Abhandlungen

der

Fries'schen Schule.

Neue Folge.

Herausgegeben von

Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser
und **Leonard Nelson.**

Erster Band.

Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1906.

Inhalt.

Berichtigungen:

Seite 9, Zeile 2 v. o. statt Abtraktion lies Abstraktion.

Seite 83, Zeile 8 v. o. statt prostestiert lies protestiert.

Seite 242, Anmerkung 2 statt a. a. O. lies H. Cohen, Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. 1885.

Seite 247, Zeile 5 v. o. statt nochan lies noch an.

Seite 278, Zeile 1 v. o. statt trifftiger lies triftiger.

Seite 348, Zeile 9 v. u. statt geügenden lies genügende.

Seite 466, Zeile 10 v. u. statt Begriffe, des Wissens lies Begriffe des Wissens.

Seite 526, Zeile 15 v. o. statt z_1, z_3, z_3 lies z_1, z_2, z_3.

Seite 561, Zeile 1 v. u. statt Wohlordnung lies Ordnung.

Seite 562, Zeile 9 v. u. statt Element N lies Element α.

Seite 599, Zeile 6 v. o. statt lim $(\mu\lambda)$ lies lim $(\alpha\lambda)$.

Seite 626, Zeile 10 v. o. statt darstellbar lies endlich darstellbar.

Seite 646, Zeile 14 v. u. statt Zahlprozeß lies Zählprozeß.

Seite 704, Zeile 7 v. u. statt Astraktion lies Abstraktion.

Abhandlungen

der

Fries'schen Schule.

Neue Folge.

Herausgegeben von

Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser

und **Leonard Nelson.**

Erstes Heft.

Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1904.

Vorwort der alten Folge

zugleich als Vorwort der neuen Folge.

Die Herausgeber dieser Blätter haben sich vereinigt, eine Reihe von Abhandlungen erscheinen zu lassen, die alle in demselben Geiste verfaßt sind, wie verschieden auch die Individualität ihrer Verfasser und die Wahl ihrer Studien sein mag. Dieser Geist ist kein anderer, als der der kritischen Schule, wie sie von Kant gestiftet und von Fries weiter fortgebildet worden ist. Man hat schon längst diese Schule für tot, ihren Standpunkt für überwunden erklärt. Man hat die öffentliche Meinung so zu leiten gewußt, daß sie die Philosophie, der wir anhängen, verwarf, noch ehe sie dieselbe geprüft oder auch nur gehört hatte. Man hat allenthalben in Wort und Schrift zu verkünden sich angelegen sein lassen, daß diese Philosophie schon längst wieder vergessen sei. Dagegen können wir bezeugen, daß diese Philosophie noch nicht vergessen ist. Dagegen können wir zuversichtlich verkünden, daß sie niemals in Vergessenheit werde geraten können, daß die öffentliche Meinung in Bezug auf sie nur zeitweis irregeleitet worden sei. Und diese unsere Zuversicht, woher stammt sie? Daher, dass unsere Philosophie eine Probe ihrer Richtigkeit hat, wie keine andere wieder. Jede Philosophie, die mit den exakten Wissenschaften übereinstimmt, kann wahr sein, jede, die diesen widerstreitet, muß notwendig falsch sein. Wir wissen aber, daß die Kantisch-Friesische Philosophie, und nur diese allein, diese Probe der Wahrheit bestehen kann.

So wie die philosophischen Angelegenheiten in Deutschland gegenwärtig stehen, scheint ein dereinstiger Friedenszustand noch in weiter Ferne zu liegen, und doch ist derselbe vielleicht jetzt näher als je. Die Schulen, welche von Fichte bis auf Hegel und den wieder auferweckten Schelling die öffentliche Meinung beherrschten, haben nicht durch die Macht ihrer Gründe, sondern durch Verbindungen, durch betriebsame Benutzung der Presse und die Gunst der Regierungen gesiegt. Als man etwas zu spät die Früchte erkannte, die der Hegelsche Scholasticismus trieb, suchte man ein Heilmittel oder wenigstens ein Reagens dagegen in dem Neoplatonismus des Schelling. Das hieß den Teufel durch Beelzebub austreiben. Auch ist das Experiment gänzlich mißlungen. Alle Anstrengungen, um die öffentliche Meinung zum Glauben an die neue Schellingsche Offenbarung zu bewegen, sind fruchtlos geblieben. Das konnte auch jeder nur einigermaßen Kundige vorhersehen. Denn die Kultur dieser Zeiten und dieser westeuropäischen Völkerwelt ist nun einmal von der Art, daß kein Neoplatonismus mehr eine bleibende Stätte in ihr finden kann. Ja diese ganze Kultur ist gegenwärtig in ein Stadium ihrer Entwickelung eingetreten, in dem sie auch die letzten, schon in der Auflösung begriffenen Reste des Scholasticismus und Dogmatismus aus sich ausstoßen muß. Jede scholastisch-dogmatische Philosophie maßt sich an, eine spekulative Naturerkenntnis, eine Naturerkenntnis aus bloßen Begriffen zu besitzen. Alle Naturerkenntnis ist aber induktorisch, sie stammt nicht aus philosophischen Begriffen, sondern aus Experiment und Beobachtung. Die induktiven Wissenschaften, die einen unerschütterlichen Haltpunkt in unserm bürgerlichen Leben, in unserer Nautik, unserer Technik und unserer Industrie gefunden haben, halten sich an die Erfahrung und verschmähen ebensowohl die dialektischen Begriffsgrübeleien, wie die Träume der Phantasie über die Natur des Weltalls. Mit diesen induktiven Wissenschaften wird daher jedes scholastisch-dogmatische Philosophem sich ebenso im Widerstreit befinden, wie die neoplatonischen Philosopheme. Ihnen kann keine Philosophie genügen, die nicht anerkennt, daß der Schlüssel zur Erforschung der Naturgeheimnisse lediglich in den Induktionen liegt. Das Recht dieser Induktionen läßt die kritische Philosophie ungeschmälert bestehen. Sie will keine dialektische Methode an die Stelle der induktorischen setzen, sondern sie will nur leitende Maximen für die Induktionen aufstellen, Maximen, die dem Gange der Induktionen Richtung und Zielpunkt bestimmen. Die Induktion für sich allein würde zu keinem festen Ziele führen, wenn ihr nicht eine Naturphilosophie zur Seite stände. Diese Naturphilosophie ist aber keine andere und kann keine andere sein, als die, deren mathematische Principien Newton entwickelt und deren metaphysische Basis Kant ins Klare gesetzt hat. Diese mathematische Naturphilosophie steht hinter allen Induktionen und regelt ihren Gang, sie ist die Basis aller induktiven Wissenschaften, und es ist daher nichts weiter als eine Täuschung, wenn man meint, daß die induktiven Wissenschaften unabhängig von aller Philosophie bestehen. Aber diese Naturphilosophie ist etwas ganz anderes, als das, was man noch jetzt in Deutschland unter diesem Namen versteht. Man muß sich wohl hüten, sie mit jenem verunglückten Produkt Schellingischer Spekulation zu verwechseln, das die physiologischen Zweige der Naturwissenschaften einige Jahrzehnte in ihrem Fortschritt aufgehalten und das mit der wahren Naturphilosophie nichts gemein hat als den Namen.

Dies ist unsere gemeinschaftliche Ansicht über die Stellung der Philosophie zu den Naturwissenschaften. Wir sind nicht zusammengetreten, um ein fortlaufendes Journal zu gründen, sondern die Schule will nur ein Lebenszeichen, ein Zeichen ihres Daseins geben. Zu diesem Zweck haben wir die zufälligen oder absichtlichen kleineren Arbeiten, die diesem und jenem von uns aus dieser oder jener Veranlassung entstanden sind, zusammengetan, nicht um Partei zu machen, sondern um dem Publikum Rechenschaft zu geben von unserm stillen, aber gemeinsamen Zusammenwirken am großen Bau der Wissenschaften.

Nahezu zwei Menschenalter sind verstrichen, seit die Vertreter der Friesschen Schule sich zur gemeinsamen Verteidigung und Fortbildung der kritischen Philosophie vereinten. Diese Zeit hat die von ihnen gehegte Hoffnung auf einen nahen Friedenszustand im Gebiete der Philosophie nicht erfüllt. Die Philosophie, der jene Männer anhingen, hat nicht nur nicht den Sieg davongetragen, sondern die Öffentlichkeit ist achtungslos an ihr vorübergegangen. Unter den Trümmern der Schelling-Hegelschen Dialektik ist auch die Friesische Lehre begraben worden. Dort hat sie verschüttet gelegen bis auf unsere Tage, und die Geschichte kennt nicht mehr ihre Spuren. Und so scheint die Zeit über die hier vorgetragene Philosophie gerichtet zu haben.

Warum also wollen wir sie wieder aus dem Staube der Vergessenheit hervorziehen an das Licht des Tages? Und was soll unserer Zeit eine Lehre, die selbst in der Geschichte der Philosophie ihren Platz nicht zu behaupten vermocht hat?

Wir antworten: Nicht Neuerungs- oder Streitsucht treibt uns, das Wort zu ergreifen. Unsere Absicht ist nicht, die Zahl der streitenden Parteien um eine weitere zu vermehren und den Geschichtsschreibern der Philosophie ihre bunte Sammlung zu bereichern, sondern Wissenschaft an die Stelle der Parteimeinungen, und schulgemäße Ausbildung an die Stelle des zügellosen Spiels der Originalitätssucht zu setzen. Denn, wir bekennen es frei, auch wir leben der Zuversicht, daß die von Kant begründete und von Fries und Apelt fortgebildete Philosophie nicht von der Geschichte gerichtet und überwunden sei, und daß sie niemals überwunden werden könne. Nicht der Vergangenheit, sondern der Zukunft gehört sie an, und so bauen auch wir auf ihren einstigen Sieg und ihre einstige Alleinherrschaft.

Was aber ist der Grund dieser unserer Zuversicht, die den offenkundigsten Lehren der Geschichte zu widersprechen scheint? Welche Bürgschaft haben wir dafür, daß gerade der von Kant, Fries und Apelt entwickelten Philosophie dasjenige gelingen werde, wonach schon so viele vergeblich, wie nach einem Phantom, gestrebt haben?

Der Grund unserer Überzeugung von der Überlegenheit dieser Philosophie liegt in nichts anderem als in dem Vertrauen auf dieselbe Macht, durch die einst die Geometrie des Eukleides über die Zahlen- und Figurenphantasieen der Pythagoreer gesiegt hat, und die der von Keppler, Galilei und Newton ausgebildeten Astronomie die Überlegenheit über die astrologischen Träume ihrer Zeitgenossen verliehen hat. Diese Macht ist die wissenschaftliche Methode. Die Geschichte der Wissenschaften lehrt, daß es die Methode ist, die der Wahrheit den Sieg erringt über alles regellose Spiel der Parteimeinungen. Mit derselben Unwiderstehlichkeit, mit der die Methode der Induktion der Naturwissenschaft ihre Herrschaft im wissenschaftlichen und öffentlichen Leben erobert hat, mit derselben Unwiderstehlichkeit wird auch die von Kant, Fries und Apelt ausgebildete Methode der Kritik der Vernunft der kritischen Philosophie den Sieg erringen. Wer der Geschichte der Philosophie bis zu den Werken dieser Männer gefolgt ist, in dessen Augen kann das Unternehmen, noch fernerhin ohne diese kritische Methode zu philosophieren, nur dem Versuch des Träumers gleichen, die Zahlenmystik wieder an die Stelle der Mathematik, oder die Astrologie wieder an die Stelle der Mechanik des Himmels zu setzen. Den Beweis aber, daß unsere Philosophie auf ebenso strenger wissenschaftlicher Methode beruht wie die Mathematik und wie die Naturwissenschaften, werden wir nicht schuldig bleiben.

Der Standpunkt der Ausbildung, auf dem sich die philosophische Wissenschaft heute befindet, entspricht in der Tat demjenigen, den die Mechanik des Himmels und die physikalischen Wissenschaften vor etwa zwei Jahrhunderten einnahmen, und den die Mathematik bereits bei den Griechen erreicht hat. Diese Verschiedenheit in der Zeit ihrer wissenschaftlichen Ausbildung liegt in der Natur der verschiedenen Erkenntnisweisen begründet. Die Anschaulichkeit und Einleuchtendheit ihrer Grundlagen begünstigt eine frühe Entwicklung der mathematischen Wissenschaften. Da andererseits die Möglichkeit der physikalischen Theorieen an die Anwendung der Mathematik auf die beobachteten Erscheinungen gebunden ist, so wird eine gewisse Ausbildung der Mathematik derjenigen der Physik vorhergehen müssen. Gleich weit entfernt aber von der anschaulichen Evidenz der mathematischen Grundwahrheiten wie von der sinnlichen Deutlichkeit der empirischen Tatsachen ist die philosophische Wahrheit. Sie wird daher naturgemäß am spätesten die Form strenger Wissenschaft annehmen.

Wenn es nun aber wahr ist, daß die wissenschaftliche Ausbildung der Philosophie kein Geheimnis mehr ist, dessen Offenbarung wir erst von der Zukunft zu erwarten hätten, wie war es möglich, daß sie so lange unbeachtet bleiben konnte?

Wenn wir hier absehen von der Ungunst der äußeren Umstände, die die Verbreitung dieser Philosophie gehindert haben, so finden wir doch noch Ursache genug hierzu in der Natur der Sache selbst. Die Schnelligkeit der Verbreitung einer Lehre ist durchaus kein Maßstab für ihre Richtigkeit und für ihre wissenschaftliche Vortrefflichkeit. Denn je nach der Schwierigkeit des Studiums dieser Lehre wird der Gang ihrer Anerkennung und Verbreitung mehr oder weniger langsam ihrer Entdeckung nachfolgen. Gerade die bahnbrechendsten und folgenreichsten Entdeckungen sind jederzeit nur allmählich und langsam verstanden worden. Mehrerer Jahrhunderte hat es bedurft, bis die Induktion sich in den Naturwissenschaften einbürgerte, und noch viel länger hat es gedauert, bis die neuen naturwissenschaftlichen Ansichten ins Volk drangen und ein Allgemeingut der wissenschaftlich Gebildeten wurden. Die kritische Methode und die auf ihr beruhenden Entdeckungen konnten kein besseres Schicksal erwarten. Hundert Jahre nach Kopernikus versuchte noch Descartes in seiner Bewegungslehre die Ansicht vom Stillstand der Erde zu rechtfertigen. Kepplers Entdeckung der drei nach ihm benannten Gesetze, die jetzt zu dem unentbehrlichsten Handwerkszeug jedes Astronomen gehören, wurde auch von seinen größten Zeitgenossen nicht begriffen. Selbst Galilei hatte 23 Jahre nach dem Erscheinen von Kepplers Commentar über den Stern Mars noch keinen Begriff von der wahren Figur der Marsbahn. Erst Newton gab den Kepplerschen Entdeckungen, fast 80 Jahre nach ihrer Veröffentlichung, das Bürgerrecht in der wissenschaftlichen Welt. Und so mußten erst durch Engländer und Franzosen die Deutschen auf die wissenschaftlichen Verdienste ihres großen Landsmanns aufmerksam gemacht werden, nachdem sein Name länger als ein Jahrhundert in seinem Vaterlande nahezu verschollen geblieben war. Wie viel schwieriger und langsamer aber wird naturgemäß die Anerkennung und Verbreitung von Entdeckungen fortschreiten in einem Gebiete, das so sehr aller Anschaulichkeit und Evidenz ermangelt, wie die Philosophie. Hier nützt am wenigsten die Aneignung fremder Lehre, hier will die Wahrheit durch eigene Einsicht von jedem Schüler in harter Arbeit neu erworben werden.

Es ist also ein großer Unterschied zwischen der Ausbildung einer Wissenschaft in der Behandlung der Forscher und der Geschichte der Verbreitung der Ergebnisse dieser Forschungen unter dem Publikum. Daher beruht es auf einer verhängnisvollen Verwechslung, wenn man, wie es meist geschieht, die Geschichte der Philosophie in der Geschichte der die öffentliche Meinung beherrschenden Philosopheme sucht. In welchem Grade eine Lehre im öffentlichen Leben Anerkennung findet, das hängt zunächst von ganz anderen Umständen ab als von ihrem wissenschaftlichen Werte und von ihrer inneren Wahrheit; und umgekehrt: die Entwicklung der wissenschaftlichen Einsicht richtet sich nicht nach der Windfahne der öffentlichen Meinung. Das Schicksal einer philosophischen Lehre hängt zunächst meist davon ab, in welchem Grade sie sich den Bedürfnissen des Zeitgeistes anpaßt und die Interessen der Tageslaune begünstigt. Man erhält daher zwei ganz verschiedene Bilder von der Geschichte der Philosophie des letzten Jahrhunderts, je nachdem man sie aus dem Gesichtspunkt der öffentlichen Verbreitung oder aus dem des wissenschaftlichen Fortschritts betrachtet. Da ergiebt sich allerdings im einen Falle die Reihe: Kant, Fichte, Schelling, Hegel, Schopenhauer, Nietzsche. Die Geschichte der Ausbildung des wissenschaftlichen Geistes aber hat eine ganz andere Gestalt; da heißt die Reihe: Kant, Fries, Apelt. Diese beiden Reihen müssen notwendig so schroff auseinanderfallen, wenn die öffentliche Meinung, wie bei uns in Deutschland seit dem Zeitalter der Aufklärung, so sehr mit im Spiele ist. Es giebt also nicht, wie die Sage geht, zwei Kantische Schulen; sondern unter den Nachfolgern Kants giebt es eine Reihe von solchen, die seine kritische Methode verlassen und durch Bildung eigener „Systeme" ihre Zeitgenossen geblendet haben, während eine geringe Schar anderer, unbekümmert um die Gunst oder Ungunst der Menge, das von Kant begonnene Werk der wissenschaftlichen Einsicht auf dem von ihm eingeschlagenen Wege fortgebildet haben. Diese allein können auf den Ruhm, Kants Schüler zu sein, Anspruch machen. Und so werden in den Augen eines späteren, philosophisch reiferen Jahrhunderts jene zu ihrer Zeit in so glänzendem Ruhme stehenden Schwärmer keine andere Rolle spielen als etwa für unsere heutige Naturwissenschaft ein Patricius, Robert Fludd und Jakob Böhme. Kant, Fries und Apelt aber werden stehen bleiben neben Keppler, Galilei und Newton.

I.

Die kritische Methode
und das
Verhältnis der Psychologie zur Philosophie.

Ein Kapitel aus der Methodenlehre.

Von

Leonard Nelson.

„Es giebt Gelehrte, denen die Geschichte der Philosophie (der alten sowohl, als neuen) selbst ihre Philosophie ist, vor diese sind gegenwärtige Prolegomena nicht geschrieben.“

Inhalt.

1. Da die Begriffe, um die es sich in den folgenden Untersuchungen handelt, mit Bestimmtheit zuerst von **Kant** in die Wissenschaft eingeführt worden sind, werde ich mich in der Terminologie streng an den **Kant**ischen Sprachgebrauch anschließen. Demgemäß verstehe ich unter Metaphysik das System der synthetischen Urteile a priori aus bloßen Begriffen, also das System aller philosophischen, d. h. nicht auf Anschauung beruhenden (weder empirischen noch mathematischen) Urteile, unter Ausschluß der logischen. Und ich verstehe unter Kritik der Vernunft den Rechtsnachweis dieser metaphysischen Urteile aus den Gründen ihrer Möglichkeit. Ich lege mir nun folgende Frage vor: In wiefern bedarf die Metaphysik einer Kritik der Vernunft, und welcher Methode wird die Kritik folgen müssen, um diesem Bedürfnis zu genügen?

I.
Die regressive Methode.
Induktion und Abstraktion.

2. Es ist ein alter und beliebter Satz: Contra principia negantem non est disputandum. Wer mit mir in den Principien uneins ist, mit dem kann ich nicht streiten. Dieser Satz ist für die Philosophie grundfalsch. Jeder bedeutende Streit in der Philosophie ist ein Streit um Principien. In der Anwendung derselben in der Erfahrung und im Leben sind wir alle einig; erst wenn wir anfangen, über sie in abstracto zu philosophieren, hebt der Streit

an. So setzen wir bei unseren Rechnungen die Stetigkeit aller Bewegungen voraus, ohne uns durch Zenons Beweis der Unmöglichkeit stetiger Bewegung daran irre machen zu lassen. So erwartet jeder Chemiker, daß seine Substanz beim Arbeiten in geschlossenen Gefäßen nach der Operation dasselbe Gewicht zeigen werde wie vorher, ohne sich auf die metaphysischen Schwierigkeiten des dabei angewandten Grundsatzes der Beharrlichkeit der Masse einzulassen. So beurteilt ein jeder seine und seiner Mitmenschen Handlungen, ohne zu bedenken, daß die dabei vorausgesetzte Verantwortlichkeit seinem vielleicht deterministischen Philosophem widerspricht. Der Materialist spricht vom Geist, der Atheist von Gott, der Fatalist von der Freiheit, der Atomist von der Stetigkeit, der Empirist vom Naturgesetz, der Skeptiker von der Wahrheit, und nur in den Philosophenschulen herrscht eigentlich Streit über diese Dinge, dessen Entscheidung — sie mag fallen wie sie wolle — ein jeder nach beendigter Diskussion wieder verläßt, um zu seinen alten Überzeugungen zurückzukehren.

Unterscheiden wir danach die philosophischen Überzeugungen, wie sie unbewußt allen unseren Urteilen und Beurteilungen zu Grunde liegen, von dem Verfahren, sie für sich auszusprechen und in ein System zu bringen, mit andern Worten, unterscheiden wir Philosophie als Naturanlage und als Wissenschaft, so können wir in ersterer Bedeutung sagen, daß um keinen philosophischen Satz eigentlich Streit stattfindet, daß dagegen alle Schwierigkeit darin liegt, die philosophischen Principien unabhängig vom besonderen Falle der Anwendung in abstracto auszusprechen. Diese Unterscheidung giebt uns daher ein Mittel an die Hand, den Principienstreit zu schlichten. Greifen wir nämlich aus den Erfahrungen des Lebens solche Urteile und Beurteilungen heraus, über die Einigkeit herrscht, so können wir diese zergliedern und so durch ein regressives Verfahren den philosophischen Principien nachspüren, die in den vorliegenden Urteilen und Beurteilungen zur Anwendung kommen und gemeinsam vorausgesetzt werden. Durch fortgesetzte Zergliederung und Abstraktion von den besonderen Anwendungen müssen wir schließlich auf irgend welche letzte und höchste Voraussetzungen kommen, und diese werden wir dann für sich herausheben können.

3. Dies abstrahierende Verfahren kehrt den gewöhnlichen Gedankengang der objektiven Beweisführung, der Ableitung der Folgen aus ihren Gründen, gerade um und steigt von den Folgen aufwärts zu den Gründen zurück. Wir können also nicht sagen, daß wir dabei die Principien beweisen, sondern nur, daß wir sie als solche aufweisen. Wir weisen nur ad hominem dem Empiriker aus seinem Schlagworte der Erfahrung synthetische Urteile a priori als Bedingungen ihrer Möglichkeit — dem Ethiker aus seinem Schlagworte der Sittlichkeit den Glauben an die Freiheit des Willens gleichfalls als Bedingung ihrer Möglichkeit auf. Wir beweisen dadurch nichts, sondern wir suchen umgekehrt die logischen Gründe zu gegebenen Folgen. Diese Folgen sind die zugestandenen Urteile und Beurteilungen, diese zergliedern wir, sie dienen uns als Data für die Berufung ad hominem.

Es ist ein ganz irriges logisches Vorurteil, daß sich alle Wahrheit beweisen lassen müsse. Durch alle Beweise können wir vielmehr nichts erkennen und entdecken, was nicht schon implicite in den Grundsätzen lag, wir können uns nur dieses deutlicher machen und klarer zum Bewußtsein bringen. Beweise sind nur notwendig und möglich für mittelbare, abgeleitete Sätze, aber ebenso unnötig wie unmöglich für Grundsätze. Solange die Prämissen irgend welcher Sätze keine Grundsätze sind, kann ich sie bezweifeln, so lange erreiche ich keine vollständige Gewißheit. Will ich zu dieser gelangen, so muß ich bis zu den höchsten Principien, den Grundsätzen hinaufsteigen. Da diese aber zum großen Teil nur dunkel unseren Urteilen und Beurteilungen zu Grunde liegen, ohne daß wir sie besonders aussprechen und uns ihrer klar bewußt werden, wird eben ein künstliches regressives Verfahren erforderlich sein, um uns in ihren Besitz zu bringen. Bei denjenigen unserer Urteile, die sich auf Anschauung gründen, hat dies nun keine Schwierigkeit; denn sie drängen sich mit Evidenz und Klarheit unserem Bewußtsein auf. Aber unsere Erkenntnis entspringt eben nur zum Teil aus der Anschauung. Gerade der nicht anschaulichen Erkenntnis, die wir nur durch Begriffe im Urteil festhalten, fehlt die Evidenz und Klarheit. Dunkel liegt sie in uns, und es bedarf einer besonderen Methode, sie an das Licht des klaren Bewußtseins zu bringen. Das also wäre die Aufgabe der Philosophie als Wissenschaft: die Grundsätze, soweit sie sich nicht auf Anschauung gründen, sondern rein aus Begriffen entspringen, ausfindig zu machen und von ihrer ursprünglichen Dunkelheit zur Klarheit des Bewußtseins zu erheben. Gelingt es, sie vollständig in unseren Besitz zu bringen, so hätten wir damit die principielle Entscheidung aller überhaupt möglichen philosophischen Probleme in der Hand. Ohne diese regressive Untersuchung dagegen bleiben wir allen Willkürlichkeiten dogmatischer Metaphysik preisgegeben. Denn die Unbeweisbarkeit haben die Grundsätze mit allen *falschen* Sätzen, mit allen Irrtümern gemein. Nur mit dem Unterschied, daß letztere sich widerlegen und durch Vergleichen mit den Grundsätzen in ihrem Irrtum bloßstellen lassen. Der Dogmatiker braucht daher nur seine Sätze für Grundsätze auszugeben, sobald er nicht im stande ist, sie zu beweisen, und wir werden uns nur dann vor seinen unrechtmäßigen

Ansprüchen schützen können, wenn wir im Besitz des Systems aller wirklichen Grundsätze sind, und ihm so die Nichtigkeit seiner Sätze durch den Nachweis ihrer Mittelbarkeit geradezu gleichsam handgreiflich zu machen vermögen.

Nennen wir danach dogmatisch das Verfahren einer Wissenschaft, die von der Aufstellung ihrer Principien ausgeht, kritisch das Verfahren einer Wissenschaft, die auch ihre Principien einer Prüfung unterwirft, so werden wir sagen können, daß für die Philosophie alles auf ein kritisches Verfahren ankomme und daß der Kriticismus in der Philosophie in der Befolgung der regressiven Methode bestehe.

4. Suchen wir dies noch genauer zu bestimmen.

Alle Wissenschaft hat zum Ziel die Form der progressiven Ableitung der Folgen aus ihren Gründen, die Unterordnung des Besonderen unter das Allgemeine, der Tatsachen unter die Gesetze, d. h. die Systemform der Theorie. Um aber erst zu den allgemeinen Gesetzen zu gelangen, bedarf es oft der Vorarbeit; es läßt sich nicht überall, wie in der Mathematik, unmittelbar mit der Aufstellung der allgemeinen Gesetze beginnen. Die Naturwissenschaften bedürfen erst einer regressiven Erforschung ihrer Gesetze aus den Tatsachen, ehe sie daran gehen können, in einer Theorie diese aus jenen zu erklären. Diese regressive Erforschung der Naturgesetze aus den beobachteten Tatsachen ist die Aufgabe der Induktion. Aber die Induktion führt niemals auf Grundsätze, sondern immer nur auf Lehrsätze. Auch um induktiv verfahren zu können, muß ich schon gewisse allgemeine Gesetze voraussetzen. Auch die Induktion gründet auf die Voraussetzung des Allgemeinsten ein weniger Allgemeines, das also im Gegensatz zu den Grundsätzen ein Besonderes ist. Die Induktion ist nicht der Weg zu den notwendigen Wahrheiten, sondern zu der Verbindung der notwendigen Wahrheiten mit den zufälligen. Denn die notwendigen Wahrheiten bilden die höchsten Obersätze, die aller Induktion aus den Beobachtungen bereits a priori zu Grunde liegen. Der Weg zu den notwendigen Wahrheiten ist vielmehr die Abstraktion.

Z. B. Newtons Entdeckung des Gravitationsgesetzes führte zur Begründung der Theorie der Planetenbewegungen. Dies Gesetz ist aber kein Grundsatz, sondern ein Lehrsatz; seine Gültigkeit konnte nicht a priori eingesehen, sondern sie mußte induktorisch erwiesen werden. Für diese Induktion mußte Newton aber gewisse allgemeine Grundsätze der Mechanik anwenden. Er mußte z. B. aus den Principien der mathematischen Naturphilosophie die Voraussetzung entlehnen, daß alle Bewegungsänderungen Wirkungen stetig beschleunigender Kräfte sind, die unter dem Gesetz der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung stehen. Daß aber die Beschleunigung dem Quadrat der Entfernung der wirkenden Massen umgekehrt proportional ist, mußte erst aus der empirisch gegebenen Figur der Planetenbahnen erforscht werden.

So verknüpft das Newtonsche Gravitationsgesetz die astronomischen Beobachtungen mit den Grundsätzen der Mechanik. Ohne diese würde dem Gesetz die Allgemeinheit und Notwendigkeit, und ohne jene würde ihm die empirische Gültigkeit fehlen.

Suchen wir hingegen durch Zergliederung des Newtonschen Gedankenganges die Voraussetzungen des Gravitationsgesetzes, so kommen wir zuletzt auf jene allgemeinsten Grundsätze der Mechanik, die selbst die Principien und Bedingungen der Möglichkeit aller Induktion und eben darum selbst nicht induktorisch erweislich sind.

Es giebt also zwei verschiedene regressive Methoden; wir müssen die regressive Methode der Abtraktion noch von derjenigen der Induktion unterscheiden. Es ist mithin das zergliedernde Verfahren zur Auffindung der philosophischen Grundsätze ganz verschieden von allem Beweisverfahren, nicht nur von dem progressiven der Mathematik, sondern auch von dem regressiven der Induktion.

5. Da alles Philosophieren selbst Denken und Erkennen ist, so werden wir dabei notwendigerweise schon gewisse Principien anwenden und voraussetzen müssen, die wir doch erst suchen. Dies ist nun ein Cirkel, an dem jede dogmatische Methode des Beweises unvermeidlich scheitern und dem Skepticismus verfallen muß. Denn sie setzt voraus, was sie beweisen will, sei es regressiv, wie die Induktion, sei es progressiv, wie die Mathematik schließt. Einzig und allein die kritische Methode ist frei von diesem Cirkel und kann darum auch nicht von der Skepsis angefochten werden. Denn sie will ja die Principien nicht beweisen, sondern nur als solche aufweisen. Sie beweist nicht, sondern sucht vielmehr gerade das, was wir bei allen Beweisen schon voraussetzen und notwendigerweise voraussetzen müssen.

Während also die dogmatische Philosophie von irgend welchen beliebig aufgerafften und vermeintlichen Principien unbefangen ausgeht, steigt die kritische hinauf zu den Principien und sucht sie sich erst. Jene geht von Hypothesen aus, diese einzig und allein von Tatsachen, indem sie den Tatbestand unserer Urteile hinnimmt, wie sie ihn vorfindet, und ihn sichtet und zergliedert, um explicite auszusprechen, was schon implicite darin enthalten war. Die kritische Philosophie hat also auch gar nicht einen besonderen Teil der Dinge zum Gegenstande ihrer Forschung. Sie überläßt deren Erkenntnis ganz den Induktionen der Naturwissenschaft. Weder die Erkenntnis physischer noch die psychischer Dinge will sie ihr streitig machen, noch eine Wissenschaft vom Übersinnlichen sein. Sondern die Principien der Erkenntnis selbst sind ihr Thema, und zwar der Erkenntnis aller Dinge, sei es der physischen oder der psychischen, der sinnlichen oder der übersinnlichen. Sie will nichts erklären, sondern die obersten Gründe aller Erklärung suchen. Sie hat kein eigenes Gebiet zu erkennen, sondern lehrt in der Erkenntnis aller Gebiete den Irrtum vermeiden. Zu dem Zweck nimmt sie die Erkenntnis hin, wie sie sie als Faktum vorfindet, weder um ihre Wahrheit zu beweisen, noch um ihre Entstehung zu erklären, sondern um aus ihr die rein begriffliche Erkenntnis zu abstrahieren und auf ihre obersten Principien zurückzuführen. Hat sie diese gefunden, so stellt sie sie als System der Philosophie auf.

6. Diese Methode ist schon von Sokrates und Platon gefordert worden. Aber bereits Aristoteles hat die Sokratische Methode der Abstraktion unter dem Namen der ἐπαγωγή mit der Induktion verwechselt. Dies Mißverständnis ist in der Geschichte der Philosophie stehen geblieben bis auf Kant[1]. Kant hat

[1] Indem Aristoteles durch diese Verwechslung veranlaßt wurde, die Induktion als die regressive Methode dem συλλογισμός entgegenzusetzen, blieben ihm als ursprüngliche Erkenntnisquellen nur die Logik und die Empirie. Er übersah so die Leerheit der formalen Logik einerseits und die Unselbständigkeit der bloßen Empirie andererseits. Dadurch ist er der gemeinsame Vater der beiden entgegengesetzten Irrtümer in der Geschichte der Wissenschaft geworden: der Begründer des logischen Dogmatismus in der Philosophie sowohl als auch der Begründer des naturwissenschaftlichen Empirismus, d. h. der irrigen Lehre von der Selbständigkeit der Induktion neben dem Syllogismus, der sich die meisten Naturforscher der neueren Zeit angeschlossen haben und die am hartnäckigsten von den englischen Philosophen verteidigt worden ist. Es ist dies derselbe Fehler,

zuerst die kritische Methode mit Bestimmtheit angewandt, in bewußtem Gegensatz zu dem progressiv-mathematischen Verfahren seiner deutschen, wie zu dem induktiv-psychologischen seiner englischen Vorgänger. Er nannte diese Aufsuchung der Principien durch logische Zergliederung der mit dem Anspruch auf Apodikticität auftretenden Urteile und Beurteilungen Grundlegung oder auch metaphysische Erörterung, und unterschied sie noch von der transcendentalen Deduktion der Principien, die sich mit ihrem Rechtsnachweis beschäftigt.

II.
Über die Begründung der Urteile.
Beweis, Demonstration und Deduktion.

7. Was gewinnen wir nun eigentlich durch das regressive Verfahren? Neue Wahrheiten nur in so fern, als wir die Wahrheit der Daten, von denen unsere Zergliederung ausging, voraussetzen. Denn wenn auch die Grundsätze von den Konsequenzen, durch deren Zergliederung wir sie aufweisen, logisch unabhängig sind, so bleibt doch unsere Aufweisung derselben von ihren Konsequenzen abhängig. Da dies Verfahren kein Beweis, überhaupt keine objektive Begründung, sondern nur eine subjektive Berufung

---

auf dem die noch heute in der Logik populäre Entgegensetzung von Induktion und Deduktion beruht. Dieser zweite Fehler der Aristotelischen Logik ist erst durch Apelts „Theorie der Induktion" verbessert worden.

Wie nun Apelt die Aristotelische Theorie des progressiven Syllogismus der dogmatischen Methode durch die Theorie des regressiven Syllogismus ergänzt und dadurch die induktorische Methode der Naturforschung philosophisch begründet hat, so bleibt als die dritte und letzte Aufgabe der Logik noch die Theorie der kritischen Methode auszuführen, als die Lehre von der wissenschaftlichen Begründung philosophischer Grundurteile. Diese ist es, die wir hier suchen.

ad hominem ist, so bleiben wir mit seinen Resultaten immer von jenen ersten Zugeständnissen abhängig, die doch selbst erst durch die gefundenen Principien ihre objektive Begründung erhalten. Diese Principien müssen als solche unabhängig von allen aus ihnen gezogenen Konsequenzen gelten und können nicht erst auf diese gegründet werden.

Ein Beispiel wird dies Verhältnis deutlich machen. Das Princip von der Erhaltung der Energie ist nicht durch Beweis gefunden worden und konnte auch seiner allgemeinen Natur zufolge garnicht bewiesen werden[1]. Wir können zwar mit Hülfe dieses Princips sehr viel induktorisch beweisen, es ist aber selbst nicht durch Induktion, sondern durch Abstraktion gefunden worden. Helmholtz entdeckte es auf dem Wege rein logischer Zergliederung, indem er sich die Frage vorlegte: Wie müssen die höchsten Obersätze der Naturwissenschaft beschaffen sein, wenn ein perpetuum mobile unmöglich sein soll? So wahr das perpetuum mobile unmöglich ist, gilt das Princip der Erhaltung der Energie. Aber ohne dies Princip können wir über die Möglichkeit und Unmöglichkeit des perpetuum mobile garnichts a priori entscheiden. Wir blieben also nach diesem regressiven Gedankengang mit der Annahme des Energieprincips ganz von der Erwartung abhängig, ob es vielleicht noch einmal gelänge, ein perpetuum mobile zu konstruieren. Das kann aber nicht das letzte Wort in der Sache sein: denn es fällt keinem besonnenen Naturforscher ein, die

---

[1] Dies wird häufig übersehen, durch Verwechslung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie mit dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Dieser Satz ist aber nur eine Anwendung des Energieprincips und als solcher induktorisch bewiesen worden. Nicht daß die Energie konstant ist, besagt dieser Beweis, sondern daß die Wärme eine Form der Energie ist, wozu das Energieprincip in allgemeinster Form schon vorausgesetzt werden muß.

Gültigkeit des Energiegesetzes von dem Grade der Gewißheit eines solchen empirischen Satzes abhängig machen zu wollen. Vielmehr schreibt er es umgekehrt seinen Beobachtungen als Bedingung ihrer Gültigkeit vor, es gilt ihm als Norm und Regulativ für seine Induktionen. Durch Erfahrung können wir also ein derartiges Princip nicht beweisen, a priori beweisbar ist es aber ebensowenig, sofern es wirklich ein Grundsatz ist. Wodurch sollen wir es denn aber als solchen beglaubigen, und es schützen, wenn sich der Zweifel dagegen kehrt?

Das regressive Verfahren der Abstraktion ist also für sich nur eine faktische Aufweisung: Sofern wir faktisch gewisse Sätze anerkennen, müssen wir auch die logischen Bedingungen ihrer Möglichkeit einräumen. Nur die logische Abhängigkeit und Bedingtheit eines Satzes durch einen anderen weise ich so nach. Ich kann aber dadurch niemand zwingen, den aufgewiesenen Satz als wahr anzunehmen, der nicht unabhängig von meiner logischen Nachweisung von der Wahrheit der Folge überzeugt war und bleibt. Wer jene Daten nicht zugesteht, den wird also auch ihre Zergliederung nicht von den sie bedingenden Principien überzeugen. Ja, er könnte ebensogut umgekehrt, statt mit der Folge den Grund anzunehmen, mit dem Grunde die Folge ablehnen, und ich würde so nur das Gegenteil erreichen von dem, was ich wollte. Gerade indem ich ihm einen unbefangen anerkannten Satz auf eine ungewisse Basis stelle, kann ich ihm leicht auch diesen Satz selbst verdächtig machen, indem er den Zweifel von dem Grunde auf die Folge überträgt, statt die Gewißheit von der Folge auf den Grund zu übertragen. Habe ich z. B. dem Naturalisten gezeigt, daß er selbst, sofern er über Pflicht, Recht und Schönheit urteilt, eine objektive Zweckgesetzgebung anerkennt und der Naturgesetzgebung überordnet, so werde ich ihn vielleicht zu der Konsequenz drängen, seinem naturalistischen Philosophem zu Liebe seinen ethischen Überzeugungen untreu zu werden und ihnen — wenn auch nicht im Leben als handelnder Mensch, so doch vielleicht in der Spekulation als Philosophierender — jede Berechtigung abzusprechen.

8. Was wollen wir also tun, wenn sich der Zweifel gegen jene Data kehrt? Diese hängen ihrer Gültigkeit nach von den Principien ab und lassen sich aus diesen begründen. Aber um die Principien ist ja gerade Streit, um ihre Berechtigung handelt es sich ja eben. Die Berufung auf das Gefühl der Evidenz der eigenen Überzeugung würde ihnen schlechten Schutz gewähren. Wie viele Irrtümer sind nicht für unmittelbar evidente Wahrheiten ausgegeben worden. Jedes Pochen auf die Unerschütterlichkeit unserer Überzeugungen ist nur gewalttätiges Parteimachen, das wohl zur Überredung, aber nie zur Überzeugung führen kann. Nun hatten wir allerdings gesehen, daß es keinen Sinn hat, für Grundsätze einen Beweis zu verlangen; aber ob ein Satz wirklich ein Grundsatz ist, dies muß doch erst feststehen, ehe wir mit Fug und Recht auf seinen Beweis verzichten können.

Zu diesem Nachweis reicht aber das regressive Verfahren für sich nicht hin. Denn die Zergliederung selbst setzt sich keine Grenzen. Einerseits bleibt es ohne ein weiteres Kriterium immer fraglich, ob sich die Zergliederung nicht noch weiter fortsetzen läßt oder ob sie wirklich schon auf Grundsätze geführt hat. Wäre aber auch dies möglich, so bliebe andererseits immer noch die Frage, ob wir das System der Grundsätze schon erschöpft haben oder ob es nicht noch unvollständig ist. Wie viele Daten wir auch zergliedert haben, so könnten uns doch immer noch solche entgangen sein, deren Grundvoraussetzungen in unserem System noch fehlen. Sind wir wirklich schon bei den obersten und ersten Grundsätzen, den wahren Principien, enthält unser System nicht zu viel oder zu wenig derselben? Wodurch können wir uns über das nur Faktische unserer Gedanken und Gefühle erheben und diese gegen den Zweifel sicher stellen?

9. Fragen wir ganz allgemein: Warum bedürfen eigentlich unsere Urteile der Begründung? so werden wir sagen müssen: Weil unser Denken der Möglichkeit des Irrtums unterworfen ist. Von der richtigen Einsicht in den Gegensatz von Irrtum und Wahrheit wird daher auch die Bestimmung des Verfahrens zur Begründung der metaphysischen Grundsätze abhängen.

Alles Denken besteht in der Bildung von Begriffen und in der Verbindung derselben zu Urteilen, sowie in der Verbindung dieser zu Schlüssen. Denken ist als solches noch nicht Erkennen. Wir erkennen durch Denken nur in Urteilen, nicht in bloßen Begriffen. Aber auch nicht alle Urteile bilden Erkenntnisse, sondern es giebt Urteile, die nur Begriffe zergliedern, wie z. B. die Definitionen. Dies sind die analytischen Urteile[1]. Zu diesen gehört

---

[1] Begriff und Urteil sind logisch scharf zu scheiden. 1) Nur Definitionen, also analytische Urteile, sind Begriffen gleichwertig. Sie sind aber eben darum von keinem Erkenntniswert; die Existenz des definierten Begriffs muß erst bewiesen werden. 2) Jedes vollständige konjunktive analytische Urteil stellt zwar einen Begriff dar; aber es gilt nicht umgekehrt, daß jeder Begriff sich als analytisches Urteil darstellen ließe. Nur kombinierte Begriffe lassen diese Möglichkeit zu. Ursprünglich metaphysische (Kategorieen), mathematische und empirische Grundbegriffe lassen sich nicht definieren. Diese nicht Begriffe zu n e n n e n, steht jedem frei; dies wäre bloßer Wortstreit. 3) Jedes Urteil setzt zu seiner Möglichkeit bereits Begriffe voraus. Freilich setzt die nur problematische Vorstellung des Begriffs zu ihrer Möglichkeit selbst wieder schon assertorische Vorstellung, d. i. Erkenntnis voraus. Wie K a n t sagt: Die analytische Einheit des

auch der Schluß. Jeder Schluß läßt sich auf die Form eines (hypothetischen) analytischen Urteils bringen. Auch der Schluß giebt mir keine neue Erkenntnis, die nicht schon in seinen Prämissen enthalten wäre, denn sonst wäre er eben ein Trugschluß. Der Schluß behauptet nicht die Wahrheit der Prämissen und des Schlußsatzes, sondern die Konsequenz des Schlußsatzes aus seinen Prämissen, und diese Konsequenz ist ein analytisches Urteil. Die Erkenntnis ist also in den synthetischen Urteilen enthalten, aber nicht in der Ableitung eines synthetischen Urteils aus anderen. Diese ist vielmehr, wie jedes analytische Urteil, nur ein Akt des Bewußtseins, sich in anderer Form die schon anderweitig besessene Erkenntnis deutlicher zu machen.

