 0, \\
x_3x_4 - \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4)(z_1 + \zeta_1) + z_1\zeta_1 = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Analog erhält man

$$
16)\quad \left\{ \begin{aligned}
x_1x_3 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(z_2 + \zeta_2) + z_2\zeta_2 = 0, \\
x_2x_4 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_4)(z_2 + \zeta_2) + z_2\zeta_2 = 0,
\end{aligned} \right.
$$

$$
17)\quad \left\{ \begin{aligned}
x_1x_4 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_4)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0, \\
x_2x_3 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Je zwei dieser Systeme geben je eine Gleichung des folgenden:

$$
18)\quad \left\{ \begin{aligned}
z_2\zeta_2 - \tfrac{1}{2}(z_2 + \zeta_2)(z_3 + \zeta_3) + z_3\zeta_3 = 0, \\
z_3\zeta_3 - \tfrac{1}{2}(z_3 + \zeta_3)(z_1 + \zeta_1) + z_1\zeta_1 = 0, \\
z_1\zeta_1 - \tfrac{1}{2}(z_1 + \zeta_1)(z_2 + \zeta_2) + z_2\zeta_2 = 0.
\end{aligned} \right.
$$

Daraus folgt, dass die so bestimmten Punktepaare $z_1\zeta_1$, $z_2\zeta_2$, $z_3\zeta_3$ ebenfalls einander harmonisch zugeordnet sind.

Es sind noch zwei specielle Fälle bemerkenswerth, in denen anharmonische Verhältnisse zwischen den vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 auftreten.

Theorem. Wenn die quadratische Invariante

$$
J_{4,2} = ae - 4bd + 3c^2
$$

verschwindet, so sind die Wurzeln der Quartic $f(x)$ einander **äquianharmonisch** zugeordnet.

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der Form der quadratischen Covariante $C_{3,2}$ der Cubic und setzen $z = x_4$. Man erhält hieraus

$$3\,C_{3,2}(x_4) = -\,4\,J_{4,2}.$$

Wenn also $J_{4,2}$ verschwindet, so wird

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} = -\,J_2 \text{ oder } -\,J_1,$$
$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -\,J_1 \quad \text{„} \quad -\,J_2.$$

Theorem. Wenn die **kubische Invariante**

$$J_{4,3} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

verschwindet, so sind die Wurzeln der Quartic $f(x)$ einander **harmonisch** zugeordnet.

Zum Nachweise dieses Satzes können wir ausgehen von der kubischen Covariante $C_{3,3}$ der Cubic und setzen $z = x_4$. Man erhält daraus

$$C_{3,3}(x_4) = 16\,J_{4,3}.$$

Wenn demnach $J_{4,3}$ verschwindet, so wird

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} = -\,1 \text{ oder } 2 \text{ oder } \tfrac{1}{2},$$
$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -\,1 \quad \text{„} \quad 2 \quad \text{„} \quad \tfrac{1}{2},$$
$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} : \frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_4} = -\,1 \quad \text{„} \quad 2 \quad \text{„} \quad \tfrac{1}{2},$$

oder in einfachster Gestalt

$$x_1 x_3 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + x_2 x_4 = 0,$$
$$x_1 x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = 0,$$
$$x_2 x_3 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)(x_1 + x_4) + x_1 x_4 = 0.$$

IV.

Ueber das Problem der magnetischen Induction auf zwei Kugeln.

Von

O. Chwolson,

Privat-Docent an der Universität zu St. Petersburg.

---

§ 1. Durch die Arbeiten von Poisson, Plana, Kirchhoff, Thomson, C. Neumann, Bobyleff, Suchsland u. A. ist das Problem der elektrischen Induction auf zwei benachbarten, absolut leitenden Kugeln gelöst worden. In diesem Aufsatze soll nun das entsprechende Problem für die magnetische Induction behandelt werden. Wir werden uns aber dabei auf den ganz speciellen Fall beschränken, dass die äusseren Kräfte symmetrisch gelagert sind gegen die Gerade, welche die Centra der beiden Kugeln verbindet, also dass die Kräfte herrühren z. B. von einem Magnet, dessen Axe mit der Centrallinie der beiden Kugeln zusammenfällt.

§ 2. Das Problem der magnetischen Induction für einen Körper von beliebiger Form führt nach der Poisson'schen Theorie zu der Aufgabe, eine Function V zu finden, welche der Bedingungsgleichung

$$1) \qquad V = \frac{3k}{4\pi(1-k)} \int\int \frac{\partial(V+F)}{\partial n_i} \cdot \frac{ds}{r}$$

genügt. Hier ist V das Potential des der magnetischen Induction ausgesetzten Körpers in einem beliebigen äusseren Punkte M; F ist das Gesammtpotential der äusseren inducirenden Kräfte; ∂n_i ist ein inneres Element der Normale zu dem Flächenelement ds der Oberfläche des gegebenen Körpers; r ist die Entfernung von M bis ds, k die sogenannte Poisson'sche Constante; die Integration ist erstreckt über die Oberfläche des gegebenen Körpers. Im Weiteren werden wir unter n_i die innere, unter n_a die äussere Normale verstehen.

Sei σ die Dichtigkeit der fictiven Oberflächenbelegung, d. h. sei

$$2)\qquad \sigma = \frac{3k}{4\pi(1-k)}\,\frac{\partial(V+F_i)}{\partial n_i},$$

so ist bekanntlich

$$3)\qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n_a}+\frac{\partial V}{\partial n_i}\right).$$

Für eine Kugel ist aber

$$4)\qquad \frac{\partial V}{\partial n_i} = \left(\frac{V}{R}\right)+\frac{\partial V}{\partial n_a},$$

wo $\left(\frac{V}{R}\right)$ der Specialwerth von $\frac{V}{r}$ an der Oberfläche der Kugel ist.

Durch Vergleich von 2) und 3) erhält man mit Hilfe der letzten Relation 4) die Grundgleichung

$$5)\qquad (1+2k)\left(\frac{V}{R}\right)+(2+k)\frac{\partial V}{\partial n_a}+3k\frac{\partial F}{\partial n_i}=0.$$

Führen wir räumliche Polarcoordinaten ein mit dem Pol im Centrum der Kugel, und setzen wir

$$5')\qquad V=\sum\frac{Y^n}{r^{n+1}},$$

so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$6)\qquad \sum\frac{A_n}{R^{n+2}}Y^n=\frac{\partial F}{\partial n_a},\quad \text{wo}\quad A_n=\frac{k-1-n(k+2)}{3k}.$$

Da F gegeben ist, so lässt sich hieraus Y^n und dann aus 5′) V finden.

§ 3. Sind zwei Kugeln gegeben, so kann man mit Polarcoordinaten nicht weit kommen. Nur für den Specialfall, dass sich beide Kugeln im homogenen magnetischen Felde befinden und dass die in allen Punkten gleichgrosse wirkende Kraft parallel sei zu der Centrallinie der beiden Kugeln, lassen sich mit Zuhilfenahme des Princips der successiven Influenzen die ersten zwei Hauptglieder derjenigen Reihe berechnen, durch welche in diesem Falle das Potential sich ausdrückt, d. h. es lassen sich die ersten zwei Influenzen berechnen. Es sei die inducirende Kraft S; sei ferner ψ der Winkel zwischen der Centrallinie und einem beliebigen Radius R der ersten Kugel; dann ist das Potential V_1 der Kugel, welches durch die erste Influenz hervorgerufen wird,

$$7)\qquad V_1 = kSR^3\frac{\cos\psi}{r^2}$$

und das magnetische Moment

$$8)\qquad m_1 = kSR^3.$$

Um die zweite Influenz zu berechnen, haben wir in 6) zu setzen

$$9)\qquad F=\frac{kSR_1^3(T-r\cos\psi)}{(r^2-2rT\cos\psi+T^2)^{3/2}}=kSR_1^3\sum\frac{(n+1)r^n}{T^{n+2}}P^n(\cos\psi),$$

wo R_1 der Radius der zweiten Kugel, T die Centrallinie der beiden Kugeln. Dies giebt nach 6)

$$Y^n = k S R_1^3 \frac{n(n+1) R^{n+1}}{T^{n+2} A_n} P^n(\cos\psi),$$

folglich das Potential V_2 der ersten Kugel, welches durch die zweite Influenz hervorgerufen wird, nach 5')

$$10)\quad V_2 = k S R_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1) R^{2n+1}}{A_n T^{n+2}} \frac{P^n(\cos\psi)}{r^{n+1}}, \quad A_n = \frac{k-1\}-n(2+k)}{3k}.$$

Das entsprechende magnetische Moment m_2 ist gleich dem Coefficienten bei $P^1(\cos\psi)$, also

$$11)\quad m_2 = \frac{2k^2 S R^3 R_1^3}{T^3}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die zweite Kugel

$$m'_2 = \frac{2k^2 S R_1^3 R^3}{T^3},$$

d. h. es ist

$$m_2 = m'_2;$$

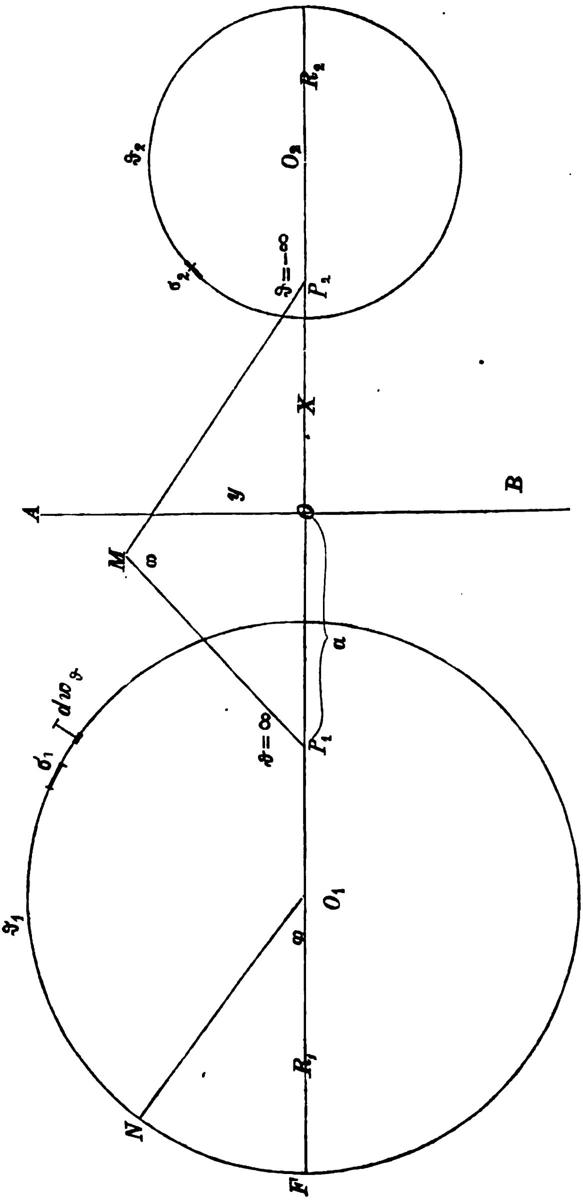
die durch die zweiten Influenzen auf beiden Kugeln erzeugten Momente sind also unter einander gleich.

§ 4. Wir führen nun ein System von räumlichen dipolaren Coordinaten ein. Es seien (siehe die Figur auf S. 43) O_1 und O_2 die Centra der beiden Kugeln, R_1 und R_2 ihre Radien, P_1 und P_2 die zu den beiden Kugelflächen gehörigen Grenzpunkte, die Pole des dipolaren Systems. AB sei die Mittelaxe des Systems, $OP_1 = OP_2 = a$. Der Punkt M hat dann die Coordinaten $\vartheta = lg \frac{MP_2}{MP_1}$, $\angle\omega = \angle P_1 M P_2$ und $\angle\varphi =$ Winkel zwischen den Ebenen $P_1 M P_2$ und $A O_1 O_2$. In P_1 ist $\vartheta = \infty$, in P_2 ist $\vartheta = -\infty$. Auf der in O zu $P_1 P_2$ senkrechten Ebene ist $\vartheta = 0$; links von dieser ist ϑ positiv, rechts negativ. Auf der linken Kugel sei $\vartheta = \vartheta_1$, auf der rechten $\vartheta = \vartheta_2$. Nehmen wir ferner OP_2 als positive x-Axe, OA als y-Axe eines Descartes'schen Coordinatensystems, so ist (C. Neumann, Allgemeine Lösung des Problems über den statischen Temperaturzustand eines Körpers, der von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862, S. 78)

$$12)\quad \begin{cases} x = a \dfrac{e^{-\vartheta} - e^{\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}, \quad y = a \dfrac{2 \sin\omega \cos\varphi}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}, \\ z = a \dfrac{2 \sin\omega \sin\varphi}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega}. \end{cases}$$

Ferner ist (*ibid.*) das Differential dw_ϑ der Normale zur Kugelfläche $\vartheta =$ *Const.* gleich

$$13)\quad dw_\vartheta = \pm \frac{2a}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega} d\vartheta.$$


A
B
y
O
X
M
N
F
a
P_1
P_2
O_1
O_2
R_1
R_2
ϑ_1
ϑ_2
σ_1
σ_2
dw_ϑ
$\vartheta=\infty$
$\vartheta=-\infty$
x

Die reciproke Entfernung T der Punkte $(\vartheta\,\omega\,\varphi)$ und $(\vartheta'\,\omega'\,\varphi')$ ist gleich (*ibid.* S. 90)

$$14)\quad T=\frac{\sqrt{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega}\,\sqrt{e^{\vartheta'}+e^{-\vartheta'}-2\cos\omega'}}{2a}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta-\vartheta')}P^n(\cos\gamma),$$

wo

$$15)\qquad \cos\gamma=\cos\omega\cos\omega'+\sin\omega\sin\omega'\cos(\varphi-\varphi') \text{ und } \vartheta>\vartheta'$$

ist. Im Folgenden werden wir, wie es C. Neumann thut, zur Abkürzung

$$16)\qquad e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}-2\cos\omega=\psi$$

setzen und dann bei ψ dieselben additiven Zeichen anhängen, durch welche die resp. ϑ und ω sich unterscheiden. Ausserdem merken wir noch die Formeln

$$17)\quad\left\{\begin{aligned}&\iiint P^n(\cos\omega')\,P^m(\cos\gamma)\,\psi'^2\,ds=0,\quad m \lessgtr n \text{ und}\\&\iiint P^n(\cos\omega')\,P^n(\cos\gamma)\,\psi'^2\,ds=\frac{16\pi a^2}{2n+1}P^n(\cos\omega);\end{aligned}\right.$$

hier ist die Integration ausgedehnt über die Kugelfläche $\vartheta=\vartheta'$. Nach dem Obigen ist dabei $\psi'=e^{\vartheta'}+e^{-\vartheta'}-2\cos\omega'$.

Sind a und ϑ_1 gegeben, so erhält man den Radius R_1 der Kugel $\vartheta=\vartheta_1$ und die Entfernung $B_1=-OO_1$ des Kugelcentrums O_1 vom Coordinatenanfang O auf folgende Weise. Ist $N(xyz)$ ein Punkt auf der Kugeloberfläche, so ist

$$\frac{\overline{NP_2}^2}{\overline{NP_1}^2}=\frac{(x+a)^2+y^2+z^2}{(x-a)^2+y^2+z^2}=e^{2\vartheta_1},$$

woraus leicht

$$\left(x+\frac{a(1+e^{2\vartheta_1})}{1-e^{2\vartheta_1}}\right)^2+y^2+z^2=\frac{4a^2e^{2\vartheta_1}}{(1-e^{2\vartheta_1})^2},$$

als Gleichung der Kugel $\vartheta=\vartheta_1$. Also ist

$$17')\qquad -B_1=OO_1=a\frac{e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}}{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}},\quad R_1=\pm\frac{2ae^{\vartheta_1}}{1-e^{2\vartheta_1}}.$$

§ 5. Es seien nun ϑ_1 und ϑ_2 die constanten Werthe der ϑ-Coordinate auf den beiden gegebenen Kugeloberflächen; es seien ferner V_1 und V_2 die äusseren Potentiale der beiden Kugeln. Die Gleichung 5) giebt uns nun zwei Gleichungen — je eine für jede Kugel; sei F wiederum das Potential der äusseren, inducirend auf beide Kugeln einwirkenden Kräfte. Dann erhalten wir aus 5)

$$18)\quad\left\{\begin{aligned}&(1+2k)\left(\frac{V_1}{R_1}\right)_1+(2+k)\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_a}\right)_1+3k\left(\frac{\partial V_2}{\partial n_i}\right)_1+3k\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_1=0,\\&(1+2k)\left(\frac{V_2}{R_2}\right)_2+(2+k)\left(\frac{\partial V_2}{\partial n_a}\right)_2+3k\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_i}\right)_2+3k\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_2=0.\end{aligned}\right.$$

In der ersten Gleichung beziehen sich die Werthe auf einen beliebigen Punkt an der Oberfläche der Kugel $\vartheta=\vartheta_1$; in der zweiten — an der Oberfläche der Kugel $\vartheta=\vartheta_2$.

Seien nun die äusseren Kräfte symmetrisch gegen die Centrale $O_1 O_2$ gelagert; dann sind die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 der fictiven Oberflächenbelegungen Functionen nur von ω_1 und ω_2, den Specialwerthen von ω auf den Oberflächen der beiden Kugeln. Wir machen die Ansätze

$$19)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{\psi_1^{3/2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n P^n(\cos\omega_1), \text{ wo } \psi_1 = e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1} - 2\cos\omega_1, \\ \dfrac{\sigma_2}{\psi_2^{3/2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n P^n(\cos\omega_2), \text{ wo } \psi_2 = e^{\vartheta_2} + e^{-\vartheta_2} - 2\cos\omega_2. \end{cases}$$

Für das magnetische Moment M_1 der ersten Kugel $(\vartheta = \vartheta_1)$ erhalten wir nach 12)

$$M_1 = \int x\,\sigma_1\,ds = a\int \frac{e^{-\vartheta_1} - e^{\vartheta_1}}{\psi_1} \cdot \psi_1^{3/2} \sum A_n P^n(\cos\omega_1)\,ds.$$

Dies giebt nach 17), darin $\omega = 0$ gesetzt,

$$20)\quad M_1 = 16\pi a^3 e^{-\frac{\vartheta_1}{2}} \sum A_n e^{-n\vartheta_1} \text{ und ebenso } M_2 = 16\pi a^3 e^{\frac{\vartheta_2}{2}} \sum B_n e^{n\vartheta_2}.$$

Die Gesammtmassen μ_1 und μ_2, welche auf den Kugeln fictiv vertheilt sind, sind Null. Dies giebt

$$\mu_1 = \int \sigma_1\,ds = \int \psi_1^{3/2} \sum A_n P^n(\cos\omega_1)\,ds = 0;$$

hieraus

$$21)\quad \sum \frac{A_n}{2n+1} e^{-n\vartheta_1} = 0, \quad \sum \frac{B_n}{2n+1} e^{n\vartheta_2} = 0.$$

§ 6. Wir berechnen nun V_1 und V_2. Es ist $V_1 = \int \sigma_1 T_1\,ds$. Nach 14), 19) und 17) erhalten wir

$$22)\quad V_1 = 8\pi a\sqrt{\psi} \sum A_n \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta)}}{2n+1} P^n(\cos\omega).$$

Um $(V_1)_1$ zu erhalten, hat man $\vartheta = \vartheta_1$ und $\omega = \omega_1$ zu setzen; mit Rücksicht auf 17′) ist also

$$23)\quad \left(\frac{V_1}{R_1}\right)_1 = 4\pi\sqrt{\psi_1}\,(e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}) \sum \frac{A_n}{2n+1} P^n(\cos\omega_1).$$

Ebenso ist

$$22a)\quad V_2 = 8\pi a\sqrt{\psi} \sum B_n \frac{e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta - \vartheta_2)}}{2n+1} P^n(\cos\omega)$$

und

$$23a)\quad \left(\frac{V_2}{R_2}\right)_2 = 4\pi\sqrt{\psi_2}\,(e^{-\vartheta_2} - e^{\vartheta_2}) \sum \frac{B_n}{2n+1} P^n(\cos\omega_2).$$

Um die in 18) eingehenden Differentialquotienten zu berechnen, bemerken wir vorerst, dass nach 13)

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_\vartheta} = \frac{\sqrt{\psi}}{2a} \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta}$$

ist. Nun ist

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_a}\right)_1 = \left(-\frac{\partial V_1}{\partial w_\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_a}\right)_2 = \left(+\frac{\partial V_2}{\partial w_\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_2}.$$

Wir erhalten aus 22) und 22a)

$$24)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial V_1}{\partial n_a}\right)_1 = -2\pi\psi_1\sqrt{\psi_1}\sum A_n P^n(\cos\omega_1) \\ \qquad -2\pi\sqrt{\psi_1}(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})\sum \frac{A_n}{2n+1} P^n(\cos\omega_1), \\ \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_a}\right)_2 = -2\pi\psi_2\sqrt{\psi_2}\sum B_n P^n(\cos\omega_2) \\ \qquad +2\pi\sqrt{\psi_2}(e^{\vartheta_2}-e^{-\vartheta_2})\sum \frac{B_n}{2n+1} P^n(\cos\omega_2). \end{cases}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_i}\right)_2 = \left(-\frac{\partial V_1}{\partial w_\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_i}\right)_1 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial w_\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_1},$$

also

$$25)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial V_1}{\partial n_i}\right)_2 = -2\pi\psi_2\sqrt{\psi_2}\sum A_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} P^n(\cos\omega_2) \\ \qquad -2\pi\sqrt{\psi_1}(e^{\vartheta_2}-e^{-\vartheta_2})\sum \frac{A_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}}{2n+1} P^n(\cos\omega_2), \\ \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_i}\right)_1 = -2\pi\psi_1\sqrt{\psi_1}\sum B_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} P^n(\cos\omega_1) \\ \qquad +2\pi\sqrt{\psi_1}(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})\sum \frac{B_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}}{2n+1} P^n(\cos\omega_1). \end{cases}$$

Setzt man nun $\left(\frac{V}{R}\right)_1$ aus 23), $\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_a}\right)_1$ aus 24) und $\left(\frac{\partial V_2}{\partial n_i}\right)_1$ aus 25) in die erste von den Gleichungen 18), dividirt man alle Glieder durch $6\pi k\sqrt{\psi_1}$ und setzt man

$$26)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_1 = \sum K^n_{\vartheta_1} P^n(\cos\omega_1);$$

verbindet man ausserdem die gleichen Summen, so erhält man als erste Bedingungsgleichung

$$27)\quad \begin{cases} (e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})\sum_0^\infty \left\{A_n + B_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \frac{P^n(\cos\omega_1)}{2n+1} \\ -\psi_1 \sum_0^\infty \left\{\frac{2+k}{3k} A_n + B_n e^{-\frac{2n+1}{n}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} P^n(\cos\omega_1) \\ +\sum_0^\infty K^n_{\vartheta_1} P^n(\cos\omega_1) = 0. \end{cases}$$

Hier ist das zweite Glied **nicht** nach den $P^n(\cos\omega_1)$ zerlegt, da der vor der Summe stehende Factor ψ_1 noch $\cos\omega_1$ enthält. Nun ist aber allgemein

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\omega_1 \, P^n(\cos\omega_1)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1} \frac{n}{2n-1} P^n(\cos\omega_1) + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{n+1}{2n+3} P^n(\cos\omega_1).$$

Mit Hilfe dieser Relation kann man das zweite Glied in 27) nach den $P^n(\cos\omega_1)$ ordnen. Da dies von allen Gliedern gilt, so haben wir den Coefficienten bei $P^n(\cos\omega_1)$ gleich Null zu setzen und erhalten dadurch die folgende Gleichung:

$$28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2n}{2n-1}\left\{\frac{2+k}{3k}A_{n-1} + B_{n-1}e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &+\frac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\frac{2+k}{3k}A_{n+1} + B_{n+1}e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &-(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\left\{\frac{2+k}{3k}A_n + B_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &+\frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1}\left\{A_n + B_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} + K^n_{\vartheta_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Auf dieselbe Weise giebt die zweite von den Gleichungen 27) die zweite Relation

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2n}{2n-1}\left\{\frac{2+k}{3k}B_{n-1} + A_{n-1}e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &+\frac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\frac{2+k}{3k}B_{n+1} + A_{n+1}e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &-(e^{-\vartheta_2}+e^{\vartheta_2})\left\{\frac{2+k}{3k}B_n + A_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ &+\frac{e^{-\vartheta_2}-e^{\vartheta_2}}{2n+1}\left\{B_n + A_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} + K^n_{\vartheta_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Hier ist $K^n_{\vartheta_2}$ definirt durch

$$29\text{a})\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{\psi_2}}\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_2 = \sum K^n_{\vartheta_2} P^n(\cos\omega_2).$$

Die Relationen 28) und 29) geben uns die Möglichkeit, die Coefficienten A_n und B_n successive zu berechnen. Man erhält dieselben, da für $n=0$ die ersten Klammern wegfallen, sämmtlich als lineare Functionen der Constanten A_0 und B_0. Diese nun werden bestimmt durch die Gleichungen 21); 20) geben uns endlich die magnetischen Momente der Kugeln.

§ 7. Haben die beiden Kugeln gleiche Radien, so ist nicht etwa allgemein $B_n = -A_n$ zu setzen, da auf den, gleichen ω entsprechenden Punkten auf der Oberfläche der Kugeln nicht entgegengesetzte Dichtigkeiten anzunehmen sind. Nur wenn die äusseren Kräfte auf beide Kugeln genau gleich einwirken, ist $\sigma_1 = -\sigma_2$ und, da ausserdem der absoluten Grösse nach $\vartheta_2 = \vartheta_1$, auch

$$B_n = -A_n. \tag{30}$$

Ein solcher Fall wird realisirt, wenn der einwirkende Magnet genau in der Mitte zwischen den beiden gleichen Kugeln sich befindet oder wenn sich die Kugeln im homogenen magnetischen Felde befinden, wobei die Kraft parallel mit der Centrallinie der beiden Kugeln sein soll.

Statt der beiden Gleichungen 28) und 29) erhalten wir jetzt infolge von 30) die eine folgende:

$$31)\left\{\begin{aligned}&\frac{2n}{2n-1}\left\{\frac{2+k}{3k}-e^{-(2n-1)\vartheta_1}\right\}A_{n-1}+\frac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\frac{2+k}{3k}-e^{-(2n+3)\vartheta_1}\right\}A_{n+1}\\&\qquad-(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\left\{\frac{2+k}{3k}-e^{-(2n+1)\vartheta_1}\right\}A_n\\&\qquad+\frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1}\left\{1-e^{-(2n+1)\vartheta_1}\right\}A_n+K^n_{\vartheta_1}=0.\end{aligned}\right.$$

§ 8. Wir wollen nun die durch 26) und 29a) definirten Functionen $K^n_{\vartheta_1}$ und $K^n_{\vartheta_2}$ für den Specialfall des oben erwähnten homogenen magnetischen Feldes berechnen. Es ist für diesen Fall

$$F = Sx \text{ und } \frac{1}{2\pi\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_1 = \sum L^n_{\vartheta_1} P^n(\cos\omega_1), \tag{32}$$

wo $L^n_{\vartheta_1}$ der gesuchte Specialwerth von $K^n_{\vartheta_1}$ und S die äussere Kraft ist. Nun ist nach 12)

$$33)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\sqrt{\psi_1}}\left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_1=\frac{S}{2\pi}\,\frac{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\cos\omega_1-2}{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}-2\cos\omega_1)^{3/2}}\\&=\frac{S}{2\pi}e^{-\frac{\vartheta_1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\{n e^{-(n-1)\vartheta_1}-(n+1)e^{-(n+1)\vartheta_1}\}P^n(\cos\omega_1).\end{aligned}\right.$$

Also ist

$$34)\left\{\begin{aligned}L^n_{\vartheta_1}&=\frac{S}{2\pi}e^{-\frac{\vartheta_2}{2}}\{n e^{-(n-1)\vartheta_1}-(n+1)e^{-(n+1)\vartheta_1}\},\\L^n_{\vartheta_2}&=\frac{S}{2\pi}e^{\frac{\vartheta_2}{2}}\{n e^{(n-1)\vartheta_2}-(n+1)e^{(n+1)\vartheta_2}\}.\end{aligned}\right.$$

Dies haben wir statt $K^n_{\vartheta_1}$ und $K^n_{\vartheta_2}$ in 28), 29) und 31) einzusetzen.

§ 9. Die Gleichungen 28) und 29) stellen ein System von **zwei gleichzeitigen Differenzengleichungen zweiten Grades** dar; A_n und B_n sind die gesuchten Functionen, während n die Variabele ist. In Bezug auf diese Variabele sind die Gleichungen von bedeutend verwickelter, theils algebraischer, theils transcendenter Form. Um A_n und B_n zu finden, hat man die Methode der successiven Influenzen zu benutzen. Um die erste Influenz zu berechnen, setzen wir in 28) alle B_i

$=0$ und in 29) $A_i=0$ und drücken auf die unten zu erläuternde Weise A_n und B_n, welche wir aber $a_n^{(1)}$ und $b_n^{(1)}$ bezeichnen werden, aus. Diese Coefficienten drücken die erste Influenz aus. Das so gefundene $b_n^{(1)}$ setzen wir in 28) statt B_n und das $a_n^{(1)}$ in 29) statt A_n ein; zugleich ersetzen wir in 28) A_n durch $a_n^{(2)}$ und in 29) B_n durch $b_n^{(2)}$, lassen $K_{\vartheta_1}^n$ und $K_{\vartheta_2}^n$ ganz weg und bestimmen die Grössen $a_n^{(2)}$ und $b_n^{(2)}$; dies statt A_n und B_n resp. in 29) und 28) eingesetzt, giebt $a_n^{(3)}$ und $b_n^{(3)}$, durch welche die dritten Influenzen bestimmt werden u. s. f. Für jede einzelne der Coefficientenreihen $a_n^{(p)}$ und $b_n^{(p)}$ müssen nun die Bedingungen 21) erfüllt sein, während wir mit Hilfe von 20) die entsprechenden Theile $m_1{}^{(p)}$ und $m_2{}^{(p)}$ der Gesammtmomente M_1 und M_2 berechnen. Es sind dann

35) $$M_1=\sum_p m_1{}^{(p)} \text{ und } M_2=\sum_p m_2{}^{(p)}.$$

Wendet man diese Methode der successiven Influenzen an, so vereinfachen sich die Bedingungsgleichungen und werden integrabel.

Bei der Berechnung des beliebigen n^{ten} Gliedes bei der p^{ten} Influenz: $a_n^{(p)}$, haben wir in 28) $K_{\vartheta_1}^n=0$ und statt A_n zu setzen $a_n^{(p)}$; ferner haben wir statt B_n die bei der vorhergehenden Influenz berechneten Coefficienten $b_n^{(p-1)}$ einzusetzen. Dadurch gewinnt die Bedingungsgleichung für $a_n^{(p)}$ die Form

36) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2+k}{3k}a_{(n-1)}^p+\frac{2(n+1)}{2n+3}\cdot\frac{2+k}{3k}a_{(n+1)}^p\\&-(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\frac{2+k}{3k}a_n^{(p)}+\frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1}a_n^{(p)}=\Phi_n^{(p)}.\end{aligned}\right.$$

Für $p=1$ ist hier

36a) $$\Phi_n^{(1)}=-K_{\vartheta_1}^n;$$

dagegen für $p>1$ ist

37) $$\Phi_n^{(p)}=-\frac{2n}{2n-1}b_{n-1}^{(p-1)}-\frac{2(n+1)}{2n+3}b_{n+1}^{(p-1)}+(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})b_n^{(p-1)}-\frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1}b_n^{(p-1)},$$

wo die $b_i^{(p-1)}$ als bekannt vorausgesetzt sind. Setzen wir

37a) $$\frac{a_n^p}{2n+1}=y_n,$$

so erhält man aus 36) die Differenzengleichung zweiten Grades

38) $$\left\{\begin{aligned}&\{6-3(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})+\tau(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})+[4-2(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})]n\}y_n\\&+\{8-3(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})-\tau(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})+[4-2(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})]n\}\Delta y_n\\&+(4+2n)\Delta^2y_n=\tau\,\Phi_{n+1}^{(p)},\\&\qquad\qquad\text{wo }\tau=\frac{3k}{2+k}.\end{aligned}\right.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man (*Laplace*, *Théorie analyt. des Probab.* 1814, S. 110 u. 120) mit Rücksicht auf 37a)

39a) $$a_n^{(p)} = (2n+1)\frac{H}{2}\int_0^\lambda \frac{x^n}{x-e^{-\vartheta_1}}\left(\frac{x-e^{-\vartheta_1}}{x-e^{\vartheta_1}}\right)^{\frac{1-k}{2+k}} dx,$$

wo λ eine reelle Wurzel der Gleichung

40) $$Hx^{n+1}(x-e^{\vartheta_1})^{\frac{1+2k}{2+k}}(x-e^{-\vartheta_1})^{\frac{1-k}{2+k}} = \frac{3k}{2+k}\Phi_{n+1}^{(p)}$$

und H eine Constante ist.

Für den Fall der elektrischen Induction erhält man die so einfache Relation

$$a_n^{(p)} = (2n+1)\frac{H}{2}\int_0^\lambda \frac{x^n}{x-e^{-\vartheta_1}} dx,$$

wo λ eine Wurzel der Gleichung

$$Hx^{n+1}(x-e^{\vartheta_1}) = \Phi_{n+1}^{(p)}$$

ist. Um die Richtigkeit von 39) zu prüfen, setzen wir 39) in 36) ein und erhalten ohne Mühe

$$H\int_0^\lambda \frac{d}{dx}(x^{n+1}+x^n e^{\vartheta_1})\left(\frac{x-e^{-\vartheta_1}}{x-e^{\vartheta_1}}\right)^{\frac{1-k}{2+k}} dx$$

$$+ H\frac{k-1}{2+k}(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})\int_0^\lambda \frac{x^n}{x-e^{-\vartheta_1}}\left(\frac{x-e^{-\vartheta_1}}{x-e^{\vartheta_1}}\right)^{\frac{1-k}{2+k}} dx = \tau\Phi_n^p.$$

Integrirt man das erste Glied partiell, so gelangt man zu der nach 40) identisch erfüllten Gleichung

$$H\lambda^{n+1}(\lambda-e^{\vartheta_1})^{\frac{1+2k}{2+k}}(\lambda-e^{-\vartheta_1})^{\frac{1-k}{2+k}} = \tau\Phi_n^{(p)}.$$

Ist k nahe gleich 1, so convergirt sehr schnell die aus 39) folgende Reihe

$$\frac{a_n^p}{2n+1} = \frac{H}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-k)^m}{(2+k)^m\, m!}\int_0^\lambda \frac{x^n}{x-e^{-\vartheta_1}}\left(lg\frac{x-e^{-\vartheta_1}}{x-e^{\vartheta_1}}\right)^m dx.$$

§ 10. Bei praktischen Ausrechnungen ist es nicht rathsam aus den Gleichungen 28) und 29), indem man in denselben $n=0, 1, 2, 3$ etc. setzt, die A_n und B_n successive zu berechnen, und zwar aus folgendem Grunde. Setzen wir

41) $$M_1 = M_1{}^0 + M'_1 \text{ und } M_2 = M_2{}^0 + M'_2,$$

wo $M_1{}^0$ und $M_2{}^0$ durch die äusseren Kräfte, M'_1 und M'_2 durch die Anwesenheit der andern Kugel hervorgerufen ist, so ist z. B. M'_1 als klein im Vergleiche mit $M_1{}^0$ zu betrachten. Da $M_1{}^0$ auch ohne dipolare Coordinaten gefunden werden kann, so kommt es also vor Allem auf eine genaue Berechnung von M'_1 und M'_2 an, es müssen also so viele Glieder von M_1 berechnet werden, dass der übrig bleibende Fehler klein sei, nicht etwa im Vergleich mit M_1, sondern mit M'_1, welches selbst wieder klein ist im Vergleich mit M_1. Um also zu unserem eigentlichen Ziele zu gelangen, haben wir eine sehr grosse Anzahl von Gliedern zu berechnen. Dieser Uebelstand wird vermieden, wenn wir M_1^0 und M'_1 gesondert berechnen und entsprechend die A_n und B_n zerlegen. Es sei

$$42)\quad A_n = A^0_n + A'_n, \quad B_n = B^0_n + B'_n, \quad M_1^0 = 16\pi a^3 e^{-\frac{\vartheta_1}{2}} \sum A^0_n e^{-n\vartheta_1} \text{ etc.}$$

Wir stellen gesonderte Gleichungen für die A^0_n und die A'_n auf. Für die A^0_n und die B^0_n erhalten wir Gleichungen, wenn wir in 28) $B_n = 0$ und in 29) $A_n = 0$ setzen:

$$43)\quad \begin{cases} \dfrac{2n}{2n-1}\cdot\dfrac{2+k}{3k} A^0_{n-1} + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\cdot\dfrac{2+k}{3k} A^0_{n+1} - (e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1}) \dfrac{2+k}{3k} A^0_n \\ \qquad + \dfrac{e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}}{2n+1} A^0_n + K^n_{\vartheta_1} = 0, \\ \dfrac{2n}{2n-1}\cdot\dfrac{2+k}{3k} B^0_{n-1} + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\cdot\dfrac{2+k}{3k} B^0_{n+1} - (e^{-\vartheta_2} + e^{\vartheta_2}) \dfrac{2+k}{3k} B^0_n \\ \qquad + \dfrac{e^{-\vartheta_2} - e^{\vartheta_2}}{2n+1} B^0_n + K^n_{\vartheta_2} = 0. \end{cases}$$

Um für die A'_n und B'_n Gleichungen zu erhalten, setzen wir A_n und B_n aus 42) in 28) und 29) und subtrahiren davon 43). Dann erhalten wir die beiden Gleichungen

$$44)\quad \begin{cases} \dfrac{2n}{2n-1}\left\{\dfrac{2+k}{3k} A'_{n-1} + B'_{n-1} e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\dfrac{2+k}{3k} A'_{n+1} + B'_{n+1} e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ - (e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1})\left\{\dfrac{2+k}{3k} A'_n + B'_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ + \dfrac{e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}}{2n+1}\left\{A'_n + B'_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} + \dfrac{2n}{2n-1} B^0_{n-1} e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} \\ + \dfrac{2(n+1)}{2n+3} B^0_{n+1} e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} - (e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1}) B^0_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} \\ + \dfrac{e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}}{2n+1} B^0_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} = 0 \\ \text{und ebenso}\quad \dfrac{2n}{2n-1}\left\{\dfrac{2+k}{3k} B'_{n-1} + A'_{n-1} e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\dfrac{2+k}{3k} B'_{n+1} + A'_{n+1} e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ - (e^{\vartheta_2} - e^{-\vartheta_2})\left\{\dfrac{2+k}{3k} B'_n + A'_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} \\ + \dfrac{e^{-\vartheta_2} - e^{\vartheta_2}}{2n+1}\left\{B'_n + A'_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}\right\} + \dfrac{2n}{2n-1} A^0_{n-1} e^{-\frac{2n-1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} \\ + \dfrac{2(n+1)}{2n+3} A^0_{n+1} e^{-\frac{2n+3}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} - (e^{\vartheta_2} + e^{-\vartheta_2}) A^0_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} \\ + \dfrac{e^{-\vartheta_2} + e^{\vartheta_2}}{2n+1} A^0_n e^{-\frac{2n+1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)} = 0. \end{cases}$$

Sind die Radien der Kugeln gleich und wirken die Kräfte auf beide in gleicher Weise, so ist [s. 30)] $B_n = -A_n$, und indem wir wieder $A_n = A^0_n + A'_n$ setzen, erhalten wir für A^0_n die erste von den Gleichungen 43). Setzen wir $A_n = A^0_n + A'_n$ in 31) und subtrahiren die erste von den Gleichungen 43), so erhalten wir für A'_n die Gleichung

$$45)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2n}{2n-1}\left\{\frac{2+k}{3k} - e^{-(2n-1)\vartheta_1}\right\} A'_{n-1} + \frac{2(n+1)}{2n+3}\left\{\frac{2+k}{3k} - e^{-(2n+3)\vartheta_1}\right\} A'_{n+1} \\ &-(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\left\{\frac{2+k}{3k} - e^{-(2n+1)\vartheta_1}\right\} A'_n + \frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1}\left\{1-e^{-(2n+1)\vartheta_1}\right\} A'_n \\ &-\frac{2n}{2n-1} A^0_{n-1} e^{-(2n-1)\vartheta_1} - \frac{2(n+1)}{2n+3} A'_{n+1} e^{-(2n+3)\vartheta_1} \\ &+(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}) A^0_n e^{-2(n+1)\vartheta_1} - \frac{e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1}}{2n+1} A^0_n e^{-(2n+1)\vartheta_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

§ 11. Wir wollen nun die A^0_n und die B^0_n, welche auch den Bedingungen

$$46)\qquad \sum \frac{A^0_n}{2n+1} e^{-n\vartheta_1} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{B^0_n}{2n+1} e^{n\vartheta_2} = 0$$

zu genügen haben [s. 21], für den Fall genau berechnen, der bereits in § 8 behandelt wurde.

Es ist nach 19) $\frac{\sigma_1^0}{\psi_1^{3/2}} = \sum A^0_n P^n(\cos\omega_1)$ und, wie leicht zu finden, $\sigma_1^0 = \frac{3Sk}{4\pi}\cos\varphi$, wo φ (s. die Figur) der Centriwinkel ist. Es ist also

$$47)\qquad \frac{3Sk}{4\pi}\,\frac{\cos\varphi}{\psi_1^{3/2}} = \sum A^0_n P^n(\cos\omega_1).$$

Nun ist aber $\cos\varphi = \frac{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\cos\omega_1 - 2}{e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1} - 2\cos\omega_1}$, also

$$48)\qquad \frac{3Sk}{4\pi}\cdot\frac{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1})\cos\omega_1 - 2}{(e^{\vartheta_1}+e^{-\vartheta_1}-2\cos\omega_1)^{5/2}} = \sum A^0_n P^n(\cos\omega_1).$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass

$$\frac{(1+\alpha^2)\cos\delta - 2\alpha}{(1-2\alpha\cos\delta+\alpha^2)^{5/2}} = \frac{1}{3(1-\alpha^2)}\sum (2n+1)\{n\alpha^{n-1} - (n+1)\alpha^{n+1}\} P^n(\cos\delta).$$

Wendet man diese Formel an, um die linke Seite von 48) nach den $P^n(\cos\omega_1)$ zu zerlegen, so erhält man durch Vergleich der Coefficienten

$$49)\quad \left\{\begin{aligned} &A^0_n = (2n+1)\,\frac{kSe^{-\frac{\vartheta_1}{2}}}{4\pi(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})}\{n e^{-(n-1)\vartheta_1} - (n+1)e^{-(n+1)\vartheta_1}\} \\ &\text{und ebenso} \\ &B^0_n = (2n+1)\,\frac{kSe^{\frac{\vartheta_2}{2}}}{4\pi(e^{\vartheta_1}-e^{-\vartheta_1})}\{n e^{(n-1)\vartheta_2} - (n+1)e^{-(n+1)\vartheta_1}\}. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke fallen auf durch ihre Aehnlichkeit mit den $L^n_{\vartheta_1}$ und $L^n_{\vartheta_2}$ 31); sie genügen den Bedingungen 46). — Der Weg, den wir bei praktischen Ausrechnungen zu befolgen haben, ist nun der folgende: zuerst berechnen wir aus 49) eine Reihe von Grössen A^0_n und B^0_n und vermittelst dieser aus 44) und 45) und mit Hilfe der Bedingungen

$$\sum \frac{A'_n}{2n+1} e^{-n\vartheta_1} = 0 \text{ und } \sum \frac{B'_n}{2n+1} e^{n\vartheta_2} = 0$$

die Coefficienten A'_n und B'_n. Dann ist

$$M'_1 = 16\pi a^3 e^{-\frac{\vartheta_1}{2}} \sum A'_n e^{-n\vartheta_1} \text{ und } M'_2 = 16\pi a^3 e^{\frac{\vartheta_2}{2}} \sum B'_n e^{n\vartheta_2}$$

[s. 20)], während M_1^0 und M_2^0 gegeben sind durch

$$M_1^0 = kSR_1^3 \text{ und } M_2^0 = kSR_2^3.$$

§ 12. Ich habe die Rechnung durchgeführt für den Fall, der in §§ 8 und 11 behandelt wurde, wobei noch die Radien der Kugeln als gleich ($=R$) angenommen wurden. Ist T die Entfernung der Kugelcentra, so haben wir die Gleichung

$$e^{2\vartheta_1} - \frac{T}{R} e^{\vartheta_1} + 1 = 0.$$

Ich nahm nun an $\frac{T}{R} = \frac{17}{4}$, also $e^{\vartheta_1} = 4$ und $k = 0{,}99$.

Es genügt in diesem Falle, die fünf ersten Glieder der Reihen in Betracht zu ziehen. Man erhält

$$M^0 = 0{,}99\,SR^3, \quad M' = 0{,}02673739\,SR^3.$$

Die durch die Anwesenheit der andern Kugel erzeugte Vergrösserung des magnetischen Momentes

$$\frac{M'}{M^0} = 0{,}02700747$$

beträgt also fast genau 2,7 Procent.

§ 13. Denken wir uns zwei Kugeln aus dielektrischem Stoffe, z. B. zwei Glaskugeln der Einwirkung elektrischer Kräfte ausgesetzt; die hier besprochene Theorie kann auch dazu dienen, die elektrische Induction auf den beiden Glaskugeln zu berechnen.

St. Petersburg, $\frac{\text{21. Febr.}}{\text{5. März}}$ 1878.

einzelnen Eckenhalbmessern gebildeten Winkel mit $\frac{r}{OH}$ multiplicirt. Es ist also

$$Sin\, \sigma^\wedge OH = \frac{r}{OH}[Sin\, \sigma^\wedge OA_1 + Sin\, \sigma^\wedge OA_2 + Sin\, \sigma^\wedge OA_3].$$

Die Winkel $\sigma^\wedge OA_1$, $\sigma^\wedge OA_2$, $\sigma^\wedge OA_3$ sind nun, wie durch Abzählung gefunden wird, $PA_2 + PA_3 - PA_1$, $PA_3 + PA_1 - PA_2$, $PA_1 + PA_2 - PA_3$.

In dem jetzt zu behandelnden Falle soll $\sigma^\wedge OH$ gleich Null sein; es besteht also die Bedingungsgleichung

$$Sin(PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\,PA_1) + Sin(PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\,PA_2) \\ + Sin(PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\,PA_3) = 0.$$

Daraus folgt durch Zerlegung

$$8)\qquad tg(PA_1 + PA_2 + PA_3) = \frac{Sin\,2\,PA_1 + Sin\,2\,PA_2 + Sin\,2\,PA_3}{Cos\,2\,PA_1 + Cos\,2\,PA_2 + Cos\,2\,PA_3}$$

und hieraus

$$9)\qquad Sin(PA_1 + PA_2 + PA_3) = \frac{r(Sin\,2\,PA_1 + Sin\,2\,PA_2 + Sin\,2\,PA_3)}{OH},$$

$$10)\qquad Cos(PA_1 + PA_2 + PA_3) = \frac{r(Cos\,2\,PA_1 + Cos\,2\,PA_2 + Cos\,2\,PA_3)}{OH}.$$

In diesen Formeln sind nun PA_1, PA_2, PA_3 als identisch aufzufassen mit $2\,XA_1$, $2\,XA_2$, $2\,XA_3$ aus den Formeln 4) und man findet

$$11)\quad \begin{cases} Sin\,2\,PA_1 = \frac{r^2}{OH^2}[2\,Sin\,2\,A_3A_1 + 2\,Sin\,2\,A_2A_1 + Sin\,2(A_1A_2 - A_3A_1)], \\ Sin\,2\,PA_2 = \frac{r^2}{OH^2}[2\,Sin\,2\,A_1A_2 + 2\,Sin\,2\,A_3A_2 + Sin\,2(A_2A_3 - A_1A_2)], \\ Sin\,2\,PA_3 = \frac{r^2}{OH^2}[2\,Sin\,2\,A_2A_3 + 2\,Sin\,2\,A_1A_3 + Sin\,2(A_3A_1 - A_2A_3)], \\ Cos\,2\,PA_1 = \frac{r^2}{OH^2}[8\,Cos\,A_1A_2\,Cos\,A_2A_3\,Cos\,A_3A_1 - Cos\,2(A_1A_2 - A_3A_1)], \\ Cos\,2\,PA_2 = \frac{r^2}{OH^2}[8\,Cos\,A_1A_2\,Cos\,A_2A_3\,Cos\,A_3A_1 - Cos\,2(A_2A_3 - A_1A_2)], \\ Cos\,2\,PA_3 = \frac{r^2}{OH^2}[8\,Cos\,A_1A_2\,Cos\,A_2A_3\,Cos\,A_3A_1 - Cos\,2(A_3A_1 - A_2A_3)]. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in 9) und 10) substituirt, so resultiren endlich die Gleichungen

$$12)\quad \begin{cases} Sin(PA_1 + PA_2 + PA_3) \\ = \frac{r^3}{OH^3}[Sin\,2(A_1A_2 - A_2A_3) + Sin\,2(A_2A_3 - A_3A_1) + Sin\,2(A_3A_1 - A_1A_2)], \\ Cos(PA_1 + PA_2 + PA_3) \\ = \frac{r^3}{OH^3}[24\,Cos\,A_1A_2\,Cos\,A_2A_3\,Cos\,A_3A_1 - \Sigma\,Cos\,2(A_1A_2 - A_3A_1)]. \end{cases}$$

Darin ist $PA_1 + PA_2 + PA_3$ der Winkel, welchen σ, also in diesem Falle OH, mit der Richtung von PO einschliesst. PO ist der Halbmesser jenes

Punktes, dessen σ parallel OH wird. Die Vergleichung der Formel 7) und der zweiten der Formeln 12) lehrt nun:

„Die Axen der Ellipse V sind die Halbirungslinien desjenigen Winkels, welcher von der Euler'schen Geraden OH des Dreiecks mit jenem Durchmesser PP' gebildet wird, dessen Endpunkten die zu OH parallele und die zu OH senkrechte σ entsprechen."*

Diese merkwürdige Relation giebt auch eine einfache Construction der Axen von V an die Hand. Denn jener zweite Durchmesser PP', von welchem der Satz handelt, ist leicht zu finden, indem man durch A_1 z. B. eine zu OH parallele Sehne zieht und an diese eine zu A_2A_3 senkrechte Sehne anschliesst. Der letzteren Endpunkt ist gleichzeitig ein Endpunkt des gesuchten Durchmessers.

Die Schnittpunkte jener Halbirungslinien mit dem Kreise sind auch jene Punkte, denen als V die Scheitel der Ellipse V zugehören. Sind α, β, γ die Winkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$, welche wir wegen der Concordanz mit der gewöhnlichen Schreibweise einführen, so bestehen also für die Winkel $OR^\wedge OH$ der Euler'schen Geraden mit den Axen OR die Gleichungen

$$Sin\,2\,OR^\wedge OH = \frac{r^3}{\overline{OH}^3}\left[Sin(\alpha-\beta)+Sin(\beta-\gamma)+Sin(\gamma-\alpha)\right],$$

$$Cos\,2\,OR^\wedge OH = \frac{r^3}{\overline{OH}^3}\left[24\,Cos\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma - Cos(\alpha-\beta)-Cos(\beta-\gamma)-Cos(\gamma-\alpha)\right],$$

$$tg\,2\,OR^\wedge OH = \frac{Sin(\alpha-\beta)+Sin(\beta-\gamma)+Sin(\gamma-\alpha)}{24\,Cos\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma - Cos(\alpha-\beta)-Cos(\beta-\gamma)-Cos(\gamma-\alpha)}.$$

Wien, 22. Juli 1878. S. Kantor.

II. Ueber eine Anwendung der Kugelfunctionen.

Die mit $P_n(x)$ bezeichneten Kugelfunctionen erster Art geben in Verbindung mit den von Herrn Heine eingeführten Kugelfunctionen zweiter Art $Q_n(y)$ ein Mittel an die Hand, um folgende Umkehrungsaufgabe zu lösen:

> „Gegeben sei in einem Punkte der Verlängerung einer begrenzten Geraden das Potential der auf der begrenzten Geraden linear vertheilten Masse als Element einer analytischen Function, es soll aus dieser gegebenen Function die Massenvertheilung auf der Geraden berechnet werden."

* Sämmtliche Punkte der Geraden PP' haben die Eigenschaft, dass die Fusspunkte der zu den Dreiecksseiten gehenden Normalen mit dem Ausgangspunkte in einer gleichseitigen Hyperbel liegen, welche durch den Punkt OH, g_∞ geht.

Die Länge der Geraden sei gleich 2; x sei die Entfernung eines Punktes der Geraden von der Mitte derselben, y sei die von der Mitte aus gerechnete Entfernung des Punktes, in dem das Potential bekannt sein soll. x nimmt alle Werthe von -1 bis $+1$ an, y ist >1. Ist fx die lineare Dichtigkeit im Punkte x, φy das Potential im gegebenen Punkte, geordnet nach fallenden Potenzen von y, so ist fx zu bestimmen aus der Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{y-x} = \varphi(y) = \frac{c_0}{y} + \frac{c_1}{y^2} + \frac{c_2}{y^3} + \cdots,$$

wo die Coefficienten c_0, c_1, c_2, ... gegeben sind.

Mit Hilfe der Heine'schen Reihe

$$1)\qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(x)\, Q_m(y)$$

und der bekannten Relationen

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{\varepsilon_{mn}}{2n+1}, \quad \text{wo} \quad \varepsilon_{mn} \begin{array}{l} =0 \text{ für } m>n, \\ =1 \;\;\text{,,}\;\; m=n, \end{array}$$

findet man, wenn man 1) mit $P_n(x)\,dx$ multiplicirt und von -1 bis $+1$ integrirt, das Neumann'sche Integral

$$2)\qquad \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{y-x} = Q_n(y),$$

welches für alle reellen $y>1$ sicher gilt.

Multipliciren wir 2) mit einer reellen Constanten b_n und summiren über alle ganzen Zahlen n von 0 bis ∞, so erhalten wir die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{b_n P_n(x)\,dx}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q_n(y).$$

Wenn die Coefficienten b_n so gegeben sind, dass man links die Summation und Integration vertauschen kann, so giebt die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x)\,dx}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, Q_n(y)$$

die Lösung unserer Aufgabe. Man verwandle $\varphi(y) = \frac{c_0}{y} + \frac{c_1}{y^2} + \frac{c_2}{y^3} + \cdots$ in eine nach Kugelfunctionen zweiter Art fortschreitende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b\ \ Q_n(y)$, indem man nach Herrn Heine setzt

$$3)\quad b_n = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2\ldots n}\left(c_n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}c_{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}c_{n-4} - \ldots\right),$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} b_n P_n(x) = f(x)$ giebt dann die lineare Dichtigkeit der Masse im Punkte x an.

Die Giltigkeit der Lösung ist an die Bedingung geknüpft, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{b_n P_n(x)\,dx}{y-x} = \int_{-1}^{+1}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x)dx}{y-x}$$

ist. Diese Gleichung ist richtig, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x)$ in gleichem Grade convergirt. Sind die b_n berechnet, so ist also die Convergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x)$ zu untersuchen.

Unbedingt gilt unsere Lösung, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ unbedingt convergent ist; da die $P_n(x)$ sämmtlich nicht grösser als 1 sind, so convergirt $f(x)$ dann sicher in gleichem Grade.

Für wirkliche Berechnung ist es oft vortheilhaft, den Ausdruck für b_n in 3) etwas umzuformen. Ist $(n)_\lambda$ der Binomialcoefficient

$$\frac{n.n-1\ldots n-\lambda+1}{1.2\ldots\lambda},$$

so ist

$$b_n = \frac{2n+1}{2^n}\sum_{\lambda=0}(n)_\lambda\,(2n-2\lambda)_n(-1)^\lambda.\,c_{n-2\lambda},$$

wo die Summation abbricht bei $\lambda = \frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt leicht, dass b_n gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{z^{2n+1}}$ in folgender, nach fallenden Potenzen von z entwickelten Function ist:

$$(-1)^n.\frac{2n+1.n!}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^n.\frac{d^n(\varphi z + (-1)^{n+1}\varphi(-z))}{dz^n}.$$

Es sei z. B. gegeben

$$\varphi(y) = \log\frac{(y+1)}{y-1};$$

da $\varphi(z)+\varphi(-z) = 0$ ist, so ist $b_1 = b_3 \ldots = b_{2n+1}\ldots = 0$. b_0 ist gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{z}$ in

$$\tfrac{1}{2}\left(log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)=log\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \text{ also } b_0=2.$$

Für gerade $n>0$ ist b_n gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{z^{2n+1}}$ in

$$\frac{2n+1.n!}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^n\frac{d^n 2\,log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}{dz^n}=\frac{2n+1.n!}{2^n}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{z}\right)^n-\left(1-\frac{1}{z}\right)^n}{z_n}\right).$$

Da hierin die Potenz $\frac{1}{z^{2n+1}}$ nicht vorkommt, so ist $b_n=0$, $n>0$. $f(x)$ ist also $=\frac{2.P_0(x)}{2}=P_0(x)=1$, also constant.

An die Relation

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x).arccotg(y-x)\,dx=Q_n(y)-\frac{1}{3!}\frac{d^2Q_n(y)}{dy^2}+\frac{1}{5!}\frac{d^4Q_n(y)}{dy^4}-\ldots,$$

die leicht durch wiederholte Differentiation der Gleichung 2) zu erweisen für $y>2$, und der sich noch viele andere an die Seite stellen lassen, kann man ähnliche Betrachtungen knüpfen.

Eisenach. Dr. Niemöller,
Lehrer am Realgymnasium.

III. Die Wellenfläche eines nicht homogenen isotropen Mittels.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c einer Welle sei bedingt durch die Elasticität E und Dichte D des Mittels nach der Relation $\frac{c^2D}{E}=$ Constante. Aendert sich die physikalische Beschaffenheit (D und E) des Mittels stetig von Punkt zu Punkt, so ist auch der Werth von c stetig veränderlich. Eine eindeutige Function

1) $$c=f(x,y,z)$$

gebe für jeden Punkt eines nicht homogenen Mittels den Werth der Geschwindigkeit, mit welcher sich die von diesem Punkte ausgehenden Elementarwellen auszubreiten beginnen. Eine Function $F(x,y,z,t)=0$ stelle für jede Epoche t die Fläche einer Welle dar. Während der sehr kleinen Zeit dt bilden sich um jeden Punkt der Fläche F kugelförmige Elementarwellen vom Halbmesser $c\,dt$, welche die Fläche $F(x,y,z,t+dt)$ umhüllen. Fällt man von irgend einem Punkte der Fläche $F(t)$ ein Loth auf die Fläche $F(t+dt)$, so hat dasselbe die Länge

$$c\,dt=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}dt}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Somit ist die Function F an die Bedingung gebunden, dass

$$2)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=f(x,y,z).$$

Ist für irgend eine Zeit t_0 die Wellenfläche $F=F_0$ gegeben und die Seite der Fläche F_0 bestimmt, nach welcher hin die Welle fortschreitet, so ist auch die Fläche $F(t_0+dt)$ und somit allgemein $F(t)$ für alle folgenden Zeiten bestimmt.

Den beiden Seiten der Fläche F_0 entsprechend, giebt es zwei Functionen F, welche der Gleichung 2) und der Bedingung $F(t_0)=F_0$ genügen. Ist aber die Fläche F_0 ein Punkt, so kann den beiden Bedingungen nur durch eine einzige Function F genügt werden. Zugleich verwandelt sich die Bedingung $F(t_0)=F_0$ in folgende:

$$3)\qquad \text{Für } lim\,(t=0) \text{ ist}\quad F(x,y,z,t)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c_0^2t^2=0.$$

Die Wellenfläche nähert sich mit abnehmendem t einer Kugelfläche um den Punkt x_0, y_0, z_0 und mit dem Radius $c_0 t$.

Der einfachste Fall eines nicht homogenen Mittels ist definirt durch die Gleichung

$$4)\qquad f(x,y,z)=c_0+\gamma x.$$

Die Constante c_0 ist der Werth der Wellengeschwindigkeit c in den Punkten $x=0$, die Constante $\gamma=\frac{dc}{dx}$ ist das Gefäll von c in der Richtung der X-Axe.

Ist der Coordinatenursprung zugleich Wellenursprung, so ist

$$5)\qquad F=\left[x-\frac{c_0}{2\gamma}(e^{\gamma t}+e^{-\gamma t}-2)\right]^2+y^2+z^2-\frac{c_0^2}{4\gamma^2}(e^{\gamma t}-e^{-\gamma t})^2=0,$$

denn diese Function genügt den in Gleichung 2) und 3) gestellten Bedingungen.

In der Programmabhandlung des Stuttgarter Realgymnasiums für Herbst 1878 hat der Verfasser, der Gleichung 5) entsprechend, in elementargeometrischer Untersuchung nachgewiesen, dass die Wellenfläche des durch Gleichung 4) charakterisirten Mittels eine Kugelfläche mit der Axe der X entlang fortschreitendem Mittelpunkte ist. Einige der dort weiter abgeleiteten Folgerungen mögen hier ohne Beweis ihre Stelle finden.

1. Auch im nicht homogenen Mittel steht der Strahl senkrecht zur Wellenstirn.

2. Alle möglichen Strahlen innerhalb des Mittels mit constantem Gefäll von c sind vorgestellt durch den Complex der Halbkreise, deren Ebenen der Axe des stärksten Gefälls parallel und deren Durchmesser in der Ebene $c=0$ liegen.

3. Zwischen je zwei Punkten dieses Mittels giebt es einen und nur einen Strahl.

4. Das Sinusgesetz für die Refraction ist nicht ausreichend, um die Curve eines Strahls in einem gegebenen Mittel festzustellen.

5. Das Gesetz der Refraction innerhalb eines stetig veränderlichen Mittels ist $\varrho = \frac{c}{\gamma \sin\varphi}$; hierbei ist ϱ der Krümmungsradius eines Strahls in einem gegebenen Punkte, γ ist der Maximalwerth, welchen das Verhältniss $\frac{dc}{ds}$, das Gefäll von c in einer durch den Punkt gehenden Richtung s, in diesem Punkte besitzt, und φ der Winkel des Strahls mit der Richtung des Maximalgefälles.

6. Im Allgemeinen giebt es in einem nicht homogenen Mittel mehrere Strahlen zwischen zwei Punkten, z. B. in dem durch die Gleichung $c = c_0 \sqrt{\frac{a}{a+x}}$ charakterisirten Mittel bilden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen ein Parabelbüschel, welches von einem Umdrehungsparaboloid begrenzt wird, dessen Brennpunkt der strahlende Punkt ist. Nach jedem Punkte innerhalb der Rotationsfläche giebt es zwei Strahlen.

7. Innerhalb eines Mittels, für welches c und $\frac{dc}{ds}$ sich nicht unstetig ändern, kann eine Reflexion nur im Strahl selbst erfolgen; in jeder andern Richtung ist sie undenkbar.

Stuttgart. Dr. A. Schmidt,
Professor am Realgymnasium.

IV. Bemerkung zu der Abhandlung: „Ueber ein specielles Hyperboloid u. s. w.“*

In der genannten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Gesammtheit aller Geradenpaare g, welche zu einem bestimmten Hyperboloid der betrachteten Art gehören, eine Regelfläche achter Ordnung bildet. Sind

$$\Delta x + \lambda = 0, \quad y = \beta r, \quad z = \gamma r$$

die Gleichungen einer beliebigen Geraden dieser Fläche, so besteht nämlich zwischen β, γ, λ die Relation**

$$(\varepsilon_1^2 - \varepsilon^2)^2 \beta^2 \gamma^2 + (1 - \varepsilon^2 \lambda^2)(1 - \varepsilon_1^2 \lambda^2) = 0.$$

Es hat sich nun ergeben, dass diese Gleichung reductibel ist; sie lässt sich nämlich zerlegen in die beiden Gleichungen

$$1 - \varepsilon^2 \lambda^2 = (1 - \varepsilon^4)\beta^2, \quad 1 - \varepsilon^2 \lambda^2 = (1 - \varepsilon^4)\gamma^2$$

oder auch in

* Dieses Journal Bd. XXIII, S. 269.

** a. a. O. S. 273.

$$1-\varepsilon_1^2\lambda^2=(1-\varepsilon_1^4)\gamma^2,\quad 1-\varepsilon_1^2\lambda^2=(1-\varepsilon_1^4)\beta^2,$$

so dass die identischen Relationen

$$\varepsilon_1^2\{1-\varepsilon^2\lambda^2-(1-\varepsilon^4)\gamma^2\}\equiv\varepsilon^2\{1-\varepsilon_1^2\lambda^2-(1-\varepsilon_1^4)\beta^2\},$$
$$\varepsilon_1^2\{1-\varepsilon^2\lambda^2-(1-\varepsilon^4)\beta^2\}\equiv\varepsilon^2\{1-\varepsilon_1^2\lambda^2-(1-\varepsilon_1^4)\gamma^2\}$$

bestehen. Die Regelfläche achten Grades, R_8, zerfällt also in zwei Regelschaaren vom vierten Grade. Jede derselben hat zwei Doppelgeraden, nämlich $y=0$, $z=0$ und $x=0$, $t=0$; ausserdem haben beide Flächen auch noch die vier Geraden miteinander gemein, welche in der angeführten Abhandlung als Doppelerzeugende der Fläche R_8 betrachtet wurden.

Ferner ist dann für die eine Fläche

$$\varepsilon\lambda=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)},\quad \beta^2=\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_3^2(u)},\quad \gamma^2=\frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)}$$

und für die andere

$$\varepsilon\lambda=\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)},\quad \beta^2=\frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma_3^2(u)},\quad \gamma^2=\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_3^2(u)}.$$

Die übrigen Resultate bleiben im Wesentlichen unverändert.

Berlin. Dr. Arthur Schoenflies.

V. Ueber ein Maximumproblem.

Die zu lösende Aufgabe ist die folgende: Eine gegebene Zahl a so in Summanden zu zerlegen, dass ihr Product zu einem Maximum wird.

Heissen die gesuchten Summanden

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n,$$

so ist

$$\varphi=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n-a=0$$

und die Function

$$f=x_1x_2x_3\ldots x_n$$

zu einem Maximum zu machen.

Setzen wir vorläufig n als gegeben voraus, so genügen die x den folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}:\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}:\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=\ldots=\frac{\partial f}{\partial x_n}:\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

oder

$$\frac{f}{x_1}=\frac{f}{x_2}=\ldots=\frac{f}{x_n},$$

d. h.

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Alle Theile von a müssen demnach einander gleich sein. Nennen wir einen derselben x, so ist ihre Anzahl $\frac{a}{x}$ und es wird einfacher

$$f=x^{\frac{a}{x}},$$

welche Function für

$$\frac{df}{dx} = x^{\frac{a}{x}} \cdot \frac{a}{x^2}(1 - l(x)) = 0\, dl$$

zu einem Maximum wird. Von den Factoren des letzten Ausdruckes kann aber für endliche x nur der letzte verschwinden, folglich ist

$$x = e.$$

Jeder Summand muss gleich e sein, das Maximum hat den Werth

$$e^{\frac{a}{e}}.$$

Ersichtlich lässt nur eine Zahl der Reihe

$$e,\ 2e,\ 3e,\ \ldots$$

eine ganzzahlige Anzahl von Summanden zu.

Für $a = e$ folgt noch: Wie man auch die Zahl e in Theile zerlegen mag, stets wird ihr Product kleiner als e selbst sein.

Plauen i. V., den 21. Oct. 1878. Dr. Carl Rodenberg.

VI. Ein Beispiel einer unendlich oft unstetigen Function

hat Dirichlet gegeben, indem er eine Function von x dadurch bestimmte, dass er sie zwischen 0 und 1 für rationale x gleich Null, für irrationale gleich Eins setzte. Darin bilden die Sprünge eine abzählbare unendliche Mannichfaltigkeit. Sollen die Sprünge an Stellen statthaben, deren Gesammtheit eine nicht abzählbare unendliche Mannichfaltigkeit bilden, so kann man nach Herrn G. Cantor die Punkte der Strecke von 0 bis 1 auf die Punkte der Fläche eines Quadrates, dessen Seiten Eins sind, eindeutig beziehen. Theilt man das Quadrat durch eine Linie in zwei Theile A und B, so kann man in den Punkten der Strecke, welche Punkten in A entsprechen, einer Function von x den Werth Null, in den übrigen den Werth Eins zuweisen. Damit ist die geforderte Function gebildet.

Freiburg i. B. J. Thomae.

V.

Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten.

Von

Prof. Dr. Beez

zu Plauen i. V.

(Schluss.)

III.

Die Form F ist eine Covariante der Form $\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k$; ihre Coefficienten verschwinden nicht unabhängig von einander.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass die quadrilineare Form F eine Covariante der quadratischen Form $\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k$ ist, d. h. dass sie durch dieselbe Substitution $p_i = f_i(q_1, q_2, \dots q_n)$ von n neuen Variabelen q, durch welche $\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k$ in die quadratische Form $\Sigma b_{lm}\,dq_l\,dq_m$ transformirt wird, in eine quadrilineare Form G übergeht, deren Coefficienten aus den Grössen b_{lm} ebenso gebildet sind, wie die Coefficienten der Form F aus den Grössen a_{ik}. Diese entsprechende Form sei

$$1)\qquad \begin{aligned} G = \Sigma_{lmtu} \Big\{ & \frac{\partial}{\partial q_u}\begin{vmatrix} lm \\ t \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial q_l}\begin{vmatrix} mu \\ t \end{vmatrix} \\ & + \Sigma \frac{\beta_{\mu\nu}}{b}\left(\begin{vmatrix} lt \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} mu \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} lm \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} tu \\ \nu \end{vmatrix}\right)\Big\}\, dq_l\, d'q_m\, \delta q_t\, \delta' q_u, \end{aligned}$$

worin

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \beta_{\mu\nu} = \frac{\partial b}{\partial b_{\mu\nu}}$$

gesetzt ist. Zunächst ist klar, dass, wenn eine Form $A(x)$ durch Einführung neuer Variabelen y in die Form $B(y)$ übergeht, die identische Gleichung stattfinden muss

$$A(x) - B(y) = 0.$$

Deshalb muss auch

2) $$\delta\{A(x)-B(y)\}=\delta A(x)-\delta B(y)=0$$

eine identische Gleichung sein, d. h. durch dieselbe Substitution, durch welche $A(x)$ in $B(y)$ übergeht, wird auch $\delta A(x)$ in $\delta B(y)$ transformirt. Wenn man also identisch hat

$$\tfrac{1}{2}\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k=\tfrac{1}{2}\Sigma b_{lm}\,dq_l\,dq_m,$$

so folgt auch die identische Gleichung

3) $$\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k=\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma b_{lm}\,dq_l\,dq_m.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k&=\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r}\,dp_i\,dp_k\,\delta p_r+\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta\,dp_k\\&=\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_r}\,dp_i\,dp_k\,\delta p_r-\Sigma d(a_{ik}\,dp_i)\,\delta p_k+d\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k;\end{aligned}$$

das zweite Glied auf der rechten Seite lässt sich schreiben

$$\Sigma d(a_{ik}\,dp_i)\,\delta p_k=\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial a_{ir}}{\partial p_k}\,dp_i\,dp_k\,\delta p_r+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial a_{kr}}{\partial p_i}\,dp_i\,dp_k\,\delta p_r+\Sigma a_{ik}\,d^2p_i\,\delta p_k.$$

Daher wird

4) $$\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k=d\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k-\Sigma\begin{vmatrix}ik\\r\end{vmatrix}dp_i\,dp_k\,\delta p_r-\Sigma a_{ir}\,d^2p_i\,\delta p_r.$$

Ebenso erhält man

5) $$\tfrac{1}{2}\delta\,\Sigma b_{lm}\,dq_l\,dq_m=d\,\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m-\Sigma\begin{vmatrix}lm\\t\end{vmatrix}dq_l\,dq_m\,\delta q_t-\Sigma b_{lt}\,d^2q_l\,\delta q_t.$$

Die rechten Seiten von 4) und 5) sind wegen 3) identisch gleich, also ist dies auch der Fall mit den beiden Seiten der Gleichung

$$\begin{aligned}d(\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k-\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m)&=\Sigma\delta p_r\left\{\Sigma\begin{vmatrix}ik\\r\end{vmatrix}dp_i\,dp_k+\Sigma a_{ir}\,d^2p_i\right\}\\&\quad-\Sigma\delta q_t\left\{\Sigma\begin{vmatrix}lm\\t\end{vmatrix}dq_l\,dq_m+\Sigma b_{lt}\,d^2q_l\right\}.\end{aligned}$$

Da auf der linken Seite ein vollständiges Differential, auf der rechten aber ein Ausdruck steht, der von den willkürlichen Variationen δq_t abhängig ist, so muss jede Seite der Gleichung für sich identisch verschwinden. Man hat also die ebenfalls identischen Gleichungen

6) $$\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k=\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m\ *$$

und

* S. R. Lipschitz, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Borchardt's Journal Bd. 70, S. 75 flg. Unsere Gleichungen 6) und 7) entsprechen den dortigen Gleichungen 6) und 7) oder 10). Wie schon in der Anmerkung S. 3 erwähnt wurde, könnte man die Gleichung

$$\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k=\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m$$

aus der Gleichung

$$\Sigma a_{ik}\,dp_i\,dp_k=\Sigma b_{lm}\,dq_l\,dq_m$$

dadurch ableiten, dass man statt d das Symbol $d+\delta$ einführte.

$$7)\quad \Sigma\delta p_r\left\{\Sigma\begin{vmatrix}ik\\r\end{vmatrix}dp_i dp_k+\Sigma a_{ir}d^2p_i\right\}=\Sigma\delta q_t\left\{\Sigma\begin{vmatrix}lm\\t\end{vmatrix}dq_l dq_m+\Sigma b_{lt}d^2q_l\right\},$$

d. h.: Durch dieselbe Substitution, durch welche $\Sigma a_{ik}dp_i dp_k$ in $\Sigma b_{lm}dq_l dq_m$ transformirt wird, geben auch die aus der ersten Form abgeleiteten Ausdrücke

$$\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k \text{ und } \Sigma\delta p_r\left\{\Sigma\begin{vmatrix}ik\\r\end{vmatrix}dp_i dp_k+\Sigma a_{ir}d^2p_i\right\}$$

in die aus der zweiten Form auf dieselbe Weise sich ergebenden Ausdrücke

$$\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m \text{ und } \Sigma\delta q_t\left\{\Sigma\begin{vmatrix}lm\\t\end{vmatrix}dq_l dq_m+\Sigma b_{lt}d^2q_l\right\}$$

über. Unterwirft man 6) einer Variation δ', so ergiebt sich die identische Gleichung

$$\delta'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta p_k=\delta'\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta q_m,$$

und da man die Variationszeichen vertauschen kann, so leuchtet die Richtigkeit der folgenden identischen Gleichungen von selbst ein:

$$8)\quad \begin{aligned}&\delta'\Sigma a_{ik}\,d'p_i\,\delta p_k-\delta\,\Sigma a_{ik}\,d'p_i\,\delta'p_k-d'\Sigma a_{ik}\,\delta p_i\,\delta'p_k\\=\;&\delta'\Sigma b_{lm}\,d'q_l\,\delta q_m-\delta\,\Sigma b_{lm}\,d'q_l\,\delta'q_m-d'\Sigma b_{lm}\,\delta q_l\,\delta'q_m\end{aligned}$$

und ebenso

$$9)\quad \begin{aligned}&\delta'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,d'p_k-d'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta'p_k-d\,\Sigma a_{ik}\,d'p_i\,\delta'p_k\\=\;&\delta'\Sigma b_{lm}\,dq_l\,d'q_m-d'\Sigma b_{lm}\,dq_l\,\delta'q_m-d\,\Sigma b_{lm}\,d'q_l\,\delta'q_m,\end{aligned}$$

folglich geht auch der Ausdruck

$$F=$$

$$-\tfrac{1}{2}\{\delta\delta'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,d'p_k-d\delta'\Sigma a_{ik}\,d'p_i\,\delta p_k-\delta d'\Sigma a_{ik}\,\delta'p_i\,dp_k+d d'\Sigma a_{ik}\,\delta p_i\,\delta'p_k\}$$

in

$$G=$$

$$-\tfrac{1}{2}\{\delta\delta'\Sigma b_{lm}\,dq_l\,d'q_m-d\delta'\Sigma b_{lm}\,d'q_l\,\delta q_m-\delta d'\Sigma b_{lm}\,\delta'q_l\,dq_m+dd'\Sigma b_{lm}\,\delta q_l\,\delta'q_m\}$$

über. Die weitere Entwickelung von G führt auf eine Gleichung, welche der Gleichung II, 9) entspricht, nämlich auf

$$10)\quad \begin{aligned}G=\;&\Sigma\left\{\frac{\partial}{\partial q_t}\begin{vmatrix}lm\\u\end{vmatrix}-\frac{\partial}{\partial q_l}\begin{vmatrix}tm\\u\end{vmatrix}\right\}dq_l\,d'q_m\,\delta q_t\,\delta'q_u+\Sigma\begin{vmatrix}tu\\l\end{vmatrix}dd'q_l\,\delta q_t\,\delta'q_u\\&-\Sigma\begin{vmatrix}lu\\m\end{vmatrix}dq_l\,\delta d'q_m\,\delta'q_u+\Sigma\begin{vmatrix}lm\\u\end{vmatrix}dq_l\,d'q_m\,\delta\delta'q_u-\Sigma\begin{vmatrix}mt\\u\end{vmatrix}d'q_m\,\delta q_t\,d\delta'q_u\\&+\Sigma b_{mu}\,dd'q_m\,\delta\delta'q_u-\Sigma b_{mu}\,\delta d'q_m\,d\delta'q_u.\end{aligned}$$

Wenn nun die zweiten Variationen der Grössen p in F so bestimmt worden sind, dass für irgend drei Variationen

$$\delta\,\Sigma a_{ik}\,\delta'p_i\,\delta''p_k=0,$$

so ist auch das Aggregat

$$\delta'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,d'p_k-d\,\Sigma a_{ik}\,d'p_i\,\delta'p_k-d'\Sigma a_{ik}\,dp_i\,\delta'p_k=0,$$

und vermöge 9) zieht diese Bedingung die entsprechende Bedingung für die zweiten Variationen der Grössen q in G nach sich, nämlich

$$\delta'\Sigma b_{lm}\, dq_l\, d'q_m - d\Sigma b_{lm}\, d'q_l\, \delta'q_m - d'\Sigma b_{lm}\, dq_l\, \delta'q_m$$
$$= -2\left\{\Sigma b_{lu}\, dd'q_l\, \delta'q_u + \Sigma \begin{vmatrix} lm \\ u \end{vmatrix} dq_l\, d'q_m\, \delta'q_u\right\} = 0.$$

Hieraus geht aber das System von Gleichungen hervor:

$$\text{11)} \qquad \Sigma_l b_{lu}\, dd'q_l + \Sigma_{lm} \begin{vmatrix} lm \\ u \end{vmatrix} dq_l\, d'q_m = 0,$$

welches den Gleichungen II, 11) entspricht. Bestimmt man hieraus die zweiten Variationen $dd'q_l$ und in ähnlicher Weise auch $\delta\delta'q_u$, $\delta d'q_m$, $d\delta'q_u$, so kommt für G der Ausdruck in III, 1) und wir erhalten somit den Satz:

Durch dieselben Substitutionen, durch welche die quadratische Form $\Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ in die quadratische Form $\Sigma b_{lm}\, dq_l\, dq_m$ transformirt wird, geht auch die quadrilineare Form

$$\text{12)} \quad \begin{aligned} F = \Sigma_{ikrs} \Big\{ & \frac{\partial}{\partial p_s}\begin{vmatrix} ik \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i}\begin{vmatrix} ks \\ r \end{vmatrix} \\ & + \Sigma_{\mu\nu} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\left(\begin{vmatrix} ir \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ks \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ik \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} rs \\ \nu \end{vmatrix}\right)\Big\}\, dp_i\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s \end{aligned}$$

in die quadrilineare Form

$$\text{12*)} \quad \begin{aligned} G = \Sigma_{lmtu} \Big\{ & \frac{\partial}{\partial q_u}\begin{vmatrix} lm \\ t \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial q_l}\begin{vmatrix} mu \\ t \end{vmatrix} \\ & + \Sigma_{\mu\nu} \frac{\beta_{\mu\nu}}{b}\left(\begin{vmatrix} lt \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} mu \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} lm \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} tu \\ \nu \end{vmatrix}\right)\Big\}\, dq_l\, d'q_m\, \delta q_t\, \delta' q_u \end{aligned}$$

über. Die quadrilineare Form F ist also eine Covariante der quadratischen Form $\Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k$.

Wenn sämmtliche Coefficienten b_{lm} constant sind, so verschwinden alle Coefficienten der Form G, folglich muss auch der Ausdruck F verschwinden, was bei der Unabhängigkeit der Variabelen dp_i, $d'p_k$, δp_r, $\delta' p_s$ nur möglich ist, wenn alle Coefficienten

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\begin{vmatrix} ik \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i}\begin{vmatrix} ks \\ r \end{vmatrix} + \Sigma \frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\left\{\begin{vmatrix} ir \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ks \\ \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ik \\ \mu \end{vmatrix}\begin{vmatrix} rs \\ \nu \end{vmatrix}\right\},$$

welche wir in einer früheren Abhandlung $(iskr)$ geschrieben haben, identisch Null werden. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Coefficienten $(iskr)$ in einer symbolischen Form darstellen, aus welcher ihre Eigenschaften leicht erkannt werden. Wegen der Gleichungen I, 16) und 18)

$$\begin{vmatrix} ik \\ r \end{vmatrix} = \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_r}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\begin{vmatrix} ik \\ r \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_i}\begin{vmatrix} ks \\ r \end{vmatrix} = \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} - \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r}$$

lässt sich $(iskr)$ auch in folgender Form als Unterschied zweier Determinanten schreiben:

$$a(iskr) = \begin{vmatrix} \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s}, & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & \dots & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_2}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_r \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s}, & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & \dots & \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_i \partial p_r} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_1}, & a_{11}, & \dots & a_{1n} \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_2}, & a_{21}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial p_k \partial p_s} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial p_n}, & a_{n1}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

welche sich von den in einer früheren* Abhandlung aufgestellten Determinanten nur dadurch unterscheiden, dass hier der Index l die Zahlenreihe $1, 2, \dots n$, dort aber die Reihe $0, 1, \dots n$ zu durchlaufen hat. Jede der beiden Determinanten lässt sich nun in ein Product zweier symbolischer Ausdrücke zerlegen, nämlich die erste in das Product

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k}, & \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_k}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_r \partial p_s}, & \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_r \partial p_s}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_r \partial p_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

die zweite in das Product

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_r}, & \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial p_r}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_k \partial p_s}, & \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_k \partial p_s}, & \dots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_k \partial p_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_2}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_n}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

* S. diese Zeitschrift Bd. XX, S. 430.

Die vier so erhaltenen symbolischen Factoren sollen der Reihe nach mit D_{ik}, D_{rs}, D_{ir}, D_{ks} bezeichnet werden. Sie sind keine Determinanten, da die Zahl der Horizontalreihen $n+1$, die der Verticalreihen n beträgt; doch kann man die Producte $D_{ik} D_{rs}$, $D_{ir} D_{ks}$ ganz auf dieselbe Weise bilden, als ob die Grössen D wirkliche Determinanten wären. Das Product zweier solcher symbolischen Ausdrücke ist dann aber identisch Null, daher ist

$$D_{ik} . D_{rs} = 0, \quad D_{ir} . D_{ks} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für den Fall des Verschwindens der quadrilinearen Form F die symbolische Darstellung der Coefficienten $(iskr)$, nämlich

$$(iskr) = \frac{1}{a} (D_{ik} D_{rs} - D_{ir} D_{ks}). \tag{13}$$

Mit Hilfe dieser Zerlegung lässt sich leicht beweisen, dass die Coefficienten $(iskr)$ nicht unabhängig von einander verschwinden, gleichgiltig, ob die Form $\Sigma a_{ik}\, dp_i\, dp_k$ auf die Form Σdy_l^2, $l = 1, 2, \ldots (n+1)$ zurückführbar ist oder nicht. Es mögen z. B. für $n = 3$ die Coefficienten (1212), (1213), (1313) identisch verschwinden. In diesem Falle müssen sie sich symbolisch durch folgende Gleichungen darstellen lassen:

$$(1212) = \frac{1}{a} (D_{11} D_{22} - D^2_{12}) \quad = 0,$$

$$(1213) = \frac{1}{a} (D_{11} D_{23} - D_{12} D_{13}) = 0,$$

$$(1313) = \frac{1}{a} (D_{11} D_{33} - D^2_{13}) \quad = 0,$$

worin jedes der sechs Glieder $D_{11} D_{22}$, $D_{11} D_{23}$, $D_{11} D_{33}$, D^2_{12}, $D_{12} D_{13}$, D^2_{13} für sich identisch verschwinden und in ein Product zweier symbolischer Factoren in der angegebenen Weise sich zerlegen lassen muss. Aber auch sämmtliche übrigen Producte, die aus zwei dieser symbolischen Factoren ausser den obigen noch gebildet werden können, müssen identisch Null werden, folglich ergeben sich auch die identischen Gleichungen

$$D_{22} D_{33} - D_{32} D_{23} = 0, \quad D_{12} D_{33} - D_{31} D_{23} = 0, \quad D_{22} D_{31} - D_{21} D_{32} = 0.$$

Entwickelt man aber aus diesen symbolischen Ausdrücken rückwärts die noch fehlenden Coefficienten $(iskr)$, so erhält man

$$\frac{1}{a} (D_{22} D_{33} - D_{32} D_{23}) = (2323),$$

$$\frac{1}{a} (D_{12} D_{33} - D_{31} D_{23}) = (1323),$$

$$\frac{1}{a} (D_{22} D_{31} - D_{21} D_{32}) = (2123),$$

folglich sind auch

$$(2323), (1323), (2123)$$

identisch Null.* Aus der symbolischen Darstellung der Coefficienten $(iskr)$ in 13) ergeben sich nun ohne Schwierigkeit die folgenden Beziehungen:

$$(iskr) = -(sikr) = -(isrk) = (sirk),$$

d. h.: Der Coefficient $(iskr)$ nimmt den entgegengesetzten Werth an, wenn man entweder i mit s oder k mit r vertauscht, geht aber in seinen ursprünglichen Werth über, wenn man gleichzeitig i mit s und k mit r verwechselt. Wenn daher

$$(iskr)\, dp_i\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_s$$

ein bestimmtes Glied von F ist, so enthält F auch noch die drei anderen Glieder

$$(sikr)\, dp_s\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_i, \quad (isrk)\, dp_i\, d'p_r\, \delta p_k\, \delta' p_s, \quad (sirk)\, dp_s\, d'p_r\, \delta p_k\, \delta' p_i,$$

deren Coefficienten sich durch den Coefficienten $(iskr)$ ausdrücken lassen. Sie können nämlich auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} &-(iskr)\, dp_s\, d'p_k\, \delta p_r\, \delta' p_i, \\ &-(iskr)\, dp_i\, d'p_r\, \delta p_k\, \delta' p_s, \\ &+(iskr)\, dp_s\, d'p_r\, \delta p_k\, \delta' p_i, \end{aligned}$$

folglich geben diese vier Glieder zusammen

$$(iskr)(dp_i\, \delta' p_s - dp_s\, \delta' p_i)(d'p_k\, \delta p_r - d'p_r\, \delta p_k).$$

Daher ist auch

$$F = \Sigma (iskr)(dp_i\, \delta' p_s - dp_s\, \delta' p_i)(d'p_k\, \delta p_r - d'p_r\, \delta p_k),$$

welche mit der Riemann'schen Gleichung II) bis auf den Factor $-\frac{1}{2}$ übereinstimmt.

---

* In Uebereinstimmung mit diesem Resultat steht die Schlussbemerkung Riemann's Ges. W. S. 383, Z. 3 v. o.: *„Observandum tamen est, ternas (sc. conditiones) tantum esse a se independentes."* Mit dem von mir gegebenen Beweis dürfte ein Bedenken sich erledigen, welches Herr R. Lipschitz in seinem „Beitrag zur Theorie der Krümmung", Borchardt's Journal Bd. 81, S. 240, und zwar in dem ersten Theile der Anmerkung, gegen mich erhoben hat. — Ein zweiter Einwurf des Herrn R. Lipschitz gegen eine meinerseits vom metageometrischen Standpunkte aus aufgestellte Behauptung ist bereits in meiner letzten Abhandlung, diese Zeitschrift XXI, S. 373 flgg., eingehend besprochen und in seiner fundamentalen Bedeutung für die Theorie der höheren Räume gebührend gewürdigt worden. Deshalb halte ich es auch nicht für geboten, auf das absprechende Urtheil des Herrn Brill in München, s. Fortschritte d. Math. Bd. 7, S. 306 flg., näher einzugehen, zumal Herr Brill die Arbeit, über die er referirt, nur ganz flüchtig gelesen hat. Jedenfalls ist es aber nicht ganz correct, wenn Herr Brill, nachdem ihm die Fortsetzung meiner Abhandlung bekannt geworden, sich der Verpflichtung entzieht, sein voreiliges Urtheil zu rectificiren. S. Fortschritte Bd. 8, S. 478.

IV.

Beziehung der Form F zum Gauss'schen Krümmungsmass. Unmöglichkeit, das letztere auf gewundene Flächen auszudehnen.

Gehen wir endlich zu der Formel III) über, welche Riemann als die Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses bezeichnet, so würde dieselbe in unserer Bezeichnungsweise lauten:

$$1)\qquad \frac{\Sigma(iskr)(dp_i\delta' p_s - dp_s\delta' p_i)(d'p_k\delta p_r - d'p_r\delta p_k)}{\Sigma a_{ik}\,dp_i d'p_k\,.\,\Sigma a_{rs}\,\delta p_r\delta' p_s - \Sigma a_{ir}\,dp_i\delta p_r\,.\,\Sigma a_{ks}\,d'p_k\delta' p_s}.$$

Der Nenner ist ebenfalls eine quadrilineare Covariante von $\Sigma a_{ik}\,dp_i dp_k$ und lässt sich auch auf die Form bringen

$$\Sigma(a_{ik}a_{rs} - a_{is}a_{kr})(dp_i\delta' p_s - dp_s\delta' p_i)(d'p_k\delta p_r - d'p_r\delta p_k).$$

Für $n=2$ wird der Quotient 1) frei von den Differentialen und reducirt sich auf

$$\frac{(1212)}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial p_2}\begin{vmatrix}11\\2\end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_1}\begin{vmatrix}12\\2\end{vmatrix}\right) + \frac{1}{a}\Sigma\frac{\alpha_{\mu\nu}}{a}\left\{\begin{vmatrix}12\\\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}12\\\nu\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}11\\\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}22\\\nu\end{vmatrix}\right\}$$

$$2)\qquad = \frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 a_{12}}{\partial p_1\partial p_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial p_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial p_1^2}, & \frac{\partial a_{12}}{\partial p_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1}, & \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_2} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1}, & a_{11}, & a_{12} \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial p_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_2}, & a_{11}, & a_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1}, & a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Setzt man hierin $a_{11}=E$, $a_{12}=a_{21}=F$, $a_{22}=G$, $p_1=p$, $p_2=q$, so geht 2) über in den Ausdruck, den Gauss im XI. Artikel der „*Disquisitiones circa superficies curvae*" für das Krümmungsmass einer Fläche im gewöhnlichen Raume aufgestellt hat und den wir der Vollständigkeit wegen hier noch einmal reproduciren:

$$3)\qquad \begin{aligned} K = \Big\{ & E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right] \\ & + F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p}\right] \\ & + G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right] \\ & - 2(EG-F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right]\Big\} : 4(EG-F^2)^2. \end{aligned}$$

Man mag nun entweder den Grenzwerth eines Verhältnisses $\frac{\delta}{\Delta}$, dessen Nenner das Flächenelement Δ der Fläche darstellt, während der Zähler δ das entsprechende Element einer Kugel vom Halbmesser 1 repräsentirt, deren Radien parallel zu den Normalen der Fläche gezogen sind — oder den reciproken Werth des Productes der beiden Hauptkrümmungshalbmesser R_1 und R_2, also den Quotienten $\frac{1}{R_1 R_2}$ als Krümmungsmass der Fläche in dem betreffenden Punkte ansehen — in beiden Fällen ergiebt sich die rechte Seite der Gleichung 3) als analytischer Ausdruck dieses Krümmungsmasses. Doch hat man kein Recht, zu behaupten, dass die rechte Seite der Gleichung 3) überhaupt das Krümmungsmass einer ausgedehnten Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen ausdrücke, deren Linearelement durch die Form $\sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}$ gegeben ist, so lange man nicht nachweisen kann, dass der Ausdruck auf der rechten Seite von 3) in der That äquivalent ist entweder dem Grenzwerth $\frac{\delta}{\Delta}$ zweier in der angegebenen Weise correspondirenden Flächenelemente oder dem reciproken Product der beiden Hauptkrümmungshalbmesser $\frac{1}{R_1 R_2}$ der betrachteten zweifachen Mannigfaltigkeit. Bis jetzt ist diese Aequivalenz nur unter der speciellen Voraussetzung bewiesen, dass die Fläche, deren Krümmungsmass durch die Gleichung 3) bestimmt wird, durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ aus einem ebenen Raume von drei Dimensionen ausgeschieden oder die Form $E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ aus der Form $dx^2 + dy^2 + dz^2$ mit Zuhilfenahme der einen Gleichung $f(x, y, z)$ entstanden ist. Aber schon für den nächst einfachen Fall, dass die Fläche, deren Krümmung gesucht wird, einen ebenen Raum von vier Dimensionen durchzieht oder, analytisch ausgedrückt, dass die Form $E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ aus der Form $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ mit Zuhilfenahme zweier Gleichungen

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \text{ und } \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

entstanden ist, scheint es mir ganz unmöglich — ohne irgendwelche willkürliche Voraussetzung —, das Krümmungsmass einer solchen gewundenen Fläche oder Fläche doppelter Krümmung überhaupt zu bestimmen, geschweige denn in den Ausdruck 3) umzusetzen, d. h. durch die Coefficienten E, F, G nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten auszudrücken. Offenbar haben die Anhänger der Riemann'schen Krümmungstheorie, wenn sie behaupten, dass der Ausdruck 3) schlechtweg das Krümmungsmass einer Fläche darstelle, deren Linearelement durch die Form $\sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}$ gegeben sei, den Beweis für diese Behauptung beizubringen, da Riemann selbst es unterlassen hat, dies zu thun; ich könnte mich also füglich des Gegenbeweises entschlagen.

Nun haben zwar die berufensten Vertreter der Riemann'schen Theorie bis jetzt keinen Versuch gemacht, meinen Einwand gegen dieselbe zu bekämpfen und nach dem Grundsatz: *„qui tacet, consentit“* könnte ich also annehmen, dass sie sich von der Richtigkeit desselben überzeugt haben. Da es mir jedoch nur um die Eruirung der Wahrheit und nicht darum zu thun ist, *à tout prix* Recht zu behalten, so stehe ich nicht länger an, für den oben skizzirten einfachsten Fall, dass nämlich die in Rede stehende Fläche in einem ebenen Raume von vier Dimensionen enthalten ist, die Gründe darzulegen, weshalb ich es für unmöglich halte, einen Ausdruck für ihre Krümmung zu finden.

Ein ebener Raum von vier Dimensionen ist nach Analogie mit der Geraden, der Ebene und dem gewöhnlichen Raume, welche ich als ebene Räume oder als ebene ausgedehnte Mannigfaltigkeiten von einer, zwei und drei Dimensionen bezeichne, durch vier gerade Linien, die nicht in einem ebenen Raume von drei oder weniger Dimensionen enthalten sind, bestimmt. Dementsprechend denke man sich, dass von einem Punkte O die vier Geraden OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 ausgehen. Durch je drei von diesen Geraden kann ein ebener Raum von drei Dimensionen, durch je zwei ein ebener Raum von zwei Dimensionen oder eine Ebene* gelegt werden. Die vier Geraden bestimmen also sechs Ebenen OM_1M_2, OM_1M_3, OM_1M_4, OM_2M_3, OM_2M_4, OM_3M_4, von denen allemal diejenigen zwei, welche keine der vier Geraden gemeinschaftlich haben, also die erste und die sechste, die zweite und die fünfte, die dritte und die vierte sich überhaupt nur in dem einen Punkte O schneiden können. Denn hätten zwei solche Ebenen, z. B. OM_1M_2 und OM_3M_4 eine Gerade OM_5 gemeinschaftlich, so lägen alle fünf Geraden in einem ebenen Raume von drei Dimensionen, was gegen die Voraussetzung ist. Es schneiden sich daher überhaupt zwei Ebenen im ebenen Raume von vier Dimensionen nur in einem Punkte, wie sich auch analytisch leicht verificiren lässt. Ebenso ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass in einem Punkte einer Ebene unendlich viele Normalen errichtet werden können, die sämmtlich in einer Ebene liegen, welche nur den einen gegebenen Punkt mit der ersten Ebene gemein hat.** Demgemäss lassen sich auch in einem Punkte einer Fläche, die einen ebenen Raum von vier Dimensionen durchzieht, unendlich viele Normalen errichten, die alle in einer Ebene liegen, welche die Fläche nur in dem einen Punkte schneidet. Wenn man daher auf einer solchen Fläche drei einander unendlich nahe Punkte annimmt und

* Nach der Bezeichnung von C. Jordan, *„Essai sur la géométrie à n dimensions“* im *Bulletin de la société mathématique de France t. 3, p. 104,* würde unsere Ebene ein „Biplan P_2“ sein; während der ebene Raum von drei Dimensionen den Namen „Plan P“ erhalten müsste. Auch die Bezeichnung des Herrn S. Lie ist abweichend von der meinigen.

** Diese Ebene würde nach C. Jordan mit P^{4-2} als „(4—2) *plan perpendiculaire à* P_2 *élevé par le point* x_1, x_2, x_3, x_4“ zu bezeichnen sein; *l. c.,* S. 114.

die Fläche des von ihnen bestimmten Dreiecks mit $\varDelta$ bezeichnet, so würde man, um das Krümmungsmass der Fläche an der betrachteten Stelle zu finden, zunächst in den Eckpunkten dieser Fläche Normalen zu errichten haben, sodann eine Kugelfläche im Raume von vier Dimensionen mit dem Halbmesser 1 construiren und diejenigen Radien ziehen, welche den soeben erwähnten Normalen parallel laufen. Diese Parallelen würden die Kugelfläche in drei Punkten schneiden, welche ein Dreieck mit der Fläche δ bestimmten. Das Krümmungsmass der Fläche ergiebt sich dann gleich dem Grenzwerthe des Verhältnisses $\frac{\delta}{\varDelta}$. Die erste der beiden Constructionen würde zwar ausführbar, aber unbestimmt sein, da sich in jedem Punkte unendlich viele Normalen errichten lassen; die zweite liesse sich aber nicht einmal ausführen, weil es im Raume von vier Dimensionen kein Analogon der Kugelfläche giebt. Denn die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$$

repräsentirt keine Fläche, sondern eine kugelförmige Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen. Der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\delta}{\varDelta}$, wie es oben als die erste Definition des Gauss'schen Krümmungsmasses aufgestellt wurde, lässt sich also, wenn die Fläche eine gewundene ist, nicht auf dem gewöhnlichen Wege bestimmen. Dasselbe ist der Fall mit dem reciproken Product der Hauptkrümmungshalbmesser $\frac{1}{R_1 R_2}$. Denn da die Normale einer gewundenen Fläche unbestimmt ist, so kann von Hauptkrümmungshalbmessern der Normalschnitte auch nicht die Rede sein.

Da nun bei einer Curve doppelter Krümmung die Normale ebenfalls unbestimmt ist, die Krümmung aber trotzdem mit Hilfe der Osculationsebene bestimmt werden kann, so liegt es nahe, für die gewundene Fläche ein analoges Hilfsmittel zur Bestimmung der Hauptkrümmungshalbmesser, nämlich den Osculationsraum einzuführen.

Bevor wir jedoch die hierauf bezügliche Untersuchung antreten, wollen wir uns zuerst Rechenschaft von den Schritten geben, die wir zu thun haben, um die Osculationsebene einer gewundenen Curve im gewöhnlichen Raume zu bestimmen, welche durch die beiden Gleichungen

$$4)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten charakterisirt ist. Die genannte Ebene geht durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve, deren Coordinaten bezüglich sind

$$\begin{array}{lll} x_1, & x_2, & x_3, \\ x_1 + dx_1, & x_2 + dx_2, & x_3 + dx_3, \\ x_1 + 2dx_1 + d^2x_1, & x_2 + 2dx_2 + d^2x_2, & x_3 + 2dx_3 + d^2x_3. \end{array}$$

Ihre Gleichung ist folglich

$$5)\qquad \begin{vmatrix} \eta_1 - x_1, & \eta_2 - x_2, & \eta_3 - x_3 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man diese Determinante mit $\varDelta$ und ihre Minoren nach der ersten Horizontalreihe bezüglich mit $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, so giebt ihre Entwickelung

$$\varDelta_1(\eta_1 - x_1) + \varDelta_2(\eta_2 - x_2) + \varDelta_3(\eta_3 - x_3) = 0,$$

worin die Coefficienten die folgenden Werthe haben:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} dx_2, & dx_3 \\ d^2x_2, & d^2x_3 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} dx_3, & dx_1 \\ d^2x_3, & d^2x_1 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_3 = \begin{vmatrix} dx_1, & dx_2 \\ d^2x_1, & d^2x_2 \end{vmatrix}.$$

Nun erhält man durch Differentiation von 4)

$$6)\quad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0,$$

$$7)\quad \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} d^2x_3 = -\Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

$$6^*)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = 0,$$

$$7^*)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} d^2x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} d^2x_3 = -\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

mit deren Hilfe man ohne Schwierigkeit findet

$$8)\quad \begin{aligned} \varDelta_1 : \varDelta_2 : \varDelta_3 = \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_k \\ : \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_k \\ : \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_k. \end{aligned}$$

Aus 6) und 6*) ergiebt sich aber für die Verhältnisse der Differentiale

$$9)\quad \begin{aligned} dx_1 : dx_2 : dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} : \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \alpha_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= \alpha_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \alpha_3, \end{aligned}$$

so kommt

$$11)\quad \begin{aligned} \varDelta_1 : \varDelta_2 : \varDelta_3 = \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) \alpha_i \alpha_k \\ : \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) \alpha_i \alpha_k \\ : \Sigma &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right) \alpha_i \alpha_k. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichung

12) $$A_1(\eta_1-x_1)+A_2(\eta_2-x_2)+A_3(\eta_3-x_3)=0$$
frei von den Differentialen dx_1, dx_2, dx_3 ist, die Osculationsebene also mit Hilfe der ersten und zweiten Derivationen der beiden Functionen $f=0$, $\varphi=0$ bestimmt werden kann.

Um nun den ebenen dreidimensionalen Osculationsraum einer Fläche, die in einem ebenen Raume von vier Dimensionen liegt, zu finden, mögen, dem Vorigen entsprechend, die Gleichungen dieser Fläche in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten

13) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$
gegeben sein. Nimmt man vier Punkte, die einander auf der Fläche unendlich nahe liegen, an, so wird man ihre Coordinaten in folgender Weise bezeichnen können:

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\
x_1+dx_1, & x_2+dx_2, & x_3+dx_3, & x_4+dx_4, \\
x_1+\delta x_1, & x_2+\delta x_2, & x_3+\delta x_3, & x_4+\delta x_4, \\
x_1+2dx_1+d^2x_1, & x_2+2dx_2+d^2x_2, & x_3+2dx_3+d^2x_3, & x_4+2dx_4+d^2x_4.
\end{array}$$
Die drei ersten Punkte liegen auf der Tangentialebene im Punkte x_1, x_2, x_3, x_4; der vierte Punkt, für dessen Coordinaten man statt des Schemas $x+2dx+d^2x$ ebenso gut $x+dx+\delta x+d\delta x$ oder $x+2\delta x+\delta^2 x$ hätte zu Grunde legen können, ist ein Punkt der nächstfolgenden Tangentialebene. Der durch diese vier Punkte gelegte ebene Raum von drei Dimensionen ist dann der Krümmungs- oder Osculationsraum der gewundenen Fläche und in ihm — vorausgesetzt, dass er selbst eindeutig wäre — müssten sich denn auch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser und somit das Krümmungsmass der Fläche in dem betrachteten Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmen lassen. Die Gleichung des dreidimensionalen Krümmungsraumes würde demnach in der Form

14) $$\begin{vmatrix} \eta_1-x_1, & \eta_2-x_2, & \eta_3-x_3, & \eta_4-x_4 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ \delta x_1, & \delta x_2, & \delta x_3, & \delta x_4 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix}=0$$
aufzustellen sein, worin man statt der letzten Horizontalreihe auch

15) $$d\delta x_1,\ d\delta x_2,\ d\delta x_3,\ d\delta x_4 \text{ oder } \delta^2 x_1,\ \delta^2 x_2,\ \delta^2 x_3,\ \delta^2 x_4$$
müsste setzen können, ohne eine Aenderung hervorzubringen.

Bezeichnet man weiter die Determinante 14) mit A und die nach der ersten Horizontalreihe genommenen Minoren mit A_1, A_2, A_3, A_4, so giebt die Entwickelung von 14)
$$A_1(\eta_1-x_1)+A_2(\eta_2-x_2)+A_3(\eta_3-x_3)+A_4(\eta_4-x_4)=0,$$
worin
$$A_1=\begin{vmatrix} dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ \delta x_2, & \delta x_3, & \delta x_4 \\ d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix}, \quad A_2=-\begin{vmatrix} dx_3, & dx_4, & dx_1 \\ \delta x_3, & \delta x_4, & \delta x_1 \\ d^2x_3, & d^2x_4, & d^2x_1 \end{vmatrix},$$

$$A_3=\begin{vmatrix} dx_4, & dx_1, & dx_2 \\ \delta x_4, & \delta x_1, & \delta x_2 \\ d^2x_4, & d^2x_1, & d^2x_2 \end{vmatrix}, \quad A_4=-\begin{vmatrix} dx_1, & dx_2, & dx_3 \\ \delta x_1, & \delta x_2, & \delta x_3 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3 \end{vmatrix}.$$

Zur Berechnung dieser Unterdeterminanten hat man die durch Differentiation von 13) sich ergebenden Gleichungen

16) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial f}{\partial x_4}dx_4=0,$$

17) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3+\frac{\partial f}{\partial x_4}\delta x_4=0,$$

18) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}d^2x_3+\frac{\partial f}{\partial x_4}d^2x_4=-\Sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}dx_i\,dx_k,$$
$$i,k=1,2,3,4,$$

16*) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}dx_4=0,$$

17*) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\delta x_3+\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\delta x_4=0,$$

18*) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}d^2x_2+\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}d^2x_3+\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}d^2x_4=-\Sigma\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\partial x_k}dx_i\,dx_k.$$

Um hieraus zunächst A_1 zu bestimmen, eliminire man dx_1 aus 16) und 16*), δx_1 aus 17) und 17*), d^2x_1 aus 18) und 18*), so kommt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)dx_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)dx_3$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)dx_4=0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\delta x_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\delta x_3$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)\delta x_4=0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)d^2x_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)d^2x_3$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)d^2x_4=\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\right)dx_i\,dx_k.$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$A_1=\begin{vmatrix} dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ \delta x_2, & \delta x_3, & \delta x_4 \\ d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{dx_3\,\delta x_4-dx_4\,\delta x_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}}\,\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\right)dx_i\,dx_k.$$

Ferner erhält man leicht aus 16), 17), 16*) und 17*)

$$dx_3\,\delta x_4 - dx_4\,\delta x_3 : dx_4\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_4 : dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1 : dx_2\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) : -\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)$$
$$: -\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right),$$

also, wenn man

$$\frac{(dx_3\,\delta x_4 - dx_4\,\delta x_3)^2 + (dx_4\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_4)^2 + (dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1)^2 + (dx_2\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_2)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right)^2}$$
$$= B^2$$

setzt,

$$A_1 = B\,\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) dx_i\,dx_k$$

und allgemein

$$A_r = B\,\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) dx_i\,dx_k.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung des Krümmungsraumes

$$A_1(\eta_1 - x_1) + A_2(\eta_2 - x_2) + A_3(\eta_3 - x_3) + A_4(\eta_4 - x_4) = 0$$

ein, so verschwindet der Factor B und man erhält

$$19)\quad \Sigma_r(\eta_r - x_r)\,\Sigma_{ik}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) dx_i\,dx_k = 0.$$

Hätte man nun in der Determinante 14) statt der letzten Horizontalreihe

$$d^2x_1,\ d^2x_2,\ d^2x_3,\ d^2x_4$$

die gleichberechtigte

$$d\delta x_1,\ d\delta x_2,\ d\delta x_3,\ d\delta x_4 \text{ oder } \delta^2 x_1,\ \delta^2 x_2,\ \delta^2 x_3,\ \delta^2 x_4,$$

so würde man statt der Gleichung 19) bezüglich eine der beiden folgenden:

$$19^*)\quad \Sigma_r(\eta_r - x_r)\,\Sigma_{ik}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) dx_i\,\delta x_k = 0$$

oder

$$19^{**})\quad \Sigma_r(\eta_r - x_r)\,\Sigma_{ik}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) \delta x_i\,\delta x_k = 0$$

erhalten haben. Hieraus erkennt man, dass der dreidimensionliche Osculationsraum der Fläche

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

in dem Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 nicht allein durch die Coordinaten dieses Punktes und die ersten und zweiten Derivationen der Functionen f und φ bestimmt wird, sondern ausserdem auch noch von der willkürlichen Verschiebung des Punktes x_1, x_2, x_3, x_4, d. h. von den Grössen dx oder δx abhängt. Man kann daher sagen, dass eine gewundene Fläche in jedem ihrer Punkte eine unendliche Menge von Krümmungsräumen besitzt. Daher haben auch die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte in jedem Punkte unendlich viele Maxima und Minima, so dass das Product $\frac{1}{R_1 R_2}$, wie wir oben gesehen haben, unbestimmt bleibt.

Wollte man endlich denjenigen ebenen Raum als Osculationsraum ansehen, welcher zwei aufeinanderfolgende Tangentialebenen der gewundenen Fläche enthält und welcher bei den gewöhnlichen Flächen mit dem empirischen Raum zusammenfällt, so hätte man die beiden Gleichungssysteme

$$20)\quad \begin{aligned} &(\eta_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\eta_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\eta_3 - x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3} + (\eta_4 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,\\ &(\eta_1 - x_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + (\eta_2 - x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + (\eta_3 - x_3)\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + (\eta_4 - x_4)\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0 \end{aligned}$$

und

$$21)\quad \begin{aligned} &(\eta'_1 - x_1 - dx_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + d\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + (\eta'_2 - x_2 - dx_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + d\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\\ &+ (\eta'_3 - x_3 - dx_3)\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} + d\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + (\eta'_4 - x_4 - dx_4)\left(\frac{\partial f}{\partial x_4} + d\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0,\\ &(\eta'_1 - x_1 - dx_1)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + (\eta'_2 - x_2 - dx_2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + d\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\\ &+ (\eta'_3 - x_3 - dx_3)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + d\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) + (\eta'_4 - x_4 - dx_4)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + d\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right) = 0 \end{aligned}$$

aufzustellen. Um den Schnittpunkt der beiden Ebenen 20) und 21) zu finden, setzen wir $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4$ bezüglich gleich $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$. Hierdurch reducirt sich das System 21), wenn wir 20) berücksichtigen und die unendlich kleinen Glieder der zweiten Ordnung vernachlässigen, auf

$$22)\quad \begin{aligned} &(\eta_1 - x_1)\, d\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\eta_2 - x_2)\, d\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\eta_3 - x_3)\, d\frac{\partial f}{\partial x_3} + (\eta_4 - x_4)\, d\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,\\ &(\eta_1 - x_1)\, d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + (\eta_2 - x_2)\, d\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + (\eta_3 - x_3)\, d\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + (\eta_4 - x_4)\, d\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0. \end{aligned}$$

Wenn nicht die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \frac{\partial f}{\partial x_3}, & \frac{\partial f}{\partial x_4}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\\ d\frac{\partial f}{\partial x_1}, & d\frac{\partial f}{\partial x_2}, & d\frac{\partial f}{\partial x_3}, & d\frac{\partial f}{\partial x_4}\\ d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

ist, was im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann, so lässt sich dem System der vier Gleichungen 20) und 22) nur durch die Annahme

$$\eta_1 = x_1, \quad \eta_2 = x_2, \quad \eta_3 = x_3, \quad \eta_4 = x_4$$

genügen, d. h.: **Zwei aufeinanderfolgende Berührungsebenen einer gewundenen Fläche schneiden sich nur in einem Punkte, dem Berührungspunkte, nach welcher Richtung man auch die Verschiebung d annimmt; sie liegen daher in einem Raume von vier Dimensionen und bilden keinen Osculationsraum.** Sollen die beiden Ebenen einen Raum von drei Dimensionen bestimmen, so müssten sie sich in einer Geraden treffen und man hätte, da diese Gerade durch den Punkt x_1, x_2, x_3, x_4 gehen müsste, für sie die Gleichungen

$$\eta_1 - x_1 = \lambda c_1, \quad \eta_2 - x_2 = \lambda c_2, \quad \eta_3 - x_3 = \lambda c_3, \quad \eta_4 - x_4 = \lambda c_4,$$

worin λ die Länge der Geraden vom Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 bis zum Punkte $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ und c_1, c_2, c_3, c_4 die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Gerade mit den vier Axen bildet und welche daher der Gleichung

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 1$$

genügen. Setzt man diese Werthe in 20) und 22) ein, so kommt

$$c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + c_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + c_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0,$$

$$c_1 d\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 d\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 d\frac{\partial f}{\partial x_3} + c_4 d\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

$$c_1 d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + c_2 d\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + c_3 d\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + c_4 d\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0,$$

welche Gleichungen nur dann zusammen bestehen können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \frac{\partial f}{\partial x_3}, & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \\ d\frac{\partial f}{\partial x_1}, & d\frac{\partial f}{\partial x_2}, & d\frac{\partial f}{\partial x_3}, & d\frac{\partial f}{\partial x_4} \\ d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Gleichung muss also erfüllt sein, wenn zwei benachbarte Tangentialebenen einen ebenen Raum von drei Dimensionen oder einen Osculationsraum bestimmen sollen. Dies ist aber dieselbe Gleichung wie oben und sie findet, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht statt. Es folgt hieraus, dass zwei benachbarte Berührungsebenen der gewundenen Fläche im Allgemeinen keinen Osculationsraum von drei Dimensionen bestimmen.

Nach Alledem komme ich zu dem Schlusse, dass es unmöglich ist, die gewöhnliche Krümmungstheorie auf Flä-

chen auszudehnen, die in einem ebenen Raume von vier oder mehr Dimensionen enthalten sind.* Wenn es nun aber unmöglich ist, die Krümmung einer Fläche, welche einen ebenen Raum von vier Dimensionen durchzieht, zu bestimmen, so ist es ebenso unmöglich, nachzuweisen, dass der Ausdruck $\frac{(1212)}{a}$ das Krümmungsmass einer solchen Fläche darstelle. In noch höherem Grade aber — wenn ich mich dieses Ausdruckes bedienen darf — würde es unmöglich sein, zu beweisen, dass $\frac{(1212)}{a}$ das Krümmungsmass einer Fläche bedeute, sobald der Ausdruck

$$a_{11}\,dp_1^2 + 2\,a_{12}\,dp_1\,dp_2 + a_{22}\,dp_2^2$$

aus der Form Σdx_n^2 und $n-2$ simultanen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1\ (x_1, x_2, \ldots x_n) &= c_1, \\ f_2\ (x_1, x_2, \ldots x_n) &= c_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots x_n) &= c_{n-2} \end{aligned}$$

entstanden ist oder die Fläche einen Raum von n Dimensionen durchzieht, und am allerunmöglichsten — *sit venia verbo* — würde es sein, den Beweis zu liefern, dass der Ausdruck $\frac{(1212)}{a}$ die Krümmung einer Fläche bezeichne, von der weiter nichts, als das Quadrat ihres Linearelementes

$$a_{11}\,dp_1^2 + 2\,a_{12}\,dp_1\,dp_2 + a_{22}\,dp_2^2$$

bekannt ist.

---

* Im Widerspruch mit dieser Schlussfolgerung scheinen die ausgezeichneten Untersuchungen des Herrn R. Lipschitz, „Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen", 1. und 2. Mittheilung, Borchardt's Journal Bd. 71, S. 274—295, und des Herrn C. Jordan, *„Généralisation du theorème d'Euler sur la courbure des surfaces"*, *Compt. rend.* Bd. 79, S. 909 bis 912 zu stehen. Die von den genannten Herren gefundenen Resultate sind vom rein analytischen Standpunkte unstreitig Verallgemeinerungen der Krümmungstheorie zu nennen, doch entbehren sie meiner Ansicht nach beide in metageometrischer Beziehung der Evidenz und schliessen somit abweichende Lösungen des Problems nicht aus. Die beiden Verallgemeinerungen selbst fallen nur für $l = 1$ zusammen — s. Lipschitz, *„Généralisation de la théorie du rayon osculateur"*, Borchardt's Journal Bd. 81, S. 225—300 —, während sie doch, wenn beide den Charakter metageometrischer Nothwendigkeit trügen, in dem ganzen Bereich ihrer Giltigkeit identisch sein müssten.

VI.

Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.

Von

V. SCHLEGEL.

Hierzu Taf. I Fig. 1.

Während das Verhältniss der Grassmann'schen Ausdehnungslehre zu den die geometrischen Untersuchungen der Gegenwart beherrschenden Methoden durch meine „Raumlehre" eine ausführliche Darstellung erfahren hat, existiren mehrere, von der grossen Heerstrasse abliegende und durch Fruchtbarkeit ausgezeichnete Methoden, für welche der Nachweis dieses Zusammenhanges noch fehlt. Ich unternehme es im Folgenden, denselben zu liefern.

I. Der Gauss-Siebeck'sche Punktcalcul.

1. Historisches. Unter dem Titel: „Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen" erschien 1858 im Crelle'schen Journal eine Abhandlung von H. Siebeck, welche im Anschluss an den barycentrischen Calcul und an die Gauss'sche Darstellung von imaginären Punkten die vier Species algebraisch an Punkten ausführen lehrte, und dann an die Betrachtung der Functionen einer Variablen die Lehre von den isogonalen Verwandtschaften knüpfte. Während diese letztere Lehre weiter ausgebildet worden ist (in neuerer Zeit besonders durch Holzmüller in seinen „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften", Elberfeld 1873, und in anderen Aufsätzen der Schlömilch'schen Zeitschrift), hat der eigentliche Punktcalcul, der doch als Grundlage dieser Untersuchungen angesehen werden kann, unter der ziemlich allgemeinen Abneigung gegen geometrische Algorithmen nicht minder zu leiden gehabt, wie die Methoden von Möbius und Grassmann, indem ausser einigen Aufsätzen in Grunert's Archiv Nichts weiter über diesen Gegenstand publicirt zu sein scheint.*

* Von der ähnlichen, aber ganz selbstständigen Art und Weise, wie Björling die imaginären Functionen darstellt, wird weiter unten die Rede sein.

2. Principien. — Reelle Punkte und Zahlen. Auf einer Geraden (Hauptaxe) werden zwei feste Punkte O und I angenommen und als Bilder der Zahlen Null und Eins betrachtet. Ein beliebiger Punkt X der Geraden, der so liegt, dass die Strecke $XO = x.IO$ ist, ist dann Bild der reellen Zahl x, welche positiv oder negativ ist, je nachdem X mit I auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von O liegt.

Addition und Subtraction von Punkten. Hat O die vorher angenommene Bedeutung, und sind B und C zwei beliebige Punkte der Ebene, so heisst der vierte (O gegenüberliegende) Eckpunkt A des Parallelogramms $OCAB$ die (arithmetische) Summe der beiden Punkte B und C, so dass

1) $$A = B + C.$$

Ebenso ist durch die Formeln

$$B = A - C, \quad C = A - B$$

ein Punkt als Differenz zweier Punkte bestimmt.

Imaginäre Punkte und Zahlen. Trägt man auf der in O zur Hauptaxe senkrecht stehenden Geraden nach beiden Seiten die Strecke OI ab, so sind die Endpunkte dieser Strecke die Bilder der Zahlen $+i$ und $-i$, und ein beliebiger Punkt Y der senkrechten Geraden Bild der Zahl yi. Nach der Addition der Punkte ist dann jeder Punkt der Ebene Bild einer complexen Zahl $x + iy$.

Multiplication und Division von Punkten. Ist der Punkt O der gemeinsame Eckpunkt zweier direct ähnlicher Dreiecke OCI und OAB (in denen die Punkte C und A, sowie I und B sich gegenseitig entsprechen), so wird C als Bild des Productes der Punkte A und B betrachtet, woraus sich A als Quotient von C und B, B als Quotient von C und A ergiebt.

2) $$BC = A.$$

Es ist leicht, die eben beschriebenen Operationen der Addition und Multiplication durch den Nachweis der Commutativität und Distributivität als arithmetische festzustellen und den Uebergang zur Potenzirung und Radicirung eines Punktes mit einer Zahl zu machen.

3. Zusammenhang mit der Ausdehnungslehre. Nach den Principien der Ausdehnungslehre ist, wenn die obigen Bezeichnungen beibehalten werden,

a) für Addition $(C - O) = (A - B)$, womit gesagt ist, dass die Strecke zwischen C und O gleich und parallel derjenigen zwischen B und A ist. Hierbei sind A, B, C, O einfache Punkte ohne Zahlbedeutung. Als geometrische Summe der Punkte B und C ergiebt sich der Schnittpunkt M der Diagonalen des Parallelogramms, versehen mit dem Factor 2, indem $(C - M) = (M - B)$, $(A - M) = (M - O)$, also $(C + B) = (A + O) = 2M$ ist. — Lässt man jetzt alle Punkte Zahlen bedeuten, insbesondere den Punkt O die Zahl Null, so verwandelt sich die geometrische Addition in eine arithmetische und man erhält

1) $$A = B + C,$$

die Formel 1) des Siebeck'schen Calculs. — Demnach ist die geometrische Summe der Punkte B und C der Punkt $2M$, die arithmetische Summe der Zahlbilder B und C das Zahlbild A.

Ausserdem erhält man aber auch

1a) $$A = 2M.$$

Und in der That, da $(A-O) = 2(M-O)$ ist, so folgt, wenn A, M, O Zahlen bedeuten, auch hieraus $A = 2M$. Es geht also, wenn man auch M eine Zahl bedeuten lässt, die geometrische Summe $2M$ in die arithmetische A über, wodurch nun das Verhältniss beider Operationen klargestellt ist.

b) Für Multiplication folgt aus der oben beschriebenen Figur nach den Gesetzen der Ausdehnungslehre

$$\frac{(C-O)}{(I-O)} = \frac{(A-O)}{(B-O)},$$

weil nicht nur das arithmetische Verhältniss der Strecken auf beiden Seiten der Formel dasselbe ist, sondern auch $\angle COI = \angle AOB$. Folglich ist das arithmetische Product der Strecken $(B-O)$ und $(C-O)$ gleich $(A-O).(I-O)$. (Als geometrisches „äusseres" Product der Punkte B und C wird definirt der zwischen B und C liegende Theil der durch beide Punkte bestimmten Geraden). Lässt man jetzt alle Punkte Zahlen bedeuten, insbesondere den Punkt O die Zahl Null, den Punkt I die Zahl Eins, so verwandelt sich die arithmetische Multiplication der Strecken in eine arithmetische Multiplication von Punkten und man erhält

2) $$A = BC,$$

die Formel 2) des Siebeck'schen Calculs.

4. Bedeutung dieses Zusammenhanges. Es sind im Vorstehenden arithmetische und geometrische Operationen einander gegenübergestellt. Das Charakteristische der ersteren besteht darin, dass das Resultat der Vereinigung zweier Grössen immer eine Grösse von derselben Art ist und dass infolge dessen alle diese Grössen als Bilder von Zahlen betrachtet werden können. So ist das Resultat der Vereinigung zweier Zahlen stets wieder eine Zahl, das Resultat der Vereinigung zweier Punkte im Siebeck'schen Calcul stets wieder ein Punkt. Die Addition von Strecken giebt eine Strecke, die Multiplication zweier Strecken, die in diesem Falle als Zahlen erscheinen, einen ebenfalls durch eine Zahl dargestellten Flächenraum. — Dagegen brauchen die Resultate der geometrischen Operationen in der Ausdehnungslehre nicht von derselben Art zu sein, wie die Bestandtheile des Resultates. So ist zwar die Summe zweier Punktgrössen wieder eine Punktgrösse, dagegen ihre Differenz eine Strecke (arithmetische Grösse), ihr Product ein Linientheil (Ausdehnungsgebilde) u. s. w. — Hiernach erscheinen die arithmetischen Operationen ebenso als specieller Fall der geometrischen, wie die arithmetischen Grössen ein specieller Fall der Ausdehnungsgrössen (geometrischen Grössen) sind.*

Bisher wurden in der elementaren, wie in der analytischen Geometrie nur Strecken, nicht aber Punkte durch Zahlen dargestellt und so den arithmetischen Operationen unterworfen. Dieses Verfahren lieferte die Sätze der Geometrie des Masses verhältnissmässig leicht und ungezwungen, dagegen diejenigen der Geometrie der Lage nur schwer und auf Umwegen. Den umgekehrten Vortheil gewährt die Ausdehnungslehre da, wo sie den rein geometrischen Calcul anwendet. Da derselbe sich den die Lage betreffenden Eigenschaften der Gebilde auf's Engste anschmiegt, so ergeben sich aus ihm alle Lagenbeziehungen mit Leichtigkeit. Die Sätze der Massgeometrie erfordern aber, um bequem abgeleitet werden zu können, die Einführung neuer Begriffe, namentlich des inneren Productes, welches in seinen Eigenschaften dem arithmetischen sehr nahe steht. Man gelangt auf diese Weise zu den Sätzen der rechnenden Geometrie und der Trigonometrie, in welchen der Punkt gegen die Strecke als Element der Rechnung zurücktritt. Letzterer Umstand macht sich aber oft als Mangel fühlbar und bewirkt sogar, dass manche Sätze der Massgeometrie sich am leichtesten und ungezwungensten ergeben, wenn man die Massbeziehungen als speciellen Fall der Lagenbeziehungen auffasst. (Z. B. die Theorie der conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte; vergl. „Raumlehre" II, S. 41 und 228.) Flüssiger und zur Ableitung der Massbeziehungen geeigneter wird der arithmetische Calcul, wenn man nicht nur Strecken, sondern auch Punkte durch arithmetische Operationen verbindet und die Resultate geometrisch darstellt. — Diese Lücke im Operationsgebiet der Ausdehnungslehre** wird nun durch die Principien des Siebeck'schen Punktcalculs ausgefüllt. Wie wir oben sahen, verwandeln sich, wenn man die Fundamentalpunkte O und I einführt, mit einem Schlage die geometrischen Punkt-Formeln und Rechnungen der Ausdehnungslehre in arithmetische. Der Siebeck'sche Punktcalcul entsteht also als specieller Fall aus der Ausdehnungslehre, wenn zwei auf einer Fundamentallinie liegenden Punkten O

* Vergl. hierüber Grassmann, Ausdehnungslehre I, S. 90 flgg., wo die Zahl als Ausdehnungsgebilde nullter Stufe definirt ist.

** Von der arithmetischen Multiplication der Punkte wird zwar auch in der Ausdehnungslehre Gebrauch gemacht, aber erst in der Curventheorie. Auch werden die arithmetischen Punktproducte nicht direct geometrisch verwerthet, sondern dienen mehr als Instrument der Rechnung. Ein wesentlicher Unterschied dieser gegen die Siebeck'sche Betrachtungsweise besteht auch darin, dass hier die Punkte immer geometrische Gebilde bleiben und nicht, wie bei Siebeck, Bilder von Zahlen sind.

und I die Werthe Null und Eins gegeben werden, wodurch auch alle übrigen Punkte der Ebene die Bedeutung von Zahlen erhalten. — Und wie die Geometrie des Masses als specieller Fall derjenigen der Lage betrachtet werden kann, so fliessen aus dem speciellen Siebeck'schen Calcul die Massbeziehungen mit gleicher Leichtigkeit, wie diejenigen der Lage aus der allgemeinen Ausdehnungslehre. — Besonders zu beachten ist noch der Umstand, dass auch die Auffassung des Imaginären in beiden Calculen dieselbe ist. — Wie genau übrigens die Siebeck'schen Punktoperationen in ihrer innersten Natur mit den arithmetischen Rechnungen zwischen Zahlen übereinstimmen, geht unter Anderem auch aus folgender Bemerkung hervor. Wie die Null und die Eins die Elemente der Zahlbildung sind und wie alle Summen an den Summand Null, alle Producte an den Factor Eins sich anfügen lassen (oder, wenn man will, gebunden sind), so sind auch der Nullpunkt und der Einspunkt die festen Punkte, mit deren Hilfe jedes Resultat einer arithmetischen Operation zwischen Punkten geometrisch als Punkt ausgedrückt werden kann, wobei zu beachten ist, dass der Einspunkt für die erste Rechnungsstufe noch entbehrlich ist, wie denn auch die wesentlichen Eigenschaften der Zahl Eins sich erst in der zweiten und dritten Rechnungsstufe offenbaren.

Der hohe Nutzen des Siebeck'schen Punktcalculs ist aus der im Anfange dieses Abschnittes erwähnten Abhandlung zur Genüge zu erkennen. Namentlich zeigt sich, dass mit seiner Hilfe jede Zahlengleichung direct (ohne Vermittelung von Coordinaten) geometrisch gedeutet werden kann. Dass derselbe so unmittelbar zur Theorie der Verwandtschaft und Abbildung, und damit zur Riemann'schen Functionenlehre führt, ist ein ferneres beachtenswerthes Moment.

2. Möbius' barycentrische Coordinaten, Chasles' Schnittverhältnisse, Schendel's Trilinearcoordinaten.

a) Sind e_1, e_2, e_3 drei Fundamentalpunkte der Ebene, so ist nach der Ausdehnungslehre X der Schwerpunkt von e_1, e_2, e_3, wenn

$$X = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3}$$

(nach Raumlehre I, 110). Alle vier Punkte dieser Formel haben den Coefficienten 1 an sich. Haben e_1, e_2, e_3 resp. die Coefficienten α_1, α_2, α_3, deren Summe gleich 1 ist, so ist

$$X = \frac{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3}{3}.$$

Jeder Punkt X der Ebene kann mittelst dreier Zahlen α_1, α_2, α_3 aus den festen Punkten e_1, e_2, e_3 abgeleitet werden. Dann aber ist X auch der Schwerpunkt der mit den Gewichten α_1, α_2, α_3 belasteten Punkte e_1,

e_2, e_3, und es sind α_1, α_2, α_3 die barycentrischen Coordinaten des Punktes X. Also ist die Bestimmung eines Punktes X durch barycentrische Coordinaten identisch mit der Bestimmung durch drei feste Punkte, wie sie in der Ausdehnungslehre angewendet wird.

b) Die Geraden Xe_1, Xe_2, Xe_3 schneiden die Seiten des Fundamentaldreiecks $(e_2 e_3)$; $(e_3 e_1)$, $(e_1 e_2)$ resp. in den Punkten X_1, X_2, X_3. Dann ist

$$\frac{e_1 X_3}{e_2 X_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \frac{e_2 X_3}{e_1 X_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{e_3 X_1}{e_2 X_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

(nach Raumlehre I, 114). Und $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ sind die von Chasles (*Géométrie supérieure* S. 341) aufgestellten Schnittverhältnisscoordinaten.

c) Durch das äussere Product dreier Punkte ist die doppelte Fläche des zwischen ihnen liegenden Dreiecks dargestellt (Raumlehre I, 139). Demnach sind durch

$$(e_1 e_2 e_3), \ (X e_1 e_2), \ (X e_2 e_3), \ (X e_3 e_1)$$

die doppelten Flächen der Dreiecke

$$e_1 e_2 e_3, \ X e_1 e_2, \ X e_2 e_3, \ X e_3 e_1$$

dargestellt. Da aber

$$X = \frac{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3}{3} \text{ und } (e_r e_r) = 0$$

ist (Letzteres nach Raumlehre I, 29), so ist

$$(X e_1 e_2) = \frac{\alpha_3}{3}(e_3 e_1 e_2), \quad (X e_2 e_3) = \frac{\alpha_1}{3}(e_1 e_2 e_3), \quad (X e_3 e_1) = \frac{\alpha_2}{3}(e_2 e_3 e_1).$$

Setzt man nun das Product $(e_1 e_2 e_3)$, welches nach den Gesetzen der äusseren Multiplication mit $(e_2 e_3 e_1)$ und $(e_3 e_1 e_2)$ identisch ist, gleich 1, d. h.: betrachtet man die doppelte Fläche des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ als Flächeneinheit, so ist

$$(X e_1 e_2) = \frac{\alpha_3}{3}, \quad (X e_2 e_3) = \frac{\alpha_1}{3}, \quad (X e_3 e_1) = \frac{\alpha_2}{3}.,$$

d. h.: α_1, α_2, α_3 drücken die sechsfachen Flächen der zwischen X und den Punkten $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ liegenden Dreiecke aus. Demnach sind $\frac{\alpha_1}{6}$, $\frac{\alpha_2}{6}$, $\frac{\alpha_3}{6}$ identisch mit den Schendel'schen Trilinearcoordinaten.* Die Bestimmung eines Punktes durch Schendel's Trilinearcoordinaten stimmt also bis auf einen constanten Factor mit der Bestimmung durch barycentrische Coordinaten oder

---

* Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten. Jena, Costenoble. 1874.

durch die in der Ausdehnungslehre angewendeten festen Punkte überein.

Die drei vorgenannten Methoden stimmen also im Wesentlichen unter sich überein und gehen auch aus den Principien der Ausdehnungslehre hervor. Sie unterscheiden sich aber alle wesentlich in einem Stücke von derselben. In allen drei Methoden, wie überhaupt in der analytischen Geometrie, werden die Coordinaten von den Fundamentalpunkten abgelöst und enthalten die Formeln nur Coordinaten, während in den entsprechenden Formeln der Ausdehnungslehre die Fundamentalpunkte sammt den Coordinaten verwendet und den ihr eigenthümlichen Operationen unterworfen werden. Dieser grundsätzliche Unterschied zwischen jenen drei Methoden und derjenigen der Ausdehnungslehre tritt in noch helleres Licht durch folgende Bemerkungen:

Die Beibehaltung der Punkte in den Formeln gewährt bedeutende rechnerische Vortheile, indem Glieder der Gleichungen, welche sonst nach der Ausrechnung sich heben, hier gar nicht gebildet werden, also unnütze Arbeit vermieden wird. (Die Berechnung der Producte $Xe_1 e_2$ etc. oben kann als Beispiel dienen.)

Die Coordinaten erscheinen in den Formeln der Ausdehnungslehre nur als Coefficienten der Punkte und ihre Zahlenwerthe sind für die Ermittelung von Beziehungen der Lage ganz gleichgiltig, dagegen sehr brauchbar für alle Massbeziehungen (wie schon oben hervorgehoben wurde).

Die unleugbaren Vortheile, welche die in diesem Abschnitte betrachteten drei Coordinatensysteme gegenüber den sonst in der analytischen Geometrie verwendeten gewähren, rühren alle davon her, dass ihre Coordinaten die natürlichen Coefficienten der Punkte sind, deren Beziehungen man ermitteln will. Man beutet aber diesen Vortheil erst dann völlig aus, wenn man nicht nur die Coordinaten den arithmetischen, sondern gleichzeitig die Punkte den geometrischen Operationen unterwirft.

3. Die nichteuklidische Geometrie.

Das Verhältniss der Ausdehnungslehre zu den hinsichtlich der nichteuklidischen Geometrie neuerdings aufgetauchten Streitfragen hat Günther* dargelegt. Ich möchte dazu noch Folgendes bemerken: Wie man dem einfachen euklidischen Raume gewisse fundamentale Eigenschaften beilegen und in Form von Axiomen aussprechen muss (Eigenschaften, durch die er sich von anderen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterscheidet), um die Sätze der Raumgeometrie ableiten zu können, so müssen auch der Ebene zum Unterschiede von anderen Flächen solche Eigenschaften beigelegt werden, wie sie zum Beweisen der Sätze der ebenen Geometrie nothwendig sind. Zu diesen Eigenschaften

* Progr. Ansbach 1876/77, S. 8 und 9.

gehört auch diejenige, aus welcher das Parallelentheorem fliesst und der ich folgende Fassung gebe: Die von einer Geraden um einen ihrer Punkte in einer Ebene gemachte ganze Umdrehung ist stets von gleicher Grösse, welches auch die Gerade und welches ihr Drehungspunkt sei.

Die Gegenstandslosigkeit des Streites über die Berechtigung der nichteuklidischen Geometrie dürfte aus folgender Betrachtung mit besonderer Deutlichkeit hervorgehen. Der Ursprung der Geometrie ist, wie ja schon ihr Name sagt, in reellen, gegebenen Verhältnissen unseres Weltraumes zu suchen. Diese Geometrie ist aber, wie H. Grassmann hervorgehoben hat (Ausdehnungslehre I, S. IX),* keine reine, sondern eine angewandte Wissenschaft. Man bleibt nun lediglich auf diesem beschränkten Standpunkte stehen, wenn man keine anderen Zweige der Wissenschaft zulassen will, als solche, die sich mit unserer Raumanschauung vertragen. Abstrahirt man aber von unserem Weltraum, so findet sich leicht, dass neben der (rein gedanklichen) Vorstellung dieses Raumes noch viele andere denkbar sind, indem der Dreitheilung der Curven und Flächen in solche mit positiver, negativer und verschwindender Krümmung eine ebensolche der Räume an die Seite zu stellen ist. Innerhalb dieser Erweiterung findet auch die nichteuklidische Geometrie, die ja gar nicht den Anspruch auf Geltung im Weltraum zu erheben braucht, ihren wohlberechtigten Platz. Ferner erweitert sich der Begriff des Raumes zu dem der Mannigfaltigkeit n^{ter} Stufe, indem die Zahl der Dimensionen vermehrt wird. Die Mannigfaltigkeiten n^{ter} Stufe mit verschwindender Krümmung bilden den Gegenstand, welcher in Grassmann's Ausdehnungslehre behandelt ist; unser Weltraum ist hier das reale Abbild einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ohne Krümmung, die euklidische Geometrie mithin eine Anwendung der Ausdehnungslehre (und zwar der speciellen Fälle $n = 1, 2, 3$) auf den Weltraum und die in demselben construirbaren Ebenen und Geraden. Die vollständige Abstraction von der Raumanschauung bewirkt, dass die Ausdehnungslehre von vornherein solche Sätze (wie das Parallelenaxiom), die man mit Hilfe dieser Anschauung zu beweisen sich umsonst bemüht, aus den Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten selbst ableitet. Hierdurch wird die Schwierigkeit, jene Sätze für die Geometrie zu beweisen, keineswegs beseitigt; aber sie wird dahin verlegt, wo ihre wahre Natur

* Es heisst dort: „Schon lange war es mir nämlich einleuchtend gewesen, dass die Geometrie keineswegs in dem Sinne, wie die Arithmetik oder die Combinationslehre, als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur Gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstracter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen.“

allein zur Anschauung kommt, nämlich in die Beantwortung der Frage: **Ist unser Weltraum das genaue Gegenbild einer krümmungslosen Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen?** Wird diese Frage bejaht, so gilt der Inbegriff aller mit den Mitteln der Ausdehnungslehre ableitbaren Sätze (also auch das Parallelenaxiom) im Gebiete der ersten drei Dimensionen auch für den Weltraum nebst den darin construirbaren Ebenen und Geraden. Wird die Frage verneint, so ist unsere ganze Geometrie ein Gedankenproduct ohne reelle Abbilder; ja es sind dann im Weltraume Ebenen und Geraden entweder gar nicht, oder nur in eingeschränktem Masse denkbar (ganz abgesehen von ihrer reellen Existenz). — Die Verneinung jener Frage ist aber gar nicht so absurd, wie es bei erster Betrachtung scheint. Denn erstlich fordert bei genauer Betrachtung unsere Anschauung nur die Unbegrenztheit, nicht aber die Unendlichkeit des Raumes, und würde sich mit einem Raume von überall constanter, wenn auch sehr geringer Krümmung zufrieden geben. Sodann aber hat Zöllner (in seinem Buche „Die Natur der Cometen") für eine derartige Beschaffenheit des Weltraumes sogar recht gewichtige Gründe geltend gemacht. Es wäre sonach gar nicht unmöglich, dass einst die nichteuklidische Geometrie sich als die „wahre", d. h. den realen Verhältnissen entsprechende entpuppte, in welchem Falle die euklidische im Gebiete des Weltraumes nur annähernde Giltigkeit (für unsere Messungen freilich, auch für die genauesten, vollkommene) besässe.

4. Ueber Björling's Darstellung des Imaginären.

Die durch Möbius, Gauss und Siebeck gegebene Darstellung des Imaginären war, wie leicht einzusehen, einer Erweiterung bedürftig. Denn wenn sie die Punkte einer Geraden als Bilder der reellen, die der Ebene als solche der imaginären Zahlen ansah, so fragte man billig: Was bedeuten dann die Punkte des Raumes? An Versuchen, diese Lücke auszufüllen, hat es nicht gefehlt. (Vergl. darüber Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 104 u. 105.) Und zwar ist, wie gleich bemerkt werden mag, eine doppelte Erweiterung der ursprünglichen Darstellung denkbar. Man kann nämlich erstens bemerken, dass, wenn das Imaginäre in der Geometrie der Geraden seine reelle Darstellung in der Ebene findet, auch das Imaginäre in der Geometrie der Ebene im Raume wird zur Anschauung gebracht werden können. Für diesen Zweck bedarf es nur einer Darstellung, welche alle Punkte, oder besser Linien, einer Ebene als reell, alle Punkte, resp. Linien des übrigen Raumes als imaginär betrachtet. Eine solche Darstellung hat neuerdings Björling* gegeben. Da sie sich in gewisser Beziehung an die Siebeck'sche am

* Ueber eine vollständige geometrische Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Stockholm 1875, Norstedt & Söner.

VII.

Von der expliciten Darstellung der regulären Determinanten aus Binomialcoefficienten.

Von

Dr. S. Günther,

Gymnasialprofessor in Ansbach.

Unter einer regulären Determinante aus Binomialcoefficienten wird im Folgenden ganz allgemein eine Determinante der Form

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \binom{m_1}{n_1}, & \binom{m_1}{n_2}, & \binom{m_1}{n_3}, & \dots & \binom{m_1}{n_p} \\ \binom{m_2}{n_1}, & \binom{m_2}{n_2}, & \binom{m_2}{n_3}, & \dots & \binom{m_2}{n_p} \\ \binom{m_3}{n_1}, & \binom{m_3}{n_2}, & \binom{m_3}{n_3}, & \dots & \binom{m_3}{n_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m_p}{n_1}, & \binom{m_p}{n_2}, & \binom{m_p}{n_3}, & \dots & \binom{m_p}{n_p} \end{vmatrix} \quad (n_{r+s} > n_r)$$

verstanden, wobei m_s und n_s jede willkürliche ganze Zahl $\geqq 0$ bedeuten sollen. Soviele specielle Fälle dieser ganz universellen Form bereits einer anderweiten Darstellung in geschlossenen Formeln zugänglich gemacht worden sind, so ist sie selbst doch anscheinend noch nicht in Angriff genommen worden. In der That lässt sich gleich von Anfang an erkennen, dass die Auffindung expliciter Ausdrücke mit Schwierigkeiten oder doch zum Mindesten mit grossen Complicationen verknüpft sein werde. So ist es auch wirklich der Fall, und wir substituiren deshalb der vorigen Fassung unserer Aufgabe die folgende präcisere:

Die Determinante Δ soll durch eine Reihe vorgeschriebener Operationen, welche sich ausnahmslos durch das übliche Summen- und Productzeichen darstellen lassen müssen, auf die als bekannt vorausgesetzte Determinante

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_1^{b_1}, & a_1^{b_2}, & a_1^{b_3}, & \dots & a_1^{b_p} \\ a_2^{b_1}, & a_2^{b_2}, & a_2^{b_3}, & \dots & a_2^{b_p} \\ a_3^{b_1}, & a_3^{b_2}, & a_3^{b_3}, & \dots & a_3^{b_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^{b_1}, & a_p^{b_2}, & a_p^{b_3}, & \dots & a_p^{b_p} \end{vmatrix}$$

zurückgeführt werden.

Diese letztere Determinante möge mit Rücksicht auf die ausgedehnten Untersuchungen Naegelsbach's, von denen weiterhin die Rede sein wird, als eine analytische Constante betrachtet werden.

Man erkennt sofort, dass durch Herausziehung der sämmtlichen Elementen der Determinantenreihen gemeinsamen Factoren, wenn noch der Bruch

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p} \prod\limits_{i=0}^{i=n_k+1} (m_k - i)}{\prod\limits_{i=1}^{i=p} n_i} \equiv \varrho$$

gesetzt wird, $\varDelta$ in nachstehende Gestalt übergeht:

$$\begin{vmatrix} 1, & (m_1-n_1)(m_1-n_1-1)\dots(m_1-n_1-n_2+1), & (m_1-n_1)(m_1-n_1-1)\dots(m_1-n_1-n_3+1), & \dots & (m_1-n_1)(m_1-n_1-1)\dots(m_1-n_1-n_p+1) \\ 1, & (m_2-n_1)(m_2-n_1-1)\dots(m_2-n_1-n_2+1), & (m_2-n_1)(m_2-n_1-1)\dots(m_2-n_1-n_3+1), & \dots & (m_2-n_1)(m_2-n_1-1)\dots(m_2-n_1-n_p+1) \\ 1, & (m_3-n_1)(m_3-n_1-1)\dots(m_3-n_1-n_2+1), & (m_3-n_1)(m_3-n_1-1)\dots(m_3-n_1-n_3+1), & \dots & (m_3-n_1)(m_3-n_1-1)\dots(m_3-n_1-n_p+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & (m_p-n_1)(m_p-n_1-1)\dots(m_p-n_1-n_2+1), & (m_p-n_1)(m_p-n_1-1)\dots(m_p-n_1-n_3+1), & \dots & (m_p-n_1)(m_p-n_1-1)\dots(m_p-n_1-n_p+1) \end{vmatrix};$$

bezeichnen wir diese letzterhaltene Determinante mit $\varDelta'$ und führen wir die in den einzelnen Elementen durch Parenthesen angedeuteten Multiplicationen sämmtlich aus, so ergiebt sich uns, dass die i^{te} Colonne von $\varDelta'$ blos noch Elemente enthält, welche sich als ganze rationale Functionen vom Grade $(n_i - n_1)$ für die Grössen m darstellen. Wir deuten für's Erste durch das Symbol

$$S^{(k)}(n_1, n_1+1, \dots n_i-1), \quad S^{(0)} = 1$$

die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung an, welche sich aus den Termen der continuirlichen Zahlenreihe $n_1 \dots n_i - 1$ zur k^{ten} Classe bilden lassen. Indess lässt sich dasselbe auch unschwer auf ein gewöhnliches Summensymbol reduciren; es ist, wie man durch unmittelbare Ausrechnung findet, gleich der k-fachen Summe

$$\sum_{a_1=n_1}^{a_1=n_i-k-2} \; \sum_{a_2=n_1+1}^{a_2=n_i-k-1} \; \sum_{a_3=n_1+2}^{a_3=n_i-k} \cdots \sum_{a_k=n_1+k-1}^{a_k=n_i-3} a_1 a_2 a_3 \dots a_k.$$

Und auch hierfür kann man durch Zusammenziehung der k-fachen Summe in eine einfache und Verwendung eines einzigen durchlaufenden Buchstaben Folgendes schreiben:

$$\overset{\alpha_h = n_i - k - h + 3}{\underset{\alpha_h = n_1 + h - 1}{{}^{(k)}\sum}} \prod_{i=1}^{i=k} a_i, \quad (h = 1, 2, 3, \ldots k).$$

Wenden wir diese abgekürzte Bezeichnungsweise nunmehr auf unsere Determinante Δ' an, welche zunächst in folgender Form erscheint:

$$\begin{vmatrix} 1, & \ldots S^{(0)} m_1^{n_i - n_1} + (-1)^1 S^{(1)}.m_1^{n_i - n_1 - 1} + (-1)^2 S^{(2)}.m_1^{n_i - n_1 - 2} + \ldots + (-1)^{n_i - n_1 - 1} S^{(n_i - n_1 - 1)}, \ldots \\ 1, & \ldots S^{(0)} m_2^{n_i - n_1} + (-1)^1 S^{(1)}.m_2^{n_i - n_1 - 1} + (-1)^2 S^{(2)}.m_2^{n_i - n_1 - 2} + \ldots + (-1)^{n_i - n_1 - 1} S^{(n_i - n_1 - 1)}, \ldots \\ 1, & \ldots S^{(0)} m_3^{n_i - n_1} + (-1)^1 S^{(1)}.m_3^{n_i - n_1 - 1} + (-1)^2 S^{(2)}.m_3^{n_i - n_1 - 2} + \ldots + (-1)^{n_i - n_1 - 1} S^{(n_i - n_1 - 1)}, \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, & \ldots S^{(0)} m_p^{n_i - n_1} + (-1)^1 S^{(1)}.m_p^{n_i - n_1 - 1} + (-1)^2 S^{(2)}.m_p^{n_i - n_1 - 2} + \ldots + (-1)^{n_i - n_1 - 1} S^{(n_i - n_1 - 1)}, \ldots \end{vmatrix}.$$

Gebilde dieser Art lassen sich stets nach den bekannten Zerlegungssätzen des Determinantencalculs in ein Aggregat von Determinanten verwandeln, deren Elemente ausschliesslich Monome sind. Albeggiani hat in einer eigenen Monographie[1]) diese Zerfällung einlässlich studirt und gezeigt, dass für die Determinante vom Allgemeinglied

$$a^1{}_{i,k} + a^2{}_{i,k} + \ldots + a^r{}_{i,k}$$

die Producte sämmtlicher Combinationen von Minoren der einzelnen Determinanten

$$\Sigma \pm a^1{}_{1,1} \ldots a^1{}_{n,n}, \quad \Sigma \pm a^2{}_{1,1} \ldots a^2{}_{n,n}, \quad \ldots \quad \Sigma \pm a^r{}_{1,1} \ldots a^r{}_{n,n}$$

in Summe jener Determinante

$$\Sigma \pm a^1{}_{1,1} + \ldots + a^r{}_{n,n} \ldots a^1{}_{n,n} + \ldots + a^r{}_{n,n}$$

gleich sind, wenn dieselben alle Reihen des Systems, keine aber gemeinsam enthalten.

Berücksichtigen wir diesen Satz und tragen noch dem Umstande Rechnung, dass, weil die Gliederanzahl der Polynome für jede Colonne von δ eine andere ist, viele der in die allgemeine Zerlegungsformel eingehenden Determinanten in unserem Falle verschwinden müssen, so erkennen wir, dass ein beliebig herausgegriffenes Glied nachstehende Gestalt annehmen wird:

$$\begin{vmatrix} 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_1^{\alpha_1}, & \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_p^{\alpha_1}, & \ldots \end{vmatrix}.$$

Demgemäss ist auch das Allgemeinglied der Δ' darstellenden Summe dieses:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_1^{\alpha_1}, & (-1)^{n_3 - n_1 - \alpha_2} S^{(n_3 - n_1 - \alpha_2)}.m_1^{\alpha_2}, & \ldots & (-1)^{n_i - n_1 - \alpha_{i-1}} S^{(n_i - n_1 - \alpha_{i-1})}.m_1^{\alpha_{i-1}} \\ 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_2^{\alpha_1}, & (-1)^{n_3 - n_1 - \alpha_2} S^{(n_3 - n_1 - \alpha_2)}.m_2^{\alpha_2}, & \ldots & (-1)^{n_i - n_1 - \alpha_{i-1}} S^{(n_i - n_1 - \alpha_{i-1})}.m_2^{\alpha_{i-1}} \\ 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_3^{\alpha_1}, & (-1)^{n_3 - n_1 - \alpha_2} S^{(n_3 - n_1 - \alpha_2)}.m_3^{\alpha_2}, & \ldots & (-1)^{n_i - n_1 - \alpha_{i-1}} S^{(n_i - n_1 - \alpha_{i-1})}.m_3^{\alpha_{i-1}} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, & (-1)^{n_2 - n_1 - \alpha_1} S^{(n_2 - n_1 - \alpha_1)}.m_p^{\alpha_1}, & (-1)^{n_3 - n_1 - \alpha_2} S^{(n_3 - n_1 - \alpha_2)}.m_p^{\alpha_2}, & \ldots & (-1)^{n_i - n_1 - \alpha_{i-1}} S^{(n_i - n_1 - \alpha_{i-1})}.m_p^{\alpha_{i-1}} \end{vmatrix}.$$

In der s^{ten} Colonne ($s > 1 \overline{\gtrless} p$) lässt sich ausscheiden der Factor

$$(-1)^{n_s - n_1 - \alpha_{s-1}} S^{(n_s - n_1 - \alpha_{s-1})};$$

um somit das Vorzeichen zu bestimmen, haben wir von der Summe der n mit verschiedenem Index die Summe der n_1 und der α in Abzug zu bringen, d. h. es ist

$$\Delta'' = (-1)^{\sum\limits_{i=2}^{i=p} n_i - n_1(p-1) - \sum\limits_{i=1}^{i=p-1} \alpha_i} \prod_{i=2}^{i=p} S^{(n_i - n_1 - \alpha_{i-1})} \begin{vmatrix} 1, & m_1^{\alpha_1}, & m_1^{\alpha_2}, & \ldots & m_1^{\alpha_{p-1}} \\ 1, & m_2^{\alpha_1}, & m_2^{\alpha_2}, & \ldots & m_2^{\alpha_{p-1}} \\ 1, & m_3^{\alpha_1}, & m_3^{\alpha_2}, & \ldots & m_3^{\alpha_{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & m_p^{\alpha_1}, & m_p^{\alpha_2}, & \ldots & m_p^{\alpha_{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Der Exponent von S kann der Grundbedingung der Aufgabe gemäss zwischen 0 und $(n_i - n_1)$ schwanken; es ist also weiter

$$\Delta' = \sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1 = n_2 - n_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_2 = n_3 - n_1} \sum_{\alpha_3=0}^{\alpha_3 = n_4 - n_1} \cdots \sum_{\alpha_{p-1}=0}^{\alpha_{p-1} = n_p - n_1} \Delta''.$$

Diese $(p-1)$-fache Summe lässt mit besonderer Leichtigkeit die Zusammenziehung in eine einfache zu, und da andererseits Δ mit Δ' durch die Gleichung $\Delta = \varrho \Delta'$ verbunden ist, so resultirt durch Rücksubstitution die Schlussformel

$$\Delta = \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=p} \prod\limits_{i=0}^{i=n_k+1} (m_k - i)}{\prod\limits_{i=1}^{i=p} n_i}$$

$$\times (p-1) \sum_{\alpha_i=0}^{\alpha_i = n_{i+1} - n_1} (-1)^{\sum\limits_{i=2}^{i=p} n_i - (p-1) n_1 - \sum\limits_{i=1}^{i=p-1} \alpha_i} (n_i - n_1 - \alpha_{i-1}) \sum_{\alpha_h = n_1 + h - 1}^{\alpha_h = n_1 - \alpha_{i-1} - h + 3} \prod_{i=1}^{i = n_i - n_1 - \alpha_{i-1}} a_i$$

$$\times \Sigma \pm (m_1^0, m_2^{\alpha_1}, m_3^{\alpha_2}, \ldots m_p^{\alpha_{p-1}}).$$

Damit ist denn das eingangs gestellte Problem vollständig erledigt; die Determinante ist durch eine Verbindung der beiden Operationszeichen der combinatorischen Analysis als eine Function der ungleich einfacheren und bereits genauer bekannten Determinante δ dargestellt.

Selbstredend werden in der obigen $(p-1)$-fachen Summe, wie schon bemerkt, sehr viele Glieder sich annulliren, sobald nämlich in einer der Determinanten Δ'' einmal $\alpha_i = \alpha_k$ wird. Dieser Umstand tritt besonders günstig dann hervor, wenn die Terme $n_1, n_2, n_3, \ldots n_p$ irgend consecutive Glieder der natürlichen Zahlenreihe sind, indem alsdann nur eine einzige Determinante Δ'' übrig bleibt. So leitet sich aus unserer Generalformel unmittelbar ein eleganter, von V. v. Zeipel[2]) gefundener Satz ab. Für $n_1 = 0$, $n_i = i - 1$ findet sich

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \binom{m_1}{0}, & \binom{m_1}{1}, & \binom{m_1}{2}, & \dots \binom{m_1}{p-1} \\ \binom{m_2}{0}, & \binom{m_2}{1}, & \binom{m_2}{2}, & \dots \binom{m_2}{p-1} \\ \binom{m_3}{0}, & \binom{m_3}{1}, & \binom{m_3}{2}, & \dots \binom{m_3}{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m_{p-1}}{0}, & \binom{m_{p-1}}{1}, & \binom{m_{p-1}}{2}, & \dots \binom{m_{p-1}}{p-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{0!\,1!\,2!\,3!\dots(p-1)!} \begin{vmatrix} m_1^0, & m_1^1, & m_1^2, & \dots m_1^{p-1} \\ m_2^0, & m_2^1, & m_2^2, & \dots m_2^{p-1} \\ m_3^0, & m_3^1, & m_3^2, & \dots m_3^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m^0_{p-1}, & m^1_{p-1}, & m^2_{p-1}, & \dots m^{p-1}_{p-1} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man den bekannten Ausdruck für das Differenzenproduct in Anwendung bringt und im Nenner entsprechend zusammenfasst,

$$\Delta = \frac{\prod\limits_{i=2}^{i=p-1} \prod\limits_{k=1}^{k=p-2} (m_i - m_k)}{\prod\limits_{i=2}^{i=p-1} i^{p-1-i}},$$

wie an jenem Orte angegeben.

In einer besonders durch ihre schönen geometrischen Resultate ausgezeichneten Abhandlung[3]) hat auch Garbieri mehrere Specialfälle regulärer Determinanten behandelt; doch sind dieselben — was ihm entgangen zu sein scheint — bereits in v. Zeipel's Studie theilweise enthalten, so insbesondere die Darstellung von

$$\Sigma \pm \binom{p}{0}\binom{p+s}{1}\binom{p+2s}{2}\dots\binom{p+(m-1)s}{m-1}.$$

Mit der Determinante

$$\delta = \Sigma \pm (m_1^{a_1}, m_2^{a_2}, \dots m_p^{a_p})$$

hat sich besonders Naegelsbach beschäftigt. Er behandelt dieselbe[4]) vermittelst eines von ihm mit Geschick und Erfolg verwendeten combinatorischen Ausdrucks, welcher durch die Functionalgleichung

$$\left(m_1 \overset{r-p+1}{\dots} m_p\right) = \left(m_1 \overset{r-p+1}{\dots} m_{p-1}\right) + m_p \left(m_1 \overset{r-p}{\dots} m_p\right)$$

definirt, im Uebrigen aber auch sehr leicht in entwickelter Form angeschrieben werden kann.[5]) Naegelsbach führt nun[6]) den Nachweis, dass für δ nachstehende Identität existirt:

$$\delta = \frac{\pm \Delta_0}{\prod\limits_{r=i+1}^{r=p}\prod\limits_{s=1}^{s=i}(m_r - m_s)} \cdot \sum^{\mathfrak{a},\, \mathfrak{b}-1,\, \dots\, \mathfrak{e}-i+1} \pm (m_1 \dots m_i) \sum^{\mathfrak{f},\, \mathfrak{g}-1,\, \dots\, \mathfrak{l}-p+i+1} \pm (m_{i+1} \dots m_p);$$

der Factor Δ_0 repräsentirt die allbekannte Determinante

$$\begin{vmatrix} m_1^0, & m_1^1, & m_1^2, & \dots & m_1^{p-1} \\ m_2^0, & m_2^1, & m_2^2, & \dots & m_2^{p-1} \\ m_3^0, & m_3^1, & m_3^2, & \dots & m_3^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_p^0, & m_p^1, & m_p^2, & \dots & m_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{r=2}^{r=p}\prod_{s=1}^{s=p-1}(m_r - m_s).$$

Angesichts der zuletzt festgestellten Thatsachen dürfen wir sonach mit Recht behaupten, es sei das Problem, eine reguläre Determinante aus Binomialcoefficienten $\binom{i}{k}$ lediglich mittelst der Operationszeichen der Summe und des Productes als eine Function der Grössen i und k auszudrücken, endgiltig gelöst.

In der Praxis freilich werden meistentheils die auf directe, jedem einzelnen Falle besonders angepasste Weise gefundenen independenten Formeln den Vorzug verdienen, wie sie in überreicher Fülle in der vorgenannten Abhandlung v. Zeipel's angetroffen werden.

Anhangsweise sei noch bemerkt, dass auf unsere Ergebnisse in mehrfacher Art eine explicite Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen begründet werden kann. Am Einfachsten gestaltet sich der immerhin ziemlich verwickelte Untersuchungsgang, wenn wir von der unlängst erst von Hammond[7]) gefundenen Formel ausgehen. Es ist, wenn wir die gebräuchliche Bezeichnungsweise beibehalten,

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & \binom{2}{1}, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ \binom{3}{0}, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{1}, & \binom{4}{2}, & \binom{4}{3}, & \dots & 0, & 0 \\ \binom{5}{0}, & \binom{5}{1}, & \binom{5}{2}, & \binom{5}{3}, & \dots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{2n}{0}, & \binom{2n}{1}, & \binom{2n}{2}, & \binom{2n}{3}, & \dots & \binom{2n}{2n-2}, & \binom{2n}{2n-1} \\ \binom{2n+1}{0}, & \binom{2n+1}{1}, & \binom{2n+1}{2}, & \binom{2n+1}{3}, & \dots & \binom{2n+1}{2n-2}, & \binom{2n+1}{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \cdot D.$$

So wenig wie irgend eine der anderen Determinanten, welche von den verschiedensten Forschern für den gleichen Zweck in Vorschlag gebracht wurden, ist D regulär, da mit Ausnahme der beiden untersten Horizontalreihen auf das Element $\binom{p}{p-1}$ nicht, wie die Regel will, $\binom{p}{p}$, sondern gleich $\binom{p}{p+1}$ folgt. Um jedoch D in ein Aggregat von regulären Determinanten überzuführen, brauchen wir blos

$$D = \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & \binom{2}{1}, & 1-1, & 0, & 0, & \dots \\ \binom{3}{0}, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & 1-1, & 0, & \dots \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{1}, & \binom{4}{2}, & \binom{4}{3}, & 1-1, & \dots \\ \binom{5}{0}, & \binom{5}{1}, & \binom{5}{2}, & \binom{5}{3}, & \binom{5}{4}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

zu setzen und weiterhin nach den Zerlegungsformeln zu verfahren, wie sie u. A. von Albeggiani[8]) eigens für binomische Determinanten angegeben worden sind. Man wird im Allgemeinen als Endergebniss dieser Zerfällung $2^{2(n-1)}$ reguläre Determinanten erhalten. Was nun den Allgemeincharakter dieser letzteren anlangt, so leuchtet ein, dass, wenn $\binom{i}{k}$ die allgemeine Form des Binomialcoefficienten vorstellt, die Terme der ersten Colonne immer gleich $\binom{i}{0}$, die der zweiten durch $\binom{i}{1}$ ausgedrückt sein werden, während andererseits in den beiden untersten Zeilen resp. nur die Elemente $\binom{2n}{k}$ und $\binom{2n+1}{k}$ vorkommen können. Da zudem das positive Vorzeichen ausschliesslich den geraden, das negative ausschliesslich den ungeraden Unterdeterminanten von

$$D' = \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & \binom{2}{1}, & \binom{2}{2}, & \binom{2}{3}, & \binom{2}{4}, & \dots \\ \binom{3}{0}, & \binom{3}{1}, & \binom{3}{2}, & \binom{3}{3}, & \binom{3}{4}, & \dots \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{1}, & \binom{4}{2}, & \binom{4}{3}, & \binom{4}{4}, & \dots \\ \binom{5}{0}, & \binom{5}{1}, & \binom{5}{2}, & \binom{5}{3}, & \binom{5}{4}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

zugehört, so ist $D^{(p)}$ selbst unmittelbar durch folgende Determinante gegeben, wenn wir unter $D^{(p)}$ eine $(2n-p)^{te}$ Partialdeterminante von D' verstehen:

$$\begin{vmatrix}
\binom{v_i}{0}, & \binom{v_i}{1}, & \binom{v_i}{w_1}, & \binom{v_i}{w_2}, & \binom{v_i}{w_3}, & \dots & \binom{v_i}{w_{p-2}} \\
\binom{w_2}{0}, & \binom{w_2}{1}, & \binom{w_2}{w_1}, & \binom{w_2}{w_2}, & \binom{w_2}{w_3}, & \dots & \binom{w_2}{w_{p-2}} \\
\binom{w_3}{0}, & \binom{w_3}{1}, & \binom{w_3}{w_1}, & \binom{w_3}{w_2}, & \binom{w_3}{w_3}, & \dots & \binom{w_3}{w_{p-2}} \\
\binom{w_4}{0}, & \binom{w_4}{1}, & \binom{w_4}{w_1}, & \binom{w_4}{w_2}, & \binom{w_4}{w_3}, & \dots & \binom{w_4}{w_{p-2}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\binom{w_{p-2}}{0}, & \binom{w_{p-2}}{1}, & \binom{w_{p-2}}{w_1}, & \binom{w_{p-2}}{w_2}, & \binom{w_{p-2}}{w_3}, & \dots & \binom{w_{p-2}}{w_{p-2}} \\
\binom{2n}{0}, & \binom{2n}{1}, & \binom{2n}{w_1}, & \binom{2n}{w_2}, & \binom{2n}{w_3}, & \dots & \binom{2n}{w_{p-2}} \\
\binom{2n+1}{0}, & \binom{2n+1}{1}, & \binom{2n+1}{w_1}, & \binom{2n+1}{w_2}, & \binom{2n+1}{w_3}, & \dots & \binom{2n+1}{w_{p-2}}
\end{vmatrix}.$$

Der Term v_i ist eine Zahl der natürlichen Reihe $\geqq 2 \gtreqless 2n-p+2$; die Grössen w lassen sich ganz ähnlich in Grenzen einschliessen, und es hat somit keine Schwierigkeit mehr, die massgebende Determinante unter dem Bilde eines $(p-1+1=p)$-fachen Summenausdrucks hinzuschreiben.

Aus dem Vorstehenden kann die vom Verfasser bereits früher[9]) hervorgehobene Wahrheit abstrahirt werden, dass die combinatorische Analysis dann erst die in ihr ruhende Kraft für die Auffindung independenter Ausdrücke zur vollen Entfaltung zu bringen vermag, wenn sie sich der Determinantendarstellung als eines Uebergangs- und Zwischenmittels bedient.

---

1) *Albeggiani, Sviluppo di un determinante ad elementi polinomi, Palermo 1874.*

2) *v. Zeipel, Om Determinanter, hvars elementer äro Binomialkoefficienter, Lunds Universitets Ars-Skrift, 1865*, S. 23.

3) *Garbieri, Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali, Roma 1878* (Separatabzug aus dem 16. Bande von Battaglini's „Giornale").

4) Naegelsbach, Ueber eine Classe symmetrischer Functionen. Zweibrücken 1871.

5) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875, S. 86.

6) Naegelsbach, S. 19.

7) *Hammond, On the relation between Bernoulli's numbers and the binomial coefficients, Proceedings of the Math. Society VII,* S. 7 flgg.

8) *Albeggiani, Sviluppo di un determinante ad elementi binomi, Giornale di Matem. X,* S. 279 flgg.

9) Günther, Das independente Bildungsgesetz der Kettenbrüche, Wiener Denkschriften XXXVI, S. 187 flgg.

VIII.

Zur Theorie der drei ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten.

Von

J. Hagen, *S. J.*

In einem Aufsatze dieser Zeitschrift (XXI, 1), betitelt: „Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen“, hat Herr Dr. Arnold Giesen eine Reihe interessanter Probleme auf höchst einfache Weise gelöst, indem er das Potential eines wenig excentrischen Ellipsoids durch eine Näherungsformel darstellte, in welcher die dritten und höheren Potenzen der linearen Excentricitäten vernachlässigt sind. Durch eine ähnliche Näherungsrechnung müssen sich nun auch die bekannten drei ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten finden lassen, wenigstens so lange ihre Winkelgeschwindigkeit klein ist, dieselben also ihren Grenzfiguren, der Kugel, der unendlichen Kreisscheibe und dem unendlichen Kreiscylinder, nahe kommen. Wenn auch die Ausführung dieser Rechnung keine neuen Resultate liefert, so möchte sie doch nicht ohne alles Interesse sein, zumal dieses Problem, wie Herr Schell in seiner „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ sich ausdrückt, einige Berühmtheit erlangt hat.

Wie Herr Giesen die lineare Excentricität des schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids als kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, so sollen beim stark abgeplatteten die Rotationsaxe und beim dreiaxigen der reciproke Werth der längsten Axe als kleine Grössen erster Ordnung gelten. Ebenso sollen auch hier alle Glieder von der dritten und höheren Ordnung vernachlässigt werden. Die Gleichung des Ellipsoids sei im Folgenden

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

unter $2c$ immer die Axe verstanden, um welche dasselbe rotirt. Sein Potential in einem innern Punkte werde mit V_i, das in einem äussern mit V_a bezeichnet, seine Masse M sei eine Grösse von der 0^ten Ordnung.

I. Näherungsformeln für das Potential.

1. **Das schwach excentrische Rotationsellipsoid.** Herr Giesen geht in dem genannten Aufsatze aus von der bekannten Formel

$$V=\tfrac{3}{4}M\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\left[1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2}{b^2+t}-\frac{z^2}{c^2+t}\right]dt,$$

setzt $a^2=c^2+e^2$, $b^2=c^2+\varepsilon^2$, wo also e und ε klein von der ersten Ordnung sind, und gelangt so zu den beiden Formeln

$$V_i=\tfrac{3}{2}M\left\{\frac{1}{c}-\frac{e^2+\varepsilon^2}{6c^3}-\frac{r^2}{c^3}\left[\tfrac{1}{3}-\frac{e^2+\varepsilon^2}{10c^2}\right]+\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{5c^5}\right\},$$

$$V_a=M\left\{\frac{1}{r}-\tfrac{1}{10}\frac{e^2+\varepsilon^2}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{e^2x^2+\varepsilon^2y^2}{r^5}\right\},$$

wo $r^2=x^2+y^2+z^2$ gesetzt ist. Speciell für ein Rotationsellipsoid folgt hieraus

$$1)\quad V_i=\tfrac{3}{2}M\left\{\frac{1}{c}-\tfrac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}-\frac{1}{c^3}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)(x^2+y^2)-\frac{1}{c^3}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\frac{e^2}{c^2}\right)z^2\right\},$$

$$2)\quad V_a=M\left\{\frac{1}{r}-\tfrac{1}{5}\frac{e^2}{r^3}+\tfrac{3}{10}\frac{e^2(x^2+y^2)}{r^5}\right\}.$$

2. **Für das stark abgeplattete Rotationsellipsoid** haben wir

$$V_i=\tfrac{3}{4}M\int\limits_0^\infty\frac{1}{(a^2+t)\sqrt{c^2+t}}\left\{1-\frac{x^2+y^2}{a^2+t}-\frac{z^2}{c^2+t}\right\}dt$$

$$=\tfrac{3}{4}M\{A-B(x^2+y^2)-Dz^2\}.$$

Weiter ist, wenn $\sqrt{c^2+t}=v=u\sqrt{a^2-c^2}$ gesetzt wird,

$$A=2\int\limits_c^\infty\frac{dv}{a^2-c^2+v^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\,arctg\,\frac{v}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)_c^\infty,$$

$$B=2\int\limits_c^\infty\frac{dv}{(a^2-e^2+v^2)^2}=\frac{2}{(a^2-c^2)^{3/2}}$$

$$\times\int\limits_{\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}}^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{(a^2-c^2)^{3/2}}\left(\frac{u}{1+u^2}+arctg\,u\right)_{\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}}^\infty,$$

$$D=2\int\limits_c^\infty\frac{dv}{(a^2-c^2+v^2)\,v^2}=-\frac{2}{(a^2-c^2)\,v}-\frac{2}{(a^2-c^2)}$$

$$\times\int\limits_c^\infty\frac{dv}{a^2-c^2+v^2}=-\frac{2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\,arctg\,\frac{v}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)_c^\infty,$$

wodurch man erhält

$$A=\frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\right),$$

$$B=\frac{1}{(a^2-c^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}-\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}\right),$$

$$D=-\frac{2}{(a^2-c^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}-\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right).$$

Es sei nun c klein von der ersten Ordnung; es ist dann z ebenfalls von der ersten Ordnung, sowie auch $\frac{1}{a^2}$, wie man aus $M=\frac{4}{3}a^2c\pi\varrho$ erkennt, worin ϱ die Dichtigkeit bezeichnet. Es sind also zu entwickeln
A bis auf Glieder der 2. Ordn. incl.,
B „ „ „ „ 3. „ „ da x^2+y^2 von der $(-1)^{\text{ten}}$ Ordn. ist,
D „ „ „ „ 0. „ „ „ z^2 „ „ 2. „ „

Mit Rücksicht hierauf hat man zu setzen

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a},\quad arctg\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}=arctg\,\frac{c}{a}=\frac{c}{a},$$

$$\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{(a^2-c^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^3},$$

also

$$A=\frac{2}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{a}\right),\quad B=\frac{1}{a^3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2c}{a}\right),\quad D=\frac{2}{a^2c}.$$

Demnach wird

$$V_i=\frac{3}{4}M\left\{\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2c}{a^2}\right)-\frac{x^2+y^2}{2a^2}\left(\frac{\pi}{a}-\frac{4c}{a^2}\right)-\frac{2z^2}{a^2c}\right\}. \tag{3}$$

Obwohl diese Formel für unsern Zweck hinreichte, so wollen wir doch der Vollständigkeit wegen auch diejenige für V_a entwickeln.

Man lege durch den äusseren Punkt (x, y, z) ein dem gegebenen confocales Ellipsoid mit den Halbaxen

$$a'=\sqrt{a^2+\xi},\quad c'=\sqrt{c^2+\xi},$$

wo ξ zu berechnen ist aus der Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}-1=0.$$

Das Potential des confocalen Ellipsoids auf den Punkt (x, y, z) ist dann

$$V_c = a'^2 c' \varrho \pi \{A' - B'(x^2+y^2) - D'z^2\}$$

worin die A', B', D' aus A, B, D hervorgehen, wenn man in letzteren a und c durch a' und c' ersetzt.

Nach dem Maclaurin'schen Satze hat man für das Potential des gegebenen Ellipsoids auf denselben Punkt

$$V_a = \frac{a^2 c}{a'^2 c'} V_c = a^2 c \varrho \pi \{A' - B'(x^2+y^2) - D'z^2\}.$$

Die Berechnung von ξ, A', B', D' soll unter der vereinfachenden Annahme ausgeführt werden, dass der Punkt (x, y, z) sehr nahe an der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids liegt. Es wird dann die Halbaxe c' von der ersten Ordnung, folglich, da $c'^2 = c^2 + \xi$ ist, ξ von der zweiten Ordnung sein, also

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1, \text{ folglich } c'^2 = \frac{a^2 z^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Offenbar ist auch hier z^2 von der zweiten Ordnung, da es kleiner ist, als c'^2. Man erhält dann weiter, da $\frac{1}{a'} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\xi}{a^2}\right) = \frac{1}{a}$ ist,

$$A' = \frac{2}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c'}{a}\right), \quad B' = \frac{1}{a^3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2c'}{a}\right), \quad D' = \frac{2}{a^2 c'},$$

folglich (für Punkte in der Nähe der Oberfläche)

$$4) \qquad V_a = \tfrac{3}{4} M \left\{\left(\frac{\pi}{a} - \frac{2c'}{a^2}\right) - \frac{x^2+y^2}{2a^2}\left(\frac{\pi}{a} - \frac{4c'}{a^2}\right) - \frac{2z^2}{a^2 c'}\right\},$$

$$c' = \frac{az}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

wobei zu beachten ist, dass die Wurzel das Zeichen von z haben muss.

3. Für das dreiaxige Ellipsoid haben wir wieder

$$V_i = \tfrac{3}{4} M \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \left\{1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right\} dt.$$

Wir machen nun die Voraussetzung, dass $\frac{1}{a}$ klein von der ersten Ordnung sei. Aus der Formel $M = \frac{4}{3} abc\pi\varrho$ folgt dann, dass bc ebenfalls von der ersten Ordnung ist. Wir setzen weiter $b^2 = c^2 + e^2$ und nehmen an, dass e^2 von höherer Ordnung sei, als b^2 und c^2. Es sind demnach b und c von gleicher Ordnung und somit $\frac{1}{a}$, b^2, c^2 von der ersten Ordnung, e^2 von der zweiten oder von höherer Ordnung. Dass diese Annahmen für die in Frage stehende Gleichgewichtsfigur zulässig sind, wird sich aus dem zweiten Theile ergeben; es wird sich aber dabei auch zeigen, dass e^2 infolge der Gleichgewichtsbedingung in der That von höherer als der zweiten Ordnung ist. Bis dahin müssen wir aber die Formeln so entwickeln, als ob e^2 von der zweiten Ordnung sei. Man hat demnach

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+t}}=\frac{1}{\sqrt{c^2+t+e^2}}=\frac{1}{\sqrt{c^2+t}}\left(1+\frac{e^2}{c^2+t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{c^2+t}}\left[1-\tfrac{1}{2}\,\frac{e^2}{c^2+t}+\tfrac{3}{8}\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right],$$

$$\frac{1}{b^2+t}=\frac{1}{c^2+t+e^2}=\frac{1}{c^2+t}\left(1+\frac{e^2}{c^2+t}\right)^{-1}=\frac{1}{c^2+t}\left[1-\frac{e^2}{c^2+t}+\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right],$$

wobei zu beachten, dass $\frac{e^2}{c^2+t}$ für kleine t von der ersten Ordnung ist; folglich

$$V_i=\tfrac{3}{4}M\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{a^2+t}}\,\frac{1}{c^2+t}\left[1-\tfrac{1}{2}\,\frac{e^2}{c^2+t}+\tfrac{3}{8}\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]$$
$$\times\left\{\left[1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2+z^2}{c^2+t}\right]-\frac{y^2}{c^2+t}\left[-\frac{e^2}{c^2+t}+\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]\right\}dt$$
$$=\tfrac{3}{4}M\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{a^2+t}}\,\frac{1}{c^2+t}\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2+z^2}{c^2+t}\right)-\tfrac{1}{2}\,\frac{y^2}{c^2+t}\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right.$$
$$+\left[-\tfrac{1}{2}\,\frac{e^2}{c^2+t}+\tfrac{3}{8}\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]\cdot\left[1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2+z^2}{c^2+t}\right]$$
$$\left.-\frac{y^2}{c^2+t}\left[-\frac{e^2}{c^2+t}+\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]\right\}dt.$$

Setzt man $\sqrt{a^2+t}=v$ und ordnet nach der Gestalt der Integranden, so kommt

$$V_i=\tfrac{3}{2}M\left\{A-x^2B-\left(y^2+z^2+\frac{e^2}{2}\right)C+\frac{e^2}{2}x^2D+\left[\frac{e^2}{2}(3y^2+z^2)+\tfrac{3}{8}e^4\right]E\right.$$
$$\left.-\tfrac{3}{8}e^4x^2F-\left(\tfrac{15}{8}e^4y^2+\tfrac{3}{8}e^4z^2\right)G\right\},$$

$$A=\int\limits_a^\infty\frac{dv}{v^2-a^2+c^2}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}}\int\limits_a^\infty\left[\frac{1}{v+\sqrt{a^2-c^2}}-\frac{1}{v-\sqrt{a^2-c^2}}\right]dv$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}}\lg\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}},$$

$$B=\int\limits_a^\infty\frac{dv}{v^2(v^2-a^2+c^2)}=\frac{1}{a^2-c^2}\left\{A-\int\limits_a^\infty\frac{dv}{v^2}\right\}=\frac{A}{a^2-c^2}-\frac{1}{a(a^2-c^2)},$$

$$C=\int\limits_a^\infty\frac{dv}{(v^2-a^2+c^2)^2}=\frac{1}{2(a^2-c^2)}\left\{-A+\tfrac{1}{2}\int\limits_a^\infty\left[\frac{1}{(v+\sqrt{a^2-c^2})^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(v-\sqrt{a^2-c^2})^2}\right]dv\right\}=-\frac{A}{2(a^2-c^2)}+\frac{a}{2c^2(a^2-c^2)},$$

$$D=\int_a^\infty \frac{dv}{v^2(v^2-a^2+c^2)^2}=\frac{1}{a^2-c^2}\{C-B\},$$

$$E=\int_a^\infty \frac{dv}{(v^2-a^2+c^2)^3}=\frac{1}{4(a^2-c^2)}\left\{-3C-\frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}}\int_a^\infty\left[\frac{1}{(v+\sqrt{a^2-c^2})^3}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{(v-\sqrt{a^2-c^2})^3}\right]dv\right\}=\frac{1}{4(a^2-c^2)}\left\{-3C+\frac{a}{c^4}\right\},$$

$$F=\int_a^\infty \frac{dv}{v^2(v^2-a^2+c^2)^3}=\frac{1}{a^2-c^2}\{E-D\},$$

$$G=\int_a^\infty \frac{dv}{(v^2-a^2+c^2)^4}=-\frac{E}{a^2-c^2}-\frac{C}{8(a^2-c^2)^2}+\frac{1}{16(a^2-c^2)^2}$$
$$\times\int_a^\infty\left[\frac{1}{(v+\sqrt{a^2-c^2})^4}+\frac{1}{(v-\sqrt{a^2-c^2})^4}\right]dv=-\frac{E}{a^2-c^2}-\frac{C}{8(a^2-c^2)^2}$$
$$+\frac{4a^3-3ac^2}{24(a^2-c^2)^2c^6}.$$

Aus dem zuletzt angeführten Ausdrucke für V_t erkennt man weiter, dass zu berechnen sind

A bis auf Glieder 2. Ordn. incl.,
B „ „ „ 4. „ „ weil sein Factor von der (—2). Ordn. ist,
C „ „ „ 1. „ „ „ „ „ „ „ 1. „ „
D „ „ „ 2. „ „ „ „ „ „ „ 0. „ „
E „ „ „ (—1). „ „ „ „ „ „ „ 3. „ „
F „ „ „ 0. „ „ „ „ „ „ „ 2. „ „
G „ „ „ (—3). „ „ „ „ „ „ „ 5. „ „

Ferner überzeugt man sich leicht, dass $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\,lg\,\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}}$ von der nullten Ordnung ist, wenn $\frac{1}{a}$ klein von der ersten Ordnung ist. Denn setzt man $\frac{1}{a}=\alpha$, so wird

$$f(\alpha)=\alpha\,lg\,\frac{1+\sqrt{1-c^2\alpha^2}}{1-\sqrt{1-c^2\alpha^2}},\quad f'(\alpha)=lg\,\frac{1+\sqrt{1-c^2\alpha^2}}{1-\sqrt{1-c^2\alpha^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-c^2\alpha^2}},$$

also $f(0)=0$, $f'(0)=+\infty$, woraus die Behauptung folgt. Man findet übrigens $\frac{1}{a}\,lg\,\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}}=-\frac{2}{a}\,lg\,\frac{c}{a+\sqrt{a^2-c^2}}=-\frac{2}{a}\,lg\,\frac{c}{2a}\left(1+\frac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\right)$ $=-\frac{2}{a}\,lg\,\frac{c}{2a}$, weil $lg\left(1+\frac{c^2}{2a^2}\right)=\frac{c^2}{2a^2}-\dots$ von der dritten Ordnung ist.

Setzt man also

$$\frac{1}{a}\, lg \frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{a-\sqrt{a^2-c^2}} \text{ oder } \frac{2}{a}\, lg \frac{2a}{c} = L,$$

wo also L eine Grösse nullter Ordnung bedeutet, so wird

$$A = \tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\right) L = \frac{L}{2},$$

$$B = -\frac{1}{a^3}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)A = -\frac{1}{a^3}+\frac{L}{2a^2},$$

$$C = -\frac{A}{2a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2ac^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{1}{2ac^2},$$

$$D = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)(C-B) = \frac{1}{2a^3c^2},$$

$$E = \frac{1}{4a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(-3C+\frac{a}{c^4}\right) = \frac{1}{4ac^4},$$

$$F = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)(E-D) = 0,$$

$$G = -\frac{E}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)-\frac{C}{8a^4}\left(1+2\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{24a^4}\left(1+2\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{4a^3}{c^6}-\frac{3a}{c^4}\right) = 0,$$

woraus folgt

$$V_i = \tfrac{3}{2} M \left\{\frac{L}{2}-\frac{e^2}{4ac^2}-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{a}-\frac{e^2}{4ac^2}\right)-\frac{y^2}{c^2}\left(\frac{1}{2a}-\frac{3e^2}{8ac^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{2a}-\frac{e^2}{8ac^2}\right)\right\}.$$

Da sich im zweiten Theile herausstellen wird, dass e^2 von höherer als der zweiten Ordnung ist, so möge hier gleich die Formel für V_i in ihrer schliesslichen Gestalt folgen:

$$V_i = \tfrac{3}{2} M \left\{\frac{L}{2}-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{a}\right)-\frac{y^2+z^2}{2ac^2}\right\}. \tag{5}$$

Hieraus erhält man leicht das Potential in einem äussern Punkte (x, y, z). Man lege durch diesen Punkt ein dem gegebenen confocales Ellipsoid mit den Halbaxen

$$a' = \sqrt{a^2+\xi}, \quad b' = \sqrt{b^2+\xi}, \quad c' = \sqrt{c^2+\xi},$$

wo ξ zu berechnen ist aus

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}-1 = 0.$$

Das Potential des confocalen Ellipsoids in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ist dann

$$V_e = 2a'b'c'\varrho\pi \left\{A' - x^2 B' - \left(y^2+z^2+\frac{e^2}{2}\right)C' + \frac{e^2}{2}x^2 D' + \left[\frac{e^2}{2}(3y^2+z^2)+\tfrac{3}{8}e^4\right]E'\right.$$
$$\left. - \tfrac{3}{8}e^4 x^2 F' - \left(\tfrac{15}{8}e^4 y^2 + \tfrac{3}{8}e^4 z^2\right)G'\right\},$$

wo A', B', ... aus A, B, ... hervorgehen, wenn man in letzteren a, b, c resp. durch a', b', c' ersetzt.

Nach dem Maclaurin'schen Satze erhält man dann wieder, wie oben,

$$V_a = \tfrac{3}{2} M \{A' - x^2 B' - \dots\}.$$

Die Berechnung von ξ, A', B', ... soll wieder unter der Annahme ausgeführt werden, dass der Punkt (x, y, z) sehr nahe an der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids liegt. Es sollen also b'^2 und c'^2, folglich auch ξ kleine Grössen erster Ordnung sein. Dann wird

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c'^2}\left(1 - \frac{e^2}{c'^2}\right) + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \text{ oder } c'^2\left[c'^2\,\frac{a^2 - x^2}{a^2} - (y^2 + z^2)\right] + y^2 e^2 = 0.$$

Das zweite Glied der linken Seite ist, wenn wir das später über die Ordnung von e^2 sich ergebende Resultat hier schon benutzen, wenigstens klein von der vierten Ordnung, also ist das erste gleich Null bis auf Glieder dritter Ordnung einschliesslich, folglich der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck gleich Null bis auf Glieder zweiter Ordnung einschliesslich, also

$$c'^2 = \frac{a^2(y^2 + z^2)}{a^2 - x^2}.$$

Da für die Berechnung von A', B', ... alle früheren Voraussetzungen gelten und da überdies

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\xi}{a^2}\right) = \frac{1}{a},$$

so gehen dieselben aus A, B, ... hervor, wenn man einfach c durch c' ersetzt. Man erhält also schliesslich (für Punkte in der Nähe der Oberfläche)

$$6)\qquad V_a = \tfrac{3}{2} M \left\{\frac{L}{2} - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{L}{2} - \frac{1}{a}\right) - \frac{y^2 + z^2}{2ac'^2}\right\}, \quad c'^2 = \frac{a^2(y^2 + z^2)}{a^2 - x^2}.$$

II. Gleichgewichtsbedingungen.

1. Das Rotationsellipsoid mit kleiner Excentricität.

Die hier zu machende Untersuchung ist in einem allgemeineren Problem, das Herr Giesen in dem erwähnten Aufsatze (II. Th., § 2) gelöst hat, als Specialfall enthalten. Für unsern Fall gestaltet sich dieselbe sehr einfach folgendermassen. Bezeichnet V_0 das Potential in Bezug auf Punkte der Oberfläche, f die Anziehungsconstante, θ die Winkelgeschwindigkeit, so besteht die Gleichgewichtsbedingung einer frei rotirenden Flüssigkeit bekanntlich in der Gleichung

$$f V_0 + \frac{\theta^2}{2}(x^2 + y^2) = Const.,$$

welche für alle Punkte der Oberfläche erfüllt sein muss. Für die Oberfläche eines wenig excentrischen Rotationsellipsoids hat man nun, wenn $a^2 - c^2 = e^2$ gesetzt wird,

$$\frac{x^2+y^2}{c^2+e^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2+y^2}{c^2}\left(1-\frac{e^2}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}=1$$

oder, wenn $x^2+y^2+z^2=r^2$ gesetzt wird,

$$r^2=c^2\left[1+\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^4}\right], \quad \text{also} \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{c}\left[1-\frac{e^2(x^2+y^2)}{2c^4}\right].$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung 2) ein, so erhält man

$$V_0=M\left\{\frac{1}{c}-\frac{1}{5}\frac{e^2}{c^3}-\frac{1}{5}\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^5}\right\}.$$

Demnach geht die Gleichgewichtsbedingung über in die identische Gleichung

$$Mf\left\{\frac{1}{c}-\frac{1}{5}\frac{e^2}{c^3}-\frac{1}{5}\frac{e^2(x^2+y^2)}{c^5}\right\}+\frac{\theta^2}{2}(x^2+y^2)=0,$$

welche das Verschwinden des Coefficienten von (x^2+y^2) erfordert; folglich ist

$$7) \qquad \frac{Mfe^2}{5c^5}=\frac{\theta^2}{2}.$$

Da sich hiernach e^2 durch θ^2 eindeutig bestimmt, so folgt, dass für eine bestimmte kleine Winkelgeschwindigkeit jedesmal ein und nur ein Rotationsellipsoid mit kleiner Excentricität der Gleichgewichtsbedingung genügt. Da ferner Gleichung 7) für e^2 einen positiven Werth liefert, so folgt weiter, dass dieses Ellipsoid nur ein abgeplattetes sein kann.

2. Für das Rotationsellipsoid mit grosser Excentricität hat man dieselbe Gleichgewichtsbedingung, wie oben. Setzt man den Werth

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

in die Gleichung 3), so erhält man V_0, folglich als Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{3}{4}Mf\left\{\left(\frac{\pi}{a}-\frac{2c}{a^2}\right)-\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{2c}{a^2}\right)-\frac{2z^2}{a^2c}\right\}+\frac{a^2\theta^2}{2}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)=Const.$$

Diese identische Gleichung erfordert das Verschwinden des Coefficienten von z^2, also ist

$$8) \qquad \frac{3}{4}Mf\left\{\frac{\pi}{2a}-\frac{4c}{a^2}\right\}-\frac{a^2\theta^2}{2}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4}\frac{Mf\pi}{a^3}=\theta^2.$$

Man kann dieser Bedingung auch folgende Gestalt geben:

$$\theta^2=\frac{c}{a}\varrho\pi^2 f.$$

Setzt man die numerische Excentricität

$$\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}=\varepsilon,$$

so hat man mit derselben Genauigkeit

$$8') \qquad \theta^2 = \frac{\varrho \pi^2 f}{\varepsilon}.$$

Da sich hiernach ε durch θ^2 eindeutig bestimmt, so folgt, dass für eine bestimmte kleine Winkelgeschwindigkeit jedesmal ein und nur ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit grosser Excentricität der Gleichgewichtsbedingung genügt.

3. Für das dreiaxige Ellipsoid haben wir dieselbe Bedingung, wie früher. Für V_i haben wir aber nicht die Formel 5), sondern die unmittelbar vorhergehende zu nehmen, weil die Ordnung von e^2 noch in Frage steht. Für Punkte der Oberfläche hat man nun

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2}\left(1 - \frac{e^2}{c^2} + \frac{e^4}{c^4}\right).$$

Dadurch wird

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{e^2}{8ac^2} - \frac{1}{2a}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2}\right)\left(\frac{e^2}{8ac^2} - \frac{1}{2a}\right) - \frac{y^2}{c^2}\,\frac{e^2}{2ac^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die erwähnte Formel für V_i, so erhält man V_0 für Punkte der Oberfläche und die Gleichgewichtsbedingung wird nach x^2 und y^2 identisch, da diese beiden Veränderlichen von einander unabhängig sind. Setzt man also deren Coefficienten einzeln gleich Null, so erhält man

$$\tfrac{3}{2} Mf\left(\frac{3}{a^3} - \frac{L}{a^2} + \frac{e^2}{4a^3c^2}\right) + \theta^2 = 0, \quad \tfrac{3}{4} Mf \frac{e^2}{ac^4} - \theta^2 = 0$$

und durch Elimination von θ^2

$$9) \qquad \left(\frac{3}{a^3} - \frac{L}{a^2}\right) + \frac{e^2}{ac^2}\left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2c^2}\right) = 0.$$

Diese von der Winkelgeschwindigkeit unabhängige Gleichung drückt die Beziehung aus, welche bekanntlich zwischen den drei Axen des Jacobischen Gleichgewichtsellipsoids bestehen muss. Da der von e^2 unabhängige Theil derselben von der zweiten Ordnung ist, so darf der zweite Theil keine Glieder erster Ordnung enthalten. Dies würde aber in Bezug auf das letzte Glied der Fall sein, wenn e^2 nicht von höherer als von der zweiten Ordnung wäre, woraus folgt, dass bis auf Glieder zweiter Ordnung genau $e^2 = 0$ zu setzen ist. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man auf die allgemeine Bedingungsgleichung, wie sie von Jacobi aufgestellt worden, eine Reihenentwickelung gemäss den hier gemachten Voraussetzungen anwendet.* Gleichung 9) besagt also,

---

* Diese allgemeine Bedingungsgleichung lautet:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\left\{\frac{a^2b^2}{(a^2+t)(b^2+t)} - \frac{c^2}{c^2+t}\right\} dt = 0$$

oder, wenn man die in I, 3 berechneten Näherungswerthe für $\frac{1}{\sqrt{b^2+t}}$ und $\frac{1}{b^2+t}$ einsetzt, dass ein dreiaxiges Ellipsoid mit kleiner Winkelgeschwindigkeit nur dann Gleichgewichtsfigur ist, wenn es bis auf Glieder zweiter Ordnung (incl.) genau als verlängertes Rotationsellipsoid betrachtet werden kann, wobei als Grösse erster Ordnung der reciproke Werth der längsten Axe vorausgesetzt wird. Würde man die beiden vorhergehenden ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren allgemein behandeln und nicht von vornherein voraussetzen, dass es Rotationsellipsoide seien, so würde man auf eine ähnliche Bedingungsgleichung stossen, die zwischen den Axen des Ellipsoids erfüllt sein muss.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2+t}}\,\frac{1}{c^2+t}\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{e^2}{c^2+t}+\tfrac{3}{8}\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]$$
$$\times\left\{\frac{a^2b^2}{(a^2+t)(c^2+t)}\left[1-\frac{e^2}{c^2+t}+\left(\frac{e^2}{c^2+t}\right)^2\right]-\frac{c^2}{c^2+t}\right\}dt=0$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2+t}}\,\frac{1}{c^2+t}\left\{-\frac{c^2}{c^2+t}+\frac{a^2b^2}{(a^2+t)(c^2+t)}+\tfrac{1}{2}\frac{c^2e^2}{(c^2+t)^2}-\tfrac{3}{2}\frac{a^2b^2e^2}{(a^2+t)(c^2+t)^2}-\tfrac{3}{8}\frac{e^4c^2}{(c^2+t)^3}\right.$$
$$\left.+\tfrac{15}{8}\frac{a^2b^2e^4}{(a^2+t)(c^2+t)^3}\right\}dt=0.$$

Setzt man nun $\sqrt{a^2+t}=v$, so erhält man

$$-c^2C+a^2b^2D+\tfrac{1}{2}e^2c^2E-\tfrac{3}{2}a^2b^2e^2F-\tfrac{3}{8}e^4c^2G+\tfrac{15}{8}a^2b^2e^4H=0,$$

wo die C, D, ... G dieselbe Bedeutung haben wie früher und $H=\frac{1}{a^2-c^2}(G-F)$ ist. Nun erkennt man aus den früher (I, 3) für C, D, ... G aufgestellten Näherungswerthen, dass

C von der	0.	Ordnung,		
D „ „	2.	„		
E „ „	(−1).	„		
F „ „	1.	„		
G „ „	(−2).	„		und folglich auch
H „ „	0.	„		

ist. Setzt man nun in obiger Bedingungsgleichung noch $b^2=c^2+e^2$ und berücksichtigt nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung einschliesslich, so geht dieselbe über in

$$e^2(a^2D+\tfrac{1}{2}c^2E-\tfrac{3}{2}a^2c^2F)+(-c^2C+a^2c^2D)=0.$$

Die von e^2 freien Glieder sind von der ersten Ordnung, aber ihre algebraische Summe ist bis auf Glieder zweiter Ordnung incl. genau

$$-c^2C+a^2c^2D=-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=0.$$

Die Factoren von e^2 sind einzeln von der nullten Ordnung und ihre algebraische Summe von derselben Ordnung, nämlich $=\frac{1}{4ac^2}$. Da nun alle vernachlässigten Glieder wenigstens von der dritten Ordnung sind, so fordert obige Bedingungsgleichung, dass auch

$$e^2(a^2D+\tfrac{1}{2}c^2E-\tfrac{3}{2}a^2c^2F)$$

wenigstens von der dritten Ordnung sei, d. h. dass bis auf Glieder zweiter Ordnung einschliesslich genau $e^2=0$ sei

Aus der ersten der beiden Gleichungen, aus welchen Gleichung 9) abgeleitet wurde, erhalten wir nun bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$10)\qquad \theta^2 = \tfrac{3}{2} M f \frac{L}{a^2}$$

oder, wenn man die lineare Excentricität $\sqrt{a^2-c^2} = \varepsilon$ setzt, mit derselben Genauigkeit

$$10')\qquad \theta^2 = \tfrac{3}{2} M f \frac{L}{\varepsilon^2}.$$

Da sich also ε^2 durch θ^2 eindeutig bestimmt, so folgt, dass für eine bestimmte kleine Winkelgeschwindigkeit jedesmal ein und nur ein dreiaxiges (näherungsweise: verlängertes Rotations-) Ellipsoid mit grosser Excentricität der Gleichgewichtsbedingung genügt.

Schliesslich möge noch erwähnt sein, dass die vorhergehenden Entwickelungen streng genommen nicht erweisen, dass es drei ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten giebt, sondern nur, dass es drei verschiedene Gleichgewichtsfiguren frei rotirender homogener Flüssigkeiten giebt, welche bei kleiner Winkelgeschwindigkeit annähernd als ellipsoidisch betrachtet werden können.

Kleinere Mittheilungen.

VII. Flächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Büschel von Kugeln.

1. Der geometrische Ort des Schnittkreises der entsprechenden Kugeln zweier projectivischen Kugelnbüschel K und L ist eine die beiden Grundkreise der Büschel enthaltende Fläche vierter Ordnung F^4. Da die Mittelpunktsreihen k und l von K und L projectivisch sind, so sind es auch ihre orthogonalen Projectionen X und Y auf einer beliebigen Geraden g. Irgend zwei entsprechende Punkte X_1 und Y_1 dieser Reihen sind Mittelpunkte der Strecken entsprechender Punktepaare $x_1 x'_1$ und $y_1 y'_1$ in denjenigen Punktsystemen x und y, welche von g mit K und L erzeugt werden. Die Punkte x_1, y_1 können nur gleichzeitig mit den Punkten X_1, Y_1 im unendlich fernen Punkte von g zusammenfallen, und es sind unter dieser Voraussetzung die Punkte x'_1, y'_1 die Schnittpunkte der g mit den Potenzebenen von K und L, welche einander darum entsprechen müssen; die Reihen k, l sind ähnlich, und es folgt:

Die F^4 zerfällt in eine F^3 und die unendlich ferne Ebene, sobald die Mittelpunktsreihen k und l ähnlich sind.

2. Die F^3 kann verschiedenartig in Flächen niedrigerer Ordnung zerfällt werden.

a) Die Potenzebenen von K und L fallen in eine Ebene E zusammen. Dann ist $x'_1 = y'_1$ ein Doppelpunkt auf g und es zerfällt die F^3 in eine Fläche zweiter Ordnung (Kugelfläche) und die Ebene E.

b) Die Büschel K, L besitzen eine sich selbst entsprechende Kugel $K_0 = L_0$. Dann besteht die F^3 aus dieser Kugel und einer Ebene.

c) Der in das Endliche sich erstreckende Theil der F^3 soll aus einer einfachen Fläche zweiter Ordnung F^2 bestehen. — Aus der Verlegung der g in eine der zwei Potenzebenen erhellt zunächst die Nothwendigkeit des Parallelismus der Träger von k und l. Soll ferner, bei beliebiger Lage von g, in zwei anderen einander entsprechenden Punktepaaren $x_2 x'_2$ und $y_2 y'_2$, mit den zugehörigen Halbirungspunkten X_2 und Y_2, der Punkt x_2 mit y_2 im unendlich fernen Punkte von g zusammenfallen, so geschieht gleichzeitig dasselbe mit X_2 und Y_2. Die Reihen X und Y haben zwei im unendlich fernen Punkte vereinigte Doppelpunkte $X_1 = Y_1$ und $X_2 = Y_2$, sie sind daher einstimmig congruent. Daraus folgt:

Das Erzeugniss zweier projectivischen Kugelnbüschel besteht aus einer Fläche zweiter Ordnung und der unendlich fernen Doppelebene, wenn die Träger der Mittelpunktsreihen parallel oder zusammenfallend, und die Reihen selbst congruent und einstimmig sind.

3. Wir bezeichnen die zwei auf der Oberfläche zweiter Ordnung F liegenden Systeme von parallelen Kreisen mit R und R', ihre Richtungsebenen mit ϱ und ϱ', die geradlinigen Reihen ihrer Mittelpunkte mit r und r'. Zwei beliebige Kreise R_k, R_l können immer als die Grundkreise zweier Kugelnbüschel K, L, deren Erzeugniss F ist, angesehen werden; die zugehörigen Reihen k, l sind dann Schnitte einer zu ϱ' senkrechten Parallelschaar π. k, l, r, r' liegen in einer Hauptebene Σ von F, die anderen Hauptebenen seien Σ_1, Σ_2 und O der Flächenmittelpunkt.

Jede Ebene E schneidet F in einer Curve zweiter Ordnung c, dem Erzeugnisse projectivischer Kreisbüschel. Die Verbindungslinie (r) der Halbirungspunkte jenes Systems (R) paralleler Sehnen der Curve c, welches von den Schnittlinien der Ebene E mit den Kreisschnittebenen des Systems R gebildet wird, ist eine Gerade, als Projection der Geraden r; für das zweite Sehnensystem (R') sei (r') der conjugirte Durchmesser, womit denn auch der Curvenmittelpunkt und die Axenrichtungen bestimmt sind.

Durch einen Punkt p auf F gehen zwei Oberflächenkreise und bestimmen eine die F doppelt berührende Kugel, deren Tangentialebene in p auch Tangentialebene von F ist. Sie schneidet die F in einer Curve zweiter Ordnung, welche ein Linienpaar mit dem Mittelpunkte p ist, weil durch diesen Curvenpunkt die zwei Curvendurchmesser (r) und (r') gehen. Die auf das Linienpaar hinführende Construction ist immer ohne vorläufige Rücksicht auf dessen Realität ausführbar. Aehnliches gilt für die Construction ebener Schnittcurven überhaupt.

4. Man erhält das ganze System der zu F ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen zweiter Ordnung mit demselben Mittelpunkte, indem man die folgenden Elemente für das ganze System beibehält: Σ, Σ_1, Σ_2, O, ϱ, ϱ', r, r', π, k, l, und die (von einander abhängigen) Radien der Grundkreise R_k, R_l sich entsprechend verändern lässt.

Der Asymptotenkegel des Systems wird construirt, wenn man durch O einen Strahl Oo der Schaar π zieht und den Schnittpunkt o mit k bestimmt. Die um o als Centrum beschriebene, durch O gehende Kugel schneidet die Ebene von R_k in dem zugehörigen Grundkreise, dessen Mittelpunkt wir mit r_k bezeichnen; und da durch O nur ein Strahl der Schaar π geht, so ist jener Grundkreis und mit ihm der Kegel eindeutig bestimmt. Der Kreis ist reell, wenn im Dreiecke $or_kO : oO \geq or_k$, d. h. $\angle or_kO \geq \angle oOr_k$; er ist imaginär, wenn $oO < or_k$, d. h. $\angle or_kO < \angle oOr_k$.

