Abhandlungen
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
4. Abhandlung

Bänderkinematik

Versuch einer Theorie der Bandverbände

von

Hans Petersen
Privatdozent der Anatomie in Heidelberg

Eingegangen am 7. Mai 1917

Mit einem Atlas von 37 Tafeln

Vorgelegt von H. Braus

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1428

Vorwort.

Nur dann ist man imstande, einen gegebenen Apparat zu begreifen, wenn man fähig ist, etwas ähnliches selbst zu konstruieren. Dieser Gedanke war für die Bänderkinematik maßgebend. Es soll darin der Versuch gemacht werden, die Prinzipien der Bandverbände deduktiv zu entwickeln, um mit diesen Prinzipien einem Verständnis des Bandteiles der tierischen Bewegungsapparate näher zu kommen. In einem Anhang ist der Versuch gemacht, die entwickelten Begriffe auch auf die gelenkartigen Verbände — Berührungspaare — auszudehnen, um so zu einer einheitlichen Auffassung des ganzen Problems zu kommen.

Hans Petersen.

I.

In einer früheren Studie habe ich unter anderen, den Gedanken zu betätigen versucht, der wohl zuerst ausdrücklich von V. v. Ebner ausgesprochen wurde, daß man in den Begriff des Skeletts der Wirbeltiere sämtliche Stütz- und Bindesubstanzen hineinzuziehen habe, daß morphologisch ein besonderer Gegensatz zwischen den einzelnen Gliedern oder Ausbildungsformen dieser Gewebegruppe nicht zu machen sei. Sie bilden das Gesamtskelett, ein architektonisches Ganzes.

Aus der im allgemeinen kontinuierlich zusammenhängenden Masse gliedern sich für den Beschauer, der sie unter dem Gesichtspunkte der Funktion, der Leistung im Lebensprozeß des Tieres betrachtet, Gebilde heraus, die man als physiologische Einheiten, Apparate, bezeichnen kann. Diese zerlegen sich weiter in physiologische Einheiten niederer Ordnung, die Konstruktionselemente. Hierunter werden dann die einzelnen Knochen Bänder und Knorpel zu verstehen sein.

Die Elemente, deren „ausgenutzte Eigenschaft", der Widerstand gegenüber deformierenden Gewalten verschiedenster Art ist, die starren Elemente, heben sich nun ein zweites Mal heraus, wie denn an ihnen auch der erste und ursprünglichste Skelettbegriff haftete. Einmal bestimmen sie einen wesentlichen Teil der Gestalt des betreffenden Körperteiles, dann aber besteht ferner das eigentliche Arbeitsglied, dasjenige, das bei der „rationaltektonischen Betrachtungsweise" (Albrecht) als der eigentliche Träger der Funktion erscheint, fast stets aus einem starren Element. Sei es nun ein Hebel zum Sprunge, eine Zangenbranche zum Beißen, ein Schlaginstrument nach Art des Spechtkopfes, fast stets ist der mit dem zu bearbeitenden Teile der Außenwelt in Berührung kommende Teil — Huf, Zahn, Schnabel in unseren Beispielen — mit einem starren Element verbunden. Diese Verbindung kann wohl eine federnde sein — Hufknorpel —, jedoch macht der Aufnahmeteil, Huf, gegen den Träger keine derartige Bewegung, daß sie für die Kinematik des ganzen Bewegungsorganes eine besondere Bedeutung hätte. Hinzu kommt noch eins. Solange die Betrachtung sich im wesentlichen nur an die Bewegungen und Beweglichkeiten der Knochen, auch noch der knorpeligen Teile zu halten braucht, handelt es sich um die Kinematik starrer Punktsysteme, oder doch als starr zu behandelnder. Es ist klar, daß dadurch die Bewegungen erst elementar behandelbar sind. Man vergleiche die Bewegungen eines Aales mit denen eines Blutegels im Wasser, oder die des menschlichen Armes mit denen des Elefantenrüssels. Beim Aal und Egel handelt es sich um fortschreitende Wellen. Vom Standpunkt der Reuleauxschen Kinematik aus betrachtet, ist jedoch der Egel ein mit Flüssigkeit gefüllter kontraktiler Schlauch, der Aal eine offene kinematische Kette starrer oder als starr behandelbarer Elemente. Noch deutlicher wird dieser Unterschied beim Arm und Elefantenrüssel. Letzterer ist wie der Egelgang aus bildsamen Elementen aufgebaut, der erstere eine offene kinematische

Kette, an der die Bewegungen der bildsamen Teile innerhalb des Kettengliedes vernachlässigt werden können.

So kommt denn die mehr physiologisch kinematisch, als morphologisch entwicklungsgeschichtlich fruchtbare Auffassung zustande, die den Körper des Menschen und der Wirbeltiere als ein von den übrigen Organen bekleidetes oder erfülltes Gerüstwerk aus starren Elementen betrachtet. Die nachgebenden oder nur dem Zuge widerstehenden Bindesubstanzen erscheinen so als Hilfsorgane oder als Füllmittel.

Von diesem Skelettbegriff, als eines Systems starrer Teile soll die folgende Betrachtung über die Theorie der Bandwirkung ihren Ausgang nehmen, wobei zunächst von einer Verbindung oder gar einer bestimmten Art derselben gänzlich abgesehen wird. Jede Art der Aneinanderfügung zweier oder mehrerer starrer Elemente nennen wir einen Verband oder einen Elementenverband.

1.

Die gewöhnliche Betrachtung, wie sie auch in Darstellungen der menschlichen Anatomie gebräuchlich ist, pflegt nun bei einem solchen System, von den Verbindungen der einzelnen Hartteile auszugehen und zwar so, daß die, eine Bewegung der einzelnen Teile ausschließenden, Synarthrosen zuerst abgehandelt werden, und daß daran anschließend die Gelenke als Bewegung ermöglichende oder zulassende Einrichtungen sich darstellen. Die Gelenke werden dann wieder so dargestellt, daß von niederen zu höheren Freiheitsgraden aufsteigend[1]), die Beweglichkeit der miteinander verbundenen Teile eine immer größere wird. Diese Ableitung erfolgt im ständigen Hinblick auf die Maschinenlehre. Hier ist allerdings die zwangläufige Führung oder die zwangläufige Verbindung von besonderer Bedeutung, oder wenn die Glieder des Elementenpaares selbst nicht zwangläufig aneinander geschlossen sind, etwa wie bei einem in einem Schlitz sich bewegenden Zylinder, so wird doch durch die Bildung einer geschlossenen kinematischen Kette nur eine einzige bestimmte Bewegung ermöglicht. Gerade Linie und Kreis sind im allgemeinen die Bahnen in denen die bewegten Punkte der einzelnen benachbarten Glieder sich gegeneinander bewegen. Kommen kompliziertere Punktbahnen und Relativbewegungen vor, so handelt es sich in der Regel entweder um die Kombination beider Bahnen, Zykloide und Schraube, oder aber durch Hintereinanderschaltung von Kreisen und geraden Linien wird erreicht, daß erst das zweite oder dritte Element gegen das Grundglied zu einer komplizierteren Bahn gelangt.

Durch das eben gesagte ist schon angedeutet, daß dem Konstrukteur diese Führungen an sich nur Mittel zum Zweck sind, um die gewünschte Bewegung der eigentlichen Werkteile auf sicherem Wege herbeizuführen, seien das nun das Papier und die Lettern einer Presse, die Spulen einer Spinnmaschine oder andere. Diese Führung geschieht wohl in den meisten Fällen durch Umschluß- oder Umhüllungspaare. Die Berührungslinien, in denen die Bewegung in den Umschlußpaaren sich vollzieht, sind Gerade, Kreise und Schraubenlinien, da nur diese Kurven die Eigenschaft haben, mit sich selbst in allen ihren Teilen zur Deckung gebracht werden zu können.

[1]) Langer-Toldt, Lehrbuch der Anatomie, 2. Aufl., 1911, S. 26, Abs. 1.

Denkt man bei Betrachtung tierischer Verbände und bei den Bewegungen, die sich in ihnen vollziehen an eine solche Maschinenkinematik, so kommt leicht der Gedanke zustande, auch etwas wie Umschlußpaare der tierischen Kinematik zugrunde legen zu wollen.

Diese unveränderte Übertragung der in dem einen Gebiet gültigen Begriffe in das andere, stößt aber schon sehr bald auf Schwierigkeiten. Die Maschinenkinematik ist Zwanglauflehre, die tierischen Verbände sind in den wenigsten Fällen zwangläufig. Hinzukommt ein zweites Moment, die Eigenschaft des Muskels als eines lebenden Organs. Man stelle sich vor, daß zwei durch ein Kugelgelenk verbundene Elemente (Fig. 1) durch einen abgestumpften Muskelkegel bewegt werden, dessen Achse durch den Gelenkmittelpunkt geht, von dem die in einem derartigen Falle wirklich vorkommenden Muskeln Ausschnitte darstellen. Dieser Muskelkegel besteht dann aus sehr vielen einzelnen Muskelfasern, so vielen, daß praktisch ein kontinuierliches stetiges System herauskommt. Selbst wenn nicht jede Faser einzeln den Impulsen des Zentralnervensystems unterworfen, sondern dies nur gruppenweise der Fall ist, wird doch die Möglichkeit der Kombination des Zusammenwirkens der einzelnen Muskelelemente nach Zahl und Spannung praktisch unendlich. So kommt ein höherer Grad der Willkürlichkeit einer solchen Bewegung, d. h. der Abhängigkeit vom Zentralnervensystem zu stande.

Willkürlich sind ja auch die Bewegungen eines Tieres in zwangläufigen Verbänden. Aber bei einem zwangläufigen Mechanismus im tierischen Körper ist die Bewegung der Elemente gegeneinander nur insofern vom Zentrum abhängig, als der Moment des Eintretens der Bewegung, die Spannungsgröße und -dauer, somit Winkelgeschwindigkeit und Exkursionsweite in Betracht kommen. Die Punktbahnen selbst, die Geometrie der Bewegung, sind durch die Anatomie des betreffenden Teiles, wie die Entwicklung ihn geliefert hatte, vollständig bestimmt, und somit, wenn auch nicht analytisch, so doch graphisch für jede Bewegung im voraus bestimmbar.

Bei nicht zwangläufigen Systemen ist auch die Punktbahn selbst variabel und abhängig vom Zentralnervensystem. Sie ist somit wohl in jedem einzelnen Fall registrierbar, aber nicht irgendwie im voraus bestimmbar.

Der Begriff des Freiheitsgrades taucht hier auf. Eine Erörterung dieses in der tierischen Bewegungslehre viel gebrauchten Begriffes möchte ich bis an den Schluß dieses Versuches aufschieben. Wir wollen versuchen, eigene etwas abweichende Wege einzuschlagen, um rückblickend, dann diese Abweichungen zu rechtfertigen.

Der Ausdruck frei soll dabei hier nur so gebraucht werden, daß er sich auf die Beweglichkeit, die Summe oder die Gesamtheit der möglichen Bewegungen eines Elementes gegen ein anderes bezieht. Der Ausdruck Beweglichkeit nimmt auf die Muskulatur keine Rücksicht, sondern nur auf die starren und bildsamen, passiv beweglichen, Konstruktionselemente. Dieser Gebrauch des Wortes Beweglichkeit ist zur Auseinanderhaltung des mechanischen und des physiologischen Anteils an dem Gebrauche der Gliedmaßen unbedingt nötig. Der Verband wird dadurch kein anderer, daß die an ihm ansetzenden Muskeln nur in beschränkter Weise wirken können, und auf die Analyse des Baues der Verbände und ihrer Wirkungsweise bei Bewegungen — Kinematik organischer Verbände — zielen wir ab, Bewegungsphysiologie ist nicht unsere Aufgabe[1]).

[1]) In O. Fischers Kinematik organ. Gelenke, besonders in seiner Behandlung der Verbände von 2 „Freiheitsgraden" ist beides nicht auseinandergehalten.

Wir unterscheiden also nur zwischen freien und zwangläufigen Verbänden. Freie sind solche mit veränderlichen, zwangläufige mit unveränderlichen Punktbahnen. Eine Bewegung als solche ist immer bestimmt. Bewegungen in zwangläufigen Verbänden hängen nur in Bezug auf Eintreten und Geschwindigkeiten, solche in freien Verbänden auch in Bezug auf die Gestalt der Punktbahnen vom Zentralnervensystem ab.

Diese Anwendung des Wortes frei ist zugleich eine spezifisch biologische. Die Herrschaft des Tieres über die Art der Bewegung seiner Glieder, die Spontaneität der tierischen Bewegungen, zeitlich und qualitativ, kommt darin zum Ausdruck. Eine Nebenbedeutung der Worte Freiheit, Möglichkeit, wird damit bewußt betont. Dieser Nebensinn entstammt der vorwissenschaftlichen Entwicklung der Sprache, einer animistischen Anschauung. Die Analogie vom eigenen Erleben, die Deutung der beobachteten, nicht zum „Ich" gehörigen Vorgänge, als solchen ähnliche, d. h. als ‚bewußte', ‚gewollte', ‚aktive', ‚willkürliche', ist der Kern dieser Anschauung. Diesen Nebenklang zur spezifisch biologischen Bedeutung auszuweiten, brauchen wir uns nicht zu scheuen. Handelt es sich doch gerade um den Fall, in dem diese Analogie ihre Berechtigung beibehält. Irgend etwas Mystisches ist damit nicht eingeführt, sondern lediglich die Tatsache zugegeben, daß bei den Bewegungen in nicht zwangläufigen Verbänden ein Teil der Bestimmungsmittel im Zentralnervensystem verschwindet, wohin wir ihnen einstweilen nicht zu folgen vermögen, oder wohin ihnen zu folgen zukünftige Aufgabe der Physiologie des Nervensystems und der Nerv-Muskelphysiologie ist, nicht mehr die Aufgabe der tierischen Mechanik. Die Entwicklung besonderer Begriffe, die auf die Kinematik tierischer Verbände besonders zugeschnitten sind, soll in den nächsten Kapiteln unsere Aufgabe sein. Sie können im allgemeinen als Erweiterung Reuleauxscher Gedankengänge gelten, Erweiterungen, die ihre Anwendung auf die freien im Tierkörper vorkommenden Verbände nötig machte.

II.

Wir haben soeben zweierlei verschiedene Objekte der Betrachtung unterschieden, einmal Bewegungen, wie sie der lebende Organismus ausführt oder wie sie der Untersucher am Gelenk-Bänderpräparat nachzuahmen versucht, wobei dann vielfach Bewegungen ausführbar sind, wie sie den vom Organismus geübten Innervationsfolgen der Muskeln nicht entsprechen. Zweitens kann die Beweglichkeit eines Elementenverbandes studiert werden, wobei dann die Analyse natürlicher und künstlicher Bewegungen ein Hilfsmittel darstellen. Bewegungsphysiologie und Kinematik tierischer Verbände sind also nur begrifflich nicht praktisch scharf getrennte Erkenntnisgebiete, ja wie wir sehen werden, läßt sich die Lehre von den Verbänden als Unterabteilung unter die Lehre von den Bewegungen bringen.

Unter Beweglichkeit verstehen wir dabei die Gesamtheit aller möglichen Bewegungen, die, ohne den Apparat zu zerstören, mit ihm ausführbar sind. Für den Untersucher besteht die Bewegung aus den Kurven, die die bewegten Punkte beschreiben, und so wird die Beweglichkeit durch den geometrischen Ort aller dieser Kurven charakterisiert. Da jedem Punkt besondere Kurven zukommen, so kommt ihm auch ein eigener geometrischer Ort zu.

Diesen geometrischen Ort für sämtliche Bahnen eines Punktes nennen wir seinen Verkehrsraum[1]). Die Beweglichkeit eines Punktes wird also durch die Untersuchung seines Verkehrsraumes bestimmt. Die Beweglichkeit eines Körpers wird durch die Verkehrsräume seiner Punkte bestimmt, und da diese nicht unabhängig voneinander sind, so genügt eine bestimmte Anzahl in jedem Falle, gerade wie eine bestimmte Anzahl von Bahnkurven für die vollständige Festlegung einer Bewegung ausreicht.

Fallen Bewegung und Verkehrsraum zusammen, so liegt ein zwangläufiger Elementenverband vor, ein Mechanismus (Reuleaux). In diesem Falle ist der Verkehrsraum jedes Punktes linear, nur eine einzige mögliche Bahnkurve ist für jeden Punkt vorhanden. Die Maschinenkinematik hat es nur mit diesem Zusammenfallen zu tun. Sie ist Zwanglauflehre. In starren Materialien sind nicht nur die arbeitenden Teile, sondern auch die Mittel zur Gestaltung ihrer Punktbahnen ausgeführt. Der Bewegungsantrieb ist daran überhaupt nicht beteiligt. Die Unterscheidung zwischen Bewegung und Beweglichkeit liegt ihr fern. Organe nach Art der Bänder kennt sie kaum. Gerade weil hier die Eigentümlichkeit der tierischen Elementenverbände sich am reinsten zeigt, liefert die Wirksamkeit der Bänder Anknüpfungspunkte für besondere Begriffe.

Betrachten wir nun zunächst die Bewegungen. In vier Akte gliedert sich der auf sie bezügliche Erkenntnisvorgang. Wir nennen sie: Registrierung der Bewegung, vollständige Beschreibung mit den einfachsten Mitteln, Aufsuchen ihrer Bestimmungsmittel und der Untersuchung ihrer Bedeutung für den Organismus.

Es ist nicht Aufgabe dieses Versuchs, die Methodik der Aufnahme tierischer Bewegungen ausführlich zu besprechen. Alle Methoden laufen im wesentlichen darauf hinaus, die sukzessiven Lagen von Punkten aufzuzeichnen, deren Lage zueinander und im Element, auf dessen Bewegung bei der Beobachtung abgezielt wird, fest und bekannt sind. Daraus lassen sich die Punktbahnen konstruieren. Wird die Bewegung etwa dreier Punkte verfolgt, so entsprechen jedem Zeitpunkt drei Punktlagen. Diese drei einander zugeordneten Punkte der drei Bahnen wollen wir isochrone Punkte nennen. Sie werden bei der Momentbildmethode, wie wir die Aufzeichnung diskreter Lagen bei der kontinuierlichen Bewegung nennen wollen, unmittelbar gewonnen. Zeichnen sich die Bahnen direkt auf, so müssen sie durch Konstruktion gewonnen werden. Denken wir an eine ebene Bewegung, die durch zwei korrespondierende Punktbahnen a und b aufgezeichnet ist, so können nur die Punkte der einen Bahn a einem Punkt der anderen Bahn isochron sein, die auf dem Kreise mit dem Abstand der beiden Punkte um den Punkt der zweiten liegen. Da das im allgemeinen zwei sind, so wird unter diesen eine Wahl, bestimmt durch das sonst über die Bewegung bekannte, zu treffen sein.

Der Aufzeichnung der Bewegung müssen zwei Auswahlakte vorhergehen. Die Wahl der aufzuzeichnenden Punkte und die Auswahl der aufzuzeichnenden Bewegung.

Die Auswahl der Punkte ist zunächst ein technisches Problem. Es kommen von vornherein nur wenige Punkte in Betracht, die die oben erwähnten Eigenschaften — feste und bekannte Lage zum Element — haben, und dabei der Beobachtung während der Bewegung zugänglich sind. Es liegt dabei aber auch ein theoretisches Problem vor. Ein biologisches ist das insofern, als die Untersuchung auf irgend eine Weise zum Leben des Tieres in Beziehung steht. Ein Beinknochen ist nicht irgend ein beliebiges Knochen-

[1]) Nach Langer loc. cit.

stück, sondern seine Bewegung ist Gang, Sprung, Schwimmen, und es erhebt sich die Frage, welches die für das Verständnis dieser Bewegungen wichtigsten Punkte sind. Arbeitskanten und Arbeitsflächen, Schwerpunkt, Trägheitsachsen kommen da in Betracht. Diese Wahl ist aber auch ein kinematisches Problem, da nicht alle Punkte in gleicher Weise tauglich sind, die Bewegung anschaulich und übersichtlich darzustellen. Diese Frage fällt zum großen Teil zusammen mit dem zweiten Akt der Bewegungsbetrachtung, ihrer Beschreibung.

Wir hatten zuvor noch ein zweites Auswahlproblem zu beachten, die Auswahl der Bewegung, die registriert werden, beschrieben und nach Bestimmungsmitteln und Wirkung — Ursache und Zweck — weiter betrachtet werden soll. Eine speziell biologische Fragestellung liegt hier vor.

Fallen Verkehrsraum und Bewegung zusammen, d. h. ist die Bewegung zwangläufig, so ist diese Frage müßig. Wir haben dann aber zugleich den Spezialfall vor uns, in dem die Bewegung am toten Objekt ermittelt werden kann. Die Maschinenkinematik kennt nur diesen einen Fall, weshalb alle Bewegungen in ihr konstruktiv ermittelt werden können.

Ist der Elementenverband nicht zwangläufig, so kann in der Regel das Tier unendlich viele verschiedene Bewegungen damit machen. Welche von diesen sollen nun untersucht werden? Die Entscheidung kann nur im Hinblick auf das lebende Tier getroffen werden.

Die Bewegung muß eine besondere Bedeutung haben, wichtig für das Leben des Tieres sein. Das ist aber nicht das einzige. Sie muß bei bestimmten Verrichtungen stets in derselben Weise vor sich gehen. Beides fällt in der Regel zusammen. Als erstes Beispiel sei der Gang des Menschen genannt. Eine Untersuchung über „den Gang", ja ein naturwissenschaftlicher Begriff: der Gang, ist nicht möglich, wenn diese Bewegungskombination nicht stets in derselben Weise auftritt. Die vielen einzelnen Glieder, die beim Gehen stets in derselben, oder doch in sehr ähnlicher Weise sich bewegen, können auch in ganz anderen Kombinationen, Bahnen beschreiben. Es gibt aber eine „typische" Gehbewegung. Damit haben wir den wichtigen Begriff der typischen Bewegungen erreicht. Einige Beispiele werden ihn noch besser erläutern. Den Gang haben wir zuerst angeführt. Daß auch noch andere Bewegungen mit den Beinen möglich sind, zeigt am besten, daß der Gang erlernt wird. Das hängt wieder eng mit der Verwendung nicht zwangläufiger Verbände im Organismus zusammen. Eine Maschine braucht ihre Bewegungen nicht zu erlernen, jede Kraft setzt sie in dieselbe Bewegung. Weitere Beispiele sind die verschiedenen Sprungbewegungen, Laufen, Schwimmen, Fliegen der Tiere. Sind sie angeboren, so redet man von Instinkten, das heißt angeborenen Innervationsreihen. Man vergleiche damit Bewegungen wie das Klavierspiel. Die Bahnkurven der Finger, der Hand, des Unterarms, gegen eine feste Linie im Rumpf sind so verschieden, wie die Stücke, die die Person spielt, und bei demselben Stück, aber verschiedenen Personen, unterscheiden sie sich in derselben Weise wie deren Spiel. Beim Automaten haben wir wieder den Zwanglauf vor uns, eine Walze spielt nur dasselbe Stück und das immer gleich.

Weitere Beispiele bieten die Kieferbewegungen, die Bewegung des menschlichen Unterkiefers, der beim Öffnen und Schließen sein Köpfchen auf das Tuberkulum und zurück wandern läßt, vor allem die von Lubosch studierten Kaubewegungen der Säugetiere, der Wiederkäuer im besonderen, von der jede Art oder Gattung ihre besondere typische Bewegung hat.

An diese Bemerkungen lassen sich zwei weitere Gedankenreihen anknüpfen. Die erste Reihe ist allgemein erkenntnistheoretischer Natur, und fällt mit der RICKERTschen Unterscheidung historischer und naturwissenschaftlicher Begriffsbildung[1]) zusammen, und des historischen und naturwissenschaftlichen Interesses an der empirischen Wirklichkeit. Nur insofern, als ein Allgemeinbegriff überhaupt gebildet werden kann, der Gang, das Springen, das Laufen, das Schwimmen, das Fliegen, das Kauen usw., haben wir ein naturwissenschaftliches Interesse an den Bewegungen. Diese Möglichkeit der Zusammenfassung vieler empirisch wirklicher Bewegungen unter einen Allgemeinbegriff ist eben nur bei den typischen Bewegungen möglich. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß kein naturwissenschaftliches Interesse vorliegt, wenn es sich um die Eigenart einer zeitlich und individuell bestimmten Bewegung handelt. Man denke an Fälle der gerichtlichen Medizin, an die Unterscheidung von Mord und Selbstmord bei einer vorliegenden Verletzung, an einen Verdacht der Selbstverstümmelung, bei dem die Frage auftaucht, ob der betreffende Mensch überhaupt eine Bewegung machen kann, die eine Verletzung nach Art der vorliegenden hervorzubringen imstande ist. Hier wird ein historischer Fall untersucht, kein naturwissenschaftlicher Allgemeinbegriff wird mit Inhalt erfüllt, der für die Fälle der empirischen Wirklichkeit gilt.

Die zweite Gedankenreihe ist wieder eine biologische. Der Begriff der Zweckmäßigkeit, der Anpassung tritt zu dem der typischen Bewegung in Beziehung. Wenn das Kind Gehen lernt, so besteht das darin, daß es nach und nach seine Bewegungen immer zweckmäßiger für den Erfolg der Ortsbewegung in aufrechter Haltung gestaltet. Die Anpassung der Bewegungen an den Zweck der Ortsbewegung ist dann erfolgt, wenn die nun ständig geübte Bewegungsfolge gewissen Maximum- und Minimumbedingungen genügt, wenn etwa einem Maximum an Ortsveränderung ein Minimum an Energieverbrauch entspricht.

Es sind also bei den typischen Bewegungen gewisse Maximum- und Minimumeigenschaften zu erwarten.

Nun betrachtet man mit Recht den Tierkörper als ein zweckmäßiges Gebilde. Vom Begriff der organisierten ist der des Zweckmäßigen nicht zu trennen[2]). Als besonders zweckmäßig bezeichnen wir ein Organ aber dann, wenn wieder Maximum und Minimumeigenschaften verwirklicht sind. Setzen wir nun den Elementenverband, das Bewegungsorgan in Beziehung zur Bewegung, so können wir die Zweckmäßigkeit von zwei Seiten aus suchen, sozusagen von vorn und hinten. Einmal handelt es sich um eine Vervollständigung der Sätze des vorigen Absatzes. Es wird mit dem vorhandenen Apparat ein Maximum an Leistung bei einem Minimum an Energieverbrauch durch das Lernen erzielt, die Bewegungskombination solange variiert, bis das Maximumverhältnis erreicht ist. Dann erscheint die Bewegung unter der Bezeichnung: zweckmäßig. Oder aber der Apparat wird als Anpassung an die Bewegung betrachtet. Dann erscheint der Elementenverband unter der Bezeichnung geeignet oder zweckmäßig, wenn die mit ihm mögliche Bewegung Maximum und Minimumeigenschaften aufweist[3]). Beide Betrachtungen

[1]) RICKERT, Grenzen der naturw. Begriffsbildung II. Aufl.
[2]) RICKERT, loc. cit. S. 406.
[3]) Vgl. dazu DRIESCH, Unterscheidung dynamischer und statischer Zweckmäßigkeit.

sind gleich richtig, da die zwischen Apparat und Bewegung bestehende Funktion umkehrbar ist. Historisch ausgedrückt heißt das, sie haben sich simultan entwickelt, Bewegungsorgan und typische Bewegung.

Wir wollen diese Betrachtungen hier abbrechen. Es war uns nur darum zu tun, die Verknüpfung der entwickelten Begriffe und Sätze mit anderen Problemen und somit ihre Verwendbarkeit darzutun.

Der zweite Akt des Studiums einer tierischen Bewegung ist ihre Beschreibung. In der medizinischen Physik von O. FISCHER findet sich dieses Kapitel auf S. 44 unter der Bezeichnung der kinematischen Analyse der empirisch bestimmten Bewegung, ausführlich behandelt. Hier sollen deshalb nur einige Bemerkungen und Hervorhebungen gemacht werden.

Um eine Bewegung darzustellen, bedarf es eines Bezugsgliedes, relativ zu dem die Bewegung von statten geht. Die Wahl des Bezugsgliedes ist gleichbedeutend mit der des Koordinatensystems, in das die Bewegung eingezeichnet werden soll. Dieses System kann sich selbst in einem zweiten bewegen und so fort. Alle diese Bewegungen sind voneinander unabhängig. Eine solche Relativbewegung soll nun beschrieben werden, d. h. so dargestellt, daß die Bewegung anschaulich wird. Die Beschreibung soll mit den geringsten Mitteln vor sich gehen (MACH, KIRCHHOFF), und alle gewünschten Größen, Geschwindigkeit, Beschleunigung sollen sich daraus entnehmen lassen. Diese Forderungen sind in den seltensten Fällen auf einmal zu erfüllen. Auch die Axoide leisten das nur theoretisch. Konstruiert man z. B. die Pole für eine ebene Bewegung, so müssen die Normalen auf deren Schnittpunkt der Pol liegt, einen erheblichen Winkel miteinander bilden, um den Pol noch auf das Zeichenpapier zu bekommen. Bei sehr spitzen Winkeln wird auch die Fehlergrenze sehr groß. REULEAUX führt für den Fall, daß die Polbahnen unendlich ferne Punkte besitzen, reduzierte Polbahnen ein. Vor allem die schrotenden Regelflächen der beliebigen nicht ebenen Bewegung sind wohl eine theoretische Lösung, aber keine Lösung, um sich die empirisch vorkommenden Bewegungen anschaulich und handlich zu machen. Allein bei den Polkegeln der Zentralbewegung ist man sicher, daß die verschiedenen Schnittpunkte nicht zu sehr ins Weite wandern[1]).

Um eine ebene Bewegung zu beschreiben, sind die Bahnkurven zweier Punkte vonnöten. Aus diesen lassen sich die Geschwindigkeiten dann entnehmen, wenn der Zeitabstand der isochronen Punktpaare bekannt ist. Werden die Koordinaten jedes Punktes als Funktion der Zeit dargestellt, so kommen „Wegkurven" (O. FISCHER) zustande, aus denen sich die Geschwindigkeiten direkt entnehmen lassen. Geschwindigkeitskurven und Hodographen lassen sich weiter daraus ableiten. Uns ist es hier darum zu tun, zu zeigen, daß in der Praxis (O. FISCHER) viele Mittel der Darstellung tatsächlich angewandt werden. Aus den aufeinanderfolgenden Lagen lassen sich die Pole, Polpolygone und Polbahnen konstruieren. Die Vertauschbarkeit von Grund- und Bewegungsglied in der Darstellung läßt sich durch zwei aufeinander abwälzende Polpolygone besonders anschaulich demonstrieren. Durch die Kenntnis der Momentanachsen wird ferner die momentane Bewegungsrichtung jedes Punktes des bewegten Elementes als Tangente an den Kreis um den Pol leicht konstruierbar.

[1]) Dabei ist jedoch wieder die Schwierigkeit der graphischen Darstellung, in der Zeichnung in Betracht zu ziehen.

Eine Zykloide ist die Bahn eines Punktes der mit einem Kreise fest verbunden ist, der wiederum auf einem anderen oder einer Geraden sich abwälzt. Werden diese beiden sich aufeinander wälzenden Gebilde zu beliebigen Kurven, so haben wir eben den Fall der Polbahnen vor uns, mit deren Hilfe also jede Punktbahn als eine allgemeine Zykloide erscheint. Eine gemeine, Hypo- oder Epizykloide lassen sich aber noch in anderer Weise entwickeln. Ein Punkt wandere auf einem Kreise und um ihn drehe sich ein anderer Punkt. Beide sind fest und unverrückbar mit einander verbunden. Je nach dem Verhältnis von Wander- und Drehgeschwindigkeit erhält man dann die verschiedenen Zykloiden. Läßt man nun den Wanderpunkt eine beliebige Bahn beschreiben, und den sich drehenden Strahl eine beliebige Geschwindigkeit mit oder entgegen der Wanderrichtung einnehmen, so kommt man zu einer anderen Darstellung einer beliebigen ebenen Bewegung, die ebenfalls eine Darstellung der Punktbahnen als allgemeine Zykloiden ist. Bei dieser Darstellung ist die eine der beiden Punktbahnen, von denen wir ausgingen, die Bahn des Wanderpunktes. Die Bewegung wird dabei in Translation und Rotation zerlegt. Sehr oft wird das der Schwerpunkt sein[1]). Bei Bewegungen in Verbänden kann oft ein anderer Punkt mit Vorteil verwandt werden. Hier sei ein Beispiel angeführt. Gegeben sei ein Gelenk aus Ebene und Kugel (Fig. 2). Es ist ein Gelenk von fünf Freiheitsgraden. Nehmen wir das mit der ebenen Gelenkfläche als Bezugs-, das mit der kugeligen Gelenkfläche als Bewegungsglied, so läßt sich jede Bewegung in diesem Gelenk darstellen, als Bewegung um einen Wanderpunkt. Als Wanderpunkt bietet sich am einfachsten der Kugelmittelpunkt, der beim Schluß des Elementenpaares in einer Ebene sich bewegt, die im Abstand des Kugelhalbmessers der ebenen Gelenkfläche parallel läuft. Derartige Flächen ideeller Natur werden wir später als Stützflächen des betreffenden Punktes bezeichnen.

Mit diesem Beispiel sind wir von der ebenen auf beliebige dreidimensionale Bewegungen übergegangen, die wir dabei als Zentralbewegung, das heißt Bewegung auf Kugeloberflächen, und Wanderung des Zentrums auffassen. Wir haben dabei die Vorstellung des Wanderpunktes festgehalten. Die beiden anderen fest untereinander und mit dem Wanderpunkt verbundenen Punkte können dabei beliebig gewählt werden. Drei Punkte sind ja stets zur Analyse einer nicht ebenen Bewegung nötig. Wir werden im Zusammenhang mit der Erörterung des Begriffs der Grundbewegungen auf diese Dinge zurückkommen.

Im Beispiel war die Bewegung des Wanderpunktes eine ebene Kurve. Bewegt sich die Kugel des Gelenks auf einer krummen Fläche, so geht auch die ebene Stützfläche des Kugelmittelpunktes in eine dieser Parallele im Abstand des Kugelhalbmessers befindliche über. In dieser Fläche liegen dann die Bahnen des Wanderpunktes. So kommt man ganz von selber zu einer Geometrie auf krummen Flächen, die Ebene als Stützfläche ist dann nur ein Spezialfall.

O. Fischer geht in der Kinematik tierischer Gelenke von den Bewegungen gewisser Punkte der Gelenkflächen aus, den Spuren. Er zerlegt die Bewegung zugleich in Gleiten, Rollen und Kreiseln. Vielleicht ist das doch nicht in jedem Falle das anschaulichste. Man vergleiche für ein Gelenk wie das angeführte — Kugel und Ebene — die Vorstellung

[1]) Die bekannten Beziehungen (Schwerpunktssatz usw.) brauchen hier nicht ausführlich erörtert zu werden, besonders da wir nur Bewegungsgeometrie treiben.

des Wanderpunktes und der Zentralbewegung um ihn, mit der Forderung, sich Bewegungen in einem solchen Gelenk durch zwei aufeinander abrolllende aber dabei mit oder gegen die Rollbewegung aufeinander gleitende krumme Linien klarzumachen, wobei man vor allem sich die Lage des Kugelmittelpunktes zu jedem Kurvenelement genau vorstellen muß, um die jeweilige Lage des Bewegungsgliedes zu erkennen.

Damit wollen wir die Bemerkungen über die kinematike Analyse einer empirisch ermittelten Bewegung schließen. Von der Massenverteilung in dem starren Punktsystem war dabei nicht die Rede und ebenso wenig von den angreifenden Kräften, die die Bewegung zustande gebracht haben. Soll die kinematische Analyse zur Kinetik erweitert werden, so werden diese Größen eingeführt und behandelt.

Das ist jedoch nicht nötig, wenn wir uns auf diejenigen Faktoren der Gestaltung einer Bewegung beschränken, die sich an die REULEAUXschen Begriffe der Stützung und des Schlusses im Verbande anschließen bzw. sich aus ihnen entwickeln lassen. Mittels dieses Begriffes lassen sich Teile derjenigen Fragen behandeln, die wie die nach dem Zustandekommen der empirisch ermittelten Gestalt der Punktbahnen genannt haben. Hier kommen wir, soweit unsere Zwecke in Frage kommen, mit rein geometrischen Begriffen aus.

