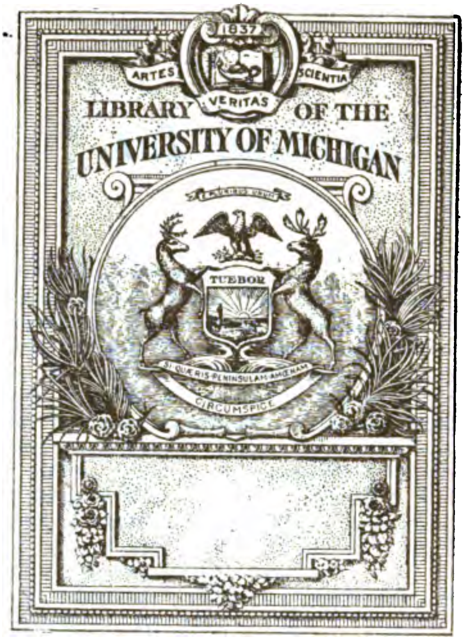

… schaften
in u … nt wird,
… breitung
der … Labora-
torie … handenen
Einr … ltes der
Wis … n hoch-
steh … Mangel
hinw … aftlichen
Ausb … ies das
Feh … gel an
Ker … en das
Geb

… assiker
der … ndlicher
For … handlun-
gen … r Lehren-
den … dadurch
ein … indringen
in … selbe ist
abe … g. Denn
in j … e, welche
inzw … sondern
es … der Ent-
wic … den und
Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanz[illegible] Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. D[illegible]

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. Zweite revidirte Auflage. (64 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 110. **J. H. van't Hoff**, Die Gesetze des chemischen Gleichgewichtes für den verdünnten, gasförmigen oder gelösten Zustand. Übersetzt und herausgegeben von Georg Bredig. Mit 7 Figuren im Text.

» 111. **N. H. Abel**, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825.). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

2197 Alexander Ziwet 2.6

Zwei Abhandlungen

zur Theorie der

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

erster Ordnung.

Von

LAGRANGE und CAUCHY.

(1772.) (1819.)

Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben

von

Waldemar Hermann

Dr. Gerhard Kowalewski.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1900.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung,

Von

Lagrange.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1772.)

1.

Hat man eine Function u von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so nennt man partielle Differentiale [1]) von u diejenigen, welche aus der Differentiation von u hervorgehen, indem man jede der Grössen $x, y, z, \ldots$ für sich variiren lässt. Nimmt man also an, der vollständige Werth von du werde durch

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz + \cdots$$

dargestellt, so sind die verschiedenen Glieder

$$p\,dx, \quad q\,dy, \quad r\,dz, \ldots$$

dieses Differentials die partiellen Differentiale erster Ordnung von u. Man pflegt die Coefficienten $p, q, r, \ldots$ der Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ in dem Differential von u mit $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots$ zu bezeichnen, so dass der vollständige Werth von du durch

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots$$

dargestellt wird. Hat man nun eine Gleichung zwischen $u, x, y, z, \ldots$ und $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \cdots$, so ist dies eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ueber die Integration dieser Art von Gleichungen beabsichtige ich hier einige neue Principien mitzutheilen.

2.

Nehmen wir an, u sei nur eine Function von x und y, und zur Bestimmung dieser Function habe man eine Gleichung in u, x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Setzt man zur grösseren Bequemlichkeit $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial u}{\partial y} = q$, so hat man

$$du = p\,dx + q\,dy\,,$$

und die gegebene Gleichung besteht zwischen den fünf Veränderlichen u, x, y, p, q. Man kann demnach mit Hilfe dieser Gleichung z. B. q als Function von u, x, y, p bestimmen. Die Grösse p bleibt also noch unbestimmt, und die Aufgabe reducirt sich darauf, dieselbe so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$du = p\,dx + q\,dy \quad \text{oder} \quad du - p\,dx - q\,dy = 0$$

integrabel sei, entweder an sich oder wenn sie mit irgend einem Factor multiplicirt wird.[2])

Es sei allgemein M der Factor, welchen die Differentiation möglicherweise hat verschwinden lassen, so dass die Grösse

$$M(du - p\,dx - q\,dy)$$

ein vollständiges Differential einer Function von u, x, y ist, die wir mit N bezeichnen wollen. Man hat also

$$dN = \frac{\partial N}{\partial u}du + \frac{\partial N}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial y}dy = M du - Mp\,dx - Mq\,dy$$

und demnach

$$\frac{\partial N}{\partial u} = M, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -Mp\,, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = -Mq\,,$$

woraus man folgende Bedingungen ableitet:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial (Mp)}{\partial u}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial (Mq)}{\partial u}, \quad -\frac{\partial (Mp)}{\partial y} = -\frac{\partial (Mq)}{\partial x},$$

durch welche M und p zu bestimmen wären. Die letzte von diesen Gleichungen liefert die folgende:

$$M\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)+p\,\frac{\partial M}{\partial y}-q\,\frac{\partial M}{\partial x}=0.$$

Sie geht, wenn man für $\frac{\partial M}{\partial x}$ und $\frac{\partial M}{\partial y}$ ihre durch die beiden ersten Gleichungen gegebenen Werthe einsetzt, in

$$M\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)-p\,\frac{\partial (Mq)}{\partial u}+q\,\frac{\partial (Mp)}{\partial u}=0$$

über, d. h. nach Tilgung dessen, was sich forthebt, und Division des Uebrigen durch M in

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}-p\,\frac{\partial q}{\partial u}+q\,\frac{\partial p}{\partial u}=0.$$

Da nun aber (nach Voraussetzung) q eine gegebene Function von x, y, u und p ist, so enthält diese Gleichung nur noch die Unbekannte p, und die Schwierigkeit ist darauf zurückgeführt, mittelst derselben den Werth von p als Function von u, x, y zu bestimmen.[3])

3.

Obgleich man in dieser Weise die Gleichung, welche zur Bestimmung von p dienen soll, gefunden hat, so scheint es, dass man in der Lösung des vorgelegten Problems kaum vorwärts gekommen ist. Denn während man früher eine Gleichung zwischen x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ zur Bestimmung von u hatte, hat man jetzt eine solche zwischen x, y, u, p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$ zur Bestimmung von p. Dieselbe muss, wenn man sie im Allgemeinen betrachtet, mindestens ebenso schwer zu lösen sein als jene, wenn sie es nicht sogar in höherem Maasse ist, da sie eine Veränderliche mehr enthält. Es ist indessen ein Umstand vorhanden, der uns veranlassen muss, sie für einfacher anzusehen als die vorgelegte, nämlich der, dass in ihr die Differentiale ∂p und ∂q nur in linearer Form erscheinen. Ausserdem werden wir bemerken, dass es nicht nöthig ist, diese Gleichung in vollständiger Weise zu lösen, dass es vielmehr genügt, irgend einen Werth von p zu finden, der sie erfüllt, vorausgesetzt, dass derselbe eine willkürliche Constante enthält. Denn wir werden bald zeigen, wie man mit Hilfe eines solchen Werthes von p nichtsdestoweniger zu der allgemeinen und vollständigen Lösung der vorgelegten Gleichung gelangen kann.

4.

Um in noch directerer Weise zu zeigen, wie die Gleichung, welche wir soeben zur Bestimmung von p gefunden haben, zur Lösung des Problems, um das es sich handelt, dienen kann, wollen wir wieder die Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy = 0$$

vornehmen. In ihr ist q eine gegebene Function von p, u, x, y, und p wird als eine solche Function von u, x, y vorausgesetzt, dass die Gleichung integrabel sei, entweder an sich oder mit Hilfe irgend eines Multiplicators.[4]) Man nehme an, dass eine der drei Variablen u, x, y, z. B. u, constant wird, so dass man die Gleichung

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

mit zwei Variablen hat. L sei der Factor, der den Differentialausdruck $p\,dx + q\,dy$ integrabel macht (ein Factor, den man stets a posteriori finden kann, sobald man die Gleichung $p\,dx + q\,dy = 0$ integrirt hat). Man hat also

$$L(p\,dx + q\,dy) = dt\,,$$

wobei t eine Function von x, y ist, in die u ebenfalls als Constante eintritt. Folglich hat man:

$$Lp = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad Lq = \frac{\partial t}{\partial y}\,.$$

Wenn man aber x, y und u gleichzeitig als veränderlich betrachtet, so erhält man für den vollständigen Werth des Differentials dt

$$\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy + \frac{\partial t}{\partial u}du\,,$$

also hat man

$$dt = Lp\,dx + Lq\,dy + \frac{\partial t}{\partial u}du\,.$$

Demnach geht die Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy = 0$$

durch Multiplication mit L in die folgende über:

$$\left(L + \frac{\partial t}{\partial u}\right) du - dt = 0\,,$$

welche also integrabel sein muss. Da nun aber t eine bekannte Function von u, x, y ist, so hat man umgekehrt x gleich einer bekannten Function von t, u, y, sodass man die Variable t an Stelle der Variablen x einführen kann. Man mache also diese Substitution in der Grösse $L + \frac{\partial t}{\partial u}$. Da die Gleichung nur die beiden Differentiale du und dt enthält, so ist klar, dass sie nur dann integrabel sein kann, wenn die Veränderliche y aus der Grösse $L + \frac{\partial t}{\partial u}$ gänzlich verschwindet. Setzen wir zur Abkürzung diese Grösse gleich P, so muss, wenn man in P an Stelle von x seinen Ausdruck in y, u und t einsetzt, gleichzeitig mit x die Veränderliche y schwinden. Es muss also auch, wenn man in dem Differential

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial u} du$$

für dx seinen Werth aus der Gleichung

$$dt = Lp\,dx + Lq\,dy + \frac{\partial t}{\partial u} du$$

einsetzt, das Differential dy verschwinden. Man hat aber nach Ausführung der Substitution

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dt - Lq\,dy - \frac{\partial t}{\partial u} du}{Lp} + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial u} du\,,$$

d. h.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dt}{Lp} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{q}{p} \frac{\partial P}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{1}{Lp}\right) du\,.$$

Demnach muss man haben

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{q}{p} \frac{\partial P}{\partial x} = 0\,.$$

Es ist aber

$$P = L + \frac{\partial t}{\partial u};$$

also erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial y} - \frac{q}{p}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial x}\right) = 0\,.$$

Man hat aber bereits

$$\frac{\partial t}{\partial x} = Lp\,, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = Lq\,,$$

also bekommt man

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial u} = \frac{\partial(Lp)}{\partial u} = L\frac{\partial p}{\partial u} + p\frac{\partial L}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y\,\partial u} = \frac{\partial(Lq)}{\partial u} = L\frac{\partial q}{\partial u} + q\frac{\partial L}{\partial u}\,.$$

Demnach wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial y} + L\frac{\partial q}{\partial u} + q\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{q}{p}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + L\frac{\partial p}{\partial u} + p\frac{\partial L}{\partial u}\right) = 0\,,$$

d. h. nach Beseitigung dessen, was sich forthebt,

$$\frac{\partial L}{\partial y} + L\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{q}{p}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + L\frac{\partial p}{\partial u}\right) = 0\,.$$

Ferner liefern dieselben Gleichungen $\frac{\partial t}{\partial x} = Lp$, $\frac{\partial t}{\partial y} = Lq$:

$$\frac{\partial(Lp)}{\partial y} = \frac{\partial(Lq)}{\partial x}\,,$$

d. h.

$$p\frac{\partial L}{\partial y} + L\frac{\partial p}{\partial y} - q\frac{\partial L}{\partial x} - L\frac{\partial q}{\partial x} = 0\,.$$

Wenn man nun von dieser Gleichung die vorhergehende, multiplicirt mit p, abzieht und den Rest durch L dividirt, so erhält man die folgende:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial u} + q\frac{\partial p}{\partial u} = 0\,,$$

welche, wie man sieht, dieselbe ist wie die oben gefundene.