Jedes Urteil ist ein Akt des Denkens oder der Reflexion, und als solcher — im Unterschied von der unwillkürlichen Verbindung der Vorstellungen durch Association — willkürlich gebildet. In diesem Umstand liegt die Möglichkeit des Irrtums und die Notwendigkeit der Begründung aller Urteile. Denn es fragt sich erst, ob die willkürliche Verbindung der Vorstellungen im Urteil der Regel der Wahrheit gemäß erfolgt ist, ob der Anspruch auf Wahrheit, der die Reflexion vor der Association auszeichnet, zu

---

Bewußtseins ist nicht ohne Voraussetzung irgend einer synthetischen möglich. Aber diese „ursprüngliche“ Synthesis ist nicht die des Urteils, sondern der unmittelbaren Erkenntnis ohne Reflexion. — Die neuerdings wieder vielfach versuchte Verwischung dieses Unterschiedes führt zur mystischen Vorstellung der Realität des Begriffs und zur Übertragung der Willkürlichkeit von der Begriffsbildung auf das Erkennen, zur Vermengung von Denken und Erkennen.

Was ferner die Einteilung der Urteile in analytische und synthetische betrifft, so ist diese Unterscheidung nicht grammatisch, sondern logisch. Jedes Urteil ist entweder analytisch oder synthetisch (je nachdem, ob das Prädikat im Subjektsbegriff enthalten ist oder nicht), aber derselbe Satz kann bald ein analytisches, bald ein synthetisches Urteil bezeichnen. Begriffe können sich nicht ändern, aber Worte können ihre Bedeutung ändern, d. h. man kann verschiedene Begriffe mit ihnen verbinden.

Recht besteht. Die Logik fordert für jedes Urteil einen Grund. Was heißt das? Aus bloßen Begriffen ist keine Erkenntnis möglich. Um ein Urteil zu fällen, bedarf ich, sofern es Erkenntnis sein und Wahrheit enthalten soll, eines vom Begriff seines Subjekts unabhängigen Erkenntnisgrundes. Die Wahrheit des Urteils liegt also nicht in ihm selbst, sondern in etwas anderem, von dem es sie entlehnt. Was ist nun dieses andere, dieser Erkenntnisgrund des Urteils? Dieser Grund kann selbst wieder ein Urteil sein. In diesem Falle ist die Begründung der Beweis. Alles Beweisen muß aber zuletzt aus irgend welchen unbeweisbaren Urteilen erfolgen, deren Erkenntnisgründe nicht wieder in Urteilen bestehen können. Diese ersten Urteile, die selbst unbeweisbar sind und aus denen selbst erst alle Beweise geführt werden, nennen wir Grundsätze.

10. Der Ausspruch dieser Grundsätze ist zwar, wie jedes Urteil, ein Akt der Reflexion, aber diese kann sich doch die in ihnen ausgesprochenen Wahrheiten nicht selbst erzeugen. Die sich selbst überlassene Reflexion kann nur analytische Urteile bilden. Sie kann nur aus gegebenen Wahrheiten Konsequenzen ableiten, d. h. beweisen. Aber die Wahrheit der Grundsätze ist nicht von Beweisen abhängig, kann also, sofern sie *synthetische* Grundsätze sind, durch die Reflexion selbst nicht verbürgt werden. Die Grundsätze der Geometrie z. B. enthalten als synthetische Grundsätze durchaus keine logische Denknotwendigkeit. So widerspricht die Verneinung des Parallelenaxioms keinem Gesetze der Logik, und diese vermag über seine Gültigkeit schlechterdings nichts zu entscheiden. Der Grund dieser obersten Urteile muß daher unabhängig von der Reflexion in einer unmittelbaren Erkenntnis liegen, die selbst die obersten Gründe für alle Urteile,

d. h. für alle mittelbare Erkenntnis enthält. Eine solche unmittelbare Erkenntnis ist die Anschauung, sowohl die empirische Anschauung als Grund aller empirischen Urteile, wie die mathematische Anschauung als Grund aller mathematischen Urteile. Die Einheit und Notwendigkeit aber, die wir faktisch in unserm Denken finden und die wir durch die metaphysischen Grundsätze aussprechen, kann nicht aus der Anschauung entspringen; denn sie kommt uns nur durch Reflexion zum Bewußtsein. Ihr Ursprung kann aber auch — sofern sie synthetische Einheit ist — nicht in der Reflexion liegen, da sie vielmehr schon eine Voraussetzung jedes Urteils der Reflexion bildet. Es giebt folglich eine unmittelbare Erkenntnis nicht anschaulicher Art, die den Grund unserer metaphysischen Urteile bildet. Wir nennen sie die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft.

11. Der Grund alles Denkens liegt also zuletzt in der unmittelbaren Erkenntnis, und die Wahrheit aller Urteile besteht in ihrer Übereinstimmung mit dieser unmittelbaren Erkenntnis. Die Reflexion ist sich nicht selbst genug, sie ist für sich leer und kann nur anderweitig gegebene Erkenntnisse wiederholen und deutlich machen. Sie dient nicht zur Erweiterung, sondern nur zur Aufklärung unserer Erkenntnis. Aus alledem ergiebt sich, daß von Irrtum und Wahrheit unseres Denkens nur insofern die Rede sein kann, als schon eine von dem strittigen Gedanken unabhängige Wahrheit vorausgesetzt wird. Aller Streit um Irrtum und Wahrheit, aller Zweifel und alle Ungewißheit bezieht sich auf die Urteile der Reflexion und betrifft ihre Vergleichung mit der unmittelbaren Erkenntnis, die sie wiederholen. Um diese unmittelbare Erkenntnis kann gar kein Streit sein, ihre Gewißheit kann nie in Frage gestellt und des Irrtums verdächtigt werden,

denn Irrtum ist nur Abweichung von der unmittelbaren Erkenntnis, falsche Wiederholung der unmittelbaren Erkenntnis, falscher Ausspruch der unmittelbaren Erkenntnis. Diese liegt daher der Möglichkeit des Irrtums bereits zu Grunde; wer sie für irrig erklärt, widerspricht sich selbst, der weiß nicht, was die Worte Irrtum und Wahrheit bedeuten. Aller Irrtum und Zweifel gehört der Reflexion und kann die unmittelbare Erkenntnis nicht antasten.

Bei aller Begründung unserer Erkenntnis, bei allem Streit über Irrtum und Wahrheit kommt niemals das Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande in Frage. Die Übereinstimmung mit dem Gegenstande kann für uns nie ein Kriterium der Wahrheit unserer Erkenntnis werden, weil wir dazu aus unserer Erkenntnis heraustreten müßten, um sie mit dem Gegenstande vergleichen zu können, was unmöglich ist, weil wir zum Gegenstande immer erst durch die Erkenntnis kommen. Wir können also nie Erkenntnis und Gegenstand, sondern nur Erkenntnisse unter einander vergleichen. Ein Satz ist dann wahr, wenn er richtig begründet ist, d. h. wenn er mit der Erkenntnis, aus der er abgeleitet wurde, übereinstimmt. Über die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis kann kein Streit sein, sondern nur darüber, welches die unmittelbare Erkenntnis sei. Wollten wir die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis bezweifeln, so müßten wir sie, sofern sie unmittelbare Erkenntnis ist, zu diesem Zweifel selbst voraussetzen. Der Zweifel an der unmittelbaren Erkenntnis führt zum Widerspruch. Jede mittelbare Erkenntnis dagegen ist als solche problematisch und nur durch Vergleichung mit der unmittelbaren Erkenntnis zu begründen. Alle Fragen in der Philosophie werden also am Ende auf diese hinauslaufen: Welches die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft sei, und aller Streit in der Philosophie wird sich durch Beantwortung dieser Frage entscheiden lassen. Die Übereinstimmung mit dem Gegenstande besitzt die Erkenntnis unserer Vernunft oder besitzt sie nicht, ohne daß wir etwas dafür oder dagegen tun können. Es giebt für uns keinen Standpunkt, von dem aus wir, gleichsam außer oder über unserer Erkenntnis stehend, ihre Gültigkeit zum Thema irgend einer Wissenschaft machen könnten. Daher kann es auch nicht Aufgabe der Philosophie sein, unserer Erkenntnis objektive Wahrheit zu verschaffen, sondern nur das Bewußtsein als erkennendes Bewußtsein zu beglaubigen, dem Bewußtsein zum irrtumsfreien Ausspruch der Erkenntnis zu verhelfen.

Es ist also in der Philosophie so wenig wie in irgend einer anderen menschlichen Wissenschaft die Frage: Ist unsere Erkenntnis wahr, d. h. stimmt sie mit dem Gegenstande überein? sondern nur diese: Ist ein Satz wirklich Erkenntnis, d. h. stimmt er mit der unmittelbaren Erkenntnis überein? Spricht ein Urteil wirklich eine Erkenntnis aus, oder geht es darin auf, ein faktischer Akt meines Bewußtseins zu sein? Aller Irrtum gehört somit nur dem Bewußtsein und kann die unmittelbare Erkenntnis der Vernunft gar nicht berühren.

12. Dies läßt sich noch auf andere Weise deutlich machen. Jede Erkenntnis ist eine Vorstellung, aber nicht jede Vorstellung ist schon Erkenntnis. Vielmehr giebt es auch problematische Vorstellungen, während zur Erkenntnis der Anspruch auf Existenz dessen, was vorgestellt wird, d. h. des Gegenstandes der Vorstellung, gehört. Daher gewinnt es den Anschein, als ließe sich aus dem allgemeinen Begriff des Vorstellens der des Erkennens ableiten, gleichsam erklären, wie die Assertion zur Vorstellung hinzukommt, wie die Objektivität an die Vorstellung

kommt, und so die Möglichkeit des Erkennens einer Theorie unterwerfen. Aber das Besondere ist durchaus nicht im Allgemeinen enthalten und aus ihm abzuleiten. Vielmehr macht die Erkenntnis selbst erst problematische Vorstellungen möglich und nicht umgekehrt. Erkenntnis ist unmittelbar eine Qualität aus innerer Erfahrung und nicht etwas quantitativ Zusammengesetztes, das sich aus einfacheren Verhältnissen erklären oder konstruieren ließe. Jede Erkenntnis ist als solche schon Erkenntnis eines Gegenstandes. Der Gegenstand ist immer schon bei der Erkenntnis und wird nicht erst zu ihr hinzugebracht. Das Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande läßt sich keiner mittelbaren Prüfung unterwerfen, sondern nur unmittelbar, wie es als Faktum in der Erkenntnis stattfindet, erleben. Es ist weder ein Kausalverhältnis, noch sonst auf irgend welche Begriffe zurückzuführen. Dies Verhältnis kann daher auch kein Thema irgend einer Wissenschaft werden: Es giebt keine Theorie der Möglichkeit der Erkenntnis.

13. Wie wir (§ 10) sahen, begründen wir die Grundurteile der empirischen und mathematischen Wissenschaften durch Aufzeigung der Anschauung, die ihnen zu Grunde liegt. Diese Begründung nennen wir Demonstration. (Demonstration und Beweis sind also wohl zu unterscheiden.) Durch solche Demonstration ist die Reihe der Gründe dieser Art von Urteilen abgeschlossen, indem diese dadurch auf die unmittelbare Erkenntnis, auf einen von der Willkür des Urteilens unabhängigen Grund zurückgeführt werden. Es hat da keinen Sinn, noch weiter nach höheren Gründen zu forschen. Denn aller Irrtum betrifft nur eine falsche Wiederholung anderswoher gegebener Wahrheiten. Wo nun keine Wahrheit mehr zu Grunde liegt, da kann sie auch

nicht falsch ausgesprochen, und wo nichts wiederholt wird, da kann auch nicht falsch wiederholt werden. Auch wo wir von Sinnestäuschungen reden, sind es streng genommen nicht die Sinne, welche irren, sondern Urteile, durch die die Reflexion die Anschauung der Sinne zu deuten und auszulegen sucht.

Wie sollen wir aber die metaphysischen Grundsätze begründen? Beweisen können wir sie nicht; denn sonst wären sie keine Grundsätze. Sie können aber auch nicht demonstriert werden; denn sonst wären sie nicht metaphysisch. Wir nennen ihre Begründungsweise Deduktion. Worin wird nun diese Deduktion bestehen?

Es giebt keine andere Begründung einer Erkenntnis als durch die Angabe der unmittelbareren Erkenntnis, aus der sie abgeleitet ist. Die höchsten Gründe liegen in der schlechthin unmittelbaren Erkenntnis. Alle mittelbare Erkenntnis ist aber Erkenntnis durch Begriffe, d. h. Urteilen. Streng genommen dürfen wir also nicht fordern: jede Erkenntnis, sondern nur: jedes Urteil müsse einen Grund haben, und zwar seien alle mittelbaren Urteile zu beweisen, alle unmittelbaren Urteile aber entweder zu demonstrieren oder zu deducieren. Dieser Grund aber darf in keinem Falle im Verhältnis zum Gegenstande, sondern nur im Verhältnis zur unmittelbaren Erkenntnis gesucht werden. Alles kommt hier also auf die Unterscheidung des Verhältnisses des Urteils zur Erkenntnis von dem Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande an.

Die Deduktion kommt also darin mit der Demonstration überein, daß beide Methoden zur Begründung von Grundurteilen dienen. Beider Geschäft besteht folglich in der Aufweisung unmittelbarer Erkenntnisse, sofern diese den Grund der fraglichen Urteile bilden. Die nur deducierbaren Urteile aber haben ihren Grund nicht, wie die demonstrierbaren, in der Anschauung; d. h.

die ihnen zu Grunde liegende unmittelbare Erkenntnis kommt uns nicht unmittelbar, sondern nur durch Vermittelung der Reflexion, nur durch das Urteil zum Bewußtsein. Dieser Umstand bedingt den wesentlichen Unterschied beider Verfahrungsarten. Denn, während wir für die Demonstration die Anschauung unmittelbar zur Vergleichung neben das Urteil stellen können, sind wir für die Deduktion auf eine nur mittelbare Vergleichung angewiesen, indem das Kriterium der Gültigkeit des Urteils uns nicht, wie dort, unmittelbar zur Verfügung steht, sondern erst auf einem künstlichen Umwege gesucht und in unsern Besitz gebracht werden muß. So sehr sich aber auch die demonstrierbare Wahrheit durch ihre unmittelbare Evidenz vor der nur deducierbaren auszeichnet, so müssen wir doch beachten, daß dieser Vorzug nur durch ein verschiedenes Verhältnis beider Erkenntnisweisen zum Bewußtsein bedingt ist, indem dort so wenig wie hier der Gegenstand zum Zeugen der Wahrheit aufgerufen werden kann. Um daher die Ansprüche an die Deduktion nicht zu hoch zu stellen, so wird uns das wichtigste Resultat der bisherigen Untersuchungen die Nachweisung, daß wir es in der Demonstration mit einer nur subjektiven Begründung zu tun haben, daß also auch die Gewißheit gerade der evidentesten Wahrheiten, wie die der mathematischen Axiome, — dem gewöhnlichen Vorurteil entgegen — nicht auf objektiven Kriterien beruhen könne.

14. Es giebt also drei Arten der Begründung: Beweis, Demonstration und Deduktion. Die Begründung durch Beweis bezieht sich nur auf mittelbare Urteile und setzt selbst zu ihrer Möglichkeit die Grundsätze voraus. Mithin fordert die Vollständigkeit der Begründung vor allem Demonstration und Deduktion.

Wir haben es hier allein mit der schwierigsten Begründungsweise zu tun, mit der Deduktion. In der Deduktion hatten wir die wichtigste Aufgabe der philosophischen Kritik gefunden. Wir behaupten nun, daß die Kritik bei diesem Geschäft nur psychologisch verfahren könne, d. h. selbst Wissenschaft aus innerer Erfahrung sei.

Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus dem Vorstehenden. Wir haben eben gezeigt, daß, während wir bei der Demonstration den Erkenntnisgrund unmittelbar neben das zu begründende Urteil stellen können, bei der Begründung der nur deducierbaren Urteile eine solche unmittelbare Vergleichung des Urteils mit seinem Erkenntnisgrunde nicht möglich ist, weil der Erkenntnisgrund des Urteils hier nicht wie dort unmittelbar bewußt ist, sondern erst mittelbar aufgesucht werden muß. Diesen Erkenntnisgrund der nur deducierbaren Urteile besitzen wir in der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft. Wir müssen daher den Besitzstand dieser unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft selbst erst zum Gegenstande einer wissenschaftlichen Untersuchung machen. Den Besitzstand von Erkenntnissen können wir aber nur auf dem Wege innerer Erfahrung kennen lernen. Folglich ist die Ermittelung des Erkenntnisgrundes der nur deducierbaren Urteile eine Aufgabe der Wissenschaft aus innerer Erfahrung. Die Deduktion der metaphysischen Grundsätze ist also ein Geschäft der Psychologie. — Bei diesem Satze müssen wir verweilen; denn er ist von entscheidender Wichtigkeit für alle kritischen Untersuchungen. Durch das Folgende wird er noch einleuchtender werden.

III.

Theorie der Deduktion.

15. Jede Vorstellung ist die Vorstellung eines Gegenstandes, und zwar ist der Anspruch auf Existenz des Gegenstandes das Wesentliche, was die Erkenntnis von der nur problematischen Vorstellung unterscheidet. Die Erkenntnis ist zu unterscheiden sowohl von dem Subjekt der Erkenntnis, dem Ich, als vom Gegenstande derselben. Dieser letztere mag ein äußerer oder ein innerer sein, die Erkenntnis ist immer von ihm unterschieden. Das Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande ist nicht das des Geistes zum Körper oder des Ichs zur Außenwelt. Das Ich kann Gegenstand der Erkenntnis werden, so gut wie die Außenwelt; es sind aber auch bei der Selbsterkenntnis zwar Subjekt und Objekt, aber darum doch nicht Erkenntnis und Objekt identisch.

Der Gegenstand der Erkenntnis mag also sein welcher er wolle, äußerer oder innerer, so ist doch die Erkenntnis jederzeit eine innere Tätigkeit. Als solche ist sie aber selbst ein Gegenstand, nämlich Gegenstand der inneren Erfahrung, und kann als solcher studiert werden. Unter den Bedingungen, von denen ich in innerer Erfahrung meine Tätigkeiten abhängig finde, wird auch alle Tätigkeit des Erkennens stehen, sofern sie dem Geiste schlechthin angehört und nicht nur infolge äußerer Eindrücke zukommt. Diese ursprüngliche Selbsttätigkeit im Gegensatz zur sinnlich angeregten ist aber gerade das Unterscheidende aller reinen Vernunfterkenntnis. Also werde ich mir durch innere Erfahrung eine Theorie der Vernunft verschaffen können, die die Elemente zur Ableitung sämtlicher reiner Vernunfterkenntnisse enthält.

So wird es möglich sein, ohne mit den philosophischen Principien selbst in abstracto zu operieren, sie auf empirischem Wege zu deducieren. Ein Verfahren, dem gegenüber Skepticismus garnicht anzubringen ist, eben weil wir dabei ganz auf dem Boden der Tatsachen bleiben, die einem jeden zur Beobachtung offen liegen, ohne uns irgend auf metaphysische Erörterungen oder Hypothesen einzulassen. Diese psychologische Deduktion ist zugleich unabhängig von der Grundlegung des Systems der Grundsätze durch die logisch-regressive Zergliederung der Urteile des Bewußtseins, und wir haben den Vorteil, hinterher beides vergleichen und so das quid juris des Bewußtseins durch das quid facti der Vernunft entscheiden zu können.

16. Es ist aber hier wichtig zu bemerken, daß wir für diese Aufgabe ganz bei geistiger Selbstbeobachtung stehen bleiben, ohne uns irgend wie auf Vergleichungen mit dem Materiellen einzulassen. Und ferner, daß wir es dabei mit keinerlei Entwicklungsgeschichte zu tun haben, weder mit angeborenen Begriffen noch mit erworbenen, überhaupt mit keinen Vergleichungen historischer oder ethnologischer Art. Denn wir gehen garnicht auf die individuellen Phänomene des Bewußtseins aus, sondern auf die allgemeine Form des innern Lebens, wie sie der Vernunft als solcher angehört, den Bewußtseinstätigkeiten als Norm zu Grunde liegt und der Reflexion ihre Regeln giebt. Mag man nun dies nicht als eine Aufgabe der Psychologie bezeichnen — um den Namen ist es uns nicht zu tun, gebrauchen wir das zweideutige Wort Erkenntnistheorie, oder nennen wir es mit Rücksicht auf den Zweck und das Interesse Transcendentalpsychologie oder auch philosophische Anthropologie — so wird doch unter allen Umständen nur innere Erfahrung der dadurch bezeichneten Aufgabe zu genügen im stande sein.

17. So großen Schwierigkeiten nun auch gerade die Selbstbeobachtung ausgesetzt sein mag, so verbinden wir doch mit dieser subjektiven Wendung aller Spekulation einen doppelten Vorteil. Erstens nämlich bleiben wir ganz bei der Beobachtung, d. h. bei der Erkenntnis durch Sinnesanschauung, stehen. Wir entfernen uns also nicht in das Gebiet abstrakten Denkens und verlieren uns überhaupt nicht in die Spitzfindigkeiten und Grübeleien mittelbarer Beweisverfahren, die der Gefahr des Irrtums umsomehr ausgesetzt sind, je mittelbarer sie sind, je weiter sie sich von der Anschauung entfernen. Je näher wir bei dieser, in unserem Falle der Selbstbeobachtung, bleiben, desto weniger sind wir logischen Fehlern ausgesetzt, und desto leichter lassen sich Fehler, wo sie dennoch vorkommen sollten, aufdecken und verbessern. Auch kommen wir so nicht in Gefahr, uns auf bloße Wahrscheinlichkeiten einzulassen. Denn alle Wahrscheinlichkeit gehört, wie der Irrtum, nur der Reflexion und beruht auf unvollständigen Schlüssen. Die Anschauung dagegen, von der wir uns nicht entfernen und auf die wir immer zurückgehen, ist überhaupt nicht der Ungewißheit unterworfen, also auch nicht den verschiedenen Graden der Wahrscheinlichkeit.

Damit ist eng verbunden der andere Vorteil, daß die Anwendung der metaphysischen Grundsätze, die wir doch bei keiner Theorie umgehen können, in keinem Gebiete unserer Erkenntnis so beschränkt ist, wie in der Psychologie. Die Anwendung der Metaphysik in einer Wissenschaft reicht nämlich nur soweit wie die Herrschaft der Mathematik, da nur vermittelst mathematischer Größenbestimmungen unsere Beobachtungen den metaphysischen Grundbegriffen subsumiert werden können. Die Herrschaft der Mathematik ist aber in der inneren Erfahrung äußerst eng begrenzt wegen der völligen Unmöglichkeit extensiver Messung.

Wir sind hier also fast allein auf Beobachtung angewiesen und entgehen so, dank der Beschaffenheit des Gegenstandes, aller Verlegenheit, uns auf einen weitläufigen Streit um metaphysische Grundbestimmungen einlassen zu müssen.

Die Erkenntnis durch empirische Anschauung ist zwar nur assertorisch und nicht apodiktisch wie die rationale Enkenntnis der Philosophie, aber sie ist darum doch nicht weniger gewiß oder unsicherer als diese. Vielmehr fehlt dieser, da sie ursprünglich dunkel ist, die Evidenz, durch die jene sich auszeichnet. Denn es ist wohl zu beachten, daß der modalische Unterschied assertorischer und apodiktischer Erkenntnis nicht einen Unterschied des Grades der Gewißheit, sondern einen Unterschied des Orts ihres Ursprungs bezeichnet. Objektive Gültigkeit kommt beiden Erkenntnisarten auf gleiche Weise zu, aber ihr subjektives Verhältnis zum Bewußtsein ist ein verschiedenes: bei jener ist es ein unmittelbares Verhältnis der Evidenz, bei dieser dagegen ein durch Reflexion vermitteltes.

Eben diese ursprüngliche Dunkelheit ihrer Principien bildet die große Schwierigkeit in allen philosophischen Wissenschaften; dieser gänzliche Mangel an Anschaulichkeit und Evidenz ist der einzige Grund, warum es nicht gelingen kann, auf dogmatische Weise einem philosophischen System allgemeine Anerkennung zu sichern. So besteht denn auch der Kriticismus in nichts anderem als in dem Vorschlag, anstatt geradezu die philosophischen Abstraktionen systematisch aufzustellen, einen Umweg einzuschlagen, der zwar mehr Zeit und Arbeit erfordert, dafür aber — erleuchtet durch die Evidenz konkreter Anschauung — desto sicherer und unfehlbarer zum Ziele führt.

18. Nichts ist für das Verständnis dieser Deduktion wichtiger als ihre Unterscheidung von jeder Art des Beweises. Die Kritik der Vernunft fragt nur: Welche unmittelbare Erkenntnis besitzt unsere Vernunft? Wobei als Obersatz aller Deduktionen das Selbstvertrauen der Vernunft auf die Wahrheit ihrer unmittelbaren Erkenntnis überhaupt schon feststehen muß. Obwohl also die Kritik die metaphysischen Principien aus einer Theorie der Vernunft deduciert, welche selbst durch innere Erfahrung, mithin nur induktorisch gewonnen werden kann, so werden doch die metaphysischen Principien ihrer Gültigkeit nach nicht auf Erfahrung oder Induktion gegründet. Denn sie werden aus der Theorie der Vernunft nicht bewiesen, sondern nur als solche aufgewiesen; wobei die Schlußkraft in der Beantwortung ihres quid juris nicht auf den zu Grunde gelegten Induktionen der inneren Erfahrung, sondern auf dem Selbstvertrauen der Vernunft ruht. Dies Selbstvertrauen der Vernunft ist das allgemeine Princip, das die psychologischen Ableitungen aus der Theorie der Vernunft zu kritischen Deduktionen macht, d. h. das es uns ermöglicht, in der inneren Erfahrung einen Leitfaden für die systematische Begründung der Philosophie zu finden. Die Unmittelbarkeit der Erkenntnis, ihr Ursprung aus der reinen Vernunft (im Gegensatz zu der der Willkür und mithin dem Irrtum unterworfenen mittelbaren Erkenntnis der Reflexion) bildet den Mittelbegriff des ganzen kritischen Gedankenganges seiner logischen Form nach. Zum Realitätsbeweis dieses Mittelbegriffs dient uns eben die psychologische Theorie der Vernunft.

Zur Erläuterung des hier entwickelten höchst künstlichen logischen Baues der Deduktion können vielleicht noch die folgenden Bemerkungen dienen. — Während wir erst die Begründung von Grundsätzen, die doch unbeweisbare Wahrheiten sind, zur

Aufgabe der Deduktion gemacht hatten, so finden wir jetzt, daß die Deduktion allerdings einen Beweis enthalte. Dies Resultat wird nicht mehr paradox erscheinen, wenn man beachtet, daß es sich (wie schon die obigen Erörterungen (§ 8) ergaben) in der Kritik nicht um den Beweis eines metaphysischen Grundsatzes handelt, denn ein solcher ist in der Tat unbeweisbar, sondern um den Beweis, daß ein Satz wirklich ein metaphysischer Grundsatz ist. Mit andern Worten: die Kritik beweist den psychologischen Satz, daß die Erkenntnis, die ein gewisser metaphysischer Satz ausspricht, eine unmittelbare Erkenntnis aus reiner Vernunft ist. Der Beweis dieses psychologischen Lehrsatzes ist die Deduktion jenes metaphysischen Grundsatzes.

So beweist die Kritik z. B. den Satz: „der Grundsatz der Kausalität entspringt aus der Verbundenheit des mathematischen Schemas der Veränderung mit der Kategorie der hypothetischen Synthesis in der unmittelbaren Erkenntnis", nicht den Satz der Kausalität selbst. Dieser wäre metaphysisch; jener aber, den die Kritik beweist, ist psychologisch. Und dieser Beweis wird geführt aus einer Theorie der Vernunft, die durch innere Erfahrung gewonnen wird. Die Kritik wird daher auch, wie jede Erfahrungswissenschaft, unter ihren Prämissen bereits metaphysische Principien als Bedingungen ihrer Möglichkeit voraussetzen; jedoch nicht, um diese zu beweisen — denn das wäre offenbar ein Cirkel — sondern um sie zu deducieren, d. h. um ihren Ursprung in der reinen Vernunft zu beweisen. So wird das Kausalitätsgesetz schon vorausgesetzt unter den Gründen seiner eben erwähnten Deduktion.

Wie kann aber die nur psychologische Nachweisung des Ursprungs eines metaphysischen Satzes zu seiner Begründung werden? Nur durch Beziehung auf das Faktum des Selbstvertrauens der Vernunft. Auf der Beziehung auf dieses Faktum beruht zuletzt die Möglichkeit der Deduktion als eines Rechtsnachweises von Principien a priori aus den Gründen ihrer Möglichkeit. Der Ausspruch dieses Faktums bildet daher den obersten Grundsatz der Kritik, er ist nichts anderes, als der Ausspruch des fundamentalen Faktums des Erkennens selbst.

Der Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft verdient allein den Namen eines kritischen (oder transcendentalen) Princips, sofern darunter ein Satz verstanden wird, der, ohne selbst metaphysisch zu sein, ein Kriterium der Legitimität metaphysischer Sätze an die Hand giebt. Denn er enthält die Legitimation aller Sätze, die ihren Ursprung in der reinen Vernunft und mithin sich selbst als metaphysische Grundsätze erweisen können. Welche Sätze aber aus reiner Vernunft entspringen, darüber vermag er nichts auszusagen. Er figuriert also nur als Obersatz in der logischen Form der Deduktion. Ihrer Untersätze müssen wir uns auf anderem Wege versichern. Dieser Weg ist die Theorie der Vernunft, oder wie wir auch sagen können, die Theorie der „transcendentalen Gemütsvermögen“, wenn wir darunter mit Kant solche verstehen, welche den Grund der Möglichkeit von Principien a priori enthalten.

Jedes andere angeblich kritische Princip als der Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft ist entweder zu eng, indem es unsere metaphysischen Befugnisse willkürlich einschränkt, oder zu weit, indem es die Ansprüche der Metaphysik ungebührlich ausdehnt.

Ein Beispiel mag dies erläutern.

Kant fehlte noch ein solches einheitliches kritisches Princip. Daher rührt der Mangel an Konzentration in seiner Lehre. Er kannte nämlich die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft noch nicht und betrachtete die metaphysische Erkenntnis einzig vom Standpunkt der Reflexion aus. So konnte er dem Metaphysischen in unserer Erkenntnis keine unmittelbare Gültigkeit zuerkennen, sondern nur mittelbar, wiefern es sich logisch an die Sinnesanschauung anschließen ließ. Daher erlaubt ihm sein **Princip der Möglichkeit der Erfahrung** zwar eine Rechtfertigung der Kategorieen als der logischen Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung, aber es erweist sich als zu eng zur Begründung der spekulativen Ideen. Er ist daher gezwungen, die objektive Gültigkeit derselben, obwohl sie als transcendentale Ideen den Grund ihrer Möglichkeit in der Vernunft haben, für einen „transcendentalen Schein" zu erklären. Da sie sich ihm aber andererseits als Bedingungen der Möglichkeit der Sittlichkeit erweisen, bedarf er zur Rechtfertigung ihres praktischen Gebrauchs der Einführung eines neuen und kritisch nicht gerechtfertigten Princips, des Princips vom Primat der praktischen Vernunft. Jene zu enge Fassung des kritischen Princips bei **Kant** führt also zu der unkritischen Einschränkung unseres spekulativen Vermögens auf das theoretische Gebiet und infolgedessen zu einem **kritisch** unauflöslichen Zwiespalt zwischen der spekulativen und der praktischen Vernunft.

19. Wir wissen, daß wir irren können, daß wir auch bei der geschicktesten Beweisführung und der schlagendsten Konsequenz in unseren wissenschaftlichen Systemen uns nicht beruhigen können, so lange wir nicht die letzten Grundlagen und tiefsten Voraussetzungen derselben sichergestellt haben. Darum mißtrauen wir jedem Urteil, ehe nicht dieser Nachweis bis zu seinen letzten Gründen erbracht ist. Jedes Urteil gilt uns als **Vorurteil**,

ehe nicht sein Ursprung aus der aller Willkür des Denkens entzogenen Selbsttätigkeit der Vernunft erwiesen ist. Die Vernunft aber gilt uns als oberste Instanz aller Wahrheit, als unantastbar allem Zweifel — wenn wir auch noch nicht wissen, welches der unverfälschte Ausspruch ihrer Wahrheit ist, wenn wir auch diesen vielmehr erst suchen. Denn wem sollten wir trauen, worein sollten wir den Grund unserer Gewißheit setzen, sei es auch nur, um zu zweifeln, wenn nicht in die Vernunft, im Vertrauen auf die allein wir denken, also auch zweifeln können? Philosophie aber ist Wissenschaft, besteht also im Denken, ist folglich selbst nur auf Grund des Vertrauens zur Vernunft möglich. Wer ihr dies zum Vorwurf macht, der verwechselt Irrtum und Unvernunft. Philosophie kann so wenig wie eine andere Wissenschaft Erkenntnis aus nichts erzeugen, Wahrheit erschaffen, wo noch keine zu Grunde liegt. Sie setzt vielmehr, sofern sie nicht Zauberei ist, sondern Wissenschaft, für jeden, der an ihr teilnehmen will, eine richtig organisierte Vernunft voraus. Ihr Geschäft ist allein, der Reflexion zum irrtumsfreien Ausspruch der Vernunft zu verhelfen, nicht aber die Vernunft selbst einer Prüfung ihrer Tauglichkeit zu unterziehen. Wer vielmehr seiner Vernunft nicht traut und ihre Zuverlässigkeit erst beglaubigt haben möchte, der wende sich an die Psychiater, und lasse die Philosophen in Ruhe.

Durch die Unterscheidung der Reflexion von der unmittelbaren Erkenntnis oder des Verstandes von der Vernunft erledigt sich auch das alte, immer noch wiederkehrende Bedenken, daß bei unserer Methode die Allgemeingültigkeit der metaphysischen Principien verloren gehe, da es eine unbegründete Hypothese sei, daß, was ich in meinem eigenen Geiste finde, sich ebenso bei allen anderen Menschen finden müsse. Uns wundert nur, daß gerade die nicht aufhören, diesen Einwand zu erheben, die sonst so lebhaft die Unabhängigkeit der Begründung der Philosophie von aller Empirie und Psychologie verlangen. Denn was ist die vermeintliche Hypothese anderes als ein psychologischer Satz, der mit der Metaphysik schlechterdings nichts zu tun hat. Kann uns nicht, wenn wir die metaphysischen Grundsätze suchen, die ethnologische Frage nach der Geistesbeschaffenheit unserer Mitmenschen gleichgültig sein? Wer die objektive Gültigkeit seiner Erkenntnis nicht durch das Selbstvertrauen zur eigenen Vernunft besitzt, der wird sie sich schwerlich dadurch verschaffen können, daß er erfährt, wie die Vernunft anderer organisiert ist. Wer aber dies Selbstvertrauen zu seiner Vernunft besitzt, dem wird es, wenn er sich für philosophische W i s s e n s c h a f t interessiert, genügen, diese seine Vernunft gründlich kennen zu lernen; denn eben in ihr wird er die philosophische Wahrheit finden. Jene Frage hat das vermeintliche philosophische Interesse gar nicht, das man ihr beilegt. Denn was wir bei anderen Menschen empirisch kennen lernen können, ist immer nur der Verstand. Der Verstand aber kann irren — der Verstand anderer so gut wie der meinige —, und sofern die Majorität über Wahrheit und Irrtum nicht entscheidet, werden wir eine andere Regel der philosophischen Wahrheit suchen müssen als die Methode der Statistik. Bezieht sich aber jene Frage nicht auf den Verstand, sondern auf die Vernunft der Menschen, so hat sie ebensowenig die ihr zugemessene Bedeutung. Vielmehr wird dann jener Satz eine Trivialität, ein bedeutungsloses analytisches Urteil. Denn da alle Geisteserkenntnis eine schlechthin innere ist, so kann ich nur durch Analogie von mir selbst auf die Existenz und Beschaffenheit anderer Geister schließen. Und da ist es ebenso wenig hohe spekulative Weisheit wie eine psychologische Hypothese, daß die Vernunft anderer Menschen ebenso organisiert sei wie die meinige, sondern es ist eben der

Begriff des Menschen und zwar der einzige (psychologische) Begriff des Menschen, den ich bilden kann: der Begriff aller der geistigen Wesen, deren Vernunft so organisiert ist wie die meinige; denn erst von mir schließe ich auf andere Geister, anders könnte ich gar nicht auf sie zu reden kommen.

Verhält es sich aber so, so leistet unsere Methode der Deduktion aus der eigenen Vernunft auch das übrige — und sie allein ist im stande, es zu leisten —: es wird nicht nur die Gültigkeit, das quid juris der Grundsätze nachgewiesen, sondern, eben damit, durch die Eigentümlichkeit der Methode, zugleich der Nachweis erbracht, daß jeder Mensch gerade diese philosophischen Principien voraussetze, voraussetzen müsse und allein voraussetzen könne.

Durch unsere psychologische Unterscheidung der Willkürlichkeit der Reflexion von der Selbsttätigkeit der Vernunft und die ihr entsprechende logische von Beweis und Deduktion ist der Skepticismus endgültig abgetan und der einzig mögliche Standpunkt der Evidenz in der Philosophie gewonnen. Wer nun im Ernst noch Grundsätze anfechten will, der mag den erfahrungsmäßigen Beweis führen, daß sie im deducierten System der Vernunft keine Stelle haben. Sich aber gegen diese Methode zu sträuben, das ist nur der Sport derer, die fürchten müssen, daß doch noch einmal Philosophie als evidente Wissenschaft dem Spiel ihrer eigenen spekulativen Weisheit ein Ende machen könnte, ohne zu bedenken, daß, wer die Herrschaft der Vernunft ablehnt, sich dadurch nur mit dem Blödsinnigen auf eine Stufe stellt.

20. Es ist also der Kriticismus der Begriff einer Methode und nicht eines philosophischen Systems. Wer dieser Methode

folgt, ist Kritiker, ganz unabhängig davon, zu welchen Resultaten er damit gelangen mag; und wer ihr nicht folgt, wer die philosophische Erkenntnis durch objektive Begründung, sei es durch Beweise oder durch Vergleichung mit den Gegenständen, wahr machen will, ist, auch wenn er durch die schließliche Einsicht in die Nichtigkeit dieses Unternehmens veranlaßt wird, diese auf die Nichtigkeit der philosophischen Erkenntnis selbst zurückzuführen — und darin besteht das ganze Spiel des Skepticismus —, ist Dogmatiker. Also ist auch der Skepticismus, wofern er nicht den kritischen Aufschub des Urteils, sondern seine Unmöglichkeit lehrt, Dogmatismus. Diese Warnung, den Kriticismus nicht in den Resultaten, sondern in der Methode zu suchen, kann zur Abweisung vieler Mißverständnisse dienen. So meinte man oft, weil der Kriticismus die Wahrheit nicht in der Vergleichung mit den Gegenständen suche, so leugne er damit deren Existenz, und der Kriticismus sei gleichbedeutend mit dem Idealismus und als solcher dem Materialismus entgegengesetzt. Der Kriticismus ist indessen ebenso wenig Idealismus wie Materialismus, weil er überhaupt keine Weltansicht ist, sondern eine Methode.

21. Zieht man schließlich in Betracht, daß wir, wenn wir auch die N o t w e n d i g k e i t dieser Methode nur für die Metaphysik dargelegt haben, doch den Beweis ihrer M ö g l i c h k e i t aus gewissen eigentümlichen Beschaffenheiten r a t i o n a l e r W i s s e n s c h a f t ü b e r h a u p t geführt haben, so sieht man leicht ein, daß sein Ergebnis auf die analytischen Principien der L o g i k ebensowohl Anwendung finden muß wie auf die synthetischen Urteile a priori der Metaphysik. (Die Aufgabe der dadurch postulierten K r i t i k d e r P r i n c i p i e n d e r L o g i k ist, infolge der Verwechslung der Deduktion mit dem Beweise, von fast allen bis-

herigen Logikern verfehlt worden, indem man entweder die Logik überhaupt zu einer psychologischen Disciplin machen wollte oder, um dieser Gefahr zu entgehen, streng dogmatisch zu verfahren suchte und eine besondere Bearbeitung der psychologischen Kritik für überflüssig erklärte, stattdessen aber meist zerstreute Bruchstücke derselben, ohne ihre psychologische Natur zu erkennen, in das System der philosophischen Logik einmengte.)

Da ferner das Gebiet der synthetischen Urteile a priori nicht nur die Metaphysik, sondern auch die reine Mathematik umfaßt, so folgt daraus zugleich, daß das Gebiet des Deducierbaren in unserer Erkenntnis auch mit der Philosophie nicht abgeschlossen ist. Es muß — außer der die Evidenz schon mit sich führenden und darum dem Interesse des Mathematikers allein genügenden Begründung durch Demonstration — auch eine kritische Deduktion der Axiome der Mathematik, ihrem ganzen Umfange nach, möglich sein. Diese Übertragung der Kritik auf die Axiomsysteme der Mathematik konstituiert eine eigene wissenschaftliche Disciplin: die Philosophie der Mathematik oder, nach besserer Bezeichnung, die kritische Mathematik[1].

IV.

Über das Verhältnis der Kritik zum System. Das Vorurteil des Transcendentalen.

22. Der Kriticismus ist in dem hier dargestellten Sinne mit voller Schärfe zuerst von Fries gefordert und durchgeführt

[1] Einen Überblick über die Aufgaben und Methoden dieser Disciplin findet man bei G. Hessenberg: „Über die kritische Mathematik.“ (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. III. Jahrgang, 2. Stück. 1904.)

worden. Seinem allgemeinsten Begriffe nach gehört er aber schon der griechischen Philosophie an. Schon Sokrates erhebt die Forderung, die Regel der Wahrheit in den ungeschriebenen Gesetzen der eigenen Vernunft zu suchen; in gleichem Gegensatze zu denen, die sie anderswoher schon zu besitzen wähnen, wie zu denen, die eine solche Regel überhaupt nicht gelten lassen. Aber erst in neuerer Zeit gelang es, diese Methode mit Erfolg einzuführen und durch sie der Philosophie ihre feste wissenschaftliche Grundgestalt zu verleihen. Und dies infolge der Erfindung der Erfahrungsmethoden durch unsere Naturwissenschaften. Auch die Induktion forscht nach dem Allgemeinen, das sie aus dem Besonderen der Beobachtung abzuleiten sucht, aber nur auf Grund der Voraussetzung eines noch höheren Allgemeinen: der obersten aller Erfahrung zu Grunde liegenden Naturgesetze, die selbst als höchste Obersätze aller Schlüsse nicht mehr induktorisch und überhaupt durch kein Beweisverfahren mehr abgeleitet werden können. Sobald daher die Erfahrungsmethode mit Klarheit durchgeführt wurde, mußte die Frage nach diesen obersten Leitsätzen aller Induktionen notwendig hervortreten und die Spekulation auf die allgemeine Frage nach den notwendigen Wahrheiten der ungeschriebenen Gesetze zurückführen. Mit andern Worten: Die Induktion erfordert selbst zu ihrer Möglichkeit die Spekulation. Die dadurch gestellte Aufgabe löste Kant durch seine Kritik der Vernunft.

23. Gegen die Kantische Methode, dem System der Metaphysik eine Kritik der Vernunft vorhergehen zu lassen, sind schon früh viele Einwendungen gemacht worden, die zum Teil darauf beruhen, daß Kant selbst noch nicht zu voller Klarheit über das Verhältnis der Kritik zur Metaphysik gelangt war, weil

er noch Deduktion und Beweis verwechselte. So meinte Herbart Kant zu widerlegen mit der Frage, ob es denn leichter sei, die Vernunft zu erkennen, als andere Dinge. Es fragt sich nur, was man unter den anderen Dingen versteht. Versteht man darunter mit Kant die Gegenstände der Metaphysik, so ist es allerdings leichter, die Vernunft zu erkennen, eben weil dies Sache innerer Beobachtung, jenes aber Sache abstrakten Denkens ist. So machte Hegel den oft wiederholten Einwand, die Kritik sei ein Versuch zu schwimmen, ehe man ins Wasser gehe. Allerdings werde ich auch zur inneren Erfahrung schon gewisse Principien anwenden müssen, die ich doch erst deducieren will. Aber deducieren ist eben nicht beweisen, und was bei einem Beweis ein Cirkel wäre, braucht es darum nicht bei der Deduktion zu sein.