Die Frage nach den Bestimmungsmitteln der Punktbahnen wird vollständig durch die Analyse der bewegenden Kräfte beantwortet. Hierbei spielt denn auch die Behandlung der Massenverteilung in den bewegten Gliedern eine Rolle. Nun brauchen wir für unsere Zwecke jedoch die zeitlichen Verhältnisse, die Geschwindigkeiten nicht, wir haben es auf Verbände und nicht auf wirkliche Bewegungen abgesehen. Wir können unsere Ableitung daher verkürzen, wenn wir auch des Zusammenhangs halber auf altbekannte Dinge eingehen müssen.

Wir betrachten den einfachsten Fall, daß alle Kräfte an einem Punkte angreifen, dessen Bahn wir festgestellt hatten. Wir führen den Begriff der Führung ein und sagen, der Punkt wurde durch die Kräfte geführt. Zweierlei kommt da in Betracht, die Muskeln einerseits, der Verband, Gelenkflächen und Bänder andererseits. Sie wirken bei der Gestaltung der Punktbahn zusammen.

Gegen den hier angeführten Führungsbegriff ist man nun versucht einzuwenden, daß zwei verschiedene Dinge darin zusammengeworfen werden. Die eine Bewegung hervorrufende Kraft und die Hemmung der Bewegung erscheinen darin als dasselbe, als Führung. Die Muskeln, wird man sagen, bewegen doch das Glied und hemmen nicht seine Bewegung, wie das bei den Bändern der Fall ist. Nun verhält es sich wohl in der Tat so, daß die Bänder bisher wohl immer daraufhin angeschaut worden sind, in welcher Weise sie das Ende einer Bewegung bedingen oder wieso sie eine Bewegung überhaupt unmöglich machen. Bei den Gelenken ist der Standpunkt schon ein anderer; sie sind Diarthrosen, bewegliche Aneinanderschaltung der Skelettelemente. Tatsächlich ist das Verhältnis aber so, daß falls überhaupt ein Bewegungsantrieb in den Verband hineinkommt, etwa durch die Kontraktion eines beliebigen Muskels, alle die Verbindungen durch Gelenke und Bänder sowie die anderen sich ebenfalls kontrahierenden Muskeln modifizierend auf die Bewegung einwirken, die durch einen der beteiligten Muskeln allein hervorgerufen werden würde.

Wir betrachten eine Figur (3). Die Bewegung eines kleinen Körpers P, in der Richtung $\mathfrak{A}$, komme durch drei Muskeln zustande, und zwar so, daß zwei davon keine

Komponente in der Richtung der tatsächlich erzielten Bewegung haben. Wir nennen die Muskeln 1, 2 und 3, ihre Ursprünge F_1, F_2 und F_3. 2 und 3 schalten dann bestimmte Komponenten der durch 1 erzeugten Bewegung aus. Stehen 1 und 2 spitzwinklig zueinander (Fig. 4), so wird auch Muskel 2 bei einer Bewegung, die der Richtung PF_1 naheliegt, sich verkürzen, eine Komponente in der Richtung $\mathfrak{A}$ haben. Ein prinzipieller Unterschied besteht aber zwischen beiden Fällen nicht, wir können uns vielmehr beliebig viele Übergänge und Variationen denken. Beide Figuren kann man betrachten, als die Projektion eines durch ein Kugelgelenk hergestellten zweigliedrigen Verbandes (Fig. 5). Die Muskeln 1, 2 und 3 inserieren an derselben Stelle P. Die Komponentenausschaltung wird dann noch klarer. Von jedem Muskelzug wird die Komponente senkrecht gegen das Gelenk ausgeschaltet, für die Tangentialkomponenten R_1 und R_2 gelten dann die vorhergehenden Figuren.

Es liegen die bekannten Verhältnisse der Summierung von Vektoren[1]) vor. Der Muskelzug ist ein solcher Vektor, eine gerichtete Größe. Das Resultat des Zusammenwirkens der Muskeln ist also eine Summe, in die jeder Summand in prinzipiell gleicher Weise eingeht. Wir brauchen deshalb zwischen bewegenden und die Bewegung abändernden Muskeln nicht zu unterscheiden. Spannung und Zugrichtung eines jeden kommt in derselben Weise, nämlich als Summand zur Geltung.

An diese Vektorensumme können wir nun die Wirkung der Bänder und Gelenke in gleicher Weise, als Summanden anfügen. Die Figuren 6 und 7 sollen das verdeutlichen. P sei in Fig. 6 wieder ein kleiner Körper, von so geringem Gewicht und so geringer Ausdehnung, daß wir diese, im Verhältnis zu den angreifenden Vektoren, vernachlässigen können. Er ruhe auf einer Fläche auf, so daß er für einen in der Richtung $\mathfrak{A}$ angreifenden Vektor nur nach P_1 verschieblich ist. Zerlegen wir in der bekannten Weise $\mathfrak{A}$ in zwei zueinander normale Komponenten, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}$, so kommt nur $\mathfrak{R}$ zur Wirkung. Ich muß also zu $\mathfrak{A}$ den Vektor $-\mathfrak{C}$ addieren. $-\mathfrak{C}$ ist aber der Widerstand, den $\mathfrak{A}$ in der Fläche, auf der P bei der Bewegung entlang gleitet, hervorruft. Diesen Widerstand kann ich also in die übrige Vektorensumme, die auf P wirkt, einführen. Ist P ein kleines Stück einer Gelenkfläche, $\mathfrak{A}$ die Summe der auf dieses wirkenden Kräfte, die schraffierte Fläche die andere Fläche des betreffenden Gelenks, so wird der Einfluß, den die Gelenkverbindung auf die Bewegung des Stückchens P hat, durch einen Vektor dargestellt.

Die Gleichartigkeit dieses Vektors mit den übrigen sollen die folgenden Figuren noch weiter veranschaulichen. Fügen wir (Fig. 7) zu dem Vektor $\mathfrak{A}$ einen zweiten $\mathfrak{B}$, so hat die Resultierende die Richtung $P\,P_1$, wenn $B \cos \beta = A \cos \alpha$ ist, d. h. $\mathfrak{B}$ eine Komponente normal zu $P\,P_1$ hat, die $\mathfrak{C}$ gleich ist aber entgegengesetztes Vorzeichen hat, also mit dem Widerstandsvektor der Fläche im Falle der Fig. 6 zusammenfällt. Fassen wir die beiden Figuren 6 und 7 wieder als die Projektion eines Kugelgelenksystems auf (Fig. 8 und 9), an dem die Muskeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wirken, so wird wieder deutlich, daß die Richtung $\mathfrak{R}$, durch einen zweiten Muskel von entsprechender Spannung oder durch eine Einrichtung, die wie ein Schleifbogen S wirkt, erzielt werden kann. In jedem Falle handelt es sich, da wir nur die Gestalt der Punktbahnen, nicht die Geschwindigkeit an jedem Bahnpunkte betrachtet haben, um die Richtung und relative Größe des Vektoren zueinander, nicht um die Größe der Vektorensumme. Das Moment ist in

[1]) Vektor = gerichtete Größe, Kraft, Geschwindigkeit.

Fig. 8 natürlich größer als in Fig. 9, hat aber dieselbe Richtung, auf die allein wir bisher abzielten.

Damit haben wir alle Führungsmittel unter einen Gesichtspunkt gebracht, den der Vektorenerzeuger. Da uns diese hier als Organe nur soweit angehen, als Vektoren durch ihre Wirksamkeit entstehen, so können wir sie direkt mit denen von ihnen erzeugten Vektoren identifizieren, und sagen die Führungsmittel sind Vektoren.

Für jedes Element der Punktbahn gilt dann eine bestimmte Vektorenkombination, die Richtung des Bahnelements ds, ist dann die Richtung der Vektorensumme, die Größe dieser Summe ist die Geschwindigkeit in dem betreffenden Bahnelement. Jede Vektorensumme geht dann wieder in die das neue Bahnelement bestimmende Vektorensumme ein.

Wenn wir beide Gruppen der Bestimmungsmittel, Muskeln auf der einen und Bänder und Gelenke auf der anderen unter dem Begriff der Führungsmittel zusammenfassen, so bleibt trotzdem ein großer Unterschied in ihrer Wirkungsweise bestehen. Wir können diesen Unterschied zunächst als den aktiver und passiver Vektoren bezeichnen. Das nimmt Bezug auf das Biologische des Sachverhaltes. Der Muskel erzeugt die Spannung selbst, das ist gerade seine wesentliche Lebenstätigkeit. Ein Band verhält sich jedoch so, daß sich nur dann ein Gegenzug in ihm entwickelt, ein Vektor, wenn ein Muskel an ihm zieht. Es kommt noch mancherlei hinzu.

Um uns das klar zu machen, denken wir wieder an einen kleinen in der Ebene bewegten Körper P, der von drei Muskeln bewegt wird (Fig. 10). Wir wollen hier noch hinzufügen, daß wir diese als Elemente, als Art der Muskelfasern betrachten, jedenfalls von ihrer Zusammensetzung und eigenen Maße absehen. Sie seien um ihren Fußpunkt frei drehbar, sodaß sie nach jeder Richtung gegen diesen einen Zug ausüben können. Wir wollen sie Elementarmuskeln nennen, gerade wie wir uns nachher ein Elementarband ableiten werden. Das sind Idealgebilde, um die Betrachtung zu vereinfachen.

Innerhalb der Kontraktionsgrenzen der drei Muskeln 1, 2, 3, kann dann der Punkt in jeder ebenen Kurve geführt werden. Die Variabilität der Vektorenkombination ist für jede Lage, die P einnehmen kann, unendlich groß. Die Richtung zwar jedes der drei Vektoren ist für jede Lage von P bestimmt, seine Größe, die Spannung des Elementarmuskels ist variabel. So kann in jeder Lage von P jede Vektorensumme herauskommen. Besteht die Muskulatur, die P bewegt aus 1, 2, 3, so ist die Führung in beliebiger ebener Bahn deren spezifische Lebensleistung. Nicht nur für die Kontraktion gilt die beliebige Spannung, sondern auch für die Verlängerung eines jeden Muskelelements, die nicht mit einem Spannungsabfall verbunden zu sein braucht. Man denke an die Innervation der Antagonisten bei jeder Bewegung, die der Extensoren bei der Beugung und umgekehrt. Bei langsamen Bewegungen ohne erheblichen äußeren Widerstand wird das ohne weiteres deutlich. Solange einer der drei Muskeln als Bestimmungsmittel an der Bahn von P mitwirkt, solange er führend, steuernd an der jeweiligen Vektorenkombination Anteil hat, wirkt er als lebendes Gebilde. Sein Tod würde den Ausfall jedes gegen seinen Ansatzpunkt gerichteten Vektors bedeuten. Wir nennen deshalb die Führung durch Muskeln lebende Führung, diese selbst Mittel lebender Führung, die durch sie erzeugten Vektoren lebende Vektoren. Die lebenden Vektoren können wir als Felder einzeichnen, und zwar als Strahlenbüschel um den Fußpunkt jedes Muskelelementes, mit der Richtung gegen diesen. Von diesen Strahlen gilt jeweils nur einer, nämlich der, auf dem P liegt. Das ganze Feld nennen wir deshalb ein virtuelles Feld lebender Vektoren. Die Größe des jeweiligen — aktuellen — Vektors hängt von ihm selbst ab, vom Muskel, jenseits dieses vom Zentralnervensystem, weshalb eben wir die Bezeichnung lebend, für die Muskelwirkung gewählt haben.

Für die übrigen Führungsmittel, Bänder und Gelenke, ergibt sich dann die Bezeichnung, Mittel toter Führung. Das hat, denke ich, noch eine andere Berechtigung als die des bloßen Wortgegensatzes. Von der Passivität dieser Führungsmittel hatten wir schon geredet. Zieht an einem Band ein Muskel, so ist der einzuzeichnende Gegenvektor fast gleich dem des Muskelvektors, da das Sehnengewebe zu den widerstehenden Geweben gehört, eine sehr geringe Ausdehnung bei Zug zeigt. Wirken zwei Muskeln gegeneinander, so sind die Spannungen in ihnen variabel, der mit der geringeren wird in die Länge gezogen. Die Wirkung eines Bandes kann man nicht unmittelbar als dessen Lebenstätigkeit bezeichnen. Schon die Problemstellung der Physiologie der Stütz- und Bindesubstanzen weist darauf hin. Das zugfeste Gebilde eines Bandes ist die kollagene Faser, nicht der zelluläre Bestandteil, die Sehnenzellen. Ob diese Fasern aber ein geformtes Sekret (BIEDERMANN) nach Art der Kieselspikula der Schwämme etwa, also totes Material sind oder Gebilde, die ein von der Zelle mehr oder minder unabhängiges Leben führen, ist eines ihrer Probleme. Jedenfalls kann in der Kinematik eines tierischen Elementenverbandes ein Band, eine Knochenrinne, eine Gelenkpfanne nicht nur durch ein totes Gebilde ersetzt gedacht werden, sondern auch zeitweilig de facto durch ein solches, etwa ein Band durch Seidenfäden, vertreten werden.

So ist denn die Vorstellung des Lebens mit der der Muskeltätigkeit aufs engste verknüpft, ja da es sich um die willkürliche Muskulatur handelt, ist sie sogar eine der Haupttatsachen des eigenen Lebensgefühls, oder des eigenen Lebendigseins. Ihre Tätigkeit ist ein physiologisches, ein biologisches Problem, höchstens die Prinzipien und Folgen ihrer Einordnung in den Elementenverband in irgend einem speziellen Falle, fällt in unsere tierische Kinematik. Ganz anders die Mittel toter Führung, sie bieten uns in ihrer Entstehung und Erhaltung ein speziell biologisches Problem, ihr Anteil an der Gestaltung der Punktbahnen dagegen ist eigentlich das Problem der dritten Frage unserer Kinematik, der nach den Bahnbestimmungsmitteln, die wir somit für uns auf die nach der Wirkung der Mittel toter Führung eingeschränkt haben. Es ließe sich noch mancherlei über die Unterschiede lebender und toter Führung sagen. Wir glauben jedoch, daß das Begriffspaar, lebend und tot, in dieser Beziehung, ganz unmittelbar durch die Mannigfaltigkeit der damit verbundenen weiteren Vorstellungen, diesen Gegensatz genügend und anschaulich ausdrückt.

Denken wir uns einen jetzt beliebigen Punkt eines menschlichen Gliedes, z. B. einen Punkt der Kuppe meines linken Zeigefingers. Den Rumpf denke ich fest und starr. Frage ich nun nach der Beweglichkeit dieses Punktes, so kann ich das auch so formulieren, daß ich frage, was alles kann ich damit berühren. Diese Fragestellung erläutert LANGER[1]) durch die Einführung des Begriffes des Verkehrsraumes. Diesen Begriff wollen wir wieder ausbauen. Jede Bahn dieses Punktes muß also in seinem Verkehrs-

[1]) Lehrbuch der Anatomie.

raum verlaufen. Der Verkehrsraum eines Punktes ist ein geometrischer Ort relativ zu einem Bezugssystem. Was bestimmt nun dessen Grenzen?

Wir betrachten zur Beantwortung dieser Frage den von drei Elementarmuskeln bewegten kleinen Körper P (Fig. 10). Wir wählen der Übersichtlichkeit halber wieder ein ebenes System, eine kurze Überlegung zeigt, daß alle daran entwickelten Begriffe und Beziehungen für ein räumliches System in derselben Weise gelten. Unsere Zeichnung kann man auch als die Projektion eines räumlichen Systems auf eine Ebene betrachten.

In diese Figur führen wir nun ein Band ein, und zwar, in derselben Weise, wie wir das bei Betrachtung der Muskeln getan haben, konstruieren wir ein ideales Band. Das heißt, wir vernachlässigen die Dickenausdehnung des empirischen Bandes, erweitern dessen Biegsamkeit zu einer vollständigen und betrachten es als gegen Zug vollständig unnachgiebig, dabei um seine beiden Ansatzpunkte vollständig beweglich. Ein Band ist also ein lineares Gebilde, das mit dem einen Ende, dem Fußpunkt am Grundglied, mit dem anderen am Bewegungsglied sich befestigt, und zwar an dem Punkt P, dessen Bewegungen wir betrachten. Für diesen Punkt grenzt dann das Band einen Verkehrsraum ab, eine Kugel mit dem Fußpunkt F1 als Mittelpunkt und der Länge des Bandes l als Radius. Ohne das Band zu zerstören kann P deren Oberfläche nicht passieren. Die Grenze des Verkehrsraumes für P in der Papierebene ist dann der Schnitt dieser Kugel mit der Papierebene, ein Kreis um den ebenfalls in dieser Ebene liegenden Fußpunkt F1 mit der Länge l. Der Kreis ist schraffiert gezeichnet. Das Band sei zurzeit nicht gespannt. Nun sehen wir sofort, daß das Band, solange die drei Muskeln P sich innerhalb des schraffierten Bezirks bewegen, dieses ohne jeden Einfluß auf die Bewegung ist; sie wird allein durch die Muskeln 1, 2, 3 bewirkt, durch lebende Führung. Das wird anders, wenn P an der Peripherie des Kreises anlangt. Über diese kann P nicht hinaus, kann nicht den schraffierten Flächenraum verlassen. Nur in dieser Peripherielinie kommt aber auch das Band als Führungsmittel in Betracht. Zieht (Fig. 11) der Muskel 2, P in der Richtung F1—F_2 gegen die Grenze des Verkehrsraumes, so entwickelt sich dort ein Gegenvektor. Dieser Vektor schaltet eine Komponente von 2 aus, und zwar die, die dem Radius des Kreises entspricht, die auf dem Flächenelement der Verkehrsraumgrenze senkrecht steht. In unserer Fig. 11 wird der ganze Vektor 2 ausgeschaltet. Ist die Lage wie in Fig. 12, so läuft P in der Kreisperipherie entlang, auf allen Bogenelementen stehen tote virtuelle Vektoren senkrecht, die in jedem Punkte den entgegengesetzten lebenden Vektor ausschalten.

Die eben entwickelten Verhältnisse gelten auch für Gelenkflächen. Die Figuren können als Projektionen eines Kugelgelenksystems gelten, dessen Aufriß Fig. 11 darstellen soll. Statt des ganzen Muskelvektors tritt nur dessen Tangentialkomponente in Erscheinung; die gegen den Gelenkmittelpunkt gerichtete wird wieder durch einen Gegenvektor ausgeglichen, der in der gegen den Gelenkmittelpunkt zu liegenden Verkehrsraumgrenze des Ansatzpunktes erscheint, und der eben durch die Gelenkverbindung bewirkt wird. Diese Grenzfläche ist eine Kugeloberfläche um den Gelenkmittelpunkt ganz ähnlich wie beim Bande, nur die Richtung der toten Vektoren ist nach außen. Im einzelnen soll das hier nicht weiter erörtert werden, wie die Grenzen der durch Gelenke hervorgerufenen Verkehrsräume zustande kommen und wie sie beschaffen sind. Uns fehlen auch zur ausführlichen Erörterung noch eine Reihe von Begriffen, die in den nächsten Kapiteln entwickelt werden sollen. Es kam nur darauf an, zu zeigen, daß für P gegen den Gelenkmittelpunkt eine Verkehrsraumgrenzfläche liegt, daß die auf ihren Flächenelementen senkrecht stehenden virtuellen toten Vektoren die entsprechenden entgegengesetzten Komponenten der lebenden Vektoren abfangen, daß das die führende Wirkung des Gelenks ist, und daß falls überhaupt das Gelenk als führendes Gebilde in Betracht kommt — beim Schluß des Gelenks — die Bahn von P in dieser Verkehrsraumgrenzfläche verläuft, gerade wie wir das oben für das Band als Führungsmittel ausführlicher nachgewiesen hatten.

Das eben Gesagte können wir in den Satz zusammenfassen: Die Mittel toter Führung wirken nur in den Grenzflächen der durch sie bedingten Verkehrsräume auf einen Punkt ein, diese Flächen sind Flächen toter Führung.

Den Zustand eines Verbandes, in dem die Mittel toter Führung wirken, wobei also der Verband als solcher erst zur Wirkung kommt, nennen wir den Schluß des Verbandes. Das Schließen besteht also darin, Punkte in ihre Flächen toter Führung, oder wie wir vom nächsten Kapitel ab sagen werden, Stützflächen hineinzuführen. Durch die Bedingung des Schlusses erhalten also im allgemeinen bestimmte Punkte des Bewegungsgliedes Verkehrsflächen. Die Analyse eines Verbandes, die Charakterisierung der Beweglichkeit des einen Gliedes gegen das andere bei geschlossenem Verbande besteht darin, die Stützflächen für bestimmte Punkte, die besonderen Punkte, aufzusuchen. Die besonderen Punkte setzen sich zu einer Figur zusammen, die im einfachsten Falle aus einem Dreieck besteht. Die Aufsuchung solcher Figuren, und die geometrischen Örter ihrer Punkte ist also unsere Aufgabe, zunächst bei Bandverbänden. Im Anschluß daran soll dann eine Anwendung auf gelenkartige Verbindungen, Berührungspaare, wie wir sie nennen wollen, versucht werden.

Die Figuren 14 und 15 faßten die eben erörterten Begriffe in einer Figur zusammen, als Führungsmittel ist ein Band gedacht.

Darin besteht also die Lösung der Frage nach den Mitteln toter Führung und des Anteils an der Bahngestaltung, den sie haben, eine Frage, die mit der nach der Beweglichkeit von Verbänden zusammenfällt.

Zunächst liegt uns noch die Aufgabe ob, den Begriff des Verkehrsraumes und seiner Grenzen, die wir als Flächen toter Führung erkannt hatten, mit weiterem Inhalt zu erfüllen. Unsere Untersuchung geht damit in eine solche der Beweglichkeit über. Hier können wir nicht umhin, uns mit dem Begriff der Stützung und der Reuleuxschen Geometrie der Stützung eingehend zu beschäftigen. Diesem Begriffe wird also das nächste Kapitel gewidmet sein.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob und inwiefern Muskeln, Mittel lebender Führung, einen Verkehrsraum abgrenzen können. Denken wir uns P, wie in der Fig. 1, mit nur einem Muskel verbunden, etwa mit 1. (Fig. 16). Dann kämen für die Verkehrsraumgrenze nur Minimal- und Maximallänge in Betracht. Durch die Minimallänge wird rund um den Fußpunkt ein Kreis- bzw. — eine Kugel — abgegrenzt. Diese Kugeloberfläche kann P aber sehr wohl von außen nach innen überschreiten; das ist aber der Sinn des Ausdrucks Verkehrsraum, daß der Punkt auf den sich dieser Verkehrsraum bezieht, nicht aus ihm heraus kann, ohne daß eine Zerstörung des vorliegenden Elementenverbandes eintritt, er ist gleichsam eingesperrt in ihn. Das alles trifft für die untere Grenze der Wirksamkeit der Mittel lebender Führung nicht zu. Es bleibt also der durch die Maximallänge umschriebene Raum — auch ein Kreis bzw. eine Kugel. Dehnen wir in Fig. 16 den Muskel maximal aus, so wird allerdings eine Verkehrsraumgrenze bestimmt, über die P nicht hinaus kann, ohne daß wir den Muskel zerreißen. An dieser Grenze wirkt aber der Muskel nicht mehr als solcher, als Erzeuger variabler, aktiver, kurz: lebender Vektoren, sondern genau wie ein Band, das heißt als Mittel toter Führung. Nun ist von vornherein nicht wahrscheinlich, daß dieser Fall, der maximalen Dehnung mit gleichzeitiger Ausnutzung als Mittel toter Führung jemals irgendwo in einem Tierkörper vorkommt. Aber selbst wenn wir davon absehen, gilt der Satz: Die Verkehrsraumgrenzen werden durch die Mittel toter Führung bestimmt. Innerhalb der Grenzen seines Verkehrsraums wird der Punkt lebend geführt, erst in den Grenzflächen, beim Eintritt in diese tritt tote Führung auf.

III.

Unter Stützung versteht REULEAUX die Verhinderung der Bewegung eines Körpers. Er unterscheidet Stützung gegen Verschiebung, und Stützung gegen Verdrehung. Wir betrachten zunächst die Stützung gegen Verschiebung.

REULEAUX geht von dem Fall aus, daß zwei ebene Figuren sich punktförmig berühren. Von der ruhend gedachten Figur kommt alsdann nur dieser eine Punkt in Betracht, der Stützpunkt, von der anderen, beweglich gedachten Figur der Umriß. Wir nennen die Figur A, den Stützpunkt P (Fig. 17). Dann ist A nach allen den Richtungen unverschieblich, die eine Komponente normal zu der in P an A gelegten Tangente haben. Diese Tangente ist die Stütztangente T, die Normale in P die Stütznormale N. Ein durch P gehendes Strahlenbüschel wird also durch die Tangente in zwei gleiche Teile geteilt, in solche Strahlen, nach denen eine Verschiebung stattfinden kann, und solche nach denen eine Verschiebung nicht möglich ist. Wir rechnen dabei den Strahl von P nach außen zu. Diese Hälften heißen Stützungs- und Verschiebungsfeld. Die Felder sind also Winkel, ein Stützpunkt erzeugt somit ein Stützungsfeld von 2 R. Die Tangente, die beide Felder teilt, gehört selbst zum Verschiebungsfeld, da in ihr nach beiden Seiten vom Stützpunkt aus Verschiebungen der Figur möglich sind. Bei der Verschiebung der Figur machen alle ihre Punkte parallele Bewegungen. Man kann also, da es sich um Richtungen handelt, die Stützungslinien, Tangente und Normale, an jeden Punkt des Körpers übertragen, indem man sie mit sich selbst parallel verschiebt (Fig. 18). Jeder Teil der Figur ist durch den einen Stützpunkt in derselben Weise gegen Verschiebung gestützt. Bei der Kombination der Wirkung zweier Stützpunkte machen wir von dieser Eigenschaft der Übertragbarkeit der Stützungs- und Verschiebungsfelder Gebrauch. (Fig. 19). Verlegt man die Stütztangente T_1 nach einem beliebigen Punkte P′, und die andere Stütztangente T_2 ebenfalls nach P′, so wird das Strahlenbüschel durch P′ in vier Teile geteilt. In Teil 1 fällt Stützungsfeld auf Stützungsfeld, in 2 und 3 Stützungsfeld auf Verschiebungsfeld, alle drei Teile sind also Stützungsfelder. Nur wo Verschiebungsfeld mit Verschiebungsfeld sich deckt, bleibt die Verschieblichkeit bestehen (Teil 4). Dabei ist zu beachten, daß die dieses Verschiebungsfeld begrenzenden Tangentenabschnitte mit zum Verschiebungsfeld gehören. Man sieht, daß ein dritter Stützpunkt die Figur dann unverschieblich macht, wenn sein Stützungsfeld bei der Übertragung nach P′ das noch übrig gebliebene Verschiebungsfeld deckt. REULEAUX untersucht dann weiter, wieviel Punkte ausreichen, um eine Figur in der Ebene vollständig gegen

Verschiebung zu stützen, und kommt zu dem Schluß, der aus dem bisher Entwickelten ohne weiteres verständlich ist, daß „das Minimum der Stützpunkte, welche eine ebene Figur unverschieblich machen können, drei ist, und, wenn die Stützrichtungen — die Stütznormalen — zweier derselben 180° einschließen, vier Stützpunkte." Fig. 20 stellt den letzteren Fall dar.

Ein Stützungsfeld gegen Verschiebung ist ein Winkel. Um bei der Stützung gegen Verdrehung zu dem Begriff des Feldes zu gelangen, muß man etwas anderes darunter verstehen. Ein Drehungsfeld ist dann der geometrische Ort aller der Punkte, um die eine Drehung möglich ist. Hierbei sind zwei entgegengesetzte Drehungen um jeden Punkt denkbar. Sie werden als Rechts- und Linksdrehung so unterschieden, daß die Drehung im Sinne des Uhrzeigers als Rechtsdrehung, die gegen den Uhrzeiger als Linksdrehung bezeichnet wird.

Reuleaux beginnt wieder mit einem Stützpunkt. Stütztangente und Stütznormale werden eingezeichnet (Fig. 21). Wir denken uns auf dem Schnittpunkt dieser beiden Linien stehend, und den Blick nach der Figur gerichtet; dann liegen auf der rechten Seite der Normalen alle die Punkte, um die die Figur rechts herum gedreht werden kann, auf der linken alle die, um die nur Linksdrehung möglich ist. Die Normale teilt also die ganze Ebene in der die Figur sich befindet in ein Rechts- und ein Linksdrehungsfeld. Die Normale selbst gehört beiden Feldern an, nur daß auf der der Figur abgewandten Seite die mögliche Drehung unendlich klein ist. Die Tangente bleibt hierbei ohne Bedeutung, da die beiden Drehungsfelder sich über sie hinweg erstrecken. Die beiden Drehungsfelder gelten ohne weiteres für das ganze Punktsystem, das die Figur ausmacht. Sie liegen fest zum Stützungspunkt, ändern sich aber natürlich sofort, wenn ein anderer Teil des Umfanges der Figur mit anderen Krümmungsverhältnissen mit dem Stützpunkt in Kontakt tritt.

Wir betrachten die Wirkung zweier Punkte (Fig. 22). Wir zeichnen nur die Stütznormalen ein und zerlegen durch diese die Ebene, in der die Figur sich bewegen soll, von jedem Stützpunkt aus in ein Rechts- und Linksdrehungsfeld. Für die Punkte des Rechtsdrehungsfeldes ist die Figur gegen Linksdrehung, für die des Linksdrehungsfeldes gegen Rechtsdrehung gestützt. Wo sich also Rechts- und Linksdrehungsfeld decken, gilt keine der beiden Drehungsarten. Die Ebene unserer Zeichnung wird also durch die beiden Normalen in vier Teile geteilt. Zwei davon sind gleichnamig, zwei ungleichnamig gedeckt. Es bleibt also ein Rechts- und ein Linksdrehungsfeld übrig. Sie haben einen Punkt gemeinsam, den Schnittpunkt der beiden Normalen, um ihn ist Drehung in jedem Sinne möglich.

Um nun vollständige Stützung gegen Verdrehung zu erzielen, müssen die übriggebliebenen Drehungsfelder ungleichnamig, der Normalenschnittpunkt zweimal, durch ein Rechts- und ein Linksdrehungsfeld gedeckt werden. Das ist durch einen weiteren Punkt nicht möglich. Das Maximum der Stützung gegen Verdrehung durch drei Punkte wird erzielt, wenn alle drei Stütznormalen durch einen Punkt gehen und mindestens zwei Winkel von je mehr als einem Rechten miteinander bilden. Vollständige Stützung ist erst durch vier Stützpunkte zu erzielen, und zwar dann, wenn jeder Normalenschnittpunkt doppelt gedeckt ist.

Ein Beispiel für den Fall vollständiger Stützung gegen Verschiebung und gegen Verdrehung bis auf einen Drehpunkt, kann jeder Umdrehungskörper in seiner Hohlform bieten. Der Querschnitt eines solchen Elementenpaares ist ein Kreis, der in einem anderen läuft (Fig. 23 und 24). Alle Punkte des umschließenden Kreises sind Stützpunkte. Alle Stütznormalen schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte der beiden Kreise. Die Kontur des Hohlkörpers kann auf drei Punkte reduziert werden. Stützen sie ihn gegen Verschiebung, so stützen sie ihn auch gegen Verdrehung bis auf die Drehung um den einen Punkt. Die Fig. 25 und 26 erläutern diese Verhältnisse.

Unsere früher entwickelten Sätze über tote Führung sind eine Erweiterung der soeben in ihren Hauptzügen dargestellten REULEAUXschen Stützungsgeometrie. Um aber die letztere anwenden zu können auf die freie, d. h. nicht zwangläufigen Verbände des Tierkörpers, mußten wir sie — gleichsam zu biologischen Begriffen — umformen. Wir müssen die Erweiterung noch fortführen, wenn wir den Begriff der Stützung vollständig mit unsern bisherigen Entwicklungen vereinigen wollen. Wir machen dies, indem wir die Betrachtungen REULEAUXs umkehren. Dadurch fallen aber die REULEAUXschen Sätze für uns keineswegs fort, sondern beide Gedankengänge bleiben für uns von gleichgroßer Bedeutung[1].

Statt des Umrisses der gestützten Figur und des einen Punktes des stützenden Gebildes, Stützpunkt und gestützter Fläche, gehen wir von Stützfläche und gestütztem Punkt aus. Die Stützfläche gehört dem Bezugsglied, der Punkt dem Bewegungsglied an, es ist ein bewegter Punkt, wie wir ihn früher unseren Betrachtungen zugrunde gelegt hatten. Während wir aber dabei von seiner Verbindung zu einem starren Punktsystem absahen, können wir diese jetzt beibehalten.

Nun sehen wir sofort, daß die Stützfläche gleichbedeutend ist mit der Verkehrsraumgrenze unserer bisherigen Betrachtungen. Diese Stützfläche braucht also kein materielles Gebilde zu sein. Der durch das Band für seinen Ansatzpunkt abgeschlossene kugelförmige Raum hat eine ideelle Begrenzung. Diese, den Verkehrsraum nach außen abschließende, ideelle Kugelfläche wirkt aber nichtsdestoweniger für den Ansatzpunkt genau so, als ob sie aus irgend einem vollständig widerstandsfähigen Material wäre. Sie hat die Eigenschaft, nur für diesen einen Punkt zu gelten, nur für ihn vorhanden zu sein, während alle anderen Punkte des Elementes frei und ungehindert durch sie hindurchtreten können. Wir kommen also zu dem Begriffe der Verkehrsraumgrenze eines Punktes als einer ideellen Stützfläche.

Zur Erörterung der Stützung eines Punktes durch eine Fläche legen wir wieder die Verhältnisse in der Ebene zugrunde. Dann beschränkt sich die Stützfläche in der Zeichnung auf ihren Schnitt mit der Papierebene die Stützkurve (Fig. 27). Der Verkehrsraum von P liege in der Konkavität der gezeichneten Kurve. Die Stütznormale ist dann die Senkrechte auf dem Kurvenelement. Sie fällt geometrisch mit dem toten Vektor zusammen, den ein auf den Punkt wirkender lebender Vektor hervorruft, wenn er eine Komponente normal zur Stützkurve hat, also normal zur Stütztangente im Punkte P. Zeichnen wir wieder ein Strahlenbüschel ein, so trennt die Tangente TT' die Strahlen in Bewegungsstrahlen, d. h. solche nach deren Richtung eine Verschiebung möglich ist, und Stützungsstrahlen, d. h. solche nach deren Richtung der Punkt nicht

[1] An der REULEAUXschen Stützungsgeometrie ist die Kinematik der organischen Verbände, soweit ich sehe, bisher vorbeigegangen.

beweglich, sondern gestützt ist. Die Beweglichkeit des Punktes nach der Richtung eines Strahles kann man als Verschiebung und Verdrehung auffassen, wenn man nur auf die Möglichkeit, den unendlich kleinen Anfangsteil der Punktbahn reflektiert und zunächst von den anderen Punkten des starren Systems absieht. Die zu jedem Strahl gehörigen Drehpunkte liegen auf dem zu ihm normalen Strahl. Und zwar kann die Bewegung in Richtung jeden Strahles als Rechts- und als Linksdrehung gelten, je nachdem man in der Figur auf den rechts oder links von ihm gelegenen Teil des zu ihm in P normalen Strahles als Ort des Drehpunktes reflektiert. Fig. 28 soll dies Verhältnis veranschaulichen. Solange wir nur einen Punkt auf seine Beweglichkeit untersuchen, können wir also von der Unterscheidung von Verschiebung und Verdrehung absehen.

Das Wesen eines Verbandes besteht also für uns darin, daß für die Punkte des Bewegungsgliedes ideelle Stützflächen vorhanden sind. Sie sind das Bindemittel des Verbandes. In einfachen Fällen sind die Stützflächen zum Bezugsgliede fest. Wir denken uns dann dieses umhüllt von Flächen, deren jede für einen Punkt des Bewegungsgliedes die Bedeutung einer Stützfläche oder Verkehrsraumgrenze hat. In komplizierteren Fällen muß eine Beweglichkeit dieser Flächen gegen das Grundglied angenommen werden. Dabei können die Vektoren auf diesen Flächen verschieden stehen; sie können dem Grundglied zu-, oder von ihm abgerichtet sein. Greifen wir dafür auf die schon betrachteten Beispiele zurück.

Für die durch ein Band erzeugte Stützfläche stehen die Stützvektoren gegen das Grundglied, nach innen, wie wir sagen können; die Stützfläche hindert den Punkt, sich von dem Grundglied zu entfernen. Für einen aus Ebene und Kugel bestehenden Verband besteht für den Mittelpunkt dieser Kugel ebenfalls eine ideelle Stützfläche. Diese aber hindert ihn, sich dem Grundglied zu nähern, die Stützvektoren stehen vom Grundglied ab, nach außen.

Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß es auch Stützflächen für Punkte gibt, auf denen die Stützvektoren nach beiden Seiten stehen. Die Stützfläche wirkt dann doppelt, ist doppelseitig. Der Verkehrsraum des Punktes ist dann auf diese eine Fläche zusammengeschrumpft, aus der er sich vom Grundglied weder entfernen noch sich ihm nähern kann, ohne daß der Verband, wenigstens teilweise zerstört wird. Diese Verhältnisse führen uns zu einem anderen Begriffe Reuleaux, den wir bereits kurz genannt hatten.

Wenn wir in den folgenden Kapiteln von der Beweglichkeit des Gliedes bestimmter Verbände gegeneinander handeln, so denken wir uns dabei den Verband in einen solchen Zustand versetzt, in den die Mittel toter Führung, die den Verband darstellen, auch zur Wirkung gelangen. Das ist der Fall, wenn Punkte des Bewegungsgliedes in Stützflächen sich bewegen. Sind diese Flächen nur einseitig, stehen die Vektoren nur noch der einen Seite, so müssen wir uns diesen Zustand erst hergestellt denken. Wir haben dann das vor uns, was in der Kinematik Reuleaux mit dem Schluß der Elemente gemeint ist. Wir wollen das Wort beibehalten. Seine Bedeutung ist bei Reuleaux etwas enger gefaßt, indem flächen- und linienhafter Kontakt der Elemente in materiellen Stützflächen darunter verstanden wird. Wir nehmen also eine Erweiterung des Reuleauxschen Begriffes vor, und nennen Schluß den Zustand eines Elementenverbandes, in dem das Bewegungsglied mit einem oder mehreren Punkten in deren Verkehrsraumgrenze sich bewegt, so daß die Mittel toter Führung zum mindesten teilweise in Wirkung treten.

Nur diesen Zustand des Schlusses können wir unserer Untersuchung zugrunde legen. Dieser kann in verschiedener Weise, durch einen oder viele Punkte erfolgen, während der Bewegung in derselben Weise erhalten bleiben, oder auf andere Punkte übergehen. Dieser Übergang ist wieder in der mannigfachsten Variation denkbar. Es wird schon hier sichtbar, daß aus dem Verhalten des Schlusses sich die Grundlage für die Klassifikation der Verbände nach der Beweglichkeit ergeben wird.

Im IV. Kapitel seiner theoretischen Kinematik handelt REULEAUX von der Schließung der Eelementenpaare durch sensible Kräfte. Dieser Schließung stellt er eine vollständige durch Stützung des einen Elements durch das andere gegenüber, so daß „jeder der beiden Körper vermöge seiner Widerstandsfähigkeit und der ihm verliehenen Form den anderen zwangläufig umhüllt“, und daß „jeder Störung der beabsichtigten Relativbewegung der beiden Körper seitens einwirkender sensibler Kräfte durch latente Kräfte begegenet wird.“ Den Schluß durch sensible Kräfte nennt er Kraftschluß. Unter Kraftschluß zweier Elemente versteht er den Schluß durch Schwerkraft, Federn und durch den Bewegungsantrieb. Unsere toten und lebenden Vektoren können als eine Umbildung dieser Gedanken gelten. Statt der sensiblen Kräfte nehmen wir unsere lebenden, statt der latenten unsere toten Vektoren.

Bei den Gelenken des menschlichen Körpers wird der Schluß nicht durch die Form der Gelenkflächen bewirkt, wohl aber verschiedentlich durch tote Vektoren, z. B. an den Fingergelenken durch Bänder, am Hüftgelenk durch den Luftdruck. Letzterer würde unter die REULEAUXschen sensiblen Kräfte fallen, ist jedoch nicht unter unsere lebenden Vektoren zu begreifen. Ein Beispiel eines Umschlußpaares, bei dem jeder Punkt nur durch die Form des Gelenkes in seiner Stützfläche gehalten wird, bietet das Kiefergelenk der Marder. Ohne den Kiefer vorn zu durchtrennen, läßt er sich nicht aus der Pfanne hervorziehen. Hier haben wir doppelseitige Stützflächen der Punkte des Bewegungsgliedes vor uns, dasselbe ist bei den Fingergelenken der Fall, nur daß hier Bänder und Gelenkflächen zusammenwirken.

Für die kinematische Analyse ist es jedoch von geringer Bedeutung, ob der Verband ein offener ist oder ein dauernd geschlossener, d. h. ob der Schluß ohne Zerstörung der Führungsmittel aufgehoben werden kann oder nicht, denn wir müssen den Zustand des Schlusses selbstverständlich unserer Untersuchung zugrunde legen, damit überhaupt eine beantwortbare Fragestellung nach der Beweglichkeit der beiden Glieder gegeneinander zustande kommen kann.

IV.

Unter einem idealen Elementarbande haben wir in einem der früheren Kapitel ein zugfestes Gebilde verstanden, das bei Zugbelastung sich nicht verlängert, vollständig biegsam, dabei um seinen Ansatz und Ursprungspunkt vollständig beweglich ist, und dessen Dickenausdehnung wir vernachlässigten. Die punktförmige Anheftung an beiden Seiten und die zu vernachlässigende Dicke charakterisieren unser Idealgebilde als ein Element, aus dem wir uns die empirischen Bänder zusammengesetzt denken können, und das wir unserer Untersuchung über die Bandwirkung zugrunde legen.

Man mag dabei an ein Bündel von kollagenen Fibrillen denken, obgleich hier das Element empirisch weniger ausgeprägt ist, als beim Muskel, dessen Element, die Muskel-faser auch die physiologische Einheit darstellt. Jeder Muskel ist ein System solcher Elementarmuskeln[1]). Sind Insertions- und Ursprungsflächen klein, so können die für die Elemente abgeleiteten und geltenden Grundsätze ohne großen Fehler angewandt werden. Für lineare und flächenhafte Ursprungs- und Ansatzverhältnisse sind besondere Ableitungen über die Wirkung von Systemen der Elementargebilde notwendig. Dies zum Teil für die Bänder durchzuführen, soll eine Aufgabe späterer Kapitel sein.

Hier ist zunächst die Wirkung des Elements zu behandeln. Und zwar soll dieses als einziges Führungsmittel auftreten, es handelt sich also um die Untersuchung reiner Bandverbände. Der erste Verband wäre der, bei dem die Verbindung von Grund- und Bewegungsglied durch ein einziges Elementarband hergestellt ist. Weiter wären Verbände mit zwei und mehr Bändern zu behandeln.

Wir setzen gleich eine bestimmte Nomenklatur fest. P sollen die Punkte des Bewegungsgliedes, F die des Grundgliedes heißen. Besondere Punkte jedes Gliedes, an denen Bänder ansetzen oder entspringen — alle unmittelbar geschlossenen Punkte, wie wir sie später nennen werden — werden mit tiefen Zahlenindizes versehen, P_1, P_2, F_1 oder F_2. Beliebige Punkte bekommen hohe Strichelchenindizes, P', P'', F' usw. Ist nur je ein besonderer Punkt vorhanden, so heißt er P oder F. Bewegt sich der Punkt so behält er seine Bezeichnung bei, bekommt aber noch einen Lageindex, also P'^{a} heißt P' in der neuen Lage a, P_{1p} ist die Projektion des Punktes P_1 usw.

Ist der Fußpunkt des Bandes F, der Ansatzpunkt P so heißt unser Einbandverband FP-Verband. Das ist der einfachste Bandverband, den wir zunächst behandeln (Fig. 29).

Die Beweglichkeit des einen Gliedes gegen das andere charakterisiert sich durch die geometrischen Örter besonderer und beliebiger Punkte unter bestimmten Bedingungen. Die erste Bedingung ist der Schluß des Verbandes. Der Schluß ist nur auf eine Art möglich, nämlich dadurch, daß ich das Band l spanne, den Ansatzpunkt P in seine Verkehrsraumgrenze eintreten lasse. Nur unter dieser Bedingung kann von einer Beweglichkeit des Verbandes die Rede sein, da andernfalls die Bandwirkung, das Auftreten toter Vektoren beim Auftreten irgend einer bewegenden Kraft ausgeschaltet ist. Wir erinnern uns dabei an das im 1. Kapitel über Gelenke und Verbände im allgemeinen Gesagte, nämlich daß sie nicht Einrichtungen zum Ermöglichen, sondern zum Regeln von Bewegungen sind. Diese Regelung ist eine Einschränkung, die durch den Reuleauxschen Begriff der Stützung näher erfaßt und genauer präzisiert wurde.

Der Verkehrsraum des Punktes P ist eine Kugel, dessen Grenze ist also eine Kugelfläche. Sie ist in bezug auf das Grundglied fest und wird durch ein in diesem festes Koordinatensystem näher bestimmt (Fig. 30). Ihr Durchmesser ist gleich der Länge des Bandes l.

Läuft der Punkt P in seiner Verkehrsraumgrenze, so ist das System geschlossen, an ihm greift das Band an, mit dem Aufheben dieses Schlusses ist jeder Schluß überhaupt aufgehoben, wir nennen den Punkt P deshalb einen unmittelbar geschlossenen Punkt. Sein Verkehrsraum wird für den Schluß zu einer Verkehrsfläche, er hat dann also eine flächenhafte Beweglichkeit.

[1]) Das heißt, die Gesamtwirkung des Systems ist nicht eine Summe sondern ein Integral. Es ist bei dieser Muskelwirkung im wesentlichen an Muskelmomente gedacht.

Nun können aber auch für jeden anderen Punkt, P′ oder P″, des Bewegungsgliedes Verkehrsraumgrenzen bestimmt werden und die Punkte können bei bestimmter Lage dieses Gliedes längere oder kürzere Strecken dieser Flächen durchlaufen. Wird jedoch ihr Schluß aufgehoben, so ändert sich an der Art des Schlusses des Verbandes nichts. Wir wollen diese Punkte mittelbar geschlossene Punkte nennen.

Konstruieren wir diese Flächen, so sind es Kugelflächen, die außerhalb der Verkehrsfläche des Punktes P liegen, denselben Mittelpunkt F und den Halbmesser FP+PP′ oder FP+PP″ haben (Fig. 31). Diese Grenze ist die äußere Verkehrsraumgrenze, die P′ nicht nach außen verlassen kann, ohne daß der Verband zerstört wird. Eine innere Fläche, die Kugeloberfläche mit dem Radius FP–PP′ kann P′ nicht nach innen verlassen, ohne daß der Schluß aufgehoben wird. Die Figur 31 zeigt bei 1 eine Stellung, bei der P′ sich nicht in seiner Verkehrsraumgrenze befindet, 2 die Stellung, bei der das für die äußere, bei 3 die, bei der das für die innere Grenze der Fall ist. Beide Grenzen knüpfen sich je an eine Bedingung, die äußere — gleich jeder äußeren Verkehrsraumgrenze überhaupt — an die Bedingung des unzerstörten Verbandes, die innere an die des erhaltenen Schlusses. Zwischen diesen Flächen können sich die Punkte P′ usw. in beliebiger Bahn bewegen.

Beide Flächen sind Stützflächen. Die Stützvektoren stehen senkrecht auf ihrem Flächenelement, das heißt radial. Die Vektoren der äußeren haben die Richtung nach innen. Der Punkt befindet sich in derselben Lage, wie der Schwerpunkt eines Körpers, der sich im stabilen Gleichgewicht befindet. Greift an ihm ein Verschiebungsvektor an, der eine Komponente in Richtung des Stützvektors hat, so bleibt der Punkt in seiner Verkehrsraumgrenze (Fig. 32a). In Fig. 32b ist ein an einem Zylindergelenk aufgehängtes starres Pendel als Vergleich gezeichnet. Befindet sich nun P′ in der inneren Verkehrsraumgrenze, so ist er gegen Verschiebung nach innen gestützt nicht durch das Band, sondern durch die den Schluß aufrechterhaltende Gewalt. Ein durch das gespannte Band hervorgerufener Vektor verhindert das Verlassen der Stützfläche, wenn eine verschiebende Gewalt genau in der Bandrichtung einwirkt (Fig. 33a, Vektor 1). Hat der Verschiebungsvektor eine Komponente senkrecht zum gespannten Band (Fig. 33a, Vektor 2) so verläßt P′ die innere Verkehrsraumgrenze. Welche Bahn P′ beschreibt, hängt dabei von der Verteilung der übrigen einwirkenden Kräfte ab, insbesondere davon, wie die Bedingungen für die Verschieblichkeit von P in seiner Verkehrsfläche sind. Unter der Kräfteverteilung ist dann auch die Massenverteilung im Bewegungsgliede verstanden. Innerhalb seiner inneren Verkehrsraumgrenze befindet sich der Punkt P′ in einer Lage, die sich mit der Lage des Schwerpunktes eines im labilen Gleichgewicht befindlichen Körpers vergleichen läßt (Fig. 33b). Auch das Stützungsverhältnis zweier Körper mit großer und kleiner Unterstützungsfläche läßt sich zum Vergleich heranziehen (Fig. 32c und 33c). Wir können das so ausdrücken, daß für einen beliebigen Punkt P′ dessen innere Verkehrsraumgrenze eine labile, die äußere eine stabile Stützfläche darstellt. Alle äußeren Stützflächen sind stabile Stützflächen, mit ihnen die Verkehrsfläche des unmittelbar geschlossenen Punktes P.

Damit sind die Stützverhältnisse beim Schluß ausreichend erörtert. Wir fassen sie zusammen: Der Schluß des FP-Verbandes ist punkthaft, der unmittelbar geschlossene Punkt hat eine Kugelfläche als Verkehrsfläche, alle anderen Punkte haben dreidimensionale Verkehrsräume. Es ist nur eine Art des Schlusses möglich. Einem solchen Verbande geben wir die Bezeichnung 2, 3, 3. Diese kommt folgendermaßen zustande. Durch ein Dreieck ist hier das Bewegungsglied bestimmt. Die Beweglichkeit des Dreiecks wird durch die Verkehrsräume seiner Ecken bestimmt. Der unmittelbar geschlossene Punkt bildet die eine Ecke; dann kommen die Ecken je ein-, zwei-, ein drei- und nochmals ein dreidimensionaler Verkehrsraum zu.

Wir können ganz allgemein die Beweglichkeitsbedingungen eines starren Punktsystemes auf- und abbauen. Wir erreichen das durch eine konsequente Anwendung des Begriffes des geometrischen Ortes[1]).

Wir charakterisieren dabei das Bewegungsglied durch ein in ihm festes Dreieck ABC. Eine Bewegung dieses Dreiecks ist dann bekannt, wenn in jedem Augenblick die Lage der drei Punkte bekannt ist. Dabei sind aber die drei Punkte nicht voneinander unabhängig, sie bestimmen ihre Lage gegenseitig. Der Ort jedes Punktes ist teilweise von dem Orte der beiden anderen abhängig, denn das Dreieck ist undeformierbar gedacht. Diese Abhängigkeiten lassen sich in ein einfaches Schema bringen, das dann gilt, wenn das Punktsystem starr ist. Wir haben schon früher daran erinnert, daß deshalb im tierischen Bewegungsapparat die Betrachtung an die starren Elemente anknüpft, eben weil bei starren Punktsystemen sich die Beweglichkeitsanalyse allein vollständig durchführen läßt. Wir wollen das Thema die Beweglichkeitsbedingungen eines starren Systems nennen. Wir bedienen uns einer abgekürzten Schreibweise. A^0 heißt: der Verkehrsraum von A hat 0-Dimensionen, A ist unbeweglich, A^1: A hat eine Verkehrslinie; der Index 2 bedeutet eine Verkehrsfläche, 3 einen Verkehrsraum s. str.

I. Reihe, Bedingungen sind für einen Punkt A vorhanden.

1. Bedingung	$A^0 — B^2,\ C^2$	Kugelflächen um A mit AB oder AC[2]).
2. ,,	$A^1 — B^3,\ C^3$	Räume, die durch Bewegung von Kugeln entstehen.
3. ,,	$A^2 — B^3,\ C^3$	Räume, deren Grenzen von einer Fläche, der Verkehrsfläche des Punktes A gleichen Abstand haben.

II. Reihe, die Bedingungen betreffen 2 Punkte.

1. Bedingung	$A^0 B^0 — C^1$	Kreis.
2. ,,	$A^0 B^1 — C^2$	Teil einer Kugelfläche.
3. ,,	$A^0 B^2 — C^2$	B und C haben beide Kulgelflächen als Verkehrsflächen (I. Reihe 1.)
4. ,,	$A^1 B^1 — C^2$	Bewegungsfiguren von Kreisen.
5. ,,	$A^2 B^2 — C^3$	verschiedenartige Räume.
6. ,,	$A^2 B^3 — C^3$	desgl.

[1]) Etwas prinzipiell anderes als durch die Erörterung mittelst Freiheitsgraden ist damit natürlich nicht erreicht, ich glaube jedoch eine größere Anschaulichkeit und leichtere Anwendbarkeit für die Konstruktion oder Analyse nicht zwangsläufiger Verbände zu erreichen. Näheres im letzten Abschnitt.

[2]) Das heißt, hat A einen festen Ort, so sind B und C auf den beschriebenen Kugelflächen zu finden.

Die Analyse eines Verbandes geht nun so vor sich, daß man für einen Punkt oder zwei, je nach der Art des Verbandes, die Beweglichkeitsbedingungen sukzessive einführt. Man erhält dann eine Reihe auseinander hervorgehender geometrischer Örter, die man Örter 1. 2. 3. usw. Ordnung nennen kann.

Es ist noch hinzuzufügen, daß die Abhängigkeit der drei Punkte simultan und umkehrbar ist. Wie wir mit A begonnen haben, können wir auch mit B oder C beginnen.

Wir können diese Bedingungen nun für den FP-Verband sukzessive einführen. Die einzige durch den geschlossenen Verband gegebene Bedingung ist P^2. Die weitere Untersuchung würde eine Einengung darstellen. P beschriebe z. B. eine Bahn, eine sphärische Kurve in seiner Verkehrsfläche. Die Punktbahnen von P′ und P″, zweier beliebiger Punkte des Bewegungsgliedes, würden dann in einem Raume verlaufen, dessen Grenzen von der Bahn von P die Abstände PP′ und PP″ haben würden, deren Schnitt normal zum Bahnelement von P einen Kreis ergeben würde. Führen wir auch für P′ die Bedingung einer bestimmten Bahn ein (P'^1), so bleibt als Ort von P″ eine Fläche, die Oberfläche eines Körpers, der durch die Bewegung eines Kreises entsteht. Bleiben wir nun an der Bedingung, daß P eine bestimmte Bahn durchlaufe noch ein wenig haften. Jeder Punkt dieser Bahn entspricht einem bestimmten Zeitpunkt der gedachten Bewegung des Punktes P. In diesem Zeitpunkt gilt die Bedingung P^0, im gleichen Augenblick befinden sich P′ und P″ also irgendwo auf den zugehörigen Kugelflächen (Fig. 34). Für eine bestimmte Bewegung von P sind also diese Flächen die „momentanen geometrischen Örter“ (Momentanörter) dieser Punkte. Wird die Bewegung des Bewegungsgliedes weiter bestimmt gedacht, so, daß auch P′ eine bestimmte Bahn bekommt, so gilt momentan, d. h. in jedem Augenblick, die Bedingung $P^1\,P'^1$; P′ hat also zum Momentanort einen Kreis. Damit haben wir zeitliche Bestimmungen einzuführen begonnen. Das können wir folgendermaßen fortsetzen:

Es kann betreffs P noch eine weitere Bedingung eingeführt werden. Nicht nur die Gestalt der Bahn sei beliebig, sie werde auch in ganz bestimmter Weise durchlaufen; die Geschwindigkeit an jedem Punkte sei nicht beliebig, sondern bestimmt[1]). Wir wollen das so ausdrücken, die Bahn sei nicht nur geometrisch, sondern auch phoronomisch bestimmt[2]). Dann ergibt sich auch für P′ und P″ eine phoronomische Bestimmtheit, nämlich daß sie zu einer bestimmten Zeit eine bestimmte Kugeloberfläche passieren, eben die Momentanörter der betreffenden Zeitpunkte. Ist die Bahn von P z. B. an keinem Punkte rückläufig, so kann P′ in seiner Bewegung die Momentanörter nur je einmal schneiden. Die Figur 34 zeigt diese Kugeln für drei Zeitpunkte. Nun heißt das eben Gesagte weiter nichts, als dieses: Wenn es feststeht, daß P sich in den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 in den in der Figur bezeichneten Punkten befindet, so steht fest, daß P′ sich in diesen Zeitpunkten irgendwo auf den zugehörigen Kugelflächen befindet.

[1]) Bestimmt sei die Geschwindigkeit auch insofern, ob sie + oder — ist, d. h. ob ein Punkt, der bis jetzt nur in ihrer geometrischen Gestalt bestimmten Bahn einmal oder mehrmals durchlaufen wird. Letzteres ist der Fall, wenn P in einem bestimmten Zeitpunkt rückläufig wird, dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung durchläuft. So kann ein Punkt der Bahn einem oder mehreren Zeitpunkten entsprechen.

[2]) Phoronomie Bewegungslehre, in dem Sinne, daß eine Bewegung eine Abhängigkeit des Ortes von der Zeit ist. Diese Abhängigkeit von der Zeit haben wir noch nicht eingeführt, sondern nur das Geometrische der Sache betrachtet, wie das für den Begriff der Beweglichkeit notwendig ist.

Es bleibt nun noch übrig, die Beweglichkeit unseres Verbandes bei der kinematischen Umkehrung zu betrachten. Unter Umkehrung versteht Reuleaux (I S. 97ff.) die Vertauschung des festgestellten Elementes eines Umschlußpaares mit dem beweglichen. Ob diese Vertauschung das ganze Glied oder nur die kinematische Verbindung betrifft, ist dabei gleichgültig. Für letztere Art bietet Figur 35 ein Beispiel (nach Reuleaux). Dabei bleibt die Rolle als Bezugs- und Bewegungsglied an jedem Gliede haften. Ist mit dem Gliede S der Hohlkörper, mit dem Gliede H der Vollkörper verbunden (Schultergelenk der Säuger), so ist nach der Umkehrung der Vollkörper mit dem Gliede S, der Hohlkörper mit dem Gliede H verbunden (Schultergelenk der Vögel). Für uns ist es einfacher, die Rollen als Bezugs- und Bewegungsglied von einem Glied auf das andere wandern zu lassen. In unserem vorliegenden Falle heißt das, das F-Glied soll Bewegungsglied, das P-Glied Bezugsglied sein. Die Punktbahnen der in dem System sich vollziehenden oder der möglichen Bewegungen werden also jetzt in ein zu P festes Koordinatensystem eingetragen, während sie vorher in bezug auf ein zu F festes System studiert wurden. Hier hat man wieder zwischen Bewegung und Beweglichkeit besonders scharf zu unterscheiden. Zwangläufig[1]) sind nur drei Arten Umschlußpaare, Schraubenpaar, Zylinderpaar und Prismenpaar (Reuleaux I S. 95 und 96). Bei diesen „bewirkt die Umkehrung keine Änderung der im Paare erzeugten Bewegung" (S. 97). Bei unseren Elementenpaaren handelt es sich nicht um zwangläufige, wir studieren die Kinematik nicht zwangläufiger Verbände, deren Existenz eben das besondere der tierischen Bewegungsorgane ist. Bei diesen Verbänden gibt es solche, deren Umkehrung ohne, und solche, deren Umkehrung nicht ohne Einfluß auf die Beweglichkeit ist. Unser Verband, Verbindung durch ein Elementarband, gehört zur ersteren Art. Es ändert sich also durch die Umkehrung nichts. Der Verkehrsraum von F in bezug auf das frühere Bewegungsglied ist eine Kugel vom Radius 1, alle Erörterungen des Kapitels gelten auch für die Umkehrung[2]).

Das in diesem Kapitel Erörterte zusammenfassend, sagen wir: Durch ein Band zwischen Grund- und Bewegungsglied ohne sonstige Aneinanderfügung wird ein 2, 3, 3-Verband gebildet. Der durch die Zahl 2 dargestellte zweidimensionale Verkehrsraum des ersten Punktes beim Schluß ist eine Kugeloberfläche, Verkehrsfläche; die Verkehrsräume der übrigen Punkte sind Kugelschalen, von der Dicke des doppelten Abstandes dieser Punkte vom unmittelbar geschlossenen Punkt. Die Bahnen sind sphärische Kurven für einen Punkt, beliebige Raumkurven für alle anderen.

V.

An die Besprechung des einfachsten durch ein Band hergestellten Verbandes schließen wir die des durch zwei Bänder bewirkten naturgemäß an. Diese beiden Bänder können verschieden angeordnet sein. Die Figuren 36a–c zeigen diese verschiedenen

[1]) Wobei also Beweglichkeit und Bewegung zusammenfallt.

[2]) Dieses Gleichbleiben der Beweglichkeit bei der Umkehrung von Bezugs- und Bewegungsglied in diesem Falle ist nicht zu verwechseln mit der Tatsache, daß die „Relativbewegungen von Figuren nicht gleich sind" (Reuleaux, I S. 67), d. h. eine bestimmte Relativbewegung von P gegen F nicht gleiche Bahnen ergibt, wenn ich sie das eine Mal in ein mit F, das andere Mal in ein mit P verbundenes System einzeichne.

Anordnungen. Den Verband der Figur 36a nennen wir den F_1F_2P-Verband, oder, abgekürzt 2FP-Verband. Figur 36b zeigt seine kinematische Umkehrung. Wir nennen sie den FP_1P_2-Verband (2P, F-Verband). Dann ist der der Figur 36c der $F_1F_2P_1P_2$-Verband, 2F 2P-Verband.

Der 2P,F und der 2F,P-Verband gruppieren sich mit dem FP-Verband und den im nächsten Kapitel zu besprechenden 3P,F und 3F,P-Verbänden zu einer Reihe, die wir als Grundlage und Ausgang der gesamten Bänderkinematik ansehen können. Alle anderen Verbände können als Zusammensetzungen dieser einfachen angesehen werden. Bei ihnen bilden die Elemente, das sind die gespannten Bänder und die Fuß- sowie die Ansatzpunktslinien zusammen eine undeformierbare Figur, undeformierbar insofern, als unter Beibehaltung der Bandspannungen auch die Winkel konstant bleiben, falls nicht Lage der Fuß- und Ansatzpunkte, Bandlängen und somit der ganze Verband geändert wird.

Die Anzahl dieser einfachen Verbände ist 5. Die der zusammengesetzten Verbände und Bandsysteme unbegrenzt. Die zusammengesetzten Verbände entstehen durch Zusammentreten einer endlichen Zahl von Bandverbänden; unter Bildung einer deformierbaren Figur durch die Elemente. Die Bandsysteme begreifen eine unendliche Zahl von Elementarbändern in kontinuierlicher Anordnung in sich. Durch Kombination dieser Klassen lassen sich dann weitere Gruppen bilden. Mit den Bandsystemen werden wir uns in einem der späteren Kapitel ausführlich beschäftigen. Zunächst betrachten wir die einfachen Verbände und werfen dabei zugleich einen Blick auf die kombinierten Verbände, die durch Vereinigung mehrerer einfacher Verbände an demselben Grund- und Bewegungsglied entstehen.

Wir betrachten zunächst den 2F, P- und den 2P, F-Verband, und beginnen mit dem Falle bei dem zwei Bänder l_1 und l_2 an einem Punkte des Bewegungsgliedes angreifen, während sie von zwei Fußpunkten F_1 und F_2 entspringen (Fig. 36a). Die Elemente des Verbandes sind also l_1, l_2 und die Fußpunktslinie F_1, F_2.

Wie beim FP-Verband ist nur ein Punkt, eben der Punkt, an dem beide Bänder sich ansetzen, unmittelbar geschlossen. Der Verband ist punkthaft geschlossen. Wir konstruieren den Verkehrsraum von P und finden ihn von zwei Teilen von Kugelflächen umgrenzt, Kugelflächen um F_1 mit l_1 und um F_2 mit l_2. Die Figur zeigt einen ebenen Schnitt durch diese Flächen, die man als räumliche Gebilde durch Rotation der gezeichneten ebenen Figur um die Fußpunktslinie F_1F_2 hergestellt sich denken kann. In jeder der beiden Kugelflächen wird P durch ein Band gestützt. In dem Schnittkreis beider Kugelflächen — in der Figur durch seine beiden Spuren in der Zeichenebene, T_1 und T_2, angedeutet — werden beide Bänder beansprucht. P ist in der Figur in diesem Kreise befindlich zu denken. Durch Beanspruchung beider Bänder wird die Stützung verstärkt, es werden zwei Bänder beansprucht; wir wollen das doppelte Stützung nennen. Führen wir die Bedingung ein, daß diese doppelte Stützung beibehalten wird, so wird der Verkehrsraum von P linear, er wird zur Verkehrslinie. Ein Heraustreten aus dieser Linie auf andere Teile der Verkehrsraumgrenzen hat also eine Verringerung der Stützung aber keine Änderung der Art des Schlusses zur Folge. Dieser bleibt punkthaft.

Wir unterscheiden drei Arten des Schlusses, punkthaften, linearen und flächenhaften Schluß. Bei der ersten Art ist ein Punkt unmittelbar geschlossen, bei der zweiten

Art alle Punkte einer Geraden, bei der dritten Art alle Punkte eine Fläche, und, da das Bewegungsglied durch ein Dreieck in ihm vollständig dargestellt wird, alle Punkte des Bewegungsgliedes überhaupt. Der Grad der Stützung wird durch die Zahl der Bänder bestimmt, die beansprucht werden.

Beim $F_1 F_2 P$-Verband ist also der Grad der Stützung, je nach dem Orte des Punktes P verschieden, während sich die Art des Schlusses nicht ändert.

Die Beweglichkeit des Bewegungsgliedes im $F_1 F_2 P$-Verband stimmt also mit der des FP-Verbandes überein, wir charakterisieren sie durch die Formel 2, 3, 3. Für den höchsten Grad der Stützung gilt dann die Beweglichkeit 1, 3, 3. In beiden Fällen haben die beliebigen Punkte Verkehrsräume (s. str.), die Bahnen des Punktes P sind in einem Falle sphärische Kurven auf zwei Kugelflächen, beim Übergang von der einen zur anderen ändert sich die sphärische Krümmung der Bahn, wenn wir an ihr eine Eigenkrümmung und eine sphärische Krümmung entsprechend der Krümmung der Fläche in der sie verläuft unterscheiden; die Bahn hat beim Übergang eine Knickung.

Der höchste Grad der Stützung gilt im $F_1 F_2 P$-Verband nur für einen linearen Verkehrsraum des Punktes P. Der Grad der Stützung hat eine statische Bedeutung, eine Bedeutung für die Festigkeit des Verbandes. Wenn P sich in der durch die beiden Punkte F_1 und T_2 angedeuteten Linie befindet, kann der Verband die stärkste Beanspruchung vertragen. Die Last verteilt sich auf zwei Bänder nach den Regeln des Kräftedreiecks. Eben deshalb, weil hier ein Maximum in bezug auf Sicherung des Verbandes gegen Bruch vorliegt, haben wir vom höchsten Grad der Stützung gesprochen. Diese Sicherung ist bei gegebener Beanspruchung dann am größten, wenn die Belastungen beider Bänder (L_1 und L_2) einander gleich sind. Hierbei wird die Beanspruchung als Variable betrachtet. Gleiche Querschnitte der empirischen Bänder vorausgesetzt, ist dieser Zustand dann gegeben, wenn $\mathfrak{P}$ (Fig. 38) in der Winkelhalbierenden ($\mathfrak{P}'$) beider gespannten Bänder zieht. So ist zweierlei zu berücksichtigen: erstens die Lage dieses Kreises größter Stützung, sie wird durch die Elemente des Verbandes, den Ort der beiden Fußpunkte F_1 und F_2 und die Längen der beiden Bänder l_1 und l_2 bestimmt. Zweitens liegt eine Maximunaufgabe für die Sicherheit vor, wenn die Last und ihre Richtung sowie der Punkt an dem sie angreift, gegeben sind. Wieder sind die Lagen von F_1 und F_2, sowie die Bandlängen die Bestimmungsstücke, mit denen verschiedene Lösungen erreicht werden können. Diese Größen und Lagen stellen also wichtige Merkmale des Aufbaues des Verbandes dar. Sie bedingen Lage und Gestalt der Stützflächen, und die Stabilität des Verbandes. Ihre Determination beim Aufbau des Organismus in Geschichte und individueller Entwicklung wird so zu einem besonderen Problem.

Der Verkehrsraum eines beliebigen Punktes P' wird zunächst bestimmt durch den zwei Kugeln gemeinsamen Raum, nämlich der Kugeln um F_1 mit $l_1 + PP'$ und um F_2 mit $l_2 + PP'$ (Fig. 39). Besondere Verhältnisse herrschen jedoch in der Gegend, die der Linie größter Stützung entspricht. Die beiden Kugeloberflächen schneiden sich in einem Kreise. Dieser Kreis steht senkrecht zur Zeichenebene und ist in unserer Zeichnung durch die beiden mit A' bezeichneten Punkte repräsentiert. Sucht man zu jedem dieser beiden Punkte die Punkte auf der Verkehrsraumgrenze des Punktes P; A_1 und A_2; auf, die von A' den Abstand PP' haben, so findet man, daß diese außerhalb des Verkehrsraumes von P zu liegen kommen. P kann also nicht dahin. A' gehört also auch nicht zum Verkehrsraum von P'. Die richtige Verkehrsraumgrenze des Punktes P' finden wir, wenn wir gemäß den Erörterungen des vorigen Kapitels den Verkehrsraum von P' konstruieren, der zu einer bestimmten Bahn von P gehört und zwar der Bahn im Kreise größter Stützung, der durch T_1 und T_2 läuft. Dieser Verkehrsraum ist ein Rotations-Kreisring, der durch den Kreis mit PP' als Radius und der Achse F_1F_2 gebildet wird. Der Mittelpunkt dieses Kreises wandert dabei auf dem Kreise größter Stützung entlang. So ergibt sich der gesamte Verkehrsraum von P' als begrenzt von Teilen zweier Kugelflächen und einem Teil der Oberfläche des soeben abgeleiteten Kreisringes. Dessen Oberflächen berührt die Kugelflächen von innen in zwei Kreisen, die, senkrecht auf der Zeichenebene der Figur 39 stehend, durch die Punkte B_1 und B_1 sowie B_3 und B_4 in der Figur repräsentiert werden. Die Verkehrsraumgrenze von P ist in dem unteren Teil der Figur einfach, die von P' doppelt ausgezogen.

Ganz wie im Kapitel IV kann am geschlossenen Verbande eine innere Verkehrsraumgrenze für P' konstruiert werden, die wieder an den, dem Kreise größter Stützung entsprechenden Teilen besondere Verhältnisse zeigt, die sich aus dem soeben Erörterten und mittelst der Entwicklungen des vorigen Kapitels ableiten lassen, ohne daß sich neue Beziehungen ergeben. Zwischen beiden Grenzen liegt dann der Verkehrsraum von P', innerhalb dessen dieser Punkt bei geschlossenem Verbande beliebige Kurven beschreiben kann. Führt man als Bedingung ein, daß für P größte Stützung erhalten bleibt, P also keine Verkehrsfläche, sondern eine Verkehrslinie zur Verfügung hat, so bleibt dennoch der Verkehrsraum für P' ein räumliches dreidimensionales Gebilde, eben der Ring, den wir soeben ausführlich erläutert haben. Wir können die Erörterungen des vorigen Kapitels hier ohne weiteres anwenden. Es handelt sich um den Fall, in dem P eine bestimmte Bahn beschrieb und die dann übrig bleibende Beweglichkeit von P' zur Diskussion stand. Fassen wir die Beweglichkeit der Punkte $P P' P''$ in eine Formel zusammen, so heißt sie für den geringeren Grad der Stützung 2, 3, 3, für den höheren Grad 1, 3, 3.

Die kinematische Umkehrung des soeben besprochenen Verbandes ist der $F P_1 P_2$-Verband (Fig. 36 b), bei dem also das Bewegungsglied durch zwei von einem Fußpunkt F entspringende, aber an zwei verschiedenen Punkten, P_1 und P_2, sich anheftende Bänder mit dem Grundglied verbunden ist. Führen wir noch einen dritten beliebigen Punkt P' des Bewegungsgliedes ein, so haben wir ein Dreieck vor uns, das zur Erörterung der Beweglichkeit ausreicht (Fig. 40). Zwei Ecken dieses Dreiecks sind also Bandansatzpunkte.