5.

Sobald man demnach der vorstehenden Gleichung mittelst des Werthes von p genügt hat, ist man sicher, dass, wenn man aus der Grösse

$$P = L + \frac{\partial t}{\partial u}$$

x durch Einführung der Veränderlichen t entfernt, gleichzeitig die Grösse y fortgeht, so dass man alsdann die Gleichung

$$Pdu - dt = 0$$

in zwei Veränderlichen hat.

Es sei also L' die Function von u und von t, mit welcher man jetzt den Differentialausdruck

$$Pdu - dt$$

multipliciren muss, um ihn integrabel zu machen (eine Function, die man immer durch Integration der Gleichung $Pdu - dt = 0$ finden kann). Da nun

$$L'(Pdu - dt)$$

ein vollständiges Differential einer Function von u und t ist, so ist folgendes evident: Wenn man an Stelle von t wieder seinen Ausdruck in u, x und y einsetzt, wodurch wegen

$$dt = Lp\,dx + Lq\,dy + \frac{\partial t}{\partial u}du, \quad P = L + \frac{\partial t}{\partial u}$$

das Differential, um welches es sich handelt, in

$$L'(Ldu - Lp\,dx - Lq\,dy)$$

transformirt wird, so ist dieser letzte Differentialausdruck ebenfalls ein vollständiges Differential, und zwar von einer Function von u, x und y. Daraus folgt, dass $L'L$ der geeignete Factor ist, um den Differentialausdruck

$$du - pdx - qdy$$

integrabel zu machen, und man hat demnach (2)

$$M = L'L.$$

Kennt man also L und L', so kennt man sofort den Factor M und kann dann durch Integration den Werth der endlichen Function

$$\int M(du - pdx - qdy)$$

kennen lernen.[5])

6.

Man sieht also aus der vorstehenden Analyse klar, dass die Lösung des Problems nur von der Aufsuchung der Grösse p mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial u} + q\frac{\partial p}{\partial u} = 0$$

abhängt, die seit lange bekannt ist. Denn sobald diese Bedingung erfüllt ist, kann man immer den Multiplicator M finden, der die Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy = 0$$

integrabel macht, und die Integration liefert dann den gesuchten Werth von u als Function von x und y.

Wenn der Werth von p, welcher der Bedingungsgleichung genügt, die volle Allgemeinheit besitzt, die eine solche Gleichung zulässt, so erhält man durch seine Vermittelung den vollständigen Werth von u. Ist aber der Werth von p nur ein particulärer, so findet man zunächst nur einen particulären und unvollständigen Werth der gesuchten Function u. Wenn indessen der particuläre Werth von p so beschaffen ist, dass er eine willkürliche Constante enthält, so kann man den Werth von u in folgender Weise vervollständigen. Man sucht zunächst diesem particulären Werth von p entsprechend den Multiplicator M, welcher den Differentialausdruck

$$du - p\,dx - q\,dy$$

integrabel macht, und man erhält dann durch Integration die Gleichung

$$\int M(du - p\,dx - q\,dy) = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir der grösseren Einfachheit wegen mit N die Grösse

$$\int M(du - p\,dx - q\,dy),$$

welche nothwendig eine endliche Function von u, x und y ist. Ferner sei α die willkürliche Constante, welche in den Werth von p eingeht. Dann ist klar, dass diese Constante als solche auch in den Ausdruck von N eingehen wird. Nehmen wir jetzt an, dass diese selbe Grösse α, anstatt constant zu sein, ebenfalls eine variable Function sei, so ist ersichtlich, dass in diesem Falle das vollständige Differential von N nicht mehr einfach

$$M(du - p\,dx - q\,dy)\,,$$

sondern

$$M(du - p\,dx - q\,dy) + \frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha$$

ist, so dass man unter der Voraussetzung der Variabilität von α

$$N = \int M(du - p\,dx - q\,dy) + \int \frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha$$

und in Folge dessen

$$\int M(du - p\,dx - q\,dy) = N - \int \frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha$$

hat. Will man also, um die Bedingungen des Problems zu erfüllen, haben, dass der Differentialausdruck

$$M(du - p\,dx - q\,dy)$$

an und für sich integrabel sei, so muss dies auch insbesondere für den Differentialausdruck $\frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha$ gelten. Dies kann offenbar nur unter der Bedingung stattfinden, dass $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ eine beliebige Function von α ist.

$f(\alpha)$ bezeichne also eine beliebige Function von α. Dann hat man unter der Annahme $f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ zu setzen:

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = f'(\alpha)\,,$$

eine Gleichung, aus der man α bestimmen kann. Man erhält ferner

$$\int \frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha = f(\alpha)\,,$$

also

$$\int M(du - p\,dx - q\,dy) = N - f(\alpha)\,.$$

Daraus gewinnt man die Integralgleichung

$$N - f(\alpha) = \text{Const.}$$

oder einfach

$$N - f(\alpha) = 0\,,$$

[da man die Constante als in der Function $f(\alpha)$ enthalten betrachten kann]. Diese Gleichung dient dazu, den Werth der Function u zu finden, und es ist klar, dass dieser Werth von u der vollständige sein wird, da er eine willkürliche Function enthält.

7.

Man ersieht hieraus also auch, dass jede Gleichung von der Form

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial u} + q\frac{\partial p}{\partial u} = 0,$$

wo q als eine beliebig gegebene Function von u, x, y, p vorausgesetzt wird, so beschaffen ist, dass man immer den vollständigen Werth von p finden kann, wenn man nur einen particulären Werth von p kennt, welcher aber eine willkürliche Constante α enthält. Denn man hat nur den Werth von α aus der Gleichung

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = f'(\alpha)$$

zu entnehmen und ihn alsdann in den bekannten particulären Werth von p einzusetzen.

8.

Um jetzt die Anwendung des vorstehenden Theorems zu zeigen, wollen wir die hauptsächlichsten Fälle durchgehen, in denen die Bedingungsgleichung leicht durch einen particulären Werth von p, der sich naturgemäss darbietet, zu erfüllen ist. Wir werden daraus die Lösungen der meisten Probleme dieser Art entstehen sehen, welche bis jetzt nur durch besondere Methoden gelöst worden sind.

Erster Fall. — q ist eine Function von p allein.

Es sei P irgend eine Function von p, und wir wollen annehmen, man habe

$$q = P.$$

Die Bedingungsgleichung (6) wird, wenn $dP = P'dp$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial p}{\partial y} - P'\frac{\partial p}{\partial x} - P'p\frac{\partial p}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} = 0.$$

Ihr genügt ersichtlich der Werth

$$p = \text{Const.}$$

Man hat also auf diese Weise

$$p = \alpha\,, \quad q = A\,,$$

(wobei A das ist, was aus P wird, wenn man $p = \alpha$ setzt), und daraus ersieht man, dass der Differentialausdruck $du - pdx - qdy$

$$du - \alpha\,dx - A\,dy$$

wird. Dieser ist offenbar von selbst integrabel. Integrirt man also, so erhält man

$$u - \alpha x - Ay = N.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man α variiren lässt,

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -x - A'y$$

$\left(\text{wobei } A' \text{ gleich } \dfrac{dA}{d\alpha} \text{ ist}\right)$, also

$$-x - A'y = f'(\alpha)\,,$$

eine Gleichung, aus der man den Werth von α zu entnehmen hat, der alsdann, eingesetzt in die Gleichung

$$N - f(\alpha) = 0$$

oder

$$u - \alpha x - Ay - f(\alpha) = 0\,,$$

den vollständigen Werth von u liefert.

Zweiter Fall. — q ist eine Function von p und von y.

Es sei P eine Function von p und y, so dass

$$dP = P'dp + Qdy$$

ist, und wir wollen annehmen

$$q = P.$$

Die Bedingungsgleichung wird dieselbe wie im vorigen Falle, da

$$\frac{\partial q}{\partial x} = P'\frac{\partial p}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = P'\frac{\partial p}{\partial u}$$

ist. Man kann ihr also Genüge leisten, indem man ebenfalls

$$p = \alpha$$

nimmt, wodurch P gleich einer Function von y allein wird, so dass die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy\,,$$

d. h.

$$du - \alpha\,dx - P\,dy$$

von selbst integrabel ist. Man erhält

$$N = u - \alpha x - \int P\,dy\,.$$

Daraus entnimmt man

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -x - \int \frac{\partial P}{\partial \alpha}\,dy\,.$$

Folglich hat man die Gleichung

$$f'(\alpha) = -x - \int \frac{\partial P}{\partial \alpha}\,dy\,,$$

welche zur Bestimmung von α dient. Darauf erhält man u durch die Gleichung

$$N - f(\alpha) = 0\,,$$

oder

$$u - \alpha x - \int P\,dy - f(\alpha) = 0\,.$$

Dritter Fall. — q ist eine Function von p und von x.

In diesem Falle ist klar, dass umgekehrt der Werth von p durch eine Function von q und x ausgedrückt wird. Betrachtet man also q als die Unbekannte und versteht unter Q eine Function von q und x, so hat man

$$p = Q\,,$$

und die Bedingungsgleichung wird, wenn man $\frac{\partial Q}{\partial q} = Q'$ setzt,

$$Q'\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} - Q\frac{\partial q}{\partial u} + Q'q\frac{\partial q}{\partial u} = 0\,.$$

Man kann ihr genügen, indem man q gleich einer Constanten α nimmt, wodurch Q eine Function von x allein wird, so dass die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy$$

oder

$$du - Q\,dx - \alpha\,dy$$

von selbst integrabel ist. Man erhält also

$$N = u - \int Q\, dx - \alpha y$$

und dann

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -\int \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\, dx - y = f'(\alpha),$$

woraus man α entnimmt, welches man in die Gleichung

$$N - f(\alpha) = 0$$

einzusetzen hat.

Vierter Fall. — Eine Function von p und x ist gleich einer Function von q und y.

Es sei P eine Function von p und x und Q eine Function von q und y, so dass man hat

$$P = Q.$$

Wenn man dann eine Constante α nimmt und

$$P = \alpha, \quad Q = \alpha$$

setzt, so ist klar, dass man durch die erste dieser Gleichungen p als Function von x allein und durch die zweite q als Function von y allein ausgedrückt erhält, so dass die Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial u}$ von selbst verschwinden. Die Bedingungsgleichung ist also erfüllt, und es ist ersichtlich, dass die Grösse

$$du - p\, dx - q\, dy$$

ohne irgend welche Vorbereitung integrabel ist. Man erhält also

$$N = u - \int p\, dx - \int q\, dy$$

und dann

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -\int \frac{\partial p}{\partial \alpha}\, dx - \int \frac{\partial q}{\partial \alpha}\, dy = f'(\alpha),$$

woraus man den Werth von α zu entnehmen hat, um ihn in die Gleichung $N - f(\alpha) = 0$ einzusetzen, welche also wird:

$$u - \int p\, dx - \int q\, dy - f(\alpha) = 0.$$

Fünfter Fall. — Zwischen p, q, x und y besteht eine Gleichung, in welcher p und q nur bis zur ersten Dimension aufsteigen.