24. Hält man die kritische Deduktion für eine Art des Beweises, d. h. hält man das Verhältnis der Kritik zum System der Philosophie für ein Verhältnis des logischen Grundes zu seiner Folge, so kommt man infolge des Widerspruchs, der in dieser Voraussetzung liegt, zu zwei entgegengesetzten Ansichten: je nachdem, ob man von der Folge auf den Grund oder vom Grunde auf die Folge schließt[1]. Entweder nämlich kann man schließen:

---

[1] Nach dem Princip: Der Grund einer Erkenntnis muß mit dieser Erkenntnis selbst gleichartig sein. Dies ist ein für die Kritik der Vernunft äußerst wichtiger logischer Satz. Sein Beweis liegt eigentlich in Folgendem. Der Grund einer Erkenntnis ist jederzeit selbst Erkenntnis, und zwar entweder mittelbare oder unmittelbare Erkenntnis. Ist er mittelbare Erkenntnis, so besteht er im Urteil, und die Begründung geschieht durch Beweis. In diesem Falle folgt der Satz aus der logischen Natur des Schlusses als eines analytischen hypothetischen Urteils. Es kann nichts im Schlußsatz behauptet werden, was nicht schon in den Prämissen enthalten ist. Ist aber der Grund eine unmittelbare Erkenntnis, so ist es eben diese Erkenntnis selbst, die im Urteil ausgesprochen wird. In diesem Falle folgt der Satz aus dem Princip der Identität.

Die Philosophie ist eine rationale Wissenschaft. Eine rationale Wissenschaft kann aber nicht aus empirischen Gründen abgeleitet werden. Also kann die Kritik nicht empirisch-psychologisch, sondern nur rational sein.

Oder aber man schließt:

Die Kritik ist Wissenschaft aus innerer Erfahrung, d. h. empirische Psychologie. Aus empirisch-psychologischen Gründen lassen sich aber nie andere als wieder empirisch-psychologische Folgen ableiten. Folglich giebt es keine Philosophie als rationale Wissenschaft, sondern nur als empirische Psychologie.

Das erste ist der Standpunkt der Vertreter der Wissenschaftslehre, das zweite der des Psychologismus. Beide entgegengesetzte Ansichten aber gelten nur unter der gemeinsamen — bewußten oder unbewußten — Voraussetzung, daß das Verhältnis der Kritik zum System der Philosophie das logische Verhältnis des Grundes zur Folge sei. Dies logische Vorurteil führt notwendig zu der Verwechslung der psychologischen Principien der Kritik mit den obersten philosophischen Principien des Systems der Wissenschaft. Auf Grund dieser Voraussetzung ist der Widerspruch dieser beiden Parteien schlechterdings unvermeidlich und unauflöslich. Haben wir aber einmal das Irrige ihres gemeinsamen Vorurteils eingesehen, so haben wir damit auch den Grund ihres Streites beseitigt. Beide Teile verkennen das Verhältnis der Psychologie zur Philosophie; der erste hält für philosophisch, was in der Tat nur psychologisch ist, der andere hält für psychologisch, was in der Tat philosophisch ist.

25. Kant selbst hat sich zur genauen Bestimmung dieses Verhältnisses nicht hindurchfinden können und die logische Form seiner „transcendentalen“ Erkenntnis nicht mit Klarheit festzu-

stellen vermocht; mit wie ausgezeichneter Meisterschaft er sie auch in der Anwendung zu handhaben verstand. Diese Unbestimmtheit liegt in seinem Begriff der Transcendentalphilosophie. So wurde die Zweideutigkeit dieses Schlagwortes für alle die, welche ohne methodologische Schulung nur nach den neuen Resultaten griffen, Anlaß, den kaum überwundenen Dogmatismus zu erneuern und, mit wechselnder Vorliebe, bald zu Leibniz' logischem Dogmatismus, bald zu dem induktorischen Vorurteil der Engländer zurückzukehren und so alle Philosophie wieder bald in Logik, bald in Erfahrung zu verwandeln und untergehen zu lassen.

Dies läßt sich historisch sehr bestimmt nachweisen.

Transcendental nannte Kant die Untersuchung des Grundes der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori. Der Gegenstand der transcendentalen Untersuchung, die den Inhalt der Kritik bildet, sind also Erkenntnisse a priori. Erkenntnisse aber erkennen wir überhaupt nur durch innere Erfahrung. Die transcendentale Erkenntnis der Kritik ist also offenbar Erkenntnis aus innerer Erfahrung. Hat also gleich transcendentale Kritik Erkenntnisse a priori zum Gegenstande, so ist sie doch selbst eine empirische Wissenschaft. Wer nun nicht hinreichend genau Gegenstand und Inhalt der transcendentalen Kritik unterscheidet, wer die transcendentale Erkenntnis, den Inhalt der Kritik, mit ihrem Gegenstande, der philosophischen Erkenntnis verwechselt, der wird leicht die Ungleichartigkeit beider übersehen, der wird leicht die psychologische Natur der ersteren verkennen und sie selbst für philosophisch, also für eine Art der Erkenntnis a priori halten [1].

Reinhold, der das bei Kant vermißte System der Trans-

---

[1] Vgl. Kritik der reinen Vernunft (Kehrbach) S. 80.

cendentalphilosophie suchte, ließ sich durch dieses Mißverständnis des Transcendentalen zu dem Versuch verleiten, die Philosophie als „Theorie des Vorstellungsvermögens“ zu bearbeiten. Diesen unglücklichen Gedanken griff Fichte auf und wurde dadurch dazu geführt, in seiner Wissenschaftslehre vom „Ich als Princip der Philosophie“ auszugehen; während Schulze, Beneke und andere daraus die entgegengesetzte, psychologistische Konsequenz entwickelten. Seitdem beherrscht diese Verwechslung psychologischer und philosophischer Principien die Geschichte der Philosophie. Sie ist noch heute der fundamentale Fehler bei allen denen, die sich mit dem Phantom einer „reinen Erkenntnistheorie“ abmühen.

Schon Fries hat diese im Begriff des Transcendentalen enthaltene Vermengung psychologischer und philosophischer Principien, die er das Vorurteil des Transcendentalen nannte, als den Grundfehler des gesamten Nachkantischen Dogmatismus aufgewiesen und diesen Fehler durch Aufklärung des Unterschiedes von Beweis und Deduktion verbessert.

26. Aus jener Unterscheidung von Inhalt und Gegenstand der Kritik ergiebt sich von selbst das Verhältnis der Psychologie zur Metaphysik. So gewiß es schon im Begriff der Metaphysik liegt, daß sie keine empirische Wissenschaft ist, so gewiß daher die Metaphysik nicht psychologisch ist, so gewiß folgt andererseits aus dem Begriff der Kritik, daß diese nicht metaphysisch ist. Denn die Kritik soll als Propädeutik, als Untersuchung des Grundes der Möglichkeit der Metaphysik, dieser vorhergehen. Die Vernunftkritik für metaphysisch zu erklären, ist also eine contradictio in adjecto. Was aber Fischer und so viele andere immer wieder an diesem so einfachen und klaren Verhältnis irre macht, das ist nichts anderes als die Verwechslung der Deduktion

mit dem Beweise. Apodiktische Schlußsätze können nämlich allerdings nicht aus empirischen Prämissen abgeleitet werden. Mithin würde die Kritik, wenn sie Beweis wäre, nicht empirischer, also auch nicht psychologischer Natur sein können, weil sonst die Metaphysik selbst ihre Apriorität und Apodikticität einbüßen würde, die doch ohne Widerspruch nicht von ihr verneint werden kann. Und so erscheint von diesem Vorurteil aus die große Leistung der Friesschen Deduktionen nichts als ein Rückfall in Lockes Empirismus. Indem aber dieses Vorurteil zu der Konsequenz führt, die Kritik müsse metaphysisch sein, verliert es vielmehr selbst den Grundgedanken der Vernunftkritik, hebt es eo ipso den Begriff des Kriticismus auf und führt unmittelbar zum Dogmatismus zurück.

27. Dieses selbe Vorurteil macht es der sogenannten Neukantischen Schule unmöglich, auf den reinen Kriticismus zurückzukommen. „Wenn man die transcendentale Deduktion als eine der Psychologie ‚angehörige' Untersuchung bezeichnen dürfte, so wäre die Disciplin der Metaphysik überhaupt in die der Psychologie aufgelöst" heißt es da [1]. Doch wohl nur für den, der die transcendentale Deduktion für einen Beweis ansieht, was ihrem Begriff als der Begründung von Grundsätzen widerspricht. Und so ist es auch heute noch das Vorurteil des Transcendentalen, das dem richtigen Verständnis und einer gesunden Fortbildung der kritischen Philosophie im Wege steht.

In der Tat lesen wir ebenda: „Wenn transcendental die Untersuchung der Erkenntnisart genannt wird, sofern die letztere

---

[1] H. Cohen. Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. S. 294.

a priori möglich sein soll, so wird damit das a priori selbst als nur dadurch möglich bezeichnet, daß es in einer transcendentalen Erkenntnis erkannt wird. Und so verhält es sich wirklich[1]." — Hier finden wir aufs bestimmteste die Verwechslung der psychologischen Gründe der Kritik mit den logischen Gründen des Systems ausgesprochen. Die transcendentale Untersuchung des Grundes der Möglichkeit von Erkenntnissen a priori soll selbst der Grund ihrer Möglichkeit sein. Gewiß, dann dürfte die transcendentale Untersuchung nicht als eine der Psychologie angehörige Untersuchung bezeichnet werden; denn durch welche Mittel der Logik könnte es gelingen, aus empirischen Gründen Erkenntnisse a priori herzuleiten. Darf aber die transcendentale Untersuchung nicht empirisch sein, so muß sie Erkenntnis a priori sein. Wie kann sie aber Erkenntnis a priori sein, wenn sie die Erkenntnis a priori erst möglich machen soll?

Sowie einmal diese Forderung einer transcendentalen Erkenntnis gestellt ist, die die Erkenntnis a priori erst möglich machen soll, muß man auf die Idee einer Wissenschaft kommen, die logisch noch über den Grundsätzen steht und diese erst aus einem „obersten Grundsatz" ableitet. Eine Wissenschaft, die freilich nicht empirische Psychologie sein dürfte, wenn man nicht die Philosophie doch wieder aus Erfahrung entspringen lassen will. So finden wir uns hier nur wieder auf das hoffnungslose Unternehmen angewiesen, aus bloßer Logik Metaphysik zu machen. D. h. wir sind damit schon bei der Idee der Fichteschen Wissenschaftslehre. Das haben denn auch andere besser bemerkt als Cohen, und so erleben wir heute auf den vor kurzem noch so lebhaften Ruf „Zurück zu Kant" den neuen „Vorwärts

[1] a. a. O. S. 134.

zu Fichte“. Das ist denn wenigstens konsequent, und je eher wir in diesem altgewohnten Schlendrian wieder bei Hegel ankommen, desto eher wird sich dies falsche Philosophem auch wieder selbst zerstören. Allerdings liegt dies Mißverständnis des Transcendentalen, das Verhängnis der Nachkantischen Philosophie, im Keime schon bei Kant selbst. Aus diesem Mißverständnis, an das man sich klammerte und das bei Kant ohne bedeutende Folgen im Hintergrunde seiner Untersuchungen stehen geblieben war, suchte man die Konsequenzen zu ziehen und zum System zu entwickeln. Bei Kant schon liegt daher auch der tiefste Grund, weshalb jeder, der versucht, ihn weiterzubilden, wenn er sich nicht erst diesen Fehler verbessert, unvermeidlich wieder den alten Irrweg gehen muß, weshalb aller Neukantianismus, der dies Vorurteil nicht im Princip aufgiebt, nur einer groben Inkonsequenz seine ephemere Existenz verdankt. Deshalb werden wir mit aller Rückkehr zu Kant nie weiter kommen, uns vielmehr immer nur im Kreise drehen; Kriticismus bleibt ein bloßes Wort, und die von der Kantischen Kritik verheißene Philosophie als evidente Wissenschaft wird ein Traum bleiben, ehe wir uns nicht von diesem Vorurteil frei machen.

V.

Über das konstitutive Princip der Metaphysik. Das verallgemeinerte Humesche Problem und seine kritische Auflösung.

28. Wissenschaft unterscheidet sich von dem bloßen Wissen durch die logische Form der systematischen Einheit in der Anordnung und Begründung der das Wissen enthaltenden Urteile. Jede Wissenschaft hat daher unter logischem Gesichtspunkt eine

von dem in ihr enthaltenen Wissen verschiedene, ihr eigentümliche systematische Form. Die Regel der Hervorbringung dieser logischen Form einer Wissenschaft nenne ich das methodische Princip derselben. Soll also aus dem rohen und ungeordneten Stoff des zerstreut in unserer Erkenntnis liegenden Wissens Wissenschaft werden, so kommt es auf die Erfindung des richtigen methodischen Princips der Wissenschaft an. Die Methode einer Wissenschaft wird nun offenbar durch die Erkenntnisquelle des in ihren Urteilen enthaltenen Wissens bedingt. Diese Erkenntnisquelle des in den Urteilen einer Wissenschaft enthaltenen Wissens nenne ich das konstitutive Princip dieser Wissenschaft. Folglich hängt die Möglichkeit, ein Wissensgebiet in die sichere Bahn einer Wissenschaft zu bringen, von der richtigen Einsicht in das konstitutive Princip dieser Wissenschaft ab.

So verdankt die Mathematik die mit Recht berühmte Strenge ihrer wissenschaftlichen Ausbildung der frühen Einsicht in die Konstruierbarkeit ihrer Begriffe in der reinen Anschauung; denn die Natur gerade nur dieses konstitutiven Princips ermöglicht die strenge Anwendung der dogmatischen Methode des progressiven Beweises. So beruht das glückliche Gelingen der wissenschaftlichen Ausbildung der neueren Naturforschung auf der Einsicht, daß sie ihr konstitutives Princip in der Beobachtung zu suchen habe. Diese Einsicht ermöglichte die Einführung der induktiven Methode des regressiven Beweises. — So hat andererseits das bisher so unglückliche Schicksal der Metaphysik seinen Grund allein darin, daß man sich noch nicht über ihr konstitutives Princip hat einigen können, ja, daß man auch noch nicht einmal die Frage nach demselben allgemein ins Auge gefaßt hat [1].

[1] Princip kann überhaupt jede allgemeine Regel heißen, sofern von ihr die Entwicklung einer Wissenschaft abhängt. Es wird daher ebenso viele Arten

29. Daß es aber in unserer Erkenntnis überhaupt ein eigenes konstitutives Princip der Metaphysik geben müsse, wird durch das

---

von Principien geben, als es Arten der Abhängigkeit der Entwicklung einer Wissenschaft von allgemeinen Regeln giebt. Demgemäß haben wir vorzüglich drei Arten von Principien zu unterscheiden. Die Entwicklung einer Wissenschaft hängt nämlich einmal von der unmittelbaren Erkenntnis ab, die in den Urteilen dieser Wissenschaft wiederholt wird und die das Kriterium der Gültigkeit der Grundurteile dieser Wissenschaft bildet. Dies giebt den Begriff des konstitutiven Princips der Wissenschaft. Andererseits hängt die Entwicklung einer Wissenschaft von der allgemeinen Regel ab, der gemäß ihre systematische Ausbildung stattfindet. Dies giebt den Begriff des methodischen Princips der Wissenschaft. Drittens hängt die Entwicklung einer Wissenschaft von den allgemeinen Grundsätzen ab, aus denen sich durch logische Folgerungen ihr System entwickelt. Diese allgemeinen Grundsätze einer Wissenschaft können daher auch mit Recht ihr Princip heißen. Und zwar kann man dies Princip, zum Unterschied von dem konstitutiven und dem methodischen Princip, das logische Princip der Wissenschaft nennen; wobei jedoch zu beachten ist, daß das Beiwort „logisch" hier nur das Verhältnis der Abhängigkeit der Entwicklung der Wissenschaft von dem Princip bezeichnen soll und nicht die Erkenntnisart, der das Princip selbst angehört.

Von dieser Einteilung ist daher die Unterscheidung der Principien nach der Erkenntnisart, der sie angehören, sorgfältig zu trennen. Unter diesem letzteren Gesichtspunkt können nur die Grundsätze der Logik logische Principien heißen; während nach der ersten Wortbestimmung die Grundsätze der Metaphysik, Mathematik und Logik die logischen Principien eben dieser Wissenschaften bilden. Der gewöhnliche Sprachgebrauch folgt meist der Bezeichnung nach der Erkenntnisart, und demgemäß haben wir oben nach der richtigen Begründung der „metaphysischen Principien" gefragt und dementsprechend „psychologische und metaphysische Principien" unterschieden.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, bemerke ich ferner, daß in der Kantischen Schule der Ausdruck „konstitutives Princip" nicht selten noch in einem anderen, von der hier gegebenen Definition abweichenden Sinne Anwendung findet. Nach der in der Kritik der reinen Vernunft (die das Verhältnis der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft zu der mittelbaren Erkenntnis der Reflexion noch nicht in den Kreis ihrer Untersuchungen zieht) gemachten Unterscheidung zwischen konstitutiven und regulativen Principien versteht man unter konstitutiven Principien solche allgemeinen Gesetze, welche unmittelbar eine theoretische Entwicklung nach progressiver Methode zulassen, während man als regulative Principien unleugbare Faktum metaphysischer Urteile bewiesen[1]. Dies Princip muß sich daher auch nach den eigentümlichen Beschaffenheiten der aus ihm entspringenden Urteile bestimmen lassen. Und aus dem Charakter des so bestimmten konstitutiven Princips muß sich endlich das gesuchte methodische Princip der Metaphysik ermitteln lassen.

diejenigen bezeichnet, die, als leitende Maximen der Induktion, allererst die Erforschung der ersteren ermöglichen. So wurden Robert Mayer und Helmholtz durch das Princip der Erhaltung der Energie auf die Entdeckung des mechanischen Äquivalents der Wärme und damit auf das erste Grundgesetz der Thermodynamik geleitet. Die thermodynamischen Grundgesetze selbst aber liegen der mechanischen Wärmetheorie als konstitutive Principien oder, nach dem Ausdruck der Physiker, als Hauptsätze zu Grunde.

[1] Das Wort Metaphysik ist zwar etwas aus der Mode gekommen durch die Behauptung, es gäbe gar keine Metaphysik. Allein diese Behauptung beruht auf bloßem Wortstreit und trifft garnicht die von uns acceptierte wissenschaftliche Bedeutung, die Kant dem Worte gegeben hat. Vielmehr beruht in diesem Sinne des Wortes selbst alle Erfahrungswissenschaft auf metaphysischen Voraussetzungen; ja, jedes Erfahrungs*urteil* bedarf, nach Kants klarer und unwidersprechlicher Nachweisung, außer der logischen Möglichkeit des Begriffs und außer der anschaulichen Bestimmung seines Gegenstandes einer nur denkbaren Form seiner synthetischen Einheit. Demgemäß giebt es also entweder überhaupt keine Wissenschaft, oder auch Metaphysik.

Wenn z. B. Ostwald (Annalen der Naturphilosophie Bd. I 1902 S. 51 f. u. S. 61) gegen Kants Lehre von den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft behauptet: „Für den heutigen Naturforscher giebt es keine Erkenntnis a priori und daher auch kein apodiktisches Wissen . . . Man darf nur eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{\infty} = 0$ dafür annehmen, daß irgend eine ins Unbegrenzte erstreckte oder absolute Behauptung die Wahrheit trifft," so hebt dieser empiristische Satz, da er selbst eine apodiktische Behauptung ausspricht, sich selbst auf; die Wahrscheinlichkeit, daß er die Wahrheit trifft, ist $\frac{1}{\infty} = 0$. Schränkt man ihn aber, um diesem Widerspruch zu entgehen, ein, in dem Sinne, daß jeder *andere* apodiktische Satz als dieser *eine* mit der Wahrscheinlichkeit 0 die Wahrheit trifft, so ist der Empirismus bereits durchbrochen, denn es giebt alsdann wenigstens *einen apodiktischen* Satz.

In der Tat ist dies der Weg, den wir in unseren obigen Untersuchungen eingeschlagen und bis zum Ziele verfolgt haben. Gleich anfangs (§ 2) hatte sich uns herausgestellt, daß das Schwankende und Unsichere der Metaphysik nicht den Besitz des in ihr enthaltenen Wissens betreffe, sondern allein die Aufgabe, dies in den verschiedenen Erkenntnisgebieten zerstreut liegende Wissen zu isolieren und auf seine wissenschaftliche Form zu bringen. Um die Methode zur Auflösung dieser Aufgabe ausfindig zu machen, machten wir uns an eine Untersuchung des konstitutiven Princips der metaphysischen Urteile. Wir fanden es in der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft. Aus der Eigentümlichkeit derselben ergab sich uns schließlich in der Lehre von der Deduktion das richtige methodische Princip der Metaphysik. Da nämlich die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft, als nicht-anschauliche Erkenntnis, sich nicht unmittelbar mit den aus ihr entspringenden Urteilen vergleichen läßt, so mußten wir einen Weg ermitteln, auf dem sich diese Vergleichung mittelbar bewerkstelligen läßt. Dies zeigte sich als nur dadurch möglich, daß wir die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft selbst erst, ihrem Tatbestande nach, einer wissenschaftlichen Untersuchung unterwerfen, um durch Aufweisung des in ihr enthaltenen Grundes der fraglichen Urteile diese zu deducieren. Da wir nun den Tatbestand von Erkenntnissen nur durch innere Erfahrung erkennen, so erwies sich uns die Deduktion als eine Aufgabe der Psychologie. Demgemäß ergab sich als methodisches Princip der Metaphysik die Aufgabe der Deduktion ihrer Urteile durch die aus einer Theorie der Vernunft geführte Nachweisung ihres Ursprungs in der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft.

Man sieht ohne weiteres, daß der Nerv unserer methodologischen Nachweisungen in unserer Bestimmung des konstitutiven Princips der Metaphysik liegt. So einfach und einleuchtend nun auch diese Bestimmung erscheinen mag, sobald man einmal den Gesichtspunkt der richtigen Stellung der Frage nach diesem Princip gewonnen hat, so mannigfachen Mißdeutungen und Verwechslungen ist doch, wie die Geschichte der Philosophie lehrt, dies Princip ausgesetzt. Alle methodologischen Fehler im Gebiete der Metaphysik und infolgedessen das Fehlschlagen aller bisherigen Versuche. die Metaphysik zum Range einer Wissenschaft zu erheben, lassen sich auf das Verkennen ihres konstitutiven Princips zurückführen. Es wird daher gut sein, die zuletzt behandelte methodologische Streitfrage, in der wir es bisher nur mit den Folgen dieses Verkennens zu tun gehabt haben, bis auf ihre Quelle zurückzuverfolgen und die Abhängigkeit der möglichen Arten ihrer Beantwortung von der richtigen oder unrichtigen Bestimmung des konstitutiven Princips der Metaphysik ins Auge zu fassen.

30. Wir haben bisher das Vorurteil des logischen Dogmatismus von der Allgenugsamkeit des Beweisverfahrens vornehmlich dadurch bekämpft, daß wir auf den Widerspruch hinwiesen, den es einschließt. Dieser Widerspruch liegt aber eigentlich so offen am Tage. daß sich die Frage erhebt, welches Motiv so tief wurzeln könne, daß es, ungeachtet des offenbaren Widerspruchs, auf den es führt, seine unbeschränkte Herrschaft behauptet. Wir müssen daher noch weiter gehen, und den Grund jenes Vorurteils aufsuchen, um es an der Wurzel bekämpfen zu können.

Dieser Grund liegt nun in nichts anderem als in jener aus einem Zeitalter geringer wissenschaftlicher Ausbildung kritiklos vererbten und zum Dogma erstarrten Irrlehre, alle unmittelbare

Erkenntnis sei Anschauung, alles Nicht-Anschauliche in unserer Erkenntnis gehöre der mittelbaren Erkenntnis der Reflexion an.

Ist nämlich alle unmittelbare Erkenntnis anschaulich, so muß offenbar die metaphysische Erkenntnis, da sie nicht anschaulich ist, ihren Grund in der Reflexion haben, d. h. sie beruht auf dem Beweise.

31. Anschauung ist diejenige Erkenntnis, deren wir uns unmittelbar (nämlich ohne Vermittlung von Begriffen, d. h. unabhängig von der Reflexion) bewußt werden. Da erscheint es nun freilich leicht paradox, von einer nicht-anschaulichen und doch unmittelbaren Erkenntnis zu sprechen. Allein, die Unmittelbarkeit, die den Begriff der Anschauung ausmacht, ist nicht die der Erkenntnis, sondern des Bewußtseins um die Erkenntnis. Die scheinbare Paradoxie des Begriffs einer nicht-anschaulichen unmittelbaren Erkenntnis verschwindet daher, sobald man den Unterschied des unmittelbaren Bewußtseins von der unmittelbaren Erkenntnis beachtet. Was hier meist irreführt, ist dies: Die anschauliche Erkenntnis steht offenbar früher vor dem Bewußtsein als diejenige, die ihm nur durch Reflexion angehört. Aus dieser zeitlichen Priorität der anschaulichen vor der gedachten Erkenntnis folgt aber nicht, daß die Anschauung der alleinige Grund der Möglichkeit der gedachten Erkenntnis sei. Denn die Frage nach dem Ursprung der Erkenntnis ist von der genetischen Frage nach der zeitlichen Ausbildung des Bewußtseins streng zu scheiden. Die Bedeutung des Unterschiedes dieser beiden Fragestellungen ist bis auf den heutigen Tag von psychologischer Seite auf das Härteste verkannt worden. Die Vernachlässigung dieses elementaren Unterschiedes ist fast noch der einzige Fehler, der dem allgemeinen Verständnis der psychologischen Grundlagen der

Kritik im Wege steht und um dessen willen das konstitutive Princip der Metaphysik und selbst der Logik noch so streitend beurteilt wird.

Die Erörterung dieser Angelegenheit gehört zwar selbst durchaus in die Psychologie, aber wir können sie doch — bei dem heutigen Stande dieser Wissenschaft — für unseren logischen Zweck nicht umgehen. Wie, bei aller sonstigen Uneinigkeit und Vielgestaltigkeit in der neuesten Entwicklung der Logik, doch insofern Einigkeit herrscht, als man keine andere Begründung der Urteile kennt als die Demonstration und den Beweis, so erscheint es geradezu als eine ausgemachte psychologische Tatsache, daß wir keine andere unmittelbare Erkenntnis besitzen als die Anschauung. Und so gilt es bei fast allen neueren Bearbeitern der psychologischen Disciplinen geradezu als ein Axiom, es sei die Aufgabe der Psychologie, allein aus dem Sinn und aus der Association unsere gesamte Erkenntnis zu erklären. Was nicht in den Rahmen der genetischen Betrachtungsweise gehört, das pflegt man als überhaupt nicht dem Bereiche der Psychologie angehörig zu betrachten und in eine andere, angeblich nicht psychologische Disciplin, in die sogenannte Erkenntnistheorie, zu verweisen. Natürlich, daß man sich von einer solchen Bearbeitung der Psychologie keine Aufklärungen für die Philosophie verspricht. Und ebenso natürlich, daß, wer sich dennoch dieser Hoffnung hingiebt, schließlich nur an der Möglichkeit aller philosophischen Erkenntnis irre werden muß.

32. Dem gegenüber wird es unsere Aufgabe, zu zeigen, daß, wofern überhaupt die Psychologie den Tatsachen der inneren Erfahrung gerecht werden und nicht ihnen aus dem Wege gehen will, die Frage nach dem Grunde der Möglichkeit metaphysischer

Urteile, d. h. eben jene Frage nach einem eigenen, weder anschaulichen noch logischen Ursprung des Metaphysischen in unserer Erkenntnis, zu einem unvermeidlichen psychologischen Problem wird, und daß nur durch eine gründliche empirisch-psychologische Bearbeitung dieses Problems die immer wiederkehrenden Irrtümer vermieden werden können, die bisher eine einhellige und planvolle wissenschaftliche Arbeit im Gebiete der Metaphysik unmöglich gemacht haben.

Wir behaupten somit, daß ohne die Anerkennung des Faktums einer nicht-anschaulichen unmittelbaren Erkenntnis nicht allein eine psychologische Erklärung der Tatsachen des Erkennens in alle Wege unmöglich bleiben muß, sondern auch eine Einigung in metaphysischen Fragen sich nimmermehr erhoffen läßt. Ja, wir behaupten, daß, so wenig wir sonst auf einen dauernden Bestand unserer Bemühungen um die Ausbildung der Metaphysik hoffen dürfen, die allgemeine Anerkennung jener psychologischen Entdeckung allein hinlänglich sein wird, die philosophische Anarchie zu brechen und den Zwist der Schulen für alle Zeit zu schlichten.

Es läßt sich ohne Mühe zeigen, daß fast jeder selbständige spekulative Kopf in der Geschichte der Philosophie dieser Entdeckung mit größerer oder geringerer Deutlichkeit auf der Spur war, sich aber durch das seine Zeit beherrschende dogmatische Vorurteil hindern ließ, dieser Entdeckung nachzugehen. Platons göttliche Anschauung der Ideen, der νοῦς des Aristoteles, bei den Neueren Jacobis „Offenbarung“, Kants „transcendentale Apperception“, Reinholds „unmittelbares Bewußtsein“, Fichtes „reines Ich“, Schellings „intellektuelle Anschauung“ und so fort bis auf Windelbands „Normalbewußtsein“ und Rickerts „Sollen als transcendentes Minimum“, das alles sind nur mehr oder weniger unbeholfene Versuche, von der bloßen Reflexion zur unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft herüberzukommen.

33. So allgemein also auch bisher diese unmittelbare Erkenntnis verkannt worden ist, so bildet doch ihre Aufklärung das Hauptziel und das Ende aller Bemühungen in der Geschichte der Philosophie. Eine einfache Überlegung wird uns hierüber orientieren.

In einer Auffassung, die die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft nicht kennt, die aus der Anschauung und der Reflexion allein alle Erkenntnis hervorfließen lassen will, ist kein Raum für andere Erkenntnis als die Anschauung und solche, die sich durch die Methoden der Reflexion, d. h. durch die logischen Formen der Definition und des Beweises aus der Anschauung herleiten läßt. Eine solche Auffassung kann also zwar der reinen Mathematik und Empirie gerecht werden, nicht aber dem Metaphysischen in unserer Erkenntnis. Daher der immer wiederkehrende Streit in allen Gebieten, an die Metaphysik ein Anrecht hat: der Streit über die Principien der theoretischen Physik, über die Grundlagen der Ethik und Politik und über die Begründung der Religionslehre. Daher ist — neben der hohen Ausbildung unserer mathematischen und empirischen Wissenschaften — die Metaphysik bis heute der Tummelplatz der Hypothesen geblieben. Und so ist jenes Vorurteil der alleinige Grund alles Dogmatismus und eben damit auch alles Skepticismus in der Philosophie. Denn, wo man eine Begründung metaphysischer Wahrheiten versuchte, da folgte man der dogmatischen Methode des Beweises. Die Einsicht aber, daß, wo keine andere unmittelbare Erkenntnis zu Grunde liegt als die Anschauung, man auch durch kein Beweisverfahren zu Erkenntnissen gelangen könne, die die

Anschauung übersteigen, daß, mit andern Worten, bei der Leerheit und Mittelbarkeit der Reflexion, aus bloßer Logik keine Metaphysik zu schaffen sei, — diese Einsicht in die nur analytische Natur der Reflexion mußte notwendig zur Leugnung der Möglichkeit aller metaphysischen Erkenntnis und damit zum Empirismus führen. Wer aber dennoch, ohne sich den Methoden der Reflexion anzuvertrauen, eine metaphysische Erkenntnis behaupten wollte, der mußte bei der mystischen Fiktion einer nicht-sinnlichen, einer intellektuellen Anschauung seine Zuflucht suchen.

So führt jenes Vorurteil unausbleiblich auf den die ganze Geschichte der Philosophie beherrschenden Streit der Platoniker und Aristoteliker[1].

---

[1] Kant wirft einmal die Frage auf: „Ob sich ein Schema zu der Geschichte der Philosophie a priori entwerfen lasse, mit welchem die Epochen der Meinungen der Philosophen aus den vorhandenen Nachrichten so zusammentreffen, als ob sie dieses Schema selbst vor Augen gehabt und danach in der Kenntnis derselben fortgeschritten wären." Und er antwortet: „Ja; wenn nämlich die Idee einer Metaphysik der menschlichen Vernunft unvermeidlich aufstößt und diese ein Bedürfnis fühlt, sie zu entwickeln; diese Wissenschaft aber ganz in der Seele, obgleich embryonisch vorgezeichnet liegt . . . Die Geschichte der Philosophie ist nicht die Geschichte der Meinungen, die zufällig hier oder da aufsteigen, sondern der sich aus Begriffen entwickelnden Vernunft . . . Eine philosophische Geschichte der Philosophie ist selber nicht historisch oder empirisch, sondern rational, d. i. a priori möglich. Denn, ob sie gleich Fakta der Vernunft aufstellt, so entlehnt sie solche nicht von der Geschichtserzählung, sondern sie zieht sie aus der Natur der menschlichen Vernunft als philosophische Archäologie." (Lose Blätter. Heft II. S. 286, 278.)

Unsere obigen Erörterungen bewähren sich daran, daß sie uns unmittelbar instand setzen, das Schema dieser „philosophischen Archäologie" aufzustellen.

Das wissenschaftliche Interesse an der Geschichte der Philosophie richtet sich allein auf den Fortschritt in der Entwicklung der Methoden, nicht auf die Resultate der einzelnen Forscher, oder doch nur so weit als diese Resultate von der befolgten Methode abhängig sind. Nur für die Methode läßt sich ein Gesetz der Gedankenentwicklung angeben. Dies Gesetz wird durch unser Schema veranschaulicht. Dies Schema ist der Organisation der Vernunft selbst nachgebildet.

34. Der Grundfehler aller bisherigen dogmatischen Logik, das Vorurteil, alle Urteile seien entweder demonstrierbar oder beweisbar, beruht also auf einer Unkenntnis der Tatsachen des Erkennens. Dieses Vorurteil der traditionellen Logik haben wir von den Griechen übernommen. Bei diesen erklärt sich diese Unkenntnis aus der mangelhaften Ausbildung ihrer Naturwissenschaft. Das geistige Leben und die Wissenschaft der Griechen bewegt sich allein in der Welt der Anschauung und des Schönen. Theoretische Naturwissenschaft war ihnen fremd. Die nur ethischen Motive, die den Sokrates zur Anerkennung „ungeschriebener Gesetze" zwangen, in denen Platon ein von der *πίστις* (Empirie) und *διάνοια* (Mathematik) verschiedenes *ἀνυπόθετον* (Unbeweisbares) erkannte, dessen Grund er in intellektueller (wenn auch bei der Geburt verlorener) Anschauung suchte, — diese nur ethischen Motive waren nicht stark genug, um den wissenschaftlichen Sinn des Aristoteles zu verhindern, mit der mythischen Begründung die Sokratische Entdeckung selbst zu verwerfen.

Das Mystische der Platonischen Auffassungsweise einerseits und die Evidenz der Sinnesanschauung andererseits mußte den Aristotelikern das Übergewicht in der Wissenschaft verleihen. Aber bei einer hinlänglichen Ausbildung der theoretischen Natur-

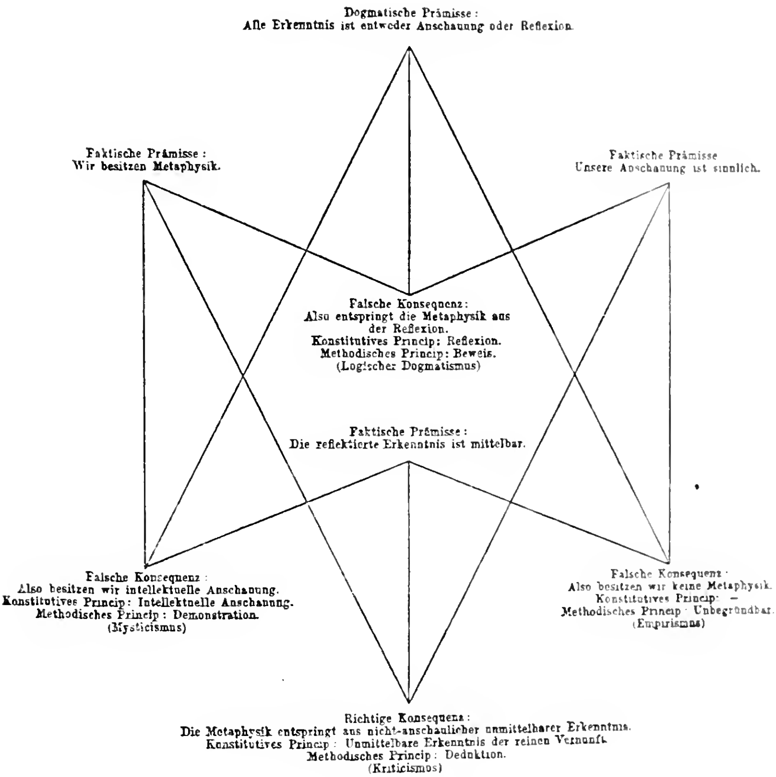
---

Der psychologische Gesichtspunkt, nach dem es entworfen ist, verbürgt einerseits seine Vollständigkeit rücksichtlich der Mannigfaltigkeit aller möglichen historischen Formen, andererseits die Unabhängigkeit aller Momente seiner Einteilung von historisch gegebenen oder willkürlich erdachten Maßstäben. Es giebt uns daher einen sicheren Leitfaden an die Hand, an dem sich alle methodologisch bedeutsamen Fortschritte und Irrtümer in der Geschichte der philosophischen Wissenschaften nach Principien übersehen und bis auf ihre Quelle in der Vernunft selbst zurückführen lassen.

Gebrauch und Anwendung der Tafel ergeben sich leicht durch eine Vergleichung mit unseren folgenden Ausführungen.

wissenschaften mußte eine nur einigermaßen gründliche Selbstbeobachtung wieder zur Anerkennung der unvermeidlichen Wirklichkeit metaphysischer Voraussetzungen führen und damit die Frage nach dem Grunde ihrer Möglichkeit erneuern.

So zeigt es die Entwicklung der neueren Philosophie.



35. Unter Voraussetzung der fehlerhaften psychologischen Disjunktion: alle Erkenntnis beruhe entweder auf Anschauung oder auf Reflexion, bleibt indessen — in Anbetracht der tatsächlich sinnlichen Natur unserer Anschauung und der tatsächlich analytischen Natur der Reflexion — die Wirklichkeit metaphysischer Urteile ein unauflösliches Paradoxon. Unter jener Voraussetzung ist diese Tatsache unerklärlich, ja unmöglich. Denn, wenn man nicht entweder die sinnliche Natur unserer Anschauung oder die nur analytische Natur der Reflexion leugnen will, so sind jene Voraussetzung und diese Tatsache schlechterdings unvereinbar.

Die Paradoxie dieses Verhältnisses wurde der Grund des Streits zwischen den Rationalisten und Empiristen. Die notwendigen Wahrheiten der Metaphysik lassen sich nicht auf Sinnesanschauung gründen, so lehrt mit Recht der Rationalismus. Aber, lehrt ebenso richtig der Empirismus, aus der Reflexion können sie unmöglich entspringen; denn diese ist für sich leer und ohne Gehalt und kann nur aus gegebenen Wahrheiten Konsequenzen ableiten oder beweisen, gemäß den analytischen Regeln der Logik. Dies Dilemma bildet das Thema des Humeschen Zweifels. Hume ging unbefangen von demselben Vorurteil aus. Er wies nach, daß jeder Schluß von der Wirkung auf die Ursache und von der Ursache auf die Wirkung das Kausalitätsgesetz bereits a priori voraussetze, und zeigte mit großer Klarheit an diesem Beispiel, daß die apodiktische Erkenntnis nicht aus dem Sinn entspringen könne, denn sonst wäre sie nicht apodiktisch. Aber die Reflexion kann wiederum nur analytisch Begriffe zergliedern. Bei der Kausalität gehe ich aber über den betreffenden Begriff hinaus und behaupte seine notwendige Verknüpfung mit einem anderen, der nicht in ihm enthalten ist. Also kann sie auch nicht aus der

Reflexion entspringen. Folglich ist — auf Grund jenes Vorurteils — apodiktische Erkenntnis unmöglich und, sofern die Sinne die einzige Erkenntnisquelle sind, eine Täuschung aus empirischen Gründen.

Humes Zweifel bezog sich also garnicht unmittelbar auf die objektive Gültigkeit der metaphysischen Erkenntnis, sondern zunächst nur auf ihren Ursprung, d. h. auf den subjektiven Grund ihrer Möglichkeit. Es mußte ihre psychologische Möglichkeit begreiflich gemacht werden, ehe man über ihre objektive Gültigkeit füglich verhandeln konnte[1]. Beruht also der Humesche Zweifel auf einem nicht nur berechtigten, sondern auch unvermeidlichen psychologischen Problem, so folgt, daß er auch nur auf dem Boden der Psychologie seine Auflösung finden kann.

36. Kant widerlegte nun de facto Humes Resultat, ohne freilich bestimmt genug das zu Grunde liegende Vorurteil anzugreifen, am Beispiel der Mathematik. Die mathematischen Urteile sind, wie Hume sah, apodiktisch, aber, wie er nicht sah, synthetisch. Also giebt es apodiktische Synthesis[2].

---

[1] So sagt Kant selbst: „Es war nicht die Frage, ob der Begriff der Ursache richtig, brauchbar und in Ansehung der ganzen Naturerkenntnis unentbehrlich sei, denn dieses hatte Hume niemals in Zweifel gezogen; sondern ob er durch die Vernunft a priori gedacht werde, und, auf solche Weise, eine von aller Erfahrung unabhängige innere Wahrheit habe. Es war ja nur die Rede von dem Ursprunge dieses Begriffs, nicht von der Unentbehrlichkeit desselben im Gebrauche: wäre jener nur ausgemittelt, so würde es sich wegen der Bedingungen seines Gebrauches, und des Umfangs, in welchem er gültig sein kann, schon von selbst gegeben haben.“ (Prolegomena. Einleitung).

[2] Diese von vielen Philosophen noch heute umstrittene Frage nach der analytischen oder synthetischen Natur der mathematischen Urteile ist — wenn nicht schon durch Kant selbst — auf Grund der kritischen Untersuchungen der neueren Mathematik als erledigt zu betrachten, indem durch diese Untersuchungen für

Die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori wird also durch das Faktum bewiesen. Die Frage kann also nur noch die sein, wie sie möglich sind.

Hume selbst, wenn er der Voraussetzung der Kausalität die Allgemeingültigkeit absprach, indem er ihren Ursprung aus der gewohnheitsmäßigen Erwartung ähnlicher Fälle ableiten wollte, verwickelte sich in Widersprüche mit seiner eigenen klaren Nachweisung, daß die Kausalität Voraussetzung jeder Erklärung sei. Denn indem er sie aus der Gewohnheit erklären will, macht er die Gewohnheit zu ihrer Ursache, setzt also bereits die Gültigkeit des Kausalgesetzes voraus.

Sehen wir aber von diesem Widerspruch ab, so ist diese noch heute in der Psychologie populäre Erklärung auch psychologisch unzulänglich. Denn die Erwartung ähnlicher Fälle beruht nicht allein auf Association, sondern setzt selbst bereits, wenn auch ursprünglich dunkel, zu ihrer Möglichkeit die Vorstellung eines Kausalverhältnisses voraus. Die Association vermag nämlich wohl zu erklären, wie mit dem Eintreten eines Sinneseindrucks die Erinnerung an einen früher darauf eingetretenen Eindruck entsteht, nicht aber die Erwartung, daß dieser Eindruck wiederum tatsächlich eintreten werde. Die Association kann für sich allein stets nur die Verbindung der Vorstellungen von Objekten, niemals aber die Vorstellung von der Verbindung der Objekte erklären.

---

die Richtigkeit der Kantischen Entdeckung des nicht-logischen Ursprungs der mathematischen Axiome ein endgültiger Beweis erbracht worden ist. Ich verweise hierfür, sowie auch für die Aprioritätsfrage, auf die oben erwähnte Abhandlung von G. Hessenberg.

Eine unparteiische, alle voreiligen Erklärungsversuche aus den Augen setzende Beobachtung der Tatsachen zeigt also die Unrichtigkeit von Humes empiristischem Resultat. Der Grund seines Zweifels aber ist dadurch noch keineswegs gehoben. Vielmehr erhebt sich dieser Zweifel nun nur umso eindringlicher von neuem, in der Frage: Wie kann Metaphysik wirklich sein, wenn weder der Sinn noch die Reflexion einen Grund ihrer Möglichkeit darbietet? In dieser Frage vereinigt sich das Interesse aller auf den Namen einer Wissenschaft Anspruch machenden Metaphysik mit demjenigen echter, von aller Sucht voreiligen Theoretisierens freier, empirischer Psychologie.

37. So richtig nun auch Kant in der Einleitung zur Kritik der reinen Vernunft und in den „allgemeinen Fragen“ der Prolegomena das Humesche Problem verallgemeinert und auf seinen klassischen Ausdruck gebracht hat, so verliert er doch in der Ausführung mehr und mehr den psychologischen Gesichtspunkt der Fragestellung aus dem Auge und gleitet allmählich wieder von dem Wege empirisch-psychologischer Kritik in einen logischen Formalismus hinüber. Er zeigte zwar negativ die Unzulänglichkeit der logischen Formen der Reflexion zur Metaphysik, durch den Beweis der Unmöglichkeit eines logischen Kriteriums materialer Wahrheit, blieb aber selbst ganz bei der Reflexion stehen und versuchte sogar selbst wieder einen Beweis der metaphysischen Grundsätze, den er den transcendentalen nannte. Sodaß, als man dann nach den Principien dieser transcendentalen Beweise fragte, man sich nur wieder auf die Anschauung zurückgewiesen sah. Und so kam es, daß seine Nachfolger sich wieder trennten und in eine Schule des Empirismus und eine Schule der intellektuellen Anschauung teilten.