Durchläuft r_k die Reihe r, so beschreibt der Grundkreis den Asymptotenkegel, und da das Dreieck or_kO seine Winkel nicht verändert, so folgt, dass auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung alle nicht verschwindenden Kreise des einen und somit auch des andern Systems gleichzeitig entweder reell oder imaginär sind. Für den zweiten Grundkreis gilt dasselbe; seine Construction ergiebt sich aus dem Texte durch Vertauschung von k mit l.

5. Es giebt mit Bezug auf die Fläche F in zweifacher Anordnung unendlich viele Paare verschwindender, die Fläche doppelt berührender Kugeln. Sie sind die Grenzpunkte jener Kreisbüschel, die von den zur Fläche F gehörigen Kugelnbüscheln mit der Ebene Σ erzeugt werden. Wir bezeichnen nun mit K und L die den gleichbezeichneten Kugelnbüscheln entsprechenden Kreisbüschel in der Ebene Σ, mit K' und L' die Orthogonalkreisbüschel, mit π' die zu π senkrechte Parallelschaar.

Die Schnittpunkte 1, 1 der entsprechenden Kreise K_1, L_1 bestimmen ein fünftes Büschel, dessen Grenzpunkte 1′, 1′ die Schnittpunkte eines sechsten, zum fünften orthogonalen Büschels sind. Ein gewisser Kreis K'_1 (resp. L'_1) des sechsten Büschels hat seinen Mittelpunkt im Schnittpunkte des Strahles $\overline{11}$ der Schaar π' mit der Potenzlinie von K (resp. L). Dieser Kreis gehört als Orthogonalkreis von K_1 (resp. L_1) dem Büschel K' (resp. L') an. Es sind somit die Grenzpunkte 1′, 1′ die Schnittpunkte entsprechender Kreise der Orthogonalbüschel K', L', welche mittelst der Schaar π' auf einander bezogen sind. Daraus folgt:

In der zu den Kreisschnittebenen senkrechten Hauptebene einer Fläche zweiter Ordnung liegt ein Kegelschnitt, welcher als der geometrische Ort einer die Fläche doppelt berührenden Kugel mit verschwindendem Radius angesehen werden kann. Es ist derjenige Focalkegelschnitt, welcher die Fläche orthogonal in den vier Kreispunkten durchschneidet.

Und dieser Satz ist theilweise in dem folgenden, allgemeineren Satze enthalten:

Der geometrische Ort des Berührungspunktes einer festen Ebene mit einer eine Fläche zweiter Ordnung doppelt berührenden Kugel ist ein Kegelschnitt, welcher orthogonal in vier Punkten geschnitten wird von dem Schnitte der Fläche und Ebene.

6. Der sphärische Schnitt c^4 der Fläche F mit der Kugel $\mathfrak{K}$ hat, entsprechend den beiden Kreissystemen R, R' auf F, zwei Systeme $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ paralleler sphärischer Sehnen.

Die Curve c^4 ist das Erzeugniss zweier projectivischen Kreisbüschel auf $\mathfrak{K}$, deren sphärische Mittelpunktsreihen in perspectivischer Lage sind, also (auch bei vereinigten Trägern) einen Punkt und seinen Gegenpunkt entsprechend gemein haben. Die beiden Mittelpunkte der Projection bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$; die beiden sich selbst entsprechenden Punkte der Mittelpunktsreihen mit $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'$; den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{o}$. Dann ist die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{p}\|\pi$, und die Gerade $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}\mathfrak{p}'\|k\|l$. Die den Sehnen $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{N}'$) entsprechenden geradlinigen Sehnen sind die Erzeugenden des einen (resp. des andern) Systems eines die Curve c^4 enthaltenden hyperbolischen Paraboloids F_1.

Die den Sehnen beider Systeme entsprechenden Hauptbögen sind Tangenten eines sphärischen Kegelschnittes, welcher dem der Fläche F_1 aus $\mathfrak{o}$ umschriebenen Kegel angehört; und je zwei in einerlei Durchmesserebene liegende geradlinige Sehnen schneiden sich in Punkten jenes ebenen Kegelschnittes, längs dessen das Paraboloid F_1 von dem erwähnten Kegel berührt wird.

Ein zweites (resp. drittes) Paraboloid M (resp. N) ist bestimmt durch die beiden Leitlinien $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}\mathfrak{p}'$, r (resp. $\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{p}$, r') und die Richtungsebene ϱ (resp. ϱ'). Der Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit M (resp. mit N) ist die dem sphärischen Sehnensystem $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{N}'$) entsprechende Durchmessercurve. Der Schnitt von F_1 mit M (resp. mit N) ist die dem geradlinigen Sehnensystem $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{N}'$) entsprechende Durchmessercurve.

Die Ebene $\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{p}'\|\Sigma$ ist die gemeinschaftliche Richtungsebene der Paraboloide M und N, deren Schnittcurve daher in die unendlich ferne Gerade von Σ und in eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; letztere ist der Ort der Centra aller die Curve c^4 enthaltenden Flächen zweiter Ordnung.

Jede Erzeugende von F_1 bestimmt mit $\mathfrak{K}$ die Schnittpunkte eines sphärischen Kreisbüschels, dessen Grenzpunkte die Schnittpunkte des Orthogonalbüschels und zugleich die Schnittpunkte der reciproken Polaren jener Erzeugenden mit der Kugel $\mathfrak{K}$ als der Directrix der Reciprocität sind. Der Ort aller der Grenzpunkte ist eine Curve c^{4*} als Schnittcurve von $\mathfrak{K}$ mit der zu F_1 reciproken Regelfläche zweiter Ordnung $F_1{}^*$; und diese ist ein Hyperboloid mit den Erzeugenden $\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}\mathfrak{p}'$, als den reciproken Polaren der Stellungen von ϱ', ϱ. Die Curve c^{4*} ist die Reciproke der gemeinschaftlichen Developpablen von F_1 und $\mathfrak{K}$; und allgemeiner, für eine beliebige Fläche F des durch c^4 bestimmten Flächenbüschels zweiter Ordnung ist sie der Ort des Berührungspunktes der festen Kugel $\mathfrak{K}$ mit einer veränderlichen, die Fläche F doppelt berührenden Kugel. — Für das Paraboloid F_1 in jenem Büschel geht die veränderliche Kugel in eine berührende, die Developpable erzeugende Ebene über.

Brünn. FERDINAND RÖLLNER.

VIII. Synthetischer Beweis der Identität einer Tripelcurve mit dem Erzeugniss eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels.

Herr Milinowski hat in dieser Zeitschrift (23. Jahrg. 5. Heft) einen synthetischen Beweis für diese Identität gegeben. Ich bin nun schon länger im Besitz eines solchen, der sich dadurch auszeichnen mag, dass er geringerer Hilfsmittel bedarf, und auch dadurch, dass er wirklich synthetisch ist. Denn den von Herrn Milinowski möchte ich nicht als solchen anerkennen, wenn anders Herr Milinowski mit mir unter einem synthetischen Beweise einen solchen versteht, der keine algebraischen Principien zu Hilfe nimmt. Dies thut aber Herr Milinowski bei der Definition der Polaren der Curve dritter Ordnung. Denn nur auf Grund algebraischer Sätze darf man schliessen, dass eine Curve, die mit jeder durch einen festen Punkt gehenden Geraden je zwei Punkte gemein hat, ein Kegelschnitt ist; der Synthetiker muss zeigen, dass sie sich durch projectivische Strahlenbüschel oder sonstwie erzeugen lässt. Auch wird in der rein synthetischen Geometrie der Begriff der Projectivität auf den der Perspectivität gegründet, nicht auf gegenseitig eindeutiges Entsprechen; solche sich gegenseitig eindeutig entsprechende Gebilde auch ohne Weiteres projectivisch zu nennen, berechtigen auch wieder nur algebraische Principien. — Endlich will ich noch erwähnen, dass der Beweis von Herrn Reye (Geometrie der Lage) doch wohl allgemein ist. Allerdings sind drei der Basispunkte des Kegelschnittbüschels immer ein Tripel sich selbst entsprechender Punkte zweier collinearen Systeme; Herr Reye zeigt aber auch, dass irgend drei Punkte der Curve dritter Ordnung solch ein Tripel sind. Wie könnte sonst auch Herr Reye schliessen, dass diese durch neun Punkte bestimmt ist! Man könnte sich mit diesem Beweise höchstens deshalb nicht zufriedenstellen, weil er Sätze der Raumgeometrie zu Hilfe nimmt.

Ich werde zuerst folgenden Satz beweisen:

I. „Ist eine Curve dritter Ordnung $c^{(3)}$ durch ein Kegelschnittbüschel und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel erzeugt, so bilden die Kegelschnitte, welche drei beliebige Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ von $c^{(3)}$ mit den Punktepaaren verbinden, welche die durch einen andern willkürlichen Punkt $\mathfrak{m}$ von $c^{(3)}$ gehenden Geraden noch mit $c^{(3)}$ gemein haben, ein zu dem Strahlenbüschel durch $\mathfrak{m}$ projectivisches Kegelschnittbüschel, welches mit diesem ebenfalls $c^{(3)}$ erzeugt."

Hiermit ist dann die Identität der Tripelcurve mit dem Erzeugniss irgend eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels bewiesen. (Vergl. Schröter, Kegelschnitte, S. 507.) Ich zeige zweitens direct, dass das Erzeugniss eines Kegelschnittbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels sich durch zwei in halbperspectivischer Lage liegende Strahleninvolutionen erzeugen lässt, und habe somit gezeigt, dass unsere Curve dritter Ordnung auch eine Tripelcurve ist. (Vergl. Ueber Curven dritter Ordnung von H. Schröter, Math. Ann. von Clebsch und Neumann Bd. V, S. 50; Bd. VI, S. 85).

1. Ein Strahlenbüschel durch $\mathfrak{p}$ erzeuge also mit einem ihm projectivischen Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eine Curve dritter Ordnung

$c^{(3)}$. Legt man dann Kegelschnitte k durch irgend einen Punkt $\mathfrak{g}$ von $c^{(3)}$, durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und die Punktepaare $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, welche die Strahlen durch $\mathfrak{p}$ mit $c^{(3)}$ gemein haben, so gehen diese Kegelschnitte noch durch einen vierten festen Punkt $\mathfrak{h}$ von $c^{(3)}$. Um dies zu beweisen, bedürfen wir folgendes Hilfssatzes:

II. „Liegen auf einem Kegelschnitte $\varkappa$ zwei Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, so schneidet dieses auf $\varkappa$ eine Punktinvolution aus, die auch durch ein dem Kegelschnittbüschel projectivisches Strahlenbüschel ausgeschnitten wird.“

Der Beweis dieses Satzes ist synthetisch leicht zu führen. Auf k schneidet nun das Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eine solche Involution aus; das sie projicirende Strahlenbüschel wird also auch zu dem Strahlenbüschel in $\mathfrak{p}$ projectivisch sein und mit ihm einen Kegelschnitt erzeugen, der aus k die gemeinsamen Punkte von k mit $c^{(3)}$ ausschneidet. Ein Theil dieses Kegelschnittes ist aber der Strahl $\overline{\mathfrak{ef}}$, der andere Theil geht durch den festen Punkt $\mathfrak{g}$ und durch den Schnittpunkt $\mathfrak{m}$ von $\overline{\mathfrak{dc}}$ mit dem Strahl durch $\mathfrak{p}$, welcher dem Geradenpaare $\overline{\mathfrak{dc}}$, $\overline{\mathfrak{ab}}$ entspricht. Dieser Theil geht also durch zwei feste Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{g}$ und hat daher mit $c^{(3)}$ noch einen dritten festen Punkt $\mathfrak{h}$ gemein, durch den alle Kegelschnitte $\mathfrak{k}$ gehen müssen.

Die Polaren von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf die Kegelschnitte durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bilden nun ein Büschel, welches zu dem Strahlenbüschel durch $\mathfrak{p}$ projectivisch ist und mit ihm also einen Kegelschnitt $\varkappa$ erzeugt, den Polarkegelschnitt von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf $c^{(3)}$; dieser kann offenbar auch definirt werden als der Ort der Punkte, welche von $\mathfrak{p}$ durch die Punktepaare $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ harmonisch getrennt sind.

Nun ordne man irgend drei Strahlen $\overline{\mathfrak{ef}}$ durch $\mathfrak{p}$ die drei Kegelschnitte k zu. Hierdurch ist zwischen dem Strahlenbüschel durch $\mathfrak{p}$ und dem Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ eine projectivische Beziehung hergestellt, so dass also beide Büschel eine Curve dritter Ordnung $c_1^{(3)}$ erzeugen; diese muss mit $c^{(3)}$ identisch sein. Denn der Polarkegelschnitt $\varkappa_1$ von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf $c_1^{(3)}$ ist mit $\varkappa$ identisch. Sie gehen nämlich beide durch $\mathfrak{p}$, die drei Punkte auf den Strahlen $\overline{\mathfrak{ef}}$ und den Punkt $\mathfrak{p}'$, welcher $\mathfrak{p}$ in Bezug auf das Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ conjugirt ist. Denn unter den Kegelschnitten dieses Büschels giebt es ja immer einen, welcher $\overline{\mathfrak{pp}'}$ in denselben Punkten wie $c^{(3)}$ schneidet. Nun beweist man leicht, dass auch $c_1^{(3)}$ mit $c^{(3)}$ identisch ist. Aus dem Bewiesenen ebenso weiter schliessend, erhält man daher folgenden Satz:

III. „Verbindet man die Punktepaare $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ mit irgend drei Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ von $c^{(3)}$ durch Kegelschnitte, so bilden diese ein zu dem Strahlenbüschel in $\mathfrak{p}$ projectivisches Büschel, das mit ihm ebenfalls $c^{(3)}$ erzeugt.“

Halten wir nun einen Strahl $\overline{\mathfrak{ef}}$ fest und lassen $\mathfrak{g}$ auf $c^{(3)}$ variiren, so ergiebt sich folgender Satz: Die Verbindungslinien der Punktepaare $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, welche die Kegelschnitte durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ aus $c^{(3)}$ ausschneiden, gehen durch einen festen Punkt $\mathfrak{m}$ von $c^{(3)}$. Man zeigt nun leicht, dass die Punkte, die von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ harmonisch getrennt sind, einen durch $\mathfrak{m}$ gehenden Kegelschnitt bilden; er wird nämlich erzeugt durch die beiden projectivischen Polarenbüschel von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die beiden projectivischen Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, wenn man $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ wiederum festlegt. Daraus schliesst man dann wie oben, dass das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{m}$ so projectivisch auf das Kegelschnittbüschel durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ bezogen werden kann, dass es mit ihm $c^{(3)}$ erzeugt. Da nun nach III $\mathfrak{m}$ ein beliebiger Punkt von $c^{(3)}$ ist, so ist Satz I bewiesen.

2. Zu irgend vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$ von $c^{(3)}$ finden wir einen Punkt $\mathfrak{q}$, in dem sich die Verbindungslinien der Punktepaare schneiden, in denen $c^{(3)}$ von den durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$ gelegten Kegelschnitten noch getroffen wird. Betrachten wir andererseits $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als drei Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, das mit einem Strahlenbüschel in $\mathfrak{p}$ die $c^{(3)}$ erzeugt, so erhalten wir einen vierten Basispunkt $\mathfrak{q}'$. Kann nun $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ zusammenfallen? Dem Kegelschnitt durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ muss in $\mathfrak{q}$ die Tangente von $c^{(3)}$ entsprechen, d. h. dieser Kegelschnitt muss durch den Punkt $\mathfrak{t}$ gehen, welchen die Tangente von $\mathfrak{q}$ an $c^{(3)}$ noch mit $c^{(3)}$ gemein hat. Sollen daher $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$ Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels sein, das mit einem Strahlenbüschel durch $\mathfrak{p}$ die $c^{(3)}$ erzeugt, so muss offenbar die Gerade $\overline{\mathfrak{pt}}$ die $c^{(3)}$ in $\mathfrak{p}$ berühren. Und umgekehrt: schneiden sich die Tangenten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{t}$ auf $c^{(3)}$, so ist $\mathfrak{p}$ Gegenpunkt von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$ und auch $\mathfrak{q}$ Gegenpunkt von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$. Solche Punkte können wir auf $c^{(3)}$ immer construiren. Denn schneidet die Tangente in $\mathfrak{p}$ die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{t}$, so muss von $\mathfrak{t}$ aus noch mindestens eine Tangente gehen, die $c^{(3)}$ in $\mathfrak{p}$ berühren mag; man beweist dies leicht mit Hilfe des Polarkegelschnittes. Legt man nun durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{t}$ und zwei beliebige Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von $c^{(3)}$ einen Kegelschnitt, so schneidet dieser $c^{(3)}$ noch in einem sechsten Punkte $\mathfrak{c}$. Die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{t}$ haben dann die verlangte Lage.

Schneiden die Geraden $\overline{\mathfrak{bc}}$ und $\overline{\mathfrak{aq}}$ die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so müssen diese Punkte mit $\mathfrak{p}$ auf einer Geraden liegen. Schneidet ferner $\overline{\mathfrak{pa}}$ die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{r}$, so muss $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ auf einer Geraden liegen. Da $\mathfrak{a}$ ganz beliebig, so können wir diesen Satz so aussprechen:

IV. „Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Punkte von $c^{(3)}$, deren Tangenten sich auf $c^{(3)}$ schneiden, und verbindet man irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ von $c^{(3)}$ mit $\mathfrak{q}$ durch eine Gerade, die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{m}$ schneiden mag, diesen mit $\mathfrak{p}$ durch eine Gerade, die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{n}$ schneiden mag, diesen endlich mit $\mathfrak{q}$ durch eine Gerade, die $c^{(3)}$ noch in $\mathfrak{r}$ schneidet, so geht $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{r}}$ durch $\mathfrak{p}$.“

Die Geradenpaare $\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{r}}$ und $\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ bilden hierbei eine Involution. Denn sie schneiden den Polarkegelschnitt $\varkappa$ von $\mathfrak{p}$ jedesmal in zwei Punkten, welche mit $\mathfrak{q}$ auf einer Geraden liegen. Ebenso bilden auch die Geradenpaare $\mathfrak{q}\,\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{q}\,\overline{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}$ durch $\mathfrak{q}$ eine Involution und beide Involutionen sind so projectivisch aufeinander bezogen, dass sie $c^{(3)}$ erzeugen. Denn die Involution in $\mathfrak{p}$ ist projectivisch auf das Büschel von Geraden durch $\mathfrak{q}$ bezogen, welche die Punktepaare verbinden, in denen die Strahlenpaare der Involution den Polarkegelschnitt $\varkappa$ schneiden; dieses Strahlenbüschel ist aber wiederum auf die Involution in $\mathfrak{q}$ projectivisch bezogen, da es aus den vier harmonischen Strahlen von $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ in Bezug auf die Strahlenpaaré dieser Involution besteht. Dem Strahlenpaar $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$, $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{t}}$ entspricht offenbar das Paar $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$, $\overline{\mathfrak{t}\mathfrak{q}}$, so dass also $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ sich selbst entspricht. Hiermit ist also gezeigt, dass $c^{(3)}$ durch zwei in halbperspectivischer Lage liegende Strahleninvolutionen erzeugt wird, also auch, dass $c^{(3)}$ eine Tripelcurve ist.

Berlin. F. Schur.

IX. Verallgemeinerung eines geometrischen Paradoxons.*

(Hierzu Taf. I Fig. 6 u. 7.)

Zieht man zu einer Seite eines Quadrats eine Parallele, welche zwei Gegenseiten im Verhältniss 3:5 theilt (Fig. 6), theilt man ferner das kleinere Rechteck durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke, und das grössere durch eine Strecke, welche seine grösseren Seiten in den Verhältnissen 5:3 und 3:5 theilt, in zwei Trapeze, so kann man bekanntlich diese vier Theilfiguren zu einem Rechteck zusammenlegen (Fig. 7), dessen Fläche sich nur durch ein schmales Parallelogramm (1) von der des Quadrates unterscheidet, so dass anscheinend beide Flächen gleich, also $64 = 65$ ist.

Verallgemeinert man diese Eigenschaft der beiden Figuren, indem man statt der Zahlen 3 und 5 die Zahlen a_1 und a_2 setzt und die Bedingung festhält, dass der Flächenunterschied des Quadrats und des Rechtecks ± 1 sein soll, so gelangt man zu Resultaten von zahlentheoretischem Interesse, die im Folgenden dargelegt werden sollen.

Soll das Quadrat $(a_1 + a_2)^2$ sich nur um eine Einheit von dem Rechteck $a_2(2a_2 + a_1)$ unterscheiden, so muss sein

$$(a_1 + a_2)^2 \pm 1 = a_2(2a_2 + a_1)$$

oder

* Vergl. Jahrg. XIII, S. 162.

1) $$a_1^2 + a_1 a_2 \pm 1 = a_2^2.$$

Seien a_2 und a_3 zwei Zahlen von gleicher Beschaffenheit mit a_1 und a_2, nur dass in 1) die Zahl 1 das entgegengesetzte Vorzeichen hat, so ist

2) $$a_2^2 + a_2 a_3 \mp 1 = a_3^2.$$

Durch Addition von 1) und 2) erhält man

$$a_1^2 + a_2^2 + a_2(a_1 + a_3) = a_2^2 + a_3^2$$

oder

$$a_2(a_1 + a_3) = a_3^2 - a_1^2$$

oder, nach Division durch $a_3 + a_1$,

3) $$a_3 = a_1 + a_2.$$

Es kommt also nur darauf an, zwei Zahlen a_1 und a_2 zu finden, welche der Bedingung 1) genügen, um aus ihnen mittelst 3) beliebige neue Paare abzuleiten. Nun genügen offenbar die Werthe

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

für das untere Zeichen von 1, mithin haben je zwei aufeinander folgende Zahlen der Reihe

4) $$1.1.2.3.5.8.13.21.34.55\ldots$$

die Eigenschaft der Zahlen a_1 und a_2. Für die durch den oberen Bogen verbundenen Zahlen ist das Rechteck grösser, für die durch den unteren Bogen verbundenen Zahlen kleiner als das Quadrat.

Eigenschaften der Reihe 4).

1. Alle ihre Differenzreihen sind mit ihr identisch; sie kann also als arithmetische Reihe der Ordnung ∞ betrachtet werden.

2. Aus 1) folgt

$$a_1 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{5a_2^2 \pm 4}}{2}.$$

Demnach haben alle Zahlen x der Reihe die Eigenschaft, dass sie, in die Gleichung

5) $$5x^2 \pm 4 = y^2$$

eingesetzt, für y einen ganzzahligen Werth geben. (Die Reihe der Zahlen y ist die mit 3 und 4 beginnende Reihe von gleichem Bildungsgesetz.)

3. Die Identität

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 - 4a_1^2 a_2^2 = (a_2^2 - a_1^2)^2$$

giebt, wenn man aus 1)

$$a_2^2 - a_1^2 = a_1 a_2 \pm 1$$

darin einsetzt,

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 - 4a_1^2 a_2^2 = (a_1 a_2 \pm 1)^2,$$

und, wenn man auf beiden Seiten $8a_1^2 a_2^2 \pm 4a_1 a_2$ addirt,

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2 \pm 4a_1 a_2 &= 9a_1^2 a_2^2 \pm 6a_1 a_2 + 1 \\ &= (3a_1 a_2 \pm 1)^2.\end{aligned}$$

Also

6) $$\mp 4a_1a_2 = (a_1^2 + a_2^2)^2 + (2a_1a_2)^2 - (3a_1a_2 \pm 1)^2.$$

Demnach haben die Zahlen von der Form $4a_1a_2$ die Eigenschaft, dass sie sich in der durch 6) angegebenen Weise aus drei Quadratzahlen zusammensetzen lassen. Dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die für a_1 und a_2 gesetzten Zahlen in der Reihe 4) durch einen oberen oder einen unteren Bogen verbunden sind.

4. Bezeichnet man die Glieder der Reihe 4) der Reihe nach als das nullte, erste, zweite, ..., und versteht nun unter a_r das r^{te} Glied, so zeigt die Betrachtung der Reihe 4), deren erste 20 Glieder folgende sind:

1	13	144	1597
2	21	233	2584
3	34	377	4181
5	55	610	6765
8	89	987	10946,

dass allgemein

7) $$\frac{a_{kn-1}}{a_{n-1}} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Ist nun $kn = p$, wo p eine Primzahl bedeutet, so ist entweder

$$k = p,\ n = 1 \text{ oder } n = p,\ k = 1.$$

Im ersten Falle erhält man $\frac{a_{p-1}}{a_0}$ = einer ganzen Zahl, was selbstverständlich ist, da $a_0 = 1$. Im zweiten Falle folgt $\frac{a_{p-1}}{a_{p-1}}$ = einer ganzen Zahl, also 1. — Aus beiden Fällen aber entnimmt man das Resultat, dass a_{p-1} durch keine andere Zahl der Reihe theilbar ist. Die Zahlen a_{p-1} haben also für die Reihe 4) dieselbe Bedeutung, wie die Primzahlen für die Reihe der natürlichen Zahlen.

5. Auf die Reihe 4) reducirt sich auch die allgemeine, aus den Anfangsgliedern u und v (statt 1 und 1) gebildete Reihe, deren Bildungsgesetz durch 3) ausgedrückt wird. Ihre successiven Glieder sind nämlich

$$u,\quad u+v,\ 2u+v,\ 3u+2v,\ 5u+3v,\ \ldots.$$

Wenn also ihr erstes Glied durch s_1, ihr allgemeines Glied durch s_{n+1} bezeichnet wird, so ist

8) $$s_{n+1} = a_n u + a_{n-1} v.$$

6. Da der Unterschied zwischen den Flächen des Quadrates und des Rechtecks beständig durch die Zahl 1 ausgedrückt ist, in welchem der aus 4) entnommenen Verhältnisse man auch immer die Quadratseite theilen mag, so folgt, dass das Verhältniss dieses Unterschiedes zu einer der beiden Flächen um so kleiner wird, je grösser die gewählten Verhältnisszahlen sind. Denn denkt man sich dieselbe Quadratseite der Reihe nach in den durch 4) ausgedrückten Verhältnissen getheilt, so nimmt die Längeneinheit des Masses beständig ab, mithin auch die Flä-

cheneinheit, welche jenen Unterschied darstellt. — Es werden sich daher jene Verhältnisse einer festen Grenze nähern, für welche der Unterschied beider Flächen gleich Null ist.

Bezeichnen wir, um diese Grenze zu finden, die Quadratseite mit x und ihren grösseren Abschnitt mit y, so soll (vergl. d. Figur) sein

$$x^2 = y(x+y) \text{ oder } \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

oder

9) $$\frac{x-y}{y} = \frac{y}{x},$$

d. h.: Damit die Zusammensetzung eines Rechtecks aus den Stücken eines Quadrats (Fig. 6) genau vollzogen werden kann, muss die Quadratseite nach dem goldenen Schnitt getheilt sein.*

Aus 9) erhält man

$$\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{x-y}{y} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oder

$$\pm \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}; \quad \pm \frac{x-y}{y} = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{2}.$$

Nun ist

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 \ldots}},$$

mithin die successiven Näherungswerthe von

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{5} & \frac{2}{1} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{38}{17} \cdot \frac{161}{72} \ldots \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{21}{34} \cdot \frac{89}{144} \ldots \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{8} \cdot \frac{55}{34} \cdot \frac{233}{144} \ldots, \end{array}$$

d. h.: Bezeichnet man den k^{ten} Näherungswerth von $\sqrt{5}$ mit n_k, so ist

10) $$\frac{a_{3k}}{a_{3k-1}} = \frac{n_k + 1}{2}, \quad \frac{a_{3k-2}}{a_{3k-1}} = \frac{n_k - 1}{2}.$$

Die eben angegebenen Näherungswerthe von $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ enthalten noch nicht alle aus zwei successiven Zahlen der Reihe 4) darstellbaren Verhältnisse; es fehlt noch die Reihe $\frac{5}{3}$, $\frac{21}{13}$, ..., oder allgemeiner das Verhältniss $\frac{a_{3k+1}}{a_{3k}}$. Nun ist aber nach 3) $a_{3k+1} = a_{3k-1} + a_{3k}$, also

* Ueber den Zusammenhang der Reihe 4) mit dem Verhältnisse des goldenen Schnittes s. u. A. Zeising, Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers etc., Leipzig 1854.

$$\frac{a_{3k+1}}{a_{3k}} = \frac{a_{3k-1}}{a_{3k}} + 1 = \frac{2}{n_k + 1} + 1 \text{ (nach 10)}$$

oder

11) $$\frac{a_{3k+1}}{a_{3k}} = \frac{n_k + 3}{n_k + 1}.$$

7. Independente Bestimmung der Glieder der Reihe 4). Die Anwendung der Formel 3) erforderte, um ein Glied der Reihe 4) zu finden, die Kenntniss der beiden vorhergehenden Glieder. Die Formeln 10) und 11) gestatten die Berechnung eines Gliedes, wenn nur das unmittelbar vorhergehende bekannt ist. Es ist sogleich zu übersehen, dass diese Formeln auch zur independenten Bestimmung eines Gliedes der Reihe 4) dienen können. Diese Aufgabe soll im Folgenden gelöst werden.

Führt man statt des Näherungsbruches n_k seinen Zähler und Nenner ein, und setzt

12) $$n_k = \frac{p_k}{q_k},$$

so gehen die Formeln 10) und 11) über in

13) $$\frac{a_{3k}}{a_{3k-1}} = \frac{p_k + q_k}{2 q_k}, \quad \frac{a_{3k-2}}{a_{3k-1}} = \frac{p_k - q_k}{2 q_k}, \quad \frac{a_{3k+1}}{a_{3k}} = \frac{p_k + 3 q_k}{p_k + q_k}.$$

Die zweite dieser Formeln lautet, wenn man $k+1$ für k setzt:

$$\frac{a_{3k+1}}{a_{3k+2}} = \frac{p_{k+1} - q_{k+1}}{2 q_{k+1}}.$$

Nun haben nach dem Bildungsgesetz der Reihe 4) keine zwei aufeinanderfolgenden Glieder derselben einen gemeinsamen Factor; also sind die linken Seiten der letzten Formeln irreducible Brüche. Ferner ist $\frac{p_k}{q}$ als Näherungsbruch irreducibel, folglich auch $\frac{p_k + q_k}{q_k}$, und, da p_k und q_k nicht gleichzeitig ungerade sind, auch $\frac{p_k + q_k}{2 q_k}$. Mithin folgt aus der ersten der Formeln 13)

14) $$a_{3k} = p_k + q_k,$$

15) $$a_{3k-1} = 2 q_k;$$

ferner aus der dritten

16) $$a_{3k+1} = p_k + 3 q_k.$$

In den drei Formeln 14)—16) ist nun die independente Bestimmung der Glieder der Reihe 4) vollständig enthalten.

Ausserdem folgt noch durch Vergleichung der dritten und vierten Formel 13)

17) $$p_{k+1} - q_{k+1} = p_k + 3 q_k.$$

Setzt man endlich in 15) $k+1$ für k und wendet 3) an, so folgt

18) $$q_{k+1} = p_k + 2q_k.$$

Und eliminirt man q_{k+1} zwischen 17) und 18), so folgt

19) $$p_{k+1} = 2p_k + 5q_k.$$

Durch die Formeln 18) und 19) ist das Bildungsgesetz der zur Bestimmung der Glieder der Reihe 4) nöthigen Näherungsbrüche in kürzester Weise ausgedrückt.

8. Setzt man die Reihe 4) nach links fort, so erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} &a_{-1},\ a_{-2},\ a_{-3},\ a_{-4},\ a_{-5},\ a_{-6},\ \ldots \\ &= 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -3,\ 5,\ \ldots . \end{aligned}$$

Demnach ist, wenn n positiv und >1 ist,

20) $$a_{-n} = (-1)^n . a_{n-2}.$$

Indem man die durch 20) gegebene Bedeutung der negativen Indices festhält, findet sich weiter

21) $$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n &= \frac{a_{n-3} + 3a_{n-2} + a_{n-1}\sqrt{5}}{2}, \\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n &= (-1)^n . \frac{a_{n-3} + 3a_{n-2} - a_{n-1}\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \right.$$

Waren, im November 1878. V. Schlegel.

IX.

Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme.

Von

Dr. L. Geisenheimer,

Bergschuldirector in Tarnowitz.

Hierzu Taf. II Fig. 1—5.

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems wurde in den letzten Jahren in verschiedenen Abhandlungen von Burmester* und Grouard** untersucht. Die Burmester'schen Arbeiten zeichnen sich durch die elegante Anwendung der Methoden der neueren Geometrie auf die behandelten Probleme aus, während Grouard's Aufsätze nicht nur die Gesetze eines stetig bewegten veränderlichen Systems, sondern auch diejenigen über den Zusammenhang dreier discreten Lagen eines solchen Systems zu ermitteln suchen. Diese verschiedenen Untersuchungen haben nicht nur ein theoretisches Interesse, indem sie eine Reihe nicht unwichtiger Sätze für ähnliche ebene Systeme liefern, sondern können auch für rein praktische Probleme von Vortheil werden.

Die vorliegende Arbeit will die von Burmester und Grouard veröffentlichten Resultate weiter führen; insbesondere wird die Krümmung der zu beliebigen bewegten Curven gehörigen Enveloppen einer eingehenden Betrachtung unterworfen, die bekannte Savary'sche Formel auf ähnlich-veränderliche Systeme erweitert und für den Krümmungs-

* Burmester, Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1878, Bd. XXIII S. 108. Ferner: Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich veränderlicher und starrer ebener Systeme. Civilingenieur, Bd. XXIV.

** *Grouard, L'Institut, Journal universel,* 1869 S. 84; 1870 S. 27, 84, 124, 171.

radius der Hüllbahn eine einfache zusammenhängende Construction entwickelt werden. Ferner wird auf die Herleitung derjenigen Gesetze, welche für getrennte Lagen ähnlicher Systeme gelten, Rücksicht genommen. Die Ableitung der Resultate wird hauptsächlich mit Hilfe der neueren Geometrie erfolgen. Dieselben stellen zum Theil bereits bekannte oder neue Gesetze für die Bewegung eines stetig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems dar, zum Theil zeigen dieselben, dass mehrere, bisher nur für die unendlich nahen Lagen ähnlicher Systeme bekannte Gesetze für beliebige discrete Lagen ihre Geltung beibehalten.

---

§ 1.

Aus der momentanen Lage eines stetig bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems greifen wir (Fig. 1) eine geradlinige Punktreihe AB heraus; die Geschwindigkeiten der Punkte A und B seien bezüglich v und w. Wird dem System eine Geschwindigkeit $-v$ ertheilt, gelangt A zur Ruhe und B erhält die in Bezug auf A relative Geschwindigkeit r. Aus der Grundeigenschaft eines ähnlich-veränderlichen Systems, dass die Grenze des Verhältnisses zwischen der Drehung und der linearen Aenderung einer Geraden für alle Geraden des Systems einen constanten Werth habe, folgt, dass r und AB ein nur durch die Natur der betrachteten Bewegung bestimmtes Verhältniss und ebenso einen constanten Winkel bilden. Die Form des aus AB und r gebildeten Dreiecks ist also von der Lage des Punktes B unabhängig.

Der constante, von r und AB gebildete Winkel heisse der momentane Geschwindigkeitswinkel des Systems und werde im Verlaufe dieser Untersuchung mit φ bezeichnet.

Aus Fig. 1 ergiebt sich sofort, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten einer Geraden AB abermals in einer Geraden liegen, welche mit AB einen constanten Winkel bildet. Hieraus folgt:

1) Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase S eines in einer festen Ebene beliebig bewegten ähnlich-veränderlichen Systems bilden ein mit S ähnliches System.*

Wird die Geschwindigkeit w des beliebig gewählten Punktes B in zwei Componenten BH_1 und BJ_1 parallel zur Geraden AB und zur Rich-

---

* Vergl. Burmester, Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XXIII S. 111. Wir werden nach der am angeführten Orte von Burmester gebrauchten Bezeichnung das System der Endpunkte der Geschwindigkeiten als „Geschwindigkeitsphase" einführen.

tung von r zerlegt, so zeigt sich BH_1 als die schiefe Parallelprojection von v constant. Bezeichnen wir die Componente BH_1, entsprechend der bei starren Systemen üblichen Benennung, als Gleitungsgeschwindigkeit der Geraden AB, so erhalten wir die Sätze:

2) Die Gleitungsgeschwindigkeit ist für alle Punkte längs einer Geraden AB constant; die Endpunkte der unter dem Geschwindigkeitswinkel wirkenden Componenten bilden eine Gerade, welche mit AB einen unveränderlichen Winkel bildet.

Der Punkt M, in welchem die letzterwähnte Gerade AB schneidet, besitzt nur die Gleitungsgeschwindigkeit MN. In diesem Punkte, wie in B tragen wir den Geschwindigkeitswinkel φ nach entgegengesetzter Richtung, wie in B, an w und MN; die neuen Schenkel mögen sich in P schneiden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PBM und wBH_1 folgt:

$$PM : BH_1 = MB : BJ_1.$$

BH_1 ist constant, ebenso das Verhältniss $MB : BJ_1$, daher P ein fester Punkt; und da sich aus der Aehnlichkeit der ebengenannten Dreiecke auch die Proportionalität von PB und w, welche den constanten Geschwindigkeitswinkel einschliessen, ergiebt, folgt, dass P der Aehnlichkeitspol des Systems AB und der zugehörigen Geschwindigkeitsphase ist.

Ohne hier näher auf die Gesetze affin-veränderlicher Systeme einzugehen, bemerken wir, dass die bisher entwickelten Sätze für diese Systeme ihre Geltung beibehalten, wenn das System in eine einzige Gerade ausartet. Daher bleibt für affine Systeme speciell die im Vorstehenden entwickelte Construction zur Bestimmung des Punktes M einer Geraden, dessen Geschwindigkeit in diese Gerade fällt, bestehen. Diese Bemerkung kann dienlich sein, wenn die Enveloppe einer affin-veränderlichen Geraden aufgesucht werden soll; denn M ist der Berührungspunkt der Geraden mit ihrer Enveloppe.

Da bei der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems die Geschwindigkeiten zweier Punkte beliebig gewählt werden können, gelten die vorherigen Entwickelungen für beliebige ähnliche Systeme. Findet eine unendlich kleine Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems um den Geschwindigkeitspol P statt, rücken also die beiden Lagen unendlich nahe aneinander, so erhalten wir in den Verbindungslinien der homologen Punkte die von diesen Punkten beschriebenen Wege. Bezeichnen wir die Richtungsänderung (Drehung) des Systems mit ϑ, die Entfernung PB eines Punktes B vom Pole mit r, den beschriebenen Bogen mit s, so folgt

$$ds = \frac{r}{\sin\varphi}\, d\vartheta \text{ oder } v = \frac{r}{\sin\varphi} \cdot \omega,$$

wenn ω die momentane Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Wird der unendlich kleine Weg ds in zwei Componenten zerlegt, von welchen die eine in Richtung des Radius vector, die andere senkrecht zu demselben wirkt, so findet sich als momentane Aenderung der Längeneinheit des Systems

$$3)\qquad -\frac{ds}{r}.\cos\varphi = -\cot g\,\varphi\,.\,d\vartheta.$$

Für starre Systeme, bei welchen die Dimensionen unverändert bleiben, ist φ constant, gleich 90^0.

§ 2.

Ein ähnlich-veränderliches System S sei in drei verschiedenen discreten Lagen S_1, S_2 und S_3 verzeichnet (Fig. 2). Der Aehnlichkeitspol zwischen S_2 und S_1 sei P_{12}, zwischen S_2 und S_3 P_{23}. Durch die beiden genannten Pole P_{12} und P_{23} werde ein Kreis k_2 gelegt; den Punkten dieses Kreises im System S_2 entsprechen kreisförmige ähnliche Punktreihen k_1 und k_3 in S_1 und S_3. Die Kreise k_2 und k_1 schneiden sich in P_{12}, die Kreise k_2 und k_3 in P_{23}; die zweiten Schnittpunkte dieser Kreise seien bezüglich S_{12} und S_{23}. Aus der Theorie ähnlicher Figuren folgt, dass die Verbindungslinien zweier homologen Punkte dieser Kreise bezüglich durch S_{12} und S_{23} gehen müssen; sind also Q_1, Q_2 und Q_3 die Lagen eines Punktes Q in S_1, S_2 und S_3, muss Q_2Q_1 durch S_{12}, Q_2Q_3 durch S_{23} gehen. Demnach ist für alle Punkte des Kreises k_2 der Winkel, den diese Punkte mit den Lagen in S_1 und S_3 bilden, constant, und die Verbindungslinien der Lagen in S_1 und S_3 mit der Lage in S_2 gehen durch feste Punkte des Kreises k_2. Den für jeden Kreis über P_{21} und P_{23} constanten Winkel $180 - \angle Q_1Q_2Q_3 = \tau$ nennen wir den Contingenzwinkel des Punktes Q.

Dem Pole P_{12} entspreche in S_3 der Punkt $P^3{}_{12}$, dem Pole P_{23} in S_1 der Punkt $P^1{}_{23}$. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Schnittpunkte S_{12} und S_{23} in den Verbindungsstrecken $\overline{P_{23}P^1{}_{23}}$ und $\overline{P_{12}P^3{}_{12}}$, also in festen geraden Linien, weiter rücken, wenn sich k_2 ändert.

Werden in Q_1 und Q_3 an die Linien $S_{12}Q_1$ und $S_{23}Q_3$ feste Winkel μ_1 und μ_3 angetragen, so schneiden die neuen Schenkel dieser Winkel die Kreise k_1 und k_3 in festen Punkten; und da diese neuen Schenkel selbst einen constanten, durch μ_1, μ_3 und den Contingenzwinkel τ gegebenen Winkel bilden, folgt, dass die Schnittpunkte der neuen Schenkel wieder auf einer durch diese festen Punkte laufenden Kreislinie liegen.

Die Mitten der Linien Q_2Q_1 und Q_2Q_3 bilden ebenfalls ein zu S_2 ähnliches System; werden also in den Mitten dieser Verbindungsgeraden Senkrechte errichtet, so liegt deren Schnittpunkt nach der eben geführten Betrachtung auf einem Kreise m. Dieser Schnittpunkt ist aber der

Mittelpunkt des dem Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ umschriebenen Kreises. Die in den Mitten der Dreiecksseiten $Q_1 Q_2$ und $Q_2 Q_3$ errichteten Senkrechten schneiden sich in festen Punkten G_1 und G_2.

Wir sind demnach zu folgenden Sätzen geführt:

4) Der Contingenzwinkel aller Punkte eines durch die Pole P_{12} und P_{23} gelegten Kreises ist constant. Die Verbindungslinien der Punkte dieses Kreises mit den homologen gehen durch feste Punkte dieses Kreises. Die festen Punkte rücken auf geraden, durch die Pole laufenden Linien fort.

5) Die Krümmungsmittelpunkte M aller Kreise, welche den drei, einem Kreise k_2 angehörigen Punkten Q_1, Q_2, Q_3 umschrieben sind, bilden eine Kreislinie m.

Aus der Construction des Kreises m folgt, dass das System seiner Punkte demjenigen der Punkte in den Kreisen k_1, k_2 oder k_3 ähnlich ist.

Unsere Figur zeigt drei eigenthümliche, ähnlich-verwandte Kreisbüschel. Die Grundpunkte des Büschels in S_1 sind P_{12} und P^1_{23}, die des Büschels in S_2 sind P_{12} und P_{23}, und die des Büschels in S_3 P_{23} und P^3_{12}. Die Punkte G_1 und G_3 rücken auf zwei festen Linien fort, nämlich auf den in der Mitte von $\overline{P_{23} P^1_{23}}$ und $\overline{P_{12} P^3_{12}}$ zu diesen Linien errichteten Senkrechten t_{12} und t_{23}. Aus den Eigenschaften der Kreisbüschel folgt, dass die Punkte G_1 und G_3 auf diesen Geraden ähnliche Punktreihen bilden.

Der Kreis der Mittelpunkte, m, geht nur, wenn das System ein starres ist, durch die Pole P_{12} und P_{23}.* Fällt Q_2 in P_{12}, so rückt der Mittelpunkt M in den zweiten Schnittpunkt der Geraden t_{23} mit m; für andere Kreise m rückt der zu P_{12} gehörige Mittelpunkt auf der Geraden t_{23} fort. Das Entsprechende findet statt, wenn Q nach P_{23} rückt. Während also im Allgemeinen jedem Punkte Q_2 im System S_2 nur ein Mittelpunkt entspricht, entsprechen den Punkten P_{21} und P_{23} bezüglich die Linien t_{23} und t_{12}.

Wird der Radius des Kreises k_2 unendlich, artet also dieser Kreis in eine durch P_{12} und P_{23} gelegte Gerade g_2 aus, geht k_1 in die Gerade $\overline{P_{12} P^1_{23}} \equiv g_1$, k_3 in die Gerade $\overline{P_{23} P^3_{12}} \equiv g_3$ über. Ferner gehen die Strahlenbüschel $S_{12}(Q_1 \ldots)$ und $S^3_{23}(Q_3 \ldots)$ in Parallelstrahlenbüschel über, daher auch die Strahlenbüschel der in der Mitte von $Q_2 Q_1$ und $Q_2 Q_3$ errichteten Senkrechten. Da diese letzten Parallelstrahlenbüschel die unendlich ferne Gerade gemein haben, folgt als Ort der Mittelpunkte eine Gerade m_∞.

---

* Vergl. Rittershaus, Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung, Civilingenieur, XXIV. Bd. 1. Heft, wo sich eine ähnliche Untersuchung für starre Systeme findet.

6) **Der Geraden $\overline{P_{12}P_{23}}$ entspricht eine Gerade m_∞ als Ort der Mittelpunkte.**

Die Gerade m_∞ ist leicht zu finden, indem man die in m_∞ fallenden Mittelpunkte für P_{12} und P_{23} aufsucht. Man ziehe aus P_{12} eine Parallele zu t_{12} bis zum Schnitt mit t_{23}, ferner aus P_{23} eine Parallele zu t_{23} bis zum Schnitt mit t_{12}; so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte die Gerade m_∞.

Rücken die drei Lagen S_1, S_2 und S_3 unendlich nahe zusammen, so fallen auch die Pole P_{12} und P_{23} unendlich nahe. t_{12} und t_{23} fallen in eine Gerade, senkrecht zur Beschleunigung des Poles P_{12} oder P_{23}; S_{12} und S_{23} liegen in der Beschleunigungsrichtung des Poles. Bei diesem Uebergange zur Grenze gehen, wie ohne Weiteres klar ist, die bisher entwickelten Sätze in solche über die Krümmungsmittelpunkte der von den Punkten eines stetig bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems beschriebenen Trajectorien über. Da jedoch diese Sätze in den späteren Abschnitten in einer übersichtlicheren und ausführlicheren Weise entwickelt werden, sparen wir die Formulirung dieser Sätze über die Krümmungen der Trajectorien bis dahin.

Die Geraden $\overline{P_{12}S_{23}}$ und $\overline{P_{23}S_{12}}$ schneiden sich (Fig. 2) in einem Punkte K. Tritt an die Stelle des Kreises k_2 der durch die Punkte P_{12}, P_{23} und K gelegte Kreis w_2, so fallen für diesen die Schnittpunkte S_{12} und S_{23} mit K zusammen, der zum Kreise w_2 gehörige Contingenzwinkel ist also Null, die Punkte der Systeme S_1 und S_3, welche einem in der Kreislinie w_2 liegenden entsprechen, fallen also mit diesem in eine durch K gehende Gerade. Ferner lehrt eine sehr einfache geometrische Betrachtung, dass der zum Kreise k_2 gehörige Contingenzwinkel gleich dem Winkel ist, unter welchem sich die Kreise k_2 und w_2 schneiden. Hiernach ist w_2 auch der geometrische Ort derjenigen Punkte des Systems S_2, für welche der Contingenzwinkel sein Zeichen ändert.

Kreis w_2 wird der **Wendekreis** des Systems S_2 genannt. Wir gelangen zur Aufstellung folgender Sätze:*

7) **Der geometrische Ort aller Punkte im System S_2, welche mit ihren entsprechenden in S_1 und S_3 in einer Geraden liegen, ist ein durch die Pole P_{12} und P_{23} gehender Kreis.**

8) **Die Geraden, welche drei homologe Punkte enthalten, schneiden sich in einem Punkte dieses Kreises.**

9) **Der zu einer Kreislinie k_2 gehörige Contingenzwinkel ist gleich dem Schnittwinkel dieses Kreises mit dem Wendekreise.**

Der dem Wendekreise w_2 entsprechende Kreis m der Krümmungsmittelpunkte degenerirt in die unendlich ferne Gerade. Dem Wende-

* Durch Burmester und Grouard aufgestellt. Vergl. die angeführten Orte.

kreise w_2 gehören in S_1 und S_3 entsprechende Kreise w_1 und w_3 an, welche beide durch K gehen.

§ 3.

Eine entsprechende Reihe von Sätzen lässt sich für die durch drei homologe gerade Linien gebildeten Dreiecke entwickeln. (Fig. 3.)

Die durch den festen Punkt Q_2 gehende Gerade g_2 des Systems S_2 werde von den homologen Geraden g_1 und g_3 in den Punkten M und N geschnitten. Aus dem Pole P_{12} fällen wir auf die Geraden g_1 und g_2 die einander entsprechenden Senkrechten h_1 und h_2; die Fusspunkte seien R_1 und R_2. Da $\angle R_1 P_{12} R_2$ unveränderlich, folgt, dass $R_2 M$ zu $P_{12} R_2$ proportional ist; und da die Punkte R_2 in einem über $P_{12} Q_2$ als Durchmesser geschlagenen Kreise liegen, fallen auch die Schnittpunkte M aller durch den Punkt Q_2 laufenden Geraden in einen durch P_{12} und Q gehenden Kreis. Die Punkte P_{12}, R_1, M und R_2 bilden ein Kreisviereck, und daher ist $\angle P_{12} M Q$ constant gleich φ_{12}, wo φ_{12} den Winkel bedeutet, welchen die Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte (R_1 und R_2) mit dem Radius vector des Punktes in S_1 bildet.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Schnittpunkte N aller durch Q_2 laufenden Linien g_2 mit den homologen Linien des dritten Systems g_3 auf einem durch P_{23} und Q_2 gehenden Kreise liegen. Um den Mittelpunkt eines Kreises zu erhalten, welcher das aus g_1, g_2 und g_3 gebildete Dreieck berührt, sind die bei M und N von diesen Linien gebildeten constanten Winkel zu halbiren; diese Halbirungslinien gehen demnach durch feste Punkte der eben betrachteten Kreise der Schnittpunkte, schneiden sich also wieder in den Punkten eines Kreises.

10) Die Schnittpunkte M der durch einen festen Punkt Q gehenden Geraden g_2 mit ihrer homologen g_1 bilden einen durch den Pol und den festen Punkt Q_2 gehenden Kreis.

11) Die vier Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche die drei homologen Lagen der durch einen festen Punkt (Q) gehenden Geraden berühren, bilden vier Kreise. Rückt Q ins Unendliche, gehen diese vier Kreise in gerade Linien über.

Der erste dieser Sätze konnte auch durch die Bemerkung erhalten werden, dass die Geraden g_2 und g_1 gleichlaufend-ähnliche Strahlbüschel bilden. Aus der Construction für den letzten Kreis der Berührungsmittelpunkte folgt, dass das System seiner Punkte dem der Schnittpunkte M oder N ähnlich ist. Im Folgenden werde der zu Q gehörige Kreis der Schnittpunkte zwischen g_1 und g_2 mit K_g, der der zugehörigen Berührungsmittelpunkte mit K_m bezeichnet.

Soll der Kreis der Schnittpunkte von g_2 und g_1, K_g, nicht nur durch den Pol P_{12}, sondern auch durch den Pol P_{23} gehen, sollen also die Punkte

P_{12}, P_{23}, Q_2 und M ein Kreisviereck bilden, muss Punkt Q_2 auf einer durch den Pol P_{23} laufenden festen Geraden liegen, welche mit der Linie $\overline{P_{12}P_{23}}$ den Winkel φ_{12} bildet. Entsprechend findet sich, dass, wenn der Kreis der Schnittpunkte von g_2 und g_3 durch P_{12} gehen soll, Punkt Q_2 sich auf einer durch P_{12} laufenden festen Geraden, welche mit $\overline{P_{23}P_{12}}$ den Winkel φ_{32} bildet, befindet. Wird demnach durch den Schnitt S_2 dieser beiden festen Geraden durch P_{12} und P_{23} ein Kreis gelegt ($\varkappa$), so enthält dieser Kreis die Schnittpunkte der durch S_2 laufenden Linien g_2 mit g_1 und g_3; die durch den Punkt S_2 gehenden Linien des Systems S_2 schneiden sich also mit den homologen in den Systemen S_1 und S_3 in einem einzigen, auf $\varkappa$ gelegenen Punkte.

Da homologe Geraden constante Winkel bilden, schneiden die zu g homologen Geraden g_1 und g_3 den Kreis $\varkappa$ in festen Punkten S_1 und S_3, welche als Schnittpunkte homologer Linien zu S_2 homolog sind; und da die Geraden $\overline{S_1P_{13}}$ und $\overline{S_3P_{13}}$ homolog sind, folgt, dass auch der dritte Aehnlichkeitspol der drei Systeme, P_{13}, auf der Kreislinie $\varkappa$ liegt.

Wir haben hiermit die folgenden, zuerst von Grouard* aufgestellten Sätze erhalten:

12) Durch drei homologe Lagen eines beliebigen Punktes lassen sich stets drei homologe Gerade legen, welche sich in einem einzigen Punkte schneiden. Der geometrische Ort dieses Schnittpunktes ist die durch die drei Aehnlichkeitspole der Systeme S_1, S_2 und S_3 gelegte Kreislinie; die zweiten Schnittpunkte dieser Geraden mit dieser Kreislinie sind feste, sich entsprechende Punkte.

Die Schnittpunkte zweier homologen Parallelstrahlenbüschel bilden, wie man durch Specialisirung des Satzes 10) oder auch leicht direct findet, eine durch den Aehnlichkeitspol laufende Gerade. Construirt man demnach zu drei, sich auf $\varkappa$ schneidenden Geraden drei beliebige, aber homologe Parallelen (Fig. 3), so liegen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den entsprechenden Aehnlichkeitspolen auf Geraden, welche sich in einem Punkte des Kreises $\varkappa$ schneiden. Dies liefert folgenden, von Grouard für seine Untersuchungen über homologe Geraden als Ausgangspunkt aufgestellten Satz:

13) Werden die Ecken eines durch drei beliebige homologe Gerade gebildeten Dreiecks mit den entsprechenden Aehnlichkeitspolen der Systeme verbunden, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte des durch die Aehnlichkeitspole gelegten Kreises.

Wir nennen den durch die drei Aehnlichkeitspole gelegten Kreis $\varkappa$ den Rückkehrkreis der Systeme (*Cercle des rebroussements*);* die Recht-

* *L'Institut,* 1870 S. 27.

fertigung dieser Bezeichnung wird sich im Laufe unserer Untersuchung ergeben. Dieser Kreis hat für die Betrachtung der von einem ähnlich-veränderlichen System vollführten Bewegungen gleiche Wichtigkeit, wie der Wendekreis.

Der Rückkehrkreis $\varkappa$ geht durch die drei Aehnlichkeitspole P_{12}, P_{23} und P_{31}; der Wendekreis durch die Punkte P_{12}, P_{23} und den, dem dritten Pole P_{31} in S_2 entsprechenden Punkte P^2_{31}. Bei starren Systemen liegen P_{31} und P^2_{31} symmetrisch zur Geraden $\overline{P_{12}P_{23}}$. Hieraus folgt:

14) In starren Systemen sind der Wendekreis und Rückkehrkreis zur Verbindungslinie zweier Pole symmetrisch.

Hieraus ergiebt sich nach einem bekannten Satze über die Lage des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks zum umschriebenen Kreise desselben die Folgerung:

15) In starren Systemen schneiden sich alle Geraden, welche drei homologe Punkte enthalten, im Höhenschnittpunkte des aus den drei Polen der Systeme gebildeten Dreiecks.

Rücken die drei Lagen S_1, S_2 und S_3 unendlich nahe zusammen, so gehen die Sätze in solche über die Krümmungen der von den Geraden eines stetig bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems beschriebenen Enveloppen über. Die Formulirung dieser Sätze wird später erfolgen.

Das aus drei homologen Strahlen der Punkte Q_1, Q_2, Q_3 gebildete Dreieck bildet also mit den Verbindungslinien seiner Ecken je mit P_{12}, P_{13}, P_{23}, welche sich alle drei in einem Punkte U des Rückkehrkreises schneiden, ein der Form nach unveränderliches System. Hieraus folgt:

16) Die Seiten, und daher auch die Radien des Berührungskreises sind der Verbindungsstrecke einer Ecke (M) mit diesem Punkte U proportional.

Die Strecke $MP_{12}U$ und der nach M gehende Radius des Berührungskreises bilden also ein in den Winkeln unwandelbares Dreieck, dessen dritte Seite demnach durch einen festen Punkt H des Rückkehrkreises geht. Hieraus folgt:

17) Alle Kreise K_m gehen durch H.*

Construiren wir zu drei Punkten Q des Systems S die zugehörigen Kreise K_m, so sind diese mit den entsprechenden Kreisen K_g ähnlich. Schneiden sich aber drei Kreise (K_m) in einem Punkte (H), so lassen sich nach einem bekannten planimetrischen Satze beliebig viele Dreiecke construiren, deren Seiten durch die zweiten Schnittpunkte der Kreise gehen, deren Ecken auf den Kreislinien liegen und welche alle zum Dreieck der Kreismittelpunkte ähnlich sind. Demnach ist das Dreieck

* Vergl. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc., Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XIX S. 165 flgg.

aus den Mittelpunkten der K_m zum Dreieck der Systempunkte Q ähnlich; und da, wie sich leicht aus der Constanz von φ_{12} ergiebt, auch das System der Mittelpunkte der Kreise K_g zu dem der Punkte Q ähnlich ist, folgt:

18) Die Mittelpunkte der Kreise K_g und K_m bilden ein zu S_1 ähnliches System.

Die drei homologen Strahlen S_1Q_1, S_2Q_2, S_3Q_3 schneiden sich in einem Punkte V des Rückkehrkreises, welcher mit dem zugehörigen Mittelpunkte des Berührungskreises zusammenfällt, also sowohl dem Kreise K_g, wie K_m angehört. Dieser Punkt ist also der zweite, sich selbst entsprechende Schnittpunkt der beiden Kreise. Sollen die beiden Schnittpunkte der Kreise K_g und K_m in V zusammenfallen, so muss das Dreieck $P_{12}Q_2V$ constante Winkel enthalten, nämlich in P_{12} den festen Winkel, welchen der nach einer Dreiecksspitze M gezogene Radius des Berührungskreises mit der Dreiecksseite g_1 bildet, und in V den Winkel φ_{12}. Demnach muss Q_2 in einer zum Rückkehrkreise ähnlichen, durch P_{12} gehenden Kreislinie liegen.

19) Diejenigen Punkte Q, deren entsprechende Kreise K_g und K_m einander berühren, liegen auf einem Kreise.

Betrachten wir, was nach dem Vorstehenden erlaubt ist, den festen Punkt H als Grenze der Kreise K_m, so folgt, da für diesen Grenzkreis V mit H zusammenfällt, dass H der Ort der Mittelpunkte für sämmtliche Strahlen eines Strahlbüschels ist, dessen Scheitelpunkt bezüglich in HS_1, HS_2, HS_3 liegt.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die sämmtlichen Entwickelungen dieses Abschnittes ungeändert bleiben, wenn wir statt der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche das aus drei entsprechenden Geraden g_1, g_2, g_3 gebildete Dreieck berühren, irgendwelche in diesen Dreiecken ähnlich gelegene Punkte betrachten.

§ 4.

Die geometrische Differenz der Verbindungsstrecken eines Punktes Q_2 in S_2 mit den homologen Lagen Q_1 und Q_3 werde im Folgenden als „Beschleunigung des Punktes Q_2" eingeführt.

Da S_1 und S_3 zum System S_2 ähnlich, ergeben sich die Coordinaten der Punkte Q_1 und Q_3 in einem beliebigen Coordinatensystem als lineare Functionen der Coordinaten des Punktes Q_2; ergänzen wir demnach Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ zum Parallelogramm, so stellen sich auch die Coordinaten des vierten Eckpunktes desselben als lineare Ausdrücke derjenigen des Punktes Q_2 dar. Das System der Endpunkte der Beschleunigungen ist also zu S_2 affin.

Das bisher Gesagte gilt allgemein für affin-veränderliche Systeme; es ist jedoch leicht nachzuweisen, dass für ähnlich-veränderliche Systeme die eben nachgewiesene Verwandtschaft der Affinität in die der Aehnlichkeit übergeht. Wir bezeichnen zu dem Zwecke (Fig. 4) den Radius vector $\overline{P_{12}Q_2}$ mit r_1, $\overline{P_{23}Q_2}$ mit r_2; ferner bezeichnen wir die Grösse der constanten Verhältnisse $\frac{Q_1Q_2}{P_{12}Q_2}$ und $\frac{Q_2Q_3}{P_{23}Q_2}$ bezüglich mit c_1 und c_2. Weiter ist in Fig. 4 die Strecke $-Q_1Q_2$ mit v benannt worden. Die Gerade $\overline{P_{12}P_{23}}$ werde nach dem Verhältniss $c_2:c_1$ harmonisch getheilt und über die Theilpunkte ein Halbkreis l geschlagen; derselbe schneidet den Wendekreis w_2 orthogonal. Für einen der Schnittpunkte beider Kreise haben die Verbindungsstrecken mit den homologen Punkten in S_1 und S_3 entgegengesetzte, für den andern gleiche Richtung; für den ersteren mit P_ψ bezeichneten ist die Beschleunigung also Null. Für das Kreisviereck $P_{12}P_{23}P_\psi Q_2$ ergiebt sich, die festen Strecken $\overline{P_{12}P_\psi}$ und $\overline{P_{23}P_\psi}$ mit s_1 und s_2 bezeichnend,

$$\overline{P_{12}P_{23}}\,.\,\overline{P_\psi Q_2} = r_2 s_1 - r_1 s_2$$

oder, wie sich durch leichte Umformung ergiebt,

$$20)\qquad \overline{P_{12}\,.\,P_{23}}\,.\,\overline{P_\psi Q_2} = \frac{s_1}{c_2}\,.\,(\overline{Q_2Q_3} - \overline{Q_2Q_1}).$$

Für die auf dem Wendekreise gelegenen Punkte ist $\overline{Q_2Q_3} - \overline{Q_2Q_1}$ die Beschleunigung. Da ferner die Richtung dieser Beschleunigung, mit der der Verbindungsstrecken zusammenfallend, mit der Geraden $\overline{P_\psi Q_2}$ einen constanten Winkel bildet, ergiebt sich, dass der beliebige Strahl $\overline{P_\psi Q_2}$ von S_2 mit dem entsprechenden Strahl im Systeme der Beschleunigungsendpunkte einen unveränderlichen Winkel bildet; und dies ist nur möglich, wenn das System der Endpunkte der Beschleunigung dem System S_2 ähnlich ist.

Nennen wir mit Burmester das System der Endpunkte der Beschleunigungen die Beschleunigungsphase, so erhalten wir folgendes Resultat:

21) Die Beschleunigungsphase bildet ein zum System S_2 der Punkte ähnliches System.

Der vorgeführte Beweis bleibt giltig, wenn wir die Beschleunigungen aller Punkte nach einem bestimmten Verhältniss vergrössern.

Punkt P_ψ, dessen Beschleunigung Null ist und den Aehnlichkeitspol des Systems S_2 und der Beschleunigungsphase bildet, heisst der Beschleunigungspol des Systems S_2. Aus Fig. 4 und Gleichung 20) ergeben sich die zur Bestimmung der Beschleunigungsphase nöthigen Constanten.

Legt man durch den Beschleunigungspol und einen der Geschwindigkeitspole (etwa P_{12}) Kreise, so gehen für alle auf dieser Kreislinie liegende Punkte Q_2 die Verbindungsstrecken mit dem entsprechenden

Punkte (Q_1) durch einen festen Punkt; ebenso gehen die Beschleunigungen für alle Punkte dieser Kreislinie durch einen festen Punkt des Kreises. Aendert sich dieser Kreis, so rücken die beiden Schnittpunkte auf zwei festen, durch die nicht entsprechenden Pole gelegten Geraden fort. Diese beiden Geraden schneiden sich auf dem Wendekreise und hieraus folgt:

22) Für alle Punkte eines durch den Beschleunigungspol und einen Geschwindigkeitspol gelegten Kreises bildet die Verbindungsstrecke der homologen Punktlagen mit der Beschleunigung einen constanten Winkel, welcher gleich dem Schnittwinkel dieses Kreises mit dem Wendekreise ist. [Vgl. § 2, 9)].

Für den über die Theilpunkte von $\overline{P_{12}P_{23}}$ gelegten Kreis l halbirt die Beschleunigung den Winkel der gleichen Verbindungsstrecken von Q_2 mit Q_1 und Q_3. Für den Radius ϱ dieses Kreises findet sich, $\overline{P_{12}P_{23}}$ mit u bezeichnend,

$$23)\qquad \varrho = u \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2}.$$

Werden im Vorstehenden die Beschleunigungen der Punkte im reciproken Verhältniss der für P_{12} und P_{23} als gleich angenommenen Bewegungsdauer zur Zeiteinheit vergrössert und lässt man die Lagen S_1, S_2 und S_3 unendlich nahe rücken, so erhält man statt der im Vorigen geometrisch definirten Beschleunigung die Darstellung der in der Mechanik gebräuchlichen Grösse der Beschleunigung. Die entwickelten Sätze bleiben völlig ungeändert; nur fallen die beiden Geschwindigkeitspole P_{12} und P_{23} und ebenso die beiden Systeme von Kreisen durch je einen Geschwindigkeitspol und den Beschleunigungspol in ein Kreisbüschel zusammen. Für die Punkte eines jeden Kreises in diesem Büschel ist der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung constant, und zwar gleich dem Schnittwinkel dieses Kreises mit dem Wendekreise; und da bei dem Uebergange zur Grenze der den Wendekreis orthogonal schneidende Kreis l ebenfalls durch den Pol der Geschwindigkeiten geht, folgt, dass Kreis l der geometrische Ort derjenigen Punkte ist, für welche Geschwindigkeit und Beschleunigung senkrecht zueinander stehen. Dieser Kreis l führt den Namen Lothkreis; derselbe ist also der Ort aller Punkte, für welche die Tangentialbeschleunigung verschwindet, wie der Wendekreis der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Normalbeschleunigung gleich Null ist.

Für den Radius ϱ des Lothkreises ergiebt sich nach 23), wenn wir $\lim P_{12}P_{23}$ mit du, also die Geschwindigkeit, mit welcher der Pol der Geschwindigkeit fortschreitet (die Wechselgeschwindigkeit), mit $\frac{du}{dt}$ bezeichnen,

$$24)\qquad \varrho = \frac{c}{2} \cdot \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dc}{dt}}, \text{ wo } c = \frac{\omega}{\sin \varphi}.$$

Ferner ergiebt sich aus Fig. 4 der Winkel δ, welchen die Verbindungslinie des Beschleunigungspols mit dem Geschwindigkeitspol und die Poltangente bilden,

$$cotg\, \delta = \lim \frac{s_1 - s_2}{s_2 \sin \varkappa},$$

wo $\varkappa$ der vom Wendekreise über du gefasste Peripheriewinkel,

$$25)\qquad cotg\, \delta = \frac{dc}{c \cdot \varkappa} = \frac{\frac{dc}{dt}}{c \cdot \frac{du}{dt}} \cdot \mathfrak{D}_1,$$

wenn $\mathfrak{D}_1$ der Durchmesser des Wendekreises. [Vergl. § 5, 32).]

Hieraus ergiebt sich der Beschleunigungswinkel ψ, d. h. der constante Winkel, welchen die Beschleunigung eines Punktes mit dem aus dem Beschleunigungspol laufenden Radius vector bildet,

$$26)\qquad \psi = \varphi - \delta.$$

Endlich ergiebt sich aus 20) für das unveränderliche Verhältniss der Beschleunigung zum Radius vector aus dem Beschleunigungspol, die Beschleunigung mit p bezeichnend,

$$27)\qquad p = \frac{c}{s} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \overline{P_\psi Q_2},$$

s bedeutet hier die Entfernung von Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol.

Durch die Gleichungen 24)—27) ist das System der Beschleunigungsphase bestimmt.

In der Entwickelung der vorstehenden Sätze ist nur vorausgesetzt worden, dass S_1, S_2 und S_3 ähnliche Systeme seien. Und da das System der Beschleunigungsphase, mögen die genannten Lagen discret oder unendlich nahe sein, dem System der Punkte wieder ähnlich wird, lassen sich die vorstehenden Erörterungen unverändert auf zwei getrennte oder unendlich nahe Beschleunigungsphasen anwenden, deren Ergebniss die entsprechenden Sätze für die Beschleunigungen dritter Ordnung u. s. w. sind. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zur Aufstellung der folgenden, sowohl für getrennte, wie für unendlich nahe Lagen geltenden Gesetze:*

* Für beliebige Lagen eines starren Systems von Rittershaus, für die unendlich nahen Lagen eines ähnlich-veränderlichen Systems von Grouard nachgewiesen. Vergl. die angeführten Orte.

28) **Die Endpunkte für die Beschleunigungen beliebiger Ordnung der Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems S bilden ein zu S ähnliches System.**

Aus diesem allgemeinen Satze ergiebt sich:

29) **Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Beschleunigungen zweier gleicher oder verschiedener Ordnungen einen bestimmten Winkel bilden, ist ein Kreis durch die Pole dieser Beschleunigungen. Der Schnittwinkel zweier derartiger, durch die beiden gleichen Pole gehenden Kreise ist gleich der Differenz der zu diesen Kreisen gehörigen, von den Beschleunigungen gebildeten Winkel.**

§ 5.

Im Folgenden soll die Krümmung der durch einen Punkt des ähnlich-veränderlichen Systems beschriebenen Trajectorie bestimmt werden. (Fig. 2.)

Ein Punkt Q des ähnlich-veränderlichen Systems habe in drei aufeinanderfolgenden Zeitmomenten die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 angenommen. Die Geschwindigkeitspole zur Ueberführung von Q_1 nach Q_2, und von Q_2 nach Q_3 seien wieder P_{12} und P_{23}, die zugehörigen Drehungen ϑ_{12} und ϑ_{23}. Ferner werde $\angle P_{12} Q_1 Q_2$ mit φ_{12}, $\angle P_{23} Q_2 Q_3$ mit φ_{23} bezeichnet. Die Radii vectores $\overline{P_{12} Q_1}$ und $\overline{P_{23} Q_2}$ seien r_1 und r_2.

Die Verbindungslinien $Q_1 Q_2$ und $Q_2 Q_3$ gehen in der Grenzlage in eine Gerade über, welche mit dem Radius vector des Punktes Q_2 den momentanen Geschwindigkeitswinkel bildet und die Tangente der von diesem Punkte beschriebenen Trajectorie ist. Nennen wir diesen momentanen Geschwindigkeitswinkel φ, so ergiebt sich für das Grenzverhältniss der linearen Aenderung des Systems $-\operatorname{cotg}\varphi . d\vartheta$, wenn $d\vartheta$ die zugehörige unendlich kleine Drehung, also die Grenze der aufeinanderfolgenden Drehungen ϑ_{12} und ϑ_{23} bedeutet.

Hiernach folgt aus Dreieck $P_{12} Q_1 Q_2$ bis auf Grössen höherer Ordnung

$$\operatorname{cotg} P_{12} Q_2 Q_1 = \frac{r_1 - r_1 \operatorname{cotg}\varphi_{12} . \vartheta_{12} - r_1 \cos\vartheta_{12}}{r_1 \sin\vartheta_{12}}$$

oder

$$\operatorname{cotg} P_{12} Q_2 Q_1 = \operatorname{tg}\frac{\vartheta_{12}}{2} - \operatorname{cotg}\varphi_{12} \cdot \frac{\vartheta_{12}}{\sin\vartheta_{12}}.$$

Für unendlich kleine Drehungen ist $\angle P_{12} Q_2 Q_1$ bis auf unendlich kleine Grössen gleich $180 - \varphi_{12}$; es sei

$$\angle P_{12} Q_2 Q_1 = 180 - \varphi_{12} + \varepsilon_1,$$

so müsste sein

$$\operatorname{cotg} P_{12} Q_2 Q_1 = -\operatorname{cotg}\varphi_{12} - \frac{\varepsilon_1}{\sin^2\varphi_{12}},$$

demnach

$$\varepsilon_1 = -\sin^2 \varphi_{12} \cdot \frac{\vartheta_{12}}{2}.$$

Wird $\angle P_{23} Q_2 Q_3$ gleich $\varphi_{23} + \varepsilon_2$ gesetzt, ergiebt sich durch eine entsprechende Rechnung

$$\varepsilon_2 = -\sin^2 \varphi_{23} (\tfrac{1}{2} + cotg^2 \varphi_{23}) \vartheta_{23}.$$

Hieraus folgt für die Grösse des von $Q_1 Q_2$ und $Q_2 Q_3$ gebildeten Contingenzwinkels $d\tau$, wenn die Grenze für $\angle P_{12} Q_2 P_{23}$ mit $d\varkappa$ bezeichnet wird,

$$d\tau = 180 - d\varkappa - (\angle P_{21} Q_2 Q_1 + \angle P_{23} Q_2 Q_3),$$

und da sich, statt ϑ_{12} und ϑ_{23} das Differential $d\vartheta$ einführend,

$$\angle P_{21} Q_2 Q_1 + \angle P_{23} Q_2 Q_1 = 180 + (\varphi_{23} - \varphi_{12}) - d\vartheta$$

ergiebt, folgt

30) $$d\tau = d\vartheta - d\varphi - d\varkappa.$$

$d\varkappa$ ist für alle Punkte in der Peripherie eines die Poltangente $\overline{P_{12} P_{23}}$ im Pol berührenden Kreises constant. Demnach folgt:

31) Für alle Punkte einer die Poltangente im Pol berührenden Kreislinie ist der Contingenzwinkel der beschriebenen Trajectorie constant.

Der Satz gilt auch für discrete Lagen; vergl. § 2, 4.

Diejenige Kreislinie, für welche der Contingenzwinkel verschwindet, bildet den Wendekreis des Systems. Für diesen ist also

$$d\varkappa = d\vartheta - d\varphi.$$

Wird die Fortschreitung des Geschwindigkeitspoles, $\overline{P_{12} P_{23}}$, mit du bezeichnet, folgt für den Durchmesser des Wendekreises

32) $$\mathfrak{D}_1 = \frac{du}{d\vartheta - d\varphi}.$$

Für die Punkte der Poltangente wird $d\varkappa = 0$, daher $d\tau = d\vartheta - d\varphi$.

Die zur Trajectorie des Punktes Q_2 errichtete Normale bildet mit dem Radius vector dieses Punktes einen constanten Winkel, nämlich das Complement des Geschwindigkeitswinkels. Der Krümmungsradius ϱ der Trajectorie wird *

33) $$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta - d\varphi - d\varkappa}.$$

Da $ds = \frac{r}{\sin\varphi} . d\vartheta$, also ds mit r proportional ist, folgt, dass die Krümmungsmittelpunkte für die Trajectorien, welche die Punkte eines die Poltangente im Pol berührenden Kreises beschreiben, ein zu diesen Punkten ähnliches System bilden. Einer dieser Kreise degenerirt in die Poltangente $\overline{P_{12} P_{23}}$: **

---

* In ähnlicher Form zuerst von Grouard aufgestellt. Vergl. *L'Institut*, 1869 S. 84.

** Von Burmester gefunden. Vergl. Civilingenieur, XXIV. Bd. 2. Heft.

34) **Die Systempunkte einer Phase, welche auf einer die Poltangente im Pol berührenden Kreislinie liegen, beschreiben momentan Bahnelemente, deren Krümmungsmittelpunkte sich auf einem durch den Geschwindigkeitspol gehenden Kreise befinden.**

35) **Den Systempunkten der Poltangente entspricht im System der Krümmungsmittelpunkte eine durch den Pol gehende Gerade.**

Diese Resultate sind specielle Fälle der in § 2, 5) und 6) für discrete Lagen gefundenen Sätze.

Bildet der Radius vector r eines beliebigen Punktes mit der Poltangente den Winkel α, so folgt

$$d\varkappa = \frac{du \,.\, \sin\alpha}{r}.$$

Diesen Werth in Gleichung 33) einsetzend, ergiebt sich

$$\frac{1}{\varrho \,.\, \sin\varphi} = \frac{1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}}{r} - \frac{\frac{du}{d\vartheta}\sin\alpha}{r^2}.$$

Statt ϱ führen wir in diese Gleichung eine neue Variable ein, welche sich durch die Proportion bestimmt

$$\varrho \,.\, \sin\varphi : R + r = 1 : 1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}.$$

Gleichung 33) nimmt dann die Gestalt an

$$36) \qquad \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) . \sin\alpha = \frac{1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\frac{du}{d\vartheta}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt einen constanten Werth, nämlich das Reciproke für den in 32) bestimmten Durchmesser des Wendekreises dar. **Gleichung 36) hat genau die Form der für starre Systeme giltigen Savary'schen Formel; sie stellt die Ausdehnung dieser Formel auf ähnlich-veränderliche Systeme dar.**

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich eine einfache Methode für die Bestimmung der Krümmung einer beliebigen Trajectorie. Haben wir in einer der hier für starre Systeme als bekannt vorausgesetzten Weisen R gesucht, wenn r und der Wendekreis des ähnlich-veränderlichen Systems gegeben war, so bilden ϱ und $(R+r)$ ein in seinen Winkeln von der Lage des Punktes Q **unabhängiges** Dreieck.

In Fig. 5 ist der Geschwindigkeitspol mit P, der Endpunkt von R mit V, von ϱ mit M, der zweite Schnittpunkt von r und dem Wendekreise w mit J bezeichnet. In dem letztgenannten Punkte tragen wir an

JQ den constanten Winkel QMV an, so dass $\triangle QJB \sim \triangle QMV$ wird; es findet also die Proportion statt

$$QJ : QB = QM : QV.$$

Nach der Savary'schen Formel ist

$$\overline{PQ}^2 = QJ.QV,$$

daher

$$r^2 = \varrho . QB. \tag{37}$$

Da $\angle QJB$ constant, schneidet BJ den Wendekreis in einem festen Punkte (H). ϱ lässt sich demnach, falls dieser Punkt H gegeben, als dritte Proportionale zu r und QB construiren.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich auch eine Lösung der Aufgabe, die Bahnelemente für die Trajectorie eines beliebigen vierten Punktes in einem ähnlich-veränderlichen System zu bestimmen, wenn diese Elemente für drei Punkte gegeben sind. Der momentane Pol der Geschwindigkeit ergiebt sich zunächst in bekannter Weise durch die Bedingung, dass von ihm aus die drei gegebenen Bahntangenten unter gleichem Winkel erscheinen. Ist P gefunden, so ergeben sich mit Hilfe von 37) die drei Punkte B und wir suchen denjenigen Punkt H, von welchem aus gesehen die drei Strecken QB in B mit den Sehstrahlen gleiche Winkel bilden. Dieser Punkt H liegt im Wendekreise; die Verbindungslinie von H mit B schneidet den entsprechenden Radius vector ebenfalls in Punkten dieses Kreises. Die Umkehrung des letzten Theiles unserer Construction liefert zu einem beliebigen vierten Punkte den Krümmungsradius.

Aus Formel 37) ergiebt sich übrigens, dass QB eine zur Beschleunigung des Punktes Q proportionale Grösse darstellt.

Die den Punkten des Wendekreises entsprechenden Krümmungsmittelpunkte fallen unendlich weit; dieselben bilden die unendlich fernen Punkte eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt auf dem Wendekreise liegt. Ebenso entsprechen den unendlich entfernten Punkten des ähnlich-veränderlichen Systems im Allgemeinen Krümmungsmittelpunkte, welche die unendlich entfernten Punkte eines Strahlbüschels bilden, dessen Mittelpunkt auf einem Kreise liegt, welcher in Bezug auf die Poltangente zum Wendekreise symmetrisch ist.

§ 6.

Mit dem ähnlich-veränderlichen System S bewege sich (Fig. 5) eine Curve C, deren Dimension und Lage sich also nach den Gesetzen der Bewegung von S ändere. Die aufeinanderfolgenden Lagen, welche C einnimmt, werden von einer Enveloppe umhüllt, deren Elemente sich, wie wir nachweisen werden, in jedem Augenblicke durch die Elemente bestimmen, welche zum berührten Punkte der eingehüllten Curve gehören.

Wir werden zunächst zeigen, dass in jedem beliebig veränderlichen System die Enveloppe einer Curve C mit der Enveloppe der Bahnen, welche die Punkte von C beschreiben, zusammenfällt.

Einem Punkte u, w der festen Ebene entspreche in jeder Lage des veränderlichen, bewegten Systems ein Punkt xy derart, dass

$$x = F(u, w, t), \quad y = G(u, w, t),$$

wo t ein die Lagenänderung des Systems bestimmender Parameter sei. Einer beliebigen Curve $\varphi(u, w) = 0$ entspricht in jedem Augenblicke eine Curve in dem sich ändernden System der xy, deren Gleichung implicite durch die vorstehenden Ausdrücke für x und y dargestellt wird. Um die Einhüllende dieser sich ändernden Curve zu finden, sind die Gleichungen partiell nach dem Parameter t zu differentiiren; x und y sind also als constante, u und w als variable Grössen zu behandeln. Die abgeleiteten Gleichungen lauten

$$\frac{\partial F}{\partial u}.du + \frac{\partial F}{\partial w}.dw + \frac{\partial F}{\partial t}.dt = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u}.du + \frac{\partial G}{\partial w}.dw + \frac{\partial G}{\partial t}.dt = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}.du + \frac{\partial \varphi}{\partial w}.dw = 0.$$

Diese drei Gleichungen liefern durch die Elimination der Differentiale eine neue Gleichung zwischen u, w, t, welche in Verbindung mit den Gleichungen für x und y und $\varphi(u, w) = 0$ die Gleichung der Enveloppe zwischen x, y finden lässt.

Die vorstehenden Gleichungen stellen jedoch auch die Enveloppe der von einem beliebigen Punkte uw der C beschriebenen Curve dar. Die von sämmtlichen Punkten der Linie $\varphi(u, w) = 0$ beschriebenen Curven bilden eine Curvenschaar, deren Enveloppe sich also durch genau dieselbe Rechnung ergiebt, wie vorhin ausgeführt wurde. Demnach folgt:

38) Die Enveloppe einer gleichzeitig bewegten und geänderten Curve ist auch die Enveloppe der Bahnen, welche die Punkte einer eingehüllten Curve beschreiben. Der Berührungspunkt und die Tangente zwischen der Enveloppe und einer Lage der veränderlichen, sich bewegenden Curve fällt mit dem Berührungspunkte und der Tangente der Bahn dieses Berührungspunktes zusammen.

Indem dieser allgemeine Satz auf das ähnlich-veränderliche System angewendet wird, ergiebt sich:

39) Eine ähnlich-veränderliche Curve wird in irgend einer Phase von ihrer Enveloppe in Punkten berührt, deren Tangenten mit den zugehörigen, aus dem Geschwindigkeitspol gezogenen Radii vectores den momentanen Geschwindigkeitswinkel bilden.

Hiernach lässt sich dieser Berührungspunkt, wenn die bewegte Curve eine Gerade, in sehr einfacher Weise construiren. Die Auffindung dieses

Berührungspunktes, welcher nur Gleitungsgeschwindigkeit besitzt, kann auch nach der in § 1 hergeleiteten Weise erfolgen.

Specielle Folgen von 39) bilden die Sätze:

40) Die Berührungspunkte eines Systems concentrischer Kreise mit ihren Enveloppen bilden in jeder Phase einen durch den momentanen Geschwindigkeitspol und den Mittelpunkt des Systems laufenden Kreis.

41) Die Berührungspunkte der Strahlen eines Strahlbüschels mit ihren Enveloppen bilden in jeder Phase einen durch den momentanen Geschwindigkeitspol und den Mittelpunkt des Büschels laufenden Kreis. Die Berührungspunkte paralleler Geraden bilden eine durch den momentanen Geschwindigkeitspol laufende Gerade.

Satz 41) ist ein specieller Fall des in § 3, 10) für drei discrete Lagen entwickelten Satzes.

Wird in einem ähnlich-veränderlichen System der Geschwindigkeitswinkel momentan gleich Null, findet also momentan nur Gleitung, keine Drehung statt, so fällt der Berührungspunkt einer beliebigen krummen Linie mit ihrer Enveloppe in den Berührungspunkt der an die betreffende Phase dieser Curve vom Geschwindigkeitspol gelegten Tangente. Der Berührungspunkt einer beliebigen Geraden fällt ins Unendliche; die Geraden des ähnlich-veränderlichen Systems gehen also alle bei denselben Phasen in die Asymptoten ihrer Enveloppen über.

Wir wenden uns zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Enveloppe. Da zur Aufsuchung desselben nur Ableitungen zweiter Ordnung nöthig werden, dürfen wir die eingehüllte und einhüllende Curve durch die Krümmungskreise ihres Berührungspunktes ersetzen. Es bedeute in Fig. 5 Q_2 diesen Berührungspunkt, O_2 den Krümmungsmittelpunkt der ähnlich-veränderlichen Curve, ferner r und r_1 die bezüglichen Radii vectores dieser Punkte, α und α_1 deren Neigungen gegen die Poltangente. Wir setzen weiter den Krümmungsradius der eingehüllten Curve $Q_2 O_2$ gleich ϱ_c.

Nach einer unendlich kleinen fortschreitenden Drehung gelangt O_2 im Krümmungskreise der von O_2 beschriebenen Curve nach O_3. Dem Krümmungskreise k_2 in S_2 entspricht in S_3 ein ähnlicher Kreis k_3, dessen Mittelpunkt O_3 ist. Die Aehnlichkeitspunkte dieser beiden Kreise k_2 und k_3 werden erhalten, indem man die Centrale $O_2 O_3$ nach dem Verhältniss der Radien theilt und verlängert. In der Grenzlage fällt also der innere Aehnlichkeitspunkt nach O_2, der äussere in die Tangente von O_2, welche mit dem Radius vector r den Geschwindigkeitswinkel φ bildet. Die beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise liegen mit ihrem Situationspunkte ($P = P_{23}$) stets in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in die Centrale fällt.

Es ist $\angle AQ_2P_{23} = \angle AO_2P_{23} = \varphi$, wo A den Schnitt der Tangente in O_2 mit der Tangente in Q bedeutet. Hieraus folgt, dass P_{23}, O_2, Q_2, A in einem Kreise liegen; und da $\angle O_2Q_2A = 1R$, fällt der Mittelpunkt dieses Kreises in O_2A. Demnach ist A der äussere Aehnlichkeitspunkt der unendlich nahen Kreise k_2 und k_3, AQ_2 eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise. Letzteres folgt übrigens schon aus dem Begriff der Enveloppe.

In gleicher Weise zeigt sich, dass bei Annahme einer unendlich kleinen rückschreitenden Bewegung der Kreislinie k_2 eine Kreislinie k_1 um O_1 entspricht; der zu k_2 und k_1 gehörige äussere Aehnlichkeitspunkt ist wieder A.

Die Radien der Kreislinien k_3 und k_2 sind um eine unendlich kleine Grösse, welche mit $\delta\varrho_{23}$ bezeichnet werden mag, verschieden; entsprechend bilden die Radien von k_1 und k_2 eine Differenz $\delta\varrho_{21}$. Der Krümmungskreis der Enveloppe ist die Grenze des k_1, k_2 und k_3 tangirenden Kreises. Schlagen wir um O_2 und O_3 mit den Differenzen $\delta\varrho_{21}$ und $\delta\varrho_{23}$ Kreise, so müssen die zum Krümmungskreise durch O_1 und O_2 concentrisch geschlagenen Kreise die mit $\delta\varrho_{21}$ und $\delta\varrho_{23}$ geschlagenen Kreise berühren. Der Berührungspunkt mit dem l e t z t e n dieser beiden Kreise sei T. Ersetzt man die Bogen O_2O_3 und O_2T durch ihre Sehnen, so folgt für den unendlich kleinen Winkel O_3O_2T bis auf unendlich kleine Grössen

$$\angle O_3O_2T = \lim \frac{\delta\varrho_{23}}{O_2T} = 90 - \angle Q_2O_2A.$$

Bezeichnet man $\angle Q_2O_2A$, also den Winkel, welchen der Krümmungsradius der eingehüllten Curve mit der fortschreitenden Geschwindigkeit dieses Krümmungsmittelpunktes bildet, allgemein mit γ, also die Grösse dieses Winkels in den verschiedenen Phasen mit γ_1 und γ_2, ergiebt sich

$$\angle O_3O_2T = 90 - \gamma_2.$$

In gleicher Weise ergiebt sich bei Annahme einer Bewegung um den benachbarten Pol P'_{12} von O_1 nach O_2

$$\angle O_2O_1S = 90 - \gamma_1.$$

Demnach ist der Contingenzwinkel der Enveloppe, bis auf Grössen höherer Ordnung, um

$$(90-\gamma_1) - (90-\gamma_2) = d\gamma$$

k l e i n e r, als der zur Bahn des Punktes O_2 gehörige Contingenzwinkel. Nennen wir letzteren wieder $d\tau$, folgt für den Contingenzwinkel der Enveloppe $d\tau - d\gamma$, für das Bogendifferential der Enveloppe $O_2O_3 . \sin\gamma = ds_1 . \sin\gamma$.

Zur Bestimmung des Winkels γ dient die dem Dreieck Q_2O_2P entnommene Gleichung

42) $$r_1 . \cos\gamma = \varrho_c . \cos\varphi.$$

In dieser Gleichung sind bei Bestimmung von $d\gamma$ r_1, φ und γ als Variable, ϱ_c als eine Constante anzusehen.

Wird der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe mit M_e, die Strecke $M_e O_2$ mit R bezeichnet, folgt also

$$R = \frac{ds_1 \,.\, \sin\gamma}{d\vartheta - d\varphi - d\varkappa_1 - d\gamma}.$$

Aus 42) folgt

$$d\gamma = \frac{\varrho_c}{r_1} \,.\, \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}\, d\varphi + \frac{\cos\alpha_1 \,.\, \cos\gamma}{\sin\gamma} \,.\, \frac{du}{r_1}, \quad ds_1 = \frac{r_1}{\sin\varphi} \,.\, d\vartheta, \quad d\varkappa_1 = \frac{du \,.\, \sin\alpha_1}{r_1},$$

daher

$$\text{43)} \qquad R \,.\, \sin\varphi = \frac{(r_1 \sin\gamma)^2 \,.\, d\vartheta}{r_1 \sin\gamma\,(d\vartheta - d\varphi) - \varrho_c \sin\varphi\, d\varphi - \cos(\alpha_1 - \gamma) \,.\, du}.$$

Es ist

$$\cos(\alpha_1 - \gamma) = \cos(\alpha - (90 - O_2 PO)) = \sin(\alpha_1 + \hat{O}_2 PQ) = \sin\alpha,$$
$$\sin\alpha \,.\, du = r \,.\, d\varkappa,$$

wo $d\varkappa$ der Winkel, unter welchem die unendlich nahen Pole P_{12} und P_{23} von Q_2 aus erscheinen. Daher

$$R \,.\, \sin\varphi = \frac{(r_1 \sin\gamma)^2 \,.\, d\vartheta}{r_1 \sin\gamma\,(d\vartheta - d\varphi) - \varrho_c \,.\, \sin\varphi\, d\varphi - r\, d\varkappa}.$$

Aus $\triangle PO_2Q_2$ folgt

$$r_1 \,.\, \sin\gamma + \varrho_c \,.\, \sin\varphi = r,$$

daher

$$\text{44)} \qquad R \,.\, \sin\varphi = \frac{(r_1 \,.\, \sin\gamma)^2\, d\vartheta}{r\,(d\vartheta - d\varphi - d\varkappa) - \varrho_c \,.\, \sin\varphi \,.\, d\vartheta}.$$

Für den Krümmungsradius ϱ der vom Punkte Q_2 beschriebenen Trajectorie folgt nach § 5, 33) oder nach 44)

$$\varrho \sin\varphi = \frac{r \,.\, d\vartheta}{(d\vartheta - d\varphi - d\varkappa)},$$

daher

$$R \,.\, \sin\varphi = \frac{(r_1 \,.\, \sin\gamma)^2}{\frac{r^2}{\varrho} \,.\, \frac{1}{\sin\varphi} - \varrho_c \,.\, \sin\varphi}.$$

Die Grösse $\frac{r^2}{\varrho}$ ist die vorhin betrachtete Strecke $Q_2 B$, also

$$R \,.\, \sin\varphi = \frac{(r_1 \sin\gamma)^2}{\frac{Q_2 B}{\sin\varphi} - \varrho_c \,.\, \sin\varphi}.$$

Die Ermittelung von R nach vorstehender Formel stellt eine einfache, zusammenhängende Construction dar.

Aus Formel 44) folgt noch ein allgemeiner Satz über die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen. Für die Punkte einer, die Poltangente im Pol berührenden Kreislinie wird $d\varkappa$ constant. Falls daher alle Dreiecke PQ_2O_2, welche mit ihrer Spitze Q_2 in einer solchen Kreislinie liegen, ähnlich sind, folgt aus Formel 44), dass R und daher auch $R + \varrho_c$ mit r proportional ist. Da ferner $\angle PQ_2O_2$ constant, ergiebt sich:

46) **Bilden die Berührungspunkte der eingehüllten Curven mit ihren Enveloppen eine die Poltangente im Pol berührende Kreislinie, und sind die Krümmungsradien der eingehüllten Curvenelemente den Radii vectores der Berührungspunkte proportional, so fallen die Krümmungsmittelpunkte der einhüllenden Curven in eine durch den Geschwindigkeitspol gehende Kreislinie.**

In diesem Falle bilden auch die Krümmungsmittelpunkte der eingehüllten Curvenelemente einen durch den Pol laufenden Kreis.

Für starre Systeme folgt, da für diese $d\varphi = 0$, $\gamma = 90^0$, aus 43) der bekannte Satz, dass der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe zusammenfällt mit dem Krümmungsmittelpunkte derjenigen Trajectorie, welche der momentane Krümmungsmittelpunkt der eingehüllten Curve beschreibt.

Der durch O_2, Q_2 und P gelegte Kreis ist der geometrische Ort für die Berührungspunkte aller um O_2 gelegten concentrischen Kreise mit ihren Enveloppen; der **geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der einhüllenden Curvenelemente** soll gefunden werden. Zu diesem Zwecke gehen wir auf Formel 43) zurück. Ersetzt man in derselben ϱ_o durch $r_1 \frac{\cos\gamma}{\cos\varphi}$, so ergiebt sich

$$R = \frac{r_1^2 \sin^2\gamma}{A\cos\gamma + B\sin\gamma},$$

wo A und B constante Grössen bedeuten, welche von der Lage des ähnlich-veränderlichen Systems und des Punktes O_2 gegen den Pol P abhängen. Wählt man die nach rückwärts verlängerte Bahntangente des Punktes O_2 zur X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, ergiebt sich für die Gleichung der Curve der Krümmungsmittelpunkte

$$Ax + By = \frac{r_1^2 y^2}{x^2 + y^2}.$$

47) **Die Mittelpunkte bilden also im Allgemeinen eine Curve dritter Ordnung.**

Für starre Systeme degenerirt diese Curve in einen Punkt.

Die Formel 43) erlaubt eine specielle Anwendung zur Bestimmung des Krümmungsradius der Polcurve. Nennen wir diesen $\mathfrak{R}_1$, den gleichgerichteten Halbmesser der Polbahn $\mathfrak{R}_2$, so ergiebt sich nach der erwähnten Formel

$$(\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1)\sin\varphi = \frac{\mathfrak{R}_1^2 \sin^2\gamma \,.\, d\vartheta}{\mathfrak{R}_1 \sin\gamma\,(d\vartheta - d\varphi) - \mathfrak{R}_1 \sin\varphi\, d\varphi + du},$$

da $\alpha = 3\,\frac{\pi}{2}$. Da ferner für diesen speciellen Fall $\angle\, Q_2 O_2 P = \gamma + \varphi = 0$, folgt $\gamma = -\varphi$, und es ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen

48) $$\frac{\sin\varphi}{\frac{du}{d\vartheta}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} - \frac{1}{\mathfrak{R}_2}.$$

Diese Formel bildet eine Ergänzung zu der § 5, 36) entwickelten Erweiterung der Savary'schen Formel für ähnlich-veränderliche Systeme.

Dieselbe kann demnach auch geschrieben werden

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\sin\alpha = \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1}-\frac{1}{\mathfrak{R}_2}\right).\left(1-\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right).\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Wird $d\varphi = 0$, nimmt diese Gleichung die bei Aufstellung der Savary-schen Formel für starre Systeme gewöhnliche Gestalt an.

Damit $d\varphi = 0$, ist übrigens nicht nöthig, dass das bewegte System ein starres, also $\varphi = 90^0$ sei; es genügt, dass φ constant bleibe, also die linearen Dimensionen des bewegten Systems proportional zur Drehung desselben wachsen.

§ 7.

Aus Formel 44)

$$R.\sin\varphi = \frac{(r_1\sin\gamma)^2\,d\vartheta}{r(d\vartheta-d\varphi-d\varkappa)-\varrho_e.\sin\varphi\,d\vartheta}$$

ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser $\varrho_e = R + \varrho_c$ der einhüllenden Curve

$$\varrho_e.\sin\varphi = \frac{r.\varrho_c(d\vartheta-d\varphi-d\varkappa)\sin\varphi+(r_1^2\sin^2\gamma-\varrho^2_c\sin^2\varphi).d\vartheta}{r(d\vartheta-d\varphi-d\varkappa)-\varrho_e.\sin\varphi\,d\vartheta}.$$

Es ist nach 42)

$$r_1^2\sin^2\gamma-\varrho^2_c\sin^2\varphi = r_1^2-\varrho^2_c = r^2-2\varrho_e.r.\sin\varphi.$$

Setzt man diesen Werth in die für ϱ_e gefundene Gleichung ein und lässt ϱ_c, unter Beibehaltung der einmal gewählten Richtung, ins Unendliche zunehmen, die eingehüllte Curve also zu einer Geraden werden, folgt

$$\varrho_e.\sin\varphi = \frac{r(d\vartheta-d\varphi-d\varkappa)-2r\,d\vartheta}{-d\vartheta},\quad \varrho_e = \frac{r}{\sin\varphi}.\frac{d\vartheta+d\varphi+d\varkappa}{d\vartheta}$$

oder, das Bogendifferential der vom Berührungspunkte beschriebenen Trajectorie mit ds bezeichnend,

49) $$\varrho_e = \frac{ds}{d\vartheta}.\left(1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}+\frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right).$$

Die vorstehende Formel liefert den Krümmungsradius ϱ_e der zu einer Geraden des ähnlich-veränderlichen Systems gehörigen Enveloppe. Dieselbe lässt sich auch ohne Kenntniss der allgemeinen Formel durch die Betrachtung dreier sich folgender Lagen der eingehüllten Geraden ermitteln.*

* In der zuletzt erwähnten Weise wurde die Formel von Grouard hergeleitet. Vergl. *l'Institut,* 1869 S. 84.

Aus 49) folgt, da $dx = \frac{du . \sin\alpha}{r}$,

$$\varrho_e = \frac{1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\sin\varphi}\left(r + \frac{\frac{du}{d\vartheta}}{1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}} . \sin\alpha\right).$$

$\frac{\frac{du}{d\vartheta}}{1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}} . \sin\alpha$ bedeutet die Sehne, welche ein mit dem Durchmesser $\frac{\frac{du}{d\vartheta}}{1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}}$ geschlagener und die Poltangente im Pol berührender Kreis auf dem Radius vector des Berührungspunktes abschneidet. Diese Sehne werde mit e bezeichnet; schlagen wir den Kreis nach entgegengesetzter Richtung wie den Wendekreis $\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} < 1 \text{ vorausgesetzt}\right)$, so bildet sich in der Figur auf dem Radius vector die Strecke $r+e$. Es ist $\varrho_e = \frac{1+\frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\sin\varphi}(r+e)$; daher erhält man, den neugefundenen Kreis als **Rückkehrkreis** einführend, den Satz:

50) **Die Dreiecke, welche der Krümmungsradius (QM_e) der zu einer Geraden gehörigen Enveloppe und die von der eingehüllten Geraden und dem zweiten Schnittpunkte des Rückkehrkreises (U) begrenzte Strecke (QU) des Radius vector bilden, sind einander ähnlich.**

Dieser Satz erlaubt eine sehr einfache Construction für den Krümmungsmittelpunkt M_e der betrachteten Enveloppe. Die dritte Seite des eben betrachteten Dreiecks, nämlich die Verbindungslinie ihres Krümmungsmittelpunktes M_e mit dem Punkte (U), in welchem der Radius vector den Rückkehrkreis trifft, schneidet letzteren Kreis in einem festen Punkte (H_1).

Aus Satz 50) fliesst folgender specielle Satz:

51) **Diejenigen Enveloppen, welche die von ihnen eingehüllten Geraden in einem Punkte des Rückkehrkreises berühren, bilden in diesem einen Rückkehrpunkt ($\varrho_e = 0$).**

Diese Eigenschaft rechtfertigt die Bezeichnung des Rückkehrkreises.

Die Berührungspunkte aller Strahlen eines Büschels bilden einen durch den Pol und den Mittelpunkt des Büschels laufenden Kreis. Daher bilden auch die Krümmungsradien der zugehörigen Enveloppen (QM_e) ein Strahlbüschel. Und da $\angle QM_eU$ constant ist, folgt:

52) **Die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen aller durch einen Punkt laufenden Geraden bilden eine Kreislinie, welche durch den festen Punkt H_1 des Rückkehrkreises geht.**

53) **Die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen paralleler Geraden liegen auf einer Geraden, welche durch den festen Punkt H_1 des Rückkehrkreises geht.**

Die Sätze 51)—53) sind die Grenzfälle der in § 3, 11) und 17) für endliche Systeme hergeleiteten Sätze. Aus diesen ergiebt sich auch, dass der Rückkehrkreis die Grenze des durch P_{12}, P_{13} und P_{23} gelegten Kreises ist.

Der Krümmungsradius für die Trajectorie, welche der momentane Berührungspunkt einer Geraden beschreibt, ist

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{d\varkappa}{d\vartheta}}.$$

Da für alle Punkte einer die Poltangente im Pol berührenden Kreislinie $\frac{d\varkappa}{d\vartheta}$ constant, folgt durch Vergleichung der für ϱ und ϱ_e geltenden Ausdrücke:

54) **Die Krümmungsradien der Enveloppen aller Geraden, welche ihre Enveloppe in der Peripherie eines, die Poltangente im Pol berührenden Kreises tangiren, haben zum Krümmungsradius der von diesem Berührungspunkte beschriebenen Trajectorie ein festes Verhältniss.**

Dieser Satz ist, wie man sich leicht überzeugt, nur der Specialfall des in § 6, 46) entwickelten allgemeinen Satzes für $\varrho_c = \infty$. Die zu einer Kreislinie gehörigen Geraden bilden ein Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt in den Schnittpunkt dieser Kreislinie mit der Beschleunigungsrichtung des Pols fällt. Der diesem Strahlbüschel entsprechende Kreis, welcher die Krümmungsmittelpunkte der zugehörigen Enveloppen enthält, geht in diesem speciellen Falle durch den Pol. Für das constante Verhältniss der Krümmungsradien ergiebt sich

$$\frac{\varrho_e}{\varrho} = 1 - \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} + \frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right)^2.$$

Wird $d\varkappa = -d\varphi$, folgt $\varrho_e = \varrho$. Bei gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen folgt, dass dieser über du gespannte Winkel $-d\varphi$ das arithmetische Mittel der durch den Wendekreis und den Rückkehrkreis über du gespannten Winkel ist. Und da diese über du liegenden Winkel sich umgekehrt wie die Durchmesser der zugehörigen Kreislinien verhalten, ergiebt sich:

55) **Für die Punkte derjenigen, die Poltangente im Pol berührenden Kreislinie, deren Durchmesser das harmonische Mittel zu den Durchmessern des Wende- und Rückkehrkreises bildet, fallen der Krümmungsradius der Tra-**

jectorie und der in diesem Punkte die erzeugende Gerade berührenden Enveloppe zusammen.*

Wir bezeichnen diesen Kreis als den ausgezeichneten Kreis der Bewegungsphase. Bei starren und denjenigen ähnlich-veränderlichen Systemen, für welche $d\varphi=0$, fällt dieser Kreis mit der Poltangente zusammen.

Die Krümmungsradien für die Punkte dieses Kreises drücken sich in einer bemerkenswerth einfachen Weise aus. Es ergiebt sich, da $\frac{d\varkappa}{d\vartheta}+\frac{d\varphi}{d\vartheta}=0$,

$$\varrho=\varrho_e=\frac{ds}{d\vartheta}=\frac{r}{\sin\varphi}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte fallen in die im Pol zum Radius vector errichtete Senkrechte.

Ebenso ergiebt sich für die Krümmungsradien der Enveloppen derjenigen Geraden, welche ihre Enveloppe in der Peripherie des Wendekreises berühren ($d\varkappa=d\vartheta-d\varphi$):

$$\varrho_e=2\frac{ds}{d\vartheta}=2\frac{r}{\sin\varphi}.$$

Für den Krümmungsradius derjenigen Trajectorie, welche ein Punkt des Rückkehrkreises beschreibt, wird ($d\varkappa=-d\vartheta-d\varphi$)

$$\varrho=\tfrac{1}{2}\frac{ds}{d\vartheta}=\tfrac{1}{2}\frac{r}{\sin\varphi}.$$

Wenn sich die Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems umkehrt, bleibt das System der Polcurve fest, während die Ebene der Polbahn sich um den momentanen Geschwindigkeitspol dreht und sich die vom Pol gemessenen Dimensionen in umgekehrter Weise wie vorhin ändern. Da die momentane Vergrösserung der Längeneinheit bei der directen Bewegung $-\cot g\,\varphi . d\vartheta$ betrug, folgt, dass bei Umkehrung der Bewegung, durch welche die Systeme der Polcurve und Polbahn in eine, einer früheren Lage ähnliche zurückgeführt werden, statt φ $(180-\varphi)$, also statt $d\varphi$ $-d\varphi$ zu setzen ist. Ferner ist statt du $-du$ einzuführen [vergl. auch § 6, 48), wo sich $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ vertauschen]. Hieraus ergiebt sich mit Hilfe der für die Durchmesser des Wende- und Rückkehrkreises gefundenen Ausdrücke:

56) **Wird die Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems umgekehrt, so dass die ähnlich-veränderliche Polbahn auf der fest bleibenden Polcurve rollt, vertauschen sich Wende- und Rückkehrkreis; der ausgezeichnete Kreis bleibt ungeändert.**

---

* Die Eigenschaften dieses speciellen Kreises wurden durch Grouard erkannt. Vergl. *l'Institut,* 1869 S. 124.

Ist $d\varphi = 0$, sind Wende- und Rückkehrkeis zwei in Bezug auf die Poltangente symmetrische Kreislinien. Für starre Systeme ist dies ein specieller Fall des in § 3, 14) entwickelten, für drei getrennte Lagen eines ähnlich-veränderlichen Systems giltigen Satzes.

§ 8.

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten die Ausdrücke und wichtigsten Gesetze für die Krümmungsradien der Enveloppen, welche beliebige Curven eines stetig bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems beschreiben, entwickelt wurden, betrachten wir noch einige projectivische Eigenschaften, zu welchen die gefundenen Constructionen Anlass geben.

Derjenige Punkt einer Geraden, in welchem diese momentan ihre Hüllbahn berührt, werde „Gleitpunkt" der Geraden genannt. Die Gleitpunkte eines Strahlbüschels liegen auf einem durch den Pol und seinen Mittelpunkt gehenden Kreise, welcher mit K_g, während der von den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten der Hüllbahnen gebildete Kreis mit K_m bezeichnet werde. Ein die Poltangente im Pol berührender Kreis heisse K_t, der ähnliche durch P gehende Kreis, welcher die Krümmungsmittelpunkte der Trajectorien enthält, welche seine Punkte beschreiben, K_e. Ferner werde das System der bewegten Punkte mit Σ bezeichnet.

Zunächst folgt durch eine Betrachtung, wie sie schon in § 3 durchgeführt wurde:

57) Die Mittelpunkte der Kreise K_g und K_m bilden ein zum System der bewegten Punkte ähnliches System.

Eine durch den Pol gezogene Gerade, welche mit der Poltangente den Geschwindigkeitswinkel φ bildet, schneide den Wendekreis in K, den Rückkehrkreis in S. Der Gleitpunkt jeder durch S gehenden Geraden fällt mit dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der von dieser beschriebenen Hüllbahn in dem zweiten Schnittpunkte der Geraden mit dem Rückkehrkreise zusammen. Der sich selbst entsprechende Schnittpunkt Z der zwei zum Punkte Q gehörigen Kreise K_g und K_m liegt daher auf dem Rückkehrkreise in der Geraden QS. Sollen sich diese Kreise berühren, also ihre Schnittpunkte zusammenfallen, muss sich Q wieder auf einem Kreise befinden, dessen Punktsystem dem des Rückkehrkreises ähnlich ist. (Vergl. § 3.) Dieser Kreis lässt sich jedoch im Falle der stetigen Bewegung näher bestimmen. Die Punkte Q, Z und P müssen nämlich ein Dreieck bilden, dessen Winkel bei Z gleich φ, bezüglich $(180-\varphi)$, bei P ein rechter ist. Da also Dreieck PQZ bei P einen rechten Winkel enthält, folgt, dass der Mittelpunkt von K_g in die Gerade QZ fällt. Diese Gerade muss demnach auch den Mittelpunkt von K_m enthalten und, als Verbindungslinie von Q mit Z, durch S gehen. Das Letztere ergiebt sich übrigens auch daraus, dass $\angle QZP = 180 - \varphi$ ist; weiter folgt hieraus, dass die an den Berührungspunkt der Kreise

K_g und K_m gelegten Tangenten ein Strahlbüschel bilden, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt von S auf dem Rückkehrkreise ist.

Da also in diesem Falle sich auf jeder durch S gehenden Geraden drei homologe Punkte der drei besprochenen ähnlichen Systeme finden, folgt:

58) Der Kreis derjenigen Punkte in Σ, deren zugehörige Kreise K_m und K_g einander berühren, ist der Wendekreis der drei ähnlichen Systeme, welche Σ und die Mittelpunkte von K_g und K_m bilden; und Punkt S ist der Träger derjenigen Geraden, welche drei homologe Punkte dieser Systeme enthalten.

Befindet sich der Mittelpunkt eines Strahlbüschels auf der Geraden SPK, so berührt der Kreis der Gleitpunkte K_g die Poltangente, und die Normale der von einem Strahl beschriebenen Enveloppe fällt mit der Normalen der vom Gleitpunkte dieses Strahls beschriebenen Trajectorie zusammen. Der Kreis K_g, welcher in diesem Falle auch als K_t bezeichnet werden kann, ist also sowohl dem durch P gehenden Kreise K_m, welcher die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen, wie zum Kreise K_o, welcher die Krümmungsmittelpunkte der Trajectorien enthält, ähnlich, und diese beiden Krümmungsmittelpunkte fallen mit dem bewegten Punkte in eine Gerade. Hieraus folgt:

Der Mittelpunkt eines jeden, die Poltangente im Pol berührenden Kreises K_t fällt mit den Mittelpunkten der Kreise K_m und K_o in eine Gerade, welche mit der Poltangente den Geschwindigkeitswinkel φ bildet.

Das Verhältniss zwischen den Entfernungen der Mittelpunkte von K_m und K_o vom Mittelpunkte des Kreises K_t ist nach § 7 gleich $1-\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}+\frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right)^2$. Wird K_t zum ausgezeichneten Kreise, fallen K_m und K_o zusammen.

Die Mittelpunkte der den Kreisen K_t entsprechenden Kreise K_m fallen nach § 7 in eine Gerade, welche den Mittelpunkt des Rückkehrkreises enthält.

Nach § 5 ist für die Trajectorien, welche die auf K_t befindlichen Punkte beschreiben,

$$\varrho = \frac{r}{\sin\varphi\left(1-\frac{d\varphi}{d\vartheta}-\frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right)}.$$

Für den Winkel μ, welchen die Verbindungslinie des Mittelpunktes von K_o und P mit der zur Poltangente Senkrechten bildet, findet sich

$$\operatorname{cotg}\mu = -\frac{r-\varrho\sin\varphi}{\varrho\cos\varphi}, \quad \operatorname{cotg}\mu = \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}+\frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right)\operatorname{tg}\varphi;$$

und da $\frac{dx}{d\vartheta}=\frac{\frac{du}{d\vartheta}}{D}$, wo D den Durchmesser von K_t bezeichnet, folgt

$$cotg\,\mu=\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}+\frac{\frac{du}{d\vartheta}}{D}\right)tg\,\varphi.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt:

59) Die Geraden, welche P mit den Mittelpunkten von K_o verbinden, bilden ein Strahlbüschel, welches zur Reihe der Mittelpunkte von K_t projectivisch ist.

Speciell finden wir, dass entspricht:

dem Mittelpunkte des Wendekreises die Linie SPK;

dem unendlich fernen Punkte eine Senkrechte zu derjenigen Geraden, welche die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Trajectorien enthält, die Punkte der Poltangente beschreiben;

dem ausgezeichneten Kreise die Poltangente;

dem Pole P die Senkrechte zur Poltangente.

Die Mittelpunkte der Kreise K_o bilden nach dem gefundenen Satze die Schnittcurve zweier projectivischen Strahlenbüschel, nämlich des eben entwickelten und eines durch die Mittelpunkte der Kreise K_t bestimmten Parallelstrahlenbüschels, dessen Strahlen parallel zu SPK laufen. Da für den Mittelpunkt des Wendekreises und für ein unendlich grosses D der Mittelpunkt von K_o unendlich weit fällt, finden wir:

60) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise K_o ist eine Hyperbel, welche im Pol normal zur Poltangente steht.

Die Asymptoten dieser Hyperbel sind nach dem Vorstehenden bestimmt. Der zweite Schnittpunkt dieser Hyperbel mit der Poltangente ist der Mittelpunkt desjenigen Kreises K_o oder K_m, welcher dem ausgezeichneten Kreise entspricht. Durch diese Hyperbel ist die Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems völlig bestimmt, und die verschiedenen Aufgaben, welche durch verschiedene Angaben zur Bestimmung eines solchen gestellt werden, sind mit der Construction der eben gefundenen Hyperbel gelöst.

Ist das betrachtete System ein starres, also die Bewegung beständig eine drehende ($\varphi=90^0$), fällt diese Hyperbel mit der Senkrechten zur Poltangente zusammen.

Wird φ momentan gleich Null, also die Bewegung augenblicklich eine rein gleitende, so treten die in den letzten Abschnitten entwickelten Formeln für die Krümmungsradien in der Form $0.\infty$ auf. Um diese Unbestimmtheit zu heben, kann man die in § 1 erwähnte lineare Veränderung des Systems $d\lambda=-cotg\,\varphi\,.\,d\vartheta$ statt $d\vartheta$ in die Formeln einführen.

Ist φ beständig gleich Null, die Bewegung also eine beständig gleitende, so fallen die beschriebenen Tajectorien momentan in die zugehörigen Verbindungsstrahlen mit dem Pol. Für den Krümmungsradius einer Trajectorie erhält man

$$\varrho = r \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} = \frac{r^2}{\frac{du}{d\lambda} \sin\alpha};$$

derselbe wird also für eine bestimmte Lage des Leitstrahls dem Quadrat desselben proportional. Der Rückkehr-, der Wende- und der ausgezeichnete Kreis reduciren sich in diesem speciellen Falle auf die Poltangente. Die Hyperbel, welche die Mittelpunkte der Kreise K_0 enthält, geht in eine Parabel über, deren Axe die Poltangente bildet und deren Parameter $\frac{1}{4} \cdot \frac{du}{d\lambda}$ ist.

X.

Die Involution auf einer Raumcurve dritter Ordnung und der daraus entstehende Complex.

Von

Dr. Weiler

in Zürich-Hottingen.

Die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung C_3^r lassen sich zu Involutionen gruppiren. Legt man nämlich durch eine ihrer Secanten ein involutorisches Ebenenbüschel, so schneiden dessen Ebenenpaare die C_3^r in Punktepaaren einer Involution. Umgekehrt erzeugt jede Involution auf der C_3^r mit jeder ihrer Secanten ein involutorisches Ebenenbüschel.

Die C_3^r wird aus irgend einem Raumpunkte auf eine beliebige Ebene als Curve C_3^4 dritter Ordnung mit Doppelpunkt D projicirt. Die Bilder der Involutionspaare $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ etc. auf der C_3^r* sind Paare A, A'; B, B' etc. einer Involution auf der C_3^4. Die Verbindungsstrahlen dieser letzteren Paare mit D bilden ein involutorisches Strahlbüschel.

In den Paaren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ etc. auf der C_3^r ziehe man an sie die Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ etc. Diese bilden die developpable Fläche D_4^3 der C_3^r und sind ebenfalls in Involution. Eine beliebige Ebene schneidet D_4^3 in einer Curve C_4^3 dritter Classe mit Doppeltangente d. Ihre Punkte sind zu Paaren gruppirt, desgleichen die Tangenten. Die Punktepaare sind die Schnitte mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ und die Tangentenpaare die Schnitte mit den Schmiegungsebenen A, A' der C_3^r (in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$). Auf d entsteht durch die Tangentenpaare eine Involution.

Nun lassen sich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ etc. als Directricen von linearen Congruenzen auffassen. Solcher Congruenzen sind einfach unendlich viele; ihre Gesammtheit ist ein Complex und dieser soll hier näher untersucht werden.

Der so definirte Complex ist reducibel, denn für jede der beiden sich selbst entsprechenden Tangenten $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ erhält man alle sie schnei-

---

* Die Doppelpunkte der Involution werden mit $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ bezeichnet.

denden Geraden des Raumes an Stelle einer linearen Congruenz. Diese beiden speciellen linearen Complexe werden in Zukunft ausgeschieden.

Der Complexkegel des Raumpunktes P hat in einer Ebene E eine Leitcurve, die auf folgende Weise bestimmt wird. Aus P wird die C_3^r auf E als C_3^4 projicirt, deren Punkte zu der Involution A, A'; B, B' etc. gruppirt sind. Die Tangenten a, a'; b, b' etc. in diesen Punkten sind die Bilder von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ etc. Die Gerade von P nach dem Schnittpunkte aa' ist eine Complexgerade, d. h.: Der Ort des Schnittpunktes entsprechender Tangentenpaare der C_3^4 ist die Leitcurve des Complexkegels. — Da sich wieder zwei Tangenten f_1, f_2 selbst entsprechen, so gehören diese (einfach zählend) zum Ort, sie sind nach Ausschluss der linearen Complexe ebenfalls auszuschliessen.

Sei nun g irgend eine Gerade in E. Sie wird von a, a' in A^*, $A^{*\prime}$ geschnitten. So oft in ihr zwei derartige Punkte zusammenfallen, trifft g die Leitcurve. Nun gehen aber von A^* vier Tangenten a_1, a_2, a_3, a_4 an die C_3^4 und es treffen die ihnen entsprechenden a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 die Linie g in $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$, $A_3^{*\prime}$, $A_4^{*\prime}$. Ebenso gehören zu gegebenem $A^{*\prime}$ vier Punkte A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*. In g stehen somit die Punkte A^*, $A^{*\prime}$ in [4, 4]-deutiger Beziehung. Somit kommt es achtmal vor, dass zwei entsprechende Punkte zusammenfallen. Der Ort des Punktes aa' scheint nun von der achten Ordnung zu sein, nach Ausschluss von f_1, f_2 noch von der sechsten. Infolge des vertauschbaren Entsprechens bei der Involution wird nun der Ort zweimal beschrieben, wenn die als a aufgefasste Tangente die C_3^4 in ihrer Bewegung ganz einhüllt. (Die Punkte aa', bb' fallen zusammen, sobald $a = b'$ ist.) Es entsteht somit als Leitcurve des Complexkegels eine Curve dritter Ordnung C_3^*.

Der Punkt aa' kann nun auf die C_3^4 selbst fallen. Vom Punkte A der C_3^4 gehen an sie noch zwei Tangenten a_1, a_2, deren entsprechende die C_3^4 in A'_1, A'_2 berühren und ausserdem in $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$ schneiden. Da nun die Beziehung der Punkte A, $A^{*\prime}$ eine [2, 2]-deutige ist, so tritt das Zusammenfallen viermal ein. Schneiden sich aber zwei entsprechende Tangenten auf C_4^3, so fallen daselbst A mit $A_1^{*\prime}$, $A_2^{*\prime}$ und $A^{*\prime}$ mit A_1, A_2 zusammen, d. h.: in unserer Zählung erhält man jeden solchen Punkt vierfach. So ergiebt sich nur ein Schnittpunkt von C_3^4 mit C_3^*. Zwei weitere sind F_1, F_2 selbst, wie die geometrische Anschauung ergiebt.

So oft eine Tangente a von der entsprechenden a' in ihrem Berührungspunkte A getroffen wird, berührt daselbst die C_3^* die C_3^4. Bezeichnet man im Allgemeinen den Schnittpunkt von a' mit C_3^4 mit A^*, so soll A mit A^* zusammenfallen. A, A^* sind in [1, 2]-deutiger Beziehung, fallen also dreimal zusammen, wobei jeder Punkt einfach zählend erscheint. Die C_3^4 und C_3^* berühren sich dreimal.

Die Tangenten im Doppelpunkte D von C_3^4 ergeben keine besonderen Punkte von C_3^*, dagegen wird C_3^* von den Inflexionstangenten der C_3^4 berührt (und getrennt davon geschnitten).

Hätte C_3^* einen Doppelpunkt, so müssten die vier von ihm an C_3^4 gehenden Tangenten zwei Involutionspaare bilden. Sei diesmal A der Punkt aa' von C_3^*. Von ihm gehen an C_3^4 noch die Tangenten a_1, a_2 mit A_1, A_2 als Berührungspunkten. A'_1 auf C_3^4 entspreche A_1. Es wird verlangt, dass A_2 mit A'_1 zusammenfalle. Zu A'_1 gehören nur ein A_1, a_1, aber zwei Punkte A^* (die Schnittpunkte von a_1 mit C_3^*, ausgenommen $a_1 a'_1$). Ebenso gehören zu A_2 zwei Punkte A'. Die Beziehung $A_2 A'_1$ ist somit [2, 2]-deutig, d. h. es findet viermal Zusammenfallen statt. Für den Fall, dass C_3^* einen Doppelpunkt besitzt, kann jede von ihm ausgehende Tangente der C_3^4 als a_1 aufgefasst werden, er führt auf viermaliges Zusammenfallen von $A_2 A'_1$. C_3^* hat nur einen Doppelpunkt. Eine Spitze würde sie nur dann enthalten, wenn die Involution auf C_3^4 in Bezug auf ihre Singularitäten specialisirt wäre, worauf später eingegangen wird.

Indem wir in den Raum zurückkehren, dürfen wir den Satz aussprechen: Der Complexkegel des Punktes P ist von der dritten Ordnung, er besitzt stets eine Doppelerzeugende, schneidet und berührt die C_3^r je dreimal. Der Complex ist dritter Ordnung und besitzt $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ zu einfachen Ausnahmepunkten. Die Schmiegungsebenen von C_3^r berühren die Complexkegel aus den in ihnen liegenden Punkten je einfach.

Die Complexcurve in irgend einer Ebene ist dritter Classe, vierter Ordnung, hat eine Doppeltangente und drei Spitzen. Die Schmiegungsebenen Φ_1, Φ_2 der C_3^r in $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ schneiden die Ebene stets in Complexgeraden, sie sind Ausnahmeebenen. Die Schnittpunkte der C_3^r mit der Ebene liegen auf der Complexcurve.

Da der Rang der C_3^r gleich vier ist, so sind drei- oder mehrfache Complexgerade nicht denkbar. Eine solche müsste nämlich mehr wie zwei entsprechende Tangentenpaare der C_3^r treffen.

Jeder Complexkegel besitzt 16 besondere Erzeugende, vor Allem eine doppelte. Um Einiges über die von ihnen gebildeten Congruenzen zu erfahren, lasse man P in besondere Lagen rücken. Genau das Duale gilt jeweilen für die Complexcurve und deren Ebene.

Sei P in der Geraden $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, so projicirt sich die C_3^r als C_3^4, deren Doppelpunkt die Vereinigung von F_1, F_2 ist. Die jetzt entstehende C_3^* (Leitcurve des Complexkegels) ist aber C_3^4 selbst. Seien nämlich a_1, a_2 die vom Punkte A der C_3^4 an sie gezogenen Tangenten, A_1, A_2 ihre Berührungspunkte, so sind DA_1, DA_2 vertauschbar entsprechend, also ein Involutionspaar. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Tangenten der C_3^4 in D.* Diese Involution stimmt mit der vorigen überein, womit die Behauptung, dass $C_3^4 = C_3^*$, erwiesen ist. — Hieraus ergiebt sich nun: Für jeden Punkt der Verbindungslinie der Involutionsdoppelpunkte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ auf C_3^r ist der Kegel nach der C_3^r selbst der Complexkegel.

Die Congruenz erster Ordnung dritter Classe der Treffgeraden von C_3^r und ihrer Secante $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ gehört dem Complex an. Für den Complexkegel aus P folgt daraus: Die drei Strahlen des Complexkegels, welche die C_3^r treffen, liegen stets in einer Ebene und daher die sechs paarweise benachbarten Erzeugenden des Kegels, welche ebenfalls die C_3^r treffen, auf einem Kegel zweiten Grades.**

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ die Schnitte von E mit C_3^r und ihrer Secante $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$, so geht die zu E gehörige Complexcurve durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Von ihnen gehen an die Complexcurve die Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{F}$, von denen zu bemerken ist, dass sie sich im selben Punkte begegnen.

Die duale Uebersetzung des Vorigen ergiebt: Die Congruenz der Geraden, welche die Linie $\Phi_1 \Phi_2$ treffen und zugleich die developpable Fläche der C_3^r berühren, gehört zum Complex. Weil $\Phi_1 \Phi_2$ Doppeltangente der Developpabeln ist, so ist diese Congruenz dritter Ordnung erster Classe (wobei von den Complexgeraden in den Ausnahmeebenen Φ abgesehen wird). — Wir fanden oben, dass der Complexkegel des Punktes P die drei von ihm ausgehenden Schmiegungsebenen A, B, C der C_3^r sowohl berühre, als schneide. Nach dem eben Gesagten geschieht das Schneiden nach drei Erzeugenden, die aus den Ebenen A, B, C durch die von P nach $\Phi_1 \Phi_2$ gehende Ebene ausgeschnitten werden: Die drei Erzeugenden des Complexkegels, die einzeln in den von P an C_3^r gehenden Schmiegungsebenen sich befinden, liegen stets in einer Ebene. (Die Schnittpunkte von C_3^* mit den Inflexionstangenten von C_3^4 liegen in einer Geraden.)

Sei E die Ebene einer Complexcurve, so schneidet sie aus der Developpabeln D_4^3, die zur C_3^r gehört, eine C_4^3, welche die Complexcurve in drei Punkten (mit einem Kegelschnitte) berührt. Die übrigen drei einzelnen gemeinsamen Tangenten von C_4^3 und der Complexcurve gehen durch einen Punkt; zwei von ihnen sind in den Ausnahmeebenen.

Jeder Complexkegel und jede Complexcurve enthalten eine Doppelerzeugende. Der Complex hat somit eine Congruenz ersten Grades von

---

* Sind z. B. J_1, J_2, J_3 die Inflexionsstellen einer C_3^4, i_1^*, i_2^*, i_3^* die von ihnen an C_3^4 gehenden Tangenten, J_1^*, J_2^*, J_3^* deren Berührungspunkte, so sind DJ_k, DJ_k^* drei Paare der Involution, deren Doppelstrahlen die Tangenten im Doppelpunkte der C_3^4 sind.

** Vergl. Salmon, Analyt. Geometrie d. höh. ebenen Curven, deutsch von Fiedler, 1873, Art. 81.

doppelten Linien. Zu ihr gehören insbesondere die Geraden $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ und $\Phi_1\Phi_2$, ausserdem die je unendlich vielen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, AA'. Von den letzteren bildet jede Gruppe eine Regelschaar zweiter Ordnung, beiden sind $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ gemein. Das Vorhandensein einer solchen Regelschaar zeigt schon, dass die Congruenz ersten Grades irreducibel ist.

Die eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades besteht aus den Linien $g_a = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. Seien l_a, $l_{a'}$ die Strahlen zweiter Erzeugung derselben Fläche, die von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ ausgehen. Alsdann kommen unter den g_a vor $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ als Tangenten der $C_3{}^r$ in $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Die l_a, $l_{a'}$ bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen l_1, l_2 durch $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ gehen. Das windschiefe Vierseit $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, l_1, l_2 ist beiden Regelflächen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, AA' angehörig. Die Seiten $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, sowie die, das genannte Vierseit zum Tetraeder ergänzenden Kanten $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, $\Phi_1\Phi_2$ sind doppelte Complexgerade, somit l_1 und l_2 die Directricen der Congruenz der Complexdoppelgeraden. Hierbei kann l_1 leicht gefunden werden als die Linie in Φ_1 von $\mathfrak{F}_1$ nach dem Punkte $\Phi_1\mathfrak{f}_2$ etc.

Befindet sich P auf der Developpabeln $D_4{}^3$ der $C_3{}^r$, so zerfällt der Complexkegel. Die Projection von der $C_3{}^r$ aus P ist nunmehr eine Curve dritten Grades $C_3{}^3$ mit der Spitze S. Sie ist Träger einer Involution mit den Doppelpunkten F_1, F_2. Diese Involution gilt ebenso gut für die Strahlen um S, hierbei entspreche σ' der Spitzentangente σ, σ' treffe $C_3{}^3$ in S'. Die $C_3{}^*$ zerfällt nun in die Tangente s' der $C_3{}^3$ in Punkt S' und einen Kegelschnitt, der die $C_3{}^3$ in zwei Punkten berührt, in F_1, F_2 schneidet und der durch den Schnittpunkt von $\sigma = s$ mit s' geht. Hierbei begegnen sich s' und F_1F_2 auf der $C_3{}^3$. Andererseits berührt die Inflexionstangente i der $C_3{}^3$ die $C_3{}^*$ und schneidet sie ausserdem im Punkte $s'i$. Die zweite Tangente von diesem Punkte an den Kegelschnitt (der mit s die $C_3{}^*$ bildet) hat ihren Berührungspunkt auf der Tangente s (welche zwei vereinigte Inflexionstangenten repräsentirt). Durch Zusammenrücken der Inflexionstangenten der $C_3{}^4$ mit ihren Berührungspunkten kann man sich das Auftreten eines weiteren Knotens in $C_3{}^*$ leicht deutlich machen. Aus diesem Verhalten der zerfallenen $C_3{}^*$ ergiebt sich z. B. der Satz: „Eine Curve dritten Grades mit der Spitze S, der Spitzentangente s enthalte die Punkte F_1, F_2. Ist σ der vierte harmonische Strahl für s in Bezug auf SF_1, SF_2, so trifft er die $C_3{}^3$ in einem Punkte, dessen Tangente nach dem dritten Schnittpunkte von F_1F_2 mit der $C_3{}^3$ geht.“ Der duale Satz bezieht sich auf dieselbe Curve.

P liege, wie vorhin, auf der Developpabeln $D_4{}^3$ in der Tangente $\mathfrak{a}$ der $C_3{}^r$. Alsdann zerfällt der Complexkegel in die Ebene $P\mathfrak{a}'$ und einen Kegel zweiten Grades. Es sind zwei Doppelerzeugende am Complexkegel vorhanden. Die eine ist die Transversale zu l_1, l_2, die andere ist nach dem Vorigen die Schnittlinie der Schmiegungsebene A längs $\mathfrak{a}$ mit der Ebene $P\mathfrak{a}'$. Um die Gesammtheit dieser letzteren Linien zu erhalten, schneiden wir alle Schmiegungsebenen mit den Tangenten der C_3^r in den zu den Osculationspunkten entsprechenden Punkten. Der entstehende Schnittpunkt $\mathrm{A}\mathfrak{a}'$ ist der Scheitel, A die Ebene eines Büschels derartiger Geraden. Der Ort des Scheitels ist nun eine Raumcurve dritter Ordnung C_3^{r*}, die auf der Regelfläche $\mathrm{A}\mathrm{A}'$ gelegen ist und durch $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ geht. (Der Beweis des Dualen folgt.)

Die so entstehende Congruenz hat C_3^{r*} als Brenncurve, D_4^3 als Brennfläche und ist ohne Zweifel dritten Grades. (Von P gehen an C_3^r drei Schmiegungsebenen; in jeder hat man ein Büschel, von denen jedes einen Strahl nach P sendet. Andererseits trifft E den Ort C_3^{r*} des Büschelscheitels ebenfalls dreimal, enthält somit auch drei von den Strahlen.) — Für einen beliebigen Complexkegel liefert diese Congruenz die drei Erzeugenden, in denen er die von seiner Spitze an C_3^r gehenden Schmiegungsebenen berührt. Rückt der Scheitel des Complexkegels auf die Developpable D_4^3, so liegt er in zwei benachbarten Schmiegungsebenen der C_3^r. Es vereinigen sich dann zwei Geraden der Congruenz zu einer Doppelgeraden.

In der Folge mag der Complexkegel für einen Punkt $\mathfrak{A}$ der C_3^r selbst betrachtet werden. Zunächst gehört ihm das Büschel aus $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ an. Ausserdem treten zwei vereinigte Büschel $P\mathfrak{a}'$ auf. (In $\mathfrak{A}$ sollen sich die consecutiven Tangenten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ treffen, ihnen entsprechen $\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2$; die beiden Büschel $P\mathfrak{a}_1$, $P\mathfrak{a}_2$ bestehen aus Complexgeraden und sind in der That consecutiv.)

Bilden wir auch hier die Leitcurve des Complexkegels. An Stelle der C_3^4 tritt der Kegelschnitt K mit seiner Tangente a in A. Auf K ist die Involution mit den Doppelpunkten F_1, F_2. Dem A entspricht A' von K, die Tangente daselbst ist a'. Die Tangente a' doppelt zählend nebst der Geraden F_1F_2 bilden nun die C_3^*. Hierbei treffen sich nothwendigerweise a und a' in F_1F_2.

An dieser Stelle ist die dem Complex angehörige Congruenz der Büschel $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$ zu betrachten. Eine Brenncurve von ihr ist C_3^r selbst, ausserdem bilden die Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$ eine Brennfläche, die developpabel sein wird. Diese letztere ist noch unbekannt.

Projicirt man C_3^r von einem beliebigen Raumpunkte, so entstehen A und a' als Bilder von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}'$. Es wird verlangt, dass a' durch A gehe. Das geschieht aber nach S. 160 dreimal: die Developpable ist dritter Classe D_4^{3*}. — Im Bilde treten die Punkte auf, in denen C_3^4 und C_3^* sich berühren. — Die Congruenz dieser Strahlbüschel $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$ ist dritten Grades und liefert für jeden Complexkegel die drei Erzeugenden, in denen er die C_3^r berührt. Für die Complexcurve liefert diese Congruenz die drei Tangenten in den Schnittpunkten A, B, C mit C_3^r. Die so entstehenden sechs paarweise benachbarten Elemente der Complexcurve gehören nach Früherem ebenfalls einem Kegelschnitt an.

Wir fanden, dass für P auf D_4^3 der Complexkegel zwei doppelte Erzeugende enthalte. P sei speciell auf der Tangente $\mathfrak{a}$, der die Schmiegungsebene A von C_3^r zukommt. Die beiden Doppelgeraden sind die Transversale aus P nach l_1, l_2, sowie die Linie aus P nach dem Punkte $A\mathfrak{a}'$ (der auf der C_3^{r*} gelegen ist). Würden beide sich vereinigen, so würde der Complexkegel in einen Kegel zweiter Ordnung nebst einer seiner Tangentialebenen ausarten. Für einen Punkt auf $\mathfrak{a}$ findet diese Vereinigung allerdings statt. Die Schnittlinie AA' trifft nämlich l_1, l_2, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$. Fällt also P nach $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{a}A'$ (auf die C_3^{r*}), so fällt die Transversale nach l_1, l_2 mit der nach $A\mathfrak{a}'$ gehenden Geraden zusammen. Es ergiebt sich hieraus: Für jeden Punkt der C_3^{r*}, welche der Ort des Schnittpunktes $A'\mathfrak{a}$ ist, zerfällt der Complexkegel in einen Kegel zweiter Ordnung und eine seiner Tangentialebenen.* Die letztere ist die von diesem Punkte ausgehende, nicht mit A' vereinigte Schmiegungsebene A der C_3^r. Die Strahlen des Kegels nach $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und dem Osculationspunkte von A liegen in einer Ebene. — Auf jedem Strahle AA' giebt es zwei solche Punkte. Zu der von diesen AA' gebildeten Regelschaar gehören nun auch l_1, l_2; für diese fallen die genannten Punkte in $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ zusammen, d. h.: Die Directricen l_1, l_2 der Congruenz der Complexdoppelgeraden berühren C_3^{r*} in $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. — Die Schnittpunkte der Geraden AA' mit l_1, l_2 liegen harmonisch zu den Schnittpunkten mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ (den Scheiteln der vorhin genannten speciellen Complexkegel). — Befindet sich die Spitze des Complexkegels in $\mathfrak{F}_1$ selbst, so zerfällt derselbe in zwei Büschel. Das eine zählt doppelt, seine Ebene ist Φ_1. Die Ebene des andern ist $\mathfrak{F}_2\mathfrak{f}_1$: Die Transversalen aus einem Doppelpunkte der Involution auf C_3^r nach den entsprechenden Tangentenpaaren bilden ein Büschel, dessen Ebene einerseits durch die Tangente der C_3^r in diesem Doppelpunkte, andererseits durch den andern Doppelpunkt geht. Die Richtigkeit hiervon ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung des Kegels zweiter Ordnung, der jetzt die C_3^r projicirt. Seine Erzeugenden und Tangentialebenen sind in Involution, die Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen ist je eine der gesuchten Secanten. (Vergl. S. 164.)

Der Complexkegel vom Scheitel P enthält sechzehn besondere Erzeugende: drei treffen C_3^r, ihre reducible Congruenz drit-

* Das nämliche Zerfallen findet statt, wenn der Scheitel des Complexkegels in einer Ausnahmeebene, z. B. Φ_1, ist. Es tritt das Büschel in Φ_1 auf, der übrig bleibende Kegel berührt längs der Verbindungslinie mit $\mathfrak{F}_1$ (dem Osculationspunkte von Φ_1 auf C_3^r).

ten Grades hat zu Brenncurven die C_3^r nebst ihrer Secante $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$; in drei weiteren wird C_3^r vom Complexkegel berührt, die Congruenz dieser Geraden ist auch dritten Grades, eine Brenncurve ist C_3^{r*} und die Brennfläche die Developpable D_4^{3*} (S. 164). Drei fernere Erzeugende liegen in den Schmiegungsebenen aus P an C_3^r; ihre Congruenz ist dritten Grades, eine Brennfläche von ihr ist die Developpable D_4^3 von C_3^r und eine Brenncurve die Doppeltangente $\Phi_1\Phi_2$ von ihr (diese drei Erzeugenden sind stets in einer Ebene). Weiterhin sind drei Erzeugende, in denen der Complexkegel die von P nach C_3^r möglichen Schmiegungsebenen berührt; so entsteht die Congruenz dritten Grades mit C_3^{r*} als Brenncurve und D_4^3 als Brennfläche. Der Kegel besitzt eine Doppelerzeugende, ihre Gesammtheit ist die lineare Congruenz; die eine Directrix geht von $\mathfrak{F}_1$ nach dem Punkte $\Phi_1\mathfrak{f}_2$, die andere von $\mathfrak{F}_2$ nach $\Phi_2\mathfrak{f}_1$. Endlich hat der Kegel drei Inflexionserzeugende; die Gesammtheit dieser ist auch eine Congruenz und liefert für die Complexcurven die Spitzentangenten.

Dass die drei Erzeugenden des Complexkegels, in denen derselbe von C_3^r geschnitten wird, in Geraden sind, ergiebt für die ebene Curve (C_3^4) dritter Ordnung mit Knoten den Satz: Besteht auf ihr eine Involution mit den Doppelpunkten F_1, F_2, so schneide man deren Verbindungslinie mit der Curve; die von diesem Punkte an sie gehenden Tangenten berühren alsdann in entsprechenden Punkten.

Die D_4^{3*} ist gebildet durch die Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$. Indem man die Regelfläche $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, auf der C_3^r gelegen ist, zu Hilfe nimmt und zwei consecutive Ebenen von D^* ins Auge fasst, findet man: Die Erzeugenden der Developpabeln D^* gehen durch die Curvenpunkte von C_3^r, liegen aber nicht in deren Schmiegungsebenen. (Ebenso liegen die Tangenten von C_3^{r*} in den Schmiegungsebenen von C_3^r, gehen aber in ihnen nicht durch die Osculationspunkte.) Liegt nun P auf der D^*, so rücken zwei Berührungsstellen von C_3^r mit dem Complexkegel zusammen; ist P aber auf der Rückkehrcurve von D^* gelegen, so osculirt die C_3^r den betreffenden Complexkegel sechspunktig.

Noch sind drei von den 16 besonderen Erzeugenden des Complexkegels bisher nur vorübergehend erwähnt worden. Es sind das die Inflexionserzeugenden. Liegen drei consecutive Complexgerade in einer Ebene und gehen sie durch den nämlichen Punkt, so bedingt das zugleich eine Inflexionsstelle für den Kegel und eine Cuspidalstelle für die Complexcurve. Die Gesammtheit dieser Linien ist eine Congruenz. Es lassen sich zwei Flächen angeben, für deren Punkte der Complexkegel eine Spitze, d. i. die Vereinigung von zwei Inflexionen, hat. Diese treten nämlich auf, wenn bei dem Kegel, der aus P die C_3^r projicirt, die

Tangentialebenen bei der Doppelerzeugenden oder wenn zwei stationäre Tangentialebenen sich entsprechen. In jedem Falle wird die Schnittlinie der genannten Ebenen zur Cuspidalerzeugenden. Im ersteren Falle liegt P auf der Regelfläche $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, im letzteren auf der Fläche AA'. Die Tangentialebenen dieser Regelflächen ergeben für ihre Complexcurven genau die duale Specialisirung, nämlich die Vereinigung von zwei Cuspidalstellen zu einer Inflexion.

Auf der Regelfläche AA' befindet sich die Raumcurve dritter Ordnung $C_3{}^{r*}$ (Ort des Punktes $A\alpha'$). Für ihre Punkte zerfällt der Complexkegel in einen Kegel zweiter Ordnung, nebst einer seiner Tangentialebenen (S. 165). Die Kegelerzeugende in der Tangentialebene ist als Vereinigung aller drei Inflexionsseiten des Complexkegels aufzufassen. Irgend ein Strahl AA' trifft hierbei die $C_3{}^{r*}$ in den zwei Punkten $A\alpha'$, $A'\alpha$. Für alle anderen Punkte des Strahls sind von den drei Inflexionsseiten zwei vereinigt, die dritte davon getrennt.

XI.

Durchgang eines dünnen Strahlenbündels durch ein Prisma.

Von

Prof. P. Zech

in Stuttgart.

Hierzu Taf. II Fig. 6.

1. Im 17. Jahrgange dieser Zeitschrift (S. 353) habe ich nach dem Vorgange von Möbius die Eigenschaften dünner Strahlenbündel durch Betrachtung affiner Systeme nachgewiesen und den Satz aufgestellt: „Hat man einmal einen Lichtstrahl durch eine Reihe von Mitteln verfolgt, so wird es verhältnissmässig einfach sein, zwei unendlich nahe in gleicher Weise zu verfolgen, und damit ist dann die Form des Strahlenbündels für jedes Mittel sogleich bestimmt."

Als ich den Versuch machte, die allgemeinen Resultate zunächst für ein einfaches Beispiel, den Durchgang eines dünnen Strahlenbündels durch ein Prisma, zu verwerthen, zeigte sich eine Schwierigkeit, die vor Allem aus dem Wege geräumt werden musste. Bei der Betrachtung affiner Gebilde wurde vorausgesetzt, dass die Brennlinien parallel zu den Grundebenen seien; Kummer (in Crelle's Journal, 57 S. 189) und Helmholtz (Physiologische Optik S. 238) setzen voraus, dass die Brennlinien senkrecht auf der Axe des Bündels stehen. Wenn man aber den einfachsten Fall der Brechung an einer ebenen Fläche betrachtet (vergl. Reusch, Pogg. Ann., 117 S. 241 und 130 S. 497), so erhält man schon eine zur Axe des Bündels nicht senkrechte Brennlinie.*

Darnach wäre zu vermuthen, dass drei Strahlen zur Bestimmung der Brennlinien eines dünnen Strahlenbündels nicht genügen, weil auch noch der Winkel derselben mit der Axe zu bestimmen übrig bliebe.

* Wie fehlerhaft selbst dieser einfache Fall in den Lehrbüchern der Physik behandelt wird, dafür ist ein lehrreiches Beispiel der Aufsatz von Bauer in Pogg. Ann., 153 S. 182, der ebenfalls auf einseitigem Standpunkte stehend, die viel früheren Arbeiten von Reusch nicht kannte.

Ausserdem konnte der Zweifel auftauchen, ob die früheren Betrachtungen allgemein genug seien, um auch für den Fall von Brennlinien, die schief zur Axe sind, Anwendung zu finden. Um darüber zu entscheiden, ist es nöthig, das allgemeinste Strahlenbündel zu untersuchen, das durch seine Axe und irgend zwei diese Axe schneidende Gerade als Brennlinien bestimmt ist, wenn noch eine unendlich kleine Curve als Leitlinie gegeben ist, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt. Die allgemeine Betrachtung einer solchen Regelfläche ist aus dem letzten Capitel (S. 253 flgg.) von Steiner's „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit u. s. w." einfach abzuleiten. Was für den vorliegenden Zweck nöthig ist, lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

2. Es seien eine Ebene E — Grundebene genannt — und zwei feste Gerade P und Q gegeben. Zieht man durch irgend einen Punkt a der Grundebene eine Gerade, welche P und Q schneidet und eine beliebige Ebene N in a' trifft, so soll a' der dem Punkte a in der Ebene N entsprechende Punkt heissen. Einer Geraden m in der Grundebene wird dann im Allgemeinen eine Curve m' in N entsprechen. Was dies für eine Curve ist, ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass die Geraden, welche entsprechende Punkte verbinden, auf einem einfachen Hyperboloide liegen, weil sie alle die drei Geraden P, Q und m schneiden. Da aber das Hyperboloid eine Ebene im Allgemeinen in einem Kegelschnitte schneidet, so entspricht der Geraden m in E im Allgemeinen ein Kegelschnitt m' in N.

Ist ferner k ein Kegelschnitt in der Grundebene E, so ergiebt sich die entsprechende Curve k' in N folgendermassen. Einer Geraden, welche k' schneidet, entspricht in E ein Kegelschnitt, den Schnittpunkten der Geraden mit k' entsprechen die Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit dem Kegelschnitte k: da dies im Allgemeinen vier sind, so wird die Curve k' von einer Geraden in vier Punkten geschnitten, sie ist vom vierten Grade. Also ist auch die durch k, P und Q bestimmte Regelfläche vom vierten Grade.

Wenn aber die Ebene N besondere Lagen hat, entspricht einer Geraden der Grundebene wieder eine Gerade und einem Kegelschnitte wieder ein solcher. Dies ist der Fall, wenn N durch die Gerade G geht, welche die Schnittpunkte der Geraden P und Q mit der Grundebene enthält. Da nämlich G Mantellinie des Hyperboloids ist, das m, P und Q zu Leitlinien hat, und da G in N liegt, so ist der Schnitt des Hyperboloids mit N ein Paar Gerade, von denen G die eine ist: die andere entspricht der Geraden m in der Grundebene, d. h. m' ist in diesem Falle eine Gerade, nicht ein Kegelschnitt. Es entspricht jeder Geraden der Grundebene eine Gerade in der durch G gehenden Ebene.

Es wird also auch die einem Kegelschnitte k der Grundebene entsprechende Curve k' in N von einer Geraden in der Ebene N nur in zwei Punkten geschnitten, da die entsprechende Gerade der Grundebene den Kegelschnitt k auch nur in zwei Punkten schneidet. Die Curve k' ist somit ebenfals ein Kegelschnitt.

Denkt man sich also einen Kegelschnitt in der Grundebene und durch jeden Punkt desselben eine Gerade, welche die festen Geraden P und Q schneidet, so erhält man eine Regelfläche vierten Grades, welche alle Ebenen durch G, d. h. durch die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden P und Q mit der Grundebene, in Kegelschnitten schneidet (vergl. Kummer, Berliner Monatsberichte, 1860 S. 469).

Wenn man irgend zwei Ebenen, die durch G gehen, so auf einander bezieht, dass einem Punkte der einen derjenige der andern entspricht, welcher mit dem ersten verbunden eine P und Q schneidende Gerade giebt, so hat man zwei collineare Systeme. Für den Fall, dass die Gerade G im Unendlichen liegt, werden die Systeme affin — der früher betrachtete Fall.

3. Bei dünnen Strahlenbündeln hat man es nur mit unendlich kleinen Querschnitten zu thun, also mit lauter Ellipsen, wenn irgend ein Schnitt mit einer durch G gehenden Ebene als Ellipse angenommen worden ist. Die Mittelpunkte aller dieser Ellipsen liegen auf einer Geraden, die Axe des Strahlenbündels heissen soll. Da sich nämlich die Ellipsen in den Ebenen durch G collinear entsprechen, so müssen auch die Pole von G für die Ellipsen entsprechende Punkte sein, also auf einer Geraden liegen, welche P und Q schneidet. Da nun aber die Ellipsen unendlich klein sind, die Gerade G aber einen endlichen Abstand von ihnen hat, so steht jeder solche Pol vom Mittelpunkt seiner Ellipse nur um ein Kleines zweiter Ordnung ab. Die Gerade, welche die Pole der Geraden G enthält, wird also auch genähert durch die Mittelpunkte der unendlich kleinen Ellipsen gehen oder Axe des Bündels sein.

Die stets wiederkehrende Aufgabe beim Durchgang des Lichtes durch verschiedene Mittel ist, die Form des Strahlenbündels zu bestimmen und die Brennlinien zu finden, oder vielmehr die Brennpunkte, die Schnitte der Brennlinien mit der Axe des Bündels. Es handelt sich ja blos um den Ort der grössten Intensität des Lichts auf dem Strahl, ob die Brennlinie schief oder senkrecht auf dem Strahl steht, ist gleichgiltig. Begnügt man sich mit den Brennpunkten, so braucht man nur drei Strahlen des Bündels zu kennen, um sie zu finden, man kann von der Form des Querschnittes vollkommen absehen. Man kann als Richtung der Brennlinien eine ganz beliebige wählen und wird immer wieder, bis auf unendlich kleine Grössen genau, dieselben Brennpunkte finden.

Um dies zu beweisen, denken wir uns ein Strahlenbündel, dessen Axe mit der Axe der Z eines schiefwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen soll. Die eine Brennlinie schneide Z in P und X in A, die andere Z in Q und Y in B; die Gerade AB in XY ist dann unsere Gerade G. Der Strahl, der mit der Axe des Bündels zusammenfällt, heisse Hauptstrahl; irgend ein Nebenstrahl ist bestimmt durch die Schnittpunkte a und b mit den Brennlinien PA und QB, wobei Pa und Qb unendlich klein sind; ein zweiter Nebenstrahl sei ebenso durch a' und b' gegeben. Es soll nachgewiesen werden, dass bei beliebiger angenommener Richtung eine Gerade, welche die drei Strahlen zugleich schneidet, den Hauptstrahl in P oder Q oder einem diesen Punkten unendlich nahen Punkte trifft. Ausgeschlossen bleibt jede der Axe Z unendlich nahe liegende Richtung.

Es sei M der Punkt, wo die Gerade, welche die drei Strahlen schneidet, den Hauptstrahl oder die Axe Z trifft. Die zwei Ebenen Mab und $Ma'b'$ schneiden sich in jener Geraden. Ist M in endlicher Entfernung von P und von Q, so schneidet MA und MA' von der Axe X vom Ursprung O aus unendlich kleine Stücke Oa_1 und Oa'_1 ab, ebenso Mb und Mb' auf der Axe Y die unendlich kleinen Stücke Ob_1 und Ob'_1. Die Spuren der Ebenen Mab und $Ma'b'$ in XY liegen also unendlich nahe am Ursprung O, also auch ihr Schnittpunkt, und somit wäre die Gerade, welche die Strahlen schneidet, unendlich nahe an Z. Nur wenn $a_1 b_1$ und $a'_1 b'_1$ oder die Spuren jener Ebene parallel sind, gilt dieser Schluss nicht. Dann ist die Gerade, welche die drei Strahlen schneidet, ebenfalls parallel jenen Spuren und daher der Ebene XY, und man sieht durch directe Betrachtung, dass sie entweder durch P oder durch Q gehen muss. Denn bewegt sich eine Gerade parallel zu XY auf den Leitlinien AP und BQ, so kann sie die Axe Z nur da schneiden, wo diese Leitlinien sie schneiden.

Liegt aber M unendlich nahe an P, dann sind Oa_1 und Oa'_1 endlich, dagegen Ob_1 und Ob'_1 unendlich klein, die Spuren der Ebenen Mab und $Ma'b'$ in XY sind nahezu parallel, die Gerade, welche die drei Strahlen schneidet, bildet also mit dem Hauptstrahl einen endlichen Winkel, der je nach der Lage von M die verschiedensten Werthe haben kann. Ganz derselbe Schluss ergiebt sich, wenn M unendlich nahe an Q liegt. Zugleich ersieht man, dass alle diese Gerade entweder in XZ oder in YZ liegen, dass dies also die Brennebenen sind.

Sowie man also für die Brennlinien eine Richtung annimmt, die nicht unendlich nahe am Hauptstrahl liegt, erhält man als Schnittpunkte mit dem Hauptstrahl immer dieselben Brennpunkte, bis auf unendlich kleine Grössen genau. Insbesondere wird man bei jedem Strahlenbündel die Brennlinien senkrecht zum Hauptstrahl annehmen können, ohne deswegen andere Brennpunkte zu finden.

4. Ehe wir uns zu der Aufgabe, ein Strahlenbündel bei seinem Durchgang durch ein Prisma zu verfolgen, wenden können, stellen wir noch zwei Sätze auf, die uns dabei behilflich sind. Der erste rührt von Reusch her, gilt für die Brechung an einer Ebene und heisst:

Wenn in der Einfallsebene um den Einfallspunkt ein Kreis mit beliebigem Halbmesser und ein zweiter mit einem im Verhältniss des Brechungsverhältnisses grössern Halbmesser beschrieben wird, so trifft eine Parallele mit dem Einfallsloth durch den Schnittpunkt des einfallenden Strahls mit dem ersten Kreise den zweiten in einem Punkte, welcher auf dem gebrochenen Strahle liegt.*

Die Construction lässt sich nach Reusch auch so ausdrücken: Auf der Parallelen zum Einfallsloth durch einen Punkt des einfallenden Strahls bestimme man einen Punkt, der vom Einfallspunkt $n$mal so weit entfernt ist (n das Brechungsverhältniss), als jener erste Punkt, so hat man einen Punkt des gebrochenen Strahls.

Aus dieser Construction folgt sogleich, dass alle von einem Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung die Parallele durch den Punkt zum Einfallsloth schneiden, dass also diese Parallele Brennlinie des gebrochenen Bündels ist (die oben angeführte, zur Axe des Bündels nicht senkrechte).

Es lässt sich aber auch noch folgender Satz ableiten: Wenn von einem Punkte zwei unendlich nahe Strahlen ausgehen und der eine auf die Einfallsebene des andern projicirt wird, so ist das Verhältniss des Stückes, welches der eine gebrochene Strahl und die Projection des andern auf der Parallelen durch den Punkt zum Einfallsloth begrenzen, zu dem Abstand des einen Einfallspunktes von der Projection des andern gleich der Tangente des Brechungswinkels, multiplicirt mit der brechenden Kraft (n^2-1).

Ist also (s. Fig. 6) AO ein einfallender Strahl, AB die Projection eines zweiten unendlich nahen auf die Einfallsebene AON des ersten und sind PO der gebrochene erste, BC die Projection des zweiten gebrochenen Strahls, P und C die Schnitte der gebrochenen Strahlen mit der Parallelen durch A zum Einfallsloth ON, so ist

$$\frac{PC}{OB} = (n^2-1)\,tg\,\beta,$$

wobei β der Brechungswinkel PON ist.

Es ist nämlich nach dem Satze von Reusch

$$PO = n.AO \text{ und } CB = n.AB,$$

das letzte mit Vernachlässigung Kleiner zweiter Ordnung (streng gilt es nur für den Strahl selbst, nicht für die Projection). Also ist der Unterschied von PO und CB das $n$fache des Unterschieds von AO und

* Diese Construction giebt Reusch in Pogg. Ann., 117 S. 241, als eine „seit langer Zeit" von ihm angewendete, wie seinen Schülern wohlbekannt ist. Im folgenden Bande, 118 S. 452, giebt Radau dieselbe Construction, „die, wie er glaube, noch nicht bekannt sei". Die Redaction sagt Nichts dazu und neuere Lehrbücher (z. B. Reis) ignoriren Reusch!!

OB. Da aber die zwei ersten und die zwei letzten Strahlen unter sich sehr kleine Winkel bilden, so ist der erste Unterschied die Summe der Projectionen von PC und BO auf PO, der zweite die Projection von PO auf AO, und somit

$$PC.\cos\beta + BO.\sin\beta = n.BO.\sin\alpha = n^2.BO.\sin\beta,$$

womit die obige Beziehung gegeben ist.

5. Wir verfolgen nun das Strahlenbündel bei seinem Durchgang durch das Prisma. Der Hauptstrahl gehe von A aus und treffe die erste Prismenfläche in O, nach der Brechung verlasse er bei O' das Prisma. Dann ist OO' der gebrochene Strahl innerhalb des Prisma, und zieht man in O und O' die Normalen ON und $O'N'$ der Prismenflächen (nach aussen hin), so ist durch die gebrochene Linie $NOO'N'$ der Gang des Hauptstrahls bestimmt. Die einzelnen Strahlen sind durch den Einfallswinkel α in der Einfallsebene NOO' und durch den Brechungswinkel β beim Eintritt, durch den Brechungswinkel γ beim Austritt und den Austrittswinkel δ in der Austrittsebene $OO'N'$ gegeben. Es bestehen die Beziehungen

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \quad \sin\delta = n\sin\gamma.$$

In der Einfallsebene liegen AO, NO und OO', in der Austrittsebene OO', $N'O'$, $A'O'$; der Winkel beider Ebenen, die sich in OO' schneiden, sei mit φ bezeichnet und werde so gewählt, dass beim Sehen in der Richtung $O'O$ die Austrittsebene um $O'O$ im Betrag des Winkels φ rechts gedreht mit der Einfallsebene zusammenfällt. Es besteht dann die Beziehung

$$\cos i = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta\cos\varphi,$$

wo i der brechende Winkel des Prisma ist.

Jeder dem Hauptstrahl unendlich nahe Strahl heisse Nebenstrahl; alle durch A gehenden Nebenstrahlen schneiden (nach 4) die Parallele AP durch A zum Einfallsloth; P ist Brennpunkt auf dem gebrochenen Strahl, und es ist

$$PO = n.AO = n.l,$$

wenn man mit l die Länge des einfallenden Hauptstrahls bezeichnet.

Zur Bestimmung der zweiten Brennlinie dient der zweite Satz in Nr. 4:

$$\frac{PC}{OB} = (n^2-1)\,tg\,\beta.$$

Schneidet BC den gebrochenen Strahl in Q und zieht man durch P eine Parallele zu OB (also senkrecht zu PC), bis sie die Projection des Nebenstrahls trifft, so ist deren Länge bis auf Kleine zweiter Ordnung $CP.tg\beta$ und es ergiebt sich

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OB - CP\,tg\,\beta}{OB} = 1-(n^2-1)\,tg\,\beta = \frac{1-n^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}.$$

Da Q von der Lage der Punkte B und C unabhängig ist, so gehen die Projectionen aller gebrochenen Nebenstrahlen durch Q, sie schneiden also alle eine durch Q gehende Senkrechte zur Einfallsebene. Diese Senkrechte ist somit zweite Brennlinie und Q der zweite Brennpunkt.

6. Die Abstände OP und OQ sollen künftighin mit p und q bezeichnet werden. Es giebt nur einen Fall, in welchem P und Q zusammenfallen, nämlich wenn $\alpha = \beta$ ist, d. h. bei senkrechtem Einfallen, wenn keine Brechung stattfindet. Dann hat man ein Bild des Punktes A, weil sich alle von ihm ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte vereinigen. Das Bild ist ein scheinbares, weiter als der Gegenstand von der Grenzebene entfernt, wenn der Gegenstand im optisch weniger dichten Mittel liegt. So oft dagegen Brechung stattfindet, ist das Strahlenbündel nach der Brechung nicht mehr centrisch, es giebt also auch kein Bild im mathematischen Sinne des Wortes.

Man lege auf den Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes eine Zeichnung, welche aus zwei Systemen sich rechtwinklig kreuzender Parallellinien besteht, und stelle ein für kleine Entfernungen passendes Fernrohr (z. B. das eines Kathetometers) so auf, dass seine Axe in eine dem einen Liniensystem parallele Vertikalebene fällt. Man sieht dann bei passender Stellung des Oculars dieses Liniensystem vollkommen scharf, weil jeder Punkt als kleine Linie in der Einfallsebene (Brennlinie P) erscheint, also ausgedehnt in der Richtung der sichtbaren Linien: das Uebereinanderfallen der kleinen Linien muss wieder eine scharfe dunkle Linie geben. Das andere Liniensystem ist kaum oder gar nicht zu sehen, weil die an Stelle der Punkte tretenden kleinen Linien neben einander liegen, also eine breite, undeutliche Fläche statt der scharfen Linie geben. Zieht man das Ocular weiter heraus, so verschwindet das erste System und das andere erscheint, aber mit farbigen Säumen, weil die Dispersion senkrecht zu den Linien wirkt. Es hat keine Schwierigkeit, damit Messungen zu verbinden und den Werth von p und q zu bestimmen.

Wenn ein cylindrisches Büschel einfällt, so bleibt es bei jeder Brechung an einer ebenen Fläche cylindrisch, weil alle Strahlen gleiche Einfallswinkel haben und die Einfallslothe alle unter sich parallel sind. Die Brennlinien fallen dann ins Unendliche. Stellt man bei dem vorher beschriebenen Versuche die Zeichnung senkrecht zur Strahlenrichtung im Wasser und eine Linse in eine Entfernung gleich ihrer Brennweite, die Axe mit der Strahlenrichtung zusammenfallend, so sieht man beide Liniensysteme durch ein auf Unendlich gestelltes Fernrohr. Aber die Linse muss im Wasser sein, damit das cylindrische Büschel vor der Brechung sich bilde.

Wendet man bei einem Spectroskop ein stark vergrösserndes Fernrohr an und ist die Linse des Collimators nicht richtig gestellt oder wird überhaupt kein Collimator verwendet, wie bei den Taschenspectroskopen von Browning, so sieht man die Linien, welche das ganze Spectrum durchziehen und von der Unvollkommenheit der Spalte herrühren, deutlich, während die dazu senkrechten Fraunhofer'schen Linien nicht deutlich sind, und umgekehrt. Man hat damit ein einfaches Mittel, die richtige Stellung des Collimators zu controliren.

7. Weitere Aufgabe ist nun, das austretende Bündel zu bestimmen. Dazu genügt es, den Gang zweier Nebenstrahlen zu verfolgen; wir wählen zu diesem Zwecke zwei Nebenstrahlen des gebrochenen Hauptstrahls, von denen der eine in der Einfallsebene liegt, also durch den Punkt Q geht, der andere in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene, der somit durch den Punkt P geht. Der erste schneide eine zum gebrochenen Hauptstrahl senkrechte Ebene durch O' in einem Punkte F, der andere dieselbe Ebene in dem Punkte G.

Denken wir uns dann die Austrittsebene um den Winkel φ gedreht, bis sie mit der Einfallsebene zusammenfällt, so lassen sich in dieser gedrehten Ebene alle weiteren Constructionen ausführen (s. Fig. 6). Die Punkte P und Q bleiben, weil die Drehung um $O'O$ erfolgt. Die Punkte F und G haben sich in der zu $O'O$ senkrechten Ebene so gedreht, dass sie, wenn φ ein spitzer Winkel ist und wenn, was in unserem Belieben steht, der erste Nebenstrahl links, der zweite oberhalb vom gebrochenen Hauptstrahl gewählt wird, beide oberhalb der Ebene der Figur liegen. Setzt man

$$O'F = f \text{ und } O'G = g$$

und bezeichnet man mit F_1 und G_1 die Projectionen beider Punkte auf die Austrittsebene, so ist

$$O'F_1 = f\cos\varphi \text{ und } O'G_1 = g\sin\varphi$$

und die Höhen der Punkte über der Austrittsebene sind

$$FF_1 = f\sin\varphi \text{ und } GG_1 = g\cos\varphi.$$

Verlängert man jetzt die Nebenstrahlen QF und PG, bis sie die zweite Prismenfläche in F' und G' treffen, und sind F'_1 und G'_1 die Projectionen dieser Punkte auf die Austrittsebene, so ist mit Vernachlässigung Kleiner zweiter Ordnung

$$F'F'_1 = FF_1 = f\sin\varphi \text{ und } G'G'_1 = GG_1 = g\cos\varphi$$

und ferner,

$$O'F'_1 = \frac{O'F_1}{\cos\gamma} = f\frac{\cos\varphi}{\cos\gamma} \text{ und } O'G'_1 = \frac{O'G_1}{\cos\gamma} = g\frac{\sin\varphi}{\cos\gamma}.$$

Die durch F' und G' gehenden und in ihnen aus dem Prisma austretenden Nebenstrahlen schneiden (nach 4) die Parallelen, die man durch Q und P mit dem Austrittsloth $O'N'$ zieht: es geschehe dies in den Punkten Q_1 und P_1. Der austretende Hauptstrahl treffe die gleichen Parallelen in Q_0 und P_0. Nach dem zweiten Satze der Nummer 4 gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{Q_0 Q_1}{O' F'_1} = \frac{P_0 P_1}{O' G'_1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) tg\,\delta.$$

Hierbei ist, weil Austritt erfolgt, das Brechungsverhältniss $\frac{1}{n}$ statt n zu nehmen und als Brechungswinkel der Winkel des austretenden Hauptstrahls mit der Austrittsnormale. Eigentlich sollte die rechte Seite den Factor $\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$ enthalten; da dieser negativ ist, so zeigt er an, dass Q_1 und F'_1 auf verschiedenen Seiten von $Q_0 O'$ liegen und ebenso P_1 und G'_1 auf verschiedenen Seiten von $P_0 O'$.

Da in der Figur diese Lage angenommen ist, so wurde der Factor $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ gewählt, so dass die Gleichung das Verhältniss der absoluten Werthe giebt.

Die zwei Punkte P_1 und Q_1 sind also gegeben durch

$$P_0 P_1 = g \frac{\sin\varphi}{\cos\gamma}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) tg\,\delta \quad \text{und} \quad Q_0 Q_1 = f \frac{\cos\varphi}{\cos\gamma}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) tg\,\delta$$

und damit ist die Lage der austretenden Nebenstrahlen bestimmt, weil zugleich noch nach dem Satz von Reusch

$$O'Q_0 = \frac{1}{n}\, O'Q = \frac{L+q}{n}, \quad O'P_0 = \frac{1}{n}\, O'P = \frac{L+p}{n},$$

wenn mit L die Länge des gebrochenen Strahls im Prisma bezeichnet wird.

8. Das austretende Bündel ist durch den Hauptstrahl $O'P_0Q_0$ und die zwei Nebenstrahlen $G'P_1$ und $F'Q_1$ bestimmt, allerdings nicht vollständig, da bis jetzt von einem Querschnitt des Bündels nicht die Rede war. Wir könnten denselben beliebig annehmen, etwa in der Austrittsfläche um O' als Mittelpunkt; allein für unsere Zwecke genügt es, nur die Punkte zu bestimmen, wo die Brennlinien den Hauptstrahl treffen, und die Ebenen durch den Hauptstrahl, in denen die Brennlinien liegen (die Brennebenen). Zu diesem Zwecke genügt es nach Nr. 3, die Lagen einer zur Austrittsfläche parallelen Geraden zu suchen, in welchen sie die drei Strahlen schneidet. Wir suchen den Schnitt der Strahlen mit einer zur zweiten Prismenfläche parallelen Ebene in einer noch unbestimmten Entfernung und bestimmen dann diese so, dass die drei Schnitte in eine Gerade fallen.

Es werde diese Ebene vom Hauptstrahl in A', von den Nebenstrahlen in H und J geschnitten, deren Projectionen auf die Austrittsebene H_1 und J_1 seien. Da Q_1 und P_1 in der Austrittsebene, F' und G' oberhalb derselben liegen, so ist dies auch bei H und J der Fall, wenn A' ausserhalb des Prisma auf Seite der austretenden Strahlen liegt. Zieht man in der Austrittsebene durch Q_0 und P_0 Parallelen zur zweiten Prismenfläche, welche $O'Q_1$ und $O'P_1$ schneiden, so stehen diese Geraden senkrecht auf

$Q_0 Q_1$ und $P_0 P_1$ und ihre Länge ist gleich diesen Strecken, wenn sie mit $tg\,\delta$ multiplicirt werden.

Zwischen den Geraden $A'Q_0$ und $H_1 Q_1$ hat man jetzt drei Parallelen durch Q_0, O' und A'; ebenso zwischen $A'P_0$ und $J_1 P_1$ die Parallelen durch P_0, Q' und A'. Aus diesen zwei Figuren ergeben sich die Beziehungen

$$A'H_1 - O'F'_1 = \frac{O'A'}{O'Q_0}(O'F'_1 + Q_0 Q_1 \,.\, tg\,\delta),$$

$$A'J_1 - O'G'_1 = \frac{O'A'}{O'P_0}(O'G'_1 + P_0 P_1 \,.\, tg\,\delta).$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe der Nr. 7, nimmt $A'O' = c$ und bedenkt, dass

$$1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) tg^2\,\delta = \frac{cos^2\,\gamma}{cos^2\,\delta}$$

ist, so folgt

$$A'H_1 = f\frac{cos\,\varphi}{cos\,\gamma}\left(1 + \frac{cn}{L+q}\,\frac{cos^2\,\gamma}{cos^2\,\delta}\right), \quad A'J_1 = g\frac{sin\,\varphi}{cos\,\gamma}\left(1 + \frac{cn}{L+p}\,\frac{cos^2\,\gamma}{cos^2\,\delta}\right)$$

und weiter folgt einfach

$$HH_1 = f\,sin\,\varphi\left(1 + \frac{cn}{L+q}\right), \quad JJ_1 = g\,cos\,\varphi\left(1 + \frac{cn}{L+p}\right).$$

Soll nun c so gewählt werden, dass die drei Punkte H, A' und F in gerader Linie sind, so sieht man sogleich, dass dies auf Seite des austretenden Strahls nicht sein kann, weil hier immer H und J auf derselben Seite der Austrittsebene liegen. Die Brennlinien müssen den austretenden Strahl in seiner Rückverlängerung jedenfalls jenseits P_0 schneiden und diesseits Q_0, weil H und J jenseits Q_0 wieder auf derselben Seite der Austrittsebene liegen.

Die Bedingung, dass H, A' und J in einer Geraden liegen, ist

$$\frac{HH_1}{A_1 H_1} = -\frac{JJ_1}{A'J_1}$$

mit negativem Zeichen, weil die Punkte H und J auf verschiedenen Seiten der Austrittsebene liegen müssen. Daraus folgt nach Einsetzung der betreffenden Werthe und wenn nach Potenzen von c geordnet wird:

$$n^2 c^2 cos^2\,\gamma$$
$$+ nc\{(L+p)(sin^2\,\varphi\,cos^2\,\delta + cos^2\,\varphi\,cos^2\,\gamma) + (L+q)(cos^2\,\varphi\,cos^2\,\delta + sin^2\,\varphi\,cos^2\,\gamma)\}$$
$$+ (L+p)(L+q)\,cos^2\,\delta = 0,$$

aus welcher Gleichung sogleich sich ergiebt, dass c negativ sein muss.

Bezeichnet man die absoluten Entfernungen der Brennlinien von O' aus auf dem austretenden Hauptstrahl gemessen mit p' und q', so ist nach der vorhergegangenen Gleichung

$$p' + q' = \frac{L+p}{n}\left(cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi\,\frac{cos^2\,\delta}{cos^2\,\gamma}\right) + \frac{L+q}{n}\left(sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi\,\frac{cos^2\,\delta}{cos^2\,\gamma}\right),$$

$$p'q' = \frac{L+p}{n}\,.\,\frac{L+q}{n}\,\frac{cos^2\,\delta}{cos^2\,\gamma}.$$

9. Die Tangente des Winkels, welchen die Ebene durch den austretenden Hauptstrahl und den Punkt H mit der Austrittsebene bildet, ist

$$t = \frac{HH_1}{A'H_1 \cdot \cos\delta}.$$

Die Tangente des nach gleicher Richtung gezählten Winkels der Ebene durch J und den austretenden Hauptstrahl mit der Austrittsebene ebenso:

$$t = -\frac{JJ_1}{A'J_1 \cos\delta}.$$

Drückt man die Werthe rechts in c aus und eliminirt dann dieses unter der Annahme, dass beide t gleich seien, so erhält man die Tangente des Winkels einer Ebene durch den austretenden Hauptstrahl, welche J und H zugleich enthält, d. h. einer Brennebene.

Es ergiebt sich

$$t^2 - t\left\{\frac{L+p}{q-p}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\gamma}\, tg\,\varphi - \frac{\cos\gamma}{\cos\delta}\, cotg\,\varphi\right) + \frac{L+q}{q-p}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\gamma}\, cotg\,\varphi - \frac{\cos\gamma}{\cos\delta}\, tg\,\varphi\right)\right\} - 1 = 0,$$

woraus folgt, dass die zwei Brennebenen senkrecht auf einander stehen.

10. Mit Hilfe der Formeln in 8 und 9 ist die Lage der Brennpunkte und Brennebenen für jeden durch das Prisma gehenden Strahl bestimmt, und es lassen sich nun alle Fragen nach der Form des austretenden Bündels beantworten.

Zunächst entsteht die Frage, ob die Brennpunkte zusammenfallen können, ob p' und q' gleich werden können, ob ein centrisches Bündel nach dem Durchgang durch das Prisma noch centrisch sein kann. Wir bilden zum Zweck der Beantwortung dieser Frage den Ausdruck

$$(p'+q')^2 - 4p'q'$$

und sehen zu, unter welchen Umständen er verschwindet. Ordnet man das Quadrat von $(p'+q')$ nach Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ und multiplicirt man $4p'q'$ mit dem Quadrat von $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}0 = \{(L+p)\cos^2\delta - (L+q)\cos^2\gamma\}^2 \sin^4\varphi + \{(L+p)\cos^2\gamma - (L+q)\cos^2\delta\}^2 \cos^4\varphi \\ + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\{(p-q)^2\cos^2\delta\cos^2\gamma + (L+p)(L+q)(\cos^2\gamma - \cos^2\delta)^2\}.\end{aligned}$$

Da die drei Glieder alle positiv sind, so muss — wenn $(p'-q')$ verschwinden soll — jedes einzelne Glied Null sein.

Ist keiner der einzelnen Buchstabenwerthe Null, so folgt

$$\cos\delta = \cos\gamma \text{ und } p = q$$

und daher auch

$$\cos\alpha = \cos\beta,$$

was dem senkrechten Durchgang durch eine planparallele Platte entspricht.

Wäre aber $L = 0$, so hätte man entweder

$$\varphi = 0 \text{ und } p\cos^2\gamma = q\cos^2\delta$$

und daher

$$\frac{\cos^2\delta}{\cos^2\gamma}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

d. h. Durchgang in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene mit dem Minimum der Ablenkung dicht an der Kante;

oder

$$\varphi=90 \text{ und } p\cos^2\delta - q\cos^2\gamma = 0,$$

also

$$\cos^2\beta\cos^2\gamma = \cos^2\alpha\cos^2\delta,$$

was unmöglich ist, weil β und γ zugleich grösser oder kleiner als α und δ sind;

oder endlich: $p=q$, also normaler Einfall, und $\cos\gamma=\cos\delta$, also normaler Austritt, folglich wieder senkrechter Durchgang durch eine planparallele Platte.

Andere Lösungen sind nicht möglich: nimmt man also den besondern Fall aus, dass das Prisma zur planparallelen Platte wird, so können bei einem durch ein Prisma gehenden Strahlenbündel die Brennpunkte des austretenden Bündels nur zusammenfallen, wenn der Hauptstrahl unter dem Minimum der Ablenkung dicht an der brechenden Kante durchgeht. (Helmholtz, Phys. Optik, S. 243.)

11. Wenn man die Abhängigkeit von $(p'-q')$ blos von dem Winkel φ der Einfalls- und Austrittsebene betrachtet, so sieht man leicht, dass $(p'-q')$ Minimum oder Maximum wird, je nachdem $(p'+q')$ es ist, da $p'q'$ unabhängig von φ ist. Es wird aber $(p'+q')$ Minimum oder Maximum, wenn

$$(q-p)(\cos^2\gamma-\cos^2\delta)\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

also $\varphi=0$ oder $\varphi=90^0$ ist.

Im ersten Falle geht der Hauptstrahl senkrecht zur brechenden Kante durch, wir haben den gewöhnlich allein betrachteten Fall. Da die zweite Ableitung positiv ist, so ist $(q'-p')$ ein Minimum; es folgt

$$(q'-p')=\frac{L+q}{n}\frac{\cos^2\delta}{\cos^2\gamma}-\frac{L+p}{n}$$

und daher nach dem Werthe von $p'q'$

$$q'=\frac{L+q}{n}\frac{\cos^2\delta}{\cos^2\gamma},\quad p'=\frac{L+p}{n},$$

d. h. die Brennpunkte des austretenden Hauptstrahls ergeben sich aus denen des gebrochenen, wie diese aus dem Mittelpunkte des einfallenden Bündels, ein Satz, den Reusch bei seinen Betrachtungen angewendet hat, um die eben gegebenen Werthe zu finden.

Im zweiten Falle ($\varphi=90^0$) stehen Einfalls- und Austrittsebene senkrecht auf einander, der Abstand der Brennlinien ist ein Maximum.

Kleinere Mittheilungen.

X. Ueber die Krümmungslinien einer algebraischen Fläche.

Im „*Journal de Mathématiques*, *troisième série* 1876, *t. II*" hat Herr Laguerre auf S. 145—156 unter dem Titel: „*Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure*" durch rein geometrische Betrachtungen die Krümmungslinien einer gleich näher zu definirenden Fläche bestimmt. Bei einer analytischen Behandlung ergab sich, dass die von Herrn Laguerre betrachtete Fläche als Enveloppe einer Fläche zweiten Grades erscheint, ferner, dass die Differentialgleichung zweiten Grades, von deren Integration die Bestimmung der Krümmungslinien abhängt, sich leicht in das Product zweier Factoren ersten Grades auflösen lässt. Aus dem Umstande, dass die analytischen Entwickelungen sich weit einfacher durchführen lassen, wie es zuerst den Anschein hat, möchte eine Mittheilung der folgenden Untersuchungen gerechtfertigt sein.

Die Fläche, um deren Untersuchung es sich hier handelt, lässt sich auf nachstehende Weise als Ort eines Punktes definiren.

In einer der gemeinschaftlichen Hauptebenen zweier confocalen Flächen zweiten Grades werde eine Gerade L angenommen. Durch L lege man an jede der beiden confocalen Flächen eine berührende Ebene, es seien P' und P'' die Contactpunkte. Man kann dann durch die Gerade L eine Ebene legen, welche senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Punkte P' und P'' steht. Ist P der Schnittpunkt der bemerkten Ebene mit der Verbindungslinie $P'P''$, so beschreibt der Punkt P eine Fläche S, wenn die Gerade L alle möglichen Lagen in der gemeinschaftlichen Hauptebene annimmt.

Es soll zuerst nachgewiesen werden, dass die Fläche S Enveloppe einer Schaar von concentrischen Mittelpunktsflächen zweiten Grades ist, deren Hauptaxen gleiche Richtungen haben.

Die Gleichungen der beiden confocalen Flächen seien

$$1)\qquad \frac{x^2}{a-\alpha}+\frac{y^2}{b-\alpha}+\frac{z^2}{c-\alpha}=1, \qquad \frac{x^2}{a-\beta}+\frac{y^2}{b-\beta}+\frac{z^2}{c-\beta}=1.$$

Ist nun (x', y', z') ein Punkt der ersten, (x'', y'', z'') ein Punkt der zweiten Fläche, so finden die Gleichungen statt

2) $$\frac{x'^2}{a-\alpha}+\frac{y'^2}{b-\alpha}+\frac{z'^2}{c-\alpha}=1, \quad \frac{x''^2}{a-\beta}+\frac{y''^2}{b-\beta}+\frac{z''^2}{c-\beta}=1.$$

Die Gleichungen der berührenden Ebenen zu den beiden Flächen in den Punkten (x', y', z') und (x'', y'', z'') sind nun

$$\frac{Xx'}{a-\alpha}+\frac{Yy'}{b-\alpha}+\frac{Zz'}{c-\alpha}=1, \quad \frac{Xx''}{a-\beta}+\frac{Yy''}{b-\beta}+\frac{Zz''}{c-\beta}=1.$$

Soll der Durchschnitt dieser beiden Ebenen in der XY-Ebene liegen und die Gerade bilden, welche durch die Gleichungen

3) $$pX+qY=1, \quad Z=0$$

enthalten ist, so erhält man die folgenden Relationen:

4) $$\frac{x'}{a-\alpha}=p, \quad \frac{y'}{b-\alpha}=q; \quad \frac{x''}{a-\beta}=p, \quad \frac{y''}{b-\beta}=q.$$

Setzt man hieraus die Werthe von x', y', x'', y'' in die Gleichungen 2), so sind z' und z'' auf folgende Art bestimmt:

5) $$\frac{z'^2}{c-\alpha}=1-(a-\alpha)p^2-(b-\alpha)q^2, \quad \frac{z''^2}{c-\beta}=1-(a-\beta)p^2-(b-\beta)q^2.$$

Gegebenen Werthen von p und q entsprechen nach 4) und 5) bestimmte Punkte der beiden confocalen Flächen.

Die Gleichung einer beliebigen Ebene, welche die Gerade 3) enthält, ist

6) $$pX+qY+rZ=1.$$

Es stehe nun diese Ebene senkrecht auf der Verbindungslinie der Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z''), deren Gleichungen

7) $$\frac{X-x'}{x''-x'}=\frac{Y-y'}{y''-y'}=\frac{Z-z'}{z''-z'}$$

sind. Es ergiebt sich dann die Doppelgleichung

$$\frac{x''-x'}{p}=\frac{y''-y'}{q}=\frac{z''-z'}{r}.$$

Infolge der Gleichungen 4) reducirt sich diese Doppelgleichung auf folgende einfache Gleichung:

$$\alpha-\beta=\frac{z''-z'}{r}.$$

Substituirt man hieraus den Werth von r in die Gleichung 6), so nimmt dieselbe die Form

8) $$pX+qY+\frac{z''-z'}{\alpha-\beta}Z=1$$

an. Dieses ist die Gleichung der Ebene, welche die Gerade 3) enthält und auf der Verbindungslinie der Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z'') senkrecht steht.

Man bezeichne durch (x, y, z) den Schnittpunkt der Ebene 6) mit der Geraden 8), d. h. man setze

$$9)\qquad \frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'},\quad px+qy+\frac{z''-z'}{\alpha-\beta}z=1.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 4) ergeben sich für x, y, z folgende Werthe:

$$10)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=p\,\frac{\dfrac{a-\beta}{c-\alpha}z'-\dfrac{a-\alpha}{c-\beta}z''}{\dfrac{z'}{c-\alpha}-\dfrac{z''}{c-\beta}},\\ y&=q\,\frac{\dfrac{b-\beta}{c-\alpha}z'-\dfrac{b-\alpha}{c-\beta}z''}{\dfrac{z'}{c-\alpha}-\dfrac{z''}{c-\beta}},\\ z&=(\alpha-\beta)\,\frac{\dfrac{z'}{c-\alpha}\,\dfrac{z''}{c-\beta}}{\dfrac{z'}{c-\alpha}-\dfrac{z''}{c-\beta}}.\end{aligned}\right.$$

Zur Berechnung dieser Werthe von x, y, z sei bemerkt, dass die auftretenden Werthe von p^2 und q^2 mittelst der Gleichungen 5) durch z'^2 und z''^2 ersetzt worden sind, wodurch in den Werthen von x, y, z ein gemeinschaftlicher Factor im Zähler und Nenner sich weghebt. Sieht man umgekehrt infolge der Gleichungen 5) z' und z'' als Functionen von q und p an, so sind nach 10) auch x, y, z Functionen von p und q. Die Elimination von p und q zwischen den drei Gleichungen 10) giebt die Gleichung der zu Anfang bemerkten Fläche S.

Setzt man

$$11)\qquad \frac{z''}{c-\beta}=\frac{z'}{c-\alpha}t,$$

so geben die Gleichungen 10)

$$x=p\,\frac{a-\beta-(a-\alpha)t}{1-t},\quad y=q\,\frac{b-\beta-(b-\alpha)t}{1-t},$$

$$z=(\alpha-\beta)\,\frac{z'}{c-\alpha}\,\frac{t}{1-t}.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung 11) erhält man

$$p=\frac{(1-t)x}{a-\beta-(a-\alpha)t},\quad q=\frac{(1-t)y}{b-\beta-(b-\alpha)t},$$

$$\frac{z'}{c-\alpha}=\frac{z}{\alpha-\beta}\,\frac{1-t}{t},\quad \frac{z''}{c-\beta}=\frac{z}{\alpha-\beta}(1-t).$$

Die vorstehenden Werthe von p, q, z' und z'' geben in Verbindung mit den Gleichungen 5) zwei Gleichungen für t. Werden diese Gleichungen durch $(1-t)^2$ dividirt, so lassen sich dieselben auf folgende Formen bringen:

$$12)\qquad \frac{(a-\alpha)x^2}{[a-\beta-(a-\alpha)t]^2}+\frac{(b-\alpha)y^2}{[b-\beta-(b-\alpha)t]^2}+\frac{(c-\alpha)z^2}{(\alpha-\beta)^2t^2}=\frac{1}{(1-t)^2},$$

13) $$\frac{(a-\beta)x^2}{[a-\beta-(a-\alpha)t]^2}+\frac{(b-\beta)y^2}{[b-\beta-(b-\alpha)t]^2}+\frac{(c-\beta)z^2}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{1}{(1-t)^2}.$$

Das Resultat der Elimination von t zwischen diesen Gleichungen führt auf die Gleichung der Fläche S. Die Gleichung 12) mit t multiplicirt und von der Gleichung 13) abgezogen giebt

14) $$\frac{x^2}{a-\beta-(a-\alpha)t}+\frac{y^2}{b-\beta-(b-\alpha)t}+\frac{z^2}{(\alpha-\beta)^2}\left(c-\beta-\frac{c-\alpha}{t}\right)=\frac{1}{1-t}.$$

Statt der Gleichungen 12) und 13) können auch die Gleichungen 12) und 14) genommen werden. Die Gleichung 12) folgt aber durch Differentiation der Gleichung 14) nach t, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Fläche S die Enveloppe der Fläche zweiten Grades ist, welche durch die Gleichung 14) bestimmt wird. Setzt man

$$t=\frac{s+\beta}{s+\alpha},$$

so nimmt die Gleichung 14) folgende Form an, welche den Vortheil grösserer Symmetrie darbietet:

$$(s+\alpha)\left(\frac{x^2}{s+a}+\frac{y^2}{s+b}\right)+z^2\,\frac{s+\alpha+\beta-c}{s+\beta}=s+\alpha$$

oder auch

15) $$\frac{x^2}{s+a}+\frac{y^2}{s+b}+z^2\,\frac{s+\alpha+\beta-c}{(s+\alpha)(s+\beta)}=1.$$

Die Bedingung, dass in Beziehung auf s zwei Wurzeln der Gleichung 15) einander gleich sind, giebt die Gleichung der Fläche S.

Wegen der Gleichungen 4) und 5) sehe man x', y', z' etc. als Functionen von p und q an. Durch Differentiation in Beziehung auf p folgt

$$\frac{z'}{c-\alpha}\,\frac{dz'}{dp}=-p(a-\alpha),\qquad \frac{z''}{c-\beta}\,\frac{dz''}{dp}=-p(a-\beta),$$

also

$$\frac{d(z'-z'')}{dp}=p\,\frac{\frac{a-\beta}{c-\alpha}z'-\frac{a-\alpha}{c-\beta}z''}{\frac{z'}{c-\alpha}\cdot\frac{z''}{z-\beta}}.$$

Infolge der Gleichungen 10) lässt sich diese Gleichung einfacher auf folgende Art schreiben:

$$\frac{d(z'-z'')}{dp}=\frac{x}{z}(\alpha-\beta)$$

oder

15) $$x(\beta-\alpha)+z\,\frac{d(z'-z'')}{dp}=0.$$

Nun ist nach 4)

$$\beta-\alpha=\frac{d(x'-x'')}{dp}.$$

Die Gleichung 15) lässt sich also auch schreiben

$$16)\qquad x\frac{d(x'-x'')}{dp}+z\frac{d(z'-z'')}{dp}=0.$$

Da nach 4) y' und y'' von p unabhängig sind, also

$$\frac{d(y'-y'')}{dp}=0$$

ist, so kann man die Gleichung 16) auch auf folgende Art darstellen:

$$17)\qquad x\frac{d(x'-x'')}{dp}+y\frac{d(y'-y'')}{dp}+z\frac{d(z'-z'')}{dp}=0.$$

Auf ganz ähnliche Art folgt

$$18)\qquad x\frac{d(x'-x'')}{dq}+y\frac{d(y'-y'')}{dq}+z\frac{d(z'-z'')}{dq}=0.$$

In die zweite Gleichung 9) substituire man aus 4)

$$p=\frac{x'-x''}{\beta-\alpha},\quad q=\frac{y'-y''}{\beta-\alpha},$$

wodurch die bemerkte Gleichung folgende Form annimmt:

$$(x'-x'')x+(y'-y'')y+(z'-z'')z=\beta-\alpha.$$

Wird die vorstehende Gleichung in Beziehung auf jede der Variabeln p und q differentiirt, so folgt, unter Zuziehung der Gleichungen 17) und 18),

$$19)\qquad \left\{\begin{array}{l}(x'-x'')\dfrac{dx}{dp}+(y'-y'')\dfrac{dy}{dp}+(z'-z'')\dfrac{dz}{dp}=0,\\[2ex] (x'-x'')\dfrac{dx}{dq}+(y'-y'')\dfrac{dy}{dq}+(z'-z'')\dfrac{dz}{dq}=0.\end{array}\right.$$

Mit Rücksicht auf die zu Anfang gegebene Definition der Fläche S folgt aus den Gleichungen 19), dass die Verbindungslinie der Punkte P' und P'' die Normale zur Fläche S im Punkte P ist. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche S lässt sich hierdurch auf folgende Art schreiben:

$$20)\qquad \begin{vmatrix} x'-x'' & y'-y'' & z'-z'' \\ dx & dy & dz \\ d(x'-x'') & d(y'-y'') & d(z'-z'') \end{vmatrix}=0.$$

Bedeutet h eine Unbestimmte, so lässt sich die erste Doppelgleichung 9) durch

$$x=x'+h(x'-x''),\quad y=y'+h(y'-y''),\quad z=z'+h(z'-z'')$$

ersetzen. Es ist dann

$$dx=dy'+hd(x'-x'')+(x'-x'')dh \text{ etc.}$$

Wegen dieser und zweier analoger Relationen lässt sich die Gleichung 20) auf folgende Form bringen:

$$21)\qquad \begin{vmatrix} x'-x'' & y'-y'' & z'-z'' \\ dx' & dy' & dz' \\ dx'' & dy'' & dz'' \end{vmatrix}=0.$$

Zur weiteren Entwickelung dieser Gleichung multiplicire man die links stehende Determinante mit einer andern Determinante so, dass die Gleichungen 2), 4) und 5) sich anwenden lassen. Als passender Multiplicator erscheint die folgende Determinante:

$$22)\qquad \begin{vmatrix} \frac{x'}{a-\alpha} & \frac{y'}{b-\alpha} & \frac{z'}{c-\alpha} \\ \frac{x''}{a-\beta} & \frac{y''}{b-\beta} & \frac{z''}{c-\beta} \\ q & -p & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen 2) und 4) geben

$$\frac{(x'-x'')x'}{a-\alpha}+\frac{(y'-y'')y'}{b-\alpha}+\frac{(z'-z'')z'}{c-\alpha}=1-p^2(a-\beta)-q^2(b-\beta)-\frac{z'z''}{c-\alpha}.$$

Setzt man rechts nach 5)

$$1-p^2(a-\beta)-q^2(b-\beta)=\frac{z''^2}{c-\beta},$$

so folgt

$$23)\qquad \frac{(x'-x'')x'}{a-\alpha}+\frac{(y'-y'')y'}{b-\alpha}+\frac{(z'-z'')z'}{c-\alpha}=\left(\frac{z''}{c-\beta}-\frac{z'}{c-\alpha}\right)z''.$$

Aehnlich ergiebt sich

$$24)\qquad \frac{(x'-x'')x''}{a-\beta}+\frac{(y'-y'')y''}{b-\beta}+\frac{(z'-z'')z''}{c-\beta}=\left(\frac{z''}{c-\beta}-\frac{z'}{c-\alpha}\right)z'.$$

Aus den Gleichungen 2) und 4) findet man leicht

$$25)\quad \begin{cases} q(x'-x'')-p(y'-y'')=0, \\ \frac{x'dx'}{a-\alpha}+\frac{y'dy'}{b-\alpha}+\frac{z'dz'}{c-\alpha}=0, \quad \frac{x''dx''}{a-\beta}+\frac{y''dy''}{b-\beta}+\frac{z''dz''}{c-\beta}=0. \end{cases}$$

Es ist nach 4)

$$26)\qquad \frac{x''dx'}{a-\beta}+\frac{y''dy'}{b-\beta}+\frac{z''dz'}{c-\beta}=(a-\alpha)p\,dp+(b-\alpha)q\,dq+\frac{z''dz'}{c-\beta}.$$

Die erste Gleichung 5) differentiirt giebt

$$\frac{z'dz'}{c-\alpha}=-(a-\alpha)p\,dp-(b-\alpha)q\,dq.$$

Hierdurch wird die Gleichung 26) einfacher

$$27)\qquad \frac{x''dx'}{a-\beta}+\frac{y''dy'}{b-\beta}+\frac{z''dz'}{c-\beta}=\left(\frac{z''}{c-\beta}-\frac{z'}{c-\alpha}\right)dz'.$$

Analog ist

$$28)\qquad \frac{x'dx''}{a-\alpha}+\frac{y'dy''}{b-\alpha}+\frac{z'dz'}{c-\alpha}=-\left(\frac{z''}{c-\beta}-\frac{z'}{c-\alpha}\right)dz''.$$

Das Product der unter 21) und 22) angemerkten Determinanten ist infolge der Gleichungen 23) bis 28) durch

$$\left(\frac{z''}{c-\beta}-\frac{z'}{c-\alpha}\right)^2$$

theilbar. Wird dieser Factor weggelassen, so nimmt die in 21) aufgestellte Differentialgleichung der Krümmungslinien folgende Form an, wobei die Gleichungen 23) bis 28) in Anwendung gebracht sind:

$$\begin{vmatrix} z'' & z' & 0 \\ 0 & dz' & q\,dx' - p\,dy' \\ -dz'' & 0 & q\,dx'' - p\,dy'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung entwickelt giebt

$$29)\qquad (q\,dx'' - p\,dy'')z''dz' - (q\,dx' - p\,dy')z'dz'' = 0.$$

Wird diese Gleichung mit $\frac{z'z''}{(c-\alpha)(c-\beta)}$ multiplicirt, so lassen sich z'^2 und z''^2 infolge der Gleichungen 5) durch p^2 und q^2 ausdrücken, es sind ferner nach 4) x', x'', y', y'' von p und q abhängig. Die Gleichung 29) liefert also nachstehende Differentialgleichung zwischen p und q:

$$\begin{aligned}&[(a-\beta)q\,dp-(b-\beta)p\,dq][(a-\alpha)p\,dp+(b-\alpha)q\,dq][1-(a-\beta)p^2-(b-\beta)q^2]\\ &-[(a-\alpha)q\,dp-(b-\alpha)p\,dq][(a-\beta)p\,dp+(b-\beta)q\,dq][1-(a-\alpha)p^2-(b-\alpha)q^2]=0.\end{aligned}$$

Wird diese Gleichung entwickelt, darauf durch $(\beta-\alpha)(p^2+q^2)$ dividirt, so nimmt die Differentialgleichung zwischen p und q folgende einfache Form an:

$$\begin{aligned}&(a-\alpha)(a-\beta)pq(dp)^2-(b-\alpha)(b-\beta)pq(dq)^2\\ &+[a-b-(a-\alpha)(a-\beta)p^2+(b-\alpha)(b-\beta)q^2]\,dp\,dq=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung mit $4pq$ multiplicirt, lässt sich auf folgende Art darstellen:

$$30)\qquad \begin{aligned}&(a-\alpha)(a-\beta)q^2(dp^2)^2-(b-\alpha)(b-\beta)p^2(dq^2)^2\\ &+[a-b-(a-\alpha)(a-\beta)p^2+(b-\alpha)(b-\beta)q^2]\,dp^2\,dq^2=0.\end{aligned}$$

Dieser Differentialgleichung wird durch eine lineare Relation zwischen p^2 und q^2 genügt. Sind p_0, q_0 und r_0 Constanten, so kann man setzen

$$31)\qquad p_0p^2+q_0q^2=r_0.$$

Die Gleichungen 30) und 31) geben dann

$$32)\qquad r_0[(a-\alpha)(a-\beta)q_0-(b-\alpha)(b-\beta)p_0]=(a-b)p_0q_0.$$

Wird der Werth von r_0 aus der vorstehenden Gleichung in die Gleichung 31) substituirt, so findet folgende Relation zwischen p^2 und q^2 statt, welche das Integral der Differentialgleichung 30) bildet:

$$(p_0p^2+q_0q^2)[(a-\alpha)(a-\beta)q_0-(b-\alpha)(b-\beta)p_0]=(a-b)p_0q_0.$$

In der vorstehenden Gleichung kommt nur eine Constante vor $\frac{q_0}{p_0}$, in Beziehung auf diese Constante ist die Gleichung quadratisch. Sind u und v die beiden Werthe von $\frac{q_0}{p_0}$, so folgt aus 32)

$$33)\ \begin{cases} uvq^2(a-\alpha)(a-\beta)=-p^2(b-\alpha)(b-\beta),\\ (u+v)q^2(a-\alpha)(a-\beta)=a-b-p^2(a-\alpha)(a-\beta)+q^2(b-\alpha)(b-\beta).\end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$34)\qquad (a-\alpha)(a-\beta)=A,\quad (b-\alpha)(b-\beta)=B,$$

so ergeben sich für p^2 und q^2 aus 33) folgende Werthe:

$$35)\qquad p^2=\frac{(a-b)\,A\,u\,v}{(B-Au)(B-Av)},\quad q^2=\frac{-(a-b)\,B}{(B-Au)(B-Av)}.$$

Die Gleichung 30) lässt sich unter Zuziehung der Gleichungen 33) wie folgt schreiben:

$$(dp^2+u\,dq^2)(dp^2+v\,dq^2)=0$$

oder auch

$$[d(p^2+uq^2)-q^2\,du][d(p^2+vq^2)-q^2\,dv]=0.$$

Diese Gleichung reducirt sich nach 35) auf $du\,.\,dv=0$, so dass also u und v die Argumente der Krümmungslinien sind.

Die Gleichung 32) lässt folgende geometrische Deutung zu, welche von Herrn Laguerre herrührt.

Die gemeinschaftliche Hauptebene — die Ebene der x, y — der beiden confocalen Flächen 1) schneidet jede derselben in einem Kegelschnitte. Die Gleichungen dieser Kegelschnitte sind:

$$\frac{x^2}{a-\alpha}+\frac{y^2}{b-\alpha}=1,\quad \frac{x^2}{a-\beta}+\frac{y^2}{b-\beta}=1.$$

Diese Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten. Es lässt sich dann die Gleichung eines dritten Kegelschnitts, welcher die bemerkten vier Schnittpunkte enthält, auf die Form bringen

$$\left(\frac{x^2}{a-\alpha}+\frac{y^2}{b-\alpha}-1\right)\left(\frac{p_0}{a-\beta}-\frac{q_0}{b-\beta}\right)=\left(\frac{x^2}{a-\beta}+\frac{y^2}{b-\beta}-1\right)\left(\frac{p_0}{a-\alpha}-\frac{q_0}{b-\alpha}\right),$$

wo $\frac{q_0}{p_0}$ ein beliebiger Parameter ist. Diese Gleichung führt nach einigen einfachen Reductionen auf

$$36)\qquad (q_0x^2+p_0y^2)(a-b)=q_0(a-\alpha)(a-\beta)-p_0(b-\alpha)(b-\beta).$$

Soll der Kegelschnitt, bestimmt durch diese Gleichung, berührt werden von der Geraden $px+qy=1$, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung 32). Infolge der Gleichungen 3) ist die bemerkte Gerade identisch mit der Geraden L, welche zur Construction des Punktes P der Fläche S dient. Hieraus ergiebt sich Folgendes. Die gemeinschaftliche Hauptebene der beiden confocalen Flächen schneidet jede derselben in einem Kegelschnitte. Diese beiden Kegelschnitte haben vier Punkte gemein, durch welche sich beliebig viele Kegelschnitte legen lassen. Es sei K einer derselben und L eine Tangente zu K. Jeder bestimmten Tangente entspricht ein Punkt P der Fläche S. Bewegt sich die Gerade L so, dass sie den Kegelschnitt K beständig berührt, so beschreibt der Punkt P auf der Fläche S eine Krümmungslinie.

Göttingen. Prof. A. Enneper.

XI. Ueber die Anzahl der Theile, in welche ein Gebiet k^{ter} Stufe* durch n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe getheilt werden kann.

Im Folgenden werden nur die Theile gezählt, welche ausser der Begrenzung oder einem Theil derselben Nichts gemein haben. Ferner werden zwei unendlich grosse Theile eines Gebietes, welche im Unendlichen zusammenhängen, als ein geschlossener, unendlich grosser Theil des Gebietes betrachtet.

Bedeutet:

$n|k$ die Anzahl der geschlossenen Theile, in welche ein Gebiet k^{ter} Stufe durch n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe getheilt werden kann,

$(n|k)$ die Anzahl der endlich grossen Theile eines Gebietes k^{ter} Stufe, welche durch n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe begrenzt werden können,

so ist, wenn $\binom{n}{r}$ der r^{te} Binomialcoefficient von n ist,

$$n|k = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \dots + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}, \quad (n|k) = \binom{n-1}{k-1},$$

Diese Beziehungen werden wir zunächst für Gebiete zweiter, dritter und vierter Stufe (Gerade, Ebene, Raum) nachweisen und hierauf durch den Uebergang von der k^{ten} Stufe zur $(k+1)^{\text{ten}}$ Stufe allgemein beweisen.

1. In einem Gebiete zweiter Stufe (Gerade) kann durch zwei Gebiete erster Stufe (Punkte) ein endlich grosser Theil (Strecke) begrenzt werden, durch drei Punkte zwei Strecken u. s. w., durch n Punkte $n-1$ Strecken, da jeder weitere Punkt eine Strecke hinzufügt. Es ist daher

$$(n|2) = n-1 = \binom{n-1}{1}.$$

Zieht man ferner den einen unendlich grossen Theil der Geraden in Betracht, so wird

$$n|2 = \binom{n-1}{1} + 1 = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}.$$

2. In einem Gebiete dritter Stufe (Ebene) kann durch drei Gebiete zweiter Stufe (Gerade) ein endlich grosser Theil (Figur im engeren Sinne) begrenzt werden. In einer vierten Geraden können durch die drei ersten drei Punkte bestimmt werden, welche zwei Strecken begrenzen. Diese beiden Strecken sind die Schlusslinien zweier weiteren Figuren u. s. w.

In einer n^{ten} Geraden können durch die $n-1$ vorigen $n-1$ Punkte bestimmt werden, welche $n-2$ Strecken begrenzen. Diese $n-2$ Strecken sind die Schlusslinien von $n-2$ weiteren Figuren.

* Grassmann.