Ist ein Band gespannt, so befindet sich der Ansatzpunkt in seiner Verkehrsraumgrenze, einer Stützfläche. Das ist in unserem Verbande für das erste, das zweite und für beide Bänder möglich. Der Verband kann also auf verschiedene Weise geschlossen werden. Ist nur ein Band gespannt, so ist der Schluß punkthaft, sind beide Bänder gespannt, so ist der Schluß linear. Die unmittelbar geschlossene Linie ist dann $P_1 P_2$ mit ihren Verlängerungen über P_1 und P_2 hinaus. Alle ihre Punkte sind gleichwertig, denn es kann keiner von ihnen — etwa P_3 in Figur 41 — seine Verkehrsraumgrenze verlassen, ohne daß das gleiche bei einem der beiden Ansatzpunkte P_1 oder P_2 ebenfalls der Fall ist. Der Schluß wäre dann nicht mehr linear.

Die Art des Schlusses ist also beim höheren Grade der Stützung im Verbande — Beanspruchung beider Bänder — eine andere als beim niederen Grade.

Jeder der geschlossenen Punkte hat eine flächenhafte Beweglichkeit, sie ist also für beide Grade der Stützung für die unmittelbar geschlossenen Punkte gleich. Beim

2FP-Verband änderte sie sich so, daß für den höheren Grad nur eine lineare Beweglichkeit, aber ohne Änderung der Schlußart — sie blieb punkthaft — galt.

Die Beweglichkeit der geschlossenen Geraden ist die einer Dreiecksseite[1]), deren Gegenecke einen festen Ort hat. Sie ist also sphärisch. Alle ihre Punkte haben Kugelflächen als Verkehrsflächen. Diese Flächen sind konzentrisch. So kann also für jeden Punkt seine Zentralprojektion eingeführt werden, um Bewegungen der geschlossenen Geraden zu beschreiben. Betrachten wir nun den dritten Punkt P' des Bewegungsgliedes, so gelten für ihn drei verschiedene Verkehrsraumgrenzenpaare, je nachdem nur P_1, nur P_2 oder $P_1 P_2$ geschlossen ist. Für den punkthaften Schluß gilt, daß $l_1 + PP'$ und $l_1 - P_1 P'$ oder $l_2 + P_2 P'$, $l_2 - P_2 P'$ Radien der Verkehrsraumgrenzen sind. Für den linearen Schluß gilt ferner, daß P' sich dann in seiner Verkehrsraumgrenze befindet, wenn die beiden Dreiecke $P_1 P_2 P'$ und $FP_1 P_2$ sich in einer Ebene befinden (Fig. 42). Innerhalb dieser Grenzen kann der Punkt jede Bahn beschreiben, gemäß den im vorigen Kapitel entwickelten Abhängigkeiten. Damit haben wir das wesentliche des FPP-Verbandes besprochen. Die Beweglichkeit für den linearen Schluß schreiben wir 2, 2, 3. Sie stimmt mit der überein, die z. B. ein mit seinem Mantel eine Ebene berührender Zylinder hat.

Noch auf eine dritte Weise lassen sich zwei Bänder mit dem Grund- und Bewegungsglied zu einem Verband vereinigen, zum $F_1 F_2 P_1 P_2$-Verband, den wir als kombinierten Verband bezeichnet haben, da wir ihn als aus zwei $F_1 P$-Verbänden kombiniert betrachten. Um einen Einblick in die durch Kombination geschaffene Beweglichkeit zu erhalten, konstruieren wir zunächst die Verkehrsräume der Punkte, an denen die Bänder angreifen (Fig. 43). Betrachten wir P_1. Das erste Band l_1 bedingt eine Kugeloberfläche als Verkehrsraumgrenze mit dem Radius l_1, diese Oberfläche ist mit a bezeichnet. Eine zweite Fläche wird durch $l_2 + P_2 P_1$ gebildet, denn wenn das zweite Band und die Verbindungslinie der beiden Ansatzpunkte eine Gerade bilden, so wirken sie wie ein Band. Diese Kugel ist in der Figur mit b bezeichnet, beide Grenzen sind rot gezeichnet. Für P_2 — Grenzen doppelt hervorgehoben — gilt dasselbe. α und β entsprechen a und b. Die Figur 43 ist als ebener Schnitt durch das Flächenaggregat zu verstehen, so daß er die Verbindungslinie der beiden Fußpunkte F_1 und F_2 enthält. Zu dieser Geraden ist jeder solche Schnitt symmetrisch, das ganze räumliche Gebilde kann also als Rotationsfigur unserer Schnittfigur um $F_1 F_2$ aufgefaßt werden.

Jeder Punkt für sich verhält sich also wie der Punkt P im $F_1 F_2 P$-Verband. Geben wir nun P_1 eine beliebige Stellung in seiner Verkehrsraumgrenzfläche (Fig. 44). Dann ist P_1 unmittelbar geschlossen, alle anderen Punkte mittelbar. Die Art des Schlusses ist also punkthaft, die Beweglichkeit dieselbe wie beim FP-Verband, wir drücken sie durch die Bezeichnung 2, 3, 3 aus.

Diese Beweglichkeit gilt solange, bis auch P_2 in seine Verkehrsraumgrenze eintritt, entsprechend dem Pfeil in Figur 44. Damit gelangt auch das andere Band, der zweite FP-Verband zur Wirkung. Beide P-Punkte gehören demselben Glied an, wie beim 2P, F-Verbande, ihre Verkehrsflächen sind exzentrische Kugelflächen. Die Figur, die von den Elementen, der Fußpunkts-, der Ansatzpunktslinie und den

[1]) Die anderen Seiten sind die gespannten Bänder, die wir ja für den Fall des Schlusses als starre Gerade behandeln. Dieses Dreieck ist natürlich nicht mit der kinematischen Figur des Bewegungsgliedes identisch.

beiden gespannten Bändern gebildet wird, ist ein Viereck, eine, unter Erhaltung des Schlusses und der Dimensionen der Elemente deformierbare Figur. Dadurch wird die Ansatzpunktslinie nicht zur geschlossenen Linie, sondern ihre Punkte behalten auch für den Fall des Schlusses beider Punkte, P_1 und P_2, dreidimensionale Verkehrsgebilde, Verkehrsräume s. str. Jeder ihrer Punkte entspricht eben einem P'-Punkt, einem „beliebigen" Punkte des FP-Verbandes, nur daß er zugleich zweien solchen Verbänden angehört. Dadurch engt sich sein Verkehrsraum ein, er behält aber seine dreidimensionale Beschaffenheit. Der 2P 2F-Verband ist also ein Beispiel für die Tatsache, daß die Bedingung $P_1^2 P_2^2$ — 2 Punkte einer Geraden haben Verkehrsflächen — diese Gerade nicht ohne weiteres zur geschlossenen Geraden macht. Das ist nur der Fall, wenn die beiden Flächen konzentrische Kugelflächen oder parallele Ebenen sind. Wir können das in den Beweglichkeitsformeln zum Ausdruck bringen, indem wir noch einen Punkt schreiben, der auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt und durch eine Klammer mit einem S die Zusammengehörigkeit zu einer Geraden ausdrücken. Der 2PF-Verband würde dann also $\frac{\overbrace{}^{S}}{2, 2, 2, 3}$ der 2P 2F-Verband $\frac{\overbrace{}^{S}}{2, 3, 2, 3}$ geschrieben werden. Dadurch werden die Beweglichkeitsverhältnisse ohne weiteres klar.

Unser Verband hat besondere Beziehungen zu den Kurbeln. Sind beide Ansatzpunkte geschlossen, und bleiben die Bänder in einer Ebene, so liegt die Konfiguration einer ebenen zweigliedrigen Kurbel vor. Wir werden im Anhang bei der Anwendung unserer Beweglichkeitsanalyse auf Berührungspaare und daraus gebildeten Ketten auf diese Kurbeln zurückkommen.

Bisher befand sich P_1 auf der mit dem Zeichen a versehenen Fläche. Diese (Fig. 44) schneidet die mit b bezeichnete Fläche in einem Kreis, der, normal zur Zeichenebene stehend, in dieser durch seine Spur A vertreten ist. P_1 wandere auf diesen Kreis zu; tritt P_1 in ihn ein (Fig. 45, obere Lage des Punktes), so liegen die Punkte P_1, P_2 und F_2 in derselben Geraden. Tritt P nun weiter auf die mit b bezeichnete Kugel über, so wird das Band l_1 entspannt, der $F_1 P_1$-Verband also ausgeschaltet (Fig. 45, untere Lage des Punktes). P_1 ist für den $F_2 P_2$-Verband ein beliebiger Punkt P'. Der Verband befindet sich somit in derselben Lage wie ein FP-Verband, wenn ein beliebiger Punkt P' in seiner äußeren Verkehrsraumgrenze sich befindet. Solange diese Konfiguration beibehalten wird, haben sowohl die Punkte der Geraden $P_1 P_2$, wie alle anderen Punkte des Bewegungsgliedes Verkehrsflächen und zwar konzentrische Kugelflächen um P_2. Die Beweglichkeit hatte die Formel 0, 2, 2, eine einfache sphärische Beweglichkeit, bei der F_2 relativ zu beiden Gliedern fest wird.

Damit wollen wir die aus zwei Bändern sich aufbauenden Verbände verlassen und betrachten, wie ein Verband sich bei der Einführung eines dritten Bandes gestaltet.

VI.

Wir hatten gefunden, daß alle Punkte der Geraden $P_1 P_2$ im 2PF-Verbande in bezug auf den Schluß des Verbandes einander gleichwertig sind. Daraus folgt, daß die Bandansätze auf der Geraden verschoben werden können, z. B. von P_2 nach P_{2v}, wenn nur die Bandlängen so variiert werden, daß der Abstand p der geschlossenen Geraden vom Fußpunkt der beiden Bänder unverändert bleibt. Dann bleibt der Verband unverändert (Fig. 46). Daraus folgt aber weiter, daß ein drittes, und beliebig viele Bänder in den Verband eingefügt werden können, ohne ihn irgendwie kinematisch zu verändern, wenn nur ihre Ansatzpunkte auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen, und ihre Längen genau dem Abstande ihrer Ansatzpunkte vom Fußpunkt F bei geschlossenem Verbande entsprechen (Fig. 47). Das kürzeste Band, das so eingefügt werden kann, hat die Länge des Lotes von F auf $P_1 P_2$; wir nennen es den „Parameter (p) des Verbandes".

Alle diese Bänder sind kinematisch unwirksam, das heißt, sie verändern weder die Lage der geschlossenen Geraden im Bewegungsgliede, noch den Parameter des Verbandes, also auch nicht den Winkel unter dem die geschlossene Gerade durch das Flächenelement einer bestimmten Kugelfläche um F geht. Eine flächenhafte kontinuierliche Bandmasse von dreieckiger Gestalt mit der Spitze in F und einer beliebig langen Basis auf $P_1 P_2$ entspricht in ihrer kinematischen Wirksamkeit durchaus dem 2P, F-Verbande. Ein solches kontinuierliches Aggregat von Bandelementen bezeichnen wir als Bandsystem. Wir lernen hier als erstes Bandsystem eines kennen, das kinematisch einem einfachen Bandverbande entspricht.

In der Vielzahl der Bandelemente haben also in dem bisher besprochenen Falle nur zwei Bänder eine kinematische Bedeutung. Mit der Vielzahl wächst aber die Stabilität des Verbandes. Wir nennen also die kinematisch überflüssigen Elemente statische Bänder.

Welche Bänder als kinematische herausgehoben werden sollen, ist willkürlich. Es ist überhaupt nicht nötig, mehrere herauszuheben. Der Verband ist vollständig bestimmt durch die Art des Schlusses, die Lage der Schlußlinie im Bewegungsglied und den Abstand dieser Linie vom Punkte F. Diesen Abstand haben wir den Parameter p des Verbandes genannt. Dann ist die Länge jedes wirksamen Bandes eine Funktion des Abstandes des Ansatzpunktes vom Punkte P_0, dem Punkte in dem der Parameter auf der Schlußlinie senkrecht steht. $l^2 = p^2 + a^2$ (Fig. 47).

Einen Vergleich für die Rolle der statischen Bänder bietet eine Tür mit zwei oder mehreren Scharnieren. Bei genügender Starrheit der Materialien genügt ein Scharnier von sehr kleiner Ausdehnung, um die Kinematik, die möglichen Punktbahnen des Verbandes festzulegen. Welcher Teil eines ausgedehnten Scharniers oder welches einer Reihe das sein soll ist wieder willkürlich.

In den vorigen Absätzen haben wir zugleich eine der Konfigurationen betrachtet, die beim Drei-Bänder-Verband vorkommen können. Wenn die Ansatzpunkte der drei Bänder auf einer Geraden liegen, so entspricht bei gemeinsamem Fußpunkt der Verband dem 2P, F-Verband. Das ist auch der Fall, wenn l, die Bandlänge und a der Ansatzpunktsabstand mit p keine gleichseitige Hyperbelfunktion bilden. In diesem Falle wird ein Band unwirksam, die beiden kürzesten Bänder bestimmen dann p und somit den Verband (Fig. 48).

Zwei einfache Verbände aus drei Bändern sind möglich, Verbände, in denen die Elemente eine undeformierbare Figur, eine dreiseitige Pyramide bilden. Daneben gibt es noch drei kombinierte Verbände mit drei Bändern. Uns interessieren hier vor allem die einfachen Verbände, die wir 3F, P- und 3P, F-Verband nennen. Sie sind die kinematischen Umkehrungen voneinander.

Beim 3F, P-Verband heften sich die Bänder an einem Punkte des Bewegungsgliedes an, während sie von drei Fußpunkten entspringen. Diese bilden also ein Dreieck (Fig. 49). Die Flächen, die den Verkehrsraum des Punktes P abgrenzen, werden durch die Ebene dieses Dreiecks in zwei spiegelbildliche Hälften geteilt. Für den Punkt P gilt weiter etwas ganz ähnliches, wie für den Punkt P im 2F, P-Verband. Der Schluß bleibt auch beim 3F, P-Verband stets punkthaft, während die Stützung drei verschiedene Grade aufweist, einfache, doppelte und dreifache Stützung. Einfache Stützung gilt für Verkehrsflächen, doppelte für Verkehrslinien, und dreifache Stützung für zwei, symmetrisch zur Ebene des Fußpunktsdreiecks gelegene Punkte. Die Beweglichkeit des Bewegungsgliedes unter den drei Bedingungen würden also durch die Formeln 2, 3, 3; 2, 2, 3 und 0, 2, 2 ausgedrückt werden. Stellen wir die Bedingung auf, daß dreifache Stützung erhalten bleibe, so legen wir damit einen Punkt des Bewegungsgliedes relativ zum Grundglied fest, wobei das Bewegungsglied dann sphärisch um diesen Punkt beweglich wird. Wo dieser Punkt liegt, hängt wieder von den Elementen des Verbandes, den Bandlängen und den Lagen der Fußpunkte im Grundglied ab. Alles im vorigen Kapitel über Maximum und Minimumeigenschaften des Verbandes — zweckmäßige Eigenschaften — ausgeführte, gilt auch für den 3F, P-Verband. Figur 50 gibt den Grundriß der Stützflächen wieder. Der zu F_1 gehörige Kreis ist dünn, der zu F_2 doppelt, der zu F_3 gehörige Kreis stark gezeichnet. Die als Stützflächen wirksamen Teile sind stark umrandet. Die gezeichnete Hälfte des Stützflächensystems bildet eine Pyramide mit drei sphärischen Seiten. Ihre Kanten sind die Linien doppelter Stützung, ihre Spitze ist der Punkt dreifacher Stützung. Das Fußpunktsdreieck und die Projektion der Bänder für ihre Lage bei dreifacher Stützung sind gleichfalls eingezeichnet. Die Höhe dieses Punktes über der Zeichenebene ist durch eine einfache Konstruktion der darstellenden Geometrie leicht zu entnehmen. Die Zeichenebene ist die Ebene des Fußpunktsdreiecks, die Symmetrieebene des ganzen Flächensystems.

Die Umkehrung des 3F, P-Verbandes, den 3P, F-Verband, zeigt Figur 51. Hier haben wir wieder drei Bänder, die nacheinander in Wirksamkeit treten können, also einfache, doppelte und dreifache Stützung des Bewegungsgliedes. Es liegen aber ebensoviel Arten des Schlusses vor. Drei verschiedene F, P-Verbände und ebensoviele 2P, F-Verbände stecken in dem 3P, F-Verband. Es kann P_1 allein in seiner Verkehrsraumgrenze sich befinden, oder P_2 oder P_3. Die Stützflächen sind die um F mit den Bandlängen geschlagenen Kugeln, sie sind somit konzentrische Kugelflächen. Die Beweglichkeit würde 2, 3, 3 geschrieben werden. Befinden sich gleichzeitig zwei Punkte in ihren Verkehrsraumgrenzflächen, so liegt ein 2P, F-Verband vor mit der Beweglichkeit 2, 2, 3. Dabei sind drei Kombinationen der Punkte möglich, so, daß entweder $P_1 P_2$ oder $P_2 P_3$ oder $P_1 P_3$ zur geschlossenen Geraden wird.

Tritt nun auch der letzte Punkt in seine Stützfläche ein, so ist der Verband vollständig geschlossen (Fig. 51). Damit treten alle Punkte des Bewegungsgliedes in Stützflächen ein. Jeder Punkt bleibt, solange die drei Ansatzpunkte in ihren Stützflächen bleiben, in einer Kugelfläche. Lassen wir einen, P', heraustreten, so tritt auch einer der drei Ansatzpunkte aus seiner Stützfläche. Dabei gilt nun folgendes: Jeder Punkt der der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ hat nur eine solche Fläche. Lasse ich in der Figur 5 den Punkt P_2 um $P_1 P_3$ rotieren, so liegt das Dreieck in der zu seiner früheren symmetrischen Lage, dabei behält jeder Punkt der Dreiecksebene seine Entfernung von F bei. Der

Punkt P′ aber liegt in einer neuen Fläche. Diese ist seine innere Stützfläche, die vorherige Lage hielt ihn in seiner äußeren Stützfläche. Dasselbe gilt für alle Punkte außerhalb der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Alle Punkte dieser Ebene haben also eine, alle anderen zwei Stützflächen für den Fall des vollständigen Schlusses. Deshalb nennen wir diesen Schluß flächenhaft und die geschlossene Fläche ist die des Ansatzpunktsdreiecks.

Bei flächenhaftem Schluß bleibt der gemeinsame Fußpunkt der drei Bänder relativ zu beiden Gliedern fest, das Bewegungsglied wird also sphärisch um diesen Punkt beweglich. Dieselbe Beweglichkeit finden wir für den 3F, P-Verband. Bei diesem aber gehörte der Verbandsmittelpunkt für alle anderen Stützungsgrade des Verbandes dem starren Punktsystem des Bewegungsgliedes an, hier gehört er für alle anderen Stützungsgrade, die eine jeweils verschiedene Schlußart zur Folge haben, zum Grundglied. Diese Aussage ist für den Fall von Bedeutung, daß beide Glieder in einem weiteren höheren Bezugssystem beweglich sind.

An kombinierten Verbänden aus drei Bändern sind die folgenden möglich. Die Kombination des 2F, P-Verbandes mit dem F, P-Verband (Fig. 52); die des 2P, F-Verbandes mit dem F, P-Verbande, die die Umkehrung des erstgenannten Verbandes darstellt (Fig. 53); die Kombination zweier Zweibänderverbände, 2F, P mit 2P, F, bei dem je ein Punkt des einen mit einem des anderen Bandes zusammenfällt (Fig. 54); die Umkehrung ergibt hier denselben Verband; endlich die Kombination dreier F,P-Verbände (Fig. 55). Wir wollen die Betrachtung dieser Verbände, da sie uns prinzipiell Neues nicht bringt, nicht weiter vornehmen, den 3P3F-Verband werden wir im Anhang als Dreifachkurbel wieder begegnen.

Die Einführung weiterer Bänder in den 3P, F-Verband führt zu ganz ähnlichen Betrachtungen, wie wir sie für den 2P, F-Verband am Eingang dieses Kapitels angestellt haben. Wir lassen ein viertes Band, l_4, aus F entspringen und in der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ sich ansetzen (Fig. 56). Steht die Länge des neuen Bandes zu der Entfernung seines Ansatzpunktes P_4 von den übrigen Ansatzpunkten im richtigen Verhältnis, so wird der Verband nicht geändert, eins der vier Bänder ist kinematisch überflüssig, ein statisches Band. Wieder können wir einen Parameter des Verbandes feststellen, die kürzeste Entfernung des Fußpunktes F von der geschlossenen Ebene, P (Fig. 56). Dieser Parameter, die Lage des Fußpunktes im Grund- und die Lage der geschlossenen Ebene im Bewegungsglied, bestimmen den Verband. Alle die Bänder, die in der geschlossenen Ebene sich ansetzen, verändern den Verband nicht, für die $l = \sqrt{r^2 + p^2}$ ist, wobei r die Entfernung des Ansatzpunktes von P_0 dem Ansatz des Parameterbandes bedeutet.

Da beim vollständigen Schluß des Verbandes alle seine Punkte sich in Stützflächen befinden, kann auch jeder durch ein Band mit dem Fußpunkt verbunden werden, ohne daß am Verband sich etwas ändert. Der Fußpunkt liegt eben relativ zu beiden Gliedern fest (0, 2, 2). In Fig. 57 sind zwei solcher Bänder gezeichnet. h_1 und h_2 sind die Entfernungen ihrer Ansatzpunkte von der geschlossenen Ebene. Die Hervorhebung einer geschlossenen Ebene und die Bezeichnung des Schlusses als eines flächenhaften wird jedoch dadurch nicht hinfällig. Der Verband ist umdrehbar, F kann auch an der anderen Seite der geschlossenen Ebene liegen. Fig. 58 zeigt die Umdrehung an Fig. 56 ausgeführt. Diese Umdrehbarkeit fällt bei Einfügung eines solchen außerhalb der geschlossenen Ebene sich ansetzenden Bandes dann fort, wenn das neu eingefügte Band kürzer ist als die Bänder, die in der geschlossenen Ebene ansetzen[1]).

Mit diesen Erörterungen haben wir zugleich festgestellt, daß es weitere einfache Bandverbände nicht gibt, d. h. solche Bandverbände, bei denen im Falle vollständigen Schlusses die Elemente eine undeformierbare Figur bilden.

Die einfachen Verbände sind also der F, P-Verband, der 2 F,P- und der 2 P,F-Verband, der 3 F, P- und der 3 P, F-Verband. Davon sind je zwei die kinematischen Umkehrungen voneinander, während die des F, P-Verbandes einander gleich sind. Für ihre Beweglichkeiten hatten wir die Ausdrücke 2, 3, 3; 2, 2, 3: 0, 2, 2 sowie 1, 3, 3 und 0, 2, 2 angewandt.

In den Figuren 59a—e sind diese Verbände noch einmal zusammengestellt. Solche Linienzüge, aus denen das wesentliche des kinematischen Verhaltens der Verbände zu ersehen ist und in die naturgemäß die besonderen Punkte und Linien eingehen, wie Schlußpunkte und -linien, wollen wir kinematische Figuren nennen. Wenn wir in einem späteren Kapitel unsere Art, die Beweglichkeit zu betrachten und zu analysieren auch auf Berührungspaare (Gelenke im weiteren Sinne) angewandt haben werden, wird sich zeigen, daß aus diesen Figuren unmittelbar die Ausführung eines Verbandes mit entsprechender Beweglichkeit in starrem Material zu ersehen ist.

Das Besondere der Bandverbände ist ihre leichte Ausschaltbarkeit. Wenn die Bänder eines Bandverbandes nicht gespannt sind, verhält sich das Bewegungsglied so, als wenn diese gar nicht vorhanden wären. Das ist bei Verbänden, die nur aus starrem Material bestehen, nicht möglich.

VII.

Unter einem Bandsystem verstanden wir eine kontinuierliche Bandmasse aus unendlich vielen Elementarbändern, deren Fuß- oder Ansatzpunkte eine Linie oder Fläche bedecken. Auch hier betrachten wir zunächst die Systeme, bei denen einer dieser Punkte für alle Bänder gemeinsam ist, bei denen also ein gemeinsamer Fuß- oder Ansatzpunkt der Bandelemente sich findet, die anderen Punkte eine Linie bedecken. Dabei läßt sich dann die eine Gruppe als kinematische Umkehrung der anderen behandeln. Wir nennen sie einfache Systeme.

Wir nähern uns damit in der Anatomie vorkommenden Bandgebilden, insofern als flächenhaft entwickelte konvergierende oder divergierende Bandmassen sich an verschiedenen Verbindungen der starren Skelettelemente finden. Ein Bandsystem hatten wir bereits kennen gelernt, das System mit geradlinigem Ansatz oder Ursprung. Wir hatten es als mit dem 2 F, P- oder 2 P, F-System gleichartig erkannt. Figur 60 zeigt wie der Verkehrsraum des Punktes P nur durch die äußeren Bänder bestimmt wird.

Wir gehen zur Ableitung flächenhafter Bandsysteme aus vom 3 F, P-Verbande. Der Verkehrsraum des Punktes P war eine Doppelpyramide mit sphärischen Flächen und Bögen als Kanten (Fig. 50). Die Basis der Doppelpyramide, der durch das Fußpunktsdreieck

[1]) Daß diese Umdrehung bei materieller Ausführung des Verbandes nicht immer tatsächlich möglich ist, ändert an der Sachlage nichts. Ideell ist sie immer möglich.

gehende Schnitt durch das Raumgebilde war ein Bogendreieck. Die Spitze der Pyramide liegt dann senkrecht über dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Fußpunktsdreieckes, wenn alle Bänder gleichlang sind (Fig. 61). In der Figur ist das Bogendreieck, die drei Fußpunkte und der durch diese gehende Kreis gezeichnet. Wir fügen nun weitere Bänder der gleichen Länge hinzu und lassen sie alle von dem einen Kreise entspringen. In der Figur 62 sind sechs solcher Bänder angenommen. Die Basis der Pyramide wird ein Bogensechseck. Die Seitenzahl dieses Bogenpolygons ist genau so groß wie die Anzahl der Bandursprünge auf dem Kreise. Wird also die ganze Peripherie mit Ursprüngen besetzt, so wird das Bogenpolygon zu einem Kreise. Von jedem Bogen des Polygons bleibt dann nur ein sehr kleines Stück nach, das symmetrisch zu dem Punkte P_1 liegt, der durch den zum Fußpunkt gehörigen (F_1 M der Figur 62) Radius und den Bogen mit der Bandlänge aus F_1 bestimmt wird. l—r ist als der Halbmesser des aus dem Bogenpolygon hervorgegangenen Kreises, wenn r der Halbmesser des Fußpunkts kreises ist. Figur 63 zeigt die durch die Kreise um die Punkte der Fußpunktslinie entstehende Umhüllungsfigur.

Ist nun nicht die ganze Kreislinie mit Ursprüngen besetzt, sondern nur ein Bogen F_1F_2 (Fig. 64), so kommt auch nur ein Teil der Umhüllungsfigur in Betracht. Der Teil liegt der Konkavität des Bogens gegenüber. Der Bogen mit dem Radius l—r um M berührt die beiden Bogen um F_1 und F_2 in den Punkten, in denen sie von den zugeordneten Durchmessern geschnitten werden. Diese Bögen vervollständigen die Figur, die also eine Ecke hat.

Die bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf die Verhältnisse der Verkehrsraumgrenze, wie sie sich in der Ebene der Fußpunktslinie darstellen. Um zu einer Vorstellung des ganzen räumlichen Gebildes zu kommen, gehen wir wieder auf den 3F, P-Verband zurück. (Fig. 65). In der Figur ist die Basis der Kugelflächenpyramide dick gezeichnet. Eine Kante ist der Schnittkreis der Kugeln, z. B. der um F_1 und F_2. Dieser Kreis steht senkrecht zur Papierebene, seine Projektion in diese ist die Gerade CC'. Sein Mittelpunkt ist die Mitte von F_1F_2, M'. Sein Profil also der Kreis aus M' mit M'C. Die Normale auf CC' in M teilt dann den doppelt gezeichneten Bogen CH von diesem Kreis ab, der die Kante der Kugelflächenpyramide darstellt. Diese Konstruktion ist für jede Kante ausgeführt. Die Kanten durch A sind dünn, die durch B dick, die durch C doppelt gezeichnet. Wird die Zahl der Flächen der Pyramide nun soweit vermehrt, daß die Basis ein Kreis wird, so geht die Pyramide in eine Rotationsfigur über (Fig. 66), in die Rotationsfigur, die der Bogen aus F_x mit l um die Achse MH bildet. Figur 67 zeigt weiter Grundriß und Profil der Verkehrsraumgrenzen des Punktes P, wenn nur der Bogen F_1F_2 mit Bandursprüngen besetzt ist. Der Grundriß ist einfach, das Profil doppelt gezeichnet. Der Teil P_1P_2 ohne Ecke bezeichnet die Spuren der dem Systeme, der Teil P_1P_2 mit Ecke die der den Randbänder F_1P und F_2P zugeordneten Flächen.

Das eben betrachtete Bandsystem läßt sich nun in zweifacher Weise variieren. Die Gestalt der Fußpunktslinien, die Länge der Bänder sowie beides zusammen kann verändert werden. Die Veränderung der Bandlänge ist dabei so gedacht, daß die einzelnen Bandelemente nicht mehr gleich lang, sondern an verschiedenen Orten verschieden lang werden. Wir betrachten zunächst die erste Möglichkeit. Die Verkehrsraumgrenzen des Ansatzpunktes P sind Umhüllungsflächen, entstanden durch Kugelflächen gleicher Radien, deren Mittelpunkte fortlaufend auf bestimmten Kurven angeordnet sind.

In Figur 68 ist als Fußpunktslinie eine Ellipse angenommen. Die Ellipse ist dick gezeichnet. Aus einer Anzahl von auf ihr liegenden Punkten sind Kreise mit zwei verschiedenen Halbmessern — Bandlängen — geschlagen. Es ergeben sich, wie die Figur zeigt, 2 umhüllte Figuren, die wieder Ellipsen sind, deren Achsen jedoch normal zu den entsprechenden Achsen der Fußpunktsellipse stehen. Mittelst der Figur 69 sind die Verhältnisse der Verkehrsraumgrenze im Raume untersucht. Die Figur 69b dient dazu, die Schnittfiguren in verschiedenen der Fußpunktslinienebene parallelen Ebenen zu zeichnen. Ist A irgend ein Punkt der Fußpunktslinie, so ist MM_4 der Bogen aus diesem Punkt normal zur Ebene der Figur 69a. Die jedem Bandursprung zugehörige Verkehrsraumgrenze in den verschiedenen parallelen Ebenen ist ein Kreis mit den Radien A_1M_1, A_2M_2 usw. In Figur 69a ist statt der Ellipse ein elliptisches Sechzehneck genommen. Die Bogenpolygone zeigen die Schnitte in den Ebenen der Figur 69b. Auch das sind Figuren, die bei Vermehrung der Punktzahl in Ellipsen übergehen. Auch Schnitte durch die Verkehrsraumgrenze parallel den Achsen B_1B_2 und A_1A_2 ergeben Ellipsen, die Verkehrsraumgrenzfläche des Punktes P ist also in diesem Falle ein dreiachsiges Ellipsoid, wie es aus der Polarisationslehre des Lichtes her bekannt ist.

Der von den einzelnen Bändern zugeordneten Kugeln abgegrenzte Raum ist der allen diesen Kugeln gemeinsame Teil derselben. Daraus ergibt sich, daß nicht jede Kurve in beliebiger Ausdehnung als Fußpunktslinie geeignet ist. Es findet sich nämlich sehr bald eine Kugel, die mit einem Teil der Umhüllungsfläche einen Raum abgrenzt, an dessen Begrenzung die anderen Kugeln keinen Teil mehr haben, der also vollkommen innerhalb eines Teils der anderen Kugelflächen liegt. Um das zu zeigen, wählen wir als Beispiel die Parabel (Fig. 70). Die Figur zeigt eine Anzahl auf einer Parabel liegender Punkte 1–8, 2a–4a, um die mit konstantem Halbmesser — Länge des Bandelements 1 des Systems — Bögen geschlagen sind. Bis zum Bogen 4 gibt es ein Bogenpolygon, bei dem in umgekehrter Reihenfolge sich die den Punkten zugehörigen Bögen folgen. (Die Schnittpunkte wandern in entgegengesetzter Richtung wie die Zirkelspitze.) Schließlich kommt, je nach der Bandlänge, ein Bogen der nicht mehr den letzten, sondern den vorletzten Bogen schneidet. Der Bogenschnittpunkt wird also rückläufig. Schließlich fallen die Kugeln so aus, daß sie einen Teil der übrigen überhaupt nicht mehr schneiden. Figur 71 zeigt eine Kardioide. Die aus dem Bogen um D mit den Bögen um C und B gebildete Figur liegt vollkommen innerhalb des Kreises, der mit derselben Bandlänge aus A geschlagen ist. Es können also nur die Bänder an der Bildung der Verkehrsraumgrenze beteiligen, die von C aus über D bis B fußen, wenn C und B die Punkte der Kurve sind, für die es eine gemeinsame Tangente gibt.

Diese Beschränkung ist für unsere Theorie der Bandwirkung von untergeordneter Bedeutung. Für empirische Bänder kommen immer nur kurze Strecken einer Linie in Betracht. In Figur 72 ist eine beliebige Ursprungslinie gezeichnet. Rund herum ist die Umhüllungsfigur gezeichnet, die entsteht, wenn mit dem gleichen Halbmesser aus vielen Punkten der Linie Bögen geschlagen werden. Die entstehende Figur ist also die Verkehrsraumgrenze eines Punktes P, an dem ein System aus gleichlangen Bändern sich ansetzt.

Das System, von dem wir ausgingen, war das aus gleichlangen Bandelementen bestehende, auf einem Kreise fußende System. Das System heiße zur Abkürzung das System I. Wir führen jetzt die zweite Variation dieses Systems aus, von der wir oben gesprochen hatten, wir variieren die Bandlängen so, daß jedem Fußpunkt eine besondere Länge zukommt. Diese Verschiedenheit der Bandlängen soll jedoch so sein, daß einer sehr kleinen Entfernung der Fußpunkte auf der Fußpunktslinie voneinander, auch eine sehr kleine Verschiedenheit der Bandlängen entspricht. Die Bandlänge muß mit anderen Worten eine stetige Funktion der Lage des Fußpunktes sein. Ist diese Funktion nicht stetig, entspricht einem verschwindenden Fußpunktsabstand ein endlicher Längenunterschied der entspringenden Bänder, so hüllt die Kugel mit dem größeren Radius die mit dem kleineren Radius vollkommen ein, schneidet sie nicht, und das längere Band ist wirkungslos.

Um zu Beispielen solcher Funktionen zu gelangen, gehen wir auf den 3 F, P-Verband und seine Erweiterung, den n F, P-Verband, zurück. Für dessen Umkehrung, den 3 P, F- und n P, F-Verband hatten wir gefunden, daß die Bänder die geschlossene Ebene des Bewegungsgliedes nicht verändern, die der Gleichung $l^2 = p^2 + r^2$ genügen. Auf den n F, P-Verband (die Umkehrung des n P, F-Verbandes) angewandt, bedeutet die Gleichung, daß in einem Punkte H, der den Abstand p von der Fußpunktsebene hat, alle Bänder gespannt sind. r ist dabei die Entfernung des Fußpunktes von der Projektion H_p des Punktes H auf die Fußpunktsebene, also die Projektion des gespannten Bandes auf diese Ebene. Wir lassen nun weiter die Fußpunkte nicht nur in einer Ebene, sondern auf einem Kreise liegen (Fig. 73).

Dann heißt die Gleichung $l^2 = p^2 + l_p^2$. lp, die Projektion des gespannten Bandes auf die Fußpunktsebene ist ersetzbar durch den Winkel φ, der die Lage des Fußpunktes auf dem Kreise von der Geraden MH_p aus gerechnet angibt. $l^2 = p^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos\alpha$ gilt dann für die Bandlänge des Systems. p, r und a sind Konstanten. Der Verkehrsraum von P ist eine Kugelflächenpyramide von der Höhe p und soviel Seiten, wie Bänder; die Basis ist ein Bogenpolygon. Mit wachsender Bandzahl nähert sich das Bogenpolygon einer Kurve. Das System I ist gegeben, wenn a=0 wird. l wird dann konstant. Wir lassen jetzt l nicht konstant sein, aber p=0.