Kants sogenannte transcendentale Beweise der metaphysischen Grundsätze aus dem Princip der Möglichkeit der Erfahrung sind indessen in Wahrheit gar keine Beweise, sondern nur regressive Aufweisungen. Wir weisen so durch logische Zergliederung der gegebenen Erfahrung die Kategorieen und Grundsätze als Bedingungen ihrer Möglichkeit auf. Gründet sich also die Erfahrung auf die metaphysischen Principien als auf die logischen Bedingungen ihrer Möglichkeit, so wäre es ein Cirkel, diese Principien aus dem Princip der Möglichkeit der Erfahrung als „oberstem Grundsatz“ beweisen zu wollen. Der Gebrauch und die Anwendung der metaphysischen Principien in der Erfahrung kann uns also wohl dazu dienen, diese Principien als Tatsache in unserer Erkenntnis aufzuweisen, nicht aber, sie als solche allererst möglich zu machen und ihrer Gültigkeit nach zu beweisen.

Kant überschätzt die Selbständigkeit der Reflexion. Es ist logisch und psychologisch gleich unmöglich, daß sich das Denken seine synthetischen Principien selbst erzeugen könnte. So wenig wie seinen Gehalt, kann sich das Urteil die Regel selbst geben, um diesen Gehalt zur Einheit zu verknüpfen. Die Norm, nach der die Reflexion den Gehalt, den ihr die Sinne liefern, verknüpfen muß, um nicht nur zu denken, sondern zu erkennen, muß ihr von der Vernunft ursprünglich vorgeschrieben sein. Die Reflexion kann uns also nur das wiederholende Bewußtsein um die Einheit und Notwendigkeit unserer Erkenntnis, nicht aber die Erkenntnis der Einheit und Notwendigkeit selbst geben. Diese ursprüngliche, von der mittelbaren Erkenntnis der Reflexion schon vorausgesetzte Erkenntnis der Vernunft ist aber keine Anschauung; denn sie kommt uns nur mittelbar, nur durch Reflexion zum Bewußtsein. Es giebt also eine für sich dunkle, nur durch die Reflexion aufzuklärende unmittelbare Erkenntnis der Vernunft, die der Grund der Apodikticität in unseren Urteilen ist. Sie ist jenes verborgene „X, worauf sich der Verstand stützt", und das den Grund der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori aus bloßen Begriffen bildet.

Der erste Grund der Wahrheit in unserer Erkenntnis fehlt also bei Kant. Der Grund der Möglichkeit der Erfahrung liegt in den metaphysischen Grundsätzen, und diese sollen ihre Gewähr wieder in der Ermöglichung der Erfahrung finden. Er hat die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft nicht finden können und versucht stattdessen, die Reflexion sich selbst ihre Wahrhaftigkeit verbürgen zu lassen durch die analytische Beziehung zwischen der Erfahrung und ihren Grundsätzen. Im Faktum der Erfahrung hatte er den festen Widerhalt gegen den Skepticismus gefunden; durch Beziehung auf die gegebene Erfahrung konnte er dem a priori die Realität wiedergeben, die Hume ihm als Beziehung auf die Dinge genommen hatte. Wie er ebenso die Wahrheit des Glaubens als Bedingung der Realität gebotener Sittlichkeit aufwies, die er ihm als selbständiger Überzeugung absprach. Wie er dagegen ein objektives Princip des Geschmacks nicht finden konnte, in der Reflexion nämlich, in der allein er es suchte. — Diese Darstellung ist aber offenbar nur ein Notbehelf gegen den Empirismus, dessen Forderung, alle Wahrheit, die ihren Gegenstand nicht in der Erfahrung aufzeigen kann, zu beweisen, er noch nicht überwunden hatte. Es ist nur ein vorläufiger Standpunkt, wie er sich aus seiner einerseits polemischen, andererseits durchaus abhängigen Stellung zu Hume erklärt. Er zeigt damit nur, daß die Möglichkeit des Faktums der gegebenen Erfahrung und der gebotenen Sittlichkeit ein System metaphysischer Grundsätze postuliert, das er zwar auch vollständig aufgewiesen hat, aber ohne sich zu dem eigentlichen Grunde ihrer Möglichkeit hindurchfinden zu können. Angeborene Ideen sollten es nicht sein. Aber was denn sonst? Das hat er nicht tiefer erforscht. Obgleich er auch hierzu einen gewissen Anfang gemacht hat, mit seiner Nachweisung, daß alle analytische Einheit des Bewußtseins bereits irgend eine synthetische voraussetze, in seiner Lehre von der Identität der Apperceptionen. So sehr er sich aber auch bemüht, diese „subjektive Deduktion“ von der „objektiven“ zu unterscheiden, so hat er doch, infolge des Mißverständnisses des Transcendentalen, ihre psychologische Natur verkannt und ihr, aus Furcht in die „physiologische Ableitung“ zu geraten, eine irreführende objektive Wendung gegeben. — So hat er uns mit seiner Arbeit gleichsam nur ein Problem, ein Rätsel in die Geschichte der Philosophie geworfen, dessen Auflösung ihm selbst verborgen geblieben ist.

38. Dieser Mangel mußte sich bald fühlbar machen. Man bemerkte auch, daß man zur Auflösung dieses Rätsels über die für sich gehaltlose Reflexion hinausgehen und nach einem von ihrer Mittelbarkeit unabhängigen Grunde der Apodikticität suchen müsse. Bei dem zu Grunde liegenden Vorurteil, alle unmittelbare Erkenntnis sei Anschauung, mußte sich aber diese an sich richtige Forderung zu der fehlerhaften Aufgabe gestalten: man müsse die Reflexion, als zur Philosophie untauglich, aufgeben, um durch Anschauung, die dann freilich nicht sinnlich sein durfte, zur Philosophie zu gelangen. Da wir indessen eine solche intellektuelle Anschauung nicht besitzen, so mußte man sich insgeheim zu diesem Unternehmen doch der logischen Formen der Reflexion bedienen; man nahm diese Formen nur für mehr als sie sind, und so ge-

schah es, daß man unvermerkt nur wieder in den Fehler zurückfiel, aus den leeren logischen Formen metaphysischen Gehalt erzwingen zu wollen, und dadurch gerade den Fehler, den man vermeiden wollte, auf die Spitze trieb.

Auf der anderen Seite machte sich im Gegensatz zu diesem Rückfall in den Platonismus naturgemäß wieder das von Kant unüberwundene — oder doch nur ad hominem widerlegte — Humesche Vorurteil geltend. Aus der tatsächlich sinnlichen Natur unserer Anschauung und aus der tatsächlichen Leerheit und Mittelbarkeit der Reflexion zog man den Schluß auf die Unmöglichkeit metaphysischer Erkenntnis. So ist es gekommen, daß man in der Psychologie bei dem Humeschen Empirismus stehen geblieben ist und, die Belehrung der Tatsachen verschmähend, an dem fundamentalen dogmatischen Vorurteil festgehalten hat. Man hat diese Hypothese zu einem Axiom umgestellt, und so hat sich das Faktum der metaphysischen Erkenntnis, das zu dem Humeschen Problem herausgefordert hatte, ganz aus dem psychologischen Gesichtskreis verschoben. Indem aber die moderne Psychologie vor diesem Faktum die Augen verschließt, hat sie zugleich die vornehmste Aufgabe, die ihr Begründer ihr stellte, aus den Augen verloren.

So führte die Konsequenz des gemeinsamen Vorurteils zur Erneuerung des Streits der Platoniker und Aristoteliker.

Wo aber die wissenschaftlichen Interessen überwogen, da mußte naturgemäß wieder der Empirismus über den Platonismus die Oberhand gewinnen. Wer daher heute noch das Recht der Philosophie aufrecht erhalten will, der sieht sich wieder auf die bloße Reflexion zurückgedrängt. Das tätige Princip der Reflexion ist aber der Wille. Indem man daher die Willkürlichkeit der

Reflexion mit der Spontaneität des Erkennens selbst verwechselt, wird man darauf geführt, sich auf den **W i l l e n** als höchstes Princip zu berufen. Die Bestimmungsgründe des Willens aber sind Zwecke. So gelangt man zu dem Versuch, die philosophischen Principien als Mittel zur Erreichung des Zwecks der Wissenschaft oder als „Postulate des Strebens nach vollkommener Erkenntnis“ — teleologisch — zu begründen. Wobei aber immer die Frage unbeantwortbar bleibt, woher die für sich gehaltlose Reflexion diesen Zweck erhält und woher sie, wenn er ihr selbst gegeben wäre, die Mittel zu seiner Erfüllung hernimmt[1].

39. Darin stimmt also das Resultat, das **H u m e** aus den Voraussetzungen der Aristotelischen Logik zog, daß auf Grund dieser Voraussetzungen metaphysische Urteile unmöglich sind. Anstatt also dieselben mit **K a n t** beweisen zu wollen, schließen wir vielmehr umgekehrt: Ihre Wirklichkeit beweist ihre Möglichkeit. Folglich muß die Voraussetzung der Aristotelischen Logik

[1] Unbeantwortbar —, wenn man nicht den kritischen Weg der Vergleichung von Erkenntnissen unter einander verlassen und sich auf eine Theorie des Verhaltnisses der Erkenntnis zum Gegenstande einlassen will. So drängt also auch diese Ansicht über die bloße Reflexion hinaus, aber ihr Vorurteil erlaubt ihr ein Hinausgehen über die Reflexion nur durch ein Hinausgehen über die Erkenntnis überhaupt. Eine Theorie der Möglichkeit der Erkenntnis aber liegt jenseits möglicher Wissenschaft, und so weist denn auch diese Ansicht nur wieder an den Mysticismus zurück. Die Vertreter dieser Teleologik tun daher sehr Unrecht, sich auf Kant zu berufen. Denn sie sind dem obersten Gesetz der Sokratisch-Kantischen Forschungsweise untreu geworden, welches gebietet, das Gesetz der Wahrheit nicht jenseits der Erkenntnis, sondern in der Erkenntnis selbst zu suchen. Es zeugt vielmehr von besserem historischen Verständnis, wenn neuere Schüler dieser Lehre auf Platon und Fichte zurückgehen. Denn der Kriticismus hat seinen Ursprung allein bei Sokrates und bei Kant. Platon und Fichte dagegen sind bereits von dem strengen Grundgedanken kritischer Wissenschaft abgewichen.

falsch sein. Es giebt eine unmittelbare Erkenntnis nicht-sinnlicher Natur.

Wenngleich wir aber dies dem Platonismus zugestehen, so müssen wir doch mit den Aristotelikern gegen ihn sagen: Intellektuelle Anschauung besitzen wir aber nicht; wir können die Reflexion nicht entbehren. Die unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft ist keine Anschauung, sondern sie kommt uns einzig durch **Reflexion** zum Bewußtsein.

So allein gelingt es, den Fehler des Aristoteles zu verbessern, ohne in den des Platon zurückzufallen. Ihr sonst unversöhnlicher Streit erledigt sich, sobald wir ihr gemeinsames Vorurteil fallen lassen, das Vorurteil, daß wir keine andere unmittelbare Erkenntnis besitzen als die Anschauung. Die Entdeckung dieser nicht-anschaulichen unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft ist der Leitstern, der allein die Wissenschaft bewahren kann vor den Klippen des Empirismus einerseits und des neoplatonischen Mysticismus andererseits.

Metaphysik als Wissenschaft kann nichts anderes sein als die Aufklärung dieser unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft. Kritik der Vernunft ist das Werkzeug zu dieser Aufklärung. Ihr Geschäft ist die Deduktion der Grundsätze, d. h. ihre Begründung durch die Aufweisung des Grundes ihrer Möglichkeit in der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft.

In der dogmatischen Voraussetzung, alle unmittelbare Erkenntnis sei Anschauung, finden wir also zugleich den tiefsten Grund des alle Philosophie zerstörenden Empirismus. Durch alle Beweise kann die Reflexion nie neue Erkenntnis schaffen, sondern nur die gegebene aufklären. Also können wir uns durch sie keine Erkenntnis erwerben, die nicht schon in der unmittelbaren Erkenntnis, von der wir ausgingen, enthalten war. Ist aber diese unmittelbare Erkenntnis Anschauung, so folgt unwidersprechlich, daß uns metaphysische Erkenntnis unmöglich sein muß.

Die Ohnmacht unserer gesamten Philosophie gegenüber der zerstörenden Macht des Empirismus hat also ihren Grund darin und nur darin, daß ihr eigenes Gebäude zuletzt auch auf jenem fundamentalen Dogma des Empirismus erbaut ist. Dies ist der Grund, weshalb sich der Empirismus allen noch so treffenden Gegenargumenten zum Trotz behauptet. Denn ehe ihm nicht jenes Fundament entzogen ist, hat man ihm nichts entgegenzusetzen als Inkonsequenz. Aller Kampf gegen den Empirismus bleibt daher aussichtslos und aller Erfolg in diesem Kampfe trügerisch, solange man dieses Fundament bestehen läßt. Soll es zu einer ernsthaften Überwindung des Empirismus kommen, so wird man sich entschließen müssen, sein Grunddogma selbst aufzugeben.

40. Wir kommen also zu folgendem Resultat. Unter Voraussetzung des Dogmas, alle Erkenntnis sei entweder Anschauung oder Reflexion, muß unvermeidlich die an sich richtige Maxime der Aufklärung, durch Reflexion zur Metaphysik zu kommen, die fehlerhafte Form des logischen Dogmatismus annehmen, durch die Reflexion die metaphysische Erkenntnis selbst zu erzeugen und demgemäß sie zu beweisen. Als ob sich durch das Vermögen der Aufklärung die aufzuklärende Wahrheit selbst entwickeln ließe. Ein Verfahren, das an der eigenen Inkonsequenz notwendig scheitern und die gesamte metaphysische Gesetzgebung dem Skepticismus preisgeben muß. Das Fehlschlagen dieses Unternehmens führt daher zu der Alternative, entweder (mit dem Empirismus) auf alle metaphysische Wahrheit zu verzichten, oder (mit dem Mysticismus) den wissenschaftlichen Weg der Aufklärung zu verlassen und, unter Verwerfung der Reflexion, als eines zur Metaphysik

untauglichen Mittels, auf dem Wege intellektueller Anschauung die Wahrheit zu suchen. So erzeugt das Scheitern des logischen Dogmatismus den Streit des empiristischen Skepticismus und des neoplatonischen Mysticismus.

Auf Grund des — infolge der Unkenntnis des konstitutiven Princips der Metaphysik — noch heute die Logik beherrschenden Vorurteils, die Methode der Begründung der Urteile sei entweder die Demonstration oder der Beweis, ist also Aufklärung undurchführbar und Metaphysik als Wissenschaft bleibt ein konsequenter Weise unauflösliches Problem.

Die Auflösung dieses Problems besteht in der Entdeckung der nicht-anschaulichen unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft. Diese Entdeckung und die durch sie erreichte endgültige Auflösung des Humeschen Problems verdanken wir Fries. Durch diese Entdeckung wurde zuerst der Grund und die Möglichkeit der Sokratischen Verbindung des Mißtrauens gegen das eigene Wissen mit dem Vertrauen zur Wahrheit klar und verständlich. Der Besitz der Wahrheit, den der Dogmatiker fordert, gehört der Vernunft, damit jedoch noch nicht dem Bewußtsein, das, wie der Skeptiker einsieht, für sich leer ist. Aber dieses hat die Möglichkeit, sich durch Reflexion der Vernunfterkenntnis zu bemächtigen und sie im Urteil auszusprechen. Diese Entdeckung allein ist im stande, die Philosophie zu einer evidenten Wissenschaft zu erheben und den ewigen Frieden in ihr herbeizuführen. Das ist die Leistung der kritischen Methode, daß sie die Aufklärung vollendet und eben damit zugleich überwindet. Denn sie zeigt, daß die Reflexion zwar nicht die notwendigen Wahrheiten verbürgen könne, zeigt aber zugleich den Weg, wie durch Reflexion die Reflexion zu überwinden sei.

Anhang.

Über das Verhältnis des sogenannten Neukantianismus zu Fries' Neuer Kritik der Vernunft.

Fassen wir, um unsern Standpunkt historisch zu fixieren, die Resultate unserer Untersuchungen zusammen, so hat sich uns als das allein richtige Verfahren zu philosophieren die von Kant entdeckte Kritik der Vernunft herausgestellt. Die Kritik der Vernunft aber muß, so fanden wir, nach psychologischer Methode bearbeitet werden. Damit kommen wir auf die Wendung zurück, die Fries dem wissenschaftlichen Philosophieren gegeben hat. Wir kommen zurück, sage ich. Denn mit der Forderung psychologischer Kritik treten wir in schärfsten Gegensatz zu der herrschenden Ansicht, wie sie am nachdrücklichsten gerade von denen vertreten wird, die ihre Lehre an den Namen Kants anknüpfen. Wenn auch heute von einer angesehenen Schule die Rückkehr zu Kant gefordert und versucht wird, so hören wir doch nichts von einer Anknüpfung an Fries. Und doch war es gerade Fries, der schon vor hundert Jahren die Methode der Vernunftkritik wieder aufnahm und mit ihrer Hülfe die Fortbildung der Philosophie unternahm. Wie erklärt es sich da, daß wir bei denen, die eine Erneuerung des Kantianismus zu erstreben behaupten, keiner wissenschaftlichen Prüfung — weder einer Anerkennung noch Widerlegung, ja meist nicht einmal einer historischen Beachtung des Philosophen begegnen, der zuerst und bis auf den heutigen Tag allein durch Erneuerung des Unternehmens der Vernunftkritik der Kantischen Philosophie eine neue Grundlage geschaffen hat? Offenbar eben daraus, daß sie, wie sich uns gezeigt hat, die psychologische Natur der Kritik verkennen. Den letzten Grund aber dieses Verkennens hatten wir in dem Mißverständnis des Begriffs des Transcendentalen gefunden. Nun hat aber gerade Fries seine Reform der Kritik auf die Prüfung eben dieses Begriffs und auf die Berichtigung des Mißverständlichen in ihm gegründet. Wie kommt es nun, daß die „Neukantianer" sich nicht von Fries über dieses Mißverständnis haben belehren lassen? Nur daher, daß sie, wie eine Vergleichung ihrer Schriften zeigt, es vorgezogen haben, statt seine Kritik der Vernunft zu studieren, die traditionelle Fabel von Fries' Psychologismus nachzusprechen. In der Tat ist diese Fabel, seit Fischer[1] sie erfunden hat, ganz allgemein treuherzig weiter erzählt worden.

---

[1] K. Fischer. Die beiden Kantischen Schulen in Jena. Rede zum Antritt des Prorektorats. 1862.

Nur hier nebenbei möchte ich auf eine ebenso wenig bekannte wie für die Geschichte der Philosophie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts folgenreiche Tatsache aufmerksam machen. In der eben genannten Schrift findet sich neben der oben beleuchteten groben sachlichen Mißdeutung auch ein schwerwiegender historischer Irrtum. Es heißt nämlich daselbst S. 6: „Ich kehre zurück zu den jenaischen Professoren, die auf dem hiesigen Katheder die Kantische Philosophie entwickelt und fortgebildet haben. Diese Entwicklungsgeschichte umfaßt einen Zeitraum von 56 Jahren, der mit dem Auftreten des älteren Reinhold beginnt und mit dem Tode von Fries endet." — Die Reihe der Professoren, die auf dem Katheder von Jena die Kantische Philosophie entwickelt und fortgebildet haben, endet aber keineswegs mit Fries, sondern vielmehr erst mit Ernst

So lesen wir bei einem unserer geachtetsten Forscher im Gebiete der Geschichte der Philosophie: „Der Psychologismus, wie ihn etwa die Fries und Beneke darstellen, oder wie er sich in der völkerpsychologischen Richtung neu entwickelt hat, verdankt die große Überlegenheit, die er den entsprechenden früheren Theorieen gegenüber zweifellos besitzt, lediglich dem Anschluß an die kritische Philosophie. Das ist die Größe des Kantianismus, daß er alle seine Gegner veredelt hat.“ [1] Dem gelehrten Geschichtsschreiber der Philosophie scheint bei dieser seiner Gegenüberstellung kritischer und genetischer Methode ein kurzer, aber lehrreicher Ausspruch von Fries entfallen zu sein: „Aber das versteht Herr Beneke wieder nicht, weil ihn seine unglückliche genetische Psychologie irre macht. So versteht er Kants Ausdruck ‚Erkenntnis rein a priori‘ gar nicht. Er hält ihn für einen genetischen Begriff . . .“ [2]

Friedrich Apelt, der, bis zu seinem frühzeitigen Tode im Jahre 1859, also noch zu eben der Zeit, in der Fischer dort seine Lehrtätigkeit begann, in Jena die kritische Philosophie lehrte. Die Verdienste dieses Mannes um die Fortbildung der Kantischen Philosophie verschweigt Fischer in seiner Rede. In seiner Geschichte der Philosophie findet sich auch nicht einmal mehr Apelts Name. Nur durch diese, die gebührende Beurteilung von seiten des unparteiischen Geschichtsschreibers noch erwartende Handlungsweise ist es ihm gelungen, das Wirken und die Verdienste des letzten rechtmäßigen Vertreters der Kantischen Schule aus der geschichtlichen Überlieferung zu streichen.

Es ist das Verdienst Ernst Halliers, das von Apelt hinterlassene wissenschaftliche Besitztum gegenüber der allgemeinen Nichtachtung von seiten der zeitgenössischen Philosophen in Schutz genommen und der Nachwelt übermittelt zu haben. (Namentlich: Kulturgeschichte des 19. Jahrhunderts. 12. Abschnitt. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Schule. § 2. Ernst Friedrich Apelt und die Theorie der Induktion.) Erst eine Zeit, die den Wert dieses Besitztums zu schätzen wissen wird, wird auch die Verdienste des Mannes zu ehren wissen, dem sie die Erhaltung des ihr überkommenen Erbes verdankt.

[1] Windelband. Präludien. 1884. Kritische oder genetische Methode? S. 248.

[2] J. F. Fries. Die Geschichte der Philosophie. Bd. 2. 1840. S. 514.

Mit derselben Unkenntnis des Gegenstandes ausgerüstet, unternimmt es Riehl die Friessche Methode anzugreifen[1]. So führt er denn seine Streiche überall nur gegen ein Phantom, das außer in seiner Einbildung nie und nirgend existiert hat. Das Folgende dürfte hinlänglich sein, um diese Behauptung zu beweisen.

Riehl sagt (S. 294):

„Ich verstehe unter psychologischem Vorurteil, kein Vorurteil Kants, sondern ein Vorurteil seiner Ausleger und Kritiker; die Behauptung, die kritische Philosophie sei auf Psychologie gegründet, oder die Forderung, sie solle es sein, obschon sich Kant selbst des anthropologischen Charakters seiner kritischen Untersuchungen nicht deutlich bewußt gewesen sei. Die letztere Forderung wird von Fries und seiner Schule erhoben, die erstere Behauptung hat besonders Herbart zu ihrem Vertreter. Vorerst muß gegen Fries erklärt werden, daß eine psychologische Grundlegung der Kritik ganz und 'gar ihrem eigenen Vorhaben widerstreite."

Vorerst muß Fries gelesen werden, ehe man daran geht, ihn zu widerlegen. Derartig vage und unbestimmte Forderungen hat Fries nicht erhoben. Vielmehr fordert er, daß der Aufstellung des Systems der Philosophie eine Kritik der Vernunft vorhergehe, und beweist, daß diese Kritik eine psychologische Wissenschaft sei. Eine Philosophie. die dieser Forderung genügt, heißt eben darum kritische Philosophie. Die Kritik aber, lehrt er, sei nicht selbst Philosophie, sondern das Philosophieren, um zur Philosophie zu gelangen[2]. Fries hat also allerdings die „psychologische Grundlegung der Kritik" behauptet; die Be-

---

[1] A. Riehl. Der philosophische Kriticismus. Bd. 1. 1876.

[2] J. F. Fries. System der Metaphysik. § 27. S. 155.

hauptung aber, daß durch ein solches Verfahren die Philosophie auf Psychologie gegründet werde, ist irreführend und, wie Riehl sie in Anspruch nimmt, falsch.

Riehl erklärt nämlich, daß eine psychologische Grundlegung der Kritik ganz und gar ihrem eigenen Vorhaben widerstreite, und begründet diese Erklärung folgendermaßen:

„Wäre die Kritik auf Psychologie oder Anthropologie gegründet, so würde sie sich auf einen Teil der Erfahrung stützen.“ — Ganz zweifellos würde die Kritik das tun. Warum sollte sie auch wohl nicht? — „Sie würde nicht die Prüfung der Bedeutung und Tragweite der allgemeinen Erfahrungsbegriffe sein können. Sie würde vielmehr die Gültigkeit dieser Begriffe für den Umkreis der persönlichen und überhaupt der psychologischen Empirie voraussetzen.“

Gewiß werden wir die Gültigkeit dieser Begriffe voraussetzen. Dabei begehen wir aber durchaus keinen Cirkel. Denn die Kritik will ja garnicht die Gültigkeit dieser Begriffe beweisen, sondern sie nur als solche aufweisen, nämlich als Begriffe, die wir für alle Erfahrung voraussetzen müssen, die Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung sind. Versteht Herr Riehl unter der „Prüfung der Bedeutung und Tragweite der allgemeinen Erfahrungsbegriffe“ etwas anderes, so ist es seine Schuld, wenn eine solche Prüfung in einen Cirkel gerät. Die Kritik der Vernunft von Kant und Fries hat mit einer derartigen Prüfung keine Gemeinschaft.

„Die innere Erfahrung hat vor der äußeren in Bezug auf die Festigkeit und die Evidenz ihrer Grundlagen Nichts voraus, wohl aber steht sie derselben in Bezug auf die Anwendbarkeit der logischen Erfahrungsgrundsätze bei weitem nach.“

Eben dieser vermeintliche Mangel ist einer der Hauptvorzüge, durch die sich die innere Erfahrung als einen Leitfaden der

Spekulation empfiehlt. Denn wir umgehen dadurch den Streit um die philosophischen Principien und setzen an seine Stelle den viel sichereren Weg der Beobachtung.

„Subjektiv notwendig ist die Hallucination so gut wie die Wahrnehmung eines wirklichen Gegenstandes.“ (S. 297.)

Fries' Kritik behandelt aber garnicht die Frage, welche Vorstellungen „subjektiv notwendig“ sind, sondern die Frage, welche Vorstellungen in der reinen Vernunft entspringen.

„Der Begriff der Erfahrung ist der feste Grund, die einzige Voraussetzung der Kantischen Erkenntnistheorie.“ (S. 303.)

Also aus einem einzigen Begriff hätte Kant seine ganze Erkenntnistheorie entwickelt? Derselbe Kant, der nachgewiesen hat, daß aus einem Begriff nur analytische Urteile entspringen und daß aus bloßer Logik keine Wissenschaft möglich ist?

„Die beiden Fragen: wie entstehen Vorstellungen und: sind Vorstellungen giltig, mit dem Objekte übereinstimmend, d. i. enthalten sie gegenständliches Wissen, sind ganz verschiedene Fragen. Die letztere läßt sich durch keine Psychologie jemals entscheiden.“

In der Tat, das sind zwei verschiedene Fragen. Und auch darin hat Riehl Recht, daß sich letztere durch keine Psychologie jemals entscheiden läßt. Aber die Frage, ob unsere Vorstellungen mit dem Gegenstande übereinstimmen, läßt sich ebensowenig durch irgend eine andere menschliche Wissenschaft entscheiden. Denn es ist uns nicht möglich, aus unserer Erkenntnis herauszutreten und sie mit dem Gegenstande zu vergleichen; sondern darüber bleibt ein jeder dem Vertrauen zu seiner Vernunft überlassen. Suchen wir indessen nicht diese objektive Wahrheit der Übereinstimmung mit dem Gegenstande, sondern die innere Wahrheit der Übereinstimmung unserer Erkenntnisse unter einander, so wird uns, was die philosophische Erkenntnis betrifft, die Psychologie sehr gute Dienste leisten, um die mittelbare Erkenntnis der Reflexion mit der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft zu vergleichen und dadurch über die Gültigkeit der ersteren zu entscheiden.

„Die Formel des Problems der Vernunftkritik lautet: wie sind synthetische Urteile a priori möglich? Die Aufgabe, die in dieser Frage ausgedrückt wird, ist eine allgemein philosophische, oder in Kants Sprache eine metaphysische; demnach kann ihre Lösung nur aus Begriffen erfolgen.“ (S. 315.)

Diese Aufgabe ist aber durchaus keine philosophische, sondern eine kritische; wie Riehl selbst sagt, ein Problem der Vernunftkritik. Mit demselben Recht hätte Riehl sie eine mathematische nennen können, da sie sich auf die synthetischen Urteile a priori der Mathematik ebenso bezieht wie auf diejenigen der Philosophie. Am allerwenigsten hat Kant selbst die Torheit begangen, sie „eine metaphysische“ zu nennen. Wie sollte auch die Aufgabe eine metaphysische sein und ihre Lösung aus bloßen Begriffen erfolgen, da sie selbst erst entscheiden soll, ob Metaphysik, d. h. Wissenschaft aus bloßen Begriffen überhaupt möglich ist. Man sollte doch etwas genauer zusehen, ehe man einen Kant solcher Unbesonnenheit verdächtigt.

Auch H. Cohen hat sich durch den oben nachgewiesenen logischen Fehler zu einem Streite gegen den angeblichen „anthropologischen Irrtum“ [1] der Vertreter der psychologischen Auffassung der Kritik verleiten lassen. Ehe wir uns aber auf diesen Streit einlassen, können wir Folgendes feststellen.

---

[1] H. Cohen. Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. 1885. S. 298.

Wir haben bereits oben allgemein gezeigt, daß jeder andere als empirisch-psychologische Versuch einer Begründung der metaphysischen Principien auf das unmögliche Unternehmen hinausläuft, aus bloßer Logik Metaphysik zu machen. Dies können wir an dem von Cohen selbst gegebenen Beispiel einer vermeintlich nicht psychologischen Behandlung des kritischen oder — wie er es mit Vorliebe bezeichnet — transcendentalen Problems demonstrieren. Wir können zeigen, daß die Antworten, die wir hier auf diese Frage erhalten, nur entweder als leere analytische Sätze oder als verkannte psychologische Erklärungen aus innerer Erfahrung aufgefaßt werden können [1].

Wie lautet nämlich der „oberste Grundsatz", aus dem die Grundsätze „entspringen müssen" (S. 140)? — „Daß wir Notwendigkeit anerkennen wollen in demjenigen Gebiete unseres Bewußtseins, welches als Wissenschaft, als mathematische Naturwissenschaft ausgezeichnet ist." (S. 139.) — Dies ist ein analytischer Satz; oder wäre es nicht der Begriff der mathematischen Naturwissenschaft, die Verknüpfung der Wahrnehmungen nach notwendigen Gesetzen zu sein? Aus diesem analytischen Satz sollen die metaphysischen Grundsätze entspringen und ab-

---

[1] Schon Stumpf hat auf den tautologischen Charakter der Cohenschen Erklärungen hingewiesen. (Psychologie und Erkenntnistheorie. Abhandl. der phil. hist. Kl. der Kgl. Bayr. Akad. der Wiss. XIX. Bd. S. 465—516.) Andererseits sind die logischen Irrtümer der von Cohen gegen Fries gerichteten Polemik — soweit diese überhaupt auf logischen Fehlern und nicht auf falschem Referat beruht — bereits von Grapengießer für jeden Denkenden zur Genüge nachgewiesen worden. (Die transcendentale Deduktion. Zeitschr. für Philosophie und phil. Kritik. 65. Bd. Heft 1 u. 2, 66. Bd. Heft 1.) Da indessen die Ausführungen beider unbeachtet geblieben zu sein scheinen, habe ich hier versucht, von einem anderen, allgemeineren Gesichtspunkte aus, die Nichtigkeit der Cohenschen Argumentationsweise darzulegen.

geleitet werden? Oder sollte es anders gemeint sein, nämlich so: wir wollen Notwendigkeit anerkennen in einem Gebiete unseres Bewußtseins, und dadurch, daß wir sie anerkennen, machen wir es zur mathematischen Naturwissenschaft? Das aber wäre eine psychologische Tatsache, eine Erkenntnis aus innerer Selbstbeobachtung. Wir haben das Bedürfnis, notwendige Gesetze anzunehmen und ihnen gemäß den Gehalt unserer Sinnesanschauung zu verknüpfen; das wäre eine Tatsache, von der wir sehr wohl ausgehen könnten. Aber die obersten Naturgesetze werden nie und nimmer aus einer psychologischen Tatsache entspringen können. Das wäre ja gerade, was Cohen am meisten verabscheut, eine Verquickung der höchsten philosophischen Grundgesetze mit psychologischen Tatsachen. Und doch sehen wir hier deutlich, wie Cohen blindlings dieser Verquickung anheimfällt, so sehr er auch dagegen protestiert. Wie er auch die terminologische Fassung seines „obersten Grundsatzes" variiert, immer bleibt nur die Wahl, ob man ihn als einen leeren analytischen Satz oder als den verkappten Ausspruch einer psychologischen Selbstbeobachtung auffassen will. So gleich darauf: „Nur das allein kann Leitstern des Gesetzes sein: daß ein Gesetz walten solle in dem Gebiete der Erfahrung" oder „daß wir Gesetze haben müssen, sofern wir Wissenschaft haben wollen". (S. 591.) Natürlich ließe sich auch nicht einmal psychologisch irgend etwas daraus herleiten. Denn wenn ich die Gesetze nicht schon in meiner Vernunft besitze, so kann mir kein Wollen dazu verhelfen, sie mir auszudenken. Denn ich schaffe sie nicht durch meinen Willen, sondern mein Bewußtsein findet sie vor, allerdings nur, wenn es willkürlich reflektiert. Aber Willkürlichkeit der Reflexion ist von der Selbsttätigkeit der Vernunft grundverschieden. Man sieht auch hier wieder, wie nahe Cohen bei Fichte steht, ohne es selbst zu bemerken oder bemerken zu wollen. Und von seinem Standpunkt aus sind seine Einwürfe gegen Fichte in der Tat recht schwach und inkonsequent.

„Woher nehmen ‚wir selbst‘ dasjenige, was wir in die Dinge legen müssen, um etwas a priori an ihnen zu erkennen? Wenn jetzt die Antwort lautet: aus dem Bewußtsein, so denken wir das Bewußtsein als den Inbegriff der Mittel und Methoden, die jenes ‚Hineinlegen‘ ausmachen.“ (S. 142.) — Diese „Antwort“ giebt uns, in einem anderen Wort, die Frage rein zurück: Wir nehmen dasjenige, was wir in die Dinge hineinlegen, aus dem Inbegriff der Mittel und Methoden, die das Hineinlegen ausmachen. Indem wir aber diesem Inbegriff, dessen Herkunft erklärt werden sollte, den zweideutigen Namen „Bewußtsein“ geben, täuschen wir den ungründlichen Leser über die nichts besagende Leerheit dieser logischen Formel hinweg.

Nicht stichhaltiger sind die historischen Argumente, die dem Texte der Kantischen Kritik entlehnt werden.

„Der oberste Grundsatz heißt . . . vorzugsweise der der ‚Einheit der Apperception‘. Und auf daß der Ausdruck nicht psychologisch oder metaphysisch gefaßt werde, so lautet die Fassung: ‚Synthetische Einheit der Apperception‘“ (S. 142.) — Also der „systematische Gegensatz zur Materie“ (S. 141) soll nicht psychologisch gefaßt werden? Wenn Herr Cohen uns wenigstens darüber belehren wollte, welcher Gegensatz zwischen psychologisch und synthetisch bestände. Das ganze Raisonnement reiht nur eine willkürliche Behauptung an die andere.

Zum Beweise, daß in der Kantischen Kritik der reinen Vernunft „Sinnlichkeit kein Seelenvermögen“ bedeute, citiert Cohen Kants Satz: „Diese Fähigkeit (Receptivität), . . . Vorstellungen zu bekommen, heißt Sinnlichkeit“ und bemerkt dazu: „Es steht

Nichts von Kraft oder Vermögen in dieser Bestimmung.“ (S. 108.) — Aber leider hat Cohen versäumt, uns über den Unterschied von Fähigkeit und Vermögen aufzuklären. Vielmehr gebraucht er selbst (mit Kant) beide Worte als gleichbedeutend. So S. 301: „Solcher ursprünglicher Quellen, Fähigkeiten oder Vermögen der Seele nimmt Kant drei an: Sinn, Einbildungskraft und Apperception.“

„Von wirklichen Dingen, denen eine die Eindrücke derselben aufnehmende Subjektivität begegnete, ist nirgend die Rede.“ (S. 154.) — Auch nicht im folgenden, von Cohen selbst citierten Satze: „Die Wirkung eines Gegenstandes auf die Sinnlichkeit, sofern wir von demselben afficiert werden, ist Empfindung“? (S. 109.) — „Man hat Kant nicht zu lesen, sondern sich in ihn zu versenken“; so gebietet Herr Cohen seinen Schülern[1]. Ich dächte aber doch, dass derjenige, der andere über Kant zu belehren oder gar ihn selbst weiterzubilden beansprucht, besser täte, ihn zuvor zu lesen.

Nicht anders steht es mit folgender Interpretation: „‚Von Objekten afficiert werden‘ . . . bedeutet nichts anderes als die Anschauung . . . Auf ‚afficiert zu werden‘ folgt: ‚und dadurch unmittelbare Vorstellung derselben, d. i. Anschauung zu bekommen.‘“ (S. 165.) — Demnach lehrt also Kant, daß wir durch Anschauung Anschauung bekommen. Dies sind, dem „Genius“ Kant gegenüber, die Früchte jener „vollen Hingabe, ohne die sich kein Geist begreifen läßt, dem man nicht gleicht.“ (S. IX.)

---

[1] H. Cohen. Rede bei der Gedenkfeier der Universität Marburg zur hundertsten Wiederkehr des Todestages von Immanuel Kant. Marburger akademische Reden. 1904. Nr. 10. S. 30.

Wenden wir uns nun zu dem Angriff Cohens gegen den „anthropologischen Irrtum“ (S. 298) der Vertreter der psychologischen Kritik. Es „scheint“ ihm „zweckdienlich“ (S. 373), die Ansichten von Fries und Apelt zu „würdigen“, und zwar in folgender Weise.

„Die metaphysische Deduktion, wenn man sie nicht als Vorbereitung der transcendentalen einhält, läßt in der Tat der Vermutung und der Ansicht Raum, daß sie die psychologische Erklärung nicht nur, was ihre Aufgabe ist, einschränke, sondern daß sie dieselbe vielmehr fortführe und erfülle. Wenn sie die formalen Bedingungen der Erfahrung als die Formen des Bewußtseins nachweist, so liegt es freilich sehr nahe, hierbei an die des menschlichen, persönlichen zu denken, und nicht ausschließlich an die des wissenschaftlichen.“ (S. 374.) — Ohne mich hier auf einen Streit über die Mythologie vom unmenschlichen und unpersönlichen Bewußtsein einlassen zu wollen, frage ich vielmehr nur: Wo wäre es Fries eingefallen, daß die metaphysische Deduktion es mit einer „Erklärung“ zu tun habe? Das Phantom der Gefahr, die Cohen wittert, existiert überhaupt garnicht.

„Wenn man das ‚bewirkt werden‘ . . . anthropologisch versteht, so ist schon die Frage nach dem Bewirken dieser Analogie zwischen logischen und metaphysischen Formen unstatthaft und unverständlich.“

Die Behauptung der Unstatthaftigkeit dieser Frage hätte Cohen begründen sollen. Der Umstand, daß die Frage ihm unverständlich ist, braucht seinen Grund nicht in der Frage zu haben. Uns ist sie nicht nur verständlich, sondern wir haben auch begriffen, daß sie vielmehr einzig und allein „anthropologisch“ statthaft und verständlich ist.

„Fries dagegen will anthropologisch diese Analogie nur als solche begreifen; daher sucht und setzt er ein Drittes, in und an welchem jene beiden Formen analog werden.“ (S. 375.)

Fries setzt vielmehr überhaupt nichts; — die Abenteuer des transcendentalen Setzergeschäfts hat er seinem Kollegen Fichte überlassen — sondern er hat Tatsachen beobachtet und die Resultate seiner Beobachtung aufgeschrieben.

Es folgt dann eine Reihe von Citaten, ohne irgend einen Versuch einer ernsthaften Widerlegung, bis Seite 377, wo sich der Einwurf erhebt: „So zeigt diese Auffassung der transcendentalen Apperception selbst ihre Unzulänglichkeit, indem Fries zu ihrer Ergänzung einer ‚formalen Apperception‘ bedarf.“

Ein eigentümliches Kriterium der Unzulänglichkeit. Zeigt vielleicht auch die Kritik der reinen Vernunft selbst ihre Unzulänglichkeit, indem Kant zu ihrer Ergänzung einer Kritik der praktischen Vernunft bedarf? Aber überdies ist die Behauptung völlig unwahr, daß Fries die formale Apperception zur Ergänzung der transcendentalen eingeführt habe, da vielmehr bei Fries die formale Apperception nichts anderes bedeutet als das, was Kant unbestimmter die Einheit der transcendentalen Apperception nennt[1]. Daß in Fries' Vernunftkritik außer dem Buchstabencomplex t-r-a-n-s-c-e-n-d-e-n-t-a-l-e-A-p-p-e-r-c-e-p-t-i-o-n noch der andere f-o-r-m-a-l-e-A-p-p-e-r-c-e-p-t-i-o-n vorkommt, kann Herrn Cohen doch wohl nicht zu seiner Behauptung berechtigen.

„Als ‚Gedächtnis‘ wird die unmittelbare Erkenntnis bezeichnet.“ (S. 378.) — Es ist zu bedauern, daß Herr Cohen es unterlassen hat, die Stelle anzugeben, an der Fries einen so groben Fehler

---

[1] J. F. Fries. Neue Kritik der Vernunft. § 93.

begeht, da diese Stelle seinen Lesern bisher nicht bekannt geworden ist.

„Wäre es nicht klarer und tiefer, die Einheit nicht als Grund-Vorstellung, sondern als die Grundbedingung des Bewußtseins und somit der Erfahrung zum obersten Grundsatz derselben zu machen?" — Nicht klarer und tiefer wäre es, sondern Vermengung der Philosophie mit Psychologie, die Cohen um so ärger betreibt, je lebhafter er gegen sie prostestiert.

„Fries geht jedoch soweit in seiner anthropologischen Verblendung, daß er in die unmittelbare Erkenntnis auch das höchste Wertzeichen der Vorstellung setzt: die objektive Gültigkeit."

In der Tat; in der Unmittelbarkeit der Erkenntnis hat Fries ein Kriterium ihrer objektiven Gültigkeit entdeckt. Daß dies aber Verblendung sei, ist ein unbegründeter Vorwurf. Was haben derartige Behauptungen für einen wissenschaftlichen Wert? Unkundige mögen sich durch eine solche Behauptung blenden lassen; uns wird sie solange bedeutungslos erscheinen, bis man uns die Hinfälligkeit der Friesschen Entdeckung nachweisen wird. Zu diesem Nachweis hätte sich Herr Cohen freilich auf die Begründung einlassen müssen, die Fries der Sache gegeben hat. Das aber hat ihm nicht „zweckdienlich" geschienen.

Das sei der „Grundfehler dieser gesamten Ansicht, daß Fries . . . die empirisch-anthropologische Natur des unmittelbaren Bewußtseins zum Eckstein gemacht hat." (S. 379.)

Wenn Herr Cohen der Friesschen Unterscheidung der unmittelbaren Erkenntnis vom Bewußtsein nicht folgen kann oder will, so hätte er nichtsdestoweniger richtig referieren können und sollen. Freilich, wenn er seine „volle Hingabe" bereits an den „Genius" Kant verausgabt hat, was sollte ihn dann noch veranlassen, dem „anthropologisch verblendeten“ Fries diese schuldige Achtung zu erweisen[1].