Es ist daher

$$
\begin{aligned}
(3|3) &= 1 \\
(4|3) &= (3|3) + 2 \\
(5|3) &= (4|3) + 3 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(n|3) &= (n-1|3) + (n-2)
\end{aligned}
$$

mithin

$$(n|3) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) = \binom{n-1}{2}.$$

Zieht man ferner die unendlich grossen Figuren in Betracht, so entspricht jeder Strecke, in welche die unendlich ferne Gerade der Ebene getheilt werden kann, eine solche Figur. Die Anzahl dieser Strecken ist aber nach 1

$$n|2 = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0},$$

mithin ist

$$
\begin{aligned}
n|3 &= (n|3) + n|2 \\
&= \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}.
\end{aligned}
$$

3. In einem Gebiete vierter Stufe (Raum) kann durch vier Gebiete dritter Stufe (Ebenen) ein endlich grosser Theil (Körper) begrenzt werden. In einer fünften Ebene können durch die vier vorigen vier Gerade bestimmt werden, welche nach 2 in der fünften Ebene $(4|3) = \binom{3}{2} = 3$ endlich grosse Figuren begrenzen. Diese Figuren sind Schlussflächen von drei weiteren Körpern u. s. w. In einer n^{ten} Ebene können durch die $n-1$ vorigen $n-1$ Gerade bestimmt werden, welche $(n-1|3) = \binom{n-2}{2}$ endlich grosse Figuren begrenzen. Diese Figuren sind Schlussflächen von $\binom{n-2}{2}$ weiteren Körpern.

Es ist daher

$$
\begin{aligned}
(4|4) &= 1 = \binom{4-2}{2} \\
(5|4) &= (4|4) + \binom{5-2}{2} \\
(6|4) &= (5|4) + \binom{6-2}{2} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(n|4) &= (n-1|4) + \binom{n-2}{2}
\end{aligned}
$$

mithin

$$(n|4) = \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{4-2}{2} = \binom{n-1}{3},$$

da $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \ldots + \binom{r-1}{r-1}$ ist.

Zieht man die unendlich grossen Körper in Betracht, so entspricht jeder der unendlich grossen Figuren, in welche die unendlich ferne Ebene des Raumes durch die n Ebenen getheilt werden kann, ein solcher Körper. Die Anzahl dieser Figuren ist aber nach 2

$$n|3=\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0};$$

mithin ist

$$\begin{aligned} n|4 &= (n|4)+n|3 \\ &= \binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}. \end{aligned}$$

4. Aus 1, 2 und 3 schliesst man, dass für ein Gebiet k^{ter} Stufe

$$(n|k)=\binom{n-1}{k-1},$$

$$n|k=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}+\dots+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}.$$

Dass dieser Schluss richtig ist, wird bewiesen, indem man nachweist, dass, wenn die Beziehung für die k^{te} Stufe besteht, sie auch für die $(k+1)^{\text{te}}$ Stufe bestehen muss.

Gesetzt, die Beziehung bestände für ein Gebiet k^{ter} Stufe, so gilt Folgendes:

In einem Gebiete $(k+1)^{\text{ter}}$ Stufe können durch $n-1$ Gebiete k^{ter} Stufe $(n-1|k+1)$ endlich grosse Theile bestimmt werden.

Kommt ein n^{tes} Gebiet k^{ter} Stufe hinzu, so können die $n-1$ vorigen in diesem $n-1$ Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe bestimmen, welche nach der Annahme $(n-1|k)=\binom{n-1-1}{k-1}=\binom{n-2}{k-1}$ endlich grosse Theile des n^{ten} Gebietes k^{ter} Stufe begrenzen können.

Diese $(n-1|k)=\binom{n-2}{k-1}$ Theile des n^{ten} Gebietes k^{ter} Stufe können ebenso viele endlich grosse Theile des Gebietes $(k+1)^{\text{ter}}$ Stufe begrenzen. Es ist daher

$$(n|k+1)=(n-1|k+1)+\binom{n-2}{k-1},$$

$$(n-1|k+1)=(n-2|k+1)+\binom{n-3}{k-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$(k+1|k+1)=(\ k\ |k+1)+\binom{k-1}{k-1},$$

$$(k|k+1)=(k-1|k+1)+0=(k-2|k+1)+0=\dots=(0|k+1)=0.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergiebt

$$(n|k+1)=\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\dots+\binom{k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{k+1-1}.$$

Zieht man die unendlich grossen Theile des Gebietes $(k+1)^{\text{ter}}$ Stufe in Betracht, so entspricht jedem der Theile, in welchem das unendlich ferne Gebiet k^{ter} Stufe des Gebietes $(k+1)^{\text{ter}}$ Stufe getheilt wird, ein unendlich grosser Theil des Gebietes $(k+1)^{\text{ter}}$ Stufe.

Die Anzahl dieser Theile ist aber nach der Annahme:

$$n|k = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \dots + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0},$$

mithin ist

$$\begin{aligned} n|k+1 &= (n|k+1) + n|k \\ &= \binom{n-1}{k+1-1} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}. \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Beziehung für die $(k+1)^{\text{te}}$ Stufe besteht, wenn sie für die k^{te} Stufe besteht. Sie besteht aber für die zweite, dritte, vierte Stufe, mithin auch für jede weitere Stufe.

Zusätze.

Aus den Eigenschaften der Binomialcoefficienten folgt:

1. Ein Gebiet k^{ter} Stufe wird durch k Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe in 2^{k-1} Theile getheilt, von denen einer endlich gross ist.

2. Ein Gebiet k^{ter} Stufe wird durch $2k$ Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe in $\frac{1}{2}.2^{2k-1} = 2^{2k-2} = 4^{k-1}$ Theile getheilt, von denen $\binom{2k-1}{k-1}$ endlich gross sind.

3. Ist $r < k$, so wird ein Gebiet k^{ter} Stufe durch r Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe in 2^{r-1} unendlich grosse (geschlossene) Theile getheilt.

4. Aus $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$ folgt:

n Gebiete $(k-1)^{\text{ter}}$ Stufe können in einem Gebiete k^{ter} Stufe ebenso viele endlich grosse Theile begrenzen, als n Gebiete $(n-k)^{\text{ter}}$ Stufe in einem Gebiete $(n-k+1)^{\text{ter}}$ Stufe.

Zahlenbeispiele.

Tafel der Werthe $n|k$.

$n=$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k=2$	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
4	1	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130
5	1	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256
6	1	1	2	4	8	16	32	63	120	219	382

Tafel der Werthe $(n|k)$.

$n=$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k=2$	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36
4	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84
5	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126
6	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126

Eine Ebene $(k=3)$ kann demnach durch 6 Gerade in 16 Theile getheilt werden, von denen 10 endlich gross sind.

Ein Raum $(k=4)$ kann durch 10 Ebenen in 130 Theile getheilt werden, von denen 84 endlich gross sind.

Stuttgart, October 1878. Dr. Ludwig Pilgrim,

Professor an der Baugewerkschule.

XII.

Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme der Körper von der Temperatur.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

Das Dulong'sche Gesetz, dem zufolge die specifische Wärme wenigstens der analog zusammengesetzten Körper den Mischungsgewichten umgekehrt proportional sein soll, ist bekanntlich nicht genau, da die Producte aus specifischer Wärme und Mischungsgewicht einander wohl nahe, aber nicht vollständig gleich sind. Ja sogar für einen und denselben Körper ergeben sich Verschiedenheiten des Productes, je nachdem man die bei niedrigen oder die bei hohen Temperaturen gefundene specifische Wärme als den einen der beiden Factoren benützt. Es ist darum schon wiederholt der Gedanke ausgesprochen worden, dass die Gleichheit der Producte wohl hergestellt werden könnte, wenn für alle Körper irgend eine allerdings noch unbestimmte Temperatur und die derselben entsprechende specifische Wärme als Ausgangspunkt benutzt würde. Abgesehen übrigens davon, dass es, wenn für zwei Körper eine solche Fundamentaltemperatur vorhanden wäre, am Ende doch wieder fraglich sein würde, ob diese Temperatur für alle Körper gilt, bleibt immer noch die Aufgabe, eben der Abhängigkeit der specifischen Wärme von der Temperatur nachzuspüren, und es soll diese Aufgabe den Gegenstand nachfolgender Untersuchung bilden.

Drückt die Formel

$$1)\qquad W = -\left(\frac{\alpha}{r^n} + \frac{\beta}{r^o} + \frac{\gamma}{r^q} + \dots\right) = -M$$

das Gesetz aus, nach welchem ein Molecul eines amorphen Körpers auf jedes andere wirkt, so giebt, wie ich an einem andern Orte gezeigt habe,* die Gleichung

$$2)\qquad p + Ar - M - \frac{K\tau L}{r^3} = 0$$

---

* Diese Zeitschr., Jahrg. 1878 S. 296.

die Bedingung an, unter welcher die Molecule unter sich im Gleichgewichte sind. Es bedeutet hier p den Luft- oder einen andern von der Moleculardistanz r unabhängigen Druck, der die Atome einander näher zu bringen sucht; Ar ist der der Grösse r proportionale Aetherdruck, K ist eine Constante, L ist an die Stelle von

$$3)\quad 1+\left(\frac{o+1}{n+1}-\frac{o'}{n'}\right)\frac{o-2}{n-2}\cdot\frac{\beta}{\alpha r^{o-n}}+\left(\frac{q+1}{n+1}-\frac{q'}{n'}\right)\frac{q-2}{n-2}\cdot\frac{\gamma}{\alpha r^{q-n}}+\ldots$$

gesetzt, und τ drückt die absolute Temperatur aus, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit V, mit welcher das schwingende Theilchen die Gleichgewichtslage passirt, proportional ist, so dass man auch

$$4)\qquad K\tau = a_1 V^2$$

setzen kann, wenn a_1 eine Constante bedeutet. An der Gleichung 2) will ich jedoch noch die Aenderung vornehmen, dass ich die Constante K durch $\frac{3\varkappa}{4\pi}$ ersetze, so dass sie also heisst

$$5)\qquad p + Ar - M - \frac{3\varkappa\tau L}{4\pi r^3} = 0.$$

Den einfachsten Fall der Anwendung von 5) bietet das sogenannte ideelle Gas. Dieses besteht aus Dynamiden und Aether* von der Dichtigkeit des allgemeinen Aethers, die gegenseitige Abstossung der Dynamidenkerne wird durch den Aether, mit dem sie verbunden sind, compensirt, und während bei den wirklichen Gasen sich noch die von der allgemeinen Aethervertheilung abweichende Gruppirung der Aethertheilchen mehr oder weniger bemerklich macht, ist bei dem ideellen Gase auch diese verschwunden. Es ist also

$$6)\qquad Ar - M = 0,$$

und die Gleichung 5) ändert sich, weil $\beta = \gamma = \ldots = 0$, also $L = 1$, und wenn gleichzeitig $a = \frac{4\pi}{3} a_1$ gesetzt wird, um in

$$7)\qquad pv = \varkappa\tau = a V^2,$$

wobei durch v das Volumen und durch τ die absolute Temperatur dargestellt wird. Bei Benützung einer Thermometerscala wird

$$8)\qquad pv = \varkappa(273 + t) = a V^2,$$

wenn t die Temperatur nach Celsius, V, wie oben erwähnt, die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage bedeutet.

Die Formel 8) ist die bekannte des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes.

Aendert sich t, so wird bei gleichbleibendem Volum

$$9)\qquad v\,\Delta p = \varkappa\,\Delta t = a\,\Delta(V^2) = \Delta c,$$

* Meine „Moleculargesetze" S. 65.

wenn Δc die zur Erzielung der Temperaturänderung nöthige Wärme bedeutet. Soll also die Temperatur steigen, so muss das Quadrat der Geschwindigkeit V wachsen. Beträgt die Temperaturerhöhung 1^0, so wird

10) $$v\,\Delta_1 p = \varkappa = a\,\Delta_1(V^2) = \Delta_1 c.$$

Multipliciren wir diese Wärme oder den sie repräsentirenden mechanischen Effect mit der Zahl der in der Gewichtseinheit enthaltenen Molecule, so bekommen wir die Wärmecapacität des Gases, und diese durch die Wärmecapacität des Wassers dividirt, giebt die specifische Wärme des Gases bei constantem Volum.

Aendert sich nicht der Druck, sondern das Volumen, so muss noch auf einen weiteren Umstand Rücksicht genommen werden. Wenn ein Theilchen schwingt, so passirt es die Gleichgewichtslage mit dem Maximum der Geschwindigkeit, und an dem Umkehrpunkte x_0 angelangt, hat es seine Geschwindigkeit vollständig verloren, um sie infolge der Wirkung der äusseren Atome bis zur Rückkehr in die Gleichgewichtslage ebenso vollständig wieder zu bekommen. Nehmen wir nun an, es sei das Theilchen in x_0 angekommen, und während es im Begriffe steht, umzukehren, finde eine Ausdehnung des Gases, also eine Vergrösserung der Moleculardistanz r statt! Diese Zunahme von r bedingt eine Abnahme der beschleunigenden Kraft, und kommt das Theilchen wieder in der Ruhelage an, so hat es nicht mehr die frühere Geschwindigkeit, sondern eine kleinere.

Diese Abnahme von V bei einem Anwachsen von r ist übrigens nicht an x_0 gebunden, sondern findet bei jedem von Null verschiedenen Werthe von x statt, sobald eine Ausdehnung des Gases eintritt, wenn das Theilchen sich dort befindet. Ist letzteres auf der Rückkehr zur Ruhelage in x angekommen, so hat es die diesem Punkte entsprechende Geschwindigkeit und würde nach und nach V erhalten, wenn die beschleunigende Kraft die nämliche geblieben wäre; wird aber diese von x an kleiner, als sie vorher war, als das Theilchen auf dem Weggange die nämliche Stelle passirte, so erreicht es auch nicht die frühere Geschwindigkeit V. Tritt die Ausdehnung ein, wenn das Theilchen auf seinem Weggange von der Gleichgewichtslage in x angekommen ist, so hat es bis dahin einen entsprechenden Theil seiner Geschwindigkeit verloren, und wenn nun die Ausdehnung eintritt, so wird das neue x_0 wohl etwas hinausgerückt, aber bei seiner Rückkehr in x angelangt, besitzt das Theilchen, obwohl es jetzt auf einer längeren Strecke Beschleunigung der Bewegung erfuhr, dennoch nur die Geschwindigkeit, welche es bei dem Weggange von x hatte; es ist gerade so, als sei es von dem alten x_0 und bei dem ursprünglichen Volumen nach x gekommen. Von da an gegen die Gleichgewichtslage hin gewinnt das Theilchen weniger an Geschwindigkeit, als es bei seinem vorigen Weggange auf der nämlichen Strecke verlor. Weil die Wirkung für den gleichen Werth von x die nämliche ist, es mag das Theilchen gegen x_0 hin- oder von x_0 weggehen, so kann man von der Aenderung der Schwingungsamplitude Umgang nehmen und kann sich denken, es sei die gesammte Volumänderung vor sich gegangen, während das Theilchen seinen Weg von dem Maximum der Elongation zur Gleichgewichtslage machte. Hat die Ausdehnung ihr Ende erreicht, wenn das Theilchen in der Ruhelage angelangt ist, so geht es mit der nun erlangten Geschwindigkeit weiter und schwingt den neuen Verhältnissen entsprechend fort.

Ich muss nun auf die Gleichung 15) meiner oben citirten Abhandlung „Ueber die Aenderung des Aggregatzustandes" zurückkommen. Dieselbe lautet:

$$V^2 - v^2 = \varphi x^2 + \psi x^4, \tag{11}$$

wobei

$$\varphi = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha\pi(n-2)n'}{r^{n-1}}\left(1 + \frac{\beta(o-2)o'}{\alpha(n-2)n'r^{o-n}} + \dots\right), \tag{12}$$

$$2\psi = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha\pi(n-2)n_1}{r^{n+1}}\left(1 + \frac{\beta(o-2)o_1}{\alpha(n-2)n_1 r^{o-n}} + \dots\right) \tag{13}$$

zu setzen ist. V bedeutet hier wieder die Geschwindigkeit des Atomes, wenn es die Gleichgewichtslage passirt, v ist seine Geschwindigkeit im Punkte x. In den Gleichungen von φ und ψ bedeutet r die Moleculardistanz, sämmtliche übrige Grössen sind constant.

Vernachlässigen wir in 11) das Glied ψx^4, da $\frac{x}{r}$ bei den Gasen stets nur eine sehr kleine Grösse ist, wird ferner von den Constanten $\beta, \gamma, \dots$ Umgang genommen, denn das Verschwinden derselben bedingt eben das ideelle Gas, so wird

$$V^2 - v^2 = \varphi x^2 = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha\pi(n-2)n'}{r^{n-1}}x^2. \tag{14}$$

Aendert sich r, während das schwingende Theilchen sich in x befindet, um ∂r, so zieht diese Aenderung auch eine solche von φ und V^2 nach sich, und es wird

$$\partial(V^2) = x^2\,\partial\varphi = -\frac{4\alpha\pi(n-1)(n-2)n'x^2\,\partial r}{3r^n}. \tag{15}$$

Die Aenderung ∂r ist unabhängig von der jeweiligen Stellung und Bewegung des Theilchens. Würde letzteres (selbstverständlich mit gehöriger Quantität der trägen Substanz versehen) zwischen zwei beweglichen Wänden hin- und hergehen, so würden letztere ebenfalls schwingen, und die einerseits verlorene Bewegung müsste sich in der andererseits gewonnenen wiederfinden. Bei dem Gase ist eine ungezählte Menge von Theilchen da, die sich jeweilig in den verschiedensten Schwingungszuständen befinden. Da wird Geschwindigkeit verloren, dort wird sie gewonnen, und das Gesammtresultat ist dasselbe, als hätten die Gastheilchen eine Abstossung gewonnen, die der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist und nach deren Einführung die Theilchen als ruhend betrachtet werden können. Die Folge dieser vergrösserten Abstossung ist eine Zunahme der Moleculardistanz r, und darum muss auch ∂r in 15) als von dem jeweiligen Schwingungszustande des Theilchens unabhängig betrachtet werden. Während der Zeiteinheit mag nun die Aenderung Δr der Moleculardistanz in einem einzigen oder in mehreren Augenblicken stattfinden.

Wächst r um $\Delta' r$, während das Theilchen sich in dem Umkehrpunkte x_0 befindet, so wird

$$16)\qquad \Delta'(V^2) = -\tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha\pi(n-1)(n-2)n' x_0^2 \Delta' r}{r^n}.$$

Findet in x'', das zwischen x_0 und der Gleichgewichtslage ist, die Aenderung $\Delta'' r$ statt, so wird

$$17)\qquad \Delta''(V^2) = -\tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha\pi(n-1)(n-2)n' x''^2 \Delta'' r}{r^n}.$$

So geht es für die verschiedenen x weiter, und wenn an allen eine Aenderung von r eintritt, so wird statt $\Delta'(V^2) + \Delta''(V^2) + \ldots$ der Werth $\Delta(V^2)$ gesetzt werden müssen, wenn letzteres die Gesammtänderung von V^2 bedeutet. Ist andererseits $x_0^2 \Delta' r = q' x_0^2 \Delta r$, dann $x''^2 \Delta'' r = q'' x_0^2 \Delta r, \ldots$, wo q', q'', ... Constante bedeuten, so wird durch Addition

$$18)\qquad \begin{aligned} \Delta(V^2) &= -(q'+q''+\ldots)\tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha\pi(n-1)(n-2)n' x_0^2 \Delta r}{r^n},\\ &= -\tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha\pi(n-1)(n-2)n' Q x_0^2 \Delta r}{r^n}, \end{aligned}$$

wenn Q die Summe $q'+q''\ldots$ vorstellt.

Aus Gleichung 14) ergiebt sich, wenn berücksichtigt wird, dass für $x = x_0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist,

$$19)\qquad x_0^2 = \frac{3 r^{n-1} V^2}{4\alpha\pi(n-2)n'}.$$

Setzt man diesen Werth von x_0^2 in 18) ein, so wird

$$20)\qquad \Delta(V^2) = -\frac{(n-1)Q\,.\,V^2 \Delta r}{r}.$$

Aus 7) kann nun statt V^2 sein Werth $\frac{pv}{a}$ eingesetzt werden, und wenn dann aus 9) $\frac{\Delta c}{a}$ statt $\Delta(V^2)$ genommen wird, so ergiebt sich

$$21)\qquad \begin{aligned} \Delta c &= -(n-1)\,.\,\frac{Q p v \Delta r}{r},\\ &= -\frac{(n-1)}{3}\,.\,Q p\,\Delta v. \end{aligned}$$

Gleichzeitig mit der Ausdehnung des Gases findet eine Wärmeabnahme statt, welche mit dem Producte aus der Volumzunahme in den

Druck, unter welchem das Gas steht, wächst. Die verschwundene Wärme ist der geleisteten Arbeit proportional.*

Bei der Unabhängigkeit der Aenderung der Moleculardistanz r von der Schwingungsphase des Theilchens bleibt kaum eine andere Annahme übrig, als die, dass dieselbe sich gleichmässig über die ganze Schwingungszeit vertheile, und es ist daher

$$\partial r = c\,\Delta r\,\partial t, \tag{22}$$

wenn Δr die in der Zeiteinheit vor sich gehende Aenderung von r, ∂t das Zeitelement, c eine Constante vorstellt. Laut Gleichung 18) meiner Abhandlung „Ueber die Veränderung der Aggregatzustände" ist unter Nichtberücksichtigung der Glieder untergeordneter Bedeutung

$$\partial t = \frac{\partial x}{V\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}}, \tag{23}$$

und nach 21) der nämlichen Abhandlung die zu einer Viertelsschwingung nöthige Zeit

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3r^{n-1}}{4\alpha\pi(n-2)n'}}. \tag{24}$$

Wird nun der Werth von ∂r aus 22) und 23) in 15) eingesetzt, so wird

$$\partial(V^2) = -\frac{4\alpha\pi(n-1)(n-2)n'c\,\Delta r\,x^2\,\partial x}{3r^n V\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}}, \tag{25}$$

und wenn man von $x=0$ bis $x=x_0$ integrirt, ergiebt sich

$$\Delta(V^2) = -\frac{\alpha\pi^2(n-1)(n-2)n'c\,\Delta r\,x_0^3}{3r^n V}, \tag{26}$$

wobei $\Delta(V^2)$ als das entsprechende Integral von $\partial(V^2)$ genommen ist. Wird aus 19) und 26) x_0 eliminirt, so ergiebt sich

$$\Delta(V^2) = -\frac{(n-1)c\,\Delta r\,\pi V^2}{4r}\sqrt{\frac{3r^{n-1}}{4\alpha\pi(n-2)n'}}. \tag{27}$$

Dieser Werth von $\Delta(V^2)$ gilt für die Zeit, innerhalb welcher das Theilchen eine Viertelsschwingung durchläuft, und muss daher zur Reduction auf die Zeiteinheit noch durch die Schwingungszeit dividirt werden. Nehmen wir nämlich an, diese Zeit sei das eine Mal 1, das andere Mal n, und eine Ausdehnung dauere n Einheiten der ersteren Schwingungszeit, so ist bei der längeren Schwingungszeit das $\Delta(V^2)$ aus

---

* In meiner Abhandlung: „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen" habe ich diesen Satz in anderer Weise abgeleitet; ich glaube jedoch, vorstehenden Weg vorziehen zu sollen, da in dem früheren Resultate noch der Factor $r^{-\frac{n+1}{2}}$ vorkommt, für den sich nicht leicht eine Deutung finden lässt.

27) einmal, bei der kürzeren n-mal zu nehmen, weil es sich ja für alle n Schwingungen wiederholt. Wird also diese Division mit dem Werthe von t aus 24) ausgeführt, so ergiebt sich

$$28)\qquad \varDelta(V^2) = -(n-1)\frac{c}{2}\,\frac{V^2}{r}\,.\,\varDelta r,$$

welche Gleichung mit 20) identisch wird, sobald man $\frac{c}{2} = Q$ setzt.

Es ergiebt sich aus dem Vorstehenden wohl ganz klar, was mit der auf Arbeit verwendeten Wärme geschieht. Wenn die Atome einen Zuschuss zu ihrer Bewegung erhalten, so wird der von ihnen nach aussen ausgeübte Druck stärker. Infolge davon findet eine Ausdehnung statt, und die dadurch erzielte Verringerung der beschleunigenden Kraft, welche die Atome in ihre Gleichgewichtslage zurücktreibt, veranlasst, dass die Theilchen, dort angelangt, nicht mehr die Geschwindigkeit besitzen, die sie bei dem Weggange hatten, was ihnen wieder einen Theil ihrer Wärme nimmt.

Wir haben hier den bekannten Satz von der Wärmeäquivalenz der Arbeit, insoweit es sich darum handelt, dass an die Stelle der bei der Ausdehnung eines Gases verschwundenen Wärme Arbeit getreten ist. Dieser Verlust von Wärme ist jedoch nicht so fast an die geleistete Arbeit, sondern an die Ausdehnung gebunden, denn wenn das Gasvolumen infolge eines von der Arbeitsleistung des Gases ganz unabhängigen Umstandes wächst, so verringert sich dessen Wärme dennoch. Es ergiebt sich dieses aus der Rechnung, ist aber auch Sache der Beobachtung, denn wenn man die Luft aus dem Recipienten einer Luftpumpe entfernt, so sinkt ihre Temperatur bei jedem Kolbenhube, obwohl die von ihr geleistete Arbeit Null ist. Sei dem übrigens, wie ihm wolle, so steht soviel fest, dass bei einer Ausdehnung die Wärme des Gases abnimmt, und wenn die Temperatur desselben bei veränderlichem Volum erhöht werden soll, so muss zuerst der durch Ausdehnung erwachsene Verlust gedeckt werden, worauf wieder die Erwärmung in der früheren Weise eintreten kann.

Fragt man nach der specifischen Wärme bei gleichem Drucke $\varDelta_1 c_1$, so kann sich diese von der specifischen Wärme bei gleichem Volum $\varDelta_1 c$ (Gleichung 10) nur dadurch unterscheiden, dass, um erstere zu erhalten, der letzteren noch die durch die Volumänderung verschwundene Wärme zugefügt werden muss, um gewissermassen den *Status quo ante* wieder herzustellen, und es ist daher

$$29)\qquad \varDelta_1 c_1 = \varDelta_1 c + sp\,\varDelta v,$$

wenn $s = \frac{n-1}{3}\,.\,Q$ genommen wird.

Die Gleichung 29) gilt nur für das sogenannte ideelle Gas, in welchem die Constanten $\beta, \gamma, \ldots$ aus 1) als Null betrachtet werden. Sobald diese Annahme nicht mehr gestattet ist, tritt die Gleichung 5) in ihre Rechte, es verschwindet die Grösse $Ar - M$ nicht mehr, und L wird von 1 verschieden. Die Folge davon ist, dass weder das Mariotte'sche, noch das Gay-Lussac'sche Gesetz genau sein können, denn die Gleichung 7) ist nicht mehr richtig. Von beiden Gesetzen ist dieses durch Versuche constatirt. Bei dem Satze von der Wärmeäquivalenz der Arbeit geht es übrigens auch nicht anders. Wird ein Schlag oder ein Stoss auf einen Körper ausgeübt, so müssen Oscillationen der Körpertheilchen die Folge sein, und da diese Oscillationen wieder als Wärme wahrgenommen werden, muss der Schlag selbstverständlich eine entsprechende Menge von Wärme nach sich ziehen. Dieses geht aber nur so lange, als keine Volumänderungen dabei ins Spiel kommen. Werden in 1) die Constanten β, γ, ... als von Null verschieden angenommen, so wird statt 7)

$$30)\qquad \frac{(p + Ar - M)v}{1 + \left(\frac{o+1}{n+1} \cdot \frac{o'}{n'}\right)\frac{o-2}{n-2} \cdot \frac{\beta}{\alpha r^{o-n}} + \cdots} = \varkappa \tau .$$

Es ergiebt sich hieraus, dass auch statt 21)

$$31)\qquad \Delta c = -\frac{(n-1)Q}{3} \frac{(p + Ar - M)\Delta v}{\left(1 + \left(\frac{o+1}{n+1} - \frac{o'}{n'}\right)\frac{o-2}{n-2} \cdot \frac{\beta}{\alpha r^{o-n}} + \cdots\right)}$$

zu setzen sein wird, und die durch Ausdehnung verlorene Wärme wird von dem Dichtigkeitszustande abhängig, ist also der geleisteten Arbeit nicht mehr genau proportional.

Die Ungenauigkeit des Gesetzes von der Wärmeäquivalenz der Arbeit ist meines Wissens durch Versuche nicht constatirt, da alle Abweichungen der Versuchsresultate von der das Gesetz als Ausgangspunkt nehmenden Rechnung als Beobachtungsfehler betrachtet werden, und wo diese Annahme nicht mehr ausreicht, treten die „inneren Arbeiten" an ihre Stelle. Es fragt sich nun: Was sind „innere Arbeiten"? Die inneren Arbeiten sind diejenigen Wirkungen, welche durch die Glieder repräsentirt werden, die den Unterschied der Gleichungen 21) und 31) bedingen, während das Mariotte'sche und das Gay-Lussac'sche Gesetz bei dem ideellen Gase durch 7), bei dem wirklichen durch 30) dargestellt sind. Es ergiebt sich daraus, dass die inneren Arbeiten nichts Anderes sind, als das, was man bei dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze Ungenauigkeiten nennt, und darum dürfte wohl die Frage erlaubt sein, ob es nicht besser wäre, die doppelte Bezeichnung fahren zu lassen und nur eine derselben beizubehalten.

Die Wirkungen, welche die Abweichungen der in Rede stehenden Gesetze von den Beobachtungen bedingen, sind nur klein bei den Gasen, bei denen die Moleculardistanz r gross ist gegen die Dimensionen der Dynamiden, durch welche eben die Grössen β, γ, ... bedingt werden.

Bei der Abnahme von r wachsen die Abweichungen, und sie sind daher bei den tropfbar-flüssigen und den festen Körpern viel grösser, als bei den Luftarten.

Wenn das Mariotte'sche und das Gay-Lussac'sche Gesetz sowohl, als auch das Gesetz von der Wärmeäquivalenz der Arbeit nur insoweit richtig sind, als die Dimensionen der Dynamiden gegen deren Entfernung von einander vernachlässigt werden können, so theilen sie dasselbe Schicksal, das auch die Anwendbarkeit des Newton'schen Schweregesetzes begrenzt, denn auch dieses hört in den sogenannten Moleculardistanzen auf, giltig zu sein.

Unter allen Umständen anwendbar sind wohl einzig und allein die von mir aufgestellten Normen von der Zweiheit der materiellen Substanz, der Abstossung des Gleichartigen und der Anziehung des Entgegengesetzten, und das Mariotte'sche, wie die übrigen Gesetze, das der Schwere nicht ausgenommen, dürften sich zu diesen Normen etwa so verhalten, wie die Kepler'schen zu dem Newton'schen. Die Kepler'schen Gesetze lassen sich aus der Gravitation ableiten, zeigen sich jedoch bei näherer Untersuchung als nicht ganz genau infolge der Störungen, die selbst wieder im Schweregesetze ihre Begründung finden. Ebenso lassen sich die verschiedenen obenerwähnten Gesetze aus der gegenseitigen Wirkung von Aether- und Massentheilchen entwickeln und sie sind so lange genau, als man die Dimensionen der Dynamiden gegen deren gegenseitigen Abstand vernachlässigen kann. Die Abweichungen, die bei geringer Dynamidendistanz zum Vorschein kommen, finden ihrerseits wieder in den von mir aufgestellten Gesetzen ihre Begründung, und das Unangenehme dabei ist nur das, dass man in dem Gewirre von gegenseitigen Einwirkungen der verschiedenen Molecule mancherlei Irrthümern ausgesetzt ist. Viele Schwierigkeiten bietet auch die rechnerische Behandlung, denn das, was sich unter dem Namen „Störungen“ in der Astronomie so vielfach in den Weg stellt, tritt in der Molecularphysik in vielfach erhöhtem Grade auf. Allerdings nehmen in der Molecularphysik ebenso, wie in der Astronomie sämmtliche Kräfte ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst; aber während man hier mit einer einzigen Kraft, der Schwere, zu thun hat, muss man dort zweierlei Kräfte, die Anziehung des Ungleichartigen und die Abstossung des Gleichartigen berücksichtigen. Das grösste Hinderniss ist übrigens zur Zeit der Mangel an Beobachtungen, da durch denselben die Bestimmung der Constanten ausserordentlich erschwert, ja unmöglich gemacht wird.

Bei den tropfbar-flüssigen und den festen Körpern haben wir ein gegen die Gase insofern verschiedenes Verhalten, als der Druck des äussern Aethers durch die Abstossung der im Körper selbst befindlichen, durch Massentheilchen nicht neutralisirten Aethertheilchen nur unvollständig compensirt wird. Da demnach ein Theil dieses äussern Aether-druckes anderweitig neutralisirt werden muss, rücken die Molecule des Körpers etwas näher zusammen, während im Uebrigen die Art der Gruppirung der sich abstossenden Theilchen das ersetzen muss, was an der Zahl derselben abgeht. Die Gleichung 2) besteht aber dennoch, und wenn V und r sich ändern, so wird

$$32)\quad \begin{aligned} &p + A(r + \varDelta r) - M - \left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\varDelta r - \ldots \\ &\ldots - \frac{a(V^2 + \varDelta(V^2))}{v + \varDelta v}\left(L + \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)\varDelta r + \ldots\right) = 0. \end{aligned}$$

Da es hier eine specifische Wärme bei constantem Volum nicht giebt, ist mit jeder Temperaturerhöhung ein auf Rechnung der Ausdehnung zu setzender Wärmeverlust verbunden. Die Gleichung 11) giebt bei einer Aenderung von r analog 15)

$$33)\quad \begin{aligned} \partial(V^2) = &x^2\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)\frac{\partial r^2}{2} + \ldots\right] \\ &+ x^4\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)\frac{\partial r^2}{2} + \ldots\right] + \ldots \end{aligned}$$

Analog 18) wird aus 33)

$$34)\quad \begin{aligned} \varDelta(V^2) = &\varrho x_0^2\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\varDelta r + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)\frac{\varDelta r^2}{2} + \ldots\right] \\ &+ \varrho x_0^4\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\varDelta r + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)\frac{\varDelta r^2}{2} + \ldots\right] + \ldots \end{aligned}$$

Wird aus 11) und 7)

$$35)\quad x_0^2 = \frac{V^2}{\varphi} - \frac{V^4 \psi}{\varphi^3} + \ldots = \frac{\varkappa \tau}{a\varphi} - \frac{\varkappa^2 \tau^2 \psi}{a^3 \varphi^3} + \ldots$$

gesetzt, wenn man die Temperatur als dem Quadrate von V proportional nimmt, so wird

$$36)\quad \begin{aligned} a\,\varDelta(V^2) = \varkappa\,\varDelta\tau = \varDelta c = &\varrho\left[\left(\frac{\varkappa\tau}{\varphi} - \frac{\varkappa^2\tau^2}{a\varphi^3}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\varkappa^2\tau^2}{a\varphi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right]\varDelta r \\ &+ \varrho\left[\left(\frac{\varkappa\tau}{\varphi} - \frac{\varkappa^2\tau^2}{a\varphi^3}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{\varkappa^2\tau^2}{a\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right)\right]\frac{\varDelta r^2}{2} + \ldots \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$37)\quad \varDelta c = g\,\varDelta r + h\,\varDelta r^2 + \ldots .$$

$\varDelta c$ giebt die Wärme an, welche verschwindet, wenn der Körper von der Temperatur τ an um $\varDelta\tau$ Grade erwärmt wird und dabei eine solche Ausdehnung erfährt, dass seine Moleculardistanz von r auf $r + \varDelta r$ steigt. Geht man von 0^0 C. aus, so ist also statt τ 273 zu setzen, worauf dann $\varDelta c$ die bis zur Temperatur von t ($= \varDelta\tau$) Graden verschwundene Wärme bezeichnet.

Eigentlich haben wir hier die auf ein einziges Molecul bezügliche Wärme, doch kann man die Multiplication mit der Zahl der in der Gewichtseinheit enthaltenen Molecule als bereits vollzogen voraussetzen und dann die Gleichung 37) als für die Gewichtseinheit geltend betrachten.

Ausser dieser infolge der Ausdehnung verschwindenden Wärme braucht der Körper zur Erhöhung der Temperatur eine der letzteren proportionale Wärmemenge, und die Gesammtquantität, die zur Erwärmung der Gewichtseinheit von 0^0 bis t^0 C. nöthig ist, ergiebt sich also aus der Gleichung

38) $$c = Kt + g\,\Delta r + h\,\Delta r^2 + \ldots.$$

Die mittlere Wärmecapacität erhält man durch Division von c durch t und durch weitere Division mit der Wärmecapacität des Wassers ergiebt sich die specifische Wärme.

Es wäre nun am Platze, die Formeln 36) bis 38) auf die vorhandenen Beobachtungen anzuwenden. Dass die Constanten g und h zur Zeit nicht aus der Gleichung der Körper abgeleitet werden können, ist von vornherein klar, weil diese Gleichung noch für keinen Körper bekannt ist. Es bleibt also nur übrig, die Constanten *a posteriori* durch Einsetzen der zusammengehörenden, aus den Beobachtungen abgeleiteten Werthe von t und Δr zu bestimmen. Allein auch in dieser Beziehung sieht es schlimm genug aus. Durchsucht man die physikalischen Werke, so findet man Untersuchungen über die specifische Wärme der Körper in Hülle und Fülle; aber so eine alleinstehende Beobachtung ist nicht zu gebrauchen, denn es ist hier die Kenntniss der specifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen nöthig und dadurch schränkt sich die Zahl der verwendbaren Beobachtungen bedeutend ein. Noch schlimmer steht es bezüglich der Ausdehnungsbestimmungen. Allerdings schleppen sich einige der letzteren durch die Physikbücher, aber der Ausdehnungscoefficient wechselt mit der Temperatur und darauf ist in den wenigsten Fällen Rücksicht genommen. Bezüglich der festen Körper ist noch zu berücksichtigen, dass die specifische Wärme und sicherlich auch die Ausdehnung verschieden sind, je nachdem der Körper gewalzt, gedrückt u. s. w. ist, und es wäre also ganz unzulässig, Ausdehnungen und specifische Wärme verschieden behandelter Körper der nämlichen Rechnung zu Grunde zu legen. Krystalle etwa ausgenommen, müssen sämmtliche Beobachtungen an einem und demselben Stücke vorgenommen sein. Diese Grundbedingung ist bei den festen Körpern nirgends erfüllt. Für Flüssigkeiten gilt diese Einschränkung nicht, dafür sind dieselben als Versuchsobjecte um so spärlicher vertreten. So kommt es, dass wir an zuverlässigen Beobachtungen einzig auf das Wasser beschränkt sind, dessen specifische Wärme Regnault bei verschiedenen Temperaturen bestimmt hat, während wir Kopp die Untersuchung der Ausdehnungsverhältnisse verdanken.

Zusammengehörende Werthe von Δr und mittlerer specifischer Wärme für die verschiedenen Temperaturen sind:

t.	Δr.	Mittl. spec. Wärme.	
		Regnault.	Rechnung.
20°	0,0005221	1,0005	1,00066
40	0,0025041	1,0013	1,00138
60	0,0054997	1,0023	1,00228
80	0,0094377	1,0035	1,00348
100	0,0141281	1,0050	1,00501

Um die Gleichung 38) auf diese Beobachtungen anzuwenden, ist zunächst zu bemerken, dass die Wärmemenge, welche man braucht, um die Gewichtseinheit Wassers von 0^0 auf 1^0 zu erwärmen, als Einheit gesetzt werden muss, und da die Aenderung $\varDelta r$ für dieses Temperaturintervall $-0{,}0000177$ beträgt, ist

$$39)\qquad 1 = K - 0{,}0000177\,g + 0{,}0000177^2 h.$$

Um Wasser von 0^0 auf 20^0 zu erwärmen, braucht man vorstehender Tabelle zufolge $20 . 1{,}0005 = 20{,}01$ W.-E. und es ergiebt sich also

$$40)\qquad \begin{aligned} &20\,K + 0{,}0005221\,g + 0{,}0005221^2 h \\ &= 20{,}01\,(K - 0{,}0000177\,g + 0{,}0000177^2 h). \end{aligned}$$

Wenn man nun für die übrigen Temperaturen die entsprechenden Gleichungen bildet und dann g und h bestimmt, so erhält man

$$g = 14{,}615\,K, \quad h = 1344{,}5\,K,$$

und mit Zuziehung von 40) werden

$$K = 1{,}00026, \quad g = 14{,}619, \quad h = 1344{,}9.$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen 40) eingesetzt, und bestimmt man mit ihrer Hilfe die mittlere specifische Wärme, so erhält man die in der Tabelle unter der Rubrik „Rechnung" angegebenen Werthe, und es zeigt sich, dass die specifische Wärme des Wassers sich aus 30) ableiten lässt; es ist jedoch dabei zu bemerken, dass auch die in der Rubrik „Regnault" stehenden Werthe nach einer andern Formel aus (mir nicht zur Verfügung stehenden) Originalbeobachtungen abgeleitet sind, dass also die Grössen K, g und h möglicherweise noch etwas anders werden können, wenn man bei ihrer Bestimmung die Originalbeobachtungen zu Grunde legt.

Fassen wir die im Vorstehenden gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich, dass die Abhängigkeit der specifischen Wärme von der Temperatur sich auf eine Ausdehnungserscheinung zurückführen lasse. Bekanntlich hängt die specifische Wärme der Körper auch von ihrer Textur ab. So hat Regnault gefunden, dass dieselbe bei den verschiedenen Kohlen eine verschiedene sei. Wenn — worüber jedoch keine verwendbaren Beobachtungen vorhanden sind — auch die Ausdehnungscoefficienten der Körper sich mit ihrer Textur ändern, so ist auch Aussicht vorhanden, die entsprechenden Abweichungen der specifischen Wärme zu erklären. Dasselbe gilt von dem Satze, dass das Product aus specifischer Wärme und Atomgewicht für verschiedene Körper das gleiche sein soll, denn es braucht ja nur derjenige Körper, bei dem sich ein grösseres Product ergiebt, einen entsprechend grösseren Ausdehnungscoefficienten zu haben. Selbstverständlich ist dabei, dass die bestehenden Verschiedenheiten der Producte nicht allzugross sind; bedeutendere Abweichungen mögen da ihren Grund haben, wo man sie auch jetzt sucht, in der Zusammensetzungsformel. Es ist übrigens nicht nur möglich, sondern auch höchst wahrscheinlich, dass es noch unbekannte Umstände giebt, die hier eine Rolle spielen und die sich wohl aus den Grundgesetzen ebenso ableiten lassen, wie dieses bei dem mit der Volumzunahme verbundenen Wärmeverluste der Fall ist, an die man aber zur Zeit gar nicht denkt. So wenig der Lauf eines Gestirnes durch Einrechnung einer einzigen Störung genau dargestellt werden kann, so wenig kann dieses bei den Wärmeerscheinungen der Fall sein. Für jetzt ist sicher, dass die Ausdehnung nicht nur bei den Gasen, sondern auch bei den übrigen Körpern von Einfluss auf die specifische Wärme ist, und es muss abgewartet werden, wieviel von den Unregelmässigkeiten der letzteren übrig bleibt, wenn der störende Einfluss der Ausdehnung mit Hilfe einschlägiger Beobachtungen eliminirt ist. Bleiben dann Unregelmässigkeiten übrig, so kann man erst wieder nach der sie veranlassenden Ursache suchen. Soll dieses jedoch möglich sein, so ist es unbedingt nöthig, dass man die Untersuchungen nicht auf eine einzige Erscheinung beschränkt, sondern sie auf deren Gesammtheit ausdehnt, wie ja die Natur ebenfalls nie eine einzige Erscheinung zeigt. So nützt es, wie oben gezeigt wurde, gar nichts, die specifische Wärme eines Körpers bei einer gegebenen Temperatur zu kennen, wenn man nicht ihre Abhängigkeit von der Temperatur und die Ausdehnungsverhältnisse des Körpers auch weiss. Die möglichst vollständige Kenntniss einiger weniger Körper würde der Molecularphysik viel mehr Vorschub leisten, als Untersuchungen, die sich über grosse Reihen von Körpern erstrecken, aber nur eine einzige Erscheinung berücksichtigen. Theilung der Arbeit wäre hier wohl am zweckmässigsten.

Die nämliche Ursache, welche bei der Ausdehnung eines Körpers einen Wärmeverlust bedingt, veranlasst auch die Erscheinung der latenten Wärme. Schmilzt ein fester Körper, so wird die Kraft, welche das schwingende Molecul in die Gleichgewichtslage zurückführt, kleiner und es verschwindet Wärme. Diese Abnahme der beschleunigenden Kraft tritt auch dann ein, wenn, wie bei dem geschmolzenen Eise, das Volumen der Flüssigkeit kleiner ist, als das des festen Körpers, denn während die Moleculardistanz bei den Flüssigkeiten nur wenig oder gar keine Verschiedenheit zeigt, bewirken gerade diese Differenzen die Härte des Körpers, und je bedeutender die Verschiedenheiten der Distanzen benachbarter Molecule sind, um so mehr wird die Kraft, welche die schwingenden Theilchen in die Gleichgewichtslage zurückführt, diejenige überragen, welche unter sonst gleichen Umständen bei geringeren Distanzen vorhanden ist.

XIII.

Das Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte als ein allgemeines Princip der Mechanik.

Von

Prof. Rachmaninoff,

wirkl. Staatsrath in Kiew.

Hierzu Taf. III, Fig. 1.

---

§ 1. Bevor wir zur Auseinandersetzung von dem, was wir unter dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte verstehen, und zur Ableitung aus demselben der Bewegungsgleichungen eines Systems von materiellen Punkten treten, wollen wir ein Theorem aus der reinen Analysis beweisen.

Es sei

1) $$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots$$

eine in Bezug auf die unendlich kleinen Grössen δx, δy, δz, ... homogene lineare Function, wo X, Y, Z, ... Functionen von x, y, z, ... seien; es seien ausserdem homogene Functionen von δx, δy, δz, ...

2) $$A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z + \ldots,\quad A_1\,\delta x + B_1\,\delta y + C_1\,\delta z + \ldots,\quad \ldots$$

und

3) $$U\,\delta x + V\,\delta y + W\,\delta z + \ldots,\quad U_1\,\delta x + V_1\,\delta y + W_1\,\delta z + \ldots,\quad \ldots$$

gegeben, wo die Coefficienten von δx, δy, δz, ... Functionen von x, y, z, ... seien.

Wir wollen sehen, welche Bedingungen die Coefficienten X, Y, Z, ... der Functionen 1) und die Coefficienten A, B, ... A_1, B_1, ... U, V, ... U_1, V_1, ... der Functionen 2) und 3) erfüllen müssen, damit die Function 1) keinen positiven Werth von denjenigen unendlich kleinen δx, δy, δz, ..., welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null und die Function 3) gleich Null machen, annehme.

Indem wir voraussetzen, dass die Anzahl der Functionen 2) und 3) kleiner sei, als die der veränderlichen x, y, z, ..., fügen wir zu den ersteren soviel neue willkürliche lineare und in Bezug auf δx, δy, δz, ... homogene Functionen $\delta\Omega$, $\delta\Omega_1$, ... hinzu, dass die Anzahl der Functionen 2) und 3) mit der der willkürlichen $\delta\Omega$, $\delta\Omega_1$, ... der Anzahl der unendlich kleinen δx, δy, δz, ... gleich wird.

Da die Functionen $\delta\Omega$, $\delta\Omega_1$, ... willkürlich und von den 2) und 3) verschieden sind, so können sie entweder positiv, oder negativ, oder gleich Null werden für diejenigen Werthe von δx, δy, δz, ..., welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null, und die Functionen 3) gleich Null machen.

Welche die Coefficienten der Functionen 1), 2) und 3) auch sein mögen, so können wir immer, indem wir unter λ, λ_1, ... μ, μ_1, ... ω, ω_1, ... unbestimmte Grössen verstehen,

$$
4)\quad \begin{aligned}
X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots &+ \lambda\ (A\ \delta x + B\ \delta y + C\ \delta z + \ldots)\\
&+ \lambda_1 (A_1\,\delta x + B_1\,\delta y + C_1\ \delta z + \ldots) + \ldots\\
&+ \mu\ (U\,\delta x + V\ \delta y + W\,\delta z + \ldots)\\
&+ \mu_1 (U_1\,\delta x + V_1\,\delta y + W_1\,\delta z + \ldots) + \ldots\\
&+ \omega\,\delta\Omega + \omega_1\,\delta\Omega_1 + \ldots = 0
\end{aligned}
$$

für alle beliebigen Werthe von δx, δy, δz, ... setzen. In der That, da δx, δy, δz, ... immer ganz willkürlich und λ, λ_1, ... μ, μ_1, ... ω, ω_1, ... unbestimmt bleiben, so hat man die Coefficienten, welche bei den ersteren in der obigen Gleichung 4) vorkommen, gleich Null zu setzen; man erhält auf diese Weise ebensoviel Gleichungen, als Grössen λ_1, λ_2, ... μ, μ_1, ... ω, ω_1, ... da sind, und kann aus diesen Gleichungen diejenigen Werthe von λ, λ_1, ... μ, μ_1, ... ω; ω_1, ... ermitteln, welche die Gleichung 4) für alle willkürlichen δx, δy, δz, ... möglich machen.

Die Gleichung 4) wollen wir nun in der Form

$$
5)\quad \begin{aligned}
X\,\delta z + Y\,\delta y + \ldots = &- \lambda\,(A\ \delta x + B\,\delta y + \ldots) - \lambda_1 (A_1\ \delta x + B_1\ \delta y + \ldots) + \ldots\\
&- \mu\,(U\,\delta x + V\,\delta y + \ldots) - \mu_1 (U_1\,\delta x + V_1\ \delta y + \ldots) + \ldots\\
&- \omega\,\delta\Omega - \omega_1\,\delta\Omega_1 - \ldots
\end{aligned}
$$

darstellen. Damit der erste Theil dieser Gleichung bei allen Werthen der unendlich kleinen Grössen, welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null und die Functionen 3) gleich Null machen, keinen positiven Werth annehme, müssen die Grössen ω, ω_1, ... als gleich Null sich bestimmen lassen; sonst würde man solche Werthe für die unendlich kleinen δx, δy, δz, ... wählen können, welche die Functionen 2) und 3) gleich Null machen, und die Function 1) würde einer Summe beliebiger Functionen $\delta\Omega$, $\delta\Omega_1$, ... gleich werden, welche auch positiv ausfallen könnte, die letzte Folgerung würde aber der zu Grunde gelegten Voraussetzung widersprechen. Folglich muss

$$
6)\quad \begin{aligned}
X\,\delta x + Y\,\delta y + \ldots &+ \lambda\ (A\ \ \delta x + B\ \ \delta y + \ldots)\\
&+ \lambda_1 (A_1\ \delta x + B_1\,\delta y + \ldots) + \ldots\\
&+ \mu\ (U\ \ \delta x + V\ \ \delta y + \ldots)\\
&+ \mu_1 (U_1\,\delta x + V_1\,\delta y + \ldots) + \ldots = 0
\end{aligned}
$$

für alle beliebigen Werthe von δx, δy, ... sein oder, was dasselbe ist,

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l} X+\lambda A+\lambda_1 A_1+\ldots+\mu U+\mu_1 U_1+\ldots=0, \\ Y+\lambda B+\lambda_1 B_1+\ldots+\mu V+\mu_1 V_1+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

in welche Gleichungen der Ausdruck 6) zerfällt. Ferner ist es ersichtlich, dass die Coefficienten λ, λ_1, ... als positiv aus den Gleichungen 7) bestimmt werden müssen, damit der erste Theil der Gleichung 5) bei den Werthen der unendlich kleinen Grössen, welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null und die Functionen 3) gleich Null machen, keine positiven Werthe annimmt; sonst würde der erste Theil der Gleichung 5), indem man für δx, δy, ... solche Werthe wählte, die Function

$$A\,\delta x+B\,\delta y+C\,\delta z+\ldots$$

positiv und die anderen Functionen 2) und 3) gleich Null machten, für negative Werthe λ positiv ausfallen.

Wir haben also folgende Bedingungen gefunden, die erfüllt werden müssen, damit die Function 1) bei denjenigen Werthen von δx, δy, δz, ..., welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null und die Functionen 3) gleich Null machen, keine positiven Werthe annehme.

1. Es muss Gleichung 6) für alle beliebigen Werthe von δx, δy, δz, ... gelten, d. h. die Function 1) addirt zu den Functionen 2) und 3), von denen jede mit einem unbestimmten Factor multiplicirt ist, muss für alle beliebigen Werthe δx, δy, δz, ... gleich Null werden.

2. Die Factoren λ_1, λ_2, ... müssen positiv sein. Diese Bedingungen sind nicht nur nothwendig, sondern auch genügend, da die Function 1), wenn dieselben erfüllt werden, bei allen Werthen von δx, δy, δz, ..., welche die Functionen 2) positiv oder gleich Null und die Functionen 3) gleich Null machen, keine positiven Werthe annimmt.

Da δx, δy, δz, ... willkürlich sind, so müssen ihre Coefficienten in Gleichung 6) gleich Null werden; daraus erhält man soviel Gleichungen 7), als unendlich kleine δx, δy, δz, ... vorhanden sind; eliminirt man aus denselben die unbestimmten Factoren λ_1, λ_2, ... μ, μ_1, ..., so erhält man Ausdrücke, welche die gesagte Abhängigkeit der Coefficienten der Functionen 1), 2) und 3) von einander darstellen.

Zu den auf diese Weise erhaltenen Gleichungen muss man noch die Ungleichheiten hinzufügen, welche ausdrücken sollen, dass die aus den Gleichungen 7) ermittelten Factoren stets positiv bleiben, welche numerischen Werthe sie auch annehmen mögen.

§ 2. Wir gehen jetzt zur Erklärung dessen über, was wir unter dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte verstehen, und zur Ableitung aus demselben der Bewegungsgleichungen eines Systems von materiellen Punkten. Um die Bewegung eines Systems materieller Punkte ermitteln zu können, muss zuerst das Letzte bestimmt werden, d. h. es muss gezeigt werden, welche Verrückungen für das betrachtete System möglich sind; dann müssen die Kräfte, welche auf die materiellen Punkte wirken, gegeben sein. Bekanntlich wird ein System von materiellen Punkten mittelst folgender Bedingungen analytisch bestimmt: Diejenigen Verrückungen sind möglich, welche gewisse lineare Functionen in Bezug auf die Verrückungen gleich Null oder gleich Null und positiv machen. Im letztern Falle ändern die erwähnten Functionen ihr Zeichen nicht anders, als beim Uebergange von den möglichen Verrückungen zu den unmöglichen. Das System, dessen Bewegung zu ermitteln ist, bestehe aus n materiellen Punkten, deren Massen $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ und deren Coordinaten für das Ende der Zeit t

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ (x_i, y_i, z_i),\ \ldots\ (x_n, y_n, z_n)$$

seien.

Es seien diejenigen Verrückungen des Systems

$$(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1),\ (\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2),\ \ldots\ (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i),\ \ldots\ (\delta x_n, \delta y_n, \delta z_n)$$

möglich, welche die linearen Functionen derselben

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left\{\dfrac{\partial L'}{\partial x_i}\delta x_i + \dfrac{\partial L'}{\partial y_i}\delta y_i + \dfrac{\partial L'}{\partial z_i}\delta z_i\right\} + \dfrac{\partial L'}{\partial t}.\partial t, \\ \Sigma\left\{\dfrac{\partial L''}{\partial x_i}\delta x_i + \dfrac{\partial L''}{\partial y_i}\delta y_i + \dfrac{\partial L''}{\partial z_i}\delta z_i\right\} + \dfrac{\partial L''}{\partial t}.\partial t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

positiv oder gleich Null und die Functionen

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left\{\dfrac{\partial M'}{\partial x_i}\delta x_i + \dfrac{\partial M'}{\partial y_i}\delta y_i + \dfrac{\partial M'}{\partial z_i}\delta z_i\right\} + \dfrac{\partial M'}{\partial t}.\partial t, \\ \Sigma\left\{\dfrac{\partial M''}{\partial x_i}\delta x_i + \dfrac{\partial M''}{\partial y_i}\delta y_i + \dfrac{\partial M''}{\partial z_i}\delta z_i\right\} + \dfrac{\partial M''}{\partial t}.\partial t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

gleich Null machen. In den angeführten Ausdrücken bezeichnen x_i, y_i, z_i die Coordinaten eines Punktes m_i des Systems und dem i sind alle ganz numerischen Werthe von 1 bis n zu ertheilen.

Setzen wir ferner voraus, dass auf das mittelst der Bedingungen der möglichen Verrückungen 8) und 9) bestimmte System von materiellen Punkten die Kräfte $F_1, F_2, \ldots F_i, \ldots F_n$ wirken, deren Projectionen auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen resp.

$$(X_1, Y_1, Z_1),\ (X_2, Y_2, Z_2),\ \ldots\ (X_i, Y_i, Z_i),\ \ldots\ (X_n, Y_n, Z_n)$$

seien. Kennt man die Bedingungen der möglichen Verrückungen eines Systems und die Kräfte, welche auf die materiellen Punkte desselben wirken, so findet man die Bedingungen (Gleichungen) einer wirklichen Verrückung des Systems während eines unendlich kleinen Zeitintervalls ∂t und ermittelt auf diese Weise die Bewegung des Systems. Wir wollen die Charakteristik eines Differentials auf diejenigen Aenderungen von Coordinaten beziehen, welcke infolge wirklicher Verrückungen der materiellen Punkte stattfinden.

Da die wirklichen Verrückungen
$(\partial x_1, \partial y_1, \partial z_1)$, $(\partial x_2, \partial y_2, \partial z_2)$, ... $(\partial x_i, \partial y_i, \partial z_i)$, ... $(\partial x_n, \partial y_n, \partial z_n)$
der materiellen Punkte eines Systems mithin auch zu den möglichen Verrückungen desselben gehören, so müssen dieselben die Functionen 8) und 9) gleich Null machen, im Fall die Hindernisse, auf welche jene Functionen sich beziehen, wirklich als solche vorkommen. Die Hindernisse, welche auf die Functionen 8) sich beziehen, schliessen für die sich bewegenden Massen einen Theil des Raumes aus und lassen für die Bewegung den andern Theil frei. Für den ersten Theil des Raumes werden die Functionen 8) negativ und für den zweiten positiv. Die Hindernisse kommen nur dann als wirksam vor, wenn sie den Uebergang materieller Punkte aus einem Theile des Raumes in den andern verhindern. Folglich gehen die wirklichen Verrückungen des Systems an der Grenze, welche die beiden Räume von einander trennt, vor sich, sonst würden die Verrückungen von Hindernissen unabhängig sein. Was nun die Functionen 9) betrifft, so ist es ersichtlich, dass die wirklichen Verrückungen, in denen sie möglich sind, die Functionen 9) gleich Null machen. Daraus schliessen wir, dass eine wirkliche Verrückung, welche die Functionen 8) und 9) gleich Null macht, sich durch folgende Gleichungen bestimmen lässt:

$$10)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left\{\frac{\partial L'}{\partial x_i}\partial x_i + \frac{\partial L'}{\partial y_i}\partial y_i + \frac{\partial L'}{\partial z_i}\partial z_i\right\} + \frac{\partial L'}{\partial t}.\partial t = 0, \\ \Sigma\left\{\frac{\partial L''}{\partial x_i}\partial x_i + \frac{\partial L''}{\partial y_i}\partial y_i + \frac{\partial L''}{\partial z_i}\partial z_i\right\} + \frac{\partial L''}{\partial t}.\partial t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$11)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left\{\frac{\partial M'}{\partial x_i}\partial x_i + \frac{\partial M'}{\partial y_i}\partial y_i + \frac{\partial M'}{\partial z_i}\partial z_i\right\} + \frac{\partial M'}{\partial t}.\partial t = 0, \\ \Sigma\left\{\frac{\partial M''}{\partial x_i}\partial x_i + \frac{\partial M''}{\partial y_i}\partial y_i + \frac{\partial M''}{\partial z_i}\partial z_i\right\} + \frac{\partial M''}{\partial t}.\partial t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

§ 3. Da die Anzahl der Gleichungen 10) und 11) immer kleiner ist, als die der Coordinaten, welche die Lage der materiellen Punkte eines Systems bestimmen, so müssen noch andere Bedingungen der wirklichen Verrückungen ermittelt werden.

Es sei O_i die Lage eines materiellen Punktes des Systems für das Ende der Zeit t, es stelle $\overline{O_i A_i}$ die Richtung der Geschwindigkeit v_i vor, welche der Punkt m_i am Ende der Zeit t hat; dann stellt $\overline{O_i A_i}$ ebenso diejenige Verrückung vor, welche vom Punkte m_i infolge der von ihm erworbenen Geschwindigkeit in dem unendlich kleinen Zeitintervalll ∂t gemacht wäre.

Es sei $\overline{O_i B_i}$ diejenige Verrückung, welche der Punkt m_i während der Zeit ∂t unter der Wirkung der Kraft F_i gemacht hätte, wenn derselbe keine erworbene Geschwindigkeit besässe und ganz frei wäre; die Diagonallinie $\overline{O_i C_i}$ des auf $\overline{O_i A_i}$ und $\overline{O_i B_i}$ gebauten Parallelogramms würde die Verrückung des materiellen Punktes m_i vorstellen, falls der letzte zur Zeit t frei wäre und mit der früher erworbenen Geschwindigkeit v_i unter der Wirkung der Kraft F_i sich bewegte. Da aber der betreffende Punkt unfrei ist, so kann er nicht nach $\overline{O_i C_i}$ sich verschieben und vollendet eine wirkliche Verrückung $\overline{O_i E_i}$. Wir wollen die nach der Richtung $\overline{A_i C_i}$ wirkende Kraft F_i in zwei andere zerlegen, welche resp. nach den Richtungen $\overline{A_i E_i}$ und $\overline{E_i C_i}$ wirken, und dieselben durch J_i und P_i bezeichnen. Die erste von diesen Kräften verursacht solch eine Verrückung $A_i E_i$, welche, indem sie sich mit der infolge der erworbenen Geschwindigkeit stattfindenden Verschiebung $O_i A_i$ verbindet, die wirkliche Verrückung des materiellen Punktes zur Folge hat, als ob der letzte sich frei bewegte. Führt man dieselbe Zerlegung für alle Punkte des Systems durch, so sieht man, dass die Kräfte $J_1, J_2, \dots J_i, \dots J_n$ wirkliche Verrückungen verursachen, als ob jeder der Punkte frei wäre.

Was die Kräfte $P_1, P_2, \dots P_i, P_n$ betrifft, so dürfen dieselben kein Bestreben haben, eine solche Verrückung zu erzeugen, welche, mit der wirklichen verbunden, eine mögliche Verrückung zur Folge hätte. Die letzte Bedingung dient zur Herstellung der fehlenden Gleichungen von wirklichen Verrückungen. Zuerst wollen wir aber diejenigen Verrückungen näher ins Auge fassen, welche, mit den wirklichen verbunden, mögliche Verrückungen ergeben. Es sei

$$12)\quad \begin{gathered}(\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1),\ (\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2),\ \dots\ (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i),\ \dots \\ (\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n)\end{gathered}$$

eine beliebige Verschiebung eines Systems; verbindet sich dieselbe mit der wirklichen Verschiebung, so ergeben sich die Verrückungen

$$13)\quad \begin{gathered}(\Delta x_1 + \partial x_1,\ \Delta y_1 + \partial y_1,\ \Delta z_1 + \partial z_1),\ \ (\Delta x_2 + \partial x_2,\ \Delta y_2 + \partial y_2,\ \Delta z_2 + \partial z_2), \\ \dots\ (\Delta x_i + \partial x_i,\ \Delta y_i + \partial y_i,\ \Delta z_i + \partial z_i), \\ \dots\ (\Delta x_n + \partial x_n,\ \Delta y_n + \partial y_n,\ \Delta z_n + \partial z_n).\end{gathered}$$

Hat die Verschiebung 12) in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche Verschiebung zur Folge, so müssen $\Delta x_i + \partial x_i$, $\Delta y_i + \partial y_i$, $\Delta z_i + \partial z_i$, wenn dieselben in die Functionen 8) und 9) statt δx_i, δy_i, δz_i substituirt werden, die Functionen

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left\{\frac{\partial L'}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial L'}{\partial z_i}\Delta z_i\right\} \\ &+ \Sigma\left\{\frac{\partial L'}{\partial x_i}\partial x_i + \frac{\partial L'}{\partial y_i}\partial y_i + \frac{\partial L'}{\partial z_i}\partial z_i\right\} + \frac{\partial L'}{\partial t}.\partial t, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

positiv oder gleich Null machen und die Functionen

$$15)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left\{\frac{\partial M'}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial L'}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial L'}{\partial z_i}\Delta z_i\right\} \\ +\Sigma\left\{\frac{\partial M'}{\partial x_i}\,\partial x_i+\frac{\partial M'}{\partial y_i}\,\partial y_i+\frac{\partial M'}{\partial z_i}\,\Delta z_i\right\}+\frac{\partial M'}{\partial t}.\partial t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

gleich Null machen.

Infolge der Gleichungen 10) und 11) gehen aber die Ausdrücke 14) und 15) in folgende lineare homogene Functionen über:

$$16)\quad \Sigma\left\{\frac{\partial L'}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial L'}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial L'}{\partial z_i}\Delta z_i\right\},\quad \Sigma\left\{\frac{\partial L''}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial L''}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial L''}{\partial z_i}\Delta z_i\right\},\ \ldots$$

und

$$17)\quad \Sigma\left\{\frac{\partial M'}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial M'}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial M'}{\partial z_i}\Delta z_i\right\},\quad \Sigma\left\{\frac{\partial M''}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial M''}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial M''}{\partial z_i}\Delta z_i\right\},\ \ldots$$

Daraus ist ersichtlich, dass alle Verrückungen 12), welche in Verbindung mit der wirklichen mögliche Verrückungen zur Folge haben, die homogenen linearen Functionen 16) positiv und gleich Null und die Functionen 17) gleich Null machen. Man sieht auch, dass die Ausdrücke 16) und 17) Aenderungen der Functionen L', L'', ... M', M'', ... vorstellen, welche von den Zeitänderungen unabhängig sind.

Es sei $\overline{E_i D_i}$ die erwähnte Verrückung Δs_i eines materiellen Punktes m_i und Δx_i, Δy_i, Δz_i seien Projectionen derselben auf Coordinaten. Aus dem Dreiecke $D_i E_i C_i$ erhält man

$$\overline{D_i C_i}^2=\overline{D_i E_i}^2+\overline{E_i C_i}^2-2.\overline{D_i E_i}.\overline{E_i C_i}.\cos(\overline{D_i E_i},\ \overline{E_i C_i}),$$

wobei $(\overline{D_i E_i},\ \overline{E_i C_i})$ den Winkel zwischen der Verrückung und der Richtung der verlorenen Kraft P_i bezeichnet. Multiplicirt man diese Gleichungen mit m_i und nimmt man die über alle Punkte des Systems ausgedehnte Summe, so erhält man

$$18)\quad \begin{array}{l} \Sigma m_i.\overline{D_i C_i}^2-\Sigma m_i.\overline{E_i C_i}^2 \\ =\Sigma m_i.\overline{D_i E_i}^2-2\Sigma m_i.\overline{D_i E_i}.\overline{E_i C_i}.\cos(\overline{D_i E_i},\ \overline{E_i C_i}). \end{array}$$

Im zweiten Gliede des rechten Theiles der letzten Gleichung bezeichnet $\overline{E_i C_i}$ diejenige Verrückung, welche die verlorene Kraft P_i bei freier Bewegung des betreffenden materiellen Punktes erzeugt hätte.

Jene Verrückung wird aber durch die Gleichung

$$19)\quad \overline{E_i C_i}=\frac{P_i}{m_i}.\frac{\partial t^2}{2}$$

bestimmt. Wird statt $\overline{E_i C_i}$ ihre Grösse substituirt, so erhält man

$$2\Sigma m_i.\overline{D_i E_i}.\overline{E_i C_i}.\cos(\overline{D_i E_i},\ \overline{E_i C_i})=\partial t^2.\Sigma P_i.\overline{D_i E_i}.\cos(P_i.\ \overline{D_i E_i}).$$

Da aber die verlorenen Kräfte P_1, P_2, ... P_i, ... P_n keine Verrückungen erzeugen können, welche in Verbindung mit den wirklichen mögliche Verrückungen zur Folge haben würden, und da Kräfte im Allgemeinen keine Bestrebungen haben, Verrückungen zu erzeugen, in Bezug auf welche das gesammte Moment keinen positiven Werth annimmt, so schliessen wir, dass das gesammte Moment der verlorenen Kräfte

$$\Sigma P_i \,.\, \overline{D_i E_i} \,.\, \cos(P_i, \overline{DE})$$

und folglich auch das zweite Glied des rechten Theiles der Gleichungen 18)

$$2 \Sigma m_i \,.\, \overline{D_i E_i} \,.\, \overline{E_i C_i} \,.\, \cos(\overline{D_i E_i}, \overline{E_i C_i})$$

keinen positiven Werth annehmen kann und dass der rechte Theil der erwähnten Gleichungen immer positiv bleibt. Auf diese Weise kommt man zum Schlusse, dass bei der Bewegung eines Systems materieller Punkte

$$\Sigma m_i \,.\, \overline{E_i C_i}^2 < \Sigma m_i \,.\, \overline{D_i C_i}^2.$$

Diese Ungleichheit schliesst in sich das sogenannte Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges ein, das aber von Gauss nur für den Fall bewiesen wurde, wo die Bedingungen des Systems von der Zeit unabhängig sind. „Das neue Princip“, sagt Gauss, „ist nun folgendes: Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglichst grosser Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglichst kleinem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkungen jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.“ (Gauss' Werke, Bd. V S. 26.)

Man kann aber die Ungleichheit 20) in einem andern Sinne betrachten, der ihre mechanische Bedeutung genauer ausdrückt. Nämlich es kann der Ausdruck

$$\Sigma m_i \,.\, \overline{E_i C_i}^2,$$

der bei wirklichen Verrückungen den kleinsten Werth annimmt, nach der Gleichung 19) in die Form

$$\frac{\partial t^2}{2} \,.\, \Sigma P_i \,.\, \overline{E_i C_i}$$

transformirt werden oder auch in

$$\frac{\partial t^2}{2} \,.\, \Sigma P_i p_i,$$

indem $E_i C_i = p_i$ gesetzt wird. Da aber P_i die verlorene Kraft bezeichnet und p_i die Verrückungen, welche jene Kraft bei freier Bewegung dem materiellen Punkte ertheilt hätte, so stellt $\Sigma P_i p_i$ diejenige Arbeit vor, welche die verlorenen Kräfte bei freier Bewegung erzeugt hätten. Daraus ist die Bedeutung des Ausdruckes 20) ersichtlich: Bei der Bewegung eines Systems materieller Punkte hat die Arbeit, welche die verlorenen Kräfte bei freier Bewegung desselben Systems erzeugt hätten, den kleinsten Werth; der unendlich kleine Zuwachs jener Arbeit bleibt bei jeder Verschiebung, die in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche Verschiebung zur Folge haben würde, positiv.

Also ersieht man, dass das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges als Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte bezeichnet werden könnte, wodurch man in grössere Uebereinstimmung mit der gegenwärtigen Anschauung der Naturerscheinungen käme.

§ 4. Wir wollen nun die Gleichungen der wirklichen Verrückungen aus dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte ableiten.

Es bezeichne $\Delta\Sigma(P_i p_i)$ diejenige Aenderung der verlorenen Arbeit, welche durch die Verschiebungen, die in Verbindung mit den wirklichen mögliche Verrückungen erzeugen, hervorgebracht werden würde; dann ist nach dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte

$$21)\qquad \Delta\Sigma(P_i p_i)$$

immer positiv. Führt man statt P_i seine Grösse aus der Gleichung 19) ein, so erhält man

$$\Delta\Sigma(P_i p_i) = \frac{2}{\partial t^2}\,.\,\Delta\Sigma m_i p_i^2 = \frac{2}{\partial t^2}\,.\,\Sigma m_i\,.\,\Delta p_i^2.$$

Die Coordinaten x_i, y_i, z_i bestimmen die Lage des materiellen Punktes m_i zur Zeit t; man bezeichne durch a_i, b_i, c_i die Coordinaten von m_i zur Zeit $t+\partial t$ für den Fall, wo der betreffende materielle Punkt während des Zeitintervalls ∂t sich ganz frei bewegte, und durch ξ_i, η_i, ζ_i die Coordinaten von demselben Punkte für den Fall der wirklich stattfindenden Verrückung desselben; dann ist

$$p_i^2 = (\xi_i - a_i)^2 + (\eta_i - b_i)^2 + (\zeta_i - c_i)^2.$$

Man bezeichne durch $\Delta\xi_i$, $\Delta\eta_i$, $\Delta\zeta_i$ die Projectionen auf Coordinatenaxen von $D_i E_i$, d. h. die Aenderungen, die die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i bei derjenigen unendlich kleinen Verschiebung des Systems erleiden, welche in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche Verschiebung zur Folge hätte; zieht man durch den Punkt O_i, dessen Coordinaten x_i, y_i, z_i sind, eine Linie $O_i G_i$ parallel und gleich $E_i D_i$, so ersieht man, dass

$$\Delta\xi_i = \Delta x_i,\ \ \Delta\eta_i = \Delta y_i,\ \ \Delta\zeta_i = \Delta z_i,$$

$$\Delta p_i^2 = 2\{(\xi_i - a_i)\,.\,\Delta x_i + (\eta_i - b_i)\,.\,\Delta y_i + (\zeta_i - c_i)\,.\,\Delta z_i\},$$

$$22)\qquad \Delta\Sigma(P_i p_i) = \frac{4}{\partial t^2}\Sigma m_i\{(\xi_i - a_i)\,.\,\Delta x_i + (\eta_i - b_i)\,.\,\Delta y_i + (\zeta_i - c_i)\,.\,\Delta z_i\}.$$

Nach dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte muss der rechte Theil der obigen Gleichung bei jeder Verschiebung, welche in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche Verschiebung zur Folge hätte, positiv bleiben oder, was dasselbe ist, muss die in Bezug auf die Verrückungen lineare homogene Function

$$23)\qquad \frac{2}{\partial t^2}\Sigma m_i\{(a_i-\xi_i).\Delta x_i+(b_i-\eta_i).\Delta y_i+(c_i-\zeta_i).\Delta z_i\}$$

bei derjenigen Verschiebung keinen positiven Werth annehmen, welche die Functionen 16) positiv und gleich Null und die Functionen 17) gleich Null macht.

Um jene Bedingungen zu erfüllen, ist es genügend, dass die Function 23), addirt zu den Functionen 16) und 17), von denen jede mit einem betreffenden Factor multiplicirt wird, für alle beliebigen Verschiebungen des Systems gleich Null bleibe,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\partial t^2}\Sigma m_i\{(a_i-\xi_i).\Delta x_i+(b_i-\eta_i).\Delta y_i+(c_i-\zeta_i).\Delta z_i\}\\ &\quad+\lambda'\Sigma\left\{\frac{\partial L'}{\partial x_i}.\Delta x_i+\frac{\partial L'}{\partial y_i}.\Delta y_i+\frac{\partial L'}{\partial z_i}.\Delta z_i\right\}+\ldots\\ &\quad+\mu'\Sigma\left\{\frac{\partial M'}{\partial x_i}.\Delta x_i+\frac{\partial M'}{\partial y_i}.\Delta y_i+\frac{\partial M'}{\partial z_i}.\Delta z_i\right\}+\ldots=0,\end{aligned}$$

wo λ', λ'', ... μ', μ'', ... die erwähnten Factoren sind, von denen λ', λ'', ... immer positiv bleiben. Da Δx_i, Δy_i, Δz_i willkürlich sind, so zerfällt die obige Gleichung in folgende:

$$24)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{2m_i}{\partial t^2}(a_i-\xi_i)+\lambda'\frac{\partial L'}{\partial x_i}+\ldots+\mu'\frac{\partial M'}{\partial x_i}+\ldots=0,\\ &\frac{2m_i}{\partial t^2}(b_i-\eta_i)+\lambda'\frac{\partial L'}{\partial y_i}+\ldots+\mu'\frac{\partial M'}{\partial z_i}+\ldots=0,\\ &\frac{2m_i}{\partial t^2}(c_i-\zeta_i)+\lambda'\frac{\partial L'}{\partial z_i}+\ldots+\mu'\frac{\partial M'}{\partial z_i}+\ldots=0,\end{aligned}\right.$$

wo statt i alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind. Nach der Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes hat man

$$\begin{aligned}a_i&=x_i+v_i\cos(v_i,x).\partial t+\frac{X_i}{m_i}.\frac{\partial t^2}{2},\\ b_i&=y_i+v_i\cos(v_i,y).\partial t+\frac{Y_i}{m_i}.\frac{\partial t^2}{2},\\ c_i&=z_i+v_i\cos(v_i,z).\partial t+\frac{Z_i}{m_i}.\frac{\partial t^2}{2}.\end{aligned}$$

Die wirkliche Lage des materiellen Punktes m_i, dessen Coordinaten zur Zeit t: x_i, y_i, z_i sind, wird zur Zeit $t+\partial t$ durch die Coordinaten

$$\begin{aligned}\xi_i&=x_i+\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.\frac{\partial t^2}{2},\\ \eta_i&=y_i+\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}.\frac{\partial t^2}{2},\\ \zeta_i&=z_i+\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}.\frac{\partial t^2}{2}\end{aligned}$$

bestimmt. Führt man die erhaltenen Ausdrücke a_i, b_i, c_i, ξ_i, η_i, ζ_i in die Gleichungen 24) ein und bemerkt, dass

$$v_i \cos(v_i, x) = \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad v_i \cos(v_i, y) = \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad v_i \cos(v_i, z) = \frac{\partial z_i}{\partial t},$$

so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$25) \quad \left\{ \begin{aligned} X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \lambda' . \frac{\partial L'}{\partial x_i} + \ldots + \mu' . \frac{\partial M'}{\partial x_i} + \ldots = 0, \\ Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + \lambda' . \frac{\partial L'}{\partial x_i} + \ldots + \mu' . \frac{\partial M'}{\partial y_i} + \ldots = 0, \\ Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} + \lambda' . \frac{\partial L'}{\partial z_i} + \ldots + \mu' . \frac{\partial M'}{\partial z_i} + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

deren Zahl bekanntlich $3n$ beträgt. Diese Gleichungen in Verbindung mit denen der wirklichen Verrückungen 10) und 11) bestimmen $3n$ Coordinaten der materiellen Punkte und die Factoren λ', λ'', ... μ', μ'', ...

§ 5. Nach dem oben Gesagten ist es leicht, den Zusammenhang zu zeigen, der zwischen dem Princip der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte und dem der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit dem d'Alembert'schen Princip stattfindet.

Verbindet man das Princip der virtuellen Verrückungen mit dem von d'Alembert und erstreckt dasselbe auf den Fall, wo die Bedingungen eines Systems von der Zeit abhängen, so wird durch dasselbe bekanntlich ausgedrückt, dass die verlorenen Kräfte keine Verschiebungen des Systems erzeugen können, welche in Verbindung mit der wirklichen eine mögliche zur Folge hätte; dafür ist es aber nothwendig, dass das gesammte Moment der verlorenen Kräfte

$$26) \qquad \Sigma P_i . \cos(P_i, \Delta s_i) . \Delta s_i$$

bei der Verschiebung Δs_1, Δs_2, ... Δs_i, ... Δs_n, welche in Verbindung mit der wirklichen möglich würde, keinen positiven Werth annehme. Man kann nun die verlorene Kraft P_i in zwei andere zerlegen: die wirkende Kraft F_i und die Kraft $J_i = m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}$, welche die wirkliche Bewegung das materiellen Punktes erzeugt und mit entgegengesetztem Zeichen genommen wird. Da aber

$$P_i \cos(P_i, x) = X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2},$$

$$P_i \cos(P_i, y) = Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2},$$

$$P_i \cos(P_i, z) = Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2},$$

$$\Delta x_i = \Delta s_i . \cos(\Delta s_i, x), \quad \Delta y_i = \Delta s_i . \cos(\Delta s_i, y), \quad \Delta z_i = \Delta s_i . \cos(\Delta s_i, z)$$

und

$$\cos(P_i, \Delta s_i) = \cos(P_i, x) . \cos(\Delta s_i, x) + \cos(P_i, y) . \cos(\Delta s_i, y) + \cos(P_i, z) . \cos(\Delta s_i, z),$$

so nimmt das gesammte Moment der verlorenen Kräfte 26) die Form

$$\Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) . \Delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \right) . \Delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \right) . \Delta z_i \right\}$$

an. Diese in Bezug auf die Verrückungen lineare Function darf bei derjenigen Verschiebung keinen positiven Werth annehmen, welche in Verbindung mit der wirklichen möglich wird, d. h. welche die Functionen 16) positiv und gleich Null und die Functionen 17) gleich Null macht; dafür ist es aber nach dem im Anfange auseinandergesetzten Lehrsatze nothwendig und genügend, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} &\Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) . \Delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \right) . \Delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \right) . \Delta z_i \right\} \\ &\quad + \lambda' \, \Sigma \left\{ \frac{\partial L'}{\partial x_i} . \Delta x_i + \frac{\partial L'}{\partial y_i} . \Delta y_i + \frac{\partial L'}{\partial z_i} . \Delta z_i \right\} + \dots \\ &\quad + \mu' \, \Sigma \left\{ \frac{\partial M'}{\partial x_i} . \Delta x_i + \frac{\partial M'}{\partial y_i} . \Delta y_i + \frac{\partial M'}{\partial z_i} . \Delta z_i \right\} + \dots = 0 \end{aligned}$$

für alle beliebigen Verrückungen des Systems giltig ist und λ', λ'', ... dabei positiv bleiben. Die obige Gleichung zerfällt in die Gleichungen 25). Führt man in die Gleichung 22) die Werthe von a_i, b_i, c_i, ξ_i, η_i, ζ_i ein, so erhält man

$$\text{27)} \quad \begin{aligned} -\Delta \Sigma(P_i p_i) = 2 \Sigma \Big\{ &\left(X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) . \Delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \right) . \Delta y_i \\ &+ \left(Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \right) . \Delta z_i \Big\} \end{aligned}$$

oder

$$-\Delta \Sigma(P_i p_i) = 2 \Sigma P_i . \Delta s_i . \cos(P_i, \Delta s_i).$$

Diese Gleichung drückt den Zusammenhang zwischen dem Princip der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit dem d'Alembert'schen Princip und dem der kleinsten Arbeit der verlorenen Kräfte aus. Nach dem letzten Princip ist der Zuwachs der verlorenen Arbeit immer positiv, dagegen drückt das Princip der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit dem d'Alembert'schen aus, dass das gesammte Moment der verlorenen Kräfte

$$\Sigma P_i . \Delta s_i . \cos(P_i, \Delta s_i)$$

in Bezug auf dieselben Verrückungen, wie oben, keinen positiven Werth annimmt.

§ 6. Gehen wir nun zum Princip der kleinsten Wirkung über, von dem ein englischer Mathematiker Folgendes ausspricht: *The Principle of Least Action, in the form commonly given, is an unmeaning proposition.*

Man bezeichne durch T die lebendige Kraft eines Systems von materiellen Punkten

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i^2 + \partial y_i^2 + \partial z_i^2}{\partial t^2}\right)$$

und setze

$$\Sigma(X_i\,\Delta x_i + Y_i\,\Delta y_i + Z_i\,\Delta z_i) = \Delta U,$$

wobei U im Allgemeinen eine Function von der Zeit t sein kann, da Δ auf die von der Zeit unabhängigen Coordinatenänderungen sich bezieht. Aendert man T nach dem Symbol Δ, so erhält man successive

$$\begin{aligned}\Delta T = &\quad \Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t^2}.\,\Delta\,\partial x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t^2}.\,\Delta\,\partial y_i + \frac{\partial z_i}{\partial t^2}.\,\Delta\,\partial z_i\right)\\ = &\quad \Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t^2}.\,\partial\,\Delta x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t^2}.\,\partial\,\Delta y_i + \frac{\partial z_i}{\partial t^2}.\,\partial\,\Delta z_i\right)\\ = &\frac{\partial}{\partial t}\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}.\,\Delta x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t}.\,\Delta y_i + \frac{\partial z_i}{\partial t}.\,\Delta z_i\right)\\ &-\Sigma m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.\,\Delta x_i + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}.\,\Delta y_i + \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}.\,\Delta z_i\right),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}&\Sigma m_i\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.\,\Delta x_i + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}.\,\Delta y_i + \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}.\,\Delta z_i\right)\\ 28)\qquad &= \frac{\partial}{\partial t}\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t^2}.\,\Delta x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t^2}.\,\Delta y_i + \frac{\partial z_i}{\partial t^2}.\,\Delta z_i\right) - \Delta T.\end{aligned}$$

Infolge dessen nimmt die Gleichung 27) die Form

$$-\Delta\,\Sigma(P_i p_i) = 2\left\{\Delta U + \Delta T - \frac{\partial}{\partial t}\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}.\,\Delta x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t}.\,\Delta y_i + \frac{\partial z_i}{\partial t}.\,\Delta z_i\right)\right\}$$

an. Multiplicirt man diese Gleichung, welche immer als positiv zu betrachten ist, mit ∂t und integrirt beide Theile derselben zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = t_1$, welche zwei bestimmten Lagen des Systems im Raume entsprechen, so dass an den Grenzen

$$\Delta x_i = 0, \quad \Delta y_i = 0, \quad \Delta z_i = 0,$$

so erhält man

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Delta(P_i p_i).\,\partial t = 2\int_{t_0}^{t_1}(\Delta U + \Delta T).\,\partial t;$$

da aber Δ sich auf eine von der Zeit unabhängige Aenderung bezieht, so kann man die obige Gleichung in die Form

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Delta(P_i p_i).\,\partial t = 2.\,\Delta\int_{t_0}^{t_1}(U + T).\,\partial t$$

bringen. Diese Gleichung drückt den Zusammenhang zwischen dem sogenannten Princip der kleinsten Wirkung und dem der kleinsten verlorenen Arbeit aus und erklärt uns die dynamische Bedeutung des Ausdruckes im rechten Theile der obigen Gleichung. Da $\Delta(P_i p_i)$ bei der Verschiebung, welche in Verbindung mit der wirklichen möglich wird, keinen negativen Werth annimmt, so ersehen wir, dass

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (U+T) . \partial t$$

bei derselben Verschiebung keinen positiven Werth annimmt. In diesem Sinne könnte man das Princip der kleinsten Wirkung genauer als das der grössten Wirkung nennen, obgleich die beiden Bezeichnungen als keine streng genauen betrachtet werden können und in Bezug auf ihre Bedeutung in Verwirrung bringen.

Betrachtet man den Ausdruck

$$\int_{t_0}^{t_1} (U+T) . \partial t$$

nur als solchen, der bei der Verschiebung, welche in Verbindung mit der wirklichen möglich wird, negative Zunahmen erleidet, so ist man im Stande, die Bewegungsgleichungen eines Systems materieller Punkte regelmässig auch für den Fall abzuleiten, wo die Bedingungen von der Zeit abhängen und mittelst Gleichungen und Ungleichheiten ausgedrückt werden. In der That, nach dem eben Gesagten können

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (U+T) . \partial t \quad \text{oder} \quad \int_{t_0}^{t_1} (\Delta U + \Delta T) . \partial t$$

bei den Verrückungen, welche die Functionen 16) positiv und gleich Null und die Functionen 17) gleich Null machen, keinen positiven Werth annehmen. Führt man in das obige Integral den Werth von ΔU

$$\Sigma (X_i \Delta x_i + Y_i \Delta y_i + Z_i \Delta z_i)$$

und den Ausdruck von ΔT nach der Gleichung 28) ein, so erhält man

$$29) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Sigma \left[\left(X_i - m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) . \Delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \right) . \Delta y_i \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(Z_i - m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \right) . \Delta z_i \right] \right\} \partial t,$$

da die Summe

$$\Sigma m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} . \Delta x_i + \frac{\partial y_i}{\partial t} . \Delta y_i + \frac{\Delta z_i}{\partial t} . \Delta z_i \right)$$

an den Grenzen des Intervalls Null wird. Damit der Ausdruck 29) bei den Verrückungen, welche die Functionen 16) positiv oder gleich Null und die Functionen 17) gleich Null machen, keinen positiven Werth annehme, ist es nothwendig und genügend, dass für alle beliebigen Verrückungen die Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1=1}\Big\{\Sigma\Big[\Big(X_i-m_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\Big).\Delta x_i+\Big(Y_i-m_i\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}\Big).\Delta y_i+\Big(Z_i-m_i\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2}\Big).\Delta z_i\Big]$$
$$+\lambda'\Sigma\Big[\frac{\partial L'}{\partial x_i}.\Delta x_i+\frac{\partial L'}{\partial y_i}.\Delta y_i+\frac{\partial L'}{\partial z_i}.\Delta z_i\Big]+\dots$$
$$+\mu'\Sigma\Big[\frac{\partial M'}{\partial x_i}.\Delta x_i+\frac{\partial M'}{\partial y_i}.\Delta y_i+\frac{\partial M'}{\partial z_i}.\Delta z_i\Big]+\dots\Big\}\partial t$$

gelte, wobei $\lambda', \lambda'', \dots \mu', \mu'', \dots$ unbestimmte Factoren sind, von denen $\lambda', \lambda'', \dots$ immer positiv bleiben. Die obige Gleichung zerlegt sich wegen der Willkürlichkeit von Δx_i, Δy_i, Δz_i in $3n$ Gleichungen 25). Wenn der Ausdruck 29) bei den Verrückungen, welche die Functionen 16) positiv und gleich Null und die Functionen 17) gleich Null machen, nur positive Werthe annehmen könnte, so würden wir zum falschen Schlusse kommen, dass die Factoren $\lambda', \lambda'', \dots$ negativ sein müssen.

XIV.

Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme.

Von

H. Thieme,

Dr. phil.

Nachdem durch die Untersuchungen von Cremona* und Frahm** bekannt ist, dass ein Netz von Curven n^{ter} Ordnung für $n > 2$ und bei drei Dimensionen schon ein Netz von Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen sich nicht als Netze erster Polaren für eine Curve, resp. Fläche der nächsthöheren Ordnung auffassen lassen, ergiebt sich die Aufgabe, allgemein Gebilde von 1, 2 und 3 Dimensionen, also Systeme von Punktgruppen (binären Formen) einer Geraden, Curven einer Ebene und Flächen zu construiren, welche für ein derselben Dimension angehöriges Gebilde der nächsten Ordnung Systeme erster Polaren sind. Diese Aufgabe löst sich für die verschiedenen Dimensionen in gleichmässiger Weise mit Benutzung des Begriffs der gemischten Polaren.

Mit der Construction der Polarsysteme hängt eine andere Frage zusammen. Sie bietet die Möglichkeit, die geometrischen Gebilde und beliebige Mannigfaltigkeiten derselben rein geometrisch und in allgemeiner Weise zu definiren und zu behandeln. Da die bisherige sogenannte synthetische Definition der geometrischen Gebilde durch Büschel und Bündel zu einer genügenden Definition der Projectivität, auf die sie sich stützt, die Polarentheorie schwer entbehren kann, diese aber bis jetzt noch nicht unabhängig von der Algebra entwickelt ist,*** so scheint der Versuch, für die geometrischen Untersuchungen eine andere Definition als Ausgangspunkt zu wählen, an und für sich nicht unberechtigt zu sein. Sonst darf vielleicht noch erwähnt werden, dass durch Construction der Polarsysteme auch die Gebilde einer Dimension, die binären

---

* Ebene Curven, S. 265 flg.

** Mathem. Annalen, Bd. VII S. 635—638. Vergl. auch Toeplitz, *ibid.*, Bd. XI S. 434—463.

*** Vergl. Schur, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik XXII, 4, S. 220—233.

Formen, sich in allgemeiner Weise und unabhängig von Algebra und der Geometrie anderer Dimensionen behandeln lassen.

Da sich die Lösung des vorliegenden Problems für alle Dimensionen gleich gestaltet, behandle ich es sofort für drei Dimensionen; die Uebertragung auf eine und zwei Dimensionen ist ohne Weiteres ersichtlich.

Unter der Voraussetzung, die ja für $n = 2$ erfüllt ist,* dass die entsprechenden Constructionen und Eigenschaften für Flächen n^{ter} Ordnung abgeleitet sind, construire ich das Polarnetz einer Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sodann ein Büschel, ein Bündel und eine beliebige Mannichfaltigkeit von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung und weise an diesen Gebilden die zunächstliegenden Eigenschaften nach. So beweise ich, immer unabhängig von Algebra, dass durch $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - 1$ Punkte im Allgemeinen nur eine Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung geht und dass eine Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Geraden, die ihr nicht ganz angehört, höchstens $(n+1)$ Punkte gemein hat.

---

§ 1.

Im Folgenden bezeichnen $a, b, c, \ldots$ Punkte, (a, b) die Punktreihe der durch a und b gehenden Geraden, (a, b, c) das Punktfeld der durch a, b und c gehenden Ebene, A^m, B^m, C^m, ... Flächen m^{ter} Ordnung, (A^m, B^m) das durch A^m und B^m constituirte Büschel etc., A_x^{m-1} die erste Polare des Punktes x für eine gegebene oder gesuchte Fläche A^m, A_{xy}^{m-2} die Polare von y für A_x^{m-1} etc., $A_{x^p}^{m-p}$ die p^{te} Polare von x für A^m.

Ich ordne nun einem beliebigen Punkte a des Raumes eine beliebige Fläche (oder allgemein ein Polarsystem) n^{ter} Ordnung, sie sei A_a^n, zu. Einem Punkte b entspricht für A_a^n als Polare A_{ab}^{n-1}. Jetzt suche ich eine Fläche A_b^n, für welche a und A_{ab}^{n-1} Pol und Polare sind, und ordne sie dem Punkte b zu. Dadurch ist jedem Punkte x von (a, b) eine Fläche von (A_a^n, A_b^n) zugeordnet. Dem Punkte x entspricht für A_a^n die Polare A_{ax}^{n-1}; da nun A_{aa}^{n-1}, A_{ab}^{n-1}, A_{ax}^{n-1} einem Büschel angehören, giebt es in (A_a^n, A_b^n) eine Fläche A_x^n, für welche a und A_{ax}^{n-1} Pol und Polare sind. Ordnen wir A_x^n dem Punkte x zu, so ist für jedes x $A_{ax}^{n-1} \equiv A_{xa}^{n-1}$. Ich behaupte, dass auch für ein beliebiges Paar von Punkten x, y in (a, b) $A_{xy}^{n-1} \equiv A_{yx}^{n-1}$ ist. Die Polaren des Punktes x für (A_a^n, A_b^n) bilden das Büschel $(A_{ax}^{n-1}, A_{bx}^{n-1})$, dem natürlich auch A_{yx}^{n-1} angehört. Da zu $(A_{ax}^{n-1}, A_{bx}^{n-1})$ auch A_{xx}^{n-1} und $A_{ax}^{n-1} \equiv A_{xa}^{n-1}$ gehören, so erhält man $(A_{ax}^{n-1}, A_{bx}^{n-1})$ auch, wenn

---

* Schroeter, Kegelschnitte, Abschn. IV; Beyer, Inauguraldiss., Breslau, 1868 u. A.

man zu (a, b) für A_x^n die Polaren sucht; also gehört auch A_{xy}^{n-1} dem Büschel $(A_{ax}^{n-1}, A_{bx}^{n-1})$ an.

In gleicher Weise folgt, dass dem Büschel $(A_{ay}^{n-1}, A_{by}^{n-1})$ A_{xy}^{n-1} und A_{yx}^{n-1} zugehören. Da nun $(A_{ax}^{n-1}, A_{bx}^{n-1})$ und $(A_{ay}^{n-1}, A_{by}^{n-1})$ nicht identisch sind, also höchstens eine Fläche gemeinsam haben, muss $A_{xy}^{n-1} \equiv A_{yx}^{n-1}$ sein.

Aus dem Vorhergehenden folgt noch, dass (A_a^n, A_b^n) nicht nur eindeutig, sondern auch projectivisch (a, b) zugeordnet ist; denn die ersten Polaren von x auf (a, b) für (A_a^n, A_b^n) sind mit den Polaren von (a, b) für A_x^n, die ein zu (a, b) projectivisches Büschel bilden, identisch.

Einem Punkte c, welcher nicht in (a, b) liegt, entsprechen als Polaren für (A_a^n, A_b^n) die Flächen $(A_{ac}^{n-1}, A_{bc}^{n-1})$. Irgend zwei dieser Flächen A_{xc}^{n-1} und A_{yc}^{n-1} genügen in Bezug auf die Punkte x und y der Eigenschaft der gemischten Polaren. Es ist nämlich $A_{xcy}^{n-2} \equiv A_{xyc}^{n-2} \equiv A_{yxc}^{n-2} \equiv A_{ycx}^{n-2}$, d. h. A_{xcy}^{n-2}, die Polare von y für A_{xc}^{n-2} identisch mit A_{ycx}^{n-2}, der Polare von x für A_{yc}^{n-2}. $(A_{ac}^{n-1}, A_{bc}^{n-1})$ und (a, b) lassen sich also für Flächen n^{ter} Ordnung als Polaren und Pole auffassen. Ordne ich eine dieser Flächen A_c^n dem Punkte c zu, so ist gemäss der Definition von A_c^n für jedes x in (a, b) $A_{xc}^{n-1} \equiv A_{cx}^{n-1}$, A_c^n genügt mit jedem Elemente von (A_a^n, A_b^n) der Eigenschaft der gemischten Polaren.

Die vorstehende Betrachtung verliert ihre Giltigkeit für $n = 2$; sie lässt sich dann durch folgende ersetzen. In diesem Falle bilden die Polaren eines Punktes x in (a, b) ein Ebenenbüschel $(A^1{}_{ax}, A^1{}_{bx})$; eine Ebene dieses Büschels, sie sei $A^1{}_{yx} \equiv A^1{}_{xy}$, geht durch c. Es sind dann c und x für $A^2{}_y$, c und y für $A^2{}_x$ conjugirte Punkte. Die Polaren von c für $(A^2{}_a, A^2{}_b)$ bilden ein zu (a, b) projectivisches Büschel $(A^1{}_{ac}, A^1{}_{bc})$; in diesem geht $A^1{}_{xc}$ durch y und $A^1{}_{yc}$ durch x. (a, b) und $(A^1{}_{ac}, A^1{}_{bc})$ liegen hiernach involutorisch; denn geht die einem Punkte x zugeordnete Ebene durch y, so geht die dem Punkte y zugeordnete durch x. Es lassen sich also, wie im allgemeinen Falle, die Punkte von (a, b) und die entsprechenden Elemente von $(A^1{}_{ac}, A^1{}_{bc})$ als Pole und Polaren einer Fläche, hier natürlich zweiter Ordnung, auffassen; ebenso besteht allgemein die Beziehung $A^1{}_{xc} \equiv A^1{}_{cx}$.

Hiernach gilt, da durch die polarische Zuordnung von a und b zu A_a^n und A_b^n die ganze Punktreihe (a, b) polarisch dem Büschel (A_a^n, A_b^n) zugeordnet ist, für $n \gtreqless 2$ der im Folgenden mehrfach gebrauchte Satz: Wenn eine Fläche A_u^n mit zwei Flächen eines Büschels (A_v^n, A_w^n), welches in sich der Eigenschaft der gemischten Polaren genügt, dieser Eigenschaft der gemischten Polaren genügt, so genügt A_u^n mit jedem Elemente von (A_v^n, A_w^n) dieser Eigenschaft.

Jetzt verbinde ich c mit einem Punkte x von (a, b) durch eine Gerade und ordne einem beliebigen Punkte z in (c, x) diejenige Fläche A_z^n aus (A_c^n, A_x^n) zu, für welche $A_{cz}^{n-1} \equiv A_{zc}^{n-1}$ ist. Für zwei Flächen A_z^n und A_u^n in (A_c^n, A_x^n) besteht dann auch die Beziehung $A_{uz}^{n-1} \equiv A_{zu}^{n-1}$. Irgend eine Fläche A_y^n aus (A_a^n, A_b^n) genügt mit A_c^n und A_x^n der Beziehung der gemischten Polaren, folglich nach dem soeben ausgesprochenen Satze mit dem ganzen Büschel (A_c^n, A_x^n), d. h. es ist allgemein $A_{zy}^{n-1} \equiv A_{yz}^{n-1}$. Denkt man für das Büschel der Verbindungslinien, die von c nach (a, b) gehen, dieselbe Construction wie für (c, x) ausgeführt, so ist jedem Punkte der Ebene (a, b, c) eine Fläche des Bündels (A_a^n, A_b^n, A_c^n) zugeordnet; umgekehrt ist jede Fläche aus (A_a^n, A_b^n, A_c^n) einem Punkte in (a, b, c) zugeordnet, da sie mit A_c^n und einer Fläche von (A_a^n, A_b^n) zu einem Büschel gehört. Irgend zwei Flächen A_u^n und A_v^n aus (A_a^n, A_b^n, A_c^n) genügen der Eigenschaft der gemischten Polaren; denn hat (c, u) mit (a, b) den Punkt x gemeinsam, so ist, wie eben bewiesen, $A_{vx}^{n-1} \equiv A_{xv}^{n-1}$ und $A_{vc}^{n-1} \equiv A_{cv}^{n-1}$ nach Construction. A_v^n steht also mit dem Büschel (A_c^n, A_x^n), zu dem A_u^n gehört, in der Beziehung der gemischten Polaren, es ist also auch $A_{uv}^{n-1} \equiv A_{vu}^{n-1}$.

Die Flächen, welche einer beliebigen Punktreihe (u, v) in (a, b, c) zugeordnet sind, bilden ein Büschel. Ist nämlich w ein Punkt von (u, v) und A_w^n die nach Früherem zugeordnete Fläche in (A_a^n, A_b^n, A_c^n), so ist $A_{uw}^{n-1} \equiv A_{wu}^{n-1}$. Gehörte nun A_w^n nicht zu (A_u^n, A_v^n), so könnte man in diesem eine Fläche $A_{w'}^n$ so construiren, dass $A_{w'u}^{n-1} \equiv A_{uw'}^{n-1}$ ist. Die Fläche $A_{w'}^n$, die ja zu (A_a^n, A_b^n, A_c^n) gehört, ist schon einem andern Punkte w' zugeordnet, für welchen $A_{uw'}^{n-1} \equiv A_{w'u}^{n-1}$ ist. Es muss also $A_{uw}^{n-1} \equiv A_{uw'}^{n-1}$, $w \equiv w'$ und $A_w^n \equiv A_{w'}^n$ sein, A_w^n dem Büschel (A_u^n, A_v^n) angehören. Die Beziehung zwischen (u, v) und (A_u^n, A_v^n) ist aus demselben Grunde, den ich bei (a, b) und (A_a^n, A_b^n) angegeben habe, eine projectivische. Wenn nun aber einer beliebigen Punktreihe (u, v) in (a, b, c) ein projectivisches Büschel in (A_a^n, A_b^n, A_c^n) entspricht, so ist das ganze Punktfeld (a, b, c) auf das Bündel (A_a^n, A_b^n, A_c^n) projectivisch bezogen.

Nachdem so in gewünschter Weise die Beziehung zwischen (a, b, c) und (A_a^n, A_b^n, A_c^n) festgelegt ist, nehme ich einen beliebigen Punkt d ausserhalb (a, b, c) hinzu. Die Polaren von d für (A_a^n, A_b^n, A_c^n) bilden das Bündel $(A_{ad}^{n-1}, A_{bd}^{n-1}, A_{cd}^{n-1})$. Für irgend zwei Flächen A_{xd}^{n-1} und A_{yd}^{n-1} aus $(A_{ad}^{n-1}, A_{bd}^{n-1}, A_{cd}^{n-1})$ besteht die Beziehung $A_{xdy}^{n-2} \equiv A_{ydx}^{n-2}$, denn $A_{xdy}^{n-2} \equiv A_{xyd}^{n-2} \equiv A_{yxd}^{n-2} \equiv A_{ydx}^{n-2}$. Es lassen sich also die Punkte von (a, b, c) und die entsprechenden Flächen von $(A_{ad}^{n-1}, A_{bd}^{n-1}, A_{cd}^{n-1})$ als Pole und Polaren für Flächen n^{ter} Ordnung auffassen. Für $n = 2$ folgt nach dem vorhin für (A^1_{ac}, A^1_{bc}) bewiesenen Satze, dass irgend eine Punktreihe (u, v) aus (a, b, c) und das entsprechende Büschel in $(A^1_{ad}, A^1_{bd}, A^1_{cd})$ involutorische Lage haben, dass also hier (a, b, c) und $(A^1_{ad}, A^1_{bd}, A^1_{cd})$ sich als Pole und Polaren für Flächen zweiter Ordnung auffassen lassen.

Ist eine der so möglichen Flächen n^{ter} Ordnung $(n \geq 2)$ A^n_d, so besteht für A^n_d und eine beliebige Fläche A^n_u aus (A^n_a, A^n_b, A^n_c) die Beziehung $A^{n-1}_{ud} \equiv A^{n-1}_{du}$.

Wie wir die Punkte von (a, b) durch Geraden mit c verbunden haben, so ziehen wir jetzt Geraden von d nach den Punkten von (a, b, c) und ordnen einem Punkte z auf (u, d), wo u ein Punkt von (a, b, c) ist, die Fläche A^n_z in (A^n_d, A^n_u) zu, für welche $A^{n-1}_{zd} \equiv A^{n-1}_{dz}$ ist. Dadurch ordnen wir den Punkten des Raumes die Flächen des Gebüsches $(A^n_a, A^n_b, A^n_c, A^n_d)$ zu. Für dieses beweisen wir, wie beim Bündel (A^n_a, A^n_b, A^n_c), dass allgemein $A^{n-1}_{uv} \equiv A^{n-1}_{vu}$ ist, wo u und v beliebige Punkte des Raumes sind; ebenso, dass die den Punkten einer beliebigen Geraden (u, v) zugeordneten Flächen ein Büschel bilden. Dadurch ist zugleich bewiesen, dass die den Punkten einer beliebigen Ebene zugeordneten Flächen ein Bündel bilden und dass die Punkte des Raumes projectivisch den Elementen des Gebüsches $(A^n_a, A^n_b, A^n_c, A^n_d)$ zugeordnet sind.

Fassen wir die Schnittpunkte einer Geraden und die Schnittcurven einer Ebene mit den Polaren ihrer Punkte ins Auge, so folgt mit Rücksicht auf die Betrachtungen der Geraden und der Ebene, die zu den vorstehenden analog sind, dass durch das construirte Polarsystem von drei Dimensionen auf jeder Geraden und in jeder Ebene ein Polarsystem $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung einer, resp. zweier Dimensionen bestimmt ist.

Das construirte Polarsystem von drei Dimensionen bezeichne ich durch A^{n+1}.

Die Art unserer Construction von A^{n+1} gestattet leicht, Elemente anzugeben, durch welche A^{n+1} bestimmt ist.

Dem Punkte a kann ich eine beliebige Fläche A^n_a n^{ter} Ordnung zuordnen; A^n_a kann ich durch Paare conjugirter Punkte,* deren Anzahl ich durch $f(n)$ bezeichne, bestimmen. Mit A^n_a kennt man von A^n_b schon A^{n-1}_{ba}, die Polare zu a, oder $f(n-1)$ Paare conjugirter Punkte; zur Bestimmung von A^n_b kann man also noch $f(n) - f(n-1)$ Paare conjugirter Punkte beliebig wählen. A^n_a und A^n_b sind also durch $2f(n) - f(n-1)$ Punktepaare bestimmt. Von A^n_c kennt man die Polaren zu a und b, A^{n-1}_{ca} und A^{n-1}_{cb} durch A^n_a und A^n_b; A^{n-1}_{ca} und A^{n-1}_{cb} vertreten als Be-

* Conjugirt heissen hierbei zwei Punkte, wenn der eine zum andern harmonischer Mittelpunkt ist.

stimmungsstücke für A^n_c $f(n-1)+\{f(n-1)-f(n-2)\}=2f(n-1)-f(n-2)$ Paare conjugirter Punkte; um A^n_c vollständig zu bestimmen, müssen also $f(n)-2f(n-1)+f(n-2)$ Punktepaare gegeben werden. A^n_a, A^n_b und A^n_c sind durch $3f(n)-3f(n-1)+f(n-2)$ Punktepaare bestimmt. Von A^n_d kennt man die Polaren zu drei Punkten, a, b, c; als solche vertreten diese $3f(n-1)-3f(n-2)+f(n-3)$ Punktepaare; zur Bestimmung von A^n_d darf man also noch $f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)$ Punktepaare wählen. Da nun A^{n+1} durch A^n_a, A^n_b, A^n_c, A^n_d bestimmt ist, so ist

$$f(n+1)=4f(n)-6f(n-1)+4f(n-2)-f(n-3).$$

Ist für $p \overline{<} n$ $f(p)=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-1$, so folgt durch einfache Umformung $f(n+1)=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$. Nun gilt die Formel $f(p)=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-1$ zunächst für $p=1$ und $p=2$. Für $p=3$ folgt nach den obigen Betrachtungen, dass $A^2{}_a$ durch 9, $A^2{}_b$ dann durch 6, $A^2{}_c$ durch 3 und $A^2{}_d$ durch 1 Punktepaar, A^3 also durch 19 derselben bestimmt ist; für $p=4$ folgt, dass $A^3{}_a$ durch 19, $A^3{}_b$ durch $19-9$, $A^3{}_c$ durch $19-2.9+3$ und $A^3{}_d$ durch 1, folglich A^4 durch 34 Punktepaare bestimmt ist. Die Formel für $f(p)$ bleibt auch in den Fällen $p=3$, $p=4$ und damit in allen Fällen giltig.

Zur Bestimmung von A^{n+1} lassen sich also $\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$ unabhängige Elemente angeben. Die Gesammtheit der Polarsysteme $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden infolge dessen mindestens eine $\left\{f(n+1)=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1\right\}$-fache Mannichfaltigkeit. Wir werden nun der Reihe nach die 1-, 2-, ... $f(n+1)$-fache lineare Mannichfaltigkeit construiren und zeigen, dass die Gesammtheit der Polarsysteme $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine lineare $f(n+1)$-fache Mannichfaltigkeit bilden.

§ 2.

Zunächst gebe ich zwei Polarsysteme A^{n+1} und B^{n+1}. Ihre Polaren zu einem Punkte x, also A^n_x, B^n_x, bestimmen ein Büschel (A^n_x, B^n_x); im Besondern kann sich dies Büschel, wenn $A^n_x \equiv B^n_x$ ist, auf die unendlich oft zu zählende Fläche A^n_x reduciren. Durchwandert x eine Punktreihe (a, b), so erhält man die projectivischen Büschel (A^n_a, A^n_b), (B^n_a, B^n_b) und die Unendlichkeit von Büscheln (A^n_a, B^n_a), (A^n_b, B^n_b), (A^n_x, B^n_x) etc. Diese zweifache Unendlichkeit von Flächen werde durch Σ^n bezeichnet. Wenn A^n_a, A^n_b, B^n_a, B^n_b nicht einer niederen Mannichfaltigkeit angehören, so ist Σ^n in der durch A^n_a, A^n_b, B^n_a, B^n_b bestimmten dreifachen Mannichfaltigkeit von Flächen das, was eine Regelfläche zweiter Ordnung im Punktraume ist. Vermag man, wie wir voraussetzen, eine dreifache Mannichfaltigkeit von Flächen n^{ter} Ordnung zu construiren und zu beweisen, dass in ihr eine zweifache und eine einfache lineare Mannichfaltigkeit ein oder alle Elemente gemein haben, so ist es ohne Weiteres möglich, für diese dreifache Mannichfaltigkeit die zu den Sätzen des Punktraumes entsprechenden Sätze zu entwickeln. Es giebt mithin in Σ^n ausser (A^n_a, B^n_a), (A^n_b, B^n_b), (A^n_x, B^n_x) etc. noch eine zweite Reihe von Büscheln, zu denen (A^n_a, A^n_b) und (B^n_a, B^n_b) gehören; jede Fläche in Σ^n gehört zwei Büscheln von Σ^n an.

Sind A^n_a, A^n_b, B^n_a, B^n_b Elemente einer zweifach unendlichen Mannichfaltigkeit, so ist Σ^n entweder das Analogon des Tangentenbüschels eines Kegelschnittes oder zweier Strahlenbüschel. Wie nun durch einen Punkt der zugehörigen Ebene zwei Tangenten eines Kegelschnittes oder zwei Strahlen zweier Strahlbüschel gehen, so liegt auch jede Fläche von Σ^n in zwei, Σ^n gewissermassen berührenden Büscheln.*

Jetzt suche ich zu a die ersten Polaren für die Elemente von Σ^n; dadurch erhalte ich ein analoges Gebilde Σ^{n-1} von Flächen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Da für alle Punkte x auf (a, b) $A^{n-1}_{xa} \equiv A^{n-1}_{ax}$ und $B^{n-1}_{xa} \equiv B^{n-1}_{ax}$ ist, so erhalte ich dasselbe Σ^{n-1}, wenn ich zu den Punkten von (a, b) für (A^n_a, B^n_a) die Polaren suche. Eine Fläche Y^{n-1}_{xa}, die Polare von a für eine Fläche Y^n_x aus (A^n_x, B^n_x), liegt nun mit A^{n-1}_{xa}, B^{n-1}_{xa} in einem Büschel und noch in einem zweiten zu Σ^{n-1} gehörigen, resp. Σ^{n-1} berührenden Büschel. Letzteres hat mit $(A^{n-1}_{aa}, B^{n-1}_{aa})$ eine Fläche, sie sei Y^{n-1}_{aa}, gemein, so dass Y^n_x und Y^n_a einem Büschel von Σ^n angehören. Die Fläche Y^{n-1}_{xa} muss ich auch durch die zweite Construction erhalten. Da sie zu $(A^{n-1}_{xa}, B^{n-1}_{xa})$ oder $(A^{n-1}_{ax}, B^{n-1}_{ax})$ gehört, muss sie die Polare von x für eine Fläche in (A^n_a, A^n_b) sein; da sie ferner mit Y^{n-1}_{aa} zu einem Büschel von Σ^{n-1} gehört, muss Y^{n-1}_{xa} die Polare von x für die vorhin erhaltene Fläche Y^n_a oder Y^{n-1}_{ax} sein; d. h. wenn Y^n_a zu (A^n_a, B^n_a), Y^n_x zu (A^n_x, B^n_x) und Y^n_a mit Y^n_x zu einem Büschel zweiter Art von Σ^n gehört, so ist für jedes x $Y^{n-1}_{xa} \equiv Y^{n-1}_{ax}$.

Ordne ich also jedem Punkte x von (a, b) die Fläche Y^n_x in (A^n_x, B^n_x) zu, für welche $Y^{n-1}_{xa} \equiv Y^{n-1}_{ax}$ ist, so bilden die (a, b) zugeordneten Flächen

* Man kann die vorliegende Frage auch direct auf die entsprechende für Regelflächen und Kegel zweiten Grades zurückführen, wenn man zu einem beliebigen Punkte des Raumes für alle auftretenden Flächen n^{ter} Ordnung die letzten Polaren sucht.

ein Büschel, welches durch Y_a^n bestimmt ist; (a, b) und dies Büschel (Y_a^n, Y_b^n) lassen sich als Pole und Polaren für Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ansehen (§ 1).

Diese Eigenschaft in der letzten Form, wie sie für die weitere Entwickelung nöthig ist, gilt für die bisher nicht betrachteten Fälle, wo A_a^n, A_b^n, B_a^n, B_b^n Elemente desselben Büschels sind, von selbst, für sie ist also keine besondere Betrachtung nöthig.

Die Polaren eines Punktes c ausserhalb (a, b) für die Elemente von Σ^n bilden ein System Ω^{n-1}. Da nun $A_{ac}^{n-1} \equiv A_{ca}^{n-1}$, $B_{ac}^{n-1} \equiv B_{ca}^{n-1}$, $A_{bc}^{n-1} \equiv A_{cb}^{n-1}$, $B_{bc}^{n-1} \equiv B_{cb}^{n-1}$ ist, so erhält man Ω^{n-1} auch, wenn man für die Punkte von (a, b) die Polaren zu (A_c^n, B_c^n) sucht. Ist nun Y_c^n die Fläche von (A_c^n, B_c^n), für welche $Y_{ac}^{n-1} \equiv Y_{ca}^{n-1}$ ist, so bilden die Polaren von (a, b) für Y_c^n ein Büschel von Ω^{n-1}, das nicht mit (A_{ac}^n, B_{ac}^n) identisch ist, ebenso die Polaren von c für (Y_a^n, Y_b^n). Da beide das Element Y_{ac}^{n-1} gemein haben und keins von ihnen mit $(A_{ac}^{n-1}, B_{ac}^{n-1})$ zusammenfällt, so müssen sie wegen der Eigenschaften von Ω^{n-1} unter einander identisch sein. Die beiden Flächen Y_{xc}^{n-1} und Y_{cx}^{n-1} in diesem Büschel müssen ebenfalls identisch sein, da beide noch dem Büschel $(A_{xc}^{n-1}, B_{xc}^{n-1})$ angehören. Es ist also für jedes x auf (a, b) $Y_{xc}^{n-1} \equiv Y_{cx}^{n-1}$.

Ordnet man also dem Punkte a eine Fläche Y_a^n aus (A_a^n, B_a^n) und damit der Punktreihe (a, b) das Büschel (Y_a^n, Y_b^n) als Polaren zu, so giebt es in (A_c^n, B_c^n) eine Fläche Y_c^n, welche mit jedem Elemente von (Y_a^n, Y_b^n) der Eigenschaft der gemischten Polaren genügt.

Ist nun x ein Punkt von (a, b), y ein Punkt von (x, c), so giebt es nach den bei Σ^n bewiesenen Eigenschaften, die hier auf das entsprechende, zu (x, c) gehörige Gebilde anzuwenden sind, eine Fläche Y_y^n in (Y_c^n, Y_x^n), welche zu (A_y^n, B_y^n) gehört und mit Y_c^n, Y_x^n und wegen der Beziehung von Y_c^n zu (Y_a^n, Y_b^n) nach § 1 auch mit den Elementen dieses Büschels der Eigenschaft der gemischten Polaren genügt. Ordnen wir Y_y^n dem Punkte y zu und lassen dann y und x variiren, so ist den Punkten von (a, b, c) ein projectivisches Bündel zugeordnet, und zwar nach den Betrachtungen des § 1 in polarischer Weise.

Jetzt ordne ich einem Punkte d ausserhalb (a, b, c) eine Fläche Y_d^n aus (A_d^n, B_d^n) so zu, dass $Y_{da}^{n-1} \equiv Y_{ad}^{n-1}$ ist. Dann genügt nach dem Vorhergehenden Y_d^n mit den Elementen jedes Büschels aus (Y_a^n, Y_b^n, Y_c^n), dem Y_a^n angehört, d. h. mit allen Elementen von (Y_a^n, Y_b^n, Y_c^n) der Beziehung der gemischten Polaren. Es lässt sich infolge dessen, wie es soeben bei einem Punkte y in (a, b, c) möglich war, ihm Y_y^n aus (A_y^n, B_y^n) polarisch zuzuordnen, in derselben Weise einem beliebigen Punkte z des Raumes eine Fläche Y_z^n aus (A_z^n, B_z^n) so zuordnen, dass Y_z^n mit Y_a^n, Y_b^n, Y_c^n, Y_d^n der Bedingung der gemischten Polaren genügt. Nach Allem, was vorhergeht, ist die Gesammtheit der so den Punkten des Raumes zugeordneten Flächen ein Polargebüsch $(Y_a^n, Y_b^n, Y_c^n, Y_d^n)$. Dies repräsentirt eine Fläche Y^{n+1}.

Dadurch also, dass dem Punkte a eine Fläche Y_a^n zugeordnet wird, wird den Punkten des Raumes ein Polargebüsch zugeordnet. Ordnet man dem Punkte a nach und nach alle Flächen von (A_a^n, A_b^n) zu, so erhält man eine Unendlichkeit von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; die Gesammtheit dieser bezeichne ich als das Büschel (A^{n+1}, B^{n+1}). Lässt man Y_a^n das Büschel (A_a^n, A_b^n) durchlaufen, so beschreibt, wie aus der Natur von Σ^n ersichtlich ist, Y_b^n und ebenso Y_c^n, Y_d^n etc. ein projectivisches Büschel. Die Polaren zweier Punkte x und y in Bezug auf ein Flächenbüschel $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung (A^{n+1}, B^{n+1}) bilden zwei projectivische Flächenbüschel n^{ter} Ordnung, also $(A_x^n, B_x^n) \,\overline{\wedge}\, (A_y^n, B_y^n)$. Ein Gebilde einfacher Mannichfaltigkeit nennt man projectivisch zu (A^{n+1}, B^{n+1}), wenn es zu einem und damit zu jedem Polarenbüschel projectivisch ist.

(Schluss folgt.)

XV.

Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse infolge ihrer Oberflächenspannung.

Von

Dr. Arnold Giesen.

---

1. In dem Jahrgange 1876 dieser Zeitschrift, S. 57, ist eine Abhandlung des Verfassers veröffentlicht, betreffend „Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse, deren Theilchen nur ihrer eigenen Anziehung unterworfen sind". Es ist dort gezeigt worden, dass es unter den möglichen Oscillationen auch solche giebt, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält, dessen Axen sich abwechselnd verlängern und verkürzen, mit der Beschränkung jedoch, dass die Amplituden als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet und alle Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Es wurde aber zugleich (S. 62) hervorgehoben, dass die betrachtete Bewegung nur auf Flüssigkeitskugeln von grossen Halbmessern Anwendung findet, indem nur bei grossen Massen die Wirkung der Oberflächenspannung gegen die Wirkung der Attractionskräfte zurücktritt, während umgekehrt bei kleinen Flüssigkeitsmassen die Attractionskräfte gegen die Oberflächenspannung vernachlässigt werden können.

Im Anschlusse an den erwähnten Aufsatz möge nun hier eine ähnliche Untersuchung folgen über eine der Schwere (d. h. der Anziehung der Erde) entzogene kleine Flüssigkeitskugel (einen Flüssigkeitstropfen), auf welche blos die Molecularkräfte wirken; im Gleichgewichtszustande muss die Oberfläche wieder sphärisch sein. Wird dann aber der kugelige Flüssigkeitstropfen einer die Gestalt seiner Oberfläche verändernden Erschütterung ausgesetzt, so entstehen wieder Oscillationen desselben um seine Gleichgewichtsfigur und wir wollen zeigen, dass, so lange diese Oscillationen klein bleiben, es unter anderen auch wieder solche geben kann, bei welchen die Oberfläche in gleicher Annäherung fortwährend als Ellipsoid betrachtet werden kann.

Solche Oscillationen von Flüssigkeitstropfen treten bei mehreren bekannten physikalischen Versuchen ein, z. B. bei dem folgenden Versuche von Plateau. Es werden, wie bekannt, bei diesem Versuche zwei nicht mischbare Flüssigkeiten von gleichem specifischem Gewichte hergestellt, von denen die eine gefärbt ist; bringt man dann eine Quantität der letzteren gefärbten in die ungefärbte Flüssigkeit, so verhält sich dieselbe so, als ob sie der Schwere ganz entzogen wäre, und man kann also die Erscheinungen, die an derselben blos durch die Molecularkräfte hervorgebracht werden, beobachten. Wenn die eingeschlossene Flüssigkeitsmasse ganz frei ist, so nimmt sie stets Kugelgestalt an. Stellt man aber in der umgebenden Flüssigkeit zwei dünne Drahtringe von gleichem Durchmesser senkrecht über einander, so kann man durch Anlehnen des eingeschlossenen Flüssigkeitstropfens an diese demselben auch die Gestalt eines an beiden Enden von Kugelsegmenten geschlossenen Kreiscylinders geben, dessen Gleichgewicht aber nur dann stabil ist, wenn seine Länge seinen Umfang nicht übertrifft. Durch künstlichere Mittel kann nun aber auch ein solcher Cylinder hergestellt werden, dessen Länge seinen Durchmesser vielmal übertrifft; wird derselbe dann sich selbst überlassen, so beginnt er sofort, in gleichen Abschnitten sich abwechselnd einzuschnüren und auszubuchten, bis er zuletzt in einzelne Tropfen zerfällt. Im Moment ihres Entstehens sind diese Tropfen verlängert, und indem sie fortwährend gegen ihre sphärische Gleichgewichtsgestalt hinstreben, entstehen regelmässige Oscillationen, bei welchen dieselben abwechselnd verlängert und abgeplattet erscheinen.

Es ist nun aber an sich für diese Erscheinungen nicht nothwendig, dass der Flüssigkeitstropfen der Schwere entzogen sei; vielmehr werden an einem vollkommen frei fallenden Tropfen dieselben in ganz gleicher Weise auftreten, eben weil die Schwere auf alle Theilchen des Tropfens in ganz gleicher Weise wirkt und sonach die relative Bewegung derselben gegen einander nicht ändert. Diese Oscillationen frei fallender Flüssigkeitstropfen treten nach den Versuchen von Magnus und Savart besonders schön auf, wenn ein Flüssigkeitsstrahl aus einer in einem horizontalen Boden angebrachten kreisförmigen Oeffnung fliesst. In einiger Entfernung von der Oeffnung bilden sich dann an dem Strahle abwechselnd Einschnürungen und Anschwellungen, worauf Zerreissung desselben und Tropfenbildung eintritt. Bei besonders günstigen Verhältnissen durchläuft nun die Oberfläche eines solchen Tropfens in sehr regelmässiger Folge dieselbe Gestaltenreihe, wie sie oben für den Plateau-schen Versuch angegeben wurde; wenn in dem einen Moment der Tropfen verlängert ist, so ist er gleich darauf kugelförmig, dann abgeflächt, dann wieder kugelförmig, verlängert u. s. w.

2. Denken wir uns also eine von einer beliebigen Oberfläche begrenzte Flüssigkeitsmasse. Für ein im Innern derselben gelegenes Theilchen heben sich die von den sämmtlichen umliegenden Theilchen auf dasselbe ausgeübten Molecularanziehungen gerade auf und jedes im Innern

liegende Theilchen können wir also auch als von keiner Kraft angegriffen betrachten. Anders in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche; die Molecularanziehungen, welche die benachbarten Theilchen auf ein in der Oberfläche liegendes Theilchen ausüben, vereinigen sich zu einer gegen die Oberfläche senkrecht gerichteten Resultante, welche verschieden ist, je nach der Gestalt der Oberfläche an der Stelle des betrachteten Theilchens. Sind R_1 und R_2 der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser der Normalschnitte der Oberfläche an dieser Stelle, K und α zwei Constanten, so haben wir für diese Resultirende Q, den sogenannten Cohäsionsdruck, solche auf die Flächeneinheit bezogen:

$$Q = K + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

dabei werden die Krümmungshalbmesser positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die betreffenden Normalschnitte nach aussen convex oder concav sind. Offenbar bezeichnet dabei K den Cohäsionsdruck einer ebenen Oberfläche. Die zu untersuchenden Oscillationen des Flüssigkeitstropfens können wir uns also auch hervorgebracht denken durch normale Druckkräfte gegen die Oberfläche desselben, deren Betrag, auf die Flächeneinheit bezogen, durch die vorstehende Formel dargestellt ist, während auf das Innere desselben keine Kräfte wirken.

Es seien nun, wie in der erwähnten Abhandlung, x_0, y_0, z_0 die Coordinaten eines Theilchens im ursprünglichen Ruhezustande; x, y, z diejenigen desselben Theilchens zu einer beliebigen Zeit t; ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebungen dieses Theilchens zur Zeit t auf die Axen, deren Ursprung im Mittelpunkte des Tropfens liegen soll, so dass also $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$. Ferner sei, wie dort,

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta = \mu_3 z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei zu bemerken, dass μ_1, μ_2, μ_3 als kleine Constanten erster Ordnung betrachtet und alle Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Es wurde nun weiter (S. 58) bewiesen, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Oberfläche des Tropfens fortwährend eine ellipsoidische Gestalt hat, wie man übrigens auch sofort erkennt, wenn man bedenkt, dass für Punkte der ursprünglichen sphärischen Oberfläche die Gleichung besteht: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$, unter R den Halbmesser dieser Oberfläche verstanden; ferner wurde gezeigt (S. 59), dass die „Continuitätsgleichung“*

* Da die Ableitung dieser Form der „Continuitätsgleichung“ in der erwähnten Abhandlung vielleicht vermisst werden konnte, so wurde dieselbe in einer spätern Arbeit des Verfassers: „Versuch einer mathematischen Darstellung der Flüssigkeitswellen“ (Jahrg. 1877 dieser Zeitschr., S. 136) nachgeliefert.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}+\frac{\partial \eta}{\partial y_0}+\frac{\partial \zeta}{\partial z_0}=0$$

infolge der über ξ, η, ζ gemachten Voraussetzungen übergeht in

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=0.$$

Es handelt sich nun weiter um die Aufstellung der Bewegungsgleichung. Es sei ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, dk das Raumelement derselben, dann bestehen die verlorenen Kräfte in jedem Augenblicke erstens aus einem System von Kräften, welche an den sämmtlichen Flüssigkeitstheilchen dk wirken und an jedem die Componenten haben

$$-\varrho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}dk,\quad -\varrho\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}dk,\quad -\varrho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}dk,$$

zweitens aus einem System von Druckkräften gegen die Oberfläche, welche überall normal gegen diese gerichtet sind; der Betrag des Druckes gegen das Element ds der Oberfläche ist $Q\,ds$. Um nun das Gleichgewicht der verlorenen Kräfte auszudrücken, wenden wir das Princip der virtuellen Arbeit an; wir denken uns die Theilchen der Flüssigkeit irgendwie unendlich wenig verschoben, aber so, dass dieselben mit einander überall im Zusammenhange bleiben. Die neue Oberfläche der Flüssigkeit muss dann, da dieselbe auch als incompressibel behandelt wird, dasselbe Volumen umschliessen, wie die ursprüngliche, und dieser letzteren überall unendlich nahe liegen, ist sonst aber vollkommen willkürlich. Es seien nun δx, δy, δz die virtuellen Verschiebungen des Flüssigkeitstheilchens dk; dann ist die ganze virtuelle Arbeit des ersten Systems der verlorenen Kräfte

$$-\varrho\int\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\delta x+\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\delta y+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\delta z\right\}dk,$$

das Integral über die ganze Flüssigkeitsmasse erstreckt. Ferner sei δn der normale Abstand der neuen Flüssigkeitsoberfläche von der früheren an der Stelle des Elementes ds, diesen Abstand positiv oder negativ genommen, je nachdem an der Stelle von ds die neue Oberfläche ausserhalb oder innerhalb der früheren liegt; dann ist offenbar die ganze Arbeit des zweiten Systems der verlorenen Kräfte: $-\int Q\,\delta n\,ds$, das Integral über die ganze Oberfläche der Flüssigkeit erstreckt. Wir haben also nach dem Princip der virtuellen Arbeit, angewandt auf die verlorenen Kräfte, die Gleichung

$$-\varrho\int\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\delta x+\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\delta y+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\delta z\right\}dk-\int Q\,\delta n\,ds=0,$$

welche für alle erlaubten Verschiebungen der Flüssigkeitstheilchen oder auch der Flüssigkeitsoberfläche bestehen muss. Die Bedingung der Erlaubtheit besteht aber blos darin, dass die neue Oberfläche dasselbe Volumen umschliesst, wie die frühere, was sich analytisch durch die Gleichung ausdrückt, wie leicht zu ersehen:

$$\int \delta n \, ds = 0,$$

wobei die obige Festsetzung über das Vorzeichen von δn durchaus wesentlich ist. Vermöge der angenommenen Ausdrücke für ξ, η, ζ haben wir nun, da man in Anbetracht der obigen Bestimmung über die Kleinheit der Factoren μ in den Ausdrücken für ξ, η, ζ offenbar x, y, z anstatt resp. x_0, y_0, z_0 setzen darf:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta x + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta y + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta z$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \{\mu_1 x \, \delta x + \mu_2 y \, \delta y - (\mu_1 + \mu_2) z \, \delta z\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \, \delta \{\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2\}.$$

Setzen wir daher zur einstweiligen Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} \{\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2\} = W,$$

so haben wir für den ersten Theil in der obigen Gleichung des Princips der virtuellen Arbeit

$$-\varrho \int \left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta x + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta y + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta z\right\} dk = \int \delta W \, dk$$

oder bei einfacher Umformung

$$= \delta \int W \, dk.$$

Nun ist aber weiter, wie leicht durch geometrische Betrachtung erhellt,

$$\delta \int W \, dk = \int W \, \delta n \, ds,$$

und demnach wird die Gleichung des Princips der virtuellen Arbeit bei Vereinigung der beiden Integrale in derselben

$$\int (W - Q) \, \delta n \, ds = 0.$$

Hier ist δn eine willkürliche Function der Coordinaten von ds, die blos der Bedingung zu genügen braucht $\int \delta n \, ds = 0$; die vorige Gleichung wird daher dann, aber auch nur dann erfüllt, wenn man hat $W - Q = Const.$ für jeden Punkt der Oberfläche. Setzen wir hier für W und Q ihre Werthe ein und rechnen die in Q eingehende Constante K in die Constante der rechten Seite ein, so drückt also folgende Gleichung das Gleichgewicht der verlorenen Kräfte aus, welche zu jeder Zeit in jedem Punkte der Oberfläche des oscillirenden Flüssigkeitstropfens erfüllt sein muss:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \frac{t}{T} [\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 - (\mu_1 + \mu_2) z^2] - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = Const.$$

3. Wir wollen jetzt den Ausdruck $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ für eine ellipsoidische Fläche bilden. Gemäss der Theorie der Krümmung der Flächen haben wir

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

hierbei gesetzt

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Die Halbaxen des Ellipsoids seien nun a, b, c, dann ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Daraus folgt

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},\quad r=-\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2x^2}{a^2z^2}\right),$$

$$s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad t=-\frac{c^2}{b^2z}\left(1+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}\right).$$

Wir erhalten nun weiter

$$r(1+q^2)=-\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2x^2}{a^2z^2}\right)\left(1+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}\right)=-\frac{c^8}{a^2z^5}\left(\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{z^2}{c^4}+\frac{y^2}{b^4}\right),$$

$$2pqs=-\frac{2c^8x^2y^2}{a^4b^4z^5},$$

$$t(1+p^2)=-\frac{c^2}{b^2z}\left(1+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}\right)\left(1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}\right)=-\frac{c^8}{b^2z^5}\left(\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}\right),$$

wodurch dann kommt

$$\begin{aligned}&r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)\\&=-\frac{c^8}{z^5}\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-2\frac{x^2y^2}{a^4b^4}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\right\}\\&=-\frac{c^6}{z^3}\left\{\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Ebenso kommt

$$(1+p^2+q^2)^{3/2}=\frac{c^6}{z^3}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}.$$

Somit erhalten wir endlich für die Summe der beiden reciproken Hauptkrümmungshalbmesser in einem Ellipsoide

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}.$$

4. Für das von uns zu behandelnde Problem haben wir nun diesen Ausdruck unter Voraussetzung kleiner Excentricitäten umzugestalten.

Wir setzen für die numerischen Excentricitäten $\varkappa$ und λ, wie in der früheren Abhandlung,

$$\varkappa^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}, \quad \lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2};$$

dann folgt, wenn wir wieder überall blos die Glieder von derselben Ordnung wie $\varkappa^2$ und λ^2 beibehalten,

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{c^2}(1 - \varkappa^2), \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}(1 - \lambda^2), \quad \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{c^4}(1 - k^2 - \lambda^2),$$

$$\frac{1}{a^4} = \frac{1}{c^4}(1 - 2\varkappa^2), \quad \frac{1}{b^4} = \frac{1}{c^4}(1 - 2\lambda^2).$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{c^4}\left\{\frac{x^2}{a^2}(2 - 2\varkappa^2 - \lambda^2) + \frac{y^2}{b^2}(2 - \varkappa^2 - 2\lambda^2) + \frac{z^2}{c^2}(2 - \varkappa^2 - \lambda^2)\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung des Ellipsoids und weil wir in den mit $\varkappa^2$ und λ^2 multiplicirten Gliedern a und b durch c ersetzen dürfen, können wir für den letzten Ausdruck auch schreiben

$$\frac{1}{c^4}\left\{2 - \frac{(2\varkappa^2 + \lambda^2)x^2 + (\varkappa^2 + 2\lambda^2)y^2 + (\varkappa^2 + \lambda^2)z^2}{c^2}\right\}.$$

Ferner erhalten wir ebenso

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2} = \frac{1}{c^3}\left\{\frac{x^2}{a^2}(1 - \varkappa^2) + \frac{y^2}{b^2}(1 - \lambda^2) + \frac{z^2}{c^2}\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{c^3}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{c^2}\right\}^{1/2} = \frac{1}{c^3}\left\{1 - \frac{3\varkappa^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2}{2c^2}\right\}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die obige Formel kommt nun

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{c} \cdot \frac{1 - \dfrac{(2\varkappa^2 + \lambda^2)x^2 + (\varkappa^2 + 2\lambda^2)y^2 + (\varkappa^2 + \lambda^2)z^2}{2c^2}}{1 - \dfrac{3\varkappa^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2}{2c^2}}$$

$$= \frac{2}{c}\left\{1 - \frac{(\lambda^2 - \varkappa^2)x^2 + (\varkappa^2 - \lambda^2)y^2 + (\varkappa^2 + \lambda^2)z^2}{2c^2}\right\}$$

oder endlich, da in dem letzten Gliede wegen der Kleinheit von $\varkappa^2$ und λ^2 statt z^2 einfach auch $c^2 - x^2 - y^2$ gesetzt werden darf,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{c}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 + \lambda^2}{2} + \frac{\varkappa^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{c^2}\right\}.$$

5. Kehren wir nach diesen allgemeinen Entwickelungen jetzt zu unserem speciellen Problem zurück. Wir hatten gemäss der öfter erwähnten Abhandlung (S. 60)

$$\varkappa^2 = 2(2\mu_1 + \mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad \lambda^2 = 2(\mu_1 + 2\mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T};$$

Dadurch erhalten wir

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$
$$=\frac{2}{c}\left\{1-3(\mu_1+\mu_2)\sin 2\pi\frac{t}{T}+\frac{2(2\mu_1+\mu_2)x^2+2(\mu_1+2\mu_2)y^2}{c^2}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right\}.$$

Ferner können wir auch in dem Ausdrucke $\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2)z^2$ statt z^2 wegen der Kleinheit von μ_1 und μ_2 setzen $c^2-x^2-y^2$; dann kommt

$$\mu_1 x^2+\mu_2 y^2-(\mu_1+\mu_2)z^2=-(\mu_1+\mu_2)c^2+(2\mu_1+\mu_2)x^2+(\mu_1+2\mu_2)y^2.$$

Dadurch geht nun endlich die Bedingungsgleichung für die Oberfläche in die folgende über, wenn wir die Glieder, in denen x und y nicht vorkommen, in eine Constante vereinigen:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\{(2\mu_1+\mu_2)x^2+(\mu_1+2\mu_2)y^2\}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$-\frac{4\alpha}{c^3}\{(2\mu_1+\mu_2)x^2+(\mu_1+2\mu_2)y^2\}\sin 2\pi\frac{t}{T}=Const.$$

Es bedeutet diese Gleichung natürlich nur, dass für jedes t der Ausdruck auf der linken Seite von x und y unabhängig sein muss, während er natürlich von t abhängig sein kann. Da die Grössen x und y von einander ganz unabhängig sind, so erfordert diese Gleichung, dass die Coefficienten von x^2 und y^2 verschwinden, was die eine Gleichung nach sich zieht:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2-\frac{4\alpha}{c^3}=0.$$

Hieraus folgt für die Oscillationsdauer

$$T=\pi c\sqrt{\frac{c\varrho}{2\alpha}}.$$

Da α positiv ist, so wird T reell und die vorige Gleichung kann also in der That befriedigt werden. Für diesen Werth von T halten sich also in der That die verlorenen Kräfte in jedem Augenblicke das Gleichgewicht und die ursprünglich angenommenen Ausdrücke für ξ, η, ζ stellen dann also eine mögliche Bewegung der Flüssigkeitsmasse vor. Was die Oscillationsdauer T betrifft, so kann in dem Ausdrucke derselben wegen der geringen Excentricität der ellipsoidischen Oberflächengestalt auch R für c gesetzt werden, wodurch dann kommt

$$T=\pi R\sqrt{\frac{\varrho R}{2\alpha}}.$$

Wir sehen also, dass unter den möglichen kleinen Bewegungen, welche eine blos ihrer Oberflächenspannung unterworfene Flüssigkeitsmasse ausführen kann, sich auch regelmässige Oscillationen befinden, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids behält; die Verschiebungen eines Theilchens lassen sich bei diesen darstellen durch die Ausdrücke

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \zeta = -(\mu_1 + \mu_2) z \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

unter μ_1 und μ_2 beliebige sehr kleine Constanten verstanden; die halben Axen der ellipsoidischen Oberfläche sind für jeden Moment

$$a = R\left(1 + \mu_1 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right), \quad b = R\left(1 + \mu_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$c = R\left(1 - [\mu_1 + \mu_2] \sin 2\pi \frac{t}{T}\right),$$

unter R den Halbmesser der sphärischen Gleichgewichtsoberfläche verstanden; die Oscillationsdauer T bestimmt sich dabei durch die Gleichung

$$T = \pi R \sqrt{\frac{\varrho R}{2\alpha}}.$$

Wir sehen hieraus, dass die Oscillationsdauer der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit und der Quadratwurzel aus dem Volumen des Tropfens proportional ist. Nehmen wir etwa das Gewicht eines Grammes als Krafteinheit und das Centimeter als Längeneinheit, dann ist, um die Formel auf einen Wassertropfen von 1 cm. Halbmesser anzuwenden, zu setzen $R = 1$, ϱ (die Masse der Volumeinheit oder eines Kubikcentimeters Wasser) $= \frac{1}{g} = \frac{1}{979{,}74}$, $\alpha = 0{,}07$ (s. Beer's Einleitung in die Theorie der Elasticität und Capillarität); dadurch findet sich $T = 0{,}268$ Secunden.

Kleinere Mittheilungen.

XII. Einige Sätze über Wirbelbewegungen in reibenden Flüssigkeiten.

Die merkwürdigen Sätze, die Helmholtz über die Wirbelbewegungen in nicht reibenden Flüssigkeiten abgeleitet hat, lassen sich auf reibende Flüssigkeiten im Allgemeinen nicht übertragen, da ja schon die Erfahrung zeigt, dass in diesen Wirbelbewegungen beliebig erzeugt und zerstört werden können. Es sollen im Folgenden einige Sätze über solche Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten entwickelt werden, die noch nicht bekannt zu sein scheinen. Dabei soll angenommen werden, dass die wirkenden äusseren Kräfte ein Potential haben.

Wir stellen die Gleichungen für reibende Flüssigkeiten auf. Es ist

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}=\mu X-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z},$$

$$\mu\frac{d^2y}{dt^2}=\mu Y-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z},$$

$$\mu\frac{d^2z}{dt^2}=\mu Z-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}.$$

Darin ist

$$X_x=p-2k\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y_y=p-2k\frac{\partial v}{\partial y},\quad Z_z=p-2k\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$Y_z=Z_y=-k\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$X_z=Z_x=-k\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$Y_x=X_y=-k\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Zu diesen Gleichungen kommt noch die Continuitätsgleichung:

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu\sigma=0,$$

wo $\sigma=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ ist, und eine Gleichung zwischen dem Druck p und der Dichtigkeit μ hinzu. Bilden wir nun die Differentialquotienten von X_x u. s. w., so kommt

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}-k\frac{\partial \sigma}{\partial x}-k\,\Delta u,$$

wo Δ die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Wir bekommen zwei andere Formen für diese Gleichungen, wenn wir die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit einführen. Bezeichnen wir diese mit π, χ, ϱ, so ist

$$2\pi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad 2\chi=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad 2\varrho=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tragen wir diese ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}-2k\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)-2k\,\Delta u$$
$$=\frac{\partial p}{\partial x}+2k\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)-2k\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Wir benutzen zu weiterem Vorgehen die Gleichungen

$$\text{I)}\quad \begin{aligned}
\mu\frac{d^2x}{dt^2}&=\mu X-\frac{\partial p}{\partial x}-2k\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)+2k\frac{\partial \sigma}{\partial x},\\
\mu\frac{d^2y}{dt^2}&=\mu Y-\frac{\partial p}{\partial y}-2k\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)+2k\frac{\partial \sigma}{\partial y},\\
\mu\frac{d^2z}{dt^2}&=\mu Z-\frac{\partial p}{\partial z}-2k\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)+2k\frac{\partial \sigma}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit abc irgendwelche von einander unabhängige Grössen, die den materiellen Punkt, dessen Coordinaten zur Zeit t xyz sind, bestimmen. Wir setzen $\int\frac{dp}{\mu}=P$ und $\int\frac{d\sigma}{\mu}=S$ und benutzen, dass $X=\frac{\partial V}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial V}{\partial y}$, $Z=\frac{\partial V}{\partial z}$ sein soll. Multipliciren wir dann die Gleichungen I) mit $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ und addiren, so kommt

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}(V-P+2kS)$$
$$-\frac{2k}{\mu}\left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial a}\right].$$

Entsprechend wird, wenn wir mit $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial b}$ oder mit $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ multipliciren und addiren,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}(V-P+2kS)$$
$$-\frac{2k}{\mu}\left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial b}\right],$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}(V-P+2kS)$$
$$-\frac{2k}{\mu}\left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial c}\right].$$

Diese Gleichungen sind analog den Lagrange'schen hydrodynamischen gebildet. Sie gehen in sie über, wenn $k=0$ gesetzt wird.

Differentiirt man die zweite von diesen nach c, die dritte nach b und zieht die Resultate von einander ab, so erhält man auf der linken Seite nach einer leicht auszuführenden Rechnung (s. Kirchhoff, Vorles. S. 166)

$$\text{II)}\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right).$$

Um die rechte Seite zu bilden, setzen wir

$$\text{III)}\quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)=L,\quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \pi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)=M,\quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)=N.$$

Dann wird die rechte Seite

$$-2k\left(\frac{\partial L}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial L}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial M}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial M}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial N}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial N}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right).$$

Bezeichnen wir nun die linken Seiten mit $\frac{2d\alpha}{dt}$, $\frac{2d\beta}{dt}$, $\frac{2d\gamma}{dt}$, so haben wir

$$\text{IV)}\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial L}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial M}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial M}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial N}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial N}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}=-\frac{1}{k}\frac{d\alpha}{dt},\\
&\frac{\partial L}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial L}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial M}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial M}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial N}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial N}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}=-\frac{1}{k}\frac{d\beta}{dt},\\
&\frac{\partial L}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial L}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial M}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial M}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial N}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial N}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}=-\frac{1}{k}\frac{d\gamma}{dt}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen multipliciren wir resp. mit $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$ und addiren sie. Dann heben sich die Glieder, die L enthalten, fort und es kommen links drei Glieder von der Form $\frac{\partial M}{\partial a}\left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$ und drei von der Form $\frac{\partial N}{\partial a}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$, die aus einander entstehen, wenn man a, b, c cyklisch vertauscht. Die Klammergrössen sind aber nach einer Rechnung, wie sie Kirchhoff, Vorl. S. 167, angiebt, resp. $D\frac{\partial a}{\partial z}$, $D\frac{\partial b}{\partial z}$, $D\frac{\partial c}{\partial z}$, $-D\frac{\partial a}{\partial y}$, $-D\frac{\partial b}{\partial y}$, $-D\frac{\partial c}{\partial y}$, wobei D die Determinante ist

$$\text{V)}\qquad D=\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\
\frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\
\frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}
\end{vmatrix}.$$

Infolge dessen werden unsere Gleichungen

$$
\text{VI)}\quad
\begin{aligned}
D\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right) &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}\right),\\
D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right) &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}\right),\\
D\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right) &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}\right).
\end{aligned}
$$

Endlich differentiiren wir die erste von diesen Gleichungen nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und setzen $-\frac{1}{kD}=\lambda$, so kommt, wenn wir addiren, auf der linken Seite 0 und es wird

$$
0=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}.
$$

Aus den Gleichungen IV) ersieht man aber, dass

$$
\frac{\partial}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}=0
$$

ist, also behalten wir, da $\frac{\partial\lambda}{\partial a}=\frac{1}{kD^2}\frac{\partial D}{\partial a}$ und D im Allgemeinen nicht 0 ist, die Gleichung

$$
\text{VII)}\quad \frac{\partial D}{\partial a}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial D}{\partial b}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial D}{\partial c}\frac{d\gamma}{dt}=0.
$$

Wir wollen zuerst die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür suchen, dass $\frac{d\alpha}{dt}=0$, $\frac{d\beta}{dt}=0$, $\frac{d\gamma}{dt}=0$ ist, d. h. dass wir auf die Helmholtz'schen Gesetze kommen.

Wenn diese drei Grössen gleich 0 sind, so erkennt man aus VI), dass, da D nicht gleich 0 ist,

$$
L=\frac{\partial\Sigma}{\partial x},\quad M=\frac{\partial\Sigma}{\partial y},\quad N=\frac{\partial\Sigma}{\partial z}
$$

ist, wo $\Delta\Sigma=0$ ist. Soll das aber der Fall sein, dann muss

$$
\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}=0
$$

sein und dazu ist nach III) nothwendig, dass $\mu=const.$ und

$$
\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\pi}{\partial x\,\partial z}=0,
$$

d. h., da $\frac{\partial\pi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{\partial\varrho}{\partial z}=0$ ist, dass

$$
\Delta\varrho=0
$$

ist. Wir haben also den Satz:

Falls bei der Bewegung einer incompressiblen reibenden Flüssigkeit $\Delta\pi=0$, $\Delta\chi=0$, $\Delta\varrho=0$ ist, so gelten für diese Flüssigkeit die Helmholtz'schen Gesetze der Wirbelbewegung.

Ein Beispiel dafür bietet die Bewegung einer Flüssigkeit in einer festen, unbewegten, der z-Axe parallelen cylindrischen Röhre. Dabei ist $u=0$, $v=0$, $w=\frac{c}{4k}(x^2+y^2)+d$, also

$$\pi=\frac{c}{4k}y,\quad \chi=\frac{c}{4k}x,\quad \varrho=0,$$

mithin $\Delta\pi=0$, $\Delta\chi=0$, $\Delta\varrho=0$. In einer solchen Röhre hört also eine Wirbelbewegung niemals auf und kann keine Wirbelbewegung durch Kräfte, die ein Potential haben, erzeugt werden.

Wir formen die Gleichung VII) um. Aus der Gleichung II) und den analogen erkennt man, dass

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial a}+\beta\frac{\partial x}{\partial b}+\gamma\frac{\partial x}{\partial c}=-D\pi,$$
$$\alpha\frac{\partial y}{\partial a}+\beta\frac{\partial y}{\partial b}+\gamma\frac{\partial y}{\partial c}=-D\chi,$$
$$\alpha\frac{\partial z}{\partial a}+\beta\frac{\partial z}{\partial b}+\gamma\frac{\partial z}{\partial c}=-D\varrho,$$

mithin

$$-\alpha=\pi\frac{\partial a}{\partial x}+\chi\frac{\partial a}{\partial y}+\varrho\frac{\partial a}{\partial z},$$
$$-\beta=\pi\frac{\partial b}{\partial x}+\chi\frac{\partial b}{\partial y}+\varrho\frac{\partial b}{\partial z},$$
$$-\gamma=\pi\frac{\partial c}{\partial x}+\chi\frac{\partial c}{\partial y}+\varrho\frac{\partial c}{\partial z}.$$

Führen wir dies in die Gleichung VII) ein, so wird diese, da a, b, c von t unabhängig sind,

$$\text{VIII)}\qquad \frac{\partial D}{\partial x}\frac{d\pi}{dt}+\frac{\partial D}{\partial y}\frac{d\chi}{dt}+\frac{\partial D}{\partial z}\frac{d\varrho}{dt}=0.$$

Falls also $\frac{d\chi}{dt}=0$, $\frac{d\varrho}{dt}=0$ ist, muss auch $\frac{d\pi}{dt}=0$ sein. Wir haben daher den Satz:

Wenn bei einer Flüssigkeitsbewegung zwei Componenten der Drehungsgeschwindigkeit sich mit der Zeit nicht ändern, so bleibt auch die dritte mit der Zeit unverändert; oder: Eine Flüssigkeit kann sich nicht so bewegen, dass die Drehungsgeschwindigkeit längs zweier Axen stationär bleibt, ausser wenn die Drehungsgeschwindigkeit überhaupt stationär ist.

Wir wenden nun die Gleichung VIII) auf den Fall einer incompressiblen Flüssigkeit an. Bei dieser ist $\frac{dD}{dt}=0$ und wir können daher die Gleichung VIII) schreiben

$$\text{IX)}\qquad \frac{d}{dt}\left(\pi\frac{\partial D}{\partial x}+\chi\frac{\partial D}{\partial y}+\varrho\frac{\partial D}{\partial z}\right)=0.$$

Bezeichnen wir die Drehungsgeschwindigkeit des materiellen Theilchens mit φ, so ist φ der Grösse und Richtung nach bestimmt durch die Gleichungen

$$\varphi=\sqrt{\pi^2+\chi^2+\varrho^2},$$

$$\cos\alpha_1=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\chi^2+\varrho^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{\chi}{\sqrt{\pi^2+\chi^2+\varrho^2}},\quad \cos\gamma_1=\frac{\varrho}{\sqrt{\pi^2+\chi^2+\varrho^2}}.$$

Die Determinante D ist von t unabhängig, d. h. sie hängt nur ab von abc. Jedem materiellen Theilchen entspricht also ein bestimmter, von t unabhängiger Werth von D. Für jedes Theilchen haben wir also einen Werth $D=const.$ Dieser Gleichung entspricht eine Fläche, so dass wir also für jedes Theilchen eine bestimmte, von t unabhängige Fläche construiren können. Wir wollen sie wegen der Bedeutung von D die Dilatationsfläche nennen. Andererseits ist D eine Function von $xyzt$. Jedem Raumpunkte entspricht also eine mit der Zeit veränderliche Fläche D, jedoch so, dass $\frac{dD}{dt}=0$ ist. Construirt man nun im Punkte xyz zur Zeit t die Normale an die Fläche D, so bildet diese mit den Axen Winkel, deren Cosinus sind

$$\cos\alpha_2=\frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)^2}},\quad \cos\beta_2=\frac{\frac{\partial D}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_2=\frac{\frac{\partial D}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)^2}}.$$

Ist nun ε der Winkel zwischen φ und der Normale an D, so geht unsere Gleichung IX) über in

$$\frac{d}{dt}(\varphi\cos\varepsilon)=0.$$

Wir haben also den Satz:

In einer incompressiblen Flüssigkeit ändert sich die Drehungsgeschwindigkeit an einem bestimmten Punkte mit der Zeit nach Grösse und Richtung so, dass ihre Projection auf die Normale der Dilatationsfläche in diesem Punkte constant bleibt.

Breslau. Dr. LEO GRAETZ.

XIII. Eine Relation zwischen Potenzen und Determinanten.

Henri Brocard, der auf dem Gebiete der algebraischen Analysis unermüdlich thätige französische Mathematiker, machte den Schreiber dieser Zeilen unlängst auf eine Determinante von interessanter Structur aufmerksam und theilte demselben gleichzeitig seine Vermuthung mit, dass jene mit gewissen Potenzen der natürlichen Zahlen in sehr naher Beziehung stehen müsse. Nachdem die Ermittelung dieser letzteren nunmehr gelungen ist, erlaubt sich der Unterzeichnete, mit Zustimmung seines verehrten Freundes, seine Herleitung als einen hübschen Beitrag zur Determinantenlehre nachstehend zu veröffentlichen.

Vorgelegt ist die Determinante* $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Delta_{2m+1}$$

$$\equiv \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1_{(m+2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0_{(m-1)} \\
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m-1 & m & m+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & \dots & m-2 & m-1 & m & m+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & .. & m-3 & m-2 & m-1 & m & m+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & m-4 & m-3 & m-2 & m-1 & m & m+1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & m+1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & m & m+1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m-1 & m & m+1
\end{vmatrix},$$

wo die einer Eins und einer Null in der ersten Horizontalreihe angehängten Indices selbstverständlich als blosse Stellenzeiger aufzufassen sind. Wir subtrahiren jeweils eine Vertikalreihe von der links neben ihr stehenden und erhalten so

---

* *A priori* lässt sich von dieser Determinante Nichts weiter aussagen, als dass sie jedenfalls nicht gleich Null sein kann. Denn bilden wir von der ganzen rationalen Function

$$f_{(x)} \equiv x^{m+1} + x^m + x^{m-1} + \dots + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

und deren erster Ableitung

$$f'_{(x)} = (m+1)x^m + m x^{m-1} + (m-1)x^{m-2} + \dots + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

nach der dialytischen Methode die Resultante, so ist diese eben mit unserer Determinante Δ_{2m+1} identisch. Würde letztere sich annulliren, so wäre damit ausgesagt, dass die beiden Functionen $f_{(x)}$ und $f'_{(x)}$ einen gemeinsamen Theiler besässen. Andererseits aber weiss man, dass für die Gleichung

$$f_{(x)} = 0,$$

welche in der Theorie der Kreistheilung bekanntlich eine Hauptrolle spielt, dies nicht möglich ist.

$$\Delta_{2m+1}$$

$$= \left|\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 1_{(m+2)} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0_{(m-1)} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & m+1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & m+1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & m+1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & m+1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots m+1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & m+1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & m+1
\end{array}\right|.$$

Wird jetzt zur p^{ten} Colonne die $(m+p+2)^{\text{te}}$ addirt, wo p zwischen 1 und $(m-1)$ variirt, so folgt

$$\Delta_{2m+1}$$

$$= \left|\begin{array}{ccccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 1_{(m+2)} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0_{(m-1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 1 \\
\hline
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & m+1 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
m+1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & m+1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
-1 & m+1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & m+1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots m+1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & m+1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots -1 & -1 & m+1
\end{array}\right|.$$

Das durch unser Kreuz ausgeschiedene Rechteck oben links besteht aus $m(m+1)$ Nullen; es tritt also das bekannte Corollar des Laplace-schen Determinantensatzes in Kraft, und da die obere Determinante rechts sich auf ihr Diagonalglied $1^m = 1$ reducirt, so ist

$$\Delta_{2m+1}=\begin{vmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1_{(m)} & m+1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
m+1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & m+1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & m+1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & m+1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & m+1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & m+1 & -1 & -1
\end{vmatrix}.$$

Diese Determinante besitzt nur mehr $(m+1)^2$ Elemente. Indem wir nun, wie vorhin, von jeder Colonne die rechts neben ihr befindliche abziehen, ergiebt sich uns

$$\Delta_{2m+1}$$

$$=\left|\begin{array}{ccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -(m+2) & m+1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
\hline
m+2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
-(m+2) & m+2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & -(m+2) & m+2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -(m+2) & m+2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & m+2 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(m+2) & m+2 & 0 & -1
\end{array}\right|.$$

Hier haben $(m-1)$ Colonnen mit zwei Zeilen im Ganzen $2(m-1)$ verschwindende Elemente gemein; wir können sonach wiederum die durch das Kreuz angedeutete Zerlegung zur Anwendung bringen und finden

$$\Delta_{2m+1}=\begin{vmatrix}
m+2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
-(m+2) & m+2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & -(m+2) & m+2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -(m+2) & m+2 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & m+2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(m+2) & m+2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -(m+2) & m+2
\end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix}
-(m+2) & m+1\\
0 & -1
\end{vmatrix}.$$

Der Werth des ersten Factors ist $(m+2)^{m-1}$, derjenige des zweiten $(m+2)$, also ist zum Schlusse

$$\varDelta_{2m+1} = (m+2)^m,$$

z. B. für $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\varDelta_1 = 2^0, \quad \varDelta_3 = 3^1, \quad \varDelta_5 = 4^2, \quad \varDelta_7 = 5^3.$$

Vielleicht gestalten sich die oben erörterten Transformationen übersichtlicher, wenn wir sie am speciellen Falle, etwa für $m = 3$, nochmals reproduciren. Es ist

$$\varDelta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & 0 & -1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 5^2 . 5,$$

$$\varDelta_7 = 5^3.$$

Ansbach. Dr. S. Günther.

XIV. Einfacher Beweis des Satzes von Desargues.

(Hierzu Taf. III Fig. 2—4.)

Wenn 1234 ein beliebiges Vierseit darstellt, O einen Punkt in dessen Ebene, so gehen von ihm nach den sechs Vierseitsecken die in Fig. 2 mit $a a' b b' c c'$ bezeichneten Strahlen (die mit gleichem Buchstaben je nach Gegenecken). Zu beweisen ist, dass diese drei Strahlenpaare einer Involution angehören.

Zunächst bestimmen abc, $a'b'c'$ zwei projectivische concentrische Büschel. Entspricht sich eines der Paare vertauschungsfähig (doppelt), so ist dasselbe bei allen anderen auch der Fall,* und dieses Verhalten kennzeichnet die Involution.

---

* Man vergleiche: *Cremona-Dewulf, Éléments de Géométrie projective, Paris 1875, § XII.*

Schneidet man die Büschel abc und $a'b'c'$ resp. mit den Strahlen t, t', die mit zwei Vierecksstrahlen, z. B. 1, 2, übereinstimmen, so entstehen die Punktreihen ABC, $A'B'C'$, die in t und t' projectivische Reihen bestimmen. Die perspectivische Axe geht durch C', da C in den Schnittpunkt tt' fällt. Sie geht ausserdem durch die Ecke AB', $A'B$ des gegebenen Vierseits, ist also c'. Dem Punkt D', den t aus t' schneidet, entspricht der Schnittpunkt $tt'' = D$. Die Verbindungsstrahlen von D und D' mit O entsprechen sich in den projectivischen Büscheln. Wählt man also $c' = d$ als Originalstrahl, so fällt der entsprechende Strahl d' nach c. Damit ist gezeigt, dass das Paar cc' sich doppelt entspricht, und dieselbe Figur würde auch zeigen, dass aa' und bb' sich doppelt entsprechen.

Für die dualistische Aussprache des Satzes ist der Beweis ebenso einfach und ohne Hilfslinien zu führen. Die sechs Seiten des vollständigen Vierecks I, II, III, IV schneiden eine Gerade t in den Punktepaaren AA', BB', CC'. Diese Punkte sind drei Paare einer Involution, wenn in der Projectivität, die durch Zuordnung der Punkte $A'B'C'$ zu ABC entsteht, das eine Paar, z. B. AA', sich doppelt entspricht (so dass $D' = A$, wenn $D = A'$ ist).

Man projicire die Reihe $A'B'C'$ aus $O = \text{IV}$ auf $t' = \text{I III}$, so entsteht $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, welche Gruppe nun mit ABC eine Projectivität bestimmt. Die perspectivische Axe für diese Reihen ist $t'' = \text{II, IV}$. Dem Schnittpunkte D' von t' mit t entspricht in t der Schnittpunkt mit t'', also $D = A'$, womit der Beweis erbracht ist. — Die Fig. 3 würde auch noch zeigen, wie die Paare BB' und CC' sich ebenfalls doppelt entsprechen.

Ein weiterer Satz von Desargues lautet: Wenn ein Kegelschnitt einem Viereck umschrieben ist, so trifft jede Gerade den Kegelschnitt und die Gegenseitenpaare des Vierecks in vier Punktepaaren einer Involution.*

In Fig. 4 sei 1526 das Viereck, t die Gerade. Auf t entstehen durch das Viereck die Paare AA', BB', CC' einer Involution und es ist zu beweisen, dass die Schnittpunkte 34 von t mit dem Kegelschnitt ein weiteres Paar DD' dieser Involution bilden.

Zunächst ist 123456 ein Pascalsechseck, deshalb sind die Punkte $P = 12, 45$; $Q = 23, 56$; $R = 34, 61$ in Gerader — die Involution auf t kann man als Vereinigung von zwei projectivischen Reihen ABC, $A'B'C'$ auffassen (das vertauschungsfähige Entsprechen der Punktepaare ist oben bewiesen) und man hat zu zeigen, dass DD' sich in dieser Projectivität entsprechen. Projicirt man aber $A'B'C'$ aus $O = 5$ auf $t' = 12$, so geben ABC, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ die projectivischen Reihen mit $t'' = 56$ als perspectivische Axe. Um zu $D = 3$ den entsprechenden Punkt zu finden, ziehe man $D\mathfrak{A}'$, welche t'' in Q trifft. Die Pascallinie QA ist zugleich

* Cremona-Dewulf, l. c. S. 135.

$A\mathfrak{D}'$, deshalb $\mathfrak{D}'$ in P und $Q\mathfrak{D}'$ geht von selbst durch $D'=4$, womit der Satz bewiesen ist.

Man bemerkt, dass die Figur nebst dem Kegelschnitt und der Transversalen nur das Pascalsechseck mit der Pascallinie, sowie die Seiten des Vierecks enthält, dass also keine Hilfslinien zum Beweise nöthig sind.

Zürich-Hottingen, im Februar 1879. Dr. A. Weiler.

XV. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.

Die bekannten independenten Darstellungen der Bernoulli'schen Zahlen, deren n^{te} ich in der Folge immer mit B_n bezeichnen werde, gehen sämmtlich von der Relation

$$B_n = \frac{d^{2n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}{dx^{2n}}(-1)^{n-1}$$

oder der verwandten

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\,\frac{d^{2n-1}\,tg\,x}{d\,x^{2n-1}},$$

wo nach der Differentiation $x=0$ zu setzen ist, aus und verdanken ihre Entstehung vorzugsweise Laplace, Scherk etc. Im Nachstehenden werde ich hingegen auf elementarem Wege einen independenten Ausdruck mit Hilfe des Satzes, dass die n^{te} Bernoulli'sche Zahl der Coefficient des niedrigsten Gliedes in der Summenformel der $2n^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen ist, ableiten, der recht gut in die niedere Analysis mit aufgenommen werden kann.

Beachtet man nämlich, dass

$$1)\qquad m^2 = 2!\,C_{m,2} + C_{m,1},$$

wenn mit $C_{m,p}$ die Anzahl der Combinationen aus m Elementen zur p^{ten} Classe bezeichnet wird, so folgt durch Multiplication mit m

$$2)\qquad \begin{aligned} m^3 &= [(m-2)+2]\,2!\,C_{m,2} + [(m-1)+1]\,C_{m,1} \\ &= 3!\,C_{m,3} + 2!\,(2+1)\,C_{m,2} + C_{m,1}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{array}{l} 1+2\quad\;\;+3\quad\;\;+\ldots+p\quad\;\; = S_{1,p}, \\ 1+2S_{1,2}+3S_{1,3}+\ldots+pS_{1,p} = S_{2,p}, \\ 1+2S_{2,2}+3S_{2,3}+\ldots+pS_{2,p} = S_{3,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+2S_{x,2}+3S_{x,3}+\ldots+pS_{x,p} = S_{x+1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wo immer

$$iS_{x,i} + S_{x+1,i-1} = S_{x+1,i},$$

wenn

$$\left.\begin{array}{l} S_{0,1}=S_{0,2}=\ldots=S_{0,l} \\ S_{1,1}=S_{2,1}=\ldots=S_{x,1} \end{array}\right\}=1$$

gesetzt wird, so kann auch 2)

$$m^3=3!\,C_{m,3}+2!\,S_{1,2}\,C_{m,2}+C_{m,1}$$

geschrieben werden. Multiplicirt man die soeben erhaltene Gleichung abermals mit m, so folgt nach leichter Reduction

$$3)\quad \begin{aligned} m^4 &= 4!\,C_{m,4}+3!\,(3+S_{1,2})\,C_{m,3}+2!\,(2S_{1,2}+1)\,C_{m,2}+C_{m,1} \\ &= 4!\,C_{m,4}+3!\,S_{1,3}\,C_{m,3}+2!\,S_{2,2}\,C_{m,2}+C_{m,1}. \end{aligned}$$

Man könnte in dieser Weise beliebig weit fortgehen; allein das Bildungsgesetz fällt schon jetzt in die Augen und ist allgemein

$$4)\quad \begin{aligned} m^p = p!\,C_{m,p}+(p-1)!\,S_{1,p-1}\,C_{m,p-1}+(p-2)!\,S_{2,p-2}\,C_{m,p-2}+\ldots \\ \ldots+2!\,S_{p-2,2}\,C_{m,2}+C_{m,1}, \end{aligned}$$

wie sich leicht beweisen lässt. Multiplicirt man nämlich 4) mit m, so erhält man

$$\begin{aligned} m^{p+1} = {} & (p+1)!\,C_{m,p+1}+p!\,(p+S_{1,p-1})\,C_{m,p} \\ & +(p-1)!\,[(p-1)\,S_{1,p-1}+S_{2,p-2}]\,C_{m,p-1} \\ & +(p-2)!\,[(p-2)\,S_{2,p-2}+S_{3,p-3}]\,C_{m,p-2}+\ldots \\ & \ldots+3!\,[3\,S_{p-3,3}+S_{p-2,2}]\,C_{m,3} \\ & +2!\,(2\,S_{p-2,2}+1)\,C_{m,2}+C_{m,1}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} m^{p+1} = (p+1)!\,C_{m,p+1}+p!\,S_{1,p}\,C_{m,p}+(p-1)!\,S_{2,p-1}\,C_{m,p-1}+\ldots \\ \ldots+2!\,S_{p-1,2}\,C_{m,2}+C_{m,1}. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn das bemerkte Gesetz bis p als richtig angenommen wird, es auch für $p+1$ gilt, woraus sofort, da es bereits bis $p=4$ bewiesen worden ist, die Allgemeinheit desselben folgt.

Legt man nun m in 4) alle Werthe der ganzen Zahlen von 1 bis m bei und addirt sämmtliche auf diese Weise erhaltenen Gleichungen, so findet man bei Zuhilfenahme der bekannten Relation

$$C_{n,p}+C_{n-1,p}+C_{n-2,p}+\ldots+C_{1,p}=C_{n+1,p+1}$$

die merkwürdige Formel

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m} i^p = {} & p!\,C_{m+1,p+1}+(p-1)!\,S_{1,p-1}\,C_{m+1,p} \\ & +(p-2)!\,S_{2,p-2}\,C_{m+1,p-1}+\ldots+2!\,S_{p-2,2}\,C_{m+1,3}+C_{m+1,2} \end{aligned}$$

oder mit

$$p!\,C_{m,p}=A_{m,p}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m} i^p = \frac{1}{p+1}\,A_{m+1,p+1}+\frac{S_{1,p-1}}{p}\,A_{m+1,p}+\frac{S_{2,p-2}}{p-1}\,A_{m+1,p-1}+\ldots \\ \ldots+\tfrac{1}{2}\,A_{m+1,2}. \end{aligned}$$

Als allgemeine Formel für die Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis m hat man daher

$$5)\quad \sum_{i=1}^{i=m} i^{2n} = \frac{1}{2n+1} A_{m+1,2n+1} + \frac{S_{1,2n-1}}{2n} A_{m+1,2n} + \frac{S_{2,2n-2}}{2n-1} A_{m+1,2n-1} + \ldots + \tfrac{1}{2} A_{m+1,2}.$$

Um nun auf die Bernoulli'schen Zahlen zu kommen, haben wir alle A aufzulösen und die Coefficienten der Glieder, die m in der ersten Potenz enthalten, zusammenzufassen. Nun enthält aber, wie leicht einzusehen, allgemein für $i > 2$

$$A_{m+1,i}$$

das Glied

$$(-1)^i (i-2)!\, m,$$

woraus sofort aus 5)

$$6)\quad B_n = (-1)^{n+1} \left[-\frac{(2n-1)!}{2n+1} + \frac{(2n-2)!}{2n} S_{1,2n-1} - \frac{(2n-3)!}{2n-1} S_{2,2n-2} + - \ldots - \tfrac{1}{3} S_{2n-2,2} + \tfrac{1}{2} \right]$$

folgt.

Der Factor $(-1)^{n+1}$ muss hinzugefügt werden, weil das letzte Glied der nach fallenden Potenzen geordneten Summenformel für die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der natürlichen Zahlen für ein gerades n negativ, für ein ungerades n aber positiv ist.

Gleichung 6) lässt sich auch einfacher

$$B_n = (-1)^{n+1} \left\{ \tfrac{1}{2} + \sum_{i=0}^{i=2n-2} (-1)^{i+1} \frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i} S_{i,2n-i} \right\}$$

schreiben.

Burgk. W. Küttner.

XVI. Bemerkungen zur Differentialgleichung

$$1)\quad x\,\varphi(y') + y\,\psi(y') + \chi(y') = 0.$$

Man kann in jeder Differentialgleichung die Punktcoordinaten durch Liniencoordinaten ersetzen, wenn man die Relationen

$$x = -\frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du}, \quad y' = -\frac{u}{v}$$

benutzt. Diese Ausdrücke lassen sich zweckmässig umgestalten, wenn man für u und v beziehendlich $-\frac{u}{v}$ und $\frac{1}{v}$ schreibt, denn dadurch erhält man

$$x = \frac{dv}{du}, \quad y = u\frac{dv}{du} - v, \quad y' = u.$$

Diese letzten Substitutionen verdienen dann Beachtung, wenn sie eine vorgelegte Differentialgleichung in eine solche überführen, deren Integration bekannt ist, weil dann das Integral der vorgelegten Gleichung wenigstens durch eine Parameterdarstellung gegeben ist. Denn sei die übergeführte Differentialgleichung

$$F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right) = 0$$

und ihre Integralgleichung

$$F_1(u, v, c) = 0,$$

so würde eine Elimination der Grössen u, v und $\frac{dv}{du}$ aus diesen Gleichungen und den ersten beiden Substitutionen auf ein Resultat von der Form

$$f(x, y, c) = 0$$

führen, welches das allgemeine Integral der ursprünglichen Gleichung sein muss.

Wenn wir eine Anwendung auf die Gleichung 1) machen, so verwandelt sich dieselbe in die lineare Differentialgleichung

$$2)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{v\,\psi(u) - \chi(u)}{\varphi(u) + u\,\psi(u)},$$

deren Integral das folgende ist:

$$3)\qquad v = e^{\int \frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\,\psi(u)}} \left\{ Const. - \int \frac{\chi(u)\,du}{\varphi(u) + u\,\psi(u)}\, e^{-\int \frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\,\psi(u)}} \right\}.$$

Den Werth von v kann man sogleich wieder in die Gleichung 2) zurücksubstituiren; zuletzt hat man noch $\frac{dv}{du}$ durch x zu ersetzen und, wenn möglich, die Variabele u aus den Gleichungen 1) und 2) zu eliminiren.

Bemerkenswerth ist, dass die Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Grades, deren Coefficienten lineare Functionen in x und y sind,

$$(a_0 x + b_0 y + c_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + (a_1 x + b_1 y + c_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1})\left(\frac{dy}{dx}\right) + (a_n x + b_n y + c_n) = 0$$

als specieller Fall in der Gleichung 1) enthalten ist. Der Exponent n unterliegt keiner Beschränkung.

Die lineare Differentialgleichung 2) ist aber bekanntlich auch dann integrabel, wenn das letzte Glied noch mit einer beliebigen Potenz der Variabelen v multiplicirt ist, wenn also vorliegt

$$2a)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{v\,\psi(u) - v^m\,\chi(u)}{\varphi(u) + u\,\psi(u)}.$$

Da nun v, in den ursprünglichen Variabelen ausgedrückt, den Werth $xy' - y$ besitzt, so führt die allgemeinere Differentialgleichung

1a) $$x\varphi(y') + y\psi(y') + (xy' - y)^m . \chi(y') = 0$$

bei Verwendung der Substitutionen auf die integrable Gleichung 2a).

Die Eliminationen, welche nach Integration der Gleichung 2a) vorzunehmen sind, um das Integral der Gleichung 1a) als Function der Variabelen x und y zu erhalten, sind an sich klar. Nur mag hervorgehoben werden, dass das Integral der Gleichung 1) immer eine Auflösung nach der Constanten zulässt, während diese Rechnung mit dem Integral der Gleichung 1a) im Allgemeinen nicht durchführbar sein wird. Diese Bemerkung gilt bereits, wenn über den Charakter der Functionen φ, ψ, χ die einfachsten Voraussetzungen gemacht werden. Setzt man beispielsweise

$$\varphi(y') = \psi(y') = 1, \quad \chi(y') = -1,$$

so geht die Gleichung 1a) über in

$$x + y - (xy' - y)^m = 0$$

oder

$$y' = \frac{y + \sqrt[m]{x+y}}{x}.$$

Die Gleichung 2a) hat bei diesen Annahmen die Gestalt

$$\frac{dv}{du} = \frac{v + v^m}{1+u}$$

und man gewinnt aus ihr das Integral

$$v = (1+u)\{C - (1+u)^{m-1}\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (C = const.).$$

Führt man diesen Werth von v in die vorletzte Gleichung ein, so erhält man nach einfacher Zusammenziehung

$$\frac{dv}{du} = C.\{C - (1+u)^{m-1}\}^{\frac{m}{1-m}}.$$

Da nun $\frac{dv}{du} = x$ und $u = y'$, so ist

$$x = C.\left\{C - \left(1 + \frac{y + \sqrt[m]{x+y}}{x}\right)^{m-1}\right\}^{\frac{m}{1-m}}$$

das allgemeine Integral der zu lösenden Differentialgleichung.

In der That wird sich auch hier für ein allgemeines m die Constante nicht explicite als Function von x und y darstellen lassen, und aus diesem Grunde wird überhaupt die Gleichung 1a) im Allgemeinen keinen hinschreibbaren integrirenden Factor besitzen.

Was endlich den besondern Fall betrifft, in welchem die Beziehung

$$\varphi(y') + y'\psi(y') = 0$$

stattfindet, so können hier die Gleichungen 2) und 2a) nicht verwendet werden. Unter diesen Umständen reduciren sich aber beide Differentialgleichungen 1) und 1a) auf die folgende:

$$(xy' - y) = F(y'),$$

welche unter dem Namen „Clairaut'sche Form" bekannt ist.

Dresden, im December 1878. WOLDEMAR HEYMANN, Stud. math.

XVII. Elementarer Beweis eines Satzes der Mechanik auf geometrischem Wege.

(Hierzu Taf. III Fig. 5.)

Der grundlegende Satz, dass die Centrifugalkraft eines ebenen Systems von Massenpunkten, welches um eine senkrecht gegen die Ebene gerichtete Axe rotirt, der Grösse und Richtung nach gleich ist der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse, wird in den elementaren Lehrbüchern stets auf umständliche Weise abgeleitet, da die Coordinatenmethode noch nicht vorausgesetzt werden darf.

Höchst einfach ergiebt er sich aus folgendem geometrischen Satze: Theilt man zwei aneinanderstossende Parallelogrammseiten vom Eckpunkte aus im Verhältniss $1:m$, resp. $1:m_1$, und verbindet man die Schnittpunkte, so wird die Verbindungslinie durch die Diagonale im Verhältniss $m_1:m$, die Diagonale selbst im Verhältniss $1:(m+m_1)$ getheilt.

Beweis. In der Figur setze man $AE = \frac{AB}{m} = x$, $AF = \frac{AD}{m_1} = y$ und ziehe $BH \parallel EF$. Dann folgt aus der Aehnlichkeit von AEF und ABH, dass $AH = my$ ist. Folglich ist $GH:GB = AH:BC = m:m_1$, also auch $ES:FS = m_1:m$, wie behauptet war. Ferner ist auch $AG:GC = m:m_1$, folglich $AG:AC = m:m+m_1$, aber $AS:AG = 1:m$, folglich, wie behauptet, $AS = \frac{AG}{m} = \frac{AC}{m+m_1}$.

Anwendung. In E befinde sich die Masse m, in F die Masse m_1, A sei die Rotationsaxe, dann sind die Centrifugalkräfte $mx\vartheta^2$ in der Richtung AB und $m_1y\vartheta^2$ in der Richtung AD. Die Winkelgeschwindigkeit ϑ ist für beide Punkte dieselbe, kann also gleich der Einheit gesetzt werden, dann stellen AB und AD die Centrifugalkräfte auch der Grösse nach dar, und AC ist die Resultante. Letztere Linie theilt aber nach Obigem EF im Verhältniss $m_1:m$, geht also durch den Schwerpunkt S. Ferner ist nach Obigem $AC = (m+m_1)AS$, ein Ausdruck, welcher übereinstimmt mit der Centrifugalkraft der Masse $(m+m_1)$ im Punkte S bei der Winkelgeschwindigkeit 1.

Für zwei Massenpunkte ist also der Satz bewiesen und kann nach bekannter Methode auf 3, 4, ... n Punkte ausgedehnt werden.

Hagen. Director Dr. HOLZMÜLLER.

XVIII. Isometrische Coordinaten auf der Kugelfläche.

Sei k der Modul der elliptischen Functionen mit dem Argument u, k' der Modul für das Argument v. Es bedeuten k und k' Complementärmoduli, so dass $k^2+k'^2=1$. Wird der Mittelpunkt einer Kugelfläche mit dem Halbmesser g zum Anfangspunkt orthogonaler Coordinaten x, y und z genommen, so ist

$$x^2+y^2+z^2=g^2.$$

Dieser Gleichung wird durch folgende Werthe von x, y und z genügt:

$$1)\quad x=g\,\sin am\,u\,\Delta am\,v,\quad y=g\,\Delta am\,u\,\sin am\,v,\quad z=g\cos am\,u\cos am\,v.$$

Diese Gleichungen geben

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=0,$$

$$2)\quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$
$$=g^2(1-k^2\sin^2 am\,u-k'^2\sin^2 am\,v).$$

Durch die vorstehenden Gleichungen ist bekanntlich ein System isometrischer Coordinaten charakterisirt. Sieht man allgemein u und v als Functionen von p und q an, so reduciren sich die Gleichungen

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0,$$

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+\left(\frac{dz}{dq}\right)^2$$

infolge der Gleichungen 2) auf

$$\frac{du}{dp}\frac{du}{dq}+\frac{dv}{dp}\frac{dv}{dq}=0,\quad \left(\frac{du}{dp}\right)^2+\left(\frac{dv}{dp}\right)^2=\left(\frac{du}{dq}\right)^2+\left(\frac{dv}{dq}\right)^2.$$

Diese Gleichungen geben

$$\frac{du}{dp}=\pm\frac{dv}{dq},\quad \frac{du}{dq}=\mp\frac{dv}{dp}.$$

Es genügen also u und v beide der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dp^2}+\frac{d^2w}{dq^2}=0.$$

Göttingen. Professor ENNEPER.

XVI.

Geometrie der Kreise in der Ebene.

Von

R. Mehmke,

Stud. math.

Statt der Punkte oder geraden Linien können die Individuen irgend einer Art von Curven als Elemente eines ebenen Systems aufgefasst werden. Vom Punkte und der Geraden, als den einfachsten geometrischen Gebilden, zum Höheren aufsteigend, liegt es jedenfalls am nächsten, den Kreis zum Element der Ebene zu wählen. Die aus dieser Annahme entspringende Geometrie, die Geometrie der Kreise in der Ebene, in ihren wesentlichsten Umrissen darzustellen, ist der Zweck des folgenden kleinen Versuchs.

Was die Beweise der aufgestellten Sätze anbetrifft, so sind dieselben, wie mir scheint, am einfachsten mit Hilfe der in Grassmann's Ausdehnungslehre enthaltenen Methoden zu leisten. Da jedoch diese Methoden trotz ihrer Einfachheit noch keine solche Verbreitung gefunden zu haben scheinen, dass man sie als hinreichend bekannt voraussetzen könnte, so glaube ich von der Mittheilung der Beweise absehen zu müssen.

1.

Es ist nothwendig, bei jedem Kreise den Sinn festzuhalten, in welchem er, als geometrischer Ort gedacht, vom erzeugenden Punkte durchlaufen wird. Setzt man einen bestimmten Sinn als den positiven fest, so hat man positive und negative, gleichsinnige und gegensinnige Kreise zu unterscheiden. Unter dem Winkel zweier Kreise versteht man immer, gleichviel ob sie sich reell schneiden oder nicht, die durch die Gleichung

$$\varphi = arccos\left(\pm\frac{r^2+r_1^2-d^2}{2rr_1}\right)$$

bestimmte Grösse φ, wo r und r_1 die Halbmesser der beiden Kreise sind, d die Entfernung ihrer Mittelpunkte bezeichnet und das $+$- oder $-$-Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Kreise gleich- oder gegensinnig sind. Zwei Kreise heissen normal zu einander, wenn der Cosinus ihres Winkels 0 ist. Die Ausartungen der Kreise in Punkte oder gerade Linien sollen vorläufig von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.

2.

Unter einem Kreisnetz versteht man bekanntlich die Gesammtheit der zweifach unendlich vielen Kreise, welche zu einem gegebenen Kreise normal sind. Letzterer möge der Polarkreis jenes Netzes heissen und das Netz selbst das Polarnetz des Kreises.

Der Kreisbüschel erklärt sich dann als die Gesammtheit aller Kreise, welche zu zwei gegebenen Kreisen normal sind oder zwei gegebenen Netzen, den Polarnetzen jener Kreise, zugleich angehören. Die Polarnetze aller Kreise eines Büschels haben ein und denselben Büschel gemeinschaftlich, welcher der Polarbüschel des ersteren heissen soll. Polarkreis eines gegebenen Büschels in einem diesen Büschel enthaltenden Netze möge derjenige Kreis genannt werden, welchen der Polarbüschel des gegebenen mit jenem Netz gemeinschaftlich hat und welcher daher zu allen Kreisen des Büschels normal ist. In zwei Polarbüscheln ist jeder Kreis des einen Büschels normal zu jedem Kreise des andern.

3.

Die ganze Kreisgeometrie wird beherrscht vom Gesetz der Reciprocität, nach welchem der Kreisbüschel sich selbst, Kreis und Kreisnetz sich gegenseitig entsprechen. Ebenso besteht im Netze vollkommene Reciprocität zwischen Kreis und Kreisbüschel. Dieses Gesetz erstreckt sich gleichmässig auf metrische, wie auf rein projectivische Beziehungen.

Ueber die gegenseitige Lage von Kreisen, Büscheln und Netzen seien nur einige wenige Sätze angeführt:

Durch zwei Kreise ist ein Büschel bestimmt (der Verbindungsbüschel).

Zwei Netze haben einen Büschel gemeinschaftlich (den Schnittbüschel).

Durch drei nicht einem und demselben Büschel angehörige Kreise ist ein Netz bestimmt (das Verbindungsnetz).

Drei nicht durch einen und denselben Büschel gehende Netze haben einen Kreis gemeinschaftlich (den Schnittkreis).

Zwei Büschel haben im Allgemeinen keinen Kreis gemeinschaftlich (sie schneiden sich im Allgemeinen nicht).

Durch zwei sich schneidende Büschel ist ein Netz bestimmt.

Zwei Büschel eines Netzes haben einen Kreis gemeinschaftlich.

Die Polarnetze aller Kreise eines Netzes haben einen einzigen Kreis,

Die Polarkreise aller Netze, welche einen Kreis gemein haben, bilden

den Polarkreis des Netzes, gemeinschaftlich.

Die Polarkreise aller einen gegebenen Büschel enthaltenden Netze bilden einen Büschel, den Polarbüschel des ersteren.

ein Netz, das Polarnetz jenes Kreises.

Die Polarnetze aller Kreise eines Büschels haben einen Büschel gemeinschaftlich, den Polarbüschel des ersteren.

4.

Ein Büschel heisse normal zu einem Netze, wenn er den Polarkreis des Netzes enthält. Alle Büschel, die einen gegebenen Kreis enthalten, sind hiernach normal zum Polarnetz dieses Kreises; dagegen giebt es nur einen bestimmten Büschel, der durch einen gegebenen Kreis geht und zu einem gegebenen Netze normal ist, sofern der Kreis und das Netz nicht polar sind. Der Schnittkreis dieses Büschels mit dem gegebenen Netze soll die normale Projection des gegebenen Kreises auf das Netz heissen. Unter der normalen Projection eines Kreises auf einen Büschel sei ferner derjenige Kreis des Büschels verstanden, dessen Verbindungsbüschel mit dem gegebenen Kreise den Polarbüschel des gegebenen schneidet. — Unter dem Winkel zweier Netze verstehe ich den Winkel ihrer Polarkreise, unter dem Winkel eines Kreises und eines Netzes den Winkel des Kreises mit seiner Normalprojection auf das Netz; ferner unter dem Winkel eines Kreises und eines Büschels den Winkel des Kreises mit seiner normalen Projection auf den Büschel. Endlich soll der Winkel zweier Büschel eines Netzes gleichbedeutend sein mit dem Winkel ihrer Polarkreise in diesem Netze. (Der Winkel zweier Kreise, Büschel oder Netze wird im Folgenden einfach durch Nebeneinanderstellen der für sie gewählten Buchstaben bezeichnet.)

Man kann in demselben Sinne, wie in der Geometrie der Punkte und Geraden, vom Doppelverhältniss von vier Kreisen eines Büschels, oder von vier Büscheln eines Netzes, die sich in einem Kreise schneiden, oder von vier Netzen, die sich in einem Büschel schneiden, sprechen. So lange es nur auf projectivische Eigenschaften ankommt, bestehen zwischen Kreisen, Kreisbüscheln und Kreisnetzen in der Ebene genau dieselben Beziehungen, wie zwischen Punkten, Geraden und Ebenen in der Euklidischen Raumgeometrie.

5.

Mittelkreis eines Systems von Kreisen.

Zu n beliebigen Kreisen K_1, K_2, ... K_n, von denen jeder (K_r) mit einem beliebigen reellen Zahlcoefficienten oder Gewicht (m_r) versehen ist, lässt sich immer (ausser in einem später zu bezeichnenden Falle) ein bestimmter Kreis K finden, welcher die Eigenschaft hat, dass für jedes diesen Kreis enthaltende Netz N, und nur für solche, die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{r=n} m_r \sin(K_r N) = 0$$

statt hat. Dieser Kreis möge der Mittelkreis jenes Systems von Kreisen genannt werden. Es lässt sich ferner ein bestimmtes, im Allgemeinen von 0 verschiedenes reelles Gewicht m angeben, so dass, wenn N ein beliebiges Netz bezeichnet,

$$m \sin(K N) = \Sigma m_r \sin(K_r N),$$

welche Gleichung die vorhergehende als speciellen Fall in sich schliesst. Für m, das Gewicht des Mittelkreises, hat man die Gleichungen

$$m = \Sigma\; m_r \cos(K_r K),$$
$$m^2 = \sum_{r,s} m_r m_s \cos(K_r K_s) \quad \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n\Big).$$

Wenn ferner C ein beliebiger Kreis, so ist

$$m \cos(K C) = \Sigma m_r \cos(K_r C)$$

oder

$$\cos(K C) = \frac{\Sigma m_r \cos(K_r C)}{\Sigma m_r \cos(K_r K)}$$

und

$$m \sin^2\left(\frac{KC}{2}\right) = \Sigma m_r \sin^2\left(\frac{K_r C}{2}\right) - \Sigma m_r \sin^2\left(\frac{K_r K}{2}\right).$$

Für alle Kreise C, welche den Mittelkreis K unter dem gleichen Winkel schneiden, hat man folglich

$$\Sigma m_r \cos(K_r C) = const., \quad \Sigma m_r \sin^2\left(\frac{K_r C}{2}\right) = const.$$

und ebenso für alle Netze N, deren Winkel mit K constant bleibt:

$$\Sigma m_r \sin(K_r N) = const.$$

(Man bemerke noch Folgendes: Wenn $R_1, R_2, \ldots R_n, R$ die Halbmesser, $M_1, M_2, \ldots M_n, M$ die Mittelpunkte der Kreise $K_1, K_2, \ldots K_n, K$ sind, so ist M nichts Anderes, als der Schwerpunkt der mit den Gewichten $\frac{m_1}{R_1}, \frac{m_2}{R_2}, \ldots \frac{m_n}{R_n}$ versehen gedachten Mittelpunkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ und $\frac{m}{R}$ das Gewicht von M. Wenn ferner p_r die Potenz des Mittelpunktes M in Bezug auf den Kreis K_r bedeutet, so hat man

$$m R = -\Sigma m_r \frac{p_r}{R_r} \quad \text{oder} \quad R^2 = -\frac{\Sigma m_r \frac{p_r}{R_r}}{\Sigma \frac{m_r}{R_r}}\Bigg).$$

Wenn die Kreise $K_1 \dots K_n$ alle in einem und demselben Netze liegen, so liegt auch ihr Mittelkreis K in diesem Netze und es gilt alsdann für jeden demselben Netze angehörigen Büschel B die Gleichung

$$m \sin(KB) = \Sigma m_r \sin(K_r B).$$

Es kann der Fall eintreten, dass der Mittelkreis K unbestimmt wird oder, wie man sich ausdrücken kann, die Kreise $K_1 \dots K_n$ im Gleichgewicht sich befinden. Alsdann hat man, wenn N ein beliebiges Netz und C einen beliebigen Kreis bezeichnet:

$$\Sigma m_r \sin(K_r N) = 0, \quad \Sigma m_r \cos(K_r C) = 0$$

und

$$\Sigma m_r \sin\left(\frac{K_r C}{2}\right) = const. = \Sigma \frac{m_r}{2}.$$

Umgekehrt sind die Kreise $K_1 \dots K_n$ nothwendig im Gleichgewicht, wenn in Bezug auf vier sich nicht in einem Kreise schneidende Netze N

$$\Sigma m_r \sin(K_r N) = 0$$

oder vier nicht in einem Netze liegende Kreise C

$$\Sigma m_r \cos(K_r C) = 0$$

ist. Es ist klar, dass, wenn man zu dem System der Kreise $K_1 \dots K_n$ ihren Mittelkreis K mit dem Gewichte $-m$ hinzufügt, alsdann das neue System im Gleichgewicht ist. Mit Hilfe des schon mitgetheilten Reciprocitätsgesetzes lassen sich alle vorhergehenden Theoreme unmittelbar auf Büschel eines Netzes übertragen.

6.

Dreipass.

Den Inbegriff dreier beliebigen, nicht einem und demselben Büschel angehörenden Kreise nebst ihren drei Verbindungsbüscheln, den Seitenbüscheln, nenne ich einen Dreipass. (Der Name ist aus der gothischen Ornamentik entlehnt, wo er eine ähnliche Bedeutung hat.) Es seien K_1, K_2, K_3 drei beliebige, einen Dreipass bildende Kreise und man nenne die Seitenbüschel $\overline{K_2 K_3}$, $\overline{K_3 K_1}$, $\overline{K_1 K_2}$ bezüglich B_1, B_2, B_3. Man hat vor Allem folgende zwei Reihen von Gleichungen, von welchen die eine aus der andern durch das Princip der Reciprocität abgeleitet werden kann, nämlich

$$\begin{aligned} \sin(K_2 K_3) \sin(B_1 K_1) &= \sin(K_3 K_1) \sin(B_2 K_2) \\ = \sin(K_1 K_2) \sin(B_3 K_3) &= \sin(B_2 B_3) \sin(K_3 K_1) \sin(K_1 K_2) \\ = \sin(B_3 B_1) \sin(K_1 K_2) \sin(K_2 K_3) &= \sin(B_1 B_2) \sin(K_2 K_3) \sin(K_3 K_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin(B_2 B_3) \sin(K_1 B_1) &= \dots = \sin(B_1 B_2) \sin(K_3 B_3) \\ = \sin(K_2 K_3) \sin(B_3 B_1) \sin(B_1 B_2) &= \dots = \sin(K_1 K_2) \sin(B_2 B_3) \sin(B_3 B_1). \end{aligned}$$

Jedes dieser Gleichungssysteme bestimmt eine gewisse Grösse und beide sind für den Dreipass von fundamentaler Wichtigkeit. Die erste soll der

Sinus, die zweite der Polarsinus genannt werden, so dass man die Definitionsgleichungen hat

$$\underline{Sin(K_1 K_2 K_3)} = sin(K_2 K_3)\, sin(B_1 K_1) = \ldots$$
$$\ldots = sin(B_2 B_3)\, sin(K_3 K_1)\, sin(K_1 K_2) = \ldots,$$
$$\underline{Pols(K_1 K_2 K_3)} = sin(B_2 B_3)\, sin(K_1 B_1) = \ldots$$
$$\ldots = sin(K_2 K_3)\, sin(B_3 B_1)\, sin(B_1 B_2) = \ldots.$$

Von den zahlreichen im Dreipass stattfindenden Beziehungen führe ich nur an

$$Sin\,(K_1 K_2 K_3) = \frac{sin(K_2 B_2)\, sin(K_3 B_3)}{sin(B_2 B_3)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{sin(K_1 B_1)\, sin(K_2 B_2)\, sin(K_3 B_3)}{Pols(K_1 K_2 K_3)},$$
$$Sin^2(K_1 K_2 K_3) = sin(K_2 K_3)\, sin(K_3 K_1)\, sin(K_1 K_2)\, Pols(K_1 K_2 K_3),$$
$$Pols(K_1 K_2 K_3) = \frac{sin(B_2 K_2)\, sin(B_3 K_3)}{sin(K_2 K_3)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{sin(B_1 K_1)\, sin(B_2 K_2)\, sin(B_3 K_3)}{Sin(K_1 K_2 K_3)},$$
$$Pols^2(K_1 K_2 K_3) = sin(B_2 B_3)\, sin(B_3 B_1)\, sin(B_1 B_2)\, Sin(K_1 K_2 K_3),$$
$$\frac{Sin(K_1 K_2 K_3)}{Pols(K_1 K_2 K_3)} = \frac{sin(K_2 K_3)}{sin(B_2 B_3)} = \frac{sin(K_3 K_1)}{sin(B_3 B_1)} = \frac{sin(K_1 K_2)}{sin(B_1 B_2)}.$$

Eine fundamentale Gleichung ist auch

$$cos(K_2 K_3) = cos(K_3 K_1)\, cos(K_1 K_2) - sin(K_3 K_1)\, sin(K_1 K_2)\, cos(B_2 B_3),$$

welche zeigt, dass eine vollkommene Analogie zwischen dem Dreipass und dem sphärischen Dreieck besteht.

Wird zu jedem Seitenbüschel eines Dreipasses in dem durch die Kreise desselben bestimmten Netze der Polarkreis construirt, so entsteht ein neuer Dreipass, der Polardreipass des ersteren. Die Beziehung zwischen Dreipass und Polardreipass ist eine gegenseitige; der Sinus eines jeden von beiden Dreipässen ist gleich dem Polarsinus des andern.

7.

Dreinetz, Vierpass.

Die Polarnetze der Kreise eines Dreipasses nebst ihren drei Schnittbüscheln bilden, was man ein Dreinetz, und zwar das Polardreinetz des gegebenen Dreipasses nennen kann. Das Dreinetz hat dieselben Eigenschaften, wie der Dreipass, und man kann ebenfalls von einem Sinus und Polarsinus des Dreinetzes sprechen, wo der Sinus gleich dem Polarsinus und der Polarsinus gleich dem Sinus des zugehörigen Polardreipasses ist. Der Inbegriff von vier Kreisen nebst ihren vier Verbindungsnetzen (Seitennetzen) und sechs Verbindungsbüscheln (Kantenbüscheln) soll ein Vierpass genannt werden. Es seien K_1, K_2, K_3, K_4

die einen Vierpass bildenden Kreise und die Seitennetze $\overline{K_2 K_3 K_4}$, $\overline{K_3 K_4 K_1}$, ... $\overline{K_1 K_2 K_3}$ werden der Reihe nach bezeichnet mit $N_1 N_2 N_3 N_4$.

Sinus und Polarsinus nenne ich dann die, wie folgt, definirten Grössen:

$$Sin\ (K_1 \dots K_4) = Sin\ (K_2 K_3 K_4)\ sin (K_1 N_1),$$
$$Pols\ (K_1 \dots K_4) = Pols\ (N_2 N_3 N_4)\ sin (K_1 N_1).$$

Zur Abkürzung sollen im Folgenden die Dreipässe $\overline{K_2 K_3 K_4}$, ... $\overline{K_1 K_2 K_3}$ bez. durch $\mathfrak{P}_1$, ... $\mathfrak{P}_4$, die Dreinetze $\overline{N_2 N_3 N_4}$, ... $\overline{N_1 N_2 N_3}$ durch $\mathfrak{N}_1$, ... $\mathfrak{N}_4$ bezeichnet und ferner soll

$$(K_r K_s) = a_{rs}, \quad (N_r N_s) = \alpha_{rs},$$
$$(K_r N_r) = h_r, \quad \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix} = 1, 2, 3, 4\right)$$

und endlich

$$(K_1 K_2 K_3 K_4) = P$$

gesetzt werden. Man hat dann, um einige der einfachsten Beziehungen hervorzuheben:

$$\begin{aligned}
Sin\, P &= Sin\, \mathfrak{P}_1\, sin\, h_1 \quad \text{(Definition)} \\
&= Sin\, \mathfrak{P}_2\, sin\, h_2 = \dots = Sin\, \mathfrak{P}_r\, sin\, h_r \\
&= Sin\, \mathfrak{N}_1\, sin\, a_{12}\, sin\, a_{13}\, sin\, a_{14} = \dots \\
&= \frac{Sin\, \mathfrak{P}_2\, Sin\, \mathfrak{P}_3\, sin\, \alpha_{23}}{sin\, a_{14}} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, a_{14}}{sin\, \alpha_{23}} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, h_4}{Pols\, \mathfrak{N}_1} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_1\, sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, h_4}{Pols\, P},
\end{aligned}$$

$$Sin^2 P = Sin\, \mathfrak{P}_2\, Sin\, \mathfrak{P}_3\, Sin\, \mathfrak{P}_4\, Pols\, \mathfrak{N}_1 = \dots,$$
$$Sin^3 P = Sin\, \mathfrak{P}_1\, Sin\, \mathfrak{P}_2\, Sin\, \mathfrak{P}_3\, Sin\, \mathfrak{P}_4\, Pols\, P,$$

ferner

$$\begin{aligned}
Pols\, P &= Pols\, \mathfrak{N}_1\, sin\, h_1 \quad \text{(Definition)} \\
&= Pols\, \mathfrak{N}_2\, sin\, h_2 = \dots \\
&= Pols\, \mathfrak{P}_1\, sin\, \alpha_{12}\, sin\, \alpha_{13}\, sin\, \alpha_{14} = \dots \\
&= \frac{Pols\, \mathfrak{N}_2\, Pols\, \mathfrak{N}_3\, sin\, a_{23}}{sin\, \alpha_{14}} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, \alpha_{14}}{sin\, a_{23}} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, h_4}{Sin\, \mathfrak{P}_1} = \dots \\
&= \frac{sin\, h_1\, sin\, h_2\, sin\, h_3\, sin\, h_4}{Sin\, P},
\end{aligned}$$

$$Pols^2 P = Pols\, \mathfrak{N}_2\, Pols\, \mathfrak{N}_3\, Pols\, \mathfrak{N}_4\, Sin\, \mathfrak{P}_1,$$
$$Pols^3 P = Pols\, \mathfrak{N}_1\, Pols\, \mathfrak{N}_2\, Pols\, \mathfrak{N}_3\, Pols\, \mathfrak{N}_4\, Sin\, P,$$

$$\frac{Sin\,P}{Pols\,P}=\frac{Sin\,\mathfrak{P}_1}{Pols\,\mathfrak{R}_1}=\frac{Sin\,\mathfrak{P}_2}{Pols\,\mathfrak{R}_2}=\dots$$
$$=\frac{sin\,a_{12}\,sin\,a_{34}}{sin\,\alpha_{34}\,sin\,\alpha_{12}}=\dots$$
$$=\frac{sin\,h_1\,sin\,h_2}{Pols\,\mathfrak{R}_3\,Pols\,\mathfrak{R}_4}=\dots$$
$$=\frac{Sin\,\mathfrak{P}_3\,Sin\,\mathfrak{P}_4}{sin\,h_1\,sin\,h_2}=\dots.$$

Die Polarkreise der Seitennetze eines Vierpasses bilden einen neuen Vierpass, den Polarvierpass des ersteren, dessen Sinus gleich dem Polarsinus und dessen Polarsinus gleich dem Sinus des gegebenen Vierpasses ist.

8.

Fünf nicht in demselben Netze liegende Kreise sind im Gleichgewicht, wenn man jedem den Sinus des durch die vier übrigen gebildeten Vierpasses als Gewicht zuertheilt. Reciprok dazu: Fünf sich nicht in einem Kreise schneidende Netze sind im Gleichgewicht, wenn jedes mit dem Polarsinus des von den vier anderen gebildeten Vierpasses versehen gedacht wird.

Vier in einem Netze liegende Kreise sind im Gleichgewicht, wenn jeder ein Gewicht gleich dem Sinus des durch die drei übrigen gebildeten Dreipasses hat.

Vier durch einen Kreis gehende Netze sind im Gleichgewicht, wenn jedes ein Gewicht gleich dem Polarsinus des durch die drei übrigen gebildeten Dreinetzes hat.

Vier in einem Netze liegende Büschel sind im Gleichgewicht, wenn jeder den Polarsinus des durch die drei übrigen bestimmten Dreipasses zum Gewicht hat.

Wenn K_1, K_2, K_3 drei beliebige Kreise sind, deren Verbindungsnetz M heisse, und C_1, C_2, C_3 die normalen Projectionen jener Kreise auf ein beliebiges Netz N bedeuten, so ist

$$Sin\,(C_1\,C_2\,C_3)=\frac{Sin\,(K_1\,K_2\,K_3)\,cos\,(M\,N)}{cos\,(C_1\,K_1)\,cos\,(C_2\,K_2)\,cos\,(C_3\,K_3)}.$$

Wenn K_1, K_2 zwei beliebige Kreise und C_1, C_2 ihre normalen Projectionen auf einen beliebigen Büschel B bezeichnen, welcher den Verbindungsbüschel A der zwei ersten Kreise schneidet, so ist

$$sin\,(C_1\,C_2)=\frac{sin\,(K_1\,K_2)\,cos\,(A\,B)}{cos\,(C_1\,K_1)\,cos\,(C_2\,K_2)}.$$

9.