Es seien X und Y beliebige Functionen von x und y, und wir wollen annehmen, man habe

$$q = pX + Y.$$

Setzt man nun diesen Werth in die Bedingungsgleichung ein, so wird sie:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - X\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial x} - pX\frac{\partial p}{\partial u} + (pX + Y)\frac{\partial p}{\partial u} = 0.$$

Zunächst ist klar, dass sich diese Gleichung sehr vereinfacht durch die Annahme, p enthalte u überhaupt nicht. Denn sie wird, wenn man der grösseren Einfachheit wegen $\frac{\partial X}{\partial x} = X'$ und $\frac{\partial Y}{\partial x} = Y'$ setzt,

$$\frac{\partial p}{\partial y} - X\frac{\partial p}{\partial x} - X'p - Y' = 0.$$

Aber diese Gleichung ist noch zu complicirt, um mit Leichtigkeit einen particulären Werth von p zu finden, der ihr genügt. Betrachten wir also lieber die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy$$

selbst, oder, indem wir $pX + Y$ an Stelle von q setzen,

$$du - p(dx + X dy) - Y dy.$$

Sie soll ein vollständiges Differential sein, entweder von selbst oder wenn sie mit einem geeigneten Factor M multiplicirt wird. Zunächst ist nun folgendes klar: X ist eine gegebene Function von x und y; sucht man also den Factor m, der die Grösse $dx + X dy$ integrabel macht, und setzt dann

$$m(dx + X dy) = dz,$$

so hat man folgende einfachere Grösse integrabel zu machen:

$$du - \frac{p}{m}dz - Y dy,$$

wo $\frac{p}{m}$ eine unbekannte Function und Y eine bekannte Function von x und von y ist oder vielmehr von z und y, wenn man an Stelle von x seinen Ausdruck in y und z aus der Gleichung

$$\int m(dx + X dy) = z$$

einsetzt. Nun weiss man aber, dass die Grösse, um die es sich handelt, integrabel ist, wenn man hat:

$$\frac{\partial \frac{p}{m}}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z},$$

was durch Integration nach y ergiebt:

$$\frac{p}{m} = \int \frac{\partial Y}{\partial z} dy + \alpha,$$

wo α eine willkürliche Constante ist. Man hat auf diese Weise einen particulären Werth von p, welcher

$$N = u - \alpha z - \int Y dy$$

giebt, also

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -z = f'(\alpha),$$

was zur Bestimmung von α dient. Dann hat man die Gleichung

$$N - f(\alpha) = u - \alpha z - \int Y dy - f(\alpha) = 0.$$

Da man aber

$$-z = f'(\alpha)$$

hat, so ist klar, dass α eine beliebige Function von z ist, so dass die Gleichung, welche zur Bestimmung von u dient, einfacher so dargestellt werden kann:

$$u - \int Y dy - f(z) = 0.$$

Uebrigens hätte man von vornherein durch die Gleichung

$$\frac{p}{m} = \int \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \alpha$$

sehen können, dass die Constante α eine beliebige Function von z sein kann, da das Integral $\int \frac{\partial Y}{\partial z} dy$ gebildet sein soll, indem man nur y variiren lässt, während z constant bleibt. Da also der Werth von p vollständig ist, so hätte man mit seiner Hilfe sofort den vollständigen Werth von u erhalten. Wir haben aber geglaubt, dass es nicht unzweckmässig wäre, zu zeigen, wie man dazu auch mit Hilfe unserer Methode gelangen kann unter der Annahme, dass die Grösse α zunächst nur als eine unbestimmte Constante betrachtet wird.

Sechster Fall. — Zwischen p, q, x, y besteht eine solche Gleichung, dass x und y zusammen keine Dimension erfüllen.

Setzt man also $x = zy$, so erhält man eine Gleichung zwischen p, q, z, aus der man entnimmt

$$q = P,$$

wo P eine Function von p und z allein ist. Betrachtet man aber unmittelbar die Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy,$$

so wie es im vorhergehenden Falle geschehen ist, so wird diese durch die Substitutionen

$$du - p(z\,dy + y\,dz) - P\,dy = 0,$$

d. h.

$$du - yp\,dz - (pz + P)\,dy = 0.$$

Man sieht, dass diese Gleichung integrabel werden kann, wenn man p als eine Function von z allein annimmt (wodurch P ebenfalls eine Function von z wird), vorausgesetzt, dass man

$$pz + P = \int p\,dz$$

hat, d. h.

$$p\,dz = p\,dz + z\,dp + dP$$

oder

$$z\,dp + dP = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zwischen p und z, aus der man durch Integration den Werth von p als Function von z gewinnen kann, und zwar wird derselbe eine willkürliche Constante α enthalten. Auf diese Weise erhält man durch Integration

$$N = u - y\int p\,dz$$

und darauf

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -y\int \frac{\partial p}{\partial \alpha}\,dz = f'(\alpha),$$

woraus man α entnimmt, welches man dann in die Gleichung

$$N - f(\alpha) = u - y\int p\,dz - f(\alpha) = 0$$

einzusetzen hat.

Da man übrigens in diesem Falle $y = Qx$ haben muss, wo Q eine Function von p und q ist, so kann man ihn auch in einfacherer Weise durch die folgende Bemerkung erledigen, mit deren Hilfe er sich auf den oben behandelten fünften Fall zurückführen lässt.

Bemerkung. — Dies sind im Allgemeinen die hauptsächlichsten lösbaren Fälle, wenn eine Gleichung zwischen p, q, x und y ohne u besteht, wo folglich p und q Functionen von x und y allein sein können. Man muss indessen zu ihnen noch diejenigen hinzufügen, wo zwischen diesen vier Grössen dieselben Gleichungen bestehen, aber unter Ersetzung von x, y durch p, q und umgekehrt. Denn wegen $\frac{\partial p}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial q}{\partial u} = 0$ ist die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Sie lässt sich, wenn man jetzt x und y als Functionen von p und q betrachtet, ebenso unter der Form

$$\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial p} = 0$$

schreiben, wo p und q die Stelle von x und y eingenommen haben und umgekehrt. Man hat diese Fälle also nur in derselben Weise zu behandeln, wie die analogen Fälle, die oben erledigt worden sind, unter der Annahme, dass man, anstatt p und q als Functionen von x und y zu suchen, im Gegentheil x und y als Functionen von p und q sucht. [6])

Siebenter Fall. — q ist eine Function von p und u.

P sei eine Function von p und u derart, dass

$$dP = P'dp + Qdu$$

ist, ferner sei

$$q = P.$$

Dann wird die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} - P'\frac{\partial p}{\partial x} - pP'\frac{\partial p}{\partial u} - pQ + P\frac{\partial p}{\partial u} = 0.$$

Es ist klar, dass man annehmen kann, p sei eine Function von u allein ohne x und y, wodurch die Gleichung sich auf die folgende reducirt:

$$P'p\frac{dp}{du}+pQ-P\frac{dp}{du}=0.$$

Da aber P, P' und Q gegebene Functionen von p und u sind, so ist klar, dass die vorstehende Gleichung sich nur auf diese beiden Veränderlichen bezieht, so dass sie durch die gewöhnlichen Methoden integrirt werden kann. Auf diese Weise erhält man p als Function von u, und da die Integration eine willkürliche Constante α in den Werth von p hineinbringt, so kann man daraus den allgemeinen und vollständigen Werth von u ableiten.

In der That giebt die Gleichung

$$du-p\,dx-q\,dy=0$$

oder

$$du-p\,dx-P\,dy=0$$

die folgende:

$$dy=\frac{du-p\,dx}{P},$$

wo das zweite Glied, welches eine Function von x und u allein ist, nothwendig integrabel sein wird, so dass man erhält

$$N=y-\int\frac{du-p\,dx}{P},$$

und daraus hat man den Werth von $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ zu entnehmen, der gleich $f'(\alpha)$ gesetzt zur Bestimmung des Werthes von α dient, den man alsdann in die Integralgleichung

$$N-f(\alpha)=0$$

einzusetzen hat.

Achter Fall. — $q=pX+V$, wo X eine Function von x und y, und V eine Function von x, y und u ist.

Anstatt die Bedingungsgleichung zu betrachten, aus welcher man p bestimmen soll, will ich von vornherein, wie ich bereits oben in einem dem vorliegenden analogen Falle (fünfter Fall) davon Gebrauch gemacht habe, die Grösse

$$du-p\,dx-q\,dy$$

betrachten, die ein vollständiges Differential sein muss, entweder in ihrem jetzigen Zustande oder nach Multiplication mit irgend einem Factor M. Setzt man aber $pX+V$ an Stelle von q, so wird sie

$$du-p(dx+X\,dy)-V\,dy,$$

und sucht man den Multiplicator m, der $dx + Xdy$ gleich einem vollständigen Differential dz macht, so erhält man

$$du - \frac{p}{m}\,dz - Vdy\,,$$

eine Grösse, in der $\frac{p}{m}$ eine unbekannte Function und V eine bekannte Function von x, y, u oder von u, y, z ist, indem man an Stelle von x seinen Werth aus der Gleichung

$$\int m(dx + Xdy) = z$$

einsetzt. Nehmen wir nun an, dass jene Grösse, multiplicirt mit M, ein vollständiges Differential wird. Dann muss

$$M\left(du - Vdy - \frac{p}{m}\,dz\right)$$

das Differential einer Function von u, y, z sein. Betrachtet man also zunächst z als Constante, so muss

$$M(du - Vdy)$$

das Differential einer Function von u und y sein. Man hat demnach zunächst den Multiplicator M zu suchen, welcher die Grösse $M(du - Vdy)$, betrachtet als Function von u und y allein, integrabel macht. Es sei also

$$\int M(du - Vdy) = Z\,.$$

Dann ist klar, dass Z auch z als Constante enthalten wird, so dass man, wenn man jetzt z als Variable behandeln will, für das vollständige Differential von Z die Grösse

$$M(du - Vdy) + \frac{\partial Z}{\partial z}\,dz$$

erhält. Also ist

$$M(du - Vdy) = dZ - \frac{\partial Z}{\partial z}\,dz\,,$$

so dass die Grösse, welche ein vollständiges Differential sein soll,

$$dZ - \left(\frac{Mp}{m} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz$$

wird.

Aber es ist ersichtlich, dass man, damit diese Bedingung stattfinde, nur

$$\frac{Mp}{m} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \alpha$$

anzunehmen braucht, was einen particulären Werth von p liefert, der eine willkürliche Constante α enthält und deshalb mit Hilfe unserer Methode zu der allgemeinen Lösung des Problems führt. Man hat in der That

$$N = Z - \alpha z,$$

mithin

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -z = f'(\alpha),$$

und sodann

$$N - f(\alpha) = Z - \alpha z - f(\alpha) = 0.$$

Man ersieht daraus, dass α eine beliebige Function von z ist, so dass die Gleichung, welche den vollständigen Werth von u liefert, sich in der folgenden einfacheren Form schreiben lässt

$$Z - f(z) = 0.$$

Uebrigens kann man hier eine analoge Bemerkung machen wie die, welche oben bei der Lösung des fünften Falles gemacht wurde, von dem der vorliegende nur eine Verallgemeinerung ist.

Neunter Fall. — $q = p^m XYU$, wo X eine Function von x, Y eine Function von y und U eine Function von u ist.[7])

Ich betrachte auch diesmal unmittelbar die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy,$$

welche durch die Substitution des Werthes von q übergeht in

$$du - p\,dx - p^m XYU\,dy.$$

Ich setze

$$p = rv,$$

wo v eine Function von u ist, und erhalte

$$du - rv\,dx - r^m v^m XYU\,dy.$$

Ich nehme jetzt an $v = v^m U$, was

$$v = \sqrt[m-1]{\frac{1}{U}}$$

ergiebt. Wenn ich dann die ganze vorhergehende Grösse durch v dividire, so erhalte ich

$$\frac{du}{v} - r\,dx - r^m X\,Y dy\,.$$

Jetzt ist es klar, dass diese Grösse integrabel wird, wenn man setzt

$$r^m X = \alpha\,,$$

wo α eine Constante ist; denn sie wird

$$\frac{du}{v} - \sqrt[m]{\frac{\alpha}{X}}\,dx - \alpha\,Y dy\,,$$

wovon das Integral

$$N = \int \frac{du}{v} - \sqrt[m]{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt[m]{X}} - \alpha \int Y dy$$

ist. Daraus hat man den Werth von $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ zu entnehmen, den man gleich $f'(\alpha)$ setzt, und es ist nur noch der Werth von α, der sich aus dieser letzten Gleichung ergiebt, in die folgende

$$N - f(\alpha) = 0$$

einzusetzen.