H fällt dann mit Hp zusammen, der Punkt größter Stützung liegt in der Fußpunktsebene (Fig. 74). Das halbe Bogenpolygon wird gebildet aus allen Kreisen, die ihren Mittelpunkt zwischen F_0 und F_t haben, wenn F_t der Berührungspunkt der Tangente aus H an den Fußpunktskreis ist; alle Kreise mit dem Mittelpunkt jenseits F_t, von F_0 aus gerechnet, schneiden den kleinsten Kreis, den aus F_0 mit FH nicht. Beim Grenzübergang zum System wird das Polygon zu einer symmetrischen Kurvenfigur mit einer Ecke in H. Figur 75 gibt eine Skizze des Raumgebildes, aus Streifen von Kugelflächen. Die Strecke von F_t über F_n nach $F_{t'}$ in Fig. 74 ergibt kein Bogenpolygon, da das durch die beiden aus F_t und $F_{t'}$ geschlagenen Bögen begrenzte Zweieck vollständig innerhalb aller aus den Punkten jenseits F_t und $F_{t'}$ geschlagenen Kreisen liegt.

Die Figur 76 zeigt ein Bogenpolygon, das der Basis der Kugelflächenpyramide entspricht, wenn $p > 0$ ist. l wird dann für jeden Punkt der Kreisperipherie gefunden als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus p und dem Fahrstrahl von H_p nach dem betreffenden Punkt des Kreises. An diesem Bogenpolygon nehmen die Bögen aus allen

Punkten des Kreises teil. Verkleinert man sukzessive p, so stellen die erhaltenen Bogenpolygone Schnitte dar durch die Kugelflächenpyramide, parallel der Fußpunktsebene. Der Schnitt durch H ist dann das Polygon für $p = 0$.

Figur 77 zeigt eine andere hyperbolische Funktion zwischen l und dem Abstande der Fußpunkte. Der Fußpunktskreis (gewählt ist als Annäherung ein 36-Eck) ist auf einer Geraden Y abgerollt. Die einander entsprechenden Punkte 1, 2, 3 usw. sind durch gleiche Zahlen auf der Geraden und dem Kreise markiert. 0A ist die Konstante. 01, 02 usw. sind dann die Bandlängen, die $= y^2 + 0A^2$ sind. y ist der Fußpunktsabstand. Das entstehende Bogenpolygon ist ein Teil einer Spirallinie. Beachtet man nur die Teile der umhüllenden Kreise aus den Punkten des Fußpunktkreises, die zwischen den durch Punkte markierten Ecken des Polygons liegen, so läuft die Linie endlos fort. Für die Stützkugeln von Bändern ist diese Beschränkung der Betrachtung unzulässig, und so endet die Linie beim Punkte Z, dem Schnitt der Spirallinie mit dem kleinsten Kreise, dem aus dem Punkte 1.

Auf diese Weise kann man sich allerlei Führungsflächen für einen solchen Insertionspunkt ableiten. Wird l z. B. mittlere Proportionale zwischen einer Konstanten a und dem Fußpunktsabstand y, so wird die Funktion parabolisch usw.

In der gleichen Weise kann man diese Gedankengänge auf andere Kurven als Fußpunktslinien anwenden, auch eine Gerade als solche ist denkbar. Noch mannigfacher werden die Verkehrsraumgrenzen, wenn nicht ebene, sondern allerlei Raumkurven als Fußpunktslinien dienen. Nur muß der einen Bedingung genügt werden, daß sich fortlaufend überschneidende Bögen zustande kommen, die ein Bogenpolygon bilden, aus dem dann beim Grenzübergang zu kontinuierlich mit Bandelementen besetzten Fußpunktslinien Kurven oder bei Betrachtung der Raumverhältnisse krumme Flächen entstehen.

Damit wollen wir die Bandsysteme mit der allgemeinen Formel nF, P verlassen. Das Verhalten der Bandlängen kann durch den Ausdruck $dl = F(df)$ ausgedrückt werden, wenn dl der Längenunterschied zweier sehr naher Bänder, df der Abstand ihrer beiden Fußpunkte ist.

VIII.

Wir nehmen jetzt an den soeben besprochenen Bandverbänden die kinematische Umkehrung vor. Der Punkt P wird zum Fußpunkt F, die Ursprungslinie zur Ansatzlinie $P_1 P_n$.

Auch hier beginnen wir mit dem System I, das heißt dessen Umkehrung. Es entspringt also jetzt eine flächenhaft entwickelte Bandmasse aus einem Punkte F und setzt sich an einer Kreislinie von P_1 bis P_n an. Die Länge der Bandelemente ist im System konstant, dabei größer als die des Ansatzbogenhalbmessers.

Zur Ableitung der Beweglichkeit des Bewegungsgliedes — vertreten durch den Ansatzbogen — gegen das Grundglied lösen wir den Bogen in ein Polygon auf, dessen Ecken alle auf dem Bogen liegen. Die Ecken nennen wir P_1, P_2 usw., in jeder Ecke lassen wir ein Band ansetzen, alle seien von der gleichen Länge l, diese Länge ist größer als der Radius des Bogens (Fig. 78).

Wir führen nun die vorläufige Bedingung ein, daß F und das ebene Polygon in einer Ebene bleiben sollen. Wir nennen das die ebene Anordnung des Verbandes. Jeder Punkt

P hat dann zunächst einen Verkehrsraum mit kugeliger Grenzfläche um F und dem Halbmesser des ansetzenden Bandes. Diese Kugel ist durch den Kreis um F in Figur 78 angedeutet. Bringe ich nun einen Punkt in seine Stützfläche, so schließe ich den Verband. Wir lassen noch einen zweiten benachbarten Punkt in seine Stützfläche eintreten, und erhalten so eine geschlossene Gerade $P_2 P_3$ (Fig. 78). Dieses gleichzeitige Eintreten zweier Punkte in ihre Stützflächen wird sich um so eher ereignen, je näher die Punkte beieinander liegen, je flacher der Winkel bei P_2 ist. Gehen wir zur Grenze über, machen wir das Polygon zur Kurve, so muß der Fall eintreten, daß immer zwei benachbarte Punkte gleichzeitig in ihren Stützflächen sich befinden[1]). Wir behandeln also auch unser Polygon so, daß immer zwei benachbarte Punkte gleichzeitig in ihren Stützflächen sich befinden, der Verband also, da nur ein Fußpunkt vorhanden, linear geschlossen ist. Beide Punkte haben also die Beweglichkeit 2, das Dreieck $F P_2 P_3$ bildet also eine starre Figur, die um F sphärisch beweglich ist.

Nun kann ich die Anordnung des Verbandes nach zwei Richtungen hin variieren. Es kann die Eigenschaft, geschlossene Linie zu sein, an eine andere Polygonseite übergehen, und es kann die ebene Konfiguration aufgegeben werden, d. h. die übrigen Polygonseiten treten aus der Ebene des Dreiecks $P_2 P_3 F$ heraus. Betrachten wir zunächst die erste Veränderung, d. h. wir machen in Gedanken ein Bewegungsexperiment, und lassen P_4 in seine Stützfläche eintreten, P_2, aus der seinigen heraustreten. Eine solche Bewegung bezeichnet man als abrollen (Fig. 79). Dabei ist nun gleichgültig, wo die Punkte auf ihrer Stützfläche sich bei dieser Änderung befinden, das heißt diese Bewegung ist unabhängig von der sphärischen Beweglichkeit um F. Wir führen deshalb eine Trennung aus. Wir führen ein zweites Polygon ein, dessen Winkel größer sind als die des Ansatzpunktspolygons und zwar um soviel, daß alle Ecken gleichzeitig, trotz der ebenen Anordnung — F in der Polygonebene — in den zugehörigen Stützflächen sich befinden. Bringen wir es in die richtige Lage, so hat jede Ecke den Abstand l von F, in Fig. 80 mit K_2 bezeichnet und dünn ausgezogen. Wir können uns jede seiner Ecken durch ein Bandelement mit F verbunden denken. Diesem Polygon erteilen wir die sphärische Beweglichkeit um F, wobei es mit F eine starre Figur bildet. Jeder Seite dieses Stützflächenpolygons entspricht eine Seite des Ansatzpunktspolygons. Wir haben also drei kinematische Figuren, K_1 das Koordinatensystem des Grundgliedes — in Fig. 79 unterbrochen gezeichnet —; K_2, die um F sphärisch bewegliche Figur, und K_3, die im Bewegungsglied feste Figur, die stark ausgezogen ist. K_2 ist gegen K_1 sphärisch beweglich, K_3 gegen K_2 zwangläufig solange wir die ebene Konfiguration beibehalten. Dieser Zwanglauf besteht darin, daß K_3 auf K_2 abrollt, wobei die verschiedenen Polygonseiten nacheinander zur Deckung gelangen.

Jetzt heben wir die vorläufige Bedingung auf. $P_2 P_3$ sei geschlossene Linie. Ein beliebiger Punkt des Bewegungsgliedes hat für $P_2^0 P_3^0$ als geometrischen Ort einen Kreis mit dieser Geraden als Achse. Solange diese Gerade geschlossene Linie bleibt, liegt die Beweglichkeit $\frac{S}{2, 2, 3}$ des 2 P, F-Verbandes vor[2]). Der Verband besteht also aus einer

[1]) Diese Fläche ist für alle Punkte beim System I dieselbe, das ist aber ein Spezialfall; um eine Entwicklung zu gewinnen, die für alle Systeme gilt, sehen wir von dieser Tatsache ab, und behandeln die Stützfläche jedes Punktes als eine von denen der übrigen Punkte verschiedene.

[2]) Wenn wir die Trennung in 3 Figuren fallen lassen.

Reihe von 2P, F-Verbänden, sovielen als das Polygon Seiten hat. Diese Verbände werden beim Übergang der geschlossenen Linie von S_1 auf S_2 usw. nacheinander eingeschaltet. Wenn jede Polygonseite S heißt, können wir den Verband auch schreiben $\sum_{S_1}^{S_n} \frac{S}{2, 2, 3}$. Beim Grenzübergang vom Polygon zur Kurve lautet der Ausdruck dann $\sum_{P_1}^{P_n} \frac{ds}{2, 2, 3}$, die Polygonseite wird zum Kurvenelement (Fig. 81).

Wir kehren zu unseren drei kinematischen Figuren zurück. Mit dem Aufgeben der ebenen Anordnung des Verbandes ändert sich an der Beweglichkeit von K_2 gegen K_1 nichts. K_3 dagegen ist nicht mehr gegen K_2 zwangsläufig und wird so beweglich, daß jedem Punkt von K_2 gegen K_2 eine Verkehrsfläche zukommt. Diese Flächen können wir uns folgendermaßen ableiten: Für jede Berührungsart der beiden kinematischen Figuren (Bedingung $P^0{}_2P^0{}_3$ relativ zu K_2) kommt einem Punkt von K_3, etwa K_5, als geometrischer Ort ein Kreis zu, Beweglichkeit 0, 0, 1. Für jede Berührungsart der beiden Figuren ist der Kreis ein anderer, setzen wir diese Kreise zusammen, so kommt eine Verkehrsfläche für jeden Punkt des Bewegungsgliedes relativ zu K_2 heraus. Analytisch hat der Verband (aus K_3 und K_2) zwei unabhängige Variable, die am besten durch die Ordnungsnummer der sich deckenden beiden Kurvenelemente und den Winkel, den die beiden Kurvenebenen miteinander bilden, dargestellt werden. Die Beweglichkeitsformel würde durch 2, 2, 2 oder $\sum_{P_1}^{P_n} \frac{ds}{0, 0, 1}$ dargestellt werden.

Der Übergang vom Polygon zur Kurve, von dem wir bereits mehrfach gehandelt haben, vollzieht sich durch fortschreitende Vermehrung der Bänder. Die Polygonseite S wird zum Kurvenelement ds, was wir in unseren Formeln bereits mehrfach zum Ausdruck gebracht haben. Figur 81 zeigt den Fall, in dem das Ansatzpolygon zum Kreise geworden ist. Die Bandlänge ist konstant (System I). K_2 besteht dann aus dem Bogen mit dem Radius 1; er hat die gleiche Länge wie der Ansatzbogen K mit dem Halbmesser r.

Nun ist die Beweglichkeit des nP,F-Systems auch anders darzustellen und zwar durch eine Anwendung der im vorigen Kapitel gefundenen Beziehungen. Der Punkt F wird zum Mittelpunkt eines Koordinatenkreuzes im Grundglied. Eine im Bewegungsglied feste Fläche, von der im vorigen Kapitel erläuterten Gestalt (Verkehrsfläche des Punktes P) bleibt ständig mit dem Mittelpunkt des Kreuzes in Berührung. Machen wir mit dem Paar, fester Punkt und bewegliche Fläche, in Gedanken einige Bewegungsexperimente. Die Fläche bestand beim System I aus einer Umdrehungsfläche (Fig. 82), an der wir Meridian und Breitenkreise unterscheiden können, sowie zwei Pole, die Schnittpunkte der Umdrehungsachse mit der Fläche, H und H'. Der Breitenkreis, der von jedem Pol gleichweit entfernt, nennen wir den Äquator. Gehen wir von einer Stellung aus, in der der Punkt F im Äquator in einem Meridian m steht. Die Lage des Punktes F im Äquator entspricht der ebenen Anordnung des Verbandes. Der Winkel beider Kurvenebenen wird durch den Breitenkreis gemessen. Bewegen wir nun die Fläche so, daß F seine Lage (im Äquator und auf dem Meridian m) beibehält, die Fläche also nur ihre Lage relativ zum Achsenkreuz ändert, so kommen sphärische Bewegungen der Fläche um den so bezeichneten Punkt heraus. Diese Bewegungen entsprechen einer Bewegung von K_2 gegen K_1. Ändert F den Meridian, so wird ein anderes Bandpaar beansprucht, die Bewegung entspricht einer Bewegung von K_3 gegen K_2 unter Beibehaltung der ebenen Anordnung, eine Änderung des Breitenkreises entspricht einer Änderung des Winkels, den beide Kurvenebenen der Figur 80 miteinander bilden. Fällt der Pol H oder H′ nach F, so entspricht das der Lage größter Stützung, der Lage, in der sämtliche Bänder beansprucht werden.

Wir wollen jetzt die drei kinematischen Figuren für einige andere Systeme vom Typus nP,F ableiten.

Figur 82 zeigt die Umkehrung des Bandsystems mit elliptischer Ursprungslinie. Die Ansatzlinie ist also eine Ellipse, die Bänder sind alle von gleicher Länge. K_2 ist also ein Kreisbogen von der Länge des bandbesetzten Ellipsenbogens und dem Halbmesser l. Mit diesem Bogen bleibt das Ellipsenstück K_3 so in Berührung, daß ein Punkt und die Tangenten des Berührungspunktes sich decken. Alles ist dem vorher behandelten Falle gleich bis auf K_3, wo an Stelle des Kreisbogens ein Stück einer Ellipse getreten ist.

Sind die Bänder nicht gleichlang, sondern in ihrer Länge eine Funktion des Ansatzpunktes, so kann statt des Kreisbogens K_2 eine andere um F sphärisch bewegliche Figur eintreten. Die beiden Figuren 84 und 85 zeigen ein System, dessen Ansatzlinie wieder ein Kreisbogen ist, die Bandlänge ist $l = \sqrt{A - B \cos \varphi}$, wobei φ der Ansatzpunktsabstand auf dem Kreise, dividiert durch den Radius dieses Kreises ist, A und B sind Konstanten[1]). Die Figur K_2 erhält man dadurch, daß man sich die Ansatzlinie soweit verbogen denkt, bis alle Bänder gleichzeitig gespannt sind. Im vorliegenden Falle geht diese Verbiegung soweit, daß ein gleicher Bogen, nur mit entgegengesetzt gerichteter Konvexität entsteht. Die Konvexität ist nach dem fest mit dieser Figur — K_2 — verbundenen Punkte F hin gerichtet. Gehen wir von einer beliebigen aber ebenen Lage aus (Fig. 84), so kann der Verband auf verschiedene Weise in die Stellung mit Spannung aller Bänder (3P,F-Stellung) übergeführt werden. Einmal unter Beibehaltung der ebenen Anordnung durch Abrollen von K_3 auf K_2 bis zu der in Figur 85 gezeichneten Stellung. Die Lage von K_3 ist dieselbe wie die von K_2, alle Bänder sind gespannt. Diese Lage läßt sich auch so erreichen, daß K_3 in die Lage gebracht wird, in der das kürzeste Band, p, gespannt ist. Wird dann K_3 um die gemeinsame Tangente beider Figuren rotieren lassen, so werden beide Figuren zur Deckung gebracht, also der Verband wieder in die Lage mit Spannung sämtlicher Bänder gebracht.

Eine weitere Figur (86) zeigt die Umkehrung des Verbandes, in dem $l = \sqrt{p^2 + r^2\varphi^2}$ war[2]), und zwar gleichzeitig $r = p$. Dann wird die K_2-Kurve zur geraden Linie, denn spannen wir unter Verbiegung der Ansatzlinie die Bänder, so wird die Ansatzlinie zur Geraden. In der Figur sind Näherungen durch Polygone, davon eins mit gestreckten Winkeln, gezeichnet.

[1]) Vgl. Fig. 73 im vorigen Kapitel, wo $l^2 = p^2 + r^2 - 2\,pr\cos\varphi$ und φ die Lage von F auf dem Ursprungskreis angibt.

[2]) p eine Konstante, r der Radius des Ansatzkreises, φ das Bogenmaß des Peripheriestückes dieses Kreises.

IX.

Von den mannigfachen Möglichkeiten, wie Bandelemente zu einem System vereinigt werden können, sollen nur noch einige Beispiele angeführt werden. Die Einteilung ergibt sich nach ähnlichen Gesichtspunkten, wie wir sie bisher angewandt haben.

Wir hatten solche Verbände einfache Bandverbände genannt, bei denen die Elemente einen gemeinsamen Fußpunkt oder nach Umkehrung des Verbandes einen gemeinsamen Ansatzpunkt hatten. nP,F oder nF,P-Verbände hatten wir sie bezeichnet. Auch die bisher besprochenen Systeme waren solche Verbände. Die Anordnung mF, nP hatten wir kombinierte Verbände genannt. Eine solche Formel kann auch ein System bedeuten. Wir wollen nur die Systeme hier behandeln, bei denen m=n ist. Zugleich beschränken wir uns, wie wir das auch bisher getan haben, auf die Behandlung ebener Ansatz- und Ursprungslinien. Nun sind weiter Verbände sehr selten das einzige Führungsmittel, das zwei starre Skeletteile zu einem Verbande vereinigt. Sie finden sich mit Berührungspaaren vereinigt vor. Wir wollen deshalb auch nur Ausschnitte aus der Kinematik solcher Bänder betrachten, wobei wir die Anordnung bevorzugen, bei der Fuß- und Ansatzlinie sich in einer Ebene befinden. Wir denken uns dann allerlei Bewegungsexperimente ausgeführt und untersuchen, wie der Bandapparat sich dabei verhält.

Figur 87 zeigt einen Verband aus zwei Bändern, l_1 und l_2. Beide Bänder sind gleich lang und der Abstand der Fußpunkte — α — ist gleich dem der Ansatzpunkte — a. Es liegt ein 2P,2F-Verband vor, wie er in einem der früheren Kapitel besprochen wurde. Nun fügen wir ein drittes Band ein l_3. Auch dieses habe dieselbe Länge, wie die beiden vorigen, und wieder sei der Fußpunktsabstand gleich dem Ansatzpunktsabstand — ($F_2F_3=P_2P_3$) —. Dann sind bei ebener Anordnung des Verbandes alle drei gespannten Bänder parallel. Jetzt kann eine ebene Bewegung ausgeführt werden, bei der alle drei Bänder gespannt bleiben. Die Anzahl solcher Bänder kann beliebig vermehrt werden. Es liegt die Anordnung einer ebenen Kurbel vor, mit gleichlangen einander gegenüberliegenden Gliedern. Eine solche Parallelogrammkurbel ist aber zugleich der einzige Fall einer Kurbel, bei der auch die Punkte des dem Grundglied gegenüberliegenden Gliedes, relativ zu diesen Kreisbögen beschreiben. Daraus ergibt sich, daß die parallelfaserige Bandplatte aus gleichlangen Bandelementen der einzige Fall eines nP, nF-Systems mit gleichzeitiger Spannung aller Bänder in einer Ebene ist.

Das wird durch Figur 88 erläutert, die einen anderen beliebigen Fall mit verschiedenen Bandlängen zeigt. Der Punkt P_3 beschreibt bei ebener Bewegung in der Papierebene keinen Kreis, verschiedene Lagen der Geraden $P_1P_3P_2$ für die ebene Bewegung sind gezeichnet. Die Bewegung entsprechend der linken Seite der Zeichnung ist nicht möglich, da P_3 außerhalb seiner Verkehrsraumgrenze zu liegen kommt.

Wir untersuchen jetzt ein nP,nF-System, bei dem nur zwei Bandelemente gleichzeitig beansprucht sind. Der Verband verhält sich also in jeder Lage, wie ein 2P, 2F-Verband, er ist eine Summe aus solchen Verbänden, ganz wie wir den nP,F-Verband als eine Summe aus 2P,F-Verbänden abgeleitet haben. Unser Vorgehen ist wieder so, daß wir Polygone aus Ansatz- und Fußpunkten betrachten. Ein Grenzübergang mit ständig sich verkleinernden Polygonseiten führt dann zu stetig angeordneten Bandsystemen.

Die folgende Figur (89) zeigt zunächst einen Verband, bei dem zwei Bänder l_0 und l_1 gespannt sind. In fortlaufender Reihe setzen sich dann, von P_1 aus, Bänder an, deren Ansatzpunkte mit den bisher genannten alle auf derselben Geraden liegen, die aber so lang sind, daß sie bei ebener Anordnung des Verbandes, nicht gleichzeitig mit l_0 und l_1 gespannt sind. Um das dritte Band zu spannen, drehe ich das Bewegungsglied um P_1, entsprechend der Pfeilrichtung. Diese Drehung dauert solange, bis P_2 in seine Verkehrsraumgrenze eintritt (Fig. 90). Dann wird auch l_2 gespannt, während l_0 gleichzeitig entspannt wird. Dasselbe kann ich nun wiederholen. P_2 wird Drehpunkt (Pol) und P_3 tritt in seine Verkehrsraumgrenze ein (Fig. 91). So wird die ganze Reihe der Bänder nacheinander angespannt.

Die so ausgeführte Bewegung ist eine Abwickelbewegung zweier Polygone aufeinander (Fig. 92). Durch Verkleinerung der Polygonseiten nähern sich die aufeinander abgewickelten Figuren-Kurven, die Seite wird zum Kurvenelement ds. In jeder Lage erweist sich der Verband als 2P,F-Verband.

Damit ist das wesentliche über die nPnF-Systeme gesagt. Es kann noch hinzugefügt werden, daß eine Stellung der beiden Glieder zueinander denkbar ist, in der alle Bandelemente oder doch ein größerer Teil von ihnen gespannt wird, und daß dieses bei einer nicht ebenen Anordnung der beiden Kurven der Fall ist. Wenn z. B. in Figur 90 P_0 nach vorn aus der Zeichenebene herausgeführt wird, kann bei passendem Verhältnis der Bandlängen P_0 wieder in seine Verkehrsraumgrenze eintreten und so drei Bänder beansprucht werden.

Wir wählten in dem eben besprochenen Beispiel die einfachste Anordnung der F- und P-Punkte, gerade Linien. Selbstverständlich können auch krumme Linien verschiedener Art als Ansatz- oder Fußpunktskurven dienen.

Bei der kinematischen Umkehrung, Vertauschung von Bewegungs- und Bezugsglied ändert sich die Art des Verbandes nicht.

Damit wollen wir die Besprechung der Bandverbände verlassen und noch in einem Anhang die Anwendung unserer Methode, Verbände zu betrachten und zu analysieren, auf Berührungspaare, gelenkartige Verbände anwenden.

ANHANG.

In den vorhergehenden Kapiteln sind Begriffe entwickelt und angewandt worden, die von denen sonst in der Kinematik tierischer Verbände üblichen in mancher Hinsicht abweichen. Insbesondere haben wir den Begriff des Freiheitsgrades kaum angewandt, um die Beweglichkeit eines Verbandes zu charakterisieren, sondern wir haben von den geometrischen Örtern von Punkten geredet, die wir seine Verkehrsräume, -flächen und -linien genannt hatten. Eine Begründung dieser Abweichung soll in dem Folgenden versucht werden, und es soll weiter gezeigt werden, wie sich die früher für die Untersuchung der Beweglichkeit von Bandverbänden als brauchbar befundenen Begriffe, auf die Probleme, die gelenkartige Verbände bieten, anwenden lassen.

Nun ist allerdings der Unterschied, der hier gewählten Darstellungsart nicht gar so groß, wie es zuerst den Anschein haben könnte. Vielmehr geht in den Begriff der geometrischen Örter verschiedener, besonderer oder beliebiger Punkte des Bewegungsgliedes alles das ein, was an dem Begriff des Freiheitsgrades das wesentliche ist. Ich glaube jedoch, daß verschiedene Dinge, die besonders die biologischen Beziehungen betreffen, besonders deutlich werden.

Ein wesentlicher Teil unserer Begriffsbildung läuft darauf hinaus, die Begriffe Bewegung und Beweglichkeit besser auseinander zu halten, als das meines Erachtens vielfach, z. B. von O. FISCHER geschehen ist. Nun haben im allgemeinen die Lehrbücher der Mechanik keine besondere Veranlassung, den Begriff der Beweglichkeit besonders herauszuheben. Freie Verbände kommen abgesehen von Kugelgelenken und Kombinationen von Scharnieren, nur für die Kinematik der tierischen Bewegungsorgane in Betracht, ja in den Begriff der Freiheit in bezug auf Bewegungen mischt sich immer etwas Biologisches hinein, es taucht der Gedanke an ein Zentralnervensystem auf, das aus den „Möglichkeiten" eine Auswahl trifft. Kommen in der Technik schon einmal „freie" Verbände vor, so wird — es ist an die Lokomotivräder und die Schienen gedacht (REULEAUX) — durch Reibung und Gewicht ein Zwanglauf daraus hergestellt.

Ich glaube, daß man sich die Probleme der tierischen Verbände und ihrer Kinematik klärt, wenn man auseinanderhält, ob es sich um — eine, oder mehrere verschiedene — Bewegungen handelt, oder um die Beweglichkeit zweier miteinander zu einem Verband durch Mittel toter Führung vereinigte starre Punktsysteme. Die Beschränkung des Begriffes der Beweglichkeit auf die Wirkung der Mittel toter Führung halte ich für etwas Wesentliches. Ihre Charakterisierung soll eine solche des Verstandes sein; die Anordnungen der angreifenden Muskulatur sind dabei keine den Verband charakterisierende Größen, ebensowenig ist es die Schwerkraft, da die Lage des Gliedes im Gravitationsfeld wechselt, und auch die Massenverteilung in den beiden zum Verband vereinigten Gliedern ist etwas für die Verbandskinematik unwesentliches. Führt man als Beweglichkeit die Summe der Bewegungen ein, die das lebende Tier mit dem Verbande ausführen kann, so erhält man einen ganz anderen für die Verbandskinematik unbrauchbaren Begriff, unbrauchbar deshalb, weil für diese Beweglichkeit nicht allein die Konstruktion des Verbandes, d. h. die Gestalt der Gelenkflächen, die Länge und Anordnung der Bänder maßgebend ist, sondern eine Menge von Faktoren, die in die Nerven- und Muskelphysiologie gehören. Man wird niemals einen Einblick in die Konstruktion und Beweglichkeit der Verbände bekommen, wenn man nicht von der Innervationsphysiologie der sie bewegenden Muskeln absieht. Unser Verband ist also ein Verband ohne Muskeln. — Was das Tier im Leben damit anfängt, ist Bewegungsphysiologie, über die wir bereits in früheren Kapiteln einiges gesagt haben.

Unter Bewegung verstehen wir also einen Vorgang, ein empirisches oder gedachtes Ereignis, das in der Lageänderung von Punkten oder Punktsystemen besteht. Unter Beweglichkeit ist dann der Schauplatz dieses Ereignisses verstanden und zwar aller der Bewegungen, die mit dem Verbande möglich sind.

Diese beiden Definitionen setzen zweierlei voraus. Die erste Voraussetzung gilt für beide Begriffe und ist unter dem Namen des Prinzipes der Relativität einer jeden Bewegung bekannt. Es besagt, daß ein Bezugsglied genannt, eingeführt und beibehalten wird, auf das sich die behandelte Bewegung bezieht. Eine Änderung des Bezugssystems macht auch die Bewegung zu einer anderen. Die zweite Voraussetzung gilt für den Begriff der Beweglichkeit allein. Es müssen bestimmte Beweglichkeitsbedingungen des behandelten Punktes oder Punktsystems genannt, eingeführt und beibehalten werden.

Die Bewegung wird als eine Funktion der Zeit dargestellt, so, daß jedem Zeitpunkt eine bestimmte Lage des betreffenden Gliedes zugeordnet ist. Von den Massen und den angreifenden Kräften kann man auch absehen. Man kann jedoch auch von der Geschwindigkeit absehen. Es bleibt dann eine Bewegungsgeometrie, eine Geometrie der Punktbahnen übrig. Ein solches rein geometrisches Problem ist auch das der Beweglichkeit. REULEAUX' theoretische Kinematik ist eine solche Bewegungsgeometrie. Den Begriff der Beweglichkeit von dem der Bewegung zu sondern, hat er jedoch keine Ursache. Seine Kinematik ist Zwanglauflehre. In den zwangläufigen Verbänden ist nur eine bestimmte Bewegung — bestimmt soweit die Geometrie der Punktbahnen in Betracht kommt — möglich. Die Bewegung und der Schauplatz der möglichen Bewegungen fallen also zusammen. Wir müssen also die REULEAUXsche Begriffswelt auszubauen versuchen, wenn wir sie mit Gewinn auf die meist nicht zwangläufigen tierischen Verbände anwenden wollen. Das haben wir schon früher getan und werden es jetzt fortzusetzen versuchen.

Wir beschäftigen uns insofern nur mit starren Punktsystemen als die Glieder, von denen Bewegung und Beweglichkeit ausgesagt werden, als vollkommen starre Systeme behandelt werden. Das eine starre Gebilde ist der Träger des Koordinatensystems, auf das die Bewegung oder die die Beweglichkeit charakterisierenden Angaben sich beziehen. Von einem anderen starren Gebilde werden die Bewegung oder die Beweglichkeit ausgesagt. Man hat also immer ein Paar starrer Punktsysteme vor sich. Wohl kann die Bewegung oder Beweglichkeit mehrerer Glieder auf dasselbe Koordinatensystem bezogen werden, es lassen sich aber niemals mehr als gleichzeitig ein Paar, eben das Bezugs- und das Bewegungsglied behandeln. Solche Körperpaare, die relativ zueinander ihre Lage ändern oder ändern können, sind also die Objekte der Kinematik. Wir wollen ein solches Paar kinematisches Paar nennen. Sind nun beide Glieder des Paares durch bestimmte Bedingungen, die sich auf ihre gegenseitige Beweglichkeit beziehen, verbunden, so nennen wir das Paar einen Verband. Nun kann allerdings ein Verband aus mehreren Gliedern bestehen, man denke an eine kinematische Kette. Es kann aber immer nur ein Paar betrachtet werden. REULEAUX erläutert das an der viergliedrigen Kurbel. Die Kurbel wird auf ein Glied „gestellt", das ist das Bezugsglied, die Bewegung eines anderen wird betrachtet, das ist das Bewegungsglied. Die beiden anderen Glieder gehören zu den Bedingungen, die für die Beweglichkeit, der Verband ist zwangläufig, gelten; sie sind Führungsmittel, um unsere frühere Bezeichnungsweise wieder einzuführen.

Wie wollen wir nun die Beweglichkeit des einen Gliedes gegen das andere beschreiben? Die Literatur bietet hierzu den Begriff des Freiheitsgrades.

Der Begriff des Freiheitsgrades hängt mit dem der Mannigfaltigkeit zusammen und gibt den Grad der Änderungsmannigfaltigkeit an. Ein Körper hat n Freiheitsgrade bedeutet, daß in bezug auf seine Lage relativ zu einem anderen Körper, n Koordinaten unabhängig voneinander variabel sind. Dieser andere Körper ist der Träger des Koordinatensystems, wechselt er, so wechselt auch das System und unter Umständen die Anzahl der Freiheits- oder Mannigfaltigkeitsgrade[1]) seiner Beweglichkeit. Der Mannig-

[1]) Ich ziehe den Ausdruck Mannigfaltigkeitsgrad vor wegen der biologischen Nebenbedeutung des Wortes Freiheit.

faltigkeitsgrad der Beweglichkeit ist also ein analytischer Begriff. Es erwächst die Aufgabe, ihn geometrisch zu deuten.

Ein isolierter Punkt ist durch 3 Koordinaten in seiner Lage bestimmt; die drei sind unabhängig voneinander; seine Beweglichkeit hat also 3 Mannigfaltigkeitsgrade. Ein starres Punktsystem ist durch die Lage dreier seiner Punkte bestimmt. Es sind also 9 Koordinaten vorhanden[1]). Diese sind aber nicht unabhängig, sondern sie sind durch Beziehungen verbunden, die wir bei Kapitel IV geometrisch untersucht haben. Durch Lageangaben in bezug auf einen Punkt sind gewisse geometrische Örter für die anderen gegeben. Diese Beziehungen lassen sich auch durch Gleichungen ausdrücken, und zwar so, daß in dem System von Gleichungen 6 unabhängige Koordinaten, die für den Körper gelten, übrig bleiben. Ein starrer Körper hat also 6 Freiheitsgrade. Diese Beziehungen haben wir die Bedingung der Starrheit des Punktsystems genannt. Für nicht starre Punktsysteme gelten sie nicht, hier gelten dann andere Beziehungen, wenn die Deformierbarkeit des Punktsystems erfaßt werden soll. Von diesen Betrachtungen aus kommen wir nun unmittelbar zu unseren Verkehrsflächen und Linien, den geometrischen Örtern.

Betrachten wir wieder einen isolierten Punkt, so werden 3 Mannigfaltigkeitsgrade der Beweglichkeit durch 3 unabhängige Koordinaten dargestellt. Für 2 Grade gelten wohl 3 Koordinaten, aber diese 3 sind durch eine Gleichung von der Form $x=f(y, z)$ verknüpft. Wir haben also wieder 3 Bestimmungsstücke für jede Lage, 1 Gleichung und jedesmal zwei Festsetzungen für die unabhängigen Koordinaten. Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck einer Fläche, die nichts anderes ist, als unsere frühere Verkehrsfläche des Punktes. Der Punkt ist flächenhaft beweglich und zwar — und das ist das wichtigste — auf der Fläche $x=f(y, z)$. Gelten für die 3 Koordinaten des Punktes 2 Gleichungen von der Form $x=f_1(y, z)$ und $x=f_2(y, z)$, so bleibt eine freie Koordinate übrig. Die beiden Gleichungen stellen zusammen eine Linie dar (Schnittkurve zweier Flächen). Diese Linie ist die Verkehrslinie des Punktes, er ist linear beweglich.

Wir haben in den vorherigen Kapiteln bestimmte Voraussetzungen angeführt, wenn wir die Beweglichkeit von Verbänden untersuchten. Diese Voraussetzungen bezogen sich auf die Art des Schlusses, dieser oder jener Punkt des Bewegungsgliedes sollte in bestimmte Flächen eintreten. Analytisch ausgedrückt heißt das, es sollen für die Koordinaten der Punkte bestimmte Gleichungen gelten. Diese Gleichungen kann man die Wirkungsgleichungen der Verbände nennen, zu denen die beiden Glieder vereinigt sind.

In ebensolche Gleichungen lassen sich die Bedingungen des starren Punktsystems fassen, was in den folgenden Absätzen angedeutet werden soll.

ABC sei wieder das das Bewegungsglied darstellende Dreieck, a die A, b die B, c die C gegenüberliegende Seite.

Dann haben die 3 Punkte 9 Koordinaten für die 3 Gleichungen bestehen. A habe die Koordinaten x_1 usw., B x_2, C x_3 usw.

[1]) Vgl. zu diesem HELMHOLZ, Reden und Vorträge Bd. 2. 1.

Gehen wir von A aus, so gilt für B die Gleichung $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=c^2$, für C die beiden Gleichungen $(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=b^2$ und $(x_3-x_2)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_2)^2=a^2$. Macht wieder 6 freie Koordinaten und 3 Gleichungen = 9 Angaben, 3 allgemein geltende, 6 variable Angaben für jede Lage der drei Punkte. Die Wirkung des Verbandes besteht darin, weitere Gleichungen, die die Zahl der unabhängig variablen Koordinaten verringern, zu liefern.