Coordinatensystem. Analytische Fundamentalformeln.

Man kann einen beliebigen Vierpass als Coordinatensystem zu Grunde legen. Es vereinfachen sich jedoch alle Formeln beträchtlich, wenn man statt eines beliebigen einen durchaus normalen Vierpass annimmt, d. h. einen solchen, in welchem je zwei der vier ihn bildenden Kreise normal zu einander sind.

Es seien C_1, C_2, C_3, C_4 die Kreise eines solchen Normalvierpasses, die Fundamentalkreise, also

$$\cos(C_1 C_2) = \cos(C_2 C_3) = \ldots = \cos(C_4 C_1) = 0.$$

Dann verstehe ich unter den Coordinaten eines Kreises X in diesem normalen Coordinatensystem die *cos* der Winkel, welche der Kreis X mit den Fundamentalkreisen C einschliesst:

$$x_i = \cos(X C_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ferner unter den Coordinaten eines Netzes U die *sin* der Winkel, gebildet von U mit den Fundamentalkreisen:

$$u_i = \sin(U C_i).$$

Da schon drei Coordinaten zur Bestimmung eines Kreises oder eines Netzes ausreichend sein würden, so muss zwischen den vier homogenen Coordinaten x_i eines jeden Kreises X ebenso, wie zwischen denjenigen eines jeden Netzes U eine Beziehung stattfinden. In der That hat man

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1.$$

(Man bemerke noch: x_1, x_2, x_3, x_4, 1 sind die Gewichte, welche man den Kreisen C_1, C_2, C_3, C_4, X zuertheilen müsste, damit sie im Gleichgewicht wären, und Aehnliches gilt für die Coordinaten eines Netzes. Wenn $r_1 \ldots r_4$ die Halbmesser der Fundamentalkreise sind und R den Halbmesser von X bezeichnet, so ist daher

$$\frac{1}{R} = \frac{x_1}{r_1} + \ldots + \frac{x_4}{r_4}\Big).$$

Winkel zweier Kreise X und Y.

$$\cos(XY) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4,$$

$$\sin^2(XY) = (x_2 y_3)^2 + (x_3 y_4)^2 + (x_4 y_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_1 y_3)^2 + (x_1 y_4)^2$$

$$[(x_2 y_3) = x_2 y_3 - x_3 y_2 \text{ u. s. w.}],$$

$$4\sin^2\left(\frac{XY}{2}\right) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2,$$

$$4\cos^2\left(\frac{XY}{2}\right) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 + (x_4 + y_4)^2.$$

Winkel zweier Netze U und V.

$$\cos(UV) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4,$$

$$\sin^2(UV) = (u_2 v_3)^2 + (u_3 v_4)^2 + (u_4 v_2)^2 + (u_1 v_2)^2 + (u_1 v_3)^2 + (u_1 v_4)^2,$$

$$4\sin^2\left(\frac{UV}{2}\right) = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2,$$

$$4\cos^2\left(\frac{UV}{2}\right) = (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2 + (u_4 + v_4)^2.$$

Winkel eines Kreises X mit einem Netze U.

$$\sin(XU) = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4,$$
$$\cos^2(XU) = (x_2 u_3)^2 + (x_3 u_4)^2 + (x_4 u_2)^2 + (x_1 u_2)^2 + (x_1 u_3)^2 + (x_1 u_4)^2.$$

Sinus eines Dreipasses XYZ.

$$Sin^2(XYZ) = (x_2 y_3 z_4)^2 + (x_3 y_4 z_1)^2 + (x_4 y_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 z_3)^2.$$

Polarsinus eines Dreinetzes (UVW).

$$Pols^2(UVW) = (u_2 v_3 w_4)^2 + (u_3 v_4 w_1)^2 + (u_4 v_1 w_2)^2 + (u_1 v_2 w_3)^2.$$

Sinus eines Vierpasses $(XYZT)$.

$$Sin(XYZT) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}.$$

Polarsinus eines Vierpasses mit den Seitennetzen U, V, W, Ω.

$$Pols(UVW\Omega) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix}.$$

10.

Sinus eines Büschelpaares. Coordinaten eines Büschels.

Nimmt man in jedem von zwei sich nicht schneidenden Büscheln P und Q zwei beliebige Kreise an, im ersten etwa die Kreise K und C, im zweiten K_1 und C_1, so ist der Quotient

$$\frac{Sin(KCK_1C_1)}{\sin(KC)\sin(K_1C_1)}$$

eine nur von der gegenseitigen Lage der Büschel P und Q abhängige Grösse, welche der Sinus des Büschelpaares (PQ) heissen soll. Als Coordinaten eines Büschels P sollen die $Sin\, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34}, p_{42}$ der sechs Büschelpaare, gebildet aus P und je einem Kantenbüschel des normalen Coordinatenvierpasses, angenommen werden. Da ein Büschel schon durch vier Bestimmungsstücke gegeben ist, so müssen zwischen den sechs homogenen Coordinaten p eines jeden Büschels P zwei Bedingungsgleichungen stattfinden. Diese sind

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0, \quad p^2_{12} + p^2_{13} + p^2_{14} + p^2_{23} + p^2_{34} + p^2_{42} = 1.$$

Der Sinus eines Büschelpaares (PQ), ausgedrückt durch die Coordinaten von P und Q, ist

$$Sin(PQ) = p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14}.$$

11.

Die Bedingungen dafür, dass vier Kreise X, Y, Z, T einem Netze angehören, ferner dass vier Netze U, V, W, Ω einen Kreis gemeinschaftlich haben; endlich dass zwei Büschel P und Q sich schneiden, sind

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0.$$

Gleichung eines Netzes, eines Kreises und eines Büschels.

Eine Gleichung der Form

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

stellt entweder ein Netz mit den Coordinaten

$$\varrho u_1, \ \varrho u_2, \ \varrho u_3, \ \varrho u_4 \quad [\varrho^2 = 1 : (u_1^2 + \dots + u_4^2)]$$

oder einen Kreis mit den Coordinaten

$$\sigma x_1, \ \sigma x_2, \ \sigma x_3, \ \sigma x_4 \quad [\sigma^2 = 1 : (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)]$$

vor, je nachdem die x oder die u als veränderlich angesehen werden.

Durch eine Gleichung

$$q_{12}p_{34} + q_{13}p_{42} + \dots + q_{23}p_{14} = 0$$

endlich wird, wenn die p die Coordinaten eines veränderlichen Büschels sind, der Büschel Q mit den Coordinaten

$$\lambda q_{12}, \ \lambda q_{13}, \ \dots \ \lambda q_{42} \quad [\lambda^2 = 1 : (q^2_{12} + q^2_{13} + \dots + q^2_{42})]$$

vorgestellt. Netz, Kreis und Büschel besitzen alle homogene lineare Gleichungen.

Das Verbindungsnetz dreier Kreise X, Y, Z hat in laufenden Coordinaten ξ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ferner ist die Gleichung des Schnittkreises dreier Netze U, V, W in laufenden Coordinaten ω

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten des Verbindungsbüschels P zweier Kreise X und Y sind

$$
\begin{aligned}
\varrho p_{12} &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\
\varrho p_{13} &= x_1 y_3 - x_3 y_1, \\
&\;\vdots \qquad\qquad [\varrho = \sin(XY)] \\
\varrho p_{42} &= x_4 y_2 - x_2 y_4.
\end{aligned}
$$

Endlich hat der Schnittbüschel Q zweier Netze U und V die Coordinaten

$$
\begin{aligned}
\sigma q_{12} &= u_3 v_4 - u_4 v_3, \\
\sigma q_{13} &= u_4 v_2 - u_2 v_4, \\
&\;\vdots \qquad\qquad [\sigma = \sin(UV)] \\
\sigma q_{42} &= u_1 v_3 - u_3 v_1.
\end{aligned}
$$

Es sind im Vorhergehenden die Mittel an die Hand gegeben, die Kreisgeometrie analytisch zu behandeln.

12.

Beziehungen zwischen Kreisgeometrie und Nicht-Euklidischer Geometrie.

In allen metrischen Sätzen, in welchen nur Winkel von Kreisen, Büscheln oder Netzen und ihre trigonometrischen Functionen, sowie daraus abgeleitete Grössen (*Sin*, *Pols*) vorkommen, zeigt die Geometrie der Kreise in der Ebene die vollkommenste Uebereinstimmung mit der Nicht-Euklidischen Geometrie des Raumes. Es lassen sich nämlich die Ebene und ein hyperbolischer Raum auf fünffach unendlich viele Arten so zuordnen, dass jedem Kreise, Kreisbüschel, Kreisnetze in der Ebene resp. eine Ebene, Gerade, ein Punkt im Raume eindeutig entsprechen, und zwar so, dass der Winkel irgend zweier Kreise oder Kreisgebilde in der Ebene gleich dem Winkel der entsprechenden Gebilde im hyperbolischen Raume ist.

Hierbei sind den Punkten der Ebene, als Kreisen mit verschwindendem Halbmesser, die Tangentenebenen der absoluten Fläche zugeordnet. Den reellen Kreisen entsprechen im hyperbolischen Raume diejenigen Ebenen, welche die absolute Fläche reell schneiden; den Kreisen mit reellem Mittelpunkt und imaginärem Halbmesser dagegen die idealen Ebenen, d. h. diejenigen, welche ausserhalb der absoluten Fläche liegen. Wenn zwei Kreise sich berühren, so entspricht dem, dass die zugeordneten Ebenen im hyperbolischen Raume parallel sind, d. h. sich nach einer Geraden schneiden, welche die absolute Fläche berührt.

Dieses merkwürdige Uebertragungsprincip erlaubt es, aus Sätzen der Nicht-Euklidischen Geometrie neue Sätze über die Kreise in der Ebene abzuleiten, wofür ich nur wenige, übrigens ganz willkürlich gewählte

Beispiele anführen will. Es existirt z. B. in der Nicht-Euklidischen Geometrie folgender Satz:

Wenn E_1 und E_2 zwei veränderliche Tangentenebenen einer Kugel sind, deren Schnittlinie beständig in einer festen Ebene E liegt, so ist

$$tg\left(\frac{EE_1}{2}\right).tg\left(\frac{EE_2}{2}\right)=const.$$

Hieraus folgt vermöge unseres Uebertragungsprincips: Bewegen sich zwei (auch dem Halbmesser nach) veränderliche Kreise K_1 und K_2 so, dass sie stets mit einem festen Kreise C einen constanten, und zwar beide denselben Winkel einschliessen und sich zugleich immer in zwei Punkten schneiden, die beide auf einem festen Kreise K liegen, so ist

$$tg\left(\frac{KK_1}{2}\right).tg\left(\frac{KK_2}{2}\right)=const.$$

Als zweites Beispiel möge die Uebertragung des Satzes vom Umdrehungsellipsoid dienen, dass, wenn E_1 eine sogenannte cyclische Ebene (das Reciproke eines Brennpunktes) ist und E_2 die absolute Polare des Poles von E_1 in Bezug auf das Ellipsoid, E dagegen irgend eine Tangentenebene desselben, die Gleichung stattfindet

$$\frac{sin(EE_1)}{cos(EE_2)}=const.$$

Sie lautet: Wenn ein veränderlicher Kreis K sich so bewegt, dass die Summe der Winkel, welche er mit zwei festen Kreisen K_1 und C_1 bildet, constant bleibt, so lassen sich zwei durch die Schnittpunkte von K_1 und C_1 gehende Kreise K_2 und C_2 finden von der Eigenschaft, dass für jede Lage des veränderlichen Kreises K

$$\frac{sin(KK_1)}{cos(KK_2)}=\frac{sin(KC_1)}{cos(KC_2)}=const.$$

Aehnliche Beipiele liessen sich noch in Menge angeben.

Alle bisher aufgestellten Sätze, soweit sie nur Aussagen über Schnittwinkel von Kreisen und daraus abgeleitete Grössen enthalten, gelten wörtlich auch für die Kreise auf der Kugel oder überhaupt für die kreisartigen Curven auf den Flächen von constanter Krümmung.

XVII.

Deformation einer unendlich dünnen kreisförmigen ebenen Platte durch die Wärme, wenn die Temperatur der einzelnen Punkte der Platte blos stetige Function der Entfernung vom Mittelpunkte der Platte ist.

Von

Dr. F. Niemöller

in Eisenach.

I. Es ist eine bekannte Erscheinung, dass eine Metallplatte, welche in der Mitte erwärmt wird, oft plötzlich mit knackendem Geräusch ihre Gestalt verändert und aus der labilen Gleichgewichtslage in die stabile übergeht. Diese Erscheinung aus der Kirchhoff-Clebsch'schen Theorie der Deformation elastischer Platten herzuleiten, habe ich im Folgenden versucht. Die Methode und Bezeichnung ist die Kirchhoff'sche.*

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Hauptdilatationen im Punkte xyz eines elastischen Körpers, p_1, p_2, p_3 die daselbst stattfindenden Hauptdrucke, K und θ die Elasticitätsconstanten eines isotropen Körpers, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_1 &= -2K(\lambda_1+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)), \\ p_2 &= -2K(\lambda_2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)), \\ p_3 &= -2K(\lambda_3+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)). \end{aligned} \tag{1}$$

Sind $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten des Punktes xyz nach der Deformation, ferner $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Richtungscosinusse der Hauptdruckaxen, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= x_x = \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= y_y = \beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= z_z = \gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= x_y = \alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3, \end{aligned} \tag{2}$$

---

* Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Vorl. 10, 11, 28, 29, 30.

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}&=y_z=\beta_1\gamma_1\lambda_1+\beta_2\gamma_2\lambda_2+\beta_3\gamma_3\lambda_3,\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}&=z_x=\gamma_1\alpha_1\lambda_1+\gamma_2\alpha_2\lambda_2+\gamma_3\alpha_3\lambda_3. \end{aligned}$$

Endlich finden sich die elastischen Kräfte aus

$$3)\qquad \begin{aligned} X_x&=p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_2^2+p_3\alpha_3^2,\\ Y_y&=p_1\beta_1^2+p_2\beta_2^2+p_3\beta_3^2,\\ Z_z&=p_1\gamma_1^2+p_2\gamma_2^2+p_3\gamma_3^2,\\ Y_z=Z_y&=p_1\beta_1\gamma_1+p_2\beta_2\gamma_2+p_3\beta_3\gamma_3,\\ Z_x=X_z&=p_1\gamma_1\alpha_1+p_2\gamma_2\alpha_2+p_3\gamma_3\alpha_3,\\ X_y=Y_x&=p_1\alpha_1\beta_1+p_2\alpha_2\beta_2+p_3\alpha_3\beta_3. \end{aligned}$$

II. Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass der Ausdehnungscoefficient c des Körpers nach allen Richtungen constant sei. Ist dann im Punkte xyz die Temperatur t, so ist die Dilatation nach allen Richtungen $=ct$. Für uvw gelten also jetzt die Differentialgleichungen, die aus 2) hervorgehen, indem man statt λ_1, λ_2, λ_3 überall setzt λ_1+ct, λ_2+ct, λ_3+ct. Infolge der zwischen den Richtungscosinussen geltenden Relationen bleiben dann die drei letzten der Gleichungen 2) ungeändert, in den drei ersten hat man statt x_x, y_y, z_z resp. zu setzen x_x-ct, y_y-ct, z_z-ct.

Aus dem neuen Gleichungssystem hat man λ_1, λ_2, λ_3 und die Richtungscosinusse zu berechnen, in 1) einzusetzen und mit Hilfe der erhaltenen Werthe aus den Gleichungen 3) die elastischen Kräfte zu finden.

Wie leicht zu sehen, ergiebt sich

$$4)\qquad \begin{aligned} X_x&=-2K\,(x_x+\theta(x_x+y_y+z_z)-ct(1+3\theta)),\\ Y_y&=-2K\,(y_y+\theta(x_x+y_y+z_z)-ct(1+3\theta)),\\ Z_z&=-2K\,(z_z+\theta(x_x+y_y+z_z)-ct(1+3\theta)),\\ Y_x=X_y=-Kx_y,&\quad Z_y=Y_z=-Ky_z,\quad X_z=Z_x=-Kz_x. \end{aligned}$$

Wirken keine äusseren Kräfte und keine Druckkräfte auf die Oberfläche des Körpers, was wir annehmen wollen, so muss die Arbeit der inneren Kräfte bei einer möglichen virtuellen Bewegung in der Gleichgewichtslage verschwinden. Ist daher $d\tau$ ein Volumelement des Körpers und

$$F=\int d\tau(X_x\,\delta x_x+Y_y\,\delta y_y+Z_z\,\delta z_z+Y_z\,\delta y_z+Z_x\,\delta z_x+X_y\,\delta x_y),$$

so muss in der Gleichgewichtslage $\delta F=0$ sein. Ist

$$5)\qquad \begin{aligned} f=x^2{}_x+y^2{}_y+z^2{}_z+\tfrac{1}{2}(x^2{}_y+y^2{}_z+z^2{}_x)+\theta\,(x_x+y_y+z_z)^2\\ -ct(1+3\theta)(x_x+y_y+z_z), \end{aligned}$$

so ist

$$6)\qquad \delta F=-K\delta\int d\tau f=0.$$

III. Es werden von Kirchhoff die Punkte einer Platte von der Dicke $2h$ auf ein rechtwinkliges System $s_1 s_2$ bezogen, welches in die Mittelfläche der im natürlichen Zustand befindlichen Platte fällt. Den Axen dieses Systems parallel sind in jedem Punkte P der Platte zwei Linienelemente ds_1 und ds_2 angenommen; der von ihnen eingeschlossene Winkel unterscheide sich nach der Deformation von 90^0 um τ. Nach der Deformation werden die Punkte bei P auf ein System xyz bezogen, welches dadurch bestimmt ist, dass sein Nullpunkt mit P, seine x-Axe mit ds_1 zusammenfällt und seine xy-Ebene durch ds_2 geht. $\xi\eta\zeta$ sei ein im Raume festes System, welches mit der x-Axe die Richtungscosinusse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, mit der y-Axe $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, mit der z-Axe $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ einschliesst. Durch die Deformation gehe x über in $x+u$, y in $y+v$, z in $z+w$, ds_1 und ds_2 in $ds_1(1+\sigma_1)$ und $ds_2(1+\sigma_2)$; sind dann u_0, v_0, w_0 die Werthe von $u\,v\,w$ im Punkte $x=y=z=0$, ist

$$p_1 = \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1},$$

$$q_1 = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1},$$

$$p_2 = \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2},$$

so zeigt Kirchhoff, dass bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung

$$\text{7)} \quad \begin{aligned} x_x &= q_1 z + \sigma_1, & y_z &= \frac{dv_0}{dz}, \\ y_y &= -p_2 z + \sigma_2, & z_x &= \frac{du_0}{dz}, \\ z_z &= \frac{dw_0}{dz}, & x_y &= -2p_1 z + \tau \end{aligned}$$

ist. Wir setzen diese Werthe in 4) ein und nehmen an, dass die Temperatur t von z unabhängig sei. Aus den Gleichungen

$$\text{8)} \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

und daraus, dass an der Oberfläche Z_x, Z_y, Z_z verschwinden müssen, weil keine Druckkräfte wirken, finden wir dann, dass $Z_z = 0$ sein muss; ferner muss sein

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = -2c \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{dv_0}{dz} = -2c \frac{\partial t}{\partial y} z + \alpha,$$

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = -2c \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{du_0}{dz} = -2c \frac{\partial t}{\partial x} z + \beta;$$

α und β sind Integrationsconstanten.

An der Oberfläche müssen $\frac{dv_0}{dz}$ und $\frac{du_0}{dz}$ verschwinden oder wenigstens kleiner, als von der ersten Ordnung unendlich klein sein.

Da c und z beide unendlich klein sind, so können wir $\frac{du_0}{dz}=\frac{dv_0}{dz}=0$ setzen, wenn $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial y}$ endlich, oder t stetig ist. Aus $Z_z=0$ findet sich

8) $$\frac{dw_0}{dz}=\frac{(1+3\theta)}{(1+\theta)}ct-\frac{\theta}{1+\theta}((q_1-p_2)z+\sigma_1+\sigma_2).$$

Die Gleichungen 7) und 8) erlauben, die in 5) angegebene Function f zu bilden.

Wir wollen noch annehmen, dass die Dicke $2h$ der Platte so gering sei, dass die Dilatationen σ_1, σ_2, ferner τ unendlich gross seien gegen $q_1 z$, $p_2 z$ und $p_1 z$. Es findet sich dann $\delta F=$

9) $$-2Kh\delta\int ds_1\,ds_2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\frac{\tau^2}{2}+\frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)^2-2ct\frac{(1+3\theta)}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)-c^2t^2\frac{(1+3\theta)^2}{1+\theta}\right).$$

IV. In dem speciellen Falle, den wir jetzt betrachten, setzen wir $s_1=r\cos\varphi$, $s_2=r\sin\varphi$. Nach der Deformation hat dieser Punkt $(s_1 s_2)$ die Cylindercoordinaten $\varrho\cos\varphi$, $\varrho\sin\varphi$ und ζ. Da t von φ unabhängig, sondern blos Function von r ist, und für $\varphi=0$ wir setzen können

$$1+\sigma_1=\frac{\sqrt{d\varrho^2+d\zeta^2}}{dr},\quad 1+\sigma_2=\frac{\varrho}{r},\quad \tau=0,$$

so findet sich, wenn $\frac{\sqrt{d\varrho^2+d\zeta^2}}{dr}=\frac{ds}{dr}$ gesetzt wird und R der Radius der Platte ist:

10) $$\delta F=-4K\pi h\delta\int_0^R r\,dr\left[\left(\frac{ds}{dr}-1\right)^2+\left(\frac{\varrho}{r}-1\right)^2+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{ds}{dr}+\frac{\varrho}{r}-2\right)^2-2ct\left(\frac{1+3\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{ds}{dr}+\frac{\varrho}{r}-2\right)-c^2t^2\frac{(1+3\theta)^2}{1+\theta}\right].$$

Durch 10) sind die Functionen s und ϱ bestimmt; ζ findet sich aus

$$\frac{d\zeta}{dr}=\sqrt{\left(\frac{ds}{dr}\right)^2-\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2}.$$

Wir müssen nun die beiden Fälle unterscheiden, dass ζ reell wird oder dass es imaginär wird. Im letzten Falle bleibt die Platte eben bei der Deformation; um dann den Zustand zu bestimmen, hätten wir in 10) $s=\varrho$ zu setzen und dann blos die eine willkürliche Function ϱ zu bestimmen aus 10). Die Behandlung beider Fälle hat keine Schwierigkeit. Um aber beide Fälle gleichzeitig zu behandeln, begnügen wir uns mit folgender Annäherung.

Ist die Deformation nicht gross, so können wir

11) $$\frac{ds}{dr}=\frac{d\varrho}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2$$

setzen, weil $\frac{d\varrho}{dr}$ wenig von 1, und $\frac{d\zeta}{dr}$ wenig von 0 abweicht. Setzen wir noch

$$\frac{d\zeta}{dr}=\zeta', \quad \varrho-r=x, \quad \frac{\theta}{1+\theta}=\lambda, \quad c\left(\frac{1+3\theta}{1+\theta}\right)=\varkappa,$$

so findet sich aus 10), indem wir die Variation ausführen und, wenn nöthig, partiell integriren:

$$12)\qquad 0=\frac{d}{dr}\left[2r\zeta'\left(x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2+\lambda\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)-\varkappa t\right)\right],$$

$$13)\qquad 0=(1+\lambda)\frac{d}{dr}\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{r}-\varkappa\frac{dt}{dr},$$

$$12a)\qquad 0=\left[\delta\zeta.2r\zeta'\left(x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2+\lambda\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)-\varkappa t\right)\right],$$

$$13a)\qquad 0=\left[\delta\varrho.2r\left(x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2+\lambda\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)-\varkappa t\right)\right].$$

Die letzten beiden Gleichungen gelten für $r=0$ und $r=R$.

V. Es wird 12) befriedigt durch $\zeta'=0$, $\zeta=Const.=0$. Aus 13) folgt dann

$$\frac{x}{r}+x'=\frac{\varkappa t}{1+\lambda}+2C, \quad \frac{d(xr)}{dr}=\frac{\varkappa tr}{1+\lambda}+2Cr, \quad x=\frac{1}{r}\int_0^r\frac{\varkappa tr}{1+\lambda}dr+Cr.$$

12a) ist erfüllt; aus 13a) bestimmt sich die Constante

$$C=\frac{c}{R^2(1+\lambda)}\int_0^R tr\,dr,$$

es findet sich also schliesslich

$$14)\qquad \varrho=r+cr\left(\frac{1}{r^2}\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\int_0^r tr\,dr+\frac{1}{R^2}\frac{1+\theta}{1+2\theta}\int_0^R tr\,dr\right).$$

Für $r=R$ ist $\varrho=R+\frac{2c}{R}\int_0^R tr\,dr$. Ist t constant, so ist $\varrho=R(1+ct)$.

VI. Es lässt sich aber 12) noch befriedigen, indem man setzt

$$15)\qquad x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2+\lambda\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)=\varkappa t.$$

Es sind dann 12a) und 13a) von selbst erfüllt.

Schreiben wir 15) in der Form

$$\left(\frac{x}{r}+x'+\tfrac{1}{2}\zeta'^2\right)(1+\lambda)=\frac{x}{r}+\varkappa t,$$

differentiiren und vergleichen sie mit 13), so folgt

$$\tfrac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{x}{r}\right)$$

oder

16) $$\frac{x}{r} = x' + \tfrac{1}{2}\zeta'^2.$$

Aus 16) und 15) folgt dann

$$\frac{x}{r} = \frac{\varkappa t}{1+2\lambda}$$

oder

17) $x = \varrho - r = ctr$, also $\varrho = r + ctr = r(1+ct)$.

ζ' ist $= \sqrt{-2crt'}$, also

18) $$\zeta = -\int\limits_R^r \sqrt{-2crt'}\, dr,$$

wenn am Rande $\zeta = 0$ ist. Die Gleichungen 17) und 18) haben einen Sinn, wenn t' für alle Werthe von $r \overset{<R}{\underset{\geqq 0}{=}}$ negativ ist, wenn also die Platte in der Mitte stärker erwärmt ist, als am Rande. Offenbar giebt der letzte Zustand die stabile Gleichgewichtslage an, der erstere durch 14) angegebene die labile.

Es leuchtet ein, dass man auch den stabilen Zustand leicht berechnen kann, wenn t' für einen oder für mehrere Werthe von r sein Zeichen wechselt. Für die Theile, in welchen t' negativ ist, sind die Gleichungen 17) und 18), in den übrigen Theilen ist die Gleichung 13) anzuwenden. Die Grenzbedingungen sind einfach durch 12a) und 13a) gegeben und dadurch, dass die Platte zusammenhängend bleiben muss.

XVIII.

Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme.

Von

H. Thieme,

Dr. phil.

(Schluss.)

---

§ 3.

Jetzt gebe ich drei nicht einem Büschel angehörige Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}. A^{n+1} und B^{n+1} bestimmen ein Büschel $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung (A^{n+1}, B^{n+1}). Eine Fläche X^{n+1} in (A^{n+1}, B^{n+1}) bestimmt mit C^{n+1} wieder ein Büschel (C^{n+1}, X^{n+1}); ein Element des letztern sei Y^{n+1}. Aus der Theorie der Flächen n^{ter} Ordnung setze ich nun als erwiesen voraus, dass man aus A_x^n, B_x^n, C_x^n, den Polaren von x für A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, das Bündel (A_x^n, B_x^n, C_x^n) erhält, indem man die durch C_x^n und die Elemente von (A_x^n, B_x^n) bestimmten Büschel construirt; zu (A_x^n, B_x^n, C_x^n) gehört Y_x^n, da es zu (C_x^n, X_x^n) gehört. Ebenso bestimmen A_y^n, B_y^n, C_y^n, die Polaren von y, ein Bündel, dem Y_y^n angehört. (A_x^n, B_x^n, C_x^n) und (A_y^n, B_y^n, C_y^n) kann man projectivisch aufeinander beziehen, indem man A_x^n, B_x^n, C_x^n, Y_x^n resp. den Flächen A_y^n, B_y^n, C_y^n, Y_y^n zuordnet. Hierbei entsprechen auch X_x^n und X_y^n einander und deshalb in (A_x^n, B_x^n) und (A_y^n, B_y^n) allgemein zwei Flächen, welche Polaren von x und y für dieselbe Fläche in (A^{n+1}, B^{n+1}) sind. Einer beliebigen Fläche Z_x^n in (A_x^n, B_x^n, C_x^n) entspricht eine Fläche Z_y^n in (A_y^n, B_y^n, C_y^n). Da (A_x^n, B_x^n, C_x^n) $\overline{\wedge}$ (A_y^n, B_y^n, C_y^n) ist, so ist auch $(A_{xy}^{n-1}, B_{xy}^{n-1}, C_{xy}^{n-1}) \overline{\wedge} (A_{yx}^{n-1}, B_{yx}^{n-1}, C_{yx}^{n-1})$. Nun ist aber $A_{xy}^{n-1} \equiv A_{yx}^{n-1}$, $B_{xy}^{n-1} \equiv B_{yx}^{n-1}$, $C_{xy}^{n-1} \equiv C_{yx}^{n-1}$, $Y_{xy}^{n-1} \equiv Y_{yx}^{n-1}$; $(A_{xy}^{n-1}, B_{xy}^{n-1}, C_{xy}^{n-1})$ und $(A_{yx}^{n-1}, B_{yx}^{n-1}, C_{yx}^{n-1})$ haben vier und infolge dessen alle Elemente entsprechend gemein, d. h. es ist $Z_{xy}^{n-1} \equiv Z_{yx}^{n-1}$. Nach den Eigenschaften des Bündels n^{ter} Ordnung gehört Z_x^n mit C_x^n und einer Fläche U_x^n aus (A_x^n, B_x^n), der Polare von x für U^{n+1} aus (A^{n+1}, B^{n+1}), einem Büschel an; im Bündel (A_y^n, B_y^n, C_y^n) sind entsprechende Elemente Z_y^n, die Polare von y für C^{n+1}, d. h. C_y^n und U_y^n, die Polare von y für U^{n+1}. Nach dem Vorhergehenden ist Z_y^n die Fläche aus (C_y^n, U_y^n), welche mit Z_x^n in (C_x^n, U_x^n) der Beziehung der gemischten Polaren genügt. Hält man x und Z_x^n fest, lässt y den unendlichen Raum durchlaufen und ordnet jedem y diejenige Fläche Z_y^n in (C_y^n, U_y^n) zu, für welche $C_{xy}^{n-1} \equiv C_{yx}^{n-1}$ ist, so ordnet man nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen den Punkten des Raumes ein Polarsystem Z^{n+1} zu, welches zum Büschel (C^{n+1}, U^{n+1}) gehört. Lässt man Z_x^n das Bündel (A_x^n, B_x^n, C_x^n) durchlaufen und führt man für jedes Z_x^n dieselben Constructionen aus, so erhält man eine zweifache Unendlichkeit von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; diese nenne ich das Bündel $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Da jede beliebige Fläche Z^{n+1} in $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ einem durch C^{n+1} und eine Fläche U^{n+1} aus (A^{n+1}, B^{n+1}) bestimmten Büschel angehört, so kann man $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ auch construiren, indem man aus C^{n+1} und den Elementen von (A^{n+1}, B^{n+1}) Büschel construirt.

Lässt man Z_x^n das Büschel (U_x^n, V_x^n) durchlaufen, so erhält man ein Büschel von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; denn für eine beliebige dieser Flächen Z^{n+1} erhält man die Polare eines Punktes y, indem man in (U_y^n, V_y^n) die Fläche Z_y^n sucht, für welche $Z_{xy}^{n-1} \equiv Z_{yx}^{n-1}$ ist; dies ist aber nach vorigem Paragraphen die Construction einer Fläche Z^{n+1}, welche dem Büschel (U^{n+1}, V^{n+1}) angehört.

Es entspricht somit jeder Fläche in (A_x^n, B_x^n, C_x^n) eine Fläche in $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$, jedem Büschel in (A_x^n, B_x^n, C_x^n) ein solches in $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ und, wie leicht ersichtlich ist, auch umgekehrt. (A_x^n, B_x^n, C_x^n) und $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ nennt man hiernach zu einander projectivisch; $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ ist zu jedem seiner Polarbündel projectivisch. Gehören zwei Flächen M^{n+1} und N^{n+1} zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$, so gehört (M^{n+1}, N^{n+1}) ganz dem Bündel an, weil (M_x^n, N_x^n) ganz zu (A_x^n, B_x^n, C_x^n) gehören. Da zwei Büschel in (A_x^n, B_x^n, C_x^n) ein Element gemein haben, so gilt das Gleiche von $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$.

Ist dies aber der Fall, hat, wenn U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}, Z^{n+1} beliebige Elemente von $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ sind, das Büschel (W^{n+1}, Z^{n+1}) mit (U^{n+1}, V^{n+1}) eine Fläche gemeinsam, so kann man auch Z^{n+1} und überhaupt alle Elemente von $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ erhalten, wenn man die durch W^{n+1} und die Elemente von (U^{n+1}, V^{n+1}) bestimmten Büschel construirt; d. h. man kann der Construction von $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ statt A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1} drei beliebige, nicht einem Büschel angehörige Flächen U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1} aus $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ zu Grunde legen.

§ 4.

Nachdem so das Büschel und Bündel von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung construirt und ihre nächstliegenden Eigenschaften abgeleitet sind, seien vier nicht einem Bündel angehörige Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1} gegeben. A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1} bestimmen das Bündel $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$; D^{n+1} bestimmt mit jedem Element von $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ ein Büschel. Die Gesammtheit der in diesen Büscheln enthaltenen Flächen nenne ich das Gebüsch $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$. Das durch irgend zwei Flächen des Gebüsches, X^{n+1} und Y^{n+1}, bestimmte Büschel gehört ganz dem Gebüsch an. Zunächst nämlich gehört X^{n+1} mit D^{n+1} und einer Fläche U^{n+1} aus $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ zu einem Büschel, ebenso Y^{n+1} mit D^{n+1} und V^{n+1} aus $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$. Da nun (U^{n+1}, V^{n+1}) zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$., also $(U^{n+1}, V^{n+1}, D^{n+1})$ zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$ gehört, so gehört auch (X^{n+1}, Y^{n+1}), das mit $(U^{n+1}, V^{n+1}, D^{n+1})$ zwei und deshalb alle Elemente gemein hat, zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$. Hieraus folgt weiter, dass $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$ das aus drei beliebigen seiner Flächen X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1} construirte Bündel ganz enthält; denn $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ erhält man aus den gegebenen Elementen durch Construction von Büscheln, deren jedes mit $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$ zwei und deshalb alle Elemente gemeinsam hat.

Construiren wir umgekehrt, wenn D^{n+1} nicht zu $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ gehört, aus $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ und D^{n+1} ein Gebüsch, so muss diesem auch $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ angehören; denn die drei Flächen, welche es mit den Büscheln (X^{n+1}, D^{n+1}), (Y^{n+1}, D^{n+1}), (Z^{n+1}, D^{n+1}) gemeinsam hat, hat es natürlich auch mit $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1}, D^{n+1})$ gemeinsam. Wir können also zur Construction des Gebüsches A^{n+1}, B^{n+1} und C^{n+1} durch drei beliebige seiner Flächen ersetzen, deren Bündel D^{n+1} nicht zugehört. Ebenso können wir D^{n+1} durch V^{n+1}, welche zum Gebüsch, aber nicht zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ gehört, ersetzen; denn jedes der durch D^{n+1} und eine Fläche U^{n+1} aus $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ bestimmten Büschel muss ganz zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, V^{n+1})$ gehören, weil es mit diesem zwei Elemente, D^{n+1} und U^{n+1}, gemein hat. Denkt man sich nacheinander $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1})$ und D^{n+1} durch andere Elemente ersetzt, so folgt, dass ein Gebüsch durch vier beliebige, nicht einem Bündel angehörige Flächen X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1}, V^{n+1} bestimmt ist.

Ein Bündel $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ und ein Büschel (U^{n+1}, V^{n+1}) im Gebüsch haben mindestens ein Element gemeinsam; denn V^{n+1} muss in $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1}, U^{n+1})$ enthalten sein, also zu einem der durch U^{n+1} und die Elemente von $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ bestimmten Büschel gehören. Zwei Bündel $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ und $(U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1})$ müssen ein Büschel gemeinsam haben; denn haben (U^{n+1}, V^{n+1}) und (V^{n+1}, W^{n+1}) mit $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ die Elemente M^{n+1} und N^{n+1} gemeinsam, so hat (M^{n+1}, N^{n+1}) mit beiden Bündeln zwei Elemente gemeinsam, ist also in beiden ganz enthalten.

Wie wir aus vier Elementen A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1} die dreifach unendliche Mannichfaltigkeit construirt haben, so können wir successive aus 5, 6, ... $r+1$ Elementen die 4-, 5-, ... r-fache Mannichfaltigkeit herstellen. Ich setze jetzt voraus, dass die Mannichfaltigkeiten bis zur $(r-1)$-fach unendlichen construirt sind, und construire die r-fache. Gegeben sind $r+1$ nicht einer $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit angehörige Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung A^{n+1}, B^{n+1}, ... R^{n+1}, S^{n+1}. Aus den ersten r Flächen construire ich die $(r-1)$-fache Mannichfaltigkeit $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots R^{n+1})$. Dann constituirt S^{n+1} mit jedem Elemente von $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots R^{n+1})$ ein Büschel; die Gesammtheit der in diesen Büscheln enthaltenen Elemente nenne ich die r-fache Mannichfaltigkeit $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots R^{n+1}, S^{n+1})$. In derselben Weise, wie beim Gebüsch $(A^{n+1}, B^{n+1}, C^{n+1}, D^{n+1})$, lässt sich zeigen, dass jedes Büschel, welches mit der r-fachen Mannichfaltigkeit 2, und, da jede höhere Mannichfaltigkeit durch Büschelconstructionen entsteht, jede $p\ (p<r)$-fache Mannichfaltigkeit, welche mit ihr $p+1$ nicht einer $(p-1)$-fachen Mannichfaltigkeit angehörige Elemente gemein hat, ihr ganz angehört. Hieraus ergiebt sich ferner, ebenso wie beim Gebüsch, dass man statt der constituirenden Elemente A^{n+1}, B^{n+1}, ... R^{n+1}, S^{n+1} beliebige andere $r+1$ von einander unabhängige Elemente der Construction zu Grunde legen kann. Ferner ergiebt sich in analoger Weise, dass eine $(r-1)$-fache und eine $p\ (p<r)$-fache Mannichfaltigkeit, die der r-fachen angehören, eine $p-1$-fache Mannichfaltigkeit gemeinsam haben. Eine p-fache und eine q-fache Mannichfaltigkeit in der r-fachen Mannichfaltigkeit haben, wenn $p+q>r$ ist, mindestens eine $(p+q-r)$-fache Mannichfaltigkeit gemein. Ergänzt man nämlich die p-fache Mannichfaltigkeit durch Hinzufügung weiterer Bestimmungselemente zu einer $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit, so hat diese mit der q-fachen eine $(q-1)$-fache gemein. Die p-fache und q-fache in der r-fachen Mannichfaltigkeit haben dieselben Elemente gemeinsam, wie die p-fache mit der $(q-1)$-fachen in der $(r-1)$-fachen Mannichfaltigkeit. Gilt nun für $\mu \leqq (r-1)$ der Satz, dass eine ϱ-fache und eine σ-fache Mannichfaltigkeit in einer μ-fachen für $\varrho+\sigma>\mu$ eine $(\varrho+\sigma-\mu)$-fache Mannichfaltigkeit gemein haben, so haben die p-fache und die q-fache in der r-fachen eine $\{p+(q-1)-(r-1)\} = (p+q-r)$-fache Mannichfaltigkeit gemein.

§ 5.

Es fragt sich nun, wie weit man in der Construction von Mannichfaltigkeiten fortschreiten kann. Aus den Schlussbetrachtungen von § 1 wissen wir, dass es mindestens eine $f(n+1)$-fache Mannichfaltigkeit von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, wenn $f(n+1)=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$ ist. Es zeigt sich nun auch, dass es keine höhere Mannichfaltigkeit von Flächen dieser Ordnung giebt. Da die Flächen n^{ter} Ordnung, wie als bewiesen angenommen wird, eine $f(n)$-fache Mannichfaltigkeit bilden, so kann ich zunächst eine $f(n)$-fache Mannichfaltigkeit $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1})$ construiren, in der die Polaren eines Punktes die Gesammtheit der Flächen n^{ter} Ordnung bilden. Jetzt gebe ich noch eine Fläche Q^{n+1} und construire $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1}, Q^{n+1})$. In $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1})$ giebt es eine Fläche X^{n+1}, für welche ein Punkt y und eine beliebige Fläche X_y^n Pol und Polare sind. Wähle ich nun aus $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1})$ $f(n)-1$ Flächen, von denen X^{n+1} unabhängig ist, so bestimmen diese mit Q^{n+1} eine $f(n)$-fache Mannichfaltigkeit. In dieser muss es, da ihre Polaren zu y im Allgemeinen auch die $f(n)$-fache Mannichfaltigkeit von Flächen n^{ter} Ordnung bilden, eine zweite Fläche X'^{n+1} geben, für welche y und X_y^n Pol und Polare sind; dasselbe gilt folglich für das ganze zu $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1}, Q^{n+1})$ gehörige Büschel (X^{n+1}, X'^{n+1}). Es giebt also bei allgemeiner Wahl aller Elemente in einer $\{f(n)+1\}$-fachen Mannichfaltigkeit von Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ein Büschel, für dessen Elemente ein gegebener Punkt und eine gegebene Fläche n^{ter} Ordnung Pol und Polare sind. Giebt man nun eine weitere Fläche R^{n+1}, so bestimmt diese mit der $\{f(n)-1\}$-fachen Mannichfaltigkeit von $(A^{n+1}\ldots Q^{n+1})$, welcher (X^{n+1}, X'^{n+1}) nicht angehört, eine $f(n)$-fache Mannichfaltigkeit; in dieser giebt es eine Fläche X''^{n+1}, für welche y und X_y^n Pol und Polare sind. In $(A^{n+1}, B^{n+1}, \ldots P^{n+1}, Q^{n+1}, R^{n+1})$ giebt es also ein Bündel $(X^{n+1}, X'^{n+1}, X''^{n+1})$, für welche ein beliebiger Punkt und eine beliebige Fläche Pol und Polare sind. Analog beweist man, dass es in einer $\{f(n)+r\}$-fachen Mannichfaltigkeit eine r-fache Mannichfaltigkeit giebt, für welche ein beliebiger Punkt und eine beliebige Fläche n^{ter} Ordnung Pol und Polare sind. In Bezug auf diese r-fache Mannichfaltigkeit bilden die Polaren eines Punktes z eine r-fache Mannichfaltigkeit von Flächen n^{ter} Ordnung; ist jedoch $r>f(n)-f(n-1)$, so bilden die Polaren von z doch nur eine $\{f(n)-f(n-1)\}$-fache Mannichfaltigkeit, da überhaupt alle Flächen n^{ter} Ordnung, welche mit X_y^n der Eigenschaft der gemischten Polaren genügen, nur eine $(f(n)-f(n-1))$-fache Mannichfaltigkeit bilden. In diesem Falle giebt es eine $\{r-f(n)+f(n-1)\}$-fache Mannichfaltigkeit, für welche y und X_y^n, z und eine beliebige Fläche X_z^n Pol und Polare sind, wobei allerdings $X_{yz}^{n-1}\equiv X_{zy}^{n-1}$ sein muss. Der Beweis hierfür ist den vorhergehenden Betrachtungen analog. Ebenso folgt für $r>2f(n)-2f(n-1)+f(n-2)$, dass es eine $\{r-2f(n)+2f(n-1)-f(n-2)\}$-fache Mannichfaltigkeit giebt, für welche y und X_y^n, z und X_z^n, u und X_u^n Pol und Polare sind, wenn der Bedingung der gemischten

Polaren genügt ist. Unter derselben Bedingung giebt es in der $f(n+1)$-fachen Mannichfaltigkeit eine Fläche, für welche y und X_y^n, z und X_z^n, u und X_u^n, v und X_v^n Pol und Polare sind. Man kann hiernach in derselben Allgemeinheit, wie es in § 1 geschehen ist, in der $f(n+1)$-fachen Mannichfaltigkeit zu vier Punkten a, b, c, d die Polaren geben; man hat in der Mannichfaltigkeit genau wie ohne Rücksicht auf sie der einzigen Bedingung der gemischten Polaren zu genügen. Die Gesammtheit der Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet also eine lineare $f(n+1)$-fache Mannichfaltigkeit. Irgend zwei aus Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehende Mannichfaltigkeiten von r-facher und s-facher Unendlichkeit haben, wenn $r+s > f(n+1)$ ist, mindestens eine $\{r+s-f(n+1)\}$-fache Mannichfaltigkeit miteinander gemeinsam.

§ 6.

Unsere Definition des Polarsystems $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung liefert sofort noch einige seiner Eigenschaften. Zunächst können wir die n Polaren eines Punktes x in Bezug auf A^{n+1} definiren, indem wir für $r \gtreqless n-1$ die r^{te} Polare von x für A_x^n als die $r+1^{\text{te}}$ Polare von x für A^{n+1} bezeichnen und $A_{x^{r+1}}^{n-r}$ nennen.

Die erste Polare von x, A_x^n, gehe durch y; die erste Polare von y für A_x^n, also A_{xy}^{n-1}, geht dann auch durch y. Da nun A_{xy}^{n-1} zugleich die erste Polare von x für A_y^n ist, also die erste Polare von x für A_y^n durch y geht, so geht, wie wir aus der Theorie der Flächen n^{ter} Ordnung als bewiesen annehmen, die letzte Polare von y für A_y^n oder, was dasselbe ist, die letzte Polare von y für A^{n+1} durch x. Liegt also y auf A_x^n, der ersten Polare von x für A^{n+1}, so liegt x auf $A^1{}_{y^n}$, der letzten Polare von y für A^{n+1}. Allgemein geht $A_{x^r}^{n+1-r}$, die r^{te} Polare von x für A^{n+1}, durch y, so geht $A_{x^r y}^{n-r}$ oder die r^{te} Polare von x für A_y^n durch y, folglich die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare von y für A_y^n, wie als bewiesen angenommen wird, durch x; die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare von y für A_y^n ist aber $A_{y^{n+1-r}}^r$. Es gilt also auch für A^{n+1} der Satz: Geht die r^{te} Polare von x durch y, so geht die $(n+1-r)^{\text{te}}$ Polare von y durch x.

Im Allgemeinen liegt ein Pol x nicht auf seiner Polarfläche A_x^n. Die Gesammtheit der Punkte des Raumes, welche auf ihren resp. Polarflächen liegen, bezeichne ich als die Ordnungsfläche oder auch kurz Fläche des Polarsystems.

Ist x ein Punkt der Ordnungsfläche, so berühren sich in ihm nach einem als bewiesen angenommenen Satze für Flächen n^{ter} Ordnung die sämmtlichen Polaren. Die erste Polare irgend eines Punktes auf $A^1{}_{x^n}$ geht, wie wir bewiesen haben, durch den Pol x. Das Bündel erster Polaren, das der Ebene $A^1{}_{x^n}$ zugehört, hat in x einen gemeinsamen

Punkt. Dies Polarenbündel schneidet $A^1{}_{x^n}$ in einem ebenen Polarnetz mit dem gemeinsamen Punkte x. Solche Ebenen, deren Polarnetze einen gemeinsamen Punkt besitzen, nenne ich Tangentialebenen von A^{n+1}, den gemeinsamen Punkt des Netzes Berührungspunkt. Die Polarsysteme, welche auf den in $A^1{}_{x^n}$ durch x gehenden Geraden ausgeschnitten werden, sind natürlich auch von der speciellen Art, dass sie den Punkt x gemeinsam haben. Solche Geraden nenne ich Tangenten der Fläche A^{n+1} im Punkte x.

Eine besondere Art von Polarsystemen A^{n+1} sind diejenigen, bei welchen alle ersten Polaren durch einen Punkt x gehen. Bei dieser Art hat natürlich jede Ebene durch x die Eigenschaft einer Tangentialebene von A^{n+1}. A^n_x, die Polare von x, ist ein analoges Gebilde, ein Polarsystem mit dem gemeinsamen Punkte x; denn die erste Polare eines Punktes y für A^n_x ist identisch mit der ersten Polare von x für A^n_y; sie geht natürlich mit A^n_y durch x. Ebenso besitzen alle übrigen Polaren von x bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$, einem Kegel zweiten Grades, die ausgezeichnete Eigenschaft. Die n^{te} Polare von x ist deshalb unbestimmt. Einen Punkt x, welcher für A^{n+1} diese ausgezeichneten Eigenschaften hat, nenne ich einen Doppelpunkt von A^{n+1}; alle Polaren des Doppelpunktes besitzen in ihm ebenfalls einen Doppelpunkt.

Die zweite Polare eines beliebigen Punktes y geht im Allgemeinen nicht durch den Doppelpunkt x. Liegt aber y auf $A^2{}_{x^{n-1}}$, der vorletzten Polare von x, so geht $A^{n-1}_{y^2}$ durch x und es muss A^n_y die Gerade (x, y) in x berühren. Das auf einer Generatrix (x, y) des Kegels $A^2{}_{x^{n-1}}$ inducirte Polarsystem hat also die specielle Eigenschaft, dass die ersten Polaren aller Punkte von (x, y) in x einen gemeinsamen Doppelpunkt haben. Geraden solcher Eigenschaft nenne ich Tangenten von A^{n+1} im Doppelpunkte. Die Tangenten in einem Doppelpunkte bilden also einen Kegel zweiten Grades, welcher mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polare des Doppelpunktes identisch ist. Wegen der Beziehung von $A^2{}_{x^{n-1}}$ zu den Polaren von x folgt, dass A^{n+1} und die Polaren von x im gemeinsamen Doppelpunkte dieselben Tangenten haben.

Wendet man den Begriff Doppelpunkt auch auf die Geometrie von einer und zwei Dimensionen an, so kann man sagen: die Schnitte von A^{n+1} mit einer Tangente und einer Tangentialebene haben im Berührungspunkte einen Doppelpunkt. Die Tangenten einer Fläche im Doppelpunkte haben in diesem einen dreifachen Punkt.

Haben zwei Flächen A^{n+1} und B^{n+1} einen oder mehrere Punkte gemeinsam, so gehen durch diese alle Flächen des Büschels (A^{n+1}, B^{n+1}); denn es gehen nach dem entsprechenden Satze für Flächen n^{ter} Ordnung durch x alle Elemente von (A^n_x, B^n_x), d. h. die Polaren von x für alle Elemente von (A^{n+1}, B^{n+1}). Da nun durch Büschelconstructionen alle linearen Mannichfaltigkeiten sich herstellen lassen, so haben alle Elemente einer linearen Mannichfaltigkeit die Punkte gemein, welche die constituirenden Elemente gemeinsam haben.

Durch einen nicht gemeinsamen Punkt x geht eine Fläche des Büschels (A^{n+1}, B^{n+1}), weil eine Fläche aus (A_x^n, B_x^n) durch x geht. Von den Flächen einer p-fachen linearen Mannichfaltigkeit $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots O^{n+1}, P^{n+1})$ geht durch x eine $(p-1)$-fache lineare Mannichfaltigkeit. Da man nämlich zur Bestimmung von $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots O^{n+1}, P^{n+1})$ die Flächen A^{n+1}, $B^{n+1}, \dots O^{n+1}$ durch diejenigen Flächen $A'^{n+1}, B'^{n+1}, \dots O'^{n+1}$ aus (A^{n+1}, P^{n+1}), (B^{n+1}, P^{n+1}), $\dots (O^{n+1}, P^{n+1})$, welche durch x gehen, ersetzen kann, und da im Allgemeinen von den Flächen eines Büschels nur eine den Punkt x enthält, so bekommt man alle durch x gehenden Flächen von $(A^{n+1}, B^{n+1}, \dots O^{n+1}, P^{n+1})$, wenn man die $(p-1)$-fache Mannichfaltigkeit $(A'^{n+1}, B'^{n+1}, \dots O'^{n+1})$ construirt.

Die Gesammtheit aller Flächen des Raumes bilden eine $f(n+1)$-fache lineare Mannichfaltigkeit, die durch einen Punkt gehenden folglich eine $\{f(n+1)-1\}$-fache Mannichfaltigkeit; in letzterer die durch einen weiteren Punkt gehenden eine $\{f(n+1)-2\}$-fache u. s. w. Im Allgemeinen bilden alle Flächen, die durch p Punkte gehen, eine $\{f(n+1)-p\}$-fache lineare Mannichfaltigkeit. Im Besondern geht durch $f(n+1)$ $=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}-1$ Punkte nur eine Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

In derselben Weise folgt, dass eine ebene Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ und eine binäre Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $(n+1)$ Punkte bestimmt ist.

§ 7.

Von der binären Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung lassen sich noch einige Eigenschaften beweisen, welche dann wieder auch für Curven und Flächen von Bedeutung sind.

Auf einer Geraden sei eine binäre Form n^{ten} Grades B^n und ein Punkt a gegeben; die durch a repräsentirte binäre Form sei A^1. Ich will nun zeigen, dass A^1 und B^n zusammengenommen sich als eine Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen lassen, die ich dann mit $C^{n+1} \equiv A^1 B^n$ bezeichne. Indem ich wieder die entsprechende Eigenschaft für Formen von niederem Grade als n für bewiesen annehme und ebenso als bewiesen annehme, dass die Polare eines Punktes x für eine Form RS^{n-1} dem Büschel (S^{n-1}, RS_x^{n-2}) angehört, gilt Folgendes. Es giebt ein Büschel von Formen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für welche a und $A^1 B^{n-1}$ Pol und Polare sind. Die Polaren eines Punktes x für diese Formen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden die Gesammtheit der Formen n^{ter} Ordnung, welche mit $A^1 B_a^{n-1}$ der Eigenschaft der gemischten Polaren genügen, also das Büschel von Formen, für welche a und $(A^1 B_a^{n-1})_x^{-1}$, die Polare von x für $A^1 B_a^{n-1}$, Pol und Polare sind; dieses Büschel sei (P_x^n, Q_x^n). (P_x^n, Q_x^n) hat mit $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$ eine Form C_x^n gemeinsam; denn das Polarenbüschel von a für $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$ ist $(B_a^{n-1}, A^1 B_{ax}^{n-2})$, und letzterem gehört, wie wir als bewiesen angenommen haben, $(A_1 B_a^{n-1})_x^{-1}$ an, die Polare von a für (P_x^n, Q_x^n). Lassen wir x die Gerade durchlaufen, so bilden die Büschel $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$, da ihnen B^n gemeinsam ist und die Formen $A^1 B_x^{n-1}$ ein Büschel bilden, ein Bündel $(B^n, A^1 B_x^{n-1}, A^1 B_y^{n-1})$; die Formen $(A^1 B_a^{n-1})_x^{-1}$ bilden ein Büschel $[(A^1 B_a^{n-1})_x^{-1}, (A^1 B_a^{n-1})_y^{-1}]$. Sucht man nun zu allen Punkten x der Geraden die gemeinschaftliche Form der Büschel (P_x^n, Q_x^n) und $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$, d. h. in $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$ die Form, für welche a und $(A^1 B_a^{n-1})_x^{-1}$ Pol und Polare sind, so erhält man ein Büschel; denn in einem Bündel bilden die Formen, für welche die Polaren eines Punktes ein Büschel sind, selbst ein Büschel. Ordnet man nun jedem Punkte x die gemeinsame Form von (P_x^n, Q_x^n) und $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$, dem Punkte a die Form $A^1 B_a^{n-1}$ zu, so haben wir ein Büschel von Formen $(A^1 B_a^{n-1}, C_x^n)$, welche mit $A^1 B_a^{n-1}$ der Eigenschaft der gemischten Polaren genügen. Dies Büschel repräsentirt also eine Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung C^{n+1}. Zu den reellen Punkten von C^{n+1} gehört zunächst a, da a ein Punkt seiner Polare $A^1 B_a^{n-1}$ ist. Ferner ist jeder reelle Punkt b von B^n ein Punkt von C^{n+1}; denn C_b^n gehört zu dem Büschel $(B^n, A^1 B_b^{n-1})$, das in diesem Falle in b einen gemeinsamen Punkt hat.

Im Anschluss hieran folgt nun sofort, dass eine Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung höchstens $n+1$ reelle Punkte haben kann. Sind nämlich $n+1$ Punkte gegeben, so kann man die durch sie nach S. 283 bestimmte Form construiren, indem man zuerst die durch n Punkte bestimmte Form B^n construirt und dann aus B^n und dem letzten Punkte — er sei a — $C^{n+1} \equiv A^1 B^n$. Hätte nun C^{n+1} ausser den $n+1$ Punkten noch einen reellen Punkt d, so müsste man C^{n+1} auch aus $d \equiv D$ und B^n construiren können. Es würde C_x^n gleichzeitig zu $(B^n, A^1 B_x^{n-1})$ und zu $(B^n, D^1 B_x^{n-1})$ gehören, B^n also zu $(A^1 B_x^{n-1}, D^1 B_x^{n-1})$. Jeder Punkt von B_x^{n-1} müsste auch ein Punkt von B^n sein. Ist nun aber y ein beliebiger Punkt der Geraden und $x \equiv B^1{}_{y^{n-1}}$ seine letzte Polare, so ist y ein Punkt von B_x^{n-1}. Es müsste also ein beliebiger Punkt y ein Punkt von B^n und und damit auch von C^{n+1} sein. C^{n+1} hätte dann mit einer beliebigen, durch $n+1$ Punkte bestimmten Form die bestimmenden Elemente gemeinsam, es gäbe nur eine Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, was der Wirklichkeit widerspricht.

Da Curven und Flächen auf einer Geraden Polarsysteme gleicher Ordnung induciren, so gilt noch der Satz: Curven und Flächen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten von einer Geraden höchstens $n+1$ oder alle Punkte.

Striegau, im September 1878.

XIX.

Ueber die Verwendung des Pendels zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven.

Von

J. Hagen, *S. J.*

Hierzu Taf. IV und Klangfigurentafeln I u. II.

Um die Schwingungszahlen einzelner Töne, sowie die Verhältnisse der Schwingungszahlen der Zweiklänge zu bestimmen, wendet man drei verschiedene Methoden an, die akustische, die optische und die graphische. Die bei der ersten Methode gewöhnlich zur Verwendung kommenden Instrumente sind das Monochord und die verschiedenen Sirenen, die bei der zweiten Methode meist angewandten sind die Kaleidophone von Wheatstone* und Melde,** die Vibrationsspiegel und der Comparator von Lissajous (nach welchem Physiker die Stimmgabelcurven auch als Lissajous'sche Curven bezeichnet werden), das Vibrationsmikroskop von Helmholtz, Koenig's manometrische Flammen, während zur dritten Methode die verschiedenen Phonautographen gehören, welch' letztere theils aus Stimmgabeln (wie der von Weber, Duhamel, König und Wertheim), theils aus Saiten (wie der von Wertheim), theils aus Membranen (wie der von Scott und König) verfertigt werden.

Von jeher haben die Physiker sich bemüht, die akustischen Experimente auch dem Auge zugänglich zu machen, und in der That hat die optische Methode eine solche Vollkommenheit erlangt, dass Guillemin in seinen „*Forces de la nature*“ mit Recht sagen konnte, ein Tauber sei im Stande, Töne mit grösserer Genauigkeit zu vergleichen, als es dem

* Eine kurze Theorie dieses Instrumentes hat Herr Edward Sang im *Edinburgh new Philosophical Journal* (1832, S. 308) unter dem Titel: „*Analysis of the vibration of wires*“ mitgetheilt. Vergl. auch Pogg. Ann. 1827, Bd. 86.

** Pogg. Ann. 1862, Bd. 115. Das Werk dieses Autors: „Die Lehre von den Schwingungscurven“, hatte ich bei Abfassung dieser Abhandlung nicht zur Hand, ebenso wenig die Arbeiten von Lissajous in den *Compt. Rend. 1855, T. 41, 43, 44. Ann. d. chim. 1857, III. ser. T. 51.*

feinsten Ohre je gelingen werde. Die graphische Methode ist indessen hinter der optischen zurückgeblieben, weil eben die Schnelligkeit elastischer Schwingungen die erstere ebenso sehr erschwert, wie sie letztere begünstigt.

Es lag demnach der Gedanke nicht fern, für die graphische Methode einen Körper zu wählen, der die Schwingungen elastischer Körper mit grösserer Langsamkeit ausführt, nämlich das Pendel, und in der That ist dieser Gedanke auch keineswegs neu und wurde in letzter Zeit namentlich in England weiter verfolgt. Schon im Jahre 1844 soll Professor Blackburn in Glasgow eine Construction des Pendels erfunden haben, die den Pendelkörper in zwei zu einander senkrechten Vertikalebenen schwingen und, wenn er aus beiden Ebenen herausgezogen wurde, die Lissajous'schen Curven beschreiben liess. Dieselbe ist in ihrer einfachsten Form in Taf. IV Fig. 1 dargestellt und wurde, soviel mir bekannt ist, zuerst von Herrn William Swan, Professor an der Universität St. Andrews, zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven benutzt. Eine seiner Methoden bestand darin, dass er am untern Ende des Pendelkörpers aus einer feinen Oeffnung Sand ausströmen liess. In den Vorlesungen liess er die Zeichnungen auch durch elektrische Funken ausführen, indem er Drähte von weichem Eisen zur Aufhängung benutzte, den Pendelkörper an seinem untern Ende mit einer Metallspitze versah und den einen Pol eines Ruhmkorff'schen Inductionsapparates mit einem der beiden Aufhängepunkte des Pendels verband, während der andere Pol mit einem Staniolplättchen in Verbindung stand, das auf einem Tische unmittelbar unter der erwähnten Metallspitze lag. Legte er dann ein präparirtes Papier auf das Staniolplättchen, so gab ein einziges Grove'sches Element einen hinreichend starken Strom, um Funken von der Metallspitze nach dem Staniolplättchen überspringen zu lassen, welche dann die Bahn des Pendelkörpers bezeichneten und überdies durch ihre verschiedenen Entfernungen die verschiedenen Geschwindigkeiten angaben.

Eine dritte Art von graphischer Methode wandte Herr Hubert Airy an, indem er ein Glasröhrchen mit fein ausgezogener Spitze und mit Dinte gefüllt am untern Ende des Pendelkörpers befestigte und unter demselben ein Blatt Papier mittelst elastischer Bänder horizontal ausspannte. Doch war sein Apparat in praktischer Beziehung noch sehr unvollkommen. Eine ausführliche Beschreibung seiner Methode findet man in der „Nature" 17. August und 7. September 1871.

Später hat Herr Tisley die Methode des Herrn Airy sehr vervollkommnet durch Construction seines „Harmonograph"*, der auch im Jahre

* Der Name soll wohl andeuten, dass der Apparat nur die Intervalle der harmonischen Tonleiter, deren Schwingungszahlen die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... sind, darstellen kann.

1876 in London ausgestellt war und zu haben ist bei Tisley and Spiller, Opticians, 172 Brompton Road, London, S. W. Da aber der Preis dieses Apparates mit dessen wissenschaftlicher Bedeutung in einem ungünstigen Verhältnisse steht — der Harmonograph kostet in seiner vollkommensten Form über 400 Mk. —, so hat Herr Browning seinen „Sympalmograph"* zwar nach demselben Princip, aber in einfacherer Form** construirt (John Browning, 63, Strand, London). Indessen kostet auch dieser Apparat immerhin noch 70 Mark. Es möchte deshalb nicht ganz überflüssig sein, eine Construction kennen zu lernen, die Jeder ohne Kosten und ohne grosse Mühe selbst ausführen kann, die aber, was Schönheit und Präcision ihrer Leistungen betrifft, der Tisley'schen und Browning'schen zum wenigsten nicht nachsteht, wovon sich Jeder überzeugen wird, der Gelegenheit hat, die beiliegenden Illustrationen (Klangfigurentafeln I u. II) mit Producten der erwähnten Apparate zu vergleichen.

Den Apparat, der im Folgenden beschrieben werden soll, hatte ich im Herbste 1877 Gelegenheit, in dem in England bekannten Stonyhurst College zu sehen. Der dortige Professor der Physik und Chemie, Herr John Dobson, hatte ihn selbst construirt und war so freundlich, mir die ganze Einrichtung und Behandlung desselben eingehend zu erklären, so dass es mir ein Leichtes war, denselben in Verbindung mit einem in mechanischen Arbeiten sehr gewandten Collegen, Herrn Jutz, nachzuconstruiren. Im Einverständniss mit Herrn Professor Dobson theile ich nun die Beschreibung seines Apparates, sowie unsere beiderseitigen Erfahrungen in Behandlung desselben mit. Es ist zwar das Princip, die Lissajous'schen Curven durch Pendelapparate darzustellen, auch in Deutschland längst bekannt. Der Pendelapparat von Eisenlohr ist indessen nur für die optische Methode eingerichtet und hat vor dem Blackburn'schen Pendel nur den Vorzug, dass er auch schiefwinklige Composition gestattet, was dem Umstande zuzuschreiben ist, dass er aus zwei völlig getrennten Pendeln besteht. Der Pendelapparat von Mos*** vereinigt beide Schwingungen in einem Pendelkörper, aber so, dass die Ebene, welche man für kleine Amplituden durch die Bahn desselben legen kann, ziemlich stark gegen die Horizontalebene geneigt ist. Infolge dessen eignet sich dieser Apparat auch besser für die optische, als für die graphische Methode, und in der That wird er für letztere nur insofern benutzt, als man die schwingende Kugel mit einer Spitze versieht und in Staub schreiben lässt. Es bleiben deshalb die Leistungen dieses

* Von παλμός, ὁ, das Schwingen.

** und *more reasonable in price,* wie er sich in einer kleinen Schrift *„The Sympalmograph"* ausdrückt.

*** Pogg. Ann. 1864, Bd. 121. Mehrere der hier angeführten Notizen und Citate habe ich dem Werkchen von Dr. Pisko: „Die neueren Apparate der Akustik", Wien 1865, entlehnt.

Apparates noch hinter denen des Swan'schen zurück. Später soll Herr Knoblauch ein Pendel construirt haben, welches die Figuren mit Dinte auf Papier zeichnet; ob es aber Vollkommeneres leistet, als der Apparat von H. Airy, ist mir nicht bekannt. Dass die vollkommeneren und kostspieligeren Apparate von Tisley und Browning in Deutschland noch keine Verbreitung gefunden haben, ist mir von mehreren Freunden versichert worden.

I. Theoretischer Theil.

1. Da das Pendel nach demselben Gesetze schwingt, wie die freien Enden der Stimmgabeln (wobei selbstverständlich beiderseits nur kleine Amplituden in Betracht kommen), so lassen sich die Bewegungen der letzteren durch Pendelschwingungen in verlangsamter Form darstellen. Dass nun zwei ebene schwingende Pendel auf unser Ohr nicht denselben Eindruck machen, wie zwei tönende Stimmgabeln, rührt einfach daher, dass dasselbe für so langsam aufeinander folgende Schallwellen, wie sie das Pendel erzeugt, nicht empfänglich ist. Würde man ferner zwei in verschiedener Richtung schwingende Pendelkörper mit Spiegeln versehen, ähnlich wie bei dem bekannten Experiment von Lissajous, und durch dieselben einen Lichtstrahl auf einen Schirm projiciren, so würde daselbst ein leuchtender Punkt genau die Lissajous'schen Curven beschreiben, man würde aber wieder wegen der Langsamkeit der Bewegung nie die ganze Figur in einem Linienzuge sehen. So wenig sich also das Pendel für die akustische und optische Methode eignet, so sehr begünstigt seine Langsamkeit die graphische Methode.

Aus den von zwei Pendeln gezeichneten Stimmgabelcurven wird man allerdings, eben weil das menschliche Ohr deren Schallwellen nicht wahrnimmt, keine theoretischen Resultate ableiten können; dieselben werden aber sehr dienlich sein, um in einer Vorlesung die Lissajous'schen Curven zu erklären, ja man kann sie für sehr grosse Auditorien benutzen, indem man die Pendel auf geschwärztes Glas schreiben lässt und die entstandene Figur nach der Methode von Desains projicirt.* Kann demnach das graphische Pendel mit den Vibrationsspiegeln von Lissajous, was die wissenschaftliche Bedeutung der Apparate anbelangt, in keinen Vergleich kommen, so haben doch die von Ersterem gelieferten Zeichnungen und namentlich die erwähnten Projectionen den Vortheil, dass sie gross sind, immer in Ruhe bleiben und nicht nur eine Schwingung, sondern die ganze Bewegung von der grössten Amplitude bis zum Verschwinden derselben in einem Bilde darstellen.

---

* Kosmos 1864, Bd. 24 S. 547.

2. Um nun zwei Pendelschwingungen von verschiedener Richtung zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven zu verwerthen, kann man entweder die eine Schwingung auf das Papier und die andere auf den Schreibstift, oder aber beide Bewegungen auf letztern allein übertragen. Im erstern Falle sind zwei getrennte Pendelkörper erforderlich, im letztern kann man wieder entweder den Schreibstift durch Hebelarme mit zwei getrennten Pendelkörpern in Verbindung bringen oder auch beide Schwingungen in einem Pendelkörper vereinigen. Die ersteren zwei Methoden hat Tisley angewandt. Seine beiden Pendel bestehen in beiden Fällen aus Metallstangen von etwa 1 m Länge, die an ihrem unteren Ende verschiebbare Gewichte tragen und etwas unter dem oberen Ende mittelst Messerschneiden aufgehängt sind, während der Schreibapparat an ihrem oberen Ende angebracht ist.* Die dritte Methode wurde von den Herren W. Swan und H. Airy befolgt und findet sich ebenso in dem Apparat des Herrn Prof. Dobson verwirklicht. Was nun die Vergleichung der drei Constructionsmethoden anbelangt, so hat die dritte gegen die beiden ersten zwei Nachtheile; erstlich kann sie (wenigstens ohne besondere Vorrichtung) den Einklang (1:1) nicht darstellen und zweitens können die beiden componirenden Schwingungen keinen beliebigen, sondern nur einen rechten Winkel miteinander bilden. Man vergleiche hierüber die folgende Nummer und die Anmerkung * S. 298. Es ist ferner nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass bei allen drei Methoden die Pendel in gleicher Weise sowohl aus Schnüren, als auch aus Metallstangen hergestellt werden können. Bringt man im letzteren Falle noch weitere verschiebbare Gewichte über den Aufhängepunkten an, so kann man mit kurzen Pendelstangen sehr langsame Schwingungen erzielen, während man im erstern Falle für die Schwingungsverhältnisse, die unter 1:2 liegen, schon ziemlich lange Pendel gebraucht. Herr Browning hat auch solche Pendel, die unter und über ihren Aufhängepunkten mit verschiebbaren Gewichten versehen sind, nach einem von Morgan-Brown entworfenen Plane ausgeführt und liefert dieselben unter dem Namen „*Metronome Sympalmograph*“ um 90 Mk. Es mag demnach, theoretisch betrachtet, die Methode von Tisley und Browning der Dobson'schen vorzuziehen sein. Wem es aber, wie schon erwähnt, darauf ankommt, ohne besondern Aufwand von Geld und Mühe den Apparat selbst zu construiren, der wird der Dobson-schen Methode den Vorzug geben.

3. Zunächst soll nun der Apparat des Herrn Prof. Dobson in seiner einfachsten Form erklärt und gezeigt werden, dass die von seinem

* Eine ausführlichere Beschreibung des Tisley'schen Harmonographen findet man im *„Engineering“ Feb. 6, 1874.*

Pendel ausgeführte Bewegung sich als Superposition zweier einfacher Pendelschwingungen betrachten lässt.

Von zwei festen Punkten a und b (Taf. IV Fig. 1) gehen zwei gleichlange Fäden aus, die sich in c vereinigen, von wo aus noch ein einfacher weiter geht bis zum Pendelkörper m. Der Mittelpunkt d von ab sei vertikal über dem Ursprunge O eines horizontal liegenden Coordinatensystems (x, y). Legt man dessen x-Axe parallel ab, dann trifft dc in seiner Verlängerung fortwährend die y-Axe, wie auch der Punkt m unter dem Einflusse der Schwere sich bewegen mag. Diese Linie dc bilde mit der Vertikalen dO den Winkel ψ und mit dem Faden cm den Winkel φ. Nun leuchtet sofort ein, dass die vier Punkte a, b; c, m infolge der Spannung fortwährend in einer Ebene liegen, folglich die Ebenen der Winkel φ und ψ auf einander senkrecht stehen. Denken wir uns weiter durch c eine Vertikale gelegt und um c als Mittelpunkt mit cm als Radius eine Kugel beschrieben, dann werde letztere von der erwähnten Vertikalen in q und von dc in p getroffen; endlich sei $cm = l$, $dp = L$. Zerlegt man dann die Schwerkraft g in zwei rechtwinklige Componenten, von denen die eine in der Richtung von l liegt, so ist die andere offenbar Tangente des Bogens mq. Erstere wird durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben, letztere hat, wenn der Punkt m die Masse 1 besitzt, den Werth $g \sin(mcq)$ oder für kleine Amplituden $\frac{g}{l} . \overline{mq}$. Da man aber das rechtwinklige Dreieck mpq als eben betrachten kann, so hat man unmittelbar für die rechtwinkligen Componenten von $\frac{g}{l} . \overline{mq}$ die Ausdrücke

$$\frac{g}{l} . \overline{mp} \quad \text{und} \quad \frac{g}{l} . \overline{pq} = \frac{g}{L} . \overline{pq'},$$

wo q' der Schnittpunkt des Bogens pq mit der Vertikalen dO ist. Bestimmt man die Lage des Punktes m durch die Coordinaten x und y, so hat man also für die den Coordinatenaxen parallel wirkenden Componenten der den Punkt m bewegenden Kraft die Ausdrücke

$$X = \frac{g}{l} . x, \quad Y = \frac{g}{L} . y.$$

Das sind aber dieselben Kräfte, wie sie an zwei getrennten ebenen Pendeln resp. mit den Längen l und L wirken würden, woraus sich sogleich weiter ergiebt, dass man sich die Bewegung des Pendelkörpers m entstanden denken kann durch Superposition zweier Pendelschwingungen, von denen die eine mit der Pendellänge l parallel der x-Axe, die andere mit der Pendellänge L parallel der y-Axe ausgeführt wird. Es wird demnach in der That der Pendelkörper m je nach dem Verhältnisse der beiden Pendellängen die verschiedenen Stimmgabelcurven beschreiben.

4. Es ist nun ein Leichtes, das **Verhältniss der beiden Pendellängen** so zu bestimmen, dass m eine verlangte Curve beschreibt. Denn auf unser Pendel lassen sich nach 3. unmittelbar die für das ebene Pendel geltenden Formeln anwenden

$$1) \qquad x = a \sin \frac{\pi(t+\alpha)}{A}, \quad y = b \sin \frac{\pi(t+\beta)}{B},$$

$$2) \qquad A = \pi \sqrt{\frac{l_a}{g}}, \quad B = \pi \sqrt{\frac{l_b}{g}},$$

worin t die Zeit überhaupt, A und B die Dauer einer halben Schwingung,* a und b die Amplituden und l_a und l_b die Pendellängen bezeichnen, während α und β zwei Constanten sind, welche den Anfang der Zeit und den Phasenunterschied der beiden Schwingungen bestimmen.**

Soll also das erste Pendel n_a Schwingungen machen, während das zweite n_b derselben ausführt, so hat man

$$n_a : n_b = B : A = \sqrt{l_b} : \sqrt{l_a}$$

oder

$$3) \qquad \frac{l_a}{l_b} = \left(\frac{n_b}{n_a}\right)^2,$$

d. h. die Pendellängen verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Schwingungszahlen.

5. Obwohl die mathematische Theorie der Stimmgabelcurven ausser dem Bereich dieser Abhandlung liegt, so mögen dennoch die folgenden Erörterungen gestattet sein, da sich der zweite Theil theilweise auf dieselben stützen wird. Zudem dürfte die **Drach**'sche Eliminationsmethode vielleicht manchem Leser neu sein.

Zunächst soll eine geometrische **Constructionsmethode** der Stimmgabelcurven erwähnt werden, welche der in Anmerkung * S. 285 citirten Abhandlung des Herrn **Sang** vom Jahre 1832 entnommen ist. Bringen wir die Gleichungen 1) durch Aenderung der Constanten α und β auf die Form

$$4) \qquad x = a \cos \frac{\pi(t-\alpha)}{A}, \quad y = b \cos \frac{\pi(t-\beta)}{B},$$

so zeigen dieselben, dass die Projectionen des bewegten Punktes auf die rechtwinkligen Axen zusammenfallen mit den gleichnamigen Projectionen zweier anderer Punkte, die man sich je einen mit dem Radius a, resp. b um den Ursprung beschriebenen Kreis mit **gleichförmiger** Geschwindigkeit durchlaufend denkt. Construirt man also (Fig. 2 u. 3) aus den

* Es ist also die Dauer einer ganzen Schwingung die Zeit, in welcher der Pendelkörper die Strecke $4a$, resp. $4b$ zurücklegt.

** Eine Verwechselung mit den in Fig. 1 gebrauchten Bezeichnungen ist wohl nicht zu befürchten. Statt des früheren Zeichens L ist jetzt l_b gesetzt, das nun sowohl das kürzere, als auch das längere Pendel bezeichnen kann.

Strecken $2a$ und $2b$ ein Rechteck und über zwei aneinanderstossende Seiten Halbkreise, theilt man ferner jeden dieser Halbkreise in eine Anzahl gleicher Theile, so dass diese Zahlen für die Halbkreise a und b sich verhalten wie $A:B$, fällt man ferner von diesen Theilungspunkten Senkrechte auf die Durchmesser $2a$ und $2b$ und verlängert dieselben durch das Rechteck hindurch, so wird die Stimmgabelcurve je nach dem Phasenunterschiede der beiden Schwingungen durch die verschiedenen Schnittpunkte der genannten Perpendikel gehen, aber so, dass nur die vier Seiten des Rechtecks Tangenten der Curve sein können, da sie eben die Amplituden darstellen, während die genannten Perpendikel von der Curve nicht berührt, sondern geschnitten werden. So ist jede Stimmgabelcurve mit rechtwinkligen Bewegungscomponenten in ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$ eingeschlossen, das sich aber infolge der Reibung der schwingenden Körper immer mehr verengert. Stehen die componirenden Schwingungen nicht aufeinander senkrecht, so verwandelt sich dieses Rechteck in ein schiefwinkliges Parallelogramm. Wir wollen dasselbe „Amplitudenparallelogramm" nennen. Die oben beschriebene Eintheilung der Seiten kann man in diesem Falle auf doppelte Weise machen, wie dies Fig. 4 näher angiebt und wie man auch durch leichte Rechnung bestätigt findet. Mittelst der obenerwähnten Constructionsmethode kann man sich dann eine Vorstellung davon machen, wie die Stimmgabelcurven in diesem Falle sich gestalten.

Da sich mit dem beim Beginn der Bewegung stattfindenden Phasenunterschiede auch die Gestalt der Curve ändert, so gehören zu einem und demselben Schwingungsverhältnisse auch unendlich viele verschiedene Curven, unter denen sich aber immer zwei ausgezeichnete Fälle befinden, die wir die Haupttypen nennen können. In dem ersten Falle ist die Curve keine vollständige Schlinge, sondern ein begrenztes Stück einer unendlichen Curve, im andern Falle ist sie eine Schlinge mit vier symmetrischen Quadranten. Als mathematischen Ausdruck der beiden Fälle kann man unter anderen die folgenden wählen:

$$\text{für den ersten Haupttypus}\quad \beta - \alpha = 0,$$

$$\text{und für den zweiten Haupttypus}\quad \beta - \alpha = \frac{B}{2}.$$

Der Beweis liegt in den unten folgenden Eliminationsgleichungen 7) und 9).

Herr Perigal, der diese Curven vor etwa 40 Jahren durch eine eigene Maschinerie graphisch dargestellt hat, nennt die erstere Gattung „Syphonoids", die letztere „Lemnoids". In der *Royal Society*, der *Astronomical Society* und der *Royal Institution* finden sich Sammlungen der Perigal'schen Curven. Worin das Princip der Perigal'schen Maschinerie, das, soviel ich erfahren konnte, auf zusammengesetzter Kreisbewegung beruht, bestehe, lässt sich aus der oben angeführten geometrischen Constructionsmethode leicht errathen. Befestigt man nämlich in dem Kreuzungspunkte der beiden in Fig. 5 dargestellten Schienen $\overline{a_1 a_2}$ und $\overline{b_1 b_2}$ einen Schreibstift und verbindet zwei sich nicht gegenüberliegende Scheiben so, dass ihre Umlaufszeiten sich verhalten wie $A:B$, so wird der Stift je nach diesem Verhältnisse die verschiedenen Stimmgabelcurven beschreiben und zwar, je nach der Stellung der beiden Schienen gegen einander, auch mit verschiedenem Phasenunterschiede. Kreuzen sich die Schienen nicht rechtwinklig, so hat man den obenerwähnten Fall schiefwinkliger Componenten.* Wie weit jedoch dieser Apparat hinter den Leistungen des Pendels zurückbleibt, bedarf wohl keiner Erwähnung.

6. Die Gleichungen der Stimmgabelcurven findet man durch Elimination von t aus den Gleichungen 4). Diese Elimination führt im Allgemeinen auf transcendente Ausdrücke, die aber in den beiden Fällen

$$\beta-\alpha=0 \text{ und } \beta-\alpha=\frac{B}{2},$$

die nach 5. die beiden Haupttypen der Stimmgabelcurven darstellen, algebraisch werden. Für dieselben lässt sich denn auch die Elimination allgemein ausführen mit Hilfe der bekannten trigonometrischen Reihe

$$5)\qquad \frac{\cos n\varphi}{n}=\sum_i(-1)^i\,2^{n-2i-1}\frac{\Pi(n-i-1)}{\Pi(i)\,\Pi(n-2i)}\cos\varphi^{n-2i},$$

worin i von 0 bis $\frac{n}{2}$, resp. bis $\frac{n-1}{2}$ geht und $\Pi(i)$ das Gauss'sche Zeichen ist für das Product $1.2.3\ldots i$. (Vergl. *Serret*, *Algèbre super.*, *pag.* 194.)

1. Fall: $\beta-\alpha=0$.

$$6)\qquad \frac{x}{a}=\cos\frac{\pi(t-\alpha)}{A},\quad \frac{y}{b}=\cos\frac{\pi(t-\alpha)}{B}.$$

Sind n_a und n_b die Schwingungszahlen, ist also $n_a:n_b=\frac{1}{A}:\frac{1}{B}$, so kann man die Gleichungen 6) immer auf die Form bringen

$$\frac{x}{a}=\cos n_a\mu,\quad \frac{y}{b}=\cos n_b\mu.$$

Es ist dann nach 5)

$$\cos n_b n_a\mu=\Sigma A_i(\cos n_a\mu)^i=\cos n_a n_b\mu=\Sigma B_i(\cos n_b\mu)^i$$

und folglich die Gleichung der Curve

$$7)\qquad \Sigma A_i\left(\frac{x}{a}\right)^i=\Sigma B_i\left(\frac{y}{b}\right)^i.$$

2. Fall: $\beta-\alpha=\frac{B}{2}$.

---

* Ganz auf demselben Princip beruht auch die von König ausgeführte Modification des Wheatston'schen Kaleidophons. Pisko, Die neueren Apparate der Akustik, S. 123.

$$8)\qquad \frac{x}{a} = \cos\frac{\pi(t-\alpha)}{A}, \quad \frac{y}{b} = \sin\frac{\pi(t-\alpha)}{B}.$$

Sind wieder n_a und n_b die Schwingungszahlen, ist also $n_a : n_b = \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$, so kann man die Gleichungen 8) immer auf die Form bringen

$$\frac{x}{a} = \cos n_a \mu, \quad \frac{y}{b} = \sin n_b \mu.$$

Es ist dann wieder nach 5)

$$\cos n_b(2n_a\mu) = \Sigma A_i (\cos 2n_a\mu)^i = \cos n_a(2n_b\mu) = \Sigma B_i (\cos 2n_b\mu)^i$$

und folglich die Gleichung der Curve

$$9)\qquad \Sigma A_i\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)^i = \Sigma B_i\left(1-\frac{2y^2}{b^2}\right)^i.$$

Diese Gleichung ist aber nur dann von 7) verschieden, wenn n_a ungerade vorausgesetzt wird.

Ist also das Verhältniss $n_a : n_b$ möglichst vereinfacht und ist n die grössere der beiden Zahlen, so ist die Gleichung für den ersten Haupttypus vom Grade n und die für den zweiten Haupttypus vom Grade $2n$. Die Gleichungen 7) und 9) behalten selbstverständlich ihre Giltigkeit, welchen Winkel auch immer die beiden componirenden Schwingungen, folglich auch die Axen des Coordinatensystems miteinander bilden. Diese Eliminationsmethode ist im Wesentlichen einer Abhandlung des Herrn Drach entnommen: *The Lond. Edinb. and Dubl. Philosoph. Magazine, vol. XXXIV*, 1849. *An easy rule for formulizing all epicyclical curves with one moving circle by the binomial theorem. By S. M. Drach Esq. F. R. A. S. — Appendix.*

7. Für die beiden einfachsten Fälle $A:B = 1:1$ und $A:B = 2:1$ lässt sich übrigens die Elimination leicht allgemein ausführen. Setzt man $\alpha = 0$, schreibt also die Gleichungen 4) für den ersten Fall

$$\frac{x}{a} = \cos\frac{\pi t}{B}, \quad \frac{y}{b} = \cos\frac{\pi(t-\beta)}{B},$$

so giebt die Elimination von t

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\frac{\pi\beta}{B} = \left(\sin\frac{\pi\beta}{B}\right)^2,$$

welches die Gleichung der Ellipse ist. Construirt man das in 5. erwähnte „Amplitudenparallelogramm", so stellt die Gleichung für $\beta = 0$ und $\beta = B$ die beiden Diagonalen und für $\beta = \frac{B}{2}$ eine Ellipse dar, welche das Parallelogramm in der Mitte der Seiten berührt. Es sind dies die beiden in 6. erwähnten Haupttypen, die sich auch nach der Drach-schen Eliminationsmethode behandeln lassen.*

* Es ist dieses, da hier $l_a = l_b$ ist, der Fall des einfachen sphärischen Pendels und man sieht aus den Entwickelungen in dieser und der folgenden Nummer, dass

Für den zweiten Fall schreiben wir die Gleichungen 4) in der Form

$$\frac{x}{a} = \cos\frac{\pi t}{2B}, \quad \frac{y}{b} = \cos\frac{\pi(t-\beta)}{B}$$

und erhalten durch Elimination von t

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{2x^2}{a^2} - 1\right)\cos\frac{\pi\beta}{B} + \frac{2x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.\sin\frac{\pi\beta}{B}.$$

Für $\beta = 0$ und $\beta = B$ erhält man zwei symmetrisch liegende Parabeln

$$\frac{x^2}{a^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{y}{b}\right)$$

und für $\beta = \frac{B}{2}$ eine der Lemniscate ähnliche Curve vierten Grades

$$\frac{y^2}{b^2} = 4\,\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Es sind dies wieder die beiden Haupttypen, für welche man nach der Drach'schen Methode dasselbe Resultat erhält. Eine ausführliche Untersuchung der Lage und Gestalt der eben behandelten Curven für verschiedene Werthe der Phasendifferenz findet man in dem Lehrbuche der Experimentalphysik von Wüllner, I. Bd. 1. Abth. §§ 123 und 124. An diesen beiden Beispielen findet man auch die oben über den Grad der Eliminationsgleichungen gemachte Bemerkung bestätigt.

---

sich die Theorie des sphärischen Pendels für kleine Amplituden sehr einfach durchführen lässt, indem man seine Bewegung als Superposition zweier ebenen Pendelschwingungen betrachtet. Diese Anschauungsweise zeigt auch, dass die elliptische Bahn des Pendels mit dem Isochronismus kleiner Schwingungen eng zusammenhängt. Dass aber die Bahn des sphärischen Pendels für grössere Amplituden schleifenförmig wird, rührt nicht daher, dass jetzt das Gesetz des Isochronismus seine Geltung verliert, weil sonst der Abstand je zweier Scheitel um so grösser sein müsste, je schmäler die einzelnen Schleifen sind, während doch bekanntlich das Gegentheil der Fall ist. (Durège, Theorie d. ellipt. Funct., S. 332.) Die Bewegung des sphärischen Pendels lässt sich eben für grössere Amplituden nicht als Superposition zweier ebenen Pendelschwingungen betrachten. Stellte man demnach den Tisley'schen oder Browning'schen Apparat auf den Einklang (1:1) ein und liesse ihn mit grösseren Amplituden eine Curve beschreiben, so würde diese zwar schleifenförmig werden, aber keineswegs die Bewegung des sphärischen Pendels darstellen. Um von dieser letzteren ein Bild zu erhalten, habe ich mehrere Versuche gemacht, indem ich den im II. Theile näher zu beschreibenden Dobson-schen Schreibapparat an einer Cardan'schen Vorrichtung und später auch an einem einfachen Drahte aufhing. Die erhaltenen Bilder waren Ellipsen, die sich in der Richtung der Bewegung langsam drehten, erwiesen sich aber als sehr abhängig von verschiedenen Einflüssen, welche in der Theorie nicht berücksichtigt werden. Vielleicht wird es einem geschickteren Experimentator gelingen, diese Einflüsse zu verringern und Bilder herzustellen, an welchen sich die mathematische Theorie des sphärischen Pendels verificiren lässt und welche zweifelsohne für ein erstes Studium der Theorie und namentlich für Vorlesungen von Nutzen wären.

den Schreibapparat, der in Fig. 6 nur angedeutet und in Fig. 7 in vergrössertem Massstabe dargestellt ist. Der Buchstabe *w* wird den Zusammenhang der Figuren 6 und 7 leicht vermitteln. Die genannten Schnüre werden mittelst Drahthäkchen in die oberen Schnüre eingehängt, oder laufen über zwei an der untern Seite des Stäbchens *cd* angebrachten Rollen ineinander über.*

Der zweiten Schwierigkeit begegnet Herr Prof. Dobson dadurch, dass er die Schreibfeder in vertikaler Richtung frei beweglich macht und durch einen Hebel *hk* (Fig. 7) ihr Gewicht vermindert, und gerade durch die Empfindlichkeit dieser Vorrichtung scheint das Dobson'sche Pendel vor allen anderen ähnlichen Apparaten sich auszuzeichnen. Diese Feder besteht aus einem Glasröhrchen *r* mit fein ausgezogener Spitze, das in einem zweiten, unbeweglichen Glasröhrchen *r'* leicht auf und ab gleitet. Letzteres wird in der Mitte des Tischchens *T* vertikal eingesenkt, aber so, dass es leicht entfernt und nach Bedürfniss durch ein weiteres oder engeres ersetzt werden kann.** Der in Fig. 7 gezeichnete Einschnitt in das Tischchen lässt die Feder leichter beobachten. Letztere wird mittelst eines Kautschukringes *v* an einem Faden befestigt und an dem Kopfe *k* des Hebels mit einer Nadel aufgehängt. Der Kopf *k* besteht aus einem Kreisbogen mit dem Radius *ok*, damit die Bewegung der Feder *r* genau vertikal bleibt, und kann aus dickem Papier verfertigt werden. Der Hebel ist im Punkte *o* mit einem Faden an dem Drahtständer *s* aufgehängt, welch' letzterer in dem Tischchen *T* drehbar sein muss, damit man der Feder *r* immer die richtige Stellung in der Hülse *r'* geben kann. Das seitliche Schaukeln des Hebels wird durch das Drahtgeleise *t* verhütet. Am andern Ende *h* des Hebels ist ein Gegengewicht anzubringen, etwas schwerer als die Feder, damit letztere das Papier nicht berührt, bevor der Apparat in Bewegung gesetzt ist. Dieses Gegengewicht ist leicht so anzubringen, dass es das Bestreben des Hebels, sich um seine Längenaxe zu drehen, welches durch das am obern Ende des Bogens *k* angreifende Gewicht der Feder *r* verursacht wird, aufhebt. Ein leichter Staniolreiter, mit dem man nachher den Hebel nahe am Kopfe *k* (Fig. 7)

---

* Man könnte leicht versucht sein zu glauben, dass, wenn man die erwähnten Drahthäkchen so einhängt, dass $\overline{cd}$ mit $\overline{ab}$ einen spitzen Winkel bildet, die beiden componirenden Schwingungen denselben Winkel miteinander bilden werden. Zerlegt man aber in diesem Falle die senkrecht zu $\overline{cd}$ gerichtete Amplitude in zwei rechtwinklige Componenten, von denen die eine in die Schwingungsebene des grossen Pendels fällt, so addirt sich diese Componente einfach zur Amplitude des letztern, was bei zwei getrennten Pendeln nicht der Fall wäre. Der Versuch wird auch zeigen, dass eine Drehung des Stäbchens *cd* auf die Figur keinen Einfluss hat. Wenn demnach Herr Swan in einer Note zu Herrn Airy's Aufsatz (Nature, Sept. 7 1871, S. 366) auch in diesem Falle von „verschiedenen Neigungen" der Componenten spricht, so ist das zum wenigsten sehr ungenau ausgedrückt.

** Beide Röhrchen sind der Deutlichkeit wegen etwas zu breit gezeichnet.

belastet, wird dann genügen, um die Feder mit dem Papier in leichte Berührung und folglich zum Schreiben zu bringen. Die beiden Schnüre, an welchen der Schreibapparat hängt, winden sich um die Welle w (Fig. 6 u. Fig. 7), welche an einer Seite ein Zahnrad z_1 besitzt. Ein zweiter Zahnrad-Aufzug z_2 (der in Fig. 6 nur angedeutet ist und auf beliebige Weise construirt werden kann) ist an der Wand befestigt, um die beiden über die Rollen a und b (Fig. 6) gehenden Schnüre aufzunehmen.

2. Der Apparat kann in einer hohen und weiten Fensternische aufgehängt werden; der unter dem Schreibapparat aufzustellende Tisch aber, auf welchen das Papier zu liegen kommt, muss, wenigstens wenn das Zimmer bewohnt ist, vom Boden unabhängig, also an der Wand befestigt sein. Das Tischchen T kann etwa 40 cm Länge haben, die bei g (Fig. 7) anzubringenden Gewichte sollten nicht unter 12—15 kg betragen. Voraussichtlich werden indessen die Zeichnungen immer genauer und schöner, je grösser die Dimensionen des Apparates und je schwerer die Gewichte sind. Da die Schnüre sich stark ziehen, sind Drähte bei weitem vorzuziehen.

3. Als Dinte empfiehlt sich violette Anilinfarbe, mit heissem Wasser angemacht, die man nach Bedürfniss verdicken und verdünnen kann. Filtrirt wird sie die Feder weniger leicht verstopfen. Um Letzteres zu verhüten, habe ich auch nie Gummi angewandt, während Herr Browning eine gute Quantität desselben für nöthig hält. Gute Resultate wird man nur dann erzielen, wenn man Glanzpapier gebraucht, wie es z. B. zu Visitenkarten verwendet wird. Die Spitzen der Federn müssen nicht gar zu fein, aber kurz sein, damit die Dinte nicht eintrocknet, und einen flachen, zur Längenaxe der Feder senkrechten Bruch haben, damit sie das Papier nicht aufritzt. Ersteres erreicht man leicht bei vorsichtigem Ausziehen der Spitze in einer Gasflamme, Letzteres hat bisher mehr Schwierigkeit geboten. Die Methode, welche Herr Airy in dem angeführten Aufsatze beschreibt und welche im Aetzen des Glases und in seiner sogenannten „Feuertaufe" besteht, ist nach seinem eigenen Geständnisse mühsam und missglückt in vielen Fällen. In welcher Weise Herr Tisley seine Federn bereitet, die er einzeln um 1 Mk. verkauft, ist mir nicht bekannt. Herr Browning räth an, die Feder mit freier Hand über einen Schleifstein zu führen. Das leichteste und immer sicher zum Ziele führende Mittel besteht darin, dass man das Schleifen dem Apparat selbst überlässt, indem man die Feder in der oben beschriebenen Weise in denselben einhängt, dieselbe aber anstatt auf Papier, auf einem feinen Schleifsteine schreiben lässt. Der Gebrauch einer Loupe wird dann zeigen, wie lange Zeit und mit einem wie schweren Staniolreiter das Pendel diese Arbeit fortzusetzen hat.

4. Die Länge l_b des grossen Pendels, die man von der Linie $\overline{ab}$ (Fig. 6) bis zur Fläche des Tischchens T berechnet, ist constant, indem

die Feder immer bis zu dem Tische reicht, auf welchem das Papier liegt. Die Länge des kleinen findet man dann für ein bestimmtes Schwingungsverhältniss $n_a : n_b$ nach 3) aus der Formel

$$l_a = \left(\frac{n_b}{n_a}\right)^2 l_b,$$

wo der Bruch $\left(\frac{n_b}{n_a}\right)$ immer ein echter ist. Bei meinem Apparate ist $l_b = 301{,}7$ cm und so finde ich z. B. für die grosse Sexte (3:5)

$$l_a = \tfrac{9}{25} \,.\, 301{,}7 = 108{,}6 \text{ cm}.$$

Auf diese Länge stellt man dann mit Hilfe eines Massstabes das kleine Pendel (vom Stäbchen $\overline{cd}$ bis zur Oberfläche des Tischchens T gerechnet) ein und lässt mit Hilfe des Zahnradaufzuges z_2 (Fig. 6) die Feder dem Papiere sehr nahe kommen. Dann saugt man Dinte in die Feder, schlingt einen Faden um die Hülse r' und zieht den Schreibapparat in irgendwelcher Richtung an, um ihn, wenn er vollständig zur Ruhe gelangt ist, loszulassen. Ist die Schwingung ruhig und regelmässig, so setzt man den Staniolreiter in der obengenannten Weise auf, wodurch die Feder zum Schreiben kommt.

Zunächst überzeugt man sich leicht, dass die Richtung, in der man den Apparat anzieht, nur auf die Breite und Länge, nicht aber auf die Art der Figur Einfluss hat, da das Schwingungsverhältniss infolge des Isochronismus von den Amplituden unabhängig ist.

Der Schreibapparat wird vor dem Loslassen zur Ruhe gebracht (indem man ihn z. B. gegen die Lehne eines Sessels anzieht), damit die componirenden Schwingungen keinen Phasenunterschied besitzen, die Curve also für den Anfang wenigstens zwei Spitzen aufweist, was für die genaue Einstellung des Apparates von Vortheil ist. Denn bald wird man das sogenannte „Drehen" der Figur beobachten, indem diese Spitzen sich mehr und mehr abrunden. Die Gestalt der Figur ändert sich dann gerade so, als ob $\beta - \alpha$ in Gleichung 4) allmälig von Null an wachse.

Man kann diese Aenderung des Phasenunterschiedes auch mathematisch verfolgen an dem einfachen Beispiele

$$A = B + \frac{B}{\nu}, \quad \beta - \alpha = 0,$$

welches ebenfalls der erwähnten Abhandlung von Sang entnommen ist. Man hat dann

$$x = a \cos \frac{\pi (t - \alpha)}{B + \frac{B}{\nu}}, \quad y = b \cos \frac{\pi (t - \alpha)}{B}.$$

Ist $\nu = \infty$, so ist die resultirende Bewegung eine Gerade, nämlich die eine Diagonale des Amplitudenparallelogramms. Ist aber ν eine endliche sehr grosse Zahl, deren reciprokes Quadrat man vernachlässigen kann, und setzt man der Reihe nach

$$t-\alpha=0,\ =B,\ =2B,\ =3B,\ =\ldots,$$

so wird die halbe Schwingung parallel der x-Axe gegen diejenige parallel der y-Axe sich der Reihe nach verspäten um die Zeiten

$$0,\quad \frac{B}{\nu},\quad \frac{2B}{\nu},\quad \frac{3B}{\nu},\ \ldots$$

und der Berührungspunkt der Curve mit dem Amplitudenparallelogramm wird auf den beiden parallelen Seiten $2a$ von den Enden der genannten Diagonale abwechselnd zurückweichen um die Strecken

$$0,\quad a\,sin\,vers\,\frac{\pi}{\nu},\quad a\,sin\,vers\,\frac{2\pi}{\nu},\quad a\,sin\,vers\,\frac{3\pi}{\nu},\quad \ldots.$$

Ist die Anzahl der halben Schwingungen parallel der y-Axe $=\frac{\nu}{2}$ $\left(\text{resp.} =\frac{\nu\pm1}{2}\right)$, so hat sich die Diagonale in eine das Amplitudenparallelogramm in der Mitte der Seiten berührende Ellipse verwandelt, welche wiederum nach ebensovielen Schwingungen in die andere Diagonale übergegangen sein wird. Letztere verwandelt sich dann rückwärts in die erste Diagonale u. s. f. Da man ν experimentell bestimmen kann, so findet man als wahres Schwingungsverhältniss $(\nu-1):\nu$, welches sehr nahe an 1 liegt. Will man überhaupt den Apparat auf das Verhältniss $n_a:n_b$ einstellen und dreht sich die Figur in ν halben Schwingungen des grossen Pendels vollständig, so ist ihr wahres Schwingungsverhältniss $(\nu\pm1)n_a:\nu n_b$, je nach der Richtung, in welcher sich die Spitzen abgerundet haben.

Die Ursache dieser Erscheinung ist ein Fehler in der Länge l_a, der, abgesehen von den verschiedenen Reibungen in der Luft, in den Aufhängepunkten a, b, c, d (Fig. 6) und an der schreibenden Feder r, von drei Ursachen herrührt und jetzt nachträglich corrigirt werden muss. Erstlich ist das grosse Pendel, da sein Schwingungsmittelpunkt über der Fläche des Tischchens T liegt, zu gross vorausgesetzt, also wird das kleine zu gross berechnet. Weiter wird das kleine Pendel, da sein Schwingungsmittelpunkt ebenfalls über der Fläche des Tischchens T liegt, zu kurz abgemessen. Endlich macht das Stäbchen $\overline{cd}$ (Fig. 6) infolge der Dehnung der Schnüre die Schwingungen des kleinen Pendels theilweise mit. Als Gesammtwirkung aller dieser Ursachen stellt sich bei meinem Apparate heraus, dass die beobachtete Länge l_a immer kürzer ist, als die berechnete, und zwar schwankt der Fehler für die verschiedenen Zweiklänge innerhalb der Octave zwischen 0,5 cm und 1,0 cm. Diesen Fehler findet man nun experimentell auf folgende Weise.

Man denke sich auf dem Papier das Amplitudenrechteck construirt und ziehe den Apparat gegen eine Ecke desselben an. Hier wird dann die erste Spitze der Figur auftreten. Nun überlege man, in welcher der drei anderen Ecken und nach wievielen halben Schwingungen des grossen Pendels die andere Spitze auftreten wird, d. h. wo und wann n_a halbe Schwingungen des kleinen Pendels mit n_b halben Schwingungen des grossen Pendels endigen werden. Bei dem oben angeführten Schwingungsverhältnisse 3:5 wird die zweite Spitze, da beide Zahlen ungerade sind, der ersten diagonal gegenüberliegen und nach drei halben Schwingungen des grossen Pendels zum Vorschein kommen. Tritt nun anstatt einer Spitze eine Rundung auf, so wird man aus der Bewegungsrichtung an dieser Stelle leicht erkennen, welches der beiden Pendel sich verfrüht hat, d. h. zu kurz ist. Ist die Länge l_a schon sehr genau, so wird man den Fehler erst bemerken, nachdem die Feder zu wiederholten Malen zu derselben Spitze zurückgekehrt ist. Damit aber diese, dem Stimmen musikalischer Instrumente ganz analoge Correction keine vergebene Mühe sei, wird man gut daran thun, vor derselben die Gewichte mehrere Stunden auf die Schnüre wirken zu lassen. Schreibt man sich die beobachteten Längen des kleinen Pendels nach jedem Versuche auf, so wird man bei Wiederholung desselben die richtige Länge schon mit dem Massstabe bis auf 1 mm genau treffen. So leicht es nun ist, die beiden componirenden Schwingungen ohne Phasenunterschied beginnen zu lassen, so schwierig ist es, denselben eine bestimmte Phasendifferenz, z. B. $\beta - \alpha = \frac{B}{2}$ beizulegen. Die Apparate von Tisley und Browning bieten hierin so wenig Sicherheit, wie der Dobson'sche, und weisen den Experimentator einzig auf seine Geschicklichkeit an.

5. Schliesslich mögen noch einige Winke für die Praxis folgen.

Damit man nicht Gefahr laufe, die Schnüre über ihre Tragkraft hinaus zu belasten, ist es rathsam, über die verschiedenen Spannungen einen Ueberschlag zu machen. Denken wir uns die drei von c (Fig. 6) aus gehenden Schnüre in einer Ebene liegend (was bei meinem Apparate annähernd der Fall ist) und gleiche Winkel miteinander bildend, so überzeugt man sich leicht, dass sie dieselbe Spannung besitzen, nämlich gleich der halben Belastung des Apparates. Bezeichnet man nämlich die Spannung von $\overline{ce}$ (Fig. 6) mit S und die halbe Belastung des Apparates mit G, so ist bei jeder Stellung des Apparates

$$S = \frac{G}{2 \cos \frac{\lambda}{2}},$$

also $S = G$ für $\lambda = \frac{2\pi}{3}$. Ist ferner $\overline{cd}$ gegen $\overline{ce}$ ziemlich klein, so haben die von e und f an über die Rollen gehenden Schnüre nahezu die doppelte, und wenn dieselben zwischen a und z_2 in eine einzige übergehen, so hat diese nahezu die vierfache Spannung von jener auszuhalten, welche die von c oder d nach w führenden Schnüre besitzen. Ist aber $\angle \lambda$ grösser als die beiden anderen an c liegenden Winkel (was bei meinem Apparate bei der kleinen Terz der Fall ist), so sind die erwähnten Spannungen noch grösser.

Sehr bequem ist es, wenn man das Papier nicht von vornherein in kleine Karten zerschneidet, sondern einen grössern Bogen durch Linien in Felder abtheilt und auf ein Reissbrett spannt.

Die Darstellung der Figuren bietet, wie die Erfahrung lehrt und wie auch von vornherein zu vermuthen ist, um so mehr Schwierigkeit, je enger und je schneller sich die einzelnen Curventheile aneinander schmiegen, je kleiner also bei einem und demselben Pendel die halbe Schwingungsdauer ist. Dieselbe ist aber nach I. Th. 8 gleich $n_b \pi \sqrt{\frac{l_b}{g}}$, also wächst die Schwierigkeit um so mehr, je kleiner n_b, d. h. die kleinere der beiden Schwingungszahlen ist. In demselben Verhältnisse wächst bekanntlich auch die Consonanz der Zweiklänge (Helmholtz, „Die Lehre von den Tonempfindungen", S. 305), so dass also die Zweiklänge durch das graphische Pendel um so schwieriger darzustellen sind, je vollkommener ihre Consonanz ist. Man beginnt also bei der Darstellung derselben am besten mit der kleinen Sexte (5:8) und kleinen Terz (5:6), geht dann über zur grossen Terz (4:5), grossen Sexte (3:5) und Quarte (3:4) und macht sich erst nach Erlangung einiger Uebung an die Quinte (2:3), die Octave (1:2) und überhaupt an die Zweiklänge, welche aus dem Grundtone und einem seiner Obertöne (1:2, 1:3, 1:4 u. s. w.) bestehen.

Ist einmal die Pendellänge l_a richtig gefunden und eine passende Feder gewählt, gleitet diese frei in der Hülse r' und unterlässt man nicht, vor jedem Versuche das Papier gut zu reinigen und frische Dinte in die Feder zu saugen, so kann man mit Sicherheit auf guten Erfolg rechnen. Hält man den Schreibapparat vor dem Loslassen nicht ganz ruhig, so wird die Figur infolge der Kreuzung der einzelnen Linien sogenannte Wässerungen aufweisen, welche ihr ein sehr hübsches Aussehen verleihen. Nicht uninteressant ist es vielleicht, zu wissen, dass Tisley eine Curve auf Papier um $\frac{1}{2}$ Mark und eine auf geschwärztem Glase um $2\frac{1}{2}$ Mark verkauft.

XX.

Die Differentialgleichungen der Dioptrik continuirlich geschichteter Linsen und ihre Anwendung auf die Dioptrik der Krystalllinse.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Die Formeln der Dioptrik discontinuirlich geschichteter centrirter Linsensysteme sind längst bekannt. Seitdem nun aber die mathematische Literatur über die Dioptrik des menschlichen Auges in rapidem Wachsthum begriffen ist, wird auch das Bedürfniss unabweisbar, sich des Problems der Dioptrik von Systemen continuirlich variabler optischer Dichtigkeit zu bemächtigen, also an erster Stelle der Dioptrik der Krystalllinse. Wir wollen deshalb im Folgenden aus den bekannten Formeln der Dioptrik discontinuirlich geschichteter Linsensysteme ihre Differentialgleichungen herleiten, wobei wir ein centrirtes System continuirlich variabler brechender, sphärischer Flächen voraussetzen.

Angenommen, es seien a Flächen zu einem System verbunden, so gelten folgende Formeln für die Berechnung der Cardinalpunkte:

1) $$D_{a-1} = d_{a-1} - \varphi_{a-1} \frac{D_{a-2}}{M_{a-2}},$$

2) $$M_{a-1} = f_a - \varphi_{-1} + D_{a-1} = f_a - \varphi_{a-1} + d_{a-1} + \frac{\varphi_{a-1} f_{a-1}}{M_{a-1}},$$

3) $$-(\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2a-3}) = -\Sigma\alpha_{2a-3} = \frac{f_1 d_1}{M_1} + \ldots + \frac{f_1 f_2 \ldots f_{a-1} D_{a-1}}{M_1 M_2 \ldots M_{a-1}},$$

4) $$-\alpha_{2a-2} = \varphi_a \frac{D_{a-1}}{M_{a-1}},$$

5) $$f = \frac{f_1 f_2 \cdots f_a}{M_1 M_2 \ldots M_{a-1}},$$

6) $$\varphi = (-1)^{a-1} \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_a}{M_1 M_2 \ldots M_{a-1}},$$

7) $$\varepsilon_{a-1} = \eta_{a-1} - \alpha_{2a-2} + \Sigma\alpha_{2a-3},$$

8) $$f_a = -\frac{r_a}{n_a - 1}, \quad \varphi_a = \frac{n_a r_a}{n_a - 1}.$$

Zum Verständniss der nachfolgenden Analysis wird es zweckmässig sein, die Bedeutung der Elemente dieser Formeln hervorzuheben.* Es bedeuten nämlich zunächst f_a und φ_a die beiden Brennweiten der letzten oder a^{ten} Fläche, r_a ihren Krümmungsradius, n_a den relativen Brechungsindex der hinter ihr liegenden Schicht zu dem der vorangehenden. Sodann bedeuten f und φ die negative und positive Brennweite des ganzen Systems, φ_{-1} die positive Brennweite des vorangehenden, d. h. des ganzen Systems mit Ausschluss der letzten Fläche, η_{a-1} den Abstand des Scheitelpunktes der a^{ten} Fläche von der vordersten, also die ganze Dicke des Systems oder, wenn man den Scheitelpunkt der vordersten Fläche als Abscissenanfangspunkt wählt, die Abscisse der a^{ten} Fläche. Ferner bezeichnen $\Sigma\alpha_{2a-3}$ und α_{2a-2} die beiden Hauptpunktsdistanzen, d. h. resp. den Abstand der ersten Fläche vom ersten Hauptpunkte H_α und den Abstand der a^{ten} Fläche vom zweiten Hauptpunkte H_β. Weiter bedeutet ε_{a-1} das Interstitium dieser beiden Hauptpunkte, endlich d_{a-1} den Abstand der letzten Fläche von der vorletzten und $D_{a-1}=d_{a-1}+\alpha_{2a-4}$ den Abstand der letzten oder a^{ten} Fläche von dem zweiten Hauptpunkte des vorangehenden Systems.

Die Grösse M_{a-1} ist nur eine abgekürzte Form, deren Bedeutung aus Formel 2) hinlänglich klar wird und welche sich in Form einer Kettenbruchdeterminante darstellen lässt auf folgende Art:

$$M_{a-1}=\frac{\begin{vmatrix} f_a-\varphi_{a-1}+d_{a-1}, & \varphi_{a-1}f_{a-1}, & 0, & \cdots & . & 0 \\ -1, & f_{a-1}-\varphi_{a-2}+d_{a-2}, & \varphi_{a-2}f_{a-2}, & \cdots & . & 0 \\ 0, & -1, & f_{a-2}-\varphi_{a-3}+d_{a-3}, & \cdots & . & 0 \\ 0, & 0, & -1, & \cdots & . & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & -1 & f_2-\varphi_1+d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \cdots & . & 0 \\ 0, & f_{a-1}-\varphi_{a-2}+d_{a-2}, & \varphi_{a-2}f_{a-2}, & \cdots & . & 0 \\ 0, & -1, & f_{a-2}-\varphi_{a-3}+d_{a-3}, & \cdots & . & 0 \\ 0, & 0, & -1, & \cdots & . & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & -1, & f_2-\varphi_1+d_1 \end{vmatrix}}.$$

Zunächst lässt sich aus den Gleichungen 2), 5) und 8) die Differentialgleichung für die negative Brennweite f des Systems herleiten. Es trete zu dem bereits vorhandenen System von der negativen Brennweite f eine neue brechende, unendlich nahe Fläche hinzu, so geht f über in $f+\partial f$ und es wird

$$9)\qquad f+\partial f=\frac{f_1 f_2\cdots f_a}{M_1 M_2\ldots M_{a-1}}\times\frac{f_{a+1}}{M_a}=f.\frac{f_{a+1}}{M_a},$$

---

* Ludw. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Mathem. Einleitung in die Dioptrik des menschl. Auges, § 21. Leipzig 1877.

10) $$f_{a+1} = -\frac{r_{a+1}}{n_{a+1}-1}, \quad \varphi_{a+1} = \frac{n_{a+1} r_{a+1}}{n_{a+1}-1}.$$

Für diese neu hinzutretende Fläche ist also

11) $$f + \partial f = f\frac{f_{a+1}}{M_a} = f\frac{f_{a+1}}{f_{a+1} - \varphi + D_a}$$

und, wenn man beiderseits durch f dividirt,

12) $$1 + \frac{\partial f}{f} = 1 - f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{f_{a+1}}{f_{a+1} + nf + D_a}.$$

Dividirt man den letzten Quotienten im Dividenden und Divisor durch f_{a+1}, so resultirt

13) $$1 + \frac{\partial f}{f} = 1 - f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{1 + \frac{nf + D_a}{f_{a+1}}}.$$

Für eine unendlich dünne Schicht wird nun f_{a+1} unendlich gross. Bezeichnen wir nämlich den absoluten Brechungsindex der vorangehenden Schicht mit n, den der hinzutretenden mit $n + \partial n$, so ist der relative Index

14) $$n_{a+1} = \frac{n + \partial n}{n} = 1 + \frac{\partial n}{n},$$

folglich

15) $$f_{a+1} = -\frac{r_{a+1} n}{\partial n}, \quad \varphi_{a+1} = \frac{r_{a+1}(n + \partial n)}{\partial n}.$$

Deswegen lässt sich die Gleichung 13) verwandeln in

17) $$1 - f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = 1 - \frac{nf + D_a}{f_{a+1}}$$

und, nach f_{a+1} aufgelöst,

17) $$\frac{1}{f_{a+1}} = \frac{f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{nf + D_a} = -\frac{\partial f}{f(nf + D_a)}.$$

Da aber auch gemäss 15)

$$\frac{1}{f_{a+1}} = -\frac{\partial n}{n r_{a+1}}$$

ist, so erhält man, indem man statt r_{a+1} kurz r und statt D_a die Variable D setzt,

18) $$\frac{1}{f_{a+1}} = -\frac{\partial n}{nr} = \frac{f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{nf + D}$$

und als Differentialgleichung der negativen Brennweite

19) $$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial n}{r} - \frac{D}{nf}\frac{\partial n}{r}.$$

Sind also r und n als Functionen von η gegeben und lässt sich D annähernd bestimmen, so lässt sich ein erster Näherungswerth von f finden.

Zur Bestimmung von D lassen sich aber noch andere Differentialgleichungen herleiten. Vorher aber wollen wir noch die Grösse M_a in Differentialen ausdrücken. Aus 12) und 18) folgt nämlich

$$20)\quad \frac{1}{M_a}=\frac{1-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{f_{a+1}}=\frac{\left(1-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)\right)f\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{nf+D}=-\frac{\left(1-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)\right)\partial n}{nr}.$$

In 3) kann man statt $-\Sigma\alpha_{2a-3}$ kurz $-\alpha_1$ setzen. Tritt eine neue Fläche im Abstande $\partial\eta$ hinzu, so wird in Berücksichtigung von 20)

$$21)\quad -\alpha_{2a-1}=-\partial\alpha_1=f\frac{D_a}{M_a}=f\frac{D}{M}=-f\frac{D\partial n}{nr}$$

oder

$$22)\quad -\frac{\partial\alpha_1}{D}=\frac{f^2\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{nf+D}=\frac{-\partial f}{nf+D}=-\frac{f\partial n}{nr}.$$

Da nach 1) und 4)

$$D_a=\partial\eta+\alpha_{2a-2}$$

zu setzen ist, so wird, wenn man der Kürze wegen α_2 an die Stelle von α_{2a-2} setzt, $D=\alpha_2$ und 22) geht über in

$$23)\quad \frac{\partial\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\partial f}{nf+\alpha_2}=\frac{\partial f}{-\varphi+\alpha_2}.$$

Da D im Allgemeinen sehr klein gegen f bleibt, so ist es von Vortheil, die Gleichung 22) in eine Reihe zu entwickeln, nämlich

$$24)\quad \frac{-\partial\alpha_1}{D}=\frac{f\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n}-\frac{D\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n^2}+\frac{D^2\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n^3f}-\dots$$

Ferner lässt sich eine Differentialgleichung bezüglich D finden aus 1). Es ist

$$25)\quad D_a=\partial\eta-\varphi_a\frac{D_{a-1}}{M_{a-1}}$$

oder

$$26)\quad D=\partial\eta-\frac{\varphi_a}{M_{a-1}}(D-\partial D)=\partial\eta+\frac{n_af_a}{M_{a-1}}(D-\partial D).$$

Geht man zu der unendlich nahen Fläche über, so ist

$$27)\quad D+\partial D=\partial\eta+\frac{n_{a+1}f_{a+1}}{M_a}D$$

oder gemäss 20)

$$28)\quad 1+\frac{\partial D}{D}=\frac{\partial\eta}{D}+\left(1+\frac{\partial n}{n}\right)\left(1-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)\right).$$

Dieselbe nimmt nach einer einfachen Reduction folgende Form an:

$$29)\quad \frac{\partial D}{D}=\frac{\partial\eta}{D}-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)+\frac{\partial n}{n}.$$

Da nun in Berücksichtigung von 7)

$$D = \eta + \alpha_1 - \varepsilon$$

ist, so wird nach 29)

30) $$\partial D = \partial \eta + \partial \alpha_1 - \partial \varepsilon = \partial \eta - Df\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) + D\frac{\partial n}{n}.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man mit Rücksicht auf 22)

31) $$D = \eta + \alpha_1 - \varepsilon = \eta + \alpha_1 - \int Df\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) + \int D\frac{\partial n}{n} - \int D\frac{f\,\partial n}{nr}.$$

Daraus folgt die Relation, wodurch das Interstitium gefunden wird

32) $$\varepsilon = \int Df\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) - \int D\frac{\partial n}{n} + \int Df\frac{\partial n}{nr},$$

oder in Berücksichtigung von 24)

33) $$\varepsilon = -\int (n-1)\,\partial\alpha_1 - \int D\frac{\partial n}{n} + \int D^2\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n} - \int \frac{D^3\,\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n^2 f} + \ldots.$$

Sind f und α_1 annähernd in η gegeben, so lässt sich auch ein Näherungswerth von ε in η darstellen. Um weiter einen genaueren Werth für α_1 zu erhalten, geht man in Formel 24) ein und setzt

34) $$\frac{-\partial\alpha_1}{\eta + \alpha_1 - \varepsilon} = \frac{f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n} - \frac{D\,\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n^2} + \ldots,$$

multiplicirt beiderseits mit $\eta + \alpha_1 - \varepsilon$, substituirt in den Gliedern der Reihe von der Kleinheit zweiter Ordnung die Näherungswerthe von α_1 und ε, und integrirt. Dadurch erhält man einen genaueren Werth von α_1 in η. Aus der Gleichung

35) $$D = \alpha_2 = \eta + \alpha_1 - \varepsilon$$

findet man endlich auch α_2.

Der Process der Integration der Differentialgleichungen 19), 33), 34) ist kurz der, dass man näherungsweise bestimmt in Reihenform

1. f aus 19), 2. ε aus 33), 3. α_1 aus 34) und α_2 aus 35).

Mit f ist auch φ gegeben durch die bekannte Beziehung $\varphi = -nf$.

Es kommt also zunächst darauf an, einen ersten Näherungswerth für $D = \alpha_2$ zu finden. Es giebt einen sehr oft eintretenden Fall, welcher in dieser Hinsicht besonders beachtenswerth erscheint. In demselben ist nahezu

$$D = \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta, \quad -\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\eta, \quad \varepsilon = 0,$$

und zwar bei einer dünnen brechenden Schicht continuirlich variabler Dichtigkeit, deren Vorderfläche durch ein Medium begrenzt wird von der optischen Dichtigkeit der Vorderfläche und deren hintere Fläche begrenzt wird durch ein Medium von der optischen Dichtigkeit der letzten Fläche, so dass keinerlei Discontinuität stattfindet.

Die Dicke der in Rede stehenden dünnen Schicht sei $\Delta\eta$, die mittleren Indices der drei aufeinanderfolgenden Medien M_0, M_1, M_2 beziehungsweise gleich n, $n + \Delta n$, $n + 2\Delta n + \Delta^2 n$. Die relativen Indices bezüglich der jedesmal vorangehenden Schichten sind beide sehr nahe gleich $1+\frac{\Delta n}{n}$. Endlich sei der Radius der Vorderfläche gleich r, der der hinteren Fläche $r+\Delta r$. Dann ist

$$-\Delta\alpha_1=\frac{f_1 D}{f_2-\varphi_1+D}=\frac{r\,\Delta\eta}{2r+\left(\Delta r+r\frac{\Delta n}{n}\right)-\frac{\Delta\eta\,\Delta n}{n}},$$

also nahezu

$$-\Delta\alpha_1=\tfrac{1}{2}\Delta\eta,$$

d. h. der erste Hauptpunkt liegt in der Mitte der Schicht.

Ferner findet man

$$\alpha_2=\frac{-\varphi_2 D}{f_2-\varphi_1+D}=\frac{\varphi_2}{f_1}\Delta\alpha_1.$$

Es ist aber

$$\frac{\varphi_2}{f_1}=\frac{r+\left(r\frac{\Delta n}{n}+\Delta r\right)+\frac{\Delta r\,\Delta n}{n}}{-r}$$

und also nahezu gleich -1. Demzufolge ist auch

$$\alpha_2=-\Delta\alpha_1=\tfrac{1}{2}\Delta\eta,$$

d. h. der zweite Hauptpunkt fällt gleichfalls in die Mitte der Schicht. Lässt man demnach zu einer dünnen brechenden Schicht eine unendlich dünne brechende Schicht hinzutreten, so ist für D der Näherungswerth $\frac{1}{2}\eta$ anzunehmen.

Um diese wichtige Thatsache noch in einer andern Richtung zu verfolgen, so wird bei dem Hinzutreten neuer brechender Schichten continuirlich variabeler Elemente das Interstitium ε sehr klein bleiben gegen η und α_1, sowie gegen D oder α_2. Gehen wir unter dieser Voraussetzung in Formel 24) ein und setzen weiter voraus, es bleibe $\partial\left(\frac{1}{f}\right)$ nahezu proportional $\partial\eta$, so wird sein

$$f\partial\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{\partial\eta}{\eta}$$

und nahezu

$$\frac{-\partial\alpha_1}{\eta+\alpha_1}=\frac{f\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{n},$$

indem die folgenden Glieder der Reihe verhältnissmässig klein bleiben. Nimmt man wieder den relativen Index der Vorderfläche zu dem Medium M_0 gleich der Einheit an und ändert sich die optische Dichtigkeit wenig, ist also etwa

$$n=1+\zeta f(\eta),$$

wo ζ gegen 1 beträchtlich klein bleibt, so wird

$$\frac{-\partial\alpha_1}{\eta+\alpha_1}=\frac{\partial\eta}{\eta},$$

folglich

$$-\alpha_1 \eta = \tfrac{1}{2}\eta^2 + C,$$

wobei die Constante C verschwindet. Dann ist also ebenfalls

$$-\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\eta$$

und wegen der Relation $D = \eta + \alpha_1 = \alpha_2$ auch

$$D = \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta.$$

In dem vorher betrachteten Falle finden nun in der That' diese Voraussetzungen nahezu statt. Wir setzen voraus, dass sich der Index continuirlich von Fläche zu Fläche verändere, zunächst von n zu $n + \Delta n$, dann im Abstande $\Delta\eta$ zu $n + 2\Delta n$. Bei dieser Annahme darf man also setzen

$$\Delta n = m\, \Delta\eta.$$

Man findet dann weiter aus der Formel für die negative Brennweite des Systems, nämlich

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + D},$$

durch Einsetzung der betreffenden Werthe

$$f_1 = \frac{-rn}{\Delta n}, \qquad \varphi_1 = \frac{r\left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)n}{\Delta n},$$

$$f_2 = \frac{-(r + \Delta r)n}{\Delta n}, \quad \varphi_2 = \frac{(r + \Delta r)\left(1 + \frac{\Delta n}{n}\right)n}{\Delta n}$$

leicht die Relationen

$$f = \tfrac{1}{2}\frac{r}{m\,\Delta\eta}, \quad \frac{1}{f} = \frac{2m}{r}\Delta\eta,$$

also wenn man differentiirt,

$$f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\partial(\Delta\eta)}{\Delta\eta} = \frac{\partial\eta}{\eta}.$$

Aus der Formel 24) folgt für die betrachteten Fälle auch noch

$$\frac{-\partial\alpha_1}{D} = \frac{\partial\alpha_1}{\alpha_1} = f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial f}{f}$$

und wenn man integrirt,

$$\alpha_1 f = Const.$$

Wir werden jetzt von den Differentialgleichungen 19), 24) und 33), sowie dem zuletzt abgeleiteten Theoreme eine wichtige Anwendung auf die Dioptrik der geschichteten Krystalllinse der Säugethiere, Vögel und Fische machen, indem wir im Stande sind, daraus die Oerter der Cardinalpunkte dieser Linsen zu berechnen und zwar bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit.

Wir gehen dabei aus von verschiedenen, auf Messungen gestützten Voraussetzungen, die für eine nahe gleichseitige Krystalllinse, also für das accommodirte Menschen- und Thierauge, insbesondere aber für die

Krystalllinse der Fische giltig sind. Es sind nämlich nach vorliegenden Messungen die Krümmungsradien der Flächen den Abständen vom Kerncentrum proportional, also

$$36)\qquad r = \frac{b-\eta}{b} r_1,$$

wo r_1 den Krümmungsradius der äussersten Fläche, η den Abstand einer beliebigen Fläche von derselben, b den Abstand der äussersten Fläche vom Kerncentrum der Linse bezeichnen. Ferner lässt sich der relative Index einer beliebigen Schicht, bezogen auf den der äussersten Fläche, ausdrücken durch die parabolische Gleichung

$$37)\qquad n = 1 + \zeta \frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}.$$

Da in dieser Formel n für $\eta = b$ den Werth $1+\zeta$ annimmt, so bezeichnet $1+\zeta$ den relativen Index des Kerncentrums, während der Index der äussersten Schicht gleich der Einheit angenommen wurde.

Wir suchen zunächst einen Näherungswerth des Integrals der Differentialgleichung 19), also von

$$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial n}{r} - \frac{D}{nf}\frac{\partial n}{r}.$$

Da der erste Term zur Rechten der grössere ist, so suchen wir daraus einen Näherungswerth von f und setzen ihn in den zweiten ein. Es ist nun

$$\partial n = 2\zeta \frac{b-\eta}{b} \partial\eta$$

und weil ζ immer verhältnissmässig klein bleibt (für die Linse des menschlichen Auges gleich 0,02545, für das Auge des Dorsches gleich 0,0848), so kann man vorläufig setzen

$$\frac{1}{n} = 1 - \zeta \frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}.$$

Demnach ist

$$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{2\zeta\partial\eta}{br_1}, \quad \frac{1}{f} = -\frac{2\zeta\eta}{br_1} + C.$$

Die Constante C ist gleich Null. Da D vorläufig gleich $\frac{1}{2}\eta$ zu setzen ist, so ist ein genauerer Werth

$$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{2\zeta\partial\eta}{br_1} + \left(1 - \zeta\frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}\right)\frac{2\zeta^2\eta^2\partial\eta}{b^2 r_1^2}$$

oder

$$38)\qquad \partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{2\zeta\partial\eta}{br_1} + \frac{2\zeta^2\eta^2\partial\eta}{b^2 r_1^2}.$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$\frac{1}{f} = -\frac{2\zeta\eta}{br_1}\left(1 - \frac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{br_1}\right),$$

39)
$$f = -\frac{b r_1}{2\zeta\eta} - \tfrac{1}{6}\eta.$$

Mit Hilfe dieses Werthes von f finden wir den ersten Näherungswerth von ε aus 33), zunächst mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse ζ^2. Es ist
$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\zeta\int\frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}\,\partial\eta - \zeta\int\frac{(b-\eta)\,\eta\,\partial\eta}{b^2} - \tfrac{1}{2}\zeta\int\frac{\eta^2\,\partial\eta}{b r_1}$$
oder

40)
$$\varepsilon = \tfrac{1}{6}\zeta\left(1 - \frac{b}{r_1}\right)\frac{\eta^3}{b^2}.$$

Für $r_1 = b$, was bei kugligen Linsen (Fischlinsen) der Fall ist, wird $\varepsilon = 0$, d. h. die beiden Hauptpunkte fallen stets zusammen. Das Interstitium ε ist darnach dem Kubus der Abscisse proportional. Für eine gleichseitig biconvexe, symmetrische Linse ist $r_2 = r_1$ und $\eta = 2b$, also das Interstitium der Hauptpunkte
$$\varepsilon = \tfrac{4}{3}\zeta\left(1 - \frac{b}{r_1}\right)b.$$

Sind die beiden Hälften ungleich, ist r_2 von r_1 und b_2 von b_1 verschieden, so hat man nur nöthig, die Cardinalpunkte jeder Hälfte für sich zu berechnen und dann die beiden Systeme zu combiniren.

Um α_1 zu bestimmen, geht man mit ε ein in die Formel 24), zunächst noch mit Vernachlässigung von ζ^2. Man findet
$$\frac{-\partial\alpha_1}{\eta + \alpha_1 - \frac{1}{6}\zeta\frac{\eta^3}{b^2} + \frac{1}{6}\zeta\frac{\eta^3}{b r_1}} = \frac{\partial\eta}{\eta} - 2\zeta\frac{\partial\eta}{b} + \zeta\frac{\eta\,\partial\eta}{b^2} + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta\,\partial\eta}{b r_1}.$$

Hebt man die Bruchform auf, so resultirt, wenn in den Ausdrücken der Kleinheit höherer Ordnung $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\eta$ gesetzt wird,
$$-(\eta\,\partial\alpha_1 + \alpha_1\,\partial\eta) = \eta\,\partial\eta - \zeta\frac{\eta^2\,\partial\eta}{b} + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^3\,\partial\eta}{b^2} + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^3\,\partial\eta}{b r_1}.$$
Durch Integration ergiebt sich hieraus

41)
$$-\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{b} + \tfrac{1}{12}\zeta\frac{\eta^3}{b^2} + \tfrac{1}{12}\zeta\frac{\eta^3}{b r_1},$$

wobei die Constante des Integrals gleich Null ist. Mittels der Gleichung 35) erhalten wir sofort die zweite Hauptpunktsdistanz

42)
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{b} - \tfrac{1}{4}\zeta\frac{\eta^3}{b^2} + \tfrac{1}{12}\zeta\frac{\eta^3}{b r_1}.$$

Durch Verbindung von 39) und 41) finden wir noch

43)
$$\alpha_1 f = \frac{b r_1}{4\zeta} - \tfrac{1}{6} r_1\eta + \tfrac{1}{24}\frac{r_1\eta^2}{b} + \tfrac{1}{8}\eta^2.$$

Für eine geschichtete Kugellinse reducirt sich diese Gleichung auf
$$\alpha_1 f = \frac{b^2}{4\zeta} - \tfrac{1}{6}b\eta + \tfrac{1}{6}\eta^2,$$
also für eine Hälfte derselben auf
$$\alpha_1 f = \frac{b^2}{4\zeta}.$$

Für dieselbe Linse sind die beiden Hauptpunktsdistanzen

$$-\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{b} + \tfrac{1}{6}\zeta\frac{\eta^3}{b^2}, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{b} - \tfrac{1}{6}\zeta\frac{\eta^3}{b^2}.$$

Für eine ganze symmetrische Krystalllinse findet man die Hauptpunktsdistanzen, indem man substituirt $\eta = 2b$. Dadurch wird

$$-\alpha_1 = b - \tfrac{2}{3}\zeta b + \tfrac{2}{3}\zeta\frac{b^2}{r_1} = \alpha_2$$

und für eine geschichtete Kugellinse

$$-\alpha_1 = b = \alpha_2.$$

Es lassen sich nun die Formeln der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse allgemein ausdrücken durch

$$44)\qquad -\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\eta + \psi_1(\eta)\zeta + \chi_1(\eta)\zeta^2 + \ldots,$$

$$45)\qquad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta + \psi_2(\eta)\zeta + \chi_2(\eta)\zeta^2 + \ldots,$$

$$46)\qquad \varepsilon = -(\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta))\zeta - (\chi_1(\eta) + \chi_2(\eta))\zeta^2 - \ldots,$$

$$47)\qquad f = -\frac{\varphi}{n} = -\frac{b^2}{2\zeta\eta}(1 + \psi_3(\eta)\zeta + \chi_3(\eta)\zeta^2 + \ldots).$$

Die Functionen ψ, χ u. s. w. sind sämmtlich ganze algebraische Functionen der Abscisse η und es müssen bei gleichseitigen Linsen, also für $r_2 = r_1$ und $\eta = 2b$ die Functionen

$$\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta), \quad \chi_1(\eta) + \chi_2(\eta) \text{ u. s. w.}$$

in 46) den gemeinschaftlichen Factor $1 - \frac{b}{r_1}$ haben, wodurch ε für $r_1 = b$ verschwindet. Dies ist nun auch in der That der Fall. Berücksichtigt man nämlich auch noch die Functionen von η mit dem Factor ζ^2, so erhält man für das Interstitium den genaueren Werth

$$48)\qquad \varepsilon = \tfrac{1}{6}\frac{\zeta}{b^2}\left(1 - \frac{b}{r_1}\right)\left\{\eta^3 - \frac{\zeta}{b}\left[\eta^4 - \frac{\eta^5}{10}\left(\frac{3}{b} + \frac{2}{r_1}\right)\right]\right\}.$$

Dieser Werth verschwindet allemal, wenn $r_1 = b$ ist, und bleibt positiv, so lange $r_1 > b$ ist. Mittels dieses und eines neuen Näherungswerthes von f lassen sich abermals genauere Werthe von α_1 und α_2 finden. Für f erhält man die Gleichungen

$$49)\quad \partial\left(\frac{1}{f}\right) = -2\zeta\frac{\partial\eta}{b r_1} + 2\zeta^2\frac{\eta^2\,\partial\eta}{b^2 r_1^2} - \zeta^3\left(\tfrac{8}{3}\frac{\eta^3\,\partial\eta}{b^3 r_1^2} - \frac{\eta^4\,\partial\eta}{b^4 r_1^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\eta^4\,\partial\eta}{b^3 r_1^3}\right),$$

$$50)\quad f = -\frac{r_1 b}{2\zeta\eta}\left(1 + \tfrac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{b r_1} - \tfrac{1}{3}\zeta^2\frac{\eta^3}{b^2 r_1} + \tfrac{1}{10}\zeta^2\frac{\eta^4}{b^3 r_1} + \tfrac{7}{90}\zeta^2\frac{\eta^4}{b^2 r_1^2}\right).$$

Hat die geschichtete Linse zwei Hälften verschiedener Krümmungen und Axen, wobei die Lage des Kerncentrums zu messen ist, so berechnet man die Cardinalpunkte jeder Hälfte für sich und combinirt diese Systeme. Ist die Linse beiderseits von dünneren Medien begrenzt, so combinirt man vorher jede Hälfte mit dem davor oder dahinter liegenden Medium. Bei der Krystalllinse sind diese Medien das Kammerwasser und der Glaskörper, welche bei allen Augen nahezu denselben Brechungsindex $n_D = 1{,}3350$ besitzen.

Für die Krystalllinsen der Fische ist sehr nahe $r_1 = b = r_2$. Deshalb wird für $\eta = 2b$

$$f = -\frac{b}{4\zeta}(1 + \tfrac{4}{3}\zeta + \tfrac{8}{45}\zeta^2), \quad -\alpha_1 = b = \alpha_2, \quad \varepsilon = 0.$$

Es dürfte für den Leser von Interesse sein, die abgeleiteten Integrale an einem speciellen Falle zu prüfen. Wir wählen hierzu die Krystalllinse eines Dorschauges. An den beiden Augen eines und desselben Individuums fand ich durch genaue Messungen mit Hilfe eines Abbeschen Refractometers folgende geometrische und optische Constanten:

Krümmungsradius der Hornhaut	gleich	13,5 mm,
„ der vord. u. hint. Linsenfläche	„	4,25 „
Ort der vorderen Linsenfläche	„	0,5 „
„ des Kerncentrums	„	4,75 „
„ der hinteren Linsenfläche	„	9,0 „
„ „ Retina	„	16,5 „
Index der Hornhaut.	„	1,3770,
„ „ Linsenkapsel	„	1,3750,
„ des Kerncentrums	„	1,4950.

Demnach ist für die Krystalllinse des Dorsches

$$\zeta = \frac{0{,}1166}{1{,}3750} = 0{,}0848$$

und die negative Brennweite in Corticalsubstanz

$$f = -\frac{b}{4\zeta} . 1{,}1144, \quad b = 4{,}25 \text{ mm}.$$

Wir berechnen zunächst die Cardinalpunkte des Linsensystems, und zwar combinirt

a) mit dem Kammerwasser:

$$f_1 = -\frac{4{,}25}{0{,}030} = -141{,}70, \quad \varphi_1 = 1{,}030 . 141{,}70 = 145{,}95,$$

$$f_2 = -\varphi_2 = -\frac{4{,}25}{4\zeta} 1{,}1144 = -13{,}955.$$

Hieraus ergiebt sich

$$f = -12{,}70, \quad \varphi = 13{,}09, \quad D = 4{,}25, \quad -\alpha_1 = 3{,}87, \quad \alpha_2 = 0{,}38, \quad \varepsilon = 0{,}00.$$

b) mit dem Glaskörper:

$$f_1 = -12{,}70, \quad \varphi_1 = 13{,}09, \quad f_2 = -145{,}95, \quad \varphi_2 = 141{,}70, \quad D = 4{,}63.$$

Man findet hieraus

$$f = -12{,}00 = -\varphi, \quad -\alpha_3 = 0{,}38, \quad \alpha_4 = 0{,}00.$$

Die Hauptpunkte coincidiren also auch jetzt noch mit dem Kerncentrum. Die Brennweiten der Hornhaut, einerseits von Wasser, andererseits von Kammerwasser begrenzt, sind sehr gross, nämlich

$$f_1 = -9000, \quad \varphi_1 = 9013.$$

Wir berechnen endlich die Cardinalpunkte des ganzen Auges. Es ist

$$f_1 = -9000, \quad \varphi_1 = 9013, \quad f_2 = -\varphi_2 = -12{,}00, \quad D = 4{,}75.$$

Daraus ergiebt sich

$$f = -12{,}0, \quad \varphi = 12{,}0, \quad -\alpha_1 = 4{,}739, \quad \alpha_2 = 0{,}006, \quad \varepsilon = 0{,}005.$$

Es liegen also auch die beiden Hauptpunkte des ganzen Fischauges fast genau im Kerncentrum der Linse. Der Ort des zweiten Hauptbrennpunktes ist 16,75, und da der Ort der Retina gleich 16,5 durch directe Messung gefunden wurde, so findet eine recht gute Uebereinstimmung statt. Bemerkenswerth ist der grosse Totalindex der Fischlinse; derselbe beträgt für das Auge des Dorsches 1,6318.

Die Integrale gestatten ebenfalls eine Anwendung auf das menschliche Auge und führen zu Resultaten, welche eine völlige Uebereinstimmung mit den bestehenden Verhältnissen erkennen lassen. Für das gesunde Auge der Mitteljährigkeit von 10 bis 50 Jahren ist nach übereinstimmenden Messungen an sieben Linsen

$$n = 1 + 0{,}02545 \frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}.$$

Legt man die geometrischen Constanten des Helmholtz'schen Auges im Zustande der Accommodation für die Ferne zu Grunde, so gelangt man zu Werthen für die Oerter der sechs Cardinalpunkte, welche in der folgenden Tabelle mit früheren Angaben zusammengestellt sind.

Oerter der sechs Cardinalpunkte des menschlichen Auges bei Accommodation für die Ferne.

Cardinal-punkte.	Listing.	Helmholtz II (1874).	Knapp.	Aubert.	Mihi.
F_1	−12,833	−13,752	−11,819	−12,279	−13,186
H_1	2,175	1,750	2,132	1,918	1,809
H_2	2,572	2,115	2,540	2,390	2,110
K_1	7,242	6,966	6,821	6,711	6,834
K_2	7,640	7,331	7,229	7,183	7,135
F_2	22,647	22,834	21,180	21,380	22,130
ε	0,397	0,365	0,408	0,472	0,301

Rostock, 24. Januar 1879.

XXI.

Die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen durch unendliche Producte und Partialbruchreihen.

Von

C. Frenzel

in Berlin.

Die von Cauchy (*Exercices de Mathématiques, t. III*) eingeschlagene Methode zur Productentwickelung eindeutiger analytischer Functionen mit gegebenen Null- und Unendlichkeitspunkten führt bekanntlich zu dem Resultat (vergl. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, 12. Vorl.), dass sich jede solche Function $f(u)$ darstellen lässt in der Form

$$f(u) = u^m . \prod_{k,l} \frac{\left(1 - \frac{u}{a_k}\right)^{m_k}}{\left(1 - \frac{u}{\alpha_l}\right)^{n_l}} . e^U;$$

dabei bezeichnen

$a_1, a_2, \ldots$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die von Null verschiedenen Null- und Unendlichkeitspunkte der Function $f(u)$,

$m_1, m_2, \ldots$ und $n_1, n_2, \ldots$ die betreffenden Ordnungen des Null- und Unendlichwerdens,

m die Ordnungszahl von $f(u)$ im Punkte $u = 0$,

endlich stellt U eine Function von u dar, die entweder eine rationale oder transcendente ganze Function ist, d. h. eine Potenzreihe von u mit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern.

Für den sowohl bei den Kreisfunctionen, als auch bei den elliptischen Functionen eintretenden Fall, dass sich die Null- und Unendlichkeitsstellen bis in das unendlich ferne Gebiet der Ebene des Arguments hineinziehen, hängen die Coefficienten dieser ganzen Function U wesentlich von dem Gesetze ab, nach welchem die einzelnen Factoren des unendlichen Products miteinander multiplicirt werden, sie nehmen andere Werthe an, sobald die Reihenfolge der Factoren geändert wird; das unendliche Product selbst, abgesehen von dem Factor e^U, ist in diesem

Falle im Allgemeinen nur bei ganz bestimmten Aufeinanderfolgen der Factoren convergent. Es kann daher auch der obige Ausdruck der Function $f(u)$ nur als der Grenzwerth einer gewissen analytischen Function, jedoch nicht als ein schon fertiges analytisches Gebilde betrachtet werden.

Wie dieser formale Uebelstand jenes Ausdruckes zu beseitigen ist, hat Herr Weierstrass in seiner Abhandlung „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" (Abhandlungen der mathem. Classe der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1876) gezeigt. Um das Resultat dieser Untersuchung, so weit dasselbe auf die hier zu betrachtenden Functionen Bezug hat, angeben zu können, beschränken wir uns auf solche Functionen, die für keinen endlichen Werth des Arguments unendlich gross werden; Functionen, die im Endlichen sowohl Null- als auch Unendlichkeitspunkte besitzen, lassen sich alsdann als Quotienten zweier Functionen dieser letzten Art darstellen.

Es sei demgemäss $f(u)$ eine für alle endlichen Werthe des Arguments endliche, eindeutige und stetige analytische Function, deren Nullpunkte

$$a_1, a_2, \dots \text{ die Ordnungszahlen } m_1, m_2, \dots$$

besitzen mögen; ist auch der Punkt $u=0$ ein Nullpunkt von $f(u)$, so möge dessen Ordnungszahl mit m bezeichnet werden. Sind nun diese Nullstellen so beschaffen, dass die aus denselben gebildete unendliche Reihe

$$\sum\nolimits^k \frac{1}{a_k^n}, \quad k=1,2,\dots\infty$$

für gewisse ganzzahlige Werthe von n unbedingt convergirt, und ist ν die kleinste dieser Zahlen n, so lässt sich nach Herrn Weierstrass die Function $f(u)$ darstellen durch das unendliche, unbedingt convergente Product

$$f(u) = e^{\psi(u)}.u^m \prod_k \left\{\left(1-\frac{u}{a_k}\right) e^{\sum\limits_1^{\nu-1}{}^n \frac{1}{n}\left(\frac{u}{a_k}\right)^n}\right\}^{m_k}, \quad k=1,2,\dots\infty,$$

wo $\psi(u)$ eine ganze Function von u oder eine beständig convergente Potenzreihe ist.

Im Folgenden soll nun eine Herleitung dieser Entwickelung auf Grund der Cauchy'schen Methode gegeben werden. Es wird dazu nur einer geringen Modification des gewöhnlich eingeschlagenen Verfahrens bedürfen, welche im Wesentlichen darauf beruht, dass wir erst durch eine beliebige Curve eine endliche Anzahl von Nullpunkten absondern und dann diese Curve nach einem willkürlichen Gesetz ins Unendliche rücken lassen.

Sodann soll die ebenfalls von Cauchy herrührende Methode der Partialbruchentwickelung einer eindeutigen analytischen Function einer ähnlichen Modification unterworfen werden, welche bewirkt, dass die resultirende Entwickelung unbedingt convergirt; das gewöhnlich eingeschlagene Verfahren führt bekanntlich nur zu bedingt convergenten Entwickelungen. Allerdings kann man unter Umständen eine solche bedingt convergente Entwickelung durch ein von Eisenstein (Crelle's Journal, Bd. 35 S. 153 flg.) herrührendes und von Herrn Thomae (Abriss einer Theorie der complexen Functionen, 2. Aufl., S. 70) auf die Weierstrass'sche Function $p(u)$ angewandtes Verfahren in eine unbedingt convergente Entwickelung umformen; doch ist ein solches Verfahren weder naturgemäss, noch allgemein.

Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen gleich hier die Cauchy-schen Sätze aus der allgemeinen Functionentheorie, von denen im Folgenden Gebrauch gemacht werden wird, kurz zusammengestellt werden. Es sind dies folgende.

Satz I. Bezeichnet $f(u)$ eine eindeutige analytische Function, welche im Innern und am Rande eines Ebenenstückes S allenthalben endlich und stetig ist, so ist das über die Begrenzungscurve s von S hinerstreckte Integral

$$\int_s f(v)\,dv = 0;$$

ferner lässt sich der Werth der Function $f(u)$ in irgend einem innerhalb s gelegenen Punkte u darstellen durch das in positiver Umlaufsrichtung zu nehmende Integral

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_s \frac{f(v)\,dv}{v-u}.$$

Satz II. Bezeichnet $f(u)$ eine eindeutige analytische Function, welche innerhalb s die Unstetigkeitspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ besitzt, sonst aber auf S allenthalben endlich und stetig ist, und bezeichnet ferner u irgend einen Punkt im Innern von s, so ist

$$\int_s f(v)\,dv = \sum\nolimits^k \int_{(\alpha_k)} f(v)\,dv$$

und

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{f(v)\,dv}{v-u} - \frac{1}{2\pi i} \sum\nolimits^k \int_{(\alpha_k)} \frac{f(v)\,dv}{v-u};$$

dabei bezeichnet $\int_s$ ein über die Randcurve s und $\int_{(\alpha_k)}$ ein über die natürliche Begrenzung der Unstetigkeitsstelle α_k in positiver Umlaufsrichtung genommenes Integral, falls wir nach Herrn Kronecker unter der natürlichen Begrenzung der Unstetigkeitsstelle α_k eine einfach geschlossene Curve verstehen, welche ausser α_k keine andere Unstetigkeitsstelle einschliesst; endlich bezieht sich das Summenzeichen $\sum\nolimits^k$ auf sämmtliche Punkte α_k innerhalb s.

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich, indem wir $f(v)=1$ setzen, der folgende:

Satz III. Bezeichnet u einen beliebigen Punkt innerhalb einer einfach geschlossenen Curve s, und m eine ganze Zahl, so ist

$$\int_s (v-u)^m\,dv = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq -1, \\ 2\pi i, & \;\;\text{"}\;\; m=-1 \text{ ist.}\end{cases}$$

Schliesslich werden wir noch von einem vierten Satze Gebrauch machen, zu dem man durch folgende Betrachtung gelangt.

Es seien $f(u)$ und $F(u)$ zwei für alle endlichen Werthe des Arguments u eindeutige und reguläre Functionen von u, die sämmtliche Null- und Unendlichkeitspunkte gemein haben; dann ist der Quotient

$$\chi(u)=\frac{F(u)}{f(u)}$$

eine eindeutige Function von u, die im Endlichen überall stetig und von 0 verschieden ist. Bilden wir die logarithmische Ableitung

$$\psi(u)=\frac{\chi'(u)}{\chi(u)},$$

so stellt dieselbe eine eindeutige Function dar, die im Endlichen allenthalben eindeutig und stetig ist, die also im Endlichen nirgends unendlich gross wird, während sie im Allgemeinen an gewissen Stellen verschwinden wird. Diese Function $\psi(u)$ ist demnach entweder eine ganze Function oder eine Function vom Charakter einer ganzen Function, d. h. eine beständig convergente Potenzreihe. Verstehen wir demgemäss unter $\psi(u)$ eine derartige Function, so folgt aus der letzten Gleichung rückwärts

$$\chi(u)=e^{\psi(u)}, \quad \text{mithin} \quad F(u)=e^{\psi(u)}.f(u),$$

d. h. in Worten:

Satz IV. Zwei für alle endlichen Werthe des Arguments eindeutige und reguläre Functionen, welche sämmtliche Null- und Unendlichkeitspunkte in gleicher Ordnung gemein haben, können sich nur durch einen Factor von der Form $e^{\psi(u)}$ unterscheiden, wo $\psi(u)$ eine ganze Function oder eine Function vom Charakter einer ganzen Function bezeichnet.

Es ist bei diesem Satze besonderes Gewicht darauf zu legen, dass die beiden Functionen $F(u)$ und $f(u)$ nur für endliche Werthe des Arguments die verlangte Eigenschaft zu besitzen brauchen; wie sie sich im Unendlichen verhalten, ob sie daselbst überhaupt definirt sind, kommt hierbei gar nicht in Betracht.

---

§ 1. Die Productentwickelung der eindeutigen analytischen Functionen.

Wir verstehen in diesem Paragraphen unter $f(u)$ eine eindeutige analytische Function, die für endliche Werthe von u allenthalben endlich und stetig ist, die also im Endlichen keinen Unendlichkeitspunkt besitzt. Wie sich diese Function im Unendlichen verhält, ist uns gleichgiltig; — sie wird daselbst, wie aus allgemeinen Sätzen der Functionentheorie hervorgeht einen endlichen Werth besitzen, falls $f(u)$ constant ist; hingegen wird sie im Unendlichen einen Discontinuitätspunkt erster oder zweiter Gattung (nach Herrn C. Neumann eine polare oder nicht polare Unstetigkeit, nach Herrn Weierstrass eine ausserwesentliche oder eine wesentliche singuläre Stelle) haben, je nachdem $f(u)$ eine ganze rationale oder eine ganze transcendente Function ist.

Sind nun

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Nullpunkte von $f(u)$ und

$m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Ordnungen des Verschwindens in den betreffenden Punkten,

so fragt es sich, ob überhaupt eine Function existirt, die den gestellten Anforderungen genügt, und dann, inwieweit dieselbe durch obige Angaben bestimmt ist.

Beide Fragen werden dadurch ihre Erledigung finden, dass wir den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die geforderte Function aufstellen. Dabei können wir uns auf den Fall beschränken, dass sich die Reihe der Nullpunkte bis in das Unendliche hineinerstreckt; denn der allgemeinste analytische Ausdruck für eine eindeutige Function mit den n im Endlichen liegenden Nullpunkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ ist zufolge des Satzes IV

$$e^{\psi(u)} \cdot \left(1-\frac{u}{a_1}\right)^{m_1} \cdot \left(1-\frac{u}{a_2}\right)^{m_2} \cdots \left(1-\frac{u}{a_n}\right)^{m_n},$$

falls keine der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gleich Null ist, und

$$e^{\psi(u)} \cdot u^m \cdot \left(1-\frac{u}{a_1}\right)^{m_1} \cdots \left(1-\frac{u}{a_n}\right)^{m_n},$$

falls auch der Punkt $u=0$ ein Nullpunkt der in Rede stehenden Function ist. Denken wir uns die Punkte $a_1, a_2, \ldots$ nach der Grösse ihrer Moduln oder absoluten Beträge geordnet, so dass

$$|a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$$

ist (wo allgemein $|a_k| = r$ ist, falls $a_k = r \cdot e^{i\varphi}$), so können wir demgemäss voraussetzen, dass

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

ist.

Es sei nun a_k irgend einer der Nullpunkte $a_1, a_2, \ldots$; dann ist die Function $f(v)$ in der Umgebung des Punktes $v = a_k$ entwickelbar in eine Reihe von der Form

$$1) \qquad f(v) = (v-a_k)^{m_k} \{A_k + A'_k(v-a_k) + A''_k(v-a_k)^2 + \ldots\},$$

mithin

$$1') \qquad \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{m_k}{v-a_k} + \frac{A'_k + 2A''_k(v-a_k) + \ldots}{A_k + A'_k(v-a_k) + \ldots} = \frac{m_k}{v-a_k} + f_k(v),$$

wo $f_k(v)$ eine in der Umgebung des Punktes $v = a_k$ eindeutige und stetige Function ist. Diese logarithmische Ableitung von $f(v)$ wird demnach in den Punkten $v = a_1, a_2, \dots$ unendlich gross erster Ordnung, während sie sonst im Endlichen allenthalben endlich bleibt.

Denken wir uns jetzt durch einen beliebigen Contour s, der jedoch durch keinen der Punkte $a_1, a_2, \dots$ hindurchgeht, eine beliebige endliche Anzahl dieser Punkte abgesondert, und bezeichnen wir mit u einen beliebigen Punkt innerhalb dieses Contours, so ist nach Satz II

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = -\frac{1}{2\pi i}\sum^k \int\limits_{(a_k)} \frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{dv}{v-u} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{dv}{v-u}.$$

Aus der obigen Entwickelung der Function $\frac{f'(v)}{f(v)}$ in der Umgebung des Punktes $v = a_k$ folgt aber nach Satz I und III

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_k)} \frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{dv}{v-u} = \frac{m_k}{a_k - u},$$

mithin wird

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \sum^k \frac{m_k}{u-a_k} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\,\frac{dv}{u-v}.$$

Um nun zu einem Ausdruck für die Function $f(u)$ selber zu gelangen, multipliciren wir diese Gleichung mit du und integriren von einem beliebigen Anfangswerthe u_0 bis u; dann erhalten wir, wenn wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen,

$$\frac{f(u)}{f(u_0)} = \prod_k \left(\frac{u-a_k}{u_0-a_k}\right)^{m_k} . e^U, \quad U = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\, lg\,\frac{u-v}{u_0-v}\,.\,dv,$$

wo sich das Productzeichen Π auf sämmtliche Punkte a_k innerhalb des Contours s bezieht.

Da wir später den Contour s immer grösser und grösser werden lassen, so können wir gleich von vornherein annehmen, dass derselbe den Nullpunkt umschliesse. Nehmen wir ferner an, dass der Punkt 0 kein Nullpunkt der Function $f(u)$ sei, so können wir $u_0 = 0$ setzen und erhalten alsdann

$$f(u) = C.\prod_k \left(1-\frac{u}{a_k}\right)^{m_k} . e^U, \quad U = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\, lg\left(1-\frac{u}{v}\right) dv,$$

wo $C = f(0)$ ist. Ist hingegen der Punkt 0 ein Nullpunkt von $f(u)$ und bezeichnen wir dessen Ordnungszahl mit m, so erhalten wir offenbar

$$f(u) = C.u^m \prod_k{}' \left(1-\frac{u}{a_k}\right)^{m_k} . e^U, \quad U = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\, lg\left(1-\frac{u}{v}\right) dv,$$

wo $C=\left[\frac{f(u_0)}{u_0^m}\right]_{u_0=0}$ ist und wo ferner Π' ein Product bezeichnet, welches sich nur auf die von 0 verschiedenen Punkte a_k innerhalb s bezieht. Die letztere Form von $f(u)$ umfasst auch die vorhergehende, falls wir unter m irgend eine positive ganze Zahl, incl. 0, verstehen; wir brauchen uns daher nur mit dieser Form weiter zu beschäftigen.

Nehmen wir nun den Contour s bereits so gross an, dass der absolute Betrag von u kleiner sei, als der absolute Betrag jedes Randpunktes v des Contours, so können wir den Logarithmus von $1-\frac{u}{v}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{u}{v}$ entwickeln und erhalten

$$U=\frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty{}_n \frac{u^n}{n}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}.$$

Die Function $\frac{f'(v)}{f(v)}\cdot\frac{1}{v^n}$ unter dem Integralzeichen wird unendlich gross nur für $v=0$ und für sämmtliche von 0 verschiedene Nullpunkte a_k von $f(v)$; wir können demnach zufolge des Cauchy'schen Satzes II folgende Zerlegung eintreten lassen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s \frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)} \frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}+\frac{1}{2\pi i}\sum{}'_k\int\limits_{(a_k)} \frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n},$$

wo sich das Zeichen $\sum'_k$ auf sämmtliche von 0 verschiedene Punkte a_k innerhalb s bezieht.

Zur Behandlung des ersten dieser beiden Integrale entwickeln wir $\frac{f'(v)}{f(v)}$ in der Umgebung des Punktes $v=0$; es sei daselbst

2) $$f(v)=v^m\{A+A'v+A''v^2+\dots\},\quad m \gtreqq 0,$$

dann wird

2') $$\frac{f'(v)}{f(v)}=\frac{m}{v}+\frac{A'+2A''v+\dots}{A+A'v+\dots}=\frac{m}{v}+a+a'v+a''v^2+\dots$$

und somit nach Satz III

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)} \frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}=a^{(n-1)}.$$

Zur Behandlung des zweiten Integrals erinnern wir uns daran, dass nach der Entwickelung 1') die Function $\frac{f'(v)}{f(v)}$ in der Umgebung des Punktes $v=a_k$ die Form besitzt

$$\frac{f'(v)}{f(v)}=\frac{m_k}{v-a_k}+f_k(v),$$

wo $f_k(v)$ in der Umgebung des Punktes a_k stetig ist; daher wird nach Satz I und III

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_k)}\frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_k)}\frac{m_k}{v-a_k}\frac{dv}{v^n}=\frac{m_k}{a_k^n}.$$

Fassen wir die beiden zuletzt erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s}\frac{f'(v)}{f(v)}\frac{dv}{v^n}=a^{(n-1)}+\sum\nolimits_k'\frac{m_k}{a_k^n},$$

wo $a^{(n-1)}$ den Coefficienten von v^{n-1} in der Entwickelung der Function $\frac{f'(v)}{f(v)}$ nach steigenden Potenzen von v darstellt. Demnach wird

$$U=\sum_1^\infty{}_n\frac{u^n}{n}\left\{a^{(n-1)}+\sum\nolimits_k'\frac{m_k}{a_k^n}\right\},$$

also

$$f(u)=C.u^m\prod_k{}'\left(1-\frac{u}{a_k}\right)^{m_k}.e^{\sum_1^\infty{}_n\frac{u^n}{n}\left\{a^{(n-1)}+\sum'_k\frac{m_k}{a_k^n}\right\}},$$

wo sich die Zeichen Π' und Σ' auf sämmtliche von 0 verschiedene Nullpunkte der Function $f(u)$ beziehen, die sich innerhalb des Contours s befinden.

Lassen wir nun diesen Contour s nach einem willkürlichen Gesetz immer grösser und grösser, schliesslich unendlich gross werden, doch so, dass er niemals durch einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots$ hindurchgeht, und ferner so, dass allmälig sämmtliche Punkte desselben in das Unendliche rücken, so wird an der für $f(u)$ entwickelten Formel vorläufig Nichts geändert, nur dass jetzt Π' und Σ' unendliche Producte und Summen bedeuten, die jedoch immer in demselben Umfange zu nehmen sind.

Ist insbesondere die Reihe der Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ so beschaffen, dass für eine bestimmte positive ganze Zahl ν die Reihe der absoluten Beträge

$$\sum\nolimits_k'\left|\frac{1}{a_k^\nu}\right|$$

einen endlichen Werth hat, so sind sämmtliche Summen $\sum'_k\frac{m_k}{a_k^n}$ für $n\geqq\nu$ unbedingt convergent. Sondern wir daher von U denjenigen Bestandtheil ab, der für sich allein eine unbedingt convergente Potenzreihe giebt, und bezeichnen wir diesen Bestandtheil mit $\psi(u)$, so erhalten wir

$$U=\psi(u)+\sum_1^{\nu-1}{}_n\left(\frac{u^n}{n}.\sum\nolimits_k'\frac{m_k}{a_k^n}\right)$$

und folglich

$$e^U=e^{\psi(u)}.\prod_k{}'e^{m_k\sum_1^{\nu-1}{}_n\frac{1}{n}\left(\frac{u}{a_k}\right)^n},$$

wo Π' genau dieselbe Bedeutung und denselben Umfang hat, wie das in dem Ausdrucke für $f(u)$ bereits vorhandene Productzeichen. Da nun $\psi(u)$ unbedingt convergirt und somit der Factor $e^{\psi(u)}$ keinen Einfluss auf die Convergenz des unendlichen Productes für $f(u)$ haben kann, so können wir diesen Factor ganz von dem unendlichen Product absondern und erhalten alsdann schliesslich, indem wir uns noch den constanten Factor C in den Exponentialfactor mit aufgenommen denken, für $f(u)$ den folgenden Ausdruck:

$$3)\qquad f(u)=e^{\psi(u)}.u^m\prod_k{}'\left\{\left(1-\frac{u}{a_k}\right)e^{\sum_1^{\nu-1}{}^n\frac{1}{n}\left(\frac{u}{a_k}\right)^n}\right\}^{m_k},\quad m\geqq 0.$$

Ist die Function $f(u)$ gegeben und handelt es sich darum, dieselbe durch ein unendliches Product darzustellen, so wird $\psi(u)$ eine vollkommen bestimmte ganze (rationale oder transcendente) Function von u sein. Handelt es sich jedoch darum, den allgemeinsten Ausdruck einer eindeutigen analytischen Function mit den gegebenen Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ aufzustellen, so werden wir unter $\psi(u)$ eine willkürliche ganze Function zu verstehen haben und die Formel 3) wird alsdann zufolge des Satzes IV den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die verlangte Function darstellen.

§ 2. Beispiele zur Productentwickelung.

Das einfachste Beispiel für die in § 1 betrachteten Functionen bieten uns die trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus dar.

Die Function $sin(\pi u)$ hat die Nullpunkte erster Ordnung

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

ihre Productentwickelung besitzt daher, da hier die Reihe $\sum_k{}'\left|\frac{1}{a_k^n}\right| = 2\sum_1^{\infty}{}_k\frac{1}{k^n}$ bereits für $n\geqq 2$ unbedingt convergirt und somit in der Formel 3), § 1, $\nu=2$ angenommen werden kann, die Form

$$sin(\pi u)=e^{\psi(u)}.u\prod_k{}'\left\{\left(1-\frac{u}{k}\right)e^{\frac{u}{k}}\right\}=e^{\psi(u)}.s(u),$$

wo $s(u)$ zur Abkürzung gesetzt ist für das über sämmtliche ganze Zahlen k hinzuerstreckende Product $u.\prod_k{}'\left\{\left(1-\frac{u}{k}\right)e^{\frac{u}{k}}\right\}$, und wo ferner $\psi(u)$ eine gewisse (rationale oder transcendente) ganze Function von u bedeutet.

Es handelt sich darum, diese Function $\psi(u)$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke werden wir noch mehrere Eigenschaften der Sinus-Function als gegeben annehmen müssen, nämlich die folgenden:

1. Die Function $sin(\pi u)$ ist eine einfach periodische Function mit der primitiven Periode 2;
2. die Function $sin(\pi u)$ ist eine ungerade Function;
3. es ist der Grenzwerth
$$\left[\frac{sin(\pi u)}{\pi u}\right]_{u=0}=1,$$
oder anders ausgedrückt: in der Entwickelung der Function $sin(\pi u)$ in der Umgebung des Punktes $u=0$
$$sin(\pi u)=u(A+A'u+A''u^2+\ldots)$$
hat der Coefficient A den Weg π.

Differentiiren wir zunächst den Ausdruck
$$s(u)=u\,.\prod_k{}'\left\{\left(1-\frac{u}{k}\right)e^{\frac{u}{k}}\right\}$$
logarithmisch nach u, was bei der unbedingten Convergenz dieses unendlichen Products erlaubt ist, so ergiebt sich
$$\frac{s'(u)}{s(u)}=\frac{1}{u}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left\{\frac{1}{u-k}+\frac{1}{k}\right\};$$
auf der rechten Seite dieser Gleichung wird nur die Anordnung der Glieder ein wenig geändert, wenn wir u durch $u+1$ ersetzen, mithin ist
$$\frac{s'(u)}{s(u)}=\frac{s'(u+1)}{s(u+1)},$$
und somit zufolge der ersten und zweiten Eigenschaft der Function $sin(\pi u)$
$$\psi'(u+1)=\psi'(u),$$
d. h. die Function $\psi'(u)$ hat die Periode 1. Nun ist aber $\psi'(u)$ eine ganze Function, die im Endlichen nirgends unendlich wird; folglich kann sie ihrer Periodicität wegen auch im Unendlichen nicht unendlich gross werden, d. h. $\psi'(u)$ ist eine Constante, folglich
$$\psi(u)=\alpha u+\beta,$$
und somit, wenn wir $e^\beta=A$ setzen:
$$sin(\pi u)=Ae^{\alpha u}.s(u).$$

Aus der Darstellung der Function $s(u)$ als unendliches Product folgt unmittelbar, dass $s(u)$ eine ungerade Function ist. Vertauschen wir daher in der letzten Gleichung u mit $-u$, so erhalten wir
$$sin(\pi u)=Ae^{-\alpha u}.s(u),$$
d. h. es muss
$$e^{\alpha u}=e^{-\alpha u} \text{ oder } e^{2\alpha u}=1$$
sein für jedweden Werth von u; dies ist natürlich nur möglich, wenn $\alpha=0$ ist, folglich wird
$$sin(\pi u)=A.s(u)=Au\,.\prod_k{}'\left\{\left(1-\frac{u}{k}\right)e^{\frac{u}{k}}\right\}.$$

Um endlich noch den Factor A zu bestimmen, benutzen wir die dritte Eigenschaft:

$$\left[\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right]_{u=0}=1,$$

und erhalten dadurch $A=\pi$; es wird demnach $\sin(\pi u)$ definitiv durch folgendes unbedingt convergente unendliche Product dargestellt sein:

1) $$\sin(\pi u)=\pi u.\prod_k{}' \left\{\left(1-\frac{u}{k}\right)e^{\frac{u}{k}}\right\}.$$

Ebenso würden wir erhalten

2) $$\cos(\pi u)=\prod_k \left\{\left(1-\frac{u}{k+\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{u}{k+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Jedes dieser beiden unendlichen Producte ist unbedingt convergent, liefert also stets denselben Werth, in welcher Reihenfolge wir auch die ganzen Zahlen k aufeinander folgen lassen. Am einfachsten ist es, in dem Product für $\sin(\pi u)$ nach k von $-n$ bis $+n$, in dem Product für $\cos(\pi u)$ nach k von $-(n+1)$ bis $+n$ zu multipliciren und dann n unendlich gross werden zu lassen; dabei heben sich bereits in den endlichen Producten die Exponentialfactoren gegenseitig auf und wir erhalten

3) $$\sin(\pi u)=\pi u.\lim_{n=\infty}\prod_{-\nu}^{+n}{}_k\left(1-\frac{u}{k}\right),\quad \cos(\pi u)=\lim_{n=\infty}\prod_{-(n+1)}^{n}{}_k\left(1-\frac{u}{k+\frac{1}{2}}\right).$$

Diese Producte sind nicht mehr unbedingt convergent; es ist nicht erlaubt, sie schlechthin als unendliche Producte anzusehen, die sich über alle ganzzahligen Werthe von k von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Nehmen wir z. B. in dem Product für $\cos(\pi u)$ die Factorenanordnung

$$\lim_{n=\infty}\prod_{-(n+1)}^{p.n}{}_k\left(1-\frac{u}{k+\frac{1}{2}}\right),$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, so erhalten wir hierfür den Werth $e^{-u.lgp}.\cos(\pi u)$, wo lgp den reellen Werth des Logarithmus bedeutet. In der That folgt aus Gleichung 2)

$$\cos(\pi u)=\lim_{n=\infty}\prod_{-(n+1)}^{p.n}{}_k\left(1-\frac{u}{k+\frac{1}{2}}\right).e^{u.\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{-(n+1)}^{p.n}{}_k\frac{1}{k+\frac{1}{2}}}$$

oder, da

$$\sum_{-(n+1)}^{p.n}{}_k\frac{1}{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{-n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{-n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{-n+\frac{3}{2}}+\dots+\frac{1}{p.n+\frac{1}{2}},$$

$$=\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\dots+\frac{1}{n+\frac{2(p-1)n+1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\sum_0^{(p-1)n}{}_k\frac{1}{n}.\frac{1}{1+\frac{k+\frac{1}{2}}{n}},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty}\sum_{-(n+1)}^{p.n}{}_k\frac{1}{k+\frac{1}{2}}=\lim_{n=\infty}\sum_0^{(p-1)n}{}_k\frac{1}{n}.\frac{1}{1+\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}$$

ist, und da dieser Grenzwerth zufolge der Definition des bestimmten Integrals als eine unendliche Summe unendlich kleiner Grössen gleich dem auf geradem Wege genommenen Integral

$$\int_1^p \frac{dx}{x},$$

d. h. gleich dem reellen Logarithmus von p ist:

$$4)\qquad \cos(\pi u) = e^{u.\lg p} : \lim_{n=\infty} \prod_{-(n+1)}^{p.n} {}_k \left(1 - \frac{u}{k+\frac{1}{2}}\right), \text{ w. z. b. w.}$$

Als zweites Beispiel zur Productentwickelung betrachten wir die Jacobi'schen Theta- oder auch die Weierstrass'schen Sigmafunctionen. Es sind dies ebenfalls eindeutige analytische Functionen, die für endliche Werthe des Arguments u nirgends unendlich gross werden; ihre Nullpunkte sind sämmtlich von der ersten Ordnung und besitzen die Form

$$a_k = m.a + n.b + c,$$

wo a, b, c beliebige complexe Grössen sind, von denen a und b kein reelles Verhältniss haben dürfen, und wo ferner m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen. Die aus diesen Nullstellen gebildeten Reihen

$$\sum_k{}' \left|\frac{1}{a_k^n}\right|$$

sind, wie u. A. Eisenstein (in Crelle's Journal, Bd. 35 S. 153 flg.) bewiesen hat, unbedingt convergent für $n \geqq 3$; daher können wir in unserer allgemeinen Productentwickelung $\nu = 3$ annehmen und wir erhalten somit als allgemeinste Form für die in Rede stehenden Functionen das folgende, unbedingt convergente unendliche Product:

$$f(u) = e^{\psi(u)}.\, u^{\varepsilon} \prod_{m,n}{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{a_k}\right) e^{\frac{u}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{a_k}\right)^2}\right\},$$

wo $\varepsilon = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem der Punkt $u = 0$ ein Nullpunkt der Function ist oder nicht.

Führen wir statt a und b die Bezeichnungen 2ω und $2\omega'$ ein (denen die Jacobi'schen Bezeichnungen $2K$ und $2iK'$ entsprechen würden) und betrachten wir insbesondere diejenigen eindeutigen analytischen Functionen, deren Nullpunkte von der ersten Ordnung sind und die Form besitzen

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

so wird die einfachste unter diesen Functionen die folgende sein:

$$5)\qquad \sigma(u) = u.\prod_w{}' \left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}\right\},$$

wo sich das Productzeichen auf sämmtliche von Null verschiedene Punkte w, d. h. auf sämmtliche positive und negative ganzzahlige Werthe von m und n mit Ausschluss der Combination $m=0$, $n=0$ bezieht.

Alle anderen Functionen mit denselben Nullpunkten, also auch die Jacobi'sche Thetafunction mit dem Index 1, werden sich von der Function $\sigma(u)$ nur durch einen Factor von der Form $e^{\psi(u)}$ unterscheiden. Bekanntlich gelangt man zu dieser Thetafunction durch die Betrachtung des bedingt convergenten unendlichen Products

$$P = u \,.\, lim \prod_w{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right),$$

indem man entweder erst nach m zwischen den Grenzen $-\mu$ und $+\mu$ $(\mu=\infty)$ und dann nach n zwischen den Grenzen $-\nu$ und $+\nu$ $(\nu=\infty)$, oder indem man umgekehrt erst nach n und dann nach m multiplicirt. Von diesen beiden Factorenfolgen, die wir bez. mit $\lim\limits_{m,n}$ und $\lim\limits_{n,m}$ bezeichnen wollen, führt die erste nur dann zu einem convergenten Ausdruck, wenn der reelle Theil von $\frac{\omega'}{\omega i}$ positiv ist, während bei der andern Factorenanordnung der reelle Theil von $\frac{\omega'}{\omega i}$ als negativ vorausgesetzt werden muss; in dem ersten Falle ist der absolute Betrag der Grösse $q = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ kleiner als 1, in dem andern Falle ist der absolute Betrag von q grösser als 1, also derjenige von $p = e^{\frac{\omega\pi i}{\omega'}}$ kleiner als 1. Der erste Grenzwerth ist bis auf einen constanten Factor identisch mit der Jacobischen Function $\theta_1(u, q)$, den zweiten Grenzwerth bezeichnen wir (nach *Briot et Bouquet*, *Fonctions elliptiques*, 2^me^ *éd.*, *pag.* 321) $\vartheta_1(u, p)$, so dass also

$$6)\quad \theta_1(u, q) = A \,.\, \lim_{m,n} u \,.\, \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) \text{ und } \vartheta_1(u, p) = B \,.\, \lim_{n,m} u \,.\, \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right)$$

ist, wo A und B Constanten sind. Führen wir nun auch in dem unendlichen Product für $\sigma(u)$ diese beiden speciellen Factorenfolgen ein, so erhalten wir

$$A \,.\, \sigma(u) = \theta_1(u, q) \,.\, e^{\lim\limits_{m,n} \Sigma' \left\{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2\right\}} = \theta_1(u, q) \,.\, e^{u.\lim\limits_{m,n} \Sigma' \frac{1}{w} + \frac{1}{2} u^2 . \lim\limits_{m,n} \Sigma' \frac{1}{w^2}},$$

$$B \,.\, \sigma(u) = \vartheta_1(u, p) \,.\, e^{\lim\limits_{n,m} \Sigma' \left\{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2\right\}} = \vartheta_1(u, p) \,.\, e^{u.\lim\limits_{n,m} \Sigma' \frac{1}{w} + \frac{1}{2} u^2 . \lim\limits_{n,m} \Sigma' \frac{1}{w^2}}.$$

Diese Summen von $\frac{1}{w}$ und $\frac{1}{w^2}$ sind leicht zu berechnen, wenn man von den Productentwickelungen 1) und 2) oder vielmehr von den bekannten Partialbruchentwickelungen für $tg(\pi u)$ und $cotg(\pi u)$, die sich sofort durch logarithmische Differentiation der Gleichungen 1) und 2) ergeben, Gebrauch macht; man gelangt alsdann zu dem Resultat

$$\lim_{m,n} \sum' \frac{1}{w} = 0, \quad \lim_{n,m} \sum' \frac{1}{w} = 0,$$

$$\lim_{m,n} \sum' \frac{1}{w^2} = \frac{\eta}{\omega}, \quad \lim_{n,m} \sum' \frac{1}{w^2} = \frac{\eta'}{\omega'},$$

wo η und η' die Bedeutung haben

$$7) \qquad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Substituiren wir diese Werthe in obige Gleichungen, so erhalten wir

$$8) \qquad \theta_1(u, q) = A e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} . \sigma(u), \quad \vartheta_1(u, p) = B e^{-\frac{\eta' u^2}{2\omega'}} . \sigma(u),$$

so dass sich also die Jacobi'sche Thetafunction mit dem Index 1 von der Weierstrass'schen Function $\sigma(u)$ im Wesentlichen nur durch einen Exponentialfactor von der Form $e^{\alpha u^2}$ unterscheidet. Aehnlich verhält es sich mit den übrigen Theta- und Sigmafunctionen.

Als drittes Beispiel endlich betrachten wir die Legendre'sche Function $\Gamma(u)$, die für reelle positive Werthe von u durch das Euler'sche Integral zweiter Gattung

$$9) \qquad \Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$$

definirt ist. Wir wollen diese Function auch für beliebige complexe Werthe des Arguments definiren, indem wir sie als allgemeine analytische Function mit gegebenen singulären Punkten ansehen.

Die Function $\Gamma(u)$ besitzt bekanntlich die Unendlichkeitspunkte erster Ordnung $u = 0, -1, -2, \ldots$, und ist sonst allenthalben stetig und von Null verschieden. Bezeichnen wir den reciproken Werth von $\Gamma(u+1)$, den Herr Weierstrass die Factorielle von u nennt und mit $Fc(u)$ bezeichnet (Crelle's Journal, Bd. 51), mit

$$10) \qquad \gamma(u) = \frac{1}{\Gamma(u+1)},$$

so ist dies eine eindeutige analytische Function von u, die für alle endlichen Werthe von u allenthalben endlich und stetig ist und die in den Punkten $u = -1, -2, -3, \ldots$ in der ersten Ordnung verschwindet; ihr analytischer Ausdruck muss daher nach § 1 die Form besitzen

$$11) \qquad \gamma(u) = e^{\psi(u)} . \prod_k \left\{ \left(1 + \frac{u}{k}\right) e^{-\frac{u}{k}} \right\},$$

wo sich das Zeichen $\prod_k$ auf alle von 0 verschiedenen positiven ganzen Zahlen k bezieht.

Es handelt sich darum, die ganze Function $\psi(u)$ so zu bestimmen, dass $\gamma(u)$ identisch wird mit $\frac{1}{\Gamma(u+1)}$. Zu dem Zwecke verfahren wir ähnlich wie früher bei der Function $\sin(\pi u)$, indem wir zunächst von der bekannten Functionalgleichung der Gammafunction

$$12)\qquad \Gamma(u+1) = u.\Gamma(u)$$

Gebrauch machen, aus der sich

$$12')\qquad \gamma(u-1) = u.\gamma(u)$$

ergiebt.

Setzen wir zur Abkürzung

$$13)\qquad \varphi(u) = \prod_k \left\{\left(1+\frac{u}{k}\right)e^{-\frac{u}{k}}\right\},$$

so dass

$$14)\qquad \gamma(u) = e^{\psi(u)}.\varphi(u)$$

ist, so erhalten wir durch logarithmische Differentiation für $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ die unbedingt convergente Partialbruchreihe

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \sum_1^\infty{}^k \left\{\frac{1}{u+k} - \frac{1}{k}\right\}$$

und hieraus

$$\frac{\varphi'(u-1)}{\varphi(u-1)} = \sum_1^\infty{}^k \left\{\frac{1}{u+k-1} - \frac{1}{k}\right\}.$$

Schreiben wir uns beide Summen explicite hin, so sehen wir sofort, dass

$$\frac{\varphi'(u-1)}{\varphi(u-1)} = \frac{1}{u} + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$$

ist; mithin wird

$$15)\qquad \varphi(u-1) = C.u.\varphi(u)$$

sein, wo C eine Constante bezeichnet. Der Werth dieser Constanten lässt sich leicht angeben. Offenbar ist $\varphi(0)=1$, mithin

$$C = \left[\frac{\varphi(u-1)}{u}\right]_{u=0}$$

oder, da

$$\varphi(u-1) = \prod_k \left\{\left(1+\frac{u-1}{k}\right)e^{-\frac{u-1}{k}}\right\}$$
$$= ue^{-u+1}.\left(1+\frac{u-1}{2}\right)e^{-\frac{u-1}{2}}.\left(1+\frac{u-1}{3}\right)e^{-\frac{u-1}{3}}\ldots$$

ist, so wird

$$C = e.\tfrac{1}{2}e^{1/2}.\tfrac{2}{3}e^{1/3}.\tfrac{3}{4}e^{1/4}\ldots,$$

folglich, wenn wir statt C eine neue Constante M einführen durch die Gleichung

$$16)\qquad C = e^M,$$

$$M = lg\,C = 1 + (\tfrac{1}{2} - lg\,2) + (\tfrac{1}{3} - lg\,\tfrac{3}{2}) + (\tfrac{1}{4} - lg\,\tfrac{4}{3}) + \cdots$$
$$= (1 - lg\,2) + (\tfrac{1}{2} - lg\,\tfrac{3}{2}) + (\tfrac{1}{3} - lg\,\tfrac{4}{3}) + \ldots,$$

d. h.

$$17)\qquad M = \sum_1^\infty{}^m \left\{\frac{1}{m} - lg\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\} = 0{,}5772156649\ldots;$$

es ist dieses M also nichts Anderes, als die bekannte (Mascheroni'sche) Constante des Integrallogarithmus.

Aus den Gleichungen 14) und 15) folgt nun

$$\gamma(u-1) = C . e^{\psi(u-1)-\psi(u)} . u\gamma(u);$$

mithin muss, falls die Functionalgleichung 12') erfüllt sein soll,

$$C . e^{\psi(u-1)-\psi(u)} = 1$$

oder, da $C = e^M$ ist,

18) $$\psi(u-1) = \psi(u) - M + 2m\pi i$$

sein, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Durch Differentiation ergiebt sich hieraus

$$\psi'(u-1) = \psi'(u),$$

d. h. die Function $\psi'(u)$ besitzt die Periode 1; dies ist aber, da $\psi(u)$ eine ganze Function ist, nur möglich, wenn $\psi'(u)$ gleich einer Constanten ist, so dass also $\psi(u)$ die Form besitzt

$$\psi(u) = \alpha u + \beta.$$

Substituiren wir diesen Werth von $\psi(u)$ in Gleichung 18), so erhalten wir

$$\alpha = M - 2m\pi i;$$

mithin wird, wenn wir noch $e^\beta = A$ setzen,

$$\gamma(u) = A e^{(M-2m\pi i)u} . \varphi(u) = A e^{(M-2m\pi i)u} . \prod_k \left\{\left(1+\frac{u}{k}\right) e^{-\frac{u}{k}}\right\}.$$

Um endlich noch den constanten Factor A, sowie die ganze Zahl m zu bestimmen, setzen wir fest, dass

19) $$\Gamma(1) = 1$$

sei, und ferner, dass die Function $\Gamma(u)$ für reelle Werthe des Arguments ebenfalls reell sei. Aus der ersten dieser beiden Eigenschaften folgt $\gamma(0) = 1$, mithin $A = 1$; aus der zweiten Eigenschaft ergiebt sich $m = 0$. Somit wird definitiv

20) $$\gamma(u) = \frac{1}{\Gamma(u+1)} = e^{Mu} . \prod_k \left\{\left(1+\frac{u}{k}\right) e^{-\frac{u}{k}}\right\}.$$

Vergleicht man diese Productentwickelung, in welcher k alle positiven ganzen Zahlen (excl. 0) durchläuft, mit der oben für $\sin(\pi u)$ aufgestellten Productentwickelung, in welcher k alle positiven und negativen ganzen Zahlen (excl. 0) durchläuft, so erkennt man sofort, dass

$$\gamma(u) . \gamma(-u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u};$$

hieraus ergiebt sich mit Hilfe der Gleichungen 10) und 12) die bekannte Relation

$$\Gamma(u) . \Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)}.$$

§ 3. Die Partialbruchentwickelung der eindeutigen analytischen Functionen.

Wir verstehen in diesem Paragraphen unter $f(u)$ eine eindeutige analytische Function, die im Endlichen nur polare oder ausserwesentliche singuläre Stellen besitzt, sonst aber allenthalben endlich und stetig ist; das Verhalten derselben für unendlich grosse Werthe des Arguments soll vorläufig wieder ausser Betracht gelassen werden.

Es seien

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Unendlichkeitspunkte von $f(u)$,

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ die Ordnungen des Unendlichwerdens in diesen Punkten. Denken wir uns nun wieder durch einen einfach geschlossenen Contour s, der jedoch durch keinen dieser Unendlichkeitspunkte hindurchgeht, ein einfach zusammenhängendes Flächenstück abgesondert, so ist nach dem Cauchy'schen Satz II der Werth der Function $f(u)$ in einem beliebigen Punkte u innerhalb dieses Contours gegeben durch die Formel

$$f(u) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_k \int_{(\alpha_k)} \frac{f(v)\,dv}{v-u} + \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(v)\,dv}{v-u},$$

wo sich das Summenzeichen auf sämmtliche im Innern von s befindliche Unendlichkeitspunkte α bezieht.

Um das über die natürliche Begrenzung von α_k in positiver Richtung zu erstreckende Integral $\int\limits_{(\alpha_k)}$ auszuwerthen, entwickeln wir die Function $f(v)$ in der Umgebung des Punktes α_k; diese Entwickelung wird die Form besitzen

$$1)\qquad f(v) = \frac{1}{(v-\alpha_k)^{\mu_k}}\{\mathrm{A}_k + \mathrm{A}'_k(v-\alpha_k) + \mathrm{A}''_k(v-\alpha_k)^2 + \ldots\}.$$

Zufolge dieser Entwickelung wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha_k)} \frac{f(v)\,dv}{v-u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha_k)} \frac{F(v)\,dv}{(v-\alpha_k)^{\mu_k}},$$

wo $F(v)$ zur Abkürzung gesetzt ist für

$$F(v) = \frac{\mathrm{A}_k + \mathrm{A}'_k(v-\alpha_k) + \ldots}{v-u}.$$

Diese Function $F(v)$ ist in der Umgebung des Punktes $v = \alpha_k$ endlich und stetig, mithin wird nach dem Cauchy'schen Satze I

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha_k)} \frac{f(v)\,dv}{v-u} = \frac{1}{(\mu_k - 1)!}\cdot F^{(\mu_k-1)}(\alpha_k)$$

oder, wie sich durch wiederholte Differentiation von $F(v)$ nach v leicht ergiebt,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\alpha_k)}\frac{f(v)\,dv}{v-u}=-\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,\frac{A_k^{(\mu_k-\lambda)}}{(u-\alpha_k)^\lambda}$$

und somit

$$f(u)=\sum{}_k\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,\frac{A_k^{(\mu_k-\lambda)}}{(u-\alpha_k)^\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s\frac{f(v)\,dv}{v-u}.$$

Das Randintegral zerlegen wir mit Hilfe der Identität

$$\frac{1}{v-u}=\frac{1}{v}+\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{v-u}$$

in folgende zwei Integrale:

$$\int\limits_s\frac{f(v)\,dv}{v-u}=\int\limits_s\frac{f(v)}{v}\,dv+\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u},$$

von denen wir zunächst das erste weiter behandeln.

Die Function $\frac{f(v)}{v}$ wird, mag nun der Punkt $v=0$ mit zu den Unendlichkeitspunkten der Function $f(v)$ gehören oder nicht, ∞ für $v=0$ und für die von 0 verschiedenen Unendlichkeitspunkte α_k der Function $f(v)$; es ist demnach unter der Voraussetzung, dass der Contour s den Punkt $v=0$ bereits einschliesst, nach Satz II

$$\int\limits_s\frac{f(v)}{v}\,dv=\int\limits_{(0)}\frac{f(v)}{v}\,dv+\sum{}'_k\int\limits_{(\alpha_k)}\frac{f(v)}{v}\,dv.$$

In der Umgebung des Punktes $v=0$ ist nun $f(v)$ entwickelbar in eine Reihe von der Form

$$2)\qquad f(v)=\frac{1}{v^\mu}\{A+A'v+A''v^2+\ldots\},$$

wo $\mu=0$ ist, wenn $v=0$ ein neutraler Punkt, und $\mu>0$, wenn $v=0$ ein Unendlichkeitspunkt von $f(v)$ ist; mithin wird nach Satz III

$$\int\frac{f(v)}{v}\,dv=2\pi i\,.\,A^{(\mu)}.$$

Um ferner das über die natürliche Begrenzung von α_k genommene Integral zu berechnen, bemerken wir, dass nach 1) die Entwickelungen von $f(v)$ und $\frac{1}{v}$ die Form besitzen

$$f(v)=\frac{1}{(v-\alpha_k)^{\mu_k}}\{A_k+A'_k(v-\alpha_k)+A''_k(v-\alpha_k)^2+\ldots\},$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{\alpha_k+(v-\alpha_k)}=\frac{1}{\alpha_k}-\frac{v-\alpha_k}{\alpha^2_k}+\frac{(v-\alpha_k)^2}{\alpha^3_k}\mp\ldots;$$

multipliciren wir diese beiden Reihen miteinander, so erhalten wir für den Coefficienten von $\frac{1}{v-\alpha_k}$ in der Reihenentwickelung der Function $\frac{f(v)}{v}$ folgenden Ausdruck:

$$(-1)^{\mu_k-1}\cdot\frac{A_k}{\alpha_k^{\mu_k}}+(-1)^{\mu_k-2}\cdot\frac{A'_k}{\alpha_k^{\mu_k-1}}+\ldots-\frac{A_k^{(\mu_k-2)}}{\alpha^2_k}+\frac{A_k^{(\mu_k-1)}}{\alpha_k}$$

$$=-\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda\frac{A_k^{(\mu_k-\lambda)}}{\alpha_k^\lambda},$$

folglich wird für $\alpha_k \neq 0$

$$\int\limits_{(\alpha_k)}\frac{f(v)\,dv}{v}=-\,2\pi i.\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda\frac{A_k^{(\mu_k-\lambda)}}{\alpha_k^\lambda}$$

und somit

$$\int\limits_s\frac{f(v)}{v}\,dv=2\pi i\,.\left\{A^{(\mu)}-\sum{}'_k\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda\frac{A_k^{(\mu_k-\lambda)}}{\alpha_k^\lambda}\right\}.$$

Nun war das zu ermittelnde Randintegral

$$\int\limits_s\frac{f(v)\,dv}{v-u}=\int\limits_s\frac{f(v)}{v}\,dv+\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u};$$

mithin erhalten wir als vorläufiges Resultat folgende Darstellung für $f(u)$:

$$f(u)=\sum{}_k\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda\,A_k^{(\mu_k-\lambda)}\left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda}-\frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u},$$

falls $v=0$ ein Nullpunkt von $f(u)$ ist;

$$f(u)=A+\sum{}_k\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda\,A_k^{(\mu_k-\lambda)}\left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda}-\frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u},$$

falls $v=0$ ein neutraler Punkt von $f(u)$ ist; und endlich

$$f(u)=\sum_0^{\mu}{}_\lambda\,\frac{A^{(\mu-\lambda)}}{u^\lambda}+\sum{}'_k\sum_1^{\mu_k}{}_\lambda\,(-1)^\lambda A_k^{(\mu_k-\lambda)}\left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda}-\frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u},$$

falls $v=0$ ein Unendlichkeitspunkt μ^{ter} Ordnung von $f(u)$ ist.

Dabei beziehen sich die Zeichen $\sum_k$ und $\sum'_k$ auf sämmtliche, bezüglich auf sämmtliche von Null verschiedene Unendlichkeitspunkte α_k, die sich innerhalb des Contours s befinden.

Es erübrigt nun noch, den Werth des Randintegrals $\int\limits_s\frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u}$ zu ermitteln. Zu dem Zwecke werden wir den Contour s immer mehr und mehr, schliesslich bis ins Unendliche anwachsen lassen, so dass dann gleichzeitig die Summen $\sum_k$ und $\sum'_k$ zu unendlichen Summen werden, falls die Anzahl der Unendlichkeitspunkte α_k selbst unendlich gross ist. Es können nun bei dieser Erweiterung des Contours zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle eintreten: Entweder wird es möglich sein, den Contour s stets so zu führen, dass er auch in unendlicher Ferne niemals den Punkten α_k zu nahe kommt; oder diese Möglichkeit wird wegen zu dichter Anhäufung der Punkte α_k im Unendlichen nicht vorhanden sein. In dem ersten dieser beiden Fälle kann man den Contour s auch im Unendlichen stets so führen, dass der absolute Betrag von $f(u)$ für jeden Punkt von s unterhalb einer angebbaren endlichen Zahl liegt; im zweiten Falle wird eine solche endliche Zahl nicht mehr angebbar sein. Die einfachsten Beispiele für den ersten Fall bieten uns die trigonometrischen Functionen *tg.*, *cotg.*, *sec.*, *cosec.*, sowie sämmtliche doppelt periodische Functionen. Hingegen tritt bei der Function $\Gamma(u)$ der zweite Fall ein; zwar ist es hier möglich, die Curve s so zu legen, dass sie die auf der negativen Abscissenaxe gelegenen Unendlichkeitspunkte $u = 0, -1, -2, -3, \ldots$ auch im Unendlichen stets vermeidet, doch ist für jeden positiven unendlich grossen Werth von u $\Gamma(u)$ grösser als jede angebbare endliche Zahl. Die Functionen dieser letzten Kategorie besitzen im Unendlichen einen Discontinuitätspunkt, den man bisher mit zu den Discontinuitäten zweiter Gattung zählte, den wir aber nach dem Vorgange des Herrn Prym von diesen absondern und als Discontinuitätspunkt dritter Gattung bezeichnen wollen.

In dem ersten der beiden betrachteten Fälle, in welchem also der unendlich ferne Punkt ein Discontinuitätspunkt zweiter Gattung ist, liegt der absolute Betrag von $f(v)$ für sämmtliche Randpunkte v stets unter einer angebbaren endlichen Grenze M, wie gross wir auch den Contour s wählen mögen; diese Grösse M ist demnach unabhängig von der Wahl des Contours. Bezeichnen wir nun die Entfernung des Punktes u vom Nullpunkte, d. h. den absoluten Betrag von u, mit l, ferner den absoluten Betrag desjenigen Randpunktes v, der dem Punkte o am nächsten liegt, mit m, so wird l eine endliche, von der Beschaffenheit des Contours unabhängige Länge, m hingegen eine lineare Grösse sein, die sich von einer Randcurve zur andern ändert. Nehmen wir gleich von vornherein den Contour s so gross an, dass $m > l$ ist, so werden für sämmtliche Randpunkte v dieses Contours die Ungleichheiten bestehen

$$|f(v)| < M, \quad |v| > m, \quad |v-u| > m-l.$$

oder

$$\left|\frac{1}{v}\right| < \frac{1}{m}, \quad \left|\frac{1}{v-u}\right| < \frac{1}{m-l};$$

mithin besitzt der absolute Betrag jenes Integrals, wenn wir noch die Länge der Randcurve s mit s bezeichnen, die obere Grenze

$$\left|\int_s \frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u}\right| < l\,.\,M\,.\,\frac{s}{m(m-l)}.$$

Lassen wir nun den Contour s nach allen Seiten hin über alle Grenzen sich erweitern, so bleiben l und M unverändert, s und m hingegen werden als lineare Grössen in gleicher Ordnung unendlich gross; mithin nähert sich jener Quotient, also auch das Integral selbst, dem Grenzwerth 0.

In dem zweiten Falle, in welchem der unendlich ferne Punkt der Argumentenebene ein Discontinuitätspunkt dritter Gattung von $f(u)$ ist, verschwindet zwar nicht das Integral; doch lässt sich auch hier die analytische Form des Integralwerthes leicht angeben. Wir können hier offenbar für den Quotienten $\frac{1}{v-u}$ die Entwickelung setzen

$$\frac{1}{v-u} = \frac{1}{v} + \frac{u}{v^2} + \frac{u^2}{v^3} + \dots,$$

mithin wird

$$\int_s \frac{u}{v}\,\frac{f(v)\,dv}{v-u} = u\int_s \frac{f(v)\,dv}{v^2} + u^2\int_s \frac{f(v)\,dv}{v^3} + \dots$$
$$= c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots,$$

wo c_1, c_2, ... constante Coefficienten bedeuten. Es tritt also in diesem Falle zu der obigen Partialbruchentwickelung noch eine Potenzreihe (eine ganze transcendente Function) hinzu, so dass wir hier, in Analogie zu den rationalen Functionen, $f(u)$ eine unecht gebrochene transcendente Function nennen können, während diejenigen Functionen, die im Unendlichen einen Discontinuitätspunkt zweiter Gattung besitzen, als echt gebrochene transcendente Functionen zu bezeichnen wären.

Wir erhalten demnach als Resultat unserer Untersuchung für eine echt gebrochene transcendente Function $f(u)$ folgende Partialbruchzerlegung:

$$\text{3a)}\quad f(u) = \sum\nolimits_k \sum_{1}^{\mu_k}\nolimits_\lambda (-1)^\lambda A_k^{(\mu_k-\lambda)} \left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda} - \frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\},$$

falls der Punkt $v=0$ ein Nullpunkt von $f(u)$ ist;

$$\text{3b)}\quad f(u) = A + \sum\nolimits_k \sum_{1}^{\mu_k}\nolimits_\lambda (-1)^\lambda A_k^{(\mu_k-\lambda)} \left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda} - \frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\},$$

falls der Punkt $v=0$ ein neutraler Punkt von $f(u)$ ist; und endlich

$$\text{3c)}\quad f(u) = \sum_{0}^{\mu}\nolimits_\lambda \frac{A^{(\mu-\lambda)}}{u^\lambda} + \sum\nolimits_k' \sum_{1}^{\mu_k}\nolimits_\lambda (-1)^\lambda A_k^{(\mu_k-\lambda)} \left\{\frac{1}{(\alpha_k-u)^\lambda} - \frac{1}{\alpha_k^\lambda}\right\},$$

falls der Punkt $v=0$ ein Unendlichkeitspunkt μ^{ter} Ordnung von $f(u)$ ist. Für eine unecht gebrochene transcendente Function $f(u)$ kommt zu dieser Partialbruchentwickelung noch eine ganze Function von der Form

4) $$u \cdot \psi(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots$$
hinzu.

Dass übrigens diese Partialbruchentwickelungen sowohl, als auch die in § 1 abgeleitete Productentwickelung unbedingt convergiren, ergiebt sich aus unserer Herleitung von selbst; denn die Form des Contours s, den wir zur Abgrenzung einer endlichen Anzahl von singulären Stellen der Function $f(u)$ benutzten und von dessen Wahl die Aufeinanderfolge der einzelnen Summanden, resp. Factoren abhing, war von uns stets willkürlich gelassen worden. Freilich, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, für diesen Contour ein zur reellen und imaginären Axe symmetrisch gelegenes Rechteck wählt, so ist es nicht zu verwundern, dass man nur zu bedingt convergenten Reihen- und Productentwickelungen gelangt; denn alsdann fallen gerade diejenigen Bestandtheile aus den unendlichen Summen und Producten heraus, welche die letzteren zu unbedingt convergenten machen.

§ 4. Beispiele zur Partialbruchentwickelung.

Die einfach periodischen Functionen *tg.*, *cotg.*, *sec.* und *cosec.*, sowie die doppelt periodischen Functionen gehören offenbar der Kategorie der echt gebrochenen transcendenten Functionen an, sind demnach nach einer der Formeln 3) des vorigen Paragraphen zu behandeln; und zwar werden die Formeln

3a), 3b), 3c) bez. anzuwenden sein bei den Functionen
tg., *sec.*, *cotg.*

Betrachten wir insbesondere die Function $cotg(\pi u)$; dieselbe besitzt die Unendlichkeitspunkte erster Ordnung

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mithin ist ihre Partialbruchentwickelung von der Form

$$cotg(\pi u) = \frac{A}{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k A_k \left\{\frac{1}{u-k} + \frac{1}{k}\right\},$$

wo A und A_k die ersten Entwickelungscoefficienten der Function $cotg(\pi v)$ in der Umgebung der Punkte $v = 0$ und $v = k$ sind. Diese Entwickelungen besitzen die Form

$$cotg(\pi v) = \frac{1}{v}\{A + A'v + \ldots\} \text{ und } cotg(\pi v) = \frac{1}{v-k}\{A_k + A'_k(v-k) + \ldots\};$$

da nun die Function $cotg(\pi v)$ die Periode 1 besitzt, also der Functionalgleichung

$$cotg\,\pi(v+k) = cotg(\pi v)$$

genügt, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so sind die Entwickelungscoefficienten A_k, A'_k, ... bez. identisch mit A, A′, ..., so dass die obige Partialbruchentwickelung die Form annimmt

$$cotg(\pi u) = A\left\{\frac{1}{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left(\frac{1}{u-k} + \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Da endlich

$$\left[\frac{\sin(\pi v)}{\pi v}\right]_{v=0} = 1 \text{ und } [\cos(\pi v)]_{v=0} = 1,$$

also

$$[\pi v \,.\, cotg(\pi v)]_{v=0} = 1$$

ist, so besitzt der Coefficient A den Werth $\frac{1}{\pi}$ und es wird definitiv

$$\pi\, cotg(\pi u) = \frac{1}{u} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left(\frac{1}{u-k} + \frac{1}{k}\right). \tag{1}$$

Von den doppelt periodischen Functionen wollen wir insbesondere diejenigen zweiter Ordnung und von diesen die Weierstrass'sche Function $p(u)$ betrachten; die Jacobi'schen elliptischen Functionen $\sin am(u)$, $\cos am(u)$ und $\Delta am(u)$ lassen selbstverständlich eine ganz analoge Behandlung zu.

Es sei also $p(u)$ eine eindeutige analytische, doppelt periodische Function zweiter Ordnung, mit den primitiven Perioden 2ω und $2\omega'$, die in jedem Periodenparallelogramm nur einmal unendlich gross zweiter Ordnung wird, nämlich im Punkte $u=0$ und in den zu diesem congruenten Punkten; dann wird diese Function in jedem Periodenparallelogramm auch zweimal gleich Null werden, und zwar werden diese Nullpunkte, die wir vorläufig mit u_0 und $\bar{u}_0$ bezeichnen wollen, im Allgemeinen discrete sein und nach einem von Liouville herrührenden Satze der Relation

$$u_0 + \bar{u}_0 \equiv 0, \text{ d. h. } u_0 + \bar{u}_0 = 2\mu\omega + 2\nu\omega'$$

genügen, wo μ und ν ganze Zahlen bedeuten.

Es seien jetzt u und $\bar{u}$ irgend zwei correspondirende Punkte innerhalb desselben Periodenparallelogramms, d. h. zwei solche Punkte, in denen $p(u)$ denselben Werth annimmt, so ist wiederum nach dem Liouville'schen Satze

$$u + \bar{u} \equiv u_0 + \bar{u}_0 \equiv 0, \text{ also } \bar{u} \equiv -u, \text{ folglich } p(\bar{u}) = p(-u)$$

oder, da $p(\bar{u}) = p(u)$ ist,

2) $p(-u) = p(u)$, d. h. $p(u)$ ist eine gerade Function.

Hieraus folgt, dass die Function $p(u) - p(v)$, wo v eine willkürliche Constante bezeichnet, sowohl für $u = v$, als auch für $u = -v$ verschwindet, während ihre Unendlichkeitspunkte dieselben sind, wie die von $p(u)$. Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Functionswerthe im ersten Periodenparallelogramm mit den Ecken 0, 2ω, $2\omega'$ und $2\omega + 2\omega'$, und nehmen an, der Punkt v liege in diesem ersten Periodenparallelogramm, so entspricht dem Punkte $u = -v$ innerhalb dieses Parallelogramms der Punkt

$$\bar{v} = -v + 2\omega + 2\omega',$$

so dass $u = \bar{v}$ und $u = -v + 2\omega + 2\omega'$ die beiden Nullpunkte der Function $p(u) - p(v)$ im ersten Periodenparallelogramm sind; es sind dies auch die einzigen Nullpunkte und jeder ist von der ersten Ordnung, da $p(u)$ eine doppelt periodische Function zweiter Ordnung ist.