Bemerkung. — Wenn man eine Gleichung zwischen p, q, u und x hat, so kann man p und q als Functionen von u und x allein betrachten, und das Problem kommt auf den Fall zurück, wo die Gleichung zwischen p, q, x, y besteht, indem man y an Stelle von u nimmt, $-\frac{p}{q}$ an Stelle von p und $\frac{1}{q}$ an Stelle von q. Denn es ist ersichtlich, dass die Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy = 0$$

sich auch in der Form

$$dy + \frac{p\,dx}{q} - \frac{du}{q} = 0$$

schreiben lässt, welche aus der vorhergehenden entsteht, indem man u durch y, p durch $-\frac{p}{q}$, q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt. Ebenso ist es mutatis mutandis mit dem Falle, wo man eine Gleichung zwischen p, q, u und y hat.[8])

9.

Die Fälle, welche wir bis jetzt behandelt haben, enthalten in allgemeiner Weise so ziemlich alles, was man über die Integration der Gleichungen erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen weiss. Man sieht daraus, wie wenig man noch in dieser Materie vorgeschritten ist. Das Princip, welches wir zur Auffindung des vollständigen Integrals im Anschluss an ein particuläres Integral gegeben haben, ist, wie man sieht, sehr fruchtbar und reicht allein aus, um die meisten der Fälle, in denen die Integration gelingt, aufzulösen. Wir wollen indessen über diesen Gegenstand folgendes bemerken: wenn man, anstatt einen particulären Werth von p zu haben, der eine willkürliche Constante enthält, einen particulären Werth von u hätte, der ebenfalls eine willkürliche Constante enthält, so würde man trotzdem mit seiner Hilfe das vollständige Integral nicht finden können. Aber man würde dazu gelangen können, wenn der particuläre Werth von u zwei willkürliche Constanten auf einmal enthielte.

10.

Um diese Behauptung zu beweisen und gleichzeitig ein Mittel zu geben zur Ableitung des vollständigen Werthes von u aus einem particulären Werthe, der zwei willkürliche Constanten enthält, wollen wir annehmen, dieser Werth sei durch eine Gleichung zwischen u, x und y bestimmt, welche ausserdem zwei Constanten α und β enthält, die in der Differentialgleichung nicht vorkommen. Es ist ersichtlich, dass, wenn man diese Gleichung differentiirt, so dass die eine der Constanten, etwa β, verschwindet, man eine Differentialgleichung erhält, die nothwendig vergleichbar mit der vorgelegten

$$du - p\,dx - q\,dy = 0$$

ist, und woraus man durch die Vergleichung einen Werth von p entnehmen kann, der noch eine willkürliche Constante α enthalten wird, so dass man dann daraus den vollständigen Werth von u ableiten kann. Wenn aber die Gleichung zwischen u, x und y nur eine willkürliche Constante enthielte, dann ist ersichtlich, dass, wenn man durch die Differentiation diese Constante herausschafft, die sich dabei ergebende Differentialgleichung keine willkürlichen Constanten mehr enthält. Auf diese Weise findet man nur einen particulären Werth von p, der mit keiner willkürlichen Constanten behaftet ist, und der in Folge dessen zur Aufsuchung des vollständigen Werthes von u unbrauchbar ist. [9])

11.

Es darf übrigens keineswegs erstaunlich erscheinen, dass eine particuläre Lösung, die zwei willkürliche Constanten enthält, hinreichend ist, um daraus die vollständige Lösung abzuleiten. Denn wenn man näher zusieht, so bemerkt man, dass diese Lösung fast vollständig die Bedingungen der Differentialgleichung erfüllt, da man ja die beiden willkürlichen Constanten nicht herausschaffen kann, ohne auf eine Differentialgleichung zu kommen, die gleichzeitig die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ enthält. In der That muss man, da zwei Grössen zu eliminiren sind, drei Gleichungen haben. Also sind ausser der vorgelegten noch zwei nöthig, und diese zwei können nur von zwei verschiedenen Differentiationen herkommen, indem man bei der einen x und bei der andern y variiren lässt.

Man kann auf dieselbe Weise folgendes beweisen: Wenn man eine Function u von drei Veränderlichen x, y, z hat, die von einer Differentialgleichung erster Ordnung in u, x, y, z und $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ abhängt, und man hat einen particulären Werth von u, der drei willkürliche Constanten α, β, γ enthält, so erfüllt dieser Werth fast vollständig die Bedingungen des Problems. Denn man kann die drei Constanten nur durch drei Differentiationen, die eine nach x, die andre nach y und die dritte nach z, eliminiren.

Und so fort.

12.

Allgemein sei u eine Function von mehreren Veränderlichen x, y, z, ..., und es sei eine Gleichung zwischen

$$u,\ x,\ y,\ z,\ \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \cdots$$

gegeben, durch welche der Werth von u bestimmt werden soll. Nehmen wir an, man habe einen particulären Werth von u, der die willkürlichen Constanten α, β, γ, ... enthält, deren Zahl gleich derjenigen der Veränderlichen x, y, z, ... ist. Man entnehme daraus den Werth der einen dieser Constanten, etwa α, so dass man hat

$$V = \alpha,$$

wo V eine Function von u, x, y, z, ... und von β, γ, ... ist. Man differentiire diese Gleichung. Dann erhält man, indem man

$$dV = Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \cdots$$

setzt, nach Division durch M die Gleichung

$$du + \frac{Pdx}{M} + \frac{Qdy}{M} + \frac{Rdz}{M} + \cdots = 0,$$

so dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{M},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Q}{M},\quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{R}{M},\ \cdots$$

ist, und diese Werthe sind derart, dass sie nach der Voraussetzung der gegebenen Gleichung genügen. Da nun die Lösung des Problems einzig und allein davon abhängt, dass die vorhergehende Gleichung integrabel wird, wenn man sie mit dem Factor M multiplicirt, d. h. davon, dass

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \cdots$$

ein vollständiges Differential in u, x, y, z, ... ist, so ist klar, dass die Lösung ebenso gilt, wenn die Grössen β, γ, ..., anstatt constant zu sein, variabel sind, vorausgesetzt, dass dasselbe Differential ein vollständiges bleibt. Aber das Integral dieses Differentials ist, so lange β, γ, ... constant sind, V, so dass man unter dieser Voraussetzung

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \cdots = dV$$

hat. Betrachtet man aber β als variabel, dann erhält man

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \cdots + \frac{\partial V}{\partial \beta} d\beta = dV,$$

also

$$Mdu + Pdx + Qdy + Rdz + \cdots = dV - \frac{\partial V}{\partial \beta} d\beta .$$

Da dV für sich ein vollständiges Differential ist, so muss demnach $\frac{\partial V}{\partial \beta} d\beta$ ebenfalls eine von selbst integrable Grösse sein, was nur dann stattfinden kann, wenn $\frac{\partial V}{\partial \beta}$ gleich einer beliebigen Function von β ist. Setzt man also

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = f(\beta)$$

und entnimmt aus dieser Gleichung den Werth von β, so kann man ihn an Stelle von β einsetzen, und man erhält anstatt der Gleichung $V = \alpha$ die folgende

$$V - B = \alpha ,$$

wo B gleich $\int f(\beta)\, d\beta$ ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $\gamma, \ldots$ in beliebiger Weise in der Eigenschaft als Constanten in die Function $f(\beta)$ und in Folge dessen auch in die Function B eingehen können. Jetzt kann man ebenso die Grösse γ, die in V und B vorkommt, variabel werden lassen. Nimmt man

$$\frac{\partial(V - B)}{\partial \gamma} = f(\gamma) ,$$

wodurch γ bestimmt wird, und setzt dann diesen Werth von γ ein, so erhält man die Gleichung

$$V - B - C = \alpha ,$$

wo $C = \int f(\gamma)\, d\gamma$ ist, und so fort.

Auf diese Weise wird das unvollständige Integral

$$V = \alpha$$

von der Form

$$V - B - C - \cdots = \alpha$$

und ist dann nothwendig vollständig, da es ebensoviel willkürliche Functionen enthält, als es Variable $x, y, z, \ldots$ giebt, weniger eins. [10])

13.

Um die Anwendung dieser Methode an einem sehr allgemeinen Beispiel zu zeigen, wollen wir annehmen, X sei eine Function von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und x, Y eine solche von $\frac{\partial u}{\partial y}$ und y, Z eine solche von $\frac{\partial u}{\partial z}$ und z, und so fort, und es sei eine Gleichung zwischen $X, Y, Z, \ldots$ gegeben, aus der man den Werth von u entnehmen soll. Da das Problem darin besteht, es so einzurichten, dass die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy - r\,dz - \cdots$$

integrabel ist, entweder an sich oder, wenn sie mit einem beliebigen Factor multiplicirt wird, wobei man annimmt

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \ldots,$$

so ist klar, dass die Bedingung des Problems erfüllt ist, wenn p eine Function von x allein ist, q von y allein, r von z allein, u. s. w. Dies findet aber statt, wenn man $X, Y, Z, \ldots$ gleich constanten Grössen setzt. Denn alsdann dient die gegebene Gleichung dazu, eine dieser Constanten durch alle andern zu bestimmen, so dass so viele willkürliche Constanten bleiben, als es Veränderliche $x, y, z, \ldots$ giebt, weniger eins. In dieser Weise erhält man

$$V = u - \int p\,dx - \int q\,dy - \int r\,dz - \cdots = \alpha$$

als Gleichung, welche den particulären Werth von u bestimmt, und da dieser Werth von u die willkürlichen Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ enthält, so kann man mit Hilfe der oben auseinandergesetzten Methode die Lösung vervollständigen.

14.

Es ist klar, dass man den vorhergehenden Fall noch verallgemeinern kann, indem man annimmt, W sei eine beliebige Function von u und man habe X gleich einer Function von $W\frac{\partial u}{\partial x}$ und x, Y gleich einer Function von $W\frac{\partial u}{\partial y}$ und y, Z gleich einer Function von $W\frac{\partial u}{\partial z}$ und $z, \ldots$. Denn wenn man $X, Y, \ldots$ constant setzt, so erhält man p gleich einer Function von x allein, dividirt durch W, q gleich einer Function von y allein, ebenfalls dividirt durch $W, \ldots$, so dass die Grösse

$$du - p\,dx - q\,dy - r\,dz - \cdots,$$

wenn man sie mit W multiplicirt, integrabel wird.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer beliebigen Zahl von Veränderlichen.

Von

Cauchy.

(Bulletin des Sciences par la Société Philomathique, 1819.)

Bis heute giebt es kein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, worin die Hilfsmittel zur vollständigen Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angegeben werden, welches auch die Zahl der unabhängigen Veränderlichen sein mag. Ich habe mich seit mehreren Monaten mit diesem Gegenstande beschäftigt und bin so glücklich gewesen, eine allgemeine Methode zu gewinnen, die zu dem gewünschten Ziele zu führen vermag. Nach Beendigung meiner Arbeit habe ich aber erfahren, dass Herr *Pfaff*, ein deutscher Mathematiker, seinerseits zur Integration der oben erwähnten Gleichungen gelangt war. Da es sich hier um eine der wichtigsten Fragen der Integralrechnung handelt und die Methode des Herrn *Pfaff* von der meinigen verschieden ist, so meine ich, dass die Mathematiker eine kurze Analyse der beiden Methoden nicht ohne Interesse aufnehmen werden. Zuerst werde ich die Methode auseinandersetzen, deren ich selbst mich bedient habe, wobei ich, um die Darstellung zu vereinfachen, einige Bemerkungen benutze, die Herr *Coriolis*, Ingenieur für Brücken und Wege, gemacht hat, und einige andere, die mir selbst seit kurzem in den Sinn gekommen sind.