Unser Verfahren, die Beweglichkeit der Verbände zu charakterisieren, war nun kein analytisches, sondern ein synthetisches oder geometrisch-konstruktives. Die geometrische Darstellung dieser Gleichungen als geometrischer Örter für Punkte war unser allgemeines Verfahren, oder vielmehr wir gelangten gar nicht erst zum analytischen Ausdruck, sondern hielten uns von vornherein an das anschauliche, das geometrisch-konstruktive. Das hat zweierlei Vorteile. Einmal den, unmittelbar zum Begriff der Stützung, dem Fundamentalbegriff für die Konstruktion von Verbänden in Beziehung zu treten. Aus den geometrischen Örtern ergibt sich, wie wir das im folgenden sehen werden, leicht die Konstruktion des Verbandes. Der zweite Vorteil ist der, ausführlicher zu sein, als die Angabe des Mannigfaltigkeitsgrades.

Ein Beispiel soll das zeigen. Ein Körper ist mit drei Mannigfaltigkeitsgraden gegen einen anderen beweglich bedeutet, daß 3 bekannte Koordinaten alle übrigen (3) bestimmen. Ein Verband, in dem diese Beweglichkeit verwirklicht ist, ist das Kugelgelenk. Ein Punkt des Bewegungsgliedes liegt fest, A^0, alle übrigen bewegen sich auf Kugelflächen B^2, C^2. Der Verband erlaubt dem Bewegungsglied, unter der Voraussetzung des Schlusses, eine flächenhafte Beweglichkeit, jeder Punkt läuft in einer Stützfläche. Es gibt aber auch Verbände mit raumhaft beweglichen Punkten, die 3 Mannigfaltigkeitsgrade haben, z. B. der Verband mit der Beweglichkeit 1, 2, 3. Zu einem solchen Verband gelangen wir auf folgende Weise: Fig. 93 zeigt ein Viereck mit den Seiten a, b, c, d. Dieses Viereck ist deformierbar, ohne daß die Seitenlängen sich ändern. Die Seiten können nun auch zu Flächen eines Körpers werden, ohne daß eine entsprechende Deformierbarkeit verloren geht. Und zwar müssen die Kanten dieses Vierecks sich in einem Punkte schneiden, entweder in endlicher oder unendlicher Entfernung. In Fig. 94 ist ein Parallelepipedon gezeichnet aus den Seiten a, b, c, d. Die Kantenwinkel können sich beliebig ändern, ohne daß die Seiten deformiert werden. Die Gerade AB bleibt z. B. auf der Seite a vollständig unverändert. Dasselbe gilt für die vierseitige Ecke Fig. 95. Auch hier können sich die Kantenwinkel verändern, ohne daß die Seiten deformiert werden, z. B. in Fig. 95 die Gerade AB in der Seite c. Die Fig. 93 kann als ein beliebig liegender Schnitt durch eine Ecke oder ein Parallelepipedon aufgefaßt werden.

Das führt zur zwangläufigen viergliedrigen Kurbelkette. 4 starre Elemente können durch 4 Scharniere (Zylinderumschlußpaare) zu einer solchen Kette vereinigt werden, unter der Voraussetzung, daß die Achsen der Umschlußpaare sich in einem Punkte schneiden bezw. parallel sind (Schnittpunkt im Unendlichen). Fig. 96 und 97 zeigen solche Kurbeln, d ist die Unterlage, das Glied, auf das die Kette gestellt ist; d ist das Bezugs-, b das Bewegungsglied. Die Punktbahnen von b relativ zu d sind bei Fig. 96 ebene und bei Fig. 97 sphärische Kurven, ebene und sphärische zwangläufige viergliedrige Kurbelkette. Die Beweglichkeitsformel ist für das Glied b 0, 1, 1; wobei für die ebene Kette der 0-Punkt in unendlicher Entfernung liegt ($0_\cup 1\,1$). Diese Ableitung zeigt, daß ebene und sphärische Beweglichkeit eng zusammengehören, flächenhafte Beweglichkeit in Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

Aus dieser zwangläufigen Kurbel entwickeln wir uns einen Verband, den wir Raumkurbel nennen wollen. Wir ersetzen die Scharniere durch Kugelgelenke (Fig. 98). Bewegungsglied ist wieder b. A und C sind die beiden Gelenkmittelpunkte der beweglichen Kugelgelenke. B ist ein beliebiger nicht auf der Geraden AC liegender Punkt, des Bewegungsgliedes, x ein Punkt dieser Geraden. Es liegt derselbe Verband wie der geschlossene 2F2P-Bandverband vor. A und C haben Verkehrsflächen, alle übrigen Punkte, auch die der Geraden AC sind raumhaft beweglich, haben Verkehrsräume. Die Beweglichkeitsformel ist also $\frac{S}{2, (3), 2, 3}$.

Die Beweglichkeit hat vier Mannigfaltigkeitsgrade. Von den 6 freien Koordinaten für die 3 Eckpunkte fallen durch 2 Gleichungen zwischen ihnen 2 weg. Die Gleichungen sind, wenn der 0-Punkt des Koordinatensystems 0 (Fig. 98) ist

$$\text{für A} \quad (x_1 - d)^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 \tag{1}$$

$$\text{für C} \quad x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = c^2 \tag{2}$$

Diese beiden Gleichungen sind weiter nichts als der analytische Ausdruck der Beweglichkeitsbedingung des Verbandes: A und C haben kugelige Verkehrsflächen, die nicht denselben Mittelpunkt haben. Unsere Formeln sagen also soviel aus, wie die Mannigfaltigkeitsangabe + den Bedingungsgleichungen des Verbandes.

Ebensoviel Mannigfaltigkeitsgrade hat das Glied des Verbandes, der aus einer Ebene und einem Zylinder besteht, der diese Ebene mit einer Mantellinie berührt. Hier gilt die Formel $\frac{S}{2, 2, 3}$. Es besteht eine geschlossene Gerade, deren sämtliche Punkte Verkehrsflächen haben. Aus dieser Raumkurbel mit 4 Mannigfaltigkeitsgraden wird ein Verband mit 3 Geraden, wenn ich für C eine V e r k e h r s l i n i e einführe (Fig. 99). Das kann geschehen, durch einen Bügel, in dem der Arm c geführt wird, durch eine Geradführung. Dann hat C eine Verkehrslinie, A eine Verkehrsfläche, alle Punkte der Geraden AC ebenfalls Verkehrsflächen. Das letztere leitet sich einfach so ab, daß der geometrische Ort für jeden dieser Punkte für C^0 ein Kreis ist, für C^1 aber eine Fläche. Die Formel heißt also 1, 2, 3.

Die 3 Mannigfaltigkeitsgrade ergeben sich durch 3 Gleichungen. Die Gleichung (1) des vorigen Absatzes für A und 2 Gleichungen für C. Der Verband ist aber raumhaft beweglich, hat nicht nur in Stützflächen sich bewegende Punkte, während ein 0, 2, 2-Verband flächenhaft beweglich ist.

Wir werden ein Einteilungsprinzip der Verbände nachher zu geben versuchen, das die eben erläuterten Unterschiede hervorhebt. Damit fällt natürlich der Begriff des Mannigfaltigkeitsgrades nicht fort, oder wird gar als falsch bezeichnet, sondern er wird ergänzt und ausgebaut, ausgebaut für die Zwecke der Kinematik nicht zwangläufiger, freier Verbände.

Nun kann man die Variation dreier Koordinaten eines Punktes gegen ein System als ebensoviel Bewegungen dieses Punktes auffassen. Dadurch kommt man zu dem Begriff der Grundbewegungen, den O. Fischer zur Erläuterung der Verbände anwendet. Bewegt gedacht werden muß also das ganze starre Punktsystem. Die Grundbewegungen sind also Bewegungen des Bewegungsgliedes gegen das Grundglied, die irgendwie den bisher erläuterten Koordinaten entsprechen. Eine Anzahl der linearen Koordinaten muß dabei in Winkelkoordinaten transformiert werden. Die Grundbewegungen sind also Verschiebungen und Drehungen. Diese beiden Ausdrücke beziehen sich wieder auf gradlinige Koordinaten. Wir werden weiter unten finden, daß ein freierer Translationsbegriff, auf krummlinige Koordinaten bezogen, sich für Bewegungen in Verbänden hin und wieder vorteilhaft erweisen kann. Der Begriff der Grundbewegungen ist ebenso ein analytischer Begriff, wie der des Freiheits- oder Mannigfaltigkeitsgrades. Ein Verband soll soviel Grundbewegungen zulassen, als er Freiheitsgrade gewährleistet.

Grundbewegungen heißt zunächst nichts anderes als Komponenten einer Bewegung. Eine empirische oder gedachte Bewegung wird in Komponenten zerlegt. Es ist klar, daß das ein Problem ist, das von der Konstruktion des Verbandes, in dem diese Bewegung vor sich ging oder vor sich gehend gedacht wurde, gänzlich unabhängig ist. Es können also viel mehr Komponenten dabei herauskommen, als der Verband Mannigfaltigkeitsgrade für die Beweglichkeit zuläßt. Dieser Unterschied stellt sich dann ein, wenn z. B. zwei der Komponenten, in die die Bewegung zerlegt wurde, durch eine feste Beziehung verknüpft sind, so, daß die eine als Funktion der anderen dargestellt werden kann. Es sei hier an ein Schraubenpaar erinnert. Eine Bewegung darin wird zerlegt in eine Komponente längs der Achse der Schraube und eine Drehung um diese Achse. Oder zur vollständigen Analyse einer Bewegung werden die Bewegung des Schwerpunktes und Rotation um Schwerpunktsachsen voneinander gesondert. Wieweit diese Komponenten aber durch den Verband Funktionen voneinander sind, ist für die Bewegungsanalyse ohne Belang.

Durch die Einführung der Grundbewegung geht also unsere Trennung von Bewegung und Beweglichkeit verloren, wir bedürfen weiter der Einführung eines Minimumprinzipes, wodurch wir auf oft sehr unübersichtliche Komponenten geraten. Wir können also mit der Grundbewegung keine Verbände konstruieren und das müssen wir können, wenn wir gegebene verstehen wollen. Verbände konstruieren heißt aber Führungen für Punkte, Linien oder Flächen herstellen und da sind wir wieder bei unseren bisherigen synthetischen Begriffen angelangt.

Es sei aber noch ein weniges auf den Begriff der Grundbewegung und einige damit zusammenhängende Probleme und die Auffindung der Minimumkombination von ihnen für einen bestimmten Verband eingegangen.

Liegt z. B. ein von dem Grundglied durch eine Reihe von Gliedern getrenntes Bewegungsglied vor, so entstehen zwei getrennte Probleme, je nachdem nach der Art der Beweglichkeit, oder nach dem Zustandekommen einer bestimmten Bewegung und der Beteiligung der verschiedenen hintereinander geschalteten Verbände dabei gefragt wird. Selbstverständlich sind bei der Frage nach der Beweglichkeit auch die verschiedenen Zwischenverbände zu erörtern, die Frage nach den Stützverhältnissen beim Schluß aller beteiligten Verbände erfordert das ohne weiteres. Die Aussage einer Beweglichkeit läßt sich zu gleicher Zeit nur von einem Bewegungsgliede in bezug auf ein Grundglied machen[1]). Will man die anderen Zwischenglieder mit berücksichtigen, so bleibt nichts anderes übrig, als die Kette sukzessive abzubauen. Gegeben seien z. B. drei Glieder A, B, und C. C sei Grundglied. Dann kann angegeben werden 1. die Beweglichkeit von A gegen B + C[2]), 2. die von A+B gegen C und 3. die von A gegen C. Die Beweglichkeit aller Glieder gegeneinander ist ein sinnloses Problem. Beweglichkeit und Bewegung als Aussageinhalte haben nur Bedeutung, wenn zugleich angegeben ist, wer gegen wen beweglich ist, oder eine Bewegung macht.

Hat man als Grundglied den festgestellten Brustkorb, so ist die Bewegung etwa eines Humeruspunktes eine Raumkurve. Für den Untersucher ist dies dann die „wahre" Bewegung des Punktes, solange er sein Bezugssystem im Brustkorb festhält. Man denke etwa an die Analyse der Schwimmbewegung. Diese Bahnkurve kann nach drei Komponenten zerlegt werden, etwa durch Konstruktion eines Hodographen. Man kann sie auch anderweitig zerlegen, etwa so, daß die Bewegung 1. des Humerus gegen die Skapula, 2. der Skapula gegen die Clavicula und 3. der Clavicula gegen den Brustkorb als „Komponenten" der Bewegung erscheinen. Dabei wechselt man aber dreimal Bewegungs- und Grundglied und mit letzterem das Bezugssystem. Die Glieder werden Träger einander nachgeordneter Koordinatensysteme, die sich so gegeneinander bewegen, daß das zur Scapula feste System sich gegen das zur Clavicula feste, dieses wieder gegen das zum Brustkorb feste System bewegt. Die Mittelpunkte der sich bewegenden Systeme sind das, was wir früher Wanderpunkte genannt haben. Diese Zerlegung nach hintereinander geschalteten Bezugssystemen kann auch angewandt werden, auf die Bewegung eines Gliedes gegen ein anderes ohne Zwischenglieder. Das ursprüngliche Bezugssystem nennen wir das System R, das sich bewegende das System W, oder wenn mehrere da sind W_1, W_2 usw. Nur sind in diesem Falle die W-Systeme nicht greifbar an empirischen Zwischengliedern vorhanden, sondern ideelle Gebilde. In diesem Falle kann das Verfahren auch so aufgefaßt werden, daß man zur Analyse einer Bewegung einen aus zwei Gliedern bestehenden Verband in eine Kette auflöst, so, daß an der Bewegung des letzten gegen das erste Glied sich nichts ändert. Diese Auflösung ist aber durchaus willkürlich. Das, Zerlegung nach mehreren hintereinander geschalteten Bezugssystemen, ist das wesentliche bei der Zerlegung einer Bewegung nach Grundbewegungen.

Es ist willkürlich, welchen Punkt des Bewegungsgliedes wir zum Mittelpunkt des neuen Systems, des Systems W, zum Wanderpunkt machen. Die Wahl ergibt sich aus den Forderungen der Einfachheit. Ist der Schluß des Verbandes punktförmig, so wird am einfachsten der unmittelbar geschlossene Punkt Wanderpunkt. Bei anderen Verbänden, z. B. dem 2, 2, 3-Verband, den wir früher kennen gelernt haben, steht die Wahl zwischen allen Punkten der unmittelbar geschlossenen Linie prinzipiell gleich, ebenso bei einem 1, 1, 2-Verbande, den wir in einem der späteren Kapitel ausführlicher behandeln werden.

Beim FP-Verbande wird also P Wanderpunkt. Seine Verkehrsfläche ist eine Kugel. Der Mittelpunkt des neuen Systems beschreibt also sphärische Kurven.

[1]) Dadurch wird der Begriff von > 6 Freiheitsgraden (FISCHER) hinfällig, da ein Glied gegen ein anderes nicht mehr als 6 haben kann.

[2]) + bedeutet festgestellt.

Gegen das neue System macht dann das Bewegungsglied eine sphärische Bewegung. Eine Bewegung im Verbande wird also in verschiedene Komponenten zerlegt, aber diese Komponenten haben gruppenweise verschiedene gegeneinander sich bewegende Bezugssysteme.

Den Grundsatz, daß jede Bewegung eine relative sei, versuchen wir bei der Zerlegung mittelst Wanderpunkte konsequent durchzuführen. Die Relativität und die daraus sich ergebende Forderung betrifft nicht nur die Angabe eines Bezugssystems überhaupt, sondern auch die einer Nullinie und eines Nullpunktes, das heißt einer Marke an der eine Bewegung überhaupt erkannt wird.

Von der Art der Analyse einer Bewegung durch Wanderpunkte haben wir schon geredet, hier soll jetzt ausführlich darauf eingegangen werden. Wir haben das wesentlichste dieser Methode schon so charakterisiert, daß wir sagten, die Bewegung wird dabei nach zwei oder mehreren einander nachgeordneten Bezugssystemen aufgelöst, diese einander nachgeordneten Bezugssysteme sind die Momentanörter in analytischer Ausprägung.

W nimmt also bei seiner Wanderung eine Kugel mit sich, auf der zwei andere Punkte des Bewegungsgliedes, A und B, sphärische Kurven beschreiben. Deren Bewegung kann dann weiter so aufgelöst werden, daß B-Kreise um A beschreibend gedacht wird, während A sich auf der mit W wandernden Kugel bewegt. Jede dieser drei Bewegungen bezieht sich auf ein besonderes Koordinatensystem mit besonderer 0-Linie. Wir nennen diese drei hintereinander gestalteten Systeme R (fest zum Grundglied), W_1 fest zu W und W_2 fest zu A. Wie nun die Nulllinie dieser drei Systeme bei einer in allen drei vor sich gehenden Bewegung in dem allein festen System R zu orientieren sind, ist eben das Hauptproblem dieser ganzen Analysierungsmethode.

Wir betrachten dafür der Einfachheit halber den Fall, bei dem nur zwei Bezugssysteme in Betracht kommen, R und W, was dann der Fall ist, wenn z. B. die Bewegung im W-System eben ist.

Beide Systeme müssen also vereinigt werden, zum RW-System. Das System W ist ja ein ideelles Gebilde, bewegt sich relativ zum Grundglied und relativ zum Bewegungsglied. Es sind aber nur zwei starre Punktsysteme zur Lagevergleichung vorhanden. Zu dieser Vereinigung verhilft uns der Begriff der Verkehrsfläche. Wir erfüllen damit zugleich die Forderung, daß das resultierende System für alle Bahnen des Punktes W gelten soll. Wir haben dann in dem geometrischen Ort dieser Bahnen der Verkehrsfläche ein Liniennetz zu finden, das einmal die Bewegung des Punktes W zu verfolgen und darzustellen gestattet, das weiter die Lage des Systems W für jede Lage des Wanderpunktes anzeigt. Die Verkehrsfläche ist also der Träger des RW-Systems. Kommt nur eine Kurve für W in Betracht, entweder weil er zwangläufig ist, oder weil nur rein empirische Bewegungen zur Diskussion stehen, endlich weil W keine Verkehrsfläche, sondern einen Verkehrsraum hat, so wird diese Kurve der Träger des RW-Systems.

Der Begriff dieses RW-Systems ist eine allgemeinere Formulierung dessen, was bei O. Fischer unter Richtlinien verstanden wird. Wieder bemerken wir, daß dieses System eine willkürliche Festsetzung ist. Es ist dieses System nicht mit dem R-System identisch oder dessen Ausdruck auf der Verkehrsfläche. Es stimmt mit ihm darin überein, daß es zum Grundgliede fest ist.

Um das eben Gesagte noch anschaulicher zu machen, zerlegen wir unsere ebene Bewegung auch zeitlich, wir unterscheiden zwei Phasen. Die erste Phase soll die Bewegung des Wanderpunktes charakterisieren, die zweite die Drehung im System W.

Dieses System W denken wir uns als dreiachsiges rechtwinkliges Kreuz, der Schnittpunkt der Achsen ist W und liegt im Bewegungsglied fest. In der ersten Phase sind nun dieses Kreuz und das Bewegungsglied fest und bewegen sich zusammen, in der zweiten Phase bleibt das Kreuz in der in der ersten Phase erreichten Lage stehen, das Bewegungsglied macht eine ebene Bewegung um W in dessen Verkehrsfläche. Der Betrag dieser Rotation wird an der Verschiebung gegen das Achsenkreuz ersehen. Da das Kreuz ein reines Gedankending ist, muß es durch Marken in der Verkehrsfläche — also fest zum Grundglied — ersetzt werden, und diese wollen wir eben finden.

Nun stellen wir die Forderung auf, daß die erste Phase keine Bewegung enthalte, die auch in der zweiten Phase enthalten ist, und umgekehrt, daß in der zweiten Phase keinerlei Bewegung vollzogen werde, die in der ersten Phase schon teilweise vollzogen worden ist.

Diese Trennung pflegt man gewöhnlich als Translation und Rotation zu bezeichnen. Wir bestimmen, daß die erste Phase die Translation enthalte[1]).

Dann gilt für jedes der getrennten Systeme, daß in ihnen die Koordinatenänderung aller Punkte des Bewegungsgliedes für jeden Moment gleich ist. Betrachten wir aber den Vorgang vom RW-System aus, so gilt das nur für die erste Phase. Translation in einem System bedeutet also für diese Art der Zerlegung drei Bewegungen: gleiche Koordinatenänderung für alle Punkte in jedem Zeitabschnitt der Bewegung. In der Rotationsphase sind diese Änderungen — bezogen auf das RW-System — verschieden. Dann ist der vorhin aufgestellten Forderung genügt[2]).

Lassen wir durch ein rechtwinkliges RW-Koordinatensystem eine Ebene, die Verkehrsfläche des W-Punktes, geteilt werden, so heißt also Translation die Bewegung, bei der $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$, $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3$ usw. sind. Beträgt die Drehung der zweiten Phase φ, so sind, vom Nullpunkt unseres rechtwinkligen Systems aus gesehen, die Änderungen der x, y, z Koordinaten ungleich.

Diese Begriffsbestimmung der Translation ist von besonderer Bedeutung, denn es ergibt sich daraus unmittelbar, daß für eine und dieselbe Bewegung die Trennung der beiden Phasen verschieden ausfällt, je nach der Art des Systems, in dem die erste Phase beobachtet wird. Translation in dem einen System ist etwas anderes als in dem anderen.

Betrachten wir zur Erläuterung dessen wieder unsere ebene Bewegung im rechtwinkligen Koordinatensystem. Als bewegte Figur führen wir dabei direkt das recht-

[1]) Es kann auch umgekehrt bestimmt werden. Im allgemeinen fällt W zu Beginn der Bewegung nicht in den Anfangspunkt des RW-Systems. Ist dies der Fall, so wird im Falle, daß das RW-System ein polares System ist, die Zerlegung sehr einfach.

[2]) Wir haben also den Begriff der Translation erweitert. Daß die Mechanik davon nur den auf ein gradliniges System sich beziehenden Fall anwendet, ist also ein Spezialfall.

winklige Achsenkreuz ein, dessen normal zur Ebene stehende Achse wir weglassen. Diese Figur macht also nach unserer Definition dann eine Translationsbewegung, wenn die Zunahmen der Koordinaten für jeden Moment gleich sind. Die Achsen unseres bewegten Kreuzes behalten also ihre Winkel zum Liniennetz des rechtwinkligen Systems bei. Damit ersetzt dieses System für jeden Punkt der Ebene das W-System, und die Rotation der zweiten Phase wird direkt an der Winkeländerung einer Geraden des Bewegungsgliedes gegen eine der Linien des Koordinatennetzes ersehen.

Ersetzen wir nun das geradlinige System durch ein polares, so gilt wieder, daß Translation die gleiche Koordinatenänderung, r und φ, für alle Punkte des Bewegungsgliedes bedeutet. Das W-Kreuz ändert seine Winkel also nicht gegen das Liniensystem, das durch die vom Nullpunkt ausgehenden Fahrstrahlen und die dazu in jedem ihrer Punkte normalen Kurven — Kreise — gegeben ist. Eine Bewegung, die in diesem System also Translation ist, ist es nicht im rechtwinkligen und umgekehrt. Da der Begriff der Translation vom Bezugssystem abhängt, so gibt es genau so viele Translationen wie Systeme, das heißt beliebig viele. Der Translationsbegriff ist variabel, wie das Koordinatensystem.

Auf einer Ebene sei eine Figur beweglich. Sie mache eine beliebige Bewegung. Dann kommt also einem Punkt W, den wir herausgreifen, eine Bahnkurve zu. Es ist klar, daß es für unser Problem, diese Bewegung zu analysieren, vollkommen gleichgültig ist, ob sie ganz oder teilweise zwangläufig ist, auf unseren Punkt W bezogen, ob die Bestimmungsmittel seiner Bahn ganz in Vorrichtungen der Ebene — in den toten Führungsmitteln — oder auch in anderen Vorrichtungen — den lebenden Führungsmitteln — enthalten sind. Wir lassen diese Bahn zwangläufig sein. Zwei Schienen führen einen niedrigen Kreiszylinder, dessen Grundfläche auf der Ebene aufruht[1]). Die gegebene Bewegung des Zylinders soll nun zerlegt werden in Translation und Rotation. Dabei fällt die Zerlegung verschieden aus, je nachdem die Bewegungsebene durch ein geradliniges oder aber durch ein polares RW-System eingeteilt ist. In jedem Falle kommen drei Komponenten oder Grundbewegungen heraus, die beiden Komponenten der Translation, x und y oder r und φ, sowie die die Rotation im W-System, dargestellt durch die Winkeländerung einer durch den Punkt W gehenden Geraden gegen die Linien des RW-Systems, die jeweils durch W gehen. W-Punkt ist in unserem Falle am besten ein zwangläufiger Punkt, der Mittelpunkt der berührenden Grundfläche des Zylinders.

Die Zerlegung ist aber noch in anderer Weise möglich und in unserem Falle, dem Falle daß W zwangläufig ist, besonders einfach.

Wir beobachten nämlich die Rotation gegen das Bahnelement der Kurve des Punktes W. Das entspricht einer Orientierung des W-Systems so, daß eine seiner Achsen stets normal, die andere tangential zur Bahnkurve von W steht und für jede Lage des W-Punktes stehen bleibt. Damit haben wir ein neues RW-System, bestehend aus einem krummlinigen Fahrstrahl und dazu normalen Richtungen. Das Resultat der Zerlegung sind dann zwei Komponenten, je eine in einem System, den Fortschritt des W-Punktes auf seiner Bahn

[1]) Der Schluß des Verbandes ist dabei immer noch teilweise ein Kraftschluß. Die Schwere verhindert den Zylinder, sich von der Ebene zu entfernen. In strengstem Sinne ist unser Punkt W also immer noch nicht zwangläufig. Wieder sieht man, daß es für die Zerlegung von Bewegungen gleichgültig ist, durch welche Mittel sie in ihrer speziellen Gestalt zustande kommen.

und die Rotation gegen die Bahnnormale. Diese Art der Zerlegung ist es, wenn man einem Zylinder von der erwähnten Beweglichkeit auf einer Ebene zwischen zwei Schienen zwei Grundbewegungen zuschreibt. Die eine Koordinate ist dann die Entfernung auf der Bahn von W, die andere der Winkel einer im Bewegungsglied festen Linie gegen diese Bahn.

Die Erörterungen des letzten Absatzes leiten zu zweierlei Gedankengängen über. Einmal zur Einführung von Koordinatensystemen aus besonderen Kurven. Man denke etwa an ein System konfokaler Kegelschnitte oder an zwei Scharen sich normal durchsetzender Spiralen. Auch das Liniennetz, das für das LISTINGsche Gesetz sich auf der Kugel ergibt, gehört hierher.

Der andere Gedankengang ist folgender. Wir gelangen dabei von der ebenen Kurve zur krummen Verkehrsfläche, indem wir die Kurve als einen ebenen Schnitt durch eine solche Fläche auffassen. Wir gehen dabei gleichzeitig für die zweite Phase zu einer allgemein sphärischen Bewegung des Bewegungsgliedes über. Das W-System besteht dabei also aus einem dreiarmigen Kreuz. Einen dieser Arme orientieren wir also entsprechend der Normalen der Kurve, die beiden anderen schneiden die e dann normal. Wie die beiden anderen Arme, deren einer der Nullinie im W-System entspricht, weiter zu orientieren sind, entscheiden ganz wie in der Ebene die Gesichtspunkte des Falles.

Einer der häufigst vorkommenden Fälle ist die Bildung eines RW-Systems auf der Kugelfläche. Das Problem fällt zusammen mit dem allgemeinen einer analytischen Geometrie auf Kugelflächen.

Hiermit wollen wir diese allgemeinen Betrachtungen über Zerlegung von Bewegungen nach mehreren Bezugssystemen abschließen. Sie lieferten eine weitere Diskussion des Begriffes der Grundbewegungen. Grundbewegung heißt nichts weiter als Komponente einer Bewegung. Wir sahen, daß diese Komponenten sich auf verschiedene Bezugssysteme bezogen, weshalb die Komponenten einander nicht gleichgeordnet, sondern einander nachgeordnet sind, je nach den Systemen, auf die sie sich beziehen. Diese verschiedene Beziehung ist aber außerordentlich wichtig, denn die Aussage einer Bewegung entbehrt solange überhaupt eines eindeutigen Sinnes, als nicht gesagt wird, worauf sie sich bezieht und ob bei einer anderen, zugleich genannten Bewegung dasselbe oder ein anderes Bezugssystem in Frage kommt.

Einige Beispiele für das Aufsuchen von Grundbewegungen seien noch an Verbänden angeführt, die wir teilweise schon kennen gelernt haben.

Ein Kugelgelenk hat drei Mannigfaltigkeitsgrade seiner Beweglichkeit. Drei Grundbewegungen kommen auf folgende Art zustande. Zwei Punkte derselben Verkehrsfläche werden ausgesucht. Die erste und zweite Grundbewegung sind die Bewegungen des einen Punktes auf der Kugelfläche in einem (polaren) Koordinatennetz und Rotation des zweiten Punktes um den ersten. Zwei feste und eine bewegliche Achsen sind so vorhanden, die Beweglichkeit der dritten Achse zeigt, daß es sich um ein neues Bezugssystem handelt.

Hier war die Darstellung der drei unabhängigen Koordinaten als Bewegung einfach. Kompliziert ist sie im Falle der Dreifachkurbel. Die Dreifachkurbel entsteht, wenn die drei Ecken eines Dreiecks mit drei Armen durch Kugelgelenke verbunden sind;

die Arme sind dann wieder durch Kugelgelenke mit einer festen Platte, dem Grundglied, verbunden. Bewegungsglied ist das Dreieck (Fig. 100). Die Dreifachkurbel kann in drei verschiedenen Weisen als ebene Kurbel bewegt werden. Nennen wir die drei Arme a, e, c, so können immer zwei Arme gegeneinander fest gedacht werden. Die Kurbeln haben die nacheinander folgenden Arme a, e + c; e, a + c; c, a + e. Jede Bewegung im Verband kann dann als eine Kombination aus drei Kurbelbewegungen angesehen werden. Überträgt man das auf einen Punkt des Bewegungsgliedes, so besteht seine Bahn aus drei Komponenten, jede Komponente ist eine krummlinige Bewegung, deren krumme Linie, in ein ebenes System eingetragen, eine Gleichung sechsten Grades darstellt. Das ist nicht sehr übersichtlich. Hier sind die drei Bedingungsgleichungen der drei flächenhaft bewegten Punkte, drei einfache Kugelgleichungen, sehr viel einfacher.

Ein Gegenbeispiel bietet der Verband, den wir in einem früheren Kapitel durch die Formel $\sum\limits_{P_1}^{P_n} \frac{ds}{0,0,1}$ dargestellt hatten. Die beiden Grundbewegungen dieses Verbandes sind die Rollbewegung der beiden Kurven und die Winkeländerung der beiden Kurvenebenen gegeneinander. Nun ergeben sich die beiden Mannigfaltigkeitsgrade eines solchen Verbandes allerdings leicht aus der Erkenntnis, daß es ein flächenhaft beweglicher Verband ist. Jeder Punkt hat eine Verkehrsfläche. Es gibt aber nur einen flächenhaft beweglichen Verband mit mehr als zwei d. h. drei Mannigfaltigkeitsgraden, der, bei dem diese Flächen parallele Flächen von konstantem Krümmungsmaß sind, also der 0, 2, 2-Verband, wobei die Lage des 0-Punktes im Unendlichen ebene Verkehrsflächen zur Folge hat. Das System der Gleichungen zwischen den sechs freien Koordinaten dreier Punkte des Bewegungsgliedes ist aber bei dem erwähnten Verbande nicht so einfach.

Zu ihm führt folgende Überlegung. Die Verbandsbedingungen bestehen darin, daß beide Glieder in jeder Lage einen Punkt gemeinsam haben, die je einer Kurve angehören, und daß die Tangenten an diesem Punkt für jede Kurve zusammenfallen[1]). Diese Überlegung führt leicht zum Verständnis weiterer Verbände. Führt man nämlich die weitere Bedingung ein, die Tangenten und die dazugehörigen Normalen liegen stets in derselben Ebene, so hat man einen zwangsläufigen Verband, d. h. zwei eindeutig aufeinander abrollende Polkurven vor sich. Läßt man die Tangentenbedingung fallen, so stellen sich zwei weitere Mannigfaltigkeitsgrade ein, dadurch, daß zwei Gleichungen wegfallen. Die Beweglichkeitsformeln würden sich bei ebenen Figuren als $\sum \frac{ds}{0,0,0} = 0,1,1$, $\sum\limits_{P_1}^{P_n} \frac{ds}{0,0,1} = 2,2,2$[2]) und $\sum\limits_{P_1^0}^{P_n^0} 0,2,2 = 3,3,3$ ergeben.

Unsere synthetische Darstellungsmethode wollen wir jetzt auf Paare anzuwenden versuchen, die durch Berührung von Teilen starrer Elemente zustande kommen.

[1]) Man kann z. B. weitere Hilfskoordinaten einführen, wobei sich soviel Gleichungen zwischen den so vermehrten Koordinaten ergeben, daß zwei unabhängig variable übrig bleiben.

[2]) Die bereits im Kap. VIII erläuterte Beweglichkeit von K_3 gegen K_2 in Fig. 80.

Der Begriff Verband wird dabei in einem weiten Sinne gebraucht. Es ist damit jede Verbindung eines Gliedes mit einem anderen gemeint. Dabei ist kein Unterschied gemacht, ob zwischen dem Bezugs- und dem Bewegungsglied noch Zwischenglieder sich befinden oder nicht. Diese Zwischenglieder fallen ganz allgemein mit unter den Begriff des Führungsmittels, wie er in einem der früheren Kapitel erläutert wurde. Der Verband besteht also aus drei Teilen, dem Grundglied, dem Bewegungsglied und den Führungsmitteln.

Zu diesen Führungsmitteln gehört auch der Kettenschluß[1]). Befinden sich zwischen dem Grundglied und dem Bewegungsglied mehrere Glieder, so ist zunächst eine offene Kette gebildet (Fig. 101). Die schwarzen Kreise in der Figur sollen eine beliebige Verbindung, etwa durch ein Berührungspaar andeuten. Besteht zwischen dem als Bewegungsglied herausgehobenen Glied und dem Grundglied, oder zwischen einem der anderen Glieder und dem Grundglied eine zweite Verbindung, so liegt eine geschlossene Kette vor[2]) (Fig. 102). Die Kette kann mehrmals oder einmal geschlossen sein.

Den Anschluß an die REULEAUxschen Betrachtungen wird man hier ohne weiteres finden. Es ist aber wie in diesem ganzen Versuch eine Erweiterung der REULEAUxschen Begriffe vorgenommen. Die REULEAUxsche Maschinenkinematik ist Zwangslauflehre. Hier haben wir es mit freien Verbänden zu tun, aus deren Verwendung im Tierkörper das Problem der Beweglichkeit entspringt.

Treten die Glieder, das Bewegungsglied mit dem Grundglied, oder jedes von ihnen mit Zwischengliedern so in Verbindung, daß die meist besonders gestalteten Teile aufeinander wirken und die besondere Art der Stützung, die in dem Verbande verwirklicht ist, hervorrufen, so nennen wir die beiden miteinander in Verbindung tretenden Enden ein Berührungspaar. Wieder ist dieser Begriff eine Erweiterung eines REULEAUxschen Begriffes. Ein Umschlußpaar liegt vor, „wenn das eine der Elemente das andere nicht bloß umhüllt, sondern auch umschließt, d. h. seine Hohlform oder Gegenform zur Form hat, beide Formen also geometrisch identisch sind.“ Er fährt fort, „daß offenbar sich die Umschlußpaare wesentlich durch Einfachheit von den Paaren unterscheiden, deren Elemente nicht identisch in der Form sind[3]).“

Berührungspaare sind also auch die Umschlußpaare und Umhüllungspaare.

Wir wollen nun ein System der Verbände aufstellen und stellen zunächst noch einmal die Prinzipien unserer abgekürzten Schreibweise zusammen. Wir zeichnen uns in das Bewegungsglied eine starre Figur ein. Deren Punkte brauchen nicht in dem empirischen Bewegungsglied zu liegen, sie sind nur zu diesem fest gedacht, können in beliebiger (bis unendlicher) Entfernung von diesem liegen. Im allgemeinen wird diese Figur zu einem Dreieck, nur wenn die Schlußpunkte und -linien ein Berührungsglied wandren, wie wir das bei einem Teil der Bandverbände kennen gelernt haben, werden die kinematischen Figuren zu anderen als Dreiecken. Zu dieser beweglichen kinematischen Figur kommt nun eine zweite, die zum Grundglied fest ist und die geometrischen Örter der Punkte, des Bewegungsgliedes darstellt, also aus Linien und Flächen besteht. Wir

[1]) Man könnte ja auch das Band als Glied und den Bandverband als Kette auffassen.