Lassen wir insbesondere den Punkt v in einen der Punkte ω, $\omega + \omega'$, ω' hineinfallen und bezeichnen nach Herrn Weierstrass die dort vorhandenen Functionswerthe mit

$$p(\omega) = e_1, \quad p(\omega + \omega') = e_2, \quad p(\omega') = e_3,$$

so werden sich die beiden Nullpunkte erster Ordnung v und $-v + 2\omega + 2\omega'$ für jede dieser drei Functionen zu einem einzigen Nullpunkte zweiter Ordnung vereinigen; die Functionen

$$p(u) - e_1, \quad p(u) - e_2, \quad p(u) - e_3$$

werden nämlich in den Punkten

$$u = \omega, \quad u = \omega + \omega', \quad u = \omega'$$

von der zweiten Ordnung gleich Null, während ihre Unendlichkeitspunkte ebenfalls von der zweiten Ordnung sind und die Form $u \equiv 0$ besitzen.

Hieraus folgt weiter, dass die Ableitung $p'(u)$ in $u = \omega$, $u = \omega + \omega'$ und $u = \omega'$ Nullpunkte erster Ordnung, und in $u = 0$ einen Unendlichkeitspunkt dritter Ordnung besitzt; und da $p'(u)$ nur da unendlich gross werden kann, wo $p(u)$ unendlich gross wird, so sind diese Null- und Unendlichkeitspunkte die einzigen der Function $p'(u)$ innerhalb des ersten Periodenparallelogramms.

Betrachten wir nun die beiden Functionen

$$(p'(u))^2 \text{ und } (p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3),$$

so sehen wir, dass jede derselben im Punkte $u = 0$ unendlich gross sechster Ordnung und in den Punkten $u = \omega$, $u = \omega + \omega'$, $u = \omega'$ gleich 0 zweiter Ordnung wird; mithin ist nach einem bekannten Satze über doppelt periodische Functionen

$$(p'(u))^2 = \varepsilon . (p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3),$$

wo ε einen constanten Factor bedeutet. Zur Bestimmung desselben entwickeln wir beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von u. Die Entwickelung von $p(u)$ in der Umgebung des Nullpunktes wird von der Form sein

$$p(u) = \frac{1}{u^2}(A + A'u + A''u^2 + \ldots)$$

oder vielmehr, da $p(u)$ eine gerade Function ist, von der Form

$$p(u) = \frac{1}{u^2}(A + A''u^2 + A^{IV}u^4 + \ldots).$$

Hieraus folgt

$$p'(u) = -\frac{2A}{u^3} + 2A^{IV}u + \ldots, \quad (p'(u))^2 = \frac{4A^2}{u^6} - \frac{8AA^{IV}}{u^2} + \ldots,$$

ferner

$$(p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3) = \frac{A^3}{u^6} + \frac{A^2(3A'' - e_1 - e_2 - e_3)}{u^4} + \ldots.$$

Durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten ergiebt sich

$$4\mathrm{A}^2 = \varepsilon . \mathrm{A}^3, \quad 0 = \varepsilon \mathrm{A}^2(3\mathrm{A}'' - e_1 - e_2 - e_3), \quad \ldots,$$

also ist

3) $$\varepsilon = \frac{4}{\mathrm{A}}, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 3\mathrm{A}''.$$

Demgemäss lautet die Differentialgleichung der Function $p(u)$:

$$(p'(u))^2 = \frac{4}{\mathrm{A}}(p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3),$$

wo A den Coefficienten von $\frac{1}{u^2}$ in der Entwickelung der Function $p(u)$ nach Potenzen von u bezeichnet.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Aufstellung der Partialbruchentwickelung der Function $p(u)$ über.

Da $p(u)$ eine eindeutige analytische Function ist, deren Unendlichkeitspunkte von der zweiten Ordnung sind und die Form besitzen

$$\alpha_k = w = 2m\omega + 2n\omega',$$

so lautet ihre Partialbruchentwickelung nach Formel 3c) des vorigen Paragraphen

$$p(u) = \sum_0^2{}_\lambda \frac{\mathrm{A}^{(2-\lambda)}}{u^\lambda} + \sum_w{}' \sum_1^2{}_\lambda (-1)^\lambda \mathrm{A}_k^{(2-\lambda)} \left\{\frac{1}{(w-u)^\lambda} + \frac{1}{w^\lambda}\right\}$$

$$= \mathrm{A}'' + \frac{\mathrm{A}'}{u} + \frac{\mathrm{A}}{u^2} + \sum_w{}' \left[\mathrm{A}'_k \left\{\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w}\right\} + \mathrm{A}_k \left\{\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}\right].$$

Nun ist $p(u)$ eine Function mit der Periode w, genügt also der Functionalgleichung

$$p(u+w) = p(u);$$

folglich besitzen die Coefficienten A_k sämmtlich den Werth A und die Coefficienten A'_k sämmtlich den Werth A′, d. h. den Werth 0; es reducirt sich demnach obige Entwickelung auf

$$p(u) = \mathrm{A}'' + \mathrm{A}\left\{\frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)\right\}.$$

Wir ersehen hieraus, dass durch Angabe der beiden Perioden 2ω und $2\omega'$, sowie durch die Annahme, dass der Punkt $u=0$ ein Unendlichkeitspunkt zweiter Ordnung sei, die Function $p(u)$ bis auf zwei Constanten A und A″ vollkommen bestimmt ist. Wir gelangen zu der Weierstrass'schen Function $p(u)$, wenn wir noch annehmen, dass

4) $$\mathrm{A} = 1 \text{ und } \mathrm{A}'' = 0, \text{ d. h. } e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

ist. Dann wird definitiv

5) $$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left\{\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right\};$$

ferner lautet jetzt die Entwickelung dieser Function in der Umgebung des Nullpunktes

6) $$p(u) = \frac{1}{u^2}(1 + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}} u^4 + \mathrm{A}^{\mathrm{VI}} u^6 + \ldots)$$

und die Differentialgleichung

7) $$(p'(u))^2 = 4(p(u) - e_1)(p(u) - e_2)(p(u) - e_3) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

wo g_2 und g_3 die Bedeutung haben

8) $g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$, $g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$.

Als letztes Beispiel betrachten wir die Function $\Gamma(u)$. Von dieser wissen wir, dass sie in den Punkten

$$u = 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

unendlich gross erster Ordnung wird, ferner, dass sie ausser diesen Unstetigkeitspunkten erster Gattung im Unendlichen noch einen Unstetigkeitspunkt dritter Gattung besitzt; mithin besitzt nach den Formeln 3b) und 4) des vorigen Paragraphen die Function $\Gamma(u)$ eine Partialbruchzerlegung von der Form

$$\Gamma(u) = c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + \mathrm{A}' + \frac{\mathrm{A}}{u} + \sum_1^{+\infty}{}_k\, \mathrm{A}_k \left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{k}\right),$$

die zuerst von Herrn Prym (Borchardt's Journal Bd. 82) angegeben worden ist; dabei bezeichnen A und A′ die beiden ersten Entwickelungscoefficienten von $\Gamma(u)$ in der Umgebung des Punktes $u = 0$, und A_k den ersten Entwickelungscoefficienten von $\Gamma(u)$ in der Umgebung des Punktes $u = -k$.

Zur Bestimmung dieser Coefficienten dient die Functionalgleichung der Function $\Gamma(u)$, nämlich

$$\Gamma(u+1) = u \,.\, \Gamma(u),$$

oder wenn wir in derselben $u-k$ statt u schreiben,

$$\Gamma(u-k+1) = (u-k)\,.\,\Gamma(u-k).$$

Nun besitzen aber die Entwickelungen der Function $\Gamma(u)$ in der Umgebung der Punkte $u = -k$ und $u = -k+1$ die Form

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u+k}\{\mathrm{A}_k + \mathrm{A}'_k(u+k) + \ldots\},$$

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u+k-1}\{\mathrm{A}_{k-1} + \mathrm{A}'_{k-1}(u+k-1) + \ldots\},$$

mithin ist für kleine Werthe von u

$$\Gamma(u-k) = \frac{1}{u}\{\mathrm{A}_k + \mathrm{A}'_k u + \ldots\},$$

$$\Gamma(u-k+1) = \frac{1}{u}\{\mathrm{A}_{k-1} + \mathrm{A}'_{k-1} u + \ldots\};$$

substituiren wir diese beiden Entwickelungen in obige Gleichung $\Gamma(u-k+1) = (u-k)\,\Gamma(u-k)$ und ordnen rechter Hand nach Potenzen von u, so erhalten wir durch Vergleichung der beiderseitigen Entwickelungscoefficienten von $\frac{1}{u}$ die Relation

9) $$\mathrm{A}_{k-1} = -k\,\mathrm{A}_k.$$

Setzen wir hierin successive $k = 1, 2, \ldots n$ und multipliciren die so entstehenden Gleichungen miteinander, so ergiebt sich

10) $$\mathrm{A}_n = \frac{(-1)^n}{n!}\,.\,\mathrm{A}_0 = \frac{(-1)^n}{n!}\,.\,\mathrm{A},$$

so dass nunmehr obige Entwickelung von $\Gamma(u)$ die Form annimmt

$$\Gamma(u) = c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + A' + A \left\{ \frac{1}{u} + \sum_1^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{k} \right) \right\},$$

oder wenn wir die Constante

$$11)\qquad A' - A . \sum_1^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k . k!} = c_0$$

setzen,

$$\Gamma(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + A . \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} . \frac{1}{u+k}.$$

Zufolge der Gleichung 19), § 2, und der Functionalgleichung der Function $\Gamma(u)$ ist aber

$$[u . \Gamma(u)]_{u=0} = \Gamma(1) = 1;$$

demnach wird

$$12)\qquad A = 1$$

und somit

$$13)\qquad \Gamma(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{u+k}.$$

Es erübrigt noch, die Coefficienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke differentiiren wir die Gleichung 13) nach u und erhalten

$$\Gamma'(u) = c_1 + 2 c_2 u + \ldots - \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(u+k)^2},$$

$$\frac{1}{2!} \Gamma''(u) = c_2 + 3 c_3 u + \ldots + \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(u+k)^3},$$

$$\frac{1}{3!} \Gamma'''(u) = c_3 + 4 c_4 u + \ldots - \sum_0^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(u+k)^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

mithin wird

$$\left[\frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(u) - \frac{(-1)^n}{u^{n+1}} \right]_{u=0} = c_n + \sum_1^{+\infty}{}_k \frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1} . k!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Andererseits folgt aus der Entwickelung der Function $\Gamma(u)$ in der Umgebung des Punktes $u = 0$

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u} + A' + A'' u + A''' u^2 + \ldots,$$

$$\Gamma'(u) = -\frac{1}{u^2} + A'' + 2 A''' u + \ldots,$$

$$\frac{1}{2!} \Gamma''(u) = \frac{1}{u^3} + A''' + 3 A^{IV} + \ldots,$$

$$\frac{1}{3!} \Gamma'''(u) = -\frac{1}{u^4} + A^{IV} + 4 A^{VI} u + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

mithin

$$\left[\frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(u) - \frac{(-1)^n}{u^{n+1}} \right]_{u=0} = A^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Somit bestehen zwischen den Coefficienten c_0, c_1, c_2, ... einerseits und den Coefficienten A, A′, A″, ... andererseits die Relationen

$$c_n = \mathrm{A}^{(n+1)} - \sum_1^{+\infty} {}_k \frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1} \cdot k!},$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_1^{+\infty} {}_k \frac{(-1)^k}{k^n \cdot k!} = \alpha_n \tag{13}$$

setzen,

$$c_n = \mathrm{A}^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \cdot \alpha_{n+1}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{14}$$

Die numerischen Werthe der Grössen α_1, α_2, ... können wir als bekannt voraussetzen; es bleiben also nur noch die Werthe von A′, A″, ... zu ermitteln übrig. Nun ist $\Gamma(u+1) = u \cdot \Gamma(u)$, mithin besitzt die Function $\Gamma(u+1)$ für kleine Werthe von u eine Entwickelung von der Form

$$\Gamma(u+1) = 1 + \mathrm{A}'u + \mathrm{A}''u^2 + \ldots; \tag{15}$$

wir haben also nur $\Gamma(u+1)$ nach Potenzen von u zu entwickeln, die Coefficienten dieser Entwickelung geben alsdann die gesuchten Werthe von A′, A″, ...

Diese Entwickelung kann ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden. Es lässt sich nämlich aus der früher aufgestellten Productentwickelung die Function $\gamma(u) = \frac{1}{\Gamma(u+1)}$ eine beständig convergente Potenzreihe für $\gamma(u)$ ableiten, wie zuerst Herr Weierstrass bewiesen hat (Crelle's Journal, Bd. 51 S. 7); die Coefficienten dieser Potenzreihe sind von Herrn Scheibner (Leipziger Berichte, math.-phys. Classe, Jahrg. 1862 S. 75) berechnet worden. Bildet man den reciproken Werth dieser Reihe, so gelangt man zu der Entwickelung 15) und somit zu den gesuchten Werthen von A′, A″, ...; insbesondere wird $\mathrm{A}' = -M$, wo M dieselbe Bedeutung hat, wie in dem unendlichen Product für $\gamma(u)$.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Neues elementares Schliessungsproblem.

Zwei feste Kreise in der Ebene sind gegeben. Man verlangt die Bedingungen zu kennen, unter denen eine Reihe von Kreisen, deren jeder seine beiden Nachbarn und die beiden festen Kreise berührt, geschlossen sein wird.

Diese Aufgabe wird gelöst durch den folgenden Lehrsatz:

Wenn zwei Kreise M_1, M_2 einander und zwei feste Kreise A, B berühren und man verbindet die Chordalpunkte (A, B, M_1) und (A, B, M_2) mit einem der Punktkreise der Schaar (A, B), so ist in diesem Punktkreise ein Winkel entstanden, welcher von der Wahl der Kreise M_1, M_2 unabhängig ist.

Coesfeld. SCHWERING.

XXXIV. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner.

Mit Allerhöchster Genehmigung Sr. Majestät des Kaisers und Königs **Wilhelm** findet auf Grund des zu Gera im vorigen Jahre gefassten Beschlusses die diesjährige Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in **Trier** vom 24. bis 27. September statt und laden wir die Fach- und Berufsgenossen zu zahlreicher Betheiligung ein. Wegen Beschaffung guter und billiger Quartiere wolle man sich möglichst frühzeitig an den mitunterzeichneten Director **Dr. Dronke** wenden. Alles Nähere besagt das demnächst auszugebende Programm.

Bonn und Trier, 2. Juni 1879.

Büchler. Dronke.

XXII.

Die Bildung affiner Figuren durch ähnlich-veränderliche Systeme.

Von

Dr. L. Geisenheimer

in Tarnowitz.

Hierzu Taf. V Fig. 1—12.

§ 1.

In einer, vor einiger Zeit in vorliegender Zeitschrift erschienenen Arbeit* veröffentlichte ich eine Untersuchung über die Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme, in welcher nachgewiesen wurde, dass die Phasen einer beliebigen, ähnlich-veränderlichen Curve nach Grösse und Lage erhalten werden, indem sich ihre ähnlich-veränderliche Ebene mittelst einer ähnlich-veränderlichen Polcurve auf einer festen Polbahn abrollt. Der momentane Drehungswinkel der variablen Polcurve ist in jedem Zeitdifferential gleich der algebraischen Summe der zu den entsprechenden gleichen Bogenincrementen auf Polcurve und Polbahn gehörigen Contingenzwinkel; und ist ausser diesen das Gesetz über die Veränderlichkeit der Polcurve bekannt, welches in einer für die constructive Verwendung sehr geeigneten Weise durch die Angabe des Wende- oder Rückkehrkreises dargestellt wird, so lassen sich in jedem Momente die Elemente, also Richtung und Krümmung, des zu einer ähnlich-veränderlichen Curve existirenden einhüllenden Bogendifferentials durch die Elemente des eingehüllten Bogendifferentials bestimmen. Die Gesetze des einfachsten Falles, bei welchem die variable Curve in einen Punkt zusammenschrumpft, also die Hüllbahn in die von diesem Punkte beschriebene Trajectorie übergeht, sind bereits von Grouard aufgestellt worden.**

* Geisenheimer, Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme. Zeitschrift f. Math. und Phys., Bd. XXIV S. 129.

** *Grouard, L'Institut, 1869, pag. 84.*

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems ist in jedem Augenblicke durch die zweier seiner Punkte bestimmt. Demnach ist die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems gegeben, sobald zwei Trajectorien und die auf diesen befindlichen, gleichzeitig passirten Punkte bekannt sind. Ein specieller Fall dieser Bestimmungsweise tritt ein, wenn zwei Punkte des ähnlich-veränderlichen Systems affine Punktreihen beschreiben. Bereits Burmester hat erkannt, dass in diesem Falle alle Punkte des Systems affine Punktreihen durchlaufen.* Die folgende Untersuchung geht in eine ausführlichere Erörterung dieses wichtigen Specialfalles ein; die Resultate derselben werden nicht nur neue Gesichtspunkte für die Auffassung der Bewegung beliebiger ähnlich-veränderlicher Systeme liefern, sondern auch mehrere allgemeine Gesetze über die Krümmungen entsprechender Elemente in affinen Curven und der Fusspunktcurven geben.

In den affinen Systemen Σ_1 und Σ_2 seien k_1 und k_2 zwei entsprechende Curven, A_1 und A_2 zwei entsprechende Punkte in diesen Curven. Zwei affine Systeme in nicht perspectivischer Lage haben stets einen Punkt und zwei durch diesen laufende reelle oder imaginäre Gerade als selbstentsprechende Elemente gemein. Im Folgenden werde zunächst vorausgesetzt, dass diese Geraden, welche die Asymptotenrichtungen des durch zwei entsprechende Strahlbüschel gebildeten Kegelschnitts bestimmen, reell seien. Es sei S der stets reelle, selbstentsprechende Punkt, u, v die selbstentsprechenden Geraden. Wird $A_1 N_1 \| A_2 N_2 \| u$ gezogen und entspricht N_1 dem Punkte N_2, so folgt, da in affinen Systemen das Verhältniss entsprechender Strecken für parallele Linien constant:

$$A_1 N_1 : A_2 N_2 = Const. = m.$$

Ebenso ergiebt sich für das Verhältniss zweier zu v parallelen, sich entsprechenden Strecken eine constante Zahl n. Die Verbindungslinie zwischen A_1 und A_2 schneide u in U, v in V, so wird

$$A_1 V : A_2 V = m, \quad A_1 U : A_2 U = n.$$

1) Die selbstentsprechenden Strahlen zweier affiner Systeme theilen die Verbindungslinie zweier beliebiger entsprechender Punkte nach festen Verhältnissen.

Das Product $m.n$ der beiden constanten Verhältnisse bedeutet das Flächenverhältniss zweier sich entsprechenden Parallelogramme, deren Seiten den selbstentsprechenden Geraden parallel laufen, also überhaupt das Verhältniss zweier sich in Σ_1 und Σ_2 entsprechenden Flächenräume.

Ist ausser dem System Σ_1 das System der sich selbst entsprechenden Geraden nebst den Theilungsconstanten m und n gegeben, so ist Σ_2

* Burmester, Kinematisch-geometrische Theorie der affin-veränderlichen etc. Systeme. Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XXIII, Heft 2.

eindeutig bestimmt. Zu jedem Punkte A_1 in Σ_1 gehört ein Punkt A_2 in Σ_2, der leicht als Schnitt zweier, den selbstentsprechenden Linien paralleler Geraden gefunden wird. Verschiebt man das System Σ_2 parallel zu sich selbst, so bleiben die sich selbst entsprechenden Richtungen und deren Verhältnisse ungeändert. Wird Punkt A_2 parallel zu u verschoben, gleitet der sich selbst entsprechende Punkt S auf v; verschiebt man A_2 parallel zu v, gleitet S auf u. Demnach kann durch passende Verschiebung längs beider Richtungen u und v, bezüglich längs der Resultante dieser beiden Verschiebungen, S jeden Ort der Ebene einnehmen.

Drehen wir ferner die affinen Systeme Σ_1 und Σ_2 beide um gleiche Winkel, so müssen sich diejenigen Richtungen, welche sich vor der Drehung selbst entsprachen, auch nach der Drehung selbst entsprechen. Im Zusammenhang mit dem Vorstehenden folgt hieraus:

2) Werden die starr gedachten Systeme Σ_1 und Σ_2 so bewegt, dass die Neigung entsprechender Linien ungeändert bleibt, so bleiben auch der Winkel und die Theilungsconstanten (m und n) der selbstentsprechenden Geraden der beiden affinen Systeme ungeändert. Ihr Schnittpunkt S kann hierbei durch passende Translation an jeden Punkt der Ebene gelangen.

Aus dem letzten Theile des Satzes folgt auch die Richtigkeit der Umkehrung:

3) Bleiben die Lagen einer Linie im System Σ_1 gegen die sich selbst entsprechenden Linien, wie deren zugehörige Theilungsconstanten ungeändert, so ändert sich das zu Σ_1 affine System Σ_2 nur der Lage, nicht der Grösse und Gestalt nach. Die Drehung des Systems Σ_2 ist der des Systems Σ_1 gleich und gleichgerichtet.

Eine Erweiterung erfährt der vorhergehende Satz für den speciellen Fall, dass Σ_1 und Σ_2 entgegengesetzt-ähnliche Systeme sind. In diesem Falle ist der Winkel der selbstentsprechenden Geraden beider Systeme ein rechter. Die selbstentsprechenden Geraden theilen jede Verbindungslinie entsprechender Punkte harmonisch, und das Verhältniss zweier beliebigen entsprechenden Strecken ist stets gleich dem Aehnlichkeitsverhältniss der beiden Figuren. Demnach wird, falls der Winkel der selbstentsprechenden Geraden ein rechter, und m gleich $-n$ ist, Σ_2 der Gestalt und Grösse nach ungeändert bleiben, auch wenn die Drehung für Σ_1 und das System der selbstentsprechenden Geraden eine verschiedene ist.

In den affinen Systemen Σ_1 und Σ_2 (Fig. 1) sollen den durch A_1 beliebig gezogenen Geraden A_1B_1 und A_1C_1 die Geraden A_2B_2 und A_2C_2 entsprechen. Entsprechende gerade Strecken affiner Systeme können als

§ 2.

Bisher wurde angenommen, dass die drei ähnlichen Systeme, welche zu den Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ gehören, sich in discreten Lagen befinden. Rücken diese Geraden unendlich nahe, so gehen unsere Sätze in solche über die stetige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems über, in welchem zwei Punkte, A_1 und A_2, affine Punktreihen k_1 und k_2 beschreiben. Die Sätze behalten auch für die stetige Bewegung ihre Geltung; und der Kreis w, welcher für discrete Lagen den zur Linie $A_1 A_2$ gehörigen Wendekreis bildet, ist dies auch für die stetige Bewegung. Der Wendepol, welcher bei der Bewegung eines beliebigen ähnlich-veränderlichen Systems eine Curve beschreibt, fällt in diesem Falle mit dem festbleibenden Affinitätspol zusammen. Alle Punkte des Kreises w beschreiben demnach gerade, durch den Punkt S laufende Linien. Die Umkehrung ergiebt sich nach Satz 1), § 1, als richtig: Sind die Trajectorien zweier Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems gerade Linien, so beschreiben alle Punkte in der Verbindungslinie der ersten Punkte affine Bahnen, deren selbstentsprechende Linien jene Geraden sind.

Der Wendekreis w fasst über der variablen Geraden UV, durch deren Endpunkte die Linien u und v beschrieben werden, stets denselben Winkel (u, v) dieser Geraden. Da also der Wendekreis über einer veränderlichen, sich entsprechenden Geraden stets den gleichen Winkel fasst, folgt:

7) **Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems affine Trajectorien, so setzt sich der Wendekreis in den verschiedenen Phasen aus denselben Punkten zusammen. Der Wendekreis ist also ein Systemkreis des ähnlich-veränderlichen Systems.**

Der Geschwindigkeitspol der Bewegung ist der zweite Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden Wendekreise. Demnach fällt die Polcurve mit dem Wendekreise zusammen.

Auch dieser Satz kann umgekehrt werden. Denn rollt ein ähnlich-veränderlicher Kreis über eine Curve und beschreibt jeder seiner Punkte in jedem Augenblick ein gerades Element, so haben die von den Punkten dieses Kreises beschriebenen Curven unendlich viele einander folgende Inflexionspunkte, sind also gerade Linien.

Der momentane, auf w liegende Pol der Geschwindigkeit sei P (Fig. 1), φ der momentane Geschwindigkeitswinkel. Da P die Gerade SP beschreibt, muss der Wendekreis die Gerade SP unter dem Geschwindigkeitswinkel schneiden. Daher steht die Tangente der vom Mittelpunkte O des Wendekreises beschriebenen Trajectorie zu SP normal. Der geometrische Ort für die Mitte der Linie SP ist demnach die Fusspunktcurve der vom Wendekreismittelpunkte beschriebenen Trajectorie in

Bezug auf S. Der geometrische Ort der Punkte P, also die Polbahn, ist dieser Fusspunktcurve ähnlich und ähnlich gelegen.

Durch die vorstehende Betrachtung, aus welcher sich eine einfache Construction des Geschwindigkeitspols ergiebt, folgt sehr anschaulich, dass die momentane Geschwindigkeit des Pols Null ist.

Wir stellen die in diesem Paragraphen zuletzt entwickelten Sätze nach ihrem Hauptinhalt zusammen.

8) Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems affine Punktreihen, so fällt die Polcurve mit dem Wendekreise zusammen. Die Polbahn ist zur Fusspunktcurve, welche der vom Wendekreismittelpunkte beschriebenen Trajectorie in Bezug auf den Affinitätspol angehört, ähnlich nach dem Verhältniss 2:1, und besitzt mit dieser Fusspunktcurve den Affinitätspol als Aehnlichkeitspol.*

In dem betrachteten ähnlich-veränderlichen System sind alle Trajectorien affin. Zum Beweise betrachte man die Bahnen zweier beliebigen Punkte Q_1 und Q_2 des Systems, für welche zunächst vorausgesetzt werde, dass ihre Verbindungslinie $Q_1 Q_2$ den Wendekreis w in R und T schneide. Die Punkte R und T der Geraden $Q_1 Q_2$ beschreiben bei der Bewegung gerade, durch S laufende Linien; und hiermit folgt aus der Constanz der Verhältnisse $Q_1 R : R Q_2$ und $Q_1 T : T Q_2$, dass Q_1 und Q_2 affine Punktreihen bilden. Schneidet $Q_1 Q_2$ den Wendekreis nicht, werden also die Linien SR und ST imaginär, beziehe man Q_1 und Q_2 auf einen beliebigen dritten Punkt innerhalb des Wendekreises.

9) Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems gerade Linien oder affine Punktreihen, so sind die Bahnen aller Punkte affin. Der Affinitätspol zweier beliebigen Bahnen ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt aller Wendekreise; die selbstentsprechenden Geraden dieser Bahnen und die Verbindungslinie der in ihnen bewegten Punkte schneiden sich auf dem Wendekreise.

---

* Der vorstehende Satz wurde bereits früher vom Prof. Th. Schönemann bemerkt. Vergl. dessen Abhandlung im Jahresbericht des Gymnasiums zu Brandenburg a. H.: Ueber die Bewegung veränderlicher ebener Figuren, welche während der Bewegung sich ähnlich bleiben in ihrer Ebene. 1862. In dieser bemerkenswerthen Arbeit, auf welche ich nach Einsendung der vorliegenden Abhandlung aufmerksam gemacht wurde, werden die Trajectorien eines ähnlich-veränderlichen Systems untersucht, in welchem zwei Punkte gerade Linien beschreiben. Obgleich dem Verfasser der Satz über die Affinität der durchlaufenen Curven entgeht, findet derselbe doch ausser dem schon bemerkten Satze 8) eine Beziehung zwischen den Inhalten entsprechender Flächenstücke der Trajectorien.

Wir werden im Folgenden die beiden affinen Curven k_1 und k_2, durch welche die Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems bestimmt wurde und welche wir durch beliebige andere Trajectorien ersetzen können, als **Grundcurven des ähnlich-veränderlichen Systems** bezeichnen.

Nach Satz 2) in § 1 werden die Neigung und die Theilungsconstanten der selbstentsprechenden Linien nicht gändert, wenn man k_1 und k_2 verschiebt oder um gleiche Winkel dreht. Den Punkten Q_1, Q_2 vor der Translation der Grundcurven entsprechen zwei Punkte nach derselben, welche in Bezug auf die neue Lage der Linie $A_1 A_2$ genau ähnliche Lage haben, wie die alten Punkte Q_1, Q_2 gegen die alte Lage der Linie $A_1 A_2$. Ist der Winkel der selbstentsprechenden Strahlen vor und nach der Translation der Grundcurven der gleiche, so sind die in beiden Lagen aus dem Wendekreise, der Strecke $A_1 A_2$ und $Q_1 Q_2$ gebildeten Figuren einander ähnlich. Daher folgt mit Rücksicht auf 3), § 1:

10) **Die in einem, durch zwei affine Grundcurven bestimmten, ähnlich-veränderlichen System beschriebenen Trajectorien bleiben der Gestalt und Grösse nach ungeändert, wenn man die Grundcurven verschiebt oder um gleiche Winkel dreht. Die beschriebenen Trajectorien drehen sich im letzten Falle um denselben Winkel.**

Damit die Punkte Q_1 und Q_2 ähnlich-entgegengesetzte (ungleichwendige) Punktreihen beschreiben, muss $\angle RST$ ein rechter, also $Q_1 Q_2$ ein Durchmesser des Wendekreises sein. Ferner muss RT durch die Punkte Q_1 und Q_2 harmonisch getheilt werden, also müssen Q_1, Q_2 reciproke Punkte in Bezug auf w sein.

11) **Die den Endpunkten eines Wendekreisdurchmessers zugeordneten harmonischen Punkte beschreiben ähnlich-entgegengesetzte Curven.**

Sind umgekehrt zwei entgegengesetzt-ähnliche Punktreihen k_1 und k_2 als Grundcurven eines ähnlich-veränderlichen Systems gegeben, so bleibt, da der von den selbstentsprechenden Linien der Grundcurven gebildete Winkel bei beliebigen Lagenänderungen der Grundcurven ein rechter bleibt, die aus dem Wendekreise, der Strecke $A_1 A_2$ und $Q_1 Q_2$ gebildete Figur bei den verschiedenen Lagen der Grundcurven sich ähnlich; also bleiben auch die Flächenverhältnisse der von beliebigen Punkten des Systems beschriebenen Trajectorien ungeändert.

12) **Die Flächenverhältnisse der Trajectorien, welche in einem, durch zwei ungleichwendig-ähnliche Punktreihen als Grundcurven bestimmten ähnlich-veränderlichen System beschrieben werden, sind von der Lage der Grundcurven unabhängig.**

Eine specielle Art ungleichwendig-ähnlicher bilden ungleichwendig-congruente Figuren. Bei letzteren fällt der sich selbst entsprechende Punkt S, der Situationspunkt ähnlicher Figuren, ins Unendliche; daher fällt auch eine der selbstentsprechenden Geraden ins Unendliche. Die zweite sich in allen Punkten selbstentsprechende Gerade halbirt die Verbindungslinien entsprechender Punkte in den congruenten Grundcurven. Die Mittelsenkrechte dieser Verbindungslinie giebt den zugehörigen Wendekreis, welcher, da er den unendlich entfernten Punkt S enthalten muss, in eine Gerade ausartet. Wird durch die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte ein ähnlich-veränderliches System bestimmt, so beschreiben nach der vorstehenden Entwickelung:

1. Zwei zur Mittelsenkrechten symmetrisch liegende Punkte ungleichwendig-congruente Punktreihen.
2. Die Punkte der Mittelsenkrechten beschreiben gerade Linien, welche der Symmetrieaxe der Grundcurven parallel laufen.
3. Die Trajectorien zweier beliebigen Punkte sind affin. Eine ihrer selbstentsprechenden Geraden fällt ins Unendliche; die zweite, parallel zur Symmetrieaxe der Grundcurven, schneidet die Verbindungslinie der betrachteten Punkte auf der den Wendekreis ersetzenden Mittelsenkrechten. —

Im Vorstehenden sind die allgemeinen Eigenschaften der Trajectorien derjenigen ähnlich-veränderlichen Systeme, in welchen affine Punktreihen beschrieben werden, entwickelt. Die Untersuchung der Hüllbahnen der in diesen Systemen vorkommenden Curven, speciell der, die Verbindungsgeraden homologer Punkte in affinen Systemen einhüllenden Enveloppen, gehört der allgemeinen Theorie ähnlich-veränderlicher Systeme als specieller Fall an. Der Berührungspunkt einer solchen Verbindungsgeraden wird erhalten, indem man vom momentanen Pol einen Leitstrahl zieht, welcher die Gerade (im Berührungspunkte) unter dem Geschwindigkeitswinkel trifft. Die Construction des Krümmungsradius ist leicht mit Hilfe des Rückkehrkreises auszuführen. Classe und Ordnung dieser Enveloppe bestimmt sich nach dem von Milinowski* entwickelten Satze: „Die Verbindungsgeraden homologer Punkte auf zwei Curven n'^{ter} Ordnung, welche sich in collinearen Systemen entsprechen, werden von einer Curve $2n'^{\text{ter}}$ Classe und $n(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung eingehüllt, welche jede der Grundcurven in $2n(n-1)$ Punkten berührt und die drei Geraden, welche in den collinearen Systemen sich selbst entsprechen, zu n'-fachen Tangenten hat.“ Diese selbstentsprechenden Geraden sind in dem speciellen Falle affiner Grundcurven die unendlich ferne Gerade und die beiden endlichen, selbstentsprechenden Linien der affinen Grundcurven. Ferner

* Crelle's Journal, Bd. 78 S. 175.

ergiebt sich aus dem in § 1 für die Construction des Pols hergeleiteten Satze:

13) **Damit der Geschwindigkeitswinkel bei der vorausgesetzten Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems Null werde, ist es nothwendig und hinreichend, dass der Pol der Bewegung mit dem Affinitätspol zusammenfalle.**

Der Mittelpunkt des Wendekreises fällt für diese Phasen mit den Berührungspunkten der Tangenten zusammen, welche sich vom Affinitätspol an den geometrischen Ort dieses Mittelpunktes legen lassen, und sämmtliche bewegte Geraden gehen gleichzeitig in die Asymptoten ihrer Hüllbahnen über.

§ 3.

Dem Entwickelten fügen wir einige Sätze, welche die Anwendung der früher entwickelten Formeln auf die specielle Art unserer Bewegung liefert, bei.

Nach den früheren Bezeichnungen* bedeutet:

$d\vartheta$ die momentane Drehung des ähnlich-veränderlichen Systems um den Geschwindigkeitspol;

φ den momentanen Geschwindigkeitswinkel;

du das Bogendifferential für Polcurve und Polbahn;

$\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ die Krümmungsradien dieser Curven;

$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ die Durchmesser des Wendekreises, des Rückkehrkreises und des ausgezeichneten Kreises (für welchen der Krümmungsradius der Punkttrajectorie gleich dem der berührenden Geradenenveloppe).

Rechnen wir alle hier erwähnten Linien nach der Richtung, welche der vom Pol aus betrachtete Krümmungsradius der Polcurve hat, als positiv, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_1}-\frac{1}{\mathfrak{R}_2}=\sin\varphi\,.\,\frac{d\vartheta}{du}=\frac{\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_1}-\frac{1}{\mathfrak{D}_2}\right),$$

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_1}=\frac{d\vartheta-d\varphi}{du},\quad \frac{1}{\mathfrak{D}_2}=\frac{-d\vartheta-d\varphi}{du}.$$

Für die hier betrachteten Systeme fällt die Polcurve mit dem Wendekreise zusammen, ist also

$$\mathfrak{D}_1=2\mathfrak{R}_1.$$

Sind demnach der Geschwindigkeitswinkel und die Krümmungsradien für Polcurve und Polbahn gegeben, so ist aus den vorstehenden Gleichungen $\frac{du}{d\vartheta}$ und $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$ zu entwickeln, also hiermit auch $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_3$ gegeben.

---

* Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XXIV S. 129 flgg.

Nach Satz 8 in § 2 ist die Polbahn zu der Fusspunktcurve, welche der vom Wendekreismittelpunkte beschriebenen Curve in Bezug auf den Affinitätspol angehört, ähnlich. Wir drücken den Krümmungsradius ϱ der vom Mittelpunkte des Wendekreises beschriebenen Trajectorie im Folgenden aus. Nach den früher entwickelten Formeln ist allgemein

$$\varrho = \frac{r}{\sin\varphi\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{du}{r\,d\vartheta}\,.\,\sin\alpha\right)}.$$

Hier bedeutet r den Leitstrahl des betrachteten Punktes, α den Winkel dieses Leitstrahls mit der Poltangente. Für den Mittelpunkt O des Wendekreises wird der Leitstrahl r gleich dem Radius $\mathfrak{R}_1$ des Wendekreises, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, daher

$$\varrho = \frac{\mathfrak{R}_1}{\sin\varphi\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{du}{\mathfrak{R}_1\,.\,d\vartheta}\right)}.$$

Da $\dfrac{\frac{du}{d\vartheta}}{1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}} = 2\mathfrak{R}_1$, folgt

$$1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta} - \frac{du}{\mathfrak{R}_1\,.\,d\vartheta} = -\frac{1}{2\mathfrak{R}_1}\,.\,\frac{du}{d\vartheta}$$

und

$$\varrho = -\frac{2R_1^2}{\sin\varphi\,.\,\frac{du}{d\vartheta}} = -\frac{2\mathfrak{R}_1^2}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} - \frac{1}{\mathfrak{R}_2}\right) = \frac{2\mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2)}{\mathfrak{R}_2\,.\,\sin\varphi}.$$

Bezeichnet man den Krümmungsradius der zu der Polbahn ähnlichen, durch die Mitte E der Sehne SP gehenden Fusspunktcurve mit ϱ_1, so kommt, da $\varrho_1 = \frac{\mathfrak{R}_2}{2}$,

$$\varrho = \frac{\mathfrak{R}_1\,.\,(\mathfrak{R}_1 - 2\varrho_1)}{\varrho_1\,.\,\sin\varphi}. \tag{14}$$

Da die vom Wendekreismittelpunkte beschriebene Curve, wie der Affinitätspol beliebig gewählt werden können, stellt die entwickelte Formel eine allgemeine Beziehung dar, welche zwischen dem Krümmungsradius ϱ in einem Punkte einer beliebigen Curve und dem Krümmungsradius ϱ_1 im entsprechenden Punkte der zugehörigen Fusspunktcurve besteht.

$\mathfrak{R}_1$ bedeutet die Entfernung des betrachteten Curvenpunktes O vom Pol S der Fusspunktcurve, φ den Winkel dieser Geraden OS mit der Curve. Nach der Herleitung der Formel bedeutet ferner ϱ den nach P hin gerichteten Krümmungsradius der zum Punkte O gehörigen Curve, ϱ_1 den nach der Richtung PO als positiv gerechneten Krümmungsradius der durch E gehenden Fusspunktcurve. Aus Fig. 1 ergiebt sich weiter, da die Tangente der Fusspunktcurve in E der Poltangente durch P parallel läuft:

15) **Der durch den Pol der Fusspunktcurve und die sich entsprechenden Punkte der Curve und ihrer Fusspunktcurve gelegte Kreis berührt die letztere.**

Demnach sind Richtung und Krümmung einer Fusspunktcurve in einfacher Weise durch die entsprechenden Grössen der Grundcurve bestimmt.

Die bisher aufgestellten Gesetze wurden unter der Voraussetzung gefunden, dass sich die, die Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems bestimmenden affinen Grundcurven k_1 und k_2 in beliebiger, nicht perspectivischer Lage befinden. Wir wenden uns zur Discussion des wichtigen Specialfalles, in welchem die Grundcurven k_1 und k_2 affine Punktreihen in affiner Lage sind. (Fig. 2.) Da hier die das ähnlich-veränderliche System bestimmende Gerade $A_1 A_2$ ein parallel zu sich selbst fortschreitender Affinitätsstrahl ist, wird $d\vartheta = 0$ und $d\varphi = 0$. Polbahn und Polcurve fallen mit der Affinitätsaxe g zusammen, und der momentane Pol der Bewegung ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt P der in A_1 und A_2 an die Grundcurven gelegten Tangenten t_1 und t_2 mit der Affinitätsaxe. Die Bewegung ist eine beständig gleitende, Wende- und Rückkehrkreis fallen ebenfalls mit der Affinitätsaxe zusammen. Für den Krümmungsradius einer Trajectorie findet sich

$$\varrho = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \frac{ds}{du},$$

wo ds das Bogendifferential der Trajectorie. Nennen wir die momentane Verlängerung des ähnlich-veränderlichen Systems für die Längeneinheit $d\lambda$, wird

$$\varrho = \frac{r^2}{\frac{du}{d\lambda} \cdot \sin\alpha}.$$

Die Krümmungsradien der Grundcurven k_1 und k_2 in den Punkten A_1 und A_2 seien ϱ_1 und ϱ_2. Es ist

$$\varrho_1 = \frac{t_1^2}{\frac{du}{d\lambda} \cdot \sin\alpha_1}, \quad \varrho_2 = \frac{t_2^2}{\frac{du}{d\lambda} \cdot \sin\alpha_2}.$$

Da $\frac{du}{d\lambda}$ eine Constante, folgt

16) $$\varrho_1 : \varrho_2 = \frac{t_1^2}{\sin\alpha_1} : \frac{t_2^2}{\sin\alpha_2}.$$

Diese wichtige Formel ist verschiedener Umformungen fähig. Der Schnittpunkt des Affinitätsstrahls $A_1 A_2$ mit der Abscissenaxe sei $\mathfrak{A}$; so wird

$$\sin\alpha_1 = \frac{\mathfrak{A} A_1}{t_1} \sin(A_1 \mathfrak{A} P), \quad \sin\alpha_2 = \frac{\mathfrak{A} A_2}{t_2} \sin(A_2 \mathfrak{A} P).$$

Eliminirt man $\sin\alpha_1$ und $\sin\alpha_2$, so folgt

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \frac{t_1^3}{\mathfrak{A} A_1} : \frac{t_2^3}{\mathfrak{A} A_2}.$$

Das Verhältniss $\frac{\mathfrak{A} A_1}{\mathfrak{A} A_2}$ ist jedoch das constante Affinitätsverhältniss der Grundcurven k_1 und k_2. Bezeichnen wir dasselbe mit f, so folgt

17) $$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 . \frac{1}{f}.$$

Das Verhältniss der Krümmungsradien entsprechender Punkte in affinen Curven ist gleich dem Cubus aus dem Verhältnisse der entsprechenden Tangentenstrecken, dividirt durch das Affinitätsverhältniss.

Wird aus Formel 17) t_1 und t_2 weggeschafft, folgt

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\right)^3 . f^2.$$

Die bisherigen Resultate gelten nur für die Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme, welche zwei affine Punktreihen als Grundcurven beschreiben. Für unendlich kleine Bewegungen, bei welchen wir nur Grössen erster Ordnung berücksichtigen, können wir aber die auf beliebigen Grundcurven zurückgelegten Strecken als affin betrachten. Die beiden affinen Systeme Σ_1 und Σ_2, in welchen sich die auf den Grundcurven durchlaufenen unendlich kleinen Wege als affine Strecken entsprechen und durch welche momentan die Bewegung des Systems gegeben ist, sind durch den Wendepol als momentanen Affinitätspol und durch die als affin angesehenen unendlich kleinen Strecken der Grundcurven bestimmt. Die für Systeme mit affinen Grundcurven hergeleiteten Gesetze gelten demnach auch für die unendlich kleinen Bewegungen beliebiger ähnlich-veränderlicher Systeme, und gewinnt hierdurch speciell der Wendekreis eine neue geometrische Bedeutung.

Bestimmt man aus Gleichung 17) das Affinitätsverhältniss f, so ist hiermit die für die Theorie der Osculationen beachtenswerthe Aufgabe gelöst: **Für zwei gegebene Curvenelemente, welche als affin in perspectivischer Lage angesehen werden sollen, die Affinitätsaxe so zu bestimmen, dass die Abweichungen im Laufe der Curven von höherer als zweiter Ordnung werden.**

§ 4.

Die gefundenen Sätze und Constructionen werden im Folgenden verwendet werden, um die Eigenschaften solcher ähnlich-veränderlicher Systeme zu finden, in welchen die Trajectorien affine Gerade oder Kegelschnitte sind.

Es seien (Fig. 3) g_1 und g_2 zwei affine gerade Linien; die ähnlich-veränderliche Gerade sei der Affinitätsstrahl $A_1 A_2$. Nach 9) folgt:

18) **Jeder Punkt des ähnlich-veränderlichen Systems beschreibt eine zu g_1 und g_2 affine gerade Punktreihe.**

Es sei P der Aehnlichkeitspunkt der beiden affinen Geraden g_1 und g_2; die Bahn, welche ein mit $A_1 A_2$ bewegter Punkt Q beschreibt, wird nach dem Früheren gefunden, indem man den Leitstrahl PQ zieht und an diesen in Q den Geschwindigkeitswinkel φ anträgt. Alle Geraden werden affin verlaufen; die Geschwindigkeiten beliebiger Systempunkte haben also ein festes Verhältniss, nämlich das ihrer Leitstrahlen aus P.

19) **Der Aehnlichkeitspol P bleibt demnach in Ruhe.**

Der Affinitätsstrahl $A_1 A_2$ umhüllt bei seiner Bewegung eine Parabel, deren Brennpunkt P ist. Rückt $A_1 A_2$ ins Unendliche, so wird diese Gerade dem Durchmesser der Parabel parallel. Wenn wir einen beliebigen Punkt O der Ebene mit den unendlich weit gerückten Systempunkten A_1, A_2 und Q verbinden, erhalten wir drei zu g_1, g_2 und der von Q beschriebenen Geraden q parallele Linien OG_1, OG_2, OQ'. Zu dem unendlich fernen Dreieck $A_1 A_2 Q$ lässt sich ein ähnliches construiren, dessen Ecken auf den ebenerwähnten, durch O gehenden Parallelen liegen. Hieraus ergiebt sich folgende einfache Construction der von einem Punkte Q beschriebenen Geraden:

Ziehe $G_1 G_2$ parallel dem Durchmesser der von $A_1 A_2$ umhüllten Parabel, bilde $\triangle G_1 G_2 Q' \sim \triangle A_1 A_2 Q$, so ist die Bahn q des Punktes Q parallel OQ'.

Diese Construction hätte auch aus Satz 10) abgeleitet werden können, indem man die Geraden g_1 und g_2 parallel mit sich selbst so lange verschiebt, bis zwei entsprechende Punkte in O zusammenfallen.

Da die Hüllbahn der bewegten Geraden $A_1 A_2$ auch die Bahnen ihrer Punkte umhüllen muss, folgt, dass die Bahnen dieser Punkte Tangenten an die von $A_1 A_2$ umhüllte Parabel, also wieder Affinitätsstrahlen sind. Jeder Affinitätsstrahl ist einer entsprechenden, durch O gelegten Geraden parallel.

In eine weitere Discussion der Beziehungen, welche zwischen den bei dieser Bewegung beschriebenen geraden Trajectorien herrschen, werden wir nicht eingehen. Dieselbe wurde bereits von Burmester* geführt, dessen Bezeichnungen im Folgenden angewendet werden. Burmester nennt diese Bewegungsform eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die *geradlinige* Bewegung desselben und die Geraden, auf welchen sich die Systempunkte bewegen, die *Bahngeraden*. Im Folgenden werden wir uns vorzugsweise mit den Krümmungsverhältnissen der Hüllbahnen beschäftigen.

Da P beständig der Pol der Bewegung bleibt, ist $du = 0$. Aus der Figur ergiebt sich $d\varphi = d\vartheta$. Daher wird der Durchmesser des Rückkehr-

---

* Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XIX Heft 2.

kreises und ebenso der Durchmesser des ausgezeichneten Kreises gleich Null. Für den Durchmesser des Wendekreises folgt

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{du}{d\vartheta - d\varphi} = \mathfrak{g}.$$

20) Polbahn, Rückkehrkreis und ausgezeichneter Kreis degeneriren in einen Punkt, den Pol der Bewegung. Jeder durch den Pol gelegte Kreis kann als Wendekreis betrachtet werden.

Der Krümmungsradius der beschriebenen Trajectorie ergiebt sich nach der früher entwickelten Formel:

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta} + \frac{d\varkappa}{d\vartheta}} = \infty,$$

also ist die Trajectorie eine Gerade.

Für die Hüllbahn einer beliebigen Geraden, also für den Krümmungsradius der von ihr beschriebenen Parabel folgt

$$\varrho_e = \frac{ds}{d\vartheta}\left(1 + \frac{d\varphi}{d\vartheta} + \frac{d\varkappa}{d\vartheta}\right) = 2\frac{ds}{d\vartheta} = 2\frac{r}{\sin\varphi}.$$

21) Die Krümmungsmittelpunkte der umhüllten Parabelelemente bilden in jeder Phase ein zum System der Gleitpunkte ähnliches System.

Aus der für ϱ_e entwickelten Grösse sind die gebräuchlichen Formeln für die Krümmung der Parabel leicht herzuleiten.

In Fig. 4 sei k eine beliebige Curve des geradlinig bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems. Die Bahngerade eines Punktes Q bildet in jeder Phase mit dem Leitstrahl einen für alle Systempunkte constanten Winkel, den Geschwindigkeitswinkel φ. Die Hüllbahn der ähnlich-veränderlichen Hüllcurve k sei $\varkappa$; $\varkappa$ muss also die Bahngerade t in einem Punkte Q' berühren. Um diesen Punkt Q' zu finden, legen wir in Q die Tangente an k, welche mit dem Leitstrahl den Winkel τ bilden möge. Wenn sich Q nach Q' bewegt hat, muss auch die entsprechende Phase k' von k die Bahngerade t berühren; und da alle Phasen von k den Geschwindigkeitspol P als Aehnlichkeitspol besitzen, folgt, dass auch PQ' mit t den Winkel τ bildet. Demnach bestimmt sich Q' nach folgendem Satze:

22) Der durch einen Punkt der Hüllcurve, durch den Berührungspunkt der zugehörigen Bahngeraden und durch den Pol gelegte Kreis berührt die Hüllcurve.

Der Krümmungsradius der Hüllcurve k im Punkte Q werde mit ϱ_c, der Krümmungsradius der Hüllbahn $\varkappa$ in Q' mit ϱ_e, die bezüglichen Krümmungsmittelpunkte mit M und O' bezeichnet. Wird k wieder bis zur eben betrachteten Phase k' bewegt, so geht Q nach Q', M nach M'.

Die dem Krümmungsradius ϱ_c in der zweiten Phase entsprechende Strecke $M'Q'$ werde mit ϱ'_c benannt. Nach früheren Formeln ist*

$$\varrho_e = \frac{\varrho'^2_c - PM'^2}{\varrho'_c \sin^2\tau}, \quad \varrho'_c = \varrho_c \frac{\sin\varphi}{\sin\tau}, \quad PM' = PM \frac{\sin\varphi}{\sin\tau};$$

daher wird

$$\varrho_e = \frac{\varrho^2_c - PM^2}{\varrho_c \,.\, \sin^3\tau} \,.\, \sin\varphi = \frac{r(2\varrho_c \sin\tau - r)}{\varrho_c \,.\, \sin^3\tau} \,.\, \sin\varphi.$$

Der Radius des vorhin erwähnten, durch P, Q und Q' gelegten Kreises sei R; so wird

23) $$\varrho_e = -4 \frac{R(R-\varrho_c)}{\varrho_c} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\tau}.$$

Die vorstehende Gleichung stellt eine allgemeine Beziehung zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte in Hüllbahn und Hüllcurve dar.

Wird der Geschwindigkeitswinkel φ ein rechter, so geht die Hüllcurve k in die Fusspunktcurve der Hüllbahn $\varkappa$ über; Formel 23) stimmt alsdann mit der unter 14) entwickelten Relation überein.

Setzt man $\varrho_e \cdot \frac{\sin\tau}{\sin\varphi} = a$, so findet man nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{2R - \varrho_c} = \frac{1}{2} \frac{R + \left(R - \frac{a}{2}\right)}{R \,.\left(R - \frac{a}{2}\right)}.$$

Um die Bedeutung dieser Formel zu erkennen, bilden wir über PO' ein Dreieck $POO' \sim \triangle PQQ'$ und legen durch P, O und O' einen zweiten Kreis. Da P der Aehnlichkeitspol der beiden Dreiecke, ist OQ homolog $O'Q'$, also die Verlängerung der Normalen QM, in welcher auch der zweite Schnittpunkt N beider Kreise liegt. Die Mittelpunkte dieser Kreise seien C und C_1, die Mitte der Sehne NO sei D. Es ist

$$a = \varrho_e \frac{\sin\tau}{\sin\varphi} = QO,$$

daher

$$R - \frac{a}{2} = ND, \quad 2R - \varrho_c = NM,$$

demnach

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ND} + \frac{1}{NC}\right).$$

24) Die Punkte N und M werden durch die Punkte C und D harmonisch getheilt.

Mit Hilfe dieses Satzes ist es leicht, aus dem Krümmungsradius der Hüllcurve (Fusspunktcurve) k den der Hüllbahn (Berührungscurve) $\varkappa$ zu

* Vergl. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. XXIV, Heft 3 S. 151, wo gefunden wurde

$$\varrho_e \,.\, \sin\varphi = \frac{r \,.\, \varrho_c (d\vartheta - d\varphi - d\varkappa) \sin\varphi + (r_1^2 - \varrho_c^2) \,.\, d\vartheta}{r(d\vartheta - d\varphi - d\varkappa) - \varrho_c \sin\varphi \,.\, d\vartheta}.$$

finden und umgekehrt. Diese Beziehung, welche zwischen einer Curve und ihrer Hüllbahn bei der geradlinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems herrscht, lässt sich auf den Zusammenhang zwischen dieser Hüllbahn und ihrer Fusspunktcurve zurückführen. Denn die Fusspunkte der von P auf die Bahngeraden t gefällten Senkrechten bilden eine zu k ähnliche Curve.

25) Die zur Hüllbahn einer geradlinig bewegten, ähnlich-veränderlichen Curve in Bezug auf den Pol der Bewegung gebildete Fusspunktcurve ist der Hüllcurve ähnlich.

Die für denselben Pol, aber mit verschiedenem Winkel φ erhaltenen Hüllbahnen sind hiernach einander ähnlich. Sind umgekehrt zwei ähnliche Curven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gegeben (Fig. 5) und werden in den homologen Punkten Q' und Q'' die Tangenten t' und t'' gelegt, welche sich in Q schneiden, so bildet der Aehnlichkeitspol P von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mit Q, Q' und Q'' ein Kreisviereck. Die von P auf t' gefällte Senkrechte schneide in T. Da $\angle TQP = \angle Q'Q''P$, also constant ist, folgt, dass Q und T ähnliche Punktreihen beschreiben. Hiernach ergiebt sich als Umkehrung von 25:

26) Der geometrische Ort der Schnittpunkte für die entsprechenden Tangenten gleichwendig-ähnlicher Curven ist den Fusspunktcurven der letzteren in Bezug auf ihren Aehnlichkeitspol ähnlich.*

Die letztgefundenen Sätze gestatten in manchen Fällen eine einfache Bestimmung des Krümmungsradius. So ist (Fig. 6) für die Ellipse die Fusspunktcurve in Bezug auf den Brennpunkt P ein Kreis. Der Berührungskreis dieser Fusspunktcurve geht in den Kreis über, welcher über dem Brennstrahl PQ' als Durchmesser geschlagen wird. Der Krümmungsradius ϱ_e der Ellipse ergiebt sich nach der Formel

$$\varrho_e = \frac{\varrho^2{}_c - PM^2}{\varrho_c \sin^3 \tau} . \sin\varphi;$$

da $\sin\varphi = 1$, $\varrho_c = a$, $PM = e$, kommt

$$\varrho_e = \frac{b^2}{a \sin^3 \tau},$$

eine bekannte Formel.

Im vorstehenden Beispiel war ϱ_e constant. Ist die Hüllbahn ein Kreis, so folgt, dass k eine Pascal'sche Curve wird. Man beachte in Fig. 4 den Schnittpunkt T von PQ mit dem durch P, O und O' gelegten Kreise. Da $\angle QPN = 1\text{R}$, folgt, dass NT Durchmesser dieses Kreises ist, und hieraus, dass $O'T \parallel QQ'$ und $QT = \frac{\varrho_e}{\sin\varphi}$. Ist also ϱ_e constant, so wird k eine Pascal'sche Curve, deren Grundkreis der obenerwähnte Kreis ist, welcher über PQ' den Winkel φ fasst. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, zu jedem Punkte der Pascal'schen

* Von Grouard gefunden.

Curve Tangente und Krümmung zu bestimmen. Ist Q' ein beliebiger Punkt der Hüllbahn, welche in diesem speciellen Falle ein Kreis mit dem Radius ϱ_e wird, und legt man über PQ' einen den constanten Winkel φ haltenden Kreis, so berührt dieser die Pascal'sche Curve. Der Berührungspunkt liegt auf der in Q' an die Hüllbahn gezogenen Tangente t. Den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt Q der Curve findet man nach Satz 24) als vierten harmonischen Punkt zu D, N und C.

§ 5.

Wir schreiten zur Betrachtung eines ähnlich-veränderlichen Systems, in welchem zwei und daher alle Systempunkte affine Hyperbeln beschreiben. (Fig. 7.)

Die beiden Hyperbeln, von welchen wir als Grundcurven ausgehen, denken wir uns jede mit ihren Asymptoten und Durchmessern zu einem System verbunden. Da sich in affinen Hyperbeln die Mittelpunkte und Asymptoten entsprechen, folgt nach Satz 10) und 18):

27) Das System der Mittelpunkte der beschriebenen Hyperbeln bildet eine zum bewegten System ähnliche Phase.

28) Die Asymptoten der beschriebenen Hyperbeln werden als die Bahngeraden der Mittelpunkte für zwei bestimmte geradlinige Bewegungen erhalten.

Nach den Entwickelungen des vorigen Abschnittes hat der Pol bei der geradlinigen Bewegung eine feste Lage. Die festen, zu den beiden Systemen der Asymptoten gehörigen Pole seien P_1 und P_2.

Da die sich entsprechenden Durchmesser zweier affinen Hyperbeln entsprechende Strahlen eines Büschels in affinen Systemen bilden, folgt weiter nach Satz 4) und 18):

29) Entsprechende Durchmesser der beschriebenen Hyperbeln bilden die Bahngeraden der Mittelpunkte für eine bestimmte geradlinige Bewegung. Die Pole der den verschiedenen Durchmessern einer Trajectorie entsprechenden geradlinigen Bewegungen bilden eine Kreislinie.

Diese Kreislinie w, welche auch die Pole P_1 und P_2 enthält, bezeichnen wir als die mittlere Phase des Wendekreises der Bewegung; sie enthält also die Aehnlichkeitspole der sich entsprechenden Durchmesser. Aus den Eigenschaften conjugirter Durchmesser und aus Satz 4) folgt sofort:

30) Zu conjugirten Durchmessern gehören Pole, welche P_1P_2 harmonisch theilen.

Die Pole conjugirter Durchmesser bilden also eine kreislinige hyperbolische Involution.

Die beiden Asymptoten einer Trajectorie bilden mit den Linien, welche ihren Mittelpunkt mit den zugehörigen Polen P_1 und P_2 verbinden, bezüglich feste Winkel. Nach Satz 4) fasst die Kreislinie w über P_1P_2 die Differenz dieser Winkel, und hieraus folgt, dass w auch der geometrische Ort derjenigen Mittelpunkte ist, deren beide Asymptoten zusammenfallen, für welche also die Trajectorie in eine Gerade übergeht. Alle im System beschriebenen Geraden gehen durch einen festen Punkt S auf w, den Affinitätspol der affinen Hyperbeln. S werde mit P_1 und P_2 verbunden. Zum Mittelpunkte O des Kreises w gehört ebenfalls eine Hyperbel; und aus den elementaren Sätzen des Kreises ergiebt sich, dass die Asymptoten derselben senkrecht zu SP_1 und SP_2 stehen. Die Mitten der Abschnitte, welche die verschiedenen Phasen des momentanen Wendekreises auf SP_1 und SP_2 abschneiden, werden also erhalten, indem man aus den Punkten dieser zu O gehörigen Hyperbel die Senkrechten auf SP_1 und SP_2 fällt. Diese Senkrechten bilden jedoch zwei projectivische Parallelstrahlbüschel. Daher sind auch die Punktreihen, welche sie auf SP_1 und SP_2 hervorrufen, und daher auch die Endpunkte der verdoppelten, auf SP_1 und SP_2 gebildeten Abschnitte, d. h. die Schnittpunkte des Wendekreises in seinen verschiedenen, wirklich durchlaufenen Phasen mit SP_1 und SP_2, projectivisch. Dem Punkte P_1 in SP_1 entspricht hierbei der unendlich ferne Punkt von SP_2, und umgekehrt dem Punkte P_2 der unendlich ferne Punkt in SP_1.

31) In dem betrachteten ähnlich-veränderlichen System bestehen stets zwei Gerade, welche **collinear** durchlaufen werden, nämlich die Geraden SP_1 und SP_2. Die Punkte P_1 und P_2 sind die Gegenpunkte dieser collinearen Punktreihen.

Der vorstehende Satz lässt sich umkehren. Sind g_1 und g_2 zwei gerade Linien, welche von zwei Systempunkten eines ähnlich-veränderlichen Systems collinear durchlaufen werden, so bilden die in den Mitten entsprechender Abschnitte SA_1 und SA_2 errichteten Senkrechten projectivische Parallelstrahlbüschel. Der Mittelpunkt des Wendekreises beschreibt also die Schnittcurve dieser Büschel, eine Hyperbel; und demnach beschreibt jeder Systempunkt eine affine Hyperbel. Die betrachtete Art der Bewegung ist also durch zwei beliebige projectivische Geraden g_1 und g_2 bestimmt.

32) Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems zwei projectivische gerade Linien, so werden die Trajectorien des Systems zu Hyperbeln.

Zwei beliebige, sich entsprechende Punkte der projectivischen Geraden g_1 und g_2 seien A_1 und A_2. Wenn die Linie A_1A_2 in die Lage P_1P_2 gebracht wird, fällt jeder mit A_1A_2 verbundene Punkt des ähnlich-veränderlichen Systems in den Mittelpunkt der von diesem Punkte beschriebenen Hyperbel. Hiernach sind Mittelpunkt und Asymptoten der von einem beliebigen Punkte beschriebenen Curve zu construiren.

Zur Bestimmung des momentanen Pols der Bewegung können verschiedene Wege eingeschlagen werden:

1. Man bestimme den Berührungspunkt T der Linie $A_1 A_2$ mit dem sie einhüllenden Kegelschnitte, lege durch T und A_1 einen die Gerade g_1, durch T und A_2 einen die Gerade g_2 berührenden Kreis. Der zweite Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist der Pol P.

2. In A_1 und A_2 legen wir an den momentanen Wendekreis w_1, in P_1 und P_2 an den mittlern Wendekreis w die Tangenten. Dieselben schneiden sich in je zwei homologen Punkten Z_1 und Z. Punkt Z_1 beschreibt bei der Bewegung mit der Linie $A_1 A_2$ eine Hyperbel, deren Mittelpunkt Z ist und deren Asymptoten nach Satz 28) mit g_2 und g_1 parallel laufen.

Für die betrachtete Phase der Bewegung werde der Aehnlichkeitspol derjenigen Durchmesser d_μ, deren Endpunkte eben passirt werden, mit P_μ, der den conjugirten Durchmessern d_ν angehörende mit P_ν bezeichnet. P_μ ist also auch der Aehnlichkeitspunkt der auf den collinearen Geraden zurückgelegten Durchmesserstrecken $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$ (denn P_1 und P_2 sind als Mittelpunkte von g_1 und g_2 zu betrachten). Demnach ist P_μ der zweite Schnittpunkt von w und w_1.

Da Z das Involutionscentrum der auf w von den Aehnlichkeitspolen gebildeten Involution ist, wird P_ν im zweiten Schnittpunkte der Geraden ZP_μ mit w erhalten. Der momentane Pol der Bewegung ist der Aehnlichkeitspol der mit d_ν parallelen und proportionalen Hyperbeltangenten. Der Aehnlichkeitspol P dieser Tangenten und der Aehnlichkeitspol P_ν der ihnen parallelen Durchmesser d_ν liegt nach § 1 auf einer durch den Affinitätspol S laufenden Geraden. Der Pol P ist also der Schnittpunkt von SP_ν mit w_1.

Da sich die Kreise w und w_1 als ähnliche Systeme betrachten lassen, deren Aehnlichkeitspol P_μ ist und in welchen sich Z und Z_1 als homologe Punkte entsprechen, folgt, dass P der dem Punkte P_ν homologe Punkt auf w_1 ist. Wir erhalten hiernach folgende einfache Construction des momentanen Geschwindigkeitspols:

Suche den Schnittpunkt P_μ von w und w_1 und verbinde P_μ mit Z_1. Der zweite Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit w_1 ist der Pol P.

3. Der Geschwindigkeitspol lässt sich auch als der Aehnlichkeitspol der unendlich kleinen Strecken auffassen, welche A_1 und A_2 momentan auf g_1 und g_2 zurücklegen werden. Nennen wir dieselben s_1 und s_2, so folgt aus den Eigenschaften der collinearen Linien für ihre Gegenpunkte:

$$(P_1 A_1 + s_1)(P_2 A_2 + s_2) = P_1 A_1 \,.\, P_2 A_2, \quad \lim \frac{s_1}{s_2} = -\frac{P_1 A_1}{P_2 A_2}.$$

Der Geschwindigkeitspol ergiebt sich hiernach auch als der Aehnlichkeitspol zwischen $P_1 A_1$ und der nach entgegengesetzter Richtung genommenen Strecke $P_2 A_2$.

Der Aehnlichkeitspol zwischen $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$ war P_μ. Da P_μ, A_1, P, A_2 vier harmonische Punkte bilden, ergiebt sich folgender Satz:

33) Die Aehnlichkeitspole einer Geraden mit zwei von einem Punkte (A_2) auslaufenden gleichen, aber entgegengesetzten Strecken bilden mit diesem und dem homologen Punkte (A_1) vier harmonische Punkte eines Kreises, welcher durch den Schnittpunkt der ähnlichen Strecken geht.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner nach 1. eine einfache Construction, um den Berührungspunkt der Geraden $A_1 A_2$ mit dem sie einhüllenden Kegelschnitte zu erhalten, nachdem der Geschwindigkeitspol P nach der in 2. oder 3. hergeleiteten Methode gefunden ist. —

Es seien (Fig. 7) P_μ und P_ν ein Paar involutorischer Punkte auf w; die Winkel, welche ein Durchmesser d_μ mit dem Leitstrahl des zugehörigen Hyperbelmittelpunktes M nach P_μ macht, sei μ, der Winkel des conjugirten Durchmessers d_ν mit dem Leitstrahl MP_ν sei ν. Da SP_μ und SP_ν als Grenzen dieser Durchmesser zu betrachten sind, folgt $\angle SP_\nu P_\mu = \mu$ und $\angle SP_\mu P_\nu = \nu$. Der Winkel der zum Mittelpunkte M gehörigen Durchmesser d_μ und d_ν sei λ, ferner $\angle P_\nu SP_\mu = \delta$, $\angle P_\mu MP_\nu = \varkappa$. Aus Fig. 7 folgt

$$\nu - \lambda + \mu = \varkappa,$$

und da $\mu + \nu = 180 - \delta$, wird

$$180 - \delta - \varkappa = \lambda.$$

34) Der geometrische Ort derjenigen Mittelpunkte, deren den Punkten P_μ und P_ν entsprechende conjugirte Durchmesser einen constanten Winkel λ bilden, ist hiernach ein Kreis m durch P_μ und P_ν, welcher über diese Punkte den Winkel $\varkappa = 180 - \delta - \lambda$ fasst und den Wendekreis der mittlern Phase unter dem Winkel λ der Durchmesser schneidet.

Alle Durchmesser d_μ und d_ν bilden die Strahlen zweier Strahlbüschel, deren Mittelpunkte R_μ und R_ν auf m liegen; nämlich der Mittelpunkt R_μ des aus den d_μ gebildeten Strahlbüschels in SP_ν, der Mittelpunkt R_ν des aus den d_ν gebildeten Strahlbüschels in der Verlängerung von SP_μ. Jeder Durchmesser in einer der beschriebenen Hyperbeln ist dem Leitstrahl des Mittelpunktes nach dem Aehnlichkeitspol dieses Durchmessers proportional. Von den zu zwei conjugirten Durchmessern d_μ und d_ν gehörigen Aehnlichkeitspolen P_μ und P_ν ergiebt sich stets der eine (in Fig. 7 P_μ) als Schnittpunkt der Wendekreise w und w_1. Da dieser Punkt Aehnlichkeitspol der Strecken $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$, besitzen die diesem

Pole entsprechenden Durchmesser reelle Schnittpunkte mit ihrer Hyperbel. Alle Durchmesser mit reellen Schnittpunkten gehen also durch R_μ. Die Gerade $SP_\mu P$ ist hiernach als eine Hyperbel aufzufassen, deren reelle Axe, die Gerade $SP_\nu P$ als eine Hyperbel, deren imaginäre Axe zu Null geworden.

Im Folgenden werde der Winkel λ der conjugirten Durchmesser d_μ und d_ν ein rechter; die Durchmesser d_μ und d_ν bilden also die Axen der beschriebenen Hyperbeln, und m schneidet w orthogonal. R_μ und R_ν bilden die Endpunkte eines Durchmessers von m. Die Linien $P_\mu R_\mu$ und $P_\nu R_\nu$ schneiden sich, da die Winkel $SP_\mu R_\mu$ und $SP_\nu R_\nu$ rechte sind, im Gegenpunkte S_1 von S auf w. Der Schnittpunkt von SS_1 und $P_\mu P_\nu$ sei R; aus den Eigenschaften des Vierseits folgt, dass Linie $R_\mu R_\nu$ die Polare von R in Bezug auf w ist. Demnach steht die Linie $R_\mu R_\nu$ senkrecht auf SS_1, hat also diese Linie $R_\mu R_\nu$ für alle Orthogonalkreise m eine constante Richtung.

Der Winkel τ, welcher von dieser Richtung $R_\mu R_\nu$ mit $P_1 P_2$ gebildet wird, kann auch erhalten werden, indem man die Mittelsenkrechte von $P_1 P_2$ zieht. Schneidet diese Mittelsenkrechte die Kreislinie w in S_0, so ist der zu SS_0 gehörige Centriwinkel gleich τ. Dieser Winkel τ ist also gleich dem Doppelten desjenigen Winkels, um welchen $\triangle P_1 S P_2$ aus der Mittellage $P_1 S_0 P_2$ herausgedreht ist. Bei dieser Drehung dreht sich $R_\mu R_\nu$ um τ und wir erkennen: Wenn $\triangle P_1 S P_2$ so um die Gegenpunkte P_1 und P_2 gedreht wird, dass $\angle P_1 S P_2$ ungeändert bleibt, werden die Axen der beschriebenen Hyperbeln alle um denselben Winkel gedreht. Die Grösse dieser Axen wird, da P_μ und P_ν ihre Lage auf w beibehalten, nicht geändert. Demnach folgt:

35) Werden die collinear durchlaufenen Geraden g_1 und g_2 um gleiche, gleichgerichtete Winkel um die Gegenpunkte P_1 und P_2 gedreht, so drehen sich alle im System beschriebenen Hyperbeln um gleiche Winkel um ihre Mittelpunkte, ohne ihre Gestalt zu ändern, und es entsprechen sich für die verschiedenen Lagen die homologen Punkte der Hyperbeln.

Der vorstehende Satz ist ein specieller Fall des in § 2 ausgesprochenen allgemeinen Satzes 10).

Legen wir an sämmtliche Trajectorien die bei der momentanen Lage im Systempunkte berührende Tangente. Die Abschnitte derselben auf den Asymptoten, deren Product gleich dem Quadrat der Excentricität, entsprechen einander.

36) Das Quadrat der Excentricität ist für jede Hyperbel dem Product aus den Entfernungen des Hyperbelmittelpunktes von P_1 und P_2 proportional.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte von Hyperbeln gleicher Brennweite ist eine Lemniscate.

Die Proportionalitätsconstante findet man leicht durch Betrachtung der zum Punkte Z als Mittelpunkt gehörigen Hyperbel. Setzt man das für die collinearen Linien g_1 und g_2 constante Product $P_1A_1 . P_2A_2 = k^2$, so folgt durch eine sehr einfache Rechnung als Grösse der Proportionalitätsconstanten $\left(\frac{2k}{P_1P_2}\right)^2$.

Um die Grösse und Lage der Hyperbelaxen zu erhalten, denken wir uns $\triangle P_1SP_2$ in die Mittellage zurückgedreht, setzen also (Fig. 8) $P_1S = P_2S$. Dann fällt $\overline{R_\mu R_\nu}$ mit $\overline{P_1P_2}$, R mit Z zusammen. Die Gerade P_1P_2 wird ferner von den Orthogonalkreisen m in einer Involution geschnitten, deren Doppelpunkte P_1 und P_2 sind. Demnach wird $\angle P_1MP_2$ und sein Nebenwinkel von den Axen $R_\mu M$ und $R_\nu M$ halbirt. Wir finden, zunächst für diesen speciellen Fall:

37) **Die Axen einer zum Mittelpunkte M gehörigen Hyperbel fallen mit den Tangenten der beiden durch M gehenden confocalen Kegelschnitte zusammen, deren Brennpunkte P_1 und P_2 sind.**

Der von den Geraden g_1 und g_2 in Fig. 8 gebildete Winkel sei α. Der Winkel der zum Punkte M gehörigen Hyperbelasymptote mit ihrem Leitstrahl ist gleich $\angle SP_1P_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Setzen wir ferner

$$\tfrac{1}{2} \angle P_1MP_2 = \sigma,$$

die Brennweite der zum Punkte M als Mittelpunkt gehörigen Hyperbel $= e$, ihre halbe reelle Axe $= a$, ihre halbe Nebenaxe $= b$, so folgt

$$a = e \,.\, \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \sigma\right) = e \sin\frac{\alpha}{2} \cos\sigma + e \cos\frac{\alpha}{2} \sin\sigma,$$

$$b = e \,.\, \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \sigma\right) = e \cos\frac{\alpha}{2} \cos\sigma - e \sin\frac{\alpha}{2} \sin\sigma.$$

Nach Satz 36) ist $e = \frac{2k}{P_1P_2}\sqrt{P_1M . P_2M}$. Werden durch M die schon eben erwähnten confocalen Kegelschnitte gelegt, deren Brennpunkte P_1 und P_2 sind, und nennen wir die halbe Nebenaxe der durch M gelegten Ellipse s, die halbe Nebenaxe der confocalen Hyperbel t, so folgt nach bekannten Formeln $\sqrt{P_1M . P_2M} . \cos\sigma = s$, $\sqrt{P_1M . P_2M} . \sin\sigma = t$.

Einsetzend, wird

$$a = \frac{2k}{P_1P_2} . \left(\sin\frac{\alpha}{2} . s + \cos\frac{\alpha}{2} . t\right), \quad b = \frac{2k}{P_1P_2} . \left(\cos\frac{\alpha}{2} . s - \sin\frac{\alpha}{2} . t\right).$$

Demnach ergiebt sich der merkwürdige Satz:

38) **Die Axen einer beschriebenen Hyperbel lassen sich durch die Nebenaxen der durch den Mittelpunkt gelegten confocalen Kegelschnitte linear ausdrücken.**

Falls $R_\mu R_\nu$ nicht mit $P_1 P_2$ zusammenfällt, sondern mit dieser Linie den Winkel τ bildet, drehen sich die Axen der beschriebenen Hyperbeln nach 35) um ihren Mittelpunkt um den Winkel τ. Die Grösse der Axen bleibt ungeändert. Durch das zu P_1 und P_2 als Brennpunkten gehörige System confocaler Kegelschnitte ist also das System der Trajectorien bestimmt.

Satz 38) giebt zu einer grossen Zahl specieller Bemerkungen Anlass, von welchen wir nur wenige anführen werden.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der beschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist eine Kreislinie, welche w in P_1 und P_2 orthogonal schneidet.

Zu solchen Mittelpunkten, welche einen Durchmesser des Wendekreises w der mittleren Phase harmonisch theilen, gehören ähnlich-entgegengesetzt durchlaufene Hyperbeln.

Für alle Punkte eines durch $P_1 P_2$ beliebig gelegten Kreises ist σ, daher auch $a:b$ und $s:t$ constant. Für die Punkte eines solchen Kreises haben also die Nebenaxen der confocalen Kegelschnitte ein constantes Verhältniss.

Da $P_1 P_2$ die Mittelpunktsphase der Linie $A_1 A_2$ ist, folgt:

Alle Punkte eines durch die Punkte A_1 und A_2 beliebig gelegten Kreises beschreiben ähnliche Hyperbeln.

Ein specieller Fall eines solchen Kreises ist die Gerade $A_1 A_2$ selbst. Da die Hüllbahn dieser Geraden zusammenfällt mit der Hüllbahn der von ihren Punkten beschriebenen Curven, berühren diese Curven den von $A_1 A_2$ umhüllten Kegelschnitt in zwei Punkten.

Nach Satz 13) in § 2 kann die Linie $A_1 A_2$ zur Asymptote dieser Hüllbahn werden, wenn der Affinitätspol S ausserhalb der beschriebenen Hyperbeln liegt. Betrachten wir die Hyperbel, welche die Mitte von $A_1 A_2$ beschreibt. Aus Fig. 7 folgt leicht, dass diese Hyperbel im Asymptotenwinkel α liege, wenn der dem Schnittpunkte S in g_1 entsprechende Punkt S_2 in g_2 zwischen S und P_2 fällt; und dass diese Hyperbel im Nebenwinkel $180-\alpha$ liegt, wenn dieser Punkt S_2 nicht in SP_2 fällt. Im ersten Falle liegt S innerhalb, im zweiten Falle ausserhalb der beschriebenen Hyperbeln; im zweiten Falle nimmt also $A_1 A_2$ zwei reelle asymptotische Lagen ein.

39) Zwei projectivische gerade Punktreihen erzeugen eine Ellipse, wenn der dem Schnittpunkte S der Punktreihen entsprechende Punkt auf einer der Geraden zwischen S und den Gegenpunkt fällt. In allen anderen Fällen entsteht eine Hyperbel.*

Die Hüllbahn einer beliebigen Geraden bei der von uns betrachteten Bewegung ist nach den in § 2 mitgetheilten Sätzen Milinowski's eine

---

* Vergl Gretschel, Organische Geometrie, S. 77 u. 78.

Curve vierter Ordnung und sechster Classe, die jeden Kegelschnitt, welchen ein Punkt der Geraden beschreibt, in vier Punkten berührt. Die beiden geraden Linien, welche die Schnittpunkte der bewegten Geraden mit dem Wendekreise beschreiben, und die unendlich ferne Gerade sind Doppeltangenten dieser Curve. Falls der Affinitätspol S ein selbstentsprechender Punkt wird, also g_1 und g_2 perspectivisch liegen, löst sich das Strahlenbüschel dieses Punktes von den Enveloppen ab, die Ordnung der Hüllbahnen sinkt um 2, die Classe um 1 Einheit. Die Enveloppe der Geraden $A_1 A_2$ wird also in diesem Falle ein Punkt. Alle Trajectorien laufen durch S; der Affinitätspol wird ein Keimpunkt des Systems. —

Einen wichtigern Specialfall gewinnen wir, indem wir P_1 und P_2 mit S zusammenfallen lassen, also g_2 so lange verschieben, bis $P_1 P_2$ zu Null wird. Der Wendekreis der mittlern Lage w reducirt sich in diesem Falle auf den Punkt S; die Mittelpunkte aller beschriebenen Hyperbeln fallen also in S. Die sämmtlichen vorhin hergeleiteten Sätze bleiben mit leichten Modificationen bestehen. Ist wieder $A_1 A_2$ die ähnlich-veränderliche Gerade (Fig. 9), deren Punkte A_1 und A_2 die collinearen Geraden g_1 und g_2 beschreiben, Q ein hiermit bewegter Systempunkt, so folgt mit Rücksicht auf Satz 36) und die Formel für die Brennweite der von Q beschriebenen Hyperbel

$$e^2 = 4 k^2 . \frac{A_1 Q . A_2 Q}{A_1 A_2^{\,2}}.$$

40) Der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche Hyperbeln mit gleicher Brennweite beschreiben, ist stets auf einer ähnlich-veränderlichen Lemniscate, deren Brennpunkte momentan A_1 und A_2 sind.

Hieraus ergiebt sich in gleicher Weise wie früher:

41) Die Axen der beschriebenen Hyperbeln drücken sich linear aus durch die Nebenaxen der durch den betrachteten Systempunkt laufenden Kegelschnitte, deren Brennpunkte die entsprechenden Punkte A_1 und A_2 sind.

Der Geschwindigkeitspol der Bewegung wird für diesen Fall erhalten, indem man entweder zu S, A_1 und A_2 den vierten, mit S conjugirten harmonischen Punkt sucht oder, da die Mitte von $A_1 A_2$ der Berührungspunkt dieser Linie mit ihrer Enveloppe ist, durch diese Mitte einen die Gerade g_1 in A_1 berührenden Kreis legt, welcher den momentanen Wendekreis im Pol P trifft. Da die Gerade $A_1 A_2$ dieselbe Hüllbahn beschreibt, wie ihre Mitte, der Punkt B, ist B ein Punkt des ausgezeichneten Kreises der Bewegung. Die Mittelsenkrechte von $A_1 A_2$ geht durch den Mittelpunkt Z_1 der hyperbolischen Involution, welche die Aehnlichkeitspole zwischen den conjugirten Richtungen auf dem momentanen Wendekreise w_1 bilden. Die Mittelsenkrechte von $A_1 A_2$ halbirt die zwi schen den Punkten A_1 und A_2 gelegenen Bogen des Wendekreises; die Schnittpunkte des Wendekreises und der Mittelsenkrechten liegen also auf den Axen der vom Punkte B beschriebenen Hyperbel. Und da die Mittelsenkrechte die Normale dieser Hyperbel, folgt:

42) Die betrachtete Art der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems wird erhalten, indem man die Normale einer Hyperbel als eine ähnlich-veränderliche Gerade betrachtet, welche mit zweien ihrer Punkte die Hyperbelaxen beschreibt.

Der Geschwindigkeitspol P (Fig. 9) wird im Schnittpunkte der Linie SZ_1 mit dem Wendekreise w_1 gefunden; denn S, A_1, P und A_2 sind harmonische Punkte. Der Krümmungsmittelpunkt O der vom Punkte B beschriebenen Trajectorie muss, da dieser Punkt dem ausgezeichneten Kreise angehört, auf der zum Leitstrahl PB in P errichteten Senkrechten PO liegen.* Aus den Eigenschaften der harmonischen Strahlen SZ_1, ST, SB, SU folgt

$$\angle BST = \angle TSP,$$

daher, den Schnitt von SB und w_1 durch V bezeichnend,

$$\triangle BVO \cong \triangle BPO.$$

Demnach geht OV durch den Gegenpunkt W von S auf dem Kreise w_1. Hieraus ergiebt sich folgende äusserst einfache Construction für den Krümmungsmittelpunkt O der Hyperbel:**

Verbinde den Hyperbelpunkt B mit dem Mittelpunkte S und errichte zu dieser Verbindungslinie in S eine Senkrechte, welche die Hyperbelnormale in X schneidet. Die Hyperbelnormale treffe die Axen in T und U; trägt man die Strecke UX von T aus nach entgegengesetzter Richtung ab, macht also $UX = TO$, so ist O der zum Punkte B gehörige Krümmungsmittelpunkt der Hyperbel.

Vorstehende Construction setzt also nur die Kenntniss der Axenrichtungen und der Normalen voraus.

§ 6.

Nach den Ergebnissen des letzten Abschnittes darf die Methode, die Eigenschaften affiner Figuren durch die Bewegung der sie erzeugenden ähnlich-veränderlichen Systeme aufzufinden, wohl als eine fruchtbringende bezeichnet werden. Noch mehr wird dies im laufenden Paragraphen bei der Untersuchung der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems

---

* Vergl. Geisenheimer, Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme. Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XXIV S. 154. Die Construction lässt sich bei allen Curven, deren Gleichung lautet $x^m . y^n = Constans$, anwenden.

** Diese Construction habe ich ohne Zufügung eines Beweises bereits in Bd. XX dieser Zeitschrift veröffentlicht.

hervortreten, in welchem zwei und daher alle Systempunkte **affine Ellipsen** beschreiben.

Die Eigenschaften einer solchen Bewegung gewinnen einen anschaulichen Ausdruck, wenn wir, wie Burmester, eine Beschleunigungsphase des Systems einführen. Wir setzen im Folgenden voraus, eine Trajectorie des Systems werde vom Systempunkte so durchlaufen, dass die Beschleunigung in jedem Augenblicke mit dem Ellipsenhalbmesser der Bahn nach Richtung und Grösse zusammenfalle. Diese Voraussetzung ist immer erlaubt; sie fällt mit der Annahme zusammen, dass die betrachtete Ellipsenbewegung einer gleichförmigen Kreisbewegung derselben Umlaufsdauer affin sei.

Aus der Affinität der beschriebenen Ellipsen folgt, dass unsere Voraussetzung für alle Bahnen ihre Geltung beibehält.

43) Das System der Beschleunigungsphase fällt mit dem System der Ellipsenmittelpunkte zusammen. Die Beschleunigungsphase ist also für alle Phasen des ähnlich-veränderlichen Systems constant.

Die Punkte des momentanen Wendekreises beschreiben gerade Linien. Für die Mitten derselben ist der Bahnhalbmesser Null, also auch die Beschleunigung Null.

44) Die Beschleunigungsphase des Wendekreises ist der geometrische Ort der Beschleunigungspole.

Jeder Beschleunigungspol kann auch als Aehnlichkeitspol der sämmtlichen, einer Bewegungsphase angehörigen Durchmesser betrachtet werden. Da bei der Ellipse zwei conjugirte Durchmesser nie zusammenfallen, folgt:

45) Die Aehnlichkeitspole conjugirter Durchmesser bilden auf der Beschleunigungsphase des Wendekreises eine elliptische Involution.

Mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit, welche zwischen einer Phase des bewegten Systems und der Beschleunigungsphase herrscht, folgt weiter:

46) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte solcher Ellipsen, in welchen die Scheitel der unter einem festen Winkel gegen einander geneigten conjugirten Durchmesser gleichzeitig passirt werden, liegen auf einem Kreise, welcher die Beschleunigungsphase des Wendekreises in den diesen Durchmessern entsprechenden Aehnlichkeitspunkten unter dem erwähnten festen Winkel schneidet.

Die Mittelpunkte solcher Ellipsen, deren Axenscheitel gleichzeitig passirt werden, liegen also in Orthogonalkreisen, welche die Beschleunigungsphase der durch die Ellipsenscheitel laufenden Lothkreise bilden. Je zwei solcher Lothkreise haben eine gemeinschaftliche Beschleunigungsphase.

durch A_1, A_2, dann auch durch B, Z harmonisch getheilt. Nach einem bekannten Satze über involutorische Punktreihen folgt dann

$$\frac{\angle A_1PB = \angle ZPA_2 = \angle SA_1A_2}{\angle PBT = \angle PA_1B + \angle A_1PB = \angle PA_1B + \angle SA_1A_2 = \angle PA_1S}.$$

Da A_1S die Normale der vom Punkte A_1 beschriebenen Curve, folgt aus der Gleichheit der Winkel $\angle PBT$ und $\angle PA_1S$, dass BT die Normale, also BK die Tangente an die vom Punkte B beschriebene Curve bildet.

Die Mitte der Geraden A_1A_2 beschreibt eine Ellipse, zu welcher A_1A_2 beständig normal steht. Punkt B, die Mitte der Geraden A_1A_2, ist also in jeder Phase der Bewegung ein Punkt des ausgezeichneten Kreises dieser Phase. Für die halben Axen der vom Punkte B beschriebenen Ellipse findet sich

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad b = \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

49) Die Mitte der Verbindungslinie homologer Punkte in zwei ungleichwendig-ähnlichen, concentrischen Kreisen beschreibt eine Ellipse, welche stets zu dieser Verbindungslinie normal steht. Die Axen dieser Ellipse sind gleich der Summe und Differenz der Kreisradien.*

50) Der nach aussen fallende Abschnitt, welchen der mit der Summe, und ein nach innen fallender Abschnitt, welchen der mit der Differenz der halben Axen aus dem Mittelpunkt geschlagene Kreis auf der Ellipsennormalen bildet, sind einander gleich; und die Linien, welche die Endpunkte dieser Abschnitte mit dem Mittelpunkte verbinden, bilden gleiche Winkel mit den Axen.

Ein Vergleich mit den in § 5 hergeleiteten Sätzen zeigt, dass der vorstehende Satz ein Analogon zu dem bekannten Satze der Hyperbel bildet: die Abschnitte der Asymptoten auf der Hyperbeltangente sind einander gleich.

Die Brennweite der vom Punkte B beschriebenen Ellipse ist $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Betrachten wir SA_1 und SA_2 als Asymptoten einer durch B gehenden Hyperbel, folgt für die Brennweite dieser Hyperbel $\sqrt{SA_1 . SA_2} = \sqrt{r_1 . r_2}$, also derselbe Werth, wie für die Ellipse.

* Eine Verallgemeinerung dieses Satzes lautet: Bewegt sich eine ähnlich-veränderliche Gerade mit ihren Endpunkten auf concentrischen Kreisen, so besitzt derjenige Punkt, welcher diese Gerade nach dem Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der Endpunkte verlängert, eine zur bewegten Geraden orthogonale Geschwindigkeit. Ist das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten constant, so beschreibt dieser Punkt eine cyklische Curve.

51) Der geometrische Ort für die Schnittpunkte, welche durch die Normalen einer festen Ellipse und die Asymptoten der in den Fusspunkten schneidenden confocalen Hyperbeln gebildet werden, zefällt in zwei concentrische Kreise mit der Summe und Differenz der Ellipsenhalbaxen als Radien.

Für die Excentricität einer beliebigen, im System beschriebenen Ellipse folgt $2\sqrt{r_1 . r_2 . \frac{A_1 M . A_2 M}{A_1 A_2^2}}$; die Systempunkte, welche Ellipsen mit gleicher Excentricität beschreiben, befinden sich also in jeder Phase auf einer ähnlich-veränderlichen Lemniscate. Ferner folgt aus den Formeln, dass alle Punkte in der Peripherie eines Kreises, welcher $A_1 A_2$ orthogonal und harmonisch schneidet, ähnliche Ellipsen beschreiben. Ein Grenzfall dieser Kreise wird durch die Mittelsenkrechte BK dargestellt.

Da B bei der von uns betrachteten Bewegung ein Punkt des ausgezeichneten Kreises, wird der Krümmungsmittelpunkt O des von B beschriebenen Curvenelements erhalten, indem man PO senkrecht zum Leitstrahl PB zieht. Die Linie SB schneide den Wendekreis w in V. Da $arc\, UP = arc\, UV$, folgt

$$\triangle BPO \cong \triangle BVO.$$

Da $\angle BVO = 1R$, geht OV durch den Gegenpunkt W von S auf w, und es ergiebt sich die gleiche einfache Construction für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse, wie sie in § 5 für die Hyperbel hergeleitet wurde. Schneidet also die zum Ellipsenhalbmesser SB im Mittelpunkte errichtete Senkrechte die Normale in X und macht man $UO = TX$, so ist O der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt B.

Für die Art der Bewegung unseres Systems folgt, ebenfalls entsprechend zu § 5:

52) Die betrachtete Art der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems wird erhalten, indem man die Normale einer Ellipse als eine ähnlich-veränderliche Gerade betrachtet, welche mit zweien ihrer Punkte die Axen der Ellipse beschreibt.

Der Geschwindigkeitspol dieser Bewegung wird im Schnittpunkte der Linie SZ mit dem Wendekreise gefunden; Z ist der Pol der momentanen Ellipsentangente in Bezug auf den Wendekreis w. —

Ist die Centrale $M_1 M_2$ der Grundkreise m_1 und m_2 nicht gleich Null, so lässt sich in die vorstehenden Sätze statt der variablen Punkte A_1 und A_2 M_1 und M_2, also statt der Geraden $A_1 A_2$ ihre Beschleunigungsphase $M_1 M_2$ einführen.

53) Die Axen der beschriebenen Ellipsen lassen sich durch die Hauptaxen der durch ihren Mittelpunkt gehenden

confocalen Kegelschnitte, deren Brennpunkte M_1 und M_2 sind, linear ausdrücken. Die Axen der beschriebenen Ellipsen bilden mit den Tangenten dieser beiden confocalen Kegelschnitte denselben Winkel, wie die Centrale der Grundkreise mit der sich selbst entsprechenden Richtung dieser beiden ungleichwendig-ähnlichen Kreise.

54) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Ellipsen mit gleicher Excentricität ist eine Lemniscate.

Die Hüllbahn einer beliebigen Geraden ist eine Curve vierter Ordnung und sechster Classe, die jede Ellipse, welche ein Punkt der Geraden beschreibt, in vier Punkten berührt. Die beiden geraden Linien, welche die Schnittpunkte der bewegten Geraden mit dem Wendekreise beschreiben, und die unendlich ferne Gerade sind Doppeltangenten dieser Curve.

Einen bemerkenswerthen Ausnahmefall bildet die Hüllbahn der Mittelsenkrechten von $A_1 A_2$. Es wurde bereits erwähnt, dass die Punkte der Mittelsenkrechten ähnliche Ellipsen beschreiben; und da diese ähnlichen Ellipsen auch ähnliche Lage haben, lösen sich von der Enveloppe derselben die Strahlbüschel zweier unendlich fernen, allen Ellipsen gemeinschaftlichen Schnittpunkte ab. Die Classe der Hüllbahn sinkt also um 2 Einheiten, sie wird ein Kegelschnitt. Jedem Punkte eines Grundkreises entspricht ein Punkt dieses Kegelschnittes. Es lässt sich aber auch zeigen, dass jedem Punkte des letztern nur ein Punkt in jedem der Grundkreise entsprechen kann. Denn würden ihm mehrere entsprechen, so müssten die zwischen diesen Punkten gezogenen Verbindungslinien, weil ihnen dieselbe Mittelsenkrechte angehören soll, parallel, die Sehnen beider Grundkreise zwischen den Endpunkten der verschiedenen Verbindungslinien gleich und gegen die Mittelsenkrechte gleich geneigt sein, was nur möglich, wenn die Grundkreise congruent sind und symmetrisch zur Centralen durchlaufen werden. Sehen wir von diesem Falle, in welchem die Mittelsenkrechte eine feste Lage während der Bewegung beibehält, ab, so folgt, dass die Beziehung zwischen den Punkten und Tangenten der von der Mittelsenkrechten beschriebenen Hüllbahn und den zugehörigen Punkten der Grundkreise eine gegenseitig eindeutige ist; Grundkreis und Hüllbahn sind also collinear. Den Asymptoten der Hüllbahn entsprechen nach 13) die Berührungspunkte der vom Situationspunkte an den Grundkreis gezogenen Tangenten.

55) Die Hüllbahn der Mittelsenkrechten ist ein zu jedem Grundkreise projectivischer Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt dem Situationspunkte der Grundkreise entspricht.

Parallelen Tangenten dieses Kegelschnittes entsprechen parallele Mittelsenkrechten. Liegen daher zwei Punkte eines Grundkreises auf einer durch den Situationspunkt gehenden Geraden, so sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit ihren homologen auf dem andern Grundkreise einander parallel. Dies folgt auch aus der Constanz des Verhältnisses, welches entsprechende Strecken im System der beiden Grundkreise besitzen.

Wird der Situationspunkt S zum Keimpunkt des ähnlich-veränderlichen Systems, gehen also die Grundkreise und daher auch die beschriebenen Ellipsen durch diesen Punkt, so sinkt die Ordnung für die Hüllbahn einer beliebigen Geraden wieder um 2, die Classe um 1. Die Mittelsenkrechte geht also in diesem Falle stets durch einen festen Punkt. Werden auf den Grundkreisen einmal die dem Punkte S unendlich nahen, ein zweites Mal die Gegenpunkte von S zur Construction der Mittelsenkrechten benutzt, so ergiebt sich als gemeinschaftlicher Punkt aller Mittelsenkrechten die Mitte der Strecke zwischen den Gegenpunkten.

§ 7.

Die Untersuchung eines ähnlich-veränderlichen Systems, in welchem zwei Systempunkte affine Parabeln beschreiben, wird in entsprechender Weise durchgeführt (Fig. 12).

Die Durchmesser einer Parabel sind parallel; und da sich in affinen Parabeln die Durchmesser entsprechen, rückt der Aehnlichkeitspol D dieser Durchmesser in einer Geraden g fort, welche den Affinitätspol S enthält.

Zur Bestimmung der Bewegung sei die Parabel o gegeben, welche der Mittelpunkt O des Wendekreises durchläuft. Der irgend einer Phase des Systems angehörige Wendekreis w schneidet die Gerade g im Affinitätspol S und im Aehnlichkeitspunkte D der momentan erreichten Parabeldurchmesser. Da der Gegenpunkt D_1 von D auf w eine zu g senkrechte Geschwindigkeit besitzt, folgt, dass der Durchmesser der vom Wendekreismittelpunkte beschriebenen Parabel o senkrecht zu g steht. Aus der Gleichung dieser Parabel ergiebt sich, dass die Strecke SD_1 eine quadratische Function der Strecke SD ist; oder allgemeiner:

56) **Beschreibt eine ähnlich-veränderliche Gerade mit zweien ihrer Punkte gerade Linien derart, dass eine derselben mit constanter, die zweite mit gleichförmig-beschleunigter Geschwindigkeit durchlaufen wird, so bewegen sich die Systempunkte in affinen Parabeln.**

Der Geschwindigkeitspol der Bewegung, P, wird im Schnittpunkte der vom Affinitätspol S auf die in O an o gelegte Parabeltangente OT gefällten Senkrechten mit dem Wendekreise gefunden.

Ist A ein beliebiger Systempunkt, und bezeichnen wir den momentanen Geschwindigkeitswinkel, $\angle POT = \angle SOT$, mit φ, den Winkel des Durchmessers mit seinem nach D gezogenen Leitstrahl durch ν, ferner $\angle PAD$ durch $\varkappa$, so ergiebt sich für den Winkel λ, welchen momentan die Tangente und der Durchmesser der von A beschriebenen Parabel bilden,

$$\lambda = \nu - \varphi - \varkappa.$$

Soll λ ein Rechter sein, folgt

$$\varkappa = 90 - (\nu - \varphi) = 90 - \angle PD_1 D.$$

57) **Der geometrische Ort aller Punkte, welche momentan den Scheitel ihrer Bahn durchlaufen, ist ein den Wendekreis in P und D orthogonal schneidender Kreis.**

Den Radius des Wendekreises R, den des Orthogonalkreises R_1 nennend, wird

$$R = \frac{PD}{2\sin(\nu - \varphi)}, \quad R_1 = \frac{PD}{2\cos(\nu - \varphi)}, \quad \frac{R_1}{R} = tg(\nu - \varphi).$$

Bezeichnen wir die Parabelordinate für o in Bezug auf die Axe mit y, den Hauptparameter dieser Parabel mit p, folgt

$$tg(\nu - \varphi) = tg\, TON = \frac{p}{y},$$

also

58)
$$\frac{R_1}{R} = \frac{p}{y}.$$

In einer beliebigen andern Phase geht der zu R_1 gehörige Orthogonalkreis in einen Kreis über, welcher OD in D berührt, so dass also jeder den Radius im Endpunkte D berührende Kreis nur solche Punkte enthält, welche den Scheitel der von ihnen beschriebenen Bahnen gleichzeitig passiren. Da jedoch das Verhältniss $\frac{R_1}{R}$ zwischen den Radien zweier Kreise des Systems von der Phase unabhängig ist, lässt sich aus der in 58) gefundenen Proportion die Lage desjenigen Wendekreises, für welchen ein Punkt den Scheitel seiner Bahn erreicht, bestimmen.

Der zu einem Punkte einer Parabel gehörige Parameter ist dem Quadrat der zur Tangente dieses Punktes parallelen Ordinate direct, der auf dem Durchmesser des Punktes hierdurch gebildeten Abscisse umgekehrt proportional. Bezeichnet c eine Constante, folgt für den zum beliebigen Punkte A gehörigen Parameter der von diesem Punkte beschriebenen Bahn $c \cdot \frac{PA^2}{DA}$. Um den Hauptparameter p_1 dieser Bahn zu erhalten, ist dieser Ausdruck für den Nebenparameter mit $sin^2\lambda$ zu multipliciren. Demnach folgt:

$$p_1 = c \cdot \frac{PA^2}{DA} sin^2(\nu - \varphi - \varkappa).$$

In gleicher Weise folgt für den Parameter p der Parabel o

$$p = c.R.\sin^2(\nu - \varphi), \text{ daher } p_1 = p \cdot \frac{PA^2}{R.DA} \cdot \frac{\sin^2(\nu - \varphi - \varkappa)}{\sin^2(\nu - \varphi)}.$$

Der Schnittpunkt der Linie DA mit w sei U, so ergiebt sich im Dreieck PAU

$$\frac{PA.\sin(\nu - \varphi - \varkappa)}{\sin(\nu - \varphi)} = AU,$$

daher

59) $$p_1 = p \cdot \frac{AU^2}{R.DA}.$$

Die rechte Seite stellt einen für alle Phasen des Systems constanten Ausdruck dar.

Für die von den Geraden des Systems beschriebenen Hüllbahnen ergiebt sich Folgendes:

Die Hüllbahn einer beliebigen Geraden ist wieder eine Curve sechster Ordnung und vierter Classe. Die Punkte der Geraden DD_1 beschreiben Parabeln, deren Durchmesser parallel sind. Demnach löst sich von der Hüllbahn der Geraden DD_1 ein unendlich ferner Punkt ab, dieselbe wird vierter Ordnung und dritter Classe. Falls die Parabel o die Gerade g berührt, wird letztere eine gemeinschaftliche Tangente der von ihren Punkten beschriebenen Parabeln und sondert sich daher von der Hüllbahn ab; dieselbe wird dritter Ordnung und dritter Classe mit einer Asymptote, welche der zweiten, von S an o möglichen Tangente entspricht. Wird S ein Keimpunkt des Systems, so wird die Enveloppe der Geraden DD_1 eine Parabel, deren Axe parallel SD_1 ist und welche die Gerade g tangirt. Ein derartiger Fall findet z. B. bei der Erzeugung solcher Wurfparabeln eines Punktes statt, für welche die Endpunkte der im Ausgangspunkte angetragenen Geschwindigkeiten in eine Gerade fallen.

Wenn der Scheitel von o in S die Gerade g berührt, tangiren alle Parabeln des Systems die Gerade g in diesem Punkte. In diesem bemerkenswerthen Specialfalle beschreibt der Endpunkt B der über D hinaus um sich selbst verlängerten Linie DD_1 eine diese Gerade beständig berührende Parabel. B ist also ein Punkt des ausgezeichneten Kreises der Bewegung. Zu den Hüllbahnen, welche in diesem Falle beschrieben werden, gehört auch die Evolute der von DD_1 umhüllten Parabel. Da der Wendekreis und der ausgezeichnete Kreis der Bewegung bekannt sind, ist der Rückkehrkreis und hiermit der Krümmungsmittelpunkt der Parabelevolute zu finden. In gleicher Weise lässt sich übrigens auch mit Hilfe der in §§ 5 und 6 betrachteten Bewegung, welche durch die Gleitung der ähnlich-veränderlichen Hyperbel- oder Ellipsennormalen zwischen den Axen des Kegelschnittes bestimmt wurde, der Krümmungsmittelpunkt der Hyperbel- und Ellipsenevolute construiren. Eine gegen die Curvennormale beliebig geneigte Gerade, welche durch den bei Betrachtung der eben hervorgehobenen Specialfälle erwähnten Punkt B des ausgezeichneten Kreises geht, also die von B beschriebene Curve in allen Phasen unter gleichem Winkel schneidet, trifft den momentanen Wendekreis in zwei reellen oder imaginären Punkten, welche gerade Linien beschreiben. Demnach gilt der Satz:

60) Alle einen Kegelschnitt isogonal schneidenden geraden Linien werden durch zwei aus dem Mittelpunkte oder, falls dieser wegfällt, durch zwei aus dem Scheitel laufende Geraden vom Schnittpunkte mit der Curve aus nach constantem Verhältniss getheilt. Die beiden theilenden Geraden, welche sich durch den Winkel der isogonal schneidenden Linien mit der Curve bestimmen, sind involutorisch gepaart.*

* Satz 60) lässt sich auf alle Curven ausdehnen, deren Gleichung in reellen oder imaginären Coordinaten lautet $x^m . y^n = Constans$.

XXIII.

Ueber Gleichstimmigkeit und Ungleichstimmigkeit der räumlichen Collineation.

Von

Prof. Dr. Guido Hauck

in Berlin.

In meinem Aufsatze „Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation im Raume“ im XXI. Jahrgang (1876) dieser Zeitschrift habe ich (S. 407 und 411) den Satz aufgestellt, dass in zwei collinearen räumlichen Systemen entsprechende Dreistrahlen entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig sind. Ich nannte im ersten Falle die collineare Verwandtschaft eine **gleichstimmige**, im zweiten Falle eine **ungleichstimmige**.

Es schien mir bis zu einem gewissen Grade selbstverständlich zu sein, dass in zwei reell-projectivischen Systemen einem bestimmten Drehungssinne im einen System ein bestimmer Drehungssinn im andern entsprechen muss. Ich glaubte mich daher auf eine blosse Andeutung des Beweises beschränken zu dürfen und gab eine solche in folgender Weise:*

„Liegen bei zwei centrisch-collinearen Systemen in collinearer Lage Collineationscentrum und Collineationsebene zwischen Gegenebene und Fluchtebene, so liegt jeder Punkt der Originalfigur mit seinem Bilde auf einer und derselben Seite der Collineationsebene. Hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur mit seinem Bilde gleichstimmig ist. (Denn sind S_1, S_2, S_3 die Spuren der drei Strahlen in der Collineationsebene, P und Π die zwei Scheitel, so liegen die Spitzen P und Π der zwei Pyramiden $S_1 S_2 S_3 P$ und $S_1 S_2 S_3 \Pi$ auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundfläche.) Liegen dagegen Fluchtebene und Gegenebene zwischen Collineationscentrum und Collineationsebene, so liegen irgend zwei entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Collineationsebene, und hieraus folgt, dass jeder Dreistrahl der Originalfigur

---

* S. S. 407, 411 und 414.

mit seinem Bilde ungleichstimmig ist." ... „Dass der im Vorangehenden zunächst nur für die centrische Collineation nachgewiesene Satz auch für die projectivische Collineation gilt, beweist sich aus der Thatsache, dass zu zwei projectivisch-collinearen Systemen jederzeit, und zwar auf fünffach unendlich verschiedene Weise, ein drittes construirt werden kann, das mit beiden centrisch-collinear ist." —

Gegen die genannten Sätze sind nun von Herrn Sturm Bedenken erhoben worden. Derselbe sagt in einer Besprechung meines Aufsatzes im 8. Band (Jahrg. 1876) des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik*, S. 347:

„Die Begriffe der Gleichstimmigkeit und Ungleichstimmigkeit scheinen nicht klargestellt; Referent kann sich von der Richtigkeit der Sätze auf S. 407 nicht überzeugen; der Verfasser hat nicht an den Fall gedacht, dass ein Punkt und die Collineationsebene auf verschiedenen Seiten der Gegenebene liegen, oder ihn wenigstens nicht ausgeschlossen. Es giebt stets gleichstimmige entsprechende Figuren und ungleichstimmige bei derselben Collineation." ... „Die ausführliche Behandlung der nur berührten Aufgabe, zu zwei allgemein-collinearen Systemen ein mit beiden projectivisch-collineares zu construiren, wäre erwünscht gewesen." —

Die in Rede stehende Frage, welche von fundamentaler Bedeutung für die Natur der collinearen Verwandtschaft ist, scheint seither — so weit wenigstens meine Literaturkenntniss** reicht — nicht erschöpfend behandelt worden zu sein.*** Die Wahrnehmung, dass über die Frage in der That entgegengesetzte Ansichten unter den Vertretern der synthetischen Geometrie existiren, lässt mir eine eingehendere Besprechung derselben als nothwendig erscheinen. Es möge mir daher gestattet sein, im Folgenden ausführlichere Betrachtungen über diesen Gegenstand anzustellen, welche den Zweck haben, die Richtigkeit meiner Sätze ausser Zweifel zu setzen.

Was zunächst den von Herrn Sturm gemachten Einwurf anlangt, so kann ich denselben nicht als zutreffend erkennen. Es ist auf denselben (mit Benützung der obigen Bezeichnungen) zu erwidern, dass, wenn Punkt P und die Collineationsebene auf verschiedenen Seiten der Gegenebene liegen und S_1, S_2, S_3 die Spuren dreier durch P gehender Geraden bedeuten, dem Dreikant P, $S_1 S_2 S_3$ nicht das eigentliche Dreikant

* Berlin, 1878.

** Für dieselbe bin ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Gundelfinger in Tübingen, zu Danke verpflichtet.

*** Nur v. Staudt berührt den Gegenstand; vergl. Geometrie der Lage, Art. 136, und Beiträge zur Geometrie der Lage, Art. 198.

Π, $S_1 S_2 S_3$ collinear entspricht, sondern vielmehr dessen Scheiteldreikant. Um nämlich das einem bestimmten Dreikant des Originalsystems entsprechende Dreikant des Bildsystems festzustellen, genügt es selbstverständlich nicht, die den drei gegebenen Kanten entsprechenden geraden Linien zu ermitteln, sondern man hat diejenigen drei Aeste der letzteren auszuwählen, deren Punkte den Punkten der Kanten des gegebenen Dreiecks entsprechen. Diese Aeste werden aber im vorliegenden Falle nicht durch die endlichen Strecken ΠS_1, ΠS_2, ΠS_3 repräsentirt, sondern durch deren unendliche Ergänzungen $\Pi \infty S_1$, $\Pi \infty S_2$, $\Pi \infty S_3$.

Uebrigens sehe ich es für überflüssig (wenn nicht für unzweckmässig) an, die in Rede stehende Lage als besondern, eine gesonderte Betrachtung erfordernden, Fall zu separiren, wie es in dem gemachten Einwurf geschieht. Diese Lage ordnet sich vielmehr — wie die nachfolgende Erörterung zeigen möge — von selbst der allgemeinen Betrachtung unter.

Hat man in zwei collinearen Systemen irgend zwei entsprechende gerade Linien und lässt einen Punkt X die eine Gerade in einer bestimmten Richtung durchlaufen, so entspricht dieser Richtung im andern System eine ganz bestimmte Richtung, in welcher gleichzeitig der entsprechende Punkt Ξ die entsprechende Gerade durchläuft. Man darf sich nun bei der Betrachtung von zwei collinearen Systemen nicht damit begnügen, zwei einander entsprechende gerade Linien als starre Gebilde im Euklidischen Sinne zu behandeln, man hat vielmehr auch die entsprechenden Richtungen derselben ins Auge zu fassen.

Thut man dies, so kann man kurz sagen: *In zwei collinearen Systemen sind zwei Dreikante einander entsprechend, wenn ihre Kanten — inclusive deren Richtungen — einander einzeln entsprechen.*

Denken wir uns nun zwei centrisch-collineare Räume in collinearer Lage, so erstrecken sich die einander entsprechenden Raumgebiete von der gemeinschaftlichen Collineationsebene aus entweder nach der nämlichen Seite der letzteren hin oder nach entgegengesetzten Seiten. Durchläuft man daher irgend zwei einander entsprechende gerade Linien von ihrer gemeinschaftlichen Spur aus in einander entsprechenden Richtungen, so geschehen diese Bewegungen im ersten Falle stets nach der nämlichen Seite von der Collineationsebene aus, im zweiten Falle stets nach entgegengesetzten Seiten. Um also von der Collineationsebene aus nach zwei einander entsprechenden Punkten P und Π auf einander entsprechenden Wegen zu gelangen, muss man sich entweder stets nach der nämlichen Seite oder stets nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Hierbei hat es schlechterdings nichts Besonderes auf sich, wenn man bei der Bewegung die unendlich ferne Ebene passirt. Auch wenn einer der zwei Punkte P oder Π die unendlich ferne Ebene überschritten hat — und dies ist eben der von Herrn *Sturm* eingeworfene Fall —, wird man noch sagen dürfen: die Punkte P und Π liegen von der Collineationsebene aus nach der nämlichen Seite hin oder nach verschiedenen Seiten hin, je nach dem Charakter zweier entsprechender Wege, auf denen man von einem Punkte der Collineationsebene aus nach ihnen gelangt.

In diesem Sinne ist es daher ganz allgemein giltig, wenn ich in meinem Beweise sagte: Die Scheitel P und Π zweier entsprechender Dreikante liegen im einen Falle stets auf der nämlichen Seite der Collineationsebene (oder schärfer: nach der nämlichen Seite hin), im andern Falle stets auf entgegengesetzten Seiten. Im ersten Falle sind die zwei Dreikante stets gleichstimmig, im zweiten Falle stets ungleichstimmig. Denn je zwei entsprechende Kanten derselben repräsentiren zwei einander entsprechende Wege, die von einem Punkte der Collineationsebene nach den einander entsprechenden Scheitelpunkten P und Π führen.

Durch das Gesagte dürfte der gegen meinen Satz gemachte Einwand widerlegt und die Richtigkeit des Satzes zunächst für die centrische Collineation ausser Zweifel gestellt sein.*

Der Beweis für die allgemeine oder projectivische Collineation stützt sich — wie schon oben erwähnt — auf den Satz, dass zu zwei projectivisch-collinearen räumlichen Systemen jederzeit ein drittes System construirt werden kann, das mit beiden gegebenen centrisch-collinear ist.

---

* Zugleich dürfte durch das Gesagte auch eine andere Ausstellung ihre Erledigung gefunden haben, die Herr Sturm in seinem Referate (S. 346 unten) macht, wenn er sagt: „Es ist nicht präcisirt, was unter den (entsprechenden) Axendreikanten gemeint ist, ob nur die der positiven, wie wahrscheinlich, oder die der ganzen Axen, sowie, welches die positiven Coordinatenaxen im Object- und im Bildsystem sind, da dies nicht selbstverständlich ist, indem z. B., wenn G_1 au der positiven x-Axe liegt, die eine halbe ξ-Axe aus OG_1, die andere aus dem Reste der positiven und der ganzen negativen x-Axe hervorgeht; es scheint, dass im Objectraume die die G_i enthaltenden Halbaxen und im Bildraume die aus der OG_i hervorgehenden die positiven sein sollen." — Ich kann auch diese Ausstellung nicht als zutreffend erkennen und kann mir die Entstehung derselben nur dadurch erklären, dass zwei entsprechende Axen von Herrn Sturm als starre Punktgebilde im Euklidischen Sinne betrachtet und die entsprechenden Richtungen derselben nicht in Mitleidenschaft gezogen worden sind. — Was übrigens die Lage der Punkte G_i anlangt, so mag darauf hingewiesen werden, dass S. 405 ausdrücklich gesagt ist, die Ausführungen der §§ 1 und 3 seien Wort für Wort auf die Reliefperspective zu übertragen. In § 3 aber findet sich eine Erörterung des fraglichen Gegenstandes, sowie eine ausdrückliche Festsetzung über die im Folgenden gewählte Lage. Diese Festsetzung findet S. 407 ihre Vervollständigung für den Fall der ungleichstimmigen Collineation. — Zudem sind in den Figuren (Taf. VIII, Fig. $2a$, $2b$, $3a$, $3b$) die entsprechenden Axendreikante und namentlich die positiven Axenrichtungen derselben durch eingezeichnete Pfeile und angeschriebene Buchstaben ($+x$, $+y$, $+z$, $+\xi$, $+\eta$, $+\zeta$) für alle vier charakteristische Fälle ausdrücklich scharf hervorgehoben.

Dem Wunsche nach der Mittheilung der ausführlicheren Lösung der diesbezüglichen Aufgabe entspreche ich um so bereitwilliger, als mir die Aufgabe in der That — ganz abgesehen von dem vorliegenden Zwecke — schon an und für sich von Interesse zu sein scheint. — Sie ist zunächst eine unbestimmte. Ich habe mich mit der allgemeineren und zugleich bestimmten Aufgabe befasst: Zu vier projectivisch-collinearen räumlichen Systemen ein fünftes System zu construiren, welches mit sämmtlichen vier gegebenen Systemen centrisch-collinear ist, und werde die Lösung dieser Aufgabe in einem separaten Aufsatze mittheilen.

Dagegen möge in dem gegenwärtigen Aufsatze noch der allgemeine (auch auf die projectivische Collineation sich erstreckende) analytische Beweis unseres in Rede stehenden Satzes gegeben werden. — Dieser Beweis wird uns zugleich ein Criterium dafür liefern, dass die durch drei lineare Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte bestimmte Collineation eine gleichstimmige, bezw. ungleichstimmige ist.

Ich habe schon in meinem früheren Aufsatze (s. S. 420) den letzteren Punkt berührt, bin jedoch infolge der Verquickung zweier disparater Betrachtungen zu einem unrichtigen Criterium gelangt. Ich benütze nun zugleich die mir gebotene Gelegenheit, die dortige Incorrectheit, die jedoch in keinerlei äusserem oder innerem Zusammenhang mit den Ausstellungen des Herrn Sturm steht, richtig zu stellen, und bitte den geehrten Leser, an Stelle der dortigen Ausführungen (S. 420, Relationen 110—113) die im Folgenden gegebenen zu setzen.

Die collineare Beziehung der zwei räumlichen Systeme sei durch die linearen Relationen zwischen den Coordinaten x, y, z und X, Y, Z zweier entsprechender Punkte gegeben:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4} \equiv \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}}, \\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4} \equiv \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}, \\ z &= \frac{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4} \equiv \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}, \end{aligned}\right.$$

wobei die zwei Coordinatensysteme o, xyz und O, XYZ gleichstimmig, und zwar beide positiven Sinnes* vorausgesetzt sein mögen.

Es seien nun P, P', P'', P''' irgend vier Punkte im System XYZ, denen die Punkte p, p', p'', p''' im System xyz entsprechen mögen; ihre

* Es wird hierbei die von Möbius (s. Baryc. Calcul § 19) gegebene Definition benützt. Sind also X, Y, Z drei beliebige, auf den positiven Axen angenommene Punkte, so sei der körperliche Inhalt der Pyramide $OXYZ$ positiv.

Coordinaten seien XYZ, $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$, ..., xyz, ... Wir suchen die Bedingung dafür auf, dass die zwei Dreikante $P, P'P''P'''$ und $p, p'p''p'''$ gleichstimmig sind.

Wir nehmen an, das Dreikant $P, P'P''P'''$ sei gleichstimmig mit dem von den positiven Coordinatenaxen gebildeten Dreikant O, XYZ. Bezeichnen wir das sechsfache Volumen des Tetraeders $PP'P''P'''$ mit Δ, wo also*

2) $$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' & 1 \\ X''' & Y''' & Z''' & 1 \end{vmatrix}$$

ist, so kann die genannte Annahme analytisch ausgedrückt werden durch die Bedingung:

3) $$\Delta > 0.$$

Denn lässt man das Dreikant $P, P'P''P'''$ seine Gestalt stetig ändern, so kann es im Falle der Gleichstimmigkeit mit dem Dreikant O, XYZ zur Coincidenz gebracht werden, ohne dass während der Gestaltänderung das Tetraedervolumen den Werth 0 oder ∞ durchschreiten würde. Für den Fall der Coincidenz aber hat das Tetraedervolum (gemäss der Voraussetzung eines positiven Sinnes des Coordinatensystems) einen positiven Werth. Folglich muss auch der Werth des ursprünglichen Tetraedervolums positiv sein.

Soll nun das Dreikant $p, p'p''p'''$ mit $P, P'P''P'''$ gleichstimmig sein, so muss — da die zwei Coordinatensysteme als gleichstimmig vorausgesetzt wurden — $p, p'p''p'''$ auch mit seinem Coordinatendreikant o, xyz gleichstimmig sein. Bezeichnet man daher mit

4) $$\delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}$$

das sechsfache Volumen des Tetraeders $pp'p''p'''$, so ergiebt sich als Bedingung für die Gleichstimmigkeit:

5) $$\delta > 0.$$

Die zwei Dreikante $p, p'p''p'''$ und $P, P'P''P'''$ sind dagegen ungleichstimmig, wenn $\delta < 0$. —

Führt man nun in den Ausdruck δ die lineare Substitution 1) ein, so erhält man:

---

* Vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, I. Theil, Art. 34.

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} & \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} & 1 \\ \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}'} & \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}'} & \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}'} & 1 \\ \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{D}''} & \frac{\mathfrak{B}''}{\mathfrak{D}''} & \frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{D}''} & 1 \\ \frac{\mathfrak{A}'''}{\mathfrak{D}'''} & \frac{\mathfrak{B}'''}{\mathfrak{D}'''} & \frac{\mathfrak{C}'''}{\mathfrak{D}'''} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathfrak{D}'''} \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' & \mathfrak{C}' & \mathfrak{D}' \\ \mathfrak{A}'' & \mathfrak{B}'' & \mathfrak{C}'' & \mathfrak{D}'' \\ \mathfrak{A}''' & \mathfrak{B}''' & \mathfrak{C}''' & \mathfrak{D}''' \end{vmatrix},$$

woraus sich vermöge des Multiplicationstheorems unmittelbar ergiebt:

$$6)\qquad \delta = \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathfrak{D}'''} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' & 1 \\ X''' & Y''' & Z''' & 1 \end{vmatrix}$$

oder, wenn wir bezeichnen:

$$7)\qquad R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

wo also R die Substitutionsdeterminante repräsentirt:

$$8)\qquad \delta = \frac{R}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathfrak{D}'''} \Delta.$$

Aus diesem Resultate folgt zunächst, dass δ mit Δ gleichen Zeichens, also $p, p'p''p'''$ mit $P, P'P''P'''$ gleichstimmig ist, solange der Bruch $\frac{R}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathfrak{D}'''}$ positiv ist.

Lassen wir nun das Tetraeder $PP'P''P'''$ seine Gestalt stetig ändern, so ändert sich auch der Nenner unsers Bruches stetig. Dabei kann er sein Vorzeichen nur dann wechseln, wenn einer der vier Factoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$ entweder den Werth 0 oder den Werth ∞ überschreitet. Letzteres ist [wie aus den Relationen 1) unmittelbar ersichtlich ist] der Fall, wenn einer der vier Punkte P, P', P'', P''' ins Unendliche rückt, Ersteres —, wenn einer der vier Punkte p, p', p'', p''' ins Unendliche rückt, also der entsprechende Punkt P die Gegenebene seines Systems überschreitet. Tritt ein solcher Fall ein, so scheint es zunächst allerdings, als würde infolge des Zeichenwechsels eines Factors $\mathfrak{D}$ auch δ sein Zeichen ändern, und es würde also ein Uebergang von Gleichstimmigkeit in Ungleichstimmigkeit zwischen den zwei Dreikanten eintreten.

Ein solcher Schluss wäre, wie man leicht erkennt, genau identisch mit dem von Herrn Sturm gemachten Einwand. Er dürfte jedoch übereilt sein. Denn es darf nicht übersehen werden, dass — nachdem beispielsweise Punkt P die unendlich ferne Ebene passirt hat — dem endlichen Tetraeder $pp'p''p'''$ — im andern System das unendliche Tetraeder entspricht, dessen von P ausgehende Kanten $P\infty P'$, $P\infty P''$, $P\infty P'''$ sind.* Dagegen repräsentirt der analytische Ausdruck für Δ stets das Volumen des endlichen Tetraeders $PP'P''P'''$. δ und Δ beziehen sich also jetzt auf zwei Tetraedergebilde, welche sich nicht mehr eigentlich collinear entsprechen.

Um die Frage zum endgiltigen Austrag zu bringen, ist es nothwendig, dass wir uns über die Vorzeichenverhältnisse der Grössen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$ genauer orientiren. Dies geschieht durch folgende Ueberlegung.

Die Gleichung

$$\mathfrak{D} \equiv d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4 = 0$$

repräsentirt, wenn X, Y, Z variabel gedacht werden, die Gleichung der Gegenebene des Systems XYZ. Denn für $\mathfrak{D} = 0$ ergeben die Relationen 1): $x, y, z = \infty$. — Bedeuten dagegen die in dem Ausdruck $\mathfrak{D}$ enthaltenen Grössen X, Y, Z die Coordinaten eines bestimmten, ausserhalb der Gegenebene liegenden Punktes P, so steht die Grösse $\mathfrak{D}$ in sehr naher Beziehung zu der Entfernung e des Punktes P von der Gegenebene. Es ist nämlich bekanntlich**

$$9)\qquad e = \frac{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}},$$

und zwar stellt dieser Ausdruck die positive oder die negative Entfernung des Punktes von der Ebene dar, je nachdem der Punkt und der Coordinatenursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen oder auf der nämlichen Seite.

Bezeichnen wir daher die Entfernungen der vier Punkte P, P', P'', P''' von der Gegenebene durch e, e', e'', e''' und die obige Wurzel durch w, so hat man:

$$10)\qquad \mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathfrak{D}''' = w^4 . ee'e''e''',$$

wodurch Gleichung 8) übergeht in:

$$11)\qquad \delta = \frac{R}{w^4 . ee'e''e'''} \Delta.$$

Nehmen wir nun an, die vier Punkte P, P', P'', P''' liegen ursprünglich alle auf der nämlichen Seite der Gegenebene, so sind die vier Grössen e, e', e'', e''' entweder sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ; ihr Product ist also jedenfalls positiv. Für diese Lage gilt also: δ hat mit Δ gleiches Vorzeichen —, oder: die zwei Dreikante $p, p'p''p'''$ und $P, P'P''P'''$ sind gleichstimmig, wenn die Substitutionsdeterminante R positiv ist.

Um dann die Verhältnisse auch für andere Lagen der vier Punkte P, P', P'', P''' zu untersuchen, lassen wir dieselben von der eben besprochenen Lage aus sich stetig bewegen. So lange kein Punkt die

* Vergl. v. Staudt, Geometrie der Lage, Art. 187 und 188.

** Vergl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, I. Theil, Art. 32.

unendlich ferne Ebene oder die Gegenebene überschreitet, ändert sich in den Vorzeichen nichts.

Ueberschreitet aber ein Punkt, z. B. P, die unendlich ferne Ebene, so kommt er jetzt auf die andere Seite der Gegenebene zu liegen, e ändert also sein Vorzeichen; es haben folglich jetzt δ und Δ verschiedene Vorzeichen, d. h. die zwei endlichen Tetraeder $pp'p''p'''$ und $PP'P''P'''$ haben entgegengesetzten Sinn (und zwar ist es das letztere, welches seinen Sinn geändert hat). Nun entspricht aber das endliche Tetraeder $pp'p''p'''$ collinear nicht mehr dem endlichen —, sondern vielmehr dem von der unendlich fernen Ebene durchsetzten unendlichen Tetraeder $PP'P''P'''$. Das Dreikant $p, p'p''p'''$ entspricht demgemäss dem Scheiteldreikant der Ecke P des endlichen Tetraeders $PP'P''P'''$. Diese zwei Dreikante sind aber wieder zu einander gleichstimmig.

Würden wir nicht den Scheitelpunkt P, sondern einen der drei anderen Punkte P', P'', P''' die unendlich ferne Ebene überschreiten lassen, so würde das Dreikant $p, p'p''p'''$ einem Nebendreikant der Ecke P des endlichen Tetraeders $PP'P''P'''$ entsprechen, und dieses ist ebenfalls wieder gleichstimmig mit Dreikant $p, p'p''p'''$.

Nehmen wir ferner an, einer der vier Punkte P, P', P'', P''' überschreite die Gegenebene, so überschreitet gleichzeitig im andern System der entsprechende Punkt p die unendlich ferne Ebene. Dabei findet (in Uebereinstimmung mit dem Zeichenwechsel von e) eine Aenderung des Sinnes des endlichen Tetraeders $pp'p''p'''$ statt. Allein es ist jetzt nicht mehr dieses, welches dem endlichen Tetraeder $PP'P''P'''$ collinear entspricht, vielmehr entspricht dem Dreikant $P, P'P''P'''$ das Scheiteldreikant (bezw. ein Nebendreikant) der Ecke p des endlichen Tetraeders $pp'p''p'''$, und diese zwei Dreikante sind wieder gleichstimmig.

Wir erkennen also, dass die Gleichstimmigkeit der zwei Dreikante weder durch ein Ueberschreiten der unendlich fernen Ebene, noch der Gegenebene alterirt wird.

Wir können nun alle möglichen Lagen der Punkte P, P', P'', P''' herstellen dadurch, dass wir einen Punkt nach dem andern die unendlich ferne Ebene oder die Gegenebene überschreiten lassen. Bei keinem Uebergange wird die Gleichstimmigkeit alterirt. — Ebenso würde für den Fall, dass R negativ wäre, die Ungleichstimmigkeit stets erhalten bleiben. —

Uebrigens können wir jene durch die unendlich ferne Ebene durchsetzten Tetraederformen bei der Betrachtung auch leicht umgehen, indem wir die beiden Tetraeder unendlich klein annehmen. Da nämlich bei der Vergleichung der zwei entsprechenden Dreikante $P, P'P''P'''$ und $p, p'p''p'''$ nur die Richtungen der drei von P ausgehenden Tetraederkanten in Betracht kommen, so können wir annehmen, die Punkte P', P'', P''' liegen dem Punkte P unendlich nahe. Es überschreiten alsdann die vier Punkte P, P', P'', P''' die unendlich ferne Ebene oder die Gegenebene stets gleichzeitig; es haben also die vier Factoren e, e', e'', e''' oder $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$ stets das nämliche Vorzeichen, ihr Product ist daher stets positiv. — (Bei genauerer analytischer Ausführung würden wir

$$\begin{aligned} X' &= X + dX, \\ X'' &= X + 2\,dX + d^2X, \\ X''' &= X + 3\,dX + 3\,d^2X + d^3X, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

zu setzen haben und würden dann die Gleichung erhalten:

$$\delta = \frac{R}{\mathfrak{D}^4}\Delta, \quad \text{wo} \quad \Delta = \begin{vmatrix} dX & d^2X & d^3X \\ dY & d^2Y & d^3Y \\ dZ & d^2Z & d^3Z \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt jetzt unmittelbar, dass der übereinstimmende oder entgegengesetzte Sinn von δ und Δ lediglich von dem Vorzeichen von R abhängt.)

Fassen wir schliesslich unser Resultat kurz zusammen, so gelangen wir zu folgendem Satze:

In zwei collinearen räumlichen Systemen sind zwei entsprechende Dreikante entweder stets gleichstimmig oder stets ungleichstimmig. — Ist die collineare Beziehung durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte gegeben, die sich auf zwei gleichstimmige Coordinatensysteme beziehen, so ist die Collineation eine gleichstimmige oder eine ungleichstimmige, je nachdem die Substitutionsdeterminante

$$R \gtrless 0 \tag{12}$$

ist.

Berlin, im Mai 1879.

XXIV.

Ueber ein den Gleichungen der orthogonalen Substitution verwandtes Gleichungssystem.

Von

Dr. A. Börsch,

Assistent im königl. geodätischen Institut in Berlin.

Die beiden Aufgaben:

die einer Ellipse eingeschriebenen Dreiecke grössten Inhalts und die einem Ellipsoid eingeschriebenen Tetraeder grössten Volumens zu finden,

führen auf folgendes Problem.

Es soll die Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} \\ 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} .$$

ein Maximum werden, wenn unter den $n(n+1)$ veränderlichen Grössen $x_{\varkappa\lambda}\begin{pmatrix}\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \dots n \\ \lambda = \quad\ 1,\ 2,\ \dots n\end{pmatrix}$ die $n+1$ Bedingungsgleichungen bestehen

$$p_{\varkappa\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} x^2_{\varkappa\lambda} = 1 \quad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \dots n).$$

Den oben angeführten Aufgaben entsprechen hierbei die Fälle $n=2$ und $n=3$.

Da sich indessen die Auflösung der hieraus resultirenden Gleichungen schliesslich auf die Lösung der Gleichungen der orthogonalen Substitution zurückführen lässt und sich dabei manche bemerkenswerthe Relation ergiebt, so scheint es mir nicht ohne Interesse zu sein, das obige Problem für ein beliebiges ganzzahliges positives n näher zu untersuchen.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, will ich festsetzen, dass, wenn die Buchstaben $\varkappa$, λ, μ, ν als Summations- oder Collectivbuchstaben vorkommen, $\varkappa$ und μ die Werthe $0, 1, 2, \dots n$, λ und ν dagegen die Werthe $1, 2, \dots n$ erhalten sollen

Nach den gewöhnlichen Regeln der Theorie der Maxima und Minima habe ich zunächst

$$\Phi = \Delta + \tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa} \varepsilon_{\varkappa}(p_{\varkappa\varkappa} - 1)$$

zu bilden, wo die $\varepsilon_{\varkappa}$ noch zu bestimmende Grössen bedeuten. Es sind sodann die nothwendigen Gleichungen, welche die $x_{\varkappa\lambda}$ und $\varepsilon_{\varkappa}$ erfüllen müssen,

$$1)\qquad \frac{d\Phi}{dx_{\varkappa\lambda}} = 0, \quad p_{\varkappa\varkappa} - 1 = 0.$$

Bezeichnen wir die Unterdeterminanten n^{ter} Ordnung von Δ mit $s_{\varkappa\mu}$, so haben die Gleichungen 1) die Gestalt

$$2\text{a})\quad \begin{array}{llll} s_{01} + \varepsilon_0 x_{01} = 0, & s_{11} + \varepsilon_1 x_{11} = 0, & \ldots & s_{n1} + \varepsilon_n x_{n1} = 0, \\ s_{02} + \varepsilon_0 x_{02} = 0, & s_{12} + \varepsilon_1 x_{12} = 0, & \ldots & s_{n2} + \varepsilon_n x_{n2} = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{0n} + \varepsilon_0 x_{0n} = 0, & s_{1n} + \varepsilon_1 x_{1n} = 0, & \ldots & s_{nn} + \varepsilon_n x_{nn} = 0; \end{array}$$

$$2\text{b})\quad \begin{array}{l} x^2_{01} + x^2_{02} + \ldots + x^2_{0n} = 1, \\ x^2_{11} + x^2_{12} + \ldots + x^2_{1n} = 1, \\ \cdots\cdots \\ x^2_{n1} + x^2_{n2} + \ldots + x^2_{nn} = 1. \end{array}$$

Es ist nun

$$\Delta = \sum_{\varkappa} s_{\varkappa 0} = \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\lambda}.$$

Da aber eine Determinante verschwindet, wenn in ihr die Elemente einer Reihe denen einer andern parallelen Reihe gleich werden, so erhalten wir, wenn wir in Δ nach und nach die Elemente jeder Colonne denen der ersten Colonne gleich, also sämmtlich gleich 1 setzen, die $n+1$ identischen Gleichungen

$$3)\qquad \sum_{\varkappa} s_{\varkappa\mu} = \begin{cases} \Delta & (\mu = 0), \\ 0 & (\mu = 1, 2, \ldots n). \end{cases}$$

Addire ich von den Gleichungen 2a) jedesmal die, welche in einer Horizontalreihe stehen, so folgen, mit Berücksichtigung von 3), zur Bestimmung der $n+1$ Grössen $\varepsilon_{\varkappa}$ die n homogenen linearen Gleichungen

$$4)\qquad \sum_{\varkappa} \varepsilon_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$5)\qquad \varepsilon_{\varkappa} = \varrho s_{\varkappa 0},$$

wenn ϱ wieder eine noch zu bestimmende Grösse bedeutet.

Setzen wir diese Werthe 5) in die Gleichungen 2a) ein, fügen als erste Reihe zu diesen die $n+1$ identischen Gleichungen

$$s_{00} - s_{00} = 0, \quad s_{10} - s_{10} = 0, \ \ldots \ s_{n0} - s_{n0} = 0$$

hinzu, multipliciren sodann die sämmtlichen Gleichungen der so entstehenden Verticalreihen nach und nach mit den entsprechenden Elementen der sämmtlichen Verticalreihen des Systems

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{01} & x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{matrix}$$

und addiren schliesslich die daraus hervorgegangenen Verticalreihen, so ergiebt sich, wenn wir die Bezeichnung

$$p_{\varkappa\mu} = \sum_{\lambda} x_{\varkappa\lambda} x_{\mu\lambda} = p_{\mu\varkappa}$$

einführen, das Gleichungssystem

$$\begin{matrix} \Delta + (\varrho - 1) s_{00} = 0, & (\varrho p_{10} - 1) s_{10} = 0, & \dots & (\varrho p_{n0} - 1) s_{n0} = 0, \\ (\varrho p_{01} - 1) s_{00} = 0, & \Delta + (\varrho - 1) s_{10} = 0, & \dots & (\varrho p_{n1} - 1) s_{n0} = 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varrho p_{0n} - 1) s_{00} = 0, & (\varrho p_{1n} - 1) s_{10} = 0, & \dots & \Delta + (\varrho - 1) s_{n0} = 0. \end{matrix}$$

Addiren wir die $n+1$ Gleichungen der Diagonale dieses Systems, so erhalten wir

$$(n+1)\Delta + (\varrho - 1)\{s_{00} + s_{10} + \dots + s_{n0}\} = (n+1)\Delta + (\varrho - 1)\Delta = 0.$$

Da aber Δ in unserer Aufgabe sicher von Null verschieden ist, so folgt

$$\varrho = -n$$

und hieraus

$$6) \qquad s_{00} = s_{10} = s_{20} = \dots = s_{n0} = \frac{\Delta}{n+1}.$$

Folglich sind auch diese Grössen von Null verschieden, und wir erhalten also das definitive Gleichungssystem

$$p_{\varkappa\mu} = \begin{cases} 1 & (\varkappa = \mu) \\ -\dfrac{1}{n} & (\varkappa < \mu) \end{cases}$$

oder

$$7) \qquad \begin{matrix} \sum_{\lambda} x^2_{0\lambda} = 1, & \sum_{\lambda} x_{0\lambda} x_{1\lambda} = -\frac{1}{n}, & \sum_{\lambda} x_{0\lambda} x_{2\lambda} = -\frac{1}{n}, & \dots & \dots \sum_{\lambda} x_{0\lambda} x_{n\lambda} = -\frac{1}{n}, \\ & \sum_{\lambda} x^2_{1\lambda} = 1, & \sum_{\lambda} x_{1\lambda} x_{2\lambda} = -\frac{1}{n}, & \dots & \sum_{\lambda} x_{1\lambda} x_{n\lambda} = -\frac{1}{n}, \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \sum_{\lambda} x^2_{n\lambda} = 1. \end{matrix}$$

Dies sind $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen zwischen $n(n+1)$ Unbekannten. Doch sind diese Gleichungen, welche schon eine gewisse Aehnlichkeit mit denen der orthogonalen Substitution zeigen, nicht alle von einander unabhängig, vielmehr ist immer Eine die Folge aller übrigen. Denn die letzte Gleichung $p_{nn} = 1$ folgt z. B. aus allen vorhergehenden, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt.

Schliesse ich nämlich von den Gleichungen 7) die letzte aus, so folgen aus den übrigen die Relationen

$$\sum_{\lambda} p_{\varrho\lambda} = 0 \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots n-1)$$

oder

$$\sum_{\lambda} \left\{ x_{\varrho\lambda} \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} \right\} = 0.$$

Da aber die Determinante dieses Systems, die Grössen $\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda}$ als Unbekannte betrachtet,

$$\begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,n} \end{vmatrix} = (-1)^n s_{n0} = (-1)^n \frac{\Delta}{n+1}$$

nach 6) von Null verschieden ist, so ergeben sich für die $x_{\varkappa\lambda}$ ferner die folgenden $n+1$ Gleichungen

8) $$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} = 0.$$

Diese hätte man zwar ebenso einfach aus dem System 4) finden können, hier aber mussten wir sie aus 7) ohne Benutzung der letzten Gleichung ableiten.

Quadriren und addiren wir die Gleichungen 8), so folgt unter Benutzung von 7), die letzte dieser Gleichungen wieder ausgeschlossen, gerade diese letzte

$$p_{nn} = 1.$$

Da also von den $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen 7) Eine eine Folge der übrigen ist und deshalb nur $\frac{n(n+3)}{2}$ von einander unabhängige übrig bleiben, so muss sich jede der $n(n+1)$ Unbekannten als Function von

$$n(n+1) - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

willkürlichen Grössen darstellen lassen.

Und zwar kann dies, wie ich weiter unten beweisen werde, auf rationale Weise immer dann durchgeführt werden, wenn ich ein constantes Werthsystem $x_{\varkappa\lambda}$, welches den Gleichungen 7) Genüge leistet, angeben kann. Doch ist es mir nur in den Fällen $n=2$ und $n=3$, welche den erwähnten geometrischen Aufgaben entsprechen, sowie auch noch in dem Falle $n=4$ gelungen, ein solches constantes Werthsystem $x_{\varkappa\lambda}$ aufzufinden.

Die Gleichungen 7) reichen jedoch, ohne dass man ihre Lösungen zu kennen braucht, schon aus, um sowohl den Maximal- wie auch den Minimalwerth von Δ zu bestimmen.

Es ergiebt sich nämlich aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten und mit Benutzung von 7)

$$\varDelta^2 = \begin{vmatrix} 1+p_{00}, & 1+p_{01}, & \dots & 1+p_{0n} \\ 1+p_{10}, & 1+p_{11}, & \dots & 1+p_{1n} \\ . & . & . & . \\ 1+p_{n1}, & 1+p_{n2}, & \dots & 1+p_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{n-1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & 2 & \dots & \frac{n-1}{n} \\ . & . & . & . \\ \frac{n-1}{n} & \frac{n-1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Um den Werth dieser Determinante zu bestimmen, untersuchen wir die allgemeinere $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ . & . & . & . & . \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix}_{(n+1)} .$$

Durch Anwendung bekannter Determinantensätze erhält man

$$D = (x-y)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+ny \\ -1 & +1 & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & -1 & +1 & \dots & 0 & y \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$= (-1)^n (x-y)^n (x+ny) \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & +1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}_{(n)}$$

und hieraus endlich

$$D = (x-y)^n (x+ny).$$

Setzen wir nun

$$x = 2, \quad y = \frac{n-1}{n},$$

so erhalten wir

$$\varDelta = \pm \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}.$$

Also für alle Werthsysteme der $x_{\varkappa\lambda}$, welche die Gleichungen 7) befriedigen, hat $\varDelta$ diesen constanten Wurzelwerth, und zwar giebt der positive Werth der Quadratwurzel das Maximum und der negative das Minimum von $\varDelta$ an. Sollte sich für ein bestimmtes Werthsystem der $x_{\varkappa\lambda}$ der Minimalwerth ergeben, so braucht man nur den $x_{\varkappa\lambda}$ einer Colonne das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben, um den gesuchten Maximalwerth zu erhalten.

Statt der Gleichungen 7) lässt sich, ähnlich wie bei den Gleichungen der orthogonalen Substitution, noch ein anderes System von $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängigen, fast ebenso einfachen Gleichungen aufstellen, bei denen aber $\varkappa$ als Summationsbuchstabe auftritt.

Es ist nämlich nach 2), 5) und 6)

$$s_{\varkappa\mu} = \begin{cases} \dfrac{\varDelta}{n+1} & (\mu = 0) \\ \dfrac{n}{n+1}\varDelta x_{\varkappa\mu} & (\mu = 1, 2, \ldots n). \end{cases}$$

Nun bestehen die Gleichungen

$$\varDelta = \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\lambda}$$

und daher auch

$$\varDelta = \frac{n}{n+1}\varDelta \sum_{\varkappa} x^2_{\varkappa\lambda},$$

also folgt

9) $$\sum_{\varkappa} x^2_{\varkappa\lambda} = \frac{n+1}{n}.$$

Ferner ist

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\nu} = 0 \quad (\lambda \gtrless \nu), \quad \frac{n}{n+1}\varDelta \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa\nu} = 0$$

oder

10) $$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa\nu} = 0 \quad (\lambda < \nu).$$

Und endlich, eigentlich noch zur Gruppe 10) gehörig, die Gleichungen 8)

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} = 0,$$

oder statt dessen, wenn ich sie quadrire mit Benutzung von 9),

11) $$\sum_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\lambda} x_{\mu\lambda} = -\tfrac{1}{2}\frac{n+1}{n} \quad (\varkappa < \mu).$$

Die Gleichungen 9), 10) und 8), resp. 11) bilden wieder ein System von $\frac{n(n+3)}{2}$ von einander unabhängigen Gleichungen, welches dem System 7) äquivalent ist.

Ich kehre zur Betrachtung des Systems 7) zurück. Dieses lässt sich in folgender Weise weiter behandeln.

Ich substituire

12) $$x_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu} a_{\nu\lambda} x'_{\varkappa\nu},$$

wo die n^2 Grössen $a_{\nu\lambda}$ nur den $\frac{n(n+1)}{2}$ von einander unabhängigen Gleichungen der orthogonalen Substitution

13) $$\sum_{\lambda} a_{\nu\lambda} a_{\nu'\lambda} = \begin{cases} 1 & (\nu = \nu') \\ 0 & (\nu \gtrless \nu') \end{cases}$$

Genüge leisten sollen, so dass also von ihnen ebenso, wie von den $x_{\varkappa\lambda}$, noch $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlich bleiben. Durch diese Substitution gehen die Gleichungen 7), wie sich sehr leicht zeigen lässt, in sich selbst zurück, nur mit dem Unterschiede, dass statt der Grössen $x_{\varkappa\lambda}$ die $x'_{\varkappa\lambda}$ auftreten.

Hieraus folgt: Kann ich irgend ein beliebiges constantes Werthsystem $x'_{\varkappa\lambda}$, welches den Gleichungen 7) genügt, finden, so geben die Gleichungen 12) sofort die allgemeinste Lösung von 7), wenn ich im Stande bin, die $a_{\nu\lambda}$ durch $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürliche Grössen darzustellen.

Dieses Letztere ist aber Cayley mit Hilfe der Determinanten sogar auf rationale Weise bereits gelungen.*

Um also wirklich die Grössen $x_{\varkappa\lambda}$ durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter rational darzustellen, kommt es nur noch darauf an, beliebige constante Werthsysteme $x'_{\varkappa\lambda}$ zu finden.

Es ist mir dies aber, wie ich oben schon erwähnt habe, nur für die Fälle $n=2$, 3, 4 gelungen.

Für $n=2$ und $n=3$ findet man leicht durch geometrische Betrachtungen die folgenden Werthsysteme:

$$(n=2)\qquad \begin{array}{ll} x'_{01}=0, & x'_{02}=1, \\ x'_{11}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, & x'_{12}=-\tfrac{1}{2}, \\ x'_{21}=+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, & x'_{22}=-\tfrac{1}{2}; \end{array}$$

$$(n=3)\qquad \begin{array}{lll} x'_{01}=0, & x'_{02}=0, & x'_{03}=+1, \\ x'_{11}=+\tfrac{2}{3}\sqrt{2}, & x'_{12}=0, & x'_{13}=-\tfrac{1}{3}, \\ x'_{21}=-\tfrac{1}{3}\sqrt{2}, & x'_{22}=+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}, & x'_{23}=-\tfrac{1}{3}, \\ x'_{31}=-\tfrac{1}{3}\sqrt{2}, & x'_{32}=-\tfrac{1}{3}\sqrt{6}, & x'_{33}=-\tfrac{1}{3}. \end{array}$$

Durch Probiren und nach Analogie der früheren Fälle fand ich endlich noch für $n=4$

$$(n=4)\qquad \begin{array}{llll} x'_{01}=0, & x'_{02}=0, & x'_{03}=0, & x'_{04}=+1, \\ x'_{11}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{12}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{13}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{14}=-\tfrac{1}{4}, \\ x'_{21}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{22}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{23}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{24}=-\tfrac{1}{4}, \\ x'_{31}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{32}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{33}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{34}=-\tfrac{1}{4}, \\ x'_{41}=+\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{42}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{43}=-\frac{\sqrt{5}}{4}, & x'_{44}=-\tfrac{1}{4}, \end{array}$$

so dass die allgemeinen Lösungen für $n=4$, ausgedrückt durch die $a_{\nu\lambda}$, sind

$$x_{01}=a_{41},\quad x_{02}=a_{42},\quad x_{03}=a_{43},\quad x_{04}=a_{44},$$

$$x_{11}=+\frac{\sqrt{5}}{4}a_{11}+\frac{\sqrt{5}}{4}a_{21}+\frac{\sqrt{5}}{4}a_{31}-\tfrac{1}{4}a_{41}\ \text{u. s. w.}$$

---

* Vergl. Crelle's Journal, Bd. 32 S. 119, sowie Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 3. Aufl., § 14.

Der Fall $n=2$ lässt noch eine andere Behandlungsweise der Gleichungen 7) zu, die ich hier noch anfügen will.

Die Gleichungen lauten hier

$$14)\quad \begin{array}{lll} x^2_{01}+x^2_{02}=1, & x_{01}x_{11}+x_{02}x_{12}=-\tfrac{1}{2}, & x_{01}x_{21}+x_{02}x_{22}=-\tfrac{1}{2}, \\ & x^2_{11}+x^2_{12} \quad =1, & x_{11}x_{21}+x_{12}x_{22}=-\tfrac{1}{2}, \\ & & x^2_{21}+x^2_{22} \quad =1 \end{array}$$

und es ist nach dem Früheren

$$\varDelta=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}, \quad s_{\varkappa 0}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Ich setze

$$\begin{array}{lll} z_1=x_{01}+ix_{02}, & z_2=x_{11}+ix_{12}, & z_3=x_{21}+ix_{22}, \\ z'_1=x_{01}-ix_{02}, & z'_2=x_{11}-ix_{12}, & z'_3=x_{21}-ix_{22}, \end{array}$$

wobei i, wie gewöhnlich, $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Hieraus ergeben sich mit Benutzung der für die $x_{\varkappa\lambda}$ geltenden Gleichungen die folgenden neun Relationen:

$$15)\quad \begin{array}{lll} \alpha)\ z_1z'_1=1, & \beta)\ z_1z'_2=e^{\frac{2\pi i}{3}}, & \gamma)\ z_1z'_3=e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\ \alpha')\ z_2z'_1=e^{\frac{2\pi i}{3}}, & \beta')\ z_2z'_2=1, & \gamma')\ z_2z'_3=e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \\ \alpha'')\ z_3z'_1=e^{-\frac{2\pi i}{3}}, & \beta'')\ z_3z'_2=e^{\frac{2\pi i}{3}}, & \gamma'')\ z_3z'_3=1. \end{array}$$

Denn es ist z. B.

$$z_1z'_2=x_{01}x_{11}+x_{02}x_{12}-i\{x_{01}x_{12}-x_{02}x_{11}\}=p_{01}-is_{20}$$
$$=-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=e^{-\frac{2\pi i}{3}} \text{ u. s. w.}$$

Bilde ich nun $\alpha)+\alpha')+\alpha'')$, so bekommt man, da z'_1 von Null verschieden sein muss,

$$16)\qquad z_1+z_2+z_3=0.$$

Ferner erhalte ich aus $\alpha')\alpha'')+\alpha'')\alpha)+\alpha)\alpha')$

$$17)\qquad z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2=0.$$

Endlich folgt aus $\alpha)\beta')\gamma'')$

$$(z_1z_2z_3)(z'_1z'_2z'_3)=1$$

und da $z_1z_2z_3$ und $z'_1z'_2z'_3$ conjugirt complexe Grössen sind, so müssen beide Producte den absoluten Betrag 1 haben, so dass wir setzen können

$$18)\qquad z_1z_2z_3=e^{\varphi i},$$

wo φ eine beliebige Grösse ist.

Die Ausdrücke 16), 17), 18) sind aber die Coefficienten einer Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln z_1, z_2, z_3 sind und welche die Gestalt hat

$$x^3-e^{\varphi i}=0.$$

Ihre Wurzeln sind

$$z_1 = e^{\frac{\varphi i}{3}}, \quad z_2 = e^{\frac{\varphi + 2\pi}{3} i}, \quad z_3 = e^{\frac{\varphi - 2\pi}{3} i}.$$

Hiernach findet man sofort

$$z'_1 = e^{-\frac{\varphi i}{3}}, \quad z'_2 = e^{-\frac{\varphi + 2\pi}{3} i}, \quad z'_3 = e^{-\frac{\varphi - 2\pi}{3} i}$$

und erhält schliesslich

$$x_{01} = \cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_{11} = \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad x_{21} = \cos\frac{\varphi - 2\pi}{3},$$

$$x_{02} = \sin\frac{\varphi}{3}, \quad x_{12} = \sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad x_{22} = \sin\frac{\varphi - 2\pi}{3}.$$

Für $\frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ergiebt sich das oben angeführte specielle Werthsystem der $x_{\varkappa\lambda}$.

Kleinere Mittheilungen.

XXI. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle.

(Hierzu Taf. VI Fig. 1.)

Errichtet man im Mittelpunkte O eines Ellipsoids E auf einem Centralschnitte desselben ein Perpendikel und trägt darauf zwei Strecken OM und Om ab gleich den Halbaxen $OC=r$ und $OC'=r_1$ des Centralschnittes, so liegen die Punkte M und m auf der Wellenfläche und zwar soll M auf dem äussern und m auf dem innern Mantel liegen.

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$2)\qquad x^2+y^2+z_2=r^2,$$

$$3)\qquad \frac{r^2-a^2}{a^2}x^2+\frac{r^2-b^2}{b^2}y^2+\frac{r^2-c^2}{c^2}z^2=0,$$

$$4)\qquad \frac{a^2}{r^2-a^2}x^2+\frac{b^2}{r^2-b^2}y^2+\frac{c^2}{r^2-c^2}z^2=0.$$

1) ist die Gleichung von E (erstes Ellipsoid nach Plücker, auch Ergänzungsellipsoid genannt), 2) diejenige einer concentrischen Kugel; 3) wird erhalten aus 1) und 2) durch Subtraction und stellt einen Kegel vor, welcher E in einer sphärischen Linie schneidet, weil die Schnittlinie von 1) und 3) auch auf 2) liegt. Dieser Kegel berührt die Ebene des Centralschnittes längs $OC=r$, denn nimmt man auf der sphärischen Linie einen unendlich nahen Punkt C'' an, so ist $OC''=r$, die Tangente in C steht senkrecht auf OC und ist somit eine Halbaxe des der Berührungsebene des Kegels entsprechenden Centralschnitts von E, welcher mit dem obengenannten zusammenfallen muss, da sich durch OC nur Eine Ebene legen lässt, welche E in einer Ellipse schneidet, von welcher OC eine Halbaxe ist. Setzt man aber in 2) und 3) r_1 statt r, so erhält man einen andern Kegel, von dem sich ebenso beweisen lässt, dass er den Centralschnitt in $OC'=r_1$ berührt.

4) ist die Gleichung des Ergänzungskegels, dessen Erzeugende OM senkrecht steht auf der Tangentialebene OCC' von 3) und dessen Focalen den Gleichungen

$$5)\qquad \frac{z}{x}=\pm\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\quad\text{und}\quad y=0$$

entsprechen. Da sie von r unabhängig sind, so sind die Kegel 4) confocal, ihre Focalen heissen die secundären optischen Axen von E. Ersetzt man in 4) r durch r_1, so hat man einen zweiten Ergänzungskegel, dessen Erzeugende Om gleichfalls senkrecht steht auf der Ebene des Centralschnitts, also ist OmM die Durchschnittslinie beider Kegel, die sich, da sie confocal sind, rechtwinklig schneiden. Man erhält so zwei Systeme von Kegeln; die Endpunkte M und m der Durchschnittslinie von je zwei derselben liegen auf einer Fläche, deren Gleichung auch 4) ist, wenn man für r^2 seinen Werth aus 2) setzt. Entwickelt nimmt sie diese Form an:

$$\begin{gathered}(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\ -\{a^2(b^2+c^2)x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+c^2(a^2+b^2)z^2\}+a^2b^2c^2=0,\end{gathered}\tag{6}$$

welches die bekannte Gleichung der Wellenfläche ist.

Wir führen nun ein zweites Ellipsoid E' (auch Polarisationsellipsoid genannt) ein, errichten im Mittelpunkte eines Centralschnitts desselben ein Perpendikel und tragen darauf zwei Strecken $ON=\varrho$, $On=\varrho'$ ab, gleich den reciproken Werthen der Halbaxen OD und OD' des Centralschnitts, also $\varrho=\frac{1}{OD}$ und $\varrho'=\frac{1}{OD'}$, so liegen die Punkte N und n auf der Wellengeschwindigkeitsfläche (oder der Fusspunktsfläche der Wellenfläche), deren Gleichung auf ähnliche Art erhalten wird:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1,\tag{7}$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\varrho^2},\tag{8}$$

$$(\varrho^2-a^2)x^2+(\varrho^2-b^2)y^2+(\varrho^2-c^2)z^2=0,\tag{9}$$

$$\frac{x^2}{\varrho^2-a^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=0.\tag{10}$$

7) ist die Gleichung von E', 8) diejenige einer concentrischen Kugel, 9) wird aus 7) und 8) durch Subtraction erhalten und stellt einen Kegel vor, welcher E' in einer sphärischen Curve schneidet und den Centralschnitt von E' in OD berührt; ersetzt man in 9) ϱ durch ϱ', so entsteht ein zweiter Kegel, dessen Berührungslinie mit dem Centralschnitt OD' ist. 10) ist der Ergänzungskegel, seine Erzeugende ON steht senkrecht auf der Ebene des Centralschnitts und seine Focallinien entsprechen den Gleichungen

$$\frac{z}{x}=\pm\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}} \text{ und } y=0.\tag{11}$$

Die Kegel 10) sind also ebenfalls confocal, ihre Focallinien sind die wahren optischen Axen. Man erhält, wie oben, zwei Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Kegeln, die Punkte N und n liegen auf einer Durchschnittslinie von zwei Kegeln und auf einer Fläche, deren Gleichung auch 10) ist, wenn man darin $\varrho^2=x^2+y^2+z^2$ setzt; entwickelt nimmt sie die Form an

$$12)\quad (x^2+y^2+z^2)^3-\{(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\}(x^2+y^2+z^2)$$
$$+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=0.$$

Da der Halbmesser der Kugel 8) $\frac{1}{\varrho}=OD$ ist, so erhält man durch diese Substitution den Durchschnitt des Kegels 10) mit einer Kugel vom Halbmesser $\varrho=\frac{1}{OD}=ON$, d. h. 12 (oder 10) sind die Gleichungen der Wellengeschwindigkeitsfläche.

Die Construction beider Flächen geschieht am einfachsten mit Hilfe der Ergänzungskegel 4) und 10), welche sie in sphärischen Linien schneiden. Bei der Wellenfläche erhält man durch Combination von 2) und 4)

$$13)\quad \frac{x^2}{c^2\frac{r^2-a^2}{c^2-a^2}}+\frac{y^2}{c^2\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}}=1,\qquad \frac{x^2}{b^2\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}}+\frac{z^2}{b^2\frac{r^2-c^2}{b^2-c^2}}=1.$$

Diese Gleichungen stellen die Projectionen einer sphärischen Curve vor, welche der Punkt M auf dem äussern Mantel beschreibt, und die auf der Kugel r liegt. Aus den Identitäten

$$14)\quad \frac{c^2\frac{r^2-a^2}{c^2-a^2}}{c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}+\frac{c^2\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}}{c^2\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}}=1,\qquad \frac{b^2\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}}{b^2\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}+\frac{b^2\frac{r^2-c^2}{b^2-c^2}}{b^2\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}=1$$

folgt, dass die Axen dieser Projectionen in der xy-Ebene Coordinaten einer Hilfs-Ellipse und Hyperbel, und in der xz-Ebene einer andern Hilfsellipse sind, und dass die Curven hier eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Der innere Mantel wird von denselben Kegeln in ellipsoidischen Curven geschnitten, weil sie zugleich auf dem Ellipsoid

$$15)\quad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\frac{a^2b^2c^2}{r^2}$$

liegen. Um dies nachzuweisen, lege man im Punkt P an E eine Tangentialebene, welche OM senkrecht schneidet und deren Abstand von O $=p$ ist. Nun besteht die Relation $OC.OC'.p=abc$ oder $r.r_1p=abc$; wenn r constant ist, so ist es auch das Product r_1p, somit muss m auf der dem Polarisationsellipsoid ähnlichen Fläche 15) liegen.

Die Gleichungen der ellipsoidischen Curven erhält man durch Elimination aus 4) und 15)

$$16)\quad \frac{x^2}{\frac{b^2c^2}{r^2}\cdot\frac{r^2-a^2}{c^2-a^2}}+\frac{y^2}{\frac{a^2c^2}{r^2}\cdot\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}}=1,\qquad \frac{x^2}{\frac{b^2c^2}{r^2}\cdot\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}}+\frac{z^2}{\frac{a^2b^2}{r^2}\cdot\frac{r^2-c^2}{b^2-c^2}}=1.$$

Die Axen dieser Kegelschnitte entsprechen folgenden Identitäten:

$$17)\quad \frac{\frac{b^2c^2}{r^2}\,\frac{r^2-a^2}{c^2-a^2}}{c^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}+\frac{\frac{a^2c^2}{r^2}\,\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}}{c^2\,\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}}=1,\quad \frac{\frac{b^2c^2}{r^2}\,\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}}{b^2\,\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}+\frac{\frac{a^2b^2}{r^2}\,\frac{r^2-c^2}{b^2-c^2}}{b^2\,\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}=1,$$

also sind sie die Coordinaten derselben Hilfscurven, wie oben, d. h.:

Die Projection einer sphärischen Curve des äussern Mantels fällt mit derjenigen einer ellipsoidischen des innern Mantels zusammen, und umgekehrt, da aus dem Gesagten unmittelbar folgt, dass, wenn m sich auf einer sphärischen Curve bewegt, M eine ellipsoidische beschreibt.

Wenn man die Gleichung von E in dieser Form schreibt:

$$18)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\beta^2}+\frac{z^2}{a^2-\gamma^2}=1,$$

wo $\beta^2=a^2-b^2$ und $\gamma^2=a^2-c^2$, so stellt sie zugleich zwei confocale Hyperboloide (μ) und (ν) vor, deren Gleichungen aus 18) folgen, wenn man a durch μ oder ν ersetzt. Wir nehmen an, dass sich die Flächen (μ) und (ν) im Punkte P schneiden, dessen Tangentialebene senkrecht auf OM steht oder mit dem Centralschnitt von E parallel ist. Die Tangenten der beiden Durchschnittslinien oder der Krümmungslinien von E sind parallel mit den Axen des Centralschnitts und zwar ist OC parallel mit der Krümmungslinie (μ) und OC' parallel mit (ν). Man hat nun

$$19)\qquad r^2=a^2-\nu^2,\qquad\qquad 20)\qquad r_1^2=a^2-\mu^2.$$

Aus 19) folgt, dass, wenn P sich auf der Krümmungslinie (ν) bewegt, M auf der Wellenfläche eine sphärische Curve (also m eine ellipsoidische) beschreibt; bewegt sich aber P auf der Krümmungslinie (μ), so beschreibt m eine sphärische und M eine ellipsoidische Linie.

X, Y, Z seien die Richtungscosinus der durch P gehenden Normale von E, also auch von dem mit ihr parallelen Radius OM oder Om der Wellenfläche. Nun ist

$$21)\qquad p=\frac{a\sqrt{a^2-\beta^2}\,\sqrt{a^2-\gamma^2}}{r r_1},$$

$$22)\quad X=\frac{\mu\nu p}{a\beta\gamma},\quad Y=\frac{\sqrt{\mu^2-\beta^2}\,\sqrt{\nu^2-\beta^2}}{\sqrt{a^2-\beta^2}\,\beta\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}p,\quad Z=\frac{\sqrt{\mu^2-\gamma^2}\,\sqrt{\nu^2-\gamma^2}}{\sqrt{a^2-\gamma^2}\,\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\,\gamma}p.$$

Wenn man auf E einen zweiten Punkt P' annimmt, durch welchen die Krümmungslinien (μ') und (ν') gehen, so bilden die Durchschnitte dieser vier Krümmungslinien ein Viereck $PP''P'P'''$ (Fig. 13), in welchem P und P', P'' und P''' Gegenecken sind. In P'' schneiden sich die Linien (μ') und (ν), in P''' (μ) und (ν'). Auf dem äussern Mantel der Wellenfläche erhält man vier correspondirende Punkte $MM''M'M'''$ und auf dem innern $mm''m'm'''$. In dem ersten Viereck sind die Gegenseiten MM''' und $M''M'$ sphärische Linien, die beiden anderen ellipsoidische, in dem andern Viereck dagegen sind mm''' und $m''m'$ ellipsoidische und die anderen Gegenseiten sphärische Linien. Bezeichnen wir die Richtungscosinus in den Punkten $P'P''P'''$ mit $X'Y'Z'$, $X''\ldots$, so findet man leicht aus 22)

$$23)\qquad XX'+YY'+ZZ'=X''X'''+Y''Y'''+Z''Z''',$$

also sind die Winkel MOM' und $M''OM'''$ einander gleich. Da nun $OM=OM'''$ und $OM'=OM''$ ist, so folgt der Satz:

In einem aus zwei sphärischen und zwei ellipsoidischen Linien auf einem Mantel der Wellenfläche gebildeten Viereck schliessen die nach zwei Gegenecken gezogenen Radien gleiche Winkel ein und die Verbindungslinien derselben sind einander gleich.

Dieser Satz lässt sich auch in der Form aussprechen:

Zwei Paare sich rechtwinklig schneidender Kegel, deren Focallinien die secundären optischen Axen sind, schneiden aus einem Mantel der Wellenfläche ein Viereck aus, in welchem die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich sind.

Die vier Durchschnittslinien von zwei Paaren confocaler Kegel, welche sich rechtwinklig schneiden, bilden eine Pyramide, deren Seiten von den Kegelflächen gebildet werden und in welcher je zwei Gegenkanten gleiche Winkel einschliessen. Somit findet dieser Satz auch Anwendung auf die Wellengeschwindigkeitsfläche, nur sind hier die Focallinien die wahren optischen Axen.

Die Gleichungen der sphärischen Curven dieser Fläche erhält man durch Elimination aus 10) und $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$

$$24)\qquad \frac{x^2}{\varrho^2\dfrac{a^2-\varrho^2}{a^2-c^2}}+\frac{y^2}{\varrho^2\dfrac{b^2-\varrho^2}{b^2-c^2}}=1,\qquad \frac{x^2}{\varrho^2\dfrac{a^2-\varrho^2}{a^2-b^2}}+\frac{z^2}{\varrho^2\dfrac{\varrho^2-c^2}{b^2-c^2}}=1.$$

Der innere Mantel wird von denselben Kegeln, auf welchen die sphärischen Curven liegen, in Linien geschnitten, die zugleich auf der Fläche

$$25)\qquad \frac{b^2c^2}{\varrho^2}x^2+\frac{c^2a^2}{\varrho^2}y^2+\frac{a^2b^2}{\varrho^2}z^2=(x^2+y^2+z^2)^2$$

liegen. Um dies nachzuweisen, lege man im Punkte Q an das Polarisationsellipsoid E' eine Tangentialebene, welche ON senkrecht in Q' schneidet, also parallel mit dem Centralschnitt von E' ist, und deren Abstand von O $=q$ ist. Nun hat man, ähnlich wie oben, $OD.OD'.q=\dfrac{1}{abc}$ oder $\dfrac{q}{\varrho\varrho'}=\dfrac{1}{abc}$.

Ist ϱ constant, so ist es auch $\dfrac{q}{\varrho'}$. Da nun Q' auf der Fusspunktenfläche von E' liegt, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=(x^2+y^2+z^2)^2,$$

so muss n auf der ihr ähnlichen Fläche 25) liegen.

Man kann nun, wie bei der Wellenfläche, so auch hier durch Einführung elliptischer Coordinaten für E zeigen, dass, wenn Q sich auf einer Krümmungslinie von E' bewegt, die Punkte D oder D' auf E' und N oder n auf der Wellengeschwindigkeitsfläche sphärische Curven beschreiben, und findet, dass der obige Satz über die Entfernungen der Gegenecken auch bei einem Viereck auf der Wellengeschwindigkeitsfläche gilt, welches von solchen Kegeln gebildet wird, deren Focallinien die wahren optischen Axen sind.

Die Gleichung einer geodätischen Linie auf E ist

26) $$\mu^2 \sin^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \alpha^2.$$

i ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie in einem ihrer Punkte P mit der Krümmungslinie (ν) bildet, und α ist die Hauptaxe (in der Richtung der x) von derjenigen confocalen Fläche (α), welche von sämmtlichen Tangenten der geodätischen Linie berührt wird, also constant. Setzen wir für μ und ν ihre Werthe aus 19) und 20), so ergiebt sich die Relation

27) $$r^2 \cos^2 i + r_1^2 \sin^2 i = a^2 - \alpha^2,$$

welche der correspondirenden Curve angehört, die der Punkt M oder m auf der Wellenfläche beschreibt, ohne dass i seine soeben angeführte Bedeutung ändert. Wenn P in einem Nabelpunkte von E ist, so fallen die Punkte M und m zusammen und OM ist die secundäre optische Axe; die Fläche α) wird zur Focalhyperbel, deren Gleichung

28) $$\frac{x^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \beta^2} = 1$$

ist und welche die Tangenten der vom Nabelpunkt ausgehenden geodätischen Linien schneiden. Wir haben also in 27) α durch β zu ersetzen und erhalten die Gleichung

29) $$r^2 \cos^2 i + r_1^2 \sin^2 i = b^2.$$

Diese geodätischen Linien haben die Eigenschaft, dass sie sich in dem entgegengesetzten Nabelpunkte schneiden, woraus folgt, dass die ihnen correspondirenden Curven auf der Wellenfläche, die von einem Endpunkte der secundären optischen Axe ausgehen, in dem entgegengesetzten Endpunkte dieser Axe zusammenlaufen.

Reutlingen, Juni 1879. Dr. O. Böklen.

XXII. Neue geometrische Darstellung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid.

Schreiben wir die Gleichung des Ellipsoids in der Form

1) $$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} + \frac{z^2}{\beta} = 1,$$

so kann man die Differentialgleichung der geodätischen Linie in die Form setzen

$$2)\qquad \left(1+\frac{\alpha-\beta}{\beta}\cdot\frac{z^2}{\beta}\right)dz^2=\left(1-\frac{k^2}{\alpha}-\frac{z^2}{\beta}\right)ds^2.$$

Ferner erkennt man leicht, dass die Curve den Parallelkreis, welcher durch den Punkt $x=0$, $y=k$, $z=\sqrt{\beta\left(1-\frac{k^2}{\alpha}\right)}$ geht, berühren, alsdann den Aequator schneiden, hierauf den jenseitigen gleichen Parallelkreis berühren, den Aequator abermals schneiden wird u. s. w. Die Curve liegt also zwischen zwei gleichen Parallelkreisen, dieselben unendlich oft berührend. Die Wahl dieser Parallelkreise ist entscheidend für die Bestimmung von k und umgekehrt.

Projiciren wir nun die Curve auf die Aequatorialebene und bedienen uns der Polarcoordinaten ϱ und φ, so haben wir die beiden Gleichungen

$$3)\qquad \frac{z^2}{\beta}=1-\frac{\varrho^2}{\alpha},$$

$$4)\qquad ds^2=dz^2+\varrho^2.d\varphi^2+d\varrho^2.$$

Durch leichte Rechnungen erhält man dann aus 2)

$$5)\qquad d\varphi=k\frac{\sqrt{\alpha^2-(\alpha-\beta)\varrho^2}}{\sqrt{\alpha}\,\varrho\sqrt{\varrho^2-k^2}\sqrt{\alpha-\varrho^2}}\,d\varrho.$$

Die hierdurch dargestellte Curve liegt nun zwischen den Peripherien zweier Kreise, welche concentrisch liegen und die Radien k und $\sqrt{\alpha}$ besitzen. Sie berührt dieselben abwechselnd, in unendlich vielen äquidistanten Punkten.

Denken wir uns nun im Mittelpunkte einer Ellipse mit den Halbaxen a und b zur Ebene der Ellipse die Senkrechte gleich c gezogen und den freien Endpunkt mit allen Punkten der Basisellipse verbunden, so erhalten wir einen geraden Kegel mit elliptischer Basis. Breiten wir nun den Mantel desselben in der Ebene abrollend aus, so wird der Mantelsaum als Curve erscheinen, welche ganz zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien $\sqrt{a^2+c^2}$ und $\sqrt{b^2+c^2}$ liegt, dieselben abwechselnd in unendlich vielen äquidistanten Punkten berührend. Ich wurde hierdurch veranlasst, eine Identification des Mantelsaums und der obigen Projection der geodätischen Linie zu versuchen. Dieselbe ist in der That, wie wir sofort sehen werden, immer möglich.

Ein Punkt der Basisellipse habe die Coordinaten x, y. Dann setzen wir

$$x=a.\cos\psi,\quad y=b.\sin\psi.$$

Nun ist die Entfernung p der Ellipsentangente im Punkte x, y vom Centrum der Basisellipse

$$p^2=\frac{a^2b^2}{a^2.\sin^2\psi+b^2.\cos^2\psi}$$

und die Entfernung der Spitze des Kegels von jener Tangente

$$\sqrt{c^2+p^2}.$$

Das Bogenelement der Ellipse ist

$$ds=\sqrt{a^2.\sin^2\psi+b^2.\cos^2\psi}\,.\,d\psi.$$

Nehmen wir daher das Element der Mantelfläche dieses begrenzten Kegels, so finden wir seinen Werth

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+p^2}\,.\,ds.$$

Bedienen wir uns andererseits für den Mantelsaum der Polarcoordinaten ϱ und φ, so wird das Element der Mantelfläche

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2\,.\,d\varphi.$$

Daher die beiden Gleichungen

$$\text{6)}\qquad \varrho^2.\,d\varphi=\sqrt{a^2b^2+a^2c^2.\sin^2\psi+b^2c^2.\cos^2\psi}\,.\,d\psi,$$

$$\text{7)}\qquad \varrho^2=c^2+x^2+y^2=c^2+a^2.\cos^2\psi+b^2.\sin^2\psi.$$

Hieraus leitet man ohne Mühe ab

$$\text{8)}\qquad d\varphi=\frac{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)-c^2\varrho^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2-c^2}\sqrt{a^2+c^2-\varrho^2}}\,d\varrho.$$

Diese Gleichung kann mit 5) identificirt werden, wenn man setzt

$$b^2+c^2=k^2,\quad a^2+c^2=\alpha,\quad (c^2+a^2)(c^2+b^2)=c^2.\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}.$$

Hieraus folgt

$$\text{9)}\qquad c^2=k^2.\frac{\alpha-\beta}{\alpha},\quad b^2=k^2.\frac{\beta}{\alpha},\quad a^2-b^2=\alpha-k^2.$$

Daher der Satz:

Wenn auf dem Rotationsellipsoid eine beliebige geodätische Linie gegeben ist, so kann man immer einen begrenzten elliptischen Kegel construiren, dessen abgerollter Mantelsaum mit der Projection der geodätischen Linie auf die Aequatorialebene identisch ist.

Coesfeld, im Januar 1879. Dr. K. Schwering.

XXIII. Ueber die Theilung des Winkels in beliebig viel gleiche Theile.

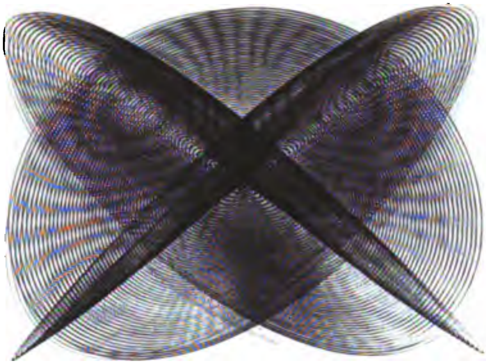
(Hierzu Taf. VI Fig. 2.)

Die Spirale des Archimedes besitzt die bekannte Eigenschaft, dass die Radien vectoren proportional den zugehörigen Polarwinkeln sind, dass also in Fig. 14

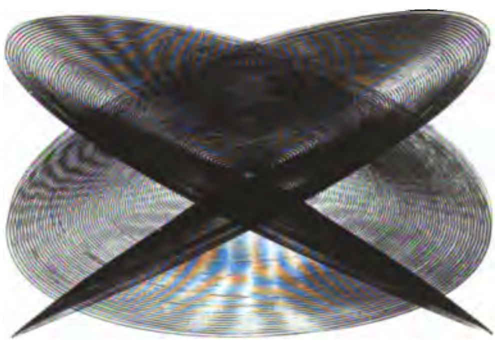
$$\frac{OP}{OR}=\frac{\angle MOP}{\angle MOR}$$

ist, wenn O den Pol der Spirale und OM deren Axe bezeichnet. Mittelst einer fertig construirten Spirale dieser Art lässt sich also das Problem der Winkeltheilung auf die Theilung des Radius vector zurückführen, indem man den gegebenen Winkel (der immer nur ein spitzer zu sein braucht) als Polarwinkel einer Archimedischen Spirale betrachtet. Praktisch bewerkstelligt man dies, indem man aus Metallblech oder Hartgummi ein Curvenlineal *ABCDORPEF* anfertigen lässt, dessen krummliniger Theil den ersten Quadranten einer Archimedischen Spirale darstellt. Handelt es sich nun um die Theilung eines gegebenen spitzen Winkels in n gleiche Theile, so lege man das Curvenlineal so, dass O auf den Scheitel und die Gerade BAO auf die Rückverlängerung des einen Schenkels OM fällt, halte das Curvenlineal einen Augenblick fest und ziehe, längs des krummlinigen Randes hinfahrend, auf dem Papiere die Curve $EPRO$, welche den andern Winkelschenkel ON in P schneidet; man nimmt nun das Curvenlineal weg, theilt den Radius vector OP in n gleiche Theile, von denen OQ der erste sein möge, und beschreibt aus O mit dem Radius OQ einen Kreisbogen, welcher die Spirale in R schneidet; $\angle MOR$ ist dann der n^{te} Theil von $\angle MON$. — Der Verfasser hat diese Methode kürzer und genauer als jede andere gefunden.

Nach einer Mittheilung von Stud. Ed. Horst aus Hamburg.



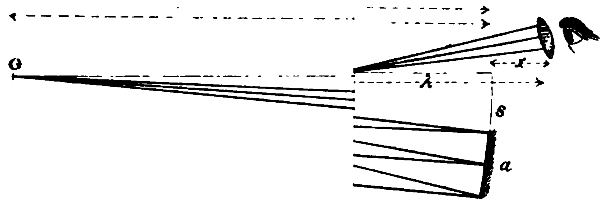
(c-es) Kleine Terz (5:6)



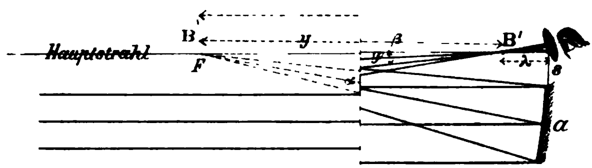
(c-e) Grosse Terz (4:5)

(c-f) Quarte (3:4)

 A. Naumann'sche Lichtdruckerei Leipzig



Fig



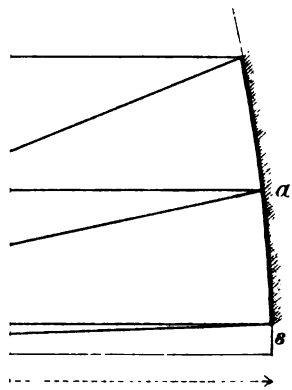
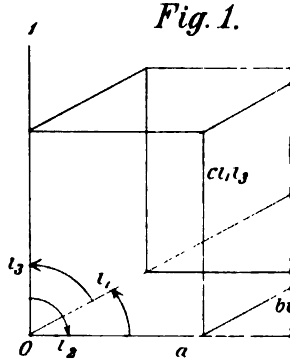
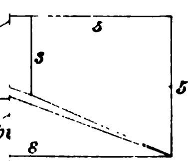
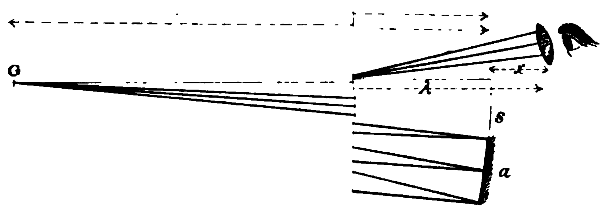


Fig. 1.

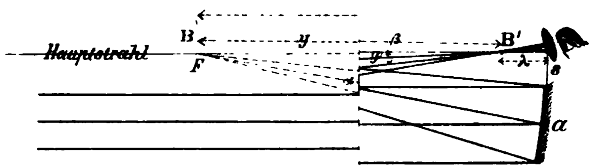


ı. 7.





Fig



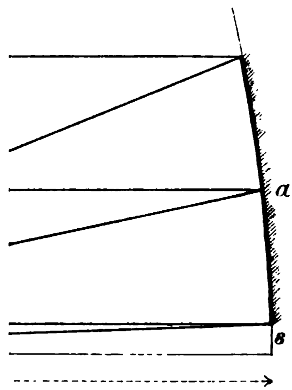
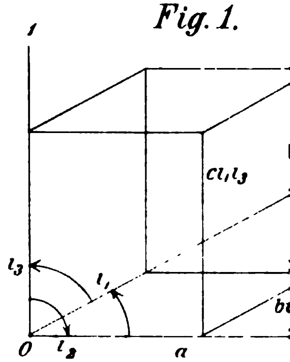
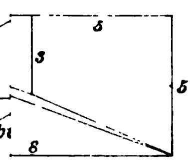


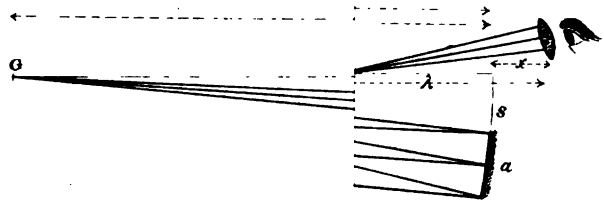
Fig. 1.



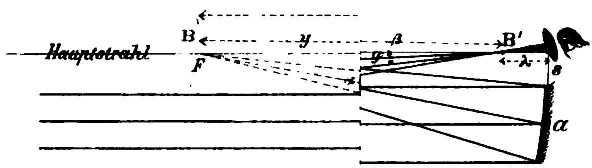
r. 7.



...ogr. v. Albert Retzlaff, Dresden.



Fig



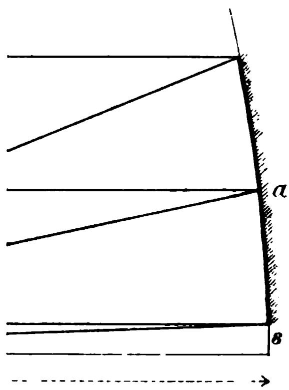
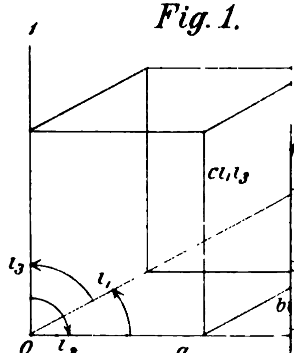
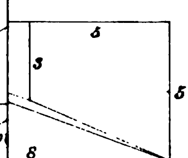


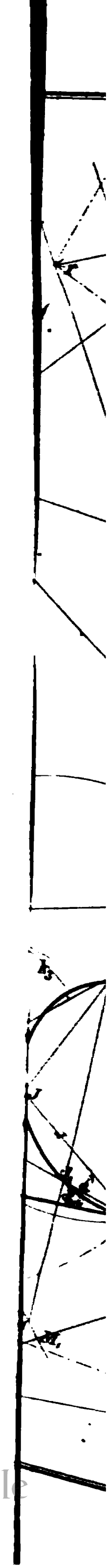
Fig. 1.



. 7.



 ogr. v. Albert Retzlaff, Dresden.



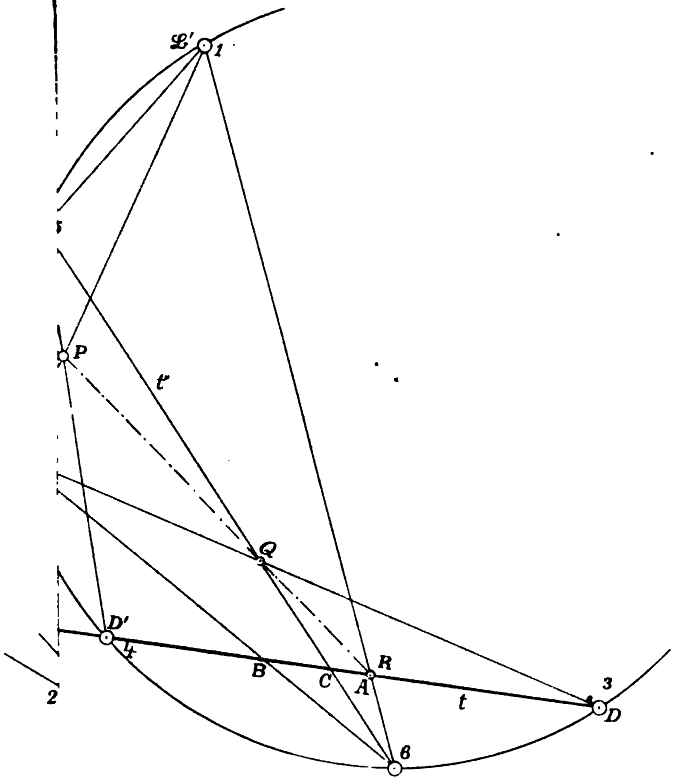
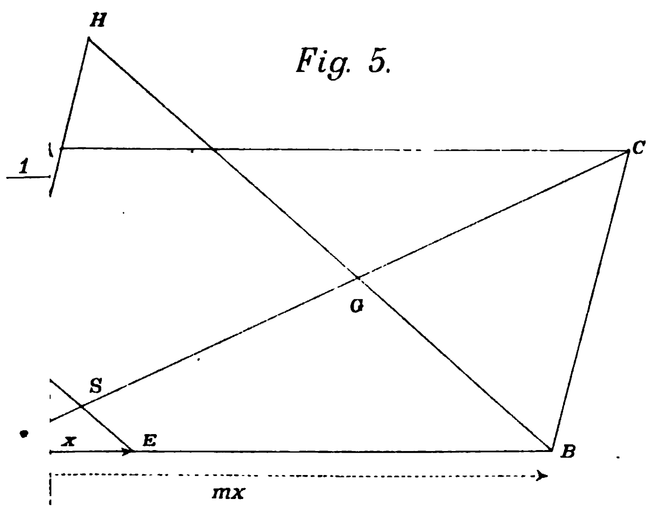


Fig. 5.



Fliegel & Sandmann, Dresden

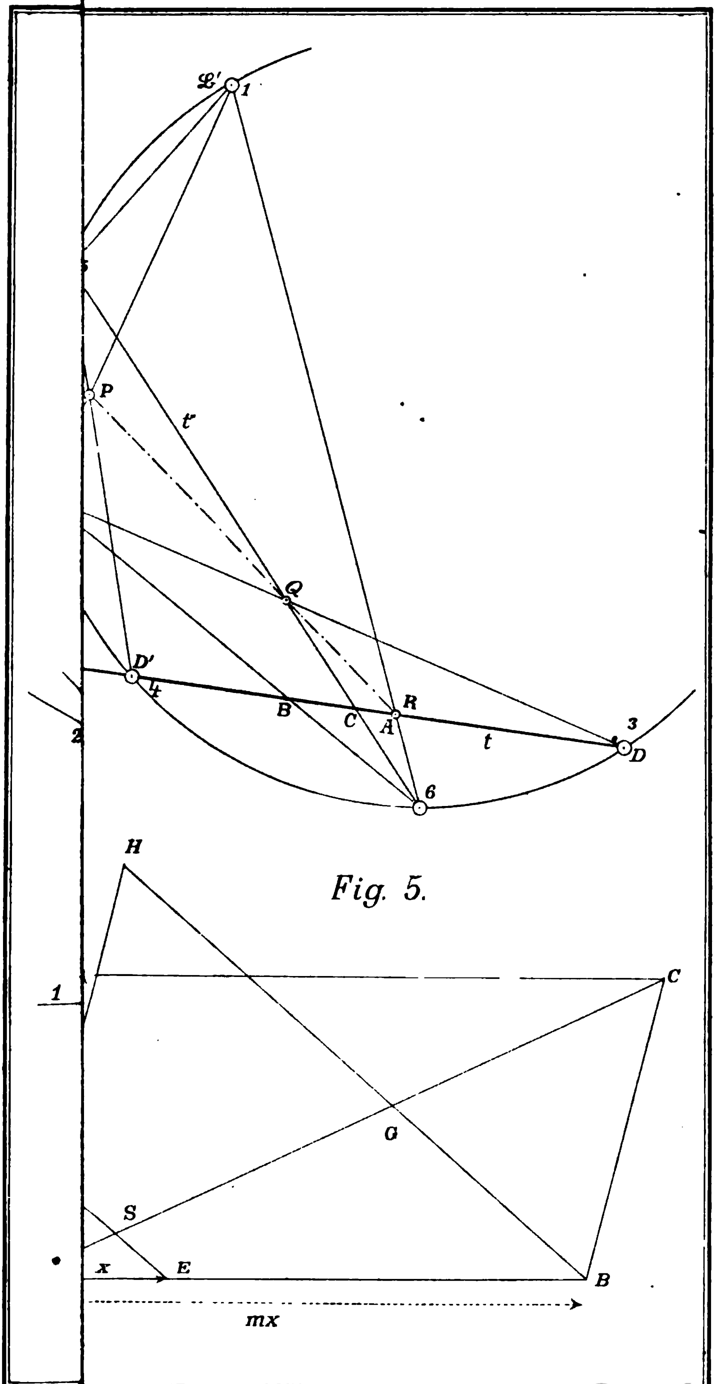
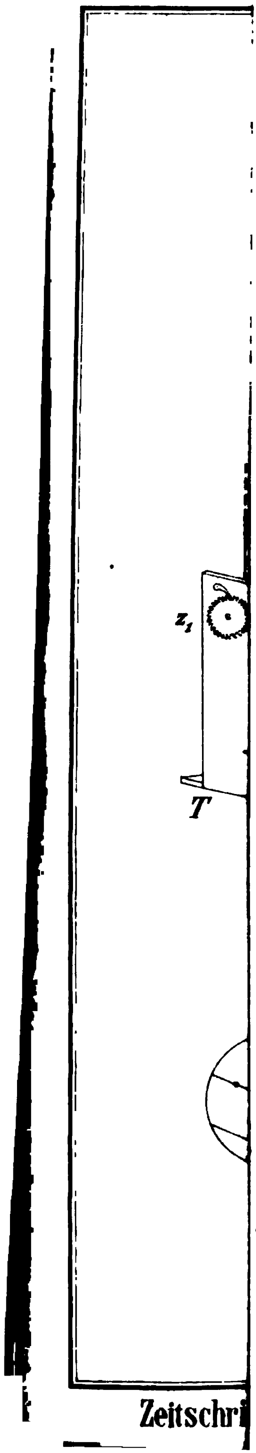


Fig. 5.



Zeitschri

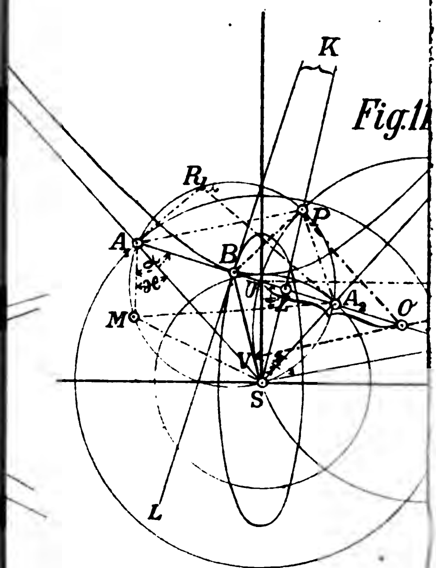


Fig.11

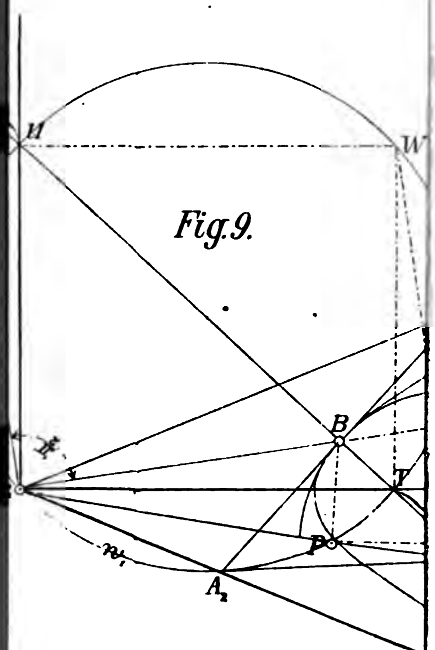
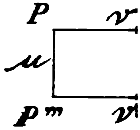


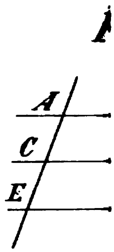
Fig.9.

g

ysik

Fig.





Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Philosophie der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Historisch-literarische Abtheilung.

Der Original-Wortlaut des päpstlichen Urtheils gegen Galilei.

Von

Dr. Emil Wohlwill.

Es ist bekannt, dass unter den Beweisen, durch die man eine Anwendung der Tortur gegen Galilei zu bestreiten pflegt, der Wortlaut des päpstlichen Decrets vom 16. Juni 1633 eine hervorragende Stelle einnimmt. Nach der allgemein verbreiteten Annahme enthält dies Decret in den Worten: „*Galileum examinandum de intentione et* (oder *etiam*) *comminata ei tortura, et si sustinuerit, condemnandum esse*“ den Befehl, über die Androhung der Tortur nicht hinauszugehen. Ich glaube nun allerdings, gezeigt zu haben,* dass von den mannichfaltigen Auslegungen, auf denen diese Ansicht beruht, die einen jeder Berechtigung entbehren, die anderen jedenfalls nicht ausschliesslich berechtigt sind. Ich bin jedoch bei allem Bemühen, den wahren Sinn der vielgedeuteten Worte festzustellen, nicht im Stande gewesen, der abweisenden Kritik ein positives Ergebniss hinzuzufügen; es ist mir nicht gelungen, einer umständlichen Untersuchung über die im Gebrauch der Inquisitionsschriftsteller vorkommenden Anwendungen des Ausdruckes „*sustinere*“ etwas Anderes zu entnehmen, als die Ueberzeugung, dass nach dem Sprachgebrauch nicht minder diejenigen Auffassungen sich rechtfertigen lassen, die in dem päpstlichen Decret einen Befehl zur Folterung zwischen den Zeilen lesen, als die völlig entgegengesetzten, nach denen in dem „*et si sustinuerit*“ das Verbot einer Anwendung der Folter enthalten wäre. Indem ich die

* In meiner Schrift: „Ist Galilei gefoltert worden?“ Leipzig 1877, S. 64—82. Ich habe bei dieser Gelegenheit die Uebersetzung von Scartazzini, sowie die zweite von Pieralisi nicht mehr berücksichtigen können; die von Reusch war mir entgangen. Seitdem haben auch de l'Epinois und v. Gebler neue Interpretationen gegeben.

Aufforderung, weiter zu forschen, an Diejenigen richtete, denen ein vollständigeres Material an vergleichbaren Actenstücken zu Gebote steht, glaubte ich meine Untersuchungen über die Frage der Folterung zunächst ohne Rücksicht auf den eigentlichen Sinn des Decrets vom 16. Juni fortsetzen zu dürfen; nur als im Allgemeinen wahrscheinlich habe ich die Ansicht bevorzugt, nach der der päpstliche Befehl auf eine Realterrition hinwiese. Streng genommen blieb daher auch meine weitere Beweisführung in Betreff einer Fälschung des Protokolls vom 21. Juni und der darauf folgenden Documente unvollständig, so lange die gehoffte entscheidende Aufklärung über das Decret vom 16. Juni fehlte.

Diese Aufklärung ist mir unmittelbar nach dem Erscheinen meiner Untersuchungen (im Herbst 1877) in völlig unerwarteter Weise durch Professor Silvestro Gherardi zugekommen. Die gegenwärtige Lage des Streites über die Fälschungen der vaticanischen Handschrift des Galileischen Processes lässt es mir angemessen erscheinen, die wichtigen Mittheilungen, die ich dem Florentiner Gelehrten verdanke, an die Oeffentlichkeit zu bringen.* Besser als alle kritischen Erörterungen werden sie sich wirksam erweisen, um auch Denen, die zu vertrauensvoller Auffassung geneigt sind, begreiflich zu machen, dass es sich in dem ausgesprochenen Verdachte um etwas mehr als vage Muthmassungen handelt.

I.

Gherardi's Enthüllungen schliessen sich an diejenigen an, über die in früheren Jahrgängen dieser Zeitschrift durch Professor Cantor und den Verfasser dieser Abhandlung referirt worden.** Sie ergänzen den hochinteressanten Bericht über die Forschungen im Palast der Inquisition, zu denen das Intermezzo der römischen Republik von 1848—49 die Gelegenheit geboten hat. Schon in jenem ersten Berichte findet sich (auf S. 40) die Bemerkung, es habe der Verfasser „die bestimmtesten Beweise dafür unter Augen gehabt, dass die Protokolle über die Sitzungen der Congregation des heil. Officium ursprünglich auf lose Blätter geschrieben und erst nachträglich, zuweilen recht spät, und nicht immer genau in die Bände der Decreta eingetragen wurden". Eine bunte Anhäufung solcher Blätter und getrennter Hefte war es, die vor allem Uebrigen die Aufmerksamkeit Gherardi's und des mit ihm forschenden Freundes auf sich zogen. Hier entdeckten sie zuerst auf mehreren Blättern den Wortlaut jenes bis dahin nicht bekannten Decrets: „*Galileum examinandum de intentione et comminata ei tortura etc.*" Die nähere

---

* Eine kurze vorläufige Mittheilung habe ich in meiner Recension der Schriften von de l'Epinois und v. Gebler in den Göttinger Gelehrten Anzeigen (1878, Nr. 21) gegeben.

** Zeitschrift f. Math. u. Phys. Jahrg. 16, Literaturztg. S. 5 flg.; Jahrg. 17 Literaturztg. S. 26 flg.

Prüfung ergab, dass die Blätter und Hefte nicht nur die regulären, in der Sitzung niedergeschriebenen und approbirten Protokolle enthielten, sonder neben diesen, und zwar in überwiegender Zahl, Vorschläge, Proben, Entwürfe für das Protokoll, die, wie untrügliche Indicien annehmen lassen, vor der Sitzung für den Gebrauch der Congregationsmitglieder ausgearbeitet und je nach Lage der Dinge und den Anweisungen, Befehlen oder Gegenbefehlen des Papstes oder im Namen des Papstes umgearbeitet und „zubereitet" waren, daneben unter den abgeschlossenen und approbirten Sitzungsprotokollen auch solche, an denen nach den Sitzungen mehr oder weniger eingreifende Veränderungen vorgenommen waren. Was sich in dieser Beziehung im Laufe der eigenen Untersuchungen den beiden Forschern ergab, wurde ihnen durch freiwillig gegebene Aufklärungen Eingeweihter in ausreichendem Masse bestätigt.

Ueber die hervorragende Bedeutung dieses Theiles des Inquisitionsarchivs konnte man nicht lange im Zweifel sein; die mühsame Arbeit, in den verworrenen Haufen von Blättern und Heften Ordnung zu bringen, das Material nach Zeiten, Processen und Personen zu sondern, nahm daher Gherardi längere Zeit in Anspruch. Dem Process Galilei's war schon damals sein Interesse in erster Linie zugewandt; die Ausbeute in dieser Richtung war nicht gross, aber was man fand, erschien in hohem Grade geeignet, die Aufmerksamkeit zu fesseln. In nicht weniger als neun Exemplaren lag schliesslich das verurtheilende Decret vom 16. Juni 1633 vor, ein jedes auf gesondertem Blatte, und was das Wichtigste war: der Wortlaut bot die grössten Verschiedenheiten. Gherardi hat sämmtliche Varianten copirt, soweit ihm bei den vielen Abkürzungen, Streichungen und Veränderungen die Entzifferung gelungen ist; seine vorläufigen Mittheilungen beschränken sich auf den Inhalt von vier Blättern, den ich hier folgen lasse.

I. „*S.mus decrevit ipsum Galileum interrogandum esse super intentione, et comminata ei tortura, et si attamen sustinuerit vel perstiterit* — *si demum destiterit,* * (sic) *praevia abjuratione de vehementi in plena Congregatione S. O.: condemnandum ad Carcerem ecc. ecc.*"

* *vel cesserit recesserit* (sic)

Zwischen „*perstiterit*" und „*si demum destiterit*" sind ungefähr zwei Zeilen durchstrichen, und zwar in einer Weise, dass eine Entzifferung einzelner Worte sich als durchaus unmöglich erwies.

II. „*S.mus decrevit ipsum Galileum interrogandum esse super intentione, et comminata ei tortura, et si attamen sustinuerit vel perstiterit* = *si demum destiterit,* * (sic) *praevia abjuratione de vehementi in plena Congregatione S. O., condemnandum ad Carcerem ecc. ecc.*"

* *vel cesserit recesserit* (sic)

Gherardi bemerkt, dass Reihen von Doppelstrichen derselben Art, wie sie sich hier zwischen „*persliteril*“ und „*si demum destiteril*“ finden, in derartigen Manuscripten häufig vorkommen, und dass dieselben an der Stelle bestimmter, dem Schreiber geläufiger Formelausdrücke stehen.

In Form II ist Nichts gestrichen.

III. „*S.mus decrevit ipsum Galileum interrogandum esse super intentione, et comminata ei tortura, et si destiterit, praevia abjuratione de vehementi in plena Congregatione S. O., condemnandum ad Carcerem ecc. ecc.*“

IV. „*S.mus decrevit ipsum Galileum interrogandum esse super intentione, et comminata ei tortura, et si sustinuerit, praevia abjuratione de vehementi in plena Congregatione S. Off. condemnandum ad Carcerem ecc. ecc.*“

Von diesen vier Bearbeitungen des Decrets vom 16. Juni 1633 sind nach Gherardi's Angabe I und II durch Papier, Dinte und Schriftzüge, durch den Grad der Abnutzung u. s. w. auf's Bestimmteste als Aufzeichnungen sehr alten Ursprunges charakterisirt; mit gleicher Bestimmtheit geben sich in jeder der angeführten Beziehungen III und IV als Producte der neuesten Zeit zu erkennen. Diese Thatsachen in Verbindung mit allen späteren Forschungen haben für Gherardi die Annahme zur Gewissheit erhoben, dass I und II (sowie ein drittes Blatt mit höchst undeutlicher, vielfach veränderter Schrift) der Zeit des Processes von 1633 angehören, während III und IV (sowie eine andere, gleichfalls undeutliche Copie) nicht mehr als 10—20 Jahre vor dem Zeitpunkte seiner Forschungen (1848) entstanden sein können.

Diesen merkwürdigen Mittheilungen fügt Professor Gherardi in seinem an mich gerichteten Schreiben vom 14. December 1877 das Folgende hinzu: „Seit den Tagen, in denen ich meine Auszüge aus jenen Papieren zu Stande gebracht, hätte ich Grund genug gehabt, an das Vorhandensein eines päpstlichen Befehls zu glauben, der im Fall der Hartnäckigkeit Galilei zur Folter führen musste, ja selbst an die Wahrscheinlichkeit einer Vollziehung dieses Befehls; aber damals — ich gestehe es aufrichtig — unter der Last der Beschäftigungen und alle Gedanken beherrschenden Sorgen jener Zeit, dann aber auch, weil ich von Natur dazu neige, von vornherein dem Glauben an verwerfliche Handlungen die mildere Auffassung vorzuziehen, habe ich, statt dem aufsteigenden Verdacht, dem Gedanken an unerhörte Fälschungen mich hinzugeben, es auf günstigere Zeit verschoben, mich mit diesen Fragen eingehender zu beschäftigen. Mittlerweile beruhigte ich mich bei dem Sinne und Wortlaut der dritten Lesart, die sicher alle übrigen an Klarheit übertrifft; diese, sagte ich mir, muss besser als alle anderen der Wahrheit, dem wirklichen Verlauf, der Absicht Urban's VIII. entsprochen haben; diese wird man in dem Register der Acta wiederfinden müssen.“

Etwa zwei Monate nachdem Gherardi jene losen Blätter für seine Zwecke verwerthet hatte, überraschte ihn der Freund mit der Nachricht: er habe den betreffenden Band im Register der Acta gefunden und die auf Galilei bezüglichen Decrete, unter ihnen auch das Decret vom 16. Juni copirt.

Auf den ersten Blick überzeugte sich Gherardi, dass der Text des Decrets, wie er in dieser Abschrift den endgiltig formulirten Sitzungsprotokollen entnommen war, mit Nr. IV der oben gegebenen Zusammenstellung vollständig übereinstimmte. Genau denselben Wortlaut bot ihm die später im Inquisitionsarchiv entdeckte Sammlung der 31 Galilei betreffenden Decrete. Bekanntlich bildet diese Copie, die nach Gherardi's Vermuthung gegen 1835 für den Herzog von Blacas hergestellt wurde, neben den Originaldecreten die eigentliche Grundlage der Gherardi'schen Schrift: „*Il processo Galileo, riveduto sopra documenti di nuova fonte.*"* In dieser Schrift ist eben darum auch das Decret vom 16. Juni 1633 in wörtlicher Uebereinstimmung mit unserer Nr. IV zum Abdruck gebracht.