Nach Vollziehung dieser Exekution wird der unglückliche Apelt auf das Prokrustesbett der Cohenschen Interpretationslogik gespannt. „Apelt macht diese transcendentale und formale Apperception zur ‚spekulativen Grundform aller metaphysischen Erkenntnis‘“. — Wo hätte Apelt solche Tollheit begangen? Anders kann ich die von Cohen Apelt untergeschobene Begriffsverdrehung nicht bezeichnen; denn sie ist für jeden, der auch nur eine halbwegs deutliche Vorstellung davon hat, was Apelt unter den Worten „transcendentale Apperception“, „formale Apperception“ und „spekulative Grundform“ versteht, schlechterdings sinnlos. Im übrigen wird Cohens Behauptung durch den ersten besten Satz aus Apelts äußerst klarer Darstellung der Apperceptionenlehre Lügen gestraft: „Die transcendentale Apperception ist das unmittelbare Ganze der Erkenntnis meiner Vernunft. Die ursprüngliche formale Apperception aber ist die unmittelbare Form jenes Ganzen.“ „Der ursprünglichen notwendigen Grundvorstellung unserer Vernunft d. i. der formalen Apperception können

[1] Eine ähnliche „Probe eines Urteils, das vor der Untersuchung vorhergeht,“ findet man bei R. Falckenberg. Geschichte der neueren Philosophie. 3. Aufl. 1898. S. 417f., 420. Dasselbe gilt von Dr. Max Scheler. Die transcendentale und die psychologische Methode 1900. S. 34. Desgleichen von Dr. Hermann Leser. Zur Methode der kritischen Erkenntnistheorie mit besonderer Berücksichtigung des Kant-Fries'schen Problems. 1900. Sowie von A. Hägerström. Kants Ethik. Upsala 1902. S. 191f.

Einen gewissen Fortschritt dem gegenüber bietet schon das allerdings auch erstaunlich flüchtige Elaborat von Dr. Theodor Elsenhans: Das Kant-Friesische Problem (1902), in welchem allen Ernstes Fries' Unterscheidung mittelbarer und unmittelbarer Erkenntnis als „mit dem psychologischen Tatbestand nicht vereinbar“ abgefertigt wird, welche Unvereinbarkeit freilich „keines weiteren Nachweises bedarf.“ (S. 42.)

wir uns nur stufenweis nach verschiedenen Verhältnissen bewußt werden: teils unmittelbar (durch den innern Sinn: Raum und Zeit), teils nur mittelbar (durch Reflexion: die Kategorieen). Raum und Zeit ist das klare d. i. anschauliche, die Verhältnisform der Kategorieen (d. i. die spekulative Grundform) das dunkle Stück der formalen Apperception." [1]

„So ist auch bei diesem Manne . . . infolge des anthropologischen Irrtums das Transcendentale zum Metaphysischen verblaßt." (S. 380.) — Verblaßt? Nein, nicht verblaßt, sondern ein für allemal abgetan ist das Vorurteil des Transcendentalen, und Psychologie und Philosophie sind endgültig geschieden.

„Und während die Einheit des Bewußtseins zeitlos gilt, weil sie der Zeit übergeordnet ist, erscheint die Apperception hier in den Raum eingefügt, als ‚hinter' dem Bewußtsein. Und diese lokalen und optischen Bestimmungen wiederholen sich durchgängig. ‚Im dunkeln Innern unsrer Erkenntnis' liegt die ursprüngliche formale Apperception ‚hinter dem Bewußtsein . . .'"

Man müßte annehmen, daß Herr Cohen zu scherzen beliebt — wenn dies nicht durch den Ernst dieser wissenschaftlichen Angelegenheit ausgeschlossen wäre. Es wäre dies einer der „Späße", von denen Cohen urteilt, daß sie „bei so wichtigen Fragen nicht bloß schlecht angebracht sind, sondern auch bei der groben Natur dieser Scherze kein Zeichen von geistiger Freiheit sein dürften." [2]

---

[1] E. F. Apelt. Metaphysik. § 45.

[2] H. Cohen. Logik der reinen Erkenntnis. S. 74.

Apelt sagt ausdrücklich: „Weil es keine anschauliche Form der Nebenordnung in innerer Erfahrung, kein Analogon des Raumes giebt, so giebt es auch keine anschauliche Stellengebung der gleichzeitig vorhandenen Tätigkeiten meines Innern und mithin auch keine leeren Stellen für die dunkeln Tätigkeiten meines Vorstellens und Erkennens. Hierin liegt die Unmöglichkeit einen Ort der Dunkelheit in meinem Innern anzugeben." (Metaphysik. § 45.)

— Aber gleichviel; die „lokalen und optischen Bestimmungen" sind verwerflich? Warum redet dann wohl Herr Cohen so viel von „logischen Örtern" (S. 467), von „Ausstrahlungen des Ichs" (S. 373), von „Entfaltungen der Apperception" (S. 373), von der „Gesichtsweite des a priori" (S. 352), und warum läßt er seine Grundsätze „die Wege der Erfahrung beleuchten" (S. 474)? Ja, noch mehr, warum „erscheint" bei ihm das „transcendental-a priori" „eingefügt" in den „Mutterleib" (S. 352) und „in der transcendentalen Apperception geboren" (S. 307)?

So verfährt Herr Cohen, wo es sich um rein historische Fragen handelt und wo er bestimmt zu kontrollierende Tatsachen referiert. Zur Charakteristik seiner Behandlung rein sachlicher Fragen wird neben dem oben Besprochenen folgendes Beispiel genügen.

„Im Geiste der transcendentalen Ästhetik könnte man dem Beispiele für das analytische Urteil entgegenhalten: daß ein Körper ausgedehnt sei, sei vielmehr ein synthetisches Urteil. Denn woher nähme ich dasselbe, wenn nicht aus der apriorischen Raumesanschauung. Nun ist aber daran gar kein Zweifel, daß in diesem Sinne das Urteil durchaus als synthetisch gelten muß." (S. 400.)

Den Begriff des Körpers nehme ich allerdings aus der Raumanschauung, aber nie und nimmer das Urteil, daß der Körper — d. h. das Ausgedehnte — ausgedehnt sei. Und darum ist und bleibt das Urteil ein analytisches. Die Kenntnis des Unterschiedes von Urteil und Begriff hat Kant freilich bei seinen Lesern vorausgesetzt.

Cohen selbst nennt es zwar beachtenswert (S. 401), wenn Kant zu dem analytischen Beispiele „Gold ist ein gelbes Metall" sagt: „Um dieses zu wissen, brauche ich keiner weiteren Erfahrung außer meinem Begriffe vom Golde“, läßt sich aber dadurch keineswegs hindern, gleich darauf zu schreiben: „Alle Sätze welche von Gegenständen der Erfahrung gelten wollen, sind synthetische.“ (S. 404.)

Welche Aufklärungen und welche Fortbildung der Kantischen Philosophie kann man von demjenigen erwarten, der noch nicht einmal den Unterschied der analytischen und synthetischen Urteile, dies ABC Kantischer Philosophie, gefaßt hat?

Doch hat sich Herr Cohen neuerdings selbst mit hinlänglicher Deutlichkeit über sein Verhältnis zur Logik erklärt: „Wir bekämpfen nicht nur ihr [der „sogenannten formalen Logik“] sachliches Recht; wir bestreiten auch ihre reale Existenz.“ [1] — Es ist zu hoffen, daß diese Erklärung recht bald die verdiente Berücksichtigung finden möge.

Schließlich stelle ich allen diesen Angriffen, die — wie ich nunmehr zu behaupten berechtigt und genötigt bin — lediglich aus unverzeihlicher Mißdeutung und Entstellung der von Fries mit größter Klarheit und Gründlichkeit entwickelten Lehre von der Deduktion hervorgegangen sind, noch eine Stelle aus Fries' Metaphysik — 1824 — entgegen [2]:

„Das Eigentümliche meiner Forderung der Deduktionen und die Berufung auf psychische Anthropologie, um diese Deduktionen zu geben, ist wiederholt auch von scharfsinnigen Männern mißverstanden und mein Philosophem darum widerrechtlich zu den

---

[1] H. Cohen. Logik der reinen Erkenntnis. 1902. S. 430.

[2] J. F. Fries. System der Metaphysik. § 23. S. 117f.

empirischen gerechnet worden. Der Grund dieses Mißverständnisses scheint mir darin zu liegen, daß in der Logik der Schule die Lehre von der Begründung der Urteile nicht gründlich genug behandelt war und daher meine Begründung der philosophischen Principien mit Beweisen derselben verwechselt wurde. Wer jetzt meine ausführlichern Erläuterungen der Sache ansieht, wird diesen Fehler nicht mehr begehen können."

II.

Über
Begriff und Aufgabe der Naturphilosophie.

Von

Ernst Friedrich Apelt.

Diese Abhandlung bildet den ersten Abschnitt der von **Apelt** im Wintersemester 1842—43 gehaltenen „Vorlesungen über Naturphilosophie", wie sie uns in der Nachschrift von **M. J. Schleiden** vorliegen. Bisher ist nur die Einleitung gedruckt worden. Sie wurde von **Ernst Hallier** in seine „Kulturgeschichte des neunzehnten Jahrhunderts" (Stuttgart 1889. S. 167 f.) aufgenommen. Ihm verdanken wir auch das Schleidensche Kollegienheft.

I.

Einleitung.

Ich habe für diesen Winter Vorträge über eine Wissenschaft angekündigt, welche vor ungefähr 40 Jahren plötzlich als ein glänzendes Meteor am literarischen Horizonte erschien, welche von den Kathedern von Jena aus einen durch Deutschland weithin schallenden Namen erlangte, dann aber eben so plötzlich wieder verschwand und seit längerer Zeit schon als verschollen betrachtet wird. So anmaßend und vielverheißend jene neue literarische Erscheinung aufgetreten war, so verächtlich sank sie in ihr Nichts zurück. Keine ihrer Verheißungen konnte sie erfüllen, keinen ihrer Lehrsätze rechtfertigen, und die Fortschritte der Wissenschaft dienten nur dazu, die traurige Verirrung aufzudecken, in welche sich ein ansehnlicher Teil der deutschen Gelehrtenrepublik verloren hatte. Dem ohnerachtet wage ich es, eine Wissenschaft aus ihrem Dunkel wieder hervorzuziehen, an welcher seitdem ein Makel haftete und welche gewissermaßen durch eine stillschweigende Übereinkunft von den Kathedern verbannt war. Die Aufgaben dieser Wissenschaft wurden indessen keineswegs damals zum ersten Male gestellt, sondern sie sind so alt, als die ersten Anfänge der griechischen Spekulation. Sie liegen auf einem Gebiet der menschlichen Erkenntnis, an welches Philosophie, Mathematik und Erfahrung gleiche und gemeinschaftliche Ansprüche haben und sich wechselseitig öfters zu verdrängen gesucht haben. Bald hat die eine, bald die andere dieser Erkenntnisweisen ausschließlich die Oberherrschaft und Gesetzgebung in der Naturphilosophie an sich zu reißen gesucht. Daher die Vielgestaltigkeit dieser Wissenschaft in den verschiedenen Perioden ihrer Ausbildung, daher der Streit um die Quellen und Principien derselben, der gegenwärtig noch nicht geschlichtet ist. Wir sehen vor uns zwei entgegengesetzte Versuche, die Naturphilosophie zu bearbeiten und sie zum Range einer exakten Wissenschaft zu erheben. Von diesen kann der eine die strengste Prüfung an der Erfahrung bestehen, der andere ist durch sie für immer widerlegt und abgewiesen worden. Die Erfahrungen von 40 Jahren, welche zur Belehrung hinter uns liegen, können uns darauf aufmerksam machen, daß kein anderer Weg zur Wahrheit führt, als der der strengen systematischen Wissenschaft, und daß die Wahrheit sich an denen rächt, die frevelnd oder unbesonnen die Belehrungen der Vorzeit verschmähen und im Rausche der Gedanken dasjenige zu erhaschen meinen, was nur auf dem bedächtigen und mühsamen Wege der Forschung erreicht werden kann. Ich spreche aber hier von Schelling und seiner Schule.

Diese Schule suchte in stolzer Selbstvermessenheit sich über die Schranken der menschlichen Erkenntnis zu erheben und durch intellektuelle Anschauung das Absolute selbst zu erfassen. Ohne Mathematik und ohne Erfahrung wollte sie die Natur der Dinge aus bloßen Begriffen ergründen; die ganze Physik sollte in eine spekulative Wissenschaft verwandelt werden. Sie verachtete die Astronomie, die Mechanik und alle Erfahrungswissenschaft und setzte an die Stelle der Naturgesetze die sogenannten Kategorieen der Physik, die in der Tat nichts sind als Überschriften zu leeren Kapiteln. Fragt man, was dieselbe für das Leben getan hat, so kann man getrost antworten, daß sie nicht nur kein Verdienst um die Förderung der menschlichen Kultur sich erworben, sondern die Fortschritte der Wissenschaften längere Zeit aufgehalten hat. Ganz anders als mit dieser sogenannten spekulativen Physik verhält es sich mit der mathematischen Physik.

Seit Newton die Gesetze der in der Natur wirkenden Kräfte entdeckte, haben in einer unübersehbaren Reihe von Entdeckungen und Erweiterungen die größten Geometer und Mechaniker aller Nationen eine Wissenschaft gegründet, welche durch ihre Wahrheit und durch die Aufschlüsse, die sie über die Geheimnisse der Natur giebt, ein ewiges Denkmal der Geistesgröße unserer Jahrhunderte bleiben wird. Mit bewundernswürdiger Genauigkeit haben diese fortbildenden Geister die Erscheinungen der Natur dem Kalkül unterworfen, haben mit Hilfe der Analysis des Unendlichen, diesem erstaunenswürdigen Werkzeug des menschlichen Geistes in Ergründung neuer Wahrheiten, in den himmlischen und irdischen Erscheinungen den unwandelbaren Gang eherner Gesetze erforscht und die Natur am Morgentore ihrer Schöpfungen belauscht. Alle Vorgänge am Himmel, den Bau der Welt, sowie die verschlungenen Wanderungen der himmlischen Körper fand man durch ein einziges Naturgesetz mit der größten Genauigkeit an die Regeln der Mechanik gebunden. Aus diesem ist man imstande, mit mathematischer Gewißheit die vergangenen und künftigen Zustände des Weltsystems zu bestimmen. Auf die nach diesem Gesetz geführten Berechnungen basieren sich die Vorhersagungen der Astronomen. Wie der Lauf der Gestirne die Zeiten teilt, wann und wie des Mondes Sichel sich füllen wird, wie die Sterne ihre Örter wechseln, wann und wo die Kometen sichtbar werden — alles das vermag die auf die Mechanik des Himmels gegründete Astronomie mit wahrsagendem Blick im Voraus zu bestimmen. Die Verdienste, welche sich diese Wissenschaft dadurch um die Ordnung des bürgerlichen Lebens, um die Beförderung der intellektuellen Kultur erworben hat, sind in die Augen fallend und brauchen nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Und doch sind dieses bei weitem noch nicht die größten Vorteile, welche die von der Schellingischen Schule so sehr verachtete Mechanik des Himmels dem Menschengeschlecht gewährt hat. In der Tat beruht die Verbindung der durch Meere geschiedenen Nationen sowie die Sicherheit des überseeischen Handels nur auf dieser tiefsten und ausgebildetsten aller menschlichen Wissenschaften, und ein einziges Blatt der „Mond-Distanzen" in Enckes astronomischem Jahrbuch hat einen ungleich grösseren Wert als alle Philosopheme, welche, unfähig einen solchen Gegenstand in seiner hohen Wichtigkeit zu fassen, mit stolzer Verachtung auf ihn herabsehen. Daß jemand bloß durch die Messung der scheinbaren Entfernung des Mondes von einem Sterne vermittelst eines kleinen tragbaren Instruments auf dem schwankenden Boden eines Schiffes bis auf eine deutsche Meile genau anzugeben vermag, wo er sich auf einem grenzenlosen Ozean befindet, muß Personen, die mit der physischen Astronomie unbekannt sind, als etwas Wunderbares erscheinen. Und doch wagt man täglich und stündlich Leben und Wohlstand mit vollkommenem Vertrauen auf diese wunderbaren Berechnungen, welche, wie nichts anderes wieder, zeigen, wie nahe die Extreme der höchsten Theorie und des praktischen Nutzens aneinander grenzen. Sie könnten vielleicht glauben, daß ich in blinder Bewunderung für das Princip der Anwendung desselben eine Genauigkeit zuschreibe, welche in der Tat nur der Theorie zukomme. Allein ich kann meine Behauptung mit Tatsachen belegen. Der Kapitain Basil Hall erzählt von sich selbst ein auffallendes Beispiel von der Genauigkeit und Wichtigkeit solcher astronomischer Längenbestimmungen.

Er segelte von San Blas auf der Westküste von Mexiko ab und legte binnen 89 Tagen 8000 englische Meilen zurück. Nachdem er in diesem Zeitraume den Stillen Ozean durchschifft, das Cap Horn dubliert und den südatlantischen Ozean durchkreuzt hatte, kam er auf der Höhe von Rio Janeiro an, ohne irgend wo gelandet oder auch nur ein einziges Segel gesehen zu haben, außer einem amerikanischen Walfischfänger abwärts vom Cap Horn. Als er sich noch acht Tage von Rio entfernt glaubte, bestimmte er seinen Ort nach dem Princip der Monddistanzen. „Wir steuerten“, erzählt er selbst, „einige Tage gegen Rio de Janeiro zu, nachdem die erwähnten Mondbeobachtungen gemacht worden, und als wir uns der Küste auf 15 bis 20 Meilen genähert hatten, ließ ich um 4 Uhr Morgens bis gegen Tagesanbruch die Segel beilegen, und dann aufziehen; denn obgleich es sehr trübe war, konnten wir doch einige Meilen vor uns sehen. Um 8 Uhr wurde es so neblicht, daß ich nicht weiter segeln wollte und schon im Begriff war, das Schiff gegen den Wind beizudrehen, bevor ich das Schiffsvolk zum Frühstück gehen ließ, als es sich plötzlich aufhellte und ich die Befriedigung hatte, den großen Zuckerhut-Felsen, welcher an der einen Seite der Hafenmündung steht, so nahe uns gegenüber zu sehen, daß wir unsern Lauf nicht um einen Punkt zu verändern brauchten, um die Einfahrt in Rio zu bewerkstelligen. Hier sahen wir nach drei Monaten zum ersten Male Land, nachdem wir so viele Meere durchkreuzt hatten, und durch unzählige Ströme und falsche Winde bald vorwärts, bald rückwärts getrieben waren.“ Das Beispiel, welches ich hier angeführt habe, zeigt, ein wie sicherer Führer der Mond dem Schiffer auf der einsamen Meeresfläche ist und bis zu welchem Grade der Genauigkeit man das Problem der Längenbestimmung gelöst hat. Die tiefste Geometrie, die feinsten astronomischen Beobachtungen waren erforderlich, um die Schwierigkeiten zu überwinden und sich durch die Verwickelungen hindurchzufinden, welche die Auflösung dieses Problems umgaben. Die Entdeckung des wahren Weltsystems, die Erforschung der wahren Bewegungen der Himmelskörper mußte vorangehen. Man mußte die Kräfte erkannt haben, welche diese Bewegungen hervorrufen und regeln, man mußte die Gesetze ihrer Wirksamkeit mathematisch zu bestimmen im stande sein, man mußte sogar ihren störenden Einfluß angeben können, mit einem Worte, die Astronomie mußte als vollendete Wissenschaft dastehen, wenn jenes Problem gelöst werden sollte. Drei Jahrhunderte, die Vereinigung ausgezeichneter Talente waren nötig, um dieser Wissenschaft ihre hohe Ausbildung zu geben.

Die Untersuchungen der Naturforscher haben sich indessen keineswegs auf die Sternenwelt beschränkt. Mit demselben rastlosen Eifer, nach demselben Princip der Teilung der Arbeit, mit derselben Vereinigung verschiedenartiger Talente hat man die Natur in allen ihren Tiefen zu durchforschen gesucht. Durch höchst sinnreiche Kunstgriffe und Experimente hat man die verschiedenen Zustände und Bewegungen des Lichts entdeckt, jenes geheimnisvollen Wesens, welches alle Körper sichtbar macht, selbst aber unsichtbar ist. Man hat gefunden, daß in einer Zeitsekunde, während eines Pendelschlages ein Lichtstrahl 42000 Meilen durchfliegt. Man hat gefunden, daß ein solcher Strahl in ausserordentlich kleinen Wellen durch den Raum fließt und daß in einer Sekunde nicht weniger als 500 Billionen solcher Wellen, welche alle einem einzigen Lichtstrahl angehören, das menschliche Auge treffen. Solche Resultate können unglaublich erscheinen, und dennoch stehen sie unwiderleglich fest. Man hat die Gesetze der Luftschwingungen erforscht, auf welche sich die Harmonie der Töne gründet. Man hat dem geheimnisvollen Wirken des

Erdmagnetismus, dem gespenstischen Wesen der Wärme nachgespürt. Die Strombewegungen des Ozeans und der Atmosphäre, der Lauf und die anomale Beugung der isothermischen Linien, die Bedingungen des Gleichgewichts der irdischen Temperaturen sowie der Verteilung der Klimate, die Herde des unterirdischen Feuers — von allen diesen Gegenständen hat man die Ursachen und die Gesetze zu ergründen gesucht. Ja selbst die irdischen Gestaltungen hat man in denselben Kreis der Untersuchungen gezogen. Man hat gefunden, daß die Krystallbildungen nach strengen geometrischen Gesetzen erfolgen und daß die Elementarteile des Pflanzen- und Tierlebens nach ganz analogen Gesetzen sich formen. Für die Physiologie, für die Pathologie, selbst für die Therapie eröffnen sich neue, noch nie geahnte Aussichten, und man steht gegenwärtig auf dem Punkte, die physikalischen Gesetze des Lebens zu entdecken.

Ich habe hier mit wenigen und schwachen Pinselzügen die Lineamente eines Gemäldes anzudeuten versucht, das die großen Meister der letzten Jahrhunderte von der Natur entworfen haben, so wahr und treu in seinen Zügen, wie die ewige Mutter selbst. Sie hat uns auf einen Standpunkt gestellt, von dem aus die Beobachtung große Parallaxen giebt, aber sie selbst hat uns zugleich einen Kompaß gegeben, dessen Nadel ewig ohne Abweichung auf Gesetz und Ordnung weist. Mit dieser Gabe der Natur hat der Mensch sich selbst gebändigt und erzogen. Hilflos fand er sich unter den Schrecknissen eines gewaltigen und oft feindlichen Schicksals. Jetzt ist die Furcht seiner kühnen Forschung gewichen, tiefe Einsicht hat das dumpfe Staunen verdrängt, und der Reichtum seiner Erfindungen hat ihn selbst gegen die Gewalt der Elemente bewaffnet. Er hat die Natur gezwungen, auf seine Fragen zu antworten, ihm ihre Geheimnisse zu verraten und einen friedlichen Bund mit ihm zu schließen. Noch arbeiten die erfindungsreichsten Geister der gebildetsten Nationen an einem Werke, das so sichere Grundlagen und schon so vollendete Teile hat, und wenn die Geisteskraft der Völker sich noch einige Jahrhunderte auf ihrer jetzigen Höhe erhält, so steht zu erwarten, daß dann die verborgensten Werkstätten der Natur dem Menschenauge offen stehen. Dann aber, wenn diese Wissenschaft wird ihre Kreise vollendet haben, wird es auch klar werden, wie sie nicht reiche mit ihren Erklärungen an die Würde des Geistes und wie des Geistes eigenstes Wesen und Leben bestehe jenseits aller Körperwandelungen unfaßbar unseren Begriffen.

Ich habe vorhin gesagt, daß der Mensch die Regel, nach welcher er die Ordnung der Natur erforschen müsse, in sich selbst finde und nicht von der Natur erlerne. Diese Behauptung kann auffallend und paradox klingen, wenn man erwägt, daß der Gegenstand der Untersuchung gänzlich außer uns liegt, und dennoch hoffe ich sie durch den Verlauf der folgenden Betrachtungen vollständig zu rechtfertigen. Dieser Umstand hat jedoch die Verirrungen veranlaßt, in welche sich die Schellingsche Naturphilosophie verloren hat. An dieser Stelle ist der Punkt, in welchem Philosophie und Naturforschung zusammenhängen. Hierin liegt der Grund, daß eine Naturphilosophie der Physik zu Grunde liegt und für dieselbe unentbehrlich ist. Aber unrichtige Philosopheme, sowie eine falsche Anwendung an sich richtiger philosophischer Principien haben der Naturforschung ebenso oft Abbruch getan, als eine richtigere Philosophie die Fortschritte derselben befördert hat. Einzig durch eine aufgeklärte und richtige Philosophie gelangte man zu der Einsicht, daß die astronomischen Aufgaben mechanisch gefaßt werden müßten, und diesem philosophischen Postulat an eine ihr anscheinend fremde Wissenschaft verdanken wir die vollendete Ausbildung der letzteren. Dieser eine Umstand, welcher leicht durch eine Menge anderer Beispiele noch unterstützt werden könnte, kann schon beweisen, wie wichtig, ja wie unentbehrlich die Naturphilosophie für alle Naturwissenschaft ist.

Wegen des Widerstreits aber, mit welchem diese Wissenschaft bisher in den Schulen behandelt worden ist, wegen der Vermengung wissenschaftlicher Ansichten mit neoplatonischen Phantasieen, wird es für uns eine Sache von großer Wichtigkeit, uns geschichtlich zu orientieren und den Standpunkt aufzusuchen, von dem aus wir unsere Aufgabe fassen müssen. Als ein Schüler von Fries versteht es sich für mich von selbst, daß ich die Ansichten meines Lehrers verteidigen werde. Demgemäß will ich gleich im Voraus die Hauptpunkte bezeichnen, die ich bei der Ausführung unseres Gegenstandes besonders berücksichtigen zu müssen glaube.

1. Die Aufgabe, welche wir uns für diese Untersuchungen stellen, ist, daß ich Sie über den Zusammenhang der Philosophie mit der Naturforschung zu verständigen suche. Die Abhängigkeit der letzteren von der ersteren läßt sich nach drei verschiedenen Seiten hin verfolgen:

1) Einmal nämlich hat sich die ganze Aufgabe, der Natur durch Beobachtung und Experiment ihre Gesetze abzufragen, durch die Umbildung der Abstraktionen aus der philosophischen Spekulation der Griechen entwickelt;

2) giebt die Philosophie der Naturforschung ihre methodischen Regeln, und

3) liegt aller Naturwissenschaft eine Metaphysik der Natur zu Grunde, welche die höchsten konstitutiven Principien der Naturlehre selbst bestimmt.

Diese letztere Wissenschaft konstituiert einen eigenen Zweig der Philosophie, welcher unter dem Namen der Naturphilosophie bekannt ist. Die Naturphilosophie ist demnach ein Teil der angewandten Philosophie. Da nun die Naturforschung selbst ihre Erkenntnis aus zwei verschiedenartigen Quellen schöpft, nämlich aus Mathematik und Erfahrung, so kann man die Philosophie einmal auf Mathematik und dann auf Erfahrung anwenden. Mathematik ist aber einerseits eine für sich bestehende Wissenschaft, andererseits ein Werkzeug der Naturforschung. Man kann daher einerseits über die mathematischen Grundbegriffe und den systematischen Zusammenhang der mathematischen Theorieen philosophieren, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, in wiefern dieselben der Erforschung der Naturgesetze dienen. Dies gäbe die sogenannte Philosophie der Mathematik oder die Metaphysik des Kalküls, wie es die Franzosen nennen, eine Wissenschaft, welche gänzlich außer dem Kreise unserer Betrachtungen liegt. Andererseits kann man aber auch der Verbindung der mathematischen Erkenntnis mit den metaphysischen Grundgesetzen der Natur nachgehen und die mathematischen Principien der Naturphilosophie aufsuchen, welche unserer ganzen Naturerkenntnis zu Grunde liegen. Dies wäre der erste Teil unserer Wissenschaft: die mathematische Naturphilosophie. Neben dieser steht dann noch die induktorische Naturphilosophie, welche die Regeln für die Ausbildung der empirischen Teile der Naturwissenschaften enthält. Dieser vorläufigen Übersicht gemäß bestimmt sich uns das Eigentümliche der Behandlungsweise unserer Wissenschaft im Gegensatz gegen andere Schulen. Wir verwerfen

1) alle Phantasieen der Kosmogenie über Erschaffung der Welt durch Gott oder Götter, über Entstehung aller Dinge aus dem Chaos oder einem Urelement oder dem Absoluten. Alle

Träume der Kosmogenie sind entstanden durch Verwechselung der morphologischen Principien mit den Ideen der Weltschöpfung. Diese Bemerkung gilt gegen alle religiösen Träume der Adepten und Neoplatoniker, gegen die ionische Schule, sowie gegen Schelling, Oken und Hegel.

2) Wir behaupten, daß aller Naturlehre eine Metaphysik der Natur zu Grunde liege (gegen Bacon von Verulam);

3) daß nur die mathematisch konstruierten metaphysischen Grundbegriffe die Principien der Naturphilosophie enthalten (gegen Aristoteles und alle diejenigen, welche die substantiellen Formen oder ähnliche Erklärungsgründe in die Naturwissenschaft einzuführen suchten, endlich gegen Justinus Kerner und alle, die an Gespenster glauben).

2. Die Naturphilosophie gehört aber nicht bloß in den Kreis der philosophischen Wissenschaften, sondern sie ist, wie es schon der Name ankündigt, auch ein Zweig der Naturwissenschaften. Um die Natur derselben kennen zu lernen, müssen wir also vor allen Dingen ihre Stellung in dem Kreise der Naturwissenschaften aufsuchen. Naturwissenschaft aber ist im allgemeinen die Wissenschaft von der Natur. Da entsteht nun zuerst die Frage, was ist die Natur?

Natur, φύσις, natura, ist nach der ältesten, ursprünglichsten Bedeutung des Worts die Erzeugung aller Dinge. Die Lehre vom Ursprung aller Dinge war das erste und fast ausschließliche Thema der ionischen Philosophie. Die ersten Anfänge der griechischen Philosophie beschränkten sich also auf Naturphilosophie. Sokrates erkannte zuerst die Selbständigkeit der sittlichen Principien und ihre Unabhängigkeit von der Physik. Er stellte zuerst die ethischen Überzeugungen den physikalischen Lehren entgegen. Seit dieser Zeit teilte man in der sokratischen Schule die Philosophie in Logik, die Lehre von den Gesetzen des menschlichen Denkens, Ethik, die Lehre von den menschlichen Angelegenheiten und dem Guten, und Physik, die Lehre vom Ursprung der Dinge. Diese letztere hatte die Aufgabe, den Ursprung aller Dinge aus der höchsten Ursache, aus der Gottheit, zu begreifen. Sie vereinigte also die Aufgabe der eigentlichen Naturwissenschaft mit der der Religionsphilosophie. Sie war im wesentlichen Kosmogenie und Kosmophysik. Von Thales bis auf Descartes herab hat man sich vergebens bemüht, diese Aufgabe aufzulösen. Das Fehlschlagen dieser Unternehmung liegt, wie ich später zeigen werde, an der eigentümlichen Beschaffenheit unserer Erkenntnis. Durch die Entdeckung der Naturgesetze erkannte man die Unmöglichkeit dieser Aufgabe. Die metaphysischen Ansichten erlitten dadurch eine völlige Umgestaltung. Descartes, der erste Ordner derselben in neuerer Zeit, war genötigt, das körperliche Wesen der Dinge von dem geistigen scharf zu unterscheiden. Man erkannte, daß sich der Kreis der Erklärungen nur auf das erstere beschränke. Das Wort Natur erhielt dadurch eine ganz andere Bedeutung. Gegenwärtig versteht man unter Natur (in formaler Bedeutung) die Abhängigkeit der Dinge von notwendigen Gesetzen. Hier entstehen gleich neue Fragen:

1) Welches sind diese Dinge?

2) Was ist ihr Gesetz und woher stammt es? und

3) Wie besteht die Abhängigkeit der Dinge von Gesetzen?

Die Antwort auf die erste Frage ist bald gefunden. Da wir keine andern Dinge kennen lernen als die, welche uns unsere Sinne zeigen, so ist es das Ganze der Sinnenwelt, welches unter notwendigen Gesetzen steht. Dieses Ganze der Sinnenwelt unter notwendigen Gesetzen ist die Natur in materialer Bedeutung. Um die beiden andern Fragen zu beantworten, müssen wir erst die Natur und Beschaffenheit unserer Erkenntnis betrachten. Nur dadurch können wir übersehen, welche Aufgaben uns in derselben bestimmt sind und wie sie gelöst werden können.

Das Wort Natur wird in zweierlei Bedeutung gebraucht: in formaler und materialer.

1) Man spricht von der Natur eines Dinges und versteht darunter das innere Princip der Möglichkeit eines Dinges. Jedes Ding hat nämlich eine bestimmte Natur, insofern sein Dasein und die Art seines Daseins durch allgemeine und notwendige Gesetze bestimmt ist.

2) Dann spricht man aber auch von der ganzen Natur und versteht darunter das Ganze der Sinnenwelt. Dieses Ganze steht nämlich ebenso unter notwendigen Gesetzen wie jeder einzelne Gegenstand in ihm. Darin liegt die Befugnis, den Begriff von diesem auf jenes zu übertragen.

Das Charakteristische im Begriff der Natur ist also die notwendige Gesetzlichkeit und die Abhängigkeit der Dinge von ihr. Nun kann aber offenbar nur das Wesenhafte an sich selbst und unabhängig von unserer Erkenntnis vorhanden sein. Das Gesetz ist aber an und für sich nichts Wesenhaftes, was außer unserer Erkenntnis ein für sich bestehendes Dasein hätte, und dennoch ist in unserer Erkenntnis gerade das Gesetz das Unabhängige und Selbständige, von dem das Wesen der Dinge abhängt. Wir treffen hier auf ein seltsames und höchst sonderbares Rätsel in unserer Erkenntnis, worüber wir uns vor allen Dingen verständigen müssen. Dieses Rätsel ist zwar ganz metaphysisch und die Verständigung darüber scheint uns von unserm Ziele abzuführen. Wenn wir indeß die Sache ein wenig anders wenden, werden wir uns bald überzeugen. daß die eben berührte Frage auch unser Problem in sich schließt. Jenes Rätsel ist offenbar in der Natur unserer Erkenntnis begründet, und um dasselbe zu lösen, müssen wir uns an die Erforschung der Natur unserer Erkenntnis wagen. Wenn wir aber den Bau der menschlichen Erkenntnis auseinanderlegen, müssen wir auch die Stelle jeder Aufgabe in derselben wiederfinden. Damit wir uns also über die Bedeutung und die Stellung unserer Aufgabe vollständig orientieren können, wird es nötig sein, die Beschaffenheit unserer Erkenntnis selbst näher ins Auge zu fassen.

Für das Verständnis der ganzen Friesischen Lehre ist vielleicht nichts wichtiger, als jene Lehre von der Verschiedenheit und dem Unterschiede der Weltansichten, jene Lehre, welche ich mit einem allgemeinen Namen das Gesetz der Spaltung der Wahrheit nennen will. Die Früheren haben, etwa Kant ausgenommen. allgemein vorausgesetzt, daß das Ganze der menschlichen Erkenntnis sich in ein wissenschaftliches System müsse vereinigen lassen. Allein Fries hat gezeigt, daß dies unmöglich sei. Die verschiedenartigen Teile der menschlichen Erkenntnis gestalten sich nämlich zu ganz verschiedenartigen Systemen, von denen jedes eine mehr oder minder vollständige wissenschaftliche Entwickelung zuläßt. Diese Systeme hängen nicht theoretisch in einem Princip zusammen, sondern sie stehen nur induktorisch nebeneinander; sie sind nicht Glieder eines größeren Ganzen, sondern Stufen, von denen jede eine etwas veränderte Ansicht der Wahrheit gewährt.

Die menschliche Erkenntnis gleicht nicht einer ebenen Fläche, die man von irgend einem hohen Standpunkte herab vollständig und mit einem Blicke übersehen könnte; sondern sie gleicht vielmehr einem Hügellande, von dem man sich nur nach und nach ein vollständiges Bild aus teilweisen Ansichten zusammensetzen muß. Es giebt mehrere Höhen, mehrere Standpunkte über einander, von denen jeder einen andern Anblick darbietet und wo sich bald das eine zeigt und bald wieder verbirgt.

II.

Das Gesetz der Spaltung der Wahrheit.

3. Die menschliche Erkenntnis ist keine einfache Tätigkeit, sondern ein äußerst kompliziertes und künstlich zusammengesetztes System von verschiedenartigen Tätigkeiten und Fertigkeiten. Aus der Verschiedenartigkeit dieser Erkenntnistätigkeiten sehen wir, daß der menschliche Geist verschiedene Vermögen besitzt, welche aber so organisiert sind, daß sie in die Einheit des erkennenden Geisteslebens zusammengreifen und in ihrer zeitlichen Entwickelung an einen gesetzmäßigen Verlauf gebunden sind. Daher kommt es, daß unsere Erkenntnis aus getrennten und verschiedenartigen Quellen entspringt, dem ohnerachtet aber ein Ganzes bildet. Nach dem Naturgesetz der zeitlichen Entfaltung unseres Geisteslebens fängt alle menschliche Erkenntnis mit der Sinnesanschauung an, zu dieser finden sich dann allmählich die andern Bestimmungsstücke hinzu, anfangs nur dunkel, nach und nach aber werden sie durch die reifende Kraft des denkenden Verstandes immer klarer, bis sie endlich zur völligen Deutlichkeit entwickelt werden. Das vollständige Ganze der Erkenntnis schlummert gleichsam in dem dunkeln Innern unseres Geisteslebens, nur einzelne Teile davon (die Sinnesanschauungen) treten gleich anfänglich mit ursprünglicher Klarheit vor das Bewußtsein. Die übrigen Teile müssen erst künstlich in den Formen der Reflexion,

vermittelst der Begriffe in den Formen der Urteile und Schlüsse, sowie in den Systemformen zum Bewußtsein gehoben werden. Die Ausbildung unserer Erkenntnis geht also durch die Stufen des Dunkeln. Klaren und Deutlichen hindurch. Die bildende Kraft in unserem Leben ist aber der Verstand. Die ausgebildete Erkenntnis muß deshalb die Form der Tätigkeit des letzteren, d. h. die logische Form der systematischen Einheit an sich tragen. Wissenschaftlichkeit wird daher der Grundcharakter der ausgebildeten menschlichen Erkenntnis, das formale Grundgesetz ihrer Wahrheit. Sobald man diese Anforderung der Logik an die Erkenntnis einmal kennen gelernt hat, wird man ihr leicht ein unbedingtes und so zu sagen souveränes Recht einräumen. Man wird unbefangen voraussetzen, daß alle menschliche Erkenntnis Wissenschaft sei, und ebenso unbefangen wird man annehmen, daß sie Wissenschaft aus einem Stück sei. Wenn man dann aber anfängt, diese Wissenschaft zu entwickeln, so wird man sehr bald von verschiedenen Geistern auch sehr verschiedene Bearbeitungen erhalten. Man fängt an, dieselben untereinander zu vergleichen; man wird gewahr, daß sie sich nicht vereinigen lassen. Der Zweifel erwacht und wendet sich gegen die Wahrheit der menschlichen Erkenntnis selbst. Erst spät wird die durch Skepsis vorsichtig gewordene und durch Kritik belehrte Vernunft gewahr, daß es getrennte Anfänge und einander entgegengesetzte Gesetzgebungen in unserer Erkenntnis giebt, welche in der Natur unseres Geistes begründet sind und sich durch keine Wissenschaft künstlich ausgleichen lassen.

1. Trennung des äussern und innern Sinns.

4. Dem Menschen erscheint das Wesen der Dinge auf zweierlei Weise: durch die äußeren Sinne als Materie, als Körper, durch

den innern Sinn jedem in ihm selbst als Geist. Diese beiden Quellen, aus denen die ersten Anfänge unserer Erkenntnis fließen, sind so gänzlich von einander getrennt und abgeschieden, daß die Erkenntnis des äußern Sinns ganz ungleichartig ist mit der des innern Sinns. Auf dem Wege der ersteren gelangen wir zu einer Weltansicht, in welcher die gestalteten Massen die Wesen, auf dem Wege des letzteren dagegen zu einer Weltansicht, nach welcher die Geister die Wesen sind. Diese scharfe Trennung zwischen zwei verschiedenen Arten von Wesen, Geist und Körper nämlich, konnte erst in neuerer Zeit klar hervortreten, nachdem man durch die physikalischen Entdeckungen des Galilei und seiner Schule genötigt war, die Materie als träge und leblos vorauszusetzen, nachdem man durch Newtons Entdeckungen die Wesenheit der Masse erkannt hatte und nachdem man zu erkennen anfing, daß die Körperwelt von einem toten Mechanismus beherrscht werde, welcher mit der innern freiwilligen Tätigkeit des Geistes gar nichts gemein habe. Die alte griechische Spekulation dagegen wurde durch den Gang der Ausbildung ihrer Abstraktionen auf jene Entelechieenlehre des Aristoteles geführt, welche die Wesenheit der Gestalt, die Substantialität der Form behauptet, die Masse dagegen nur als Princip der Möglichkeit ansieht, und nach deren Konsequenz die Seele gleichsam das Princip der Gestaltung ist. Allein, wie ich später zeigen werde, ist das morphotische Princip, der Grund der Gestaltung, kein Wesen, sondern ein wesenloses Gesetz. Bacon von Verulam, der große Umbildner der Abstraktionen der aristotelischen Naturphilosophie, erkannte dieses zuerst, und indem er die Forderung stellte, induktorisch auf dem Wege der Beobachtung und des Experiments die Naturgesetze zu suchen, ebnete er der wahren Naturforschung den Boden. Descartes, welcher die

Metaphysik dieser neuen und veränderten Naturansicht ausbildete, wurde dadurch auf seinen scharfen Dualismus geführt, welcher sowohl Geist als Körper als besondere Wesen voraussetzt und welcher noch jetzt als die Metaphysik des gemeinen Menschenverstandes gilt.

Dabei blieb dann nur die Schwierigkeit, die Vereinigung zwei so durchaus heterogener Arten von Wesen, wie Geist und Körper, in der einen Welt zu erklären. Man erkannte bald, daß der Dualismus dafür nicht ausreiche, und man versuchte auf entgegengesetztem Wege, hier durch Materialismus, dort durch Spiritualismus, diese Einheit begreiflich zu machen.

Da uns alles Geistesleben nur an Körperformen gebunden erscheint und da alle selbständige Wissenschaft des Menschen von dem Wesen der Dinge Erkenntnis der Körperwelt ist, oder sich auf diese basiert, so war es natürlich, zu versuchen, ob sich nicht aus dem Dasein der Körperwelt das Bestehen aller Dinge erklären lasse. Geistestätigkeit wäre dann nur wie der Blumenduft an der Pflanzengestalt. Allein der vollständige Materialismus kann wohl Bewegungen erklären, aber keineswegs angeben, wie sich aus diesen ein Ton oder eine Farbe oder gar eine Geistestätigkeit erzeugen könne. Sollte ferner der Materialismus die einzig wahre und alles umfassende Weltansicht sein, so müßte offenbar das Wesen der Körperwelt, d. h. die Masse, ein selbständiges, für sich bestehendes Dasein haben, und allem andern würde nur ein an der Masse adhärentes Dasein zukommen. Die Masse müßte demnach aus letzten einfachen Teilen, aus Atomen bestehen, welche ein für sich bestehendes, selbständiges Dasein hätten. Nun ist aber die Masse das Zusammengesetzte im Raume. Alles im Raume Zusammengesetzte ist aber nach dem Gesetz der Stetigkeit ins Unendliche teilbar und kann nicht aus letzten einfachen Teilen bestehen. Die Materie (die Masse) hat nur kraft der Natur unserer mathematischen Anschauung, nicht an und für sich selbst ein selbständiges Dasein.

Denjenigen, die diesen Umstand beachteten, mußte sich die Bemerkung aufdrängen, daß unter allem, was der Mensch sich vorstellen könne, der Geist der einzige Gegenstand sei, welcher als einfach gedacht werden und also an sich dasein könne. So stellte sich dem Materialismus der Spiritualismus gegenüber, welcher alle Dinge nur in geistigen Wesen bestehen läßt. Dabei wird dann die Körperwelt entweder wie in Leibnizens Monadenlehre nur für eine verworrene Vorstellung der Sinne, oder wie in Berkeleys Idealismus für bloßen Schein erklärt. Allein die Monadenlehre beruht auf jenem dialektischen Fehler der Amphibolie der Reflexionsbegriffe, welchen Kant aufdeckte und infolge dessen Leibniz die scharfe Grenzlinie nicht sah, welche die Anschauung von dem Denken trennt. Der empirische Idealismus dagegen hat ganz übersehen, daß wir zu gar keiner zeitlichen Erkenntnis unseres Geisteslebens gelangen, ohne das unabhängige Dasein der Körperwelt vorauszusetzen. Denn die Gestirne sind es, welche die Zeiten messen, die Körper sind es, welche uns zur Erkenntnis der Stellen im Raume verhelfen. Wir würden gar keine Erfahrung über uns machen können, es würde die innere Erfahrung gar keinen festen Widerhalt haben, wenn sie nicht zwischen der äußeren Erfahrung aufwachsen und an diese sich anklammern könnte.