Nehmen wir zunächst an, es handle sich um die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Für eine derartige Integration besitzt man bereits mehrere verschiedene Methoden, deren eine (nämlich diejenige von *Ampère*) auf dem Wechsel einer einzigen unabhängigen Veränderlichen beruht. Die Methode, welche ich vorschlage, beruht in dem angenommenen Falle auf demselben Princip und reducirt sich dann auf folgendes:

Es sei

$$f(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1}$$

die gegebene Gleichung, in welcher x, y die beiden unabhängigen Veränderlichen bedeuten, u die unbekannte Function dieser beiden Veränderlichen und p, q die partiellen Ableitungen von u nach den Veränderlichen x und y. Zur vollständigen Bestimmung von u genügt es nicht, zu wissen, dass sie die Gleichung (1) befriedigen soll. Es ist ausserdem noch nöthig, sie einer andern Bedingung zu unterwerfen, z. B. der, für einen gegebenen Werth der Veränderlichen x einen gewissen besondern Werth, der eine Function von y ist, anzunehmen. Setzen wir demgemäss voraus, dass die Function u für $x = x_0$ den besondern Werth $\varphi(y)$ annehmen soll. Die Function q, d. h. die partielle Ableitung von u nach y, nimmt unter dieser Voraussetzung den besondern Werth $\varphi'(y)$ an. Unter derselben Voraussetzung ist bekanntlich der allgemeine Werth von u vollständig bestimmt. Es handelt sich jetzt darum, diesen Werth zu berechnen. Man gelangt dazu in folgender Weise:

Ersetzen wir y durch eine Function von x und einer neuen unabhängigen Veränderlichen y_0. Die Grössen u, p, q, welche Functionen von x, y waren, gehen dadurch in Functionen von x, y_0 über, und wenn man unter dieser Voraussetzung differentiirt, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}. \tag{3}$$

Zieht man die beiden vorstehenden Gleichungen von einander ab, nachdem man die erste nach y_0 und die zweite nach x differentiirt hat, so schliesst man daraus

$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y_0}. \tag{4}$$

Bezeichnet man überdies das vollständige Differential der linken Seite der Gleichung (1) mit

$$X dx + Y dy + U du + P dp + Q dq,$$

so findet man durch Differentiation dieser Gleichung nach y_0

$$(5) \qquad Y\frac{\partial y}{\partial y_0}+U\frac{\partial u}{\partial y_0}+P\frac{\partial p}{\partial y_0}+Q\frac{\partial q}{\partial y_0}=0,$$

mithin unter Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4)

$$(6) \qquad \left(Y+qU+P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0}+\left(Q-P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0}=0.$$

Bemerken wir jetzt, dass der Werth von y als Function von x und y_0 ganz willkürlich ist, und man deshalb so über ihn verfügen kann, dass er der Differentialgleichung

$$(7) \qquad Q-P\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

genügt, und dass er sich unter der Voraussetzung $x=x_0$ auf y_0 reducirt. Ist der Werth von y als Function von x und y_0 in der angegebenen Weise gewählt, so sind die $x=x_0$ entsprechenden besonderen Werthe von u und q, nämlich $\varphi(y)$ und $\varphi'(y)$, bezüglich $\varphi(y_0)$ und $\varphi'(y_0)$. Bezeichnen wir eben diese Werthe mit u_0, q_0. Dann hat man

$$(8) \qquad \begin{cases} u_0=\varphi(y_0), \\ q_0=\varphi'(y_0). \end{cases}$$

Was die Formel (6) anbetrifft, so hat sie sich in Folge der Gleichung (7) auf

$$\left(Y+qU+P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0}=0$$

reducirt. Da y nach der Voraussetzung y_0 wirklich enthält, so kann $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ nicht beständig gleich Null sein, und die genannte Formel verwandelt sich in

$$(9) \qquad Y+qU+P\frac{\partial q}{\partial x}=0.$$

Dies vorausgesetzt, ist die Integration der Gleichung (1) auf die folgende Frage zurückgeführt:

F ü r y, u, p, q v i e r F u n c t i o n e n v o n x u n d y_0 z u f i n d e n d e r a r t, d a s s d i e G l e i c h u n g e n (1), (2), (3), (7), (9) e r f ü l l t s i n d, w ä h r e n d d r e i d i e s e r F u n c t i o n e n, n ä m l i c h y, u, q s i c h u n t e r d e r V o r a u s s e t z u n g $x=x_0$ b e z ü g l i c h a u f y_0, u_0, q_0 r e d u c i r e n.

Wir sprechen gar nicht von der Gleichung (4), weil sie eine nothwendige Folge der Gleichungen (2) und (3) ist. Was den besondern Werth von p betrifft, der $x = x_0$ entspricht, so geht er in die allgemeinen Werthe von y, u, p, q, die durch die vorhergehenden Bedingungen bestimmt sind, nicht ein. Bezeichnet man ihn mit p_0, so lässt er sich aus der Formel

$$f(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0 \tag{10}$$

ableiten.

Es ist wesentlich, zu bemerken, dass die allgemeinen Werthe von y, u, p, q als Functionen von x und von y_0 vollständig bestimmt bleiben, wenn man unter den Bedingungen, denen sie genügen müssen, ganz absieht von der Erfüllung der Gleichung (3). Diese letztere Bedingung muss also eine unmittelbare Folge aus allen andern sein. Um dies zu beweisen, wollen wir für einen Augenblick annehmen, die andern seien erfüllt, während die beiden Glieder der Gleichung (3) ungleich seien. Die Differenz dieser beiden Glieder kann nur eine Function von x und y_0 sein. Diese Function sei α und α_0 das, was aus ihr für $x = x_0$ wird. Dann hat man

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial u}{\partial y_0} - q\frac{\partial y}{\partial y_0} \\ \alpha_0 &= \frac{du_0}{dy_0} - q_0\frac{dy_0}{dy_0} = \varphi'(y_0) - \varphi'(y_0) = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Man findet demnach an Stelle der Gleichungen (3) und (4)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0} + \alpha \\ &\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

mithin an Stelle der Gleichung (6) die folgende:

$$\left(Y + qU + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} + U\alpha + P\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Diese letztere reducirt sich mit Hilfe der Gleichungen (7) und (9), die man als erfüllt voraussetzt, auf

$$U\alpha + P\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0\,. \tag{14}$$

Integrirt man und betrachtet $\frac{U}{P}$ als eine Function von x und y_0, so findet man[11])

$$(15) \qquad \alpha = \alpha_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{U}{P} dx}$$

Folglich hat man unter Berücksichtigung der zweiten der Gleichungen (11) allgemein

$$(16) \qquad \alpha = 0.$$

Die beiden Glieder der Gleichung (3) können also unter der gemachten Voraussetzung nicht ungleich sein. Man muss daraus schliessen, dass die Grössen y, u, p, q allen erforderlichen Bedingungen genügen, wenn diese Grössen, betrachtet als Functionen von x, die Gleichungen (1), (2), (7), (9) befriedigen und wenn sich ausserdem y, u, q für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, $u_0 = \varphi(y_0)$, $q_0 = \varphi'(y_0)$ reduciren. Es ist unnöthig, hinzuzufügen, dass p unter derselben Voraussetzung den besondern Werth p_0 annehmen muss. In der That kommt dieser Werth in den Integralen der Gleichungen (1), (2), (7), (9) nicht vor, da ja keine dieser Gleichungen $\frac{\partial p}{\partial x}$ enthält.

Wenn man in der Gleichung (2) den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung (7) einsetzt, so findet man:

$$(17) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = p + \frac{Qq}{P} = \frac{pP + qQ}{P}.$$

Differentiirt man überdies die Gleichung (1) nach x, so gewinnt man die folgende:

$$(18) \qquad X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + U\frac{\partial u}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

welche sich mit Hilfe der aus den Formeln (7), (17) und (9) entnommenen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$ auf

$$(19) \qquad X + pU + P\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

reducirt.

Dies vorausgesetzt, kann man die Gleichung (2) durch die Gleichung (17) ersetzen und eine der Gleichungen (1), (17), (7), (9) durch die Gleichung (19). Wenn man ausserdem bemerkt, dass man, falls y, u, p, q als Functionen von x betrachtet werden, die Gleichungen (7), (9), (17), (19) in der algebraischen Formel

$$(20)\quad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{Pp+Qq}=-\frac{dp}{X+pU}=-\frac{dq}{Y+qU}$$

zusammenfassen kann, so ergiebt sich als Endresultat folgendes:

Um die gesuchten Werthe der Grössen y, u, p, q zu bestimmen, genügt es, sie vieren unter den fünf Gleichungen zu unterwerfen, die in den beiden Formeln

$$(21)\quad \begin{cases} f(x,\, y,\, u,\, p,\, q)=0\,, \\ \dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{du}{Pp+Qq}=-\dfrac{dp}{X+pU}=-\dfrac{dq}{Y+qU} \end{cases}$$

enthalten sind, und zu verlangen, dass sie für $x=x_0$ die besondern Werthe y_0, u_0, p_0, q_0 annehmen, von denen die drei letzten als Functionen des ersten durch die Gleichungen (8) und (10) bestimmt sind.[12]

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, man eliminire mit Hilfe der Gleichung

$$f(x,\, y,\, u,\, p,\, q)=0$$

p aus den drei in der Formel

$$(22)\quad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{Pp+Qq}=-\frac{dq}{Y+qU}$$

enthaltenen Gleichungen. Integrirt man diese drei letzten, so gewinnt man drei endliche Gleichungen, welche ausser den Grössen

$$x,\, y,\, u,\, q$$

die besondern Werthe enthalten, die durch

$$x_0,\; y_0,\; \varphi(y_0),\; \varphi'(y_0)$$

dargestellt werden. Wenn man nach geschehener Integration q eliminirt, so enthalten die beiden übrig bleibenden Gleichungen ausser den veränderlichen Grössen x, y, u und der constanten Grösse x_0 nur die neue Veränderliche y_0, deren Elimination sich nur dann ausführen lässt, wenn man der mit φ bezeichneten willkürlichen Function eine besondere Form ertheilt hat. Jedenfalls kann das betreffende System von zwei Gleichungen immer als äquivalent mit dem allgemeinen Integral der Gleichung (1) betrachtet werden.

Da man in allem Bisherigen die Veränderliche x an Stelle der Veränderlichen y und umgekehrt setzen kann, so ergiebt sich, dass die Integrale der Gleichungen (21) immer noch die Lösung der gestellten Aufgabe liefern, wenn man in diesen Integralen y_0 als Constante, x_0 dagegen als eine neue Veränderliche betrachtet, die man eliminiren muss, und u_0, p_0, q_0 als Functionen dieser neuen Veränderlichen, welche durch Gleichungen von der Form

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \varphi(x_0), \\ p_0 &= \varphi'(x_0), \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$f(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0 \tag{24}$$

bestimmt sind.