„War nun aber in Wirklichkeit in den beiden Abschriften das Original des denkwürdigen Schriftstückes, wie es der Band der Decreta enthält, genau reproducirt? oder liessen sich auch in diesem Original die Spuren einer älteren Formulirung, ähnlich der der Blätter I und II, nachweisen?" Mit dieser Frage schloss Gherardi's erste an mich gerichtete Mittheilung und beinahe zwei Monate vergingen, bis er durch die Antwort die gespannte Erwartung befriedigte. Diese Antwort lautete:

„Nehmen Sie aus der Reihe der vier Abschriften Nr. I, durchstreichen Sie, abgesehen von der bereits gestrichenen langen Stelle zwischen „*perstiterit*" und „*si demum destiterit*", noch die Worte „*si demum destiterit*", das einzelne Wort „*attamen*" und das „*vel perstiterit*", betrachten Sie endlich die Bemerkung am Rande „*vel cesserit, recesserit*" als nicht vorhanden, so haben Sie mit seinen gestrichenen und übrig gebliebenen Worten den entscheidenden Passus des Decrets, wie ich denselben auf Seite 102 (?) des betreffenden Bandes der Decreta vor Augen gehabt habe." Diese entscheidende Vergleichung war das Ergebniss des verwegenen Besuchs im Inquisitionspalast, den Gherardi 1849 noch nach der Besetzung Roms durch die Franzosen und der Wiederherstellung des kirchlichen Regiments unternahm.** Er erkannte bei dieser Gelegenheit, dass die Buchstaben der getilgten Worte durch die Streichung nicht in

* Ich verdanke der Güte des Herrn Prof. Gherardi eine auf lithographischem Wege hergestellte genaue Reproduction dieser wichtigen Sammlung, der ich nicht wenige bisher unbekannte Einzelheiten entnommen habe.

** Vergl. *Gherardi*, „*Il processo Galileo*", S. 7 Note 1, wo es heisst: „*li volli riconsultare non senza mio grande personale pericolo, „che nel pensier rinnova la paura", sopravvenuta, „non sine quare" a mezzo soltanto il fatto mio*".

gleichem Masse unkenntlich geworden waren, wie auf Nr. 1 der losen Blätter; aber im Begriff zu entziffern, was sich entziffern liess, sah er sich überrascht und zum Verzicht auf alle weiteren Versuche genöthigt. Nur soviel hatte er bereits feststellen können, dass auch in der Abschrift der Decreta dem „*praevia abiuratione*" wie auf Blatt I ein „*destiterit*" unmittelbar vorherging. Ueber einige andere Worte, die er gleichfalls — wenn auch nicht mit gleicher Sicherheit — zu lesen vermochte, verspricht Gherardi fernere Mittheilungen. Ich hoffe, er wird die Zeit gekommen glauben, diese, wie alle übrigen Resultate seiner Forschungen der Oeffentlichkeit zu übergeben.

II.

Soviel die gegebenen Aufschlüsse zu wünschen übrig lassen, so bieten sie doch eine sehr wesentliche Ergänzung des anderweitig vorliegenden Materials. Sie stellen zunächst ausser Zweifel, dass die Form des Decrets vom 16. Juni, die uns durch de l'Epinois und Gherardi bekannt war, durch mehrfache Streichungen aus einer älteren Fassung andern Inhalts entstanden ist. Leichter begreift sich unter dieser Voraussetzung das Eigenthümliche der Form; es ist nicht zu erwarten, dass für eine Willensäusserung der einfachste und völlig sachgemässe Ausdruck gewonnen wird, wenn man — gleichviel aus welchem Grunde — darauf angewiesen ist, ihn lediglich durch Streichungen aus einem gegebenen Wortlaut wesentlich andern Inhalts herzustellen.

Kaum bedarf es der Bemerkung, dass über den Sinn des „*sustinuerit*" eine Ungewissheit nicht mehr stattfinden kann; es ist die zuerst von Henri Martin vertretene Deutung, die sich durch das erläuternde „*vel perstiterit*" als die allein zulässige erweist. Dass die Ausdrücke „*si sustinuerit*" und „*si perstiterit*" in der Inquisitionsliteratur als Synonyma vorkommen, habe ich schon früher nachgewiesen;* beide Ausdrücke werden offenbar absolut gebraucht, das „*et si sustinuerit*" ist demgemäss weder auf „*torturam*", noch auf „*intentionem*" (Pieralisi), noch auf ein nicht vorhandenes „Aussage" (v. Gebler) zu beziehen, es bedeutet schlechthin: „und wenn er aushalten sollte"; dass aber auch dabei nicht etwa — wie ich als möglich angesehen — ein „*in tortura*" hinzugedacht werden soll, ergiebt sich aus dem Zusammenhang der ursprünglichen Aufzeichnung.

Was nun den Sinn dieser letzteren betrifft, so ist das Eine zweifellos klar, dass es sich sowohl in Nr. I und II der losen Blätter, wie in

* „Ist G. gef. w.?" S. 78; der einen hier angeführten Stelle wären leicht eine grosse Anzahl ähnlicher aus den Schriften von Pegna, Carena, Farinacci u. A. hinzuzufügen. Durch zahlreiche Belegstellen ist ferner darzuthun, dass in der Inquisitionsliteratur ganz regelmässig völlig gleichbedeutende Ausdrücke durch ein „*vel*", aber auch durch „*et*" verbunden vorkommen.

der ursprünglichen Formulirung im Bande der Decreta um die Anordnung eines Verfahrens handelt, das geeignet war, den „*persistens*" zum „*desistere*" oder mindestens „*recedere*" zu bringen; es ist demnach die Beschränkung des ursprünglichen Befehls auf eine Bedrohung mit der Tortur für den Fall, dass Galilei standhaft bliebe, auf's Allerbestimmteste ausgeschlossen; die gestrichenen Worte, wie diejenigen, die durch die Doppelstriche angedeutet werden, müssen entweder den Befehl zur Folterung oder mindestens zur Abführung in die Folterkammer und Wiederholung der Bedrohung im Angesicht der Marterinstrumente ausgesprochen haben.

Diese strengere Massregel ist auch unzweifelhaft nicht allein vorgeschlagen, sondern am 16. Juni 1633 vom Papst und der Congregation zum Beschluss erhoben. Man wird annehmen dürfen, dass auf den Blättern I und II die vor der Sitzung gefertigten Entwürfe vorliegen; dafür spricht insbesondere das „*vel cesserit*" und „*recesserit*" am Rande; aber mit diesen Entwürfen hat, von Einzelheiten abgesehen, die ursprüngliche Form des Beschlusses im Bande der Decreta übereingestimmt, und in dieser haben wir offenbar die beschlossene, nach der Sitzung eingetragene Fassung, das officielle Protokoll. Es ist dadurch unwidersprechlich constatirt, dass ein Beschluss und Befehl, der über die Androhung der Folter hinausgeht, mit der vielbesprochenen Milde des Verfahrens gegen Galilei am 16. Juni 1633 wohl vereinbar gefunden wurde.

Aber Gherardi glaubt weiter annehmen zu dürfen, dass die Streichungen auf Blatt I, wie im Bande der Decreta nicht älter sind, als der Inhalt der Blätter III und IV, dass sie also, wie diese, dem zweiten Viertel des 19. Jahrhunderts angehören. Es wären dieser Ansicht gemäss die Streichungen, wie die Varianten III und IV als Fälschungen zu betrachten; das gegen Galilei thatsächlich eingeschlagene Verfahren hätte dem ursprünglichen Beschlusse und Befehl vom 16. Juni entsprechen müssen, Fälschungen wären demnach auch diejenigen Actenstücke des Vaticanmanuscripts, die das Gegentheil zu beweisen scheinen.

In der That giebt es, wenn man diesen Schluss vermeiden will, Gherardi's Enthüllungen gegenüber nur ein letztes, bedenkliches Mittel; man muss voraussetzen, dass die Streichung einem vor dem 21. Juni 1633 ergangenen Gegenbefehl entspricht. Es bleibt abzuwarten, ob irgend Jemand geneigt sein wird, eine solche Ansicht zu vertreten; als wahrscheinlich lässt sie sich nicht bezeichnen. Der Process gegen Galilei war von Urban VIII. von Anfang an wie eine ihn persönlich betreffende Sache behandelt, man kann daher nicht glauben, dass seine Entscheidung erst das Ergebniss eines unmittelbar vorher erstatteten Berichts gewesen, dass sie rasch, ohne Vorbereitung und genügende Ueberlegung getroffen wurde; der Beschluss, gegen den 69jährigen Galilei zur Folter zu schreiten oder ihn wenigstens alle Schrecken der unmittelbarsten Vorbereitung auf die Tortur empfinden zu lassen, musste — wenn er einmal gefasst wurde — ein reiflich erwogener sein, um so weniger, glaube ich, ist ein Widerruf unmittelbar nach gefasstem Beschlusse wahrscheinlich. Und wäre der Widerruf denkbar — wie soll man glauben, dass für eine päpstliche Willensäusserung solchen Inhalts, für den Entschluss zur Gnade die Streichung der strengen Worte als angemessene Form der Registrirung betrachtet wäre?

Weniger noch wird es gelingen, mit einer Streichung in alter Zeit das Vorhandensein und die Beschaffenheit jener Folge verschiedener Bearbeitungen und namentlich derer aus neuerer Zeit zu vereinen. Sehr beachtenswerth erscheint mir die Verschiedenheit des mit I bezeichneten, durch Streichungen verstümmelten Textes von der schliesslichen Redaction im Bande der Decreta. Während hier durch die Streichungen ein Decret mit völlig neuem Wortlaut hergestellt ist, sind in Nr. I nur diejenigen Worte unleserlich gemacht, die den entscheidenden Befehl enthalten; was übrig bleibt, hat so, wie es dasteht, namentlich mit dem „*et si demum destiterit*“, gar keinen Sinn, es ist nicht ein neues, sondern gewissermassen das in der Umgestaltung begriffene alte Decret, der Anfang eines Versuchs der Neubearbeitung; aber die weitere Fortführung und den Abschluss dieses Versuchs bieten uns die beiden Copien III und IV, das heisst Copien von unzweifelhaft moderner Handschrift. Liesse sich von diesen vielleicht die letzte als Abschrift einer der Zeit des Processes angehörigen zweiten Redaction betrachten, so ist dies für Nr. III offenbar nicht zulässig; denn in dem fertigen Decret war das „*et si destiterit*“ nicht mehr vorhanden, und es lässt sich ein verständiger Zweck nicht erdenken, um dessentwillen ein Copist in neuerer Zeit diese Worte aus der Maculatur des Inquisitionsarchivs hervorsuchen und in den Zusammenhang einer neuen variirenden Formulirung des Decrets einfügen sollte. Die Benutzung dieser in letzter Redaction gestrichenen Worte scheint mir vielmehr eine Entstehung der Abschrift III vor dem Zeitpunkte der Streichung im höchsten Grade wahrscheinlich zu machen. Hat also Gherardi mit einigem Recht aus der Beschaffenheit der Nr. III auf eine Entstehung nicht vor 1828 geschlossen, so wäre dadurch in gleichem Grade wahrscheinlich gemacht, dass auch die Streichung nicht früher erfolgt ist. Wollte man aber auch, so lange weitere Nachrichten fehlen, die Zeitbestimmung des Florentiner Gelehrten als nicht hinlänglich gesichert ansehen, so muss doch wohl auf Grund seiner Aussage als ausgemacht betrachtet werden, dass die Blätter III und IV nicht dem Juni des Jahres 1633 angehören; gilt das Gleiche für den Zeitpunkt der Streichung im Bande der Decreta, so ist die Streichung — Fälschung.

III.

Bestimmter ergiebt sich dies, wenn man neben Gherardi's Mittheilungen die früher bekannten Thatsachen in Betracht zieht. Auch ohne Kenntniss des Original-Wortlauts des Decrets vom 16. Juni hatte man ausreichende Gründe, zu glauben, dass jener ursprünglichen Anordnung gemäss verfahren sei. Ich habe umständlich erörtert, dass nach dem Wortlaut der Sentenz gegen Galilei ein Verfahren in Anwendung gebracht wurde, das über die Androhung der Tortur hinausging.*

Man hat diesen Ausführungen gegenüber eingehender als zuvor aus den Quellen nachzuweisen gesucht, dass das Schlussverhör des Vaticanmanuscripts, in dem der Richter sich auf eine Bedrohung mit der Tortur beschränkt, recht wohl unter dem *Examen rigorosum* der Sentenz verstanden sein könne. Die mir bekannt gewordenen Erörterungen dieses Inhalts bestärken mich in der Ueberzeugung, dass die vermeintliche Vieldeutigkeit und Dehnbarkeit des oft besprochenen Ausdrucks „*Examen rigorosum*“ nicht vorhanden ist.

Ich erwähne zunächst eine Curiosität.

Im sechsten Buche des *Sacro Arsenale della S. Inquisizione* findet sich ein Abschnitt unter der Ueberschrift: „*modo di dar la corda al reo, che ricusa de rispondere ò non vuol precisamente rispondere*“. Der Text wiederholt: „*Suole talvolta intervenire, che il Reo ricusa di rispondere ò non voglia rispondere precisamente il perchè fa di bisogno venir contro di lui a rigorosa esamina.*“ In eben diesem Falle der Anwendung des Ausdruckes „*rigorosa esamina*“ hat der Professor der Universität Löwen, Phil. Gilbert, einen Beweis dafür entdeckt,** dass das *Examen rigorosum* ein Verhör unter Androhung der Tortur bedeuten kann, und einen weiteren Beweis dafür, dass ich die Verwerthung der Stelle im entgegengesetzten Sinne einer Fälschung des Textes verdanke. Auf die Gefahr hin, unter dem Makel dieses Verdachts zu bleiben, bis noch irgend Jemand sich entschliesst, das *Sacro Arsenale* zu lesen, verzichte ich auf jede weitere Ausführung und Vertheidigung.

Ernster sieht der Einwurf von Gebler's aus.*** Von Gebler bestreitet nicht mehr, dass die Ausdrücke „*Examen rigorosum*“ und „*tortura*“

---

* „Ist G. gef. w.?“ S. 17—34.

** In der zu Löwen erscheinenden *Revue catholique;* die mir zugesandte Abhandlung ist ohne weitere Bezeichnung.

*** In seiner Abhandlung: „Ist Galilei gefoltert worden?“ in Paul Lindau's „Gegenwart“ Nr. 18—19 und 24—25 des Jahrgangs 1878. Es war dies die letzte Arbeit des verdienstvollen Schriftstellers, der am 7. Sept. d. J. in noch jugendlichem Alter einem Brustleiden erlegen ist. Der Feuereifer, mit dem er sich der Aufgabe unterzogen, eine tadellose Copie des Vaticanmanuscripts des Galilei gleichbedeutend sind, aber er hält für gewiss, dass auch die vorbereitende „Schreckung“ im gewöhnlichen Saal der Verhöre, die „*territio verbalis*“ als Tortur bezeichnet werden konnte. Die Beweisführung knüpft er an eine gegen mich gerichtete Polemik. „Für W.“, sagt er, „gilt die „*territio realis*“ (die eine Abführung in die Folterkammer voraussetzte) als der erste Grad der Tortur; dem ist aber nicht so; das Werk Limborch's, „*Historia Inquisitionis*“, enthält darüber ganz bestimmten Aufschluss; Limborch citirt den Criminalisten Julius Clarus, wo dieser von den verschiedenen Graden der eigentlichen Tortur spricht und diesbezüglich sagt: „so wisse denn, dass es fünf Grade der Tortur giebt: 1. die Androhung der Folter, 2. die Einführung in die Marterkammer u. s. w.“ *

Ich glaube nicht, dass diese Ausführungen genügen, das bestimmte „dem ist nicht so“ zu rechtfertigen. Zunächst ist Limborch's Geschichte der Inquisition (Amsterdam 1692) eine Quelle zweiten oder dritten Ranges; sie beruht — abgesehen von den alten Sentenzen der Inquisition von Toulouse — auf gedrucktem Material, das dem Verfasser in keineswegs vollständiger Sammlung vorgelegen hat; es ist daher nicht möglich, seinen Angaben ohne weitere Untersuchung „bestimmte Aufschlüsse“ zu entnehmen, wieviel weniger in einem Falle, wo diese Angaben denen zahlreicher anderer völlig glaubwürdiger Schriftsteller widersprechen.

Aber die Aufschlüsse Limborch's sind auch in sich keineswegs so bestimmt, wie v. Gebler behauptet; auch bei Limborch, auch bei demselben Julius Clarus, den er als einzigen Gewährsmann citirt, findet sich die widersprechende Auffassung; unmittelbar nach der Er-

---

schen Processes herzustellen, hat wesentlich beigetragen, diesen traurigen Ausgang zu beschleunigen. Wer Galilei's Briefwechsel kennt, erinnert sich, wie bei jedem seiner Besuche in Rom um die Mitte des Juni seine Ungeduld wächst, die Mahnungen der Freunde sich wiederholen, den gefährlichen Aufenthalt thunlichst abzukürzen; solcher Mahnungen uneingedenk, blieb v. Gebler während der heissesten Monate in Rom, um das begonnene Werk zu vollenden. Krank kehrte er heim, um nicht wieder zu genesen. In dem Schreiben, mit dem er mir die gegen meine Schrift gerichteten „Gegenbetrachtungen“ übersandte, sieht er bereits einem nahen Ende entgegen. Der Gegenstand dieser letzten in überaus qualvollem Zustande geschriebenen Abhandlung, die Vertheidigung der in Rom gewonnenen Ueberzeugung, war ihm Herzenssache; noch die letzten an mich gerichteten Worte sprechen die Zuversicht aus, dass man bei wiederholter Prüfung der Originale in ihm den Vertreter der Wahrheit anerkennen werde. Ob diese Ahnung des Verstorbenen sich verwirklichen, ob seine vertrauensvolle Auffassung sich endgiltig als Irrthum erweisen wird — wir dürfen es der Kritik der Zukunft anheimstellen; sicher wird das Verdienst, das Karl von Gebler sich durch die vortreffliche Ausgabe der Acten des Galilei'schen Processes um die Galilei-Forschung erworben hat, unvergessen bleiben.

* „Gegenwart“ *l. c.*, S. 376.

wähnung der fünf Grade fährt Julius Clarus folgendermassen fort:* „ich habe von dem Präses Arrigonus, einem Manne von grosser Erfahrung, namentlich in Criminalsachen, gehört, dass es beim Senat nur drei Grade der Tortur giebt, der erste ist die Schreckung, und dieser begreift in sich nicht allein die Bedrohung mit der Folter, sondern auch die Abführung an den Ort der Tortur, die Entkleidung und das Festbinden; der zweite ist die Folterung u. s. w." Hier ist also klar gesagt, dass in der Praxis wenigstens eines italienischen Gerichtshofs die sogenannte „*territio verbalis*" nicht als selbstständiger Grad der Tortur anerkannt wurde. Die Bedeutung dieser Abweichung von der vorhergehenden allgemeinen Angabe wird wesentlich erhöht, wenn wir sie in ihrem ursprünglichen Zusammenhange in Clarus' Werken lesen. Hier findet man alsbald, dass Julius Clarus Mitglied desselben Mailänder Senats war, über dessen Praxis in den Graden der Tortur er auffallenderweise nicht nach eigener Erfahrung, sondern nach den Mittheilungen eines Anderen berichtet; seine erste Angabe ist also ohne Geltung in seinem eigenen Wirkungskreis — wo aber gilt sie sonst? Clarus sagt es nicht; er, der citatenreiche Schriftsteller, nennt hier nicht eine einzige Autorität. So war vielleicht seine Stufenfolge ausserhalb Mailands so allgemein anerkannt, dass es der Citate nicht bedurfte? Aber Farinacci sagt das Gegentheil: er kennt die Ansicht des Clarus, aber „die gewöhnlichere", sagt er, „und die auch bei uns vorzugsweise geltende", unterscheidet fünf Grade der Tortur, deren erster darin besteht, dass „der Richter den Angeklagten entkleiden, binden, an das Seil schliessen und soweit vorbereiten lässt, dass Nichts weiter fehlt, als das Aufziehen". Farinacci wirkte im Anfang des 17. Jahrhunderts als praktischer Criminalist an den höchsten Römischen Gerichtshöfen; sein „bei uns" heisst also in Rom oder in Italien. Mit ihm stimmt von bekannten Autoritäten Grillandus, ein Zeitgenosse des Clarus, überein, der gleichfalls in Rom als Richter thätig gewesen ist. Will man neben diesen Beiden, die von den späteren Inquisitionsschriftstellern häufig citirt werden, noch einen wirklichen Inquisitor befragen, so vergleiche man die „*Praxis judiciaria inquisitorum*" des Umbertus Locatus (2. Ausgabe 1583), die in alphabetisch geordneten Artikeln über alle Einzelheiten des Inquisitionsprocesses Auskunft ertheilt. Auch dieses praktische Handbuch für Inquisitoren bezeichnet als den ersten der fünf Grade der Tortur genau wie Farinacci die Schreckung in der Folterkammer. Da nun Locatus zur Zeit, als Julius Clarus schrieb, Generalcommissar der Römischen Inquisition war, so erscheint die Annahme gerechtfertigt, dass in der Praxis der Römischen Inquisition — und nur

* *Clarus, Receptae sententiae ed.* 1613 S. 230 und *Limborch, Historia inquisitionis* S. 322.

auf diese kommt es uns an — die von ihm in Uebereinstimmung mit vielen Anderen genannten Grade Geltung gehabt haben, nicht diejenige des Clarus, von denen wir nur wissen, dass sie in Clarus' eigenem Wirkungskreis nicht gegolten haben.*

Was Clarus als ersten Grad der Tortur bezeichnet, ist demnach, wie es das „*Sacro Arsenale*" ausdrücklich sagt, im Gebrauch der Römischen Gerichtshöfe und insbesondere im Gebrauch der Inquisition nur als eine dem „*Examen rigorosum*" vorausgehende, vorbereitende Handlung betrachtet worden.

Es bleibt mir übrig, des Beweises zu gedenken, auf den Ph. Gilbert so grossen Werth legt, und den nach ihm de l'Epinois und Desjardins dankbar benutzt haben. Obgleich alle Welt vom „*Sacro Arsenale*" sprach, hat Ph. Gilbert bis zum Jahre 1877 den Ausdruck „*Examen rigorosum*" nirgends sonst, als in dem „*Speculum Inquisitionis Bizuntinae*" vom P. Joanne des Loix (1628) zu finden vermocht.** In dem Brief, durch den der P. des Loix als Inquisitor installirt wird, findet sich hier die Wendung: „*concedentes tibi facultatem contra quoscumque haereticos et a fide christiana apostatas inquirendi et procedendi ac precedentibus legitimis indiciis eos comprehendendi, seu capi et comprehendi atque carceribus mancipari, et prout juris fuerit rigoroso examini subjici et torqueri faciendi*" etc.... In dieser Ausdrucksweise findet Gilbert einen entscheidenden Beweis dafür, dass die Ausdrücke „*Examen rigorosum*" und „Tortur" nicht synonym sind. Entweder, meint er, haben die Cardinäle, die das Actenstück unterzeichnen, zweimal genau dasselbe gesagt oder die Bedeutung der Worte „*examen rigorosum*" stimmt nicht mit der des Ausdrucks „*tortura*" überein. Es ist nicht möglich, correcter zu schliessen: entweder die Ausdrücke bedeuten genau dasselbe oder sie bedeuten Verschiedenes; es wird daher, um das Letztere entscheidend darzuthun, nothwendig sein, das Erstere als unmöglich zu erweisen — so denkt man, und erwartet den Beweis; aber Herr Gilbert sagt bereits: „*quod erat demonstrandum*", das heisst, er setzt stillschweigend voraus, was zur Entscheidung der Frage in seinem Sinne nothwendig ist: dass in einem von Cardinälen unterzeichneten Document nicht dieselbe Sache durch zwei völlig gleichbedeutende, durch ein „und" verbundene Ausdrücke bezeichnet werden könne. Nun ist aber das Gegentheil absolut gewiss; die wenigen Worte des soeben erwähnten Patents genügen zum

---

* Es ist mir nicht unbekannt, dass die Angabe des Clarus auch in anderen Werken vorkommt, immer jedoch — soviel ich sehe — in Verbindung mit Clarus' Namen. Dass diese Reproduction einer Meinung in compilatorischen Werken den Nachweis einer Anwendung in der Praxis nicht ersetzt, bedarf keiner Ausführung.

** *Ph. Gilbert*, „*La condamnation de Galilée et les publications récentes*. Louvain 1877, S. 45. Die Schrift ist ein Separatabdruck aus der „*Revue des questions historiques*".

Beweis; oder sollen wir um dieses Patents willen auch die Ergreifung und Gefangennahme (das „*capi*“ und „*comprehendi*“) als wesentlich verschiedene Acte ansehen, für deren jeden es besonderer Autorisation bedürfte? Es würde nicht viel damit gewonnen sein, denn die Fälle, in denen die officiellen Actenstücke der Inquisition für dieselbe Sache zwei, ja drei verschiedene, durch „und“ verbundene Ausdrücke gebrauchen, sind ausserordentlich häufig. Ich beschränke mich darauf, zu erwähnen, dass die Ausdrücke: „*torquere et quaestionare*“, „*quaestiones et tormenta*“ neben den gleichwerthigen „*quaestiones seu tormenta*“ u. s. w. ganz gewöhnlich vorkommen. Dass es sich dabei um Verbindungen von Worten gleichen Sinnes handelt, beweist unter Anderm das päpstliche Decret „*pro votantibus in S. Officio*“ vom 29. April 1557.* Es handelt sich hier darum, die bei den Beschlüssen der Inquisition betheiligten Geistlichen dagegen zu schützen, dass sie durch Blutvergiessen oder Körperverstümmelung, sei es bei der Tortur, sei es bei Vollziehung der Strafe — der „Irregularität“ verfallen und in diesem Zusammenhange heisst es: „*ut iidem clerici votum et sententiam .... non solum quoad quaestiones et torturam sed etiam ad condignam poenam et multam etiam usque ad mutilationem seu sanguinis effusionem ac usque ad mortem naturalem inclusive absque alicuius censurae vel irregularitatis incursu dicere .... possint, licentiam et facultatem concedimus*“.

Selbst wenn ein Zweifel darüber bestände, dass „*quaestio*“ ein Verhör auf der Folter ist, würde aus dem Zusammenhang, dem Zweck der ganzen Verordnung sich zweifellos ergeben, dass an dieser Stelle eine Verschiedenheit der durch „*et*“ verbundenen Ausdrücke „*quaestio*“ und „*tortura*“ ebensowenig denkbar ist, wie zwischen dem unmittelbar folgenden „*poena*“ und „*multa*“ oder „*licentia*“ und „*facultas*“. Handelte es sich daher wirklich noch um eine Aufklärung über den Sinn des Wortes „*Examen rigorosum*“, so müsste man die Stelle bei des Lois als ungeeignet zur Entscheidung der Frage zurückweisen, da die Möglichkeit eines synonymen Gebrauchs der Ausdrücke „*examini rigoroso subjicere*“ und „*torquere*“ vorliegt. Es bedürfte dann allerdings nur einer Vergleichung der correspondirenden Ausdrücke in anderen Patenten für Inquisitoren, um die Möglichkeit zur Gewissheit zu erheben. Das Formular auf S. 339 des „*Sacro Arsenale*“ (Ausgabe von 1665) enthält an der betreffenden Stelle in völlig gleichem Zusammenhang die Worte „*quaestionibus exponendi*“.

Dem scheinbar zweideutigen Citat stelle ich ein bisher nicht beachtetes, unzweideutiges gegenüber. Im Anhang zu der bereits erwähnten Schrift des Locatus finden sich Sentenzen, die sich des Ausdrucks „zum *Examen rigorosum* schreiten“ in derselben Weise, wie die Sentenz gegen Galilei bedienen. Man sagt dies, erläutert der Verfasser, wenn

* Locatus *l. c.*, S. 491; „*Sacro Arsenale*“, *ed.* 1665. Anhang S. 12.

der Angeklagte gefoltert worden ist (*si tortus fuerit*).* Es bleibt also dabei: der Begriff des „*Examen rigorosum*" und der eines Verhörs auf der Tortur sind identisch; der eine ist elastisch, dunkel, Sammelbegriff genau in demselben Masse, wie der andere.

Bliebe aber auch in dieser Beziehung ein Rest des Zweifels möglich, so wäre damit für die gewünschte Auslegung der Sentenz gegen Galilei Nichts gewonnen; denn die Art des Verhörs, von der das Urtheil redet, ist, wie ich gezeigt habe,** genau bestimmt durch den Zusatz „*senza pregiudizio alcuno delle cose da te confessate e contro di te dedotte*". „Nur für das Verhör in der Folterkammer bedurfte es der Verwahrung gegen zu weitgehende Aussagen des Angeklagten", wie sie durch diese Klausel ausgesprochen wird. Auch diese Behauptung hat v. Gebler als eine mir eigenthümliche Ansicht zurückgewiesen.*** Der Zusatz „*senza pregiudizio*", meint er, finde sich in den Sentenzformularen des „*Sacro Arsenale*" jedesmal, wenn vom „*Examen rigorosum*" die Rede sei; da nun — wie als erwiesen betrachtet wird — „die Verbalterrition in dem Sammelnamen „*Examen rigorosum*" mit einbegriffen sein konnte", so sei anzunehmen, dass auch bei dieser die in Rede stehende „*protestatio*" am Platze gewesen sei.

Von Gebler hat übersehen, dass die Thatsachen dieser Folgerung, die er übrigens selbst als Conjectur bezeichnet, auf's Bestimmteste widersprechen; denn thatsächlich ist die schützende Klausel da, wo sie nach seiner Ansicht zu erwarten ist, in dem Protokoll über das Verhör vom 21. Juni nicht zu finden; man muss also entweder dieses Protokoll für unvollständig halten oder anerkennen, dass auch im Verhör vom 21. Juni die Klausel „*senza pregiudizio*" nicht zur Anwendung gekommen ist. Dieselbe kommt aber ebenso wenig in irgend einem der betreffenden Protokollformulare im 6. Buch des „*Sacro Arsenale*" bei der Androhung der Tortur ausserhalb der Folterkammer vor. Nicht als persönliche Ansicht, auch nicht als Folgerung aus irgend welchen theoretischen Erwägungen über die Bedeutung jener Formel, sondern als einfaches Ergebniss einer Prüfung des „*Sacro Arsenale*" habe ich demnach die Behauptung hinstellen können, dass es für eine vorbereitende Bedrohung mit der Tortur jener Klausel nicht bedurfte. Wenn nun dennoch sämmtliche Sentenzformulare des „*Sacro Arsenale*" der Angabe: es sei zum „*Examen rigorosum*" geschritten, die Klausel „*senza pregiudizio*" etc. hinzufügen, so ist das nur ein weiterer Beweis dafür, dass man bei dem Ausdruck „*Examen rigorosum*" an Verhöre, die sich auf Verbalterrition beschränken, nicht gedacht hat.

---

* Locatus *l. c.*, S. 519.

** „Ist G. gef. w.?" S. 32—34.

*** „Gegenwart" S. 376.

Ebensowenig kann aber bei der Anwendung derselben Formel in der Sentenz gegen Galilei an das bekannte Verhör vom 21. Juni gedacht sein; der Zusatz „*senza pregiudizio*" etc. weist vielmehr bestimmt auf eine uns unbekannte Fortsetzung hin; er beweist, dass der Angeklagte in die Folterkammer geführt und dort mindestens einer Realterrition unterworfen wurde; denn die Verwahrung der Richter gegen präjudicirende Aussagen des Inquisiten wird zum ersten Mal in jenem „*decreto di tortura*" ausgesprochen, durch das zunächst die Abführung in die Folterkammer verfügt wird.

Es muss demnach als erwiesen betrachtet werden, dass der Wortlaut der Sentenz vom 22. Juni dem ursprünglichen Decret vom 16. Juni insofern vollständig entspricht, als eine Abführung in die Folterkammer hier beschlossen, dort als vollzogene Thatsache mitgetheilt wird. Will man nicht annehmen, dass die Vollziehung des ursprünglichen Befehls trotz päpstlicher Gegenorder erfolgte, so ist durch diese Uebereinstimmung bestätigt, dass die Streichungen Fälschungen neueren Datums sind.

IV.

Zur entgegengesetzten Vorstellung führen — wenn man sie ohne Rücksicht auf alles Uebrige liest — drei Schriftstücke des Vatican-Manuscripts:

1. die Copie des Decrets vom 16. Juni 1633 (Fol. 451 v⁰);
2. der kurze Ueberblick über die Hauptthatsachen des Processes, der dem Anscheine nach im Jahre 1734 geschrieben ist (Fol. 559);
3. das Verhör vom 21. Juni 1633 (Fol. 452—453).

Sind diese Schriftstücke echt, so müssten allerdings die von Gherardi entdeckten Streichungen auf päpstlichen Befehl vor dem 21. Juni 1633 erfolgt sein; hält man dagegen die erörterten Bedenken für entscheidend, so muss man sich entschliessen, an ein System der Fälschungen zu glauben, in dem die Umgestaltung des Originaldecrets vom 16. Juni durch die Einschaltung, resp. Bearbeitung jener drei Schriftstücke ihre logische Ergänzung findet. Ich stehe nicht an, diese letztere Lösung als die weitaus wahrscheinlichere zu bezeichnen.

Als Erleichterung wenigstens für den Glauben an eine so weitgehende Hypothese darf es wohl geltend gemacht werden, dass um innerer Gründe willen schon früher vermuthet war, was hier als weitere Consequenz einer nur wahrscheinlichen Annahme gefordert scheint. Das Verhör vom 21. Juni, das wichtigste der genannten Documente, war als Gegenstand des ernstesten Verdachts bezeichnet, als ein Gedanke an Fälschung des Decrets vom 16. Juni noch auf's Bestimmteste ausgeschlossen erschien;*

* „Ist G. gef. w.?" S. 89—118.

eine späte Einschaltung der Copie dieses Decrets war schon damals als glaublich angesehen;* ja wenn man im Anschluss an Gherardi's bestimmtere Angaben den Zeitpunkt für die vermuthete Fälschung nicht vor der Rücklieferung der Handschrift in der Mitte des laufenden Jahrhunderts setzen könnte, so war für die Berechtigung auch dieser gewagten Folgerung ein hochbedeutsamer Anhaltspunkt im Voraus gewonnen. Als solchen betrachte ich die Thatsache, dass die vor der Rücklieferung entstandene französische Uebersetzung das aus so vielen Gründen verdächtige Gutachten vom Jahre 1615 (Fol. 342 des Vaticanmanuscripts) nicht umfasst.** Die Uebersetzung ist allerdings nur ein Fragment, aber sie umfasst, wie aus der mir vorliegenden vollständigen Copie hervorgeht, den gesammten Inhalt der ersten 23 Blätter; sie befolgt — wie ausdrücklich bemerkt wird — streng die Ordnung der Handschrift auch da, wo diese das der Datirung nach spätere Document dem älteren voranstellt; die Actenstücke sind numerirt, auf die einleitende Uebersicht unter Nr. 1 folgt als Nr. 2 die Denunciation des P. Lorini; des Gutachtens, das im heutigen Vaticanmanuscript zwischen beiden steht, wird mit keiner Silbe gedacht. Diese Lücke kann auch nicht etwa der von Delambre herrührenden Abschrift der Uebersetzung, auf die wir zur Zeit noch angewiesen sind, eigenthümlich sein, denn die Numerirung ist nach Delambre's Angabe die der Originalübersetzung. Es bleibt also nur die Wahl, zu schliessen, dass auch das 1809 nach Frankreich gebrachte Manuscript das Gutachten nicht enthalten, oder anzunehmen, dass in wahrhaft wunderbarer Consequenz der Zufall über diesem Actenstück gewaltet und seine Uebersetzung verhindert hat, um es in jeder Beziehung zum Unicum zu machen.

Ich hebe dieses bedeutsame Zusammentreffen der verdächtigenden Umstände hier nochmals hervor, um auf die Bedeutung weiterer Forschungen über das nach Frankreich gebrachte und 36 Jahre in Frankreich bewahrte Manuscript aufmerksam zu machen. Alles deutet darauf hin, dass, wenn in dieser langen Zeit von irgend einem neugierigen Leser auch nur ein Inhaltsverzeichniss der Actensammlung gefertigt

* a. a. O. S. 147 flg.

** a. a. O. S. 151 flg.; 185 flg. Vergl. ferner Göttinger gel. Anzeigen 1878, S. 663—665. Von Gebler hat meinen Ausführungen gegenüber grosses Gewicht darauf gelegt, dass ich einen einleuchtenden Zweck der Fälschung nicht anzugeben vermocht habe. Die hier fehlende Aufklärung ergiebt sich — wenn mich nicht Alles trügt — aus der interessanten Verwerthung, die das Gutachten von 1615 schon jetzt, kaum 2 Jahre nach seiner Veröffentlichung, bei Gegnern der hier vertretenen Anschauungen gefunden hat; insbesondere aus der Bewunderung, die P. Grisar für den „weiten, freien Blick" dieses Consultors bekundet, der mitten unter den vermeintlichen Ignoranten der Inquisition von 1615 Galilei's copernicanische Bibelauslegung stillschweigend für erlaubt erklärt.

wäre, schon dieses vermuthlich genügenden Aufschluss gewähren würde; denn mit Zuversicht darf man erwarten, dass in diesem Register ausser dem Gutachten des Consultors von 1615 zum mindesten das Decret vom 16. Juni, das Verhör vom 21. Juni 1633 und der „Sunto" von 1732 auf Fol. 560 fehlen würden.

Dieser Erwartung widersprechen allerdings v. Gebler's bestimmte Versicherungen, aber keineswegs die thatsächlichen Angaben, durch die er seine Behauptungen zu unterstützen geglaubt hat; im Gegentheil scheinen mir sämmtliche seit Jahresfrist durch de l'Epinois und v. Gebler bekannt gewordenen Daten die Annahme später Einschaltung für jene drei Schriftstücke zu unterstützen.

Was zunächst das Decret auf Fol. 451 des Vaticanmanuscripts betrifft, so ist heute als festgestellt zu betrachten, was schon früher der Vergleichung der Texte zu entnehmen war, dass es eine Abschrift aus dem Band der Decreta, nicht etwa das Original der dort gefundenen Fassung ist; es können auch nicht beide Aufzeichnungen gleichzeitig geschrieben sein, denn der Text des Vaticanmanuscripts ist offenbar ein Rest des am 16. Juni formulirten Urtheilsspruchs. Dass die Uebertragung sowohl dieser, wie einiger anderer Annotationen aus dem Band der Decreta in die specielle Actensammlung des Galilei'schen Processes erst in neuerer Zeit erfolgt sei, habe ich aus allgemeinen Gründen schon früher angenommen.* Diese Gründe veranlassten mich damals (1876), bei Prof. Gibbings anzufragen, ob in den zahlreichen in Dublin bewahrten Inquisitionsprocessen eine ähnliche Einschaltung von Decreten vorkomme; Prof. Gibbings erwiderte mir in bestimmten Worten, dass nichts der Art vorhanden sei; es bestätigte sich dadurch die Vermuthung, dass eine zwiefache gleichlautende Registrirung der Decrete 1. in den Sitzungsprotokollen der Inquisition, 2. in den Acten des speciellen Processes, wie sie in unserem Falle vorzuliegen scheint, nicht zu den regelmässigen Gewohnheiten der Inquisitionsbeamten gehört haben kann.

Die Weise der Einschaltung in den Acten, mit der uns die neuesten Veröffentlichungen bekannt machen, entspricht durchaus der Vorstellung, dass dieselbe nicht zur Zeit des Processes stattgefunden hat. De l'Epinois hat ein Facsimile der Rückseite von Fol. 534 mitgetheilt, auf der sich das Decret vom 1. December 1633 in zwei Ausgaben von völlig verschiedener Hand befindet. Der Text der oberen lautet:

Prima Decembris 1633.

A Sanctissimo in congregatione S. O. Conceditur habilitatio in eius rure, modo tamen ibi ut in solitudine stet, nec evocet eò, aut venientes illuc recipiat ad collocutiones. Et hoc per tempus arbitrio S. S.

* „Ist G. gef. w.?" S. 107, Anm.

Dabei sind Einzelheiten corrigirt. Weiter unten findet man dasselbe Decret in folgender Form:

Prima Decembris 1633. *B. oratorem habilitavit ad eius rurem, ubi vivat in solitudine nec eò evocet, aut venientes illuc recipiat ad collocutiones q. per tempus arbitrio S. S.*

Dem entspricht bei Gherardi das 20. Decret in folgendem Wortlaut:

Galilaei de Galilaeis Florentini, Senis relegati lecto memoriali S.mus oratorem habilitavit ad eius rurem, ubi vivat in solitudine nec eo amoveatur aut venientes illuc recipiat ad collocutiones q. per tempus arbitrio S. Cong.nis." *

Mit dieser Abschrift aus dem Sitzungsprotokoll der Inquisition stimmt daher die zweite Form des Vaticanmanuscripts genau überein, sofern man von den Varianten „*S. Cong.nis*" statt „*S. S.*" und „*amoveatur*" statt „*evocet*" absieht; es ist sehr wahrscheinlich, dass an letzterer Stelle der moderne Copist ein undeutlich geschriebenes Wort nach Gutdünken interpretirt hat; in dem Facsimile der von Gherardi benutzten Abschrift steigen die letzten Buchstaben des „*amoveatur*" an der Seite des folgenden „*aut*" in die Höhe, so dass man deutlich sieht: der ursprünglich an der Stelle des „*evocet*" leergelassene Raum hat trotz verkleinerter Schrift für das nachträglich hineingeschriebene „*amoveatur*" nicht ausgereicht.

Hier haben wir demnach ein Decret, das nicht weniger als drei Mal registrirt ist. Dass von den beiden Lesarten des Vaticanmanuscripts die obere die ältere ist, ergiebt sich aus der Form und den Correcturen; aus dieser, die man vermuthlich in der Sitzung selbst in unfertiger Formulirung auf der Rückseite der betreffenden Bittschrift eintrug, ist ohne Zweifel der Text des Sitzungsprotokolls hervorgegangen, von dem dann endlich eine Copie auf Fol. 534 nochmals eingetragen wurde. Dass dies im December 1633 geschehen sei, scheint mir in hohem Grade unwahrscheinlich. Wohl aber lässt sich vorstellen, dass ein Schreiber, der in späterer Zeit eine grössere Zahl jener Einschaltungen zu besorgen hatte, auf Blatt 534 den bereits vorhandenen Text übersah und gedankenlos eine zweite, fast gleichlautende Abschrift hinzufügte. Derselbe Fall wiederholt sich in etwas anderer Weise bei dem Decret vom 30. Juni; hier ist die erste Fassung auf der Rückseite der Bittschrift, eine vollständigere Formulirung befremdender Weise auf dem Blatte eingetragen, das der Bittschrift vorangeht.** Diese Fälle sind um so beachtens-

* So ist der Wortlaut in dem Facsimile der Copie von 1835 (?); in Gherardi's gedruckter Ausgabe folgen die Worte „*per tempus arbitrio S. Cong.nis*" zwischen „*rurem*" und „*ubi vivat*"; die gedruckte Ausgabe enthält ferner das Wort „*allocutiones*", wo im Facsimile unzweifelhaft „*collocutiones*" zu lesen ist.

** Den beiden Fällen schliessen sich diejenigen auf Fol. 550 und 555 an, in denen als erste Aufzeichnung nur kurze Notizen den Inhalt der Decrete bezeichnen, die nachher im vollständigen Wortlaut, mit dem Text der Sitzungsprotokolle genau übereinstimmend, eingetragen sind.

werther, als sie Anordnungen nach dem Abschluss des Processes betreffen, bei denen also nicht — im Sinne der Gebler'schen Hypothese — davon die Rede sein kann, dass die Einschaltung der Decrete etwa zur Orientirung der Cardinäle beim Studium der Acten vor der letzten Entscheidung gedient hätte, und bei denen darum eine Entstehung der zweiten Abschriften im Jahre 1633 um so weniger glaublich erscheint. Nun ist aber nicht zweifelhaft, dass derselben Folge von Copien, zu der die zweite Ausgabe des Decrets auf Fol. 534 und höchst wahrscheinlich auch die zweite des Decrets vom 30. Juni zu zählen ist, auch das Decret vom 16. Juni angehört. Das durch de l'Epinois reproducirte Facsimile des letzteren deutet wenigstens in den beiden ersten Zeilen bestimmt auf Uebereinstimmung der Handschrift mit derjenigen des Decrets vom 1. December; v. Gebler erklärt ausdrücklich, dass sämmtliche Annotationen von 1632 und 1633 von derselben Hand sind.* Er lässt bei dieser Angabe die erste Aufzeichnung auf Fol. 534, sowie die kurze Notiz vom 30. Juni auf Fol. 454 v^0 unberücksichtigt. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit oder Unwahrscheinlichkeit einer Eintragung im Jahre 1633 für das Decret vom 16. Juni die gleiche, wie für die zweite Abschrift des Decrets vom 1. December. Ich glaube nicht, dass man unter diesen Umständen der Abschrift des Decrets vom 16. Juni, die sich auf Fol. 451 des Vaticanmanuscripts findet, einen Beweis für die Willensänderung des Papstes zwischen dem 16. und 21. Juni entnehmen kann.

Bedenklicher erscheint auf den ersten Blick das Zeugniss auf Fol. 559 des Vaticanmanuscripts, jene in italienischer Sprache geschriebene Zusammenstellung der gegen Galilei gefassten Beschlüsse, die dem Jahre 1734 anzugehören, die Grundlage der auf Fol. 561 verzeichneten Anordnung der Inquisition vom 16. Juni 1734 zu bilden scheint. Ist dies Schriftstück, wie ich anfangs angenommen habe, als echt, d. h. dem Jahre 1734 angehörig zu betrachten, so würde aus der in ihm gegebenen Reproduction des Decrets vom 16. Juni hervorgehen, dass die Umgestaltung dieses Decrets mindestens vor 1734 erfolgt sei, denn die betreffende Stelle lautet: „*la santità sua decretò che il detto Galilei s'interrogasse sopra l'Intenzione, anche con comminargli la Tortura, e sostenendo precedente l'abiura de vehementi si condannasse*"; und weiterhin heisst es: „*come il tutto fù eseguito*", woraus mit Recht zu schliessen ist, dass auch das „*Examen de intentione*" in angegebener Weise bei der Bedrohung mit der Tortur stehen geblieben ist. Nun würde aber für eine Umgestaltung des Decrets vor 1734 der Einfluss jener Motive beinahe ausgeschlossen sein, um derentwillen man eine Fälschung in neuerer Zeit als denkbar betrachtet, denn schwerlich

* Eine briefliche Mittheilung ergänzt in dieser Beziehung die Angabe in der „Gegenwart".

ist die Frage, ob Galilei gefoltert worden, vor 1734 Gegenstand einer öffentlichen Discussion gewesen; schwerlich hat man, wenn dies der Fall war, im heil. Officium jener Zeit der öffentlichen Meinung durch Actenfälschung Rechnung getragen. Ein sicherer Beweis dafür, dass die Umgestaltung vor 1734 erfolgt sein müsse, würde daher in hohem Grade wahrscheinlich machen, dass sie vor dem 21. Juni 1633 erfolgt sei. Es ist daher besonderer Beachtung werth, dass die Zusammenstellung auf Fol. 559 in der Form wie im Inhalt zu den ernstesten Bedenken Veranlassung bietet. Dass wir heute den Ueberblick auf Fol. 559 in den Brief des Florentiner Inquisitors von 1734 eingelegt finden, schien dadurch gut erklärt, dass dieser Brief die bestimmte Veranlassung enthält, die gegen Galilei ergangenen Decrete nachzusehen. Die Zusammenstellung auf Blatt 559 liess sich als ein Ergebniss der Befragung der Archive zum Zweck der Beantwortung des Briefs betrachten. Nun waren aber die drei auf 559 mitgetheilten Decrete bis dahin nur in lateinischer Sprache vorhanden; sie müssen also, wenn das Schriftstück echt ist, im Jahre 1734 für den Gebrauch der Römischen Generalcongregation in's Italienische übersetzt sein, während doch die Beschlüsse dieser Congregation — wie Gherardi's Protokoll über die gleiche Verhandlung beweist — nach wie vor in lateinischer Sprache formulirt wurden. Diese Uebersetzung lateinisch geschriebener Documente für die Cardinäle des 18. Jahrhunderts ist auffallend genug; auffallender ist Alles, was der Uebersetzung hinzugefügt ist. Nach der Ueberschrift ist ein Inquisitionsverfahren gegen Galilei im „heil. Officium von Florenz" eingeleitet; man wird geneigt sein, dabei zunächst eine weitgehende Gedankenlosigkeit des Schreibers von 1734 anzunehmen; dies ist jedoch nicht leicht, wenn man im Zusammenhange liest, wie folgt:

„Der Mathematiker Galilei aus Florenz wurde im heil. Officium von Florenz zur Untersuchung gezogen *(fu inquisito)* wegen folgender Sätze: (folgen die bekannten Thesen). Und nach Rom geladen, wurde er in diesem heil. Officium gefangen gesetzt, und nachdem seine Sache daselbst am 16. Juni 1633 in Gegenwart des Papstes vorgetragen war, decretirte Se. Heiligkeit u. s. w."

Es ist vollkommen klar, dass hier die Vorladung nach Rom als eine Folge der Untersuchung in Florenz betrachtet wird; der Versuch, „*Roma*" statt „*Firenze*" oder „*questo S. O.*" statt „*S. O. di Firenze*" zu substituiren, ergiebt eine Verschlechterung statt einer Verbesserung des Textes. Die einleitenden Worte auf Fol. 559 lassen sich nur dann einigermassen erklären, wenn der Schreiber sich darauf beschränkt hat, die Decrete von 1632 und 1633, die wir durch Gherardi kennen, zu vergleichen und den Andeutungen dieser Decrete Aufschlüsse auch über Das zu entnehmen, was sie nicht enthalten; er konnte dann wirklich bei angemessener Oberflächlichkeit auf den Gedanken kommen, der Vorladung nach Rom sei eine Untersuchung in Florenz vorangegangen; namentlich aber entspricht die Betonung der Gefangennahme, die Folge: „*chiamato a Roma, carcerato in questo S. O., proposta la causa avanti il papa li* 16 *giugño*“ durchaus dem Leitfaden der Decrete, denn bis zum 3. Februar 1633 gehen hier die Verhandlungen über die Vorladung nach Rom; dann folgt unmittelbar das Decret vom 16. Juni, eingeleitet durch die Worte „*Galileo de Galileis in hoc S. Off. carcerati.*

Unmöglich war es, in solcher Weise eine Geschichte des Galileischen Processes zu combiniren, wenn man auch nur einen flüchtigen Blick in das Actenheft geworfen hatte, dem das Referat auf Fol. 559 angehört und der gewöhnlichen Annahme nach im Jahre 1734 hinzugefügt wurde. Ist es aber denkbar, dass ein Beamter der Inquisition im Jahre 1734 über Galilei's Process berichtet und für überflüssig gehalten hätte, die Acten dieses Processes zu vergleichen? Es gab nur einen Zeitpunkt seit dem Jahre 1633, in dem eine solche Nichtberücksichtigung der Acten verständlich, weil durch die Verhältnisse erzwungen gewesen wäre; das ist die Zeit, in der das Actenheft in Rom nicht zu finden war, die Zeit von 1809—46. Die befremdenden Fehler des Referats würden bei einer Entstehung in dieser Zeit sich begreifen lassen; man kann daher behaupten, dass die Beschaffenheit des 559. Blattes wohl vereinbar sei mit der Vermuthung, die uns Gherardi's Enthüllungen nahelegen, dass eine Fälschung der Acten bereits vorbereitet wurde, als über die Rücklieferung derselben noch zwischen Rom und Paris verhandelt wurde, und mit der weiteren Annahme, dass Blatt 559 mit der italienischen Uebersetzung des Decrets, mit dem erläuternden „*e sostenendo*“ und dem Zweifel ausschliessenden „*come il tutto fù eseguito*“ gleichfalls in dieser Zeit entstanden ist. Keinenfalls kann ein so beschaffenes eingelegtes Blatt als ein Zeugniss der authentischen Sentenz gegenüber in Betracht kommen.

Nicht besser steht es mit dem Schlusssatz des Protokolls vom 21. Juni, nach dessen Angabe Galilei „*in executionem decreti*“ mit der Androhung der Tortur davongekommen wäre. In meinen früheren Erörterungen über den Werth dieses Schlusssatzes war ich, was äussere Gründe anlangt, im Wesentlichen darauf angewiesen, die vermeintlichen Beweise für die Unmöglichkeit einer Fälschung zu widerlegen. Die neueren Veröffentlichungen von de l'Epinois und v. Gebler haben Nichts zu Tage gefördert, was diesen Erörterungen widerspricht, sie haben uns dagegen mit einer Reihe von Thatsachen bekannt gemacht, die sich als positive Verdachtsmomente bezeichnen lassen.* Ich stelle dieselbe in der Kürze zusammen:

---

* Man vergleiche das Nachwort S. IX—XI in „Ist G. gef. w.?“ und „Göttingische gel. Anz“ 1878, S. 665—666. Die im Folgenden erwähnten Abhandlungen

1. Nach de l'Epinois' älterer Mittheilung war die Bezifferung an dieser Stelle in Ordnung; das Protokoll stand auf Fol. 452 und 453, auf Fol. 454 folgte Galilei's Bittschrift. In Wirklichkeit ist auch das erste Blatt der Bittschrift mit 453 beziffert; wir haben zwei Blätter 453; es ist demnach das aus inneren Gründen verdächtige zweite Blatt des Protokolls beziffert, wie es beziffert sein müsste, wenn an dieser Stelle ein überzähliges Blatt eingeschaltet, resp. eins mehr eingeschaltet, als entfernt wäre und wenn dies Blatt dann doch in die vorhandene Ziffernfolge aufgenommen werden sollte.

2. Man durfte früher glauben, das Protokoll sei auf getrennter Blattlage den vorhergehenden Documenten hinzugefügt; wir wissen jetzt, dass Fol. 452 und 453*a* die beiden letzten Blätter des aus 6 Blattlagen bestehenden Hefts der Verhöre vom Jahre 1633 sind;* es können demgemäss die beiden Blätter nicht nachträglich eingeschaltet sein; dass aber dadurch die Anordnung des Vaticanmanuscripts an der entscheidenden Stelle nur in höherem Grade befremdend erscheint, hat Dr. Scartazzini gezeigt.** Die Thatsache, dass hier zwischen den beiden naturgemäss auf einander folgenden Blättern 422 und 452 in einer ganzen Reihe von kleineren und grösseren Heften sämmtliche zwischen dem 12. April und 16. Juni eingelaufenen Actenstücke eingefügt sind, scheint ihm um so verdächtiger, als im Uebrigen die Weise der Verbindung der Documente im Vaticanmanuscript von der bei ähnlichen Actensammlungen üblichen nicht abweicht; eine ähnliche abnorme Anhäufung der Actenstücke zwischen den Blättern eines regulären Hefts liess sich nur noch in der Nähe der gleichfalls verdächtigen Blätter des ersten Processes nachweisen. Wenn aber hier der streng chronologischen Folge wegen wenigstens möglich erscheint — was v. Gebler*** als gewiss betrachtet —, dass die Documente genau in der Folge, wie sie einliefen, zur Zeit des Processes eingelegt und später fest verbunden wurden, so ist dies bei den Actenstücken von 1633 auf's Allerbestimmteste ausgeschlossen. Auf das Verhör vom 10. Mai folgt hier das am 12. April eingereichte Zeugniss des Cardinals Bellarmin, auf Galilei's Vertheidigung vom 10. Mai, die Reihe der Gutachten, von denen das erste das Datum des 17. April trägt. Die Anordnung ist also unzweifelhaft eine nachträglich hergestellte; man war demnach in der Lage, bei der Aneinanderreihung die gewöhnlichen Zweckmässigkeitsrücksichten walten zu lassen. Mit vollem Recht hat Scartazzini darauf aufmerksam gemacht, dass man nur die Blätter,

---

Scartazzini's über denselben Gegenstand finden sich in der Beilage zur „Allgemeinen Zeitung" 1878, Nr. 38 und in der *„Rivista Europea"* 1877, Heft vom 1. December und 1878, Hefte vom 1. und 16. Januar.

* v. Gebler, „Die Acten des G.'schen Processes", S. XVII.

** *„Rivista Europea"* 1878, S. 224flgg.

*** „Allgemeine Zeitung" 1878, Beilage No. 57.

die heute mit 452 und 453 beziffert sind, an ihre natürliche Stelle hinter 422 zu bringen braucht, um eine durchaus normale Verbindung der Hefte und Blätter herzustellen, dass demnach die Annahme gestattet erscheint, dies eben sei die ursprüngliche Anordnung der Blätter gewesen, aus der die jetzige erst dann entstanden, als man der beiden Blätter für ein unverfängliches Protokoll vom 21. Juni bedurfte. Zu weiterer Bestätigung dieser Annahme wird allerdings der Nachweis erforderlich sein, dass die unzweifelhaft alte Bezifferung in diesem Theil des Vaticanmanuscripts mehrfache Aenderungen erfahren hat. Ein Indicium dafür bietet die bereits erwähnte Thatsache der zwei mit 453 bezifferten Blätter.

3. Mag aber auch bei Vergleichung anderer Actensammlungen die befremdende äussere Anordnung des Vaticanmanuscripts auf ein gewohnheitsgemässes Verfahren zurückzuführen, mag demgemäss die jetzige Lage der Blätter 452 und 453 die ursprüngliche sein — ihr Inhalt rechtfertigt darum nicht weniger den Verdacht einer späten Ausfüllung. Ich habe bereits früher die Bedeutung der einleitenden Worte „*Galilei Florentinus de quo alias*“ hervorgehoben; ich habe als gewiss betrachtet, dass ein so beginnendes Actenstück sich unmöglich ursprünglich in der Umgebung befunden haben könne, in der es heute gelesen wird, unmöglich in der Mitte einer ausschliesslich Galilei betreffenden Sammlung, unmöglich im engsten Anschluss an das Decret vom 16. Juni, in dem es heisst: „*Galilei de quo supra*“. Die Mittheilung, dass Fol. 452 mit den Anfangsworten „*Galilei Florentinus de quo alias*“, mit Fol. 414 fest verbunden ist, das 11. Blatt eines Hefts der Verhöre von 1633 bildet, beseitigt in dieser Beziehung den letzten Zweifel.

4. Wir wussten bis zum Erscheinen der v. Gebler'schen Ausgabe nichts über die Unterschrift des Protokolls; wir wissen jetzt, dass Galilei's Unterschrift an der entscheidenden Stelle „im Gegensatz zu seinen anderen Unterzeichnungen mit auffallend zitternder Hand niedergesetzt ist“.* „Es spiegelt sich gleichsam darin die furchtbare Aufregung, welche der unglückliche Greis eben erduldet.“

Die Unterschrift hat also nach v. Gebler's Zeugniss mit Galilei's andern Unterzeichnungen unverkennbare Aehnlichkeit; dies genügt, die Fälschung zu erweisen, wenn man auf Grund der vorstehenden Erörterungen als erwiesen betrachtet, dass das Protokoll auf 452 und 453 eine Abschrift ist. Aber auch an sich betrachtet, ist die geschilderte Beschaffenheit dieser Unterschrift bedeutsam genug. Sieht man ab von der psychologischen Interpretation, so bezeugt v. Gebler, dass die Unterschrift Galilei's bei aller Aehnlichkeit von den zur Vergleichung vorliegenden in auffallender Weise abweicht; auch in der Art dieser Abweichung sieht er einen Beweis für die Echtheit des Actenstücks; er

---

* v. Gebler, „Die Acten des Galilei'schen Processes“, S. 114.

trägt kein Bedenken, auf die entgegenstehenden Bemerkungen von Cantor und Scartazzini zu erwidern: „ein Fälscher hätte keinesfalls auffällig gezittert!“* Mir scheint, ein Fälscher hätte eben nur denken müssen, wie v. Gebler, dass eine Aufregung bis zum Zittern der Hand durch die Sachlage ausreichend motivirt gewesen sei, um jedenfalls dies Zittern, das die Nachahmung erleichterte, künstlich darzustellen.

5. Ich habe auf die Lücke in der Folge der Actenstücke unmittelbar hinter der Unterschrift des Protokolls vom 21. Juni aufmerksam gemacht; diese Lücke erscheint heute noch bedeutsamer und auffälliger. Auf der Rückseite des 453. Blattes lernen wir erst jetzt das förmliche Protokoll über die Entlassung nach Siena kennen. Das Protokoll beweist oder — besser gesagt — erinnert uns, dass ohne Zweifel über die Entlassung des soeben zum Gefängniss verurtheilten Galilei am 24. Juni gleichfalls eine Urkunde aufzunehmen war und dass auch diese, wie jede Notiz über die Entlassung in den Acten fehlt. Die Lücke wird nur noch auffälliger dadurch, dass das Decret vom 30. Juni auf die Begnadigung vom 24. Juni wie auf eine bekannte Thatsache Bezug nimmt.

Nach der früheren Angabe von de l'Epinois endet das Protokoll vom 21. Juni auf der ersten Hälfte der Vorderseite von Fol. 453; auf der Rückseite desselben Blattes folgte dann das Decret vom 30.; in Wirklichkeit trennt, wie wir jetzt erfahren, nur ein kaum 2 Finger breiter Zwischenraum das Decret vom 30. von der Unterschrift Galilei's vom 21. Juni;** dasselbe steht also gleichfalls auf der Vorderseite des 453. Blattes. Zu den früher hervorgehobenen eigenthümlichen Abweichungen, die uns die Einschaltung dieses Decrets vom 30. Juni bietet,*** ist also noch die weitere hinzuzufügen, dass es unter etwa 30 eingeschalteten Decreten das einzige ist, das auf einer Vorderseite gefunden wird. Die in ihrer Art einzige räumliche Annäherung, in der uns demnach die beiden Aufzeichnungen entgegentreten, ist keineswegs geeignet, darüber zu täuschen, wie wenig sie zusammengehören, wie Vieles zwischen ihnen fehlt.

6. Der Vermuthung, dass sowohl das Decret vom 30. Juni, wie das nachfolgende Protokoll vom 2. Juli auf dem 453. Blatte spät hinzugefügt sei, um eine Beseitigung des „*Examen rigorosum*“ an dieser Stelle unmöglich erscheinen zu lassen, hat v. Gebler eine bis dahin unbekannte Thatsache gegenübergestellt. „Wir sind in der Lage“, sagt er, „die Echtheit der Annotation vom 30. Juni auf das Bestimmteste zu constatiren, indem die Schrift der Aufzeichnung vom 30. Juni 1633 genau dieselbe Hand zeigt, wie die Annotationen vom 16. Juni 1633, 30. und

* „Gegenwart“, *l. c.* S. 392.
** „Gegenwart“, *l. c.* S. 392.
*** „Ist G. gef. w.?“ S. 107flg.

9. December 1632 und vom 23. September 1632."* Diese bedeutsame Mittheilung ist so wenig geeignet, die Unhaltbarkeit meiner Fälschungshypothese darzuthun, dass sie vielmehr zur Kette der Verdachtsmomente ein letztes fehlendes Glied liefert; denn zu den genannten Annotationen von gleicher Hand zählt, wie oben erwähnt, auch die zweite über das Decret vom 1. December 1633; mit dieser wird demnach, wie schon früher das Decret vom 16. Juni, nun auch das vom 30. Juni auf die gleiche Stufe gestellt; es wird also durch v. Gebler's Aussage die Wahrscheinlichkeit einer späten Einschaltung auch für das Decret vom 30. Juni nicht beseitigt, sondern erhöht.

Nach alledem ist mit der wesentlichen Vervollständigung unserer Kenntniss des Vaticanmanuscripts der Glaube an die Echtheit des Protokolls vom 21. Juni mehr und mehr unhaltbar geworden. Die bisher bekannt gewordenen Vertheidigungsversuche haben das Gewicht der Zweifel nicht entkräftet; berechtigte Einwürfe treffen den auf Grund eines ungenauen Berichts vermutheten Modus der Fälschung, nicht den Verdacht der Fälschung selbst.** Es kann deshalb auch der Aussage dieses Protokolls kein Beweis dafür entnommen werden, dass am 21. Juni 1633 ein anderes, als das Originaldecret vom 16. Juni vorhanden gewesen ist.

Auf Grund der vorliegenden Untersuchung in Verbindung mit den früheren Forschungen darf der gegenwärtige Stand der „Torturfrage" folgendermassen präcisirt werden:

Es ist den Enthüllungen von Silvestro Gherardi mit voller Sicherheit zu entnehmen, dass am 16. Juni 1633 vom Papst und von der Congregation der Beschluss gefasst worden, Galilei unter Androhung der Tortur dem „*Examen de intentione*" zu unterwerfen und ihn,

---

* „Gegenwart", *l. c.* S. 393.

** Vergl. darüber Scartazzini an den bereits citirten Stellen. Ich deute hier nur an, dass ich in dem Verdacht einer Fälschung auch des Datums des Protokolls mit Sc. nicht übereinstimme. Die späte Vollziehung des päpstlichen Befehls vom 16. Juni erklärt sich zur Genüge, wenn man beachtet, dass der Papst die Abschwörung „*in plena congregatione S. Officii*" anordnet; demgemäss sollte sie am 22. Juni stattfinden; denn die betreffende Versammlung der Cardinäle fand regelmässig am Mittwoch statt, der nächste Mittwoch aber war der 22. Juni. Das „*Examen de intentione*" konnte naturgemäss der Verurtheilung nicht lange vorausgehen. Im Process des O'Farrihy findet ein solches Verhör unmittelbar vor der Verlesung des Urtheils statt. Wäre das die Regel in allen Fällen, wo auf die Tortur verzichtet wird, so würde der Termin des 21. Juni nicht — wie v. Gebler will — gegen, sondern für die Folterung beweisen. Galilei erschien am Morgen des 21. Juni im Inquisitionspalast; es blieb also Zeit genug, um in dem (nicht vorliegenden) Fall eines Geständnisses auf der Folter das Geständniss 24 Stunden später im gewöhnlichen Sitzungssaal zu wiederholen und dann doch noch zu einer den Cardinälen passenden Stunde desselben Tages abzuschwören.

falls er dabei bliebe, die Copernicanische Gesinnung zu verleugnen, zu weiterem Verfahren in die Folterkammer abzuführen.

Es ist durch die Sentenz verbürgt, dass diesem Beschlusse gemäss eine Abführung in die Folterkammer stattgefunden hat.

Die Actenstücke des Vaticanmanuscripts, die in vollem Widerspruche mit dem Originaldecret und dem Bericht der Sentenz behaupten, dass am 16. Juni befohlen worden, sich unter allen Umständen auf die Bedrohung mit der Tortur zu beschränken und dass am 21. Juni demgemäss verfahren sei, sind aus inneren und äusseren Gründen einer in neuerer Zeit erfolgten Fälschung dringend verdächtig.

Die Mittheilungen Gherardi's deuten an, dass für die systematische Bearbeitung des Vaticanmanuscripts in allen die Torturfrage berührenden Theilen die Umgestaltung des Originaldecrets vom 16. Juni durch Streichungen den Ausgangspunkt gebildet hat.

Hamburg, im September 1878.

Recensionen.

Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen. Von Ludwig Matthiessen, ord. Professor an der Universität zu Rostock. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1878. XVI, 1002 S.

Ein gigantisches Werk von solchen Dimensionen, wie sie das vorliegende aufweist, in allen seinen Einzelheiten durchzuprüfen und eingehend zu besprechen — dies wäre selbst wiederum eine das Kräftemass des Recensenten weit übersteigende Riesenaufgabe. Es kann sich vielmehr unter diesen Umständen nur darum für ihn handeln, einen allgemeinen Ueberblick über die Vorlage zu geben und an einzelne Punkte seine Bemerkungen anzuknüpfen, welch' erstere ihm bei seiner Durchsicht besonders in die Augen gefallen sind.

Herr Matthiessen beabsichtigt — so können wir kurz die Tendenz seines Buches bezeichnen —, alle auf Gleichungen bezüglichen Arbeiten aus älterer und neuerer Zeit zusammenzustellen und nach gewissen Eintheilungsprincipien in Gruppen zu ordnen, soweit dabei Näherungsmethoden ausgeschlossen bleiben. Diese letzteren sollen in ihrer Gesammtheit den zweiten Theil vorliegenden Werkes ausmachen. Selbstverständlich lässt sich diese Scheidung niemals in aller Strenge durchführen; die *Regula falsi* und die goniometrischen Auflösungsformeln, welche wir in diesem ersten Theile besprochen finden, hätten vielleicht auch dem zweiten zugerechnet werden können, obwohl nicht zu leugnen ist, dass mit ihrer Hilfe die Bildung geschlossener Ausdrücke für gewisse Wurzelformen möglich ist. Dem Grundplane gemäss zerfällt der erste Band in drei Hauptabtheilungen, deren erste sich mit den allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen beschäftigt, deren zweite gewisse specielle Gleichungen höherer Grade ins Auge fasst, welche einer abgeschlossenen Lösung trotzdem fähig sind, deren dritte endlich den Gleichungen der vier ersten Grade gewidmet ist.

Der erste der acht Abschnitte, an welche sich die weitere Ausführung des soeben geschilderten Grundgedankens gliedert, hat es sonach mit ganzen rationalen Functionen Einer Variablen zu thun. Wir wollen hier gleich anfangs mit einem Bedenken nicht zurückhalten, demjenigen nämlich, dass uns eine der wichtigsten Thatsachen, auf welcher alles Nachfolgende mehr oder weniger beruht, nicht sicher genug begründet erscheint. Wenn gleich § 2 mit den Worten beginnt: „Jede Grösse von allgemeiner Beschaffenheit oder jeder Zahlenwerth, sei er reell oder complex von der Form $\alpha+\beta i$, welcher für x substituirt das Polynom X gleich Null macht oder der Gleichung $X=0$ Genüge leistet, heisst eine Wurzel der Gleichung", so ist doch hiermit eine unbewiesene Voraussetzung eingeführt; Kenntniss der nicht ganz leichten Beweise, durch welche man seit Gauss überhaupt die Ueberzeugung von der Existenz eines solchen Wurzelwerthes sich verschafft, durfte doch wohl in einem mit den ersten Elementen anhebenden Compendium kaum vorausgesetzt werden. Ueberhaupt hätten wir gerade diesem § 2 eine weit grössere Ausdehnung, vielleicht bis auf das Dreissig- oder Vierzigfache seines jetzigen Umfanges, gewünscht. Denn derselbe enthält auch Andeutungen über die Unmöglichkeit der Auflösung höherer als biquadratischer Gleichungen, er spricht von dem durch Abel und Ruffini* erbrachten Nachweis dieser Thatsache, und da hätte es sich doch wohl mit dem Endzweck des Buches ganz gut vertragen, wenn auf die bezüglichen Untersuchungen, etwa zugleich durch Beifügung eines Abrisses der Substitutionenlehre, näher eingegangen worden wäre. — Der erste Abschnitt schliesst mit den Kriterien zur Erkenntniss der reellen und complexen, positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung; der zweite handelt „von den Transformationen der Gleichungen und den symmetrischen Functionen der Wurzeln". Dieser Abschnitt ist ebenso inhaltsreich, als interessant. Als einen besondern Vorzug desselben, wie auch des ganzen Buches muss es der Referent bezeichnen, dass den Bestrebungen der sogenannten modernen Algebra eine besonders erschöpfende Behandlung zu Theil und der in den gewöhnlichen abstracten Darstellungen nicht gehörig hervortretende Nutzen, welchen dieselben für das praktisch-algebraische Fundamentalproblem gewähren, gebührend ins Licht gesetzt wurde. Nur hätten wir die Anordnung des freilich fast erdrückenden Stoffes ein wenig anders gewünscht, denn jedenfalls ist es als ein formaler Nachtheil zu bezeichnen, dass schon auf S. 43 flgg. ziemlich viel mit Determinanten gerechnet werden muss, während die Definition dieses Begriffes erst S. 100 nachfolgt. Als eine wesentliche Bereicherung des auch in unseren besten Lehrbüchern enthaltenen Materials glauben wir die Aufzählung und Beschreibung derjenigen älteren Verfahrungsweisen notiren zu sollen, welche sich mit der Bestimmung des Grades einer Eli-

---

* Die betreffende Angabe ist nicht ganz richtig; Ruffini hat die Unmöglichkeit, durch geschlossene Irrationalitäten eine allgemeine algebraische Gleichung aufzulösen, allerdings erkannt und zu erweisen versucht, sein Beweis ist aber nicht als genügend erachtet worden.

minationsresultante noch ohne Zuhilfenahme der Determinantenrechnung beschäftigen; nur hätte dabei nicht die jene älteren Versuche so zu sagen abschliessende Abhandlung von Minding unerwähnt bleiben sollen. Der dritte Abschnitt beginnt mit den reciproken Gleichungen, geht hierauf zu der Form $x^n - a = 0$ über, erörtert eingehend die für die Kreistheilung wichtigen algebraischen Fragen, behandelt die Sätze von Moivre und Cotes, die graphische Darstellung des Imaginären. Eine in dieser Form wenigstens pädagogisch neue Partie ist die den irreductiblen Gleichungen schlechtweg gewidmete; diese erscheinen allgemein unter dem Bilde

$$x^n - \frac{n}{1}\binom{n-2}{0}\frac{p}{n}x^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}\frac{p^2}{n^2}x^{n-4} - \ldots = P.$$

Es folgen die Gleichungen mit gleichen Wurzeln und diejenigen, zwischen deren Wurzelwerthen gewisse Beziehungen bestehen; bei letzteren tritt besonders die für die folgenden speciellen Methoden wichtige Reducente hervor.

Um den Kernpunkt der beiden folgenden Abschnitte zu verstehen, bedarf es der Kenntniss einer durchgreifenden Unterscheidung, welche zwischen den sämmtlichen Auflösungsmethoden der den vier ersten Graden zugehörigen Gleichungen zu machen der Verfasser für erforderlich hält. Bei den Substitutionsmethoden, über welche schon eine ältere, ihres fesselnden Inhalts halber bald vergriffene Brochure des Autors sich verbreitete, wird irgend eine algebraische Function beliebig vieler Argumente — unter denen natürlich die ursprüngliche Unbekannte x mit enthalten sein muss — in die gegebene Function $f_{(x)} = 0$ eingeführt, um so einerseits die Bildung der Resolventen $f_{(y)} = f_{(z)} = \ldots = 0$, als auch andererseits die Auflösung der reducirten, von $f_{(x)} = 0$ noch übrig gebliebenen Gleichung durch einfachere Operationen zu ermöglichen. Die andere Classe, diejenige der Combinationsmethoden, fordert die Ersetzung gewisser Combinationen (nach Vandermonde „Typen“) der Wurzeln durch eine oder mehrere neue Hauptgrössen, für welche ebenfalls aus den Coefficienten der vorgelegten Gleichung die nothwendige Anzahl von Bedingungsgleichungen gebildet werden kann. Jede dieser beiden Kategorien erfüllt mit der grossen Menge der ihr einzuordnenden Detailmethoden einen eigenen Abschnitt.

Es würde ein vergebliches Beginnen sein, Demjenigen, der Matthiessen's Buch nicht selber vor Augen hat, eine auch nur oberflächliche Vorstellung von der Fülle interessanter Specialitäten verschaffen zu wollen, welche man in diesen beiden Capiteln vereinigt antrifft. Ob man mit untrüglicher Bestimmtheit versichern dürfe, dass keine einzige von irgend einem Schriftsteller zu irgend einer Zeit ausgedachte Lösung der allgemeinen quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichung hier übersehen worden sei, das ist freilich so leicht Niemand im Stande zu entscheiden; Referent, der sich in diesen Dingen einige Kunde zuzuschreiben wagt, vermöchte wenigstens keine Lücke aufzuzeigen. Unter dem geschichtlichen sowohl, wie unter dem theoretischen Gesichtspunkte ist es dankenswerth gewesen, so manches ältere, aber in seiner Art geistreiche und oft zu den allermodernsten Studien überraschende Beziehungspunkte bietende Verfahren der Vergessenheit zu entreissen; wir erinnern in dieser Hinsicht nur an die verschiedenen Methoden des wackern Hulbe. Die stete Berücksichtigung der Invariantentheorie, durch welche uns Wesen und Inhalt der von den Engländern beliebten, in Deutschland aber nicht mit besonderer Sympathie aufgenommenen Bezeichnungsweise bedeutend näher gerückt wird, dürfte auch für solche Leser Werth haben, welche das Matthiessen'sche Werk als ein in erster Linie elementares sonst vielleicht nicht zur Hand genommen hätten. Gerade das ist eben ein Hauptvorzug dieser Zusammenstellung, dass die einzelnen Thatsachen nicht allein unvermittelt reproducirt, sondern, soviel möglich, auf ihren inneren Zusammenhang geprüft werden. Beiläufig bemerken wir zu S. 635, dass die zwischen einem von Heilermann im Trierer Programm von 1855 aufgestellten Gleichungssysteme und der sogenannten Aronhold'schen Deltafunction bestehende Relation nicht allein hier ganz correct angegeben, sondern sogar eine so enge ist, dass mit Rücksicht auf den Publicationstermin mit mehr Berechtigung von einer Heilermann'schen, als von einer Aronhold'schen Determinante gesprochen werden würde. Um die Grösse des im fünften Abschnitte bewältigten Materials einigermassen sich zu veranschaulichen, sei erwähnt, dass für die Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade beziehungsweise 8, 22 und 54 Formen von Wurzeltypen aufgeführt und discutirt werden. Als ein in mehrfacher Weise bemerkenswerthes Exercitium in der Determinantentheorie machen wir § 331 namhaft, die „Ableitung der Formeln von Aronhold mittelst symmetrischer Functionen der Wurzeln“.

Der sechste Abschnitt behandelt die Anwendung der Goniometrie auf algebraische Probleme, der siebente die verschiedenen, in der Geschichte der Mathematik zu einiger Bedeutung gelangten graphischen Auflösungen der Gleichungen; in dem geschichtlichen Schlussabschnitte endlich stossen wir auf eine „Gesammtliteratur der Algebra der Gleichungen“ (dieser Titel kommt uns etwas tautologisch vor). Letztere bildet ein Unternehmen, welches eben nur ein Mann von so ausgebreiteter, ja fabelhafter Belesenheit, wie der Verfasser, wagen und zu einem glücklichen Ende führen konnte.

Ein in der mathematischen Literatur so eigenartig dastehendes Werk, wie dasjenige, von dessen hauptsächlichsten Eigenthümlichkeiten wir eine Skizze zu entwerfen bestrebt waren, wird je nach den Gesichtspunkten und nach den Erwartungen, unter denen man an dasselbe herantritt, stets eine verschiedene Beurtheilung finden; der Eintheilungsmodus, welcher bei einer so gewaltigen, im besten Sinne compilatorischen Leistung immer besonders ins Gewicht fallen muss, wird niemals auf allgemeine Billigung rechnen dürfen. Wohl aber wird Jeder, der auch nur einigermassen die einem so umfassenden Entwurfe sich entgegenstellenden Schwierigkeiten zu würdigen weiss, mit dem Unterzeichneten in dem Urtheil übereinstimmen, dass der Verfasser das Mögliche geleistet hat. Sein historischer Sinn und die ihn durchdringende Ueberzeugung, dass ein tieferer Einblick in das Werden einer wissenschaftlichen Theorie nur im engsten Anschlusse an die geschichtliche Entwickelung des betreffenden Gegenstandes gewonnen werden könne, haben ihn veranlasst, dem historischen Elemente allüberall einen stattlichen Platz in seinem Buche einzuräumen, so dass letzteres mit allem Fuge auch als ein literargeschichtliches Repertorium für fast das ganze Gebiet der Algebra bezeichnet werden kann. Referent hatte schon bei einer früheren Veranlassung, als er Matthiessen's „Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis" im 7. Bande der „Zeitschr. f. mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht" besprach, zu bemerken, dass derselbe für das Gros der Leser eine ganze Bibliothek ersetze; er kann dies sein damaliges Urtheil für das vorstehend besprochene Werk nur wiederholen und empfiehlt es aus diesem Grunde besonders dem Studirenden, für welchen ein steter Recurs auf die Quellen sich durch die Umstände verbietet.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Jul. Petersen, Docent an der polytechnischen Schule zu Kopenhagen. Kopenhagen, bei Andr. Fred. Høst & Sohn. 1878. XII, 335 S.

Das Vorwort beginnt mit der Erklärung, das Buch verdanke seine Entstehung den Vorlesungen, welche der Verfasser an der polytechnischen Schule in Kopenhagen über die Theorie der Gleichungen gehalten habe. Durch Hinzufügung einiger erweiternder Zusätze habe er alsdann versucht, das Buch als einleitendes Studium für solche Studirende brauchbar zu machen, welche tiefer in die Wissenschaft der Algebra einzudringen wünschen.

Nach dieser ausgesprochenen Absicht ist das Buch zu beurtheilen, und wir nehmen keinen Augenblick Anstand, unsererseits zu bestätigen, dass Herr Petersen in seinem Versuche durchaus glücklich war. Ein Lehrbuch, genügend, jedes anderweitige Studium der eigentlichen Quellenschriften zu ersetzen und bis zu einem gewissen Grade entbehrlich zu machen, wollte der Verfasser nicht schreiben und hat er nicht geschrieben. Wohl aber hat er in seinem Buche geboten, was auch allein eine gute Vorlesung über einen so ausgedehnten Gegenstand, wie die Theorie der algebraischen Gleichungen es ist, bieten kann: eine Orientirung über das ganze Gebiet, ein Andeuten der Hauptstrassen, die dasselbe durchkreuzen und die Verbindung zwischen entlegenen Punkten herstellen, ein Verweilen bei einzelnen praktisch oder theoretisch besonders merkwürdigen Methoden. Nur Eines haben wir in dem Buche vermisst, was aber in einer voraussichtlich nicht ausbleibenden zweiten Auflage mit leichter Mühe ergänzt werden kann. Der Leser erfährt, wer die Entdecker der wichtigsten Sätze sind. Wir haben nicht nöthig, erst noch zu sagen, wie sehr wir diese pietätsvolle Namensnennung der entgegengesetzten Art vorziehen, die wir fast lieber Unart nennen möchten und die überall in Ungewissheit lässt, ob Altes, ob durchaus Neues vorgetragen werde. Der Verfasser verwahrt sich ferner im Vorwort dagegen, stets auf den herkömmlichen Bahnen geblieben zu sein. Wo Namen angeführt sind, seien diese deshalb oft nur so zu verstehen, dass die Entwickelung auf einer Idee aufgebaut sei, ähnlich derjenigen, welche der Entwickelung des genannten Autors zu Grunde liege. Auch dagegen ist sicherlich Nichts zu erinnern. Wer die Ergebnisse verschiedener Forscher, die jeder von einem andern Gedanken den Ausgangspunkt nahmen, vereinigen will, muss mit einer gewissen Freiheit schalten können, wenn ein Einheitliches entstehen und es nicht bei einem bunten Sammelsurium bleiben soll. Aber um so dringender ist die Nothwendigkeit, den Leser in den Stand zu setzen, in den Schriften der Entdecker selbst die Wege kennen zu lernen, auf welchen diese zum Ziele gelangten. Ueberall, wo ein Name genannt ist, sollte deshalb auch das Citat nicht fehlen, in welchem Werke oder in welcher Abhandlung der betreffende Satz oder die betreffende Methode zuerst erschien, und dass dieses mit strenger Folgerichtigkeit überall fehlt, scheint uns eine absichtliche, aber darum keineswegs zu rechtfertigende Lücke.

Um unseren Lesern übrigens eine Andeutung davon zu geben, welchen Stoff Herr Petersen auf 21 Druckbogen zusammenzudrängen wusste, geben wir eine flüchtige Inhaltsangabe. In vier Abschnitten handelt der Verfasser über Gleichungen im Allgemeinen, über die algebraische Auflösung der Gleichungen, über die numerische Auflösung der Gleichungen und über Substitutionen. Jeder dieser Abschnitte ist fast von genau gleicher Länge, ein Beweis, wie gründlich der Verfasser seinen Stoff beherrscht und wie er es sich angelegen sein liess, die Gleichberechtigung dieser Abschnitte auch äusserlich hervortreten zu lassen.

Im ersten Abschnitte ist von den allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, von den Beziehungen zwischen Wurzeln und Coefficienten, von dem Eliminationsproblem und von Transformationen der Gleichungen die Rede. Vielleicht sollte hier — etwa in dem Eliminationscapitel — auch von dem Rationalmachen der Gleichungen gehandelt werden.

Im zweiten Abschnitte lässt der Verfasser auf kubische und biquadratische Gleichungen die binomische Gleichung folgen. Er erörtert sodann die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der Gleichung fünften Grades, wobei ein Hinweis auf moderne Lösungen mittelst transcendenter Functionen wünschenswerth gewesen wäre, und kommt dann auf jene Untersuchungen, die der Zahlentheorie und der Theorie der Gleichungen gemeinschaftlich angehören, und die wir in Deutschland Lehre von der Kreistheilung zu nennen pflegen.

Im dritten Abschnitte ist die Absonderung, wie die Berechnung der Wurzeln in numerischen Gleichungen gelehrt und dabei gelegentlich auch die Aufgabe der Interpolation ins Auge gefasst.

Der vierte Abschnitt von den Substitutionen endlich bezeichnet seinen Inhalt genügend durch diese allgemeine Ueberschrift. Der *Traité des substitutions* von Jordan ist hier an vielen Stellen zu Grunde gelegt, wie im Uebrigen der Verfasser, was er auch im Vorwort selbst angiebt, mehrfach an der Darstellung in dem klassischen *Cours d'algèbre supérieure* von J. A. Serret sich ein Muster nahm.

Cantor.

Elemente der Theorie der Determinanten, mit vielen Uebungsaufgaben von Dr. P. Mansion, Professor an der Universität zu Gent. Leipzig 1878, bei B. G. Teubner. VI, 49 S.

Die *Éléments de la théorie des déterminants* von Mansion sind 1875 in französischer Sprache erschienen und haben im XXI. Bande dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abth. S. 166—167, von dem Verfasser eines Lehrbuches der Determinanten, welches selbst nach kurzer Zeit eine zweite Auflage nöthig machte und damit für seine günstige Aufnahme Zeugniss ablegte, das unumschränkteste Lob erhalten. Herr Günther schloss damals seine Besprechung mit dem Wunsche, Mansion's kleine Schrift auf deutschen Boden verpflanzt zu sehen. Diesem Wunsche verdankt die uns heute vorliegende Bearbeitung ihr Dasein. Die Uebersetzung rührt von Dr. Horn in München her, während Prof. Günther eine genaue Revision des Manuscriptes und des Druckes vornahm, wie er in einer der deutschen Ausgabe vorausgeschickten kurzen Vorrede erklärt.

Cantor.

Die Kegelschnitte, behandelt für die Repetition in der Gymnasialprima von Dr. Max Simon, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum in Strassburg. 1. Abthlg.: Die Parabel. Berlin, S. Calvary & Comp. 55 S.

Die vorliegende Schrift definirt die Parabel als den Ort des Punktes, welcher von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleich-weit entfernt ist, und leitet (§§ 1—4) aus dieser Definition die bekannteren Eigenschaften in einfacher, zweckentsprechender Weise ab. Um die Eigenschaften der parallelen Sehnen (§ 5), der conjugirten Sehnen (§§ 6—7) und, soviel bekannt, zum ersten Male in elementarer Weise die harmonischen Eigenschaften (§§ 10—11) abzuleiten, projicirt der Verfasser die Parabel auf die Leitlinie und folgert aus der Geometrie der Geraden diejenige der Parabel. Die §§ 8 und 9 enthalten einige Brennpunktseigenschaften.

Als erwünschte Zugabe, „um von den ewigen Dreiecksconstructionen Abwechselung und Erholung zu bieten", ist eine Sammlung von ungefähr 140 Aufgaben beigefügt, die nach den Paragraphen des Textes geordnet sind.

Dass die Parabel ein Kegelschnitt ist, wird in § 11 nachgewiesen, leider durch die Gleichung der Parabel und nicht durch constructive Zurückführung auf die Definition.

Als Uebungsbuch zu Wiederholungen erfüllt das Werkchen seinen Zweck. Mit der angewendeten Methode ist das Mögliche erreicht. An ihr liegt die Schuld, dass die Herleitung des Pascal'schen Satzes nicht gelungen ist. Ohne diesen ist aber jede Bearbeitung der Kegelschnitte unvollkommen, denn er erst gewährt ausser einem reichen Uebungsmaterial durch seine innigen Beziehungen zur projectivischen Geometrie einen Fernblick in die Welt der räumlichen Gebilde, unendlich wie der Raum selbst. Zum Theil wird dieser Mangel durch den Beweis gehoben, dass die Parabel sich in einen Kreis polarisiren lässt. An anderer Stelle wird Referent nachweisen, dass die Polareigenschaften und der Satz von Pascal sich ungezwungen, ohne alle Rechnung, in elementarer Weise für alle Kegelschnitte aus jeder der bekannten Erzeugungsarten derselben ableiten lassen.

In jedem Falle ist der Versuch, die Kegelschnitte in das Gymnasium einzuführen, freudig zu begrüssen und als gelungen zu bezeichnen.

Für gute Ausstattung hat die Verlagshandlung in anerkennenswerther Weise gesorgt.

Milinowski.

Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der geometrischen Axiome. Von A. Krause. Lahr, M. Schauenburg. 1878. 94 S.

In dieser Schrift soll, Helmholtz gegenüber und überall gestützt auf Kant, die Unerschütterlichkeit der geometrischen Axiome, ja die Unmöglichkeit, sie auch selbst nur in der Einbildungskraft zu verändern, nachgewiesen werden. Verfolgen wir, wie weit dem Verfasser die ihm „fast zu leicht" dünkende Arbeit, Kant in allen Stücken seiner Philosophie zu vertheidigen, gelungen ist.

Der Verfasser will hauptsächlich die Streitfrage zwischen Kant und Helmholtz schärfer, als bisher geschehen, hinstellen. Es handelt sich nach ihm um die Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der geometrischen Axiome, also um die Frage nach deren Unabhängigkeit von Erfahrung und Einbildungskraft. Indem Kant diese Frage bejahe, Helmholtz sie verneine, stehen die Beiden in dem ganzen Fundament der Erkenntnisstheorie sich so gegenüber, dass keinerlei Vermittelung denkbar sei; eine der beiden Theorien müsse fallen. Da will der Verfasser denn nachweisen, dass H. seine Lehre nur durch formal-logische und transcendental-logische Fehler, sowie durch Vernachlässigung von Thatsachen der Erfahrung gewonnen habe. Wir haben also zuzusehen, wie diese Einwürfe gegen H. und wie ferner die Ansicht von der absoluten Unverträglichkeit der beiderseitigen Lehren begründet sind.

Der Verfasser lässt K. und H. eine Reihe von erkenntnisstheoretischen und psychologischen Fragen gegensätzlich beantworten. Bei der Beantwortung der ersten Fragen wird wesentlich nur das behauptet, dass H. mit seiner Theorie der „Localzeichen" gegen das Kant'sche aprioristische raumsetzende Vermögen verstosse und dass er auch zu Lotze dabei im vollem Gegensatze sei. Es ist zu constatiren, dass die sämmtlichen Stellen in H.'s physiologischer Optik und seinen populären Vorträgen, welche die Nichtexistenz dieses Gegensatzes, sowie das Fernhalten H.'s von der Frage der Apriorität jenes Vermögens beweisen, hier einfach mit Stillschweigen übergangen sind. Eine Entstellung der H.'schen Lehre wird es, wenn man diese aussagen lässt, dass Qualitätsunterschiede in der Reizung an sich schon Raum bedeuten oder selbst etwas Räumliches sind, und von einem Meter Empfindung (S. 18) redet. Die thatsächlichen, aus der Physiologie geschöpften Beweise aber, wie der an das stereoskopische Sehen geknüpfte, mögen allenfalls für dieses aprioristische Vermögen sprechen, und dann richten sie sich nicht gegen H.; aber wie können sie zeigen (wie es S. 29 will), dass die Eigenthümlichkeiten der Raumanschauung lediglich auf eigene Gesetze gegründet sind? ganz abgesehen von der Fraglichkeit der angeblichen Thatsachen, wie der auf S. 23, Z. 10 v. u. erwähnten. Und ganz ebenso verhält es sich mit den transcendental-logischen Einwürfen, die höchstens auch nur zeigen können, dass die blosse Association von Erfahrungen, die Sinnlichkeit allein, noch nicht genügt, um unsere Anschauungen zusammenzusetzen.

Bei der 6. und 7. Frage — ob veränderte Axiome denkbar sind und welches der Grad der Sicherheit der Euklid'schen — tritt der Verfasser vom physiologischen in das mathematische Gebiet, und auch hier scheint mir die Auffassung von H.'s Ansichten missverständlich zu sein. H. versinnlicht seine Theorie dadurch, dass er sich von der Körperwelt eine Dimension hinwegdenkt und die Verhältnisse auf Flächen constanter

Krümmung, zu denen auch unsere Organe passen, betrachtet. Krause beachtet nun gar nicht, dass es sich bei diesen Flächen ausschliesslich um ein Bild handelt (H., Pop. Vortr. III, S. 38, Z. 1). Der Gedanke von H. ist der: Wir, mit unserer dreidimensionalen Anschauung des Raumes, haben ein Krümmungsmass desselben gar nicht in unserer Vorstellung; wir schreiben dem Raume ebenso wenig ein Krümmungsmass 0, als ein positives oder negatives zu. Die Frage nach der Giltigkeit einer dieser drei Möglichkeiten ist logisch eingeführt; um sie aus unseren Vorstellungen heraus eindeutig zu beantworten, wäre es nöthig, dass unsere Anschauung vom Unendlichen eine völlig eindeutige und klare ist, insbesondere darüber, ob man durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine, zwei oder keine Parallelen ziehen kann? Dies ist nicht der Fall, auch ist nicht einmal eine einzige Aussage darüber nöthig, um die Erscheinungen zu ordnen; vielmehr ist keine wesentliche Schwierigkeit vorhanden, dieselben Erscheinungen, sogar mit denselben Organen aufgefasst, unter etwas von einander verschiedene Gesetze der Anschauung zu fassen.

Die von H. in der oben bezeichneten Illustration dieser Ansicht eingeführte Veränderung der Organe dient also nur dazu, um die Abänderbarkeit, der man die gewohnten Eigenthümlichkeiten unserer Raumvorstellung unterwerfen kann, noch verständlicher zu machen.

Es tritt hier die Hauptfrage hervor, welche man an die absoluten Anhänger Kant's zu stellen hat: Ist in der That der Inhalt unserer Vorstellungen in Bezug auf das Verhalten der Geraden im Unendlichen fest, klar und eindeutig gegeben? Denn alle Deductionen — formal- oder transcendental-logischer Art —, welche auf den Begriff oder auch auf die anschauliche Vorstellung „Richtung“ basirt sind, zerfallen vor der Thatsache, dass eine Geometrie existirt, welche unsern Raum mit allen seinen Vorstellungen in Bezug auf's Endliche zum Gegenstande hat, welche die gerade Linie gerade und Ebene Ebene sein lässt und welche trotzdem unserm Raume ein constantes, von 0 verschiedenes Krümmungsmass zuschreibt. Die Beantwortung dieser Frage kann also nicht aus dem Kant'schen System selbst genommen werden; erst wenn sie bejaht ist, kann von einer Gegenüberstellung dieses Systems gegen die Helmholtz'schen Ansichten die Rede sein. Andernfalls aber herrscht kein unversöhnlicher Gegensatz zwischen H. und K.

Von den Evidenzbeweisen der Axiome Euklid's, die Krause zu liefern versucht, setzt der eine solche eindeutigen Raumbegriffe, wie Richtung, voraus, und leidet also an dem genannten Fehler. Er bildet, indem er diese Begriffe den Kant'schen, von Krause erweiterten Kategorien unterordnet, eine Ausführung von Ideen, die Kant nur einzeln hingeworfen hat, und soweit den werthvollsten Theil der Schrift. Derselbe Begriff von Richtung verleitet den Verfasser auch, H. einen logischen

Fehler vorzuwerfen (S. 50); der Fehler liegt aber in dem unbegründeten Satze des Verfassers (S. 52), dass alle in sich zurückkehrenden Linien mehr als eine Richtung haben, wobei zwei verschiedene anschauliche Vorstellungen willkürlich mit einander vermengt sind.

Was die übrigen Evidenzbeweise betrifft, so ist mir die Evidenz des Gegentheils seiner Behauptungen mindestens ebenso deutlich; z. B. scheint mir, dass ich bei den Congruenzsätzen an einen beweglichen Massstab denke, wenn ich zwei an verschiedene Stellen des Raumes gesetzte Strecken in Bezug auf ihre Länge mit einander vergleiche (S. 62). Welcher Mathematiker aus der algebraischen Formel allein die Gesetze der Raumanschauung und der Geometrie hat ableiten wollen (S. 64 flgg.), ist mir unbekannt geblieben; gegen wen geht also die Untersuchung, auf welchen Begriffen und Functionen die nur als logisches Instrument dienende Algebra beruht?

Es bleibt mithin nach diesen Evidenzbeweisen die obige Vorfrage für das Kant'sche System unverändert bestehen. In der That wird es keine ebenso „leichte Arbeit" sein, diese Lücke auszufüllen, als nur den Nachweis zu führen, dass das System keinen inneren Widerspruch enthalte.

Erlangen, September 1878. M. Noether.

Bibliographie

vom 1. bis 30. November 1878.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe d. königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1878, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Cl. I. Abth. 77. Bd., 3. u. 4. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk. 60 Pf.

——, 2. Abth. 77. Bd., 1.—3. Heft. Ebendas. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. Schönfeld u. Winnecke. 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

——, 13. Jahrg., 2. Heft. Ebendas. 2 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v. Ohrtmann, Müller u. Wangerin. 8. Bd. Jahrg. 1876, 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 60 Pf.

Fortschritte der Physik im J. 1874. 30. Jahrg., redig. v. Schwalbe u. Neesen. 1. Abth., enth. allg. Physik, Akustik, Optik. Berlin, G. Reimer. 10 Mk. 50 Pf.

Fortschritte auf dem Gebiete der Physik. Nr. 3, 1876—1878. Leipzig, Mayer. 2 Mk. 60 Pf.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica; ed. A. Metzger. 28. Jahrg. 1. Heft, Januar—Juni 1878. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Neumann, C., Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. 1. u. 2. Abth. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Schottky, F., Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen mit drei Variabelen. 1. Thl. Breslau, Köbner. 1 Mk.

Hočevar, F., Ueber die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Igel, B., Ueber die simultanen Invarianten, aus denen die Resultante dreier ternärer quadratischer Formen besteht. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Bunkofer, W., Zahlenbüschel, Mittelpunkt, äquivalente Vertretung von Punktsystemen. Freiburg i. B., Herder. 1 Mk.

Kunerth, A., 1. Methode zur Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen; 2. Auflösung quadratischer Congruenzen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Odstrčil, J., Neue Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln quadratischer und kubischer Gleichungen. Wien, Hölder. 1 Mk.

Kniess, C., Lehrbuch der Arithmetik. 2. Thl. München, Kellerer. 1 Mk 50 Pf.

Claussen, L., Die Logarithmen u. ihre Anwendung. Leipzig, Knapp. 4 Mk.

Heilermann, L. und J. Dickmann, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 1. Thl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium d. höheren Analysis. 1. Thl. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Thl.: Geometrie. 2. Buch. Berlin, Weidmann. 2 Mk.

Bartl, E., Sammlung von Rechnungsaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie. Prag, Dominicus. 2 Mk.

Gallenkamp, W., Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 2. Aufl. Berlin, Plahn. 1 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

Mink, W., Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie nebst einem Anhang über Kartenprojection. Berlin, Nicolai. 1 Mk.

Jordan, W., Mathematische und geodätische Hilfstafeln mit Kalendarium für 1879. Stuttgart, Wittwer. 2 Mk.

Gezeiten-Tafeln für die deutsche Nordseeküste auf d. J. 1879. Berlin, Mittler. 60 Pf.

Weisbach, J., Vorträge über mathematische Geographie. Freiberg, Engelhardt. 2 Mk.

Mattiat, D., Himmelskunde und mathematische Geographie. Leipzig, F. Duncker. 1 Mk. 60 Pf.

Gruss, G., Bestimmung der Bahn des Cometen V, 1874. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Sawitsch, A., Abriss der praktischen Astronomie mit bes. Rücksicht auf geograph. Ortsbestimmung. Neu herausgeg. v. C. Peters. Leipzig, Mauke. 20 Mk.

Förster, W., Hilfstafeln zur Berechnung von Volumen- und Gewichtsbestimmungen mit Rücksicht auf die Schwankungen der Dichtigkeiten von Wasser und Luft und auf den Einfluss der Wärme. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 50 Pf.

Löwenherz, L., Ueber die Veränderlichkeit von Platingewichtsstücken. Berlin, Dümmler. 1 Mk. 50 Pf.

Boltzmann, L., Weitere Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Schellen, H., Die magneto- und dynamo-elektrischen Maschinen. Cöln, Du Mont-Schauberg. 10 Mk.

Physik und Meteorologie.

Bohn, C., Ergebnisse physikalischer Forschung. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 8 Mk., pro compl. 23 Mk.

Tyndall, J., Das Wasser in seinen verschiedenen Formen. 2. Aufl. Leipzig, Brockhaus. 5 Mk.

Hammerl, H., Ueber die Kältemischung aus Chlorcalcium und Schnee. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Margules, M., Ueber Theorie und Anwendung elektromagnetischer Rotationen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Ludewig, J., Elektrische Messkunde. Dresden, Bänsch. 6 Mk.

Mach, E., Ueber den Verlauf der Funkenwellen in der Ebene und im Raume. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Waeber, R., Lehrbuch der Physik mit bes. Rücksicht auf phys. Technologie u. Meteorologie. Leipzig, Hirt & S. 3 Mk. 50 Pf.

——, Grundriss der Meteorologie. Ebendas. 60 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Zur Terminologie der griechischen Mathematiker.

Von

Fr. Hultsch.

Henri Martin hat sich durch seine Ausgabe der Astronomie Theon's von Smyrna nicht nur um die Texteskritik der alten Mathematiker ein bleibendes Verdienst erworben, sondern auch in vielen mehr nebensächlichen Fragen ein gewichtiges Wort gesprochen. Wie schon oft früher, so hatte der Unterzeichnete vor Kurzem wieder Gelegenheit, dies anzuerkennen, als er die beiden letzten Tafeln von Martin's Ausgabe, welche handschriftliche Facsimiles enthalten, näherer Untersuchung unterzog. Wenn man bedenkt, wie wenig brauchbar das ist, was Montfaucon von mathematischen Compendien anführt, und weiter in Betracht zieht, dass die neueren paläographischen Werke keinen Anlass hatten, die Wortabkürzungen und tachygraphischen Zeichen der mathematischen Texte zu berücksichtigen, so muss die Tafel *B* bei Martin, welche aus einem reichen Stoffe, wenn auch nicht alles, so doch manches Brauchbare bringt, einen um so höheren Werth erhalten. Gerade deshalb aber will der Unterzeichnete nicht unterlassen, seine abweichende Ansicht über eines der dort aufgeführten Zeichen vorzutragen, damit nicht die vorzügliche Autorität, welche der Martin'schen Arbeit im Uebrigen zuzusprechen ist, durch den einen zweifelhaften und vielleicht einem spätern Missbrauch ausgesetzten Punkt geschwächt werde.

Das kurze Fragment des Serenus (S. 340 der Ausg. von Martin) beginnt mit den Worten: „*Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ληφθῇ τι σημεῖον*“, und es wird dann weiter ein Satz der elementaren Geometrie citirt, welcher eine Ergänzung zu Euklid's Elementen (3, 27) bildet. Wie nämlich dort die Centriwinkel, welche auf gleichen Kreisbogen stehen, als gleich erwiesen werden, so sind nach Serenus die Winkel, welche von gleichen Abschnitten derselben Kreisperipherie nach einem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte, welcher nicht das Centrum ist, gezogen werden, ungleich, und zwar um so kleiner, je näher dem Centrum. Nun ist in dem Texte dieses Satzes der Ausdruck ἐπιφάνεια unmöglich, da dieses Wort nur die Fläche (*superficies*) eines Körpers, und zwar insbesondere die gekrümmte Oberfläche bedeutet. Der Kreis dagegen ist ein σχῆμα ἐπίπεδον, seine Ebene wird durch κύκλου ἐπίπεδον oder meist durch κύκλος schlechthin bezeichnet. Sehen wir nun weiter das tachygraphische Zeichen nach, welches Herr Martin als ἐπιφανείας gelesen hat, so finden wir kein anderes, als das anderwärts mit Sicherheit festgestellte Zeichen für ὅτι*. Dieses muss durch irgend ein Missverständniss vom Rande einer älteren Handschrift hinweg, wo es als Anfangswort dieses Abschnittes den Uebergang zu einem neuen Gegenstande bezeichnen sollte, an ganz falsche Stelle mitten in den Text gekommen sein. Was noch übrig bleibt, ἐπὶ τῆς, ist wahrscheinlich verschrieben aus ἐντός, so dass der Anfang des Lehrsatzes nun lautet: „Ἐὰν κύκλου ἐντός ληφθῇ τι σημεῖον." Vergleicht man ferner Eukl. Elem 3, 36 u. 37: „Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός" und Pappus 3, Cap. 98: „πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἐντὸς προσπίπτουσα ἡ BZH", so ergiebt sich, dass auch bei Serenus ἐντός als Adverb zu nehmen und κύκλου von σημεῖον abhängig zu machen ist.

In demselben kurzen Abschnitte (S. 342, Z. 5) ist noch die handschriftliche Lesart ἀπολάβωμεν wieder herzustellen „wenn wir gleiche Kreisbogen abschneiden", wofür von Herrn Martin ὑπολάβωμεν, „wenn wir annehmen", herausgegeben worden ist. Jener Gebrauch des Wortes ἀπολαμβάνειν ist in dem Index zu Pappus durch viele Beispiele von mir gesichert worden.

---

* *Josephi Torelli praefatio* (und zwar die erste mit der Ueberschrift *Lectori*) in Archim. p. III; W. Wattenbach, Anleitung zur griech. Paläographie, 2. Ausg., Autographirter Theil S. 17; Pappus ed. Hultsch, Vol. III, tom. II, p. 130.

Dresden. FRIEDRICH HULTSCH.

Recensionen.

Das Brachy-Teleskop, erfunden und construirt von J. Forster und K. Fritsch. Für Freunde der Astronomie, Militärs, Touristen u. s. w. verfasst von K. Fritsch, Optiker und Mechaniker. Wien, 1877. Selbstverlag. 8⁰. 20 S., 5 Holzschnitte u. 1 Lichtdrucktafel.

(Hierzu Taf. I Fig. 2—5.)

Das kleine Schriftchen giebt auf 14 Seiten nach einer Einleitung eine kurze Aufzählung des Gregory'schen, Cassegrain'schen, Newton'schen und Herschel'schen Spiegelteleskops mit schematischen Abbildungen (deren erste unrichtig ist, denn der darin verzeichnete Gang der Lichtstrahlen kann nur einem convexen, nicht einem concaven zweiten Spiegel angehören), eine Beschreibung des Brachy-Teleskops mit einer schematischen und einer perspectivischen Abbildung, ohne weiteres Eingehen in die Theorie des Instruments, berichtet über die Leistungen ausgeführter Brachy-Teleskope, spricht über deren zweckmässige Behandlung, besonders jene der Spiegel, hebt die Vorzüge hervor, welche die Reflectoren im Allgemeinen, der neue im Besondern, vor den Refractoren haben sollen, nebst Mittheilung über die Preise. In einem Anhange von zwei Seiten wird, unterstützt durch ein Lichtdruckbild, ein Spectrometer beschrieben, das wenigstens in theoretischer Hinsicht nicht von den üblichen verschieden ist.

Das Brachy-Teleskop kommt im Wesentlichen mit dem Cassegrain'schen überein: die von einem Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen fallen vor ihrer Durchkreuzung auf einen schwach convexen Spiegel, werden dadurch gewissermassen umgekehrt und vereinigen sich zu einem reellen Bilde, das durch ein dioptrisches Ocular betrachtet wird. Während bei dem Cassegrain'schen Reflector der zweite Spiegel auf der Geraden vom leuchtenden Punkte durch den Krümmungsmittelpunkt des Hohlspiegels steht und der Hohlspiegel zur Durchlassung der zweimal gespiegelten Strahlen in der Mitte durchbrochen ist, hat dieser bei dem Brachy-Teleskop eine seitliche Stellung und der kleine Convexspiegel ebenfalls, so dass die zweimal zurückgeworfenen Strahlen an dem Hohlspiegel vorübergehen. Der Verfasser des Schriftchens sieht in dieser Anordnung, welche die Ausbohrung nicht nöthig macht und die ganze Fläche des vorhandenen Hohlspiegels zu benützen gestattet, einen grossen Vorzug. Der Berichterstatter wird versuchen darzuthun, dass dem nicht so ist.

Bei keinem einzigen Spiegelteleskop kommen die Centralstrahlen, d. h. jene, die normal oder sehr nahezu normal auffallen, welche also die geringste sphärische Aberration erleiden, zur Verwendung. Es ist nicht selten ausdrücklich oder stillschweigend behauptet worden, die Vorzüge des Herschel'schen Vornschau-Fernrohres seien in Verwendung der Centralstrahlen begründet. Ein Blick auf Fig. 2 unserer Tafel lässt erkennen, dass diese Behauptung unrichtig ist. Das reelle Bild soll an der Seite des Rohres entstehen. Zu seiner Beobachtung ist ein Ocular nöthig. Dessen Fassung und der Kopf des Beobachters halten aber den Hauptstrahl (so nenne ich den normal einfallenden) und die benachbarten Centralstrahlen ab. Der Bildpunkt F liegt nothwendig auf dem Hauptstrahle; man sieht, dass die Ocularfassung und der Kopf des Beobachters einen Theil s des Spiegels nutzlos machen, und dieser Theil könnte daher ebenso gut weggeschnitten sein. Wegen Späterem sei hier bemerkt, dass die Axe des Oculars (gerichtet wie die Mittellinie des Kegels der das Bild erzeugenden Strahlen) mit dem Hauptstrahle oder mit der Richtung nach dem unendlich entfernten Lichtpunkte einen Winkel φ bildet, der sehr nahezu gleich $\frac{s+\frac{a}{2}}{f}$ ist, wenn f die Hauptbrennweite und a den nützlichen Oeffnungsdurchmesser des Hohlspiegels bedeuten.

Bei allen Spiegelteleskopen, die einen zweiten, kleineren Spiegel verwenden (Gregory, Cassegrain, Newton) hält dieser, der undurchsichtig ist, die Centralstrahlen ab, da er auf dem Hauptstrahl steht. Wollte man ihn seitlich vom Hauptstrahl rücken, so gelangten allerdings der Hauptstrahl und die Centralstrahlen zum Hohlspiegel, aber bei ihrer Rückkehr von dort träfen sie nicht mehr den kleinen Spiegel, trügen also nichts zur Bilderzeugung bei. Der Ausschluss der Centralstrahlen findet aus demselben Grunde auch bei dem Brachy-Teleskop statt. Es wird nachfolgend berechnet werden, wie weit (s und σ) die zwei Spiegel seitlich vom Hauptstrahle stehen müssen. Die Theile dieser Spiegel (von der Ausdehnung s und σ), welche etwa zwischen dem Hauptstrahle und dem diesem nächstgelegenen nutzbaren Punkte vorhanden sind, könnten ebenso gut fehlen, weggeschnitten sein. Je grösser die seitliche Verschiebung (entsprechend in anderen Teleskopen der centralen Durchbohrung), desto grösser ist der Einfallswinkel der Strahlen und bekanntlich nimmt die sphärische Aberration in sehr raschem Verhältniss mit dem Einfallswinkel zu. Der besprochenen Schrift zufolge sollen die Spiegel der Brachy-Teleskope parabolisch geschliffen sein. Dann ist allerdings die Aberration der parallel der Parabelaxe einfallenden Strahlen Null, nicht aber die anders gerichteter Einfallsstrahlen, und doch wird das Instrument auch für endlich entfernte Gegenstände (Beigabe eines Erdoculars) empfohlen.

In dem Schriftchen wird die Meinung ausgesprochen, die Bilder eines Herschel'schen Vornschau-Fernrohres seien lichtstärker und schärfer, als die der anderen bisher üblichen Reflectoren, und dem Brachy-Teleskop werden die Vorzüge des Herschel'schen und des Cassegrain'schen Fernrohres zusammen zugeschrieben. Das ist nicht zutreffend, namentlich nicht, wenn, wie in den folgenden Betrachtungen angenommen wird, Kugelspiegel (die allein mit der grössten Genauigkeit darstellbar sind) angewendet werden. Hinsichtlich der Schärfe der Bilder verdient die Herschel'sche Einrichtung keinen Vorzug vor der Cassegrain'schen — im Gegentheil kann bei letzterer die Aberration viel unschädlicher gemacht werden (siehe weiter unten). Die wirklichen Vorzüge des Herschel'schen Riesenteleskops hinsichtlich der Bildschärfe sind einzig in den grossen Dimensionen begründet. An Helligkeit übertrifft ein Herschel'sches Vornschau-Fernrohr alle anderen Spiegelfernröhre von gleichen Abmessungen, da in letzteren zwei mit Schwächung des Lichts verbundene Spiegelungen, in ersterem aber nur eine vorkommt. Da aber bei den Brachy-Teleskopen auch zwei Spiegelungen nothwendig sind, so geniessen sie den wirklichen Vorzug des Herschel-schen, grössere Helligkeit, nicht. — Mag noch daran erinnert sein, dass durch beträchtliche Aberration undeutlich gewordene Bilder heller sein können, als die von gleichgrosser Spiegelfläche herrührenden, viel schärferen, die von Centralstrahlen gebildet werden, denn die Intensität des gespiegelten Lichtes nimmt in ziemlich raschem Verhältniss mit dem Einfallswinkel zu.

Wie der für das neue Instrument gewählte Name anzeigt, wird die Kürze als wesentlichster Vortheil angesehen. Das beschriebene Teleskop ist aber nicht kürzer, als ein Cassegrain'sches bei gleichen Brennweiten der Spiegel, und ist länger, als eines mit gleichem Hohlspiegel und ebenem zweitem Spiegel, länger als ein Newton'sches.

Es sollen die zweckmässigst zu wählenden Abmessungen des Brachy-Teleskops berechnet werden.

I. Der zweite Spiegel sei eben und stehe

1. rechtwinklig zum Hauptstrahl.

Das Augenglas zwischen dem grossen und dem kleinen Spiegel anzubringen, bietet (abgesehen von Einrichtungsschwierigkeiten) keinen Vortheil für die Verkürzung, denn die Länge ist dann der Abstand der zwei Spiegel. Soll das Ocular vor dem grossen Spiegel liegen (d. h. in Richtung zum Gegenstande), so muss das reelle Bild weiter vor dem Hohlspiegel liegen, als wenn das Ocular hinter diesem oder in gleicher

Entfernung, vom Gegenstande aus, wie der Hohlspiegel angebracht ist. Je weiter aber das reelle, durch zweimalige Spiegelung entstandene Bild vom Hohlspiegel entfernt sein soll, desto näher muss der zweite Spiegel am Vereinigungspunkt der vom ersten gespiegelten Strahlen sein oder desto weiter vom Hohlspiegel abstehen, das Fernrohr wird also desto länger.

Sei das Augenglas um die Länge x hinter dem Hohlspiegel und λ bezeichne die Entfernung des Augenglases vom reellen Bilde (in bekannter Weise von Hauptbrennweite des Oculars und deutlicher Sehweite des Beobachters abhängig). Sei ferner y die Entfernung des ebenen Spiegels von dem Vereinigungspunkte der vom Hohlspiegel gekommenen Strahlen. Die Länge des Fernrohres (vom Augenglase bis zum kleinen Spiegel) ist dann $l = y + \lambda$.

Andererseits ist, wie aus Fig. 3 leicht zu erkennen, die Bildweite b oder die Vereinigungsweite der vom Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen

$$b = 2y + \lambda - x,$$

woraus folgen

$$y = \tfrac{1}{2}(b - \lambda + x) \text{ und also } l = \tfrac{1}{2}(b + \lambda + x).$$

Da für gegebene Gegenstandsweite (g) und gegebenen Hohlspiegel die Bildweite b bestimmt ist, ferner für bestimmtes Ocular und bestimmten Beobachter auch λ, so erkennt man, dass das Fernrohr am kürzesten wird für $x = 0$, d. h. wenn das Augenglas an jener Stelle steht, wo die Kugelfläche des Hohlspiegels den Hauptstrahl schneidet. Bei möglichst kurzem Fernrohr der angegebenen Art ist also $y = \frac{1}{2}(b - \lambda)$.

Aus Fig. 3 ist ersichtlich, dass der dem Hauptstrahl zunächst gelegene nützliche Punkt des Hohlspiegels auf der Geraden vom leuchtenden Punkte G über den vom Hauptstrahl entferntesten Punkt des kleinen Spiegels liegt und dass der vom Hauptstrahl entlegenste nützliche Punkt des Hohlspiegels auf der Geraden liegt vom Bildpunkte B über den vorgenannten Punkt des kleinen Spiegels (denn Strahlen, die von weiter abliegenden Stellen des Hohlspiegels kommen, treffen den kleinen Spiegel nicht mehr und tragen folglich Nichts zum betrachteten Bilde bei).

Zur Berechnung der Grössen s, σ, a, α und φ (Fig. 3) hat man ausser dem Werthe für y bei der Annahme $x = 0$ noch die Gleichungen

$$\begin{matrix} \sigma : s = y : 2y + \lambda, \\ \alpha : a = y : 2y + \lambda, \end{matrix} \quad \sigma + \alpha : s = g - y - \lambda : y.$$

Für unendlich entferntes Licht wird die letzte Gleichung $\sigma + \alpha = s$ (Fig. 4).

Als gegeben werde betrachtet λ, dann die Hauptbrennweite f und der Oeffnungsdurchmesser a des Hohlspiegels. Für unendliche Entfernung des Lichtes findet man also

$$s = a\frac{f-\lambda}{f+\lambda}, \quad \sigma = a\frac{(f-\lambda)^2}{2f(f+\lambda)}, \quad \alpha = a\frac{f-\lambda}{2f}$$

und

$$tg\,\varphi=\frac{\sigma+\frac{\alpha}{2}}{y}=\frac{a}{2f}\cdot\frac{3f-\lambda}{f+\lambda}.$$

Es hängt somit bei dem Brachy-Teleskop sowohl die Seitenverschiebung s des Hohlspiegels, als auch die Grösse des Winkels φ zwischen der optischen Axe des Oculars (die nach der Mitte des aufgenommenen Strahlenkegels angenommen wird) und der Richtung, aus welcher das Licht kommt (oder der Axe des beigegebenen Suchers), von der Hauptbrennweite f und dem Oeffnungsdurchmesser a des Hohlspiegels, dann von der Ocularlänge λ ab. — Herr Fritsch giebt seinem Brachy-Teleskop verschiedene Oculare bei; so oft man das Ocular wechselt, ist zur völligen Ausnützung des Hohlspiegels die Grösse s zu ändern und, was noch bemerkenswerther ist, der Winkel φ des Suchers mit der Ocularaxe. Streng genommen ist das schon bei gleichbleibendem Ocular für Beobachter von verschiedener deutlicher Sehweite erforderlich.

Will man die sphärische Aberration möglichst verringern, so muss man (bei gegebenem a) trachten, s möglichst klein zu machen. Je grösser λ wird, desto kleiner wird s, aber mit wachsendem λ vermehrt sich die Fernrohrlänge. Ein Ocular sehr kurzer Brennweite (sehr kleines λ) dürfte am zweckmässigsten sein. Das Verhältniss des Oeffnungsdurchmessers a zur Hauptbrennweite f muss stets (zur Vermeidung störender Aberration) sehr klein sein, also ist der Strahlenkegel nach der zweimaligen Reflexion ein sehr spitzer, auf dem nahe hinter seine Spitze gestellten Ocular schneidet er nur eine sehr kleine Fläche aus, so dass der nutzbare Oeffnungsdurchmesser der Lupe klein, folglich die sphärische Aberration der Linse unbedeutend ist und die starke Vergrösserung durch das ganz kurze Ocular zulässig erscheint.

Für einen endlich entfernten leuchtenden Gegenstand kann man die Grössen s, σ, α, φ sowohl durch die Gegenstandsweite g, als auch, und zwar bequemer, durch die zugehörige Bildweite b ausdrücken und findet mit Beiziehung der katoptrischen Hauptformel $\left(\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\right)$ folgende Werthe:

$$s=a\frac{f}{2f-b}\cdot\frac{b-\lambda}{b+\lambda},\quad \sigma=\frac{a}{2b}\cdot\frac{f}{2f-b}\cdot\frac{(b-\lambda)^2}{b+\lambda},\quad \alpha=\frac{a}{2}\cdot\frac{b-\lambda}{b}$$

und

$$tg\,\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{4f-b-\lambda}{(2f-b)(b+\lambda)}.$$

Wie es sein muss, gehen diese Formeln für $b=f$ in die für unendlich fernen Gegenstand aufgestellten Formeln über.

Oder

$$s=a\,(g-f)\,\frac{f(g+\lambda)-g\lambda}{g^2(f+\lambda)-2f^2(g+\lambda)-3fg\lambda},$$

$$\sigma = \frac{a}{2}(g-f)\frac{f(g+\lambda)-g\lambda}{g^2(f+\lambda)-2f^2(g+\lambda)-3fg\lambda}\cdot\frac{g(f-\lambda)+f\lambda}{fg},$$

$$\alpha = \frac{a}{2}\cdot\frac{g(f-\lambda)+f\lambda}{fg},$$

$$tg\,\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{g-f}{f}\cdot\frac{f(3g-4f)-\lambda(g-f)}{[f(g-\lambda)+g\lambda](g-2f)}.$$

Wie es sein muss, gehen diese Formeln für $g=\infty$ in die für unendlich fernen Gegenstand aufgestellten über.

Es ergiebt sich also, dass für die möglichst vollkommene Einrichtung des Brachy-Teleskops die Seitenverschiebungen s und σ der zwei Spiegel nicht nur von der Hauptbrennweite f des Hohlspiegels und dem Ocularabstand λ vom reellen Bilde, sondern auch von der Gegenstandsweite (g) oder der zugehörigen Bildweite (b) abhängen, also für verschieden entfernte Gegenstände geändert werden müssten. Wichtiger ist der Einfluss der Gegenstandsweite auf den Winkel φ, den die Axe des Suchers mit jener des Oculars machen muss.

2. Der kleine ebene Spiegel stehe nicht normal, sondern schief zum Hauptstrahl.

Dreht man den kleinen Spiegel mit seinem dem Hauptstrahle nächsten Theile nach vorn, so kann man allerdings eine weitere Verkürzung des Fernrohrs erzielen, allein sie zieht sowohl eine Vergrösserung der Seitenverschiebung s, demnach auch der Aberration nach sich, als auch eine Verbreiterung (ein Dickerwerden) des Instruments. Das reelle Bild entfernt sich vom Hauptstrahl und der Winkel φ zwischen Sucher und Ocularaxe wird grösser. Daher erscheint eine solche Drehung nicht empfehlenswerth.

Wird der kleine ebene Spiegel um einen Winkel δ aus der Normalstellung gedreht, so ändert sich der für diese Stellung oben berechnete Winkel φ sehr nahezu um 2δ. Durch eine Drehung des dem Hauptstrahle nächsten Theiles des ebenen Spiegels nach hinten oder gegen den Hohlspiegel hin wird also φ vermindert, kann Null oder gar negativ werden. Doch sind nicht alle Werthe von δ anwendbar; ausgeschlossen sind jene, für welche das zweimal gespiegelte Licht nicht mehr am Hohlspiegel vorübergeht, sondern auf diesen fällt.

Bei hinreichend grosser Seitenstellung s des Hohlspiegels kann die Neigung φ zum Verschwinden gebracht werden. Allein da φ mit der Gegenstandsweite sich ändert, so müsste, um den Parallelismus von Ocularaxe und Sucheraxe zu erzielen, für jede verschiedene Gegenstandsweite die Neigung δ des kleinen Spiegels abgeändert werden. Die negativen Werthe von φ entsprechen Drehungen des kleinen Spiegels, welche die zweimal gespiegelten Strahlen durch die Kugelfläche des Hohlspiegels in weiterem Abstande von dem Hauptstrahl lenken, als der entlegenste nützliche Theil des Hohlspiegels von diesem entfernt ist. Die negativen Werthe von φ sind also absolut stets grösser, als bei Normalstellung des kleinen Spiegels. Deshalb ist kein Vortheil einer so weitgehenden Drehung dieses ersichtlich.

II. Der zweite (kleine) Spiegel sei sphärisch convex.

Der Convergenzpunkt der vom Hohlspiegel kommenden Strahlen liegt dann nicht mehr ebenso weit vor dem Convexspiegel (γ), als das durch zweimalige Spiegelung entstandene reelle Bild hinter ihm (β), und die zwei Abstände sind durch die katoptrische Hauptgleichung

$$-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{\varrho}$$

bestimmt, in welcher ϱ der Krümmungshalbmesser des Convexspiegels ist. Die Entfernung γ des Convexspiegels von dem Bildpunkte B (Fig. 5) der vom Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen ist abhängig vom Abstande x des Augenglases vom Hohlspiegel, denn es muss sein

$$b=\gamma+\beta+\lambda-x$$

(x ist positiv vom Hohlspiegel nach hinten gezählt).

Drückt man hierin mit Hilfe der katoptrischen Hauptformel β durch γ aus, so gelangt man zu einer quadratischen Gleichung für γ, die stets reelle Wurzeln hat, von denen aber nur die eine:

$$\gamma=\tfrac{1}{2}(b-\lambda+x+\varrho-\sqrt{(b-\lambda+x)^2+\varrho^2}),$$

für die Aufgabe Bedeutung hat, da das Pluszeichen vor der Wurzel $\gamma>\frac{\varrho}{4}$ machen würde, die Strahlen nach der Spiegelung am Convexspiegel folglich divergirten und kein reelles Bild entstünde.

Ist x negativ (Ocular vor dem Hauptspiegel) und gleich $-x'$, so ist die Fernrohrlänge von Spiegel zu Spiegel zu rechnen, also gleich

$$l=b-\gamma=\tfrac{1}{2}(b+\lambda+x'-\varrho+\sqrt{(b-\lambda-x')^2+\varrho^2}).$$

Diese Grösse wird aber am kleinsten für $x'=0$, denn der rationale Theil nimmt für wachsende x' mehr zu, als der irrationale abnimmt. Verkürzung des Fernrohrs wird also (wie bei ebenem zweitem Spiegel) durch Anbringung des Oculars zwischen den Spiegeln nicht erzielt.

Für positives x (Ocular hinter dem Hohlspiegel) ist die Fernrohrlänge

$$l=b-\gamma+x=\tfrac{1}{2}(b+\lambda+x-\varrho+\sqrt{(b-\lambda+x)^2+\varrho^2}),$$

d. h. ersichtlich am kleinsten für $x=0$. Es ist also bei Anwendung eines convexen zweiten Spiegels, wie bei Anwendung eines ebenen, die Fernrohrlänge am kleinsten, wenn das Augenglas im Durchschnitt des Hauptstrahls mit der Kugelfläche des Hohlspiegels steht.

Nach der Zeichnung des Brachy-Teleskops in der besprochenen Schrift liegt das Augenglas hinter dem Hohlspiegel (x positiv) und zwar etwa um $\frac{1}{10}$ des Spiegelabstands; die von Herrn Fritsch ausgeführten Instrumente sind also nicht so kurz, als sie sein könnten.

Durch Verwendung eines convexen zweiten Spiegels wird das Fernrohr stets länger, als wenn der zweite Spiegel eben ist. Denn die kürzeste Länge ist im letzten Falle

$\frac{1}{2}(b+\lambda)$ und im ersten Falle $\frac{1}{2}(b+\lambda-\varrho+\sqrt{(b-\lambda)^2+\varrho^2})$,

die zu addirende Wurzelgrösse aber grösser, als der abzuziehende Krümmungshalbmesser ϱ.

Gelingt, wie unmittelbar leicht einzusehen, durch Benützung eines Convexspiegels nicht eine Verkürzung des Fernrohrs, so kann jedoch, bei richtiger Wahl des Krümmungshalbmessers ϱ und der Entfernung γ, eine sehr merkliche Verminderung der sphärischen Aberration erzielt werden, welche bei ebenem Spiegel und selbst bei Herschel'schem Vornschau-Fernrohr (gleicher Abmessungen) unvermeidlich ist. Bekanntlich liegt der reelle Vereinigungspunkt der an einen Hohlspiegel reflectirten Randstrahlen näher am Spiegel, als jener der Centralstrahlen. In einem Cassegrain'schen (oder ähnlichen) Teleskop convergiren folglich die Randstrahlen näher an dem Convexspiegel, als die Centralstrahlen. Aus diesem Grunde würde das nach der zweiten Reflexion entstehende reelle Bild, das von den Randstrahlen gebildet wird, näher an dem Convexspiegel liegen, als das der Centralstrahlen. Da aber die am Rande des Hohlspiegels aufgefallenen Strahlen nach der Spiegelung stärker als die Centralstrahlen gegen den Hauptstrahl geneigt sind, so sind sie auch am Convexspiegel Randstrahlen. Und da von Strahlen, deren Convergenzpunkt um weniger als die Hauptzerstreuungsweite hinter dem Convexspiegel liegt, die Randstrahlen sich weiter vom Spiegel entfernt reell schneiden, als die Centralstrahlen, so rückt aus diesem Grunde das den Randstrahlen angehörige reelle Bild weiter vom Convexspiegel, als das der Centralstrahlen. Es wirken also die zwei Ursachen der Aberration am Convexspiegel im Cassegrain'schen (oder ähnlichen) Teleskop einander entgegen und, je nachdem die eine oder die andere überwiegt, kann das Randstrahlenbild näher oder ferner als das Centralstrahlenbild fallen.

Es lässt sich Stellung und Krümmungshalbmesser des Convexspiegels so berechnen, dass die unter dem Einfallswinkel ε am Hohlspiegel angelangten Strahlen nach der zweiten Reflexion am Convexspiegel genau im selben Punkte zusammentreffen, wie die zweimal gespiegelten Centralstrahlen. Für diesen bestimmten Einfallswinkel ε besteht dann keine Aberration mehr. Für andere Einfallswinkel ist sie nicht ganz aufgehoben, aber sie kann zu einem Minimum (das dann ganz unschädlich für die Bildschärfe ist) herabgedrückt werden. Die Rechnungen sind, wie alle ähnlichen, sehr mühsam.

Ist eine Verminderung der Aberration des Hohlspiegels durch zweite Reflexion am Planspiegel schon nicht möglich, so vergrössert die Anwendung eines zweiten Hohlspiegels (wie im Gregory'schen Teleskop) geradezu die Aberrationsfehler. Denn die beiden Ursachen der Aberration am zweiten Hohlspiegel (Unterschied von Rand- und Centralstrahlen und Mangel der Homocentricität) erzeugen Aberration im selben Sinne, die auch gleichen Sinnes ist, wie jene durch den ersten Hohlspiegel hervorgebrachte. Die Gesammtaberration ist also die Summe von drei positiven Theilen, während bei Verwendung eines Convexspiegels der eine Theil negativ ist und die algebraische Summe daher verschwinden kann.

Da, wenn die zweite Reflexion an kleinem Hohlspiegel stattfindet, die Fernrohrlänge viel bedeutender (nämlich stets grösser als die Summe der zwei Hauptbrennweiten) wird, so ist für Einrichtung von Brachy-Teleskopen die Anwendung eines zweiten Hohlspiegels ausser aller Frage.

Bietet nun die Seitenverschiebung der zwei Spiegel, welche das Wesen der beschriebenen, Brachy-Teleskope genannten Fernröhre ausmacht, überhaupt Vortheile? Für die mechanische Anordnung gewiss nicht, aber auch nicht in rein optischer Hinsicht.

Wird statt eines kreisrunden Hohlspiegels (einer Kugelkappe) vom nützlichen Oeffnungsdurchmesser a mit der nothwendigen Seitenverschiebung s ein grosser Hohlspiegel vom Oeffnungshalbmesser $s+a$ mit einer centralen Ausbohrung vom Halbmesser s verwendet, so sind die sphärischen Aberrationen ganz dieselben, aber die spiegelnden Flächen verhalten sich nahezu wie $\frac{a^2}{4} : a^2 + 2as$ und ebenso (angenähert) die Helligkeit des entstehenden Bildes.

Sehr wichtig ist, dass bei dem Cassegrain'schen (und dem Gregory'schen) Teleskop die geometrische Axe des Fernrohres nach dem angezielten Lichtpunkte gerichtet ist, also ein Sucher entbehrlich ist oder, wenn er (wegen zu kleinem Gesichtsfeld des Reflectors) angewendet wird, in unveränderter Stellung zur geometrischen Axe des Teleskops (dieser parallel) bei jeder Gegenstandsweite, bei jedem Ocular, für jeden Beobachter bleibt, während bei dem Brachy-Teleskop der Sucher nicht wohl entbehrt werden kann und mit Aenderung der Gegenstandsweite oder des Oculars oder des Beobachters seine Stellung ändern muss.

Allerdings wird das Gewicht des durchbohrten Spiegels ungefähr im selben Verhältniss, wie seine Fläche jene des Spiegels des Brachy-Teleskops übertreffen. Allein das dürfte nicht bedenklich sein. Einmal gewährt schon die centrische Anbringung des Hohlspiegels Bequemlichkeit und Vortheil für die mechanische Einrichtung, dann aber kann das Gewicht des Spiegels selbst bei sehr grosser Fläche desselben recht klein werden. Man braucht nur eine ziemlich dünne Glasschüssel annähernd von der verlangten Gestalt des Hohlspiegels in einer Form zu giessen, die Innenfläche genau auszuschleifen und in bekannter Weise mit glänzender, äusserst dünner Silberschichte zu überziehen. Es genügt auch, den Hohlspiegel und den zweiten (ob eben oder convex) je nur mit einem kurzen Cylinderstutzen aus Metall zu umgeben (wie bei dem Brachy-Teleskop), die beiden Metallstutzen durch drei bis vier nicht zu schwere Metallstangen zu verbinden und den Kegelmantel mit leichtem Stoff, Holz, Leder, Wachstuch, Tuch zu schliessen. Das Gewicht des Fernrohrs kann also selbst bei grossen Abmessungen gering gehalten werden.

Bei dem von Herrn Fritsch abgebildeten Brachy-Teleskop kann fremdes Licht zum Hohlspiegel gelangen. Inwieweit dieses stört (jedenfalls erhellt es bei Beobachtung am Tage oder im erleuchteten Raume das Gesichtsfeld), kann nur die Erfahrung lehren, die dem Berichterstatter mangelt.

Aus Beschreibung und Abbildung des Brachy-Teleskops in der besprochenen Schrift geht nicht mit Deutlichkeit hervor, wie bei dem beabsichtigten Gebrauche für verschiedene Gegenstandsweiten die erforderliche Einstellungsänderung vorgenommen wird. Will man stets die kleinstmögliche Länge beibehalten, so muss, wie aus obigen Formeln hervorgeht, der kleine Spiegel verschoben werden. Es müsste ein sehr verwickelter Mechanismus sein, der eine Abänderung des Abstandes beider Spiegel und zugleich die, für die möglichste Vollkommenheit erforderliche, der Seitenverschiebungen beider Spiegel gestattete, — wobei dann immer noch die nutzbare Fläche des einen oder beider Spiegel nicht constant bliebe. — Für die centrirten Reflectoren mit durchbrochenem Hauptspiegel entfällt diese Schwierigkeit, ihre Einstellung ist äusserst einfach.

Nach vorstehender Untersuchung übertrifft ein Cassegrain'sches Teleskop bester Construction* in mehrfacher Hinsicht das Brachy-Teleskop, hinsichtlich Schärfe des Bildes und Kürze des Rohres auch das Herschel'sche Vornschau-Fernrohr, welches jedoch hinsichtlich der Helligkeit den Vorzug hat, wobei zur Vergleichung natürlich gleiche Brennweite und gleiche Oeffnung (nutzbare) des Hauptspiegels vorausgesetzt sind. Wird hauptsächlich geringste Länge angestrebt, so empfiehlt sich eine Abänderung des Newton'schen Teleskops, welche den ebenen Spiegel normal zum Hauptstrahl (nicht 45^0 geneigt) stellt und den auch bei Newton's Einrichtung doch nutzlosen Centraltheil des Hohlspiegels zur Durchlassung der zweimal gespiegelten Strahlen, wie bei Gregory's und Cassegrain's Instrument, ausbohrt. Hinsichtlich der Bildschärfe wird ein solches Fernrohr, wenn das Verhältniss der Spiegelöffnung zur Brennweite genügend klein gewählt wird, dem besten Cassegrain'schen nur wenig nachstehen. Die jetzige Herstellungsweise der Spiegel, dünne Silberschicht auf geschliffener Glasschale, gestattet aber sehr grosse Krümmungshalbmesser ohne die störende starke Belastung.

Bohn.

* Die wenigen (2) Cassegrain'schen Teleskope, die ich zu prüfen Gelegenheit hatte, haben ein ungünstiges Verhältniss der zwei Krümmungshalbmesser.

Behandlung des Problems der Bewegung der Knoten auf drei Planetenbahnen durch Einführung elliptischer Functionen und Einleitung des allgemeinen Problems. Inauguraldissertation von L. HUEBNER. Königsberg 1878, Druck von Dalkowski. 4°. 50 S.

Lagrange hat in seiner Abhandlung „*Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires*“ (*Mémoires de l'academie royale à Berlin année* 1774, *pag.* 276—307) das angezeigte Problem behandelt. Die vorliegende Schrift wird demnach nur durch eine Vergleichung mit Lagrange's Arbeit zu würdigen sein.

Wenn man in demjenigen Theile der Störungsfunction, welcher die säcularen Veränderungen der Neigung und des Knotens hervorbringt, die Excentricitäten als sehr klein annimmt und schliesslich die zweiten Potenzen derselben vernachlässigt, so wird das Resultat unabhängig von den Knoten sein und nur von den Neigungswinkeln abhängen, welche die Bahnen der störenden Planeten sowohl mit der Bahn des gestörten Planeten, als auch unter einander bilden. Es lässt sich aus dieser einfachen Bemerkung sehr leicht der Satz, der den Ausgangspunkt der Lagrange'schen Abhandlung bildet, ableiten, dass die Durchschnittspunkte je zweier Bahnen sich auf diesen selbst mit constanter Geschwindigkeit und zwar in retrograder Richtung bewegen, sobald man nur die gegenseitigen Neigungen als unveränderlich annimmt. Durch dieses Theorem ist die Berechnung der säcularen Veränderungen der Neigungen und Knoten der Planetenbahnen auf die rein analytische Aufgabe zurückgeführt: die Untersuchung der Form- und Lagenänderungen, welche von Differentialgleichungen der ersten Ordnung abhängen, gewisser sphärischer Dreiecke.

Für den Fall, dass nur ein störender Planet wirkt, ist die Aufgabe von Lagrange vollständig durchgeführt worden; die Integration gelingt ihm in höchst eleganter Weise durch Sinus- und Cosinus-Functionen. Wirken dagegen zwei störende Planeten, so führt die Untersuchung der Formänderung des obenerwähnten sphärischen Dreiecks (in diesem Falle ist nur eines zu betrachten) auf elliptische Functionen und eine weitere Behandlung des Problems war bei dem damaligen Zustande der Functionentheorie nicht möglich. Da nun auch die Integration der Differentialgleichungen, welche die Lagenänderung des sphärischen Dreiecks definiren, von der bereits gefundenen Lösung des ersten Theiles der Aufgabe abhängt, so musste Lagrange zu der vereinfachenden Annahme seine Zuflucht nehmen, dass schon die zweiten Potenzen der als sehr klein betrachteten gegenseitigen Neigungen der Planetenbahnen zu vernachlässigen seien. Es ist bekannt, wie mit Hilfe dieser Voraussetzungen durch Lagrange und Laplace die Theorie der säcularen Veränderungen von Knoten und Neigung von einem integrablen System linearer Differentialgleichungen abhängig gemacht worden ist, und wie dann der berühmt gewordene Nachweis der Stabilität des Sonnensystems in Bezug auf die Neigungen ganz in derselben Weise gelungen ist, wie in Bezug auf die Excentricitäten. Diese Untersuchungen aber basiren auf einem nicht hinlänglich zuverlässigen Fundament. Denn der Beweis, dass die Neigungen und Excentricitäten stets sehr klein bleiben, dass also ihre höheren Potenzen schon in den ursprünglichen Differentialgleichungen vernachlässigt werden können, ist erst mit Hilfe der solchergestalt bereits vereinfachten Ausdrücke geführt worden. Die auf ein solches Verfahren gegründeten Schlüsse bewegen sich deshalb ohne Zweifel in einem Kreise.

Diese Bemerkungen werden genügen, um zu zeigen, dass in der Theorie der säcularen Störungen noch mancherlei Fragen, die das Wesen der Sache berühren, der Beantwortung harren. Im Allgemeinen hat sich die neuere mathematische Forschung diesen Fragen eher ab- als zugewandt, vielleicht aus dem Grunde, weil die Hoffnung, hier neue elegante Theoreme zu finden, nicht allzugross sein dürfte. Wir begrüssen deshalb die vorliegende Schrift, welche einen speciellen Theil dieser Theorie einer eingehenden Behandlung unterzieht, mit Freude.

Was die Art und Weise betrifft, wie das Problem in dem Falle zweier störender Planeten in der vorliegenden Schrift in Angriff genommen wird, so ist diese kurz folgende. Bezeichnet man mit α, β, γ die drei Winkel in dem von den drei in Frage kommenden Planetenbahnen gebildeten sphärischen Dreiecke, und mit ξ, η, ζ die Winkel, welche die drei genügend verlängerten Dreiecksseiten mit einem beliebig gewählten grössten Kreise bilden, so hat schon Lagrange Differentialgleichungen der ersten Ordnung, wobei die Zeit t als unabhängige Variable auftritt, zwischen den drei Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ aufgestellt und auf gleiche Weise drei Gleichungen zwischen den neun Grössen $\frac{d\cos\xi}{dt}$, $\frac{d\cos\eta}{dt}$, $\frac{d\cos\zeta}{dt}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\xi$, $\cos\eta$ und $\cos\zeta$ abgeleitet. Der Verfasser stellt nun von Neuem die Lagrange'schen Gleichungen her, leitet dann verschiedene andere Systeme simultaner Differentialgleichungen her und ersetzt schliesslich die Differentialgleichungen erster Ordnung für $\cos\xi$, $\cos\eta$ und $\cos\zeta$ durch solche von der zweiten Ordnung. Die mit bedeutender analytischer Gewandtheit durchgeführten, ziemlich complicirten Rechnungen sind aber nicht immer — so will es mir wenigstens scheinen — auf dem kürzesten Wege erhalten. Es mag dabei eine Bemerkung gestattet werden. Zwischen den Grössen α, β, γ und ξ, η, ζ giebt es eine, sich aus der Figur ergebende Abhängigkeit, welche Lagrange (S. 297) ableitet und die der Verfasser auf S. (14) in folgender Form hinschreibt:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \\ \cos\xi & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\eta & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\zeta & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Erstens nun lässt sich diese Determinantenrelation sofort aus der Bemerkung ableiten, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos y & \cos x \\ \cos y & 1 & \cos m \\ \cos x & \cos m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

stattfinden muss, wenn $y - x = m$ ist. Ferner aber dürfte doch der Inhalt von Nr. VIII (S. 37), dass die Gleichung $\varDelta = 0$ ein particuläres Integral der simultanen Differentialgleichungen für $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ ist, selbstverständlich sein; denn dieser Nachweis ist nichts Anderes, als eine Verification der Rechnungen, welche zu der Aufstellung der Differentialgleichungen und der Ableitung der Relation $\varDelta = 0$ ausgeführt wurden.

Bei der Integration der Differentialgleichungen für die Winkel α, β, γ kommt Lagrange, wie bereits erwähnt, auf ein elliptisches Integral. Die Behandlung dieses Integrals und seine Umkehrung bildet den grössten und jedenfalls wichtigsten Theil der vorliegenden Schrift. Mit grosser Gewandtheit wird die Reduction des auftretenden Integrals auf die Normalform ausgeführt und die drei Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ als elliptische Functionen der Zeit dargestellt. Ist einmal diese Darstellung gelungen, so folgt nun sehr einfach der Satz, dass die $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ nur kleinen periodischen Aenderungen unterworfen sind, dass also in der That die Neigungen der Planetenbahnen immer klein bleiben, wenn sie es in irgend einem beliebigen Zeitpunkte waren. Dieser Satz, der für den Fall dreier Planeten bewiesen wird, ist jedenfalls das interessanteste Ergebniss der vorliegenden Schrift und nach dem oben Gesagten müssen wir es auch als ein wichtiges Ergebniss betrachten. Die Integration der Differentialgleichungen, welche die Lage des ofterwähnten sphärischen Dreiecks ausdrücken, gelingt dem Verfasser nicht und er muss hier zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen, die indess manches Interessante darbieten. Zum Schlusse der Abhandlung wird noch der allgemeine Fall von n störenden Planeten erwähnt. Indessen begnügt sich hier der Verfasser mit einigen kurzen Andeutungen, da ihm bis jetzt nicht gelungen ist, beachtenswerthe Resultate in diesem jedenfalls sehr schwierigen Probleme zu finden.

Mit diesen wenigen Zeilen muss ich mich bescheiden. Jedenfalls wird der Inhalt der Schrift den Mathematiker und Astronomen interessiren, auch was die Nebenresultate betrifft, welche der Verfasser gefunden hat. Der Wunsch aber, dass auch der Text der Arbeit in einer etwas abgerundeteren Gestalt gegeben worden wäre, als dieses geschehen ist, soll nicht verschwiegen werden.

H. Seeliger.

Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Von Dr. H. Lorberg, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum zu Strassburg. Leipzig, B. G. Teubner.

Der Herr Verfasser bietet uns in diesem Werke ein neues Lehrbuch der Physik, bei dessen Abfassung unzweifelhaft richtige, von anderen Schriftstellern leider nur zu oft nicht genügend berücksichtigte Principien zur Geltung gelangt sind. Mit vollem Rechte und im wohlthuenden Gegensatze zu den meisten Büchern dieser Art ist hier das Hauptgewicht auf streng logische Entwickelung und mathematische Beweisführung gelegt und dem Experimente, soweit es nur thunlich, also insbesondere in der Mechanik nur die Rolle einer nachträglichen Verification der abgeleiteten Gesetze zuertheilt. Gegenüber so manchen neueren Bestrebungen auf dem Unterrichtsgebiete kann sich der Recensent der Ueberzeugung des Verfassers nur aus vollem Herzen anschliessen, dass gerade der letztgenannte „wichtigste Theil der Physik seine eigentliche Bedeutung für den Jugendunterricht nur darin finden könne, angewandte Logik, sowie angewandte Mathematik und damit die naturgemässe Krönung des mathematischen Unterrichtsgebäudes, zugleich neben der Mathematik das einzige der Jugend zugängliche Beispiel einer sich mit vollkommener Consequenz aufbauenden deductiven Wissenschaft, ja von Wissenschaft überhaupt zu sein, und dass ferner die in der logischen Folgerichtigkeit liegende Ueberzeugungskraft durch keine noch so sorgfältig ausgewählte Reihe einzelner Erfahrungsthatsachen in gleichem Masse gewährt werden könne".

In dem übrigen Theile der Physik ist dem Stande unseres Wissens nach eine durchaus consequente Einhaltung dieses rein deductiven Ganges nicht zu ermöglichen; der Recensent glaubt, dass schon aus diesem Umstande die volle Berechtigung der Anschauung sich ergiebt, dass unsere Gymnasien, welche auf das akademische Studium vorzubereiten und ihre hauptsächlichsten Bemühungen auf die formale Ausbildung ihrer Schüler zu concentriren haben, sich auf den einzig ihr dienlichen und mit dem übrigen Hauptunterrichtsstoffe homogenen Theile der Physik, auf die Mechanik beschränken sollten.

Aber auch auf diesen Gebieten, in denen in Ermangelung logischer Anknüpfungspunkte die Erscheinungen vorantreten müssen, hat Lorberg sorgfältig den Schein zu vermeiden gesucht, als könne die Physik im Schulunterrichte in der Form einer inductiven Wissenschaft behandelt werden. Der Unterzeichnete muss es in der That für seltsam erachten, dass in keineswegs so kleinen Kreisen immer noch die Ansicht sich erhalten kann, dass man dem Schüler, obwohl er noch mit der blossen Kenntnissnahme der Apparate selbst zu kämpfen hat, obwohl er die Bedingungen, unter denen dieselben die besonders gearteten Erscheinungen hervorbringen, gar nicht zu übersehen und überhaupt von der Methode der Forschung keine halbwegs klare Vorstellung sich zu bilden vermag, doch zumuthen könne, die Gesetze aus den Erscheinungen abzulesen und so, wie Lorberg treffend bemerkt, ein Stück des Entwickelungsganges der Physik in sich durchzumachen. Die Jugend wird sich vermöge ihrer Phantasie bei der nothwendig kurzen Dauer der Demonstrationen immer vorzugsweise an das Neue, an das Frappante der Erscheinungen halten und infolge dessen nur zu leicht dem Nebensächlichen mehr Beachtung schenken, als den abzusehenden Gesetzen. Die Einführung in die Forschung, falls sie sich nicht in eine recht bedenkliche Spielerei verlieren soll, setzt schon ein gewisses Beherrschen der Physik voraus und kann mit entsprechendem Erfolge nur unter dieser Voraussetzung, unter den Bedingungen einer vorangegangenen guten formalen Schulung und unter der stetigen persönlichen Einwirkung des Lehrers, d. h. in unseren akademischen Seminarien geschehen.

Meinen Beifall hat der Verfasser darin gefunden, dass er den vollen Consequenzen seiner leitenden Principien nicht aus dem Wege gegangen ist. Nur zu loben nämlich ist es, dass er einige weniger wichtige Gegenstände der Physik, wie die Rotationserscheinungen, die Theorie des inneren Gleichgewichts der Körper und andere Capitel, weil sie sich auf elementarem mathematischem Wege nicht zum genügenden Verständnisse bringen lassen, aus seinem Buche überhaupt ausgeschlossen hat; sicher ist die stillschweigende Uebergehung dieser Partien weit jener ungründlichen und unklaren Behandlung derselben vorzuziehen, die nur ein ungefähres und vom strengen Denken ablenkendes Wissen zu erzielen vermag.

Abgesehen von Kleinigkeiten, die nicht besonders ins Gewicht fallen, verdient ebenso, wie der Plan, auch die Ausführung dieses Werkes lobend erwähnt zu werden. In knapper und doch klarer Fassung führt der Verfasser die verschiedenen Disciplinen der Physik vor, schränkt den Erfahrungsstoff, dessen Massenhaftigkeit in vielen derartigen Lehrbüchern die Uebersichtlichkeit und damit das klare Verständniss wesentlich schädigt, auf das Nothwendige ein, sucht dagegen in Anmerkungen durch Beispiele, Aufgaben und Anwendungen die vorausgehenden allgemeinen Gesetze zu illustriren, das Verständniss des Folgenden vorzubereiten und sowohl zum Denken anzuregen, als auch das Interesse zu erwecken und zu unterhalten. Indem der Recensent die Anstrengungen des Verfassers, die schwierigeren Capitel der Physik dem Verständnisse der Leser seines Buches näher zu bringen, im Allgemeinen lobend anerkennt, möchte er ihn doch ermuthigen, dieselben bei einer neuen Auflage in einzelnen Theilen, insbesondere in dem Abschnitte über die Doppelbrechung, der Schülern höherer Lehranstalten doch nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten bereiten dürfte, unermüdet fortzusetzen, selbst auf die Gefahr hin, dass sich sein Buch um einige Blätter vermehrte.

Vermöge seines mässigen und doch das Wesentliche in sich schliessenden Umfanges, vermöge seiner strengen Begründung und grossen Klarheit dürfte das vorliegende Buch nicht blos Schülern höherer Lehranstalten zu empfehlen sein, sondern auch den Studirenden unserer Universitäten, welche einen guten mathematischen Schulsack auf die Hochschule mitbringen und, ohne die Physik als Specialfach zu wählen, doch einen gründlichen Einblick in die Hauptergebnisse derselben wünschen oder bedürfen, also vor Allem den Studirenden der Medicin die besten Dienste leisten.

München. Dr. Friedrich Narr.

Physik in Bildern. Bearbeitet von E. Teller, Lehrer in Naumburg a. d. Saale. Leipzig, O. Spamer.

Die günstige Beurtheilung, welche Teller's „Wegweiser durch die drei Reiche der Natur" in verschiedenen Zeitschriften zu Theil wurde, veranlasste denselben, in dem oben angezeigten Buche auch den physikalischen Theil der Naturkunde nach einem ähnlichen Plane zu bearbeiten. Dasselbe behandelt die physikalischen und meteorologischen und zugleich auch eine Anzahl der wichtigsten chemischen Erscheinungen in „Bildern", d. h. in Zusammenstellungen, wie sie uns im täglichen Leben in abgeschlossenen Kreisen entgegentreten. Ein jeder dieser Abschnitte zerfällt in ein einleitendes „Gesammtbild" und in die „Einzelheiten des Bildes"; während das erstere eine belehrende und zugleich unterhaltende Uebersicht über die Einzelheiten des Bildes geben und die Geschichte und Entwickelung der wichtigsten derselben in Kürze darlegen soll, enthalten die letzteren die Erklärung der einzelnen Erscheinungen, die in dem ersteren unter dem angegebenen Gesichtspunkte zu einer Gruppe zusammengefasst sind. Hierbei schickt der Verfasser einfache Versuche und deren Erläuterung voraus und wendet sich dann in umfangreicher Weise zu den Erscheinungen in der Natur und im Menschenleben, um an ihnen das bezügliche Gesetz nachzuweisen.

Wenn sich nun der Recensent in die Lage des durchschnittlichen Lesers eines solchen Buches, der gewöhnlich in seinen Musestunden nach beendigter Berufsarbeit nach demselben greifen wird, versetzt und dessen Wünsche und Bedürfnisse prüft, so will es ihm bedünken, dass die Darstellungsweise Teller's vor der sonst üblichen den Vorzug hat, dass sie einerseits eine fesselndere und anregendere Form des Vortrages ermöglicht, andererseits die speciell physikalischen Apparate mehr in den Hintergrund treten und dadurch einen grösseren Raum für die nähere Erklärung der Erscheinungen, wie sie uns in der Natur, im Leben entgegentreten und den Laien hauptsächlich interessiren, gewinnen lässt; in dieser letzteren Beziehung dürfte das vorliegende Buch wohl von keinem andern an Reichhaltigkeit übertroffen werden. Diese beiden Eigenthümlichkeiten dieser Physik im Verein mit ihrer elementaren Fassung werden derselben viele Freunde aus dem grossen Publikum zuführen.

Was nun die Ausführung dieses Buches im Einzelnen angeht, so entspricht dieselbe im Grossen und Ganzen den Anforderungen, die man an eine Physik, die der Mathematik grundsätzlich aus dem Wege geht, stellen kann; von einzelnen Partien dagegen ist der Recensent weniger befriedigt worden.

Schwer zu rechtfertigen ist es wohl, dass die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte erst im dritten Bilde zur Sprache kommt und so in den beiden ersten Bildern zum Schaden derselben keine Anwendung finden konnte; ebenso dürfte auch die Betrachtung der Pendelbewegung vor den Gesetzen des freien Falles und vor der Lehre vom Schwerpunkte nicht zur Nachahmung empfohlen werden können.

Eine gründlichere Behandlung hätte das Capitel über die Theorie der Elektricität und des Magnetismus verdient; auch die Klarstellung des Begriffes der stehenden Schwingungen und ihrer Entstehung lässt Manches zu wünschen übrig. Bedenklich geradezu ist die Behandlung des Trägheitsgesetzes, die zu dem Missverständnisse, dass das Beharrungsvermögen der Körper, wenn sie aus dem Zustande der Ruhe in den Zustand der Bewegung versetzt werden sollen, als ein Widerstand gegen die bewegende Kraft aufzufassen sei, mit Nothwendigkeit führen muss. Nicht weniger bedenklich sind die Aufklärungen, die der Verfasser über das Wesen der constanten Ketten giebt.

München. Dr. Friedrich Narr.

Ergebnisse physikalischer Forschung, bearbeitet von Dr. C. Bohn, Professor der Physik an der Forstlehranstalt in Aschaffenburg.

In dem letzten Jahrgange dieser Zeitschrift (hist.-lit. Abthlg. S. 98) ist die erste Lieferung dieses Werkes angezeigt worden. Jetzt sind die zweite und dritte Lieferung rasch nach einander erschienen. Es ist nun ein stattlicher Band von mehr als tausend Seiten; schon daraus lässt sich auf die Reichhaltigkeit und theilweise Ausführlichkeit schliessen, da ja nur Ergebnisse ohne Ableitungen und Beschreibung von Apparaten gegeben werden sollen.

Es wird in den neuen Lieferungen die Wärmelehre vollendet, dann die Strahlung (Licht und strahlende Wärme) und endlich Magnetismus und Elektricität abgehandelt. Der Plan, wie er in der ersten Lieferung auszuführen begonnen wurde, wird consequent durchgeführt: klare und scharfe Definitionen, knapper Ausdruck, vollständige Anführung der bekannten Thatsachen.

In der Lehre vom Licht ist die Zurückwerfung und Brechung besonders eingehend mit Hilfe der verschiedensten Illustrationen behandelt: es scheint uns darin ein grosser Vorzug des Buches zu liegen. Erfreulich ist insbesondere die Aufführung der Cardinalpunkte von Gauss und die Darstellung ihrer Lage bei verschiedenen Linsensorten. Die so einfache Theorie dieser Punkte wird hoffentlich dadurch mehr Verbreitung finden. Auch die Bewegung des Lichtes in nicht isotropen Mitteln ist viel vollständiger als gewöhnlich behandelt.

Bei der Elektricität ist die Zusammenstellung der Resultate über Vertheilung der Elektricität, namentlich die bildliche Darstellung, dann die Aufführung der verschiedenen Elektroskope und Elektrometer und der Influenzmaschinen zu bemerken. In einem letzten Abschnitte sind die Masseinheiten physikalischer, besonders galvanischer Grössen in ihrer gegenseitigen Beziehung zusammengestellt.

In einem Anhang wird noch die kinetische Theorie der Wärme und die neueste Speculation über Abstand und Grösse der kleinsten Gastheile gegeben.

Den Schluss des Werkes bildet ein Register auf 22 Seiten, jede mit drei Columnen, im Ganzen mit mehr als 3000 Zahlenangaben nicht blos der Paragraphen-, sondern auch der Seitenzahlen. Es hat diese doppelte Angabe den grossen Vortheil, dass ein Druckfehler der einen Zahl durch die andere corrigirt wird. Uebrigens ist es uns bei vielfältigem Nachschlagen des Registers nicht gelungen, einen Druckfehler in den Zahlen zu finden.

Jetzt, nachdem das Werk als Ganzes vorliegt, kann das Urtheil nur dahin gefasst werden, dass es als Nachschlagebuch jedem Physiker grosse Dienste leisten wird und dass wir es mit einem sehr verdienstlichen Unternehmen zu thun haben, dessen Benützung nicht genug empfohlen werden kann.

Zech.

Grundzüge der Elektricitätslehre. Zehn Vorlesungen von D. W. v. Bezold. Stuttgart, Meyer & Zeller's Verlag. 1878.

Auf einem Raum von 109 Seiten gr. 8°. enthält das Schriftchen in zwei Vorträgen, die 21 Seiten in Anspruch nehmen, die Lehre von der Reibungselektricität und in den acht folgenden Vorträgen die Lehre vom Galvanismus.

Hinsichtlich des Zweckes und der Stoffvertheilung können wir das Werkchen nicht besser charakterisiren, als wenn wir die Worte des „Vorworts" wiederholen: „Die Aufgabe, welche ich mir gestellt hatte, war durchaus nicht, die Lehre von der Elektricität erschöpfend vorzutragen, ebenso wenig die, eine Reihe von Vorschriften zu geben, wie man mit elektrischen Apparaten umzugehen habe, sondern die, das

Wichtigste aus der Elektricitätslehre in seinem natürlichen Zusammenhange darzustellen und alles Gegebene durchaus aus den vorgezeigten Experimenten herzuleiten." „Auf die ins Einzelne gehende Beschreibung von Messapparaten habe ich wenig Zeit und Raum verwendet; ich habe dieselben immer durch schematische Apparate ersetzt." „So ist denn ein in engen Rahmen zusammengedrängter Abriss der Elektricitätslehre entstanden, der vielleicht auch manchem andern Leser willkommen sein wird, zumal da viele Versuche von der üblichen Form abweichen."

Mit Freuden bekennen wir, dass der Verfasser seinen Zweck durch das Werkchen vollständig erreicht hat. Waren auch die zehn Vorträge hauptsächlich für das medicinische Publikum des Verfassers berechnet und konnten demgemäss einzelne Hinweise auf gerade medicinisch wichtige Dinge nicht umgangen werden, so erscheint doch auch andererseits dieser medicinische Zweck sehr untergeordnet, indem nur da und dort aus den physikalischen Gesetzen das für den Arzt speciell Wichtige kurz als Folgerung hingestellt ist.

Eine leichte, lebendige und anschauliche Darstellung vereinigt sich mit der Fertigkeit, Apparate und Versuche sehr gut ihrem Zwecke anzupassen, um dem Anfänger das erste Studium der Elektricitätslehre leicht und angenehm zu machen und um namentlich auch denjenigen, die die *vox viva* des Verfassers gehört haben, als erfreuliches Repetitorium zu dienen. Diejenigen aber, welche in dem Studium der Elektricitätslehre bereits weiter vorgedrungen sind, werden in der originellen und anschaulichen Einrichtung der beschriebenen Vorlesungsapparate und Versuche eine erwünschte Anregung zu eigenen Constructionen und Untersuchungen erhalten. Es giebt wenig Compendien, die wir mit gleichem Genuss gelesen haben, und es würde uns freuen, wenn der Verfasser auch die anderen Disciplinen der Physik in gleich vorzüglicher Weise dem Publikum zugänglich machen wollte.

Freiberg, den 24. Juli 1878. Th. Kötteritzsch.

Bericht über den historischen Theil der internationalen Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London im Jahre 1876. Von Dr. E. Gerland in Kassel. Mit 61 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1878. 119 S.

Aus dem Generalberichte über die wissenschaftlichen Apparate der Londoner Ausstellung, welchen die betheiligten preussischen Ministerien ausarbeiten liessen, ist vorliegende kleine Schrift als Separatabdruck veröffentlicht worden. Dieselbe hat es ausschliesslich mit der berühmten Sammlung geschichtlich merkwürdiger Apparate aus dem Gesammtgebiete der exacten Wissenschaften zu thun, welche im Kensington-House vereinigt war. Specialberichterstatter für diese Abtheilung war der auf dem Boden der geschichtlich-physikalischen Forschung wohlbekannte Dr. Gerland, von dem sich gleich anfangs mehr als ein trockner Katalog der ausgestellten Gegenstände, von dem sich vielmehr eine die historische Entwickelung der betreffenden Fächer an der Hand der Erfahrung schildernde Gesammtskizze erwarten liess. Diese Erwartung hat denn auch in der That nicht getrogen, vielmehr muss die Brochure Gerland's als ein sehr verdienstlicher Beitrag zur Geschichte der Physik und angewandten Mathematik bezeichnet werden, da der Verfasser sich nicht lediglich auf die Beschreibung der einzelnen wirklich ausgestellten Instrumente beschränkt, sondern jene blos als das Gerippe seiner Darstellung betrachtet hat, welches er dann nachträglich durch Beiziehung fremder und eigener Untersuchungen derart überkleidete, dass wir von der allmäligen Ausbildung einer Anzahl wichtiger Beobachtungs- und Messungsmethoden ein recht klares und übersichtliches Bild gewinnen.

Den Eingang bildet die Geschichte der Maasse und Gewichte, zu welcher mehrere sehr interessante englische Originalurkunden mitgetheilt werden; aus denselben geht die bis fast in die neueste Zeit herein herrschende Unsicherheit in volumenometrischen Präcisionsbestimmungen, unter der besonders im Mittelalter alle bürgerlichen Verhältnisse so unglaublich litten, recht deutlich hervor. Ob es gerade nothwendig war, die unqualificirbaren Träumereien Jener, welche das altägyptische Masssystem mit den Dimensionen des Erdkörpers in Beziehung setzen, in einen den Umständen gemäss so gedrängten Bericht, wie den vorliegenden, aufzunehmen, darüber wird sich streiten lassen. Den Maassen schliessen sich naturgemäss die Messvorrichtungen an; unter den Kathetometern ist das Gray'sche Modell von 1698, dessen Beobachtungswerkzeug nicht, wie heutzutage üblich, ein Fernrohr, sondern vielmehr ein Mikroskop war, sowie das durch seine Inhaber Dulong und Petit zu einer gewissen Berühmtheit gelangte Instrument hervorzuheben. Von Seite der Universität Leyden war eine Garnitur s'Gravesande-Musschenbroek'scher Demonstrationsapparate für die Lehren der elementaren Statik und Dynamik ausgestellt. Auch unter den ausgestellten Uhren befanden sich merkwürdige Stücke, so insbesondere Wollaston's Metronom, Galilei's Pendulenmodell, über welches wir uns einige Worte noch für später vorbehalten, und vor Allem eine aus dem Jahre 1348 stammende Gewichtsuhr, welche nach dem bekannten Principe Heinrich's von Wyk eingerichtet ist und heute noch ihren Dienst thut. Ein Zeitmesser von ganz ähnlichem Mechanismus, als dessen charakteristischer Bestandtheil der horizontale Balancier gelten kann, befand sich noch im ersten Viertel dieses Jahrhunderts auf einem der Uhrthürme von Nürnberg. Unter den Waagen der Ausstellung ragte besonders ein Exemplar der altrömischen Schnellwaage mit Laufgewicht hervor, welches in England aufgefunden und höchst elegant gearbeitet war. An die Waagen reiht der Verfasser an die Drehwaagen, welche durch einige Fragmente des bekannten, von Baily zur Bestimmung der Erddichte angewandten Apparates repräsentirt waren, und die Senkwaagen, für deren Geschichte sich in London reichhaltiges Material vorfand. Was jedoch historische Einzelheiten anlangt, so scheint dem Verfasser die grundlegende Monographie von Thurot (1869 als Separatabdruck aus der „*Revue archéologique*“ erschienen) entgangen zu sein, welche er denn auch unter den sehr gewissenhaft namhaft gemachten Quellenschriften nicht mit aufführt. Dort würde er gefunden haben, dass das erste Aräometer in dem angeblich auf Priscianus zurückzuführenden „*Carmen de ponderibus*“ beschrieben wird. Wahrscheinlich mit der 1603 in Thölden's „Haligraphia“ zuerst verzeichneten Salzspindel ist das in Schwenter's „Math. u. philos. Erquickstunden“ gelegentlich erwähnte Instrumentchen identisch, welches der Autor von einem berühmten Kriegsobersten erhalten haben will. Das Gewichtsaräometer ist nach Gerland nicht von Monconys, sondern von Roberval angegeben worden, doch gelang es erst Fahrenheit, demselben zur vollen Brauchbarkeit zu verhelfen. Von hydraulischen Pressen wies die Ausstellung namentlich das Bramah'sche Original auf, von Vorrichtungen zur Messung der Luftschwere einen sehr ingeniösen, von Felice Fontana verfertigten Selbstregistrator. Es folgt die eingehend behandelte Luftpumpe, über welche wir manches Neue erfahren. Da der Verfasser die Angabe des Jahres, in welchem Otto von Guericke seinen mehrfach missglückten Fundamentalversuch endlich vollkommen zu Stande brachte, vergeblich gesucht hat, so erlauben wir uns, ihn auf Hochheim's „Otto von Guericke als Physiker“ (Magdeburg 1870) hinzuweisen, wo (S. 4) auf Grund des allerdings nur spärlichen Quellenmaterials das Jahr 1650 genannt wird. Von neuen Aufschlüssen des Verfassers heben wir den hervor, dass nicht Papin, wie man gewöhnlich annahm, sondern Huygens die Luftpumpe mit dem Teller in Verbindung setzte. In dieses Capitel gehört ferner noch das Sympiezometer, mittels dessen Despretz die Allgemeingiltigkeit des Mariotteschen Gesetzes prüfte, und eine 1721 in England erfundene „neue Wassermaschine zum Löschen des Feuers“. Die Akustik war in Kensington-House nur sehr stiefmütterlich bedacht; unser Bericht, in welchem nur einige altägyptische Pfeifen und einige neuere Apparate zur Messung der Schallgeschwindigkeit eine Stelle finden, fertigt dieselbe nothgedrungen auf zehn Zeilen ab. Jedenfalls ist es auffallend, dass das Vaterland des Sprachrohrs dieses nützliche Werkzeug nicht in seinen verschiedenen Entwickelungsstadien zur Anschauung gebracht hat. Um so reichhaltiger war das optische Fach ausgestattet: Fizeau's Messapparat, Schwerd's berühmtes und dabei doch eigentlich recht wenig bekanntes Sternphotometer, s'Gravesande's Uhrwerk-Heliostat, Wollaston's Reflexionsgoniometer vertreten die einleitenden Abschnitte dieser Disciplin. Dass die Idee des Heliostaten, den nach unserer Vorlage Lieberkühn im Jahre 1738 in die Praxis eingeführt hat, auf eine weit ältere Zeit hinweist, geht aus einer Stelle der Heron'schen Katoptrik hervor (Cantor's „Agrimensoren", S. 19). Für die Geschichte der Linsen und der aus ihnen zusammengesetzten Sehwerkzeuge, Fernrohre und Mikroskope, ist hier viel Stoff zusammengebracht. Auch Herr Gerland kommt seinerseits zu dem von Henri Martin definitiv festgestellten Ergebnisse, dass dem gesammten Alterthum derartige Vorrichtungen gänzlich fern lagen, womit natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass man nicht die Eigenschaften geschliffener Gläser als Brenn- und Vergrösserungslinsen einigermassen kannte. Für Letzteres scheinen uns auch die kunsthistorischen Forschungen Lessing's zu sprechen. Unter den ausgestellten Linsen befand sich auch die bekannte von Bregens angefertigte, welche gegen das Ende des XVII. Jahrhunderts die ersten glücklichen Experimente bezüglich des Verflüchtigens kleiner Diamanten ermöglichte. In Sachen der eigentlichen Erfindungsgeschichte der Vergrösserungsapparate schliesst sich der Verfasser an van Swinden's, resp. Moll's massgebende Studien an, ohne dieser beiden Gelehrten indess Erwähnung zu thun; dieselben haben festgestellt, dass das erste zusammengesetzte Mikroskop 1590 von den beiden Janssen construirt, das Fernrohr dagegen von Jakob Metius, einem Bruder des bekannten Mathematikers, ersonnen und von Lippershey praktisch ausgeführt worden ist. Vorhanden waren in London zwei Originalfernrohre Galilei's, drei Exemplare des von Schyrle de Reita angegebenen Erdfernrohrs, die Photographie einer Linse, deren sich Huygens bei seinen Forschungen über das Saturnsystem bediente, das von Newton selbst hergestellte Teleskop, welches behufs bequemer Einstellung tangential auf einer frei beweglichen Kugel angebracht ist, endlich mehrere Reflectoren von Herschel und dessen Maschine zum Spiegelpoliren. Unter den Mikroskopen interessirt ein solches von Leeuwenhoek mit ebenso zierlicher, als sinnreicher Einstellvorrichtung, weiterhin ein Lieberkühn'sches Mikroskop, dessen man sich damals bei allen anatomischen und physiologischen Arbeiten bediente; endlich eine Anzahl neuerer und feinerer Instrumente dieser Art. Nicht minder liegt die von Wollaston erfundene *Camera lucida* im Original vor. Zur Geschichte der Photographie sind Platten von Daguerre, John Herschel, Talbot, Fizeau, Bequerel, sowie moderne astro-photographische Bilder ausgestellt; erwähnt werden ferner Wheatstone's katoptrisches Stereoskop und diverse Nicol'sche Prismen. Ein Raum von nicht weniger denn 11 Seiten ist den Leuchtthürmen gewidmet, und in der That ist dieser, vom Verfasser offenbar mit besonderer Vorliebe ausgearbeitete Abschnitt ein rechtes Cabinetsstück glänzender Leistungen des menschlichen Geistes. Wir vermögen an diesem Orte selbstverständlich dem reichen Inhalt nicht näher zu treten und bemerken nur, dass die meisten Verbesserungen auf diesem Gebiete doch immer wieder an Fresnel's fruchtbaren Gedanken der Beleuchtung durch Zonenlinsen anknüpfen; als Vervollkommnungen im Einzelnen können gelten die Ersetzung der Linsen durch total-reflectirende Prismen, sowie die glückliche Combination sphärischer mit parabolischen Reverberen. Es folgt die Wärmelehre, beginnend mit dem Thermometer. Die Priorität in der Erfindung dieses Instrumentes wird entschieden für Galilei in Anspruch genommen; ein von diesem Letzteren selbst verfertigtes Wasserthermometer, sowie ein sehr schönes Alkoholthermometer der toskanischen Akademie waren nach London gesandt worden. Ihrer ganz sonderbaren Einrichtung halber mussten daselbst ein Paar für den medicinischen Gebrauch bestimmte Wärmemesser die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Die Pyrometrie fand in den bekannten Apparaten von Wedgewood, Musschenbroek und Daniell ihre Vertretung. Ueberhaupt war an solchen Apparaten, welche durch den Namen ihrer Urheber eine gewisse Rolle in der Geschichte der Wärmelehre spielen, kein Mangel; erwähnt seien die Röhrenverbindung, welche Joule und Playfair bei der Bestimmung des Maximums der Wasserdichte benützten, und die von Faraday hinterlassenen Glasröhrchen mit flüssig gemachten Gasen. Auch enthielt die Sammlung zwei alte Hygrometer, welche gewissermassen als die Prototype der beiden seitdem in Gebrauch gekommenen Constructionsprincipien anzusehen sind; das eine rührt von dem Grossherzog Ferdinand II. her und diente bei all' seiner Unvollkommenheit doch sofort zum Nachweise einer wichtigen meteorologischen Wahrheit, das andere, von Folli da Poppi, weist Papier als hygroskopische Substanz auf. Den Schluss dieses Abschnittes bilden Apparate der angewandten Calorik. Es befanden sich in der Sammlung viele Sicherheitslampen nach Stephenson'schem und Davy'schem Muster, bei deren Erwähnung auch der älteren Versuche von Lowther und A. v. Humboldt gedacht wird,* sodann Joule's Maschinen zur Untersuchung des mechanischen Wärmeäquivalents, das *Perpetuum mobile*, welches Young zur Demonstration der Unmöglichkeit solcher Arbeitsregeneratoren verwandte; endlich eine Fülle von Modellen zur Dampfmaschinenlehre. Für diese letztere ist der Verfasser, welchem sein Aufenthalt in Kassel schon früher Anlass zu eingehender Prüfung der Papin'schen Entwürfe geboten hat, besonders competent. Er macht uns denn auch hier bekannt mit dem „Dampfcylinder", welchen der genannte französische Emigrant dem hessischen Landgrafen für hydrotechnische Zwecke anfertigte, sodann mit dem angeblichen Dampfschiffe, welches sich bei

* Nach Huc und Gabet bedient man sich auch in den chinesischen Bergwerken eines Leuchtmittels, welches den schlagenden Wettern nicht unterliegt.

näherem Zusehen als einfaches Ruderboot entpuppt, auf welchem ein Dampfkessel erst nachträglich angebracht werden sollte. Dass die erste Heissluftmaschine schon 1816 einem Dr. Stirling patentirt und in dieser ihrer primitiven Form ausgestellt war, wird ebenfalls Vielen neu und interessant sein. — Den buntesten Anblick gewährte natürlich die Serie magnetischer und elektrischer Apparate. Da sehen wir vor uns den von Galilei selbst armirten Naturmagneten, Faraday's sibirischen Magneten, durch den erstmalig die Existenz der Magnetelektricität dargethan ward, Nobili's astatische Nadel, Blanchini's Declinationscompass von 1564 und Daniel Bernoulli's Inclinatorium, die Magnetometer von Hansteen und Gauss, eine Menge berühmter Elektrisirmaschinen, worunter diejenige Armstrong's, Wheatstone's Geschwindigkeitsmesser, Volta's Elektrophor, die verschiedenen immer vervollkommneten Vorrichtungen, mit welchen W. Thomson die Elektrometrie bereicherte, alle möglichen galvanischen Säulen und Elemente, Seebeck's und Peltier's Thermosäulen, die erste gelungene Probe von Jacobi's Galvanoplastik u. s. w. Die Geschichte der miteinander eng verbundenen Erscheinungen der Magnetelektricität, Induction und des Rotationsmagnetismus konnte man durchweg an den Inductionsapparaten der Faraday, Arago u. s. w. studiren; bezüglich jenes letzteren muss bemerkt werden, dass der neuen Entdeckung allerdings erst im Jahre 1825 ihr Name beigelegt wurde, dass jedoch die erste Erwähnung dieser Entdeckung der Angabe Gerland's entgegen in den Pariser Sitzungsberichten vom 22. November 1824 angetroffen wird (vergl. Bielmayr, Zur Geschichte des Rotationsmagnetismus, Aschaffenburg 1877). Von Geissler's Röhren enthielt die Sammlung alle Abstufungen, vom ersten Versuch bis zur gegenwärtigen Vollendung. Dass auch die optischen und elektrischen Telegraphen reichlich vertreten waren, bedarf keiner Versicherung; uns interessirten besonders die anscheinend ganz neuen Mittheilungen über das Schilling-Muncke'sche Modell. — Ein leider recht kurzer Schlussparagraph bespricht die astronomischen und mathematischen Instrumente, welche unter Anderem besonders einige merkwürdige Astrolabien in ihrer Mitte hatten. Das Prachtstück der Collection jedoch war der sogenannte Azimuthalquadrant Tycho Brahe's, über dessen Entstehungsgeschichte der Verfasser eine genaue Untersuchung anstellt, deren Resultat den bekannten Schweizer Bürgi als den muthmasslichen Constructeur dieses Instruments erscheinen lässt. Wenn jedoch dabei dasselbe als „der älteste Theodolith" bezeichnet wird, so müssen wir Einsprache erheben: dieser Name kommt mit Recht lediglich der „Dioptra" Heron's zu, und auch von dem kleinen Universalinstrument, dessen Referent unlängst in seiner Beschreibung der mathematischen Sammlung des germanischen Museums gedachte, lässt sich durchaus nicht behaupten, es stamme aus späterer Zeit, als Bürgi's Quadrant.

Der Leser wird aus dieser gedrängten Uebersicht ersehen, dass Gerland's Bericht für jeden Geschichtsfreund eine sehr anziehende Lecture bietet. Die ungewöhnliche Belesenheit des Verfassers gestattet ihm sogar, manche Mängel des englischen Ausstellungskatalogs sachgemäss zu verbessern. Dem Druck der Fremdwörter und Eigennamen hätte stellenweise eine grössere Aufmerksamheit gewidmet werden dürfen; Entstellungen wie Akademia statt Accademia, Boekh statt Boeckh, Virtruv statt Vitruv, Haug statt Hauy stören den Genuss des Lesens. Dies sagen wir, wie sich wohl von selbst versteht, lediglich im Interesse des Buches, gerade wie wir auch auf einzelne, dem Verfasser entgangene Belegschriften nicht deshalb verwiesen, um an der tüchtigen Leistung zu mäkeln. Nur zu gut wissen wir aus eigener Erfahrung, wie schwierig, ja unmöglich es ist, auch bei aller Sorgfalt, das gesammte Material zu kennen und auszunützen.

Eben aber, weil wir dies wissen, ist es uns nicht recht erfindlich, wieso der Verfasser dazu kommt, in einem an seinen „Bericht" unmittelbar sich anschliessenden Aufsatze der Poggendorff'schen „Annalen", welcher sich mit der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr beschäftigt, es so höchst befremdlich zu finden, dass Referent bei seiner eigenen Bearbeitung dieses Gegenstandes von einer Quellenschrift Viviani's keinen Gebrauch gemacht hat. Wir haben — was wieder Herr Gerland nicht bemerkt zu haben scheint — ausdrücklich erklärt, dass wir den betreffenden Brief in der ihn angeblich enthaltenden Sammlung vergeblich suchten, sowie dass uns die Nachricht, derselbe sei auch in Albèri's Galilei-Ausgabe reproducirt, zu spät zukam, um noch geeignete Verwerthung zu finden. Unsere ausgesprochene Absicht in diesem ersten Theile unserer Abhandlung war die, das deutsche Publikum mit den Forschungen van Swinden's vertraut zu machen; ob dessen von uns adoptirte Confundirung des Galilei'schen Zählwerkes mit dem von Viviani namhaft gemachten Selbstregulator eine so höchst gezwungene ist, wie unser Gegner annimmt, darüber werden auch nach seiner Publication die Ansichten noch immer auseinandergehen. Das Zeugniss des „letzten Schülers" sind wir überhaupt nicht gewillt, gar so hoch anzuschlagen; was diesem an äusserem Muth, für das verlästerte Andenken seines Meisters einzutreten, abging, das suchte er einzubringen, indem er alle möglichen wissenschaftlichen Verdienste auf dessen Haupt vereinigte; Herr Gerland selbst weist ihm (S. 51 des Berichts) eine grobe Unrichtigkeit in dieser Hinsicht nach. Uebrigens ist Gerland's Resultat kein neues: Professor Favaro hat in den Acten des venetianischen Instituts bereits eine ganz ähnliche Ansicht vertreten, und auch Schreiber dieses hat, von Herrn Dr. Wohlwill in dankenswerther Weise hierauf aufmerksam gemacht, im Darboux-Hoüel'schen „Bulletin" bemerkt, dass seine früheren Aufstellungen einer Ergänzung bedürftig seien. —

Dies zur nothwendigen Klarstellung der Angelegenheit; nicht verkannt soll werden die sachliche Form der Gerland'schen Polemik und das entschiedene Verdienst, welches auch dieser neueste Beitrag zu einer oft ventilirten Frage — namentlich in Sachen der von Wolf postulirten Priorität Bürgi's — für sich beanspruchen darf.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Lehrbuch der analytischen Geometrie und Kegelschnitte. Ein Leitfaden beim Unterricht an höheren Lehranstalten, von Wilhelm Mink, Oberlehrer an der städtischen Realschule I. Ordn. zu Crefeld.

Der Verfasser des in der Ueberschrift bezeichneten Werkchens stellt sich im Vorwort die Aufgabe, innerhalb der durch die Anforderungen beim Abiturientenexamen gesteckten Grenzen einen Leitfaden für den mathematischen Unterricht zu liefern. Man kann nicht verkennen, dass die Darstellung des Herrn Mink eine klare, dass die Auswahl des Stoffes eine zweckmässige ist und dass die an rechter Stelle eingelegten Uebungsbeispiele für den Schüler anregend sein werden. Demnach hat der Verfasser seinen Zweck, ein brauchbares und kurzes (96 Octavseiten) Schulbuch zu liefern, unzweifelhaft erreicht.

Die Ausstellungen, welche Referent zu machen hat, liegen gewissermassen alle in einer Richtung. Sie sind alle aus dem Grundsatz erflossen, dass es eine Forderung der Pädagogik an den höheren Lehranstalten ist, auch im Schulunterrichte den Anforderungen strenger Wissenschaftlichkeit, wenn irgend möglich, zu genügen.

Es ist z. B. leicht, auch im elementaren Unterrichte, sofern es sich nicht um die unbegrenzte Gerade handelt, das Wort Linie ganz zu vermeiden und durch Strecke zu ersetzen. So darf es Seite 7 nicht heissen, in der Gleichung der geraden Linie $Ax+By+C=0$ sei C eine Gerade.

Auf Seite 5, wo von der Gleichung einer beliebigen Linie die Rede ist, wird behauptet, man könne zu jeder willkürlich gewählten Abscisse die *(sic!)* zugehörige Ordinate bestimmen. Wie das Folgende zeigt, will der Verfasser darlegen, dass es im Allgemeinen möglich sei, einen oder mehrere reelle oder complexe Werthe zu finden, welche statt der Ordinate in die Gleichung eingeführt, derselben genügen.

Seite 12 und 19 stösst der Verfasser auf Ausdrücke, welche eine Quadratwurzel enthalten. Hier kann nicht oft genug wiederholt werden, dass es eigentlich überflüssig und nur ein Schulbehelf ist, zu schreiben $\pm\sqrt{a}$. Denn jede Quadratwurzel ist von Natur doppeldeutig und jede geometrische Interpretation eines algebraischen Ausdrucks, in welchem ein solches Wurzelzeichen vorkommt, hat damit zu beginnen, dass man der Wurzel ein bestimmtes Vorzeichen ertheilt. Der Verfasser hat ihr stillschweigend das positive gegeben. Nur unter diesem Beding ist seine Darstellung Seite 12 richtig.

Die Einführung des Imaginären endlich in die elementare Geometrie ist durch die Forschungen der letzten Decennien eine so klare und einfache Sache geworden, dass Referent dieselbe in einem Schulbuche mit Bedauern vermisst. Jede Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten; aber diese Punkte können reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sein. Niemals aber hat, wie Seite 19 behauptet wird, eine Gerade mit einem Kreise nur einen Punkt gemeinsam, um so weniger, als im weiteren Verlaufe die Tangente immer als Grenzfall der Secante erscheint.

Brilon, den 8. August 1878. Dr. K. Schwering.

Bibliographie

vom 1. December 1878 bis 31. Januar 1879.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 23. Bd. v. J. 1878. Göttingen, Dieterich. 60 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. 77. Bd., II. Abth. (Mathem., Phys. etc.), 4. u. 5. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk. 60 Pf.

Publicationen des astrophysischen Observatorium zu Potsdam. Nr. 1—4 (Sonnenflecken-Beobachtungen von G. Spörer). Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Repertorium für Experimentalphysik, physikal. Technik und Instrumentenkunde; herausgegeben von Ph. Carl. 15. Bd. (12 Hefte), 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 24 Mk.

Repertorium für Meteorologie. Supplementband, 1. Hälfte. Petersburg und Leipzig, Voss. 6 Mk. 80 Pf.

Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. 7. Série. Tome 25, *No.* 6—9, *et Tome* 26, *No.* 1—4. Leipzig, Voss. 52 Mk. 60 Pf.

Bulletin de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome 25, *No.* 1 *et* 2. Ebendas. pro compl. 9 Mk.

Mélanges physiques et chimiques, tirés du bulletin etc. Tome X, livr. 4. Ebendas. pro compl. 2 Mk. 20 Pf.

Reine Mathematik.

Schmitz-Dumont, O., Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie. Berlin, Duncker. 12 Mk.

Germann, A., Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Joh. Faulhaber. Tübingen, Fues. 60 Pf.

Günther, S., Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik. Prag, Rziwnatz. 2 Mk. 10 Pf.

Stockmayer, Die Grundbegriffe der allgemeinen Arithmetik und die negative Zahl. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Fischer, F. W., Lehrbuch der Geometrie. 3. Thl.: Ebene und sphärische Trigonometrie. Freiburg i. B., Herder. 2 Mk.

Kantor, S., I. Ueber das vollständige Fünfseit. II. Ueber das vollständige Viereck und das Kreisviereck. III. Ueber merkwürdige Gerade und Punkte bei vollständigen Vielecken auf dem Kreise. IV. Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocycloide. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Martini, F., Die Krümmung ebener Curven, nebst einleitenden Betrachtungen in die geometrischen Grundanschauungen. Tübingen, Fues. 1 Mk. 60 Pf.

Fromm, H., Die Krümmungsverhältnisse einer Curve im n-fach ausgedehnten homogenen Raume mit verschwindendem Krümmungsmaasse. Cöln, Neubner. 1 Mk.

Angewandte Mathematik.

Jordan, W., Barometrische Höhentafeln. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 40 Pf.

Asten, E. v., Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Kometen. II. Resultate aus den Erscheinungen von 1819—1875. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 3 Mk. 30 Pf.

Physik und Meteorologie.

Poggendorff, J. C., Geschichte der Physik. Vorlesungen. 1. Lief. Leipzig, Barth. 5 Mk. 60 Pf.

Klinkerfues, W., Die Principien der Spectralanalyse und ihre Anwendung in der Astronomie. Berlin, Bichteler & Comp. 1 Mk.

Hasselberg, B., Studien auf dem Gebiete der Absorptionsspectralanalyse. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 3 Mk. 30 Pf.

Rollett, A., Ueber die Farben, welche in den Newton'schen Ringsystemen aufeinander folgen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.

Mach, E. und G. Gruss, Optische Untersuchung der Funkenwellen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Mach, E. und J. v. Weltrubsky, Ueber die Formen der Funkenwellen. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Ditscheiner, L., Ueber die Elektricitätsbewegung im Raume und die Nobili'schen Ringe. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Freund, K., Ueber einige galvanische Eigenschaften wässeriger Metallsalzlösungen. Breslau, Köbner. 1 Mk.

Lenz, R., Ueber den galvanischen Widerstand verdünnter Lösungen von Verbindungen des Kalium, Natrium, Ammonium und Wasserstoffs. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 50 Pf.

Auerbach, F., Der Durchgang des galvanischen Stromes durch das Eisen. Breslau, Köbner. 1 Mk.

Exner, F., Ueber die Natur der galvanischen Polarisation. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Exner, F. und G. Goldschmiedt, Ueber den Einfluss der Temperatur auf das galvanische Leitungsvermögen der Flüssigkeiten. 2. Abhdlg. (Akad.) Ebendas. 1 Mk.

Skalweit, E., Magnetische Beobachtungen in Memel. Königsberg i. Pr., Hartung. 4 Mk.

Wild, H., Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches. 1. Hälfte. Petersburg und Leipzig, Voss. 6 Mk. 80 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Carl Anton Bretschneider.

Ein Gedenkblatt für seine Freunde und Schüler

von

ALFRED BRETSCHNEIDER,
herzogl. Amtsassessor zu Ohrdruf.

Carl Anton Bretschneider wurde geboren am 27. Mai 1808 zu Schneeberg im sächsischen Erzgebirge als ältestes Kind des dortigen Oberpfarrers, späteren sachsen-gothaischen Generalsuperintendenten Dr. Carl Gottlieb Bretschneider und dessen Ehefrau Charlotte geb. Hauschild. Im September 1808 wurde Bretschneider's Vater als Superintendent nach Annaberg versetzt und der Sohn siedelte sonach als etwa vier Monate altes Kind mit dorthin über. Mit gelehrten und Berufsarbeiten schon damals viel zu sehr beschäftigt, um den Unterricht des Sohnes, nachdem derselbe das schulpflichtige Alter erreicht hatte, selber leiten zu können, überliess der Vater denselben Privatlehrern, welche indess den durch Kinderkrankheiten in seiner ersten Entwickelung ohnehin vielfach gestörten Knaben nicht erheblich zu fördern vermochten. Im Jahre 1816 verzog Bretschneider's Vater nach Gotha und hier wurde der Knabe, nachdem er noch einige Zeit Privatunterricht genossen, im Jahre 1818 der soeben neu eingerichteten untersten (vierten) Classe des dortigen Gymnasiums zugeführt.

Das Gothaische Gymnasium erfreute sich damals mit Recht eines hervorragenden und weitverbreiteten Rufes. Männer wie Döring, Schulze, Regel, Kries, Uckert, Rost, Wüstemann u. A. waren theils gleichzeitig, theils successive Bretschneider's Lehrer. Alle diese Männer waren ausgezeichnete Gelehrte. Die Anstalt, an der sie wirkten, hielt sich völlig frei von der Einseitigkeit, nur gute Philologen bilden zu wollen. Wenngleich die alten Sprachen stets den ersten Platz unter den Lehrgegenständen einnahmen, so waren doch die übrigen Zweige des menschlichen Wissens nicht weniger berücksichtigt und treffliche Vorträge über Geschichte, Geographie, Mathematik, Physik u. s. w. gaben den Schülern vielfach Gelegenheit, den Geist und die Hauptresultate dieser Wissenschaften kennen zu lernen und sich so jene Vielseitigkeit zu erwerben, welche unerlässliche Bedingung aller wahren Wissenschaftlichkeit ist. Auch die neueren Sprachen, als die französische, englische und italienische, waren nicht vergessen, und durch einen besondern Cursus im Hebräischen war dafür gesorgt, die Schüler mit dem Geiste der morgenländischen Sprachen wenigstens einigermassen bekannt zu machen.

Wahren Nutzen von all' diesem Segen hatte allerdings im Grunde nur derjenige Schüler, welcher den Bestrebungen der Lehrer selbstdenkend und selbstthätig entgegenkam. Die Lehrer waren nur zum kleinern Theil zugleich gute Pädagogen. Die straffe Disciplin des modernen Gymnasiums, die es fertig bringt, selbst den Schwerfälligsten und Faulsten zuletzt noch auf den Standpunkt anständiger Mittelmässigkeit emporzuschrauben, herrschte nicht und manches *pingue ingenium* verkam. Dem Strebsamen dagegen war auch Gelegenheit gegeben, sich, ungestört in seiner Eigenart, bis zur höchstmöglichen Potenz zu entwickeln.

Bretschneider war ein strebsamer Schüler, ein lebhafter, offener Kopf, doch hatte er nicht gleiche Begabung für alle Fächer, neigte vielmehr frühzeitig vorwiegend nur den Realwissenschaften, insbesondere der Mathematik zu. Vor der Gefahr, in Einseitigkeit zu verfallen, würde ihn die Schule allein nicht bewahrt haben; dieselbe abgewendet zu haben, ist das Verdienst seines Vaters. Derselbe griff zwar auch während der Gymnasialzeit seines Sohnes selbstthätig in den Unterricht desselben nie ein, controlirte jedoch den Entwickelungsgang des Knaben aufmerksam. Weit entfernt, die Liebhabereien seines Sohnes zu stören, war er denselben im Gegentheil in vielfacher Weise positiv förderlich; mit unerbittlicher Strenge hielt er jedoch darauf, dass das Studium der Geschichte und der Sprachen, insbesondere der klassischen, nicht vernachlässigt werde. Während er es z. B. bereitwilligst geschehen liess, dass der Sohn Privatunterricht in der Mathematik, im Situationszeichnen, sogar im Feldmessen nahm und während er den Hang desselben zu mathematischer, physikalischer, geographischer Privatlecture durchaus nicht störte,* liess er ihm gleichzeitig, ein Zurückbleiben des Knaben im Lateinischen be-

* Bretschneider las als Schüler seichte Unterhaltungslecture fast nie, dagegen alle Werke des ebenerwähnten Inhalts, deren er nur habhaft werden konnte. Sommer's „Gemälde der physischen Welt" verschlang er mit Andacht; später gerieth er auf Zach's „Geographische Ephemeriden" und deren Fortsetzung, die „Monatliche Correspondenz". Letztere beiden Werke hat er sich, um deren Inhalt sich dauernd zu sichern, eifrigst excerpirt, zum Theil vollständig abgeschrieben.

merkend, lange Zeit hindurch besondere Nachhilfe in dieser Sprache durch den ihm eng befreundeten Döring ertheilen.

Zu Gute kam Bretschneider überhaupt in hohem Grade der innige geistige Verkehr, in welchem sein Vater mit den meisten Lehrern des Gymnasiums stand, und nicht minder seines Vaters eigene umfassende wissenschaftliche Bildung. Bretschneider's Vaterhaus war in Gotha eine Heimstätte alles höheren geistigen Lebens in Wissenschaft und Kunst — nicht zum Mindesten, was die Pflege der Musik anlangt, zu welcher Bretschneider frühzeitig ein erstaunliches Talent entwickelte* —, und dass diese Atmosphäre den Knaben acht Jahre lang gleichmässig umgab, hatte die äusserst wohlthätige Folge für ihn, dass er bei seinem Abgange zur Universität gegen alle Einflüsse niedrigen, oberflächlichen und materiellen Wesens vollständig gefeit war und tieferer Geistes- und Herzensbildung sich rühmen konnte, als viele seiner Commilitonen.

Auf sein Talent für die Mathematik zurückzukommen, so erkannte dasselbe bald der hellblickende Kries. Er war es, der aus Freundschaft für den Vater des Knaben und mächtig angezogen von des Letzteren regem Eifer ihm bis zu seinem Abgang von der Schule in uneigennützigster Weise privatim förderlich war und ihn, bei seinen mathematischen Studien besonders thätig eingreifend, weit über die Grenzen hinausleitete, welche der Gymnasialunterricht vernünftigerweise sich stecken konnte. Die zum Theil noch vorhandenen Elaborate Bretschneider's aus jener Zeit weisen nach, dass der bei seinem Abgange zur Universität kaum 18jährige Jüngling in der Mathematik damals bereits auf einem Standpunkte stand, der das Verhältniss zwischen ihm und Kries aus dem eines Schülers zum Lehrer fast schon in das zweier vereint strebender Jünger der Wissenschaft verwandelt gehabt haben muss. Bretschneider hat Kries bis an dessen Lebensende unveränderliche Ehrfurcht gezollt und ihm sein erstes grösseres Werk (das „Lehrgebäude der niederen Geometrie") „aus Dankbarkeit und Liebe" gewidmet.

Die Zeit kam heran, wo Bretschneider zum Abgang von der Schule reif war. Eigentlich schon im October 1825 hätte er sich zum

* Ein redendes Beispiel für die oft aufgestellte Behauptung, dass Mathematik und Musik eng verwandte Disciplinen seien. Für Musikverständige sei hier die Thatsache mitgetheilt, dass Bretschneider als 14jähriger Knabe in den öffentlichen Abonnementsconcerten, die damals im Gasthof „zum Mohren" in Gotha die dortige musikalische Welt allwinterlich regelmässig vereinigten, Compositionen wie das *C dur*-Concert von Mozart Nr. 17 und das *D dur*-Concert von Aloys Schmidt unter dem ungetheilten Beifall der Sachkenner zum Vortrag brachte. Sein Vater inhibirte dieses öffentliche Auftreten bald aus Besorgniss, dass einer — gar nicht vorhandenen — Eitelkeit des Knaben dadurch Vorschub geleistet werden könne.

Abiturientenexamen melden können. Seines jugendlichen Alters halber hielt ihn sein Vater indessen bis Ostern 1826 zurück, wo er denn das Examen in allen Fächern mit Auszeichnung, in der Mathematik ganz vorzüglich bestand.

Nun trat ein Wendepunkt in Bretschneider's Leben ein, der für seinen ganzen zukünftigen Entwickelungsgang von tiefeinschneidender Bedeutung war.

Bretschneider's Vater war bei all' seinem eminent wissenschaftlichen Sinne doch auch ein praktischer, so zusagen auf's Nüchterne gestellter Kopf — ein Dualismus, der ihm selbst in seiner Lebensstellung die schönsten Früchte getragen, seinen Sohn aber entschieden geschädigt hat. Wohl mag der abgehende Jüngling den Wunsch geäussert haben, sich seiner Lieblingswissenschaft und den ihr verwandten Disciplinen voll widmen zu dürfen — Genaueres ist hierüber nicht bekannt —; sein Vater aber — dies steht fest — glaubte, dass vor allen Dingen ein sogenanntes Brodstudium betrieben werden müsse,* und ein solches vermochte er im Studium der Mathematik nicht zu erkennen. Er hatte damit zwar so absolut Unrecht nicht. Die Realwissenschaften lagen damals noch sehr im Argen, Derjenigen, denen es gelungen war, an der Hand derselben eine nach damaligen Begriffen sichere und angesehene Stellung zu erlangen, waren verhältnissmässig nicht viele. Doch beging Bretschneider's Vater den doppelten Fehler, dass er einerseits das auch damals schon für den Unbefangenen deutlich wahrnehmbare Wachsen der Bedeutung der Realien vollständig übersah und andererseits das Talent seines Sohnes für dieselben weit unterschätzte. Auf die ihm unsicher scheinenden Erfolge des Letzteren mochte er nicht Alles geradezu ausgesetzt sehen, sondern war der Meinung, dass sein Sohn zunächst auf möglichst rasch zum Ziele führende Weise irgend eine Staatsstelle zu erlangen suchen müsse, wobei er sich der Hoffnung schmeichelte, dass gerade die Bewandertheit desselben in den Realwissenschaften ihn dermaleinst ganz besonders befähigen werde, eine höhere Stellung in einem Staatswesen mit Erfolg auszufüllen. „Mein Sohn hat die schönsten Kenntnisse zu einem Regierungsrath" war eine wohlverbürgte Aeusserung von ihm im vertrauten Freundeskreise. Aus diesen Erwägungen heraus legte er dem Sohne ans Herz — um nicht zu sagen: schrieb ihm vor —, die Rechtswissenschaft zu studiren; dann werde es ihm, so meinte er, nicht fehlen können. Und der Sohn? Er ordnete sich dem bestimmt geäusserten Willen des von ihm hoch und wahrhaft verehrten Vaters unter.

Alte Anhänglichkeit an sein Vaterland Sachsen, zahlreiche Bekanntschaften unter der Gelehrtenwelt Leipzigs und andere Umstände privater

* Bretschneider's Vater bezog zwar einen ansehnlichen Gehalt, besass jedoch eigenes Vermögen nicht.

Natur bestimmten den Vater, die Musenstadt an der Pleisse als diejenige Universität auszuwählen, die der Sohn beziehen sollte. Hier fand sich noch ein Hinderniss. Wer damals in einem thüringischen Staat ernestinischer Linie angestellt werden wollte, musste die Landesuniversität Jena besuchen oder einen nicht leicht zu erlangenden Dispens erwirken. Letzteres wurde dem Vater bei seinem Einfluss auf die höchsten Stellen nicht schwer; der Form Rechnung zu tragen, liess er den Sohn in Jena als *studiosus juris* immatriculiren und dann zog Letzterer, mit der Jenenser Matrikel und dem Dispens in der Tasche, nach Leipzig. Hier liess er sich nochmals immatriculiren. Er hatte den ernstlichen Willen, sich seinem Vater zu Liebe zum Juristen auszubilden, dabei aber den Hintergedanken, nebenbei seine mathematischen und naturwissenschäftlichen Studien derart fortzutreiben, dass er nöthigenfalls immer noch im Stande sein würde, bei sich bietender Gelegenheit „umzusatteln". Ein wahrhaft heroischer Entschluss, dem die ebenso heroische Ausführung frischweg folgte! Charakteristisch ist in dieser Beziehung, was Bretschneider in einer vorliegenden Aufzeichnung aus dem Jahre 1835 (wo er die juristische Carrière definitiv verliess) von sich sagt:

„Mussten nun auch infolge dieses Entschlusses die mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien gegen die juristischen in den Hintergrund treten, so konnte ich mich doch keineswegs entschliessen, sie gleich aufzugeben; vielmehr diente mir die Beschäftigung mit denselben dazu, mich von den mühseligen juristischen Studien zu erholen und neue Kräfte zu neuen Anstrengungen zu sammeln."

Bretschneider hörte mit Fleiss und Erfolg sämmtliche vorgeschriebene juristische Collegien und noch mehr als diese,* denn sehr bald stand bei ihm die Idee fest, sich nach absolvirter Universitätszeit — es waren von vornherein vier Jahre zum Studium bestimmt — als Docent in der juristischen Facultät zu habilitiren. Er fürchtete, bei dereinstigem Eintritt in den praktischen Justizdienst Zeit und Gelegenheit zu verlieren, seinen Lieblingsstudien so, wie es ihm Bedürfniss war, nebenbei obliegen zu können, wollte zu letzterem Endzwecke jedenfalls mit der belebenden Atmosphäre der Leipziger Hochschule in Berührung bleiben und trug sich mit der Hoffnung, endlich noch einen Anlass zu finden, aus der juristischen in die philosophische Facultät überzugehen. Nur in den ersten Semestern seines Leipziger Aufenthalts hörte er neben den juristischen noch andere Collegia, namentlich Differential- und Integralrechnung bei Brandes, Weltgeschichte bei Beck, auch einen vollstän-

* Adolph Schilling, Otto, Heimbach, Stöckhardt, Bruno Schilling, Weiske, Weisse, Held, Klien, Einert, Pölitz waren seine Universitätslehrer auf juristischem und staatswissenschaftlichem Gebiete.

digen Cursus der Philosophie bei Krug; später musste er dies der Collision mit den juristischen Collegien halber aufgeben und studirte lediglich privatim in der Mathematik und den verwandten Disciplinen weiter, dabei beständig berathen und unterstützt von Brandes, der auf den talentvollen Studenten besonders aufmerksam geworden war, von seinen Plänen bald Kenntniss erlangte, ihm seine bedeutende Bibliothek zur unbeschränkten Verfügung stellte und seine Häuslichkeit erschloss. Zwischen Beiden stellte sich nach und nach ein sehr angenehmes Verhältniss her, ähnlich wie das zwischen Bretschneider und Kries, anmuthender noch um deswillen, weil Brandes und dessen hochgebildete Gattin den jungen Studenten auch in seinem Privatleben in höchst taktvoller und späterhin oft von ihm gerühmter Weise leiteten und zu feineren Lebensanschauungen und Umgangsformen unmerklich heranbildeten.

Gedacht muss hier auch der Beziehungen Bretschneider's zu dem Astronomen Möbius werden. Bei diesem hatte Bretschneider im ersten Semester schon belegt; das betreffende Colleg kam jedoch nicht zu Stande. Dagegen nahm Möbius Gelegenheit, Bretschneider bei dessen Besuchen auf der Leipziger Sternwarte persönlich an sich heranzuziehen, gewann ihn lieb, liess ihn nach Belieben in der Bibliothek der Sternwarte schalten und hat ihm sein Wohlwollen vielfach in fördersamer Weise bethätigt.