Die Unmöglichkeit eines vollständig durchgeführten wissenschaftlichen Materialismus oder Spiritualismus einerseits und die Unzulänglichkeit des Dualismus andererseits zeigt uns, daß keine dieser Weltansichten Anspruch auf die volle Wahrheit machen könne. Und doch scheinen alle möglichen Vorstellungsweisen durch diese drei Ansichten erschöpft. Auf diesem Standpunkte standen die philosophischen Angelegenheiten ohne Ausweg fest, in Hume, dessen scharfsinniger Geist sorgfältig und unparteiisch das Gewicht der Gründe und Gegengründe gegeneinander abwog, gleichsam an sich selbst verzweifelnd, als Immanuel Kant durch die Entdeckung der Kritik der Vernunft unerwartet die wahre Auflösung des Rätsels gab.

5. Die Kritik, welche nicht dogmatisch über die Dinge philosophierte, sondern sich an die Erforschung unseres Erkenntnisvermögens wandte, zeigte, daß jene Trennung zwischen der Körper- und Geisterwelt nicht in der Natur gegründet ist, sondern aus der Beschaffenheit unserer Erkenntnis und deren Stellung zur Welt entspringt. Der Unterschied des körperlichen und geistigen Daseins der Dinge ist dem Menschen nämlich durch zwei verschiedene ihm unvermeidliche sinnliche Vorstellungsweisen vom Dasein der Dinge bestimmt. Ein und dasselbe Wesen der Dinge zeigt uns zwei verschiedene und einander entgegengesetzte Eigenschaften; diese sind Tod und Leben, Trägheit und Tätigkeit d. h. innere Selbstbestimmung. So wie uns die äußeren Sinne die Dinge zeigen, stehen sie nach den körperlichen Gesetzen unter einem toten Mechanismus willenloser Einwirkungen und Gegenwirkungen. Leblosigkeit d. h. Trägheit ist deshalb der Grundcharakter der Materie. Der geistigen Weltansicht nach beurteilen wir jedes Wesen der Dinge als ein lebendiges. Dabei behaupten wir aber nicht, daß jenes körperliche Gesetz des toten Mechanismus dem Wesen der Dinge an sich selbst gehöre, sondern wir betrachten es bloß als ein Hilfsmittel der Zusammenfassung unserer beschränkten sinnlichen Vorstellungen von den Dingen. Wir sind mit unserer Erkenntnis so in diese

Kreise gebannt, daß wir die Einheit von Geist und Körper niemals wissenschaftlich zu erklären hoffen dürfen. Die höchste Höhe, bis zu welcher wir uns erheben können, ist die, daß wir die Unvollkommenheit und Mangelhaftigkeit unserer Erkenntnis einsehen lernen. Eine unvermeidliche Folge dieser sinnlichen Beschränktheit unserer Erkenntnis ist die Ungleichartigkeit materialistischer und spiritualistischer Erklärungsweisen. Diese Bemerkung enthält ein sehr wichtiges Kathartikon für die wissenschaftliche Ausbildung sowohl der Naturlehre als auch der Psychologie. Geistiges kann niemals zum wissenschaftlichen Erklärungsgrund für körperliche Erscheinungen dienen, und so auch umgekehrt.

6. Es giebt keine andere unmittelbare Erkenntnis des Geisteslebens und seiner Zustände als unter der Form des Selbstbewußtseins. Den Geist und seine Thätigkeiten lernt daher der Mensch zunächst nur in ihm selbst kennen. Aber diese unmittelbare Erfahrung über Geistiges in uns machen wir so, daß die räumlichen und zeitlichen Erkenntnisse unsers geistigen Lebens von den Vorstellungen der Massen und ihrer Zustände abhängig bleiben. Fremdes Geistesleben außer uns lernen wir nur mittelbar, vermittelst der Körperformen und der Sprache kennen. Sonach ist die Erkenntnis des Geistigen in doppelter Rücksicht abhängig von der Erkenntnis der Körperwelt. Durch die getrennten Eingänge in unsere Erkenntnis kommen wir zu ganz entgegengesetzten Principien, nämlich einerseits zu denen der mathematischen Notwendigkeit, wie sie in den physikalischen Wissenschaften gelten, andererseits zu den Principien der ethischen Weltansicht, den Ideen der persönlichen Würde und der geistigen Selbständigkeit. Vermöge dieser doppelten und entgegengesetzten Gesetzgebung in seiner Erkenntnis entsteht dem Menschen eine unvermeidliche

Spaltung der Wahrheit, der zufolge wir die ganze Wahrheit der menschlichen Erkenntnis nicht in ein gleichförmiges wissenschaftliches System einzwängen können, sondern stufenweis unter verschiedenartigen Principien zu verschiedenen zum Teil unvollständigen Weltansichten ausbilden müssen. Wegen der vorhin geschilderten Abhängigkeit des Geistes vom Körper erhält die Geisteserkenntnis ihre mathematische Notwendigkeit nur durch die Erkenntnis der Körperwelt, und da die mathematische Notwendigkeit die Bedingung aller Wissenschaftlichkeit ist, so liegt offenbar aller menschlichen Wissenschaft von dem Wesen der Dinge die wissenschaftliche Erkenntnis der Körperwelt zu Grunde. Diese wissenschaftliche Erkenntnis der Körperwelt läßt eine vollständige Anwendung der metaphysischen Grundbegriffe, sowie eine direkte und vollständige mathematische Konstruktion aus diesen zu. Sie isoliert sich dadurch aus dem Ganzen der menschlichen Erkenntnis und kann für sich allein verstanden werden. Die geistige Erkenntnis aus dem Selbstbewußtsein dagegen gewährt nicht gleiche Vorteile der wissenschaftlichen Entwickelung. Sie entzieht sich ganz der mathematischen Konstruktion, und die metaphysischen Grundbegriffe der Substanz, der Bewirkung und der Gemeinschaft können nur einzeln für sich und auf ungleiche Weise auf dieselbe angewendet werden. Demgemäß erhalten wir drei naturwissenschaftliche Ansichten des Geisteslebens:

1) Der Substanz nach erkennt jeder Mensch nur sich selbst als Geist in einer wissenschaftlich unvollständigen Vorstellungsweise, welche dem Ich seine Tätigkeiten erscheinen läßt. Dies ist die psychisch-anthropologische Ansicht, welche noch eine unvollständige theoretische Entwickelung zuläßt, der zufolge man die komplizierten Erscheinungen des geistigen Lebens aus dem Grundgesetz der Einheit des sinnlich vernünftigen Lebens und den

Grundvermögen erklären kann. Unvollständig muß diese Vorstellungsweise deshalb bleiben, weil wir in ihr nicht zur Erkenntnis des Wesens hindurchdringen können, sondern bei der Erkenntnis seiner Zustände stehen bleiben müssen.

2) Unter dem Grundsatz der Bewirkung erkennen wir die Wechselwirkung von Geist und Körper. Wir erkennen da wohl, wie Geist und Körper gegenseitig auf einander wirken, aber wir können das eine aus dem andern nicht erklären. Diese Weltansicht ist nicht mehr theoretisch, sondern nur pragmatisch; wir können nicht erkennen, wie körperliche Gegenwirkungen die Ursachen geistiger Zustände sein können, sondern wir können nur angeben, wie die Person die Sachen als Mittel zu ihren Zwecken brauchen kann.

3) Die Geistesgemeinschaft finden wir in der menschlichen Gesellschaft, in welcher sie durch die Verbindung der Gedanken vermittelst der Sprache unter Rechtsgesetzen besteht. Dies giebt die politische Weltansicht, welche noch weiter von der Theorie abliegt.

So entzieht sich die Erkenntnis des geistigen Wesens der Dinge schrittweis immer mehr und mehr der Naturgesetzlichkeit bis zur dritten Stelle, welche die Übergangsstufe zur ethischen Weltansicht bildet, in welcher letztern wir den Geist gar nicht mehr unter Naturgesetzen, sondern unter den ewigen Ideen des Rechts und der Gerechtigkeit als den freien Urheber seiner Taten beurteilen. Zugleich ersehen wir daraus, daß die Wissenschaftlichkeit der Erkennis von den Naturgesetzen abhängt, denn Wissenschaft besteht darin, daß wir die Dinge nach Regeln, nach notwendigen und allgemeinen Gesetzen zu beurteilen vermögen. Dies letztere müssen wir für die Erkenntnis der Körperwelt noch genauer betrachten.

2. Unterschied von Sinnesanschauung und mathematischer Anschauung.

7. Alle unsere Erkenntnis fängt mit Anregung unseres geistigen Sinns in der Empfindung an, wobei wir Gegenwärtiges außer uns anschauen. Diese Empfindungsweisen sind von mannigfaltigen Arten und als solche an die Organe unsers Körpers gebunden. Demgemäß unterscheiden sich die sogenannten fünf Sinne: Betastung, Geschmack, Geruch, Gehör und Gesicht. Diese Sinne zeigen uns Glätte und Rauheit, Wärme und Kälte, Duft, Ton und Farbe. Aber alles dieses sind nur verschiedene Qualitäten derselben Gegenstände außer uns. Diese Gegenstände selbst, die Körper, stellen wir uns eigentlich in reiner mathematischer Anschauung durch produktive Einbildungskraft als gestaltete, bewegliche Masse im Raume vor. Alle Körper sind gestaltet; alle Gestalten aber sind Konstruktionen im Raume. Nun konstruiert nicht der Sinn, sondern die Einbildungskraft. Alle Gestaltvorstellungen sind daher nicht sinnlich, sondern mathematisch. Die Einzeichnung in den Raum ist ein Werk des mathematischen Anschauungsvermögens.

Es bestehen also in unserer Erkenntnis zwei verschiedenartige Anschauungsweisen nebeneinander. Die eine entspringt aus sinnlicher Anregung, die andere aus reiner Selbsttätigkeit d. h. aus der Grundgestalt der Vernünftigkeit des Geistes selbst. Der einen gehören die sinnlichen, der andern die mathematischen Vorstellungen. Die eine zeigt uns Q u a l i t ä t e n, die andere entwickelt sich durch K o n s t r u k t i o n. Diese letztere hat daher ein eigenes selbständiges Princip der Entwickelung, welches von den einfachsten Elementen zu immer größerer Künstlichkeit der Zusammensetzung ins Unendliche fortschreitet. Diese Eigentümlichkeit der mathematischen Vorstellungsweise bestimmt die ganze Natur unserer theoretischen Erkenntnis.

8. Da die Tätigkeit der einzelnen Sinne an bestimmte Organe und Funktionen des Organismus gebunden ist, so entsteht dadurch eine eigentümliche Isolierung derselben. Jedem Sinn dient ein anderes Werkzeug, keiner versteht die Sprache des andern, jeder hat seine eigene, ihm ausschließlich gehörende Welt, und wir würden zu gar keiner Erkenntnis der Welt-Einheit gelangen, wenn wir nur eine sinnliche Erkenntnis besäßen.

Eine zweite Folge davon ist die Zufälligkeit der sinnlichen Vorstellungen, ihr steter Wechsel und ihre Wandelbarkeit. Wir erkennen nämlich die Natur nicht nach der ganzen Mannigfaltigkeit ihrer Kräfte, Naturtriebe und Stoffe, sondern nur nach dem besondern subjektiven Verhältnis, in welchem diese zu unserm Organismus stehen. Nur die Einwirkungen derjenigen Naturprozesse können der Empfindung dienen, welche in unmittelbarer und bestimmter Gegenwirkung mit unseren Sinneswerkzeugen stehen.

Sinnesanschauung und mathematische Anschauung stehen nicht getrennt und isoliert in unserm Geiste. Beide sind vielmehr in der innigsten Verbindung mit einander und bilden nur verschiedenartige Teile ein und desselben Ganzen. Vermöge der mathematischen Anschauung konstruieren wir alles, was uns die Sinne zeigen, sofort in Raum und Zeit. Durch sie erhält alles sinnlich Erkannte seine bestimmte Einzeichnung in den Raum, sowie seine feste Stelle im Raum und in der Zeit. So gehört also alle Erkenntnis der Gestalten der mathematischen Anschauung in ihrer Verbindung mit der Sinnesanschauung. Durch die mathematische Anschauung besteht demnach die Einheit und Objektivität der

Weltanschauung. Aus ihr entspringt die Notwendigkeit, soweit dieselbe auf anschaulicher Basis ruht.

9. Diese mathematischen Vorstellungen bilden unter sich ein zusammenhängendes und festverbundenes System, welches wir in abstracto aus dem Ganzen der menschlichen Erkenntnis herausheben und für sich entwickeln können. Auf dieser Absonderung der reinanschaulichen Vorstellungsweise von der Wirklichkeit der Gegenstände und ihrer selbständigen Entwickelung beruht die Möglichkeit der Mathematik. So geht die reine Anschauung in ihrer wissenschaftlichen Ausbildung ihren gesonderten Gang für sich und muß sich dann erst künstlich wieder mit der sinnesanschaulichen Erkenntnis der wirklichen Gegenstände zusammenfinden nach den Regeln der angewandten Mathematik. Nur soweit ist strenge Wissenschaft und theoretische Ableitung der Erscheinungen aus ihren Ursachen möglich, als die Anwendung der Mathematik auf die Erfahrung langt. Denn nur allein durch die mathematische Vorstellungsweise und nach deren Gesetzen besteht in unserer Erkenntnis die Unterordnung der Erscheinungen unter die metaphysischen Grundbegriffe der Bewirkung.

Aus dieser Beschreibung unserer Erkenntnis können wir folgende für unsere nachfolgenden Betrachtungen höchst wichtige Schlüsse ziehen:

1) Einzig und allein durch die mathematische Anschauung besteht in unserer Erkenntnis die Einheit der Weltanschauung.

2) Vermöge derselben ruht die ganze menschliche Erkenntnis auf einem mathematischen Grundgestell.

3) Die einzig vollständige wissenschaftliche Erkenntnis des Menschen ist die Erkenntnis von der Welt der Bewegungen und deren Gestalten.

3. Hylologie und Morphologie.

10. Die Verschiedenartigkeit der Sinnesanschauung von der reinen Anschauung begründet einen für die Naturlehre äußerst wichtigen Unterschied. Wir erhalten nämlich dadurch eine doppelte Ansicht von der Körperwelt, nämlich 1. eine subjektive Ansicht dessen, wie die Dinge im Verhältnis zu meinem Geist beschaffen sind; diese geben uns zunächst die Sinne; 2. eine objektive Ansicht von ihrem Wesen in ihrem Verhältnis gegen einander. Diese entsteht durch die reine Anschauung. Nach der erstern Ansicht sind Bäume, Tiere, Berg, Wald und Flur, also die gestalteten Dinge, die Wesen, denen Farbe, Ton, Duft und alle sinnesanschaulichen Beschaffenheiten als Eigenschaften zukommen. Diese morphologische Weltansicht ist die erste und anfängliche, zu der der Geist erwacht, sie ist diejenige, in welcher wir beständig leben und nach der wir den Zusammenhang der Körperwelt mit der Geisteswelt auffassen. Wenn wir aber anfangen, diese Weltansicht wissenschaftlich zu behandeln, so werden wir gewahr, daß sie für sich keine Selbständigkeit besitzt. Denn bei genauerer Vergleichung finden wir, daß ein gestaltetes Ding kein für sich bestehendes Wesen, sondern nur eine Form wechselnder Substanzen ist. Wir finden, daß die Masse das Wesen der Körperwelt ist und daß alle Gestaltungen nur durch diese und die Wechselwirkung ihrer Grundkräfte bestehen. Es steht also hinter der morphologischen noch eine andere Weltansicht von dem körperlichen Wesen der Dinge, durch die jene erste allein wissenschaftliche Selbständigkeit und Festigkeit erhält. Dies ist jene zweite vorhin genannte Ansicht der Körperwelt, welche wir mit Fries die hylologische nennen. Die erstere giebt nur einzelne Einleitungen in die wissenschaftliche Erkennt-

nis der Natur. Die zweite dagegen gestaltet sich zum vollständigsten wissenschaftlichen Ganzen, welches der menschliche Geist besitzt, in der Gesetzgebung für die Welt der Bewegungen. So kommen wir durch die Farbenlehre zur Optik und den Gesetzen des Lichts, durch die Wahrnehmung der Töne und die Harmonik zu der Akustik und den Gesetzen der Schallschwingungen, durch die Empfindung des Warmen und Kalten zur Wärmelehre.

11. Diese wissenschaftliche künstliche Zurückführung aller Naturerscheinungen auf eine mathematische Grundansicht ist in der Geschichte der menschlichen Kultur erst sehr spät und nur nach und nach klar geworden. Das Charakteristische der Metaphysik des Aristoteles und der Scholastiker besteht gerade darin, daß sie die morphologische Weltansicht nicht nur als selbständig, sondern auch als alles umfassend ansieht. Dadurch war sie genötigt, die Form oder die Gestalt als etwas ebenso Ursprüngliches wie das Wesen anzusehen. So entstand jene Lehre von den Entelechieen oder den substantiellen Formen, der zufolge die Form oder die Gestalt gleichsam wie ein gespenstisches Wesen ohne Masse und ohne Körperlichkeit besteht. Diese Metaphysik unterscheidet zugleich vier Arten der Veränderung: Entstehen und Vergehen (*κίνησις κατὰ οὐσίαν*), Qualitätsveränderung (*κατὰ ποῖον*), Vermehrung und Verminderung (*κατὰ πόσον*) und Bewegung (*κίνησις κατὰ τόπον*). Diese Unterscheidung ist ganz im Sinne der morphologischen Ansicht gemacht. Seit der Epoche der großen physikalischen Entdeckungen, welche mit Galilei beginnt, wurde es indessen klar, daß diese vier Arten von Veränderung auf die eine *κατὰ τόπον*, d. h. Bewegung sich zurückführen lassen. Dadurch erkannte man die Konstruierbarkeit aller Veränderungen und Umwandelungen in der Natur. Alles Gestaltete nämlich, sowie

alles, was in der Körperwelt geschieht, steht unter den geometrischen Gesetzen der Zusammensetzung im Raume. So konstruierte Galilei zuerst den freien Fall der Körper und die parabolische Wurfbewegung. Die Cartesische Schule wurde so darauf geführt, die Erklärung der Naturerscheinungen mechanisch zu fassen. Die Auflösung dieser Aufgabe gelang Newton, dem größten Manne aus Descartes' Schule. Seitdem erkannte man, daß alles, was geschieht, von dem Mechanismus der Natur abhängt und daß selbst die Gestaltungen, welche die Masse empfängt und annimmt, der Erfolg von diesem Mechanismus sind. Dieser Mechanismus selbst hängt aber von ausnahmslosen und unveränderlichen Naturgesetzen ab, welche bestimmen, daß alles so geschieht, wie es geschehen muß, und welche es möglich machen, den Erfolg im Voraus zu berechnen, wenn man diese Gesetze vollständig kennt.

12. Alle die Dinge, welche wir nach der morphologischen Weltansicht als die Wesen voraussetzen, Menschen-, Tier- und Pflanzengestalten, Weltkörper und Wolken, Flüsse und Länder bestehen also durch den Mechanismus eigentümlicher Naturtriebe. In gleicher Weise erfolgt der Fall der Körper, die Bewegung des Lichts, der Sternenlauf, sowie alles, was in der Natur geschieht, nach den Gesetzen eines besonderen Mechanismus. Daher treten hier für die Naturforschung die zwei Aufgaben nebeneinander:

1) die Konstruktion des Mechanismus für jeden physikalischen Prozeß zu suchen;

2) die Naturgesetze zu entdecken, von denen dieser Mechanismus abhängt.

Dieses beides: Konstruktion des Mechanismus eines physikalischen Prozesses und die Kenntnis des Naturgesetzes, welches den Mechanismus dieses Prozesses regelt, geben erst die vollständige Erklärung der Erscheinungen. Für die Astronomie leistete das erstere Keppler, das zweite Newton.

Aus diesem hier entwickelten Verhältnis der Gestaltung zum Mechanismus und zum Naturgesetz ergeben sich für uns folgende Folgerungen:

1) Die Naturgesetze gehören der hylologischen Weltansicht an. Bilder aus der Welt der Farben und Töne können daher nie zum Erklärungsgrund für Naturerscheinungen und Naturprozesse dienen. Darin liegt der Irrtum der alten Lehre von der Sphärenharmonie, sowie von Goethes Farbenlehre.

2) Es giebt kein morphologisches Weltprincip. Ein solches könnte nur die Gestalt sein, auf welcher die Möglichkeit der morphologischen Ansicht beruht. Aber die Gestaltung ist kein Princip, sondern ein Problem, welches seine Auflösung in der Hylologie erwartet. Die Morphologie hängt nur induktorisch mit der Hylologie zusammen. In der Verkennung dessen liegt unter anderm der Grund des Irrtums in der Lehre von der Lebenskraft.

3) Die morphologische Weltansicht bleibt unselbständig und wissenschaftlich unvollständig. Ihre letzten und höchsten Erklärungsgründe muß sie von der hylologischen borgen. Aus diesen läßt sich aber nur das Mathematische, nur das Konstruierbare, aber nicht die Sinnesqualitäten erklären. Wir können aus dem Mechanismus des Lichts keine Farbe, aus den Luftschwingungen keinen Ton erklären.

4) Die Naturgesetze sind der letzte Erklärungsgrund, das letzte Princip, auf welches sich unsere Einsicht gründet. Wir dürfen uns daher nie auf den Willen Gottes oder eine diesem gemäße Zweckmäßigkeit berufen. Teleologische Erklärungsgründe dürfen in den Naturwissenschaften nicht zugelassen werden.

Bacon von Verulam begründete dadurch eine neue Epoche für die Naturforschung, daß er die Zweckgesetze verwarf.

4. Unterschied von Theorie und Ästhetik.

13. Wenn wir bis zur Kenntnis der Naturgesetze hindurchgedrungen sind, so sind wir bei selbständigen und ursprünglichen Principien angelangt, die auf sich selbst ruhen, durch sich selbst verständlich sind und über die hinaus es keine anderen höheren Erklärungsgründe mehr giebt. Diese Selbständigkeit und axiomatische Klarheit der Naturgesetze ruht, wie ich später zeigen werde, auf der Natur unserer mathematischen Erkenntnis, in deren Bereich sie ihren Sitz haben. Eine notwendige Folge davon ist die Unmöglichkeit einer Kosmogenie. Vermöge der Selbständigkeit der Naturgesetze und vermöge der mathematischen Natur ihrer Erkenntnisart läßt die hylologische Weltansicht eine vollständige wissenschaftliche Entwickelung zu. Wie wir aber schon (§ 9. 3.) gesehen haben, ist dieses auch die einzige vollständige wissenschaftliche Erkenntnis des Menschen. Die morphologische Weltansicht bleibt wissenschaftlich unvollständig und ruht ganz auf der hylologischen. Noch unvollständiger bleiben die geistigen Weltansichten. Von diesen ruht die politische auf der pragmatischen, diese setzt die psychisch-anthropologische voraus und beide stützen sich wiederum auf die morphologische. So bildet also die Hylologie die feste, unerschütterliche Basis der ganzen menschlichen Wissenschaft, und dieses nur vermöge der Mathematik in ihr. Soweit die Mathematik mit ihren Konstruktionen reicht, soweit läßt sich alles natürlich erklären. Allein diese mathematische Naturlehre umfaßt nicht das Ganze der menschlichen Erkenntnis. Das innere Leben mit dem Wechsel seiner Zustände sowie der geistige Verkehr der Menschen in der Körper-

welt läßt sich zwar zum Teil noch auf dieselbe zurückführen; aber die Würde der Person, die Magie der Schönheit, der Zauber des Farbenspiels sowie die Harmonie der Töne läßt sich durch keine Konstruktion mehr in einfache mathematische Elemente auflösen.

14. Es giebt also ein Gebiet in unserer Erkenntnis, wo alle theoretische Erklärung aus Naturgesetzen aufhört und nur noch eine ästhetische Beurteilung nach Ideen übrig bleibt. So tritt dem Natürlichen das Übernatürliche, dem Wissen das Glauben, dem Naturgesetz die Idee, der Theorie die Ästhetik gegenüber. Dieser Gegensatz ist die verborgene Quelle alles Aberglaubens und aller Geheimnissucht. Es sind nämlich die ewigen Hoffnungen des Menschen, welche über das irdische Verlangen und das Erdenleben noch hinauslangen und dasjenige mit dem Scheine des Wunderbaren umgeben, was mit ihnen in näherer oder fernerer Verbindung steht. Von diesen empfängt auch der Aberglaube sein Interesse und seine Nahrung. Jene ewigen Hoffnungen sind indeß kein leerer Wahn. Da sie einmal in unserer Brust leben wie die Kenntnis der Natur in unserem Geiste, so dürfen wir sie nicht abweisen, sondern wir müssen uns über sie zu verständigen suchen. Früher versuchte man dies dadurch, daß man der Philosophie die Theologie, der natürlichen Erkenntnis die Inspiration oder die Tradition der Kirche gegenüber stellte. Allein als man den Geist des Menschen sowie die historische Entwickelung seiner Kultur zu studieren begann, bemerkte man, daß der eine wie die andere unter Naturgesetzen stehe. Alle Irrfahrten der Metaphysik, alle Abenteuer der Spekulation gehen im letzten Grunde darauf hinaus, jene Gegensätze aufzuheben oder wenigstens auszusöhnen. Erst Kant

gelang es mit seinem transcendentalen Idealismus die wahre wissenschaftliche Auflösung dieses größten Rätsels der Spekulation zu finden. Diese Lehre zeigt nämlich, daß „Natur und Schicksal“ den Dingen, „Wissenschaftlichkeit oder Gesetzlichkeit“ der Erkenntnis von denselben nur zukommt, wiefern sie Gegenstände der Sinnenwelt d. h. Dinge sind, die dem sinnlich erkennenden Geiste nur auf eine beschränkte Weise *erscheinen*, daß aber diese sinnlich beschränkte, diese wissenschaftliche Vorstellungsweise die Dinge nicht ihrem *ewig wahren Wesen* gemäß zeige. Es giebt also nicht zwei verschiedene Welten, eine irdische und eine himmlische nebeneinander, sondern es leben nur zwei verschiedene Gesetzgebungen für ein und dasselbe Wesen der Dinge in unserem Geiste: einmal die Naturgesetzgebung und dann die Gesetzgebung aus Ideen. Daraus geht hervor, daß es kein Hereinragen einer höheren Welt in die unsrige geben kann. Es folgt aber auch daraus, daß es keine Wunder, kein Hindurchgreifen einer göttlichen Allmacht durch die Fugen gesprengter Naturgesetze geben könne. Denn da die Naturgesetzgebung nicht dem Wesen der Dinge an sich selbst zukommt, sondern nur das Werkzeug des menschlichen Geistes ist, um die Außenwelt nach der Natur seiner Erkenntnis zu fassen und sich in derselben zu orientieren, so kann eine göttliche Wirksamkeit im Wesen der Dinge selbst von uns gar nicht wahrgenommen und erkannt werden, es müßte vielmehr unsere ganze Natur umgewandelt werden.

Endlich muß noch als ein sehr wichtiger Umstand bemerkt werden, daß die natürliche und die ideale Gesetzgebung nicht unabhängig von einander in unserem Geiste bestehen, sondern daß sich die ideale durch Negation der Schranken aus der natürlichen entwickelt. Daraus geht hervor, daß es keine positive Erkenntnis aus Ideen und mithin auch keine positive Erkenntnis des Absoluten geben könne. Die Ideen können also in keiner Weise als wissenschaftliche Principien betrachtet werden.

III.

Einteilung der Naturwissenschaften und Stellung der Naturphilosophie in diesem Ganzen.

15. Aus dem Vorigen folgt, daß alle menschliche Wissenschaft Naturwissenschaft ist. Diese Naturwissenschaft zerfällt zunächst in zwei große Gruppen:

A. die Wissenschaft vom Geiste, anthropologische Wissenschaften;

B. die Wissenschaft von der Körperwelt, physikalische Wissenschaften.

In den letzteren kommen drei verschiedene Dinge in Betracht:

1. die qualitative Verschiedenheit der Stoffe in der Körperwelt,
2. das Gesetz und
3. die Gestaltung der verschiedenartigen Stoffe unter dem Gesetz.

Demgemäß erhalten wir drei verschiedene Wissenschaften:

1. Stöchiologie, Stofflehre, die Lehre von der Verschiedenartigkeit der materiellen Stoffe und ihren Zusammensetzungen, gewöhnlich Chemie genannt,
2. Physik in engerer Bedeutung, die Lehre von den Naturgesetzen,
3. Gestaltungskunde oder Morphologie, die Lehre von den verschiedenen Gestaltungen der Körper.

In Rücksicht des letzteren beobachten wir drei geschlossene Kreise der Wechselwirkung: 1. im Sonnensystem, 2. im Leben der Erde, 3. in jedem irdischen Gebilde. Dadurch zerfällt uns die Morphologie wieder in drei Teile:

a. Astronomie, die Wissenschaft vom Weltgebäude;
b. Geologie, die Wissenschaft von der Bildung der Erde, und
c. irdische Morphologie, welche ferner aus der Mineralogie, der Botanik und der Zoologie besteht.

16. Die hier nach Fries gegebene Einteilung ist aus den ersten Gründen unserer Erkenntnis genommen. In unserer Erkenntnis stehen nämlich Gesetz und Tatsache, Einsicht und Kenntnis getrennt neben einander und müssen erst künstlich durch die Theorie vereinigt werden. Eine durchgreifende Einteilung kann daher nur vom Standpunkte der Theorie aus gegeben werden und nicht nach dem Unterschied der Gegenstände, mit denen sich die einzelnen Disciplinen beschäftigen. Diese Bemerkung steht polemisch hauptsächlich gegen den scharfsinnigen E. G. Fischer, welcher vor seinen Untersuchungen über den Sinn der höheren Analysis eine idealische Übersicht der Naturkunde mitgeteilt hat, worin er philosophisch die systematische Gliederung aller physikalischen Wissenschaften und die wesentlichen Merkmale zu bestimmen versucht, welche die einzelnen Zweige von einander unterscheiden. Er definiert die Naturkunde als die wissenschaftliche Erkenntnis des ganzen Umfangs aller Naturwesen und ihrer Veränderung. Dieser Definition gemäß teilt er die Naturkunde in zwei große Gruppen: in die Kenntnis der Naturwesen selbst und in die Kenntnis ihrer Veränderungen. Jene nennt er Naturbeschreibung, diese Naturlehre. Die Veränderungen in der Natur

bringt er dann weiter in zwei Klassen: 1. in räumliche und 2. in materielle. Dies bestimmt ihm den Unterschied von Physik und Chemie. Dieser Disposition liegen indeß mehrere Fehler in der Bestimmung der Grundbegriffe zum Grunde. Denn seine erste Unterscheidung in Naturbeschreibung oder Kenntnis der Naturwesen und Naturlehre oder Kenntnis ihrer Veränderungen setzt die Gleichartigkeit der Erkenntnis in beiden Wissenschaften voraus. Dann nennt seine Erklärung der Naturlehre gerade das wesentliche und charakteristische Merkmal derselben, nämlich die Naturgesetzlichkeit, nicht mit. Wir wollen nämlich in der Physik die Veränderungen in der Körperwelt nicht kennen lernen, sondern wir suchen eine Einsicht in die Gesetze, von denen diese Veränderungen abhängen. Endlich ist seine Unterscheidung zwischen materieller und räumlicher Veränderung unrichtig und schließt für die Chemie die Möglichkeit der mathematischen Konstruktion aus. Dieser Unterschied gilt nämlich nur auf dem Standpunkt der morphologischen Weltansicht. Der hylologischen Weltansicht nach ist dagegen jede Veränderung in dem Zustand der Materie Bewegung d. h. räumliche Veränderung. Alle materiellen Veränderungen müssen demnach auf räumliche zurückgeführt und wie diese phoronomisch und mechanisch konstruiert werden.

17. In dem Ganzen der Naturwissenschaften müssen wir nun die Stelle der Naturphilosophie und die Bedeutung ihrer Aufgabe suchen.

Die Naturwissenschaft fordert Erklärung des Zusammenhangs der Dinge und des Verlaufs der Begebenheiten nach notwendigen Gesetzen. Es gehören demnach drei Dinge dazu:

1) Entwickelung der Gesetze,
2) Konstatierung des Tatbestandes und
3) Unterordnung des letztern unter die erstern.

Der Tatbestand wird festgestellt durch Experiment und Beobachtung, nach Regeln, welche den sogenannten empirischen Naturwissenschaften angehören.

Gesetze dagegen sind allgemeine und notwendige Wahrheiten. Allgemeine und notwendige Wahrheiten werden aber a priori erkannt. Die ganze wissenschaftliche Naturerkenntnis ruht also auf einer Vorstellungsweise a priori, und nicht auf einer durch sinnliche Wahrnehmung bestimmten. So finden wir uns von der Empfindung des Drucks, welchen ein Körper auf unsere Hand ausübt, zu dem Gesetze der Schwere, von der Farbe, welche das Auge an den Körpern vermittelst des Lichts wahrnimmt, zu der Bewegung der Lichtstrahlen hinüber. Die Schwerkraft sowie die Bewegung der Lichtstrahlen sind aber Vorstellungen, welche in reiner Anschauung nach einem Princip a priori und nicht aus der Empfindung bestimmt werden.

Wie können wir nun aber die Tatsachen unter das Gesetz ordnen? Tatsache und Gesetz sind für sich ungleichartig, da sie aus ganz verschiedenen Quellen entspringen. Soll eine solche Unterordnung zu stande kommen, so muß es ein Drittes geben, was mit beiden gleichartig ist; an welchem einerseits die Zufälligkeit der Tatsache und andererseits die Notwendigkeit des Gesetzes angetroffen wird. Den Charakter der Notwendigkeit können aber nur Gesetze an sich tragen, denn alles Tatsächliche bleibt für sich zufällig. Jenes Dritte muß also selbst ein Gesetz sein und doch einen empirischen Ursprung haben. Diese Gesetze sind es, welche man in prägnanterer Bedeutung gewöhnlich „Naturgesetze“ zu nennen pflegt. Sie müssen nach bestimmten methodischen Vorschriften aus dem Tatbestande erforscht werden. Die methodischen Regeln, nach denen dies geschieht und die wir später genauer betrachten werden, begreift man unter dem allgemeinen Namen der Induktion oder des induktiven Verfahrens.

18. Die systematische Form eines wissenschaftlichen Ganzen, in welchem die Tatsachen in ihrer Unterordnung unter die allgemeinen Gesetze erkannt und ihre Verbindung aus diesen erklärt werden, heißt Theorie. Die Physik ist also eine theoretische Wissenschaft. Die Logik belehrt uns, daß jede vollständige theoretische Wissenschaft aus drei verschiedenartigen Erkenntnisweisen zusammengesetzt ist: aus Erfahrung, Mathematik und Philosophie. Die Regel der Vereinigung dieser drei zu einem Ganzen giebt die Form des Vernunftschlusses. Der Philosophie gehört die Allgemeinheit der Gesetzgebung an der Stelle des Obersatzes, der Erfahrung die Mannigfaltigkeit der Tatsachen an der Stelle des Schlußsatzes, und der Mathematik an der Stelle des Untersatzes die Regel der Subsumtion. Die mathematische Anschauung bringt nämlich einerseits (vermöge ihrer Notwendigkeit) die Regel zur historischen Tatsache, andererseits (vermöge ihrer Anschaulichkeit) den Fall zur philosophischen Regel hinzu. Die Mathematik bildet also in der Theorie das verbindende Mittelglied zwischen Philosophie und Erfahrung. Demgemäß giebt es auch zwei entgegengesetzte Eingänge in das mathematische Element einer theoretischen Erkenntnis: den einen von seiten der Philosophie, den andern von seiten der Erfahrung her.

Um dies vollständig deutlich zu machen, müssen wir auf dasjenige zurücksehen, was wir schon (§ 12) gefunden haben. Dort sahen wir, daß der Physik zwei Aufgaben nebeneinander gehören: einmal den Mechanismus eines Naturprozesses geometrisch zu konstruieren, und dann den geometrisch konstruierten Mechanismus aus Naturgesetzen zu erklären. Für einen bestimmten Kreis von

Erscheinungen muß beides induktorisch geschehen, d. h. man muß beides der Erfahrung abfragen, von dieser aus den Eingang in die mathematische Konstruktion suchen. So rechnete Keppler die elliptische Gestalt der Himmelsbahnen und die wahren Gesetze des Sternenlaufs aus den Tychonischen Beobachtungen heraus. Newton aber entdeckte aus den Kepplerschen Gesetzen das Naturgesetz, von welchem die Ellipsengestalt der Bahnen sowie der Mechanismus der Planetenbewegung abhängt.

Nun haben wir (§ 17) gesehen, daß unserer ganzen Naturerkenntnis eine allgemeine und notwendige Naturgesetzgebung a priori zu Grunde liegt. Diese muß demnach, wie sich jetzt ergiebt, den allgemeinen Mechanismus der Natur betreffen, d. h. sie muß philosophische Grundgesetze der Mechanik enthalten, welche mithin durch bloßes Denken a priori erkannt werden können. Daraus geht zweierlei hervor:

1) daß das, was wir vorhin in prägnanterer Bedeutung das Naturgesetz genannt und von welchem wir gesehen haben, daß es für einen bestimmten Kreis von Erscheinungen durch Induktion entdeckt werden müsse, auch a priori gefunden werden könne;

2) daß dieses Naturgesetz das wahre Princip der Unterordnung eines bestimmten Kreises von Erscheinungen unter die Grundgesetze der Mechanik sei.

Ferner die Konstruktion des Mechanismus, welche für jeden bestimmten Naturprozeß gleichfalls induktorisch gesucht werden muß, ist selbst eine Erkenntnisweise a priori. Es muß mithin auch möglich sein, unter jenen Grundgesetzen der Mechanik die verschiedenen Formen der Mechanismen möglicher Naturprozesse a priori und zwar mathematisch zu entwickeln. So begegnen sich Mathematik und Induktion sowohl auf dem Gebiete der Mechanik wie auf dem der Morphologie.

19. Aus dem im vorigen Paragraphen Erörterten geht hervor, daß jene Vorstellungsweise a priori, auf welcher (nach § 17) unsere ganze Naturerkenntnis ruht, eine mathematisch-philosophische ist. Wir erhalten also als Resultat aus unseren bisherigen Betrachtungen dieses:

Unserer ganzen Erkenntnis der Körperwelt liegt nach dem Gesetz der hylologischen Weltansicht eine mathematisch-philosophische Erkenntnis a priori zu Grunde, und deren wissenschaftliche Entwickelung soll die mathematische Naturphilosophie geben.

Neben dieser mathematischen Naturphilosophie steht dann noch eine andere Aufgabe, welche gleichfalls naturphilosophisch ist. Sehen wir nämlich auf die beiden Aufgaben der theoretischen Naturforschung: Konstruktion des Mechanismus eines Naturprozesses und Kenntnis des Naturgesetzes zurück, so muß es auch noch eine Philosophie über die Regeln geben, nach denen wir durch Experiment und Beobachtung d. h. induktorisch diese beiden Aufgaben für die verschiedenen Gebiete der Erfahrung lösen können. Dies ist die naturphilosophische Methodenlehre oder die induktive Naturphilosophie, wie ich sie nennen will. Diese Regeln können nur aus der besonderen Natur jeder Aufgabe abgeleitet werden. Daher lassen sich dem Erfahrungsgehalt nach alle induktorischen Aufgaben der theoretischen Naturlehre philosophisch besprechen. Das Verhältnis dieser induktiven Naturphilosophie zur Physik ist für sich selbst klar. Sie ist eine Propädeutik zu derselben, eine philosophische Methodenlehre zur Physik.

20. Ganz anders ist das Verhältnis der mathematischen Naturphilosophie zur Physik. Denn diese verhalten sich nicht wie Methode und Inhalt zu einander, vielmehr ist die erstere ein integrierender Teil der letzteren selbst. Wir nennen die Physik, inwiefern sie nach den induktorischen Methoden des Experiments und der Beobachtung ausgebildet wird, Experimentalphysik; inwiefern sie aber von dem Standpunkte nicht der angewandten, sondern der reinen Theorie aus ausgebildet wird, mathematische Physik. Die erstere sucht allererst induktorisch das Gesetz. Die andere setzt das Gesetz als bekannt voraus und erklärt in einer konstitutiven Theorie die Erscheinungen aus diesem. Das Gesetz der Entwickelung für diese letztere giebt die mathematische Naturphilosophie. In welchem Verhältnis steht nun da die mathematisch-naturphilosophische Erkenntnis zur Erfahrungserkenntnis?

Wir haben (§ 18. 2.) gesehen, daß dasselbe Naturgesetz, welches wir induktorisch aus der Erfahrung ableiten, auch naturphilosophisch gefunden werden könne. So hatte Newton aus der von Keppler induktorisch gefundenen Form des Mechanismus in unserm Planetensystem das Gravitationsgesetz auf dieselbe Weise gefunden. Man kann aber auch umgekehrt rein theoretisch alle mathematisch möglichen Gesetze für in die Ferne wirkende Grundkräfte aufsuchen. Unter diesen wird sich das Newtonsche Gesetz der quadratischen Abnahme als das einfachste, natürlichste und gleichsam als das naturphilosophische Grundgesetz für durchdringende Grundkräfte zeigen. Allein es liegt ein großer Unterschied in der Gültigkeit des einen und des andern. Denn einmal giebt uns die Induktion den numerischen Wert für die Intensität der Kraft, die Naturphilosophie dagegen läßt diesen Wert unbestimmt. Andernteils berechtigt uns die Naturphilosophie für sich noch nicht, dieses Gesetz auf einen bestimmten Kreis der Erscheinungen anzuwenden. Der Berechtigungsgrund zu dieser Anwendung liegt einzig und allein in der Erfahrung. Erst wenn wir dasselbe Gesetz auch induktorisch gefunden haben, dürfen wir es als Erklärungsgrund brauchen.

Das induktorisch gefundene Gesetz ist also ein **bestimmter Erklärungsgrund** bestimmter Erscheinungen, das naturphilosophische dagegen nur eine **Form möglicher Erfahrung**. Induktorisch müssen also bei der theoretischen Naturforschung die Erklärungsgründe gesucht werden. Allein die Induktion hat für sich selbst kein Urteil über die Natur dieses Erklärungsgrundes; sie kann nicht bestimmen, ob das durch sie gefundene Gesetz ein Grundgesetz sei, oder ob es auf noch andere einfachere Gesetze zurückgeführt werden müsse. Die Naturphilosophie bestimmt dagegen a priori alle möglichen mathematischen Grundformen der Erfahrung. Finden wir nun auf einem bestimmten Gebiet der Erfahrung eine solche gültig, so wissen wir, daß das induktorisch gefundene Naturgesetz auch das Grundgesetz für diesen Kreis von Erscheinungen ist. Dies ist in der Tat mit der Astronomie der Fall.

Die Naturphilosophie leitet uns also nur im Suchen, sie enthält die rechte Disciplin der Hypothesen. Sie soll uns die Gesetze möglicher Hypothesen über die Natur der Körper angeben; bestimmen, welche Voraussetzungen zulässig seien, welche als die einfachsten von allen anzusehen seien, und welche mathematisch bestimmbare Folgen jede einzelne solche Hypothese mit sich führe. Sie ist also die Rüstkammer aller Hypothesen und Erklärungsgründe, sie giebt in letzter Instanz die Entscheidung über die Vollgültigkeit der Naturgesetze.

21. Die mathematische Naturphilosophie enthält die wissenschaftliche Entwickelung der allgemeinen und notwendigen Naturgesetzgebung in abstracto. Diese Naturgesetzgebung enthält (nach § 18) metaphysische Elemente mit mathematischen vereinigt. Es kommt daher in der mathematischen Naturphilosophie Metaphysik mit Mathematik in Verbindung. Sie enthält:

1) einen reinphilosophischen Teil in der Gesetzgebung aus den Kategorieen. Dies sind die allgemeinen metaphysischen Naturgesetze des Wesens, der Bewirkung und der Wechselwirkung;

2) die Unterordnung aller mathematischen Formen der Ordnung, Zahl, Dauer, Gestalt und Bewegung unter jene Naturgesetzgebung aus den Kategorieen.

Die Entwickelung der Lehre von den Formen der Ordnung, Zahl und Gestalt selbst gehört der Syntaktik, der Arithmetik und Geometrie an. Hier suchen wir die Unterordnung derselben unter die metaphysischen Naturgesetze. Worin liegt nun die Regel dieser Subsumtion? Diese Unterordnung ist offenbar nur dadurch möglich, daß wir den metaphysischen Grundgesetzen der Bewirkung eine Darstellung in reiner Anschauung d. h. eine Konstruktion ihrer Begriffe unterzulegen im stande sind. Es muß also Veränderungen geben, die einer mathematischen Konstruktion fähig sind. Diese Veränderungen sind Bewegungen. Die Regel der Subsumtion für die mathematischen Formen unter die Kategorieen sind daher die phoronomischen Gesetze der Bewegung. Bewegung ist also der mathematische Grundbegriff der hylologischen Weltansicht, und die mathematische Naturphilosophie ist reine Bewegungslehre.