Wenden wir die soeben entwickelten Principien an auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$pq - xy = 0. \tag{25}$$

In diesem Falle hat man

$$P = q, \quad Q = p, \quad U = 0, \quad X = -y, \quad Y = -x,$$

und es wird demnach die zweite der Formeln (21):

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

oder, wenn man alle Brüche auf den gemeinsamen Nenner $pq = xy$ bringt, um ihn nachher fortzulassen,

$$p\,dx = q\,dy = \tfrac{1}{2}du = x\,dp = y\,dq. \tag{26}$$

Man entnimmt aus der vorstehenden Formel successiv

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}, \quad du = \frac{p}{x}\cdot 2x\,dx = \frac{q}{y}\cdot 2y\,dy, \tag{27}$$

ferner durch Integration unter Beachtung der Bedingungsgleichung $p_0 q_0 = x_0 y_0$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{y}{y_0}, \tag{28}$$

$$\left\{\begin{aligned} u - u_0 &= \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2) \\ &= \frac{y_0}{q_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{x_0}{p_0}(y^2 - y_0^2). \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Multiplicirt man die beiden Werthe von $u - u_0$, die die Gleichung (29) liefert, miteinander, so erhält man:

$$(u - u_0)^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2). \tag{30}$$

Verbindet man diese letztere mit der Gleichung (29), die man auf die Form

$$q_0(u - u_0) = y_0(x^2 - x_0^2) \tag{31}$$

gebracht hat, und ersetzt u_0 durch $\varphi(y_0)$, q_0 durch $\varphi'(y_0)$, so findet man für die beiden Formeln, deren System das allgemeine Integral der Gleichung (25) darstellen soll,

$$\left\{\begin{aligned} &[u - \varphi(y_0)]^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2), \\ &[u - \varphi(y_0)]\,\varphi'(y_0) = (x^2 - x_0^2)\,y_0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

In diesen beiden letzten Formeln bezeichnet x_0 eine Constante, die beliebig gewählt ist, und y_0 eine neue Veränderliche, welche man nur eliminiren kann, nachdem man den Werth der willkürlichen Function φ fixirt hat. Es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die zweite der Gleichungen (32) nichts andres als die Ableitung der ersten nach der Veränderlichen y_0 ist.

Vereinigt man die Gleichung (30) mit der Gleichung (29), die man auf die Form

$$p_0(u - u_0) = x_0(y^2 - y_0^2) \tag{33}$$

gebracht hat, betrachtet y_0 als Constante und ersetzt dann u_0 durch $\varphi(x_0)$ und p_0 durch $\varphi'(x_0)$, so erhält man zwei neue Gleichungen, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} &[u - \varphi(x_0)]^2 = (x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2), \\ &[u - \varphi(x_0)]\,\varphi'(x_0) = (y^2 - y_0^2)x_0, \end{aligned}\right. \tag{34}$$

deren System immer noch zur Darstellung des allgemeinen Integrals der Gleichung (25) geeignet ist. Die zweite der Gleichungen (34) ist die Ableitung der ersten nach x_0.

Man würde in genau derselben Weise zeigen, dass das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(35) \qquad pq - u = 0$$

durch das System von zwei sehr einfachen Formeln dargestellt wird, nämlich durch die Gleichung

$$(36) \qquad (u^{\frac{1}{2}} - u_0^{\frac{1}{2}})^2 = (x - x_0)(y - y_0)$$

und ihre Ableitung nach einer der Grössen x_0, y_0, die man als Veränderliche ansieht, während u_0 als eine willkürliche Function dieser Veränderlichen betrachtet wird.

Die Methode welche hier auseinandergesetzt worden ist, lässt sich nicht nur auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen anwenden. Sie behält ihre Geltung, welches auch die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen sein mag. Davon kann man sich leicht überzeugen.

Nehmen wir z. B. den Fall, wo es sich um eine partielle Differentialgleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen handelt. Sei

$$(37) \qquad f(x, y, z, u, p, q, r) = 0$$

diese Gleichung, in welcher u immer eine unbekannte Function der unabhängigen Veränderlichen x, y, z bezeichnet und p, q, r die partiellen Ableitungen von u nach diesen Veränderlichen. Um die Function u vollständig zu bestimmen, genügt es nicht, zu wissen, dass sie die Gleichung (37) befriedigen soll. Es ist ausserdem nöthig, diese Function einer andern Bedingung zu unterwerfen, z. B. der, für einen bestimmten Werth von x einen gewissen besondern Werth anzunehmen. Setzen wir demgemäss voraus, dass die Function u für $x = x_0$ den besondern Werth $\varphi(y, z)$ annehmen soll. Die Functionen q und r, d. h. die partiellen Ableitungen von u nach y und nach z, nehmen unter derselben Voraussetzung die besonderen Werthe $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z}$ an, welche ich zur Abkürzung mit $\varphi'(y, z)$ und $\varphi_{,}(y, z)$ bezeichnen werde. Es handelt sich jetzt darum, den allgemeinen Werth von u zu berechnen. Man gelangt dazu in folgender Weise:

Ersetzen wir y und z durch Functionen von x und von zwei neuen unabhängigen Veränderlichen y_0, z_0. Die Grössen u, p, q, r, welche bisher Functionen von x, y, z waren, werden dadurch Functionen von x, y_0, z_0, und man erhält unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} + r\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{38}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_0} &= q\frac{\partial y}{\partial y_0} + r\frac{\partial z}{\partial y_0}, \\ \frac{\partial u}{\partial z_0} &= q\frac{\partial y}{\partial z_0} + r\frac{\partial z}{\partial z_0}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Man folgert aus den vorstehenden drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y_0} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y_0} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y_0}, \\ \frac{\partial p}{\partial z_0} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z_0} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z_0}. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Bezeichnet man überdies das vollständige Differential der linken Seite der Gleichung (37) mit

$$X dx + Y dy + Z dz + U du + P dp + Q dq + R dr,$$

so findet man, indem man diese Gleichung der Reihe nach nach y_0 und z_0 differentiirt,

$$\left\{\begin{aligned} &\left(Y + qU + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Z + rU + P\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y_0} \\ &\qquad + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} + \left(R - P\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial y_0} = 0, \\ &\left(Y + qU + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial z_0} + \left(Z + rU + P\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial z_0} \\ &\qquad + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial z_0} + \left(R - P\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial z_0} = 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Bemerken wir jetzt, dass die Werthe von y und z als Functionen von x, y_0, z_0 ganz beliebig sind, und dass man deshalb so über sie verfügen kann, dass sie den Differentialgleichungen

$$(42)\qquad \begin{cases} Q - P\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0, \\[2ex] R - P\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

genügen, und dass sie sich überdies für $x = x_0$ auf y_0, bezw. z_0 reduciren. Wählt man die Werthe von y und z in der soeben angegebenen Weise, so liefern die Gleichungen (41)

$$(43)\qquad \begin{cases} Y + qU + P\dfrac{\partial q}{\partial x} = 0\,, \\[2ex] Z + rU + P\dfrac{\partial r}{\partial x} = 0\,. \end{cases}$$

Setzt man ausserdem

$$(44)\qquad u_0 = \varphi(y_0, z_0)\,,\quad q_0 = \varphi'(y_0, z_0)\,,\quad r_0 = \varphi_{\prime}(y_0, z_0)\,,$$

so erkennt man leicht, dass die vorgelegte Frage sich auf die Integration der Gleichungen (38), (42) und (43) reducirt, nachdem man darin den Werth von p aus der Gleichung (37) eingesetzt hat. y, z, u, q, r sind dabei als Functionen von x zu betrachten, die sich für $x = x_0$ bezüglich auf y_0, z_0, u_0, q_0, r_0 reduciren sollen. Wenn man aus den Integralen der fünf Gleichungen (38), (42) und (43) q und r eliminirt, so bleiben nur drei endliche Gleichungen zwischen den Grössen x, y, z, u, der Constanten x_0, den neuen Veränderlichen y_0, z_0 und drei Functionen dieser neuen Veränderlichen, nämlich $u_0 = \varphi(y_0, z_0)$, $q_0 = \varphi'(y_0, z_0)$, $r_0 = \varphi_{\prime}(y_0, z_0)$. Das System dieser drei endlichen Gleichungen, aus denen man y_0 und z_0 nur eliminiren kann, nachdem man den Werth der willkürlichen Function $\varphi(y, z)$ fixirt hat, muss als äquivalent mit dem allgemeinen Integral der Gleichung (37) betrachtet werden.

Die nach der vorstehenden Methode bestimmten Werthe von y, z, u, q, r genügen von selbst den Gleichungen (39). In der That! Wenn man

$$\frac{\partial u}{\partial y_0} - q\frac{\partial y}{\partial y_0} - r\frac{\partial z}{\partial z_0} = \alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_0} - q\frac{\partial y}{\partial z_0} - r\frac{\partial z}{\partial z_0} = \beta$$

setzt und die Gleichung (37) unter Berücksichtigung der Gleichungen (38), (42) und (43) successive nach y_0 und nach z_0 differentiirt, so findet man

$$U\alpha + P\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0\,,$$

$$U\beta + P\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0\,,$$

folglich

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{U}{P}\cdot dx}\,,$$

$$\beta = \beta_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{U}{P}\cdot dx}\,.$$

Dabei wird $\frac{U}{P}$ als Function von x, y_0, z_0 betrachtet, während α_0, β_0 die $x = x_0$ entsprechenden Werthe von α und β bezeichnen. Da ferner diese Werthe offenbar durch die Gleichungen

$$\alpha_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y_0} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial y_0} = \varphi'(y_0, z_0) - \varphi'(y_0, z_0) = 0\,,$$

$$\beta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial z_0} - r_0\frac{\partial z_0}{\partial z_0} = \varphi_{,}(y_0, z_0) - \varphi_{,}(y_0, z_0) = 0$$

gegeben sind, so schliesst man allgemein

$$\alpha = 0\,,$$

$$\beta = 0\,.$$

Differentiirt man die Gleichung (37) nach x und setzt in der so erhaltenen Ableitung für $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$ ihre Werthe aus den Formeln (38), (42) und (43) ein, so findet man, dass diese Ableitung sich auf

$$X + pU + P\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{45}$$

reducirt. Bezeichnet man ferner mit p_0 den besondern Werth von p, der $x=x_0$ entspricht, so genügt dieser besondere Werth offenbar der Gleichung

$$f(x_0, y_0, z_0, u_0, p_0, q_0, r_0) = 0. \tag{46}$$

Bemerkt man endlich, dass man, wenn y, z, u, p, q, r als Functionen von x betrachtet werden, die Gleichungen (38), (42), (43) und (45) in der algebraischen Formel

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{47}$$

$$=\frac{du}{pP+qQ+rR}=-\frac{dp}{X+pU}=-\frac{dq}{Y+qU}=-\frac{dr}{Z+rU}$$

zusammenfassen kann, so gelangt man zu folgendem Endresultat: Zur vollständigen Bestimmung der Grössen y, z, u, p, q, r genügt es, sie sechsen von den in den beiden Formeln (37), (47) enthaltenen Gleichungen zu unterwerfen und zu verlangen, dass sie für $x=x_0$ die besonderen Werthe y_0, z_0, u_0, p_0, q_0, r_0 annehmen, von denen die vier letzten als Functionen der beiden ersten durch die Gleichungen (44) und (46) ausgedrückt sind.