[2]) Das Grundglied wird schwarz schraffiert, Bewegungsglied schwarz, Zwischenglieder weiß gezeichnet.

[3]) REULEAUX, Kinematik Bd. I. S. 90.

nennen sie die feste Figur. Diese Figur, besonders ihre flächenhaften Teile, brauchen wir nicht immer auszuzeichnen. Wir haben also Figurenpaare vor uns. Bei den n PF-Bandsystemen hatten wir zwei kinematische Figuren, die analog den W-Systemen einander nachgeordnet waren, so, daß zwei Figurenpaare entstehen, mit je einem festen und einem beweglichen Gliede, nur daß das bewegliche des ersten mit dem festen des zweiten Paares zusammenfiel. Solche untergeordnete Paare dienen uns auch zur Analyse der kinematischen Ketten. Die Verbände mit den einfachsten kinematischen Figuren, Dreiecken, wollen wir einfache, die mit anderen Figuren höhere Verbände nennen.

Wir schreiben die Formeln nun einfach so, daß wir durch Kommata getrennt, die Dimensionenzahlen der Verkehrsräume nennen, die den Punkten der kinematischen Figuren zukommen. Nach Bedarf fassen wir dabei durch eine darübergesetzte Klammer, die einer Geraden angehörigen Punkte zusammen und bezeichnen sie durch ein S oder ein ds, je nachdem es sich um Polygonseiten oder Kurvenelemente handelt.

Als Einteilungsprinzip der Verbände benützen wir die Maximumzahlen der Formeln, d. h. wir teilen die Verbände in solche, in denen kein Punkt eine höhere als

1. lineare Beweglichkeit hat: zwangläufige Verbände,
2. flächenhafte Beweglichkeit hat: flächenläufige Verbände, und
3. solche mit raumhaft beweglichen Punkten: raumläufige Verbände.

Selbstverständlich beziehen sich die Linien, Flächen, Räume auf die Beweglichkeit relativ zum Grundglied.

Aus den ersten beiden Klassen greifen wir nun eine Gruppe heraus und stellen sie anderen Verbänden gegenüber. Diese Gruppe und sind Verbände mit sphärischer Beweglichkeit, das Bewegungsglied hat einen oder zwei Nullpunkte. Dieser Punkt kann in $\sim$ Entfernung liegen, dann ist die Beweglichkeit eben. Die Ebene wird dabei zum Grenzfall der Kugelfläche. Wie wir schon bei der zwangläufigen Kurbel gesehen haben, kann jeder Verband aus Berührungspaaren mit ebener Beweglichkeit auch so ausgeführt werden, daß eine Beweglichkeit in Kugelflächen resultiert. Wir werden das nachher verschiedentlich zu demonstrieren Gelegenheit haben. Sphärische Beweglichkeit ist flächenhafte Beweglichkeit in Flächen von konstantem Krümmungsmaß.

Da der Nullpunkt nicht mitgerechnet zu werden braucht, so reduziert sich die kinematische Figur auf eine Gerade. Wir besprechen zuerst die sphärischen (und ebenen) Verbände. Der allgemeinste sphärische Verband ist der 0, 2, 2-Verband. Es sind keine weiteren Bedingungen vorhanden als daß ein Punkt fest sei. Die drei Bedingungsgleichungen der Beweglichkeit heißen also, wenn der Punkt A die Koordinaten x_1, y_1, z_1 hat:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c \,.$$

Dann haben durch die Bedingungen des starren Punktsystems, die beiden anderen Punkte kugelige resp. für $a = \sim$ ebene Verkehrsflächen, es bleiben (6—3 Gleichungen) drei freie Koordinaten übrig.

Der Verband ist flächenhaft geschlossen. Die Figuren 103, 104, 105, 106 zeigen solche Verbände, 106 ist die kinematische Umkehrung von 105. Fig. 107 und 108 zeigen die eingezeichneten kinematischen Figuren. Die Seiten AB, AC stehen normal zum Element der Verkehrsflächen.

Aus dieser allgemeinen sphärischen bezw. ebenen Beweglichkeit lassen sich durch Setzen weiterer Bedingungen andere Formen gewinnen. Z. B. die Beweglichkeit $0, 0, 1 = 0\sim, 0, 1$, die zugleich sphärisch und eben ist. Hier hat das Bewegungsglied eine zum Grundglied feste Linie, die Achse des Scharniers oder Gynglimus genannten Verbandes. Fig. 109a und b zeigen einen solchen Verband. Jeder Punkt außerhalb der Achse hat eine kreisförmige Verkehrslinie, der Verband ist zwangläufig.

Ebenfalls zwangsläufig sind die Verbände von der Beweglichkeit 0, 1, 1. Die ebenen Verbände $0_\smile, 1, 1$ dieser Kategorie umfassen z. B. die zwangläufigen Kurbeln (Fig. 110a und b), Zahnräderpaare (Fig. 111a und b, 112), die höheren Umschlußpaare der Maschinenkinematik. Die kinematischen Figuren zeigen die mit b bezeichneten Zeichnungen. Es gehören hierher alle Arten geradliniger zwangsläufiger Bewegung, z. B. die in dem Prismenpaar. Alle ebenen Beweglichkeiten dieser Form sind auch als sphärische im eingeren Sinne mit dem 0-Punkt in endlicher Entfernung auszuführen. Bei der viergliedrigen Kurbel hatten wir das schon gesehen, bei Zahnrädern ist diese Ausführung als Kegelräder bekannt (Fig. 112). Fig. 111 zeigte ein ebenes Zahnradpaar in der Aufsicht, der Punkt A^0 liegt dabei in unendlicher Entfernung vor oder hinter der Zeichenebene. Fig. 112 zeigt dasselbe Paar in sphärischer Ausführung, die Achsen der beiden Zahnräder schneiden sich in dem Punkt, in dem auch die beiden Kegelspitzen der konischen Räder sich treffen.

In der Kurbel, wie in dem Zahnradpaar haben wir Kettenschlüsse vor uns und zwar die Bildung von geschlossenen Ketten. Beim Zahnradpaar diente der Kettenschluß nur dazu, den Schluß zwangläufig aufrecht zu erhalten, bei der Kurbel, die aus vier hintereinander geschalteten Scharnieren mit parallelen Achsen besteht, ist er ein wesentliches Hilfsmittel, die Beweglichkeit $(0_\smile, 1, 1,)$ zu erzielen. Wir wollen deshalb hier den Erfolg von Kettenschlüssen allgemein betrachten. Gegeben seien drei Glieder, Glied 1, Glied 2, Glied 3, die durch Scharniere ($0_\smile$, 1, 1-Verbände) miteinander verbunden sind. Das Glied 1 ist das Grundglied; das Glied 2 ist das Zwischenglied; das Glied 3 ist das Bewegungsglied.

2 gegen 1 hat die Beweglichkeit 0, 0, 1, 3 gegen 2 ebenfalls 0, 0 1. Welche Beweglichkeit hat nun 3 gegen 1? Wir finden das durch Addition der Formeln. Dabei ist jedoch zu beachten, wie die beiden 0, 0-Linien, die Achsen, die ja beide zum Zwischenglied fest sind[1]), sich verhalten, ob sie sich schneiden, einander parallel sind oder ob sie sich kreuzen. Den ersten Fall zeigt Figur 113. Die Glieder sind auf je zwei Striche reduziert, die 0-Linien, Achsen, A_2B_2 und A_3B_3, dazu senkrechte Linien zwei B_2C_2 bezw. B_3C_3. Die Indizes stimmen mit der Nummer des Gliedes überein. Die Punkte der Geraden A_3B_3 haben gegen 1 die Beweglichkeit 1, wie die Punkte $C_2\cdots$ des Zwischengliedes. Nur einer ist auch zum Grundglied fest, nämlich der Schnittpunkt der beiden Achsen. Ich schreibe also die Beweglichkeit des Zwischengliedes gegen das Grundglied, mit mehreren Punkten von der Beweglichkeit 1:

[1]) Die erste gegen 1 und 2 fest, die zweite gegen 2 und 3 fest, also erste und zweite gegen 2 fest.

	0, 0, 1, 1, 1, ...	darunter die des Bewegungsgliedes.
gegen das Zwischenglied	0, 0, 1, ...	Ein 0-Punkt des Gliedes 3 muß dabei unter einen 0-Punkt des Gliedes 2 kommen, die anderen 0-Punkte des Gliedes 3 unter den Punkt 1 des Gliedes 2
addiert, ergibt sich	0, 1, 2.	

Dasselbe gilt für parallele Achsen, nur, daß hier der Schnittpunkt in unendlicher Entfernung liegt (Fig. 114). Es ergibt sich auch hier die Beweglichkeit 0, 1, 2.

Kreuze ich die Achsen (Fig. 115), so fällt weder ein endlich noch ein unendlich entfernter Punkt des Bewegungsgliedes auf die Achse des Zwischengliedes, die Addition ist also zu schreiben:

$$\begin{array}{r} 0, 0, 1, 1, 1, \ldots\ldots \\ 0, 0, 1. \ldots\ldots \\ \hline 1, 1, 2. \end{array}$$

Das ist eine flächenläufige, nicht sphärische Beweglichkeit. Ganz ähnlich kann man durch Subtraktionsformeln sich klarmachen, was durch Bildung einer geschlossenen Kette geschieht.

Schließe ich die offene dreigliedrige Kette aus 0, 0 1 Verbänden durch ein 4. Glied mittels zwei weiterer 0, 0 1-Verbände, so erhalte ich die 4gliedrige Kurbelkette. Hier schreibe ich die Beweglichkeit des Gliedes 3:

0, 1, 2 .	und subtrahiere die des Gliedes 4
– 0, 0, 1 ,	so erhalte ich:
0, 1, 1 .	die Beweglichkeit des Gliedes 3 in der Kurbel (Fig. 116).

Schließe ich 3 unmittelbar an 1, so erhalte ich einen übermäßig geschlossenen Verband. Zur Subtraktion muß ich das Bezugsglied wechseln: 3 gegen 2 hat die

Beweglichkeit	0, 0, 1 . . ,	1 gegen 2 die
Beweglichkeit	– 0, 0 1 . . .	
Differenz	0, 0, 0	1 gegen 2 ist unbeweglich, 3 gegen 2 also auch 3 gegen 1.

Mit den Additionsformeln haben wir zugleich die Beweglichkeit 0, 1, 2 durch einen Kettenschluß erreicht. Wir haben die Punkte des 3. Gliedes der Kette, des Bewegungsgliedes, außerhalb einer bestimmten Geraden der Linie Verkehrsflächen und zwar Ebenen oder Kugelflächen. Fig. 117a zeigt die ebene Kette der Formel 0~, 1, 2, Fig. 117b die zugehörigen kinematischen Figuren. Durch den Kettenschluß mittelst eines Zahnrades wurde ein zwangläufiger Verband daraus. Wir können jede Bewegung des Bewegungsgliedes nach der Wanderpunktmethode in 2 Komponenten zerlegen, die Bewegung des Punktes B_3 und die des Punktes C_3 um B_3. Dann werden die Bahnen der Punkte außerhalb der Geraden A_3B_3 als allgemeine ebene Gycloiden dargestellt, von diesen Bahnen bleibt beim Schluß der Kette durch das Zahnrad nur eine übrig. Sphärische bewegliche Verbände derselben Beweglichkeit mit dem Nullpunkt in endlicher Entfernung zeigen die Figuren 118—120. 118 zeigt die bekannte Cardanische Aufhängung, wie sie für Lampen und Kompasse auf Schiffen üblich ist. Wieder sind zwei Scharniere, I und II, in dem Grundriß 118 a, hintereinander geschaltet, deren Achsen einander senkrecht schneiden. Fig. 118 b zeigt die kinematischen Figuren, 119 eine Ansichtsskitze, die gegen 118 b um 90° gedreht ist, in der Buchstabenbezeichnung aber mit ihr übereinstimmt. $A_3 B_3 C_3$ ist die kinematische Figur des Bewegungsgliedes, $A_2 B_2 C_2$ die des Zwischengliedes. C_2 hat eine Verkehrslinie (Kreis mit B_2 als Mittelpunkt). C_3 relativ zum Zwischenglied ebenfalls einen Verkehrskreis mit $B_2 = A_3$, als Mittelpunkt aber normal zum vorigen stehend. Relativ zum Grundglied also eine Verkehrsfläche, eine Kugelfläche, die durch Rotation seines relativ zum Zwischenglied geltenden Verkehrskreises um die Achse $A_2 B_2$ entsteht. Diese Kugelfläche ist bei vollständiger Rotationsmöglichkeit von C_3 um $A_3 B_3$ und C_2 um $A_2 B_2$ eine ganze Kugelfläche. Eine Kugelzone bleibt diese Fläche immer bei spitzwinkligem Schnitt der beiden Achsen (Fig. 120).

Diese Verbände haben zwei Freiheits- oder Mannigfaltigkeitsgrade. Die sechs freien Koordinaten des starren Punktsystems $A_3 B_3 C_3$ (der Fig. 102) vermindern sich um vier, entsprechend den vier Gleichungen: $x_a = 0$, $y_a = 0$, $z_a = 0$, $x_a = x_b$, wobei die Indizes der Kooridnaten, die zugehörigen Punkte A, B bezeichnen, und der Koordinatenanfangspunkt nach A_3 fällt.

In dieselbe Kategorie gehört die Beweglichkeit des Radius, bezw. der mit diesem fest verbundenen Hand gegen den Humerus. Die Figuren 121–124 sollen diese Beweglichkeit erläutern. Der Radius ist das dritte Glied einer Kette, die aus Humerus, Ulna und Radius besteht, und ist wieder rückwärts durch den Humerus zu einer geschlossenen Kette aus drei Gliedern verbunden. Alle Gelenke zwischen diesen Gliedern besitzen sphärische Beweglichkeit. Der Humerus sei das erste oder Grundglied, die Ulna das zweite oder Zwischenglied, der Radius das dritte oder Bewegungsglied. Zwischen diesen Gliedern befinden sich drei Gelenke. Das erste zwischen Humerus und Ulna ist ein Scharnier[1]), das zweite zwischen Ulna und Radius ist in zwei Teilen auf die Länge der beiden Knochen verteilt, ein Teil IIa befindet sich am proximalen, der andere Teil am distalen Ende IIb. Diese Verteilung ist ohne kinematische Bedeutung, man denke an die zwei Scharniere einer Tür, sie hat eine Bedeutung für die Festigkeit, den Zusammenhalt der Kette. Das Gelenk III ist ein Kugelgelenk. Dieser Kettenschluß ist nur möglich, wenn der Schnittpunkt der beiden Scharnierachsen mit dem Mittelpunkt des Kugelgelenkes zusammenfällt. Die Beweglichkeit des Radius können wir durch Subtraktion aus dem Kugelgelenk

$$\begin{array}{r} 0,2,2 \\ -\ 0,0,1 \\ \hline =0,2,1 \end{array} = 0,1,2$$ erhalten oder durch Addition der beiden Scharniere:

$$\begin{array}{rl} & 0,0,1,1\ \ldots. \\ + & 0,0,1\ . \\ \hline = & 0,1,2\ . \end{array}$$

Daraus ergibt sich, daß auch das Kugelgelenk nur eine statische Bedeutung hat. Die gleiche Art der Beweglichkeit wird durch die beiden hintereinander geschalteten

[1]) Kann jedenfalls als solches betrachtet werden.

Scharniere allein erhalten. Fig. 122 zeigt die kinematischen Figuren, 2 Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ entsprechen den Gliedern 2 und 3 — Zwischenglied und Bewegungsglied, Ulna und Radius. Die Gerade A_2B_2 liegt zum Grundglied (Humerus) fest. Der geometrische Ort von C_2 ist ein Kreis. A_3B_3 liegt in der Ulna fest und schneidet A_2B_2. A_3 fällt also mit A_2 zusammen, hat die Beweglichkeit 0, B_3 fällt mit C_2 zusammen, hat die Beweglichkeit 1. C_3 hat zum Zwischenglied die Beweglichkeit 1, für jede Lage dieses Gliedes relativ zum Grundglied also einen Verkehrskreis; daraus resultiert für alle Lagen des Zwischengliedes für die beliebigen Punkte des Bewegungsgliedes (C_3) eine Verkehrsfläche, die durch die Bewegung dieses Kreises entsteht, und zwar ist das eine Kugelzone, da die Bewegung bei der die Verkehrsfläche aus dem geometrischen Ort 1. Ordnung entsteht, eine Drehung um eine Achse ist, die die Mittelsenkrechte des Kreises schneidet. So kommt die Beweglichkeit des Radius gegen den Humerus 0, 1, 2 zustande.

Das können wir uns durch ein Modell noch mehr verdeutlichen; Fig. 123 zeigt ein solches. Das Scharnier II ist nicht geteilt, sonst entsprechen die Bezeichnungen denen der Fig. 121. Fig. 124 zeigt dasselbe Modell ohne das Kugelgelenk. Die Beweglichkeit ist genau dieselbe, die Nummern entsprechen wieder der Fig. 121.

Die nicht ebenen und nicht sphärischen zwangläufigen Verbände haben die Beweglichkeit 1, 1, 1. Wir führen als Beispiel das Schraubenpaar an (Fig. 125). Hier haben die Punkte einer Geraden eine lineare Beweglichkeit in der Verlängerung dieser Geraden, alle anderen Schraubenlinien zu Verkehrslinien.

Die flächenläufigen Verbände nicht (allgemein) sphärischer Art haben die Formeln 1, 1, 2; 1, 2, 2 und 2, 2, 2. Dem 1,1, 2-Verband waren wir bereits begegnet, als wir zwei 0, 0, 1-Verbände zu einer offenen Kette zusammenfügten und die Beweglichkeit addierten. Das ist der eine Weg, diese Beweglichkeit zu erhalten. Die beiden 0, 0-Linien der hintereinander geschalteten Verbände dürfen sich dabei nicht schneiden, noch einander parallel laufen. Fig. 126 zeigt eine solche Kette, 127 die Skizze der kinematischen Figuren. Die Bezeichnung ist unsere übliche. Die Platte ist das Grundglied, $A_2B_2C_2$ das Zwischenglied, $A_3B_3C_3$ das Bewegungsglied. Die Punkte der 0,0-Linie des dritten Gliedes (relativ zu 2) erhalten durch ihre Einlagerung ins Zwischenglied eine Verkehrslinie, Kreise. Sie ist Tangente an den Kreis, den der Fußpunkt der gemeinsamen Normalen beider Achsen, C_2, zur Verkehrslinie hat.

Ganz dieselbe Art der Beweglichkeit, 1, 1, 2 können wir auch durch ein Berührungspaar erzielen. Gelingt es, ein Glied so zu stützen, daß alle Punkte einer Geraden in ihm zwangläufig werden, alle anderen die dann für sie übrigbleibende Beweglichkeit beibehalten, so ist nach den Bedingungen des starren Punktsystems für sie eine flächenhafte Beweglichkeit erreicht, eine Beweglichkeit von der Formel 1, 1, 2.

Wenn eine ebene Figur eine andere in einem Kreise umschließt, so schneiden sich die Stütznormalen im Mittelpunkt des Berührungskreises (Fig. 128). Dieser Mittelpunkt bleibt für eine Bewegung in der Ebene des Berührungskreises gegen beide Figuren in Ruhe. Denn jede Figur ist gegen die andere in der Kreisebene vollständig gegen Verschiebung, gegen Verdrehung bis auf Drehung um den Mittelpunkt gestützt.

Betrachten wir jetzt diesen Mittelpunkt allein, A, so ist er in der Ebene des Kreises unbeweglich, beweglich ist er senkrecht zur Ebene des Kreises. Wir geben dem Bewegungsglied jetzt eine solche Gestalt, daß es das Grundglied in einer einzigen Kreislinie berührt und umschließt. Dann gilt das eben Gesagte für den Mittelpunkt des Berührungskreises. Bewegen wir jetzt den Berührungskreis ein wenig in der Weise, daß er seine Ebene verändert, so kann das nur eine derartige Bewegung sein, daß der Mittelpunkt A des Berührungskreises sich senkrecht zur Kreisebene bewegt; das ist ja die einzige Bewegung, die er machen kann. Soll sich nun in der neuen Lage die Beweglichkeit des Mittelpunktes A nicht ändern, so muß in dieser neuen Lage dieselbe Art der Stützung des Bewegungsgliedes durch das Grundglied vorliegen, jenes muß dieses in einem einzigen Kreise berühren. Die Oberfläche des Grundgliedes, an dem die kreisförmig lineare Berührung stattfindet, muß also an allen Stellen so beschaffen sein, daß ein ebener Schnitt einen Kreis von der Größe des Berührungskreises ergibt und ein diesem Schnitt unendlich nahe benachbarter ebenfalls einen solchen Kreis. Dann ist der Mittelpunkt des Kreises, den wir uns fest mit dem Bewegungsglied verbunden denken, an jedem Orte, den er einnehmen kann, nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen verschieblich. Stets schneiden sich in ihm die Stütznormalen mit Winkeln unter 180° und liegen in einer Ebene, so daß die Richtung senkrecht zu dieser Ebene als mögliche Bewegung für den Punkt allein übrig bleibt. Der Punkt A ist damit zwangläufig.

Als Berührungsorgane der beiden Glieder haben wir also am Bewegungsglied eine Linie. Das innere Profil des Bewegungsgliedes kann ein Winkel sein (Fig. 129) oder ein Kurvenstück.

Die Oberfläche des Grundgliedes sei zunächst der Mantel eines Kreiszylinders (Fig. 129 u. 130). Ein solcher erfüllt die verlangte Bedingung: Zwei unendlich nahe ebene Schnitte, die normal zu den Mantellinien stehen, ergeben gleiche Kreise. Wir nennen den Mantel die Führungsfläche des Paares.

Der Mittelpunkt des Berührungskreises ist zwangläufig, wie wir eben gesehen haben. Fig. 130 stellt einen Längsschnitt des Paares vor, der durch die Achse des Zylinders geht. In dieser Achse liegt A, sie ist seine Verkehrslinie. Die Ebene des Berührungskreises steht auf ihr senkrecht. Diese Achse ist eine zum G r u n d g l i e d feste Gerade.

Eine senkrechte Gerade auf der Ebene des Berührungskreises in dessen Mittelpunkt nennen wir die A c h s e d e s B e w e g u n g s g l i e d e s. Dies ist also eine zum B e w e g u n g s g l i e d feste Gerade. Beide Achsen fallen bei diesem Paare zusammen. Die Ebene des Berührungskreises nennen wir die Medianebene, die zu ihr parallelen Ebenen Sagittalebenen des Bewegunggliedes. Nun ist aber an unserem Paare nicht nur A, sondern jeder Punkt der Achse des Bewegungsgliedes zwangläufig. Versuchen wir ihn (Fig. 130) in einer Richtung zu verschieben, die eine Komponente senkrecht AB hat, so würden wir dabei eine Figur deformieren, die B mit Punkten des Berührungskreises verbindet. (Linienzug BCB′ der Fig. 130). Das widerspricht den Bedingungen des starren Punktsystems. Jeder andere Schnitt nicht senkrecht zur Zylinderachse, in den der Berührungskreis bei der Verschiebung zu liegen käme, wäre eine Ellipse mit einer großen Achse, die größer als der Kreisdurchmesser ist; eine Verschiebung von B senkrecht zu AB wäre also nur unter Deformation möglich.

AB ist somit zwangläufig, die Bahnen ihrer Punkte fallen alle in eine Gerade, nämlich ihre eigene Verlängerung, die mit der Zylinderachse zusammenfällt. Damit ist für einen beliebigen Punkt C des Bewegungsgliedes (Fig. 132) die Beweglichkeit gegeben. Sein geometrischer Ort für jede Lage von A ist der Kreis, senkrecht AB, mit seinem Abstande CC_p von dieser Geraden, seine ganze Verkehrsfläche also die Fläche, die sein geometrischer Ort 1. Ordnung beschreibt, wenn die Gerade AC_pB ihre zwangläufige Bahn durchläuft. Diese Bahn ist in dem bisher behandelten Falle eine Gerade, zu der die geometrischen Örter 1. Ordnung der beliebigen Punkte stets senkrecht stehen, die resultierende Verkehrsfläche ist also ein Zylindermantel von dem Halbmesser CC_p.

Die Beweglichkeit des Bewegungsgliedes gegen das Grundglied hat 2 Mannigfaltigkeitsgrade, entsprechend 4 Bedingungsgleichungen. Diese Gleichungen sind die der Verkehrslinien der Punkte A und B und würden in unserem Falle für ein rechtwinkliges Korrdinatensystem lauten:

$$x_a = f_1\ (y_a,\ z_a) \qquad x_b = f_3\ (y_b,\ z_b)$$

$$x_a = f_2\ (y_a,\ z_a) \qquad x_b = f_4\ (y_b,\ z_b)$$ wo alle Gleichungen

Gleichungen ebener Flächen wären.

Die Profilgebung für den Teil des Bewegungsgliedes der den Berührungskreis trägt, ist beliebig, die Umdrehungsfläche einer Kurve oder eines Winkels um die Achse des Bewegungsgliedes, wie wir die Mittelsenkrechte des Berührungskreises nannten. In dem eben behandelten Falle, dem Falle des Paares mit einer zylindrischen Berührungsfläche, kann auch eine flächenförmige Berührung stattfinden. Wir haben dann ein Umschlußpaar, bestehend aus einer positiven und negativen Zylinderfläche, vor uns (Fig. 133a und b). Es kann jedoch auch die Berührung auf drei Punkte reduziert werden, wenn nur die Stütznormalen in diesen Punkten Winkel von weniger als 180° miteinander einschließen.

Fassen wir das Wichtige unseres 1, 1, 2-Paares kurz zusammen. Das Bewegungsglied hat eine zwangläufige Gerade, die Mittelsenkrechte des Berührungskreises. Wir bezeichneten sie als Achse des Bewegungsgliedes. Sie ist dann zwangläufig, wenn der Berührungskreis auf einer Führungsfläche sich bewegt, in der zwei sehr nahe ebene Schnitte gleichgroße Kreise ergeben. Die Kreise müssen zugleich die kleinsten ebenen Schnitte sein. Eine Fläche, die diesen Forderungen entspricht, war der Kreiszylindermantel.

Wir haben zu untersuchen, ob es nicht noch mehr solcher Flächen gibt. Das ist in der Tat der Fall. Die Führungsfläche können wir uns nun durch die Bewegung der Achse AB des Berührungskreises mit dem Berührungskreis entstanden denken. Die Bewegung erfolgt bei der Entstehung des Kreiszylindermantels so, daß AB ihre eigene Verlängerung durchläuft.

Bewegen wir nun AB in einer Richtung, die nicht ihre eigene Verlängerung darstellt, so erhalten wir wenn diese Bewegung z. B. eine ebene Translationsbewegung bleibt, den Mantel eines elliptischen Zylinders. Diese Fläche ergibt zwar durch eine Schnittserie (ein System unendlich naher Schnitte, die einer bestimmten Bedingung genügen, in diesem Falle parallel sind) gleiche Kreise. Diese sind jedoch nicht die kleinsten möglichen Schnitte. Beide Bedingungen werden nur zugleich erfüllt, wenn die, die Kreise ergebende, Schnittserie, normal zur Bahn von A stehen. Durch eine elliptische Zylinderfläche würde A, aber nicht AB zwangsläufig. Denn jeder Schnitt durch die so gebildete Fläche normal zur Bahn von A ergibt eine Ellipse mit der kleinen Achse gleich dem Durchmesser des bewegten — Berührungs- — Kreises. Dieser Kreis könnte also Lagen einnehmen, in denen die Fläche nur in zwei Punkten berührt wird. Aus der Einzeichnung der Stütznormalen ergibt sich, daß in der Berührungslage (Fig. 134) für den Berührungskreis ein großes Rechtsdrehungsfeld übrig bleibt.

Die Gerade AB muß sich also in ihrer eigenen Verlängerung bewegen, die Richtung dieser Bewegung kann sich jedoch stetig ändern. Nach einer sehr kleinen Bewegung in ihrer Verlängerung kann sie sich um ein ebenfalls sehr kleines Stück um A drehen usw. Das heißt AB macht eine Bewegung so, daß AB ständig Tangente an die Bahnkurve von A bleibt (Fig. 135), diese Kurve muß eine stetige Funktion sein, und A muß ständig der Berührungspunkt der Tangente bleiben. (Also keine Abwicklung von AB auf der Kurve!) Die Führungsfläche wird damit ein allgemeiner Kreisring. Als einen solchen bezeichnen wir einen Körper, der durch Bewegung einer Kugel entsteht. Jeder Schnitt normal zur Bahn von A ergibt einen Kreis, der gleich dem Berührungskreis ist. Die Bahn von A nennen wir die Mittellinie dieser Führungsfläche.

Damit haben wir den Bereich der Gestaltungsmöglichkeit unserer Führungsflächen außerordentlich erweitert. Die Verkehrsflächen der der Medianebene des Bewegungsgliedes angehörigen Punkte können Kreisringoberflächen werden, deren Mittellinie jede stetige Kurve sein kann. Nimmt man die Verkehrsflächen der Punkte außerhalb der Medianen hinzu, so werden die Möglichkeiten noch reicher, wie wir nachher sehen werden.

Auch der Kettenschluß läßt sich ausbauen zur Bildung komplizierter Verkehrsflächen. Ein 0, 0, 1-Verband kann an einen 0, 1, 1-Verband angeschlossen werden, ein Rad des Zahnradpaares oder das Glied R einer Kurbel können ein Scharnier tragen, die Punkte des Endgliedes der so gebildeten Kette haben ebenfalls die Beweglichkeit 1, 1, 2. Jedoch kommen derartige Möglichkeiten für das Verständnis organischer Verbände weniger in Betracht.

Hier sei nur der 1, 1, 2-Verband eingehender besprochen, der, bei dem die Gerade ständig Tangente an einen Kreis bleibt. Durch eine offene dreigliedrige 0, 0, 1-Kette wie durch ein Berührungspaar mit einer Kreisringführungsfläche läßt sich diese Beweglichkeit erreichen.

In letzterem Falle ist die Führungsfläche eine Umdrehungsfläche, die durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Achse entsteht. Eine solche Fläche sei als Rotationskreisring bezeichnet, oder kurz als ein Ring.

In den Figuren 136 a und b sind die Bezeichnungen, die wir gebraucht haben oder zur bequemeren Verständigung brauchen werden, angeschrieben. Die Mittellinie ist ein Kreis, die Ebene dieses Kreises heiße Medianebene, die dieser parallelen Ebenen Sagittalebenen. Die Spur der Bildungsachse in der Medianebene ist der Mittelpunkt des Ringes. Die Schnitte durch die Bildungsachse sind die Normalschnitte, sie schneiden die Mittellinie normal. Der Medianschnitt ergibt zwei Kreise, den äußeren und den inneren Umfang. Der Radius der Mittellinie ist R, der des Bildungskreises, der in jedem Normalschnitt erscheint, ist r. 2(R—r) ist der Durchmesser des inneren Umfanges, die lichte Weite. Schneidet man den Ring senkrecht zur Medianebene durch parallele Ebenen, so ist das eine Querschnittserie, ein Schnitt jeder Serie ist ein Normalschnitt, jede Serie ergibt dieselbe Serie von Schnittfiguren, diese sind Lemniskaten.

Ein solcher Ring wird also von dem Bewegungsglied umfaßt. Das Bewegungsglied kann ebenfalls ein Ring sein, dessen innerer Umfang gleich dem Normalschnitt des Grundringes ist. Es kann sich auch eine andere Figur als Normalschnitt des Bewegungsgliedes ergeben (Fig. 137a und b).

Die Beweglichkeit eines solchen Paares mit einem Ring als Grundglied, einem zweiten als Bewegungsglied ist also 1, 1, 2. Jeder Punkt der Achse AB des Bewegungsgliedes (Fig. 139) hat als zwangläufige Bahn einen Kreis um den Mittelpunkt des Grundgliedes, also in dessen Medianebene. Das ergibt sich aus einem gleichen Gedankengang, wie wir ihn für den Kreiszylinder als Führungsfläche durchgeführt hatten.

Alle Punkte außerhalb AB haben dann Verkehrsflächen. Für jede Lage von A einen Kreis als geometrischen Ort 1. Ordnung. Diese letzteren sind für die Punkte der Medianebene konzentrisch mit dem Berührungsring, liegen also stets im Normalschnitt des Grundringes, wie denn Medianebene und Normalebene der beiden Ringe für jede Lage des Bewegungsgliedes ungleichnamig zusammenfallen. Daraus ergeben sich als Verkehrsflächen für die Punkte der Medianebene des Bewegungsgliedes Rotationskreisringe, die mit der Führungsfläche eine gemeinsame Mittellinie haben. Die Flächen sind alle einander parallel, sie haben gemeinsame Flächennormalen. Die Normalschnitte dieser Verkehrsflächen sind eben die geometrischen Örter 1. Ordnung, Kreise mit dem Radius $r+a$, wenn a der Abstand des betreffenden Punktes vom Berührungskreis ist. Die Verkehrsfläche der Punkte des Berührungskreises ist die Führungsfläche.

Nicht so übersichtlich sind die Verkehrsflächen der Punkte des Bewegungsgliedes, die nicht in seiner Medianebene liegen. Ein solcher Punkt heiße P, sein Abstand von der Medianebene des Bewegungsgliedes b, seine Projektion auf diese Ebene sei P_p, der Abstand dieser Projektion vom Berührungskreis a. Da der Momentanort von P_p ein Kreis ist, ist der von P ein gleicher, diesem paralleler Kreis, ebenfalls mit der Achse des Bewegungsgliedes AB als Mittelsenkrechter. Diese Dinge erkennt man aus Figur 139.

Auch dieser Kreis bildet durch Rotation um die Achse des Grundgliedes die Verkehrsfläche von P. Diese Achse liegt jedoch nicht in seiner Ebene. Es ergibt sich also ein Rotationskörper, wie er durch Rotation eines Kreises um eine außerhalb seiner Ebene liegende Achse entsteht. Die Bahn der einzelnen rotierenden Kreispunkte sind wiederum Kreise. Die Normalschnitte des Rotationskörpers gehen durch die Rotationsachse und schneiden die Punktbahnelemente senkrecht. Ein solcher Schnitt ergibt aber selbst keinen Kreis, sondern eine andere geschlossene Kurve. Durch Rotation dieser Kurve um eine in ihrer Ebene gelegene Achse, genauer um ihre eine Symmetrieachse können wir uns den Rotationskörper, dessen Oberfläche der geometrische Ort der Bahnen von P ist, auch entstanden denken. Dieser Normalschnitt charakterisiert zugleich den Körper. Wir haben also zu untersuchen, wie er aussieht.

Die Aufgabe ist kurz die, festzustellen, welchen Normalschnitt eine Rotationsfigur hat, die durch Rotation eines Kreises um eine außerhalb seiner Ebene gelegene Achse entsteht, wobei die Achse dieser Ebene parallel ist.

In der Figur 140 sei die gestrichelte Linie die Ebene des rotierenden Kreises, m die Achse, die volle Linie ist dann die Ebene des Normalschnittes[1]) der entstehenden Rotationsfigur.

[1]) Die Spuren dieser Gebilde in der Papierebene.

Wir drehen zunächst das Problem um (Fig. 141). Der unterbrochene Strich sei wieder der rotierende Kreis, der diesmal mit der Rotationsachse in einer Ebene liegt. Der volle Schnitt ergibt dann eine Lemniskate. Diese Lemniskate ist verschieden je nach der Größe des Winkels α, den wir den Differenzwinkel nennen wollen.

Eine Querschnittsserie ergibt eine Serie Lemniskaten, jede Querschnittsserie dieselbe Lemniskatenserie. In einer solchen Serie sind von der Tangentenfläche bis zum Normalschnitt alle Differenzwinkel verwirklicht. Die durch Variation des Winkels erhältliche Lemniskatenserie ist ein Viertel der ganzen Querschnittsserie[1]). Für einen Differenzwinkel sind in demselben Ring also alle Lemniskaten gleich. Daraus ergibt sich, daß wenn ich eine Lemniskate um eine ihrer einen Symmetrieachse parallelen, aber nicht in ihrer Ebene liegende Achse rotieren lasse, so, daß der Abstand dieser beiden Geraden a, dividiert durch den Abstand ihres Scheitels b von der Symmetrieachse $\frac{a}{b}$ gleich dem sin ihres Differenzwinkels ist, der Normalschnitt der entstehenden Rotationsfigur ein Kreis ist. Die Figur 141 ergibt unmittelbar eine Einsicht in diese Verhältnisse. Die Umkehrung dieser Betrachtungen führt uns zur Lösung des Ausgangsproblems.