Die mathematische Entwickelung dieser Lehre ist die Erfindung und das Werk von Newtons großem Genie. Seine mathematischen Principien der Naturphilosophie sind dadurch zum Gesetzbuch der Naturwissenschaften für alle kommenden Zeiten geworden. Den reinphilosophischen Teil der Wissenschaft hat aber erst später Kant bearbeitet und von Seiten der Metaphysik her durch seine großen philosophischen Entdeckungen ins Klare gebracht. Fries hat alsdann in seiner mathematischen Naturphilosophie mehrere wesentliche Mängel der Kantischen Spekulation verbessert und gezeigt, wie die Philosophie Kants mit der Mathematik Newtons zusammenhängt.

III.

Das Unendliche in der Mathematik.

Von

Gerhard Hessenberg.

Inhalt.

Einleitung.

1. Das Wort „unendlich“ hat in der Mathematik verschiedene Bedeutung, je nach dem Zusammenhang, in dem es gebraucht wird. Wenn diese Bedeutungen nicht mit der nötigen Schärfe auseinander gehalten werden, entsteht ein Gebiet für die Betätigung eines Mysticismus, der die Resultate mathematischer Forschung in ihrer Sicherheit gefährdet. Obwohl die „strenge Schule“ der Mathematiker in einer mehr als hundertjährigen Arbeit den Besitzstand mathematischen Wissens von allen mystischen Hypothesen gereinigt und mit elementaren Hülfsmitteln begründet hat, findet der mathematische Mysticismus noch heute unter den Mathematikern selbst zahlreiche Anhänger[1], wie Erscheinungen der neuesten Literatur immer wieder aufs neue beweisen. Danach ist es nicht erstaunlich, wenn auch unter den Philosophen vielfach die Meinung vorherrscht, die sogenannte „höhere Mathematik“ entbehre einer ausreichenden logischen Begründung und es habe entweder der Mathematiker oder der Logiker diese Lücke auszufüllen. Diesem Irrtum entspringt dann der Vorwurf, die strenge Schule leugne das Unendlichkeitsproblem, statt es zu lösen.

Dies zur Rechtfertigung, daß ich über Dinge berichte, die dem Leser von gründlicher — darum nicht notwendig umfang-

---

[1] Die wenigen bedeutenden Männer, die sich unter diesen fanden, wie z. B. Paul du Bois-Reymond, hielten sich übrigens auf dem Gebiet produktiver Tätigkeit von allem Mysticismus fern.

reicher — mathematischer Bildung trivial erscheinen werden, zumal sie schon von anderer Seite und auch vor einem nicht speziell mathematisch gebildeten Leserkreis dargelegt worden sind.

2. Wir finden das Wort „unendlich“ als reine „façon de parler“ in der Geometrie wie in der Analysis. In der Geometrie der Lage dient es zur formalen Beseitigung des Parallelenaxioms und wird heute vielfach durch das Wort „uneigentlich“ oder „ideal“ ersetzt, wie dies im ersten Kapitel dieses Referates auseinandergesetzt werden soll.

In der Analysis sprechen wir von „unendlich“ im Sinne von „beliebig“, und zwar nennen wir eine Größe „beliebig klein“, wenn sie als derart veränderlich gedacht wird, daß sie kleiner als jede gegebene von null verschiedene Zahl angenommen werden kann; wir nennen sie „beliebig groß“, wenn sie größer als jede gegebene Zahl angenommen werden kann. Die Worte „beliebig klein“, „beliebig groß“ verlangen also bloß: Welche Beschränkungen auch sonst unserer veränderlichen Grösse auferlegt seien, jedenfalls sollen Beschränkungen hinsichtlich der Abnahme (bezw. Zunahme) nicht vorhanden sein. Eine unbeschränkt veränderliche Größe ist darum sowohl beliebig groß wie beliebig klein, eine Tatsache, die den Zusatz „beliebig groß oder klein“ in vielen Fällen (vergl. Kap. IV, Definition des Limes) sachlich überflüssig macht. Eine „beliebig“ oder „unendlich große“ bezw. „kleine“ Größe ist also eine zwar veränderliche, aber stets endliche Größe.

3. Bei dem zuletzt beschriebenen Gebrauch des Wortes „unendlich“ für „beliebig“ spielt bereits das wirklich Unendliche als Negation des Endlichen herein. Es giebt nicht nur beliebig große Zahlen, sondern auch beliebig viele. Die Operation des Zählens,

die die ganzen Zahlen liefert, kann nicht zu Ende geführt werden, sie ist unvollendbar; die Menge der ganzen Zahlen ist eine unendliche, wobei jedes Individuum dieser Menge durch eine endliche Anzahl von Operationen erzeugt, durch eine endliche Anzahl von Zeichen beschrieben und selbst eine endliche Zahl ist. Das gleiche gilt offensichtlich von der Menge aller rationalen (ganzen und gebrochenen) Zahlen und, wie wir in Kap. VIII zeigen wollen, auch von der aller Irrationalzahlen.

Wenn in der reinanschaulichen Tatsache der Unvollendbarkeit des Zählens und der daraus folgenden Unendlichkeit der Menge aller Zahlen ein mathematisches oder logisches Problem steckt, so ist es doch jedenfalls bis heute nicht scharf formuliert worden, so daß auf eine Diskussion oder Lösung desselben verzichtet werden muß. Wir werden in diesem Referat zu zeigen haben, daß ein anderes Unendlichkeitsproblem jedenfalls in der Begründung der Infinitesimalrechnung nicht auftritt.

I.
Parallelentheorie.

4. Das Unendlichferne in der Theorie der Parallelen wird heute in allen besseren Lehrbüchern so einwandfrei dargestellt, daß es kaum nötig ist, darauf einzugehen. Immerhin ist gerade dieses Gebiet für mystisch veranlagte Gemüter besonders verlockend und andererseits der mathematische Inhalt so einfach zu präzisieren, daß es hier vielleicht am ehesten lohnt, die Unabhängigkeit der Resultate geometrischer Forschung von der individuellen Anschauung über das „Wesen des Unendlichen“ darzutun.

Auf Grund des Parallelenaxioms haben zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, entweder einen gemeinsamen Punkt oder ein gemeinsames Richtungspaar (eine Richtung und die entgegengesetzte.) Das „entweder — oder“ kann ausgeschaltet werden, wenn wir Punkte und Richtungspaare unter einem Sammelnamen zusammenfassen. Wir verfahren dabei wie die Veranstalter der Vogel- und Kaninchen-Ausstellungen, die die Kaninchen einfach zu den Vögeln rechnen: Wir verstehen unter „Punkt“ fortan erstens das, was früher mit diesem Wort bezeichnet wurde, zweitens aber auch das Richtungspaar einer Geraden. Wollen wir die alte Unterscheidung wieder einführen, so sprechen wir von „eigentlichen“ und „uneigentlichen“, „realen“ und „idealen“, von „im Endlichen gelegenen“ und „unendlichfernen“ Punkten.

Hiermit haben wir zunächst ein neues Wort eingeführt, verpflichten uns aber damit ebensowenig, die Richtung für irgendwie gleichartig mit dem eigentlichen Punkt zu halten, wie der Kaninchenliebhaber, der die Vogelausstellung beschickt, von seinen Kaninchen verlangt, daß sie Eier legen sollen.

5. Es fragt sich nun, welchen Einfluß unsere neue Bezeichnung auf die Formulierung der Axiome hat. Die Sätze, daß eine Gerade durch zwei ihrer Punkte, die Ebene durch drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte bestimmt ist, bleiben in Giltigkeit, der zweite allerdings nur, wenn wir von drei Richtungen in einer Ebene festsetzen, daß sie als in einer „uneigentlichen“ Geraden liegend bezeichnet werden sollen. Dies veranlaßt uns weiter, die Gesamtheit aller Richtungen, die in einer Ebene liegen, als eine „uneigentliche“ oder „unendlichferne“ Gerade zu bezeichnen, womit wir für die Begriffe „Gerade“ und „Stellung“ wieder einen Sammelnamen eingeführt haben. Nunmehr ist auch der Satz wieder giltig, daß durch zwei Punkte s t e t s eine Gerade bestimmt ist. Bezeichnen wir noch die Gesamtheit aller Richtungen des Raumes als die „unendlichferne Ebene“ des Raumes, so ist auch der Satz wieder-

hergestellt, daß durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte oder durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt oder durch zwei Gerade, die einen Punkt gemeinsam haben, stets eine Ebene geht.

Fernerhin gelten jetzt ausnahmslos (im Gegensatz zur Euklidischen Formulierung) die Sätze, daß zwei Gerade in einer Ebene stets einen Punkt, zwei Ebenen stets eine Gerade gemeinsam haben. Das Parallelenaxiom wird dadurch, wie von vornherein klar war, ausgeschaltet. Die übrigen Axiome zu betrachten, lohnt nicht der Mühe. Teilweise erfahren sie einfache Modifikationen, teilweise bleiben sie unbeeinflußt, weil ihr Gültigkeitsbereich auf uneigentliche Elemente nicht ausgedehnt werden kann. Sätze z. B., die vom Abstand zweier Punkte handeln, können nicht erweitert werden, da eine Richtung und ein Punkt oder zwei Richtungen keinen Abstand voneinander haben. Da die Redeweise der „uneigentlichen Elemente“ nur in der Geometrie der Lage, d. h. in demjenigen Gebiet der Geometrie angewandt wird, wo von metrischen Beziehungen nicht die Rede ist, ist die Unmöglichkeit, Größensätze auf uneigentliche Elemente auszudehnen, ohne Schaden. Das Wort „unendlichfern“ ist außerdem ein sehr bequemes Memento, welches von vornherein verhindert, Größenbeziehungen auf uneigentliche Elemente anzuwenden.

6. Die eminente Zweckmäßigkeit dieser „Umnennung“ für die „Geometrie der Lage“ kann hier nicht ausführlich erörtert werden, weil es uns zu weit führen würde. Es sei aber bemerkt, daß die Lehrbücher der Geometrie der Lage den dreifachen Umfang annehmen würden, wenn jeder einzelne Satz in die Euklidische Terminologie zurückübersetzt und dadurch in zahllose Specialfälle zerspalten würde.

Was für ein spezielles Gebiet zweckmässig ist, braucht darum nicht auch für andere Gebiete zu taugen. So wird in der Theorie der komplexen Zahlen die Gesamtheit aller Richtungen einer Ebene als ein Punkt, als „der unendlichferne Punkt“ der Ebene, bezeichnet. Natürlich werden durch diese Festsetzung die Axiome in ganz anderer Weise korrigiert, wie in der Geometrie der Lage; in der formalen Natur solcher Umnennungen liegt es begründet, daß sie nicht nur auf eine Weise logisch möglich sind.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß unsere Ausführungen in einfacher Weise den reinlogischen Charakter geometrischer Schlußweise, wenigstens für die Geometrie der Lage, erhärten. Denn die Zusammenfassung zweier anschaulich heterogener Begriffe unter einen Sammelnamen erfolgt lediglich auf Grund gemeinsamer begrifflicher Merkmale.

7. Daß Spekulationen über etwaige andere als rein begriffliche Gemeinschaftlichkeit von Punkt und Richtung für den Mathematiker und die Resultate seiner Forschung wertlos sind, dürfte nach dem Vorhergehenden klar sein. Geichwohl mag auf eine der am weitesten verbreiteten Spekulationen mit einigen Worten eingegangen werden.

Man denke sich eine Gerade g, und einen Punkt A außerhalb, der mit einem auf g wandernden Punkt P durch eine Gerade PA verbunden sei. Man pflegt zu sagen: Wandert P auf g immer weiter hinaus, so geht PA in die Parallele a durch A zu g über. Es kann aber nur behauptet werden, daß der Winkel zwischen a und AP kleiner gemacht werden kann, als ein beliebig vorgeschriebener. Daß PA mit a zusammenfiele, ist durch die Definition von PA ausgeschlossen.

Häufiger noch wird das Problem umgekehrt: „Dreht sich eine

Gerade durch A, so geht sie stetig aus der Lage der Schneidenden in die der Parallelen a über, also muß auch der Schnittpunkt stetig in den unendlichfernen Punkt übergehen.“ Sowohl die ausgesprochene wie die verschwiegene Prämisse dieses Schlusses sind falsch. Es ist erstens unwahr, daß ein stetiger Vorgang nur wieder stetig verlaufende im Gefolge haben kann. Das werden wir auf analytischem Gebiete noch klarer sehen. Es ist zweitens unwahr, daß die Drehung einer unbegrenzten Geraden eine stetige Bewegung im Sinne der Bewegung ihrer Punkte sei. Wie klein auch der Winkel sei, um den eine Gerade gedreht wird, stets giebt es Punkte auf ihr, die dabei Wege von vorgeschriebener Größe zurücklegen. Zieht man von einem Punkte des Sirius Gerade nach Berlin und Paris, so ist der Winkel dieser Geraden unmeßbar klein; trotzdem verlaufen sie auf Erden in einem Abstand von mehreren hundert Kilometern.

Stetig sowohl in den einzelnen Punkten wie in der Richtung kann sich nur eine Strecke bewegen, d. h. ein endliches Stück einer Geraden. Eine Strecke kann aus einer Lage, in der sie, verlängert, eine andere Gerade trifft, stetig in die Lage gedreht werden, in der sie der anderen parallel ist[1].

II.

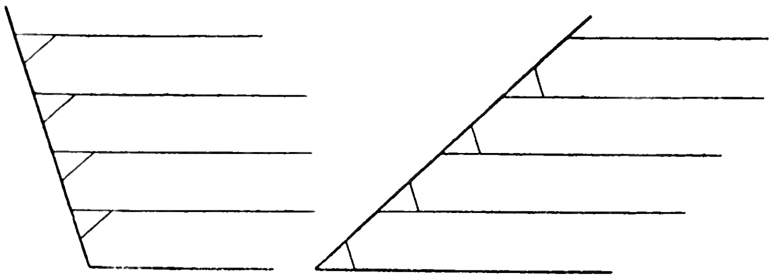
Winkelmessung.

8. Wir wenden uns einem Beispiel zu, bei dem das Unendliche wirklich auftritt. Unter einem Winkel versteht man das System zweier von demselben Punkt ausgehenden Halbstrahlen. Man nennt zwei Winkel kongruent, wenn das Ebenenstück, welches

[1] Es kann auch z. B. niemals ein ganzer Kreis punktweise stetig in eine Gerade übergehen, sondern nur ein Kreisbogen in ein endliches Stück einer Geraden.

zwischen den Halbstrahlen des einen liegt, mit dem entsprechenden Ebenenstück des andern ohne Zerschneiden zur Deckung gebracht werden kann. Diese Definition mag zwar den modernen Anforderungen an Strenge nicht genügen, weil nicht erklärt ist, was unter „zur Deckung bringen“ zu verstehen ist. Da ich mich aber hier nicht an Fachmathematiker ausschließlich wende, ziehe ich den Appell an die Anschauung vor.

Der Zusatz: „ohne Zerschneiden“ ist sehr wesentlich. Denn durch Zerschneiden kann jeder Winkel mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden. Ein spezielles Verfahren zeigt neben-



stehende Figur für den Hauptfall, (auf den der allgemeine durch mehrmalige Wiederholung des Verfahrens zurückgeführt werden kann), in dem beide Winkel konkav sind.

Die Möglichkeit einen Winkel durch Zerschneiden in einen beliebigen andern zu verwandeln, scheint in schroffem Widerspruch mit dem Satze zu stehen, daß das Ganze größer sei, als ein Teil desselben: Wird der Winkel PQR durch die Gerade QU so zerlegt, daß $UQR = \alpha$ ist, so ist α ein Teil von PQR und als solcher kleiner wie PQR. Bei Zerlegung in unendlichviele Dreiecke und Streifen wird dagegen α gleich PQR, wenn bloß eine andere Anordnung dieser Teile gewählt wird. Dieser scheinbare Widerspruch zeigt, wie Recht der Mathematiker hat, wenn er auf die Anwendung von Sätzen prinzipiell verzichtet, deren Gültigkeitsbereich nicht scharf umschrieben ist.

Der allgemeine Größensatz, wonach das Ganze größer als der Teil ist, muß demnach entweder in seiner Gültigkeit beschränkt werden, sofern die Begriffe „größer“ und „gleich“ sich ausschließen sollen, oder umgekehrt: dieser Ausschließung der Begriffe kann nur eine beschränkte Gültigkeit zugestanden werden.

In beiden Fällen handelt es sich um lediglich formal verschiedene Bezeichnungen für folgende Tatsache:

Wenn irgend eine Methode der Vergleichung zwei Dinge A und B sowohl verschieden, wie gleich erscheinen läßt, so nennt der Mathematiker diese Dinge hinsichtlich dieser Vergleichungsmethode unendlich [1]. Ist die Vergleichungsmethode dagegen derart, dass „kleiner“, „gleich“ und „größer“ sich ausschließen, so nennt man die verglichenen Objekte hinsichtlich dieser Methode „endlich“. — Bisher ist die Mengenlehre das einzige Gebiet der Mathematik, in dem mit „unendlichen Vergleichungsmethoden“ gearbeitet wird. Wir haben im folgenden zu zeigen, daß die elementare Geometrie ihre Vergleichungsmethoden so einschränkt, daß die Endlichkeit gewahrt bleibt.

9. Um Winkel auf ihre Gleichheit zu prüfen, wird, wie wir sahen, jede Zerlegung überhaupt ausgeschlossen. Um aber zu prüfen, welcher von zwei ungleichen Winkeln der größere ist, müssen Zerlegungen angewandt werden; ebenso bei der Messung der Winkel. Es muß festgesetzt werden, welche Zerlegungen zulässig sind, wenn die Endlichkeit gewahrt bleiben soll.

---

[1] In diesem Falle wird übrigens in Rücksicht auf den Sprachgebrauch das Wort „gleich“ besser durch „gleichwertig“ oder „äquivalent“ ersetzt.

In unserem Beispiel wurden die zu vergleichenden Winkel in unendlich viele Teile zerlegt. Es liegt nahe, die Zerlegung auf eine endliche Anzahl von Teilen zu beschränken. Man sieht aber leicht, daß damit die Endlichkeit nicht gewahrt wird. Schneidet man nämlich von einem Winkel durch eine Parallele zum einen Schenkel einen Streifen ab, so ist der Rest wieder ein Winkel, der dem ursprünglichen gleich ist.

Die Zerlegung von Winkeln zu Messungszwecken ist seit altersgrauen Zeiten nie anders gehandhabt worden, als mit Halbstrahlen durch den Scheitel. Hierbei folgt die Endlichkeit sofort aus dem Axiom, daß der durch Aneinanderlegen mehrerer Winkel entstehende Winkel stets der gleiche ist, in welcher Reihenfolge auch die Teilwinkel angeordnet wurden. Zugleich sieht man, daß allein bei dieser Methode der Teilung alle Teile wieder Winkel sind.

Trotz des ehrwürdigen Alters dieser Meßmethode, trotz der Unzulässigkeit anderer Zerlegungen, giebt es noch immer Sonderlinge, die die Winkel durch Zerlegen in Streifen oder gar Polygone vergleichen wollen.

III.

Flächenmessung an Polygonen.

10. Die Kritik, die an unserem allgemeinen Größensatz vom Ganzen und dem Teil geübt werden mußte, hat ein fruchtbares Ergebnis über Vergleichung endlicher Flächenstücke gezeitigt. Die Flächengleichheit ebener Polygone wird nachgewiesen [1], indem das eine in Teile zerlegt und das andere aus diesen wieder zusammen-

[1] unter Anwendung des „Archimedischen“ Axioms: Ist eine Strecke a kleiner als eine andere b, so giebt es ein vielfaches von a, welches grösser als b ist.

gesetzt wird[1]. Trotzdem die Zahl dieser Teilpolygone endlich ist, steht es zunächst nicht fest, ob nicht, wie bei den Winkeln, jedes Polygon durch Zerlegen in jedes andere verwandelt werden kann, also jedem andern flächengleich ist; die Endlichkeit eines Flächeninhalts gegenüber dem Zerschneiden in Teilpolygone ist erst gewährleistet durch folgenden Satz:

„Zerlegt man ein Polygon in eine endliche Anzahl von Teilpolygonen so kann man aus einem Teil derselben das ursprüngliche Polygon nicht zusammensetzen."

Diesen Satz nach dem Vorgang des Euklid aus dem allgemeinen Größensatz vom Ganzen und seinem Teil zu folgern, bedeutet eine petitio principii, denn unser Größensatz ist — sofern größer und gleich sich ausschließen, — nur anwendbar, wenn der Flächeninhalt endlich ist. Entweder ist also der zitierte Satz ein Axiom — wie man auch anfangs annahm, — oder ein Lehrsatz. Neuere Untersuchungen haben ihn beweisen gelehrt und damit zu einem Resultat von allgemeinem Interesse geführt. —

11. Würde man den Flächeninhalt als Gesamtheit aller im Innern und auf der Begrenzung gelegenen Punkte betrachten, so wäre die Forderung der Endlichkeit nicht erfüllt. Z. B. ist eine Karte von Europa, an irgend einer Stelle Europas aufgeschlagen, ein Teil der Oberfläche Europas und enthält daher weniger Punkte als Europa. Andererseits zeigt der Gebrauchszweck der Karte, daß jeder ihrer Punkte eindeutig einem Punkte Europas entspricht

[1] Jeder elementare Beweis der Flächengleichheit von Polygonen, auch wenn sie aus Proportionen gefolgert wird, birgt zugleich, wenn er auf seine Elemente zurückgeführt wird, die Methode in sich, um die Zerlegung auszuführen. Aus dem Vorwurf Schopenhauers, der Euklidische Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes sei erschlichen, läßt sich schließen, daß ihm diese fundamentale Tatsache unbekannt war. —

und umgekehrt, daß sie also ebensoviel, ja, sofern auch noch Meeresoberfläche und Teile von Asien und Afrika auf ihr dargestellt sind, mehr Punkte enthält als Europa[1]. —

Daß in der elementaren Geometrie das Unendliche strikte ausgeschaltet wird, glaube ich dargetan zu haben. Daß es auch bei der Messung irrationaler Größen nur scheinbar vorkommt, wird sich weiter unten ergeben. —

IV.

Begriff des Limes.

12. Es ist gemeinhin die Ansicht verbreitet, daß der Grenzbegriff, durch dessen bewußte Ausgestaltung die sogenannte „höhere Mathematik" charakterisiert wird, das Unendliche in die Mathematik einführe. Betrachten wir den Grenzbegriff an einem speziellen Beispiel, an der Zahlenfolge[2]:

$$a_1 = \frac{3}{10}, \quad a_2 = \frac{33}{100}, \quad a_3 = \frac{333}{1000}, \quad a_4 = \frac{3333}{10000} \quad \text{u. s. f.}$$

Diese Zahlen können als Differenzen folgendermassen geschrieben werden:

$$a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}, \quad a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{300}, \quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3000},$$

allgemein

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^n}.$$

---

[1] Auf die Vergleichung von Längen ist dieses Verfahren der punktweisen Beziehung bis in die neueste Zeit, allerdings nicht von maßgebenden Persönlichkeiten, allen Ernstes angewandt worden.

[2] Da das Wort „Reihe" zumeist eine Summe zu bezeichnen pflegt, spreche ich im folgenden, wo die Aufforderung zur Summation nicht vorliegt, von einer „Folge." —

Aus dieser Darstellung ergiebt sich folgende Beziehung zwischen der Folge und der Zahl $\frac{1}{3}$:

(1.) Die Differenzen $\frac{1}{3}-a_n$ sind von einem bestimmten Index n an für alle größeren Indizes kleiner als $\frac{1}{3.10^n}$. Ich kann also zu jeder noch so kleinen Zahl p, die nur nicht null sein darf, stets eine Stelle in der Folge angeben, von der an alle Differenzen $\frac{1}{3}-a_n$ kleiner als p sind.

Den Tatbestand dieses Satzes fassen wir in die Worte zusammen: „Die Glieder der Folge convergieren gegen $\frac{1}{3}$“, oder: „$\frac{1}{3}$ ist der Grenzwert (Limes) der Folge.“ In Form einer Gleichung schreiben wir

$$\lim a_n = \tfrac{1}{3}.$$

Sodann betrachten wir die Folge

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad \ldots \quad a_n = 2^n, \quad \ldots.$$

Wir beobachten an ihr folgendes:

(2.) Von einer bestimmten Stelle n an sind alle Glieder größer (auch hinsichtlich des Vorzeichens) als 2^n. Ich kann daher zu jeder noch so großen Zahl p stets eine Stelle der Folge angeben, von der an alle Glieder größer, (mindestens gleich) p sind.

Den Tatbestand dieses Satzes fassen wir in die Worte zusammen: „Die Glieder der Folge werden positiv unendlich.“ In Form einer Gleichung schreiben wir hierfür

$$\lim a_n = +\infty.$$

Sind die Glieder einer Folge alle negativ und ihre absoluten Beträge werden unendlich, so sagen wir: „Die Glieder der Folge werden negativ unendlich“, und schreiben

$$\lim a_n = -\infty.$$

13. Wir haben zu prüfen, ob in den Sätzen (1.) und (2.) der Unendlichkeitsbegriff irgend wie auftritt. Ist dies nicht der Fall, so ist auch in den kürzeren Sätzen und Zeichen, mit denen wir den Tatbestand dieser Sätze umschreiben, das Wort unendlich und das Zeichen ∞ nur eine „façon de parler". — Das Wort „unendlich" kommt in den Sätzen (1.) und (2.) nicht vor. Man könnte aber den Unendlichkeitsbegriff zunächst in den gesperrten Worten: „noch so kleinen" (Satz 1), „noch so großen" (Satz 2) suchen. Die Zahl p ist aber in beiden Fällen stets eine endliche, und ob sie groß oder klein ist, ist eine Frage, die in der Mathematik keinen Sinn hat, weil eine Zahl weder groß noch klein, sondern höchstens größer oder kleiner als eine andere ist. Diese gesperrten Zusätze sind also überflüssig und können wegbleiben.

Nunmehr könnte das Unendliche darin gesucht werden, daß von jeder Zahl p und allen Indices von einer bestimmten Stelle an, also beidemal von allen Zahlen gesprochen wird. Damit spielt man die Unendlichkeitsfrage hinüber in die Tatsache der Allgemeingültigkeit mathematischer Sätze. Es enthielte dann die Behauptung, daß für jede („noch so kleine" oder „noch so große") Zahl p:

$$(1-p)(1+p) = 1-p^2$$

ist, bereits das Unendlichkeitsproblem in sich.

In der Tat besäße das Zeichen $\lim a_n = A$ auch dann auf Grund seiner Definition einen wohldefinierten Sinn, wenn etwa die Anzahl der möglichen Werte der Größen a_n eine endliche wäre. Verstände man unter ∞ den größten derselben, so besagte die Gleichung $\lim a_n = A$, daß von einem bestimmten Index an alle a_n den Wert A haben. Wäre auch die Reihe der Indices eine endliche, so wäre unter $\lim a_n$ das letzte Glied der Folge $a_1, a_2 \ldots$ zu verstehen.

14. Wird nun auch die Unendlichkeit der Zahlenreihe durch unsere Definition des Limes nicht gefordert, so verleiht sie doch dem Begriff erst seine grundlegende Bedeutung. Denn die Grenze einer Folge braucht unter den Gliedern der Folge nicht vorzukommen; sie ist in dem ersten Beispiel des § 12 in der Tat von allen Werten a_n verschieden. Im Falle des Satzes (2.) ist die Grenze überhaupt eine fingierte, sie kann also gar nicht unter den Gliedern der Folge auftreten.

Besitzt eine Folge im Sinne des Satzes (1.) einen eigentlichen, d. h. endlichen Limes, so heißt sie „convergent“. Jede nicht convergierende Folge heißt „divergent“. Z. B. sind alle Folgen mit einem uneigentlichen (fingierten, unendlichen) Limes divergent. Aber auch die Folge $+1, -1, +1, -1, + - + - \ldots$ ist divergent, obwohl sie keinen unendlichen Limes besitzt. Die Folgen mit einer uneigentlichen Grenze bilden also nur einen Teil der divergenten Folgen. Wir beachten übrigens noch, daß der in Satz (2.) eingeklammerte Passus „mindestens gleich“ bei unendlicher Zahlenreihe überflüssig ist.

Es sei nun nochmals scharf umschrieben, was das Zeichen $\lim a_n = A$ für eine unbegrenzte Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ bedeutet. Es besagt: Zu jedem von null verschiedenen positiven p kann ein n angegeben werden, so daß für alle $m > n$

$a_m - A$ dem absoluten Betrag nach kleiner ist als p, wenn für A eine Zahl steht,

a_m größer ist als p, wenn für A das Zeichen $+\infty$ steht,

$(-a_m)$ größer ist als p, wenn für A das Zeichen $-\infty$ steht.

15. Der Leser von gründlicher mathematischer Bildung wird unschwer erkennen, daß mit dem Limesbegriff zugleich alle Sätze der unendlichen Reihen, Differentialrechnung und Integralrechnung des mystischen Zaubers entkleidet sind. Wenn ich im Folgenden trotzdem darauf eingehe, so geschieht es um einiger spezieller Gesichtspunkte und besonders hartnäckig wiederkehrender Mißverständnisse willen. Speziell könnte man uns einwenden, daß mit dem so umgrenzten Limesbegriff gewisse Beweise nicht geführt werden können. Der Vorwurf ist unbegründet. Als prinzipiell wichtigstes Beispiel greifen wir folgenden Satz heraus:

Eine unendliche Folge kann höchstens einen Limes haben. Daß der Limes einer Folge nicht zugleich endlich und unendlich sein kann, ist klar. Es fragt sich daher, ob gleichzeitig $\lim a_n = A$ und $\lim a_n = B$ sein kann, wenn A und B von einander verschiedene (endliche) Zahlen (etwa 7 und 12) sind.

$\lim a_m = A$ bedeutet: für alle m oberhalb eines gewissen n ist $a_m - A$ dem absoluten Betrag nach kleiner als p. Ebenso ist also, oberhalb eines möglicherweise anderen n, $a_m - B$ kleiner als p, also für ein m oberhalb beider n gleichzeitig $a_m - A$ und $a_m - B$ absolut kleiner als p. Daraus folgt nach elementaren Sätzen, daß $A - B$ dem absoluten Betrag nach sicher kleiner ist als $2p$.

Wir erinnern uns, daß p jede Zahl, außer null, sein kann. Sind also A und B von einander verschieden und etwa A die größere Zahl, so kann p kleiner als $\frac{A-B}{2}$ sein, woraus der Widerspruch folgen würde, daß $A - B$ kleiner als $A - B$ sei. Es bleibt daher nur die triviale Möglichkeit, daß $A - B$ gleich null ist, wodurch die Ungleichung $A - B < 2p$ mit der Bedingung identisch wird, daß p eine positive von Null verschiedene Zahl sein soll, also keinen Widerspruch ergiebt.

Den Beweis eines zweiten wichtigen Satzes, von dem wir im folgenden einige wichtige Anwendungen machen werden, wollen wir weiter unten (§ 35) geben. Er lautet:

Ist in einer Folge a_n jedes Glied grösser als das vorhergehende, so besitzt die Reihe einen Limes im eigentlichen oder übertragenen Sinne.

V.

Unendliche Summen.

16. Sofern die Zeichen $+$, $-$ zur Ausführung gewisser Operationen auffordern, hat das Symbol

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm a_5 + \cdots$$

nur einen Sinn, wenn eine endliche Zahl von Gliedern darin verknüpft sind. Eine Addition, die kein Ende nimmt, fördert auch kein Resultat zu Tage. Nun kann man aber mit dem angeschriebenen Symbol auch formal algebraisch rechnen, ohne die einzelnen Terme wirklich zusammenzufügen. Beispielsweise kann das distributive Gesetz $c(a+b) = ca + cb$ ohne weiteres auf unendliche Summen angewandt werden:

$$c(a_1 + a_2 + \cdots) = ca_1 + ca_2 + \cdots.$$

Es kann nun gefragt werden: wie weit lassen sich die formalen Rechengesetze widerspruchslos auf Ausdrücke anwenden, die aus unendlich viel Gliedern bestehen und welcher Sinn läßt sich dann diesen Ausdrücken unterlegen? In dieser Allgemeinheit wollen wir die Frage nicht anfassen, wir wollen aber zunächst zeigen, daß bei unendlichen Summen durch unbeschränktes formales Rechnen stets Widersprüche auftreten.

Es ist nämlich formal

$$\begin{aligned}
a_1 &= p + (a_1 - p)\\
a_2 &= -(a_1 - p) + (a_1 + a_2 - p)\\
a_3 &= -(a_1 + a_2 - p) + (a_1 + a_2 + a_3 - p)\\
a_4 &= -(a_1 + a_2 + a_3 - p) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - p)
\end{aligned}$$

u. s. f.

Beachtet man weiter, daß $(a+b)+c = a+(b+c)$, so erhält man durch Addieren unserer Gleichungen

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots = p + [(a_1 - p) - (a_1 - p)] + [\qquad] + [\qquad]$$

wobei in den eckigen Klammern stets die Differenz zweier gleicher Ausdrücke, also null, steht. Über p war gar nichts vorausgesetzt, es kann beispielsweise auch null sein, so daß jede unendliche Summe formal in das Symbol

$$0 + 0 + 0 + 0 \ldots$$

und somit in jede andere unendliche Reihe verwandelt werden kann. Daß formales Rechnen mit unendlichen Ausdrücken nur unter beschränkenden Voraussetzungen möglich ist, ist somit klar. Die einzige in größerem Umfange bisher durchgeführte Einschränkung ist die auf konvergente Ausdrücke. Dieselbe möge für die unendliche Summe erläutert werden.

17. Führt man die durch die unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

geforderten Additionen in der vorgeschriebenen Reihenfolge aus, so erhält man die unendliche Folge

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Wenn diese Folge im Sinne des Kap. III einen endlichen Limes s besitzt, so nennt man diesen den „Wert der convergenten unendlichen Summe $a_1 + a_2 + \cdots$“ und schreibt die Tatsache seiner Existenz in Gleichungsform:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

Hiermit wird nicht behauptet, daß die Additionen der rechten Seite irgendwie ausführbar wären, geschweige denn das Resultat s lieferten.

Mit einer konvergenten unendlichen Summe kann im allgemeinen noch nicht unbeschränkt gerechnet werden. Eine weitere Zerlegung der einzelnen Glieder der Summe ist ja, wie in § 16 gezeigt war, auf keinen Fall unbeschränkt zulässig; sie darf aber ausgeführt werden, wenn die durch Zerlegung entstehende Reihe selbst wieder konvergent ist, wie in folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{nat} 2 &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} \text{ in inf.} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Das Zusammenfassen aufeinanderfolgender Terme ist unbeschränkt gestattet, so daß die obige Reihe auch als

$$1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \frac{1}{8.9} \cdots \text{ in inf.}$$

geschrieben werden kann. Bei diesen Umformungen bleibt der Limes s der Reihe unverändert. Ausführbar ist auch die Multiplikation mit einer beliebigen Zahl nach dem distributiven Gesetz und umgekehrt das Herausziehen eines Faktors, wie in folgendem Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots \\ &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \cdots \\ &= 2\left\{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Dagegen ist das Umstellen der Glieder nur zulässig, wenn die Summe der positiven Terme der Reihe für sich konvergiert[1]. Man nennt alsdann die Reihe „absolut konvergent“[2]. Mit einer absolut konvergenten Reihe kann also fast ohne Beschränkung formal gerechnet werden, und zwar stimmen alsdann alle ihre formalen Eigenschaften mit denen ihres Limes überein. So ist beispielsweise die Reihe

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots$$

absolut konvergent. Demnach ist nach gliedweiser Multiplikation mit 2:

---

[1] In diesem Fall konvergiert, wie unmittelbar ersichtlich, auch die Reihe der negativen Terme für sich, sofern die ganze Reihe konvergiert. Der Limes der ganzen Reihe ist alsdann die Differenz der Limites der positiven Reihe und der negativen.

[2] Die beiden Reihen für log nat 2 und $\frac{\pi}{4}$ sind nicht absolut konvergent. In der That ist z. B.:

$$\begin{aligned} 2x &= 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \\ &= 2+x \end{aligned}$$

Also $x = 2$.

In der Tat ist 2 der Limes der Reihe.

18. Der Zusammenhang zwischen einer Reihe und ihrem Limes kann noch etwas weiter geführt werden, wobei wir uns aber auf Reihen mit lauter positiven Gliedern beschränken wollen. Es ist eine durchaus elementare Tatsache, daß man von einer endlichen Größe in unbegrenzter Folge Teile derart wegnehmen kann, daß immer etwas übrig bleibt, wenn man nämlich immer wieder von dem verbliebenen Rest einen Teil wegnimmt. Man kann diese unbegrenzte Wegnahme so ausführen, daß die unendliche Folge der Reste gegen null konvergiert. So verfährt z. B. die bekannte sparsame Hausfrau, deren Butter nie alle wird, weil sie immer nur die Hälfte des noch vorhandenen Quantums benutzt. Eine solche Teilung mit gegen null convergierenden Resten wollen wir eine *erschöpfende Teilung* (Exhaustion) nennen. Nun sieht man sofort, daß die einzelnen Teile einer erschöpfenden Teilung eine convergente unendliche Reihe bilden, deren Summe gegen das geteilte Ganze convergiert. Aber umgekehrt ist auch jede convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern nichts anders als eine Exhaustion ihres Grenzwertes, so daß wir sagen können: *Der Mathematiker läßt sich nur auf solche*

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-++-++=\frac{3}{2}\log\operatorname{nat}2$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}--+--+ \qquad =\frac{1}{2}\log\operatorname{nat}2$$

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}++-++- \qquad =\frac{1}{4}(\pi+\log\operatorname{nat}2).$$

unendliche Reihen ein, von denen nachgewiesen worden ist, daß sie durch Exhaustion einer **endlichen Größe** entstehen.

Hiermit dürfte den unendlichen Reihen der letzte mystische Anstrich geraubt sein.

VI.

Stetigkeit und Unendlichkeit von Funktionen.

19. Für die folgenden Betrachtungen sei kurz darauf hingewiesen, daß es eine Division durch null nicht giebt. a durch b dividieren heißt: eine Zahl finden, die mit b multipliciert a ergiebt. a durch null dividieren heißt also: eine Zahl finden, die mit null multipliciert a ergiebt. Nun ist aber das Produkt jeder Zahl mit null wieder null. Ist also a nicht null, so verlangen wir Unmögliches, weil es keine Zahl der verlangten Art giebt. Ist dagegen a selbst null, so ist die Frage durch jede Zahl beantwortet, das Symbol $\frac{0}{0}$ hat also keinen bestimmten Sinn.

Nunmehr gehen wir zum Funktionsbegriff über. Wir denken uns eine „Menge" von Zahlen x. Es könnten endlich viele sein, doch davon sehen wir sogleich ab. Also etwa alle unendlich vielen Zahlen überhaupt, alle Zahlen eines bestimmten Intervalles zwischen a und b, alle ganzen Zahlen überhaupt oder alle rationalen zwischen zwei Grenzen, alle Zahlen über 3, über null, — jedenfalls sei festgelegt, welche Werte „x annehmen" darf, d. h. welche Werte unter dem Zeichen x gedacht werden dürfen. Es sei irgendwie jedem x eine einzige bestimmte Zahl y zugeordnet[1],

[1] Es bezeichnet also x im folgenden nur Zahlen, denen ein y zugeordnet ist. In $\frac{2x-3}{x-7}$ z. B. ist unter x niemals 7 zu verstehen!

so haben wir eine „Funktion von x.“ In einer Tabelle können die Werte y nur für eine endliche Zahl von Werten der x angegeben werden. Es wird sich also stets um ein Gesetz handeln, welches vorschreibt, wie y aus x zu ermitteln ist. Z. B. das Gesetz

$$y = \frac{2x-3}{x-7}$$

ordnet jeder Zahl mit Ausnahme der Zahl 7 (weil durch Null nicht dividiert werden kann,) einen Wert y zu, ebenso das Gesetz

$$z = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

jede Zahl mit Ausnahme von 3 einen Wert z. Es kann also den Definitionen von y und z, ohne daß ein Widerspruch entsteht, hinzugefügt werden: $y = b$ für $x = 7$, $z = c$ für $x = 3$, wobei b und c irgend zwei Zahlen sein können. —

20. In vielen Fällen genügt die alleinige Zuordnung von Werten durch eine Funktion, z. B. beim praktischen Rechnen mit Logarithmen. Bei tiefergehenden Untersuchungen interessiert aber der „Verlauf“ der Funktion. Wir denken uns irgend eine unendliche Folge von x-Werten und studieren die Folge der zugeordneten y-Werte[1]. Die Folge der x-Werte nehmen wir als ständig wachsende oder ständig abnehmende an, so daß nach dem später zu erweisenden Satze des § 15 $\lim x$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$ oder eine Zahl a ist. Von der Folge der y-Werte kann zwar nicht behauptet werden, daß sie auch ständig wachse oder

[1] Da „x“ nur Werte bezeichnet, denen ein y zugeordnet ist, steht also die Existenz der y-Folge außer Frage.

abnehme, (vgl. das erste Beispiel im § 21, Fußnote.) Doch gilt mit wenigen Ausnahmen für die Funktionen, die gemeinhin in der Mathematik benutzt werden, der Satz, daß jeder Folge von x-Werten, die einen Limes hat, auch eine Folge von y-Werten mit einem Limes entspricht, und daß weiterhin allen x-Folgen mit einem gemeinsamen Limes a auch y-Folgen mit einem gemeinsamen Limes b entsprechen. Hierbei giebt es 4 Unterfälle, jenachdem $\lim x$ und $\lim y$ endlich oder unendlich ist.

1. $\lim x = a$, $\lim y = b$, beide endlich.

Bei allen gebräuchlichen Funktionen ist diese Forderung stets erfüllt, wenn die Funktion für $x = a$ definiert ist, und zwar ist dann gemeinhin b derjenige Wert, den y für $x = a$ annimmt. Wir sagen dann, die Funktion sei an der Stelle $x = a$ stetig.

Unser Beispiel $$z = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

ist für $x = 3$ nicht definiert also auch nicht stetig, trotzdem entspricht jeder gegen 3 convergierenden x-Folge eine convergente y-Folge, und zwar convergiert diese gegen 1. Das ist auf elementarem Wege einzusehen. Es ist nämlich für jedes x: $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, daher für jedes von 3 verschiedene x, weil dann durch $x - 3$ dividiert werden darf:

$$z = x - 2.$$

Die Funktion $\zeta = x - 2$ ist aber auch für $x = 3$ definiert und daselbst gleich 1. Sie stimmt also mit z überein bis auf den Wert $x = 3$, für den z nicht definiert ist.

Nun darf bei Untersuchungen von z eine gegen 3 convergierende x-Folge den Wert 3 nicht enthalten, weil z für $x = 3$ nicht definiert ist. Die einer x-Folge entsprechenden ζ- und

z-Folgen sind also mit einander identisch, mithin ist auch ihr Limes der gleiche; $\lim \zeta$ ist aber offensichtlich gleich 1, wenn $\lim x = 3$, somit ist auch $\lim z = 1$, wenn $\lim x = 3$.[1]

Fügt man also der Definition von z noch hinzu, daß für $x = 3$ $z = 1$ sein solle, so ist die so erweiterte Funktion z an allen Stellen stetig und mit ζ identisch. Würde man dagegen für $x = 3$ $z = 0$ oder 2 oder sonst einem von 1 verschiedenen Werte setzen, so erhielte man eine an der Stelle $x = 3$ unstetige Funktion. Ob überhaupt eine Ergänzung der Definition von z zulässig ist, hängt von der speciellen Aufgabe ab, die zu dem Studium von z Anlaß giebt. Bei speciellen, z. B. geometrischen Untersuchungen, ist gerade die Unbestimmtheit für $x = 3$ von Bedeutung und darf daher nicht beseitigt werden.

II. $\lim x = a$ endlich, $\lim y = \pm \infty$.

Wir sagen in diesem Fall, y werde für $x = a$ unendlich oder auch: dem Werte $x = a$ entspreche der Wert $y = \infty$. Dies ist aber nur eine kürzere Ausdrucksweise für den genau umschriebenen Sachverhalt, es wird damit nicht behauptet, daß dem Wert a nun etwa doch ein y-Wert zugeordnet sei, oder daß etwa y „am Ende der Zahlenreihe anstoße."

Unser Beispiel $y = \frac{2x-3}{x-7}$ zeigt übrigens, daß den gegen 7 convergierenden x-Folgen y-Folgen entsprechen, deren Limes teils $+\infty$, teils $-\infty$ ist, jenachdem nämlich die x-Folge eine

[1] Ich habe mich hier mit überflüssiger Deutlichkeit ausgedrückt, weil bis in die neueste Zeit hinein der Vorwurf erhoben wird, der Mathematiker pflege bei Grenzübergängen von der Form $\frac{0}{0}$ den kritischen verschwindenden Faktor $x - a$ wegzuheben, was nur für ein von a verschiedenes x zulässig ist, und dann trotzdem x gleich dem kritischen Wert a zu setzen. Da also selbst die besten Lehrbücher anscheinend noch zu viel Verständnis voraussetzen, ist der Sachverhalt an diesem elementaren Beispiel mit einer nunmehr hoffentlich jedes Mißverständnis ausschließenden Deutlichkeit dargestellt worden.

fallende oder steigende ist. Unsere Ausdrucksweise: zu $x = a$ gehöre $y = \infty$ wird dadurch nicht beeinflußt; im Gegensatz zu Funktionen wie $y = \frac{1}{(x-7)^2}$, die für $x = 7$ nur $+\infty$ wird, sagt man aber zuweilen: zu $x = a$ gehört $y = \pm\infty$.