Wenden wir diese Principien auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$pqr - xyz = 0 \tag{48}$$

an. In diesem Falle wird die Formel (47)

$$\frac{dx}{qr}=\frac{dy}{pr}=\frac{dz}{pq}=\frac{du}{3pqr}=\frac{dp}{yz}=\frac{dq}{xz}=\frac{dr}{xy},$$

oder, wenn man alle Brüche auf denselben Nenner $pqr=xyz$ bringt, um ihn nachher fortzulassen,

$$p\,dx = q\,dy = r\,dz = \tfrac{1}{3}du = x\,dp = y\,dq = z\,dr. \tag{49}$$

Aus dieser letzten Formel entnimmt man

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q}=\frac{dy}{y}, \quad \frac{dr}{r}=\frac{dz}{z}, \\ &du = 3\frac{p}{x}\cdot x\,dx = 3\frac{q}{y}\cdot y\,dy = 3\frac{r}{z}\cdot z\,dz, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

ferner durch Integration

$$(51)\qquad \frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{r}{r_0} = \frac{z}{z_0},$$

$$(52)\qquad (u - u_0)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{p_0}{x_0}(x^2 - x_0^2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{q_0}{y_0}(y^2 - y_0^2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{r_0}{z_0}(z^2 - z_0^2)$$

Multiplicirt man jetzt die drei durch die Formel (52) gelieferten Werthe von $u - u_0$ mit einander, bezw. nur zwei dieser Werthe, unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$(53)\qquad p_0 q_0 r_0 = x_0 y_0 z_0,$$

so findet man

$$(54)\qquad (u - u_0)^3 = \frac{27}{8}(x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2),$$

$$(55)\qquad \begin{cases} (u - u_0)^2 = \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{x_0}{p_0}(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2), \\[2ex] (u - u_0)^2 = \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{y_0}{q_0}(x^2 - x_0^2)(z^2 - z_0^2), \\[2ex] (u - u_0)^2 = \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{z_0}{r_0}(x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2). \end{cases}$$

Ersetzt man endlich in der Gleichung (54) und in den beiden letzten Gleichungen (55)

u_0 durch $\varphi(y_0, z_0)$, q_0 durch $\varphi'(y_0, z_0)$, r_0 durch $\varphi_{,}(y_0, z_0)_{,}$,

so erhält man drei Formeln, deren System das allgemeine Integral der Gleichung (48) darstellt, nämlich

$$(56)\qquad [u - \varphi(y_0, z_0)]^3 = \frac{27}{8}(x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2),$$

$$(57)\qquad \begin{cases} [u - \varphi(y_0, z_0)]^2 \varphi'(y_0, z_0) = \dfrac{9}{4}(x^2 - x_0^2)(z^2 - z_0^2)\, y_0, \\[2ex] [u - \varphi(y_0, z_0)]^2 \varphi_{,}(y_0, z_0) = \dfrac{9}{4}(x^2 - x_0^2)(y^2 - y_0^2)\, z_0. \end{cases}$$

In diesen drei Formeln bezeichnet x_0 eine constante Grösse und y_0, z_0 zwei neue veränderliche Grössen, welche zu eliminiren sind, nachdem man den Werth der willkürlichen

Function $\varphi(y, z)$ fixirt hat. Man kann bemerken, dass die Gleichungen (57) die Ableitungen der Gleichung (56) nach y_0 bezw. nach z_0 sind.

Betrachtet man allgemein u_0 als eine Function von x_0, y_0, z_0 und setzt

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} = p_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = q_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial z_0} = r_0, \tag{58}$$

so sind die drei Gleichungen (55) nur die Ableitungen der Gleichung (54) nach x_0, y_0, z_0, und wenn man in der Gleichung (54) zusammen mit zweien der Gleichungen (55) eine der drei Grössen x_0, y_0, z_0 als constant und die beiden andern als veränderlich betrachtet, so gewinnt man ein System von drei endlichen Gleichungen, welches zur Darstellung des allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichung

$$pqr - xyz = 0$$

dient.

Bei Anwendung der oben auseinandergesetzten Methode auf die partielle Differentialgleichung

$$pqr - u = 0 \tag{59}$$

würde man finden, dass das allgemeine Integral der letzteren durch ein System von drei sehr einfachen Formeln dargestellt werden kann, nämlich durch die Gleichung

$$(u^{\frac{2}{3}} - u_0^{\frac{2}{3}})^3 = 8(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0), \tag{60}$$

worin u_0 als eine willkürliche Function von x_0, y_0, z_0 zu betrachten ist, und die beiden Ableitungen dieser Gleichung nach zweien der drei Grössen x_0, y_0, z_0, wobei man eine dieser Grössen als constant und die beiden andern als variabel betrachtet.

Die Ausdehnung der vorstehenden Methoden auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche mehr als drei unabhängige Veränderliche enthalten, bietet keine Schwierigkeit, und ich werde daher in einem zweiten Artikel übergehen zur Auseinandersetzung der wichtigen Arbeit des Herrn *Pfaff* über die von mir soeben behandelten Gegenstände.[13]

Anmerkungen.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bildet eine der schönsten Errungenschaften der neueren Mathematik. Schon *Euler* hat sich bekanntlich mit der Integration derartiger Gleichungen beschäftigt. Er ist aber nicht einmal in dem einfachsten Falle (bei zwei unabhängigen Veränderlichen) zu einer allgemeinen Theorie gelangt. Im dritten Band seiner Institutiones calculi integralis*) giebt er eine zusammenhängende Darstellung seiner Arbeiten auf diesem Gebiete. Bei den zahlreichen speciellen Integrationen, die er durchführt, bildet, wie später bei *Lagrange*, die Theorie der totalen Differentialgleichungen

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

die Grundlage. Seine Methode besteht ebenso wie die *Lagrange*'s darin, die Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

integrabel zu machen, d. h. alle möglichen Schaaren von ∞^1 Integralflächen der vorgelegten Differentialgleichung zu suchen. Mit besonderer Klarheit tritt dies in einem Scholion des vierten Capitels**) hervor, wo *Euler* sogar zu der Bedingungsgleichung

$$p\frac{\partial q}{\partial z} - q\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

gelangt, die bei *Lagrange* den Ausgangspunkt bildet. Hiermit hatte er also die Reduction auf eine lineare partielle Differentialgleichung gewonnen***). Sie war aber wohl deshalb für *Euler*

*) Petersburg, 1770. Capp. 2—6.

**) a. a. O. Seite 105.

***) An der genannten Stelle handelt es sich allerdings nur um Gleichungen von der Form $f(z, p, q) = 0$. Die dort angestellte Ueberlegung gilt aber allgemein.

belanglos, weil er sich auf Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen beschränkte, während die Bedingungsgleichung drei unabhängige Veränderliche enthält. Ueberdies war es ihm ja nicht einmal gelungen, die linearen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen allgemein zu integriren.

Es blieb *Lagrange* vorbehalten, die Tragweite der Reduction auf lineare partielle Differentialgleichungen zu erkennen. Obwohl er im Jahre 1772 noch keine Integrationstheorie für derartige Gleichungen entwickelt hatte, erblickte er schon damals in der linearen Form der *Euler*'schen Bedingungsgleichung eine Vereinfachung des Problems (vgl. die obenstehende Arbeit, S. 5). Er machte ferner die fundamentale und weit über *Euler* hinausgehende Bemerkung, dass es genügt, eine particuläre Lösung der Bedingungsgleichung zu kennen, die eine willkürliche Constante enthält. Aus den so gewonnenen ∞^2 Integralflächen der vorgelegten Differentialgleichung lässt sich, wie er zeigte, die allgemeinste derartige Fläche ableiten. Sie ist die Enveloppe einer beliebig gewählten Schaar von ∞^1 unter jenen ∞^2 Integralflächen*). Einem aufmerksamen Leser der *Euler*'schen Institutiones muss es auffallen, dass bei seinen Beispielen (mit Ausnahme der linearen) die allgemeine Lösung immer bestimmt ist durch zwei Gleichungen, von denen die eine aus der andern durch Differentiation nach einem Parameter entsteht. Merkwürdigerweise ist, soviel es scheint, *Euler* selbst dieser Umstand niemals aufgefallen. Sonst wäre ihm der erwähnte *Lagrange*'sche Satz nicht entgangen.

Lagrange hat in späteren Arbeiten durch Einführung der Bezeichnungen »vollständige, allgemeine, singuläre Lösung« seiner Theorie einen präciseren Ausdruck gegeben**).

Im Jahre 1779 entwickelte er eine vollständige Integrationstheorie für lineare partielle Differentialgleichungen in beliebig vielen Veränderlichen und führte sie auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurück. Damit war also das Problem vom Jahre 1772 erledigt. Denn die *Euler*'sche Bedingungsgleichung

---

*) *Lagrange* benutzt in späteren Arbeiten (z. B. 1774) gelegentlich diese geometrische Interpretation. Besonders ausgebildet wurde sie bekanntlich von *Monge*. (Vgl. Histoire de l'Académie des Sciences. 1784. S. 118 ff.)

**) Sur les intégrales particulières des équations différentielles. 1774. Oeuvres, Bd. IV. S. 62 ff.

liess sich jetzt auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduciren. Es sei dies hier kurz nach *Lagrange*'s »Leçons sur le calcul des fonctions« (Leçon 20) ausgeführt. Ist

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

die zu integrirende Differentialgleichung, so sind nach der *Lagrange*'schen Methode p und q als Functionen von x, y, z so zu bestimmen, dass (1) besteht und die *Euler*'sche Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}$$

erfüllt ist. Durch Differentiation von (1) nach x und z ergiebt sich:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Setzt man hieraus die Werthe von $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial z}$ in (2) ein, so kommt:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

wo man noch den Werth von q aus (1) einzusetzen hat. Nach *Lagrange*'s Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen sind nun drei unabhängige Integrale P, Q, R des simultanen Systems

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dp}{-\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z}}$$

zu bestimmen, und dann ist p durch eine Gleichung

$$f(P, Q, R) = 0$$

gegeben, wo f eine willkürliche Function ist. *Lagrange* schreibt die Gleichung in aufgelöster Form

$$(3) \qquad R = \varphi(P, Q)$$

und bemerkt dann, dass hiernach p und q von einer willkürlichen Function zweier Argumente abhängen, dass dasselbe also auch von

$$\int M(dz - p\,dx - q\,dy)$$

gelte (wo M der Multiplicator von $dz - pdx - qdy$ ist). Darin liege aber ein Widerspruch, da in der allgemeinen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen nur eine willkürliche Function eines Arguments auftreten könne. Dieses Paradoxon hat *Lagrange*, wie er gesteht, lange gequält, bis er endlich in den citirten Leçons sur le calcul des fonctions eine Aufklärung gab. Der Widerspruch ist aber, wie man mit Recht bemerkt hat*), thatsächlich nicht vorhanden. Denn wenn z. B. p in einer der Functionen P, Q vorkommt, so kann man die Gleichung (3) überhaupt nicht nach p auflösen, ohne φ zu specialisiren. Man kann also auch nicht sagen, dass p die Function φ enthalte. Sind aber P und Q frei von p, so ist (1) eine lineare Differentialgleichung.

Lagrange hätte schon 1779 die Integration der *Euler*'schen Bedingungsgleichung in der angegebenen Weise allgemein erledigen können. Aber auch in seiner Arbeit über lineare partielle Differentialgleichungen vom Jahre 1785 kommt er nicht darauf zu sprechen. Hier**) bemerkt er sogar an einer Stelle, die partielle Differentialgleichung

$$1 + Xp + Yq - \cos\omega\sqrt{1 + X^2 + Y^2}\cdot\sqrt{1 + p^2 + q^2} = 0,$$

könne durch keine bekannte Methode integrirt werden, falls nicht $\cos\omega = 0$ ist. (X, Y sind bekannte Functionen von x, y, z.) Man hat sich diese Aeusserung dadurch erklärt, dass *Lagrange* augenblicklich an seine eigene Theorie von 1772 nicht dachte.***) Ich möchte aber hinzufügen, dass auch *Monge* (vgl. a. a. O. S. 527) im Jahre 1784 noch nichts von einer allgemeinen Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränder-

*) Vergl. z. B. *Imschenetzky*, *Grunert*'s Archiv. Bd. 50.

**) Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires. Oeuvres Bd. V. S. 560.

***) Dieser Ansicht ist z. B. *Lie*, Geometrie der Berührungstransformationen. S. 518.

lichen wusste, obwohl er die Arbeiten von *Lagrange* kannte. Er sagt nämlich an jener Stelle, die Gleichung

$$bx^2(z+px-qy)^2+aby^2(z-px+qy)^2+ax^2(z+px+qy)^2=0$$

könne durch keine der bekannten Methoden integrirt werden. Auch er hatte also nicht bemerkt, dass mit der *Lagrange*'schen Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen alles erledigt war. Vielleicht hat das oben erwähnte Paradoxon *Lagrange* abgehalten auf seine Theorie von 1772 sogleich zurückzukommen. Auch musste die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen wegen ihrer grossen Allgemeinheit sein Interesse von jener doch nur speciellen Theorie ablenken.

Lagrange's nächste Nachfolger (z. B. *Charpit*) haben auf dem Wege, den er für zwei unabhängige Veränderliche eingeschlagen hatte, bei Behandlung des allgemeinen Falles Schwierigkeiten gefunden. In der That wird seine Methode für mehr als zwei unabhängige Veränderliche bereits erheblich complicirter. Versucht man für n (> 2) unabhängige Veränderliche $x_1, \ldots, x_n$ die partielle Differentialgleichung $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ dadurch zu integriren (d. h. eine vollständige Lösung von ihr zu finden), dass man auf ∞^{n-1} Arten

$$dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n = 0$$

integrabel macht, so hat man zu $F = 0$ $n-1$ Gleichungen

$$\Phi_1 = a_1, \ \ldots, \ \Phi_{n-1} = a_{n-1}$$

hinzuzufügen derart, dass für die aus diesen n Gleichungen entnommenen Werthe von $p_1, \ldots, p_n$ die erwähnte *Pfaff*'sche Gleichung integrabel wird. Man findet unter Benutzung des *Poisson*'schen Klammersymbols für die Φ die Bedingungsgleichungen

$$[F, \Phi_i] = 0, \quad [\Phi_i, \Phi_k] = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n-1),$$

welche vermöge $F = 0$ bestehen müssen. Für $n = 2$ treten die Gleichungen $[\Phi_i, \Phi_k] = 0$ gar nicht auf.

Jacobi hat später den *Euler-Lagrange*'schen Gedanken mit Erfolg wieder aufgenommen.

In einer andern Weise war schon 1814 *Pfaff* zum Ziele gelangt, indem er ein allgemeineres Problem löste. Aber seine Methode bot wegen der Reihe successiver Integrationen, die sie erfordert, bei der Anwendung auf das specielle Problem grosse und (wie *Cauchy* und *Jacobi* gezeigt haben) unnöthige Schwierigkeiten.

Im Jahre 1819 erschien die obenstehende Arbeit von *Cauchy*, in welcher dieser im Vergleich zu *Lagrange* einen wesentlich neuen Standpunkt einnimmt. Er sucht nicht mehr wie jener Schaaren von ∞^1 Integralflächen, sondern eine durch eine gegebene Curve hindurchgehende Integralfläche (für den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen). Bleiben wir der Einfachheit wegen bei diesem speciellen Falle, so beruht *Cauchy*'s Methode (in *Lie*'s Ausdrucksweise) auf folgendem Umstande:

Durch jedes Linienelement der gegebenen Curve geht ein charakteristischer Streifen*) (Charakteristik mit den Flächenelementen, die sie auf den Elementarkegeln ihrer Punkte bestimmt). Bei zwei benachbarten derartigen Streifen liegen zwei Flächenelemente (nämlich die auf der Curve) vereinigt und der Satz, auf dem *Cauchy*'s Methode beruht, sagt dann aus, dass die beiden Streifen vollständig vereinigt liegen, d. h. dass sich zu jedem Element in dem einen eins in dem andern findet, das mit ihm vereinigt liegt. Es bilden dann also die ∞^1 Streifen eine Fläche. Ueberträgt man diese geometrischen Betrachtungen auf den R_n, so liegen die Verhältnisse hier durchaus analog.

Ein strenger Beweis dafür, dass im R_3 durch jede Curve im Allgemeinen eine Integralfläche hindurchgeht und im R_n durch jede $(n-1)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit eine n-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit, ist von *Cauchy* erst 1835 gegeben und später mehrmals wiederholt worden.

Auch ist *Cauchy* (besonders im Jahre 1842) in mehreren Aufsätzen in den Comptes Rendus auf seine Theorie von 1819 zurückgekommen, indem er ihr jedesmal eine elegantere Form gab. Besonders interessant ist die Note vom 13. Juni 1842, wo *Cauchy* seine Theorie mit entsprechenden Arbeiten *Jacobi*'s und *Binet*'s vergleicht.

Lie hat durch seine Begriffe »Flächenelement, Elementverein, charakteristischer Streifen u. s. w.« die *Cauchy*'sche

---

*) Die Curve selbst darf natürlich keine Charakteristik sein. Durch jedes Linienelement der Curve geht im allgemeinen eine discrete Zahl von charakteristischen Streifen. Man wähle dann unter Berücksichtigung der Stetigkeit in jedem Punkte einen solchen.

Theorie auf dieselbe Stufe von Klarheit und Anschaulichkeit gebracht, wie seinerzeit *Monge* diejenige *Lagrange*'s.

Dabei ist es ihm auch gelungen, gewisse Einwände, die man gegen *Cauchy*'s Theorie gemacht hat, zu eliminiren. Ferner hat bei *Lie* der Integralbegriff seine wahre Allgemeinheit erlangt.*)

Hinsichtlich ausführlicherer historischer Angaben sei auf das bekannte Werk von *Mansion***) verwiesen.

---

1) *Zu Seite 3.* *Lagrange* gebraucht die Bezeichnung »différence partielle«, die schon *Lacroix* für unexact erklärt und durch »différentielle partielle« ersetzt hat (vgl. Traité élémentaire, 5. Aufl. 1837. S. 520). Daher haben wir die Uebersetzung »partielles Differential« gewählt. Ferner haben wir überall die von *Jacobi* eingeführten Symbole für partielle Ableitungen benutzt $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots\right)$.

2) *Zu Seite 4.* Betrachtet man mit *Lie* x, y, z, p, q als Bestimmungsstücke eines Flächenelements, so ordnet die Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ jedem Punkt des Raumes ∞^1 Flächenelemente zu, die einen Kegel (Elementarkegel) umhüllen. Die Gleichung $F = 0$ integriren heisst dann alle Flächen finden, die in jedem ihrer Punkte mit dem zugehörigen Elementarkegel ein Flächenelement gemein haben. *Lagrange* denkt sich nun p als Function von x, y, z gewählt und q aus der Gleichung $F = 0$ bestimmt. Er nimmt also in jedem Punkt des Raumes ein Flächenelement des zugehörigen Elementarkegels. Im Allgemeinen lassen sich diese ∞^3 Flächenelemente nicht zu ∞^1 Flächen zusammenfassen. Dies ist vielmehr nur dann möglich, wenn p so als Function von x, y, z gewählt ist, dass die *Pfaff*'sche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

---

*) Eine Differentialgleichung $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ integriren heisst bei *Lie* alle Vereine von ∞^n Elementen zu finden, die der Gleichung genügen. Diese Auffassung lässt z. B. im R_3 Punkt, Curve und Fläche als gleichberechtigte Integralgebilde erscheinen. Eine vollständige Lösung bedeutet ∞^n Vereine von ∞^n Elementen, welche alle Elemente der Gleichung $F = 0$ erschöpfen.

**) Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deutsch von *H. Maser*. Berlin 1892.

integrabel wird. Ist dies der Fall und M ein Multiplicator der linken Seite, so liefert die Gleichung

$$\int M(dz - p\,dx - q\,dy) = \text{Const.}$$

∞^1 Integralflächen. Wählt man p in allgemeinster Weise der erwähnten Bedingung gemäss, so erhält man offenbar die allgemeinste Schaar von ∞^1 Integralflächen. *Lagrange* braucht aber nur ∞^1 solche Schaaren, d. h. ∞^2 Integralflächen oder, wie er es später genannt hat, eine vollständige Lösung.

3) *Zu Seite 5.* Eine elegantere Form nimmt die *Euler*'sche Bedingungsgleichung an, wenn man das *Lagrange*'sche Verfahren mehr symmetrisch einrichtet. Zu der gegebenen Gleichung $F = 0$ werde eine andre $\Phi(x, y, z, p, q) = a$ gesucht, wo a eine willkürliche Constante ist, und man verlange, dass

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

integrabel wird, wenn man darin die aus den Gleichungen $F = 0$, $\Phi = a$ entnommenen Werthe für p und q einsetzt. Dann ergiebt sich, dass vermöge $F = 0$

$$[F, \Phi] = 0$$

sein muss. Dabei ist

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

der *Poisson*'sche Klammerausdruck von F und Φ.

4) *Zu Seite 6.* Capitel 4 enthält eine Integrationsmethode für integrable *Pfaff*'sche Gleichungen

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0\,.$$

Eine solche hat auch schon *Euler* entwickelt, und zwar ist es im Wesentlichen dieselbe wie die hier gegebene. Beide verlangen die Integration von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es werden zuerst die Schnittcurven der ∞^1 Integralflächen der *Pfaff*'schen Gleichung mit der Ebene $z = c$ (c eine unbestimmte Constante) bestimmt. Sie werden dargestellt durch eine Gleichung

$$\varphi(x, y, c) = C$$

(zusammen mit $z = c$). Nun greift man aus jeder Ebene $z = c$ eine der ∞^1 Curven heraus, setzt also $C = \psi(c)$, und sucht ψ so zu bestimmen, dass die ∞^1 Curven

$$\varphi(x, y, c) = \psi(c), \quad z = c$$

auf einer Integralfläche liegen. Dies erfordert eine zweite Integration. — Herr *Dubois-Reymond* hat gezeigt, wie man diese zweite Integration ersparen kann, indem man einen zweckmässigeren Schneidungsprocess anwendet als den durch die Ebenenschaar $z = c$. Er nimmt eine Gerade und schneidet die Integralflächen mit dem Ebenenbüschel, dessen Träger die Gerade ist. Durch eine Integration werden die Schnittcurven mit diesen Ebenen bestimmt. Dann bilden im Allgemeinen alle Schnittcurven, welche durch denselben Punkt der Geraden gehen, eine Integralfläche.

5) *Zu Seite 9 ff.* Die *Euler*'sche Integrationsmethode bestand im Grunde darin, die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}$$

in allgemeinster Weise zu erfüllen. Das Neue bei *Lagrange* ist, dass er mit einer particulären Lösung derselben auskommt, falls diese eine willkürliche Constante enthält. Er braucht aus diesem Grunde weniger Kunstgriffe als *Euler*, obwohl dieser fast alle Beispiele von *Lagrange* ebenfalls integrirt hat.

6) *Zu Seite 19.* Schon *Euler* *) kannte die von *Lagrange* gemachte Bemerkung. Er stützte sich auf die Formel

$$d(z - xp - yq) = -x\,dp - y\,dq,$$

also, wie man es ausdrücken könnte, auf die jetzt sogenannte *Legendre*'sche Berührungstransformation. Ebenso benutzt er gelegentlich die Formel

$$d(z - xp) = q\,dy - x\,dp,$$

worin eine von *Ampère* benutzte Berührungstransformation steckt.

7) *Zu Seite 22.* *Euler* war es nur gelungen, den speciellen Fall $q = Ap^n x^\lambda y^\mu u^\nu$ zu integriren.

---

*) a. a. O. Seite 91. *Euler* schreibt die zugehörigen Integralformeln.