Mit welchem Erfolge Bretschneider trotz angestrengter Thätigkeit auf dem Felde der Juristerei seinen Privatstudien oblag, dafür zwei Beispiele. Schon im ersten Universitätsjahre siegte er bei einer mathematischen Preisbewerbung – um das sogenannte Trier'sche Stipendium im Betrage von 300 Thalern — über einen Concurrenten, einen armen Studenten aus Freiberg in Sachsen, dem er indess generöserweise die Hälfte der genannten Summe überliess. Und ferner: im Sommer 1827 ernannte ihn die philosophische Facultät auf Brandes' und Möbius' Vorschlag nach erfolgtem Ableben des damaligen Adjuncten an der Universitätssternwarte zu dessen Nachfolger — eine Stelle, welche Bretschneider jedoch auf ausdrücklichen Befehl seines Vaters, der von der Bedeutung derselben wohl eine ganz falsche Vorstellung haben mochte (sie war allerdings nur mit 180 Thalern dotirt) refüsiren musste. Traurigen Herzens gab Bretschneider die diesbezügliche Erklärung ab; sein Eifer für seine Lieblingswissenschaften wurde jedoch dadurch keineswegs geschwächt.

Die vierjährige Studienzeit neigte zu Ende und Bretschneider ging daran, sich als Docent zu habilitiren, zu welchem Schritte er die Genehmigung seines Vaters übrigens für sich hatte. Es ward dazu die Würde eines Baccalaureus der Rechte erfordert, welche nur durch eine öffentliche Disputation, sowie durch ein mündliches und schriftliches Examen in den Rechtswissenschaften erworben werden konnte. Allen diesen Erfordernissen genügte Bretschneider und am 5. Juli 1830 wurde er von der Juristenfacultät zum Baccalaureus beider Rechte creirt, zum königl. sächsischen Notar ernannt und unter die Zahl der akademischen Docenten aufgenommen. Von Michaelis an hielt er nunmehr öffentliche Vorlesungen über römische Staats- und Rechtsgeschichte, ingleichen über deutsches Recht und Lehnrecht, und obschon die Concurrenz in der juristischen Facultät nicht unbedeutend war, fanden dieselben doch ihr Auditorium und wurden mehrere Semester hindurch regelmässig fortgesetzt. Nur ein beiläufiger Act war es, dass Bretschneider sich im Winter 1830 auf 1831 um das Auditoriat beim königl. sächsischen Oberhofgericht zu Leipzig bewarb. Er erhielt dasselbe, wurde am 1. Februar 1831 verpflichtet, ist jedoch in dieser Stellung wenig in Anspruch genommen worden. Neben seiner Thätigkeit auf dem juristischen Katheder fand Bretschneider wieder mehr Muse, als bisher, um Mathematik, Physik u. s. w. zu betreiben. Namentlich setzte er den Unterricht in diesen Wissenschaften fort, den er auf Brandes' Anrathen bereits seit 1829 einzelnen Studirenden und Gymnasiasten ertheilt hatte, um auf alle Fälle auch einigermassen für das Lehrfach in diesen Dingen sich auszubilden.

So war Alles eingeleitet, um eine sich bietende Gelegenheit zum Uebertritt in die philosophische Facultät beherzt am Schopfe zu fassen. Bretschneider hatte sogar bereits Schritte gethan, sich die Doctorwürde zu erwerben, als er infolge des längst empfundenen Einflusses des Leipziger Klimas, sowie der mit seiner Habilitation verbunden gewesenen ausserordentlichen körperlichen und geistigen Anstrengungen in eine langwierige Krankheit (das Wechselfieber) verfiel, die ihn nöthigte, gegen Ende des Jahres 1831 nach Gotha zurückzukehren, wo er ärztlicherseits den Bescheid erhielt: nur eine längere gänzliche Entfernung von Leipzig vermöge seine Wiederherstellung zu bewirken.

Dies war eine der härtesten Prüfungen, die Bretschneider in seinem Leben betroffen haben. Nur widerstrebend fügte er sich und trat auf Betreiben seines Vaters, der in dieser Beziehung sehr eigenmächtig vorging, zu Ostern 1832 als Auditor in das herzogl. Justizcollegium zu Gotha ein. Seine neue Stellung war allerdings mit einer nicht unbedeutenden Menge von Arbeiten verknüpft, doch waren diese minder wichtiger Art und er behielt mehr, als er vermuthet hatte, Zeit zu fortgesetzten Studien in seinen Lieblingsfächern übrig. In jener Zeit war es, wo Bretschneider neben seinen Amtsgeschäften ganz besonders eifrig und abgeschlossen von der Aussenwelt seinen inneren Neigungen folgte und zuerst verschiedene Aufsätze für den Druck ausarbeitete, welche zum Theil im Crelle'schen „Journal für die reine und angewandte Mathematik" erschienen sind (s. den Anhang). Daneben ertheilte er fort und fort Privatunterricht in der Mathematik und nahm hierbei Gelegenheit, mannigfache Versuche über die zweckmässigste Methode des Vortrags in dieser Wissenschaft anzustellen.

Die einzige, ihm sehr wohlthätige Unterbrechung dieses bis Michaelis 1835 fortgesetzten Stilllebens bestand in einer Reise nach der Schweiz, welche sein Vater im Sommer jenes Jahres anlässlich des Genfer Reformationsjubiläums ausführte und bei welcher er sich von seiner Frau,* seinem ältesten Sohne und einer Tochter begleiten liess.

Mehr als je widerte Bretschneider nach seiner Rückkehr die Juristerei an und er wagte es endlich, seinem Vater bestimmte desfallsige Andeutungen zu machen. Doch dieser war taub gegenüber den Klagen seines Sohnes und drang heftiger als bisher darauf, dass das Referendarexamen, zu welchem derselbe sich bereits vor Antritt der schweizer Reise hatte melden müssen, fördersamst erledigt werde. Wie es scheint, sind Bretschneider bei demselben mancherlei kleinliche Schwierigkeiten in den Weg gelegt worden, die Sache rückte nicht recht vorwärts, der Vater drängte, der Sohn wurde immer missmuthiger und Alles spitzte sich mehr und mehr zu einer endlichen Katastrophe zu.

Da trat ein Zufall lösend ein.

Bretschneider's früherer Lehrer Kries musste wegen eintretender Beschwerden des Alters zu Michaelis 1835 seine Unterrichtsstunden am Gothaischen Gymnasium aufgeben. Ein Vertreter war nicht sogleich zu finden, tüchtige Mathematiker waren damals eben ausserhalb der Universitätsstädte selten. Bretschneider, die Unmöglichkeit einsehend, nach Leipzig zurückkehren zu können und in der juristischen Praxis sich nachgerade vollständig unglücklich fühlend, glaubte die Gelegenheit, als Hilfslehrer am Gymnasium eintreten zu können, nicht versäumen zu dürfen, wiegte sich in der Hoffnung, das Provisorium mit Kries' eigener Unterstützung bald in ein Definitivum übergeleitet zu sehen, und vertraute sich dem Hausarzt seines Vaters, dem hochverdienten Hofrath Dr. Kerst in Gotha, an. Dieser hatte schon lange mit stillem Bangen zugesehen, wie der junge Mann sich marterte, seinem juristischen Berufe *invita minerva* Genüge zu thun, und dabei seine Gesundheit untergrub. Jetzt trat er mit der Erklärung an den Vater heran: „Wenn Sie nicht wollen, dass Ihr Sohn in einigen Jahren zu Grabe getragen wird, so lassen Sie ihm freien Lauf, seinen innersten Neigungen zu folgen; ausserdem stehe ich für Nichts!" Bretschneider's Vater erschrak. Er willigte, wenn auch ungern und missmuthig, darein, dass sein Sohn den Justizdienst quittirte und sich zur Uebernahme der Kries'schen Lehrstunden meldete. Die Genehmigung des Gesuches stiess auf keinerlei Schwierigkeiten, Bretschneider wurde zu Michaelis 1835 durch den damaligen Oberhofprediger Dr. Jacobi am Gymnasium zu Gotha als Hilfslehrer eingeführt und sofort stellte sich seine enorme Begabung für den Unterricht so augenfällig heraus, dass selbst sein Vater überzeugt

---

* Der zweiten; Bretschneider's Mutter war 1833 verstorben.

wurde und aufhörte, ihm die Misslichkeit des Berufswechsels vorzuhalten. „Mein Sohn ist an seinem Platze!" war seine Aeusserung, als er zum ersten Male in seiner Eigenschaft als Ephorus des Gymnasiums den Sohn öffentlich hatte examiniren hören.

Die obenerwähnten Abhandlungen Bretschneider's im Crelleschen Journal hatten inmittelst bereits die Aufmerksamkeit fachmännischer Kreise erregt und wurden Veranlassung, dass an den genannten Jacobi im Winter 1835 auf 1836 von Kurhessen aus der Auftrag erging, zu sondiren, ob der Verfasser geeignet und geneigt sei, die erledigte Stelle eines Professors der Mathematik am Gymnasium zu Rinteln zu übernehmen. Auf Jacobi's Rath reiste Bretschneider persönlich nach Rinteln; die Sache zerschlug sich jedoch aus äusserlichen, hier nicht interessirenden Gründen. Dagegen bot sich gleich darauf eine andere Gelegenheit für Bretschneider, ein seinen Neigungen entsprechendes sicheres Unterkommen zu finden.

Gegen Ende 1835 gedieh der Plan der Errichtung einer Realschule höherer Ordnung in Gotha zur Reife. Die Anstalt sollte mit drei Classen zu Ostern 1836 eröffnet werden. Es war die Stelle eines Lehrers der Mathematik und Geographie zu besetzen. Bretschneider, schnell entschlossen, bewarb sich um dieselbe. Er hatte nur einen Mitbewerber. An competenter Stelle wurde für ihn entschieden und dem jetzt voll in die Waagschale geworfenen Einfluss seines Vaters, verbunden mit dem ehrlichen Lobe, das seiner Befähigung zum Unterricht seiten des Lehrercollegiums am Gymnasium ertheilt wurde, verdankte er die Anstellung als erster Lehrer an der gedachten Anstalt mit dem Titel „Professor"* und sah sich auf diese Weise unerwartet mit einem für damalige Zeiten auskömmlichen Gehalt von 500 Thalern in einer Stellung, welche seinen Wünschen, nachdem er auf die akademische Carrière verzichtet hatte, zunächst vollständig entsprach.

Der Missklang zwischen Vater und Sohn war für immer beseitigt, und wenn irgend Etwas Bretschneider als einen ethisch reinen, wahrhaft selbstlosen Charakter zu kennzeichnen im Stande ist, so ist es dies, dass diese Aussöhnung einen Stein von seiner Seele nahm, dass er seinem Vater nie mit einem Worte, nie mit einer Andeutung nahe gelegt hat, dass dessen eiserner Wille ihm manches Jahr aufreibender, verlorener Geistesarbeit aufgebürdet hatte, dass er seinem Vater vielmehr bis an dessen Lebensende (1848) mit kindlicher Verehrung zugethan war und oft und gern rühmte, was er ihm in Wahrheit auch zu verdanken hatte — jene allseitige Bildung, die ihm äussere Glücksgüter zwar nie eingebracht, dagegen hohe innere Befriedigung gewährt und weit über den

* Ohne weiteres Examen. Das Prüfungswesen im höheren Schulfach entbehrte damals in Gotha überhaupt noch gänzlich der gesetzlichen Regelung.

geistigen Standpunkt Vieler emporgehoben hat, die das Leben in der Folge in seine Nähe stellte.

Bretschneider lebte, wie sich leicht denken lässt, vollständig neu auf. Seine Gesundheit kräftigte sich, er verheirathete sich noch im Jahre 1836. Glückliche Beziehungen zum elterlichen und schwiegerelterlichen Hause und vielleicht auch die Furcht vor dem Leipziger Klima liessen ihn 1838 einen Ruf als Professor der Mathematik an der Nicolaischule zu Leipzig ausschlagen, das Interesse an der Anstalt, der er angehörte, in derselben Zeit eine Vocation an das Gothaische Gymnasium. Neben seinem Lehrerberuf, dem er mit Feuereifer oblag, schriftstellerte er fortab fleissig. Eine ganze Reihe von Aufsätzen inserirte er dem damals ins Leben getretenen Grunert'schen „Archiv" und dieselben haben zur Begründung des Rufes dieser Zeitschrift nicht unerheblich beigetragen. Auch eine höchst praktische „Productentafel" gab er in jener Zeit heraus (s. den Anhang).

Im Jahre 1839 wurde er ständiger Mitarbeiter der Darmstädter „Allgemeinen Schulzeitung", hat jedoch die Thätigkeit an diesem Blatte, dessen Zwecke mit seinen Neigungen weniger zusammenfielen, bald wieder eingestellt.

Im Jahre 1844 erschien sein erstes grösseres Werk, das „Lehrgebäude der niederen Geometrie" (Jena, bei Friedrich Frommann). Von kundiger Seite ist wohl behauptet worden, dass dieses Buch weniger ein Lehrbuch für Anfänger, als ein Handbuch zum Selbststudium für Solche sei, die zur Mathematik von innen heraus und durch das Talent getrieben würden. Wohl mag es mehr enthalten, als gemeiniglich von den Lehrern der Mathematik, namentlich auf Gymnasien, den Schülern geboten zu werden pflegt und geboten werden darf, auch mag dasselbe wesentliche Abweichungen von dem bis dahin üblich Gewesenen überhaupt enthalten. Doch ist zu bedenken, dass Bretschneider bei Abfassung des Buches aus äusseren Gründen sich vielfach den Anschauungen seines Directors, des nunmehr verstorbenen Dr. Traugott Müller, unterordnen musste, und dass doch auch aus dem Buche selber für den Sachverständigen ohne Weiteres hervorgeht, dass der Verfasser in demselben zunächst dem Lehrer in streng systematischer Folge den zu verarbeitenden Stoff vollständig darbieten wollte, dabei aber voraussetzte, dass der Masse der Schüler nur das leicht auszuscheidende Allgemeine deducirt, die Fülle der zum Theil höchst feinen Einzelheiten aber lediglich dem — nöthigenfalls privaten — Austausch zwischen dem Lehrer und den strebsamen und talentvolleren Schülern vorbehalten bleiben müsse.

Als Curiosum sei hier erwähnt, dass Bretschneider in späteren Jahren mit einer Art von Behagen constatirt hat, wie Abschnitte aus den „Erweiterungen" betitelten Theilen seines Buches sammt allen

Druckfehlern in einem Programm des Gymnasiums eines entlegenen Gaues unseres Vaterlandes als selbstständiges Elaborat des dortigen Mathematikers figurirten, dass er in seiner Gutmüthigkeit aber nur erklärte: „Was mag der Hecht für eine Freude gehabt haben, als er seine Angst los war!" und der Sache nie wieder Erwähnung that.

Bretschneider's Lehrerstellung brachte es mit sich, dass er auch in der Geographie auf schriftstellerischem Gebiet sich regte. Zunächst zu seiner eigenen Bequemlichkeit, um lästiger Dictate überhoben zu sein, verfasste er 1847 einen kleinen „Leitfaden für den geographischen Unterricht an Gymnasien und Realschulen" (Gotha, bei Justus Perthes) und traf damit vom pädagogischen Standpunkte aus das Richtige so sehr, dass das Werkchen bis auf die neueste Zeit herab eine ganze Reihe von Auflagen erlebte und den Namen des Verfassers bei einer grossen Anzahl von Schulanstalten einbürgerte.

Ziemlich in dieselbe Zeit fällt als Frucht seiner zeitweisen Verwendung im Geschichtsunterricht das Erscheinen seiner „Historischen Wandkarte, das Zeitalter der Reformation darstellend" (ebenfalls bei Justus Perthes), eine Arbeit, welche sich des Beifalls einer nicht geringen Anzahl von Pädagogen erfreute und welcher im Jahre 1856 in demselben Verlage der „Historisch-geographische Wandatlas nach Carl v. Spruner" folgte. Von letzterem Werke besorgte der Herausgeber die zweite Auflage im Jahre 1876, die letzte wissenschaftliche Arbeit, die er vor seinem Tode zum Abschluss gebracht sah. Mit Justus Perthes' geographischer Anstalt stand Bretschneider überhaupt während seines Lebens stets in regstem Verkehr. Den verstorbenen Chefs derselben, Wilhelm und Bernhard Perthes, war er persönlich befreundet und hat mehr als eine Arbeit im Auftrag der Anstalt ausgeführt, so z. B. die Redaction des Textes von Barth's Reise nach dem centralen Afrika u. A. m.

Auch mit anderen Gelehrten, namentlich Mathematikern, unterhielt Bretschneider regen geistigen Verkehr und ganz besonders fruchtbar für ihn war sein Umgang mit dem berühmten Analytiker C. G. J. Jacobi, der 1849 seinen Wohnsitz in Gotha aufschlug, auf Bretschneider's damalige Studienrichtung erheblichen Einfluss ausübte und ihn persönlich hoch schätzte. Eine verdienstvolle und originelle Abhandlung Bretschneider's in Crelle's Journal (vergl. den Anhang sub II, 20) ist auf Jacobi's directe Anregung entstanden. Jacobi's bald darauf erfolgter jäher Tod versetzte Bretschneider in tiefe Trauer.

Im Jahre 1856 veröffentlichte Bretschneider sein „System der Arithmetik und Analysis" (Jena, bei Friedrich Mauke), ein Buch von anerkanntem Werthe, in welchem Das, was hier und da am „Lehrgebäude der niederen Geometrie" getadelt worden, in glücklicher Weise vermieden ist, während dasselbe doch den imponirend streng wissenschaftlichen Gang jenes Erstlings- und Lieblingswerkes des Verfassers abermals, nur in glücklicherer, knapper gewählter Form vollwiegend zur Geltung bringt.

Im nämlichen Jahre widerfuhr Bretschneider die Ehre, zum wirklichen Mitgliede des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen in Halle ernannt zu werden.

Bis zum Jahre 1870 erschien ein neues grösseres Werk aus Bretschneider's Feder nicht wieder. Nichtsdestoweniger widmete er auch in dieser Periode seines Lebens die Zeit, welche ihm der eigentliche Beruf übrig liess, unausgesetzter wissenschaftlicher Thätigkeit. Abgesehen davon, dass er die verschiedenen sich nöthig machenden neuen Auflagen seines geographischen Leitfadens besorgte und verschiedene zerstreute Abhandlungen schrieb, arbeitete er nach und nach eine zweite Auflage seines „Lehrgebäudes der niederen Geometrie" aus, welche zwar bei seinen Lebzeiten nicht zur Publication gelangt ist, jedoch im Manuscript druckfertig vorliegt und eine zum Theil gänzlich veränderte Bearbeitung und Anordnung des Stoffes nachweist, und bereitete vor allen Dingen sein letztes, geradezu epochemachendes Werk vor, das 1870 bei B. G. Teubner in Leipzig erschienene Buch: „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, ein historischer Versuch", eine Schrift, welche Bretschneider allezeit einen geachteten Namen in der mathematischen Welt sichern wird.

Die Entstehungsgeschichte dieses Buches weist auf die Schicksale der Anstalt zurück, bei welcher Bretschneider im Jahre 1836 als Lehrer eintrat.

Das „Realgymnasium" (dies war der officielle Titel der Anstalt) bestand bis zum Jahre 1859 als selbstständiges Bildungsinstitut fort, war bis dahin allmälig zu einer sechsclassigen Anstalt erweitert worden und hatte einmal das Directorat gewechselt; im Jahre 1844 nämlich hatte dasselbe an Stelle des einem Rufe nach Wiesbaden folgenden Dr. Traugott Müller der bisherige Director der höhern Bürgerschule zu Aschersleben, Friedrich Wilhelm Looff, übernommen. Eine Reihe theils eigenthümlicher Umstände, deren Darlegung in eine Geschichte der Anstalt, nicht in diese Zeilen gehört, veranlasste das herzogl. Staatsministerium zu Gotha im Jahre 1859, die Anstalt mit dem „Gelehrten Gymnasium" zu einem Ganzen unter dem Namen „Gymnasium Ernestinum" und unter dem Directorat des aus Posen berufenen Dr. Joachim Marquardt, eines Philologen von anerkanntem Rufe, zu verbinden. Bretschneider kam von diesem Zeitpunkte ab wieder in innigere Berührung mit einer ganzen Reihe von Männern, welche vornehmlich den Geist des klassischen Alterthums cultivirten. Sein Interesse an diesem unvergänglichen Urquell aller wahren Bildung, welches nur geschlummert hatte, aber nichts weniger als abgestumpft war, erwachte zu neuem Leben. Es verursachte ihm inniges Behagen, dass sein Director und seine neuen

Collegen in ihm einen Mann fanden, der seine Griechen und Römer noch anstandslos las und verstand; der Zufall führte ihn auf nähere Beschäftigung mit Montucla's Publicationen über die voreuklidische Geometrie; er kam zu der Ueberzeugung, dass dieselben verschiedener Richtigstellungen bedürftig seien, die Neuheit der Sache reizte ihn, die reiche, von ihm selber grösstentheils ganz neu geordnete Bibliothek des Gymnasiums lieferte ihm zahlreiche Quellen zu den einschlägigen Studien, das Fehlende suchte er theils in der Bibliothek des Friedenstein aus dem Staube der Jahrhunderte zusammen, theils verschaffte er es sich durch seine ausgebreitete Bekanntschaft in der gelehrten Welt, und so entstand nach und nach das Manuscript zu jenem historisch-kritischen Werke, das Bretschneider's Namen noch an der Schwelle des Greisenalters plötzlich weit über die Grenzen des deutschen Vaterlandes hinaus bekannt machte. Es wäre überflüssig, hier noch ein Wort über die Bedeutung einer Arbeit hinzuzufügen, welche gerade in dieser Zeitschrift (Bd. XVI, Literaturztg. S. 65—70) eine eingehendere lobende Besprechung erfuhr; das aber kann gesagt werden: Es ist lebhaft zu bedauern, dass Bretschneider nicht in früheren Jahren dazu gelangt ist, die historische Seite seiner Wissenschaft zu cultiviren; er würde Bedeutendes geleistet haben und die Frucht seiner umfassenden Geistesbildung, die namentlich auch die formale Seite der Klassicität in sich begriff, würde ihm noch voller gereift und noch eher in den Schooss gefallen sein.

Der Erfolg, den sein letztes Werk gehabt, feuerte ihn mächtig an, auf der betretenen Bahn fortzuschreiten. Verschiedenes in seinem literarischen Nachlass deutet darauf hin, dass er allen Ernstes an einer Fortsetzung des Buches gearbeitet hat. Doch die Kraft des Körpers hielt mit der des Geistes nicht gleichen Schritt. Im Jahre 1872 befiel ihn zum ersten Male ein heftiges Unwohlsein, welches auf das Vorhandensein eines lange vorbereiteten Nierenleidens hindeutete. Die Zufälle wiederholten sich und legten Bretschneider den ungewohnten Zwang auf, die unausgesetzte Thätigkeit am Schreibtisch auf das nothwendigste Mass zu beschränken. Im Jahre 1876 verdunkelte sich plötzlich die Sehkraft auf seinem rechten Auge. Hierdurch gerieth seine wissenschaftliche Thätigkeit noch mehr ins Stocken. Wiederholt setzte ihm sein Nierenleiden zu, im Frühjahr 1878 so hart, dass es dauernde Körperschwäche zurückliess und ihn nöthigte, zu Michaelis desselben Jahres mit schwerem Herzen sein Gesuch um Versetzung in den Ruhestand einzureichen. Seinem Wunsche wurde stattgegeben. Se. Hoheit der regierende Herzog, der ihn schon früher durch Verleihung des Ritterkreuzes II. Classe des Ernestinischen Hausordens ausgezeichnet hatte, ertheilte ihm das Prädicat „Hofrath“ und ein schmeichelhaftes Schreiben des herzoglichen Staatsministeriums würdigte seine Verdienste auf pädagogischem und wissenschaftlichem Gebiete in ehrender Weise. Nicht lange sollte er sich der ihm nachgerade wohlthätigen Entbindung vom Lehreramte erfreuen — im October 1878 warf ihn ein erneuerter heftiger Leidensanfall auf das Krankenlager und am 6. November, Morgens gegen 3 Uhr, entschlief er — wie sein fester Glaube war, zu höherem Dasein —, betrauert hienieden ausser von seinen Angehörigen von einer durch alle Lande zerstreuten Schaar aufrichtiger Freunde und dankbarer Schüler, die sein Andenken segnen.

Mit kurzen Strichen seien die Familienverhältnisse des Entschlafenen gezeichnet.

Seine erste Gattin, eine Tochter des Kaufmanns und Senators Johann Friedrich Arnoldi in Gotha, raubte ihm schon 1841, nachdem sie ihm zwei Söhne geboren, der Tod. Seine zweite, ebenso glückliche Ehe mit einer Tochter des grossherzogl. Oberbaudirectors C. W. Coudray in Weimar währte bis zum Jahre 1853, wo ihm auch diese Gattin verstarb. Auch sie hatte ihm zwei Söhne geboren. Die Sorge um vier der häuslichen Erziehung noch bedürftige Kinder nöthigte ihn zu einer dritten Heirath und in einer Tochter des verstorbenen grossherzogl. weimarischen Kammersängers Moltke (eines Zeitgenossen Goethe's) fand er eine ebenso gebildete, als welterfahrene Gefährtin, die ihm alle Sorgen des täglichen Lebens abnahm und bis zu seinem letzten Athemzuge treu und mit hohem Verständniss für sein inneres Geistesleben zur Seite stand. In den letzten Jahren seines Lebens traf Bretschneider noch der Schmerz, seinen zweiten Sohn erster Ehe im besten Mannesalter zu verlieren. Schwere Leiden sind ihm sonach nicht erspart geblieben, aber er ist ihrer Herr geworden durch die unversiegliche Elasticität seines Geistes, sie haben ihn nicht zu beugen vermocht!

Blicken wir nun resumirend zurück, so liegt ein Leben vor uns ausgebreitet, das voll Mühe und Arbeit war, aber deshalb köstlich.

Bretschneider war, wie sich aus vorliegenden Zeilen von selber ergiebt, vor allen Dingen ein mit zäher, unermüdlicher Arbeitskraft und energischem Willen ausgerüsteter Mensch. Leben hiess bei ihm Arbeiten. Wenn man bedenkt, dass er nach allen Anstrengungen seiner Universitätsjahre als Mann bei zeitweise über 30 berufsmässigen wöchentlichen Unterrichtsstunden, auf welche er sich stets sorgsam vorbereitete und welche stets eine unerquickliche Menge von Correcturarbeiten mit sich führten, noch Zeit und Kraft fand, bis in das spätere Mannesalter hinein unausgesetzt Privatstunden zu ertheilen,* daneben stets fortstudirte und wissenschaftlich producirte, in den 1850er Jahren 7 Jahre lang das Amt eines

* Von 1846 ab z. B. 17 Jahre lang in dem höheren Töchterinstitut des Fräulein Alix Humbert zu Gotha als Lehrer der Geographie.

Stadtverordneten in der Stadt Gotha bekleidete* und endlich noch eine erspriessliche, fruchtbringende Thätigkeit als Mitglied, zuletzt z. g. Meister vom Stuhle, der gothaischen Freimaurerloge „Ernst zum Compass" entfaltete, so wird man die höchste Achtung solcher Tüchtigkeit nicht versagen.

Tüchtigkeit und strebsamen Sinn ehrte Bretschneider unbedingt und überall, wo er ihn fand. Wer seine Pflicht that, wie er, der war sein Freund, gleichgiltig, ob er hoch stand oder niedrig. Hohlheit und äusserer Schein waren ihm zuwider. Wo diese sich ihm aufdrängten, konnte er leicht schroff werden und vergass dabei sogar manchmal die Regeln der Vorsicht. Bei gleichgiltigem Gespräch in geselligen Kreisen hielt er nur ungern Stand; er kannte das Bedürfniss, sich von ernster Arbeit in öffentlicher Gesellschaft zu erholen, nicht. Seine Erholung bestand in früheren Jahren in der Pflege der Musik, in der er selber Meister war, späterhin mehr nur in der Cultivirung feinerer Geselligkeit im Familien- und ausgewählten Freundeskreise. So lange er arbeitete in sich gekehrt, konnte er einen liebenswürdigen, in jüngeren Jahren bis zur Witzigkeit gesteigerten Humor entwickeln, sobald er unter Gleichgesinnten aus sich heraustrat. Ihm unsympathische Persönlichkeiten und Verhältnisse that er lieber mit meist treffenden Sarkasmen ab, als dass er lange widerlegte und sich dabei ärgerte. So lange es ging, fasste er überhaupt gern Alles von der heiteren Seite auf und erst in seinen letzten Lebensjahren warf körperliches Leiden einen Schatten von Schwermuth dauernd über sein im Grunde kindlich frohes Gemüth. Wahre Religiosität wohnte ihm unveränderlich inne, obschon er auf die äussere Ausübung kirchlicher Pflichten nur untergeordneten Werth legte; er erklärte dieselbe wiederholt und nachdrücklich für ein Gut, für welches philosophische Speculationen keinen Ersatz bieten könnten. Die modernste, ziemlich materialistisch angehauchte Richtung, welche die Naturwissenschaften eingeschlagen haben, verfolgte er mit einem gewissen Missbehagen und bezeichnete sie als unhaltbar.

Seinem innersten reichen Geistesleben haben natürlich nur Wenige dauernd nahe gestanden; Viele aber, die als Freunde und Berufsgenossen wenigstens einigen Einblick in dasselbe gethan, und Tausende, die als Schüler zu seinen Füssen gesessen haben, werden stets mit inniger Freude sich seiner als eines Mannes erinnern, der ihnen Allen Achtung abzwang lediglich durch das Gewicht seiner Persönlichkeit, durch die Urbanität seines ganzen Wesens, durch die Frische und Innerlichkeit, mit der er sich mittheilte, mit einem Worte durch den Zauber seiner Individualität, die sich unbefangen gab, wie sie war, und die es unmöglich erscheinen liess, ihrem Träger jemals unehrerbietig zu begegnen.

Have, pia anima!

---

* Auch in diesem „Ehrenamt" arbeitete Bretschneider.

Anhang.

Verzeichniss der im Druck erschienenen Schriften C. A. Bretschneider's.

I. Recensionen.

1. Schulze, Dr. G. L., Das veranschaulichte Weltsystem etc.
2. Derselbe, Ausführl. Beschreibung astronomischer Versinnlichungswerkzeuge etc.
   (Im Allgemeinen Anzeiger der Deutschen, Jahrg. 1839 Nr. 172.)
3. Focke Hoissen Müller, Elemente der Arithmetik und Algebra in System, Commentar und Anwendungen. Potsdam 1839. 8°.
   (Jahn's Jahrbücher, 27. Bd. S. 355—388.)
4. Francoeur, Vollständiger Lehrcursus der Mathematik. Nach der 4. Auflage übersetzt von Edm. Külp.
   (Allgem. Schulzeitung, Jahrg. 1840 Nr. 32 u. 33.)
5. Zehender, Anfangsgründe der Mathematik, I. Theil. Bern 1839.
   (*ibid.*, Jahrg. 1840 Nr. 96.)
6. Littrow's Himmelsatlas.
   (*ibid.*, Jahrg. 1840 Nr. 159.)
7. Hermann, Die Zahlenreihe und ihre Anwendung im bürgerlichen Leben. Darmstadt 1839.
   (*ibid.*, Jahrg. 1841 Nr. 90.)
8. v. Sydow, Wandkarte über alle Theile der Erde.
   (*ibid.*, Jahrg. 1841 Nr. 3, 4, 5.)
9. Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 2. Auflage.
   (*ibid.*, Jahrg. 1841 Nr. 183.)
10. Prestel, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.
    (*ibid.*, Jahrg. 1841 Nr. 71 u. 72.)
11. Scherling, Lehrbuch der Trigonometrie, Stereometrie und Kegelschnitte. Lübeck 1839.
    (*ibid.*, Jahrg. 1842 Nr. 50 u. 51.)
12. Francke, Die Elemente der Zahlenlehre in System und Beispielen.
    (*ibid.*, Jahrg. 1843 Nr. 31.)
13. Moosbrugger, Analytische Geometrie.
    (Looff's pädagog. Zeitschr., Jahrg. 1845.)
14. Snell, Lehrbuch der Trigonometrie, und
15. Witzschel, Grundlehren der neueren Geometrie.
    (Cantor's Zeitschrift für Mathematik u. Naturwissenschaften, Jahrg. 1858.)

II. Einzelne Abhandlungen.

1. Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.
   (Crelle's Journal, Bd. 13.)
2. *Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova.*
   (*ibid.*, Bd. 15.)
3. Von den Relationen, welche zwischen den Halbmessern der sphärischen Dreiecken ein- und umgeschriebenen Kreise stattfinden.
   (Programm des Realgymnasiums zu Gotha 1838.)
4. Neue Methode, die rationalen und irrationalen Wurzeln numerischer Gleichungen zu finden.
   (Leipzig bei Voss, 1838. 4°.)
5. Beiträge zur Untersuchung der dreiseitigen Pyramide.
   (Grunert's Archiv, Bd. 1 S. 1.)
6. Tafel der Pythagoräischen Dreiecke.
   (*ibid.*, Bd. 1 S. 66.)
7. Eigenschaften der ungeraden Zahlen in Bezug auf beliebige Potenzen der einzelnen Glieder der natürlichen Zahlenreihe.
   (*ibid.*, Bd. 1 S. 415.)
8. Trigonometrische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln zweier beliebiger ebener oder sphärischer Dreiecke.
   (*ibid.*, Bd. 2 S. 132.)
9. Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Vierecks.
   (*ibid.*, Bd. 2 S. 225.)
10. Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie.
    (*ibid.*, Bd. 2 S. 431.)
11. Ueber das Pothenot'sche Problem.
    (*ibid.*, Bd. 2 S. 433.)
12. Ueber die Berechnung der Länge und Breite eines Gestirns aus gerader Aufsteigung und Abweichung und umgekehrt.
    (*ibid.*, Bd. 2 S. 339.)
13. Uebungsaufgaben für Schüler.
    (*ibid.*, Bd. 2 S. 330.)
14. Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, sowie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängender Zahlen.
    (*ibid.*, Bd. 3 S. 27.)
15. Ueber die abgeleiteten Vierecke, welche von je vier merkwürdigen Punkten des geradlinigen Vierecks gebildet werden.
    (*ibid.*, Bd. 3 S. 85.)
16. Synthetischer Beweis der Incommensurabilität zweier Geraden, die sich wie $\sqrt{3}:1$ verhalten.
    (*ibid.*, Bd. 3 S. 440.)

17. Ueber die Auflösung der kubischen Gleichungen.
(*ibid.*, Bd. 4 S. 410.)

18. Arithmetische Sätze.
(*ibid.*, Bd. 13 S. 223.)

19. Elementare Entwickelung der Gauss'schen Methode, die Werthe bewegter Integrale zu bestimmen.
(Programm des Realgymnasiums zu Gotha, 1849.)

20. Tafeln für die Zerlegung der Zahlen in Biquadrate von 1—4100.
(Crelle's Journal, Bd. 46 S. 1.)

21. Tafeln für die hyperbolischen und cyklischen Integralfunctionen und die Integrallogarithmen.
(Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 5.)

22. Ueber die Anzahl der Linien, Ebenen und Punkte, welche durch Punkte, Linien und Ebenen im Raume bestimmt werden.
(*ibid.*, Bd. 5.)

23. Ueber das Wittstein'sche Prismatoid.
(Grunert's Archiv, Bd. 36 S. 18.)

24. Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier im Raume gelegener nicht paralleler Geraden.
(*ibid.*, Bd. 46 S. 501.)

25. Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Function in Factoren.
(*ibid.*, Bd. 46 S. 423.)

26. Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie.
(Programm des Gymnas. Ernestin. zu Gotha, 1869.)

27. Der Lehrsatz des Matthew Stewart.
(Grunert's Archiv, Bd. 50 S. 11.)

28. Bemerkungen über einen im Archiv besprochenen Lehrsatz von Fassbender.
(*ibid.*, Bd. 50 S. 108.)

29. Bemerkung zu einer vom Professor Ligowski im Archiv mitgetheilten Aufgabe.
(*ibid.*, Bd. 50 S. 118.)

30. Ueber die harmonischen Polarcurven dritter Ordnung.
(*ibid.*, Bd. 50 S. 432.)

31. Einfache Berechnung der Winkel eines ebenen oder sphärischen Dreiecks aus den Seiten der Figur.
(*ibid.*, Bd. 52 S. 371.)

III. Selbstständige Werke.

1. Productentafel, enthaltend die 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9fachen aller Zahlen von 1—100,000. Hamburg und Gotha, bei Fr. & Andr. Perthes. 1841. Hoch 4⁰.

2. Lehrgebäude der niederen Geometrie. Für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen. Jena 1844, bei Friedrich Frommann. 8⁰.
3. System der Arithmetik und Analysis. Für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen, sowie auch zum Selbststudium entworfen. 4 Bdchn. Jena 1856 u. 1857, bei Friedr. Mauke. 8⁰.
4. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch. Leipzig 1870, bei B. G. Teubner. 8⁰.
5. Tafel der Hill'schen Lambda-Functionen, ingleichen der Function $lg\,x \,.\, lg(1-x)$ für alle Werthe von $x = 0{,}000$ bis $x = 1{,}000$ auf 7 Decimalen.
6. Leitfaden für den geographischen Unterricht in den unteren Classen der Gymnasien und Realschulen. Gotha, bei Justus Perthes. 8⁰.

   1. Auflage 1847,
   2. „ 1854,
   3. „ 1857,
   4. „ 1861,
   5. „ 1868.
7. Historische Wandkarte, das Zeitalter der Reformation darstellend. (*ibid.*, 1849.)
8. Historischer Wandatlas nach Carl v. Spruner. 10 Wandkarten nebst Begleitworten. (*ibid.*)

   1. Auflage 1856,
   2. „ 1876.

Recensionen.

Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale, von Dr. LEO KÖNIGSBERGER. Leipzig 1878.

Das vorliegende Werk ist eine zusammenfassende Darstellung und theilweise weitere Ausführung der Untersuchungen, die der Verfasser in den letzten Jahren in Borchardt's Journal und in den mathematischen Annalen veröffentlicht hat, und soll, wie die Vorrede betont, als Grundlage für eine später zu erwartende Bearbeitung der hyperelliptischen Functionen, d. h. der durch Umkehrung der hyperelliptischen Integrale entstehenden Transcendenten dienen. Den Gegenstand der Betrachtung bilden daher ausschliesslich die in einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche darstellbaren Functionen, die als einzige Irrationalität die Quadratwurzel aus einem rationalen Ausdruck von beliebig hohem Grade enthalten, und Integrale solcher Functionen. Der Weg, den die Untersuchung einschlägt, beruht auf einer Verbindung der älteren algebraischen Methode mit den Riemann'schen Principien der allgemeinen Functionentheorie, soweit sie in dem Werke desselben Verfassers: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" behandelt sind. Da der Verfasser in dem von ihm herausgegebenen „Repertorium der Mathematik" ein ausführliches Referat über sein Werk gegeben hat, so können wir bezüglich einer genaueren Inhaltsangabe den Leser dorthin verweisen und uns auf die Hervorhebung einiger Hauptpunkte beschränken.

Nachdem in der ersten, einleitenden Vorlesung zunächst die Bedingungen für die Zahl und Ordnung der Unstetigkeiten der in der zweiblättrigen Fläche eindeutigen algebraischen Functionen abgeleitet und die Bildungsweise solcher Functionen aus gegebenen Unstetigkeiten gelehrt ist, beschäftigen sich die drei folgenden Vorlesungen mit den Integralen solcher Functionen. Diese werden zunächst in die drei Gattungen der allenthalben stetigen, der algebraisch unstetigen und der logarithmisch unstetigen eingetheilt und von letzteren der Satz ausgesprochen, dass die Summe der Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten verschwinden muss. Was jedoch die Begründung dieses Satzes anlangt, so scheint uns dieselbe nicht ganz stichhaltig zu sein; es erhellt z. B. nicht, warum nicht durch die gleiche Schlussweise gefolgert werden kann, dass jeder einzelne dieser Coefficienten verschwinden muss, wenn man die Unstetigkeitspunkte mit verschiedenen Begrenzungspunkten verbindet. Weit bündiger folgt der Satz aus der Bemerkung, dass jedes Integral $\int f(z, \sqrt{R(z)})\,dz$, in welchem f eine rationale Function von $z, \sqrt{R(z)}$ bedeutet, verschwindet, wenn es über die ganze Begrenzung der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche ausgedehnt wird, weil jeder Querschnitt zweimal in entgegengesetzter Richtung und mit demselben Werthe von f durchlaufen wird. Es wird dann ferner in der vierten Vorlesung ein System hinreichender Unstetigkeitsbedingungen aufgesucht, welches eine Function der in Rede stehenden Art vollständig definirt, und diese durch die einfachen Integrale der drei Gattungen dargestellt. Endlich wird in der vierten Vorlesung gezeigt, wie sich ein beliebiges hyperelliptisches Integral zerlegen lässt in eine aus den einfachsten Integralen der drei Gattungen und einer algebraisch-logarithmischen Function gebildeten Summe. Diese Entwickelung gründet sich auf eine Art von Partialbruchzerlegung und geht rechnend zu Werke. Etwas einfacher würde man wohl zum Ziele gelangen, wenn man sich auch hier der Riemann'schen Principien bedienen würde, indem man in dem Integral

$$\Omega = \int \left(F(z)' + \sum^{i} \frac{C_i}{z - z_i} + \sum_{0,2p-1}^{\nu} c_\nu \, z^{2p-\nu-1} \right) \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

zunächst die Constanten C_i so bestimmt, dass die logarithmischen Unstetigkeiten herausfallen, und hierauf die c_ν so, dass die Periodicitätsmoduln von Ω sämmtlich verschwinden. Die Bedingungen hierfür kann man so ausdrücken, dass, wenn $\varphi_\nu(z)$ eine beliebige ganze rationale Function von z vom Grade $r \leqq 2p-1$ ist, das über die ganze Begrenzung der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche genommene Integral

$$\int d\Omega \int \frac{\varphi_\nu(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

verschwinden muss. Die Functionen $\varphi_\nu(z)$ lassen sich so wählen, dass diese Gleichungen geradezu nach c_ν aufgelöst erscheinen. Es ist dann Ω eine algebraische Function, deren Ausdruck man mittelst der gleichen Principien durch Bildung des Begrenzungsintegrals

$$\int d\Omega \int \frac{dz}{(z-\xi)\sqrt{R(z)}}$$

erhält.

Die fünfte Vorlesung behandelt die Relationen, welche zwischen den Periodicitätsmoduln der verschiedenen, zu derselben Irrationalität gehörigen Integrale stattfinden, von denen die Legendre'sche Relation zwischen den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung das bekannteste Beispiel ist. Das Verfahren, welches zur Herleitung dieser Relationen dient, wurde zuerst von Riemann auf die Integrale erster Gattung angewandt und wurde später von Clebsch und Gordan auf allgemeinere Fragen ausgedehnt. Gruppirt man die Querschnitte der Riemann'schen Fläche in bekannter Weise in p Paare $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_p, b_p$ und bezeichnet mit w, w' irgend zwei zu derselben Fläche gehörige hyperelliptische Integrale mit den Periodicitätsmoduln

$$A_1, B_1;\ A_2, B_2;\ \ldots A_p, B_p;\quad A'_1, B'_1;\ A'_2, B'_2;\ \ldots A'_p, B'_p,$$

so erhält man durch Bestimmung des Integrals

$$\int w\, dw'$$

über die Begrenzung der Fläche einerseits und um die Unstetigkeitspunkte von w, $\frac{dw'}{dz}$ andererseits für die Summe

$$\sum^{i} (A_i B'_i - B_i A'_i)$$

einen nur von den Unstetigkeiten von w, w' abhängigen Ausdruck, welcher algebraisch ist, falls keines der beiden Integrale w, w' zur dritten Gattung gehört, andernfalls noch Integrale algebraischer Functionen enthält, welche zwischen den Punkten logarithmischer Unstetigkeit verlaufen. Für die Integrale dritter Gattung gelangt man auf diese Weise zu dem Satze von der Vertauschung von Argument und Parameter.

Wendet man das gleiche Verfahren auf die Integrale erster und zweiter Gattung an

$$J^{(\alpha)}_{(z)} = \int \frac{z^\alpha\, dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots 2p-1$$

mit den Periodicitätsmoduln $J^{(\alpha)}_{a_\nu}$, $J^{(\alpha)}_{b_\nu}$, so ergiebt sich ein System von Relationen zwischen diesen Periodicitätsmoduln, welches für die Theorie der hyperelliptischen Functionen von grosser Bedeutung ist und welches zuerst von Weierstrass in der Programmabhandlung des Braunsberger Gymnasiums vom Jahre 1849 aufgestellt wurde. Man erhält nämlich für die Summen

$$\sum^{\nu} (J^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - J^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu})$$

den Werth Null, wenn $\alpha + \beta < 2p - 1$ ist, sonst gewisse, nur von den Coefficienten von $R(z)$, also von den Verzweigungspunkten abhängige Ausdrücke, von denen die einfachsten beispielsweise lauten

$$\sum^{\nu} (J^{(p+\alpha)}_{a_\nu} J^{(p-\alpha-1)}_{b_\nu} - J^{(p+\alpha)}_{b_\nu} J^{(p-\alpha-1)}_{a_\nu}) = \frac{-8\pi i}{2\alpha+1}.*$$

* Die Vorzeichen in diesen Formeln entsprechen der Erklärung der Periodicitätsmoduln, wie sie Riemann giebt. Bei der davon etwas abweichenden Er-

Es wird nun ferner der Werth der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)}, & J_{a_1}^{(0)}, & \dots & J_{b_p}^{(0)}, & J_{a_p}^{(0)} \\ J_{b_1}^{(1)}, & J_{a_1}^{(1)}, & \dots & J_{b_p}^{(1)}, & J_{a_p}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J_{b_1}^{(2p-1)}, & J_{a_1}^{(2p-1)}, & \dots & J_{b_p}^{(2p-1)}, & J_{a_p}^{(2p-1)} \end{vmatrix}$$

untersucht und gleich

$$\frac{(-i)^p\, 2^{3p}\, \pi^p}{1.2.3\dots 2p-1}$$

gefunden.* Die hierdurch ausgedrückte Relation zwischen den Periodicitätsmoduln ist zuerst von Hädenkamp durch eine von Jacobi herrührende Verallgemeinerung der Transformation durch elliptische Coordinaten abgeleitet (Crelle's Journal Bd. 22)** und einen ähnlichen Weg schlägt Enneper ein (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 6. Jahrg.). Später hat Fuchs aus den Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln genügen, die Relation bewiesen (Borchardt's Journal Bd. 71). Der Verfasser zeigt, um die in Rede stehende Formel zu beweisen, zunächst, dass die Determinante D eine eindeutige Function der Verzweigungswerthe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2p+1}$ ist, die für kein Werthsystem der α verschwindet und die sonach constant sein muss. Der constante Werth ergiebt sich, wie in der erwähnten Abhandlung von Fuchs, durch Betrachtung eines speciellen Falles. Wir können indess gegen dies Beweisverfahren ein Bedenken nicht unterdrücken, welches darin besteht, dass beim Zusammenfallen zweier Verzweigungspunkte immer einige der Periodicitätsmoduln unendlich werden. Dass aber auch für diesen Fall D nicht verschwindet, müsste noch nachgewiesen werden.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle auf einen Beweis dieser Formel hinzuweisen, der nicht nur bei Weitem der einfachste sein dürfte,

---

klärungsweise des Verfassers würden dieselben nur unter der Voraussetzung richtig sein, dass die Aufeinanderfolge der positiven imaginären und reellen Axe dem gewöhnlichen Gebrauch, der in des Verfassers „Vorlesungen über elliptische Functionen“ ausdrücklich festgehalten ist, entgegengesetzt angenommen wird. Das Gleiche gilt von dem auf Ste. 33 bewiesenen Satze, dass $\sum^{\nu}(\alpha_\nu\delta_\nu - \beta_\nu\gamma_\nu) > 0$ ist.

* Der von dem Verfasser angegebene Ausdruck $\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}\, 2^{3p}\, \pi^p}{1.3\dots 2p-1}$ entspricht, falls unter $(-1)^{\frac{p}{2}}$ i^p verstanden wird, seiner Definition der Periodicitätsmoduln, aber nicht der von ihm angegebenen Form der Weierstrass'schen Relationen. Die genaue Vorzeichenbestimmung macht übrigens bei dem von dem Verfasser eingeschlagenen Wege noch Schwierigkeiten, da das Vorzeichen des Products $(\alpha-\alpha^2)(\alpha-\alpha^3)\dots(\alpha^{2p-1}-\alpha^{2p})$, in welchem α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{2p+1}=1$ ist, von der Wahl dieser primitiven Wurzel abhängt.

** Eine mit der Hädenkamp'schen ungefähr gleichzeitige Abhandlung von Catalan über denselben Gegenstand ist mir nicht zur Hand.

sondern zugleich zeigt — was nirgends bemerkt zu sein scheint.—, dass man es nicht mit einer neuen Relation zwischen den Periodicitätsmoduln, sondern mit einer einfachen algebraischen Folge aus den erwähnten Weierstrass'schen Formeln zu thun hat. Dieser Beweis beruht auf einem Determinantensatze, der auch bei anderen Gelegenheiten, z. B. in der Transformationstheorie der Thetafunctionen von Nutzen ist.

Wenn man eine Determinante von $4p^2$ vorläufig ganz beliebigen Elementen α, β

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}, & \beta_1^{(1)}, & \alpha_1^{(2)}, & \beta_1^{(2)}, & \dots & \alpha_1^{(p)}, & \beta_1^{(p)} \\ \alpha_2^{(1)}, & \beta_2^{(1)}, & \alpha_2^{(2)}, & \beta_2^{(2)}, & \dots & \alpha_2^{(p)}, & \beta_2^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2p}^{(1)}, & \beta_{2p}^{(1)}, & \alpha_{2p}^{(2)}, & \beta_{2p}^{(2)}, & \dots & \alpha_{2p}^{(p)}, & \beta_{2p}^{(p)} \end{vmatrix}$$

mit sich selbst multiplicirt, nachdem man die Vertikalreihen der α mit denen der β vertauscht und zugleich die Vorzeichen der ersteren umgekehrt hat, so ergiebt sich, wenn zur Abkürzung

$$\sum_{1,p}^{\nu} (\alpha_h^{(\nu)} \beta_k^{(\nu)} - \alpha_k^{(\nu)} \beta_h^{(\nu)}) = (h, k)$$

gesetzt wird, so dass $(h, h) = 0$, $(h, k) = -(k, h)$ wird,

$$\varDelta^2 = \begin{vmatrix} (1,1), & (1,2), & \dots & (1,2p) \\ (2,1), & (2,2), & \dots & (2,2p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2p,1), & (2p,2), & \dots & (2p,2p) \end{vmatrix}.$$

Die Determinante rechts ist aber nach einem bekannten Satze das Quadrat eines rational aus den (h, k) zusammengesetzten Ausdruckes, und wenn daher die Wurzel gezogen wird, so kann das Vorzeichen durch irgend eine specielle Annahme über die α, β bestimmt werden.

Wird nun insbesondere vorausgesetzt, dass die α, β den Bedingungen genügen

$$(h, k) = 0,$$

so lange $h + k < 2p + 1$ ist, so ergiebt sich sofort

$$\varDelta = \pm (1, 2p)(2, 2p-1) \dots (p, p+1),$$

und aus der speciellen Annahme, dass sämmtliche α, β mit Ausnahme von $\alpha_1^{(1)}$, $\beta_{2p}^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\beta_{2p-1}^{(2)}$, $\dots$ $\alpha_p^{(p)}$, $\beta_{p+1}^{(p)}$ gleich Null seien, ergiebt sich, dass in dieser Formel das positive Zeichen zu nehmen ist. Macht man sodann die Annahme

$$\alpha_\nu^{(i)} = J_{b_i}^{(\nu-1)}, \quad \beta_\nu^{(i)} = J_{a_i}^{(\nu-1)},$$

so erhält man mit Hilfe der oben angeführten Weierstrass'schen Formeln ohne Weiteres den Werth von D mit genauer Vorzeichenbestimmung.

Das Abel'sche Theorem bildet den Gegenstand der sechsten Vorlesung. Dieses Theorem besteht darin, dass sich eine Summe von gleichartigen Integralen, die sich nur durch verschiedene Werthe der oberen Grenzen unterscheiden, welche letzteren in einer gewissen algebraischen Abhängigkeit stehen, durch eine algebraische und logarithmische Function ausdrücken lässt. Diese Function reducirt sich auf eine Constante für die Integrale erster Gattung, auf eine algebraische Function für die Integrale zweiter Gattung. Nachdem diese Function für die einfachsten Integrale der drei Gattungen gefunden ist, lässt sich dieselbe nach den früher entwickelten Principien für das allgemeinste hyperelliptische Integral zusammensetzen. Eine Folge (oder andere Ausdrucksweise) dieses Theorems ist, dass sich eine Summe von beliebig vielen gleichartigen Integralen mit irgendwelchen Grenzen, die auch gruppenweise zusammenfallen können, ausdrücken lässt durch eine Summe von p solchen Integralen, deren obere Grenzen mittelst einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades gefunden werden.

Das Abel'sche Theorem ist hiernach eine algebraische Beziehung zwischen hyperelliptischen Integralen und Logarithmen, deren Argumente in algebraischer Abhängigkeit stehen. Diese Bemerkung leitet den Verfasser auf die Frage nach der allgemeinsten algebraischen Beziehung dieser Art. Dies Transformationsproblem der hyperelliptischen Integrale wird in der siebenten Vorlesung zunächst in seiner vollen Allgemeinheit aufgenommen. Nachdem sodann gezeigt ist, dass eine Relation der in Rede stehenden Art die hyperelliptischen Integrale nur linear und mit constanten Coefficienten enthalten kann, wird das Problem successive auf einfachere Aufgaben reducirt. Indem von den als unabhängige Variable vorausgesetzten oberen Grenzen alle bis auf eine als constant angenommen werden, gehen die oberen Grenzen der übrigen Integrale in algebraische Functionen von dieser einen über und es lässt sich das Problem so weit reduciren, dass die oberen Grenzen von Summen gleichartiger Integrale Wurzeln von algebraischen Gleichungen werden, deren Coefficienten rational aus der unabhängigen Variablen und der zugehörigen Irrationalität gebildet sind, während zugleich die zu jenen Summen gehörigen Irrationalitäten rational durch die entsprechenden oberen Grenzen und durch die unabhängige Variable mit ihrer Irrationalität ausgedrückt sind. Hiernach lassen sich die erwähnten Summen zusammenfassen zu einzelnen Integralen, deren obere Grenze die unabhängige Variable ist, die alle zu derselben Irrationalität gehören, und die Beurtheilung der Möglichkeit einer Relation von der vorausgesetzten Form hängt dann noch von der Frage ab, ob ein einzelnes hyperelliptisches Integral einer algebraisch-logarithmischen Function gleich sein kann. Inzwischen führt die genaue Untersuchung der charakterisirten Abhängigkeit der oberen Grenzen und Irrationalitäten zur Formulirung des rationalen Transformationsproblems, bei dem es sich darum handelt, p Summen von je p Integralen erster Gattung in p ähnliche Summen überzuführen durch algebraische Bestimmung der gesuchten oberen Grenzen. und Irrationalitäten aus den gegebenen, in bestimmter einfacher Form.

Am Schlusse dieser Vorlesung wird noch die Frage aufgeworfen, ob in einer algebraischen Relation zwischen hyperelliptischen Integralen trigonometrische oder elliptische Functionen vorkommen können, und verneinend beantwortet.

In der achten Vorlesung werden sodann die Bedingungen aufgesucht, unter denen sich ein hyperelliptisches Integral auf eine algebraische oder logarithmische Function reduciren lässt. Für die Reducirbarkeit auf algebraische Functionen ergeben sich die Bedingungen sehr einfach aus der Zerlegung des Integrals in die Summe von Normalintegralen. Die Frage nach der Reducirbarkeit auf Logarithmen wird auf einem umständlichen Wege beantwortet, gegen den wir zunächst den Einwand erheben müssen, dass das auf Seite 136 aufgestellte zweite Gleichungssystem nothwendig identisch sein muss, also zur Bestimmung von Constanten A durch die Constanten C nicht mehr dienen kann. Dass gleichwohl das Endergebniss nicht falsch ist, beruht darauf, dass die Functionen

$$\frac{P_{k+1} - Q_{k+1}\sqrt{R(z)}}{P_{k+1} - Q_{k+1}\sqrt{Rz}}, \ldots$$

sich auf Constanten reduciren. Es lässt sich übrigens die ganze Frage wesentlich kürzer erledigen, wie folgt: Da sich algebraische Unstetigkeiten gegen logarithmische nicht fortheben können, so kommt die ganze Frage darauf zurück, unter welchen Bedingungen man der Gleichung genügen kann

$$\sum_{1,n}^{i} C_i \int \frac{\sqrt{R(z_i)}\,dz}{(z-z_i)\sqrt{R(z)}} = \sum_{1,m}^{i} A_i . \log \Phi_i + \Omega,$$

worin $\Phi_i = \dfrac{p_i - q_i\sqrt{R(z)}}{p_i + q_i\sqrt{Rz}}$, p_i, q_i ganze rationale Functionen von z und Ω ein Integral erster Gattung. Wenn nun zwischen den Constanten C_i lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, so kann man statt derselben eine geringere Anzahl Constanten ω_i einführen, die nicht mehr in einer solchen Abhängigkeit stehen, indem man setzt

$$C_\varrho = \sum_{1,\nu}^{i} m_i^{(\varrho)}\,\omega_i, \quad \nu \gtreqless n,$$

worin die $m_i^{(\varrho)}$ ganze Zahlen bedeuten. Die Gleichsetzung der Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten in obiger Gleichung ergiebt dann, wenn $\mu_i^{(\varrho)}$ gleichfalls ganze Zahlen bedeuten,

$$\sum_{1,\nu}^{i} m_i^{(\varrho)}\,\omega_i = \sum_{1,m}^{i} \mu_i^{(\varrho)} A_i, \quad \varrho = 1, 2, \ldots n.$$

Genügen diese Gleichungen nicht, um die A_i linear durch die ω_i auszudrücken, so füge man die nöthige Anzahl willkürlicher Gleichungen von der Form

$$\eta_\varrho = \sum_{1,m}^{i} \mu_i^{(\varrho)} A_i, \quad (\varrho > n)$$

hinzu, welche so gewählt sind, dass zwischen den η und ω keine lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten besteht, was stets möglich ist. Dann ergiebt sich

$$DA_i = \sum_{1,\nu}^{h} n_h^{(i)} \omega_h + \sum^{h} \nu_h^{(i)} \eta_h,$$

worin D, $n_h^{(i)}$, $\nu_h^{(i)}$ ganze Zahlen sind, die den Bedingungen genügen

$$D m_h^{(\varrho)} = \sum_{1,m}^{i} n_h^{(i)} \mu_i^{(\varrho)}, \quad 0 = \sum_{1,m}^{i} \nu_h^{(i)} \mu_i^{(\varrho)}.$$

Darnach geht die obige Gleichung über in

$$D \sum_{1,\nu}^{h} \omega_h \sum_{1,n}^{i} m_h^{(i)} \int \frac{\sqrt{R(z_i)}\, dz}{(z - z_i)\sqrt{R(z)}} = \sum_{1,\nu}^{h} \omega_h \sum^{i} n_h^{(i)} \log \Phi_i$$
$$+ \sum_{1,\nu}^{h} \eta_h \sum^{i} \nu_h^{(i)} \log \Phi_i + \Omega$$

Hierbei sind nun die Coefficienten der η_h constant, da sie nicht unendlich werden, und die Factoren der einzelnen ω_h müssen, von Integralen erster Gattung abgesehen, auf beiden Seiten einander gleich sein.

Damit ist die Frage auf die einfachere reducirt: Wann lässt sich eine Gleichung von der Form

$$\sum_{1\,n}^{i} m_i \int \frac{\sqrt{R(z_i)}\, dz}{(z - z_i)\sqrt{R(z)}} = \log \frac{P - Q\sqrt{R(z)}}{P + Q\sqrt{R(z)}} + \Omega$$

erfüllen, in der die m_i ganze Zahlen sind? Die Antwort darauf ist, dass die Punkte z_i solche sein müssen, in denen eine Function von der Form $\frac{P - Q\sqrt{R(z)}}{P + Q\sqrt{R(z)}}$ Null und unendlich in der Ordnung m_i werden kann. Die Constanten dieser Function ergeben sich dann durch lineare Gleichungen und um Ω zu finden, hat man diese Gleichung nur zu differentiiren, wodurch sich für $\sqrt{R(z)}\frac{d\Omega}{dz}$ eine ganze rationale Function von z vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade ergiebt. Die Einführung von Normalintegralen, sowie überhaupt transcendenter Constanten erscheint hiernach auch als überflüssig.

Den Schluss des Werkes bildet die Anwendung der Transformationstheorie auf die Multiplication und Division der hyperelliptischen Integrale. Die Multiplication erledigt sich, indem sie als specieller Fall des

Abel'schen Theorems aufgefasst wird. Die Umkehrung der Aufgabe der Multiplication führt auf das Theilungsproblem, dessen Lösung von einer algebraischen Gleichung vom Grade n^{2p} abhängt, wenn n die Zahl ist, durch welche getheilt werden soll. Der Hauptsatz über diese Theilungsgleichung ist bekannt und von Clebsch und Gordan für die allgemeinsten algebraischen Integrale bewiesen. Er besteht darin, dass dieselbe durch Wurzelgrössen auflösbar ist, wenn man einen speciellen Fall der Theilungsaufgabe, die Theilung der Perioden, als gelöst ansieht. Die Lösung der Aufgabe für diesen Fall hängt, falls n eine Primzahl ist, von einer Gleichung des $\left(\frac{n^{2p}-1}{n-1}\right)^{\text{ten}}$ Grades ab. Damit sind die Hauptpunkte der Theorie der hyperelliptischen Integrale, so weit sie sich ohne Zuziehung der Umkehrungsfunctionen bequem behandeln lassen, erledigt und die zusammenfassende eingehende Darstellung dieser interessanten Theorie wäre gewiss ein dankenswerthes Unternehmen.

Referent bedauert aber, durch eingehendes Studium des vorliegenden Werkes nicht die Ueberzeugung gewonnen zu haben, dass demselben diejenige allseitige und sorgfältige Durcharbeitung des Gegenstandes zu Grunde liegt, welche für einen solchen Zweck erforderlich wäre. Abgesehen von den im Vorstehenden namhaft gemachten sachlichen Ungenauigkeiten wird durch die Art der Darstellung und die Wahl der Bezeichnung der Ueberblick ausserordentlich erschwert. So werden, um Eines hervorzuheben, auf Str. 69 die Zeichen $J_{(z)}^{(\beta)}$, $E_{(z)}^{(\alpha)}$ für $\int \frac{z^{p-\beta-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$, $\int \frac{z^{p+\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ gebraucht, während auf der folgenden Seite dieselben Zeichen die Bedeutung haben $\int \frac{z^{\beta}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \int \frac{z^{\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$, $\beta = 0, 1, 2, \ldots p-1$, $\alpha = p, p+1, \ldots 2p-1$; wäre für das Integral $\int \frac{z^{\beta}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ ein Zeichen durchweg festgehalten, etwa $J_{(z)}^{(\beta)}$, so würden sich auch die Formeln dieses Abschnittes nicht unwesentlich vereinfacht haben. Ebenso würde bei einer umsichtigeren Wahl der Bezeichnung der Abschnitt über das allgemeine Transformationsproblem sich weit übersichtlicher gestaltet haben. Auch die Anordnung des Stoffes scheint nicht überall ganz sachgemäss. So hätten die Betrachtungen Ste. 140 flg., wenn sie überhaupt noch nöthig waren, besser ihre Stelle in der fünften Vorlesung gefunden, wo von der Normirung der Integrale dritter Gattung die Rede ist, während die auf Ste. 146 flg. stehende Untersuchung sich passender an den Abschnitt über das Abel'sche Theorem angeschlossen hätte.

Königsberg, im December 1878. H. Weber.

Die Parallelcurve der Ellipse, als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems. Von Dr. K. Schwering. Schulprogramm Brilon 1878, Nr. 289.

Ein besonders fruchtbarer Begriff der neueren Geometrie ist der der Reciprocität. Indem man eine algebraische Curve abwechselnd als Ordnungs- und als Classengebilde auffasst, ergiebt sich aus jeder durch die erste Betrachtung gewonnenen Singularität im Allgemeinen eine neue für die zweite Betrachtung. So sehr aber jener Begriff auch geeignet ist, den Weg zu neuen Eigenschaften einer Curve zu zeigen, so sehr bedarf er doch der Ergänzung durch die Rechnung, weil er eben nur über das Vorhandensein gewisser Eigenschaften Auskunft giebt, nicht aber über die durch solche Eigenschaften bedingte besondere Gestalt des Gebildes. Die Ausführung solcher auf reciproke Betrachtungen gegründeten Rechnungen ist jedoch bis jetzt oft mit grossen Unbequemlichkeiten verbunden, die in der Beschaffenheit des zu Grunde gelegten Coordinatensystems wurzeln. Wir besitzen zwar homogene Punkt- und Liniencoordinaten; aber ob im gegebenen Falle die Untersuchung mit diesen Coordinaten sich einfacher gestaltet, als mit anderen, hängt davon ab, ob sich ein Fundamentaldreieck bestimmen lässt, mit welchem Entstehung und Grundeigenschaften des geometrischen Gebildes in einfacher Weise zusammenhängen. Man wird also in vielen Fällen die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten vorziehen, um so mehr, da die letzteren mehr als die ersteren zur Aufsuchung der metrischen Eigenschaften sich eignen. Dann aber zeigte sich bisher, wenn man zu reciproken Betrachtungen übergehen wollte, der Uebelstand, dass es an einem dem Cartesischen reciproken System fehlte. Und es kann doch vorkommen, dass ein Gebilde seiner Entstehung nach sich mehr zur Darstellung durch Linien- als durch Punktcoordinaten eignet, mehr zur Darstellung durch gewöhnliche, als durch homogene Coordinaten. Es hat denn auch an Versuchen nicht gefehlt, Systeme von Liniencoordinaten aufzustellen, die sich den rechtwinkligen Cartesischen* oder sogar den Polarcoordinaten** gegenüberstellen sollten. Als durchaus zweckentsprechend kann jedoch nur das von Herrn Schwering (diese Zeitschrift XXI, 278) aufgestellte bezeichnet werden, weil dasselbe, wie Referent (*l. c.* XXIII, 195) nachgewiesen hat, in der That dem Cartesischen vollständig reciprok ist. — In der obengenannten Abhandlung giebt nun Herr Schwering ein recht augenfälliges Beispiel von dem Nutzen seines Coordinatensystems.

---

* Ausführlich behandelt sind solche Coordinaten in Weissenborn's „Grundzüge der anal. Geom. d. Ebene". (S. die Vorrede S. IV.)

** Weinmeister, „Das System der polaren Liniencoord. i. d. Ebene", diese Zeitschr. XXI, 301.

In der Abhandlung: „Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen" (Crelle's Journ. LXIV, 210) hat Clebsch als Beispiel einer Curve vom Geschlecht 1 die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten untersucht (*l. c.* 250) unter Anwendung homogener Coordinaten, welche nachher durch elliptische Functionen ausgedrückt werden. Diese letzteren Ausdrücke sind indess schon ziemlich complicirt, und bei der Bestimmung der Singularitäten ergeben sich so umständliche Formeln, dass das geometrische Element der Untersuchung fast ganz gegen das analytische zurücktreten muss. Herr Schwering behandelt die entsprechende Curve vierter Classe mit zwei Doppeltangenten, geht aber von einer rein geometrischen Definition derselben aus, indem er die Parallelcurve der Ellipse untersucht und zeigt, dass dieselbe die ebenerwähnte Eigenschaft besitzt. Der Vortheil dieses Ausgangspunktes liegt auf der Hand. Die zu untersuchende Curve steht mit einem bekannten Gebilde in Zusammenhang; und dadurch erhält die Untersuchung von vornherein den Charakter einer grösseren geometrischen Anschaulichkeit. Dieser Ausgangspunkt erfordert aber auch neue Mittel der Rechnung. Da die Tangenten der Curve zu denen der Ellipse parallel in constantem Abstande sein sollen, so weist diese Definition von vornherein darauf hin, beide Curven als Tangentengebilde aufzufassen. Und hier bewährt gerade das neue Coordinatensystem seine vereinfachende Kraft. Denn die Gleichung der Ellipse in demselben ist

$$1)\qquad u_1 v_1 = a^2.$$

Und man erhält, wenn u und v die Coordinaten der Parallelcurve sind, sehr leicht die Gleichungen

$$2)\qquad u - u_1 = v - v_1 = \frac{k}{2b}\sqrt{4b^2 + (u-v)^2},$$

worin k der constante Abstand der beiderseitigen Tangenten ist, während a und b dieselbe Bedeutung haben, wie in der gewöhnlichen Gleichung der Ellipse. Durch Elimination von u_1 und v_1 zwischen den Gleichungen 1) und 2) ergiebt sich die Gleichung der Parallelcurve.

Es werden darauf die gewöhnlichen und die Liniencoordinaten eines Curvenpunktes durch elliptische Functionen ausgedrückt. Diese Ausdrücke sind zwar nicht, wie bei Clebsch (Formeln 70, S. 255) rational, besitzen aber den Vorzug weit grösserer Einfachheit. Der Verfasser erklärt auch die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens. Uebrigens bewähren die von ihm gefundenen Formeln ihre Brauchbarkeit sogleich dadurch, dass sich an der Hand derselben eine ziemlich ausführliche Discussion des Verlaufs der Curve geben lässt. Unter den Singularitäten werden die Doppeltangenten zuerst rein geometrisch, dann ihre Coordinaten sehr leicht analytisch bestimmt, und festgestellt, dass die Ausdrücke der Coordinaten für beide Parameter einer Doppeltangente dieselben sind. Die weitere geometrische Untersuchung wird vorbereitet durch die sinnreiche Ableitung einer Beziehung zwischen den vier Argumenten der aus einem Punkte an die Curve gehenden Tangenten. Durch Specialisirung dieser Beziehung wird ohne Mühe die Frage nach der Reellität und Lage der Doppelpunkte beantwortet. Vergleicht man diese Darstellung mit den beiden von Clebsch gegebenen Methoden zur Bestimmung der Doppeltangenten, so tritt der doppelte Vorzug der ersteren hervor, dass ihre Formeln, weil sie ausser den sparsam vorkommenden σ-Quotienten nur Argumente enthalten, einfacher sind, als die der letzteren, sodann, dass die abgeleitete Formel nicht nur zur Ermittelung der Doppelpunkte, sondern auch der übrigen Singularitäten brauchbar ist. Zur Bestimmung der Wendetangenten giebt Clebsch nur eine Gleichung zwischen den Coordinaten der Wendepunkte, mit der Bemerkung, dass dieselbe durch Einführung einer einzigen elliptischen Function den 12. Grad erhalte. Gleich einfach wie die Doppelpunkte findet Herr Schwering auch die Rückkehrpunkte der Curve, indem wiederum die Deutung der Formeln durch einfache geometrische Betrachtungen unterstützt wird. Am Schluss wird noch die Frage nach den gemeinsamen Tangenten und Brennpunkten der beiden Curven beantwortet und die Gleichung der Parallelcurve in elliptischen Coordinaten angegeben.

Die Bedeutung der vorliegenden Arbeit ist demnach eine doppelte. Einmal eröffnet sie durch Einführung des neuen Liniencoordinatensystems die Aussicht, dass man künftig mit Hilfe desselben Untersuchungen über Tangentialgebilde bequemer als bisher wird anstellen können. Sodann aber — und dieser Umstand scheint von noch grösserer Wichtigkeit zu sein — zeigt sie, wie die geschickte Benutzung der Argumente elliptischer Functionen zur Aufstellung von Formeln führt, welche sich viel leichter geometrisch verwerthen lassen, als die gewöhnlich benutzten. Bei den grossen Vortheilen aber, welche die Geometrie aus der Verwendung jener Functionen bisher schon gezogen hat, ist jeder Fortschritt in der Vereinfachung dieser Methoden mit grösstem Interesse zu begrüssen. Es ist ein Verdienst des Verfassers unserer Abhandlung, auch in dieser Richtung einen wesentlichen Schritt gethan zn haben.

Waren, September 1878. V. SCHLEGEL.

Handbuch der elektrischen Telegraphie. Unter Mitwirkung mehrerer Fachmänner herausgegeben von Dr. K. E. ZETZSCHE, Professor der Telegraphie am Polytechnikum zu Dresden. Zweiter Band: Die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Beziehungen zur Telegraphie. 8° mit 267 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer Tafel in Lichtdruck. 1878. Berlin, Julius Springer. Preis 14 Mark.

Im vergangenen Jahre hatten wir Gelegenheit, den ersten Band des Werkes zu besprechen; heute liegt uns der zweite, von Dr. O. Frölich (Elektriker bei Siemens & Halske) bearbeitete Theil vollständig vor. Gleichwie der erste Band des Handbuches, so bildet auch dieser ein für sich abgeschlossenes Ganze.

Eine populär gehaltene und doch gründliche Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus zu schreiben, kann, wie der Herr Verfasser in der Vorrede betont, als keine leichte Aufgabe betrachtet werden; es handelt sich hier darum, dem Techniker alles Das zu bieten, was er sonst aus vereinzelten Abhandlungen zusammensuchen müsste. Eine weitere Frage ist die, wie weit man mit der Theorie gehen dürfe, ohne einem grössern Theile der Leser unverständlich zu werden. Dass von einer Wiedergabe der Potentialtheorie in einem Werke wie dem vorliegenden nicht die Rede sein kann, ist selbstverständlich; dagegen scheint es uns, als hätte der Herr Verfasser in der Anwendung der Mathematik einen Schritt weiter gehen dürfen. Die Einschränkung auf die Mittel der Elementarmathematik ist meist der Allgemeinheit der Resultate, sowie dem Ueberblicke ihres Zusammenhanges mehr oder weniger abträglich. Wer sich heutzutage dem Studium der elektrischen Technik widmet, soll doch mit den Elementen der Differential- und Integralrechnung vertraut sein und mit den Anfangsgründen schon lässt sich in unserem Fache Vieles erreichen.

Die ersten Capitel des Buches handeln von der Reibungselektricität; wir finden hier die Fundamentalversuche, die gewöhnlichen und die Influenz-Elektrisirmaschinen u. A. m. Schon hier wird der für die moderne Telegraphentechnik so wichtige Begriff der Capacität erläutert; der Ausdruck

$$C = \frac{i 2 \pi l}{\log nat \frac{R}{r}}$$

(S. 26 unten) bedeutet indessen weniger die Capacität im modernen Sinne, als vielmehr das specifische Vertheilungsvermögen nach Siemens. Definirt man elektrische Capacität eines Leiters oder Condensators als $C = \frac{Q}{e}$, so ergiebt die Rechnung für einen cylindrischen Condensator, ein Kabel

$$C = \frac{1}{2} \frac{i . l}{\log nat \frac{R}{r}}.$$

Diese Formel rührt von Thomson her (1852). In gleicher Weise wäre zu setzen

$$\text{statt } C = \frac{if}{d}: \quad C = \frac{if}{4 \pi d}.$$

Die Lehre vom Galvanismus wird durch die Ohm'schen Gefälle eingeleitet; es hat diese Art der Darstellung den Vortheil, dass die Vorgänge alle graphisch dargestellt werden können. Die Ohm'schen und Kirchhoff'schen Gesetze sind ziemlich ausführlich behandelt, was nur begrüsst werden kann. Es folgen dann die verschiedenen Haupttypen galvanischer Elemente mit numerischen Angaben ihrer elektromotorischen Kräfte. Bei der Lehre von der Leitungsfähigkeit finden wir sehr brauchbare Tabellen zur Berechnung des Widerstandes von Drähten und Flüssigkeitssäulen. Ein grösserer Raum ist der Besprechung der Wärmewirkungen des galvanischen Stromes gewidmet; da gerade jetzt die elektrische Beleuchtung an der Tagesordnung ist, so dürften diese Paragraphen besonderes Interesse bieten. Puncto Lichtregulatoren hat sich der Herr Verfasser auf die Beschreibung der Siemens'schen Lampe (Construction von Hefner-Alteneck) beschränkt. Wir hatten vor zwei Jahren Gelegenheit, diesen sinnreichen und doch so einfachen Apparat im Etablissement der Herren Siemens & Halske in Thätigkeit zu sehen, und sind überzeugt, dass derselbe in den meisten Fällen den Vorzug vor Foucault's complicirtem Arrangement verdient. Die mechanischen Fernewirkungen des Stromes sind sehr ausführlich behandelt, fast zu ausführlich. Das Gleiche lässt sich auch von der Lehre vom Magnetismus und Elektromagnetismus sagen; doch ist es hier geboten, auf den Grundgesetzen lange zu verweilen. Für die Frage der elektrischen Beleuchtung bietet die ausführliche Beschreibung der magneto-elektrischen Maschinen besonderes Interesse. Es mag an dieser Stelle rühmend hervorgehoben werden, dass sich das Werk im Allgemeinen durch einen durchaus originellen Ton auszeichnet und dass der Ideengang des Herrn Verfassers ein ganz selbstständiger ist.

Es folgt nun ein äusserst wichtiges Capitel: „Die elektrischen Erscheinungen in Kabeln.“ Was im Anfange unserer Besprechung in Bezug auf das Sammeln des Materials gesagt wurde, hat an dieser Stelle seine vollste Bedeutung. Wohl wird gerade über diesen Gegenstand sehr viel geschrieben, allein die betreffenden Abhandlungen finden sich in deutschen, französischen, englischen Zeitschriften, die man doch nicht immer zur Hand hat, zerstreut. Der Herr Verfasser hat diesen wichtigen Abschnitt seines Werkes mit besonderer Vorliebe bearbeitet; die Beigabe von trefflichen graphischen Darstellungen (Spannungscurven) erleichtert das Verständniss ungemein; aber gerade hier liesse sich die Deutlichkeit der Darstellung durch Anwendung der Differentialrechnung erhöhen. Die Anfertigung der Condensatoren ist nur ganz kurz besprochen; die Art und Weise ihrer Adjustirung ist nicht angegeben. Die Curve des ansteigenden Stromes wird durch eine vortrefflich in Lichtdruck ausgeführte Tafel, welche die von Siemens & Halske an den neuen deutschen Erdkabeln angestellten Versuche veranschaulicht, erläutert. Den Schluss dieses Abschnittes bilden einige Notizen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität.

Unter dem Titel „Anhang“ umfassen die letzten Bogen des Bandes die elektrischen Messungen, d. i. die Messinstrumente, die Messmethoden, das absolute Maasssystem, Zahlen und Tabellen.

Nach einer kurzen Theorie der Galvanometer finden wir hier Batterieprüfer, Tangenten- und Sinus-Boussole und Spiegelgalvanometer beschrieben, und zwar speciell die Anordnungen, welche Siemens & Halske den betreffenden Instrumenten gegeben haben. Es wurde a. O. dem Herrn Verfasser der Vorwurf gemacht, er sei stets bemüht, die Constructionen dieser Firma in den Vordergrund zu stellen; diesem Tadel vermögen wir uns nun nicht anzuschliessen. Dass Herr Dr. Frölich mit Vorliebe diejenigen Apparate beschreibt, welche er durch tägliche Handhabung genau kennt, ist ganz selbstverständlich; man schlage irgend ein französisches oder englisches Werk auf und man wird finden, dass auch dort die Erzeugnisse des Vaterlandes vorzüglich berücksichtigt werden. Neu waren uns hier das transportable und das astatische Spiegelgalvanometer. Ersteres zeichnet sich durch grosse Handlichkeit aus, indem das ganze Magnetsystem in einem beweglichen Kupferstück enthalten ist. Aehnliche Instrumente hatte auch die französische Telegraphenverwaltung 1878 in Paris ausgestellt; es werden dieselben dort theils zum Kabelsprechen, theils zur Herstellung des Gleichgewichts bei Ailhaud's Hughes-Gegensprecher benutzt. Das astatische Spiegelgalvanometer besitzt zwei Glockenmagnete in zwei übereinander liegenden Rollen, bei dieser Anordnung wird die höchste Empfindlichkeit erzielt. Neu sind ferner der Russschreiber und das Torsions-Dynamometer. Ersterer, nach dem Princip des aperiodischen Submarine-Relais construirt, diente bei den obenerwähnten Versuchen an den deutschen Erdkabeln; letzteres wird von Siemens & Halske zur Messung der starken Ströme der dynamo-elektrischen Maschinen benutzt. Es folgt nun noch eine ausführliche Beschreibung des Thomson'schen Quadranten-Elektrometers, sowie einige Notizen über die Anfertigung der Widerstandsscalen.

Die Ausführung der Messungen ist etwas kurz behandelt. Das Gleiche lässt sich auch von der Besprechung der Fehlerbestimmungen sagen; vielleicht beabsichtigt der Herr Verfasser, in Band 3 des Handbuches näher auf diesen Gegenstand einzugehen.

Den Schluss des Werkes bilden die Grundzüge des absoluten Maasssystems; man kann nicht verlangen, dass in einer populären Lehre von der Elektricität dieses Tractandum ausführlich zu behandeln sei; um einen oberflächlichen Begriff von der Sache zu erhalten, genügt das Gesagte. Es haben sich hier einige Druckfehler eingeschlichen, die indessen so in die Augen springen, dass es uns unnöthig erscheint, dieselben namhaft zu machen.

Die Ausstattung des Werkes ist eine des werthvollen Inhalts durchaus würdige.

Es sei auch dieser Band den Fachgenossen warm empfohlen!

Zürich, 4. Januar 1879. Dr. A. Tobler.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von Dr. Oscar Schloemilch, geh. Schulrath im königl. sächs. Cultusministerium. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 3. Auflage. Leipzig 1878, Verlag von B. G. Teubner. VII, 308 S.

Wenn im Allgemeinen es kaum als passend erscheinen dürfte, dass der Leiter einer Abtheilung einer wissenschaftlichen Zeitschrift ein Werk aus der Feder des Leiters einer andern Abtheilung derselben Zeitschrift der Besprechung unterwerfe, weil eine durch Jahre fortgesetzte Collegialität die Unbefangenheit des Urtheils zu trüben geeignet sein könnte, so erleidet diese Regel eine Ausnahme, wo es sich um wiederholt erscheinende Schriften handelt, um solche, deren günstiges Urtheil das Publikum schon gesprochen hat, indem es eine zweite, eine dritte Auflage forderte. In diesem Falle hat nämlich meistens die Kritik einer blossen Ankündigung Platz zu machen, es sei denn, dass man mit dem allgemeinen Urtheil sich nicht einverstanden erklären wollte, und beabsichtigte, unter genauer Begründung gegen Verfasser und Leser gleichzeitig vorzugehen. Wir befinden uns heute in dem angenehmeren und bequemeren Falle, das Recht in Anspruch zu nehmen, nur kurz anzuzeigen, dass eine dritte Auflage des allgemein geschätzten und vielfach benutzten Uebungsbuches zur Differentialrechnung von dem Leiter der dogmatischen Abtheilung dieser Zeitschrift die Presse verlassen hat. Gegen die früheren Auflagen sind, wie das Vorwort bemerkt, namentlich in der Einleitung, welche mit Grenzwerthen von Functionen es zu thun hat, Zusätze hinzugetreten. Diesmal hat der Verfasser nämlich auch fünf Aufgaben von Grenzwerthen von Functionen zweier Veränderlichen behandelt und gezeigt, welche Schwierigkeiten bei derartigen Aufgaben der Beachtung unterliegen, wie es insbesondere keineswegs gleichgiltig für den erscheinenden Grenzwerth ist, ob zuerst die eine und dann die andere Variable ihrer Grenze sich nähere, oder ob die entgegengesetzte Reihenfolge stattfindet, oder endlich ob beide gleichzeitig zur Grenze gelangen, indem sie als Vielfache einer und derselben dritten Veränderlichen mit constanten Coefficienten erscheinen. Für spätere Auflagen möchten wir an den Verfasser die Bitte richten, in dem Capitel IV, der Discussion ebener Curven, doch auch die vielfachen Punkte, sowie die isolirten Punkte der Curven zu berücksichtigen, als Singularitäten, welche keinem Schüler der höheren Analysis fremd sein dürfen.

Cantor.

Bibliographie
vom 1. Februar bis 31. März 1879.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1878, 4. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 78. Bd., II. Abth., 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. 10 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. von Grunert, fortges. von R. Hoppe. 63. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. 10. Jahrg., 1879, 1. Heft. Leipzig. Teubner. pro compl. 10 Mk. 80 Pf.

Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgeg. v. W. Jordan. 8. Bd., 1879. 1. Heft. Stuttgart, Wittwer. pro compl. 9 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 13. Jahrg., 3. u 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie, redig. v. J. Hann. 14. Bd., 1879, 1. Heft. Wien, Braumüller. 12 Mk.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 7. Jahrg., 1879, 1. Heft. Berlin, Mittler. pro compl. 3 Mk.

Nautisches Jahrbuch für 1881, redig. v. Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1878, herausgeg. v. J. v. Lamont. München, Franz. 1 Mk.

Annuario marittimo per l'anno 1879. Triest, literar.-artist. Anstalt. 6 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cohen, H., Platons Ideenlehre und die Mathematik. Marburg, Elwert. 1 Mk. 20 Pf.

Poggendorff, C., Geschichte der Physik. 2. u. 3. Lief. (Schluss.) Leipzig, Barth. 11 Mk. 20 Pf.

Günther, S., Studien zur Geschichte d. mathemat. u. physikal. Geographie. 6. (letztes) Heft: Geschichte d. loxodromischen Curve. Halle, Nebert. 2 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Dirichlet, Lej., Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. v. R. Dedekind. 3. Aufl. 1. Abthlg. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

Borchardt, W., Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. (Akad.) Berlin, Dümmler. 3 Mk.

Hoesch, A., Untersuchungen über die Π-Function von Gauss und verwandte Functionen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Meyer, G., Zur Theorie der quadratischen und kubischen Reste. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Pictet, R. *et* G. Cellérier, *Méthode générale d'intégration d'une fonction numérique quelconque.* Basel, Georg. 5 Mk.

Michelis, F., Ist die Annahme eines Raumes von mehr als drei Dimensionen wissenschaftlich berechtigt? Freiburg i. B., Wagner. 1 Mk.

Krebs, F., Beiträge zur Elementargeometrie. Winterthur, Bleuler-Hausherr. 1 Mk. 20 Pf.

Bockwoldt, G., Ueber die Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaass, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

Kantor, S., Ueber den Zusammenhang von *n* beliebigen Geraden in der Ebene. Ueber das vollständige Fünfseit. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Heilermann, H. und J. Diekmann, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 2. Thl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.

Struve, K., Elemente der Mathematik. 3 Theile. Berlin, Wiegandt, Hempel & Parey. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

Spottiswoode, W., Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk. 20 Pf.

Lockyer, N., Astronomie. Deutsch v. A. Winnecke. 2. Aufl. Strassburg i. E., Trübner. 80 Pf.

Holetschek, J., Bahnbestimmung des 6. Cometen v. J. 1874. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Zelbr, K., Bahnbestimmung des 3. Cometen vom Jahre 1877. Ebendas. 20 Pf.

Pochhammer, L., Untersuchungen über das Gleichgewicht d. elastischen Stabes. Kiel, Univ.-Buchhdlg. 4 Mk.

Boltzmann, L., Ueber die Beziehung der Diffusionsphänomene zum zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Clausius, R., Die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl. 2. Bd.: Die mechanische Behandlung der Elektricität. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk. 40 Pf.

Handmann, R., Der Egger'sche elektromagn. Motor u. die elektromagn. Triebkraft im Allgem. Münster, Aschendorff. 2 Mk.

Margules, M., Bemerkung zu d. Stefan'schen Grundformeln der Elektrodynamik. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Kind, W., Zur Potentialfunction der elektromagnet. Kräfte. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Physik und Meteorologie.

Handl, A., Notiz über einen einf. Apparat zur Erhaltung eines constanten Gasdrucks. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Landolt, H., Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen u. die prakt. Anwend. desselben. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Sieben, G., Untersuchungen über die anomale Dispersion des Lichtes. Bonn, Behrendt. 80 Pf.

Ciamician, G., Ueber den Einfluss der Dichte und Temperatur auf die Spectra v. Dämpfen u. Gasen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 60 Pf.

Franz, R., Ueber die diamagnet. Polarität. Leipzig, Engelmann. 80 Pf.

Skalweit, W., Magnetische Beobachtungen in Memel. Königsberg i. Pr., Hartung. 4 Mk.

Stefan, J., Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. I. Optische Beobachtungsmethoden. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Danckelmann, A. v., Die meteorologischen Beobachtungen der Güssfeldtschen Loango-Expedition. Leipzig, Frohberg. 2 Mk.

Instruction f. d. Beobachter an d. meteorolog. Stationen im Königreich Bayern. München, Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Hann, J., Zur Meteorologie der Alpengipfel. (Ak.) Wien, Gerold. 60 Pf.

——, Bemerkungen und Vorschläge zu den gegenwärtigen Grundlagen der Wetterprognose. Wien, Faesy & Frick. 40 Pf.

Fritz, H., Die Beziehungen der Sonnenflecken zu den magnetischen und meteorolog. Erscheinungen. Haarlem, Erven Loosjes. 10 Mk. 30 Pf.

Budde, E., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Berlin, Wiegandt, Hempel & Parey. 6 Mk.

Pscheidl, W., Einleitung in die praktische Physik. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk. 20 Pf.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 8. Aufl., bearb. v. L. Pfaundler. 2. Bd. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1878.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Ueber äquivalente Abbildung. Schellhammer. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 69.

Analytische Geometrie der Ebene.

2. Ueber das dem Cartesischen reciproke Coordinatensystem. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 195. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 2.]
3. Sur la transformation harmonique linéaire. Mansion. N. corresp. math. IV, 257, 313.
4. Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven. Holst. Math. Annal. XI, 341, 575.
5. Ueber Tangenten und Normalen an Curvensystemen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 337.
6. Discussion de la courbe dont l'équation est $(R+x)(x^2+y^2)+(y-R)(y^2-x^2)=0$. Brocard. N. corresp. math. IV, 48.
7. Sur une courbe du sixième degré. Freson. N. corresp. math. IV, 155.
8. Lieu des points Q tels que les perpendiculaires abaissées de Q sur les trois côtés d'un triangle déterminent sur ces côtés 6 segments en involution. Van Aubel. N. corresp. math. IV, 261.
9. Trouver l'enveloppe de la base d'une cycloïde qui roule sur une droite. Mennesson. N. corresp. math. IV, 362.
10. Propriétés de l'hypocycloïde. Dubois. N. corresp. math. IV, 90. — Brocard ibid. 140.
11. Sur l'hypocycloïde. Brocard. N. corresp. math. IV, 139.
12. Courbes décrits au moyen d'un quadrilatère articulé. Mennesson. N. corresp. math. IV, 213, 215, 218, 219.
13. De la courbe représentée par $u = R\frac{\sin\omega}{\omega}$. Cesaro. N. corresp. math. IV, 283.
14. Trouver une courbe telle que la partie de la tangente comprise entre le point de contact et l'axe des abscisses soit égale à l'abscisse du point de contact Latars. N. corresp. math. IV, 330. — Catalan ibid. 332.
15. Doit on dire: la parabole $y^2 = px$ etc.? Brocard. N. corresp. math. IV, 242. — Catalan ibid. 245. — Mansion ibid. 360.

Vergl. Abbildung. Asymptoten. Biangularcoordinaten. Kegelschnitte. Kreis. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

16. Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen. Harnack. Math. Annal. XII, 47.
17. Sur la résolution des problèmes qui exigent des constructions dans l'espace avec la règle et le compas. De Tilly. N. corresp. math. IV, 272.
18. Ueber das gleichseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlsystem. Schoenflies. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 245.
19. Ueber ein specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen. Schoenflies. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 269.

Vergl. Mannigfaltigkeiten. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

20. Veränderte Form für die Berechnung der Hypothesen bei Bahnbestimmungen aus drei beobachteten Oertern. Fabritius. Astr. Nachr. XC, 217, 225.
21. Ueber eine strenge Methode zur Berechnung des Ortes von Polarsternen. Fabritius. Astr. Nachr. LXXXVII, 113, 129.
22. Die säculare Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes. Weiler. Astr. Nachr. XC, 369; XCI, 1, 17, 33. — Seeliger ibid. 193. — Hill ibid. 251.
23. On double-star calculations. Doberck. Astr. Nachr. XC, 57; XCI, 119.
24. Zu Encke's Methode der Berechnung der speciellen Störungen. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. LXXXIX, 273.
25. Ueber das Gesetz der numerischen Coefficienten, die bei den mechanischen Quadraturen auftreten. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. XCI, 329.
26. Ueber die Bessel'sche Correctionsformel für Mikrometerschrauben. Lamp. Astr. Nachr. LXXXVII, 359; LXXXVIII, 179.

Vergl. Geschichte der Mathematik 103, 107.

Asymptoten.

27. Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven. Stolz. Math. Annal. XI, 41.

Attraction.

28. Zu Riemann's Gravitationstheorie. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 261.
29. Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoids infolge der Anziehung eines weit entfernten Punktes. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 380.

Vergl. Potential.

Ausdehnungslehre.

30. Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. H. Grassmann. Mathem. Annal. XII, 222.
31. Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. H. Grassmann. Mathem. Annal. XII, 375.

Vergl. Geschichte der Mathematik 111. Imaginäres 129.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

32. Sur les nombres de Bernoulli. Catalan. N. corresp. math. IV, 119.

Bestimmte Integrale.

33. Ueber bestimmte Integrale. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 67.

Vergl. Elliptische Transcendenten. Ultraelliptische Transcendenten. Variationsrechnung.

Biangularcoordinaten.

34. Démonstration d'un théorème géométrique par coordonnées biangulaires. Lemoine. N. corresp. math. IV, 59.

Binomialcoefficienten.

35. Zur Lehre von den Binomialcoefficienten. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 263.

C.

Cubatur.

36. Einfachste Formel für das Volumen des Prismatoids. J. K. Becker. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 412.

D.

Determinanten.

37. Extraits de l'ouvrage de Mr. Günther sur les déterminants. Brocard. N. corresp. math. IV, 16.
38. Théorèmes arithmétiques reposant sur la théorie des déterminants et vice versa. Smith et Mansion (nouvellement redigé par Catalan). N. corresp. math. IV, 103. — Le Paige ibid. 176.
39. Sur une propriété des déterminants nuls. Falk. N. corresp. math. IV, 373.
40. Sur une transformation de déterminants. Le Paige. N. corresp. math. IV, 79.

Vergl. Function 78. Gleichungen 115.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

41. Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie. E. Lucas. N. corresp. math. IV, 85, 169, 200.

Differentialgleichungen.

42. Ueber die Integration totaler Differentialgleichungen. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XII, 123.
43. Sur l'équation de Riccati généralisée. Picard. N. corresp. math. IV, 184.
44. Intégrer l'équation $\frac{dy}{dx}+ay+bx^m y^n=0$. Latars. N. corresp. math. IV, 397.
45. Intégrer l'équation $\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}=\frac{1}{a}$. Mennesson. N. corresp. math. IV, 253.
46. Ueber lineare Differentialgleichungen. F. Klein. Mathem. Annal. XI, 115; XII, 167.
47. La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Brioschi. Mathem. Annal. XI, 401.
48. Théorème sur la réduction d'une équation linéaire d'ordre n à une autre équation linéaire d'ordre $n-1$. Mansion. N. corresp. math. IV, 154.
49. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, zweite Abhandlung. Lie. Mathem. Annal. XI, 464. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 78.]
50. On the theory of partial differential equations. Cayley. Mathem. Annal. XI, 194.
51. Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen. Baecklund. Mathem. Annal. XI, 199.
52. Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Baecklund. Mathem. Annal. XI, 412.
53. Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems. A. Mayer. Mathem. Annal. XII, 132.

Vergl. Invariantentheorie 131.

E.

Elektrodynamik.

54. Ueber die Zuverlässigkeit des Ampere'schen Gesetzes. C. Neumann. Mathem. Annal. XI, 309.
55. Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände. C. Neumann. Mathem. Annal. XI, 318.
56. Zur Theorie des Condensators. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1877, 144.
57. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1877, 598.
58. Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1877, 713.
59. Ueber das Problem der Stromverzweigung in einer ebenen Platte. Chwolson. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 47.

Ellipse.

60. Propriétés géométriques de l'ellipse. Laisant. N. corresp. math. IV, 118.
61. Propriétés d'une ellipse inscrite à un parallèlogramme. Jamet. N. corresp. math. IV, 123.
62. Théorèmes sur l'ellipse. Mennesson. N. corresp. math. IV, 357.
63. Geometrische Untersuchungen. S. Kantor. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 414.
64. Sur les 3 cercles osculateurs à l'ellipse passant par un point. Neuberg. N. corresp. math. IV, 399.
65. Cercle de courbure de l'ellipse ayant la même surface que l'ellipse. Yagano. N. corresp. math. IV, 398.

Vergl. Rectification 178.

Ellipsoid.

Vergl. Attraction 29.

Elliptische Transcendenten.

66. Ueber die Theilung der elliptischen Functionen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1876, 242. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 343.]
67. Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Krause. Mathem. Annal. XII, 1.
68. Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Krause. Mathem. Annal. XII, 419.

69. Sur l'addition des fonctions elliptiques. Neuberg. N. corresp. math. IV, 343.
70. On the theory of elliptic integrals. Cayley. Mathem. Annal. XII, 143.
71. On some formulae in elliptic integrals. Cayley. Mathem. Annal. XII, 369.
72. Ueber elliptische Integrale. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 409.
73. Ueber einige elliptische Integrale. Enneper. Mathem. Annal. XI, 567.
74. Sur la réduction de quelques intégrales. Jamet. N. corresp. math. IV, 188.

F.

Functionen.

75. Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1876, 680.
76. Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen. Borchardt. Berl. Akad.-Ber. 1876, 611.
77. Ueber Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XI, 145.
78. Produit dont les n facteurs sont des fonctions algébriques des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Mennesson. N. corresp. math. IV, 185.
79. Sur l'identité $(a+b+c)^3=(a+b-c)^3+(a-b+c)^3+(-a+b+c)^3+24abc$. Brocard. N. corresp. math. IV, 136.
80. Sur quelques identités. Proth. N. corresp. math. IV, 377.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16. Bernoulli'sche Zahlen. Binomialcoefficienten. Elliptische Transcendenten. Gleichungen 115. Homogene Functionen. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Zahlentheorie.

G.

Geodäsie.

81. Strenge Gleichungen zwischen den Seiten eines Dreiecksnetzes auf irgend einer Oberfläche, insbesondere auf Bessel's mittlerem Erdsphäroid. Kummell. Astr. Nachr. LXXXIX, 49.
82. Ueber die Bestimmung des mittleren Winkelmessungsfehlers einer nach der Bessel'schen Methode ausgeglichenen Triangulirung. Jordan. Astr. Nachr. LXXXIX, 27.
83. Ueber Winkelmessung und Ausgleichung. Bremiker. Astr. Nachr. LXXXIX, 65.
84. Ueber den Einfluss der Lothablenkungen auf Winkelmessungen. Sadebeck. Astr. Nachr. XC, 113; XCI, 145. — v. Morozowicz ibid. XC, 353.
85. Ueber Abweichungen des Lothes von der Normale des homogenen Erdsphäroids, erzeugt durch locale Unregelmässigkeiten der Massenvertheilung. Winterberg. Astr. Nachr. XCI, 97.
86. Ueber die geodätische Linie. Winterberg. Astr. Nachr. LXXXIX, 103, 113; XCI, 113.
87. Ueber den Genauigkeitsgrad telegraphischer Längenbestimmungen. Albrecht. Astr. Nachr. LXXXIX, 305.

Geometrie (höhere).

88. Ueber correlative oder reciproke Bündel. Sturm. Mathem. Annal. XII, 254.
89. Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen. Schubert. Mathem. Annal. XII, 180.
90. Sur les polygones conjugués. Dewulf. N. corresp. math. IV, 286, 397.
91. Bemerkungen über das vollständige Viereck. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 191.
92. Théorème se rapportant à un polygone de n côtés et à un point fixe. Van Aubel. N. corresp. math. IV, 93.
93. Sur une transformation des figures. Neuberg. N. corresp. math. IV, 397.
94. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 343. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 81.]
95. Deux propriétés générales des courbes du troisième degré. Van Aubel. N. corresp. math. IV, 355.
96. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 85, 211.

Vergl. Kegelschnitte. Mechanik 143, 145, 146. Oberflächen.

Geschichte der Mathematik.

97. Näherungswerthe für $\sqrt{2}$. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 89, 170.
98. Ueber eine Stelle des Pappus. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 117.

99. Sur la somme des puissances quatrièmes des nombres entiers. Boncompagni. N. corresp. math. IV, 22.
100. Sur le mot cumulo dans le sens de mille millions. Boncompagni. N. corresp. math. IV, 24.
101. Sur la construction du pentagone d'Albert Dürer. Brocard. N. corresp. math. IV, 135.
102. Matériaux pour l'histoire des mathématiques en Hollande. Bierens de Haan (extrait par Neuberg). N. corresp. math. IV, 386.
103. Swift und die Monde des Mars. Th. v. Oppolzer. Astr. Nachr. XCI, 303.
104. Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 1.
105. Une question anglaise de 1743. N. corresp. math. IV, 145.
106. Quelques quadrateurs Catalan. N. corresp. math. IV, 53.
107. Ueber die erste Auffindung des Planeten Neptun. Galle. Astr. Nachr. LXXXIX, 349.
108. Ueber den Antheil Petřina's an der Erfindung des telegraphischen Gegensprechens. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 37.
109. Todesanzeige von Simon, Freiherr von Sina, † 15. April 1876. Astr. Nachr. LXXXVIII, 65
110. Canno necrologico di Giovanni Santini, † 26 giugno 1877. Lorenzoni. Astr. Nachr. XC, 79.
111. Hermann Grassmann's Nekrolog. Junghans. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 69.
112. Todesanzeige von C. L. v. Littrow, † 16. November 1877. Weiss. Astr. Nachr. XCI, 113.
Vergl. Kreis 140.

Gleichungen.

113. Ueber Abel'sche Gleichungen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1877, 845.
114. Ueber die Discriminante. Brill. Mathem. Annal. XII, 87.
115. Théorème sur les fonctions de Sturm d'une équation n'ayant que des racines simples. Mennesson. N. corresp. math. IV, 152, 212.
116. Ueber zwei einfache Methoden zur Auflösung numerischer Gleichungen. Giesen. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 35.
117. Trouver une valeur de x vérifient l'équation $x^m - x + \frac{b-1}{b\sqrt[m-1]{b}}$. Cesaro. N. corresp. math. IV, 365.
118. Zur Theorie der Elimination. Toeplitz. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 61.
119. Zur Eliminationstheorie. Noether. Mathem. Annal. XI, 571.
120. Ueber ein Eliminationsproblem. Krey. Mathem. Annal. XII, 476.
Vergl. Geschichte der Mathematik 105.

H.

Homogene Functionen.

121. Sur quelques formes binaires. Brioschi. Mathem. Annal. XI, 111.
122. Système simultané de deux formes biquadratiques. Bertini. Mathem. Annal. XI, 30.
Vergl. Ikosaeder. Invariantentheorie. Quadratische Formen.

Hydrodynamik.

123. Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Koepcke. Mathem. Annal. XII, 387.
124. Ueber die gleichförmige Bewegung des Wassers sowohl in kleineren Kanälen und Gräben, wie in Flüssen und Strömen. Hagen. Berl. Akad.-Ber. 1876, 243.

Hyperbel.

125. Sur une circonférence coupant une hyperbole en 3 points sommets d'un triangle équilatéral. Dubois. N. corresp. math. IV, 88. — E. Lucas ibid. 282.
126. Somme des angles d'un triangle curviligne formé par 3 arcs d'hyperboles ou de paraboles. Dewulf. N. corresp. math. IV, 112. — Brocard ibid. 138.

Hyperboloid.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 19.

I.

Ikosaeder.

127. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. F. Klein. Mathem. Annal. XII, 503. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 162.]

Imaginäres.

128. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen (zweite Abhandlung). Lüroth. Mathem. Annal. XI, 84. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 399.]
129. Ueber die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkte der Ausdehnungslehre. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 141.

Vergl. Ausdehnungslehre 31. Quaternionen. Zahlentheorie 227.

Integration (unbestimmte).

130. Ueber die Verallgemeinerung der partiellen Integration. Worpitzky. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 407.

Invariantentheorie.

131. Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten. Gordan. Mathem. Annal. XII, 147.

Vergl. Differentialgleichungen 47. Elliptische Transcendenten 67. Gleichungen 114.

K.

Kegelschnitte.

132. Einige Eigenschaften der ebenen und sphärischen Kegelschnitte. Mehmcke. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 255.
133. Ueber die Verallgemeinerung einer Erzeugungsart der Curven zweiten Grades. V. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 402.
134. Sur les cercles osculateurs d'une conique en trois points. De Longchamp. N. corresp. math. IV, 393.
135. Trouver l'enveloppe des axes des coniques tangentes en deux points donnés à deux droites données. Jamet. N. corresp. math. IV, 299.
136. Sur la corde commune à deux coniques. Henry. N. corresp. math. IV, 24. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 174.]
137. Synthetischer Beweis des Satzes, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 327.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Normalen 152, 153. Oberflächen zweiter Ordnung. Parabel.

Kreis.

138. Sur le cercle de 9 points. Mennesson. N. corresp. math. IV, 241.
139. Théorème sur les quatre cercles inscrits et exinscrits à un triangle. Braun. N. corresp. math. IV, 364.
140. Ueber eine Maximumaufgabe. Lorsch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, hist. Abth. 120.

Vergl. Biangularcoordinaten. Geschichte der Mathematik 106. Hyperbel 125.

L.

Logikcalcul.

141. Ueber den Operationskreis des Logikcalculs. E. Schroeder. Mathem. Annal. XII, 481.

M.

Mannichfaltigkeiten.

142. Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante. D'Ovidio. Mathem. Annal. XII, 403.

Mechanik.

143. Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 108.
144. Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hilfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen. C. Neumann. Mathem. Annal. XI, 379.

145. Kaustische Linien in kinematischer Behandlung. Kessler. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 1.
146. Démonstration d'un théorème relatif à une courbe quelconque tracée sur une sphère au moyen de considérations cinématiques. Le Paige. N. corresp. math. IV, 232.
147. Trois théorèmes de statique. Mansion. N. corresp. math. IV, 148.
148. De la rotation d'un corps autour o'un point fixe. Siacci (extrait par Mansion). N. corresp. math. IV, 51.
149. Vitesse d'un point décrivant une trajectoire plane sous l'influence d'une force émanée d'un point fixe. Jamet. N. corresp. math. IV, 295.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 17. Astronomie. Attraction. Ausdehnungslehre 30. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Molecularphysik. Optik. Potential.

Molecularphysik.

150. Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 286. [Vergl. Bd. XIX, Nr. 163.]

N.

Normalen.

151. Théorème sur les normales d'une courbe fermée convexe. Jamet. N. corresp. math. IV, 251. — Mennesson ibid. 329.
152. Sur les normales aux coniques à centre. De Longchamps. N. corresp. math. IV, 279.
153. Théorèmes sur les normales de coniques. De Longchamps. N. corresp. math. IV, 390.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 5.

O.

Oberflächen.

154. Zur Theorie dreifach orthogonaler Flächensysteme. Koetteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 158.
155. Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung. Toeplitz. Mathem. Annal. XI, 434.
156. Ueber die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung. Hochheim. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 308, 345.
157. Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen. Voss. Mathem. Annal. XII, 485.
158. Ueber correspondirende Flächenelemente. C. Neumann. Mathem. Annal. XI, 306.
159. Théorème de géométrie infinitésimale. Mennesson. N. corresp. math. IV, 187.
160. Procédé pratique pour trouver une génératrice d'une surface cylindrique. Brocard. N. corresp. math. IV, 66.
Vergl. Singularitäten 189, 190.

Oberflächen zweiter Ordnung.

161. Ueber eine den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte analoge Eigenschaft gewisser Oberflächen zweiter Ordnung. Schroeter. Berl. Akad.-Ber. 1877, 594.
Vergl. Geodäsie 81, 86.

Optik.

162. Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. Lorentz. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 196. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 274.]
163. The shadow of a planet. Hall. Astr. Nachr. XC, 305.
164. Sur l'ombre d'une planète. Souillart. Astr. Nachr. XCI, 129.
Vergl. Refraction.

P.

Parabel.

165. Parabole enveloppe d'une droite mobile. Brocard. N. corresp. math. IV, 46.
166. Paraboles satisfaisants à trois conditions. Jamet. N. corresp. math. IV, 247.
167. Problèmes relatifs à deux paraboles de même sommet dont les axes sont perpendiculaires. Jamet. N. corresp. math. IV, 296.
Vergl. Hyperbel 126.

Paraboloid.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 18.

Planimetrie.

168. Quelques propriétés du triangle. Neuberg. N. corresp. math. IV, 142.
169. Sur l'expression „triangles symétriquement semblables". Laisant. N. corresp. math. IV, 58.
170. Théorème sur le parallélogramme. N. corresp. math. IV, 30.
171. Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque. Van Aubel. N. corresp. math. IV, 40.
172. Ueber doppelt-centrische Vierecke. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 193.
173. Ueber einen das Sehnenfünfeck betreffenden Satz. Preuss. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 194.

Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung 208.

Potential.

174. Zur Theorie des logarithmischen und des Newton'schen Potentials. C. Neumann. Mathem. Annal. XI, 558.

Vergl. Attraction.

Q.

Quadratische Formen.

175. Sur les formes quadratiques positives. Korkine & Zolotareff. Mathem. Annal. XI, 242.

Quadratur.

176. Sur une aire décrite par un segment constant de la tangente d'une courbe fermée. Jamet. N. corresp. math. IV, 249.

Vergl. Ellipse 65.

Quaternionen.

177. Versuch einer neuen Entwickelung des Hamilton'schen „Calculus of quaternions". Dillner. Mathem. Annal. XI, 168.

Vergl. Ausdehnungslehre 31.

R.

Rectification.

178. De quelques propriétés des arcs d'ellipse. Dubois. N. corresp. math. IV, 11.
179. Equation approchée entre l'arc d'une courbe et sa corde. Freson. N. corresp. math. IV, 87.
180. Sur la méthode des isopérimètres. Catalan. N. corresp. math. IV, 147.

Refraction.

181. Zur Theorie der terrestrischen Refraction. Jordan. Astr. Nachr. LXXXVIII, 99
182. Eine neue Refractionsformel. Von Oppolzer. Astr. Nachr. LXXXIX, 365.

Reihen.

183. Sur une formule de Libri. Genocchi. N. corresp. math. IV, 319.
184. Ueber einige unendliche Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 132.
185. $\frac{1^m}{1}+\frac{2^m}{1.2}+\frac{3^m}{1.2.3}+\ldots=n.e.$ Freson. N. corresp. math. IV, 220. — Le Paige ibid. 287. — Cesaro ibid. 329. — Ligowski ibid. 383.
186. Ueber die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 135.
187. Sur les sommes des puissances p des n premiers nombres entiers. Dostor. N. corresp. math. IV, 382.
188. La somme des carrés des nombres impairs de rang pair diminuée de la somme des carrés des nombres impairs de rang impair est le double d'un carré Cesaro. N. corresp. math. IV, 364.

Vergl. Functionen 76. Geschichte der Mathematik 99.

S.

Singularitäten.

189. Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. Schubert. Math. Annal. XI, 347.
190. Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades. Schubert. Mathem. Annal. XII, 202.
191. Ueber rationale Curven vierter Ordnung. Brill. Math. Annal. XII, 90.

Stereometrie.

192. Sur les polygones semi-réguliers. De Tilly. N. corresp. math. IV, 290.
Vergl. Cubatur.

Substitutionen.

193. Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Gordan. Mathem. Annal. XII, 23.

T.

Thetafunctionen.

194. Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen. Herstowski. Mathem. Annal. XI, 1.

Trigonometrie.

195. Sur quelques identités trigonométriques. Brocard. N. corresp. math. IV, 141.
196. Sur trois angles dont les cosinus donnent la somme zéro. Freson. N. corresp. math. IV, 91.
197. Satz von einem Viereck, das zugleich Sehnen- und Tangentenviereck ist. Milinowski. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 139.
Vergl. Geschichte der Mathematik 101.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

198. Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades (zweiter Aufsatz). F. Klein. Mathem. Annal. XI, 293. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 337.]
199. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung ($\varrho=4$). A. Pringsheim. Mathem. Annal. XII, 435.
200. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. Koenigsberger. Mathem. Annal. XI, 119.

Unendlich.

201. Ueber die Paradoxen des Infinitärcalculs. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XI, 149.

V.

Variationsrechnung.

202. Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale. G. Erdmann. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 362. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 339.]
Vergl. Geschichte der Mathematik 104.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

203. Sur le principe de la moyenne arithmétique. Schiaparelli. Astr. Nachr. LXXXVII, 55; LXXXVIII, 141. — E. J. Stone ibid. LXXXVIII, 61.
204. Vergleichung von zwei Werthen des wahrscheinlichen Fehlers. Lüroth. Astr. Nachr. LXXXVII, 209.
205. Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Helmert. Astr. Nachr. LXXXVIII, 113.
206. Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt. Helmert. Astr. Nachr. LXXXIX, 225, 241, 367.
207. Sur le problème des partis. Catalan. N. corresp. math. IV, 8. — Ghysens ibid. 85.
208. Une question de probabilités. Lalanne. N. corresp. math. IV, 385.
Vergl. Geodäsie 82.

Z.

Zahlentheorie.

209. Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. E. Lucas. N. corresp. math. IV, 1, 33, 65, 97, 129, 225. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 352.]
210. Sur les fonctions U_n, V_n de M. E. Lucas. De Longchamps. N. corresp. math. IV, 83.

211. Sur le théorème de Fermat. Mansion. N. corresp. math. IV, 72. — Catalan ibid. 76.
212. Sur quelques relations indéterminées. Realis. N. corresp. math. IV, 325, 346, 369.
213. Verallgemeinerung des Gauss'schen Criteriums für den quadratischen Restcharakter einer Zahl in Bezug auf eine andere. Schering. Berl. Akad.-Ber. 1876, 330. — Kronecker ibid. 331.
214. Bemerkungen zum analytischen Beweise des kubischen Reciprocitätsgesetzes. Dantscher. Mathem. Annal. XII, 241.
215. Triangles magiques. Cesaro. N. corresp. math. IV, 293. — Proth ibid. 395.
216. Notes élémentaires sur le problème de Pell. Brocard. N. corresp. math. IV, 161, 193, 228, 337.
217. Solutions entières de l'équation $x^2+17=y^2$. Brocard. N. corresp. math. IV, 50.
218. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres contenus dans la formule $2z^2 \pm z$. Realis. N. corresp. math. IV, 29.
219. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres contenus dans la formule $\frac{3z^2 \pm z}{2}$. Realis. N. corresp. math. IV, 27.
220. Le carré de tout nombre impair divisible par 3 est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec 3. Cesaro. N corresp. math. IV, 156.
221. Décomposition d'un cube en quatre cubes. Catalan. N. corresp. math. IV, 352, 371.
222. Tout nombre entier est la somme de 47 bicarrés au plus, dont 6 sont égaux. Realis. N. corresp. math. IV, 209.
223. Sur la décomposition des nombres en bicarrés. É. Lucas. N. corresp. math. IV, 323.
224. Résolution d'un nombre entier en somme de 4 nombres polygones de même ordre. Realis. N. corresp. math. IV, 30.
225. Propriété des nombres de la forme $6x+1$. Proth. N. corresp. math. IV, 179.
226. Théorème d'arithmétique. De Polignac. N. corresp. math. IV, 181.
227. Ueber die Wurzeln der Gleichung $y^x = x^y$. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, 339.
228. Sur une transformation de séries numériques. Tchebychef. N. corresp. math. IV, 305.
229. Sur la série des nombres premiers. Proth. N. corresp. math. IV, 236.
230. Sur un critérium suivant lequel un nombre 2^k+1 est reconnu premier. Proth. N. corresp. math. IV, 210.
231. Nouveaux cas de divisibilité des nombres de la forme $2^{2^m}+1$. Bouniakowsky. N. corresp. math. IV, 284.
232. Sur quelques théorèmes d'arithmétique de Mr. Proth. E. Lucas. N. corresp. math. IV, 120.
233. Sur un problème d'arithmétique. Postula. N. corresp. math. IV, 204. — Catalan ibid. 207.
234. De la divisibilité d'un nombre par 7. Mennesson. N. corresp. math. IV, 151. — Postula ibid. 156. — Cesaro ibid. 157. — Le Paige ibid. 212.
235. Trouver des couples de nombres dont le produit ait tous les chiffres égaux. Angenot. N. corresp. math. IV, 61. — Catalan ibid. 62.

Vergl. Determinanten 38. Elliptische Transcendenten 68. Functionen 76, 79, 80. Reihen 188.

Historisch-literarische Abtheilung.

Zur Geschichte Abû'l Wefâ's.

Von
Eilhard Wiedemann.

Bei der grossen Bedeutung, welche die Aufsätze von Woepcke über die arabischen Mathematiker und Astronomen für die Geschichte derselben haben, da sie zu den wenigen gehören, die aus den arabischen Quellen selbst geschöpfte Nachrichten bringen, dürfte die Berichtigung eines Irrthumes Woepcke's von einigem Interesse sein, um so mehr, als er sich auf einen der bedeutendsten arabischen Astronomen, auf Abû'l Wefâ, bezieht.

Woepcke* berichtet uns über das Leben Abû'l Wefâ's, indem er den Angaben des Tarikh al Ḥukamâ von Ibn al Ḳifti, des Kitâb al Fihrist von Abû'l Farağ Ibn an Nadîm und des Biographischen Lexikons von Ibn Khallikan folgt.

Abû'l Wefâ Muḥammed Ben Muḥammed Ben Jaḥja Ben Ismâ'îl Ben al 'Abbâs al Bûzğânî wurde in Bûzğân, einer kleinen Stadt von Khorâsân zwischen Herât und Nîsâpûr, am Mittwoch, dem ersten Tage des Ramaḍân des Jahres 328 der Heğra (10. Juni 940 A. D.) geboren. Mit 20 Jahren, 348 d. H., verliess er sein Heimathland und siedelte nach 'Irâḳ über, wo er die speculative Mathematik [Arithmetik der Griechen, علم العدد ('ilm al 'adad) der Araber] und die Geometrie unter Abû Jaḥjâ al Bâwardî und Abû'l 'Alâ Ben Karnîb studirte. Er selbst hielt Vorträge über praktische [علم الحساب ('ilm al ḥisâb)] und speculative Arithmetik, die fleissig besucht wurden und aus denen man vielfach citirte.** Zu seinen Zuhörern gehörte sein Oheim väterlicher Seite Ibn 'Omar al Moğâzilî und sein Oheim mütterlicher Seite Abû 'Abd Allah Muḥammed Ben Anbasah. Bis zu seinem Tode lebte er in Bağdâd und

* *Journal asiatique (5), V, p. 243 sq.*

** Es geschah dies nach Ibn Khallikan von seinem Lehrer Kâmal ed Dîn Abû'l Fatḥ Mûsâ Ibn Yûnus.

starb dort am dritten Tage des Monats Raǵab im Jahre 388 d. H. (1. Juli 998 A. D.)

Aus diesen Angaben würde sich das eigenthümliche Resultat herausstellen, dass die beiden Oheime Abû'l Wefâ's die Schüler ihres Neffen gewesen sind.

Da mir dies unwahrscheinlich erschien, so habe ich die arabischen Quellen noch einmal verglichen. Ibn Khallikan* erwähnt bei der Lebensbeschreibung Abû'l Wefâ's der beiden Oheime gar nicht, wohl aber der Fihrist,** und es ergiebt sich, dass die obige Uebersetzung Woepcke's auf einem Missverständnisse des Wortes قرأ kara' beruht.

Um dies Wort, das wörtlich „lesen" heisst, richtig zu verstehen, müssen wir uns daran erinnern, dass der arabische Unterricht in der Weise organisirt war und bis auf unsere Zeit sich so erhalten hat, dass entweder der Lehrer den Schülern den Koran oder wissenschaftliche Werke vorlas, oder aber Letztere sie dem Ersteren vorlasen, der sie dann mit seinen Erläuterungen versah oder, was besonders beim Koranstudium von grosser Bedeutung war, die Aussprache corrigirte.

Uebersetzen wir nun die Wendung (قرأ عليه) (kara' ʿalaihi) in der richtigen Weise „er erhielt Unterricht von ihm", so ist der Inhalt der Stelle im Fihrist, soweit sie die Beziehungen zwischen Schülern und Lehrern betrifft, der folgende:

Abû'l Wefâ erhielt Unterricht bei seinen Oheimen und von diesen hatte Abû ʿAmr von Abû Jaḥjâ Al Mâwerdî und Abû ʿAlâ Ben Karnîb in der Geometrie Unterricht erhalten.

Es ist demnach Abû'l Wefâ der Schüler seiner beiden Oheime und nahm, wie so häufig bei arabischen Gelehrten, die wissenschaftlichen Kenntnisse seiner Vorfahren in sich auf, die er dann weiter verarbeitete.

Ob der eine der beiden Oheime Abû ʿAmr Ibn ʿOmar oder Abû ʿOmar geheissen hat, darüber gehen die Angaben der Handschriften auseinander, was sich durch Schreibfehler leicht erklären lässt; ebendarauf dürften die verschiedenen Bezeichnungen des Abû Jaḥjâ als Al Bâwerdî (البا وردى) oder Al Mâwerdî (الما وردى) zurückzuführen sein.

---

* *Ibn Khallikan. Biographical Lexicon translated from the Arabic by Bn. de Slane III, p. 320.*

** Al Fihrist *ed.* G. Flügel, Bd. I S. 283.

Leipzig, im December 1878.

Recensionen.

Das Brachy-Teleskop. Bemerkungen zu der Recension des Herrn Bohn im XXIV. Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 43—52 der histor.-literar. Abtheilung.

Das von Herrn Fritsch in Wien construirte Brachy-Teleskop, das sich bereits vielfacher Anerkennung erfreut, ist ein Reflector, der, ähnlich wie der Cassegrain'sche, aus einem grösseren Hohlspiegel und einem kleineren Convexspiegel zusammengesetzt ist. Der Convexspiegel steht aber bei dem neuen Reflector ganz ausserhalb des Strahlenbündels, das auf den Hohlspiegel fällt, und gestattet so, die ganze Fläche desselben auszunützen. In der hierdurch bedingten grösseren Lichtstärke, in dem Umstande, dass der Hohlspiegel nicht durchbohrt werden muss und dass der Beobachter den betrachteten Gegenstand vor sich hat, endlich in der Kürze und Leichtigkeit der Construction erblickt Herr Fritsch die Vorzüge seines Reflectors vor den älteren Teleskopen.

Wenn nun die Bilder des Brachy-Teleskops an Schärfe denen eines Newton'schen oder Herschel'schen mit gleichem Hohlspiegel, wie das erstere, nicht nachstehen, so wird man wohl zugeben müssen, dass der neue Reflector die Vorzüge der älteren vereinigt, ohne deren Nachtheile zu besitzen, und das ist Herrn Fritsch bei den bisher ausgeführten Instrumenten in der That gelungen.

Das Schriftchen, durch welches das neue Teleskop weiteren Kreisen bekannt gemacht werden soll, benützt Herr Bohn, um in Form eines Referates die Principien der neuen Construction und gelegentlich auch die der älteren einer kritischen Beleuchtung zu unterziehen.

Das Ergebniss dieses Referates ist für das Brachy-Teleskop kein günstiges. Die neue Anordnung soll weder in mechanischer, noch in optischer Hinsicht Vortheile vor der Cassegrain'schen voraus haben (S. 51), das neue Teleskop sei länger als ein Newton'sches (S. 45 Z. 11 v. u.), ausserdem soll aber das Brachy-Teleskop noch weitere Mängel zeigen, die bei einem wirklich vollkommen eingerichteten Instrumente nur durch einen äusserst verwickelten Mechanismus behoben werden können.

Worin bestehen nun zunächst diese Mängel?

S. 47 wird behauptet: So oft man das Ocular des Brachy-Teleskops wechselt, ist zur völligen Ausnützung des Hohlspiegels eine seitliche Verschiebung desselben (nach der für σ auf S. 46 gegebenen Formel wohl auch des Convexspiegels) nothwendig und, was noch bemerkenswerther, der Winkel des Suchers mit der Ocularaxe muss ebenfalls geändert werden. Streng genommen ist das schon bei gleichbleibendem Ocular für Beobachter von verschiedener deutlicher Sehweite erforderlich. Auch die Aenderung der Gegenstandsweite macht ähnliche Verschiebungen der Spiegel und des Suchers nothwendig (S. 48 und 51), doch ging dem Referenten „aus Beschreibung und Abbildung des Brachy-Teleskops nicht mit Deutlichkeit hervor", wie die „zur möglichsten Vollkommenheit" des Instrumentes erforderlichen Einstellungsänderungen vorgenommen werden.

Wir bemerken sogleich, dass der Grund dieser geringen Deutlichkeit einfach darin liegt, weil derartige complicirte Mechanismen gar nicht nothwendig und daher an dem Instrumente auch nicht vorhanden sind.

In der That, bedenkt man, dass der Sucher die Richtung des auf den Hohlspiegel fallenden Parallelstrahlenbündels (einen unendlich entfernten strahlenden Punkt vorausgesetzt) hat, die Ocularaxe aber mit der Axe des vom Convexspiegel kommenden Strahlenkegels zusammenfallen muss, falls das Ocular richtig eingestellt ist, so wird die behauptete Nothwendigkeit, beim Wechsel des Oculars Spiegel und Sucher zu verschieben, ganz unfassbar, wenn anders das Ocularrohr die gewöhnliche Einrichtung besitzt, wie sie jedes Fernrohr zeigt.*

Diese Einrichtung setzt aber Herr Bohn in seiner Theorie des Brachy-Teleskops nicht voraus; es wird vielmehr angenommen, die Ocularlinse, welches Ocular auch eingesetzt werden mag, befinde sich immer an derselben Stelle und in derselben Lage. Dann bleibt freilich kein anderer Ausweg, als die Spiegel gegen die Ocularlinse zu stellen, und hieraus resultirt eine, je nach der Brennweite des Oculars verschiedene Neigung der ankommenden und vom Convexspiegel reflectirten Strahlen gegen die Ocularaxe. Nebst den von Bohn angegebenen Verschiebungen wäre übrigens noch eine Neigung des Ocularrohres nöthig behufs Centrirung der Ocularlinse gegen die ankommenden Strahlen.

Der Grund, warum Herr Bohn diese Annahme macht, dürfte auf S. 45 zu finden sein; dort heisst es: „Wie der für das neue Instrument gewählte Name anzeigt, wird die Kürze als wesentlichster Vortheil angesehen." Damit man es also immer, bei jedem Ocular, bei jedem Beobachter wirklich mit einem Brachy-Teleskop zu thun habe, muss seine

---

* Es giebt kleinere Cassegrain'sche Teleskope mit fixer Ocularlinse und beweglichem Convexspiegel, doch eignet sich diese Anordnung nicht für grössere und nicht für Präcisionsinstrumente.

Länge ein Minimum sein, d. h. die Ocularlinse unmittelbar hinter dem Hohlspiegel stehen. Dies trifft aus begreiflichen Gründen beim Brachyteleskop nicht zu, das Ocular steht etwas hinter dem Hohlspiegel, „die von Herrn Fritsch ausgeführten Instrumente sind also nicht so kurz, als sie sein könnten".

Die in dem Referate aufgefundenen Mängel des neuen Reflectors sind also nur Folge einer ganz unnöthigen, ja unstatthaften Annahme, die für jedes andere Instrument ähnliche oder auch gar nicht zu beseitigende Schwierigkeiten nach sich zöge; man denke etwa an ein gewöhnliches Fernrohr, dessen Ocularlinse eine fixe Lage gegen das Objectiv erhalten sollte.

Dass ferner Herr Bohn auch die eingangserwähnten Vortheile der neuen Construction bestreitet, erklärt sich aus weiteren Betrachtungen, die sein Referat enthält.

Auf S. 52 wird eine Abänderung des Newton'schen Teleskops empfohlen, die darin besteht, dass der Planspiegel nicht unter 45° geneigt, sondern normal zur Axe des Rohres gestellt und der auch bei Newton's Einrichtung nutzlose Centraltheil des Hohlspiegels ausgebohrt wird. Auf dieses Teleskop bezieht sich wohl die Behauptung, dass der neue Reflector länger sei, als ein Newton'scher mit gleichem Hohlspiegel; dasselbe gleicht aber wohl mehr einem Cassegrain'schen Teleskop. Der Radius des Planspiegels wird zwar jetzt halb so gross, als der des Hohlspiegels, und beschattet von der Fläche des letzteren den vierten Theil; die nöthige Lichtstärke macht dann viel grössere Dimensionen nothwendig. Allein nach der Meinung des Referenten dürfte die Anwendung so grosser Hohlspiegel „nicht bedenklich sein", um den durch Plan- oder Convexspiegel bedingten Entgang an Licht (dem Brachy-Teleskop gegenüber) wieder ersetzen zu können. Das „Gewicht des Spiegels" (andere Bedenken werden nur beiläufig erörtert) „kann selbst bei sehr grosser Fläche desselben recht klein werden", man braucht ihn ja nur „ziemlich dünn" zu machen. Auch das durch den grösseren Spiegel bedingte grössere Gewicht des Rohres etc. „kann gering gehalten werden". „Es genügt, den Hohlspiegel und den zweiten (ob eben oder convex) je nur mit einem kurzen Cylinderstutzen aus Metall zu umgeben, die beiden Metallstutzen durch drei bis vier nicht zu schwere Metallstangen zu verbinden und den Kegelmantel mit leichtem Stoff, Holz, Leder, Wachstuch, Tuch zu schliessen"!

Solche Erwägungen und Vorschläge dürften wohl nicht geeignet sein, die Vortheile der von Herrn Fritsch ausgeführten Anordnung als illusorisch erscheinen zu lassen.

Ein wesentliches Bedenken gegen diese Anordnung kann sich nur auf die grösseren Neigungen der Spiegel gegen die sie treffenden Strahlen beziehen; allein hierüber lässt sich ohne eingehendere Rechnung nicht so leicht ein Urtheil abgeben. Es mag bemerkt werden, dass bei der Cassegrain'schen Construction zur theilweisen Behebung der sphärischen Aberration zwei Elemente zu Gebote stehen: der Radius des Convexspiegels und innerhalb sehr enger Grenzen seine Entfernung vom Hohlspiegel; dass hingegen beim Brachy-Teleskop der ungünstigeren Stellung des Hohlspiegels noch ein drittes Element, die Neigung des Convexspiegels, zu Hilfe kommen kann. Wie schon erwähnt, geben die Brachy-Teleskope in der That ganz vorzügliche Bilder.

Prag, den 5. März 1879. F. Lippich.

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Volumen III. Berolini apud Weidmannos 1878. XXII, 1021—1288, IV, 144 S.

Der dritte und letzte Band der neuen Pappus-Ausgabe liegt vollendet vor uns. Wir verweisen unsere Leser auf die Anzeigen, die wir im XXI. Bande dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abtheilung S. 70—80, und im XXII. Bande, histor.-literar. Abtheilung S. 173—179, von den beiden früheren Bänden erstattet haben, und wenden uns ohne weitere Einleitung zum Inhalt des dritten Bandes.

Von der Sammlung des Pappus fehlte uns nur noch das VIII. Buch, und dessen Abdruck müssen wir zur Anknüpfung einiger weniger Bemerkungen wählen, wie wir sie auch mit Bezug auf die vorhergehenden Bücher uns gestatteten. Haben doch unsere damaligen Erörterungen vor dem Richterstuhle des urtheilsfähigsten Fachmannes, des Herausgebers des Pappus, in dem Maasse bestanden, dass er einigen derselben die Ehre zu Theil werden liess, in seinem III. Bande auf sie zu verweisen. Pappus kündigt den Inhalt des VIII. Buches mit den Worten an (S. 1028, 4—10): „Ich habe für gut gehalten, die mit Hilfe der Geometrie gewonnenen und zur Lehre von der Bewegung schwerer Körper nothwendigsten Theoreme, sowohl die, welche bei den Alten vorhanden sind, als auch die von uns selbst zu gutem Gebrauche aufgefunden wurden, kürzer und deutlicher niederzuschreiben und auf eine bessere Weise, als es von früheren Schriftstellern geschah, darzustellen.“ Es wäre möglich, gleich die Worte „von uns“, ὑφ' ἡμῶν, mit einem Commentar zu versehen, da es von vornherein nicht ganz zweifellos erscheint, ob man sie so zu verstehen hat, dass Pappus nur von sich reden will, oder so, dass er die Zeitgenossen mit einbegreift. Jedenfalls dürfte aber diese Streitfrage, wie wir noch sehen werden, zu Gunsten der ersteren Auffassung entschieden werden müssen. Als Aufgaben, mit welchen er sich der gegebenen Erklärung gemäss näher beschäftigen wolle, nennt Pappus die drei folgenden: 1. die Auffindung derjenigen Kraft, welche erforderlich ist, um eine gegebene Last längs einer gegebenen schiefen Ebene in Bewegung zu setzen; 2. die Einschiebung zweier mittlerer geometrischer Proportionalen zwischen zwei gegebene, einander ungleiche Grössen; 3. die Anpassung eines Zahnrades mit gegebener Anzahl der Zähne zum Eingriff in ein anderes Zahnrad, dessen Zähne ihrer Zahl nach gleichfalls gegeben sind. Diese Aufgaben werden dann auch im Laufe des Buches als 9., 11., 23. Satz behandelt, aber ohne dass man gerade ihnen zu Liebe eine Dreitheilung des Buches annehmen müsste, wie es bei früheren Büchern wohl der Fall war. Ueberhaupt scheint uns — und wir vermuthen uns hier in Uebereinstimmung mit Hrn. Hultsch — das VIII. Buch im Laufe der Jahrhunderte seit Pappus bis zur Entstehung der Vaticanhandschrift fast am Meisten gelitten zu haben. Auszüge aus den mechanischen Schriften des Heron von Alexandrien mögen ja von Anfang an Theile dieses Buches gebildet haben, wie wir überhaupt bei Pappus daran gewöhnt sind, dass er seine geistreichen Zusätze an Dinge anknüpft, die anderen Schriftstellern angehörten, und dass so eine Berechtigung zu dem bescheidenen Namen „Sammlung", welchen er seinem Werke beilegte, vorhanden ist; aber ob die Auszüge aus Heron im VIII. Buche von Anfang an an den Stellen und in solcher Ausdehnung sich fanden, wie wir sie jetzt mit Hultsch im Verlaufe und namentlich am Ende des Buches erkennen, ob nicht an der Anordnung überhaupt ganz wesentliche Veränderungen vorgenommen worden sind, das erscheint uns recht zweifelhaft. Ohne daher zu Muthmassungen über die ursprüngliche Gestalt des VIII. Buches uns versteigen zu wollen, bemerken wir nur, dass der Lehre von der Bewegung auf der schiefen Ebene verschiedene Sätze aus der Theorie des Schwerpunktes vorangehen, darunter der von Chasles bereits hervorgehobene Satz, dass der Schwerpunkt eines an sich beliebigen Dreiecks zugleich auch Schwerpunkt eines Dreiecks sei, dessen Eckpunkte auf den drei Seiten des ersteren so liegen, dass dadurch jene Seiten sämmtlich in gleichem Verhältnisse getheilt erscheinen. Wir bemerken, dass an die Delische Aufgabe, die zwar schon im III. Buche in anderem Zusammenhange behandelt worden war, die aber hier wiederkehrt, weil auf ihr die Vergrösserung eines durch mechanische Vorrichtungen irgendwie in Bewegung zu setzenden Körpers unter Festhaltung seiner Gestalt beruht, die Aufgabe folgt, den Kreisumfang eines geraden Cylinders zu finden, aus welchem überall Stücke herausgebrochen sind, so dass eine unmittelbare Messung an keiner Stelle stattfinden kann. Wir treffen sodann auf Fragen, bei denen es sich um Auffindung gewisser Punkte auf einer Kugel handelt, z. B. des Punktes, der einer gegenüberliegenden Ebene am Nächsten liegt, und der Punkte, in welchen eine gegebene gerade Linie die Kugel durchdringt. Daran schliesst sich die Einbeschreibung von 7 einander gleichen regelmässigen Sechsecken in einen gegebenen

Kreis, so dass das eine dem Kreise concentrisch ist, die übrigen sechs auf je einer Seite des mittleren aufstehend, die dieser gegenüberliegende Seite jedesmal als Kreissehne besitzen. Pappus geht nunmehr zu der schon angekündigten Aufgabe von der Anpassung der Zahnräder an einander über und schliesst mit den vorerwähnten längeren Auszügen aus den mechanischen Schriften Heron's, deren ersten Pappus um deswillen angefertigt hat, damit man nicht nöthig habe, anderwärts als in seiner Sammlung sich Rath zu holen. Im Anschluss an die oben von uns berührte Streitfrage wegen der Bedeutung der Worte ὑφ' ἡμῶν erwähnen wir, dass Pappus bei Angabe des Grundes, weshalb ein Excerpt aus Heron von ihm angefertigt sei, genau der gleichen Wortverbindung sich bedient (*pag.* 1114 *lin.* 6), was dafür spricht, dass auch an der früheren Stelle (*pag.* 1028 *lin.* 8) er nur sich selbst im Sinne hatte, so dass die dortige Uebersetzung von Hultsch damit Unterstützung findet. Ueber die Auszüge aus Heron's Mechanik hat Herr Hultsch selbst an anderem Orte, in dem Sammelbande, den Freunde und Verehrer Mommsen's zu Ehren von dessen Doctorjubiläum gemeinschaftlich veröffentlichten, in umfassender Weise gehandelt. Wir begnügen uns daher, auf jenen Aufsatz zu verweisen und ihn selbst unseren Lesern zu empfehlen. Auch über Pappus und dessen stylistische Eigenthümlichkeiten hat der Verfasser sich dort ausgesprochen und insbesondere auf eine Stelle aufmerksam gemacht, deren Erwähnung wir bei Besprechung des I. Bandes der Pappusausgabe mit Unrecht unterlassen haben. Wir meinen die Einleitung zum V. Buche, in welcher in schwungvoller Weise von der Gestalt der Wachszellen die Rede ist, welche die Bienen so kunstreich und geradezu geometrisch anzufertigen wissen.

Wir selbst möchten nur eine Stelle des VIII. Buches noch hervorheben, in welcher, wie uns scheint, eine bisher unbenutzte wichtige historische Thatsache enthalten ist. Auf *pag.* 1074 *lin.* 2 ist ganz gelegentlich von Aufgaben die Rede, τὰ ἑνὶ διαστήματι γραφόμενα, d. h. deren Zeichnung mit einem Zwischenraume ausgeführt wird. Wir glauben nicht zu irren, wenn wir hierin die erste Erwähnung der sogenannten Geometrie mit einer Zirkelöffnung erkennen. Wir haben im XXII. Bande dieser Zeitschrift, historisch-literarische Abtheilung S. 146, von dieser wissenschaftlichen Spielerei gesprochen, die im X. Jahrhundert bei einem Araber, im XV. und XVI. Jahrhundert in Italien auftaucht, ohne dass wir damals wussten, wann und wo man sie ersann. Auch heute können wir diese Frage noch nicht beantworten, aber wir sind doch um einen grossen Schritt weiter, wenn wir eine Spur solcher Aufgaben bei den Griechen, dem eigentlich geometrisch begabten Volke des Alterthums, aufgefunden haben, und darin macht es keinerlei Unterschied, ob die von uns angezogenen Worte von Pappus selbst herrühren oder einigermassen spätere Einschiebungen sind, die jedenfalls einen griechischen

Nachfolger des Pappus zum Verfasser haben, der hier wie von etwas ganz Bekanntem redet.

Am Anfange des Bandes, dem Texte des VIII. Buches vorangehend, hat eine etwa einen Druckbogen füllende Vorrede Platz gefunden. Dort sind alle Stellen vereinigt, in welchen von Pappus in irgend einer Weise die Rede ist, und Herr Hultsch hat daraus wichtige Folgerungen zu ziehen gewusst. Pappus hat nach ihm später gelebt, als der Astronom Ptolemaeus, früher als dessen Commentator Theon von Alexandrien, also wahrscheinlich unter Diokletian, wie bekanntlich ein Scholiast des X. Jahrhunderts behauptet. Pappus hat nicht blos zu den vier ersten Büchern des Almagestes Erläuterungen unter dem Titel σχόλια geschrieben, sondern zu allen 13 Büchern, und jene falsche Behauptung ist durch eine falsche Lesart (Δ statt ΙΓ) entstanden. Von den Scholien des Pappus sind ziemlich umfangreiche Bruchstücke erhalten. Pappus hat ferner einen Commentar zu Schriften des Euklid verfasst, und zwar jedenfalls zu den Daten, wahrscheinlich auch zu den Elementen dieses Geometers. Endlich werden ausser der „Sammlung" des Pappus noch erwähnt ein Commentar zur Projectionslehre eines gewissen Diodorus, eine Schrift über Musik, und verschiedene Abhandlungen, welche ihrem Titel nach der rechnenden Astronomie angehören.

Nach dem Abdrucke des VIII. Buches ist der Band noch keineswegs abgeschlossen. Unsere Leser erinnern sich, dass im V. Buche der Sammlung des Pappus ein Auszug aus der Abhandlung des Zenodorus über isoperimetrische Raumgebilde eingeschaltet ist, dass ein ähnlicher Auszug in Theon's Commentar zum I. Buche des Almagestes sich erhalten hat. Herr Hultsch hat nun als ungemein zweckmässige Zugabe zu seinem Pappus einen Abdruck der lateinischen Uebersetzung jenes Theon'schen Berichtes auf S. 1190—1211 folgen lassen, bei welchem er in zahlreichen Anmerkungen auf die wenn auch kleinen, doch mannigfachen Verschiedenheiten gegen Pappus aufmerksam macht; er hat ferner S. 1138—1165 den griechischen Text einer anonymen Abhandlung über isoperimetrische Figuren in der Ebene mit nebenstehender lateinischer Uebersetzung mitgetheilt. Auch diese Abhandlung, aus einer Vaticanhandschrift entnommen, zeigt die entschiedenste Abhängigkeit von Zenodorus, dessen Spuren damit allmälig wesentlich zahlreicher werden, als man früher annahm. Wir werden weiter unten noch auf eine bisher nicht berücksichtigte Stelle hinweisen, in welcher wir Zenodorus zu erkennen glauben. So gewinnt es auch an Wahrscheinlichkeit, was wir im XXII. Bande dieser Zeitschrift aussprachen, dass Quintilian von dem Hauptinhalte der Untersuchungen des Zenodorus Kenntniss hatte. Wir bedauern nur, dass Herr Hultsch zur grösseren Vollständigkeit nicht auch noch jene lateinische Abhandlung veröffentlicht hat, auf welche wir im XXI. Bande hingewiesen haben und welche den

Beweis liefert, dass Zenodorus zu den Schriftstellern gehört, welche ins Arabische übersetzt worden sind. Wir sind überzeugt, dass Herr Curtze sein betreffendes Material dem Herausgeber des Pappus bereitwillig mitgetheilt haben würde, wenn derselbe dahin zielende Wünsche geäussert hätte. Was die Lebenszeit des Zenodorus betrifft, so schliesst sich Herr Hultsch unserer Auffassung, dieselbe müsse zwischen Archimed und Quintilian gesucht werden, unbedingt an. Er geht aber noch einen bedeutenden Schritt weiter, indem er aus dem engen Anschlusse des Zenodorus an Euklid und Archimed die Folgerung ziehen zu dürfen glaubt, Zenodorus habe nicht lange nach diesen Fürsten der Wissenschaft, jedenfalls vor Heron von Alexandrien gelebt, an dessen Schreibweise nicht der leiseste Anklang erinnere. Allerdings giebt Herr Hultsch diese Vermuthung nur als solche und keineswegs als erwiesene geschichtliche Thatsache, und in diesem Sinne nehmen wir auch keinen Anstand, uns seiner Folgerung anzuschliessen. Der mathematische Styl des Zenodorus erinnert auch uns an das Jahrhundert der Epigonen, wie wir dasjenige zu nennen uns gewöhnt haben, welches auf das Jahrhundert des Euklid unmittelbar folgte.

Ferner begegnen wir in dem uns vorliegenden Bande auf S. 1166 bis 1188 den Scholien, welche am Rande des ältesten Vaticancodex Nr. CCXVIII von einer Hand des XII. oder XIII. Jahrhunderts niedergeschrieben wurden. Grosse Wichtigkeit ist denselben nicht gerade zuzuschreiben, aber immerhin ist es geschichtlich nicht ganz gleichgiltig, was man in jener Zeit kümmerlichsten mathematischen Studiums bei den Griechen als Erklärung niederzuschreiben für gut fand.

Ungleich schätzbarer sind die Erklärungen, welche Herr Hultsch selbst ausser den überall unter dem Texte befindlichen kleineren Anmerkungen in einem besondern Anhang auf S. 1212—1276 folgen lässt. Wir verweisen den Leser auf diese schönen Erläuterungen und erlauben uns nur einige wenige Zusätze theils aus unseren eigenen Studien, theils aus von Herrn Hultsch unberücksichtigt gebliebenen sonstigen Veröffentlichungen.

Zum II. Buche möchten wir in Erinnerung bringen, dass das Wort *πυθμήν* für die von ihrem den Rang bestimmenden Factoren entkleidete einfache Zahl zuerst bei Plato vorkommen dürfte, woraus über das Alter verwandter Untersuchungen, wie Pappus sie nach Apollonius mittheilt, eine Schlussfolgerung versucht werden kann.

Zum III. Buche machen wir auf eine Abhandlung „Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik, von S. Günther“ aus den Abhandlungen der königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch., VI. Folge 9. Bd., mathm.-naturwissenschaftl. Classe Nr. 4, aufmerksam. Der Verfasser hat dort, wenn auch nicht zuerst, so doch zuerst im Zusammenhange mit anderen Näherungsverfahren, die Methode der Würfelverdoppelung besprochen, welche Pappus am Anfang des III. Buches als voller Richtigkeit entbehrend zurückweist. Er hat einen kettenbruchartigen Gedankengang, wenn auch natürlich keinen solchen Algorithmus darin zu erkennen geglaubt und sich dadurch in der Ueberzeugung bestärkt gefühlt, dass dem antiken Bewusstsein bei Bestimmung von Näherungswerthen ein solcher fortgesetzter Rechnungsprocess keineswegs fremd war. Wir benutzen diese Gelegenheit zur Erklärung, dass diese uns früher ziemlich unsympathische Auffassung für uns nahezu Gewissheit geworden ist, seitdem wir in dem 31. Capitel der Arithmetik des Theon von Smirna einen fast unwiderlegbaren Beweis dafür gefunden haben. Wir fügen hinzu, dass wir nachträglich, sollen wir sagen das Vergnügen oder den Aerger hatten, diese Verständniss der Theonstelle, welche Nesselmann nicht besass, in einem sehr wenig bekannten Erfurter Schulprogramm von 1843 (Unger, Kurzer Abriss der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant) der Oeffentlichkeit schon übergeben zu sehen. Dass freilich in jenem Capitel Theon's neben dem platonischen $\sqrt{2}=\frac{7}{5}$ auch das indische $\sqrt{2}=\frac{17}{12}$ schon enthalten sei, dürfte hier als neu ausgesprochen werden.

Im IV. Buche ist am Schlusse eine Archimedische durch eine Verbindung von Hyperbel und Parabel lösbare Aufgabe angegeben, deren Text Herr Baltzer in einer von Herrn Hultsch abgedruckten Weise verbessert und deutlich gemacht hat. Wegen derselben früher verderbten Stelle verweisen wir auch auf einen Aufsatz im XXIII. Bande dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abtheilung S. 117—120: „Ueber eine Stelle des Pappus, von J. L. Heiberg.“ Es ist wohl einem Zweifel nicht unterworfen, dass beide Verbesserer ganz unabhängig von einander zu ihren wesentlich übereinstimmenden Ansichten gelangt sind.

Im V. Buche kommt bei Gelegenheit der isoperimetrischen Figuren ein Lemma vor, welches in dem Anhang S. 1231 genauer besprochen ist. Das 9. Capitel des I. Buches des Almagest verwerthet nun bekanntlich mit grossem Erfolge einen diesem Lemma mindestens sehr ähnlichen Satz. Sollte der Schluss allzukühn erscheinen, dass Ptolemaeus hier aus Zenodorus, der jedenfalls lange vor ihm lebte, geschöpft habe?

Das sind etwa die wenigen Zusätze, welche wir uns gestatten wollten. Den zweiten Theil des Schlussbandes der Pappusausgabe nimmt endlich ein acht Druckbogen starkes griechisches Wortverzeichniss ein, welches jedes Lob, das man ihm spenden möchte, weit hinter sich lässt. Es ist eine Meisterarbeit und wird auch den unnachsichtigsten Kritiker vollauf befriedigen müssen. So ist der Eindruck, mit welchem man das Werk verlässt, gleich wohlthuend, wie er im ganzen Verlauf geblieben war; die Ueberzeugung, dass der richtige Mann an der richtigen Stelle stand, wird keinen Augenblick wankend. Wir können unsere Besprechung schliesslich in den einen Satz zusammenfassen: Herr **Hultsch** hat uns mit einer klassischen Ausgabe eines klassischen Schriftstellers beschenkt.

CANTOR.

G. Biadego, Pietro Maggi matematico e poeta Veronese (1809—1854). Verona, H. F. Münster (C. Kayser Succ.). 1879. 16°. 176 S.

Unsere Leser kennen aus mehrfachen Beispielen die Sitte italienischer Schriftsteller, Freunden zum Hochzeitstage irgend ein literarisches Werkchen zuzueignen, welches zu der Feier auch nicht die geringste Beziehung hat. Einer solchen Gelegenheit verdankt auch die gegenwärtige Schrift ihr Dasein, in welcher der Verfasser das Leben und die Wirksamkeit eines Veroneser Landsmannes schildert. Herr Biadego, Eisenbahningenieur und als solcher Verfasser verschiedener Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, hat auch schon auf geschichtlichem Boden sich früher umgethan und werthvolle Beiträge in dem *Bulletino Boncompagni* erscheinen lassen — wir erinnern an seine Abhandlung aus dem Jahrgange 1873 über zehn noch nicht veröffentlichte Briefe von Lagrange. Heute rühmt er, wie schon bemerkt, eine landsmännische Grösse im engsten Sinne dieses Wortes, und dem Ortspatriotismus mag es zugeschrieben werden, wenn die Farben, in welchen die Verdienste von Pietro Maggi schillern, etwas zu glänzend ausgefallen zu sein scheinen. Wir sagen „scheinen“, weil wir für die Kenntniss der meisten wissenschaftlichen Leistungen des Maggi auf den vor uns liegenden Bericht allein angewiesen sind. Die Arbeiten, auf welche Herr Biadego das meiste Gewicht legt, sind in einer Veroneser Zeitschrift aus den dreissiger Jahren, in dem „Poligrafo“ erschienen, und diese dürfte deutschen Lesern nur in den seltensten Fällen zum Vergleiche zu Gebote stehen. Maggi's Arbeiten gehören als rein mathematische der Lehre von den Oberflächen an, als mathematisch-physikalische vorzugsweise der Elektrodynamik, und hier würde allerdings, wenn Herr Biadego vollständig zuverlässig berichtet, Maggi als Urheber einer bahnbrechenden Arbeit künftig in der Geschichte dieser Disciplin zu nennen sein. „Es ist eine unwidersprechliche Thatsache,“ sagt Herr Biadego S. 59, „dass Maggi der Erste war, welcher, den Spuren von Ampère folgend, eine Theorie der elektrodynamischen Induction aufstellte und die Ebenmässigkeit hervorhob, welche zwischen den Inductionserscheinungen und den elektrodynamischen Wirkungen obwaltet.“ Dass Maggi auch als Dichter sich verdient machte, dürfte für den Zweck dieser Zeitschrift als nebensächlich erachtet werden. Das Büchlein des Herrn Biadego ist sehr warm geschrieben und macht schon dadurch einen wohlthuenden Eindruck.

CANTOR.

Rede zum Gedächtniss an Ernst Heinrich Weber, gehalten im Namen der medicinischen Facultät am 24. Februar 1876 in der akademischen Aula zu Leipzig von C. Ludwig. Leipzig 1878, bei Veit & Comp. 23 S.

Wenn auch der Verstorbene, dem dieser Nachruf gewidmet ist, vorzugsweise Anatom und Physiologe war, so genügt doch gewiss die kurze Bemerkung, dass derselbe in Gemeinschaft mit seinem Bruder Wilhelm der Begründer der Wellenlehre gewesen ist, um auch unsere Leser auf das von Meisterhand entworfene kleine Lebensbild aufmerksam zu machen, welches zugleich einen Beitrag zur Geschichte der Entwickelung des naturwissenschaftlichen Studiums an den deutschen Universitäten bildet.

Cantor.

Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes. Von Prof. Dr. L. Pochhammer. Kiel 1879, Universitäts-Buchhandlung.

Wie der Verfasser in der Vorrede erwähnt, ist der Zweck dieses Werkes, das sowohl theoretisch als praktisch wichtige Problem des Gleichgewichts eines isotropen elastischen Stabes in grösserer Allgemeinheit zu behandeln, als dies in den darauf bezüglichen Untersuchungen von de Saint-Venant und Kirchhoff der Fall ist. Das Problem soll gelöst werden unter Voraussetzung beliebiger an der Mantelfläche und an den Endflächen des Stabes wirkender Kräfte und ohne dass die Durchmesser des Querschnittes als unendlich klein gegen die Stablänge betrachtet werden. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch eine mit grosser Consequenz durchgeführte Näherungsrechnung, deren Ausgangspunkt die Forderung der Aufgabe bildet, dass der betrachtete Körper Stabform haben, sein Querschnitt mithin klein im Vergleich zur Länge sein soll. Man kann die Lösung insofern als eine vollständige bezeichnen, als die benutzte Näherungsmethode einen noch höheren Grad von Genauigkeit zu erreichen erlaubt, als der ist, bis zu welchem die Rechnungen durchgeführt sind. Für praktische Fälle dürfte indessen schon dieser mehr als ausreichend sein. Von besonderem Interesse ist die Behandlungsweise der Differentialgleichungen, und zwar besonders deshalb, weil sich auf ähnliche Weise eine beliebig angenäherte Integration partieller Differentialgleichungen in allen den Fällen erzielen lassen wird, wo, wie hier, durch die Natur der Aufgabe über die relative Grösse der in die Rechnung eintretenden Ausdrücke Aufschluss gegeben wird.

Das zwölf Druckbogen starke Werk enthält ausser der Einleitung vier Abschnitte. Der erste und theoretisch wichtigste Abschnitt behandelt die Transformation und Integration der elastischen Differentialgleichungen, soweit letztere ausführbar ist, ohne dass eine bestimmte Querschnittsform zu Grunde gelegt wird. Abschnitt II beschäftigt sich mit dem cylindrischen Stabe, dessen Querschnitt ein Kreis ist. Abschnitt III behandelt den Hohlcylinder mit kreisförmigem Querschnitte. Abschnitt IV enthält die angenäherten Differentialgleichungen für einzelne Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes.

In der Einleitung werden auf elementarem Wege die Differentialgleichungen für kleine Formänderungen fester isotroper Körper hergeleitet. Zu Grunde gelegt ist hierbei im Allgemeinen die Kirchhoff'sche Bezeichnung. Abschnitt I beschäftigt sich darauf zuerst damit, die in diesen Differentialgleichungen enthaltenen Variablen, Constanten und Functionen nach ihrer relativen Grösse zu ordnen. Zu diesem Zwecke werden die verschiedenen Grössen verglichen mit der grössten Querdimension $2c$ und der grössten Längendimension $2l$. Die Querschnittscoordinaten x und y gehören hiernach derselben Grössenordnung an wie c, weil ein Verschwinden von c ein solches von x und y nach sich zieht und weil die Maximalwerthe von x oder y höchstens gleich c werden können. Dem entsprechend sind x^n, y^n oder $x^{n-p}y^p$ von derselben Ordnung, wie c^n. Die Ordnung von c^n wird als die n^{te}, die von $\frac{1}{c^n}$ als die $-n^{\text{te}}$ bezeichnet. Alle Ausdrücke, auf deren Grösse der Werth c keinen directen Einfluss ausübt, wie l, z, die Elasticitätsconstanten u. s. w., werden der nullten Ordnung zugerechnet. Schwierigkeiten bereiten bei dieser Eintheilung nur die in Frage kommenden Druckcomponenten, und es lässt sich z. B. aus den S. 42 angestellten Untersuchungen nicht mit Nothwendigkeit erkennen, warum Z_z nicht auch einer niederen als der -2^{ten} Ordnung angehören kann. Der Verfasser ist auch wohl zu dieser Voraussetzung nicht allein durch die dort angestellten Betrachtungen, sondern durch eine frühere Arbeit* gekommen, wie zum Theil aus S. 119 hervorgeht. Die Strenge der Rechnung wird indessen auch hier gewahrt dadurch, dass die weitere Aufgabe in der Form gestellt wird:

„Von welcher Form müssen die Ausdrücke der Verschiebungen ξ, η, ζ sein, damit allein die Kraft Z_z die Ordnung -2 annimmt, die Componenten X_z, Y_z, X_x, Y_y, X_y dagegen eine höhere Ordnung als die -2^{te} haben?"

Zur Lösung dieser Frage werden die für die Druckcomponenten aufgestellten Differentialgleichungen transformirt durch die Substitution

$$\xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \quad \eta = V_1 + V_2 + v_0 + v, \quad \zeta = W_1 + W_2 + w.$$

Hierin soll die Ordnung von U_1, V_1, W_1 niedriger sein, als -1, die von U_2, V_2, W_2 gleich -1, von u_0, v_0 gleich Null, von w grösser als Null und von u und v grösser als 1. Durch Einsetzung in die Differentialgleichungen für die inneren Druckkräfte, deren Form daraus ersichtlich ist, dass z. B.

---

* Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. Borchardt's Journ. LXXXI, S. 33—61.

$$X_x = a \cdot \frac{d\xi}{dx} + (a - 2b)\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right), \quad X_z = Z_x = b\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right),$$

erhält alsdann X_x die Form

$$X_x = a \cdot \frac{d(U_1 + U_2)}{dx} + (a - 2b)\left\{\frac{d(V_1 + V_2)}{dy} + \frac{dW_1}{dz}\right\}$$
$$+ a \cdot \frac{d(u_0 + u)}{dx} + (a - 2b)\left\{\frac{d(v_0 + v)}{dy} + \frac{d(W_2 + w)}{dz}\right\}.$$

Hierauf wird nun der Satz angewendet: Stehen auf verschiedenen Seiten einer Gleichung Grössen, worunter solche, welche gleichen Ordnungen angehören, so kann die Gleichung nur dadurch erfüllt werden, dass die derselben Ordnung angehörenden Grössen einander gleich sind. Es setzt dies allerdings voraus, dass die Grössen X_x, Y_y u. s. w. sich in Summen von der Form $\Sigma k_m x^m y^n$ entwickeln lassen, in denen k_m nicht von x und y abhängt. Unter dieser Voraussetzung ist dann auch mit der Differentiation eines Terms nach x oder y eine Erniedrigung der Ordnungszahl um eine Einheit verbunden. In der angegebenen Gleichung sind dann die Glieder der oberen Reihe von niederer Ordnung als -1 und müssen folglich verschwinden, da X_x höchstens die Ordnung -1 haben soll. Hieraus findet man

$$a \cdot \frac{d(U_1 + U_2)}{dx} + (a - 2b)\left\{\frac{d(V_1 + V_2)}{dy} + \frac{dW_1}{dz}\right\} = 0.$$

Aehnliche Gleichungen liefern die anderen Druckcomponenten und man erhält schliesslich eine hinreichende Anzahl von Differentialgleichungen, um U_1, V_1, W_1 und W_2 daraus zu bestimmen. Zur Bestimmung von u_0 und v_0 werden in den für X_x, X_y und Y_y geltenden Gleichungen $\frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} = 0$ u. s. w die Bestandtheile -1^{ter} Ordnung von X von denen höherer Ordnung getrennt. Man findet alsdann, dass

$$\frac{d}{dx}[X_x]_{-1} + \frac{d}{dy}[X_y]_{-1} = 0 \text{ und } \frac{d}{dx}[X_y]_{-1} + \frac{d}{dy}[Y_y]_{-1} = 0.$$

Hierzu treten aus den Oberflächenbedingungen noch die zwei Gleichungen

$$[X_x]_{-1} \cos\lambda + [X_y]_{-1} \cos\mu = 0 \text{ und } [X_y]_{-1} \cos\lambda + [Y_y]_{-1} \cos\mu = 0.$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man die Bestandtheile -1^{ter} Ordnung von X_x, Y_y, X_y gleich Null setzt.

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man alsdann durch Substitution des für W_2 gefundenen Werthes in den für X_x angegebenen Ausdruck und in den ähnlichen, der für Y_y und X_y besteht, Gleichungen für $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{dv_0}{dx}$ und $\frac{dv_0}{dy}$, aus denen sich u_0 und v_0 ergeben.

U_1 und V_1 sind von x und y unabhängig und nur Functionen von z. W_1 und W_2 sind lineare Functionen, U_2, V_2, u_0 und v_0 Functionen zweiten Grades von x und y. Die Factoren von x und y sind Functionen von z, theilweise in der Form erster und zweiter Differentialquotienten nach z.

Ehe die Bestimmung von u und v erfolgt, werden die der -2^{ten} und -1^{ten} Ordnung angehörenden Terme von ξ, η und ζ vollständig ermittelt. Dazu dienen die für den Stab als starres System geltenden Gleichgewichtsbedingungen. Bei der Aufstellung derselben ist vorausgesetzt, dass die Z-Axe durch die Schwerpunkte der aufeinander folgenden Querschnitte geht und dass die X- und Y-Axe Hauptträgheitsaxen des Querschnitts sind. Durch Einsetzung der bis jetzt für die Druckcomponenten gewonnenen Ausdrücke in diese Gleichgewichtsbedingungen und durch Vergleichung der auf beiden Seiten stehenden Glieder hinsichtlich ihrer Ordnung werden die Bestandtheile -2^{ter} und -1^{ter} Ordnung vollständig ermittelt. Sie stellen sich als Functionen von z und von den gegebenen Oberflächenkräften dar.

Wenn man sich auf diese zwei beträchtlichsten Grössenordnungen von ξ, η, ζ beschränkt, gelangt man schon zu den Sätzen der Navier-schen Biegungstheorie. Für die Biegung in der XZ-Ebene ergiebt sich z. B. der Satz: die Kraft Z_z ist gleich dem Producte aus der Krümmung und der Function $-Ex$. Da nun eine Vernachlässigung der Glieder u, v, w einem Verschwinden von X_x, Y_y, X_y für beliebige Werthe von x, y, z entspricht, so ergiebt sich für diese angenäherte Lösung eine einfache mechanische Erklärung. Es entspricht dieselbe der Auffassung des Stabes als eines Bündels unendlich dünner Prismen mit parallelen Axen, welche aufeinander keine Wirkung ausüben. Dies ist aber die Voraussetzung von Navier.

Nach diesem Excurs erfolgt die Berechnung von u, v, w. Da indessen ohne Rücksicht auf die Form des Querschnittes eine Bestimmung dieser Glieder nicht ausführbar ist, so beschäftigt sich Abschnitt I nur damit, die Differentialgleichungen so zu transformiren, dass nach Einführung einer bestimmten Querschnittsform die Integration derselben erfolgen kann. Zu diesem Zwecke werden die für die Druckcomponenten gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen

$$\frac{dX_z}{dx}+\frac{dY_z}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}=0 \text{ u. s. w.}$$

eingesetzt. Hierin wird alsdann für w eine Summe eingeführt, welche neben Gliedern $\mathfrak{W}_1$ (nullte Ordnung) und $\mathfrak{W}_2$ (erste Ordnung) ein Glied $\mathfrak{w}$ enthält, welches von höherer als erster Ordnung ist. Für $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ entstehen dann die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2}=0, \quad \frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2}=0,$$

zu denen aus den Oberflächenbedingungen noch Werthe für $\frac{d\mathfrak{W}_1}{dn}$ und $\frac{d\mathfrak{W}_2}{dn}$ (n die Normale) hinzutreten. Hierdurch werden aber $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ bis auf eine willkürliche additive Function von z als Functionen von x und y dargestellt. In gleicher Weise werden in u und v die Bestandtheile erster und zweiter Ordnung von denen höherer Ordnung getrennt und $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ (erster Ordnung) ermittelt. Grössen von höherer Ordnung finden in den folgenden Rechnungen keine Berücksichtigung mehr. Würde man aber die unbestimmt gebliebenen Ausdrücke $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ in analoger Weise behandeln, wie w, u, v, so könnte die Rechnung noch weiter geführt werden.

Nach einigen Bemerkungen über den Stab mit veränderlichem Querschnitte erfolgt nun in Abschnitt II die Bestimmung der Componenten von ξ, η, ζ für einen cylindrischen Stab mit kreisförmigem Querschnitte. Bei Berücksichtigung von $\mathfrak{W}_1$ tritt zu ζ ein Ausdruck, der für x und y vom dritten Grade ist. Ein beliebiger Querschnitt $z=z_0$ wird daher durch die der Z-Axe parallele Verrückung in eine Fläche dritten Grades verwandelt, welche durch die XZ-Ebene in der Curve $\zeta = Const.\, x^3$ geschnitten wird.

Zur Ermittelung von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ werden für x und y Polarcoordinaten eingeführt und die Oberflächenkräfte X und Y in Normal- und Tangentialkräfte zerlegt. Für Z_z ergiebt sich dann schliesslich der Ausdruck

$$Z_z = \frac{Fx+Gy}{A} + \frac{h}{C} + \frac{2E}{E_1}\Phi_1 - \left(1+\frac{2\mathfrak{b}}{E}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{c^2}{3}\right)\frac{\frac{d^2F_1}{dz^2}x + \frac{d^2G_1}{dz^2}y}{4A}.$$

Dieser Ausdruck umfasst alle Terme -2^{ter}, -1^{ter} und nullter Ordnung.

Hierin bedeutet C die Fläche und A das Trägheitsmoment des Querschnittes. F und G sind die resultirenden Drehungsmomente um die Y- und X-Axe für die äusseren Kräfte, welche an dem Stabtheile von dem betrachteten Querschnitte bis $z=l$ wirken. h ist für ebendiesen Stabtheil die Summe der Z-Componenten. F_1 und G_1 sind Theile von F und G, für welche die aufgestellten Formeln, des bessern Verständnisses wegen, angeführt werden mögen:

$$F_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z} \int X(\mathfrak{z})\, d\sigma, \quad G_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z}\int Y(\mathfrak{z})\, d\sigma.$$

Hierin bedeutet $d\sigma$ ein Element der Ringfläche, welche durch zwei Verticalebenen $z=\mathfrak{z}$ und $z=\mathfrak{z}+dz$ aus dem Cylindermantel herausgeschnitten wird. $X(\mathfrak{z})$ stellt die X-Componente der an der Stelle $\mathfrak{z}$, $d\sigma$ wirkenden äusseren Kraft dar. Die Integration erstreckt sich über den Theil des Cylindermantels von $\mathfrak{z}=z$ bis $\mathfrak{z}=l$. Die Function Φ_1 wird durch eine unendliche Reihe dargestellt und ihr Werth hängt ausschliesslich von den Kräften ab, welche am Rande des betrachteten Querschnittes wirken. Sind am Rande irgend eines zur Stabaxe senkrechten Querschnittes keine äusseren Druckkräfte vorhanden, so ist Φ_1 für alle Punkte des Querschnittes gleich Null. In diesem Falle sind aber auch $\frac{d^2 F_1}{dz^2}$ und $\frac{d^2 G_1}{dz^2}$ für den betreffenden Werth z gleich Null; der Werth Z_z reducirt sich daher auf

$$Z_z = \frac{Fx + Gy}{A} + \frac{h}{C}.$$

Für X_z und Y_z ergeben sich ähnliche Formeln, wie für Z_z. Aus denselben ist zu erkennen, dass die neutrale Schicht in jedem Querschnitte im Allgemeinen eine krumme Linie bildet. Nur für den Fall, dass $X = Z = 0$ und dass am Rande des betrachteten Querschnittes keine äusseren Kräfte vorhanden sind, geht sie über in die Gerade $y = 0$.

Als specieller Fall wird das Beispiel des auf hoher Kante gleichmässig belasteten und in der Mitte unterstützten Stabes behandelt. Die Berechnung ergiebt, dass auf der obern Seite eine Dehnung, auf der untern eine Zusammendrückung stattfindet, dass aber der grössere Werth von Z_z auf Seite der Compression liegt. Der Punkt, an welchem bei zunehmender Belastung zuerst eine Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze stattfindet, liegt daher auf der untern Seite und in der Mitte des Stabes. Am Schlusse dieses Abschnittes vergleicht der Verfasser die für den cylindrischen Stab gefundenen Formeln mit den früher von ihm gefundenen (Beitrag zur Biegung des Kreiscylinders) und weist die volle Uebereinstimmung der in ganz verschiedener Weise hergeleiteten Resultate nach.

Abschnitt III behandelt, in ähnlicher Weise wie Abschnitt II, den Fall des Hohlcylinders unter der Voraussetzung, dass nur die äussere Oberfläche desselben von Druckkräften in Anspruch genommen wird und dass die Wandstärke klein gegen den Querdurchmesser ist. Die hier gewonnenen Resultate zeigen, dass die Formänderung des Hohlcylinders sich von der des Vollcylinders durch das Hinzukommen einer secundären Biegung unterscheidet. Letztere vollzieht sich in den zur Stabaxe senkrechten Querschnitten. Denkt man sich zwei benachbarte Querschnitte ausgeführt, so schneiden dieselben einen ringförmigen Körper aus, den man als einen kreisförmigen Stab ansehen kann. In diesem Ringe vollzieht sich die secundäre Biegung. Es giebt auch hierin eine neutrale Schicht, welche die gedehnten von den zusammengedrückten Stabtheilen trennt.

Abschnitt IV enthält die Ausführung der Näherungsrechnungen für einen ursprünglich gekrümmten Stab unter den Voraussetzungen: 1. dass eine Ebene existirt, welche den Stab nach seiner Längsrichtung in zwei symmetrische Hälften theilt; 2. dass alle äusseren Kräfte dieser Ebene parallel sind. Damit auch hier wieder die Querschnittscoordinaten als klein gegen die Längendimension betrachtet werden können, werden statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z krummlinige Coordinaten x, r, n eingeführt. Zu diesem Zwecke wird in der Symmetrieebene YZ eine Curve gewählt, welche vollständig im Innern der Anfangslage des Stabes verläuft und die Gleichung $\varphi(p, q) = 0$ hat. p und q sind die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve. Durch einen beliebigen Punkt x, y der YZ-Ebene, welcher in dem Stabe liegt, wird eine Normale auf die Curve gelegt, welche mit der positiven Z-Axe den Winkel n bildet. Das Stück der Normale zwischen ihrem Schnittpunkte (p, q) mit der Curve und dem Punkte x, y ist $\pm r$. Die Coordinaten x, y und r, n hängen alsdann durch die Gleichungen zusammen

$$y = p + r . sin n, \quad z = q + r . cos n, \quad \frac{dp}{dq} = -cot n, \quad \varphi(p, q) = 0.$$

Wie in den früheren Betrachtungen x und y, so ist nun r stets klein gegen die Längendimension und von derselben Ordnung, wie die Querdimension des Stabes. An Stelle der Ausweichungen η und ζ werden die Ausweichungen ϱ und σ eingeführt, von denen die erste dieselbe Richtung hat wie r, die zweite auf dieser Richtung senkrecht steht. Nach denselben Richtungen werden endlich die Oberflächenkräfte und die inneren Druckkräfte zerlegt. Nachdem nun die Differentialgleichungen für die Druckkräfte aufgestellt worden und für ξ, ϱ, σ eine Summe von Grössen verschiedener Ordnung eingeführt ist, führen die nämlichen Betrachtungen, wie in Abschnitt I, zur Bestimmung der Werthe ξ, ϱ, σ und der Druckkräfte. Aus der in erster Annäherung geltenden Lösung ergiebt sich, dass für den ursprünglich krummen Stab ein ähnlicher Satz gilt, wie für den geraden cylindrischen Stab. Bezeichnet nämlich ω den Zuwachs der Krümmung, der durch die Deformation eintritt, so ist S_s proportional der Grösse ω.

Zum Schlusse möge das besprochene Werk noch Solchen, welche sich mit dem Studium der Mathematik beschäftigen, wärmstens empfohlen sein. Sie werden darin, ausser der interessanten Durchführung eines mechanischen Problems, reichen Stoff zu weiteren Studien finden, da Verfasser die analytische Behandlung der speciellen Probleme nur eben andeutet. Von rein theoretischem Standpunkte dürfte indessen die besprochene Behandlungsweise der Differentialgleichungen ein besonderes Interesse beanspruchen.

Ernst Prix.

Cours de calcul infinitésimal, par J. Hoüel, professeur de mathématiques pures à la faculté de Bordeaux. Tome I. XV, 508. *Paris, Gauthier-Villars.* 1878.

Französische Lehrbücher der Mathematik haben zu allen Zeiten eine Art von zwischenvolklicher Bedeutung besessen. Wir wissen nicht recht zu sagen, ob der Grund in dem Geiste der französischen Sprache selbst, ob in der Fähigkeit der Aneignung und der Wiedergabe fremder Gedanken in neuer Form liegt, welche den Franzosen im Allgemeinen auszeichnet, ohne ihm damit selbstständige Erfindungsgabe im Mindesten absprechen zu wollen; aber es ist eine Thatsache, dass die Schriften von Legendre, von Lacroix, von Cournot, von Duhamel, von Sturm weit über die Grenzen Frankreichs hinaus eine wohlverdiente Verbreitung gefunden haben, und wenn wir den Namen J. A. Serret hier vergessen zu haben scheinen, so geschah es absichtlich, weil wir seine Algebra nicht als ein Lehrbuch, sondern als das Lehrbuch betrachten, ohne Mitbewerbung und bis jetzt einzig in seiner Art. Jenen obengenannten Lehrbüchern weitester Verbreitung dürfte das neue Werk des Professors von Bordeaux sich künftig anschliessen, welches seine internationalen Rechte schon auf die in einem französischen Werke seltene Thatsache stützen kann, dass in der Vorrede die Namen Gauss, Grassmann, Hankel, Jacobi, C. Neumann, H. A. Schwarz mit Ehren genannt sind, dass der Verfasser also kein Hehl daraus macht, wie weit er ausländischer, insbesondere deutscher Wissenschaft verpflichtet ist. Allerdings hätten wir gewünscht, auch im Buche selbst, wenigstens bei den wichtigsten Sätzen und den gebräuchlichsten Bezeichnungen, den Namen der Urheber angeführt zu sehen. Welchen Leser sollte es z. B. nicht interessiren, zu wissen, dass i für die imaginäre Einheit von Gauss, die Vertikalstriche, zwischen welchen die Elemente stehen, für die Determinante von Cayley, das Zeichen des bestimmten Integrals von Fourier herrühren u. s. w. Alle derartigen Notizen fehlen aber vollständig.

Die Entstehung des Hoüel'schen Lehrbuches war eine allmälige. In den Jahren 1871 und 1872 gab der Verfasser autographirte Hefte für seine Zuhörer heraus, und als diese eine uns leicht begreifliche weitere Verbreitung fanden, entschloss er sich, dieselben zu vervollständigen und ihnen Form und Umfang eines mehrbändigen Werkes zu verleihen, dessen I. Band nunmehr vollendet vorliegt. So ist diese erste Auflage bis zu einem gewissen Grade schon eine zweite; der Verfasser konnte aus dem Urtheil der Benutzer seiner früheren Hefte über etwa nothwendige Aenderungen sich Kenntniss verschaffen und diese Winke ebenso, wie die befreundeter Lehrer der Mathematik zur Geltung bringen. Mehr als derartige Winke für sicherlich nicht ausbleibende folgende Aufgaben sollen es nicht sein, wenn wir unbedeutende Ausstellungen uns gestatten.

Das Werk beginnt mit einer 102 Seiten starken Einleitung, welche nach Grassmann's Vorgange von den Operationen im allgemeinsten Sinne dieses Wortes, von den verschiedenen Zahlengrössen und von dem unentbehrlichen Hilfsmittel der neueren Analysis, den Determinanten, handelt. In § 72 (S. 39) wird eine aus reellen Grössen bestehende Reihe convergent genannt, „wenn die Summe von k Gliedern derselben, die nach dem n^{ten} Gliede beginnen, unendlich klein ist, sofern n unendlich gross und k beliebig angenommen wird". Wir sind mit dem Verfasser darin einverstanden, dass es von Vortheil ist, jene k späten Reiheglieder in die Definition mit aufzunehmen, aber der gewählte Wortlaut behagt uns darum doch nicht. Es könnte sein, dass die betreffenden k Glieder eine unendlich kleine Summe geben, während die vorhergehenden unendlich vielen (n) Glieder eine unendlich grosse Summe geben, und dann ist die Reihe eben nicht convergent. Will aber die Unmöglichkeit dieser unserer Annahme behauptet werden, so erfordert diese Behauptung selbst unter allen Umständen einen die Definition ergänzenden Beweis. Auch mit der Form von § 83 (S. 46) können wir uns nicht befreunden. Ist r_p diejenige complexe Zahl, deren Modul r und deren Drehungsargument p beziehungsweise $p+2k\pi$ ist, so behauptet Herr Hoüel, $(r_p)^\alpha$ sei unbestimmt, wenn α eine Incommensurable darstellt. Wir sind gleicher Meinung, würden aber den Beweis so fassen: $(r_p)^\alpha = (r^\alpha)_{p\alpha+2k\alpha\pi}$, wo k alle ganzen Werthe von Null bis zu $n-1$ durchläuft, wenn n der Nenner des in Bruchform geschriebenen α ist. Nun ist dieser Nenner bei incommensurablem α unendlich gross, also giebt es unendlich viele Werthe von k oder unendlich viele Werthe von $(r_p)^\alpha$, und das nennt man unbestimmt.

Das auf die Einleitung folgende erste Buch besitzt viele Eigenthümlichkeiten, wenn auch der Verfasser in der Vorrede bemerkt, dass er in die Fusstapfen Duhamel's trete, soweit es um das Grenzprincip sich handle, d. h. um die Wahrheit § 165 (S. 108), dass von zwei Veränderlichen u und v, deren Werthe entweder immerfort einander gleich sind oder einen nur unendlich kleinen Unterschied besitzen, und deren eine einem bestimmten Grenzwerthe sich nähert, auch die andere demselben Grenzwerthe zustrebt, so dass der approximativen Gleichung $u=v$ die strenge Folgerung $\lim u = \lim v$ zu entnehmen ist. Diese Namen der approximativen und der strengen oder genau richtigen Gleichungen sind für den Verfasser mehr als blosse Namen. Sie sind ihm ein Ableitungsverfahren sowohl der Differentiale erster, als höherer Ordnung, und dienen ihm in einer Ausdehnung, welche uns nicht gestattet, ohne allzu ausführlich zu werden, auch nur eine Andeutung davon zu geben. Nur der Ueberzeugung dürfen wir Ausdruck verleihen, dass den Schülern der Hoüel'schen Infinitesimalrechnung die grundlegenden Schwierigkeiten dieser Capitel unserer Wissenschaft weder bemäntelt, noch als unlösbar erscheinen werden. Der Verfasser macht ausdrücklich auf vorhandene Principienfragen aufmerksam. Er geht weder dem Unendlich verschiedener Ordnung, noch Functionen, welche einen Differentialquotienten nicht besitzen, aus dem Wege; er sucht diese und ähnliche Begriffe von allen Seiten her zu beleuchten. Er liebt es überhaupt, wichtige Sätze von den verschiedensten Gesichtspunkten aus zu betrachten, und wir möchten beispielsweise auf den Fundamentalsatz $f(x_0+h)=f(x_0)+h \times f'(x_0+\theta h)$ aufmerksam machen, für welchen (S. 147—150) nicht weniger als drei Beweise gegeben sind, von welchen jeder einzelne volles Interesse verdient und erweckt. Wenn der Verfasser Differential- und Integralrechnung nicht vollständig trennt, vielmehr von Anfang an gemeinschaftlich behandelt, so beruft er auch dafür sich auf Vorgänger. Wohl aber dürfte es ihm eigenthümlich sein, schon bei einem so frühen Augenblick das bestimmte Integral nebst seiner Summendefinition eingeführt zu haben, aus welchem das unbestimmte Integral sich erst herleitet. Bei der dadurch ermöglichten Strenge des Verfahrens nahm es uns einigermassen Wunder, dass Nr. 242 (S. 173) die Veränderung des Integrationsbuchstaben im bestimmten Integral ohne jede Begründung als gestattet erklärt wird, während dieselbe so leicht aus dem Satze folgt, dass die eingeschalteten Zwischenwerthe zwischen den Grenzen des Integrals in der Summendefinition liegen können, wo, und darum auch heissen können, wie sie wollen. Nicht klar wurde es uns ferner, was der Verfasser Nr. 156 (S. 104) darunter versteht, wenn er irgendwelchen Functionen „die gleichen Eigenschaften" wie den analytischen Functionen beilegt. Welche Eigenschaften meint er damit? Endlich bedauerten wir, in Nr. 262 (S. 189) dem freilich althergebrachten, aber durchaus verkehrten Namen der „theilweisen Integration" wieder zu begegnen. Seit Sturm in seinem „*Cours d'analyse*", Bd. I Nr. 328, den weit zutreffenderen Namen der factorenweisen Integration vorgeschlagen hat, halten wir es für Pflicht, demselben das Bürgerrecht einzuräumen.

Das zweite Buch enthält analytische Anwendungen der Infinitesimalrechnung in drei Capiteln. Im ersten Capitel sind Reihenentwickelungen von Functionen abgehandelt, im zweiten analytische Anwendungen der Differentialrechnung im engern Sinne des Wortes als Bestimmungen der Werthe vieldeutiger Formen, Maxima und Minima, und Lehre von den Partialbrüchen. Das dritte Capitel endlich geht von der Integration einfacher Ausdrücke, welche, wie bemerkt, schon im ersten Buche vorkamen, zur Integration verwickelterer Functionen über, bei welcher die verschiedenen Kunstgriffe gelehrt werden, welche hier in Anwendung kommen können, sei es, dass es um unbestimmte, sei es, dass es um bestimmte Integrationen sich handle. Wir heben aus diesem reichen Inhalt nur einen Gegenstand hervor, bei welchem es sich um eine grundsätzliche Frage handelt, in welcher wir mit dem Verfasser durchaus einig gehen. In den meisten Lehrbüchern der Integralrechnung findet sich eine Anzahl von Erörterungen vereinigt unter der Ueberschrift: „Integration mittels unendlicher Reihen.“ Dadurch wird, scheint uns, in dem Schüler eine falsche Auffassung erweckt. Die Integration ist nicht erst zu vollziehen, sie ist vielmehr bereits vollständig als vollzogen gedacht in dem Augenblicke, in welchem das Integralzeichen vor die mit dem Differential der Veränderlichen vervielfachte Function geschrieben wurde. Dass man jenes Integral umzuformen liebt, um es durch andere Functionen auszudrücken, welche bereits aus der Analysis bekannt sind, oder aber dass man neben der Bezeichnung als Integral ein besonderes neues Zeichen einführt, wenn jenes Integral häufiger vorkommt, gehört nicht zum Begriffe der Integration. Ebenso wenig gehört dahin das Studium des Werthes eines solchen Integrals, bei welchem als wirksames Mittel die Reihenentwickelung angewandt zu werden pflegt. Wir freuten uns deshalb sehr, in Nr. 362 (S. 315) von der Reihenentwickelung gewisser Transcendenten, die sich nicht auf elementare Functionen zurückführen lassen, statt von Integrationen durch Reihen zu lesen. Ob es in dem II. Beispiele der genannten Nummer bei der Reihe für den Integrallogarithmus angemessen ist, den Werth der Euler'schen Constanten $C = 0{,}57721566\ldots$ anzuschreiben, ohne ein Wort der Begründung oder der Verweisung auf ein späteres Buch beizufügen, möchten wir bezweifeln.

In der Einleitung sowohl, als in den beiden Büchern, welche gemeinschaftlich den ersten Band bilden, sind vielfach geometrische Versinnlichungen, sowie geometrische Beispiele geboten. In ersterer Beziehung blieb aber der Verfasser stets dem gewiss richtigen Satze getreu, welchen er auch auf S. IX der Vorrede ausspricht, dass eine geometrische Darstellung niemals einen Beweis ersetzen kann, sondern nur zu deutlicherem Bewusstsein bringen soll, was die analytische Darstellung eigentlich will. Ueber die geometrischen Beispiele wollen wir nicht rechten. Eine gewisse Inconsequenz liegt in ihnen, da die Gesammtheit geometrischer Anwendungen des Infinitesimalcalculs erst im dritten Buche vereinigt erscheinen soll. Andererseits wüssten wir freilich nicht, wie jene Beispiele zu entbehren, beziehungsweise zu ersetzen wären.

Unsere Leser werden hoffentlich aus dieser, im Verhältniss zur Bedeutung des Werkes kurzen Besprechung den Eindruck gewonnen haben, den wir gleich zu Anfang hervorzubringen beabsichtigten, dass das Lehrbuch von Herrn Hoüel keines jener Dutzendbücher ist, für welche das Wort Anwendung findet, dass Alles, was entsteht, werth ist, dass es zu Grunde geht; drum besser wär's, wenn Nichts entstünde. Sie werden vielmehr gleich uns der Fortsetzung mit Spannung entgegensehen.

Cantor.

Uebungsbuch für den arithmetischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Dr. CH. FRY. Breslau 1879, A. Gosohorsky's Verlag.

Die vorliegende Sammlung umfasst Uebungsbeispiele für die Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, des Potenzirens und Radicirens. Von den einfachsten Ausdrücken ausgehend, werden alle in der Arithmetik vorkommenden Umformungen berücksichtigt und in einer grossen Anzahl von passend gewählten Rechnungsaufgaben verwendet. Am Schluss des Ganzen sind mit gedrängter Kürze die zu benutzenden Regeln und Lehrsätze auch noch in Worten zusammengestellt, so dass dieses Werkchen sowohl Lehrern, als auch Schülern um so mehr empfohlen werden kann, als gerade die darin behandelten Operationen auf den meisten Lehranstalten viel zu wenig eingeübt werden.

Prof. Dr. L. KIEPERT.

Zahlenbüschel. Mittelpunkt. Aequivalente Vertretung von Punktsystemen. Von WILHELM BUNKOFER, Professor. Beigabe zum Programm des Progymnasiums zu Bruchsal für das Schuljahr 1877—1878. (1878 Progr. Nr. 494.) 4°. 25 S. mit einer Figurentafel.

Der Begriff der Richtungszahl, d. h. einer Grösse, welche der Versinnlichung durch eine Gerade unterworfen ist, die ihrer Länge und ihrer Lage nach betrachtet wird, hat sich nachgerade volles Bürgerrecht auch in elementaren mathematischen Schriften erworben. Herr Bunkofer geht von diesem Begriffe aus und nennt die Vereinigung mehrerer Richtungszahlen, denen der Scheitel- oder Ausgangspunkt gemeinschaftlich ist, ein Zahlenbüschel. Zwei Richtungszahlen vereinigen sich nach dem Parallelogramm der Kräfte, und ganz ähnlich hat man aus mehr als zwei Richtungszahlen, welche addirt werden sollen, ein Polygon zu bilden, dessen letzte schliessende Seite die Summe oder Resultante der addirten Zahlen ist. Schliesst sich das Polygon von selbst, so hat man es mit einem Nullbüschel zu thun gehabt. Diese Nullbüschel spielen in der ganzen Untersuchung eine wichtige Rolle, indem sie bei der Ersetzung von Richtungszahlen durch andere beliebig sich einfügen lassen. Bei eben diesen Fragen kommt auch die Aequivalente eines Zahlenbüschels in Betracht, d. h. das arithmetische Mittel der ein Zahlenbüschel bildenden Richtungszahlen, beziehungsweise der n^{te} Theil der Resultante von n Richtungszahlen. Denkt man sich eine Anzahl von Punkten als gegeben, so wird weiter der Punkt gesucht, der mit allen gegebenen Punkten geradlinig verbunden zum Scheitel eines Nullbüschels wird und als solcher der Mittelpunkt der gegebenen Punkte heisst. Mit Zuhilfenahme des Grenzbegriffes lässt sich auch von einem Mittelpunkte solcher Punkte reden, die ein continuirliches Raumgebilde, eine

Linie, eine Fläche, einen Körper erfüllen. Deren Mittelpunkt stimmt mit dem Begriffe des Schwerpunktes überein, dem somit eine über das Gebiet der Mechanik hinausgreifende allgemeinere Bdeütung zukommt. Anknüpfungen an Grassmann'sche Lehren beschliessen das lesenswerthe Programm.

Cantor.

Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie, nebst vielen Uebungsbeispielen und verschiedenen Anwendungen auf die Naturwissenschaften. Für höhere Lehranstalten, insbesondere für Real- und Gewerbeschulen, sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von Robert Roentgen, Oberlehrer an der städtischen Gewerbeschule in Remscheid. Mit 116 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Jena, Hermann Costenoble. 1879. XIV, 275 S.

Die Frage, ob der mathematische Unterricht an unseren Mittelschulen über die Elemente hinausgehen solle, ob er insbesondere analytische Geometrie, ob er sogar Differential- und Integralrechnung enthalten dürfe, ist eine oft aufgeworfene. Es wird sich bei der Beantwortung derselben vielfach darum handeln, von welcher Qualität an dem bestimmten Orte Lehrer und Schüler sind, und man wird meistens nur in der Lage sein, unbedingt sagen zu können: dieser Unterricht wirkt nützlich, jener schädlich auf diese, auf jene Schüler. Wie mit dem Unterricht, so geht es mit den Lehrbüchern. Wir haben bei unserem Urtheil über das Buch des Herrn Roentgen gewiss zu berücksichtigen, dass er als Leser sich junge Leute von 16—18 Jahren denkt (S. X), wir haben einen Nachdruck auf das Wort des Titels „Anfangsgründe“ zu legen, und können demnach nicht verlangen, dass irgend neuere Methoden vorgetragen werden, dass mehr als die ersten Elemente einer Coordinatengeometrie zur Uebung kommen sollen. Verlangen können wir jedoch eine möglich genaueste Durchsicht des Gebotenen von Seiten des Verfassers, an welcher es derselbe nicht selten hat fehlen lassen. Wir hoffen, es ist nur Druckfehler, wenn Vieta im XV. Jahrhundert gelebt hat (S. 14 Z. 9), wenn der Name der Function von D. Bernoulli (S. 5 Z. 14) herrühren soll; aber geradezu unrichtig ist die an dem letzterwähnten Orte gegebene Erklärung: „Eine Gleichung oder ein Ausdruck von zwei oder mehreren veränderlichen Grössen wird eine Function genannt“ und nicht minder unbrauchbar ist der ganze § 10, Erklärung des Begriffes „analytische Geometrie“. Der Schüler, welcher mit solchen Vorbegriffen an eine höhere Lehranstalt, Polytechnikum oder Universität, kommt, wird, fürchten wir, Vieles vergessen müssen, wenn auch nicht in Abrede gestellt werden soll, dass er die einfachsten Rechnungsaufgaben der analytischen Geometrie recht geläufig zu lösen im Stande sein mag. Dass der Verfasser die Einkleidung einiger solcher Aufgaben den Lehren der Physik entnommen hat, ist gewiss zu billigen.

CANTOR.

Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume. Für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. JOH. MÜLLER, weil. Professor zu Freiburg i. Br. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage, bearbeitet von Dr. HUBERT MÜLLER, Professor, Oberlehrer am kaiserl. Lyceum in Metz. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1878. XIII, 118 S. mit 93 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Dieses Büchlein schliesst sich der Trigonometrie an, welche wir Bd. XXII dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abtheilung S. 187—188, angezeigt haben. Das gleiche Lob, welches wir dort ausgesprochen haben, gilt auch dieser Fortsetzung. Der Leser wird nicht erwarten dürfen, durch Aneignung des ihm hier gebotenen Stoffes ein Meister in der analytischen Geometrie zu werden, er wird aber genügende Vorbereitung darin finden, um gute Vorlesungen über diese Disciplin mit Erfolg hören zu können, ohne genöthigt zu sein, Auffassungen, an die er sich schon gewöhnt hat, wieder zu verbannen. Mehr beabsichtigt aber auch das anspruchslos geschriebene Elementarwerkchen keineswegs. Eines besonderen Lobes würdig scheinen uns die Holzschnitte, namentlich die Darstellung der Raumfiguren, welche der stereometrischen Phantasie durch Schattengebung so sehr zu Hilfe kommen, als es überhaupt möglich ist.

CANTOR.

Das graphische Rechnen und die graphische Statik. Von KARL v. OTT, Director der II. deutschen Staats-Oberrealschule und h. Docent für Baumechanik am k. k. deutschen Polytechnikum in Prag. Vierte gänzlich umgearbeitete Auflage mit 129 Holzschnitten und 2 Tafeln. I. Theil: Das graphische Rechnen. Prag 1879, J. G. Calve'sche k. k. Hof- und Universitätsbuchhandlung (Ottomar Beyer). 8°, VI, 196 S.

Wir müssen unsere Besprechung mit dem Eingeständnisse beginnen, dass die drei früheren Auflagen des uns vorliegenden Buches uns völlig unbekannt geblieben sind, dass wir also nicht wissen, ob die Mängel, welche uns aufgefallen sind, alt übernommene oder bei der Umarbeitung neu entstandene sind. Dies vorausgeschickt, bezeichnen wir jene Mängel als die Folgen einer mangelnden Klarheit über die mathematische Ausbildung der Leser, welche vom Verfasser belehrt werden sollen. Diese Leser wissen Nichts von dem Rechnen mit Logarithmen (S. 72), sie hören aber die Guldin'sche Regel als etwas Selbstverständliches (S. 67); man muss ihnen sagen, was eine geometrische Reihe ist (S. 191 Anmerkung), die Regel von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln dagegen können sie ohne Weiteres anwenden (S. 186); sie zeichnen sich logarithmische Spiralen (S. 21) und Sinuslinien (S. 159), dass aber $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ die Gleichung einer Ebene sei, wird ihnen bewiesen (S. 179 Anmerkung), und der hier gegebene Beweis vollends lässt die Qualität derer, denen er zugemuthet wird, erst recht im Dunkeln — er geht nämlich, kurz ausgesprochen, darauf hinaus: jede Oberfläche, welche die drei Coordinatenebenen geradlinig schneide, müsse eine Ebene sein! Dass ein Buch für so wechselsweise unwissende, vorgeschrittene und leichtgläubige Leser geschrieben, ein einheitliches Gepräge nicht tragen kann, ist begreiflich, und es sticht in dieser Beziehung keineswegs zu seinem Vortheil gegen Vogler's Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln ab, über welche wir im XXIII. Bande dieser Zeitschrift, histor.-literar. Abthlg. S. 190—191, berichtet haben und welche dem Verfasser nicht unbekannt ist (S. 177). Ein Abschnitt nur, der vierte, über den logarithmischen Rechenschieber ist mit einer gewissen Folgerichtigkeit für Techniker, welche das logarithmische Rechnen durch ein weniger genaues mechanisches Verfahren zu ersetzen lieben, ausgearbeitet, und dieser Abschnitt wird auch wohl Schülern von der genannten Art nützlich sein können. Die Ausstattung ist, wenn auch keine glänzende, doch, soviel wir sehen, eine correcte. Nur Fig. 28 auf S. 29 ist uns als unrichtig aufgefallen. Die Gerade EF darf dort nicht durch den Punkt B gehen.

Cantor.

Gyps-Modelle von Flächen zweiter Ordnung, ausgeführt von R. Diesel, Stud. d. königl. techn. Hochschule in München. Ganze Serie, bestehend aus 18 Modellen; I. Gruppe: 7, II. Gruppe: 11 Modelle. Als Serie III der mathematischen Modelle aus der Verlagshandlung von L. Brill, Darmstadt.

Mit dieser neuen Serie geht die Verlagshandlung über den Zweck der früheren Serien hinaus, der auf Unterstützung der Forschung und des höheren Unterrichts gerichtet war. Sie wendet sich mit der ersten Gruppe an die technischen Mittelschulen, mit der zweiten Gruppe an die nächstliegenden Bedürfnisse beim geometrischen Unterricht an Hochschulen.

Jede der beiden Gruppen liefert eine systematische Uebersicht über alle Typen von Flächen zweiter Ordnung. Auf den Modellen der ersten Gruppe sind die Hauptschnitte aufgetragen, auf denen der zweiten die Parallelschnitte, die geraden Erzeugenden, die Krümmungslinien. Nimmt man also noch die aus Kreisschnitten so einfach und sinnreich zusammengesetzten Cartonmodelle von Flächen zweiter Ordnung hinzu, welche in demselben Verlag erschienen sind, so ergiebt sich eine ziemlich vollständige Uebersicht der wesentlichen Eigenschaften dieser Flächen. Insbesondere ist es dankenswerth, dass die Krümmungslinien, von welchen auch die besten bisher existirenden französischen Gypsmodelle keine vollständige Darstellung geben, hier systematisch zur Anschauung gebracht werden. Neben diesen Vorzügen der Sammlung tritt auch der bei den früheren Serien erwähnte wieder auf: die durchaus elegante und wissenschaftlich präcise Ausführung, welche den Modellen auch als Bildungselement zur scharfen Auffassung geometrischer Gestalten ihren Werth sichert.

Die an sich passende Theilung der Serie in zwei Gruppen scheint uns noch nicht für alle Bedürfnisse ausreichend zu sein. Die Möglichkeit einer eigenen Auswahl wäre erwünscht, z. B. eine Zusammenfassung der Modelle, welche die Krümmungslinien enthalten.

Erlangen, Januar 1879. M. Noether.

Lehrbuch der Physik, von Peter Münch. 5. Auflage. Freiburg 1878.

Das Buch ist für die oberen Classen höherer Lehranstalten bestimmt und steht auf dem gewöhnlichen Niveau der vielen Werke dieser Art. Es fehlt der präcise Begriff der Schwerkraft (S. 4 und 62); unverständlich ist der Satz: „Da das Gewicht der Schwerkraft proportional bleibt, so setzt man die ebenfalls unveränderliche Masse gleich dem Verhältnisse des Gewichts zur Schwerkraft“ (S. 5). Vom Metermass heisst es, es sei mit einigen Modificationen in Deutschland eingeführt (S. 2); in einem derartigen Lehrbuch muss dies zu Missverständnissen führen. Der Druck der Atmosphäre ist (S. 5) als Druck von einem Kilogramm auf ein Quadratcentimeter definirt! Es liessen sich noch manche Fälle einer ungenauen Redaction, wie sie bei einer fünften Auflage nicht vorkommen sollten, aufführen: so (S. 157) das Bild eines Punktes in Wasser, das Schema für die Wirkung des Morse'schen Telegraphen zwischen zwei Stationen (S. 300, gleicher Fehler wie in den früheren Ausgaben von Müller-Pouillet), der Satz (S. 336), dass die Fixsterne mit wenigen Ausnahmen ihre gegenseitige Stellung beibehalten u. s. w. Es wäre zu wünschen, dass bei neuen Auflagen die Sprache präciser würde.

P. Zech.

La roue phonique, par Paul la Cour. Copenhague 1878.

Der Verfasser beschreibt ein Instrument, vermittelst dessen er mit Hilfe einer schwingenden Stimmgabel und des galvanischen Stromes eine möglichst gleichmässige Drehung hervorzubringen sucht. Die Stimmgabel schwingt unter dem Einfluss eines Elektromagneten zwischen ihren Zinken in der bekannten Weise und unterbricht zugleich einen galvanischen Strom, der der phonoelektrische genannt wird, in regelmässigen Intervallen. Ein gezahntes Rad von weichem Eisen, um eine vertikale Axe leicht drehbar, wird durch die Einwirkung des phonoelektrischen Stromes auf einen horizontalen, senkrecht zum Radumfang liegenden Elektromagnet in Bewegung erhalten, wenn es einmal in Bewegung gesetzt ist, indem durch den Magnet Zahn für Zahn angezogen wird, sobald beim Vorübergang eines Zahnes eine Welle durch den Elektromagnet geht. Dieses Tonrad kann man sonach insbesondere zur Chronographie verwerthen, in der Telegraphie zur Hervorbringung übereinstimmender Bewegung auf zwei Stationen u. s. w.

P. Zech.

Die Messung des Feuchtigkeitsgehalts der Luft, von Dr. Koppe. Zürich.

Der Verfasser stellt die Formeln und Instrumente zur Bestimmung des Feuchtigkeitsgehalts zusammen und kommt aus Beobachtungen an der Sternwarte Zürich zu dem Resulate, dass das für meteorologische Zwecke meist verwendete Psychrometer Fehler bis 20 und 30 Procent giebt. Unter solchen Umständen müsse man sich nach anderen Instrumenten umsehen. Es wird das schon von Saussure gebrauchte und genau untersuchte Haarhygrometer empfohlen mit besonderer, in dem Schriftchen dargestellter Aufstellung, und seine Genauigkeit an einzelnen Beobachtungsreihen nachgewiesen. Zum Schluss folgen noch einige Angaben über die Vertheilung des Wasserdampfes in unserer Atmosphäre und über den ungeheuren Kraftvorrath, der in diesen Dämpfen liegt.

P. Zech.

Bestimmung der Interferenzen von mehreren isochronen und in gleicher Phase schwingenden Lichtcentren, von Dr. Eichhorn. In Jena gekrönte Preisschrift.

Es wird der Fall behandelt, dass eine Anzahl Lichtcentren in einer Ebene sich befinden, deren Wirkung auf Punkte einer entfernten parallelen Ebene gesucht wird, unter der Annahme, dass es sich nur um Strahlen handelt, die nahezu zu beiden Ebenen normal sind, und Beispiele gegeben, bei denen die Lichtcentra in gerader Linie, in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, eines Quadrats, eines regulären Sechsecks u. s. w. liegen. Es soll dabei gezeigt werden, welche Rolle die Interferenz bei optischen Bildern, insbesondere bei feinen regelmässigen, mikroskopischen Objecten spielen.

P. Zech.

Bibliographie

vom 1. April bis 31. Mai 1879.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissensch. Jahrg. 1879, Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 1878. II. Abth., 7. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, mathemat.-physikal. Classe. Jahrg. 1878. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1879, 1. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. Borchardt. 87. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 14. Jahrg., 1. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1881 mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (187). Redigirt v. W. Förster und F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Tageblatt der 51. Naturforscherversammlung in Cassel 1878. Cassel, Fischer. 8 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Günther, S., Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. Halle, Nebert. 12 Mk.

Reine Mathematik.

Baumert, P., Zur Theorie der elliptischen Functionen. (Dissert.) Breslau, Köbner. 1 Mk.

Koppe, H., Der Jacobi'sche Multiplicator bei Existenz einer auch von der ersten Derivirten nach der Zeit abhängigen Kräftefunction. (Diss.) Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 50 Pf.

Schwirkus, G., Ueber die Differentialgleichungen der relativen Bewegung eines Punktes auf einer rotirenden Curve. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Winckler, A., Aeltere und neuere Methoden, lineare Differentialgleichungen durch einfache bestimmte Integrale aufzulösen. Wien, Hölder. 2 Mk. 20 Pf.

Schüler, F., Neue Theorie des Imaginären. München, Ackermann. 4 Mk.

Logarithmen und Antilogarithmen. Heidelberg, Köster. 80 Pf.

Heilermann und Diekmann, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra. 2. Thl. Essen, Bädecker. 1 Mk. 20 Pf.

Polster, F., Geometrie der Ebene bis zum Abschluss der Parallelentheorie. Würzburg, Staudinger. 80 Pf.

Reye, Th., Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Peschka, V., Elementarer Beweis für den Pohlke'schen Fundamentalsatz. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Kantor, S., Metrische Formeln für d. Kegelschnittbüschel mit 4 reellen Grundpunkten. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Simon & Milinowski, Die Kegelschnitte. 2. Abth.: Ellipse u. Hyperbel. Berlin, Calvary. 1 Mk. 50 Pf.

Reim, H., Wie müssen zwei projectivische Punktfelder aufeinander gelegt werden, damit entsprechende congruente Polygone cyklisch zusammenfallen? (Dissert.) Breslau, Köbner. 1 Mk.

Wallentin, F., Maturitätsfragen aus der Mathematik. Wien, Gerold. 3 Mk. 60 Pf.

Encyclopädie der Naturwissenschaften. 1. Abth., 2. Lief. Handbuch der reinen Mathematik. 1. Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

Prüsker, A., Der Tangentometer zum Höhenmessen und Nivelliren. Wien, Lehmann & Wentzel. 1 Mk. 60 Pf.

Marcks und Balke, Das Terrainrelief, seine Aufnahme mit distanzmessenden Winkelinstrumenten und seine Darstellung durch Horizontalcurven. Leipzig, Scholtze. 2 Mk. 40 Pf.

Heger, F., Barometrische Höhenmessungen in Nordgriechenland. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Rühlmann, M., Hydromechanik. 2. Ausg., 1. Heft. Hannover, Hahn. 5 Mk.