Eine analoge Betrachtung soll zur Gewinnung gewisser Begriffe eingeschaltet werden. Verschiebe ich einen Kreis mit dem Radius r normal zu seiner Ebene, so ergibt sich ein Kreiszylinder (Fig. 142). Ein Schnitt normal zur Mantellinie — gestrichelt — ergibt einen Kreis, schief zur Mantellinie — voll — eine Ellipse. Beide Schnitte bilden den Winkel α. Dann ist der kleine Durchmesser der Ellipse $2b = 2r$, der große $2a = \frac{2r}{\cos\alpha}$. Verschiebe ich die Ellipse mit den Durchmessern 2a und 2b in einer Richtung, die den Winkel α mit ihrer Ebenennormale bildet, so erhalte ich dann einen Kreiszylinder, wenn $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist. Der Durchmesser des Normalschnittkreises ist $= 2b$, dem kleinen Durchmesser der Ellipse (Fig. 143).

Ich verschiebe jetzt die Ellipse mit den Durchmessern 2a und 2b senkrecht zu ihrer Ebene (Fig. 144). In der Zeichnung gebe der Schnitt den kleinen Durchmesser an, die rote Linie. Schneide ich nun normal zur Zeichenebene, aber schief zu den Mantellinien, so erhalte ich dann einen Kreis, wenn ich den Winkel zur Normalebene so wähle, daß $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist. Der Durchmesser des so entstehenden Kreises ist $= 2a$, dem großen Durchmesser der Ellipse. Verschiebe ich nun den Kreis mit dem Durchmesser 2r schief zu seiner Ebene, so, daß die Verschiebungsrichtung mit der Normalen auf seiner Ebene den Winkel α bildet, so ergibt sich ein elliptischer Zylinder mit dem Normalschnitt, $2a = 2r$ und $2b = 2r\cos\alpha$ (Fig. 145).

[1]) In jeder vollständigen Lemniskatenserie kommt jede Lemniskate zweimal vor, einmal diesseits, einmal jenseits des Normalschnittes der Serie. In jeder Hälfte ist wieder die eine Hälfte durch Variation des Differenzwinkels, dessen Scheitel am inneren, die andere Hälfte durch Variation des Differenzwinkels, dessen Scheitel am äußeren Umfang liegt, erhaltlich.

Aus alledem ergibt sich folgendes: Wenn ich 1. einen Kreis mit dem Durchmesser 2r mit dem Winkel α schief verschiebe (Fig. 145), so erhalte ich eine Ellipse als Normalschnitt. Lege ich 2. einen schiefen Schnitt durch den Zylinder, den ich durch denselben gerade verschobenen Kreis erhalte, so daß der Schnitt zum Normalschnitt den Winkel α hat, so erhalte ich auch eine Ellipse. Beide Ellipsen unterscheiden sich so, daß die erste Ellipse 2r als großen, die zweite 2r als kleinen Durchmesser hat. Der kleine Durchmesser der ersten ist $= 2r\cos\alpha$, also kleiner als 2r, der große Durchmesser der zweiten $= \dfrac{2r}{\cos\alpha}$, also größer als 2r.

Den elliptischen Schnitt der Fig. 142 können wir auch als Durchgangsfigur auffassen, als die Durchgangsfigur des normal zu seiner Ebene sich bewegenden Kreises durch eine schiefe Ebene und den Kreis der Figur 143, als die Durchgangsfigur einer sich schief bewegenden Ellipse durch eine zu ihren Punktbahnen normale Ebene.

Wir nennen den Durchmesser des Kreises in der Papierebene seine X-Achse, den Durchmesser normal dazu seine Y-Achse. Betrachten wir nun nacheinander die Figuren 142—145.

Beim Durchgang des Kreises durch die schiefe Ebene (142) bleiben in der Durchgangsfigur die Y-Koordinaten erhalten, die X-Koordinaten werden verlängert. Wir wollen das Streckung der X-Achse nennen. Diese Streckung ist, da es sich um geradlinige Bewegung handelt, für jedes dx gleich, daher wird die Durchgangsfigur eine Ellipse.

Umgekehrt wird in Figur 143 die Ellipse beim Durchgang durch die Normalebene so gestaucht, daß 2a=2b wird. Wieder bezieht sich die Stauchung allein auf die X-Achse (2a-Achse), die Y-Koordinaten (2b-Achse) bleiben unverändert. Die Stauchung ist wiederum gleichmäßig, jedes dx wird gleichviel gestaucht.

In Figur 144 wird die sich normal bewegende Ellipse beim Durchgang durch die schiefe Ebene gestreckt. Die Streckung betrifft die kleine Achse, Y-Achse, allein und zwar wird jedes dy gleichmäßig so gestreckt, daß 2b=2a wird.

In Figur 145 endlich geht der schief sich bewegende Kreis so durch eine zu seinen Punktbahnen normale Ebene, daß sein einer Durchmesser, den wir als seine Y-Achse bezeichnen, gestaucht wird. Das Resultat ist, da es sich um geradlinige Bewegung handelt, eine Ellipse mit dem großen Durchmesser 2r, denn die andere, X-Achse bleibt unverändert.

Diese Stauchung und Streckung der einzelnen Achsen darf nicht verwechselt werden mit einer Streckung und Stauchung der ganzen Kurve. Denken wir uns z. B. eine elastische Platte und auf dieser einen Kreis aufgezeichnet. Ziehen wir diese Platte in die Länge, so wird der Kreis eine Ellipse unter gleichzeitiger Änderung der X- und Y-Koordinaten. Umgekehrt ist das beim Zusammendrücken der Platte. Dieser Gedankengang ist von den Erörterungen über optische Elastizität geläufig.

Unser Gedankengang ist ein ganz anderer. Wir denken uns einen Kreis durch ein Achsenkreuz, X- und Y-Achse, geteilt (Fig. 146). Nun wird parallel der Y-Achse der Kreis in eine sehr große Menge gleichbreiter Streifen geschnitten. Die Breite sei dx. Jeder dieser Streifen kommt einem Rechteck sehr nahe, dessen eine Seite dx, dessen andere das y der betreffenden Stelle ist. Jeder dieser Streifen werde jetzt verbreitert oder verschmälert — variiert — unter Erhaltung der Y-Seite. Werden alle Streifen gleichmäßig variiert, so entsteht nach der Zusammensetzung eine Ellipse. Die neue Seite des Rechtecks heiße dvx, die alte heißt dx. Für unsere gleichmäßige Streckung oder Stauchung ist dann $\frac{dvx}{dx} = \text{const.}$[1]). Ist $\frac{dvx}{dx} = f(x)$, so ist die Streckung oder Stauchung ungleichmäßig. Das gilt für jede Durchgangsfigur des Kreises durch eine Ebene, die nicht mit seiner eigenen zusammenfällt, wenn die Bewegung eine krummlinige ist, der Mittelpunkt des Kreises einen Kreis oder eine andere Kurve beschreibt.

Je nach dem Orte des Rechtecks oder Streifens im Kreise ist bei der ungleichmäßigen Veränderung der dx diese Änderung verschieden. Man drückt das bekanntlich so aus, daß man sagt $\frac{dvx}{dx} = f(x)$. Je nach der Beschaffenheit dieser Funktion erhält man dann die verschiedenen Kurven, wenn $\int f(x) \cdot dx$ in die Kreisgleichung eingesetzt wird.

Eine solche ungleichmäßige Veränderung liegt also bei unserem Rotationsproblem vor.

Wir nennen die Bewegung eines Kreises, bei der jeder seiner Durchmesser eine Ebene bildet, eine ebene Bewegung. Eine einfache gerade ebene Bewegung ist sie, wenn der Kreismittelpunkt eine Gerade normal zur Kreisebene beschreibt, eine einfache schiefe dann, wenn diese Gerade nicht normal zur Kreisebene beschrieben wird. Die sich hierauf beziehenden Probleme haben wir bereits erörtert.

Der Mittelpunkt soll jetzt andere Bahnen durchlaufen. Wir haben wieder zu unterscheiden zwischen gerader und schiefer Bewegung. Bei der geraden steht der Kreis normal zur Tangente seiner Mittelpunktsbahn, bei der schiefen nicht. Im ersteren Falle erhalten wir die schon besprochenen Führungsflächen der 1, 1, 2-Berührungspaare, nämlich bei gerader Rotation, parabolischer, elliptischer usw. Bewegung des Kreises. Die Normalschnitte sind Kreise, die Querschnitte, oder Durchgangsfiguren durch Querebenen sind Streckungsfiguren des Kreises, $\frac{dvx}{dx} > 1$. Bei der schiefen Rotations- oder elliptischen usw. Bewegung steht der sich bewegende Kreis normal zur Krümmungsebene seiner Mittelpunktskurve, schneidet diese Kurve aber nicht normal. Die Normalschnitte sind Stauchungsfiguren des Kreises, $\frac{dvx}{dx} < 1$. Die Querschnitte bilden eine Reihe, die vom Normalschnitt bis zu dem Schnitt, der einen Kreis ergibt, Stauchungsfiguren sind, von da an Streckungsfiguren darstellen. Der in der Mittelpunktsbahnebene liegende Durchmesser des Kreises ist dabei die Stauchungs- oder Streckungsachse.

Mit diesen Ergebnissen können wir alle Verkehrsflächen der Punkte der 1, 1, 2-Verbände ableiten. Die aus zwei 0, 0, 1-Paaren bestehende dreigliedrige Kette fällt dabei zusammen mit dem Berührungspaar, dessen Führungsfläche ein Rotations-Kreisring ist.

[1]) Für Fig. 142 z. B. ist $\frac{dvx}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Figur 147 zeigt beide Normalschnitte graphisch abgeleitet. Die linke Seite zeigt die Durchgangsfigur des gerade rotierenden Kreises durch die schiefe Querschnittsebene, die rechte Seite die Durchgangsfigur des schief rotierenden Kreises durch die Normalebene. Die linke Kurve ist eine Lemniskate, die rechte eine verwandte Kurve. Sie sind darunter noch einmal ausgezeichnet.

Figur 148 dient zur Entwicklung der Gleichungen, die in einer Anmerkung am Schlusse gegeben wird. Die Streckung der X-Achse, entsprechend der linken Seite wird dargestellt durch den Ausdruck $\frac{d\,v\,x}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \sin^2\alpha\,(R-n)^2}}$. Er bedeutet deshalb eine Streckung der X-Achse, weil der Ausdruck unter dem Strich kleiner als x ist, also der Bruch größer als 1. Die Stauchung, rechte Seite der Figur wird dann dargestellt durch den Ausdruck $\frac{d\,v\,x}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \operatorname{tang}^2\alpha\,(R-r)^2}}$, der kleiner als 1 ist, weil der Ausdruck unter dem Strich größer als x ist. Der Winkel α bedeutet dabei die Differenz der Ebene des rotierenden Kreises mit der Durchgangsebene.

Die Theorie der 1, 1, 2-Verbände haben wir damit im wesentlichen erörtert. Wir haben die geometrischen Örter der verschiedenen Punkte des Bewegungsgliedes kennen gelernt.

Eine Spezialform des 1, 1, 2-Berührungspaares wollen wir noch anführen[1]). Wenn wir einen Kreisring so konstruieren, daß seine lichte Weite gleich dem Durchmesser des Erzeugungskreises ist, und diesen dann durch einen zweiten, dem ersten kongruenten umfassen lassen, so erhalten wir zwei Berührungskreise (Fig. 149). Einen der beiden Ringe wählen wir zum Grundglied — den durchschnittenen schraffiert gezeichneten —, den anderen zum Bewegungsglied. Dann berührt der innere Umfang des Grundringes die Oberfläche des Bewegungsringes, und der innere Umfang des Bewegungsringes die Oberfläche des Grundringes je in einem Kreis. Beide Berührungskreise schneiden sich und stehen senkrecht aufeinander (Fig. 150). Die Figur zeigt den einen Kreis in der Papierebene und den senkrecht dazu stehenden als Projektion auf diese Ebene. Die Beweglichkeit ist natürlich dieselbe, wie wenn die Berührung nur in e i n e r Linie stattfände.

Aus diesem Paar läßt sich ein Sattelgelenk schneiden (Fig. 151). In den Ausschnitt wird der Schnittpunkt der beiden Berührungskreise aufgenommen. In jeder Lage der beiden Glieder findet in einem solchen Linienkreuz die Berührung statt. Von dem Linienkreuz behält je eine Linie ihre Lage relativ zu jedem Ringe bei, und zwar die Linie, die dem inneren Umfang jedes Ringes entspricht. Der Schnittpunkt der beiden Linien wandert also auf dem inneren Umfang des Grundgliedes hin und her. Der

[1] Die Schwierigkeit des Literaturstudiums im Felde hat mich erst nach der endgiltigen Fertigstellung dieses Textes darauf aufmerksam werden lassen, daß das Paar aus zwei kongruenten Ringen gleicher Weite schon lange von HENKE zur Erläuterung der Beweglichkeit des Sattelgelenkpaares angeführt worden ist. Die Bemerkung, die jedoch DU BOIS REYMOND in seiner speziellen Muskelphysiologie (Berlin 1903) daran anknüpft, scheint mir nicht richtig. Es ist unmöglich, daß das Linienkreuz, in dem sich das Paar berührt, jemals auf die konvexe Seite des einen der beiden Glieder gelangen kann. Der Schnittpunkt beider innerer Umfänge bleibt stets auf dem inneren Umfang des Grundgliedes.

Kontakt der beiden Glieder bleibt bei vollkommen starrem Material stets ein zweifach linearer.

Die Beweglichkeit 1, 2 2 erzielen wir durch eine Kette. Fig. 152 zeigt einen 0, 1 1-Verband, eine sphärische zwangläufige Kurbel mit dem 0-Punkt in A. Das Grundglied ist zugleich Bewegungsglied eines Scharniers. Dadurch wird eine Kette hergestellt aus vier Gliedern. Dem Grundglied, das das Scharnier trägt, das Zwischenglied 1, das gegen das Grundglied die Beweglichkeit 0, 0 1 hat, der beiden Zwischenglieder der Kurbelkette in 53 mit 2a und 2b bezeichnet und endlich das Bewegungsglied, der fette Strich. Die Additionsformel lautet also:

	0, 1, 1, 1	Kurbelglied b gegen Kurbelglied d.
	0, 0, 1, 1, 1.	
Summe	1, 2, 2.	

Das kann man auch so ableiten. B hat in bezug auf das Zwischenglied 1 eine Verkehrslinie, ebenso C, A ist relativ zu diesem Glied unbeweglich, das sind in bezug auf das Grundglied für jede Lage der Zwischenglieder die geometrischen Örter erster Ordnung, für jede Bahn von A ergeben sich also für die Punkte B und C Verkehrsflächen. A ist, da zum Zwischenglied fest, zwangläufig, also ist 1, 2, 2 die Beweglichkeit des Dreiecks A, B, C. Ganz dasselbe gilt nun, wenn die Kurbel eine ebene Kurbel ist. Der 0-Punkt liegt dann in unendlich weiter Entfernung. Im Dreieck werden ACB und ABC zu rechten Winkeln. Der zwangläufige Punkt des Gliedes mit der Beweglichkeit 1, 2, 2 liegt also unendlich weit weg.

Daraus ergibt sich auch die Beweglichkeit des Bezugsgliedes, das aus einem höheren Paar REULEAUX' analog unseren Ringpaaren abgeleitet wird. Diese höheren Paare REULEAUX' haben die Beweglichkeit 0, 1, 1. Der 0-Punkt kann in beliebiger Entfernung liegen, für ebene Ausführung liegt er unendlich weit weg. Fig. 153 zeigt ein solches ebenes Paar, bestehend aus dem Bogenzweieck im gleichseitigen Dreieck. Durch gerade Bewegung des Zweiecks wird eine Führungsfläche erhalten. Wir nehmen eine durch gerade Rotation gebildete an. Das Dreieck wird dann aus drei zylinderartigen Stäben ausgeführt, deren Mantellinien den aus dem Zweieck entstandenen Rotationskörper berühren. Das Glied funktioniert ganz analog dem Ringpaar, seine Beweglichkeit ist 1, 2, 2; der zwangläufige Punkt ist unendlich weit entfernt, alle anderen Punkte bewegen sich in Verkehrsflächen. Wir wollen jetzt noch einige Verbände besprechen, die, durch deren Behandlung sich noch einige interessante Besonderheiten ergeben. Zunächst lassen wir ein Schraubenpaar als letzten Verband einer dreigliedrigen Kette auftreten. Das erste Paar sei ein einfaches Scharnier. Dann hat jeder Punkt der Schraubenspindel die Beweglichkeit 2, eine Verkehrsfläche. Diese fällt verschieden aus, je nach der Lage der Achse der Schraubenspindel zu der des Scharniers. In dem Fig. 154 gezeichneten Fall sind die beiden Linien parallel. Die Punkte der Schraubenachse haben also einen Zylindermantel zur Verkehrsfläche, die übrigen Punkte Flächen, deren durch die Scharnierachse gehender Normalschnitt ein Profil wie Fig. 154b ergibt. Stehen die beiden Geraden anders zueinander, sie können sich auch schneiden, so sehen die Flächen etwas anders aus, die der Punkte der Schraubenachse werden dann zu Kegelflächen oder Ebenen. Die Beweglichkeitsformel lautet also 2, 2, 2.

Nun kann ich das Schraubenpaar auch mit einem Prismenpaar kombinieren. Die Schraubenmutter läuft z. B. in einer Geradführung (Fig. 155). Diese Geradführung sei so beschaffen, daß die durch sie erzielten Punktbahnen der Schraubenspindel parallel sind. Die Punkte der Achse der Schraubenspindel erhalten damit eine Verkehrslinie, nämlich die Verlängerung der Achse. Die Punkte außerhalb der Achse erhalten Verkehrsflächen, die Beweglichkeit ist also 1, 1, 2. Die Beweglichkeit ist von ganz derselben Art wie die des Zylinderpaares.

Die Beweglichkeit bleibt genau dieselbe, wenn ich die Geradführung, in der die Schraubenmutter läuft, durch ein Zylinderpaar ersetze, wenn der Querschnitt des Zwischengliedes (Fig. 155b) nicht sechseckig, sondern zylindrisch ist. Die Schraubenspindel kann keine Bewegung machen, die sie nicht auch in der Kette mit der Geradführung relativ zum Grundglied machen könnte. Die Beweglichkeit bleibt 1, 1, 2. Nach der Zählungsmethode O. Fischers, nach der die Summe der Freiheitsgrade der zu einer Kette zusammengesetzten Verbände die Freiheitsgrade des Endgliedes ergeben, hat die Spindel drei Freiheitsgrade. Tatsächlich hat die Beweglichkeit der Schraubenspindel gegen das Grundglied nicht mehr als zwei freie Koordinaten[1]). Die Zwischenglieder können dabei in beliebiger Weise vermehrt werden. Ein Schraubenpaar ist bei dieser Anordnung nicht nötig. Man erhält dann eine Reihe beliebig vieler ineinander gesteckter Hohlzylinder, deren äußerster das Grundglied, deren innerster das Bewegungsglied des Paares bildet, dessen relative Beweglichkeit Gegenstand der Aussage bildet. O. Fischer kommt bei derartigen Ketten bekanntlich zu mehr als 6, 20 und 30 Freiheitsgraden. Wir hatten gesehen, daß eine derartige Aussage einer klaren Bedeutung entbehrt, hier sehen wir wieder, wie eine derartige Behandlung des Problems der Beweglichkeit zu sinngemäßen Ergebnissen nicht führt. Der eigentliche Grund dieser Ergebnisse ist wohl der, daß bei O. Fischer zum mindesten ein klarer Hinweis darauf fehlt, daß jede Bewegungsaussage und jede Aussage über Beweglichkeit eine r e l a t i v e ist, eines Bezugsgliedes bedarf, relativ zu dem die Aussage einer Bewegung oder einer Beweglichkeit erst einen faßbaren Sinn erhält.

Die andere Kette, die wir noch betrachten wollen, ist geschlossen. Wir haben sie zu Beginn des Anhanges bereits behandelt und sie Raumkurbel genannt (Fig. 98). Sie bestand aus vier Gliedern, den Gliedern a, b, c, d. b war das Bewegungsglied, d das Grundglied. Zwischen je zwei Gliedern befand sich ein Kugelgelenk.

Zunächst halten wir A fest (Fig. 157). Bedingung A^0. Dann wird B zwangläufig, C behält seine Verkehrsfläche, ein Stück einer Kugelfläche, Beweglichkeit 0, 1, 2. Zwei Mannigfaltigkeitsgraden entsprechen dabei vier Gleichungen,

$$x_a = \text{const.} \tag{1}$$

$$y_a = \text{const.} \tag{2}$$

$$z_a = \text{const.} \tag{3}$$

$$(x_b + m)^2 + (y_b + n)^2 + (z_b + o)^2 = a^2 . \tag{4}$$

[1]) 0-Punkt in der Achse des Systems, x Achse entspricht der Achse. A, B, C seien die Punkte des Bewegungsgliedes. Dann heißen die Gleichungen: $y_a = 0$, $y_b = 0$; $z_a = 0$, $x^a = x_b + C$.

A_4 werde jetzt zwangläufig, Bedingung A^1 (Fig. 158); das ergibt B^2C^3,, Beweglichkeit 1, 2, 3, mit drei Mannigfaltigkeitsgraden, entsprechend drei Bedingungsgleichungen des Verbandes:

$$x_a = f_1 (y_a, z_a) \quad (1)$$

$$x_a = f_2 (y_a, z_a) \quad (2)$$

Gleichung (3) wie (4) der vorigen Entwicklung.

Der Bogen durch das Glied c in Fig. 158 bedeutet eine Geradführung.

Werden A und B beide zwangläufig, so erhält man die Beweglichkeit 1, 1, 2 mit zwei Mannigfaltigkeitsgraden (Fig. 159). Die Beweglichkeit ohne weitere Führungsmittel haben wir schon als 2P2F-Verband besprochen, wir werden weiter unten nochmal darauf zurückkommen.

Wir bringen jetzt an der Ecke C des Bewegungsgliedes einen drittten Kettenschluß an, so, daß ein Stab (a) durch zwei weitere Kugelgelenke mit Grundglied und Bewegungsglied verbunden wird (Fig. 160). Diesen Verband nannten wir die Dreifachkurbel; er besteht aus drei miteinander vereinigten Kurbeln, den Kurbeln a, b, c, d; a, b, e, d; e, b, c, d.

Wir führen hier wieder nacheinander die verschiedenen Bedingungen ein. Erste Bedingungskonstellation A^0. Dann erhalten wir eine gewöhnliche sphärische Kurbel von der Formel 0, 1, 1. Der 0-Punkt ist A[1]).

Zweite Bedingungskonstellation A^1, B^1 ergibt C^1, Formel 1, 1, 1 oder 0~, 1 1[2]).

Dritte Bedingungskonstellation A^1 ergibt B^2, C^2, Beweglichkeit 1, 2, 2 mit zwei Mannigfaltigkeitsgraden entsprechend vier Gleichungen.

Letzte Bedingungskonstellation: A^2, B^2, C^2. Um die so resultierende Beweglichkeit zu untersuchen, lösen wir die Verbindung bei C. Wir haben dann die Beweglichkeit $\frac{S}{2, (3), 2, 3}$, bei der nur zwei Punkte flächenläufig sind, alle anderen raumläufig, auch die der Verbindungsgeraden der beiden flächenhaft beweglichen Punkte. Lassen wir nun auch C flächenläufig werden, so haben wir eine weitere Gleichung[3]), der Mannigfaltigkeitsgrad sinkt auf drei. Die übrigen Punkte des Bewegungsgliedes bleiben aber raumhaft beweglich, erhalten keine Stützflächen. Das ergibt sich aus der Entwicklung mittelst geometrischer Örter. Für A^0 ergeben sich Verkehrslinien, für A^1 die durch Bewegung dieser Linien entstehenden Örter zweiter Ordnung, für A^2 die durch Bewegung dieser Flächen entstehenden Räume. Daraus ergibt sich zugleich, daß es nur einen Verband von drei Mannigfaltigkeitsgraden gibt, der zugleich flächenläufig ist, das ist der 0, 2, 2 bezw. 0~, 2, 2-Verband. Hier bewegen sich die geometrischen Örter zweiter Ordnung[4]) beim Übergang von dem Bedingungskomplex A^0 B^1 zu A^0 B^2 in ihren eigenen Ebenen bezw. Kugelflächen. Alle anderen flächenläufigen Verbände haben vier Bestimmungsgleichungen.

[1]) A^0 und B^0 ergibt Unbeweglichkeit.

[2]) Wenn die Bahn von A und B parallel Ebenen laufen.

[3]) Die 3 Kugelflächengleichungen der 3 Eckpunkte.

[4]) 1. Ordnung für A^0, B^0, zweiter Ordnung für A^0, B^1.

Damit sind wir zugleich bei den raumläufigen Verbänden angelangt. Die Beweglichkeit 1, 2, 3 hatten wir bereits mit der Raumkurbel (Fig. 98) hergestellt. Sie hatte drei Mannigfaltigkeitsgrade. Auch durch eine Kette können wir sie darstellen. Fig. 161 zeigt ein Ringpaar und an dem einen Ring angebracht ein 0, 0 1-Paar. Die 0, 0-Achse dieses Paares schneidet die Achse des Ringes mit dem es verbunden ist. Diese Achse ist zwangläufig. Folglich wird einer der Schnittpunkte beider Geraden auch zwangläufig. Die übrigen Punkte der 0, 0-Achse werden flächenläufig, die außerhalb z. B. in der Scheibe gelegenen raumläufig.

$$\begin{array}{rl} & 1,\ 1,\ 2 \\ & +\,0,\ 0,\ 1,\ 1,\ \ldots \\ \hline \text{Addition} & =\ 1,\ 2,\ 3. \end{array}$$

Fig. 161 zeigt beide Geraden, die Achse des Ringes und die des 0, 0 1-Paares parallel. Die Addition lautet dann

$$\begin{array}{l} \quad 1,\ 1,\ 2\ \ldots \\ +\,0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \\ \hline =\quad 2,\ 2,\ 3. \end{array}$$

Eine Gerade ist flächenläufig. Alle anderen Punkte sind raumläufig. Vier Mannigfaltigkeitsgraden entsprechen zwei Gleichungen, nämlich Gleichungen für die Verkehrsflächen zweier Punkte der flächenläufigen Geraden.

Dieselbe Art der Beweglichkeit läßt sich durch ein Berührungspaar herstellen, einen auf einer Ebene sich bewegenden Zylinder. Die Beweglichkeit 2, 3, 3 ist die einer Kugel, die mit einer Fläche in Berührung bleibt. Dieses Paar läßt sich auch als Kette ausführen, z. B. wenn die Fläche eine Ebene ist. Fig. 162 und 163 zeigen diese Kette. Auf der Ebene ist eine Scheibe beweglich, diese trägt ein Kugelgelenk. Fig. 163 zeigt den Boden der Pfanne punktförmig durchbrochen und die Ebene mit der Kugel in Berührung. Der Erfolg dieser Kette wird durch die Additionsformel deutlich:

$$\begin{array}{l} \quad 0\sim,\ 2,\ 2 \\ +\qquad 0.\ 2,\ 2 \\ \hline =\quad 2,\ 3,\ 3^{1)}. \end{array}$$

Da nur für einen Punkt, den Mittelpunkt der Kugel eine Bedingungsgleichung existiert, hat der Verband fünf Mannigfaltigkeitsgrade der Beweglichkeit.

Die Anordnung zeigt die Wirkung von Menisken und Zwischenbandscheiben. Es wird eine Kette gebildet. Das Endglied hat eine hohe Beweglichkeit, während zugleich alle Punkte in Stützflächen laufen, die aber jeweils zu den Zwischengliedern fest sind, eine größere Stabilität wird so erreicht, als bei punkthafter Berührung. Es wird eine Fläche belastet.

Nun gibt es noch eine Anzahl von Verbänden mit lauter raumhaft beweglichen Punkten, von der Formel 3,3, 3. Sie können 4 und 5 Mannigfaltigkeitsgrade haben. Bei ihnen sind Punkte, die ständig in Stützflächen bleiben nicht zu unterscheiden. Es sind also keine besonderen Punkte vorhanden. Sie können als Variationen des 2, 2, 3- und des 2, 3, 3-Verbandes aufgefaßt werden. Ist zum Beispiel nicht ein Kreiszylinder, sondern ein solcher, dessen Schnitt normal zu den Mantellinien eine andere Kurve er-

[1]) 2+2=3, da Zahlen > 4 keinen Sinn haben.

gibt, mit der einen Ebene in Berührung, so haben wir einen solchen höheren linear geschlossenen Verband mit 4 Mannigfaltigkeitsgraden vor uns. Wir können ihn als ein System von 2, 2, 3-Verbänden auffassen. Das Profil des Zylinders wird dann als aus einer Reihe von Kreisbögen zusammengesetzt gedacht. Mit zunehmender Zahl an solchen Elementen nähert man sich den wirklichen Verhältnissen. Ganz ebenso kann bei einem Verband mit punkthafter Berührung mittelst einer anderen als Kugelfläche verfahren werden, indem man eine Anzahl von Kugelflächen annimmt, die die Berührungsfläche der einen der beiden Gliedern zusammensetzt.

Damit wollen wir die allgemeinen Betrachtungen über Beweglichkeit und die der Verbände mit denen ihre verschiedenen Arten zu erzielen sind, schließen. Das letzte Exempel auf die Brauchbarkeit der hier entwickelten Betrachtungsart kann erst die Anwendung auf konkrete Probleme der tierischen Kinematik liefern. Hier können wir nur die Hoffnung aussprechen, daß dieser Versuch dazu dienen möge, dieses komplizierte Gebiet anschaulicher und einfacher behandelbar zu machen, als es die bisherigen Begriffe bisher gestatteten.

Markirch, 25. Februar 1917.

Anmerkung

zu S. 73.

Gleichung des Kreises:

$$(x-R)^2+y^2=r^2. \tag{1}$$

Linke Seite der Fig. 148:

$$v\,x^2 = x^2-(R-r)^2\sin^2\alpha \qquad (R-r)\sin\alpha = a$$

$$v\,x^2 = x^2-a^2 \tag{2}$$

$$\mathbf{x^2 = v\,x^2+a^2}$$

$$v\,x = \sqrt{x^2-a^2}\,;$$

daraus die Streckung nach der x Achse:

$$\frac{d\,v\,x}{d\,x} = \frac{d\sqrt{x^2-a^2}}{d\,(x^2-a^2)}\cdot\frac{d\,(x^2-a^2)}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \text{ oder } \frac{x}{\sqrt{x^2-(R-r)^2\sin^2\alpha}}\,.$$

Entwickelung der Gleichung der neuen Kurve (0_1 = Nullpunkt):

$$(x-R)^2+y^2=r^2$$

$$x^2-2Rx+R^2+y^2=r^2 \qquad \text{Quadrieren von } x^2+R^2+y^2-r^2=2Rx$$

$$x^4-2R^2x^2-2r^2x^2+2x^2y^2+y^4+2R^2y^2-2r^2y^2+R^4+r^4-2R^2r^2=0$$

$$R^4+r^4-2R^2r^2=C$$

$$2R^2 \qquad\qquad =A$$

$$2r^2 \qquad\qquad =B$$

$$x^4-A\,x^2-B\,x^2+2x^2y^2+y^4+A\,y^2-B\,y^2+C=0.$$

Einsetzen von (2):

$$v\,x^4+2a^2\,v\,x^2+a_4-(A+B)(v\,x^2+a^2)+2y^2(v\,x^2+a^2)+y^2(A-B)+y^4=0.$$

$$v\,x^4+v\,x^2\underbrace{(2a^2-A-B)}_{1}+2v\,x^2y^2+y^4+y^2\underbrace{(2a^2+A-B)}_{2}+\underbrace{C-(A+B)a^2+a^4}_{3}=0.$$

$$\overline{\;1\;}=M,\quad \overline{\;2\;}=N,\quad \overline{\;3\;}=D.$$

$$\mathbf{v\,x^4+M\,y^2+2\,v\,x^2y^2+y^4+N\,y^2+D=0.} \qquad \text{Lemniskate.}$$

Resultate: $\frac{d\,v\,x}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \sin^2\alpha\,(R-r)}}$

$$v\,x^4 + y^4 + M\,v\,x^2 + N\,y^2 + 2\,v\,x^2\,y^2 + D = 0, \text{ wobei}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= 2a^2 - 2R^2 - 2r^2 \\ N &= 2a^2 + 2R^2 - 2r^2 \\ D &= R^4 + r^4 + a^4 - 2R^2 r^2 - 2R^2 a^2 - 2r^2 a^2 \end{aligned}\right| \text{ Konstanten der Gleichung.}$$

Rechte Seite der Fig. 148:

$$x^2 = p^2 - v\,x^2 \quad (3) \qquad\qquad p = (R-r)\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$v\,x = \sqrt{x^2 + p^2}$$

$$\frac{d\,v\,x}{d\,x} = \frac{d\sqrt{x^2+p^2}}{d(x^2+p^2)} \cdot \frac{d(x^2+p^2)}{d\,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (R-r)^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}} \;.$$

Einsetzen von (3) in die quadrierte Kreisgleichung.

$$x^4 - x^2(A+B) + 2x^2y^2 + y^4 + y^2(A-B) + C = 0\,.$$

$$v\,x^4 + v\,x^2\underbrace{(A+B-2p^2)}_{1} - 2\,v\,x^2y^2 + y^4 + y^2\underbrace{(p^4 + A - B)}_{2} + \underbrace{C + p^4 - p^2(A+B)}_{3} = 0\,.$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{1} &= M_1 \\ \overline{2} &= N_1 \\ \overline{3} &= D_1 \end{aligned}\right| \quad \text{also:}$$

$$v\,x^4 + y^4 + M_1\,v\,x^2 + N_1\,y^2 - 2\,v\,x^2y^2 + D_1 = 0\,.$$

Abhandlungen
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
4. Abhandlung

Bänderkinematik

Versuch einer Theorie der Bandverbände

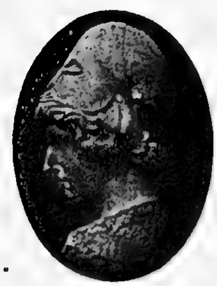
von

Hans Petersen
Privatdozent der Anatomie in Heidelberg

Eingegangen am 7. Mai 1917

Vorgelegt von H. Braus

TEXT



Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1428.

Veröffentlichungen der Heidelberger Akademie der Wissenschaften

(Stiftung Heinrich Lanz)

Jahresberichte beider Klassen.

Jahresheft, Juni 1909 bis Juni 1910. 2,50 M.
Jahresheft, Juni 1910 bis Dezember 1911. 2,40 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1912. 1,50 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1913. 1,50 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1914. 1,80 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1915. 1,60 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1916. 1,20 M.
Jahresheft, Januar bis Dezember 1917. 1,50 M.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse.

A. Sitzungsberichte.

Band I. Jahrgang 1909/1910, komplett 30,15 M.
Von Band II. Jahrgang 1911 an wurde eine Teilung der Bände in Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften und Abteilung B. Biologische Wissenschaften vorgenommen.
Band II. 1911, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 22,20 M.
Band II. 1911, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 13,45 M.
Band III. 1912, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 17,10 M.
Band III. 1912, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 5,20 M.
Band IV. 1913, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 18.50 M.
Band IV. 1913, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 8.30 M.
Band V. 1914, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 27.50 M.
Band V. 1914, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 4.15 M.
Band VI. 1915, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 11.60 M.
Band VI. 1915, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 1.50 M.
Band VII. 1916, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 13.— M.
Band VII. 1916, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 9.50 M.
Band VIII. 1917, Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften, komplett 21.60 M.
Band VIII. 1917, Abteilung B. Biologische Wissenschaften, komplett 14.50 M.
Band IX ist im Erscheinen.

B. Abhandlungen.

1. 1910. Wasielewski, Th. v., und L. Hirschfeld. Untersuchungen über Kulturamöben. Mit 4 Tafeln. 4.— M.
2. 1913. Osann, A. Petrochemische Untersuchungen. I. Teil. Mit 8 Tafeln. 10.— M.
3. 1914. Klebs, Georg. Über das Treiben der einheimischen Bäume speziell der Buche. Mit 20 Textfiguren. 7.50 M.
4. 1918. Petersen, Hans. Bänderkinematik. Versuch einer Theorie der Bandverbände. Mit einem Atlas von 37 Tafeln. 8.— M.
5. 1918. Lenard, P. Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Mit 7 Kurventafeln und 4 Textabbildungen. 16.— M.
6. 1918. Wülfing, E. A. Ein neues Polarisationsmikroskop. Mit 2 Tafeln und 32 Textfiguren. 7.— M.

CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG
ABT. DRUCKEREI • • HEIDELBERG