Jabrisch, P., Ueber die Transversalschwingungen eines Cylinders und einer Kugel. (Dissert.) Breslau, Köbner. 1 Mk.

Handbuch der Navigation, mit besonderer Rücksicht auf Compass, Chronometer und die neuesten Methoden der Ortsbestimmung. Berlin, Mittler. 6 Mk.

Galle, F., Mittheilungen der Sternwarte zu Breslau über geographische und klimatologische Ortsverhältnisse nebst geschichtl. Nachrichten u. Tabellen. Breslau, Maruschke & Berendt. 7 Mk. 20 Pf.

KÜHNERT, F., Ueber die Bahn des Planeten Hilda (153). (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

RIECKE, E., Ueber das ponderomotorische Elementargesetz der Elektrodynamik. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Physik und Meteorologie.

WÜLLNER, A., Compendium der Physik für Studirende. Leipzig, Teubner. 9 Mk. 60 Pf.

WROBEL, E., Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Rostock, Werther. 2 Mk. 40 Pf.

BALLAUFF, L., Die Grundlehren der Physik in elementarer Darstellung. 2. Lief. Langensalza, Beyer. 1 Mk.

KELLER, H., Physische Wandkarte von Europa. 6 Blatt. Zürich, Keller. 9 Mk. 80 Pf.

PESCHEL, O., Physische Erdkunde, herausgegeben von G. LEIPOLDT. 1. Lief. Berlin, Duncker & Humblot. 2 Mk.

LANG, V. v., Neue Beobachtungen an tönenden Luftsäulen. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

RIESS, P., Abhandlungen zur Lehre von der Reibungselektricität. 2. Bd. Berlin, Hirschwald. 5 Mk.

MOHN, H., Grundzüge der Meteorologie. 2. Aufl. Berlin, D. Reimer. 6 Mk.

BRUHNS, C., Das meteorologische Bureau für Witterungsprognosen im Königreich Sachsen. Leipzig, Engelmann. 1 Mk.

HANN, J., Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und Richtung des Windes. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 50 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ueber den Foucault'schen Pendelversuch.

Eine historisch-didaktische Studie

von

O. Röthig.

Die erste Nachricht über seinen bekannten Pendelversuch giebt Foucault in den „*Comptes rendus des séances de l'académie des sciences*", *Paris* 1851, *pag.* 135—138. Er setzt dort zunächst die Erscheinung auseinander, welche ein senkrecht über einem der Erdpole aufgehängtes und in einer Ebene schwingendes Pendel einem Beobachter darbieten müsste, welcher in der Nähe des Poles auf der Erde steht, also an der Drehung der Erde theilnimmt. Dieser Beobachter wird meinen, er selbst stehe fest im Raume und die Schwingungsebene des Pendels drehe sich um die Verlängerung der Erdaxe rückläufig, also im Sinne der Bewegung der Gestirne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie die Erde selbst. Dann fährt Foucault wörtlich folgendermassen fort:

„... *Pour determiner la loi suivant laquelle varie ce mouvement sous les diverses latitudes, il faut recourir soit à l'analyse, soit à des considérations mécaniques et géometriques, que ne comporte pas l'étendue restreinte de cette note: je dois donc me borner à énoncer que les deux méthodes s'accordent, en negligeant certains phénomènes secondaires, à montrer le déplacement angulaire du plan d'oscillation comme devant être égal au mouvement angulaire de la terre dans le même temps multiplié par le sinus de la latitude ...*"

Der letzte Satz enthält das sehr bekannte sogenannte Sinusgesetz, über welches im Folgenden einige weitere Betrachtungen angestellt werden sollen.

Zunächst ergiebt das Vorhergehende, dass Foucault dieses Gesetz nicht begründet, sondern nur behauptet; ferner, dass er selbst es nur näherungsweise für richtig hält, denn das soll der Satz „*en négligeant etc.*" doch wohl aussagen.

In demselben Bande der *Comptes rendus, pag.* 157—159, folgt dann eine diesen Gegenstand betreffende Note von Binet. Er giebt darin nur Resultate, welche aus den mechanischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Rechnung gefolgert sind. Die Herleitung der Resultate selbst behält er einer späteren Arbeit vor. Aber auf den Schluss der hier erwähnten Binet'schen Note folgt wörtlich das Nachstehende:

„*A l'occasion du Mémoire de M. Binet, M. Liouville expose de vive voix, avec détail, une méthode synthétique qui lui parait rigoureuse aussi. Cette méthode est fondée sur l'examen successif de ce qui arriverait:* 1⁰. *à un pendule oscillant au pôle;* 2⁰. *à un pendule oscillant à l'équateur, soit dans le plan même de l'équateur, soit dans le plan méridien, soit enfin dans un plan vertical quelconque. On passe de là au cas général d'un pendule oscillant à telle latitude qu'on voudra, par la considération dont parle M. Binet; c'est-à-dire en décomposant la rotation de la terre autor de son axe en deux rotations autour de deux axes rectangulaires, dont l'une est la verticale du lieu de l'observateur.* „„*L'idée est bien simple, dit M. Liouville; elle a du se présenter même à tout le monde, après la communication de M. Foucault, qui rendait tout facile: mais les développements que j'ai ajoutés constituent, je crois, une démonstration mathématique qui se suffit à elle-même, et qui donne tout ce que peut donner le calcul.*"""

Auf den Seiten 197—205 desselben Bandes der „*Comptes rendus*" giebt dann Binet eine ausführliche Herleitung seiner obenerwähnten Resultate. Er geht aus von Gleichungen, die Poisson für ein ähnliches Problem (*Sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la terre*) im 26. Bande des Polytechnischen Journals im Jahre 1838 gegeben hat und die mit geringen und sofort verständlichen Abänderungen auch für das vorliegende Problem gelten. Aber ohne es irgendwo zu sagen, vernachlässigt Binet in den Poisson'schen Gleichungen alle Glieder mit dem Factor n^2, wo n die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet. Man vergleiche hierzu *Binet, Comptes rendus, l. c. pag.* 198, Gleichungen (a), mit *Poisson, Journal de l'école polytechnique, l. c. pag.* 15, Gleichungen (*b*). Binet behandelt daher das Problem von vornherein nur näherungsweise. Er führt dann in seine Gleichungen dieselben Vernachlässigungen ein, welche man machen muss, um zu zeigen, dass ein Pendel isochron schwingt, und gelangt endlich mit allen diesen Annahmen zu dem Resultate:

„Bei dem Foucault'schen Pendelversuche schwingt das Pendel im Allgemeinen wie ein Raumpendel, oder die Projection der Schwingungscurve auf den Horizont ist im Allgemeinen eine Ellipse. Aber die Axe dieser Ellipse dreht sich rückläufig mit einer Geschwindigkeit gleich n, multiplicirt mit dem Sinus der Breite des Beobachtungsortes." (*Comptes rendus, l. c. pag.* 159 und 203.)

Folgt in demselben Bande der *Comptes rendus* eine den Fou-
ndelversuch betreffende Note von Poinsot, *pag.* 206–207,
en beginnt:

*"abord que le phénomène dont il s'agit dans cette expé-
ond, ni de la gravité, ni d'aucune autre force. Le
s le plan d'oscillation d'un pendule simple
urner autour de la verticale dans le même sens
un tour entier en vingt-quatre heures si l'on
qu'une fraction marquée par le sinus de
rience: ce mouvement, dis-je, est un
et dont l'explication doit être donné
Foucault, et non point par des
rent pour rien."*

n, wie Liouville und Poinsot,
Sinusgesetzes und die Möglichkeit seines
pien der Dynamik. Da ist es um so mehr zu
nicht ausführlicher den Beweis gegeben haben, *qui
ne peut donner le calcul.*

sind seit dem Jahre 1851 und bis heute die Herren an ihre
getreten, welche in Lehrbüchern auch diesen Gegenstand behandeln. Wunderbarerweise ist jedoch der Beweis, welcher sich in den Lehrbüchern vorfindet, durchaus keine Ausführung des oben von Liouville und Poinsot angedeuteten Weges. Es mag den Herren wohl etwas bedenklich erschienen sein, Drehungen zu zerlegen, besonders endliche. Man hat es deshalb vorgezogen, einen ganz neuen Beweis zu erfinden. Dieser ist dann in die meisten Lehrbücher übergegangen und die für denselben nöthige Figur prangt sogar in stattlicher Ausführung in solchen Hörsälen, wo vorzugsweise die Wissenschaft docirt werden soll.

Und worin besteht der Beweis? Es lohnt sich nicht, darauf einzugehen. Wer nicht gewöhnt ist, Beweise auf Autoritätsglauben hin anzunehmen, wer sich noch etwas Kritik bewahrt hat, wird bald die Schwächen dieses sogenannten Beweises erkennen, der kaum für eine unendlich kleine Zeit und höchstens dafür allenfalls giltig ist, während es bei dem Foucault'schen Versuch gerade darauf ankommt, das Pendel möglichst lange in Schwingung zu erhalten, und Foucault auch alle Mühe darauf verwandt hat, dies zu erreichen.

Nun hat zwar Herr Lottner (Crelle's Journal, Bd. 52 S. 52) eigens zu dem Zwecke eine Arbeit über den Foucault'schen Pendelversuch geschrieben, um die Verfasser von Lehrbüchern zu belehren, dass ihr Beweis nicht richtig sei. Ferner ist mir über denselben Gegenstand bekannt eine Arbeit des Herrn Dumas (Crelle's Journal, Bd. 50 S. 52) und endlich, in dem in Poggendorff's Annalen, Bd. 92, stehenden Auszuge, eine Arbeit von Hansen, welche ursprünglich in den Verhandlungen der Danziger naturforschenden Gesellschaft, Bd. 5 Heft 1, publicirt ist. Alle diese Arbeiten zeigen, dass das sogenannte Sinusgesetz nur sehr näherungsweise gilt, so wie dies Binet behauptete; aber sie zeigen es mit Anwendung der mechanischen Bewegungsgleichungen, während doch *les principes de dynamiques n'y entrent pour rien.*

So ist es denn erklärlich, dass die Verfasser von Lehrbüchern sich um diese Arbeiten nicht gekümmert haben und dass sie bis heute noch den obenerwähnten Beweis publiciren, selbst nachdem Herr Schellbach das geschrieben, was man in seinem Buche „Neue Elemente der Mechanik, Berlin 1860", S. 248 nachlesen kann.

Bei dieser Lage der Sache wird es zweckmässig sein, den Foucault'schen Pendelversuch etwas genauer zu untersuchen.

Man betrachtet bei diesem Versuche den Mittelpunkt der Erde als festen Punkt, die Erde selbst als eine homogene Kugel vom Radius r, welche sich um eine feste Axe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit n rechtläufig dreht. Eine in der Nähe der Oberfläche der Erde befindliche Masse wird dann von der Erde mit einer nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Kraft angezogen. Ist die soeben erwähnte Masse die eines mathematischen Pendels von der Länge l an einem mit der Erde fest verbundenen Aufhängepunkte, dessen geographische Breite φ sei, und schwingt das Pendel, so sieht man ferner während der ganzen Dauer der Bewegung die anziehende Kraft der Erde als constant und parallel dem nach dem Aufhängepunkte gezogenen Erdradius an. Vorstehende Annahmen sind so lange gestattet, als das Verhältniss aller hier in Betracht kommenden Längen zu r als Null oder, wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, r als unendlich gross angenommen werden darf.

Das Pendel hänge nun zunächst in der Gleichgewichtslage.

Pag. 137 der *Comptes rendus* vom Jahre 1851 schildert Foucault genau, auf welche Weise sein Pendel in Bewegung gesetzt wird. Aus leicht ersichtlichen Gründen geschieht dies nicht durch einen Stoss gegen die Masse des Pendels, sondern dadurch, dass das Pendel mit Hilfe eines an der Masse desselben befestigten organischen Fadens aus seiner Gleichgewichtslage gezogen und nun der Faden an einem mit der Erde unveränderlich verbundenen Punkte befestigt wird. Nachdem das ganze System zur Ruhe gekommen, hat jetzt das Pendel eine neue, willkürliche, von der Gleichgewichtslage verschiedene Anfangslage. Nun brennt Foucault den Faden durch und setzt so das Pendel in Schwingungen.

Werde dieser Versuch zunächst an einem Orte $\varphi = 90^0$, also einem der Pole ausgeführt.

So lange der Faden noch nicht durchgebrannt ist, habe der Schwerpunkt der Masse des Pendels von der eigentlichen Gleichgewichtslage des Pendels die Entfernung e. In Bezug auf die Erde ist dann das

Pendel allerdings in einer relativen Ruhelage. Aber die Rotation der Erde soll doch ausdrücklich berücksichtigt werden. Dann ist in Bezug auf seine absolute Bewegung im Raume das Pendel nicht in Ruhe, sondern, so lange der Faden noch nicht durchgebrannt ist, bewegt sich der Schwerpunkt der Masse des Pendels auf einem Kreise mit dem Radius e, das Pendel selbst auf der Oberfläche eines geraden Kegels. Der Schwerpunkt der Masse des Pendels hat also in jedem Augenblick eine Geschwindigkeit ne, gerichtet längs einer Tangente des Kreises oder **senkrecht** gegen die Ebene durch die Gleichgewichtslage und die augenblickliche Stellung der Anfangslage.

Im Moment des Durchbrennens ist Alles ebenso. Das Pendel hat also in diesem Augenblicke

1. eine von der Gleichgewichtslage verschiedene Anfangslage;
2. eine Anfangsgeschwindigkeit ne, senkrecht gerichtet gegen die Ebene durch Gleichgewichtslage und Anfangslage;
3. es steht unter der Wirkung der anziehenden Kraft der Erde.

Das Pendel wird also sicher ein **Raumpendel, es hat gar keine Schwingungsebene**, die sich drehen könnte, und die vorstehende einfache Betrachtung lehrt für diesen Fall in der That *tout ce que peut donner le calcul et les principes de dynamiques n'y entrent pour rien.*

Aber wenn das Pendel über einem Orte des Aequators aufgehängt ist, wo $\varphi = 0$?

Bei dem Foucault'schen Pendelversuch will man immer finden, wie die wirkliche Bewegung des Pendels im Raume einem Beobachter auf der Erde erscheint. Das heisst doch nichts Anderes, als: aus der absoluten Bewegung des Pendels im Raume soll die relative Bewegung gegen die Erde gefunden werden. Diejenigen, welche das sogenannte Sinusgesetz für richtig halten, gehen, wenn man sich bei ihren Auseinandersetzungen überhaupt Etwas denken darf, aus von der Annahme, dass die absolute Bewegung des Pendels im Raume die eines ebenen Pendels sei. Dass dies falsch, ist ohne Weiteres klar. Denn der Aufhängepunkt bewegt sich auf einem Kreise mit dem Radius $r + l$, wenn die Entfernung des Aufhängepunktes von der Erdoberfläche gleich der Länge des Pendels genommen wird. Trotzdem könnte die relative Bewegung gegen die Erde die eines ebenen Pendels werden. Aber wie ist dies durch blosse Ueberlegungen ohne die mechanischen Bewegungsgleichungen zu entscheiden? Man könnte Folgendes sagen: Wird e gegen r vernachlässigt, so bewegt sich der Schwerpunkt der Masse des Pendels, so lange der Faden noch nicht abgebrannt ist, auf einem Kreise mit dem Radius r. Relativ gegen den Aufhängepunkt hat also die Masse des Pendels eine rückläufige Geschwindigkeit von der Grösse $n(r+l) - nr$

$=nl$, gerichtet längs einer Tangente des Kreises, die mit der Ebene durch Gleichgewichtslage und Anfangslage einen constanten, im Allgemeinen von Null verschiedenen Winkel bildet. Im Moment des Abbrennens des Fadens ist dies ebenso, das Pendel befindet sich also wesentlich in derselben Lage, wie vorher, und wird wieder ein Raumpendel. Das soll durchaus kein Beweis sein, aber es stimmt im Ganzen mit dem Resultate der Rechnung.

Oder wollte man etwa die oben dargestellte Anfangsgeschwindigkeit nl vernachlässigen, obgleich die Rotation der Erde berücksichtigt werden soll?

Das würde zunächst sicher die erhaltenen Resultate zu nur näherungsweise richtigen machen und wäre im Uebrigen sehr eigenthümlich. Denn bei dem Benzenberger'schen Fallversuche, ein dem hier behandelten sehr nahe stehendes Problem,* ist in den gewöhnlichen, die Rechnung bei Seite lassenden Betrachtungen desselben die oben erhaltene Anfangsgeschwindigkeit der einzige Grund für die östliche Abweichung des fallenden Steines. Eine Grösse an einer Stelle behalten, weil es bequem ist, und aus demselben Grunde an einer gleichbedeutenden Stelle weglassen, wäre aber doch ein Verfahren, das sich nicht näher bezeichnen lässt.

Soll man nun noch von dem allgemeinen Falle reden, wo das Pendel über einem beliebigen Orte der Erde von der Breite φ aufgehängt ist?

Es bedarf wohl keiner Worte mehr, um die Behauptung zu begründen, dass die Sache keineswegs erschöpfende Ueberlegungen, ähnlich den vorhergehenden, auch für diesen Fall allein schon zeigen: Das Pendel wird ein Raumpendel übereinstimmend mit dem Resultate der Rechnung.

So fällt denn das Phantom der Schwingungsebene und also auch der Drehung derselben schon vor so einfachen Betrachtungen, wie die oben angestellten, und *les principes de dynamiques n'y entrent pour rien.* Es bleibt nur das näherungsweise richtige, von Binet durch den Calcul gefundene Resultat, welches oben in einer Form gegeben wurde, die geeignet ist, der Vorstellung zu Hilfe zu kommen. Allerdings ist die Ellipse, von der dort gesprochen wurde, im Allgemeinen so lang gestreckt, dass sie dem Beobachter meistens als gerade Linie erscheinen wird. Und sobald oder soweit dies geschieht, gilt das sogenannte Sinusgesetz. Wann aber und in welchem Umfange oder für welchen Grad der Näherung dies geschieht, kann durch nichts Anderes entschieden werden, als durch die Rechnung, und es giebt keine andere Methode, *qui donne tout ce que peut donner le calcul.*

---

* In beiden Problemen handelt es sich im Wesentlichen um die Bewegung eines schweren Körpers mit Rücksicht auf die Drehung der Erde.

Ich erwähne noch kurz, dass der Foucault'sche Pendelversuch eigenthümliche Modificationen des Binet'schen Resultates zeigen kann, die man in den oben citirten Arbeiten, besonders bei Hansen nachlesen möge.

Ist es denn nun so sehr schwer, das Problem des Foucault'schen Pendelversuchs sachlich zu behandeln?

Nimmt man zunächst ein im Raume festes, also von der Bewegung der Erde unabhängiges Coordinatensystem, und schreibt für dieses die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen hin, so hat man die Gleichungen der absoluten Bewegung des Pendels im Raume.

Nimmt man dann ein zweites, mit der Erde fest verbundenes Coordinatensystem, so macht dieses die Drehung der Erde mit, erscheint daher einem Beobachter auf der Erde als unveränderlich. Nimmt man endlich die Formeln der Coordinatentransformation, so geben sie die Werthe der ursprünglichen Coordinaten, ausgedrückt durch die neuen, und diese in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen eingeführt, ergeben die streng richtigen Gleichungen der relativen Bewegung des Pendels in Bezug auf die Erde.

Wer aber in seinem Lehrbuche so nicht verfahren kann oder will, der sage doch einfach: Mit Hilfe der höheren Mathematik folgt, dass das Sinusgesetz näherungsweise richtig ist. Vielleicht regt er dadurch einen strebsamen Leser an, die eigentliche Quelle dieser Behauptung kennen zu lernen. Beweise aber, wie der leider so vielfach abgedruckte, erzeugen nichts Anderes, als das, was dem wahren Forscher so fern liegt: Dünkel und Ueberhebung, Verachtung vor einer Wissenschaft, die sich mühselig quält, das aus schwierigen Gleichungen abzuleiten, was man mit einem paar Strichen auffinden zu können glaubt.

Recensionen.

Handbuch der Vermessungskunde. Von Dr. W. JORDAN, Professor der Vermessungskunde am grossherzogl. Polytechnikum zu Carlsruhe. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage des „Taschenbuchs der praktischen Geometrie". Zweite, dritte und vierte (letzte) Lieferung. Stuttgart, Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung. 1877 und 1878.

Die Erwartungen, welche der Unterzeichnete aussprach, als er im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift* über die erste (18 Bogen starke) Lieferung des genannten Werkes referirte, haben sich vollkommen bestätigt: Fortsetzung und Schluss sind in der jenen zunächst erschienenen Theil auszeichnenden Weise geschrieben und es ist damit das Jordan'sche „Handbuch der Vermessungskunde" zu einer höchst werthvollen Bereicherung der Literatur der Geodäsie geworden.

Die zweite Lieferung bietet zunächst die Vollendung des in der ersten begonnenen Capitels über polygonale Züge. Den allgemeinen Betrachtungen sind gut gewählte Beispiele angefügt und mit löblicher Ausführlichkeit behandelt. Hierbei ist auch die neuere Kreistheilung benutzt worden, deren Vorzüge in manchen Gegenden Deutschlands nach Ansicht des Referenten bis jetzt noch viel zu wenig Beachtung finden.

Die beiden folgenden Abschnitte beziehen sich auf die Triangulirung, ihre Genauigkeit und Ausgleichung. Sie widmen derselben nahezu hundert Seiten und bieten in Bezug auf Theorie und Praxis so Reichhaltiges, dass die meisten Benutzer des Buches hier wohlthun werden, die für ihre besonderen Bedürfnisse geeignete Auswahl zu treffen.

Im X. Capitel (circa 50 Seiten), welches vom Nivelliren handelt, gelangen nur solche Instrumente zur Besprechung, die die wagrechte Sehlinie mittelst einer Röhrenlibelle liefern, die älteren nicht. Die Einrichtung der vom Verfasser für das Nivelliren von Längenprofilen vorgeschlagenen Tabellen ist von bestechend wirkender Einfachheit, aber diese Einfachheit erzeugt — mindestens für wenig Geübte — den Nachtheil, dass Ablesungsfehler und Rechenfehler sich schwer vermeiden

---

* S. 27 der historisch-literarischen Abtheilung.

lassen. Am besten werden Letztere wohl dann beseitigt, wenn man beim Bearbeiten von Längenprofilen die Wechselpunkte mit doppelter Anbindung nivellirt und die Tafeln so einrichtet, dass die Rechnung sich selbst controlirt. Der hierdurch entstehende Mehraufwand an Zeit wird reichlich belohnt.

Die Anleitung zum Auftragen von Längenprofilen hätte wohl ausführlicher gegeben werden sollen, weil in den Kreisen der Ingenieure in dieser Beziehung Bräuche bestehen, die nicht ignorirt werden dürfen.

Das Nivelliren der Flächen ist sehr knapp behandelt, empfängt aber später, bei der Tachymetrie, Ergänzung. Desto ausführlicher werden die Präcisionsnivellements, die Genauigkeit des Nivellirens und die Ausgleichung der Fehler besprochen, wobei ausser den Arbeiten des Verfassers auch die von Bauernfeind, Hagen, Helmert, Hirsch, Morocovics, Plantamour, Vogler u. A. Benutzung finden.

Dem barometrischen und dem trigonometrischen Höhenmessen sind die folgenden 125 Seiten gewidmet; sie bieten das Zugehörige aus den Naturwissenschaften, verwenden die vom Verfasser zuerst in den „Astronomischen Nachrichten“ veröffentlichte Refractionstheorie, wie auch die Untersuchungen von Förster, Koppe, Rühlmann, Schreiber, Wild und mehreren anderen, theilweise schon früher genannten Forschern. Das Federbarometer (Aneroid) ist ausführlich behandelt; viele Hilfstafeln für die beiden genannten Arten des Höhenmessens sind beigegeben.

Bei Besprechung der Distanzmesser und der Tachymetrie (zusammen 70 Seiten) erhalten manche „neue Erfindungen“ eine scharfe Abfertigung. Die Instrumente von Reichenbach (Porro), Stampfer, ein Tachymeter-Theodolit (von Sickler, nach Jordan) und die Bussole werden ausführlich untersucht, hingegen finden der Vielmesser von Jähns, das Tachymeter von Kreuter und das Tachygraphometer von Wagner (Tinter) nur flüchtige Erwähnung. Der Herr Verfasser macht diesen Instrumenten den Vorwurf, „dass sie die kostbare Feldarbeitszeit theilweise zu Operationen verwenden, welche bequemer, sicherer und rascher im Zimmer ausgeführt werden können“; auch spricht er, „ohne praktischen Erfahrungen vorgreifen zu wollen“, die Ueberzeugung aus, es sei mit den genannten und ähnlichen Apparaten dem gewöhnlichen, geschickt gehandhabten Tachymeter-Theodolit „keine erfolgreiche Concurrenz“ zu bieten. Möge dies allen Denen, welche derartige praktische Erfahrungen mittheilen können, eine Anregung sein, Material zur Beantwortung dieser Tachymeterfrage zu liefern.

Was zum Vortheile der ein günstiges Fehlerfortpflanzungsgesetz aufweisenden Bussolenzüge gesagt ist, verdient volle Beachtung. Wird die Aussicht durch dichtes Gebüsch gehemmt und kommt es auf grosse Genauigkeit nicht an, so sind diese Züge sehr zu empfehlen, insbesondere, wenn man dabei den Hängegradbogen und gleichgrosse Stahlbandlängen benutzen kann.

Bezüglich der Gewinnung solcher Situationspläne, welche Horizontalcurven enthalten sollen, hat der Autor die Ansicht, dass die genannten Linien in fast allen Fällen aus gut gewählten Höhenpunkten (unter Benutzung von Leitcurven) mittelst der Construction herzuleiten, nicht direct aufzusuchen und aufzunehmen seien. Er nennt das Construiren die „allein rationelle Methode", hält es für „ganz unmöglich", das directe Aufsuchen im Grossen anzuwenden, und sagt, die Ingenieurpraxis sei „auch längst über derartige unglückliche Versuche hinweggeschritten". — Darüber, ob das directe Aufsuchen der Schichtlinien als eine der beim geodätischen Prakticum an technischen Hochschulen vorzunehmenden Arbeiten empfehlenswerth sei, oder ob ihm auch in dieser Beziehung der Stab gebrochen werden soll, spricht sich der Herr Verfasser nicht deutlich aus; der Referent aber ist der Meinung, man könne es hierbei nicht entbehren. Wer nämlich niemals Horizontalcurven direct aufgesucht hat, wird — was man immer an jungen Studirenden der Ingenieurwissenschaften beobachten kann — den Lauf jener Linien meist falsch abschätzen, mithin zum Construiren derselben nicht ebenso gut sich eignen, wie der, welcher das directe Aufsuchen einige Zeit lang übte.

Dass der Verfasser bei der nach seinen Angaben von Sickler construirten distanzmessenden Kippregel (mit Gradbogen) „auf Fadenkreuzcorrectionsschrauben verzichtet", vermag Referent nicht zu billigen. Ein anderes Fernrohrlineal, als das Jordan-Sickler'sche, ist nicht beschrieben, auch wird weder Abbildung, noch Beschreibung irgend einer Messtischconstruction geboten; vielmehr scheinen diese Constructionen als bekannt vorausgesetzt zu sein.

Die für Kippregeln vorgeschlagene Prüfung und Berichtigung ist nach Ansicht des Unterzeichneten dann nicht völlig genügend, wenn man durch Messtischaufnahmen denjenigen höchsten Genauigkeitsgrad erlangen will, welchen sie überhaupt zu liefern vermögen. Ein „Parallellineal" für das Visiren zu empfehlen, kann Referent nicht unbedingt billigen, denn wer sich auf Messtischarbeiten tüchtig eingeübt hat, wird ohne eine derartige Hilfsvorrichtung meist schneller und sicherer aufnehmen. Dass im Allgemeinen nicht Nadelstiche, sondern Randmarken (welche mit flachgespitztem Bleistifte gezogen wurden) die Richtungen zu bezeichnen haben, wenn die grösste Sicherheit erzielt werden soll, hätte hier doch wohl betont werden müssen, weil darauf sehr viel ankommt.

Der Umstand, dass das Capitel vom Messtisch, der Kippregel und deren Anwendung zu gewöhnlichen, wie auch zu tachymetrischen Aufnahmen kaum 8 Seiten umfasst (in einem Werke, welches der „niederen Geodäsie" mehr als 700 Seiten widmet), kennzeichnet schon den Standpunkt, welchen der Herr Verfasser den Messtischarbeiten gegenüber einnimmt; noch besser aber charakterisiren diesen Standpunkt die launig-freundschaftlichen Schlussworte: „Wir wünschen dem Messtische ein baldiges Eingehen zur wohlverdienten Ruhe bei der Canalwaage und dem Astrolabium.“

Bei dem im nächsten Capitel behandelten Abstecken von Linien ist auf die Tunnel, insbesondere auf die am Mont-Cenis und St. Gotthard, eingegangen und zwar mit Benutzung des darüber früher Veröffentlichten. Die Besprechung des Absteckens der Eisenbahncurven nimmt auch auf diejenige Methode Rücksicht, bei welcher zunächst die Kreisbögen aus dem Plane ins Feld übertragen und dann die Geraden berührend angelegt werden. Es wird ferner die günstigste Wahl der Bestimmungspunkte und Bestimmungstangenten untersucht, was zuerst von Helmert (im Jahre 1875) geschah.

Auch die „Uebergangscurven“, welche man beim Eisenbahnbau anwendet, um, falls Kreisbögen an Gerade zu schliessen sind, die Krümmungen allmälig ineinander überzuführen und der Bahn überall eine der Biegung entsprechende Ueberhöhung des äusseren Schienenstranges zu ertheilen, werden hier beachtet. Die Monographie von Helmert hat dabei als Unterlage gedient. Es wird die Gleichung der Uebergangscurve unter der Annahme hergeleitet, dass die Strangüberhöhung gleichförmig wachse und die Curve sehr flach sei, damit man in den für Bogenlänge und Krümmungshalbmesser geltenden Formeln

$$s=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad \varrho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

y'^2 gleich Null setzen dürfe. Am Schlusse des Capitels empfiehlt der Verfasser, sich bei Eisenbahncurven nicht auf den Kreisbogen (mit kubischer Parabel als Uebergang zur Geraden) zu beschränken, was oft sehr viel Erdarbeiten veranlasst, sondern „freie Curven“ zu benutzen.

Das Folgende bietet eine interessante Schilderung desjenigen flüchtigen Aufnehmens (*flying survey*), welches bei Entdeckungsreisen anzuwenden ist, jedoch auch dann mit Vortheil benutzt werden kann, wenn es sich (in Culturstaaten) darum handelt, Karten, die sehr lange nicht nachgetragen wurden, geschwind und näherungsweise zu ergänzen. Es wurde auf Grund derjenigen Erfahrungen geschrieben, welche der Herr Verfasser bei seiner Theilnahme an der von Rohlfs geführten Expedition sammelte und zuerst in der Schrift „Physische Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ 1876 veröffentlichte.

Den Schluss des „II. Theiles“ bildet die Besprechung der Organisation einer Landesvermessung, doch selbstverständlich nur in dem der „niederen Geodäsie“ entsprechenden Umfange. Es wird hier besonders den von Soldner erdachten sphärischen Coordinaten und den Polygonzügen das Wort geredet, auch dem Messtische nochmals die baldige

Verdrängung prophezeit, womit der Referent im Allgemeinen ganz übereinstimmt.

Der dritte Theil des Werkes behandelt die „höhere Geodäsie" und umfasst gegen 500 Seiten, während den beiden ersten zusammengenommen über 700 gewidmet waren. Die „Einleitung" giebt eine inhaltsreiche Uebersicht der Geschichte der Gradmessungen, dann das Nöthige über Reihenentwickelungen, Interpolation und sphärische Trigonometrie. Beim Taylor'schen und beim Maclaurin'schen Satze hätte hier (S. 14) die Giltigkeitsbedingung angegeben werden sollen, ebenso bei vielen der folgenden Reihen; es hätte z. B. auf S. 16 heissen müssen:

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots$$

giltig für

$$-1 < x \leqq +1, \text{ bezüglich } -1 \leqq x < +1.$$

An die genannten Hilfsmittel aus dem Gebiete der reinen Mathematik schliesst sich die Besprechung des Erdellipsoids, seiner Bogenrectification, Complanation, Cubatur etc. und seiner Dimensionen nach den Bestimmungen Bessel's.

Hierauf folgt die „Triangulirung" (welche die Capitel VIII und IX des II. Theiles ohne Rücksicht auf Erdkrümmung behandelt hatten) und zwar bezüglich der Wahl und Festlegung der Dreieckspunkte, bezüglich der Signalisirung, Winkelmessung, Basismessung und Genauigkeit derselben. Es haben hierbei, neben den Arbeiten anderer Forscher, vorzüglich diejenigen Helmert's Benutzung gefunden. Bei der Signalisirung sind ausser den Heliotropen auch die neuerdings wieder in Aufnahme gekommenen nächtlichen Lampensignale besprochen; bei den Winkelmessungen ist der Vergleichung der Methoden (Repetition, Richtungsbeobachtungen, Einzelmessung) Beachtung geschenkt; die Comparatoren (mit Fühlhebel, Fühlspiegel, Mikroskop), die älteren, neueren und neuesten Basismessapparate werden ausführlich erörtert. Was die Längen der Grundlinien anlangt, so meint der Herr Verfasser, man sei aus einem Extrem ins andere gefallen und glaubt denen von 8—10 km Länge (in mehreren Absätzen doppelt gemessen) den Vorzug einräumen zu müssen.

Der Berechnung der sphärischen Dreiecke und der Ausgleichung der Dreiecksnetze sind die folgenden 140 Seiten gewidmet, und da schon früher hervorgehoben wurde, mit welchem grossen Geschick der Herr Verfasser im Allgemeinen viel Stoff in wenig Raum zu drängen versteht, so wird man bereits aus dieser Umfangsangabe erkennen, welche reiche Fundgrube sich hier aufthut. Von besonderem Interesse ist die Vergleichung verschiedener Triangulirungsausgleichungsmethoden, die Besprechung der Genauigkeit und die kritische Betrachtung der wichtigsten seit einem Jahrhundert ausgeführten Triangulirungen, von den grossen französischen, russischen, preussischen u. s. w. an bis herab zu denen in Baden, Kurhessen und Hessen-Darmstadt. Bezüglich der Basen betont der Verfasser (S. 236), „dass es keinen Werth hat, einzelne kurze Grundlinien mit Aufbietung aller technischen und wissenschaftlichen Mittel scrupulös auf Bruchtheile des Millimeters zu messen, dass man vielmehr darauf ausgehen muss, jede Triangulirung mit möglichst vielen Grundlinien zu versehen, die aber nicht sehr genau zu sein brauchen". Er glaubt, dass bei vielen ausgeführten Arbeiten in dieser Beziehung „ein Mangel an Gleichgewicht zwischen den einzelnen Messungen" stattfinde.

Das nächste (VI.) Capitel, „sphärische Coordinaten", bespricht ausführlich diejenigen von Soldner und Gauss, die geographischen und die Polarcoordinaten, stellt auch Vergleichung ihrer Vorzüge an.

Die Untersuchungen Bohnenberger's bilden den Ausgangspunkt für die nachher behandelte „sphäroidische Geodäsie mit Normalschnitten", welche mit der Bestimmung der Erddimensionen aus zwei und mehr als zwei Breitengradmessungen abschliesst.

Der „geodätischen Linie" sind etwa 20 Seiten gewidmet. Der Herr Verfasser sagt, es sei „unbestreitbar, dass in den letzten Jahrzehnten in Deutschland die abstract analytischen Behandlungen der geodätischen Linie, ohne eine Aussicht auf Resultate zu eröffnen, von der Lösung viel näher liegender Aufgaben abgelenkt haben" und will in dieser Hinsicht „für eine möglichst praktische und nüchterne Behandlung" eintreten. Damit in Uebereinstimmung befindet sich der von Bremiker herrührende Ausspruch („Studien über höhere Geodäsie", 1869), „dass durch manche Abhandlungen über die geodätische Linie, welche lediglich für den Analytiker von Werth sind, der Schwerpunkt in der Geodäsie verrückt worden ist, insofern sich die Speculation auf ein Feld geworfen hat, welches mehr dem Namen, als der Sache nach mit der Geodäsie zusammenhängt".

Auf Grund der Originalarbeiten von Bessel und Gauss folgt in den beiden nächsten Capiteln die Behandlung der sphäroidischen Geodäsie und der conformen Abbildung des Ellipsoids.

Allgemeine geodätische Untersuchungen, welche sich auf sphärische und sphäroidische Triangulirung, Vergleichung verschiedener Methoden, auf das Geoid, die Niveauflächen, die Lothablenkung u. s. w. beziehen, füllen das vorletzte Capitel. Den Schluss des III. Theiles bildet die Besprechung der verschiedenen Arten der Kartenprojectionen.

Die Ausstattung des ganzen Werkes ist eine sehr lobenswerthe; Druckfehler, Rechenfehler und Schreibfehler sind in mässiger Anzahl untergelaufen; ganz ohne Irrthümer lässt sich ein derartig inhaltsvolles Buch, von leicht verwechselbaren Zahlen und Zeichen erfüllt, nicht liefern.

Da die Anordnung des Stoffes nur nach Massgabe des Fortschreitens vom Einfachen zum Zusammengesetzten getroffen wurde, so fehlt Etwas von der im entgegengesetzten Falle erreichbar gewesenen Eleganz der Gruppirung und es folgt hieraus eine geringere Uebersichtlichkeit. Die Inhaltsverzeichnisse beider Bände sind sehr ausführlich, hingegen sucht man ein alphabetisches Sachregister vergeblich und das hält der Referent für einen Nachtheil. Zu bedauern ist wohl auch, dass die projectivische Geometrie nirgends Benutzung gefunden hat und dass dem vertrefflichen Werke ein Abschnitt über die Darstellung der Messungen gänzlich mangelt, während ihn die rühmlichst bekannten Lehrbücher von Bauernfeind und Hartner, welche bezüglich der niederen Geodäsie seine nächsten Concurrenten sind, besitzen.

Die Geschichte der Geodäsie hat in Bezug auf einige Punkte (z. B. Ausgleichungsrechnung, Gradmessungen, Federbarometer, Distanzmesser) sehr eingehende Berücksichtigung gefunden, in Bezug auf andere nur flüchtige Berührung oder gänzliche Nichtbeachtung. Dadurch ist eine sehr fühlbare Ungleichmässigkeit entstanden. Nach Ansicht des Referenten hätten berührt werden müssen: die Entstehung der Kreuzscheibe aus der *groma* der Alten, die des Messtisches und seiner Vorläufer, die Entwickelung des Theodoliten aus dem Astrolabium und die Verdienste, welche sich Tycho Brahe, Hommel, Petro Nuñez, Pierre Vernier u. A. um ihn erwarben. Ebenso die Nivellirinstrumente der Alten, die Erfindung der Röhrenlibelle und der durch sie erzeugte Umschwung, der Vater der Schichtlinien (Niveaucurven) und die Vorgänger des Snellius bezüglich der Triangulation.

Der Referent hebt zum Schlusse noch hervor, dass das Werk neben vielen anderen früher schon genannten guten Eigenschaften insbesondere die hat: auf Genauigkeitsbestimmungen und auf Fehlerausgleichung besonderes Gewicht zu legen, Beispiele und Tabellen in grosser Anzahl darzubieten, viele allgemeine Anleitungen zu geben und die Vergleichung der Methoden gehörig zu berücksichtigen.

Die Aufsuchung und Ausgleichung der Messungsfehler, wie die erreichbare Genauigkeit sind mit der Gewissenhaftigkeit des strengen Theoretikers, zugleich aber mit dem berechtigten Leichtsinne des erfahrenen Praktikers behandelt, was viel Lob verdient. Auch graphische Ausgleichung wurde berücksichtigt und das wird dankbar anerkannt werden, da in der Praxis oft lieber — und auch oft mit weit grösserem Vortheile — gezeichnet, als gerechnet wird. Ebensolche Anerkennung haben die in reicher Fülle im ganzen Werke auftretenden Zahlenbeispiele und Tabellen zu erwarten. Nicht minder jene allgemeinen Anleitungen und Betrachtungen, welche der Herr Verfasser in Bezug auf die Anlegung, Einleitung und Durchführung verschiedener grösserer geodätischer Arbeiten giebt; sie erwecken gewiss bei jedem Leser das Gefühl, in dem schlagfertigen Theoretiker, welcher das Buch schrieb, auch einen trefflichen, an Erfahrungen reichen Praktiker zu sehen. Die Vergleichung der Methoden aber ist schon deshalb zu rühmen, weil sie verhindern hilft, dass einzelne Geodäten ihre Ansicht für die alleinseligmachende halten, worauf eine Stelle des Vorworts hindeutet.

So ist denn der Gesammteindruck, welchen der Referent bei Durchsicht der letzten Lieferungen des Jordan'schen Handbuchs der Vermessungskunde empfing, ebenso günstig, wie der von der 1. Lieferung hervorgerufene und im XXIII. Bande dieser Zeitschrift veröffentlichte: das Werk ist ein solches ersten Ranges, es kann sich getrost neben die besten seiner Art stellen, es bietet eine Fülle neuer Gesichtspunkte und behandelt Vieles, was bis jetzt noch in keinem andern Lehrbuche der Geodäsie sich findet. Ohne Zweifel wird es, wie der Herr Verfasser hofft, einen Beitrag liefern „zur Beschränkung der unleugbaren Zerfahrenheit vieler deutscher Vermessungen, wo noch häufig Triangulirungen für Landesvermessungszwecke und Gradmessungszwecke, Nivellirungen, topographische und Katasteraufnahmen ohne die nöthige, leicht zu erzielende gegenseitige organische Verbindung ausgeführt werden". Es ist den Studirenden der Mathematik, Geodäsie und Technik warm zu empfehlen, ebenso warm aber auch den betreffenden Praktikern, selbst denjenigen unter ihnen, welche allen (in dem Werke freilich oft vorkommenden) Integralzeichen ehrerbietig aus dem Wege zu gehen pflegen, denn mit seltenem Geschick hat es die Theorie der Praxis dienstbar gemacht.

Dresden, 20. Februar 1879. A. Fuhrmann.

Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie von Dr. Siegmund Günther. Halle a. S. bei Louis Nebert. 1877—79. 408 S. mit 51 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Das Buch, welches wir unseren Lesern heute zu empfehlen haben, bildet kein in sich abgeschlossenes und abgerundetes Ganzes. Es sind vielmehr sieben gesonderte Abhandlungen, welche im Verlaufe zweier Jahre in Gestalt von sechs einzelnen Heften erschienen sind, deren zweites die zwei enger zusammengehörigen Abhandlungen II und III enthielt, während die übrigen Hefte je von einer Abhandlung erfüllt waren. Die einzelnen Ueberschriften sind folgende:

I. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Occidentalen. S. 1 — 56.

II. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern. S. 57—93.

III. Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Hebräern. S. 94 —128.

IV. Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen. S. 129—216.

V. Analyse einiger kosmographischen Codices der Münchner Hof- und Staatsbibliothek. S. 217—276.

VI. Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physischen Erdkunde. S. 277—332.

VII. Geschichte der loxodromischen Curve. S. 333—408.

Man erkennt schon aus den Ueberschriften, dass die vier ersten Abhandlungen eine Gruppe bilden, denen die drei letzten loser anhängen. Die Sammlung, ursprünglich auf sechs Hefte berechnet, hätte darum auch leicht, wie es der Verfasser eine Zeit lang beabsichtigte, zu grösserer Ausdehnung unter mehrseitiger Mitwirkung sich erweitern können. Es wäre alsdann eine Art von Zeitschrift in ungezwungen erscheinenden Heften geworden, wesentlich grösseren Aufsätzen historisch-geographischen Inhalts gewidmet und diesem Wissenszweige gegenüber etwa die gleichen Zwecke erfüllend, denen in historisch-mathematischer Beziehung die Supplementhefte dieser unserer Zeitschrift genügen wollen. Die Sachlage habe sich, sagt der Verfasser im Vorwort des 6. Heftes, gänzlich verändert und es müsse bei dem völligen Abschlusse sein Bewenden haben. Die Freunde der mathematischen und physikalischen Geographie werden dieses gewiss bedauern.

Wir haben die Studien beim Erscheinen der einzelnen Hefte in der Jenaer Literaturzeitung angezeigt und sind dabei auf mancherlei Einzelheiten eingegangen. Jetzt, nach Vollendung des Sammelbandes, wollen wir nicht versäumen, unsere Leser auf denselben hinzuweisen. Sie dürften in jedem einzelnen Aufsatze Dingen begegnen, die ihnen neu und von Interesse sind; insbesondere werden sie aber von der ganzen zweiten Hälfte und vor Allem von dem letzten Hefte sich angezogen fühlen. In ihm vollzieht der Verfasser, wenn wir so sagen dürfen, die Rückkehr in die eigentliche Heimath, in das Gebiet mathematischer Forschung.

CANTOR.

Quaestiones Archimedeae scripsit J. L. Heiberg. Inest de arenae numero libellus. Hauniae, Sumptibus Rudolphi Kleinii. 1879. 205 S. und 1 lithograph. Tafel.

Unsere Leser erinnern sich des Aufsatzes: „Ueber eine Stelle des Pappus", Zeitschr. Math. Phys. XXIII, Hist.-lit. Abthlg. 117—120, in welchem Herr Heiberg eine ebenso philologisch, wie mathematisch schwierige Stelle, die sich auf die Spirale des Archimedes bezieht, ins Reine gebracht hat, sich dadurch als in beiden Sätteln gleichmässig gerecht erweisend. Heute schickt uns derselbe seine Dissertation zu, durch welche er sich vollends unter die verhältnissmässig Wenigen ein-reiht, die als Philologen von Fach sich so eingehend mit Mathematik beschäftigt haben, dass sie auf die Herausgabe antiker Schriften geometrischen Inhalts fast mit Zwang hingewiesen sind. Was für Heron, für Pappus, für Nikomachus, für Theon von Smyrna in den letzten Jahrzehnten geleistet worden ist, das beabsichtigt Herr Heiberg für Archimed zu unternehmen. Seine Abhandlung „*Quaestiones Archimedeae*“ stellt gewissermassen die Vorrede zu einer neuen Textausgabe des Archimed dar, von welcher auch schon eine Probe in Gestalt der Sandrechnung in gereinigtem Texte beigegeben ist. So weit wir als Historiker die Abhandlung zu prüfen im Stande waren, bringt der Verfasser zu seiner Aufgabe eine vollkommene Verständniss des grossen Syrakusischen Mathematikers mit, unterstützt durch eine fast vollständige Kenntniss der einschlagenden Literatur. Wir vermissen nur drei Aufsätze, welche Herr Heiberg noch kennen lernen muss, bevor er wirklich an die Herausgabe des Archimed herangeht: J. H. T. Müller, Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker. Leipzig 1860, bei B. G. Teubner; — M. Curtze, Recension von Henning's Programm über den unechten Brief des Archimed in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-lit. Abthlg. 89—91; — F. Hultsch, Ueber den Himmelsglobus des Archimedes, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Hist.-lit. Abthlg. 106—107. Die genannte Recension Curtze's würde Herrn Heiberg insbesondere über die Unmöglichkeit der an sich recht scharfsinnigen Hercher'schen Hypothese belehrt, ihm auch weitere Literaturangaben zum Ochsenproblem geliefert haben. Wir freuen uns, bezüglich dieses letzteren Problems mit Herrn Heiberg einverstanden zu sein, indem auch wir dessen Echtheit annehmen. Ob dagegen der sogenannte „*Loculus Archimedius*“ mit Recht angezweifelt wird, lassen wir bei der Unwichtigkeit des Gegenstandes dahingestellt. Ein Archimed konnte schon einmal ein Spiel erdenken — hat doch Leibnitz das Solitairespiel eingeführt. Wenn an dem Vorhandensein der *κωνικὰ στοιχεῖα* des Archimed gezweifelt wird, so theilen wir wieder die Ansichten des Verfassers und wollen nur ganz kurz unsere Meinung andeuten, dass diese Elemente der Kegelschnitte von Euklid herrühren, dem *στοιχειωτής* auch für diesen Theil der Mathematik, wie man zu oft übersehen hat. Die Wahlsätze kann — das geben wir Herrn Heiberg gern zu — Archimed in der Form, wie sie aus dem Arabischen übersetzt vorliegen, nicht geschrieben haben; doch dürfte mehr als nur Satz 4 und 14 auf Archimed zurückzuführen sein, Satz 8 z. B. hat für uns ein ganz Archimedisches Gepräge. Ob Salinon Wellenlinie bedeuten kann (abgeleitet von *σάλος* = das Schwanken des hohen Meeres)? Wir stellen diese Frage an Herrn Heiberg selbst, der philologisch viel mehr versteht, als wir, der aber bezüglich dieses Wortes erklärt, Nichts damit anfangen zu können.

Cantor.

Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung, von Dr. A. Sawitsch. Nach der zweiten russischen Originalausgabe unter Mitwirkung des Verfassers neu herausgegeben von Dr. C. F. W. Peters. Mit 6 Tafeln. Leipzig 1879.

Von allen Astronomen wird das Erscheinen einer neuen Auflage der praktischen Astronomie von Sawitsch mit Freuden begrüsst werden. Dieses Werk, welches zuerst im Jahre 1850 in deutscher Sprache in zwei Bänden erschien, hat sich des ungetheiltesten Beifalls der lernenden und lehrenden Astronomen zu erfreuen gehabt. Das fast gleichzeitig von Brünnow herausgegebene Werk über sphärische Astronomie hat jenes ebenso wenig verdrängen können, wie es die nicht übertroffene *Practical and Spherical Astronomy* von Chauvenet vermochte. In den letzten Jahren machte sich indessen das Bedürfniss einer neuen Auflage in um so grösserem Maasse geltend, als seit dem Jahre 1850 vielfach andere Methoden und wesentlich veränderte Instrumente bei den Beobachtungen in Anwendung kamen. Dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaft ist nun sowohl von dem Verfasser selbst, als auch von dem Herausgeber der deutschen Ausgabe dieses ursprünglich russischen Werkes in möglichster Ausdehnung Rechnung getragen.

Der Hauptzweck des Werkes ist, Anleitung zu astronomischen Beobachtungen, besonders solcher, welche sich auf die geographische Ortsbestimmung beziehen, mit kleinen und bequemen Instrumenten zu geben. Demgemäss findet die sphärische Astronomie nur in geringerem Maasse Berücksichtigung. In der Einleitung werden die Erklärungen der verschiedenen Zeiten, der bei der Reduction der Beobachtungen, wie sie das Instrument ergiebt, nothwendigen Correctionen gegeben. Hier hätten wir freilich gewünscht, dass auch die gebräuchlichen Formeln ausser den einfachen Erklärungen angegeben wären; speciell betrifft diese Bemerkung die Refraction und die zur Reduction des mittleren Ortes des Sternes auf den scheinbaren nöthigen Formeln, welche letztere geeigneter in § 7, als am Schlusse des Werkes, im Anhang ihren Platz gefunden hätten. Auch im vorliegenden Werke finden wir bei Anführung praktischer Refractionstafeln die wenig bekannten und doch besonders bequemen Washingtoner (*Wash. Annals I*) nicht erwähnt. — Es folgen dann allgemeine Bemerkungen über die Winkelmessinstrumente, das Fernrohr etc. Einen beträchtlichen Zusatz hat hier die neue Auflage erhalten, indem die Ablesung der Kreistheilung mittelst Mikroskope besondere Besprechung gefunden hat.

Im ersten Abschnitte sind die zu Ortsbestimmungen gebräuchlichsten Instrumente specieller behandelt. Bei dem Passageninstrument sind Zusätze oder Veränderungen nicht nöthig geworden, dagegen ist der astronomische Theodolit durch den in Russland vielfach angewandten Repsold'schen Verticalkreis, und das Ertel'sche Universalinstrument durch das Pistor & Martins'sche, welches in neuester Zeit in der astronomischen Werkstätte von A. Lingke & Comp. in Freiberg in vorzüglicher Weise angefertigt wird, ersetzt worden. Mit Rücksicht auf die bei letzterem übliche Mikroskopablesung wurde die Besprechung der letzteren in die Einleitung aufgenommen, während die Berichtigung und Untersuchung der Mikrometerschrauben erst hier dargelegt wird.

Die Bestimmung der Breite und der Zeit durch die Messung von Zenithdistanzen wird im zweiten Abschnitte gegeben. Auffallend ist, dass bei der Bestimmung der Polhöhe aus beobachteten Zenithdistanzen des Polarsterns die erste Auflage keine Zusätze erfahren hat. Die neueren, namentlich vom geodätischen Institut herausgegebenen Hilfstafeln, welche auf der bekannten Littrow'schen Reihenentwickelung, deren erste Glieder auch die Tafel im *Nautic. Almanac* enthält, beruhen, haben sich gerade in der Praxis so vielfach bewährt, dass sie in einem Handbuche mit speciell praktischen Zwecken wenigstens Erwähnung hätten finden sollen. Dagegen hat dieser Abschnitt eine schätzenswerthe Bereicherung in Anführung der in Amerika bei der *Coast Survey* namentlich angewandten Talcott'schen Methode zur Breitenbestimmung gefunden. Ebenso werthvoll ist die Mittheilung der Zinger'schen Zeitbestimmung aus Beobachtung correspondirender Höhen zweier verschiedener Sterne. Dieses Verfahren, an sich nicht neu, ist von dem Pulkowaer Astronomen Zinger kürzlich vollständig entwickelt, und da die Originalabhandlung in russischer Sprache (erst vor Jahresfrist erschien eine deutsche Uebersetzung) publicirt ist, muss die Auseinandersetzung der Methode, welche gewiss noch weiterer Vereinfachung fähig ist, an hiesiger Stelle doppelt angenehm empfunden werden.

Es folgt im nächsten Abschnitte die Zeit- und Breitenbestimmung mittelst des Durchgangsinstruments, mit eingehender Behandlung des in neuerer Zeit vielfach angewandten Verfahrens der Beobachtungen im Vertical des Polarsterns, sodann im vierten Abschnitte die Bestimmung des Azimuths.

Die bedeutendsten Veränderungen hat das Sawitsch'sche Werk bei der gegenwärtigen Auflage im fünften Abschnitte erfahren. Derselbe giebt die verschiedenen Methoden der Längenbestimmung. Zunächst hat hier die telegraphische Methode, wenn auch nur kurz, Erwähnung gefunden. Mit Rücksicht auf die Methode der Chronometerübertragungen ist der Ermittelung des Chronometerganges bei verschiedenen Temperaturen den neuesten Erfahrungen gemäss besondere Aufmerksamkeit bereits im ersten Abschnitte (Capitel über die astronomischen Uhren) gewidmet. Die Theorie der Sonnenfinsternisse ist fast ganz umgearbeitet worden, an Stelle der Gauss'schen Methode zur Berechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsterniss auf der Erde ist die Zech'sche getreten und ferner die

Hansen'sche Theorie zur Vorausberechnung einer Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort und die Ableitung der geographischen Länge aus der Beobachtung einer Sonnenfinsterniss aufgenommen worden. Als vollständiges Rechnungsbeispiel ist hier die Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss 1887, August 18, welche Herr von Redieger ausführte, mitgetheilt. Die Behandlung der Mondculminationen, Sternbedeckungen, sowie der letzte Abschnitt, Berechnung trigonometrischer Messungen, hat wesentliche Veränderungen gegen die frühere Auflage nicht erfahren. Wie bei dieser, bilden auch hier zwei Anhänge, über die Reflexionsinstrumente und über Interpolation, den Schluss des Werkes.

Was das Aeussere des Buches betrifft, so bedauert Referent, dass die beim Gebrauch unbequeme Anordnung der Figuren auf Tafeln am Ende des Werkes beibehalten ist und die Figuren nicht in den Text selbst eingedruckt wurden.

Valentiner.

Substanz und Bewegung, von J. Clerk Maxwell, ins Deutsche übersetzt von Dr. Ernst v. Fleischl. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1879.

Diese Uebersetzung von J. Clerk Maxwell's *Matter and Motion* ist ein sehr verdienstvolles Unternehmen, sie umfasst nur 140 Seiten kl. 8° neben einem ausführlichen Inhalts- und Wortregister und kann kurz bezeichnet werden als „die jetzige Naturlehre, aufgefasst als Theil der Mechanik". Der grundlegende Begriff ist der der Energie eines materiellen Systems, und ein hauptsächliches Hilfsmittel zur Entwickelung der einzelnen Lehren ist das des Hamilton'schen Hodographen. Die Uebersetzung ist, nach der Versicherung des Uebersetzers, im engsten Anschluss an das Original geschehen, mit Ausnahme einer einzigen Stelle, die auf einer brieflichen Mittheilung Maxwell's selbst beruht.

Was den Werth des Buches anlangt, so können wir sagen: es steht einzig da hinsichtlich der Deutlichkeit und Klarheit und hinsichtlich des sparsamen Gebrauchs mathematischer Hilfsmittel. So ist z. B. kein Gebrauch vom Differentialquotienten gemacht, obwohl der Reihe nach abgehandelt werden neben einem einleitenden Theile, der hauptsächlich Definitionen enthält, die Bewegung, Kraft, Eigenschaften des Massenmittelpunktes, Arbeit und Energie, Pendel und Gravitation und die allgemeine Schwere.

Wir glauben berechtigt zu dem Urtheil zu sein, dass kein Anfänger das Büchlein ohne grossen Gewinn studiren und kein Physiker ohne grosses Vergnügen durchlesen wird.

Freiberg, den 1. März 1879. Th. Kötteritzsch.

Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische Skizze von Dr. phil. P. LANGER. Halle a. S., Louis Nebert. 1878.

Das in überwiegend philosophischer Form abgefasste Schriftchen von 68 Seiten gr. 8⁰ behandelt in einem ersten Theile auf 54 Seiten die am meisten bestrittenen Punkte der Mechanik, wie die Begriffe von Kraft und Masse, das Parallelogramm der Kräfte, das Galilei'sche Trägheitsgesetz und das Newton'sche Gravitationsgesetz. Der zweite Theil handelt über die ästhetischen Eindrücke der Körper.

Für das Schriftchen selbst ist Anfang und Ende charakteristisch. Es beginnt nämlich das Vorwort mit: „Die folgende Skizze ist in der Absicht entstanden, die Grundlagen der Mechanik, insofern sie Hypothesen oder aus der Empirie entnommene Wahrheiten enthalten, hinsichtlich ihres begrifflichen Werthes näher zu untersuchen." Das charakteristische Ende ist: „Es wäre nicht schwer, alle im Vorhergehenden entwickelten Anschauungen beliebig weit und beliebig detaillirt zu begründen. Eben deswegen sehen wir davon ab; es würde dieser Schrift alsdann der Titel einer Skizze nicht mehr zukommen. In den Umrissen ist eine Weltanschauung jedenfalls bestimmt charakterisirt. Enthält sie fruchtbare Ideen, so reicht die Skizze hin, um ihnen Leben zu verschaffen, und enthält sie dieselben nicht, dann wäre erst recht die Kürze der Darstellung der grösste und einzige Vortheil."

Es ist dem Referenten unmöglich gewesen, klar und deutlich namentlich im ersten Theile des Schriftchens zu erkennen, wie der Verfasser die anerkannten Schwierigkeiten der Mechanik vermeiden will; wäre nicht das Schriftchen vom Verfasser selbst als Skizze bezeichnet worden, so würde Referent ihm diesen Namen mit besonderem Nachdruck gegeben haben.

Freiberg, den 10. Februar 1879. TH. KÖTTERITZSCH.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1879.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1878. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1878 Ebendas. 2 Mk. 50 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe. 39. Bd. Wien, Gerold. 42 Mk.

Verhandlungen der vom 4. bis 8. Sept. 1878 in Hamburg vereinigten permanenten Commission d. europ. Gradmessung; redig. v. C. Bruhns u. A. Hirsch. Zugleich mit dem Generalbericht f. 1878. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. Jahrg. 1876. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Repertorium für Meteorologie, herausgeg. v. d. kaiserl. russ. Akademie d. Wissensch., redig. v. H. Wild. 6. Bd. 1. Heft. Leipzig, Voss. 7 Mk. 70 Pf.

Beobachtungen d. meteorolog. Stationen in Bayern; herausgegeben von W. v. Bezold und C. Lang. 1. Jahrg. (1879), 1. Heft. München, Ackermann. pro compl. 18 Mk.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge, 27. Bd., Jahrg. 1877. Wien, Wallishauser. 11 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld und A. Winnecke. 14. Jahrg., 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben v. C. Peters. 95. Bd., Nr. 1 (Nr. 2257.) Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 15 Mk.

Repertorium für Experimentalphysik und Instrumentenkunde; herausgeg. v. Ph. Carl. 15. Bd., Supplem. München, Oldenbourg. 1 Mk. 80 Pf.

Fortschritte der Physik im Jahre 1874. 30. Jahrg., redig. v. Schwalbe u. Neessen. 2. Abth.: Wärme, Elektricität und Erdphysik. Berlin, G. Reimer. 15 Mk. 75 Pf.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein u. A. Mayer. 15. Bd. 1. Heft Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Bibliotheca historico naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Metzger. 28. Jahrg. 2. Heft, Juli — December 1878. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Henry, C., Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesim., Diophanto vel Pappo attrib. Halle, Schmidt. 1 Mk.

Fellner, St., Compendium der Naturwissenschaften an der Schule zu Fulda im IX. Jahrhundert. Berlin, Grieben. 4 Mk.

Coppernicus, N., Ueber die Kreisbewegungen der Weltkörper. Uebers. u. mit Anmerk. vers. v. L. Menzzer. Thorn, Lambeck. 12 Mk.

Enrico Giordani. I sei cartelli di matematica disfida, dal Silv. Gherardi. T. 1. Mailand, Hoepli. 35 Mk.

Giesing, J., Stifel's *arithmetica integra.* Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik. Döbeln, Schmidt. 1 Mk. 75 Pf.

Reine Mathematik.

Schlömilch, O., Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis. (Theil II des Compendiums der höheren Analysis.) 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Odstrčil, J., Kurze Anleitung zum Rechnen mit den Hamilton'schen Quaternionen. Halle, Nebert. 2 Mk. 25 Pf.

Thomae, J., Ueber eine specielle Classe Abel'scher Functionen vom Geschlecht 3. Halle, Nebert. 4 Mk. 50 Pf.

Maschke, Th., Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformationen 3. Ordn. (Dissert.) Breslau, Köbner. 1 Mk.

Encyclopädie der Naturwissenschaften. 1. Abth.: Handbuch der Mathematik. 2. Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk.

Reidt, F., Elemente der Mathematik. (1. Thl. Arithmetik und Algebra, 2. Thl. Planimetrie.) 3. Aufl. Berlin, Grote. 3 Mk.

Fuss, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Lehrerbildungsanstalten. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

Petrick, L., Multiplicationstabellen, geprüft m. d. Thomas'schen Rechenmaschine. 1.—4. Lief. Libau, Meyer. 12 Mk.

Studnička, J., Lehrbuch der Algebra. Prag, Calve. 2 Mk. 40 Pf.

Wenck, J., Die graphische Arithmetik und ihre Anwendung auf die Geometrie. Berlin, Nicolai. 3 Mk.

Weyr, E., Ueber die Abbildung einer rationalen Plancurve 3. Ordnung auf einen Kegelschnitt. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Ameseder, A., Ueber rationale Curven 4. Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Junghänel, A., Cursus zur Einführung in die Geometrie. Chemnitz, Focke. 60 Pf.

Dostor, G., Nouvelle détermination analytique des foyers et directrices dans les sections coniques. Leipzig, Koch. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

RINECKER, F., Der logarithmische Rechenschieber und seine praktische Anwendung. Würzburg, Stuber. 2 Mk.

ELB, O., Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen etc. durch Polarcoordinaten. Wilhelmshaven, Schmidt. 2 Mk.

ISENKRAHE. C., Das Räthsel der Schwerkraft. Kritik und Versuch einer neuen Lösung auf mechan. Grundlage. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

SCHEFFLER, H., Wärme und Elasticität. Leipzig, Förster. 5 Mk.

PSCHEIDL, W., Bestimmung d. Elasticitätscoefficienten durch Biegung eines Stabes. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

JAKOB, A., Hauptlehren d. mathem. Geographie. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 20 Pf.

VALENTINER, W., Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Mannheim. 3. Bd.: Mikrometermessungen von Sternhaufen. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

Physik und Meteorologie.

DROSSBACH, M., Kraft und Bewegung im Hinblick auf d. Lichtwellenlehre und die mechanische Wärmetheorie. Halle, Pfeffer. 2 Mk. 40 Pf.

STEFAN, J., Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. 2. Abhdlg. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

WILD, H., Ueber die Bestimmung der absoluten Inclination mit d. Inductionsinclinatorium. Leipzig, Voss. 2 Mk. 50 Pf.

STEFAN, J., Ueber die Beziehung zwischen Wärmestrahlen und Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

GUCKEISEN, A., Lehrbuch der Physik für höhere Lehranstalten. Cöln, Ahn. 3 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze.

Von

Dr. Heiberg

in Kopenhagen.

Hierzu Taf. VI Fig. 3—10.

Wo wir directer Quellen zur Geschichte der Mathematik entbehren, wie für den Zeitraum zwischen Euklides und Archimedes, sind Rückschlüsse aus den zunächst späteren mathematischen Werken der einzige Weg, um die Fortschritte der Kenntnisse in der Zwischenzeit zu erkennen. Ich habe daher *Quaest. Archim. Cap. IV* ausser den von Archimedes aufgestellten neuen arithmetischen Sätzen diejenigen gesammelt, die von ihm als bekannt vorausgesetzt werden, aber bei Euklides nicht vorkommen. Es war dabei natürlich nicht meine Meinung, dass diese, zum Theil sehr unerheblichen Erweiterungen der Euklidischen Lehrgebäude sämmtlich dem Zeitalter des Archimedes zuzuschreiben seien; zum Theil reichen sie gewiss bis in die Euklidische Zeit hinauf, ob man gleich, wie es öfters mit Recht hervorgehoben worden ist, nur mit grösster Vorsicht aus dem Bekanntsein eines Satzes auf das seiner Consequenzen schliessen dürfe. Aber selbst wenn man sicher annehmen kann, dass ein Satz viel älter sei, ist es doch für die Geschichte der Wissenschaft nicht ohne Wichtigkeit, bestimmt angeben zu können, bei welchem Verfasser jener Satz zuerst ausdrücklich vorausgesetzt werde. Im Anschluss hieran will ich die von Archimedes als allgemein bekannt benutzten plangeometrischen und stereometrischen Sätze zusammenstellen,* insofern sie bei Euklides nicht vorkommen. Die Erweiterungen, die Archimedes selbst diesen beiden Disciplinen hinzugefügt hat, halte ich nicht für nöthig hervorzuheben, weil er sie in zwei besonderen Werken, *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* und *κύκλου μέτρησις*, niedergelegt hat. Uebrigens kann die Möglichkeit nicht ausgeschlossen werden, dass Archimedes

* Nicht berücksichtigt sind die Bücher *περὶ ὀχουμένων*.

auch einige von den hier aufgeführten Sätzen selbst erfunden habe, sie aber für so leicht und einleuchtend hielt, dass er glaubte seinen Lesern (denn er schrieb nur für die in der Mathematik ziemlich weit gekommenen) zumuthen zu können, den Beweis aus dem aus Euklides bekannten Material selbst aufzubauen.

Ich fange mit den plangeometrischen Sätzen an und zwar mit einigen Erweiterungen der Theorie der Parallelen.

1. Wenn (Fig. 3) $AB \ddagger CD$, wird die Proportion gelten: $AE : EB = DE : CE$ (folgt einfach aus Eukl. I, 29 und VI, 4).

Dieser Satz wird angewandt περὶ σφαίρ. κ. κυλ. I, 22 p. 101, 2; die vorhergehende Begründung ist, wie ich anderswo zeigen werde, unecht. Ohne Begründung benutzt Archimedes denselben Satz περὶ ἑλίκ. p. 223, 2 und 7 p. 224, 18. Auch 9 p. 225, 46 kann die Proportion $KE : JK = \Lambda\Gamma : \Lambda J$ nur durch diesen Satz gefolgert werden (συνθέντι aus $JE : JK = \Gamma J : \Lambda J$).

2. Wenn (Fig. 4) $AB \ddagger CD \ddagger EF$, wird sich verhalten: $AC : CE = BD : DF$ (nach Eukl. VI, 2).

Hiervon macht Archimedes ἐπιπ. ἰσορρ. II, 4 p. 40, 46 Gebrauch, aber auch περὶ κωνοειδ. 10 p. 272, 28 beruht die Proportion $Z\Lambda \times \Lambda H : AK \times KB = Z\Gamma^2 : A\Delta^2$ auf diesem Satze; vergl. p. 274, 6 flgg.

3. Wenn (Fig. 5) $AB \ddagger CD$, verhält sich $AE : EB = CF : FD$ (vergl. Clavius zu Euklid I p. 295).

Dieser Satz kommt nicht selten zur Anwendung, wie τετραγ. παραβ. 5 p. 20, 24; 16 p. 28, 27 (denn $M\Lambda = \Phi\Lambda$ wird daraus geschlossen, dass $M\Lambda : \Phi\Lambda = N\Lambda : \Lambda P$; aber $N\Lambda = \Lambda P$, weil $BE = EH$ und $BE : EH = N\Lambda : \Lambda P$); ἐπιπ. ἰσορ. II, 5 p. 41, 41 (wo $ZN = NH$ daraus folgt, dass $A\Delta = \Delta\Gamma$ und $A\Delta : \Delta\Gamma = ZN : NH$).

4. Den Hauptsatz über den Transversal $AB : BC = AD : DE$ (Fig. 6) hat schon Euklid (VI, 2), und Archimedes benutzt ihn häufig. Aber bei ihm kommt auch die bekannte Folge $AC : AB = CE : BD$ vor, wie περὶ σφ. καὶ κυλ. I, 31 p. 109, 16 (vergl. Eutokios p. 109, 30 flgg.); I, 44 p. 123, 4 (wo ein ganz ähnlicher Schluss gezogen wird). Auch περὶ κωνοειδ. 23 p. 287, 29 erhält man die Proportion $B\Delta : BE = \Delta A : E\Xi$ vermöge dieses Satzes.

Hieran mögen sich einige das Dreieck betreffende Sätze reihen.

5. Die Linie, welche einen Winkel des Dreiecks halbirt, ist kleiner, als die halbe Summe der den Winkel einschliessenden Seiten.

Diesen Satz führt Archimedes περὶ ἑλίκ. 13 p. 232, 2 ausdrücklich als bekannt an: ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς $A\Theta$ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι (αἱ AH, $A\Gamma$). Den Beweis giebt u. A. Sturm: Uebers. S. 403.

6. Die Medianen kommen bei Euklid nicht vor, Archimedes hat über sie folgende Sätze:

a) Der Schnittpunkt der Medianen fällt auf EB, wenn der Linie $ED = \frac{1}{3} AD$ (Fig. 7).

Dieser Satz ist in den Worten: *ἔσται δὴ τοῦ μὲν $\varDelta B\varGamma$ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς $\varTheta M$, ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ $\varTheta B$ τᾶς $B\varDelta$, καὶ διὰ τοῦ $\varTheta$ σαμείου παράλλαλος τᾷ βάσει ἆκται ἁ $M\varTheta$* enthalten *ἐπιπ. ἰσορρ.* I, 15 p. 15, 7; denn I, 14 ward bewiesen, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der Medianen sei. Den Beweis giebt Eutokios p. 15, 40 flgg. Derselbe Satz wird *ἐπιπ. ἰσορρ.* II, 5 p. 41, 26 flgg. angewandt.

b) Der Schneidepunkt der Medianen fällt auf die Mitte der Linie EB (Fig. 7) (unter der oben angegebenen Bedingung).

Dies spricht Archimedes *τετραγ. παραβ.* 6 p. 21, 8 flgg. aus in den Worten: *τετμάσθω δὴ ἁ $B\varGamma$ γραμμὰ κατὰ τὸ E οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν $\varGamma E$ τᾶς EB, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν $\varDelta B$ ἁ KE, καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ $\varTheta$. Τοῦ δὴ $B\varDelta\varGamma$ τριγώνου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ $\varTheta$ σαμεῖον. Δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς*, d. h. *ἐπιπ. ἰσορρ.* I, 14, wo aber eben nur das bewiesen wurde, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks mit dem Schnittpunkt der Medianen zusammenfalle.

7. Dass zwei Dreiecke bei gleicher Höhe sich wie die Grundlinien verhalten, beweist Euklid VI, 1. Dass sie aber bei gleicher Grundlinie sich wie die Höhen verhalten, findet sich bei ihm noch nicht ausgesprochen (vergl. Clavius I p. 293), und der Zusammenhang dieser Sätze lag den Griechen bei ihrer ganzen Anschauungsweise bei Weitem nicht so nahe, als es uns scheint. Den angeführten Satz wendet nun Archimedes mehrmals an, wie z. B. *τετραγ. παραβ.* 17 p. 29, 49 (wo $\triangle B\varDelta\varGamma = 4\, B\varTheta\varGamma$ daraus folgt, dass $B\varDelta\varGamma : B\varTheta\varGamma = B\varDelta : E\varTheta$) und *περὶ κωνοειδ.* 25 p. 291, 15. Eine der unsrigen sich nähernde Auffassung zeigt die Schlussfolge *περὶ κωνοειδ.* 4 p. 265, 29 flgg.: *ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ $\varTheta H$, AK* (die Höhen)· *ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ BH, $\varDelta Z$·* (die Grundlinien; man sollte also erwarten, dass Archimedes hieraus sogleich auf die Gleichheit der Dreiecke schliessen würde; er fügt aber hinzu:) *ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν $\varTheta H$, BH περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν AK, $\varDelta Z$. Ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\varTheta HB$ τρίγωνον τῷ $\varDelta AZ$ τριγώνῳ.*

Noch mögen hier zwei Sätze ihren Platz finden, die in die Trigonometrie hinüberspielen.

8. Es seien ABC, abc (Fig. 8) rechtwinklige Dreiecke. Dann wird, wenn $\angle b < B$, folgende Proportion stattfinden: $AB : BC > ab : bc$.

Auf diesen Satz stützt Archimedes die Behauptung *περὶ σφ. καὶ κυλ.* I, 4 p. 72, 16, dass $MK : AK > \varGamma H : HT$. Den ganz einfachen Beweis giebt Eutokios p. 73, 33 flgg.

9. Es seien ABC, EDF (Fig. 9) rechtwinklige Dreiecke, und $BC = DE$, aber $AC > FE$. Dann wird folgende Proportion stattfinden: $AB : FD < \angle DFE : \angle BAC < AC : FE$.

Diesen Satz spricht Archimedes Ψαμμίτ. p. 324, 4 flgg. (I, 21 p. 182 in meinen *Quaestiones Archimedeae*) so aus, jedoch ohne Beweis: *αἱ γάρ κα δυῶν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάσσονα μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἤ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινουσᾶν ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, ἐλάσσονα δὲ ἤ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν ἐλάσσονα.* Den Beweis habe ich *Quaest. Arch. p.* 204 – 205 nach Commandinus ausgeführt.

Ueber Vierecke findet sich Folgendes:

10. In einem Parallelogramm schneiden sich die Diagonalen im Mittelpunkte der die Mittelpunkte einander gegenüberstehender Seiten verbindenden Linie.

Auf diesem Satze beruht die Folgerung ἐπιπ. ἰσορρ. II, 1 p. 36, 16 flgg.: *ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ $\Lambda\Theta$ τᾷ ΘK καὶ ὅλα ἁ ΛK τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, ὅλου τοῦ ΠM κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον;* denn I, 10 ward nur bewiesen, dass der Schwerpunkt eines Parallelogramms mit dem Schnittpunkte der Diagonalen zusammentreffe.

11. Wenn AF, BE und CD (Fig. 10) verlängert in einem Punkte zusammentreffen, wird $ABEF : ACDF = AB : AC$ gelten. $\angle AFE$ ist 90^0.

Dieser Satz wird τετραγ. παραβ. 14 p. 26, 2 angewandt, wo aus der Proportion $B\Gamma : BE = \Sigma E : E\Phi$ sogleich geschlossen wird $BA : BE = \Delta E : KE$, weil $BA = B\Gamma$ und nach diesem Satze $\Sigma E : E\Phi = \Delta E : KE$. Auch τετραγ. παραβ. 16 p. 28, 27 muss $M\Delta = \Phi\Delta$ auf folgende Weise vermöge dieses Satzes gefolgert werden: $N\Delta = \Delta P$ (s. oben Nr. 3), aber $M\Delta : \Phi\Delta = N\Delta : \Delta P$. Auch περὶ κωνοειδ. 5 p. 266, 33 flgg. wird nach diesem Satze geschlossen $\Delta E : \Theta M = \Theta E : B\Theta$; hier ist die Bedingung ausdrücklich hinzugefügt, aber in einer andern Gestalt, nämlich dass $AB : BC$ (in Fig. 10) dem Verhältnisse $FE : ED$ gleich sein solle (p. 266, 33: *ἐπεὶ γὰρ αἱ $E\Theta$, $K\Delta$ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμανται κατὰ τὰ M, B*). Der Beweis kann ungefähr so geführt werden: $ABEF = \frac{1}{2} AF \times FE + \frac{1}{2} AF \times AB = \frac{1}{2} AF \times (FE + AB)$; ebenso $ACDF = \frac{1}{2} AF \times (AC + FD)$ ɔ: $ABEF : ACDF = FE + AB : AC + FD$; aber $GA : GF = AB : FE = AC : FD$; daraus $AB + FE : AC + FD = AB : AC$ ɔ: $ABEF : ACDF = AB : AC$.

12. Ein regelmässiges Vieleck ist einem Dreieck gleich, dessen Höhe der kleinste Radius des Vielecks und dessen Grundlinie der Perimeter ist.

Wird z. B. κύκλ. μέτρ. 1 p. 204, 3 angewandt.

13. **Aehnliche reguläre Vielecke, die in Kreise eingeschrieben sind, verhalten sich wie diese** (Eukl. XII, 1—2).

Wird *περὶ κωνοειδ* 5 p. 266, 46 flgg. (*διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον*) angewandt (vergl. Clavius zu Eukl. I p. 228).

14. **Zirkelsectoren verhalten sich bei gleichen Winkeln wie die Quadrate der Radien der respectiven Zirkel** (denn sie verhalten sich wie die Zirkel).

Wird angewandt *περὶ ἑλίκ.* 26 p. 249, 15 flgg. (Lin. 21: *αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας*) und 28 p. 254, 23 flgg.

15. Den Satz, dass die Schenkel des Tangentenwinkels gleich sind, hat Euklides noch nicht (Clavius I p. 171); Archimedes aber benutzt ihn *κύκλ. μέτρ.* 1 p. 204, 11 (*ἡ γὰρ PM τῇ PA ἴση ἐστίν*).

16. **Jede Senkrechte von einem Punkte der Zirkelperipherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken des Durchmessers.**

Diesen in Eukl. VI, 13 enthaltenen Satz spricht Archimedes *περὶ κων.* 13 p. 276, 8 mit folgenden Worten aus: *ἁ ἄρα KΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ (τᾶν) ZΘ, ΘE· ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς EZ καὶ ἁ KΘ κάθετος οὖσα μέσα γίνεται ἀνάλογον τᾶν EΘ, ΘZ*; vgl. 8 p. 270, 6, wo $AM^2 = A\Delta \times \Delta Z$ so begründet wird: *ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν ΔZ κάθετος ἄχθη ἁ ΔM*; auch angewandt 10 p. 272 extr.; 274, 8; 14 p. 277, 19.

Schliesslich sollen noch einige wenige und wenig bedeutende Sätze aus der Stereometrie beigefügt werden, die ein Supplement zu den Eukl. XI, 3—19 vorgetragenen elementaren Sätzen über Ebenen bilden.

17. **Eine durch zwei von drei parallelen Linien gelegte Ebene wird entweder die dritte mit aufnehmen oder ihr parallel sein.**

Wird angewandt *περὶ κωνοειδ.* 16, *c* p. 279, 44 flgg.

18. **Eine Ebene, die auf der einen von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, wird auch auf der andern senkrecht sein.**

Angewandt *περὶ κωνοειδ.* 18 p. 281, 24 (*ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλλαλον αὐτῷ*).

19. **Eine Ebene, die einer andern, auf einer dritten senkrecht stehenden Ebene parallel ist, wird selbst auf der dritten senkrecht stehen.**

Wird *περὶ κωνοειδ.* 24 p. 289, 12 vorausgesetzt, wenn daraus, dass die Ebene durch ΦT der durch $A\Gamma$ gelegten parallel ist, geschlossen wird, dass sie das Konoid in *B* berühre; denn nach prop. 17, *b* p. 281 muss sie auf die Ebene $AB\Gamma$ senkrecht sein, was also stillschweigend daraus gefolgert wird, dass sie der auf $AB\Gamma$ senkrecht stehenden Ebene durch $A\Gamma$ parallel ist.

20. Durch eine nicht senkrechte Gerade kann nur eine Ebene auf eine andere senkrecht gelegt werden.

Wird ausdrücklich aufgeführt (aber ohne Beweis) *περὶ κωνοειδ.* 18 p. 281, 26 flgg.: *εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον.* Ebenso auch *περὶ κωνοειδ.* 20 p. 283, 7 flgg.: *ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα [ὀρθά?] ἐντι.*

Drei Briefe von Lagrange.

Von

MORITZ CANTOR.

Wir haben uns in der histor.-literar. Abthlg. S. 1—21 des vorigen Bandes in eingehender Weise mit dem Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler beschäftigt, welcher zum Theil erst ganz neuerdings an die Oeffentlichkeit gelangt war. Heute sind wir in der Lage, unsere Leser wieder auf drei Briefe von Lagrange aufmerksam machen zu können, welche der Berliner und der Bologneser Bibliothek entstammen und welche Fürst Boncompagni in ähnlicher Weise in Berlin und Florenz hat autographiren lassen, wie er es mit den obenerwähnten, in Petersburg aufgefundenen Briefen an ihrem Fundorte veranstaltet hat. Wir sind zugleich in der Lage, von den zutreffenden Bemerkungen Gebrauch zu machen, welche Herr Genocchi bezüglich zweier dieser Briefe der Turiner Akademie in ihrer Sitzung vom 23. Februar 1879 unterbreitete, sowie anderer, welche Herr Favaro drei Wochen später am 16. März der Akademie von Padua vorlegte.

Die Briefe sind allerdings wissenschaftlich keineswegs von dem Interesse, welches sich aus dem Umstande herleitet, dass ein Brief uns oft besser als eine Abhandlung das Entstehen grosser Gedanken erkennen lässt. Sie zeigen uns nur den Menschen, nicht den Gelehrten Lagrange, aber diesen als liebenswürdigen Briefsteller. Namentlich der erste Brief ist in dieser Beziehung hervorzuheben. Lagrange schrieb ihn von Paris aus unter dem 15. Januar 1801. An wen er gerichtet war, ist nicht ausdrücklich gesagt, aber verschiedene Umstände lassen es unzweifelhaft erscheinen, dass der Adressat Niemand anders gewesen sein kann, als Franz Theodor De La Garde, Buchhändler in Berlin und † in Charlottenburg den 3. Juli 1824. Es handelt sich um Bücher, welche der Adressat durch Vermittelung des Pariser Verlegers Duprat an Lagrange geschickt hatte, darunter „Denina, Geschichte Piemonts und der übrigen Staaten des Königs von Sardinien", welches 1800—1805 in drei Bänden gerade bei F. T. la Garde in Berlin erschienen ist und wovon offenbar der I. Band hier gemeint ist. Es ist ausserdem von Madame De la Garde die Rede, welcher Frau Lagrange als Gegengeschenk für einen Roman der Frau von Goulis (*Les mères rivales ou la Calomnie*, 1800 in Berlin und Paris erschienen) einen modernen Winterhut, einen sogenannten Turban, zuschickt. La Garde scheint auch Garten- oder Feldbauliebhabereien gehabt zu haben, denn das Gegengeschenk, welches Lagrange ihm zuwendet, besteht in einem Päckchen Saamen chinesischen Hanfes, dessen Besitz Lagrange selbst einem gewissen Touin verdankte. Wahrscheinlich ist damit André Thouin gemeint, seit 1774 königl. Obergärtner und Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften. Die einzige mathematische Bemerkung des Briefes bezieht sich auf Montucla's Geschichtswerk. Montucla war am 18. December 1799 in Versailles gestorben und hatte das Manuscript der beiden ersten Bände der zweiten Auflage seiner Geschichte der Mathematik druckfertig hinterlassen. Der erste Band war, als Lagrange diesen Brief schrieb, schon erschienen, der zweite war unter der Presse. Lagrange verspricht sich nicht viel von demselben. „Der Gegenstand überstieg, glaube ich, das Maass der Kräfte des Verfassers; ich rede von der Abtheilung, welche die Fortschritte der Mathematik im letztverflossenen Jahrhundert behandelt; denn was den schon bekannten Theil betrifft, so lässt dieser, wie mir scheint, recht wenig zu wünschen übrig." Noch mehr Misstrauen setzt Lagrange in Lalande's Fähigkeit, bei unvollendeten Abschnitten ergänzend einzutreten, und dieses Misstrauens hat sich Lalande in der That recht sehr würdig erwiesen. Was Montucla in einer Geschichte der Mathematik im XVIII. Jahrhundert hätte leisten können, wissen wir nicht, da die beiden von ihm fertig gestellten Bände nur bis zum Schlusse des XVII. Jahrhunderts reichen, im dritten Bande aber das von Montucla Herrührende kaum mehr, als eine erste Aufzeichnung genannt werden kann.

Der zweite Brief ist an Laplace gerichtet. War es beim ersten Briefe möglich, aus dem Inhalt den Adressaten zu erkennen, so ist bei dem zweiten die mangelnde Datirung bis zu einem gewissen Grade zu ergänzen. Lagrange dankt nämlich für Laplace's Abhandlung über Approximationen und Fürst Boncompagni hat offenbar richtig vermuthet, es sei das „*Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres*" gemeint, welche 1785 in Paris in der *Histoire de l'Académie etc. année* 1782 gedruckt erschien. Die Abhandlung aus dem letzten Jahre, welche Lagrange dagegen Laplace mittheilt, weil es eben eine zweite Abhandlung sei und Laplace die erste schon besitze, muss die „*Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*“ aus den Veröffentlichungen der Berliner Akademie von 1783 und 1784 sein, wie gleichfalls von unserem italienischen Fachgenossen bemerkt worden ist. Das Briefchen an Laplace muss demnach 1785 geschrieben sein.

Der dritte Brief ist ein unter dem 6. April 1773 von Berlin aus an Canterzani, den Secretär der Akademie von Bologna, gerichtetes Dankschreiben Lagrange's für seine Ernennung zum Mitgliede. Da man bisher nicht wusste, dass Lagrange überhaupt der Akademie von Bologna angehörte, so entbehrt auch dieser sehr förmliche Brief in französischer Sprache nicht einiges Interesses.

Recensionen.

Ott's graphisches Rechnen. Bemerkungen zu der Recension, die Herr Dr. M. Cantor im XXIV. Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 146 bis 147 der histor.-literar. Abthlg., veröffentlicht hat.*

Es ist eine alte Sitte, dass bei der Recension eines Buches vor allem Andern der Inhalt und Zweck desselben angegeben und neben den etwa vorhandenen Mängeln auch die guten Seiten desselben, und namentlich das, was es Neues bringt, gewürdigt werde.

Dieser Usus scheint aber dem Herrn M. Cantor unbequem zu sein, denn nachdem er gleich von vornherein erklärt, dass ihm die drei vorhergehenden Auflagen des betreffenden Werkchens völlig unbekannt geblieben sind (was nicht Schuld des Autors ist), wendet er sich sofort zu den Mängeln des Werkchens, die seiner Ansicht nach darin bestehen, dass der Autor über die mathematische Ausbildung der Leser, welche von ihm belehrt werden sollen, im Unklaren war. Er bemängelt, dass bei den Lesern die Kenntniss der Regeln über den Gebrauch der Logarithmen, der Begriff der geometrischen Reihen und die Kenntniss der Gleichung der Ebene nicht als bekannt vorausgesetzt wird, während andererseits von der Guldin'schen Regel und jener über die Zeichenfolgen und Zeichenwechsel Gebrauch gemacht und sogar die logarithmische Spirale und die Sinuslinie benützt werden.

Hätte der Herr Recensent die Vorrede zu den früheren Auflagen gelesen, so würde er sich überzeugt haben, dass der Autor nur jene Kenntnisse voraussetzte, die an Untergymnasien oder Unterrealschulen gewonnen werden können, und dass daher das Rechnen mit Logarithmen, das Wesen der Progressionen und die analytische Geometrie nicht als bekannt vorausgesetzt werden durften. Der Gebrauch der Guldin'schen Regel und jener über die Zahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung diente nur als Mittel zum Zweck, weshalb ihre Ableitung nicht am Platze gewesen wäre, während die Eigenschaften der logarith-

* Anmerkung der Redaction. Wir ersuchen unsere Leser, dieser Antikritik ihre Aufmerksamkeit zu widmen. Sie werden daraus besser, als durch weitläufige Auseinandersetzungen von unserer Seite entnehmen, wie buchstäblich gerechtfertigt unsere Ausstellungen waren.

mischen Spirale und Sinuslinie in ganz elementarer, leicht fasslicher Weise entwickelt wurden. Dieser elementaren, leicht fasslichen Darstellungsweise verdankt das Werkchen seine weite Verbreitung und Brauchbarkeit, die am besten dadurch documentirt erscheint, dass dasselbe von namhaften Ingenieuren ins Englische, Französische, Holländische, Italienische, Polnische und Schwedische übersetzt und in hervorragenden technischen Zeitschriften günstig beurtheilt worden ist. Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass die mir von Herrn Dr. M. Cantor zugemuthete Folgerung: „Jede Oberfläche, welche die drei Coordinatenebenen geradlinig schneidet, müsse eine Ebene sein“ entstellt ist; denn es heisst auf S. 179 wörtlich: „Da also die Fläche $\frac{x}{\alpha_1}+\frac{y}{\beta_1}+\frac{z}{\gamma_1}=1$ die Coordinatenebenen nach geraden Linien schneidet, so muss diese Fläche selbst eine Ebene sein.“

Prag, den 24. Juli 1879. K. v. Ott.

Der geodätische Tachygraph und der Tachygraph-Planimeter. Instrumente zur schnellen und genauen graphischen Construction der aus den Daten einer Theodolitvermessung herzustellenden Detailpläne, sowie zur Ausmittelung der Flächeninhalte. Nebst Studien über die Libelle und das umlegbare Nivellirfernrohr. Von Josef Schlesinger, o. ö. Prof. d. descr. u. prakt. Geom. a. d. k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien. Mit 8 Holzschnitten u. 2 Tafeln. Wien, 1877. Faesy & Frick. 8°. 115 S.

A. Der ausführliche Titel bezeichnet den Zweck des geodätischen Tachygraphen ausreichend; man kann zufügen, dass auch die Messungen mit einem andern Instrument, das die Winkel nach Gradmaass liefert (Bussole) verwerthbar sind. In der Schrift sind alle Einzelheiten beschrieben, die beigegebenen Tafeln sind von ungewöhnlicher Feinheit und schwerlich ohne Lupe zu benutzen. Das Wesentliche des Instruments lässt sich kurz angeben: Eine starke, gerade, getheilte Leitschiene wird mit Klammern unverrückbar auf dem Zeichenbrett befestigt. Ein rechteckiger Rahmen kann längs der Schiene gleiten, so dass die langen Seiten rechtwinklig zu ihr stehen. Eine der Langseiten ist getheilt und eine Spitze ist auf ihr verstellbar, durch deren federndes Niederdrücken ein feines Loch dicht an der getheilten Linealkante in das Papier gestochen wird. Man kann also (in beliebigem Maassstab) Punkte auftragen, deren Coordinaten in Bezug auf die Richtung der Leitschiene unmittelbar gemessen oder aus den Messergebnissen berechnet sind.

In dem rechteckigen Rahmen ist parallel den Langseiten mit genauer Führung ein quadratischer Rahmen, der Limbusrahmen, verschiebbar.

In dieses Quadrat ist ein getheilter Kreis eingesetzt, der an Nonien vorüber drehbar ist, wodurch ein mit Ziehkante versehener, getheilter Durchmesser in jede beliebige, nach Gradmass gegebene Neigung gegen die Coordinatenaxen (Schiene und lange Rechtecksseite) gebracht und eine längs demselben gezogene Gerade durch jeden vorherbezeichneten Punkt der Zeichnung geführt werden kann. Man hat also zunächst einen guten Winkeltransporteur, der frei ist von der Unbequemlichkeit und Unsicherheit des Centrirens des Scheitelpunktes. Es lassen sich somit die werthvollen Verfahren der Messtischaufnahmen, einen Punkt zeichnend als Durchschnitt zweier Geraden oder als Endpunkt eines gemessenen Strahls bekannter Länge darzustellen, leicht und genauer, als auf dem Messtische selbst anwenden. Darin beruht der Hauptnutzen des Tachygraphen. Für die Ausfertigung von Detailplänen ist also der schwerfällige Messtisch entbehrlich, auch das mühsame Anbinden der Punkte durch Nebencoordinaten an Polygonseiten oder ähnliche Hauptrichtungen fällt fort; der Theodolit oder ein ähnlicher Winkelmesser wird für die Zwecke der graphischen Darstellung bis in die letzten Einzelheiten nützlich und zweckmässig verwerthbar. Es ist dem Verfasser zu glauben, dass (neben anderen Vortheilen) der Zeitaufwand bei der Theodolitmessung und ihrer tachygraphischen Verwerthung geringer ist, als bei der Messtischaufnahme, wobei noch zu beachten bleibt, dass die Arbeiten auf dem Felde bei gleichem Zeitaufwand kostspieliger sind, als die im Zimmer. Hingegen wird grösserer Rechts- und Zukunftswerth nicht durch die Anwendung des Tachygraphen erreicht, sondern dieser ist in den unmittelbaren Zahlen der Theodolitaufnahme begründet. Die Einbürgerung des Tachygraphen kann man sehr willkommen heissen. Nur kann man fragen, ob die durch die mehrfachen Theilungen, Nonien, Klemmvorrichtungen, Mikrometerwerke u. s. w. bedingte verwickelte Einrichtung, das grosse Gewicht und der hohe Preis des neuen Instruments im richtigen Verhältniss zu den erreichbaren Vortheilen stehen. Hauptnutzen der zeichnenden Darstellungen ist die Ermöglichung einer guten Uebersicht der gegenseitigen Lage der Feldpunkte. Hierzu ist äusserste Genauigkeit nicht nöthig und sie ist bei keiner Karte zu erreichen. Bestünde sie selbst zu gewisser Zeit, so machen die beständigen Aenderungen des Papieres sie vergänglich. Demgemäss kann man wohl der Meinung sein, eine einfachere Vorrichtung mit mässigerem Preise (einfacher Tachygraph 150 fl., vervollständigter 450 fl. ö. W.!) sei noch wünschenswerth.

Der Verfasser, indem er die einzelnen möglichen Verwendungen des Instruments aufzählt, will freilich auch aus der mit dessen Hilfe hergestellten Zeichnung andere Maasse ableiten, Flächen berechnen u. s. w. Das ist aber doch nur gerechtfertigt, wenn man, mit Rücksicht auf Zeitersparniss, mit mässiger Annäherung vorlieb nimmt. Was gezeichnet werden kann, lässt sich immer genauer und häufig sogar schneller und bequemer rechnen. Die Rechnung selbst bringt keine neuen Fehler in die Ergebnisse, während die gelungenste Uebertragung von Messungen in die Zeichnung nothwendig Ungenauigkeiten hervorbringt und das Abgreifen (auf irgend eine Art) von Maassen aus unvollkommener Zeichnung abermals unvermeidliche Fehlerquellen in sich birgt.

Der Verfasser empfiehlt seinen geodätischen Tachygraphen auch zur mechanischen Addition gleichabständiger Ordinaten (wie bei Anwendung der Simpson'schen Regel zur Flächenberechnung vorkommt). Dagegen glaubt der Berichterstatter grundsätzlich sich aussprechen zu können. Es soll die Spitze an dem getheilten Lineal auf die Anfangs- und Endpunkte der Ordinaten genau eingestellt werden; nachdem doppelt soviele Einstellungen gemacht sind, als Ordinaten zu addiren, liefert der Unterschied der zu Anfang und zu Ende an der Linealtheilung gemachten Ablesungen die verlangte Summe. Unstreitig ist aber die rechnerische Zusammenzählung der Längen sicherer und viel einfacher, namentlich wenn die Ordinaten aus den Feldmessungen unmittelbar oder auch nur mittelbar durch Rechnung (zu anderen Zwecken) bekannt sind. Die Berechnung zu dem besondern Zwecke möchte sogar häufig vorzuziehen sein. Will oder kann man diese nicht vornehmen und will also aus der Zeichnung abgreifen, so ist der Tachygraph allerdings brauchbar, aber es ist besser, das getheilte Lineal nur anzuschieben, nicht die Spitze auf die Endpunkte zu stellen, sondern mit dem Auge allein abzulesen. Dazu kann nun eine einfachere Vorrichtung dienen, z. B. ein getheilter Winkel längs getheilter, gewöhnlicher Zeichenschiene verschoben, prismatische Maassstäbe. Gut getrocknetes, gegen die Einwirkungen der Feuchtigkeit geschütztes Holz hat Vorzüge vor dem Metall des Tachygraphen, am besten dürften gläserne Lineale sein. Deren Theilung kann fast unbegrenzt fein gemacht werden, mit einem sehr geringen Aufwand von Sorgfalt und Geschicklichkeit die Parallaxe vermieden werden.

Es ist theoretisch verwerflich, da, wo es nicht unumgänglich sein sollte, erst mit scharfem Hinsehen (es soll eine Lupe benutzt werden) mit sehr geschickter und ruhiger Hand eine Spitze, deren Dicke niemals verschwindend klein ist, auf einen Punkt zu bringen und dann die Stellung der Spitze gegen eine Theilung abzulesen, statt unmittelbar die Lage des Punktes gegen die Theilung mit dem Auge zu erforschen. Man erlangt bald die Fertigkeit, die Parallaxe (die beim Einstellen der Spitze auch vorkommen kann) zu vermeiden und mit blossem Auge Zehntelmillimeter zu schätzen.

Der geodätische Tachygraph kann auch in anderer Art zur Flächenermittelung verwendet werden. Durch Parallelschieben der Alhidade wird nach bekanntem Verfahren das Vieleck allmälig in ein Dreieck von gewählter Höhe verwandelt; aus dem Unterschiede zweier Ablesungen wird die Grundlinie des flächengleichen Dreiecks gefunden. Das Verfahren wird wohl den so bequemen Gebrauch der Polarplanimeter (und anderer) nicht verdrängen, es ist entschieden umständlicher und entbehrt des bei häufig wiederkehrenden Geschäften nicht gleichgiltigen Vortheils, ohne weitere Ueberlegung, förmlich mechanisch vollführt werden zu können, nöthigt endlich zu einer (allerdings sehr einfachen) Rechnung, welche beim Polarplanimeter erspart ist. Zugegeben, dass mit dem Tachygraphen als Planimeter eine etwas grössere Genauigkeit erzielt wird. Ist aber ausnahmsweise verlangt, einen Flächeninhalt mit sehr grosser Genauigkeit zu kennen, so ist die unmittelbare Berechnung aus den Ergebnissen der Theodolit- und Längenmessungen doch unvermeidlich. Gewöhnlich sind die Terme für die Berechnung der Coordinaten der Eckpunkte ohnehin schon ausgewerthet und wenn nicht, muss man sich eben zur Vornahme dieses Geschäfts entschliessen. Selbst die Anwendung der L'huillier-schen Formel dürfte in einfacheren Fällen nützlich sein. Allerdings haben leider viele praktische Geometer eine ganz ungerechtfertigte Scheu vor jeder Rechnung und ziehen die mühsameren und unsichereren graphischen und mechanischen Methoden vor.

Herr Schlesinger bespricht eingehend das (ziemlich umständliche) Geschäft der Prüfung des Tachygraphen. Bei Aufzählung der einzelnen möglichen Anwendungen des Instruments sind interessant die zur Lösung der Pothenot'schen Aufgabe und zur Ermittelung der bei dem Gebrauche optischer Distanzmesser häufig vorkommenden Producte $L.Cos^2\alpha$ und $L.Cos\,\alpha.Sin\,\alpha$.

Der Tachygraph ist vervollständigt durch Anbringung eines Läufers, d. i. eines kleinen, getheilten, mit Stechspitze versehenen Lineals, das sich längs der Ziehkante der Alhidade verschieben lässt, stets rechtwinklig zu dieser verbleibend. Dadurch ist die Auftragung von Punkten möglich, die durch Nebencoordinaten an beliebige Linien angebunden sind und folglich so recht die ins Einzelste gehende Verzeichnung der mit dem Theodolit gewonnenen Messergebnisse.

B. Der Tachygraph-Planimeter, der durch mehr oder weniger Beigaben zu einem Tachygraphen billigerer Art umgestaltet wird (90 fl. ö. W.), soll durch die längere Ziehkante des messbar beweglichen Winkelschenkels Vielecke mit längeren Seiten ausmessen lassen, ohne dass eine Zerlegung der Figur nöthig wird. Der Grundgedanke ist wieder, das Vieleck durch Parallelabschieben in ein flächengleiches Dreieck bekannter Höhe und messbarer Grundlinie zu verwandeln. Wesentlich ein Winkeltransporteur mit langer, getheilter Alhidade, dessen Drehmittelpunkt auf einem Stücke liegt, welches messbar längs einem getheilten Lineal verschoben werden kann. Mit diesem Instrument soll der Flächeninhalt „fast schneller", als mit Fahrstiftplanimetern gemessen werden können; jedenfalls wird bei seiner Anwendung die Zeichnung besser geschont. Er kann mit zwei Spitzen auf der Zeichnung festgestellt werden; doch wird das nicht empfohlen, sondern seine Verbindung mit einem Leit- oder Orientirwinkel, wozu Theile des vorher erwähnten geodätischen Tachygraphen dienen können.

C. Ein Beitrag zum Studium der Libellentheorie befleissigt sich namentlich scharfer Definitionen. Es wird vorausgesetzt, die Innenfläche der Libellenröhre sei durch Umdrehung eines Kreisbogens entstanden und die Umdrehungsaxe ist dann die Libellenaxe. In einer späteren (die Schlesinger'sche nicht erwähnenden) Abhandlung von Helmert (Zeitschr. f. Vemessungswesen, VII S. 185) wird gezeigt, „dass der Axenbegriff mit der für gewöhnlich genügenden Annäherung nicht an die Existenz einer tonnenförmigen Rotationsfläche gebunden sein kann und auch nicht von der Lage des Hauptstriches" (Nullkreises) „abhängt". Schlesinger nennt Niveaukreis den geometrischen Ort der von der Libellenaxe entferntesten Punkte, deren je einer auf jedem Meridian ist, und die Theilstriche sollen Parallelkreise sein zu jenem äquatorialen Niveaukreise. Der vom Mechaniker aufgetragene Nullkreis (Hauptstrich) wird im Allgemeinen vom Niveaukreise abweichen; es wird ein Mittel angegeben, diese Abweichung zu finden. Es ist nützlich, das eine Ende der Libellenröhre zu bezeichnen und stets den halben Unterschied der Ablesungen entsprechend dem vom Zeichen wenigst und dem meist entfernten Blasenende als Lage des Blasenmittelpunktes gegen den Nullkreis zu nehmen. Der so gefundene Ausschlag der Libelle bei einer Neigung ihrer Axe gegen den Horizont ist stets proportional dieser Neigung, wenn auch Niveau- und Nullkreis von einander abweichen.

Es wird recht anschaulich der bekannte Satz erörtert, dass bei einer Drehung der mit tangentialen, schmalen Lagerflächen auf dem Unterlagscylinder (der selbst in einem Lager mit solchen tangirenden Flächen ruht) ruhenden Libelle kein Ausschlag erfolgt, wenn Libellen- und Unterlagsaxe parallel sind, hingegen Ausschlag stets nach derselben Seite bei Vor- und Rückwärtsdrehen, wenn die Axen sich schneiden, und zwar gegen den Schnittpunkt hin, endlich entgegengesetzte Ausschläge bei Vor- und Rückwärtsdrehen, wenn die zwei Axen windschief sind. Geringe Drehungen — und häufig sind nur solche möglich — geben keinen erkennbaren Ausschlag, selbst wenn Libellen- und Unterlagsaxe ziemlich stark gegen einander geneigt sind. Der Ausschlag wird maximal bei einer Drehung um zwei Rechte (Reversionslibelle) und zwar der doppelten Neigung der zwei Axen zu einander proportional.

Es giebt zwei Arten der Libellenberichtigung. Die erste ist erfolgt, wenn die Libelle beim Umsetzen keinen Ausschlag giebt, die zweite, welche die Libellenaxe der Axe des Unterlagscylinders parallel machen soll, nöthigt zu Drehungen der Libelle auf dem Cylinder und ist, nebenbei bemerkt, ausführbar, selbst wenn dieser nicht wagrecht liegt.

Spielt eine doppelscalige und nach dieser zweiten Art berichtigte Libelle, vor und nach dem Umsetzen auf dem Unterlagscylinder, ein, so folgt daraus noch nicht die wagrechte Stellung der Unterlagsaxe, sondern diese ist gegen den Horizont um die Hälfte des spitzen Winkels geneigt, den die Tangenten in den Nullpunkten der beiden Theilungen miteinander bilden. Eine nur mit einer Theilung versehene Reversionslibelle, die nach der ersten Art berichtigt ist, leistet dieselben Dienste, wie eine doppelscalige oder wie eine, die um eine Spitzenaxe in ihrer Fassung drehbar ist.

Man bezeichne auch ein Ende des Unterlagscylinders und einen Träger desselben. Liegt das bezeichnete Cylinderende im bezeichneten Träger, so seien die Unterschiede der den Blasenenden entsprechenden Ablesungen d_1 und d'_1, je nachdem das bezeichnete oder das nicht bezeichnete Libellenende über den bezeichneten Stellen liegt, und die denselben Libellenlagen entsprechenden Ablesungsunterschiede seien d_2 und d'_2, wenn der Cylinder in seinen Trägern umgelegt worden. Es ergiebt sich

$$(d_1 + d'_1) - (d_2 + d'_2) = 0$$

und

$$(d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2) = \textit{constant}\ (K).$$

Die Neigung der Cylinderaxe in ihrer ersten Lage gegen den Horizont wird (mit Hilfe der Theorie der kleinsten Quadrate) gefunden zu

$$\tfrac{1}{4}(d_1 - d'_1) + \tfrac{1}{8}(K - K' + KC),$$

worin K' den statt K wirklich beobachteten Werth der Summe der Differenzen der zwei Paare von Ablesungsunterschieden bezeichnet und C eine Constante, die genau gleich $-\frac{1}{2}$ ist, wenn die Lagerwinkel (der Libellenträger und der Cylinderträger) gleich sind, die aber nur unwesentlich ändert, wenn jene Lagerwinkel geringe Aenderungen erfahren.

Giebt die nach der ersten Art berichtigte Libelle keinen Ausschlag, so ist die Axe des Unterlagscylinders nur dann wagrecht, wenn die Halbmesser der Unterlagskreise genau gleich sind, und hat andernfalls eine constante Neigung gleich

$$\tfrac{1}{8}C[(d_1 - d'_1) + (d_2 - d'_2)].$$

Endlich kommt der Verfasser zu dem Ergebnisse, dass Reversionslibellen mit Spitzenaxe minder verlässlich seien, als jene mit zwei Theilungen, und dass bei Nivellirinstrumenten mit umlegbarem Fernrohr die feste Verbindung einer einfachen Libelle mit dem Fernrohr einer frei umsetzbaren Libelle vorzuziehen sei.

D. Studien über die Eigenschaften des umlegbaren Nivellirfernrohres und seiner Verbindung mit der Nivellirlibelle — eine weitläufige Erörterung bekannter Lehren, die gleichwohl für viele Leser, die ihr zu wünschen sind, recht nützlich sein mag.

Bohn.

Fest-Gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de zinsproek: „Een onvermoeide Arbeid Komt Alles te Boven" ter Gelegenheid der Viering van zyn honderdjarig bestaan. Harlem, Joh. Enschedé en Zonen. 1879.

Die holländische mathematische Gesellschaft, welche Dank der standhaften Durchführung ihres Wahlspruches: „Unverdrossene Arbeit überwindet Alles" bereits ihre Centennalfeier begehen konnte, verewigte dieses Fest durch die Herausgabe des hochinteressanten Documents, von welchem wir hier sprechen wollen. Professor Bierens de Haan in Leyden, der dem Theoretiker ebenso sehr durch seine mustergiltigen Integraltafeln, als dem Geschichtsfreunde durch seine historischen Arbeiten über altniederländische Mathematik — letztere grossentheils in Boncompagni's „Bullettino" abgedruckt — wohlbekannte Gelehrte hat dem Staube des Leydener Rathsarchivs eine sehr merkwürdige Druckschrift entrissen, welche er hier wieder abdrucken lässt; derselben fügte er noch bei ein anderes Schriftstück, das allerdings von Seiten der Generalstaaten dem Druck übergeben, aber nur in so wenigen Abzügen verbreitet worden war, dass selbes in jeder Hinsicht als Rarität gelten konnte. Die obengenannte Officin hatte es in dankenswerthester Weise übernommen, beide Documente mit typographischer Genauigkeit in allen Einzelheiten treu wiederzugeben: selbst die Errata wurden hiervon nicht ausgeschlossen, sondern lediglich in einem kurzen, französisch geschriebenen Vorbericht namhaft gemacht. Zweck und Gegenstand ist beiden Bestandtheilen der Festschrift gemeinsam; es sind Referate, welche auf behördliche Anordnung von angesehenen Sachverständigen über Themata der politischen Arithmetik, beziehungsweise in den Jahren 1599 und 1671, erstattet wurden. Auch das Idiom ist beide Male das niederdeutsche.

In jenem ersteren Jahre war eine Commission niedergesetzt worden, um Tabellen für die Berechnung eines auf Zins oder Zinseszins ausgeliehenen Capitalwerthes auszuarbeiten. Von den fünf Mitgliedern sind zwei, van Merwen und Mintens, so gut wie unbekannt, das dritte, Stadtschreiber van Hout, nur aus der politischen Geschichte bekannt; zwei endlich haben sich als Fachmänner auch anderweit bekannt gemacht, nämlich Ludolph van Ceulen und Jan Pieterszon Dou, betreffs dessen geodätischer Arbeiten auf die treffliche Specialschrift Vorsterman van Oijen's (Rom 1870) hinzuweisen wäre. Der Bericht beruft sich auf ein von Ludolph im Jahre 1596 zu Delft publicirtes Buch, „Interessenrechnung" betitelt, da man auf die darin enthaltenen Tafeln zurückgreifen werde. Die erste Tafel ist überschrieben: „*Van ghelijcke custingen of termijnen te betalen op II. III. IIII. of meerder jaren aen den anderen volgende.*" Auf der linken Seite finden wir fortlaufend die Zahl 1, 2, 3, ... und auf der rechten die Summe, bis zu welcher am Ende des bezüglichen Jahres das als Einheit gewählte Capital 1000000000 angewachsen ist. In Anbetracht des doppelten Umstandes, dass die Schreibart der Berichterstatter alles Andere eher als leicht verständlich genannt werden kann, dass aber die beigefügten Beispiele für die Geschichte der damals gerade von Stevin ins Leben gerufenen Decimalbruchrechnung von grösster Bedeutung sind, dürfen wir wohl eines dieser Exempel hier etwas eingehend besprechen.

Ein Haus von 4500 fl. Werth soll durch Ratenzahlungen von je 100 fl. erworben werden; wie wird der Vertrag festzusetzen sein? Man zerlegt, da die Tafel nicht weiter reicht, 4500 in seine beiden Summanden 3000 und 1500; dann sucht man zum Argument 30 in der Tafel die zugehörige Zahl, als welche 13404315995 sich findet. Da es sich aber nicht um 30, sondern um 3000 handelt, so hat man noch zwei Nullen anzuhängen. Lässt man jetzt die letzten neun Ziffern weg, so verbleibt vor dem Striche 1340, nach demselben 431599500; dies mit 20 multiplicirt, giebt jetzt 8631990000; werden wieder neun Stellen abgetheilt, so bleibt resp. 8 und 631990000; dies mit 16 multiplicirt, giebt 10111840000; die gleiche Operation, wie bisher, ergiebt 10 und 111840000. Letztere Decimalstellen sind als zu unerheblich fortzulassen. Man weiss also jetzt, dass die Amortisation von 3000 fl. durch Theilzahlungen von je 100 fl. pro Jahr gleichbedeutend ist mit einer augenblicklichen Zahlung von 1340,810 fl. Nunmehr kommt ebenso der zweite Summand 1500 zur Behandlung. Da dem Argument 15 der Tafelwerth 9555549358 entspricht, als Termin aber nicht mehr 30, sondern blos noch 15 Jahre gelten, so ergiebt eine der vorigen analoge Rechnung die Zahl 955,111. Hier aber tritt die zweite der obenerwähnten Tafeln in Kraft: „*Van enckele custinghen of termijnen, te betalen naer een, twee, drie, of meerder jaren.*“ In dieser finden wir zu 30 die Zahl 162230250 angegeben, und die Multiplication des obigen 955,111 mit 0,162230250 ergiebt das Product 155,06. Damit ist der Calcul abgeschlossen, und in den Kaufbrief konnte gesetzt werden: Der Käufer des Hauses muss entweder 45 Jahre lang je 100 fl. oder aber sofort auf dem Brett (1340,810 + 155,06 = 1495,870) Gulden entrichten. Im Original ist diese Zahl nach der noch heute giltigen Regel zu 1495,9 abgerundet angegeben.

Da auch die übrigen Rechnungen des Rapportes sich nicht wesentlich von der soeben durchgeführten unterscheiden, so halten wir uns für berechtigt, gleich zum zweiten Theile der Festschrift fortzuschreiten. Die „*Waerdye van Lyf-Renten Naer proportie van Los-Renten*“ überschriebene und im Haag gedruckte Abhandlung stammt aus der Feder des als Mathematiker und Politiker gleich verehrungswürdigen Pensionärs Jan de Wit. Für die Rentenrechnung im Allgemeinen hatte allerdings auch bereits Stevin die massgebenden Grundsätze aufgestellt, allein für die Emission staatlich garantirter Leibrenten, bei welcher der Fiscus und die Würde des Staates gleichmässig interessirt sein mussten, fehlte es noch an jeder erfahrungsmässigen Basis. De Wit sucht eine solche zu schaffen, indem er dabei gewisse Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausschickt. Sein erstes Theorem besagt, dass der numerische Werth für Jemanden unverändert bleibt, der zwischen zwei Chancen vom Werthe 0 und m, oder aber zwischen zwei Chancen vom Werthe $\frac{m}{2}$ und $\frac{m}{2}$ zu wählen hat. Mit dem zweiten Satze betritt unser Verfasser ein vor ihm noch so gut wie gar nicht bebautes Feld, das Feld der Mortalitätsstatistik. Er stellt fest, dass die Leibrente verschieden bemessen werden müsse, je nachdem der Bewerber seinem momentanen Alter nach noch auf eine lange oder kürzere Lebensdauer zu rechnen haben werde, dass die Sterbwahrscheinlichkeit („*hazardt van sterven*") als eine für die verschiedenen Altersperioden wechselnde angenommen werden müsse u. s. f. De Wit will diese Thatsachen nicht als Lehrsätze, sondern lediglich als empirische Annahmen angesehen wissen, mittelst deren er drei mathematische „Propositie" zu begründen unternimmt. Da die erste Proposition nur ein Unterfall der zweiten ist, so formuliren wir gleich diese letztere in unserer modernen Sprache. Sie besagt: Erwartet Jemand durch Ereignisse, denen bezüglich die Wahrscheinlichkeiten $m_1, m_2, \ldots m_p$ zukommen, Vortheile, deren Taxwerth den Verhältnisszahlen $n_1, n_2, \ldots n_p$ entspricht, so darf er den ihm zu Gute kommenden Vortheil durch die Zahl

$$\frac{m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + m_p n_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

ausdrücken. Auf Grund all' dieser Vorbedingungen wird dann endlich eine Tabelle ausgearbeitet, welche den in Stübern ausgedrückten Werth der Leibrenten für jedes halbe Jahr zu entnehmen gestattet. Die eigentliche Ziffernarbeit ist von den Staatsbuchhaltern Bellechière und Lense ausgeführt worden, und J. Hudde, der durch seine Verdienste um die neue Coordinatengeometrie zu hohem Ansehen gelangte Bürgermeister von Amsterdam, bezeugt am Schlusse der Schrift, dass er dieselbe aufmerksam („*met aendacht*") geprüft und nunmehr sein volles Einverständniss mit den derselben zu Grunde gelegten Principien zu bekunden habe.

Die Geschichte der Staatsrechenkunst pflegt Halley als jenen Mathematiker zu bezeichnen, der durch seine auf die standesamtlichen Register der Stadt Breslau gestützten Untersuchungen als eigentlicher Begründer der neuen Disciplin zu gelten habe. Allein, wie Cantor in seinem Schriftchen „Das Gesetz im Zufall" nachweist, hat von Schriftstellern des XVII. Jahrhunderts schon Graunt (1666) statistische Thatsachen festgestellt und Jacob Bernoulli die grosse Idee einer mathematischen Statistik concipirt. Montucla gedenkt auch der vorstehend besprochenen Denkschrift de Wit's, welche bereits zu Leibniz' Zeit gar nicht mehr zu bekommen gewesen sei. Unsere Analyse wird ergeben haben, dass in der That der Name des Holländers zugleich mit Graunt und vor Halley genannt zu werden verdient (vergl. Cantor, S. 32 flgg. und S. 46).

Ansbach. Dr. S. GÜNTHER.

Invarianti covarianti e contravarianti delle funzioni omogenee. Nota del P. Giacomo Foglini. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1879. 70 S.

Die vorliegende Abhandlung ist ursprünglich in den Denkschriften der päpstlichen „*Accademia dei lincei*" veröffentlicht und hierauf durch die berühmte Verlagsanstalt des Fürsten Boncompagni als selbstständige Schrift ausgegeben worden. Deutschen Gepflogenheiten zufolge erwartet man von einer akademischen Publication, dass ihr Inhalt nicht sowohl der Verbreitung, als vielmehr der Förderung der Wissenschaft zu dienen bestimmt sei. Dem entgegengesetzt verfolgt die Monographie des Herrn Foglini, der in ähnlicher Weise bereits früher die Theorie der trilinearen Coordinatensysteme behandelt hat, eine wesentlich populäre Richtung; ihr Zweck ist, die Grundzüge jener Lehren, welche man unter dem Gesammtnamen der modernen Algebra zusammenzufassen sich gewöhnt hat, in einfacherer und elementarerer Weise darzulegen, als dies sonst gemeiniglich geschieht, und dieser seiner Tendenz scheint uns nun auch der Herr Verfasser vollständig gerecht geworden zu sein.

Der Verfasser beginnt mit der Definition homogener Functionen, deren einzelne Glieder er sich bereits mit den bezüglichen Binomialcoefficienten als Factoren versehen denkt; ist $\varphi(A, B, C, \ldots)$ diese Function, welche durch lineare Transformationen in die Form $\varphi(A', B', C', \ldots)$ übergeführt wird, ist ferner Δ der Modul der Substitution und n eine beliebige ganze Zahl, so ist der invariante Charakter einer Function bekanntlich durch die Relation $\varphi(A', B', C', \ldots) = \Delta^n \varphi(A, B, C, \ldots)$ bedingt. Der Begriff einer unimodularen Substitution und einer absoluten Invariante schliesst sich ungezwungen an. Die Discriminanten werden als erste Beispiele der Invarianz beigezogen. Die weitere Untersuchung knüpft zunächst ausschliesslich an die binären Functionen beliebiger Grade an, und diese Beschränkung ist gewiss um so mehr berechtigt, als die Stellung dieser Functionen innerhab der Formentheorie nach den — hier übrigens nicht erwähnten — Forschungen von Clebsch-Gordan eine ebenso bedeutende, als vorläufig noch exceptionelle ist. Für diesen Specialfall werden mehrere fundamentale Lehrsätze aufgestellt und mit einfachen Beweisen versehen. Mittelst derselben ist dann die Invariantenbildung selbst ermöglicht. Bei der Bildung der simultanen Invariante $(A_2 B_0 + A_0 B_2 - 2 A_1 B_1)$ zweier binärer Formen zweiten Grades wird der geometrischen Bedeutung dieses Ausdruckes gedacht; verschwindet dieselbe nämlich identisch, so ist damit ausgesagt, dass die beiden Punktepaare, welche aus der Identificirung jener beiden Formen mit Null resultiren, einander harmonisch zugeordnet sind. Auch weiterhin wird jenen Beziehungen, in welchen die Lehre von der projectivischen Verwandtschaft zur Determinantentheorie steht, besondere Beachtung geschenkt. Nachdem alsdann noch von den symmetrischen Wurzelfunctionen kurz die Rede gewesen, kommt die im Begriffe der Covariante gelegene Erweiterung des ursprünglichen Invarianzbegriffes zur Sprache, zu deren Definition die Gleichung $\varphi(A', B', C', \ldots, x', y', z', \ldots) = \Delta^n \varphi(A, B, C, \ldots, x, y, z)$ dient. Die Discussion der Covarianten bewegt sich, was wir im Interesse einer stetigen Entwickelung nur billigen können, genau in den nämlichen Geleisen, wie jene der Invarianten. — Bei allen bisherigen Betrachtungen war vorausgesetzt, dass die beiden auftretenden Reihen veränderlicher Grössen „congredient" seien, d. h. dass die Veränderlichen der ursprünglichen Form und der aus ihr abgeleiteten Formen durch ein und dieselben lineare Substitution verknüpft sind. Nunmehr gelangt auch der entgegengesetzte Fall „contragredienter" Variablen zu seinem Rechte. Die nächsten Paragraphen widmen sich der Aufgabe, invariante Bildungen dadurch herzustellen, dass man mit symbolischen Operationen des Differentiirens an vorgelegte Formen herantritt. Dieser Theil der Schrift geht nicht unbeträchtlich über den ursprünglichen didaktischen Zweck hinaus. Insbesondere dürfte auf die Gedankenreihe hinzuweisen sein, mittelst deren der Verfasser zu der Thatsache kommt, dass jeder aus einer binären Form m^{ten} Grades hervorgegangenen Invariante n^{ten} Grades stets eine Invariante zur Seite steht, deren numerische Bestimmungsstücke gerade die umgekehrten sind. Damit ist (S. 48) das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz gewonnen. Auf ein bekanntes Gebiet leitet die Einführung des Begriffes der „Emananten", indem, unter V irgend eine Form verstanden, die Emanante zweiter Ordnung von V eine Discriminante besitzt, welche als mit der bekannten Hesse-schen Determinante identisch erkannt wird. Die Schrift schliesst mit eingehender Behandlung der „Contravarianten" und „Evektanten", wobei durchaus den praktischen Beispielen besondere Sorgfalt gewidmet wird.

Man wird aus vorstehender gedrängter Inhaltsangabe ersehen, dass die Arbeit Foglini's zu jenen literarischen Erscheinungen zu rechnen ist, welche eine erhöhtere Berücksichtigung zu beanspruchen berechtigt sind, als nach der Anlage derselben eigentlich zu erwarten wäre. Da uns in deutscher Sprache keine gleich übersichtliche Einleitung bekannt ist, welche auch in die höheren Partien der Invariantentheorie einzudringen vermittelt, ohne mehr als die ersten Determinantensätze und die Taylor'sche Reihenentwickelung vorauszusetzen, so würde uns eine mit literarischen Nachweisen auszustattende deutsche Bearbeitung dieser kleinen Schrift sehr willkommen sein.

S. 12 Z. 15 v. o. ist zu lesen „*binaria*" statt „*binomia*". S. 15 Z. 2 v. o. x^3 statt x_2.

Ansbach. Dr. S. GÜNTHER.

Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen von Dr. J. ODSTRČIL, Gymnasialprofessor in Teschen. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert. 1879. VIII, 79 S.

Eine kurze und blos durch Heraushebung der eigentlichen Hauptpunkte zum weiteren Studium anregende Darstellung des Quaternionencalculs kann in Deutschland in der That als ein Bedürfniss gelten, da die streng wissenschaftlichen Werke von Hankel und Unverzagt ein über die Wünsche des Anfängers weit hinausreichendes Ziel verfolgen. Die kleine Schrift, auf welche wir im Folgenden die Aufmerksamkeit deutscher Leser richten möchten, beabsichtigt, diese Lücke auszufüllen, und, wie es uns scheinen will, mit Glück. Nach einer kurzen Einleitung, welche den principiellen Unterschied zwischen absoluten und solchen Zahlen erörtert, mit denen irgendwelche geometrische und physikalische Eigenschaften verknüpft sind, wird der Begriff des „Vectors" gewonnen, welcher infolge der Bedingungsgleichung $\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha$ als Product aus „Tensor" und „Versor" sich darstellt; zwei in der Grösse nicht miteinander übereinstimmende Vectoren α und β werden durch die Gleichung $\alpha = x\beta$ miteinander verbunden, wo x den „Scalar" repräsentirt. Die Bedingungen, unter welchen vier Punkte in Einer Ebene und drei Punkte in Einer Geraden liegen, ergeben sich von selbst. Ebenso erhellt leicht, dass die Summation von Vectoren eine associative und commutative Operation ist, und dass ebenso für die Multiplication der Vectoren mit Scalaren das Gesetz der Distributivität Geltung hat. Die im Allgemeinen unbestimmte Aufgabe der Vectorenzerlegung macht den Beschluss des ersten Abschnittes. — Der zweite Abschnitt definirt die Quaternion als Quotienten zweier Strecken; zwei solche Quotienten erfordern, abgesehen von der für die gewöhnliche Algebra ausreichenden Gleichheit der in Zähler und Nenner stehenden Strecken, auch noch das zu ihrer Gleichheit, dass die beiden in Frage kommenden Winkel gleich sind und in parallelen Ebenen liegen. In neuester Zeit hat, wie hier wohl hätte erwähnt werden sollen, Professor Unverzagt den Nachweis geführt, dass diese von Hamilton noch anerkannte Beschränkung ebenfalls beseitigt werden kann, wenn man den älteren Begriff der Quaternion zur „Biquaternion" erweitert. Die Entwickelung des Satzes, dass die Quaternion zweier beliebigen Vectoren $6A$ und $6B$ resp. von den Tensoren a und b durch den Ausdruck

$$\frac{b}{a}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

ausgedrückt werde, ist klar und einfach, wenn auch ein wenig weitschweifig. Da der Vectorantheil eines solchen Ausdruckes sich in drei aufeinander senkrecht stehende Vectoren zerlegen lässt, so können die Quaternionen auch auf die Form

$$q = a + bi + cj + dk$$

gebracht werden, welche aus den Scalaren a, b, c, d und den Tensoren i, j, k sich zusammensetzt, ein Umstand, dem die neue Rechnung ja auch ihren Namen verdankt. Die Addition und Subtraction der Quaternionen vollzieht sich nach den bekannten algebraischen Regeln und bietet nicht die mindesten Schwierigkeiten. Dagegen erfordert die Multiplication der Vectoren, weil bei ihr zuerst ein algebraisches Grundgesetz, jenes der Commutativität, in Wegfall kommt, längere Ueberlegungen, und ein Gleiches gilt natürlich um so mehr von der Multiplication der eigentlichen Quaternionen. Der Zusammenhang letzterer mit der Determinantentheorie tritt hier, wie auch besonders im nächsten Abschnitt, „Product dreier Vectoren" betitelt, scharf hervor. Ein sehr verdienstliches Unternehmen endlich ist das Schlusscapitel, in welchem eine Reihe von Anwendungen des Quaternionencalculs auf geometrische und mechanische Fragen vorgeführt wird. Hamilton hatte es an solchen Anwendungen nicht fehlen lassen, allein dieselben betreffen ausschliesslich complicirtere Probleme der höheren Geometrie und der mathematischen Physik, wogegen hier z. B. zur Sprache kommen: Der pythagoräische Lehrsatz in der Stereometrie, die Grundgleichung der sphärischen Trigonometrie, die Gleichgewichtsbedingung für eine in eine Flüssigkeit eingetauchte Pyramide.

Sachkenner werden vielleicht einwenden — und wir sehen sogar solchen Einwänden mit Sicherheit entgegen —, dass elementare Beispiele von der hier besprochenen Art nicht geeignet seien, die eigentlich durchschlagende Kraft des Hamilton'schen Algorithmus ins richtige Licht zu setzen. Zugestanden, allein die Absicht unserer Vorlage geht auch nicht dahin, die specifische Bedeutung der Quaternionen darzuthun; eine in diesem Sinne gehaltene Fortsetzung seiner Arbeit behält sich der Verfasser ausdrücklich für die Zukunft vor, und wir hoffen, dass er dann noch manchen andern wichtigen Punkt, so die longimetrischen Quaternionen, das Verhältniss des Calculs zur Grassmann'schen Ausdehnungslehre und zu der (S. 5) wohl kaum ausreichend gewürdigten Lagerechnung u. s. w., mit heranziehen werde. Zunächst soll der Leser des Buches das Wesen der Quaternionen erkennen, mit diesen manipuliren und den fremdartigen Eindruck abstreifen lernen, den für's Erste die partielle Suspension altgewohnter Rechnungsgesetze macht — eine Befangenheit, die so weit geht, dass nach Spottiswoode's gewiss zuverlässiger Angabe selbst gewandte Mathematiker anfangs ihren mit Hilfe der Quaternionen gefundenen Ergebnissen erst dann zu trauen pflegten, wenn sie selbe dem Auge des Meisters Hamilton unterbreitet hatten. Dass dergleichen nicht fürder geschehe, sollen eben elementare Anleitungen bewirken, wie wir deren eine — und zwar die erste in Deutschland — soeben kennen lernten.

S. 5 Z. 6 v. u. statt Scheffer lies Scheffler, S. 27 Z. 14 v. u. statt s lies q.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Die wichtigsten Sätze der neueren Statik. Ein Versuch elementarer Darstellung von Dr. J. B. Goebel. Zürich, 1877. Verlag von Meyer & Zeller.

Das kurze, nur 51 Seiten gr. 8^0 nebst einer lithographischen Figurentafel umfassende, übrigens gut ausgestattete Werkchen ist dem Lehrer und Freunde des Verfassers, Herrn Hermann Fritz, Professor der Maschinenkunde am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, gewidmet. In einfacher, elementarer Weise werden namentlich mit Hilfe der Theorie der Schrauben von Ball (*The Theory of screws. Dublin* 1876) eine grössere Anzahl Sätze der neueren Statik, wie sie von Möbius, Poinsot, Chasles u. s. w. gefunden worden sind, hergeleitet.

Freiberg i. S., den 17. Februar 1879. Th. Kötteritzsch.

Schul-Physik, bearbeitet von Albert Trappe. 8. Aufl. Breslau, Ferdinand Hirt. 1878.

Ein gut geordnetes, klar und deutlich abgefasstes Werkchen von 302 Seiten gr. 8^0 mit ausführlichem Inhaltsverzeichniss. Unter der grossen Anzahl von Schulphysiken ist dieses Werkchen jedenfalls eines der besten, namentlich verdient die zweckmässige Auswahl und Anordnung des behandelten Stoffes und die klare und deutliche Darstellung alles Lob. Besonders erwähnt mag hier noch werden, dass von den neueren Apparaten die Gramm'sche magnet-elektrische Maschine, der Typendrucktelegraph von Hughes und das Bell'sche Telephon gebührend berücksichtigt worden sind. 253 in den Text eingedruckte Abbildungen erleichtern das Verständniss.

Freiberg i. S., den 2. März 1879. Th. Kötteritzsch.

Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum primum edidit et notis illustravit C. Henry Parisiensis. Halis Saxonum 1879.

Ueber einige Abschnitte dieses neu edirten Textes sendet uns Herr Hultsch folgende Bemerkungen ein.

Der Herausgeber hat lediglich das, was der Pariser *Codex graec.* 453 bietet, zu einem möglichst getreuen Abdruck bringen wollen. Indess mögen dabei, wie es zu geschehen pflegt, mancherlei Fehler sich eingeschlichen haben. Denn aller Wahrscheinlichkeit nach hat die Handschrift pag. 1, 17 *ἀπαρτιζόντων*, nicht *ἀπαρτιξόντων*, pag. 2, 15 *ἑξῆς*, nicht *ἑζῆς*, und ähnlich mag es um manche Flexionsendung stehen, welche in der Handschrift gewiss durch Abbreviatur gegeben ist.

Mit Unrecht ist gegen die handschriftliche Autorität pag. 1, 20 zu den Worten *πρὸς τὸ εὑρίσκειν ἐφ' ὅσον ἦν δυνατόν* hinzugefügt *ἐπίστασθαι*, da nach feststehendem griechischen Sprachgebrauch vielmehr *εὑρίσκειν* stillschweigend bei *δυνατόν* nochmals zu denken ist. Durch ein schwer erklärliches Missverständniss ist auch pag. 2, 8 die ganz richtige handschriftliche Lesart *κα*, d. i. 21 Myriaden, geändert worden in *σ̈α̈*, in welcher Lesart *σ̈*, wie eine beigeschriebene Anmerkung besagt, 200000 heissen soll. Unerfindlich ist es auch, aus welchem Grunde pag. 1, 11 und 12 das handschriftliche M̊ durch *μοίραν*, nicht durch *μοῖραν*, wiedergegeben ist.

Doch dies nur beiläufig. Zweck dieser Zeilen ist, kurz darzulegen, welcher Grad von Zuverlässigkeit dem Texte der Pariser Handschrift zuerkannt werden kann. Schreiber dieses gesteht, dass ein so schwer corrumpirter Text ihm früher noch nicht vor die Augen gekommen ist. Nicht drei Zeilen kann man hinter einander lesen, ohne auf eine Unterbrechung der regelmässigen Satzconstruction und die ärgsten Fehler in den Wortformen zu stossen. Zur Probe diene gleich die erste Periode in folgender Nebeneinanderstellung.

Handschrift nach Henry:	Wahrscheinliche Verbesserung:
Ἐπειδὴ τὰς ἐφόδους, ὡς ἔνϊ, μάλιστα τοτ' ἀκριβοῦς ἕνεκα δεῖ εἶναι, εὑρίσκομεν δὲ πλέον τῶν ἄλλων τής ἀστρονομίας, περιεργέτερον καταγινομένης, πρὸς τοῦτ ἀγαπητὴν ἡγούμενοι καὶ πρὸς τὰ χωρὶς ἀστρονομῖας πάντα ὃσά τε πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερϊσμοῖς ἕπεται ἔνθετον, ἀπεγραψάμεθα τοῦτο τὸ μεδόδιον.	*Ἐπειδὴ τὰς ἐφόδους, ὡς ἔνι μάλιστα, τοῦ ἀκριβοῦς ἕνεκα δεῖ εἰδέναι, εὑρίσκομεν δὲ πλέον τῶν ἄλλων τὴν ἀστρονομίαν τοῖς περιεργοτέροις καταγινομένην πρὸς τοῦτ' ἀγαπητήν, ἡγούμενοι καὶ πρὸς τὰ χωρὶς ἀστρονομίας πάντα, ὅσα γε πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς ἕπεται, εὔθετον, ἀπεγραψάμεθα τοῦτο τὸ μεθόδιον.*

Das heisst zu deutsch: „Da man die (richtigen) Methoden so gut, wie nur immer möglich, um der Genauigkeit willen kennen muss, und da wir finden, dass die Astronomie mehr als die anderen (Wissenschaften) bei solchen, die es ernster nehmen, zu diesem (Zwecke) beliebt ist, so haben wir in der Meinung, dass (die astronomische Methode) auch zu allen ausserhalb der Astronomie (liegenden Rechnungsweisen), soweit sie auf Multiplication und Division gerichtet sind, wohl passend sei, diese kurze Anweisung niedergeschrieben."

In ähnlicher Weise ist auch das weiter Folgende verderbt. Um jedoch nicht noch weiter die Ueberlieferung und die Emendation neben einander aufzuführen und dadurch zuviel Raum in Anspruch zu nehmen, geben wir die Fortsetzung in Uebersetzung und fügen die nöthigen Verbesserungen als Anmerkungen bei.

„Denn da der Zodiacus in 60 Abschnitte[1]) getheilt wird, nannten die Alten jeden einzelnen Abschnitt einen Grad (*μοῖρα*). Wir aber durften den Grad ansehen entweder als den Raum einer Einheit oder eines Fusses, je nachdem der Bedarf dies erheischt ...[2]). Indem sie aber als erste Unterabtheilung diejenige in Sechzigstel ersannen[3]), weil die Zahl 60 mehrfach sich theilen lässt (als andere Zahlen)[4]), nannten sie jeden einzelnen Abschnitt (des Grades) theils ersten Bruchtheil, theils erstes Sechzigstel. Ferner, weil sie einer noch feintheiligeren Scala[5]) bedurften, um soweit als möglich mit Genauigkeit zu finden, welche Stellungen zu jedem Zeitpunkte die Sterne am Himmel einnehmen, theilten sie jeden ersten Bruchtheil für sich[6]) in weitere Sechzigstel und bezeichneten diese als zweite Sechzigstel oder Bruchtheile. So war ihnen also der Grad durch die ersten Sechzigstel getheilt in 60 erste Bruchtheile, und durch fernere Theilung in 3600 zweite[7]). Ferner, da man noch grösserer

---

1) *εἰς τμήματα ξ'* statt *εἰς τὰ ξ'*.

2) Hier folgen die unverständlichen Worte *διὰ οὖν τὰ προσήμερα ταύτῃ τὸ δ'εστι τω τοῦ ξ' μὲρει τοῦ κύκλου ποτε μὲν ὡς ποδΐ ποτὲ δὲ ὡς μονὰδϊ δυναμένη παραλαμβάνεσθαι.* Dieselben scheinen ein erklärendes Scholion zu den vorhergehenden Worten zu bilden; denn *τὰ προσήμερα* (oder vielleicht *τὰ πρὸς ἡμέραν*) liegt dem Sinne nach bereits in *τὰς ἀπαντώσας χρείας*, und die letzten Worte, welche wahrscheinlich zu lesen sind *τοῦ ξ' μέρους τοῦ κύκλου ποτὲ μὲν ὡς ποδὸς ποτὲ δὲ ὡς μονάδος δυναμένου παραλαμβάνεσθαι*, erläutern das vorhergehende *μοναδικὸν χωρίον ἢ ποδιαῖον*.

3) Es ist zu lesen *Πρώτην δὲ διαίρεσιν ἐπινοήσαντες* statt *Πρώτην διαῖρεσιν ἐπενοήσαντο.* Durch diese Aenderung ist sowohl das falsche Medium des Verbums *ἐπινοεῖν* beseitigt, als auch die Verbindung der Structur mit dem Folgenden hergestellt.

4) Lies *διὰ τὸ* (statt *τῶν*) *πλειόνων μερῶν γίνεσθαι ἀπαρτιζόμενον* (statt *ἀπαρτιξόντων*) *τὸν ξ' ἀριθμόν* (statt *ταύτην* — in der Handschrift steht jedenfalls ein Compendium ähnlich demjenigen, welches der Herausgeber pag. 3 not. 1 andeutet).

5) Die handschriftliche Lesart *ἀκριβείας* ist auffällig, weil gleich darauf *μετὰ ἀκριβείας* folgt; doch ist es ja möglich, dass der Bearbeiter dieses Tractates an der Wiederholung keinen Anstoss genommen hat.

6) Zu verbessern *καθ' ἑαυτὸ* statt des haarsträubenden *καθ' ἑαυτοῖς*, welches der Druck bietet.

7) Der griechische Schriftsteller hat ohne Zweifel geschrieben *εἰς λεπτὰ μὲν πρῶτα ξ', δεύτερα δὲ κατ' ἐπιδιαίρεσιν ͵γχ'*, statt dessen die Handschrift nach Ausweis des Druckes haben soll *εἰς λεπτὰ μὲν πρῶτα, ξ̄ δεύτερα δὲ, κατ ἐπιδιάιρεσιν*

Genauigkeit bedurfte, weil bei den himmlischen (Erscheinungen) eine noch so geringe von uns beobachtete Abweichung eine nicht geringe Differenz bewirkt, so theilten sie jeden der zweiten Bruchtheile in weitere Sechzigstel und nannten die (so) entstehenden Bruchtheile **dritte**, da sie der dritten Theilung angehören[1]). Weiter theilten sie in ihrem Streben nach exacter (Messung) jeden von diesen dritten Bruchtheilen in Sechzigstel und bezeichneten die herauskommenden (Theile) als vierte Sechzigstel oder Bruchtheile, ja noch viel kleinere Bruchtheile hatten sie[2])."

Es folgt nun mit den Anfangsworten „Hiernach muss man wissen, in wie viele Theile der Kreis getheilt wurde" ein für sich stehender Abschnitt, in welchem angedeutet wird, dass die Theilung bis zu den sechsten Sechzigsteln von **Ptolemäus** in seiner Syntaxis durchgeführt worden ist. Auch hier fehlt es nicht an Verderbnissen, besonders gegen Ende, wo der Schriftsteller den Uebergang nimmt zu dem Thema seines Tractates, nämlich der Anweisung, wie Minuten und Secunden, auf welche man sich für den gewöhnlichen Bedarf beschränken könne, auszurechnen seien. Wir versuchen, auch diese Worte wieder herzustellen.

„Bei **Ptolemäus** nun[3]) in der Syntaxis schreitet die Theilung[4]) bis zu den sechsten Sechsteln vor, indem er wacker und genau die Sache vorträgt[5]); für uns aber möge es genügen, um ein wohlgefälliges Beispiel behufs der Einführung (in den Gegenstand) zu geben, bis zu den zweiten Bruchtheilen, d. i. bis zu Dreitausendsechshundertsteln[6]) die Einheit oder den Fuss zu theilen. Denn nach der Ansicht der Alten genügt das für die Ausrechnung der Handtafeln[7])."

τρίτα. Das ist ganz unverständlich und auch insofern falsch, als von dritten Sechzigsteln hier noch gar nicht die Rede ist.

1) Hierzu folgt wieder eine Bemerkung, die als erklärendes Scholion anzusehen und etwa folgendermassen zu lesen ist: *οὕτως διαιροῦντες* (statt *διαιροῦνται*) *τὴν μοῖραν ἤτοι μονάδα ἤτοι πόδα εἰς ϰ̈ ᾰ ͵ϛ, ὥστε τὸ γ′ λεπτὸν ἐπιγίνεσθαι* (statt *ἐνγίνεσθαι*) *εἰκοσάκις καὶ ἅπαξ μυριοστὸν ἑξακισχιλιοστὸν* (statt *εἴκοστο μόριον μυριάδων ἑξακισχίλιον*) *τῆς μονάδος.*

2) *καὶ εἶχον ἔτι πολλῷ* (statt *πολλὰ*) *ἐλάττονα μόρια.* Hierauf folgt in der Handschrift noch das Scholion *λαμβανόμενα τῆς μονάδος εἰς μυριάδας ασβ*, welches zu lesen ist *λαμβανομένης* (oder *διαλαμβανομένης*) *τῆς μονάδος εἰς μυριάδας ͵ασϙϛ′*, d. i. 1296, womit also nachträglich die Theilung in vierte Sechzigstel erklärt wird.

3) Zu lesen *Τῷ μὲν οὖν Πτολεμαίῳ* statt *Τὰ μὲν οὖν Πτολεμαίου.*

4) Herzustellen *ἡ διαίρεσις* statt (*ἡ*) *δϊαιρέσεις.*

5) Griechisch *ποιουμένῳ τὰς* (dies füge ich hinzu) *παραδόσεις.*

6) Zu lesen *ἕως δευτέρων λεπτῶν* (statt *β̄β λεπτά*), *τουτέστιν ἕως ͵γχ′* (statt *τοτ′ ἔστϊν ἑώς τρίτα*).

7) Griechisch *πρὸς τὰς τοῦ προχείρου κανόνος ψηφοφορίας*, womit stillschweigend auf diejenigen im Almagest befindlichen astronomischen Tafeln verwiesen wird, welche es bei der Theilung bis zur Secunde bewenden lassen, wie das *Συ-*

Im weiteren Texte ist die Zahl der Fehler vergleichsweise etwas geringer, aber immer noch gross genug, um ein Lesen mit Verständniss ausserordentlich zu erschweren. In Kürze seien noch folgende Verbesserungen zu einem späteren Abschnitte erwähnt: pag. 6 vorletzte Zeile *ὁρισαμένους* statt *ὁρισαμένου*, pag 7, 4 und 6 *διαιρῆται* und *ποιῇ* statt *διαιρεῖται* und *ποιεῖ*, ebenda Z. 10 *ἐναντίως* statt *ἐναντίους*, Z. 12 und 13 *ἰσάκις* statt *εἰσάκϊς*, Z. 18 vielleicht *παραβάλλεται* statt *παραβάλλει* (doch kann auch der Fehler wo anders stecken, da die ganze Periode Z. 17—20 unklar und verwirrt ist), Z. 23 *ἢ τὸ* (statt *ἢτὲ*) *εὑρεῖν* und gleich darauf *συντεθεὶς* statt *συνεθεὶς* (denn dass *συντιθέναι* soviel bedeutet als multipliciren, ist kurz vorher Z. 25 ausdrücklich gesagt worden), endlich Z. 31 *εἴπωμεν* statt *ἕιπομεν*.

Hoffentlich gelangt der ganze Tractat über die sexagesimale Multiplication und Division (denn das von Herrn Henry Veröffentlichte ist nur ein Bruchstück des Ganzen) recht bald zu einem lesbaren Abdruck.

F. Hultsch.

Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. Mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme von Dr. Th. Reye, o. Professor an der Universität Strassburg. Leipzig, Teubner. 1879.

Die synthetische Geometrie der Kreise und Kugeln verdankt ihren Aufschwung seit Anfang dieses Jahrhunderts, wie in dem Vorwort gesagt wird, zunächst den französischen Geometern Dupuis, Hachette, Dupin, Gaultier, Poncelet. Nachdem Letzterer (1822) die Lehre von den Kreisbüscheln und Aehnlichkeitspunkten mehrerer Kreise vervollständigt und mit der Polarentheorie in Verbindung gebracht hatte, erschienen 1826 im I. Bande des Crelle'schen Journals die geometrischen Betrachtungen von Jacob Steiner, in welchen zum ersten Male der Ausdruck „Potenz" bei Kreisen angewendet wird. Er giebt die Absicht kund, ein Werk über das Schneiden der Kreise in der Ebene, das Schneiden der Kugeln im Raume und das Schneiden auf der Kugeloberfläche herauszugeben. Diesen von Steiner nicht ausgeführten Plan finden wir in der vorliegenden „Synthetischen Geometrie der Kugeln" wieder aufgenommen und bis zur Lösung des von Steiner erweiterten Apollonischen Problems: „Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln unter bestimmten Winkeln schneidet", durchgeführt. Das Hauptmittel zur Herleitung der zur Construction nothwendigen Sätze ist ein von Plücker (1834) und William Thomson (1845) entdecktes

---

νόδων κανόνιον im 6. Buche und, was die Bruchtheile anbelangt, das *κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* im 1. Buche. Die Sonnen-, Mond- und Planetentafeln (Buch 3. 4. 9) sind bekanntlich bis zu sechsten Sechzigsteln ausgerechnet.

Princip, zu welchem wenige Jahre später (1853) auch Möbius gelangte. Liouville (1847) nannte es „Princip der reciproken Radien“; Möbius gab ihm den Namen „Kreisverwandtschaft“. Ihren Ausgangspunkt nimmt die „Kugelgeometrie“ vom Kugelgebüsch, womit die Gesammtheit aller Kugeln, Kreise und Punktepaare bezeichnet wird, welche in einem festen Punkte, Centrum des Gebüsches, eine bestimmte Potenz haben, wobei unter Potenz einer Kugel in einem Punkte das constante Product aus den Abschnitten irgend einer durch diesen Punkt gelegten Kugelsehne verstanden wird. Ein Punkt, in dem zwei Kugeln gleiche Potenz haben, heisst ein Potenzpunkt der Kugeln. Ohne Rechnung werden dann die Sätze abgeleitet, dass alle Potenzpunkte zweier Kugeln auf einer Ebene (Potenzebene), dreier Kugeln auf einer Geraden (Potenzaxe) liegen und dass vier Kugeln nur einen Potenzpunkt haben. Steiner leitet („Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises“) die entsprechenden Sätze für Kreise durch öftere Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes ab. Das Gebüsch hat, wenn die Potenz seiner Kugeln im Centrum positiv ist, eine Orthogonalkugel, welche jede seiner Kugeln rechtwinklig schneidet. Diese wird imaginär, wenn die Potenz negativ ist, und so gelangt die Darstellung zu Kugeln mit reellem Centrum und rein imaginärem Radius. Nennt man die Punkte eines Paares im Gebüsch zugeordnete Punkte, so folgt, dass alle Paare zugeordneter Punkte eines Kreises oder einer Geraden des Gebüsches eine Involution bilden, und so führt das Gebüsch unmittelbar zum involutorischen Gebilde. Die Schnittpunkte mit der reellen oder imaginären Orthogonalkugel sind die reellen oder imaginären Ordnungspunkte. Da diese jedes Punktepaar harmonisch trennen, so folgt die Theorie der harmonischen Punkte. Mit Hilfe des Princips der reciproken Radien wird der Satz bewiesen, das vier Strahlen eines Punktes S, welche einen durch S gehenden Kreis in vier harmonischen Punkten treffen, jeden durch S gelegten Kreis oder jede Gerade in solchen Punkten schneiden. Da der gegebene Beweis auf der Voraussetzung beruht, dass die vier Strahlen reell sind, also auf involutorische Punkte nur in dem Falle reeller Ordnungspunkte ausgedehnt werden kann, so hätte der Vollständigkeit wegen der Beweis für den Fall imaginärer Ordnungselemente, zumal er sich in ganz analoger Weise führen lässt, wohl auch angeführt werden müssen. — Im weiteren Verlaufe gelangt die Darstellung zum sphärischen und cyclischen Polarsystem von reellen oder imaginären Kugeln und Kreisen. Irgend zwei zugeordnete Punkte eines Gebüsches sind nämlich harmonische Pole in Bezug auf die reelle oder imaginäre Orthogonalkugel und die zur Verbindungsgeraden senkrechte Ebene in einem ist die Polare des andern. — In § 9 wendet sich die Kugelgeometrie zu den linearen Kugelsystemen, in § 11 zu collinearen und reciproken Gebilden in Bezug auf ein Kugelgebüsch und geht in § 12 zu harmonischen Kugeln und Kreisen über. Die Eigenschaften der Aehnlichkeitspunkte führen darauf zur Lösung der Aufgabe: „Diejenigen Kugeln zu construiren, welche vier gegebene Kugeln berühren oder fünf gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden", und lassen erkennen, dass jede dieser Aufgaben 16 Lösungen hat. In analoger Weise ergeben sich die Auflösungen der entsprechenden Aufgaben in der Ebene oder auf der Kugelfläche, die sich durch das Princip der reciproken Radien auf einander zurückführen lassen. Mit der Entwickelung der Eigenschaften der Dupin'schen Cyclide beschäftigt sich § 15, der im weiteren Fortgange zu einer andern Construction des Berührungsproblems führt. Wiederholte Benutzung des Princips der reciproken Radien, mittelst dessen ein Kugelbüschel entweder in ein Ebenenbüschel oder in ein Büschel concentrischer Kugeln transformirt werden kann, ergiebt die Lösung der allgemeinen Aufgabe: „Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln unter bestimmten Winkeln schneidet."

Den Schluss des Werkes bildet eine Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme, zu deren projectivischer Beziehung durch Einführung von Kugelcoordinaten ein leichter Zugang gewonnen wird.

Mit Reye's Kugelgeometrie ist einem wirklichen Bedürfniss abgeholfen. Das bisher in deutschen, französischen und englischen Zeitschriften und Werken zerstreute und den Meisten unzugängliche Material ist gesammelt und gesichtet, durch ein gemeinsames Band verknüpft und zur Lösung der wichtigsten Kreis- und Kugelprobleme, welche seit den Zeiten des Apollonius die Geometer beschäftigt haben, verwendet worden. Die Darstellung ist leicht; in den letzten, schwierigeren Paragraphen von weniger bekanntem Inhalt wird sie knapper, als in den ersten, und verlangt diesen gegenüber, ehe man zum vollen Verständniss und zu klaren Vorstellungen der Gebilde gelangt, ungleich grössere Arbeit. Im Allgemeinen aber sind die Ableitungen so einfach, dass sie nicht nur bald Gemeingut der Mathematiker sein, sondern auch Eingang in unsere Schulen finden werden. Besondere Erwähnung verdient der Umstand, dass die gegebene Darstellung mit Leichtigkeit auf elementarem Wege zum Begriffe der imaginären Punkte, des imaginären Kreises und der imaginären Kugel führt.

Die „Kugelgeometrie" wird fortan für jeden Geometer ein unentbehrliches Handbuch sein und nach dem Wunsche des Verfassers der Geometrie der Kugeln und Kreise Freunde und Förderer in reicher Zahl zuführen.

MILINOWSKI.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1879.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 24. Bd. v. J. 1879. Göttingen, Dieterich. 48 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. 1879, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 2. Abth. 78. Bd. 4. u. 5. Heft. Wien, Gerold. 2 Mk. 50 Pf.

——, 79. Bd. 1. Heft. Ebendas. 4 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. v. Crelle, fortges. v. W. Borchardt. 88. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Archiv der Mathematik u. Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 64. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben v. Ohrtmann, Müller u. Wangerin. 9. Jahrgang 1877, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld und A. Winnecke. 14. Jahrg., 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Hochheim, A., *Al Kafi fil Hisab* (Genügendes über Arithmetik) d. *Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi.* II (Schluss). Halle, Nebert. 1 Mk. 50 Pf.

Sachse, A., Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen durch trigonometrische Reihen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Jürgens, E., Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen Functionen von zwei reellen Veränderlichen. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Hočevar, F., Ueber die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Serret, A., Handbuch der höheren Algebra, deutsch von C. Wertheim. 2. Bd. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Maschke, Th., Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformationen 3. Ordnung. (Dissert.) Breslau, Köbner. 1 Mk.

Puchta, A., Das Octader und die Gleichung vierten Grades. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 50 Pf.

Meyer, H., Ueber die von Geraden, Kegelschnitten und einigen Curven dritter Ordnung gebildeten Isothermenschaaren. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 5 Mk.

Weyer, E., Ueber Involutionen n^{ten} Grades und k^{ter} Stufe. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schlosser, A., Geometrische Untersuchungen. 1. Thl. Eichstätt, Krüll. 3 Mk.

Barchanek, C., Projective Behandlung der Strahlenflächen. Görz, Wokulat. 2 Mk.

——, Beziehungen der Geraden zu Linien zweiter Ordnung, welche durch einen Diameter und eine conjugirte Sehne gegeben sind. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Kantor, S., Weitere symmetrische Beziehungen am vollständigen Viereck. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

——, Ueber zwei besondere Flächen sechster Classe. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Encyclopädie der Naturwissenschaften. 1. Abth.: Handbuch der Mathematik. 2. Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk.

Schwarz, A., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Siegen, Kogler. 4 Mk.

Salmon, G., Analytische Geometrie des Raumes, bearb. v. W. Fiedler. 1. Thl. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Becker, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Thl. 3. Buch: Stereometrie (Schluss). Berlin, Weidmann. 2 Mk. 40 Pf.

Börner, H., Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie. Für höhere Schulen. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Petersen, J., Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, angew. auf 400 Aufg. Kopenhagen, Höst & Sohn. 3 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

Taschenbuch der praktischen Geometrie, herausgegeben vom Ingenieurverein am Polytechnikum zu Stuttgart. 2. Aufl. Stuttgart, Wittwer. 5 Mk.

Reiff, R., Ueber den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit. (Dissert.) Tübingen, Fues. 1 Mk. 20 Pf.

Wernicke, A., Ueber Gleichgewichtslagen schwimmender Körper und Schwerpunktsflächen. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Vodušek, M., Neue Methode für die Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen. Laibach, Kleinmayr & Bamberg. 1 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmungen zweier am 12. Jan. 1879 beobachteten Feuerkugeln. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Förster, W., Die veränderl. Tafeln des astronom. u. chronolog. Theils des preuss. Normalkalenders f. 1880. Berlin, Verlag d. statistischen Bureaus. 6 Mk. 70 Pf.

Sterneck, R. v., Ueber die Aenderungen der Refractionsconstante und Lothlinie im Gebirge. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Lippich, F., Ueber den Gang der Lichtstrahlen in einer homogenen Kugel. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Hesse, W., Tabellen zur Reduction eines Gasvolumens auf 0° Temperatur und 760 mm Luftdruck. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk.

Ritter, A., Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Hannover, Rümpler. 2 Mk.

Schöttner, F., Ueber die Ermittelung des Coefficienten der inneren Reibung in zähen Flüssigkeiten durch Fallversuche. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Stefan, J., Ueber die Abweichungen der Ampère'schen Theorie des Magnetismus von der Theorie der elektromotorischen Kräfte. (Akad.) Ebendas. 45 Pf.

Physik und Meteorologie.

Quincke, G., Ueber die Bestimmung des Brechungsexponenten mittelst totaler Reflexion. Halle, Niemeyer. 40 Pf.

Knoblauch, H., Ueber die elliptische Polarisation der von Metallen reflectirten Wärmestrahlen. Ebendas. 1 Mk.

Jüllig, M., Zur Theorie der Metallthermometer. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Niemöller, F., Elektrodynamische Versuche mit biegsamen Leitern. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 60 Pf.

Peschel, O., Physische Erdkunde, herausgeg. v. G. Leipoldt. 4. Lief. Leipzig, Duncker & Humblot. 2 Mk.

Ballauf, L., Die Grundlehren der Physik in elementarer Darstellung. 3. Lief. Langensalza, Beyer & S. 1 Mk.

Berichtigung: S. 403, Z. 6 v. u. ist statt Fig. 13 zu lesen Fig. 1.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1878.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

236. Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra. Dini. Annali mat. Ser. 2, VIII, 161.
237. Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. A. Tissot. N. ann. math. XXXVII, 49, 145, 351.

Akustik.

238. On the reflection of sound at the surface of a paraboloid. Sharpe. Quart. Journ. math. XV, 1.

Analytische Geometrie der Ebene.

239. Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes. Amigues. N. ann. math. XXXVI, 422, 451, 496, 529.
240. Sur le contact d'ordre n. H. Laurent. N. ann. math. XXXVI, 26.
241. Isogonal entsprechende Gerade des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LXI, 182.
242. Ueber das Dreieck. Greiner. Grun. Archiv LXI, 225.
243. Propriétés de certaines courbes planes du troisième degré ayant 3 asymptotes et 3 points d'inflexion. Moreau. N. ann. math. XXXVI, 382.
244. On a cubic curve referred to a tetrad of corresponding points. Jeffery. Quart. Journ. math. XV, 198.
245. Rationale ebene Curven dritter Ordnung. Zahradnik. Grun. Archiv LXI, 1. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 274.]
246. On the sextic curves represented by $\left(\frac{x}{A}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{B}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{C}\right)^{2/3}=0$ and the correlative quartics. S. Roberts. Quart. Journ. math. XV, 224.
247. Ligne telle que la corde qui sous-tend ses intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point. Moreau. N. ann. math. XXXVII, 141.
248. Une droite AB de longueur constante, s'appuie sur deux axes rectangulaires: lieu du point M de cette droite, tel que l'on ait: $MA.AO=MB.BO$. Fauquembergue. N. ann. math. XXXVII, 560.
249. On the construction of Cartesians. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 34.
250. Courbe enveloppée par la bissectrice d'un angle tangent à une courbe fermée. Beauvais. N. ann. math. XXXVI, 33.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 251. Determinanten in geometrischer Anwendung. Geometrie (höhere). Gleichungen 363. Imaginäres 396. Kegelschnitte. Kreis. Maxima und Minima. Oberflächen 495. Quadratur 563.

Analytische Geometrie des Raumes.

251. Sur les coordonnées des points et des droites dans le plan, des points et des plans dans l'espace. Casorati. N. ann. math. XXXVII, 5.
252. Relation zwischen Orthogonalcoefficientensystemen. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 111.
253. Sur une réciprocité de deux courbes dans l'espace approchant du parallélisme. Gambey. N. ann. math. XXXVII, 188.

254. De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, III, 307.
255. Formulae relating to the right line. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 169.
256. Enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe tout en demeurant tangente à 3 diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré. Brunot. N. ann. math. XXXVI, 523.
257. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Appell. Grun. Archiv LXII, 175.
258. Cone engendrée par une perpendiculaire. A. Lacazette. N. ann. math. XXXVII, 473.

Vergl. Abbildung. Ausdehnungslehre. Determinanten in geometrischer Anwendung. Geometrie (höhere). Kegelschnitte. Mannichfaltigkeiten. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Zahlentheorie 619.

Astronomie.

259. Geometrical considerations on a solar eclipse. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 340.
260. Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, III, 5.
261. Sur le problème des trois corps. E. Mathieu. Journ. mathém. Sér. 3, III, 216; IV, 61.
262. Note sur le problème des trois corps. Allégret. Journ. mathém. Sér. 3, III, 422.

Asymptoten.

263. Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche. Hoppe. Grun. Archiv LX, 276.
264. Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ=T^3$. Appell. Grun. Archiv LXI, 144.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 243. Hyperbel.

Ausdehnungslehre.

265. Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde. Herm. Grassmann. Crelle LXXXIV, 273.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

266. Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. E. Lucas. Annali mat. Ser. 2, VIII, 56.
267. Sur les théorèmes de Binet et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVI, 157.
268. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. Stern. Crelle LXXXIV, 267.

Vergl. Reihen 365, 366.

Bestimmte Integrale.

269. Erste Sätze von den bestimmten Integralen unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 270.
270. Sur le calcul inverse des intégrales définies. H. Laurent. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 225.
271. Berechnung von $\int\limits_{\alpha}^{\beta}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,\varphi(u)\,du$. S. Spitzer. Grun. Archiv LXII, 221.

Vergl. Functionen 385. Gammafunctionen. Quadratur.

Binomischer Lehrsatz.

272. Geometrische Veranschaulichung des binomischen Satzes. Koppe. Grun. Archiv LXI, 113.
273. Sur le binome de Newton. De Longchamps. N. ann. math. XXXVII, 101.

Brachistochrone.

274. Solution élémentaire du problème général des brachistochrones. Resal. N. ann. math. XXXVI, 97.

C.

Cardioide.

275. Sur le cardioïde. Laguerre. N. ann. math. XXXVII, 55.

Combinatorik.

276. Relation entre les nombres de combinaisons de a, de b, et de $a+b$ éléments. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 236.
277. On the game of mousetrap. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 8. — Steen ibid. 230.
278. On the partition of numbers. Faa de Bruno. Quart. Journ. math. XV, 272.
279. On the general properties of nasik squares and cubes. Frost. Quart. Journ. math. XV, 34, 93, 366.

Cubatur.

280. Bestimmung des Körperinhaltes jener Flächen, die durch die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2m}=1$ gegeben sind, in welcher m eine ganze positive Zahl bezeichnet. S. Spitzer. Grun. Archiv LXI, 331.
281. Volume d'un segment d'un volume de révolution. Gabriel-Marie. N. ann. math. XXXVI, 136. — Desboves ibid. 226.
282. Deux corps de révolution de volumes égaux. Sondat. N. ann. math. XXXVII, 208.

D.

Determinanten.

283. On a theorem in determinants. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 55.
284. On the factors of a special form of determinant. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 347.
285. Vérification d'une identité au moyen des déterminants. Jamet. N. ann. math. XXXVI, 372.

Vergl. Gleichungen 380, 381.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

286. Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide. Zahradnik. Grun. Archiv LXII, 443.
287. Zur Theorie der Symmetriepunkte erster Ordnung. Hain. Grun. Archiv LX, 71.
288. Beziehungen zwischen Dreieck und Kreis. Hain. Grun. Archiv LX, 78.
289. Die Höhenschnitte der Dreiecke aus vier Geraden. Hain. Grun. Archiv LX, 88.
290. Ueber isogonal entsprechende Punkte des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LX, 92.
291. Ueber Doppelverhältnisse. Hain. Grun. Archiv LX, 404.
292. Untersuchungen über das Dreieck. Hain. Grun. Archiv LXI, 417; LXII, 422.
293. Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von Pascal und Brianchon. Mertens. Crelle LXXXIV, 355.
294. Théorème sur les courbes, dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Appell. Grun. Archiv LX, 274.
295. Ueber den Torsionshalbmesser von Raumcurven. Mehmke. Grun. Archiv LXII, 212.
296. On the Hessian of a quartic surface. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 141.

Vergl. Kegelschnitte 403. Oberflächen 493.

Differentialgleichungen.

297. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. C. Jordan. Crelle LXXXIV, 89.
298. Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. L. Fuchs. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 125.
299. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen. Koenigsberger. Crelle LXXXIV, 284.
300. Sur quelques cas de séparation des variables dans l'équation $M.dx+N.dy=0$. Harkema. N. ann. math. XXXVI, 215.
301. Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx}+V=0$. Worms de Romilly. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 177.
302. Intégrer l'équation $ay''=y'+y'^3$. Griess. N. ann. math. XXXVII, 111.
303. Ueber das Pfaff'sche Problem. Hamburger. Grun. Archiv LX, 185.
304. Eine partielle Differentialgleichung. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 336.

Vergl. Functionen 333, 334. Mechanik 471.

Differentialquotient.

305. Two demonstrations of a theorem due to Rodrigues. Walton. Quart. Journ. math. XV, 335.
306. Démonstration d'une identité dans laquelle entre la différentielle d'ordre supérieure du produit $(x^2-A^2)^\alpha . (x^2-B^2)^\beta . (x^2-C^2)^\gamma \ldots$ Escary. N. ann. math. XXXVI, 281.

Vergl. Functionen 331.

E.

Elektrodynamik.

307. Sur la déduction d'un nouveau principe d'électrodynamique. Clausius. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 63.
308. Ueber das elektrodynamische Grundgesetz. Lorberg. Crelle LXXXIV, 305.
309. On velocity and electric potentials between parallel planes. Hicks. Quart. Journ. math. XV, 274.
310. Ueber den Durchgang des elektrischen Stromes durch eine Kugelcalotte. W. Wolf. Grun. Archiv LX, 225.
311. Ueber ebene Stromcurven von demselben elektromagnetischen Potential. Wassmuth. Grun. Archiv LXII, 374.

Elimination.

312. Sur l'élimination. Rouché. N. ann. math. XXXVI, 105.

Ellipse.

313. Axenconstruction der Ellipse als Lissajous'scher Schwingungscurve. Januschke. Grun. Archiv LX, 222.
314. Construction des axes d'une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués. Mannheim. N. ann. math. XXXVII, 529.
315. Propriétés de l'ellipse. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 325, 328.
316. Trouver le lieu des sommets des triangles circonscrits à une ellipse et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés. Poujade. N. ann. math. XXXVI, 186.
317. Die Ellipse vom kleinsten Flächeninhalte, welche einen gegebenen Brennpunkt hat und durch zwei gegebene Punkte geht. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 215.

Vergl. Geometrie (höhere) 354. Parabel 534. Schwerpunkt 581.

Ellipsoid.

318. Sur une série de surfaces du deuxième ordre circonscrites à un ellipsoïde. Gambey. N. ann. math. XXXVII, 77.
319. Enveloppe d'un plan passant par les extrémités de 3 diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Chambon. N. ann. math. XXXVII, 133.

Vergl. Potential 557.

Elliptische Transcendenten.

320. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. H. Laurent. N. ann. math. XXXVI, 78, 211, 361, 385, 433, 481; XXXVII, 119, 247, 385, 537.
321. Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen. Strnad. Grun. Archiv LXI, 321.
322. Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque. Molins. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 187.
323. Ueber einige Beziehungen der elastischen Curve zu den elliptischen Functionen, speciell zu dem elliptischen Bogen. C. Bender. Grun. Archiv LX, 117.

Vergl. Differentialgleichungen 298. Ultraelliptische Transcendenten 610.

Euler'sche Zahlen.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen 266.

Exponentialgrössen.

324. Theorems involving certain exponential symbolic operators. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 266.

Vergl. Gleichungen 379. Näherungsgleichungen 491.

F.

Formen.

325. Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Frobenius. Crelle LXXXIV, 1.

326. Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperelittiche. Clebsch. Annali mat. Ser. 2, VIII, 43, 147. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 451.]
327. Sopra una classe di forme binarie. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, VIII, 24.
328. On the derivatives of three binary quantics. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 157.
329. Des formes quadratiques binaires et ternaires. Selling. Journ. mathém. Sér. 3, III, 21, 153.

Functionen.

330. Ueber Bezeichnungen. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 323.
331. Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata. Dini. Annali mat. Ser. 2, VIII, 121.
332. Zur Theorie der Functionen. Schendel. Crelle LXXXIV, 80.
333. Ueber die Wurzeln der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Punkte einer lineären Differentialgleichung gehört. Hamburger. Crelle LXXXIV, 264. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 455.]
334. On a functional equation. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 315.
335. Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, VIII, 1.
336. On the function $\vartheta(x) = a^2(c-x) \div \{c(c-x)-b^2\}$. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 338.
337. Identité remarquable fournie par la quatrième puissance d'une somme de quatre nombres. Dostor Grun. Archiv LX, 445.
338. Décomposition de la somme de 4 carrés en 2 facteurs dont chacun soit une somme de 4 carrés. Cauret. N. ann. math. XXXVII, 132. — Realis ibid. 221. — Pisani ibid. 222.
339. On a relation between certain products of differences. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 174.
340. On Cauchy's theorem relating to the factors of $(x+y)^n - x^n - y^n$. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 365.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Exponentialgrössen. Formen. Gammafunctionen. Gleichungen 362. Kettenbrüche. Logarithmen. Näherungsgleichungen. Producte. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Unbestimmte Formen.

G.

Gammafunctionen.

341. Éclaircissements sur une note relative à la fonction $log\,\Gamma(x)$. Genocchi. Grun. Archiv LXI, 366.

Geodäsie.

342. Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum Gebrauch für die Schule. F. W. Fischer. Grun. Archiv LXI, 99.

Geometrie (höhere).

343. Théorie des indices Faure. N. ann. math. XXXVI, 5, 160, 193, 249, 289, 467, 508, 541; XXXVII, 69. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 465.]
344. Formules fondamentales de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. Ed. Lucas. Annali mat. Ser. 2, VIII, 187.
345. Observations algébriques sur les courbes planes. Hermite. Crelle LXXXIV, 298.
346. Note on the theory of correspondence. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 32.
347. Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie. Bertini. Annali mat. Ser. 2, VIII, 11, 146.
348. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. Bertini. Annali mat. Ser. 2, VIII, 244.
349. Théorème général sur les courbes unicursales. Appell. Grun. Archiv LX, 125.
350. Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des figures homographiques dans l'espace. Dewulf. N. ann. math. XXXVII, 265.
351. Sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver. De Jonquières. Annali mat. Ser. 2, VIII, 312.
352. On the correlation of two planes. Hirst. Annali mat. Ser. 2, VIII, 287. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 85.]

353. Nouveaux théorèmes de géométrie projective. Righi. N. ann. math. XXXVI, 241.
354. Ueber 5 zu einer Ellipse in Beziehung stehende Kreise. Meutzner. Grun. Archiv LXI, 111.
355. Sur les courbes de troisième Classe. Laguerre. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 213.
356. Démonstrations directes de quelques propriétés connues relatives à la courbe enveloppe d'un segment de droite de longueur constante qui se meut dans un angle. A. M. N. ann. math. XXXVII, 321.
Vergl. Cardioide. Kegelschnitte. Lemniscate.

Geschichte der Mathematik.

357. Inedita Coppernicana. M. Curtze. Grun. Archiv LXII, 113, 337.
358. Vie et travaux de Le Besgue † 10. Juin 1875. Hoüel. N. ann. math. XXXVI, 116.
Vergl. Hydrodynamik 383. Mechanik 465.

Gleichungen.

359. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Siebel. Grun. Archiv LX, 138; LXI, 122. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 373.]
360. Sur le développement, en séries, des racines réelles des équations. Yvon Villarceau. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 119.
361. On solution by radicals. Cockle. Quart. Journ. math. XV, 65.
362. Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Wendlandt. Grun. Archiv LXII, 1.
363. Sur la résolution des équations numériques. Laguerre. N. ann. math. XXXVII, 20, 97.
364. Sur quelques points de la théorie des équations numériques. N. ann. math. XXXVII, 104.
365. Résolution simple de l'équation $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Desgardins. N. ann. math. XXXVI, 184.
366. Sur l'équation $x+\sqrt{a^2-x^2}=b$. Robaglia. N. ann. math. XXXVII, 206.
367. Particularités relatives à l'équation du troisième degré. S. Realis. N. ann. math. XXXVII, 178.
368. Si les 3 racines de l'équation $x^3-3qx+r=0$ sont réelles chacune d'elles est moindre que $2\sqrt{q}$; mais si une seule de ces racines est réelle sa valeur surpasse $2\sqrt{q}$. Brunot. N. ann. math. XXXVI, 333.
369. Sur les différences des racines de toute équation cubique. Koehler. N. ann. math. XXXVII, 261.
370. α et β étant des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme de l'équation $x^3-6\alpha\beta x-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$ cette équation n'a pas de racines entières. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 227.
371. Ueber rationale Wurzeln cubischer Gleichungen in rationaler Gestalt. Liebrecht. Grun. Archiv LX, 216.
372. Conditions pour que l'équation $x^3-(\beta-\gamma)x+\alpha\gamma=0$ ait au moins une racine réelle incommensurable. Moret-Blanc. N. ann. math XXXVII, 228.
373. Relation entre les racines réelles des équations $x^3+px+q=0$ et $y^3+(4p+1)y+8q=0$. S. Realis. N. ann. math. XXXVII, 331.
374. Relations entre les racines de trois équations cubiques. S. Realis. N. ann. math. XXXVII, 190.
375. Résolution des équations numériques du quatrième degré. V. Vidal. N. ann. math. XXXVII, 367.
376. Limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation $3x^4-4x^3-12x^2+a=0$ ait ses 4 racines réelles. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 265.
377. Résolution d'une équation du sixième degré. H. Brocard. N. ann. math. XXXVI, 477.
378. Trouver les racines de l'équation $0=\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}+\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}-\frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\ldots$. Muffat. N. ann. math. XXXVI, 318. — Catalan ibid. 416. — Brisse ibid. 418.
379. Auflösung einer symmetrischen Exponentialgleichung. Hoppe. Grun. Archiv LX, 336.

380. Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Naegelsbach. Grun. Archiv LXI, 19. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 151.]
381. Résolution d'un système d'équations dont une est de second degré tandis que les autres sont linéaires. Versluys. Grun. Archiv LX, 128.
382. Resolution de 6 équations du second degré avec 6 inconnues. Gambey. N. ann. math. XXXVII, 234.
Vergl. Elimination. Substitutionen.

H.

Hydrodynamik.

383. On a modification of Huyghens' principle. Steadman Aldis. Quart. Journ. math. XV, 326.
384. Complément à deux mémoires entérieurs sur la théorie des eaux courantes. Boussinesq. Journ. mathém. Ser. 3, IV, 335.
385. Plane vortex motion. Greenhill. Quart. Journ. math. XV, 10.
386. Vortex motion in and about elliptic cylinders. Coates. Quart. Journ. math. XV, 356.
387. Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques. Villié. Journ. mathém. Ser. 3, IV, 257.
388. On the motion of water in a rotating rectangular prism. Greenhill. Quart. Journ. math. XV, 144.
Vergl. Potential 559.

Hyperbel.

389. Sur les tangentes à des cercles concentriques normales en même temps à une hyperbole équilatère ayant aussi le même centre. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 266.
390. Propriétés du cercle passant par le centre et par deux points d'une hyperbole. Lez. N. ann. math. XXXVII, 193.
391. Hyperboles passants par les points A et B d'un triangle AOB rectangle en O et ayant leurs asymptotes parallèles à OA et OB. Chambon. N. ann. math. XXXVII, 200.
392. Hyperbole passant par un point donné, ayant un autre point donné pour foyer et les asymptotes parallèles à deux lignes données. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 557.
393. Intersections de deux hyperboles équilatères. Jamet. N. ann. math. XXXVI, 236. — Dessoudeix ibid. 238.
394. Ce que deviennent deux hyperboles conjuguées en les projettant coniquement sur un plan. H. Brocard. N. ann. math. XXXVII, 429.

Hyperboloid.

395. Surface du second degré coupé orthogonalement par un hyperboloïde de révolution le long d'une ligne droite commune aux deux surfaces. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 209.

I.

Imaginäres.

396. Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane. Appell. Grun. Archiv LXI, 359.
397. On the function $arcsin\,(x+iy)$. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 171.
Vergl. Quaternionen. Trigonometrie 600.

Integration.

398. Sur une méthode de variation des paramètres dans les intégrales indéfinies. Andreiewski. N. ann. math. XXXVI, 61.

Interpolation.

399. Ueber Interpolation. Nell. Grun. Archiv LXI, 185.
400. Beitrag zum Interpolationsproblem. Bartl. Grun. Archiv LXII, 202.
401. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. Hermite. Crelle LXXXIV, 70.

K.

Kegelschnitte.

402. Equation to the axes of a conic. Walker. Quart. Journ. math. XV, 30.
403. Ueber die quadratische Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines Kegelschnittes im Raume abhängen. Geiser. Annali mat. Ser. 2, VIII, 113.

404. Sur les angles qu'une axe d'une conique donnée en coordonnées trilinéaires fait avec les côtés du triangle de référence. Genese. N. ann. math. XXXVI, 45.
405. Determination analytique des foyers dans les sections coniques. E. G. N. ann. math. XXXVII, 26.
406. Nouvelle méthode pour déterminer les foyers des courbes du second degré. Dostor. Grun. Archiv LXII, 289.
407. Déplacement d'une conique tel que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 116.
408. Zur Tangirung der Kegelschnitte. v. Wasserschleben. Grun. Archiv LX, 410.
409. Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré. Dostor. Grun. Archiv LXI, 160.
410. Propriété des 4 normales tirées d'un point à une conique. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 86.
411. Sur les transformations biquadratiques. Pellissier. N. ann. math. XXXVI, 37.
412. Sechs Punkte eines Kegelschnittes. Scholtz. Grun. Archiv LXII, 317.
413. Trouver les points de rencontre d'une droite donnée avec une conique dont on connait 5 points. Brocard. N. ann. math. XXXVI, 142.
414. Relations entre des grandeurs se rapportant tous à la même conique. Lez. N. ann. math. XXXVI, 260.
415. Zur Theorie der Kegelschnitte. Greiner. Grun. Archiv LX, 108.
416. Coniques circonscrites à un triangle ABC rectangle en A et telles que les tangentes en B et C à des coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. Tourrettes. N. ann. math. XXXVII, 195.
417. Propriété d'une conique circonscrite à un triangle. Pisani. N. ann. math. XXXVI, 525.
418. Conique des neuf points. Chambon. N. ann. math. XXXVII, 281. — Catalan ibid. 518.
419. Coniques circonscrites à un trapèze isoscèle. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 203.
420. Dans tous les triangles circonscrits à une conique donnée, et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés, le rapport d'une hauteur au diamètre conjugué de celui qui passe par son pied est constant. Pisani. N. ann. math. XXXVII, 229.
421. Coniques doublement tangentes à une ellipse et à une hyperbole homofocales. Genty. N. ann. math. XXXVII, 186.
422. Ein neuer Satz von den Kegelschnitten. Sýkora. Grun. Archiv LXI, 444.
423. Neue Eigenschaft der Kegelschnitte. Zahradnik. Grun. Archiv LXII, 111.
424. Construction eines Kegelschnittes. Mamke. Grun. Archiv LXII, 325.
425. Propositions sur les coniques. Dostor. Grun. Archiv LXI, 171.
426. Ort der Punkte constanter Berührungssehnen in Bezug auf einen Kegelschnitt. Zahradnik. Grun. Archiv LXI, 220.
427. Lieu du pôle d'une ligne droite donnée par rapport aux coniques qui coupent cette droite à angle droit et dont les axes sont parallèles à deux lignes perpendiculaires entre elles. N. ann. math. XXXVII, 408.
428. Conique lieu de rencontre des deux droites. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 224.
429. Conique engendrée au moyen d'une circonférence et d'un point fixe. Berthomieu. N. ann. math. XXXVII, 46.
430. Points d'intersections des diamètres de 2 coniques. L. Thuillier. N. ann. math. XXXVI, 478.

Vergl. Cubatur 281. Determinanten in geometrischer Anwendung 293. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel. Sphärik 584.

Kettenbrüche.

431. Ueber aufsteigende Kettenbrüche. Czuber. Grun. Archiv LX, 265.
432. Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche. K. E. Hoffmann. Grun. Archiv LXII, 310.
433. Sur les fractions continues périodiques. Appell. Grun. Archiv LXII, 183.

Kreis.

434. Ueber die Steiner'sche Verallgemeinerung des Malfatti'schen Problems. Godt. Crelle LXXXIV, 259.
435. Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt. Matthes. Grun. Archiv LX, 445.

436. Trouver un point dans le plan d'un cercle par le moyen d'une relation entre les aires de deux surfaces de révolution. N. ann. math. XXXVII, 216.
437. Puissance d'un point donné par rapport à un cercle. Delmas. N. ann. math. XXXVII, 430 — Goldenberg ibid. 516.
438. Puissance d'un point donné par rapport au cercle circonscrit à un triangle donné. Genese. N. ann. math. XXXVII, 477. — Lez ibid. 478. — Lacazette ibid. 518.
439. Ueber den in der Definition der Potenzlinie enthaltenen Kreis. Mack. Grun. Archiv LXII, 405.
440. Sur le cercle des neuf points. H. Brocard. N. ann. math. XXXVI, 188.
441. Ueber den Neunpunktekreis des Dreiecks. W. Fuhrmann. Grun. Archiv LXII, 218.
442. Si r représente le rayon du cercle inscrit dans un triangle et p le demi-périmètre, on a $p^2 > 27r^2$. Fauquembergue. N. ann. math. XXXVII, 475.
443. Sur les polygones incrits et circonscrits à la fois à deux cercles. Weill. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 265.
444. Geometrical note on triangles inscribed in a circle and circumscribed about a parabole with reference to the nodes and foci of a three-bar curve. S. Roberts. Quart. Journ. math. XV, 52.
445. Propriété de deux circonférences, le centre de l'une se trouvant sur l'autre. A. Morel. N. ann. math. XXXVII, 333.
446. Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O'. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P par rapport au cercle O. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 471.
447. Ueber zwei Kreise. Liebrecht. Grun. Archiv LX, 99. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 205.]
448. Circonférence lieu des points communs à deux circonférences variables. Terrier. N. ann. math. XXXVII, 523.

Vergl. Schwerpunkt 578.

Krümmungslinien.

449. Génération de certaines surfaces par leurs lignes de courbure. Amigues. N. ann. math. XXXVI, 337.

L.

Lemniscate.

450. Sur les courbes du quatrième degré qui ont 3 points doubles d'inflexion, et en particulier sur la lemniscate. Laguerre. N. ann. math. XXXVII, 337.

Logarithmen.

451. Entwickelung von $log(1+x)$. W. Fuhrmann. Grun. Archiv LXII, 220.
452. Démonstration élémentaire de deux formules logarithmiques. P. Mansion. Grun. Archiv LX, 105.

Vergl. Gammafunctionen.

M.

Magnetismus.

453. Zur Theorie der magnetischen Induction. L. Weber. Grun. Archiv LXI, 286.
454. Simultane Schwingungen zweier Magnete. Obermann. Grun. Archiv LX, 1.

Mannichfaltigkeit.

455. Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre. G. Cantor. Crelle LXXXIV, 242.
456. Ueber die Benutzung einer vierfachen Mannichfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme. Mehler. Crelle LXXXIV, 219.

Maxima und Minima.

457. Die Lehre vom Grössten und Kleinsten als Zweig des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. Heilermann. Grun. Archiv LX, 436.
458. Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium in das angrenzende in der kürzesten Zeit durchläuft. Bartl. Grun. Archiv LXII, 189.
459. Ein Beitrag zur Theorie des Maximum und Minimum. Gruber. Grun. Archiv LX, 415.
460. Minimum de la somme des deux hypoténuses de triangles rectangles situées sur la même droite, une cathète d'un des triangles étant bissectrice de l'angle droit de l'autre. Beaugey. N. ann. math. XXXVII, 231.

461. Maximum du périmètre et de l'aire d'un triangle et de la corde d'une circonférence. Arm. Bertrand. N. ann. math. XXXVI, 288.
462. Triangle isoscèle d'aire maximum ayant deux de ses sommets sur une circonférence donnée. Michel. N. ann. math. XXXVII, 469.
463. Variation d'un triangle la somme de 2 côtés et la bissectrice de l'angle qu'ils forment étant donnés. Tourrettes. N. ann. math. XXXVII, 316. — ibid. 517.
Vergl. Ellipse 317.

Mechanik.

464. Sur quelques paradoxes en mécanique. Breton (de Champ). Journ. mathém. Sér. 3, III, 323.
465. Géométrie et géomécanique et la connexion de ces sciences. Fiedler. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 141.
466. Réflexions sur la cinématique du plan. Laisant. N. ann. math. XXXVII, 481.
467. Zur Kinematik des Auges. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 146.
468. Zur Theorie des Keiles. Meutzner. Grun. Archiv LXI, 344.
469. Variation der Hauptträgheitsaxen. Hoppe. Grun. Archiv LX, 218.
470. Modification d'une solution donnée en 1874. Hioux. N. ann. math. XXXVI, 312. [Vergl. Bd. XXI, Nr. 140.]
471. Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, VIII, 81.
472. Démonstration des formules de Lagrange. Ossian Bonnet. Journ. mathém. Sér. 3, III, 207.
473. Sur un problème de mécanique rationelle. Gilbert. N. ann. math. XXXVI, 152.
474. Mouvement d'un point matériel. Bourguet. N. ann. math. XXXVI, 258.
475. Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, III, 79.
476. Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel. Joukovsky. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 425.
477. Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra loro. Betti. Annali mat. Ser. 2, VIII, 301.
478. Bewegung eines am Faden hängenden Stabes. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 296.
479. Positions d'équilibre de deux poids égaux mobiles sur une circonférence verticale et sur une tige rectiligne pouvant tourner autour d'un point pris sur le diamètre horizontal de la circonférence. Gambey. N. ann. math. XXXVII, 75.
480. Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe dans un cas particulier. Flye Sainte-Marie. Journ. mathém. Sér. 3, III, 213.
481. Sur la percussion des corps. Joukowsky. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 417.
482. Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, VIII, 193.
483. Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. Maur. Levy. Journ. mathém. Sér. 3, III, 219.
484. Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 390.
485. On the motion of a top and allied problems in dynamics. Greenhill. Quart. Journ. math. XV, 176.
486. Recherches sur la poussée des terres et stabilité des murs de soutènement. Resal. Journ. mathém. Sér. 3, III, 115.
487. Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant sur un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point. Boussinesq. Journ. mathém. Sér. 3, III, 147.
488. Sur le raccordement de deux alignements droits d'une ligne de chemin de fer horizontal. Collet. Journ. mathém. Sér. 3, III, 61.
Vergl. Akustik. Analytische Geometrie des Raumes 254. Astronomie. Brachistochrone. Elektrodynamik. Elliptische Transcendenten 323. Hydrodynamik. Magnetismus. Maxima und Minima 458. Optik. Paraboloid. Pendel. Planimetrie 554. Potential. Quaternion. Schwerpunkt.

N.

Näherungsgleichungen.

489. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série. Darboux. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 5, 377.
499. Proof of Stirling's theorem $1.2.3\ldots n = \sqrt{(2n\pi)}\, n^n e^{-n}$. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 57. — Cayley ibid. 63.
491. An approximate numerical theorem involving e and π. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 125.

O.

Oberflächen.

492. Nachträge zur Curven- und Flächentheorie. Hoppe. Grun. Archiv LX, 376. [Vergl. Bd. XX, Nr. 357.]
493. Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie. Hoppe. Grun. Archiv LX, 65.
494. Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali. Betti. Annali mat. Ser. 2, VIII, 138.
495 Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces. Collet. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 315.
496. Ueber conjugirte Tangenten. Hoza. Grun. Archiv LXI, 218.
497. Ueber das Rollen der Flächen aufeinander. Hoppe. Grun. Archiv LX, 159.
498. Sur la courbure des surfaces réciproques. J. Franke. Journ. mathém. Sér. 3, III, 415.
499. On the fleflecnodal planes of a surface. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 49.
500. Ueber Punktlinien auf krummen Flächen. Hoza. Grun. Archiv LX, 371.
501. Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie. Breton (de Champ). Journ. mathém. Sér. 3, III, 99.
502. Sur les systèmes de droites qui sont normales à une même surface. Laguerre. N. ann. math. XXXVII, 181.
503. Sur les surfaces réglées. Mannheim. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 57.
504. Si d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique de même degré m. Brisse. N. ann. math. XXXVII, 39.
505. On M. Mannheim's researches on the wave surface. Niven. Quart. Journ. math. XV, 242
506. On some properties of the wave surface. Niven. Quart. Journ. math. XV, 257.
507. Surface déterminée par deux équations différentielles simultanées du premier ordre. Courbe. N. ann. math. XXXVII, 113.

Vergl. Abbildung. Asymptoten. Cubatur. Determinanten in geometrischer Anwendung 296. Geometrie (höhere). Krümmungslinien. Optik. Thetafunctionen.

Oberflächen zweiter Ordnung.

508. Démonstration analytique de quelques propriétés générales des surfaces du second ordre. Hioux. N. ann. math. XXXVI, 303.
509. Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades. Mehmke. Grun. Archiv LXII, 214.
510. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. Laguerre. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 247.
511. Propriété des ombilics d'une surface du second ordre. Jamet. N. ann. math. XXXVII, 83.
512. Foyers des surfaces du second degré. Haillecourt. N. ann. math. XXXVII, 457.
513. Exemple numérique de la recherche d'un plan diamétral d'une surface du second ordre. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 264.
514. Sur les normales aux surfaces du second ordre. Laguerre. N. ann. math XXXVII, 163.
515. Intersections d'une surface du second ordre à centre unique avec sa sphère de Monge. Dunoyer. N. ann. math. XXXVII, 23.

516. Oberflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. v. Escherich. Grun. Archiv LX, 22.
517. Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Czuber. Grun. Arch. LXI, 351.
518. Surface du second degré coupée par tous les plans qui passent par le point A de la surface. Genty. N. ann. math. XXXVII, 310.
519. Surface de second ordre passant par 3 droites infiniment voisines d'une surface réglée. Pravaz. N. ann. math. XXXVI, 42.
520. Surfaces de révolution du second ordre passans par une parabole et un point donné. Gambey. N. ann. math. XXXVII, 414.
521. Étant donnés deux plans P et P' et un point A hors de ces plans on considère toutes les sphères qui passent par le point A et qui sont tangentes aux deux plans donnés. Trouver le lieu de la droite qui joint A au centre de la sphère et le lieu du point où la sphère touche un des plans. N. ann. math. XXXVII, 213. — Bergson ibid. 268. — Hilaire ibid. 426.
522. On a system of quadric surfaces. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 124.
Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Paraboloid. Sphärik.

Optik.

523. Der Malus'sche Satz und die Gleichungen der dadurch definirten Flächen. Roethig. Crelle LXXXIV, 231.
524. Construction der Wellenfläche bei der Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels an einer Ebene. v. Frank. Grun. Archiv LX, 13.
525. Elementarer Beweis eines Satzes aus der Optik. Brodersen. Grun. Archiv LX, 107.
526. Construction der Reflexe auf ebenen Spiegelflächen. Koepl. Grun. Archiv LX, 356.
Vergl. Oberflächen 505, 506.

P.

Parabel.

527. Analoge Eigenschaften der ebenen und sphärischen Parabel. Mehmke. Grun. Archiv LX, 215.
528. Ueber die Krümmungskreise der Parabel. Mack. Grun. Archiv LXI, 385.
529. Théorème sur les perpendiculaires menées des différents points de la tangente au sommet d'une parabole aux rayons aboutissant au foyer et égales en longueur à ces rayons. Brunot. N. ann. math. XXXVI, 332.
530. Sur les paraboles osculatrices d'une conique. Lez. N. ann. math. XXXVII, 130. — Pellissier ibid. 225.
531. Sur les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 218.
532. Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale en quadruple du rayon vecteur du point de contacte de la tangente parallèle à cette corde. Barthe. N. ann. math. XXXVII, 91.
533. Sur les paraboles du même sommet et passant par un second point commun à toutes. Freson. N ann. math. XXXVI, 180.
534. Lieu géométriques se rapportant aux paraboles de même axe et de même sommet et aux ellipses ayant un axe commun. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVI, 326.
Vergl. Kreis 444.

Paraboloid.

535. Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde. De Saint-Germain. Journ. mathém Sér. 3, III, 401.
Vergl. Akustik.

Pendel.

536. Méthode simple et rapide pour déterminer les lois du mouvement du pendule à petites oscillations. Dostor. Grun. Archiv LX, 366.
537. Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 264.
538. Ueber die oscillatorischen Bewegungen einer Walze mit excentrischer Schwerpunktsaxe C. Bender. Grun. Archiv LX, 113.

Philosophie der Mathematik.

539. Sur un nouvel exemple de la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. Lalanne. N. ann. math. XXXVI, 145.

Planimetrie.

540. Rein geometrische Proportionslehre. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 153.
541. Trouver sur une droite un point duquel on en voit deux autres sous des angles égaux. Terrier. N. ann. math. XXXVI, 183.
542. Planimetrischer Lehrsatz. Engelbrecht. Grun. Archiv LX, 447.
543. Beiträge zur Theorie des Dreiecks. Hain. Grun. Archiv LX, 290.
544. Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen. Hain. Grun. Archiv LXI, 177.
545. Déterminer le point d'où deux lignes OA et OB ont été vues sous les angles α et β. Toubin. N. ann. math. XXXVI, 377.
546. Neue Ableitung der pythagoräischen Lehrsätze. Sýkora. Grun. Archiv LXI, 447.
547. Cercles inscrits dans un triangle rectangle et dans les deux triangles en lesquels il est partagé par la perpendiculaire menée sur l'hypoténuse. N. ann. math. XXXVII, 217.
548. Théorème sur le triangle rectangle. N. ann. math. XXXVII, 217.
549. Propriété du triangle. A. Morel. N. ann. math. XXXVII, 332.
550. Sur la géométrie des quinconces. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 129.
551. Ueber die Congruenz zweier aus gewissen Bestimmungsstücken construirter Dreiecke. F. Lukas. Grun. Archiv LX, 224.
552. Théorème sur le quadrilatère. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 263.
553. Ueber das Kreisviereck. Greiner. Grun. Archiv LX, 178.
554. Sur le système articulé de M. Peaucellier. G. Thiébaut. N. ann. math. XXXVII, 258.
555. Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 439.
556. Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre. Dostor. Grun. Archiv LXI, 407. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 286.]
557. Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. Dostor. Grun. Archiv LXII, 148.

Potential.

558. Ueber den Ausdruck für das innere Potential eines homogenen Ellipsoids. Wassmuth. Grun. Archiv LXII, 448.
559. Solution of certain questions in potentials and motion of liquids. Ferrers. Quart. Journ. math. XV, 83.

Producte.

560. Producte einiger Factorenreihen. Dobiński. Grun. Archiv LXI, 434.

Vergl. Functionen 339, 340. Trigonometrie 600.

Projectionen.

561. Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection. Gruber. Grun. Archiv LXII, 259.

Vergl. Abbildung 237.

Q.

Quadratur.

562. Bemerkung zur mechanischen Quadratur. Ligowski. Grun Archiv LX, 336.
563. Bestimmung der Flächeninhalte der Curven, die durch die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$ gegeben sind, in welcher m eine ganze positive Zahl bezeichnet. S. Spitzer. Grun. Archiv LXI, 329.

Quaternionen.

564. Applications mécaniques du calcul des quaternions. Laisant. Journ. mathém. Sér. 3, III, 325.

R.

Reihen.

565. Beiträge zur Theorie der Reihen. Meissel. Grun. Archiv LX, 337.
566. Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVI, 18.

567. Verallgemeinerung einer Jacobi'schen Formel. Stern. Crelle LXXXIV, 216. — Lampe ibid. 270.
568. Sur la formule de Maclaurin. Hermite. Crelle LXXXIV, 64.
569. Summirung der Reihe $\Sigma\frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Dobiński. Grun. Archiv LXI, 333.
570. Zur Summirung der Reihe $\sum_0^\infty \frac{n^m}{n!}$. Ligowski. Grun. Archiv LXII, 334.
571. Sommation de quelques séries. Catalan. N. ann. math. XXXVII, 256.
572. Sommation de quelques séries au moyen d'une équation aux différences finies. Moreau. N. ann. math. XXXVI, 315.
573. Summirung einer Reihe. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 224.
574. Summation einiger Reihen. Hoppe. Grun. Archiv LXII, 165.
575. Summation zweier Reihen. Sýkora. Grun. Archiv LXI, 445.
576. Développement de $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ en série rapidement convergente. Moreau. N. ann. math. XXXVII, 138. — Catalan ibid. 255.
577. Sur la limite du rapport de deux séries. Moreau. N. ann. math. XXXVII, 136. — Catalan ibid. 252.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Binomischer Lehrsatz. Gleichungen 360, 378. Logarithmen. Trigonometrie 600.

S.

Schwerpunkt.

578. Sur le centre de gravité d'un polygone. Laisant. N. ann. math. XXXVI, 407.
579. Centre de gravité d'un système de circonférences. Tourrettes. N. ann. math. XXXVII, 319.
580. Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit. Hoppe. Grun. Archiv LX, 100.
581. Ellipse décrite par le centre de gravité de mobiles parcourant des cercles dans l'espace avec des vitesses angulaires égales. Laisant. N. ann. math. XXXVI, 234.

Sphärik.

582. On the regular solids. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 127.
583. Trièdres dont les arêtes ou dont les faces sont tangentes à une sphère. N. ann. math. XXXVII, 215.
584. Untersuchungen über das sphärische Pascal'sche Sechseck und das sphärische Brianchon'sche Sechsseit. Thieme. Grun. Archiv LX, 43.
585. On spherical class-cubics with double foci and double cyclic arcs. Jeffery. Quart. Journ. math. XV, 131.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 256. Parabel 527. Tetraeder 595.

Stereometrie.

586. Neue Methode zur Auflösung des Dreikants. Kleckler. Grun. Archiv LXI, 337.
587. Propriétés relatives des polyèdres réguliers qui sont conjugués entre eux. Dostor. Grun. Archiv LXII, 285. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 325.]
588. Les trois sphères des polyèdres réguliers étoilés. Dostor. Grun. Archiv LXII, 78.
589. Propositions sur les corps de révolution de la géométrie élémentaire. Dostor. Grun. Archiv LX, 307.
Vergl. Sphärik. Tetraeder. Zahlentheorie 618.

Substitutionen.

590. Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen. Netto. Grun. Archiv LXII, 225.
Vergl. Formen 325.

T.

Tetraeder.

591. Exercices sur le tétraèdre. Genty. N. ann. math. XXXVII, 223.
592. Begriff der Harmonicalebene eines Punktes in Bezug auf ein Tetraeder. Hain. Grun. Archiv LX, 302.

593. Bemerkung über Symmetriepunkte des Tetraeders. Hain. Grun. Archiv LX, 304.
594. Théorème sur le tétraèdre. Jamet. N. ann. math. XXXVI, 285.
595. Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Klug. Grun. Archiv LXI, 361.
Vergl. Zahlentheorie 618.

Thetafunctionen.

596. On the 16 nodal quartic surface. Cayley. Crelle LXXXIV, 238. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 612—614.]
597. Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen. H. Weber. Crelle LXXXIV, 332.

Trigonometrie.

598. Beschreibung eines Modells für den ersten Unterricht in der Goniometrie. Hoza. Grun. Archiv LXI, 108.
599. Sur les débuts de la trigonométrie. Brisse. N. ann. math. XXXVI, 49.
600. A theorem in trigonometry. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XV, 151.
601. Beitrag zur Trigonometrie. Zahradnik. Grun. Archiv LXII, 330.
602. Rendre calculable par logarithmes $\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \cdot \sin b}$. De Virieu. N. ann. math. XXXVI, 285. — Laisant ibid. 376.
603. Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120 etc. côtés; calcul des côtés. Dostor. Grun. Archiv LXII, 103.
604. Inscription dans le cercle des 4 polygones réguliers de 30 côtés. Dostor. N. ann. math. XXXVII, 370.
605. On Mr. Cotterill's goniometrical problem. Cayley. Quart. Journ. math. XV, 196. [Vergl. Bd. XI, Nr. 399.]
606. Propriété trigonométrique du triangle rectangle, avec application en astronomie ou calcul de l'anomalie vraie en valeur de l'anomalie excentrique. Dostor. Grun. Archiv LX, 369.
607. Équations trigonométriques dans lesquelles entrent les bissectrices des angles d'un triangle. Lapierre. N. ann. math. XXXVI, 527.
608. Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. Czuber. Grun. Archiv LXII, 222.
609. Théorèmes sur le quadrilatère circonscriptible. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXVII, 40.
Vergl. Imaginäres 397.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

610. Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs. Yvon Villarceau. Journ. mathém. Sér. 3, IV, 305.
611. Sur l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes. Lindemann. Crelle LXXXIV, 294, 300.
Vergl. Formen 326.

Unbestimmte Formen.

612. Sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Rouquet. N. ann. math. XXXVI, 113.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

613. Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Czuber. Grun. Archiv LXII, 267.
614. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 410.

Z.

Zahlentheorie.

615. Tafeln für die dekadischen Endformen der Quadratzahlen. Schady. Crelle LXXXIV, 85.
616. Sur les chiffres qui terminent les puissances des nombres entiers. Dés. André. N. ann. math. XXXVI, 370.

617. m et r étant des nombres entiers positifs, si l'un des nombres 3^m+1, $3^{m+r}+1$ est divisible par 10, l'autre est aussi divisible par 10. H. Brocard. N. ann. math. XXXVI, 190.
618. Ueber rationale Dreikante und Tetraeder. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 86.
619. Allgemeinster Ausdruck des Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen. Hoppe. Grun. Archiv LXI, 438.
620. Le carré de tout nombre divisible par 3 est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec 3. Marchand. N. ann. math. XXXIV, 462. — Moret-Blanc ibid. 464.
621. Le nombre 5 est le seul égal à la somme des carrés de deux nombres consécutifs qui ait pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs. De Jonquières. N. ann. math. XXXVII, 219. — L. Hugo ibid. 429. — Catalan ibid. 518. — Gérono ibid. 521.
622. Étude sur la décomposition en sommes de deux carrés du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. De Jonquières. N. ann. math. XXXVII, 241, 289.
623. Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme $x^2+t.y^2$. De Jonquières. N. ann. math. XXXVII, 419, 433.
624. Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate. Sýkora. Grun. Archiv LXI, 446.
625. Dans toute solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $24x^2+1=y^2$ le produit xy est toujours multiple de 5. De Virieu. N. ann. math. XXXVII, 476.
626. Sur l'analyse indéterminée du troisième degré. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 507.
627. Sur quelques équations indéterminées du troisième degré. S. Realis. N. ann. math. XXXVII, 454.
628. Nombres entiers, dont le cube est égal à la somme de trois ou de quatre cubes entiers. Rebout. Grun. Archiv LX, 353.
629. Formation d'un cube entier qui soit égal à la somme de 4 cubes entiers. Rebout. N. ann. math. XXXVI, 272.
630. De la resolution en nombres entiers positifs de l'équation $1+x+x^2+x^3=y^2$. Gérono. N. ann. math. XXXVI, 230.
631. Sur l'équation indéterminée $x^3+y^3=az^3$. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 425.
632. Sur l'équation $x(x+1)(x+2)=6y^2$. Meyl. N. ann. math. XXXVII, 464.
633. L'équation $x(x+1)(2x+1)=6y^2$ n'a pas d'autres solutions entières que $x=24$. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVI, 429.
634. Cas d'impossibilité d'une solution en nombres entiers de l'équation $x^3\pm a=y^2$. De Jonquières. N. ann. math. XXXVII, 374, 514.
635. De l'impossibilité de l'équation $x^3=y^2+17$. Gérono. N. ann. math. XXXVI, 325.
636. Sur un théorème de Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 536.
637. Impossibilité des équations $6xy(3x^4+y^4)=u^3$ ou $=4v^3$. S. Realis. N. ann. math. XXXVII, 468.
638. De l'impossibilité en nombres entiers de trois équations du sixième degré. C. H. N. ann. math. XXXVII, 524.
639. Conditions sous lesquelles on a $p=P_1+Q_1+R_1+S_1$ et $p^2=P_2^2+Q_2^2+R_2^2+S_2^2$ les nombres P, Q, R, S satisfaisant eux même à une condition arithmologique. Moreau. N. ann. math. XXXVII, 45.
640. Sur la résolution en nombres entiers du système d'équations $2v^2-u^2=w^2$ et $2v^2+u^2=3z^2$. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVI, 409.
641. Sur la résolution en nombres entiers positifs du système des trois équations $x=u^2$, $x+1=2v^2$, $x+2=3w^2$. Gérono. N. ann. math. XXXVII, 381.
642. Sur le système des équations indéterminées $x^2-ay^2=u^2$, $x^2+ay^2=v^2$. Ed. Lucas. N. ann. math. XXXVII, 446.

Vergl. Combinatorik 278. Formen. Geschichte der Mathematik 358.