In unserem Beispiel ist y für $x = 7$ nicht definiert, und durch welches Wertepaar man die Definition auch ergänzen mag, die Funktion ist an dieser Stelle unstetig, wie aus der Definition der Stetigkeit und dem Satze, daß ein Limes nicht gleichzeitig endlich und unendlich sein kann, hervorgeht.

III und IV. $\lim x = +\infty$, $\lim y = b$, endlich oder unendlich. Wir sagen in diesen beiden Fällen, zu $x = +\infty$ gehöre $y = b$. Ebenso wenn für $\lim x = -\infty$ $\lim y = c$ ist, zu $x = -\infty$ gehöre $y = c$. In unserem Beispiel

$$y = \frac{2x-3}{x-7}$$

gehört zu $x = +\infty$ und $x = -\infty$ derselbe Wert 2, wie man sofort daraus sieht, daß für jedes x:

$$\frac{2x-3}{x-7} = 2 + \frac{11}{x-7}.$$

Die y-Folge ist für positive x fallend, für negative steigend. —

Die Funktion $y = \frac{x}{+\sqrt{1+x^2}}$, worin der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist, ergiebt für $x = +\infty$ $y = +1$, für $x = -\infty$ $y = -1$. Die Funktion $y = 2^x$ worin der positive reelle Wert von 2^x zu nehmen ist, falls bei nicht ganzen x Mehrdeutigkeit eintritt, wird für $x = +\infty$ zu $+\infty$, für $x = -\infty$ zu null.

Auch hier soll nicht etwa von einer wirklichen Wertezuordnung gesprochen werden.

21. Die vorliegenden Fälle erschöpfen die Möglichkeiten des Verhaltens einer Funktion gegenüber fallenden oder steigenden x-Folgen nicht, was nochmals betont sei. Es ist nicht notwendig, daß einer x-Reihe mit einem Limes eine gleichartige y-Reihe entspricht.[1] Dagegen haben wir gerade diese Fälle erwähnt, weil ihr Eintreten durch abgekürzte Redeweisen mitgeteilt zu werden pflegt, in denen zum ersten Male das Wort „stetig" und im Fall II bis IV das Wort unendlich vorkommt. Daß für häufig wiederkehrende Tatsachen abgekürzte Bezeichnungen von Nutzen sind, ist klar. Die vorliegenden Bezeichnungen im Fall II bis IV mit ihren fingierten Wertepaaren sind aber auch sehr zweckmäßig. Im Fall I ergeben, wie erwähnt, im allgemeinen a und b ein zugeordnetes Wertepaar; die Kenntnis der Tatsache, daß für $\lim x = a$ auch $\lim y = b$ ist, ist also für eine stetige Funktion inhaltlich gleichwertig mit der

---

[1] Beispielsweise haben nachstehende 4 Folgen den Limes $+\infty$:

(1) $1, 3, 5, \ldots 2n-1 \ldots$

(2) $1-1,\ 2-\frac{1}{2},\ 3-\frac{1}{3},\ 4-\frac{1}{4}, \ldots n-\frac{1}{n}, \ldots$

(3) $2-1,\ 4-\frac{1}{2},\ 6-\frac{1}{3},\ 8-\frac{1}{4}, \ldots 2n-\frac{1}{n}, \ldots$

(4) $1-1,\ 5-\frac{1}{2},\ 9-\frac{1}{3}, 13-\frac{1}{4}, \ldots (4n-3)-\frac{1}{n}, \ldots$

Die zugehörigen Werte der Funktion $\sin\frac{\pi x}{2}$ sind:

(1) $+1, -1, +1, -1 \ldots$

(2) $0, -\sin\frac{\pi}{4}, -\cos\frac{\pi}{6}, +\sin\frac{\pi}{8}, +\cos\frac{\pi}{10}, -\sin\frac{\pi}{12}, -, ++-- \ldots$

(3) $1, -\sin\frac{\pi}{4}, +\sin\frac{\pi}{6}, -\sin\frac{\pi}{8}, +\sin\frac{\pi}{10}, -\sin\frac{\pi}{12}, +-+- \ldots$

(4) $0, \quad \cos\frac{\pi}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{6}, \quad \cos\frac{\pi}{8}, \quad \cos\frac{\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{12}, ++ \ldots$

Die beiden ersten Folgen haben keinen Limes, die dritte hat den Limes 0, die vierte 1.

Aussage, daß zu $x = a$ der Wert $y = b$ gehört. Bei fingierten Paaren aber, wo mindestens ein Wert durch das Zeichen ∞ ersetzt ist, liegt eine Aussage über zusammengehörige Werte tatsächlich nicht vor, vielmehr nur eine Mitteilung über ein specielles charakteristisches Verhalten der Funktion. Derartige Mitteilungen sind indessen für die Charakterisierung einer Funktion oft von gleicher, ja größerer Bedeutung, als die Angabe zusammengehöriger Wertepaare. Hierfür ein einfaches Beispiel: Es sei uns bekannt, daß die Funktion y durch eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$y = \frac{mx + n}{x - l}$$

definiert sei, es sei uns aber unbekannt, welche Werte den Zahlen l, m, n zukommen. Weiß man nun, daß beispielsweise zu $x = 8$ der Wert $y = 13$ gehört, so heißt dies, daß

$$13 = \frac{8m + n}{8 - l}$$

ist, d. h. wir haben eine Gleichung zwischen den drei Unbekannten l, m, n. Drei zusammengehörige Wertepaare geben drei solche Gleichungen, aus diesen werden sich l, m, n ermitteln lassen.

Aber auch die Angabe eines fingierten Wertepaares giebt eine Gleichung zwischen l, m, n und zwar eine besonders einfache, und darin liegt die Bedeutung dieser Paare. Es ist nämlich von vornherein klar, daß nur für $x = l$ unsere Funktion undefiniert ist, und zwar gehört zu $x = l$ der fingierte Wert $y = \infty$. Ebenso ist leicht zu sehen, daß zu $x = \pm\infty$ der Wert $y = m$ gehört. Aus der Angabe, daß zu $x = 7$ $y = \infty$ gehöre, folgt somit direkt, daß $l = 7$ ist, ebenso aus der Angabe, daß zu $x = \infty$ $y = 2$ gehöre, daß $m = 2$ ist. Während ein wirkliches Wertepaar eine Gleichung liefert, in der von den 3 Zahlen

$l, m, n,$ mindestens zwei auftreten, geben also die fingierten Wertepaare Gleichungen mit nur je einem der Coefficienten an. Darin liegt die Nützlichkeit ihrer Einführung. Sowenig aber eine Richtung darum ein Punkt ist, weil sie in der Bestimmung einer Geraden einen Punkt ersetzen kann, so wenig ist ein fingiertes Wertepaar ein wirkliches, weil es einem solchen gleichwertig ist.

Ob die Bezeichnung „stetig" im Falle I eine glückliche ist, soll dahingestellt bleiben. Auf geometrisches Gebiet übertragen beschreibt sie jedenfalls nicht vollständig das, was man gemeinhin in der Anschauung unter stetig versteht. (Es fragt sich, ob diese anschauliche Stetigkeit überhaupt in klarer logischer Form umgrenzt werden kann.) Analytisch sagt sie aus, daß zu „unendlichkleinen" Änderungen von x ebensolche von y gehören. —

22. Die Bezeichnung:

„Wenn $\lim x = a$ so ist $\lim y = b$"

ist noch immer zu schwerfällig. In Form einer einzigen Gleichung schreiben wir dafür:

$$\lim_{x=a} y = b.$$

In speciellen Fällen wird auch das noch vereinfacht. Z. B. für

$$\lim_{x=0} \log x = -\infty$$

schreibt man vielfach $\log 0 = -\infty$, für $\lim\limits_{x=-\infty} 2^x = 0$ auch $2^{-\infty} = 0$. Besonders bekannt sind speciell die Bezeichnungen:

$$\frac{1}{0} = \pm\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

statt $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Sie sind also kurze Ausdrücke für folgende Behauptung: „Zu jeder positiven Zahl q giebt eine positive Zahl p, so daß $\frac{1}{x}$ absolut genommen größer als q ist, wenn x absolut genommen kleiner als p ist," und für eine zweite, die wörtlich gleichlautet, nur daß die Worte „kleiner" und „größer" vertauscht sind.

Die Bezeichnungen $\frac{1}{0} = \pm\infty$, $\frac{1}{\pm\infty} = 0$ sind insofern unglücklich, als sie noch heute zu dem Märchen Anlaß geben, es sei nun die Division durch Null glücklich doch noch gelungen. Ferner wird zumeist folgende Betrachtung angeschlossen: „Wenn x stetig durch Null durchgeht, geht y von $+\infty$ nach $-\infty$, die Zahlenreihe ist also im unendlichen geschlossen." Darunter mögen sich andere etwas vorstellen, ich kann es jedenfalls nicht. Daß ein stetiger Durchgang von x durch einen Wert a nicht notwendig einen stetigen Verlauf von y zur Folge hat, haben wir übrigens ausdrücklich konstatiert.

Man hört auch vielfach folgendes:

„Zu jedem Wert x gehört ein bestimmter Wert von $\frac{1}{x}$, zu $x = 0$ aber $\frac{1}{x} = +\infty$ und $\frac{1}{x} = -\infty$. Also muß $+\infty = -\infty$ sein." Abgesehen davon, daß $+\infty$ und $-\infty$ keine Werte sind, daß zu $x = 0$ überhaupt kein Wert von $\frac{1}{x}$ gehört, folgt doch aus der Eindeutigkeit für irgend welche Werte gar nichts über die Eindeutigkeit für andere Werte. Andernfalls könnte man so weiter schließen: Die Funktion $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, worin der Wurzel der positive Wert zu erteilen ist, ist für alle Werte von x eindeutig, für $x = +\infty$ wird sie zu $+1$, für $x = -\infty$ zu -1. Da $-\infty = +\infty$, folgt somit, daß $-1 = +1$. Die Funktion 2^x würde in demselben Schlußschema ergeben, daß $0 = \infty$ wäre, und die Funktion $\frac{1}{x^2}$, die für $x = 0$ nur positiv ∞ wird, würde von den zwei gleichen Werten $+\infty$ und $-\infty$ nur den einen annehmen!

Es giebt zwei Wege, diese Widersprüche zu vermeiden. Entweder man begnügt sich mit Definitionen, die auf dem Boden der unanfechtbaren endlichen Tatsachen stehen und diese Widersprüche erst gar nicht aufkommen lassen, oder man begnügt sich mit Kenntnissen, die gerade nur bis zur Funktion $y = \frac{1}{x}$, aber nicht mehr bis zu den hier angeführten Beispielen reichen und daher die aus mangelhaften Definitionen folgenden Widersprüche nicht erkennen lassen. Denn man kann seiner Phantasie ein dem Bereich der Kenntnisse umgekehrt proportionales Betätigungsfeld zur Verfügung stellen, und auf diesem ist ja mancherlei möglich.

VII.
Differentialrechnung.

23. Bei denjenigen Funktionen, mit denen der Mathematiker sich gemeinhin beschäftigt[1], beobachtet man an allen Stellen, an denen sie stetig sind, fast ausnahmslos eine weitere Eigenschaft: die Differentiierbarkeit.

Dieselbe besteht in der Existenz des Limes

$$\lim_{x=a} \frac{y-b}{x-a} = b'$$

der für alle gegen a convergierenden x-Folgen[2] denselben Wert

[1] Insbesondere bei allen analytischen, d. h. in Potenzreihen entwickelbaren.

[2] Die natürlich den Wert a nicht enthalten dürfen, weil für diesen ja der zu untersuchende Ausdruck nicht definiert ist.

hat. Der principiellen Bedeutung wegen wollen wir dies in die Terminologie des endlichen übersetzen:

Es sei y eine Funktion von x und b ihr zu $x = a$ gehöriger Wert. Läßt sich dann eine bestimmte Zahl b' und ferner zu jedem $q > 0$ ein $p > 0$ angeben, so daß

$$\frac{y-b}{x-a} - b'$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als q ist, wenn $x-a$ dem absoluten Betrag nach kleiner als p ist, so heißt der Wert b' „die Ableitung der Funktion y für $x = a$“ und die Funktion selbst „für $x = a$ differentiierbar.“

(Die Notwendigkeit einer derartigen abgekürzten Bezeichnung liegt wohl klar zu Tage.)

Wir betrachten als specielles Beispiel die Funktion $y = x^2$. Wenn $x-a$ absolut kleiner als q ist, so ist auch

$$\frac{x^2-a^2}{x-a} - 2a$$

absolut kleiner als q, denn dieser Ausdruck ist für jedes von a verschiedene x [wegen $x^2-a^2 = (x-a)(x+a)$] gleich $x-a$. Somit ist x^2 differentiierbar und hat für $x = a$ die Ableitung $2a$. Kürzer sagen wir, die abgeleitete Funktion von x^2 sei $2x$.

24. Zwischen der Differentiierbarkeit und der Stetigkeit besteht der Zusammenhang, daß letztere aus ersterer gefolgert werden kann, also eine **notwendige** Bedingung für die Existenz der ersteren ist. Zu einer Zeit, die zwischen notwendig und hinreichend nicht mit moderner Schärfe unterschied, hat sich das Vorurteil festgesetzt, die Stetigkeit sei auch hinreichend für die Differentiierbarkeit. Daß dieses falsche Vorurteil, in dessen Banne auch noch **Fries** stand, von der strengen Schule endgültig zer-

stört worden ist, ist praktisch ohne Bedeutung, ebenso wie das Vorurteil ohne wesentlichen Schaden blieb, da die stetigen Funktionen, mit denen der Mathematiker sich praktisch beschäftigt, alle ohnehin differentiierbar sind. Dagegen hängt bei prinzipiellen Untersuchungen die Frage nach der Existenz unendlichkleiner Größen von der Frage nach der Differentiierbarkeit ab und somit ist diese für unser Referat von wesentlicher Bedeutung. Darum mag an zwei ganz elementaren Beispielen gezeigt werden, daß eine Funktion an einer Stelle stetig und doch nicht-differentiierbar sein kann. Wir kennen zwar heute Funktionen, die für alle x stetig und doch nirgends differentiierbar sind; das erste Beispiel dieser Art verdanken wir Weierstraß, dem 1897 verstorbenen Vorkämpfer mathematischer Strenge. Der Rahmen dieser Arbeit verbietet indessen auf derartige Beispiele einzugehen, und es muß bei einfacheren Fällen sein Bewenden haben.

Die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$, worunter der reelle Wert der Wurzel verstanden werden soll, ist für jeden Wert von x definiert und stetig. Speziell hat sie für $x = 0$ den Wert 0. Daß sie daselbst stetig ist, ist sofort einzusehen: Wenn nämlich x dem absoluten Betrag nach kleiner als $p = q^3$ ist, so ist y dem absoluten Betrag nach kleiner als q.

Die Ableitung ist hier der Limes von $\frac{y-0}{x-0}$, d. h. von $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Dieser Limes ist aber unendlich, denn wenn $x < \frac{1}{q^3}$ ist, so ist $y : x$ größer als q, sofern q größer als 1 ist; damit *a fortiori* auch größer als jede Zahl unter 1. Die Ableitung existiert also nicht, höchstens könnte man ihr den fingierten Wert ∞ beilegen.

Ein zweites Beispiel, in dem die Ableitung keinen, auch keinen fingierten Wert hat, ist die Funktion

$$y = x \,.\, \sin\frac{1}{x} \text{ für } x \gtrless 0, \qquad y = 0 \text{ für } x = 0.$$

Sie ist für $x = 0$ stetig, denn ist $x < q$, dem absoluten Betrag nach, so ist y, da die Funktion sin dem absoluten Betrag nach kleiner, höchstens gleich 1 ist, ebenfalls kleiner als q dem absoluten Betrag nach.

Die Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist wieder als $\lim \frac{y}{x}$ zu untersuchen. Da aber $\frac{y}{x} = \sin\frac{1}{x}$ ist, da ferner die Werte $\frac{1}{x}$ für jede gegen 0 konvergierende x-Folge eine Folge mit dem Limes $+\infty$ oder $-\infty$ bilden, da endlich die Werte des Sinus für solche Folgen sowohl divergente, wie gegen verschiedene Grenzen konvergierende Folgen ergeben (Fußnote Seite 163), existiert der gesuchte Limes nicht, also ist die Funktion für $x = 0$, obwohl stetig, nicht differentiierbar.

25. Wir müssen nun zunächst die verschiedenen Bezeichnungsarten für die Operation des Differentiierens kennen lernen. Ist y eine Funktion von x, so ist ihre Ableitung offenbar wieder eine Funktion von x, denn sie hat ja für jeden Wert von x selbst einen bestimmten Wert. Man bezeichnet diese Funktion mit y'. Die Tatsache, daß die Ableitung der Funktion x^2 für $x = a$ den Wert $2a$ hat, würde danach folgendermaßen zu schreiben sein:

$$y = x^2, \qquad y' = 2x$$

wobei x zwar eine beliebige, aber in beiden Gleichungen dieselbe Zahl vorstellt. (Für $x = 10$ ist $y = 100$ und $y' = 20$, nicht etwa $2 \,.\, 6$.) Diese Bezeichnung hat den Nachteil, daß nicht angegeben werden kann, welchen Wert die Ableitung an einer bestimmten Stelle a hat. Dies erfordert weitläufige Ausdrucksweisen, wie

$$(y')_{x=7} = 14 \qquad (y' \text{ für } x = 7 \text{ gleich } 14)$$

oder „$x = 7$, $y' = 14$." Für viele Fälle, (vgl. die Taylorsche Reihe) empfiehlt sich daher das Zeichen $f(x)$ für y (Funktion von x, auch kurz „f von x" gesprochen.):

$$f(x) = x^2, \qquad f'(x) = 2x.$$

Hier läßt sich in einer Gleichung schreiben: $f'(7) = 14$.

Immerhin erfordert auch hier noch der Satz: „x^2 hat die Ableitung $2x$" zwei Gleichungen zum anschreiben. Sodann aber wird die Bezeichnung unbrauchbar, sowie nicht stillschweigend vorausgesetzt wird, von welcher Veränderlichen y abhängt, und eine solche Voraussetzung giebt es überhaupt nicht, wenn y von mehreren Variabeln abhängt und nach mehreren differentiiert werden soll. Ist z. B. $y = x^m$ und x die Veränderliche, so ist $y' = mx^{m-1}$. Ist dagegen m die Veränderliche, so ist $y' = x^m . \log\text{nat}\, x$. Ist ferner etwa $y = u^2$ und darin $u = x^3$, so ist die Ableitung von y nach u gleich $2u$. Wird aber für u seine Bedeutung gesetzt, so wird $y = x^6$ und seine Ableitung gleich $6x^5$.

Während der zuerst erwähnte Nachteil erträglich ist, macht gerade dieser zweite die größte Schwierigkeit. Newtons Bezeichnungsweise z. B. hat sich darum nicht einbürgern können; sie wird nur in der Mechanik bei Differentiationen nach der Zeit angewandt.

26. Um die geniale und kühne Bezeichnungsweise Leibnizens durch Differentiale zu verstehen, müssen wir erst einen Satz der Differentialrechnung anführen, ohne den diese Bezeichnung undurchführbar wäre.

Es sei y irgend eine Funktion einer Veränderlichen u, $y = f(u)$, beispielsweise der Logarithmus von u; u seinerseits sei eine Funktion von x, $u = \varphi(x)$, etwa der Sinus von x. Daraus folgt, daß y auch eine Funktion von x ist, $y = F(x)$. Denn wenn einem Wert $x = a$ ein Wert $u = c$, diesem Wert $u = c$ wieder ein Wert $y = b$ zugeordnet ist, so ist damit dem Wert $x = a$ auch ein Wert $y = b$ zugeordnet.

Nun besagt unser Satz: Sind zwei der Funktionen f, φ, F differentiierbar, so ist es auch die dritte, und zwar ist die Ableitung von y nach x gleich der Ableitung von y nach u mal der Ableitung von u nach x. Der Beweis des Satzes kann in jedem Lehrbuch nachgesehen werden.

In einem unserer Beispiele hatten wir

$$y = u^2 \qquad u = x^3, \text{ also } y = x^6.$$

Die Ableitungen sind:

von y nach u: $2u$ d. h. $2x^3$
von u nach x: $3x^2$;
von y nach x: $6x^5$, in der Tat gleich $2x^3 . 3x^2$.

Ist $y = \log u$, $u = \sin x$, so sind die Ableitungen

von y nach u: $\dfrac{M}{u} = \dfrac{M}{\sin x}$

von u nach x: $N \cos x$

also von y nach x: $MN \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = MN . \operatorname{cotang} x$.

(M und N sind hier Zahlen, die von der Basis des Logarithmensystems und der Einheit des Winkelmaaßes abhängen.)

Auf Grund unseres Satzes führen wir jetzt folgendes ein: Es sei mit dem Zeichen dx eine beliebige von null verschiedene

Zahl bezeichnet. Das Zeichen wird gesprochen, wie es geschrieben wird, soll aber weder $d \cdot x$ noch sonst irgend eine Abhängigkeit der Zahl dx von der Zahl x bedeuten.

Diese Zahl dx multiplizieren wir mit der Ableitung von u nach x und bezeichnen das Resultat mit du. Auf Grund dieser Bezeichnung können wir jetzt die Ableitung von u nach x mit $\frac{du}{dx}$ bezeichnen. Es ist $\frac{du}{dx} = u'$. Lediglich dieser Zusammenhang zwischen du und dx soll durch die Verwendung der Buchstaben u und x in den Bezeichnungen du, dx angedeutet werden. Kommt es darauf an, die spezielle Stelle $x = a$ anzugeben, an der die Ableitung genommen ist, so schreiben wir

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a}, \text{ gesprochen „}du\text{ durch }dx\text{ für }x = a\text{“.}$$

Die Bezeichnung gestattet zugleich, für u die speziell betrachtete Funktion einzusetzen. Wir können z. B. schreiben

$$\left(\frac{d \sin x}{dx}\right)_{x=0} = N \quad \text{oder} \quad \frac{d \sin x}{dx} = N \cos x.$$

In dieser Weise ist für jede Funktion von x zunächst eine Bezeichnung ihrer Ableitung festgelegt. Sind nun y und u zwei Funktionen von x, so ist auf Grund unseres Satzes die Ableitung von y nach u gleich dem Quotienten beider Ableitungen nach x, also:

$$\text{Ableitung von } y \text{ nach } u = \frac{dy}{dx} : \frac{du}{dx}.$$

Dieser Ausdruck aber ist, da dx, dy, dz gemeine Zahlen sind, gleich $dy : du$, wir können also die Ableitung von y nach u auf dieselbe Art bezeichnen, wie die Ableitungen nach x, nämlich mit

$$\frac{dy}{du}.$$

Die Zahlen dx, dy, du etc. nennen wir Differentiale von x, y, z, die Ableitung einer Funktion demnach auch ihren Differentialquotienten.

27. Man wird hier fragen, ob es möglich ist, auf Grund dieser Definition wirklich die ganze Differentialrechnung und ihre Anwendungen zu behandeln. Die Frage ist zu bejahen. Sie ins einzelne zu verfolgen, hieße ein Lehrbuch der Differentialrechnung schreiben. Man ist gewohnt, unter den Differentialen unendlichkleine Größen zu denken. Nun wohl: versteht man unter unendlichkleinen Größen im Sinne der strengen Schule solche Größen, die ich unbestimmt lasse, um sie gegebenenfalls kleiner als irgend eine vorgeschriebene Zahl annehmen zu können, so sind unsere Differentiale, wie wir sie hier definierten, solche Größen, denn sie sind unbestimmt gelassen. Denkt man sich aber unter Differentialen die berüchtigten Grössen, die „kleiner als jede andere und doch nicht null sind“ so geht man auf die vorkritische Zeit der Mathematik zurück, zurück auf eine Anschauung, mit der wir uns am Ende dieses Referates noch auseinandersetzen müssen.

Man wird andererseits einwenden, daß die Differentiale in unserer Definition keine zusammengehörigen Änderungen zweier von einander abhängiger Variabeln vorstellen. Das tun sie auch heute für den Mathematiker nicht mehr. Denn der Quotient zweier zusammengehörigen Änderungen $x-a=\delta$, $y-b=\Delta$ ist ein Glied der gegen die Ableitung $dy:dx$ konvergierenden Reihe $y-b:x-a$, also im allgemeinen von $dy:dx$ verschieden. Da aber auf Grund unserer Definition der Ableitung

$$\frac{\Delta}{\delta}-\frac{dy}{dx}<p \quad \text{(absolut genommen)}$$

ist, und da dx als beliebige Größe gleich der Änderung δ von x

gesetzt werden kann, folgt

$$\frac{\varDelta - dy}{dy} < \frac{pdx}{dy}$$

worin p eine beliebige, von null verschiedene Zahl ist. Danach ist also $\varDelta - dy$ im Verhältnis zu dy beliebig klein, d. h. dy kann mit jeder Genauigkeit durch die zu dx gehörige Änderung von y dargestellt werden. Damit haben wir das vermißte Prinzip der Differentialrechnung wieder hergestellt.

Fries finden wir in seiner mathematischen Naturphilosophie noch auf dem umgekehrten Wege der Darstellung. Die Differentiale werden als unendlichkleine Größen, aber bereits im Sinne der exakten Schule, definiert. Ist nun eine Funktion stetig, so gehören zu unendlichkleinen Änderungen von x unendlichkleine von y. Als Grenzwert ihres Quotienten wird der Differentialquotient definiert, aber die Frage nach seiner Existenz bleibt unerörtert, wohl, weil man damals noch nicht daran zweifelte. Da nun aber das Rechnen mit Differentialen nur dann wieder zu bestimmten endlichen Zahlen führt, nur dann einen Sinn hat, wenn der Differentialquotient existiert, so hat die strenge Mathematik den Weg der Darstellung konsequenterweise umgekehrt und stellt das an die Spitze, was erst das Rechnen mit Differentialen möglich macht.

28. Wendet man den Prozeß des Differentiierens wiederholt an, bildet also die Ableitung der Ableitung u. s. f., so erhält man die „zweite“, „dritte“ Ableitung einer gegebenen Funktion y, bezeichnet mit y'', y''' u. s. f. Es ist unmöglich hierfür eine Bezeichnung einzuführen, die die Einfachheit der für die erste Ableitung erfundenen mit dem Vorteil vereint, auf elementaren Rechnungen mit endlichen Zahlen aufgebaut zu sein; zum mindesten ist es

bisher nicht gelungen. Die Iteration unserer Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ führt für die zweite Ableitung bereits zu dem technisch unbrauchbaren Symbol

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Wenn man hierin den Zähler nach den formalen Regeln der Differentialrechnung umformt, erhält man dafür

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

worin d^2x und d^2y für $d(dx)$, $d(dy)$ stehen. Mit solchen Ausdrücken kann nach den elementaren Regeln gerechnet werden, aber sie sind noch immer zu unhandlich, so daß man in der Praxis dx als konstante Größe behandelt und daher $d^2x, d^3x \ldots$ gleich null setzt. Die so entstehende Bezeichnung

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}\quad \cdots \quad \text{für}\quad y'',\ y'''$$

ist zwar sehr brauchbar und Platz sparend, aber sie bedarf der Vorsicht in der Handhabung, weil die elementaren Rechengesetze nicht mehr gelten. Z. B. ist

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dürften hier d^2x etc. als endliche Zahlen behandelt werden, so wäre die linke Seite nur gleich dem ersten Gliede der rechten.

Dem Leser, der mit diesen Dingen nicht vertraut ist, aber gerne mehr wissen möchte, kann ich an dieser Stelle nicht mehr berichten, ohne den Rahmen dieser Zeitschrift zu überschreiten. Und ein wesentliches Moment, welches zu diesem Referat Anlaß giebt, kommt für die höheren Ableitungen, ebenso wie für die partiellen Ableitungen und die Integrale, in Wegfall: Das sind die verwirrenden und phantastischen Darstellungen, welche immer wieder in der Literatur auftauchen. Über die ersten Elemente der Differentialrechnung hinaus führt nur ernstes wissenschaftliches Denken, das aber stutzt der Phantastik schnell genug die Flügel. Daher kommt es, daß unberufene Eingriffe dort sehr selten, durchweg ohne Gefahr und damit einer Abwehr nicht bedürftig sind.

VIII.

Das Irrationale.

29. Wie wir vom Prozeß des Zählens zu den ganzen und von diesen zu den rationalen Zahlen gelangen, setze ich als bekannt voraus. Da jede rationale Zahl mit Hülfe des Bruchstrich-Zeichens durch eine endliche Anzahl von Zeichen eindeutig bezeichnet werden kann, liegt ein Unendlichkeitsproblem nicht vor.

Anders bei den Irrationalzahlen. Diese denkt man sich gemeinhin durch einen unendlichen Dezimalbruch oder Kettenbruch definiert.

Diese Art, eine irrationale Zahl zu definieren ist gewissermaßen ein Stück geometrische Eierschale; die Irrationalzahlen entstehen in der Geometrie durch das Messen auf Grund des Archimedischen Axioms: Ist a kleiner als b, so giebt es ein Vielfaches von a, welches größer als b ist. Danach ist es möglich, b zwischen zwei aufeinanderfolgende Vielfache von a einzuschließen, wenn nicht b ein Vielfaches von a ist. Im letzteren Fall, $b = ma$, ist die ganze Zahl m die Maßzahl von b. Ist dagegen b zwischen ma und $(m+1)a$ gelegen, so ist $b-ma$ kleiner als a und der Proceß des Messens kann nun auf zweierlei Arten fortgesetzt werden. Die gedanklich einfachere besteht darin, a durch $b - ma$ zu messen, und so fort immer die letzte Einheit durch den Rest. Damit erhält man die Kettenbruchentwicklung, die für jede Rationalzahl endlich ist. Die praktisch übliche Methode besteht dagegen darin, den Rest der Messung mit einem aliquoten Teil der letzten Einheit zu messen, meist mit dem zehnten Teil, in der Winkelmessung mit dem sechzigsten. Sowie die Unterteilung der Einheit nicht willkürlich bleibt, erhält man schon für rationale Verhältnisse unendliche Meßvorgänge [1].

30. Auf diesem Wege hat man ursprünglich die Irrationalzahlen erzeugt. Es kann gegen diese Definition nicht eingewandt werden, daß sie unendlich vieler Elemente bedürfe. Eine unendliche Entwicklung ist nur dann bekannt, wenn ihr Gesetz bekannt ist, und dieses ist dann in einer endlichen Zahl von Worten, also auch in einer endlichen Anzahl von Zeichen niedergelegt. Ob diese Zeichen dem speziellen Apparat des mathematischen Kalküls angehören, ist gleichgültig, da dessen Ausbildung immer nur dem praktischen Bedürfnisse entsprechend durchgeführt wird. —

Dagegen kann gegen die Definition irrationaler Zahlen durch unendliche Reihen der Einwand erhoben werden, daß erst festgestellt werden muß, ob mit diesen auch widerspruchslos gerechnet werden kann. Für periodische Dezimalbrüche läßt sich dies sofort aus der Tatsache erweisen, daß sie konvergent sind, für nicht periodische ist dagegen das Verfahren bei unserer oben gegebenen Definition der Konvergenz nicht anwendbar, weil ihr Limes eine Irrationalzahl, also etwas erst zu definierendes ist.

---

[1] Hierbei handelt es sich natürlich nur um gedanklich durchführbare Messungen, da praktische Messungen stets zu einem Endresultat führen. Praktisch giebt es überhaupt keine Irrationalzahlen.

Diese Schwierigkeit kann man erstens dadurch umgehen, daß man die Widerspruchslosigkeit des Rechnens mit unendlichen Decimalbrüchen nachweist, ohne auf die Konvergenz einzugehen. Es ist nämlich durch den Stellenwert jedes Zahlzeichens in einem Dezimalbruch das Zusammenfassen, Zerlegen und Umstellen der Glieder ausgeschlossen und damit das formale Rechnen derart beschränkt, daß es widerspruchslos bleibt. Immerhin ist das Multiplicieren und Dividieren unendlicher Brüche ein so kompliziertes Verfahren, daß wir lieber den radikalen Weg einer neuen Definition des Irrationalen einschlagen, der sich auch den übrigen Betrachtungen besser anschließt.

31. Rein arithmetisch betrachtet ist mit einer Zahl keine Größenvorstellung verknüpft. Wir können bloß von zwei verschiedenen Zahlen aussagen, daß die eine größer als die andere ist. Demnach ist es eine überflüssige, ja falsche Forderung, die Definition einer irrationalen Zahl müsse eine Vorstellung ihrer absoluten Größe erzeugen. Es genügt vielmehr, die irrationalen Zahlen so zu definieren, daß auch in dem erweiterten Zahlgebiet die vier Species[1] anwendbar sind und daß irgend zwei Zahlen entweder gleich oder verschieden sind, daß von zwei verschiedenen eindeutig festgelegt ist, welche die größere ist, daß, wenn $a > b$ und $b > c$ auch $a > c$ ist, u. s. f.

Bedenkt man, daß eine Irrationalzahl im alten Sinne nicht aus Vielfachen und Teilen einer Rationalzahl zusammengesetzt ist, so sieht man, daß in der Tat ihr Verhältnis zu der Gesamtheit der Rationalzahlen lediglich darin besteht, daß von jeder Rationalzahl entschieden werden kann, ob sie oberhalb oder unter-

[1] Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, letztere durch 0 ausgeschlossen.

halb der Irrationalzahl liegt, und daß jede Rationalzahl s_1 unterhalb einer Irrationalzahl auch unterhalb jeder Rationalzahl s_2 liegt, die oberhalb der Irrationalzahl gelegen ist.

Wir nehmen jetzt im folgenden alle Rationalzahlen als gegeben an und sprechen von ihnen schlechthin als von den Zahlen, bis wir zur Definition der Irrationalzahlen gelangt sind. Wir beachten noch, daß (I) die vier Species, auf Rationalzahlen angewandt, stets wieder Rationalzahlen liefern und daß (II) unterhalb einer Rationalzahl stets eine, also auch beliebig viele von null verschiedene Rationalzahlen genannt werden können, so daß also (III) auch stets zwei Rationalzahlen angebbar sind, deren Differenz kleiner als eine vorgeschriebene Rationalzahl p ist und daß (IV) zwischen zwei Rationalzahlen stets noch eine, also beliebig viele liegen. — alles Forderungen, die im Gebiete der ganzen Zahlen nicht erfüllt sind.

Wir denken uns irgend ein Gesetz, welches alle Rationalzahlen in zwei Klassen teilt. Diese Teilung soll so beschaffen sein, daß jede Zahl s_1 der einen Klasse, die wir die untere nennen, unterhalb jeder Zahl s_2 der anderen, oberen Klasse liegt. Das Gesetz muß natürlich so beschaffen sein, daß von jeder Zahl entschieden werden kann, zu welcher Klasse sie gehört. Ein solches Gesetz nennen wir einen Schnitt. Wir denken es in Formeln oder Worten ausgesprochen und hingeschrieben. Daneben machen wir ein Zeichen, etwa S und nennen nunmehr das Gesetz: den Schnitt S. Die beiden Klassen, in die die Menge der Zahlen zerlegt wird, bezeichnen wir als den unteren Teil S_1 und den oberen S_2 von S. Daß eine Zahl a resp. b zu S_1 resp. S_2 gehörte, sprechen wir auch so aus: a liegt unterhalb resp. b oberhalb von S, in Zeichen

$$a < S, \quad b > S.$$

Dann und nur dann wenn daraus $b > a$ folgt, ist unser Gesetz ein Schnitt.

32. Indem wir zwei Beispiele anführen, um zu beweisen, daß es Gesetze der verlangten Art giebt, zeigen wir zugleich. daß es zwei Arten von Schnitten giebt. Erstens nehmen wir eine Zahl s und definieren die Zahlen s_1 unterhalb und s_2 oberhalb durch die Bedingung

$$s_1 \leqq s, \quad s_2 > s,$$

aus der, wie verlangt, folgt $s_1 < s_2$. Diesen Schnitt bezeichnen wir mit der Zahl s selbst und betrachten ihn als nicht verschieden von dem Schnitt

$$s_1 < s, \quad s_2 \geqq s.$$

Wir sagen, er sei von der Zahl s erzeugt. Charakteristisch für einen von einer Zahl erzeugten Schnitt ist die Tatsache, daß eine der beiden Klassen eine „letzte Zahl" enthält, nämlich entweder die untere Klasse eine Zahl s, unterhalb deren jede andere Zahl der Klasse liegt, oder aber die obere Hälfte eine Zahl s, oberhalb deren jede andere Zahl der Klasse liegt.

Es sind zwei Sätze sofort klar und leicht zu erweisen: Es kann nur eine der beiden Klassen irgend eines Schnittes eine letzte Zahl enthalten und wenn eine der beiden Klassen eine letzte Zahl enthält, so ist der Schnitt identisch mit dem von dieser Zahl erzeugten Schnitt.

Zweitens bilden wir ein Beispiel eines Schnittes, bei dem keine der beiden Klassen eine letzte Zahl enthält. Wir rechnen eine positive Zahl s_1 bezw. s_2 zur unteren resp. oberen Klasse, wenn $s_1^2 < 2$ resp. $s_2^2 > 2$ ist, jede negative und null aber zur unteren. Erstens folgt hieraus $s_1 < s_2$, zweitens giebt es keine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist, demnach werden wirklich alle Zahlen in die beiden Klassen verteilt; unser Gesetz ist also ein Schnitt. Da aber zu jeder positiven Zahl s eine zweite positive genannt werden kann, deren Quadrat zwischen s^2 und 2 liegt, so kann es in keiner von beiden Klassen eine letzte Zahl geben.

33. Für das folgende soll eine Bezeichnung festgelegt werden, die uns kurze Ausdrucksweise ermöglicht. Ist S das Zeichen eines Schnittes, so soll S_1 der untere, S_2 der obere Teil, s_1 eine Zahl in S_1, s_2 eine in S_2 bedeuten. Ausgeschlossen von dieser Bezeichnung soll ein etwa existierendes letztes Element sein, welches vielmehr mit s bezeichnet werden soll. Allgemein sollen kleine Buchstaben Zahlen und die von ihnen erzeugten Schnitte, große Buchstaben aber Schnitte bezeichnen, von denen nicht vorausgesetzt ist, daß sie von Zahlen erzeugt sind. Gilt eine Beziehung nur zwischen speziellen Elementen, die unter den angeschriebenen Zeichen verstanden werden können, so wollen wir die Elemente akzentuieren. Dagegen soll eine Beziehung zwischen nicht akzentuierten Elementen die Behauptung aussprechen, daß sie für alle Elemente gilt, die unter den Bezeichnungen verstanden werden können[1]. Dadurch ersparen wir langstielige Zusätze.

Seien A, B zwei Schnitte und $a_1 = b_1'$, $a_2 = b_2'$ (d. h. also jedes Element unterhalb resp. oberhalb von A sei auch ein Element unterhalb resp. oberhalb von B). Wir nennen dann die Schnitte „gleich", in Zeichen

$$A = B.^{2}$$

[1] a_1 ist also zu lesen: „jedes Element unterhalb von A", b_2' oder b_2'' dagegen: „ein (spezielles) Element oberhalb von B".

[2] Beispielsweise ist der im vorigen Paragraphen angegebene zweite spezielle Schnitt dem folgenden gleich: Wir rechnen zur oberen Klasse alle positiven Zahlen, für die s^3 größer als $2\frac{s+2}{s+1}$ ist, alle übrigen Zahlen zur unteren Klasse.

Wenn zwei Schnitte nicht gleich sind, so sind demnach nur zwei Möglichkeiten übrig: Entweder ist $a_1' = b_2'$ oder $a_2' = b_1'$. Diese Fälle schließen sich gegenseitig aus, denn da $a_2 > a_1$, $b_2 > b_1$, folgt aus $a_1' = b_2'$ sofort $a_2 > b_1$, womit $a_2' = b_1'$ im Widerspruch stehen würde.

Nun heißt $a_1' = b_2'$ wörtlich: Es giebt eine Zahl, die oberhalb von B und unterhalb von A liegt. Kürzer drücken wir dies so aus: „B liegt unterhalb von A“, oder „A liegt oberhalb von B“, in Zeichen

$$A > B \text{ oder } B < A.$$

Im zweiten Fall ($a_2' = b_1'$) schreiben wir also $A < B$ oder $B > A$. Es dürfte unmittelbar klar sein, daß aus $A < B < C$ auch $A < C$ folgt. Ist $A = a'$, oder $B = b'$ oder beides zugleich, so stimmt der neue Sinn, der jetzt durch die Zeichen $A \gtreqless B$ zum Ausdruck gebracht wird, mit dem früher festgesetzten überein. —

Hiermit ist gezeigt, daß jedem Schnitt nicht nur in der Gesamtheit aller Zahlen, sondern auch in der aller Schnitte eine genau bestimmte Stelle zukommt, indem nicht nur jede Zahl sondern auch jeder Schnitt entweder oberhalb oder unterhalb eines gegebenen liegt, oder mit ihm übereinstimmt.

34. Dasselbe Verfahren, welches auf Zahlen angewandt, zu dem Begriff des Schnittes führte, kann natürlich wieder auf die Gesamtheit der Schnitte angewandt werden. Durch irgend ein Gesetz seien alle Schnitte in zwei Klassen geteilt, derart, daß jeder Schnitt S der einen unterhalb jedes Schnittes T der anderen liegt. Nennen wir ein solches Gesetz vorübergehend eine Sektion. Wir wollen zeigen, daß jede Sektion durch Angabe eines Schnittes vollständig beschrieben werden kann, d. h. daß die Sektionen das Gebiet der Schnitte nicht mehr erweitern.

Zunächst ist jedem Schnitt R eine Sektion zugeordnet, sofern wir alle Schnitte $S < R$ zur unteren, alle $T > R$ zur oberen Klasse und R selbst zu einer von beiden rechnen. Wir wollen beide Sektionen, die dadurch entstehen, wieder als gleich betrachten, und erkennen zugleich, daß erstens jede Sektion, die in einer Klasse einen letzten Schnitt R enthält, in der anderen Klasse keinen letzten Schnitt haben kann; zweitens, daß sie durch diesen Schnitt in dem eben angegebenen Sinne erzeugt wird.

Nunmehr ist nur noch zu zeigen, daß jede Sektion einen letzten Schnitt enthält. Der Beweis ist von jeder Unendlichkeitsbetrachtung frei, indem dieser letzte Schnitt ohne weiteres angegeben werden kann.

Jede Sektion teilt nämlich mit den Schnitten auch alle Zahlen in zwei Klassen, $r_1 = S'$, $r_2 = T'$, und da $r_2 > r_1$, ist diese Teilung ein Schnitt R.

Nach Definition ist $r_2 = T'$, also $r_2 > S$, d. h. für jedes S ist $r_2 = s'_2$. Damit wird von den drei Möglichkeiten $S < R$, $S = R$ und $S > R$ die dritte ausgeschaltet. Ebenso bleibt zwischen R und T nur eine der Beziehungen $R = T$, $R < T$ möglich. R ist also in der Klasse, zu der es gehört, der letzte Schnitt.

Wir müßten noch zeigen, wie die vier Species auf die Schnitte angewandt werden. Dieser Übertragung liegt aber folgendes Princip zu Grunde: Man sucht alle Eigenschaften auf, die zwischen zwei durch Zahlen erzeugten Schnitten a, b einerseits und dem durch eine der vier Zahlen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a:b$ erzeugten Schnitt andererseits bestehen, und die nichts auf die specielle Erzeugung der Schnitte a, b bezügliches enthalten. Mittelst dieser Eigenschaften kann man dann aus den Gesetzen zweier beliebiger Schnitte A, B vier neue Gesetze definieren, welche ihrerseits 4 Schnitte $A + B$ etc. beschreiben. Auf dieses außerordentlich leicht durchführbare Verfahren kann ich hier nicht eingeben, ich will nur die Definitionen angeben: Im Schnitt $S = A + B$ ist $s_1 = a'_1 + b'_1$, $s_2 = a'_2 + b'_2$; im Schnitt $D = A - B$: $d_1 = a'_1 - b'_2$, $d_2 = a'_2 - b'_1$. Im Schnitt $P = A \cdot B$: $p_1 = a'_1 b'_1$, $p_2 = a'_2 \cdot b'_2$, endlich in $Q = A : B$: $q_1 = a'_1 : b'_2$, $q_2 = a'_2 : b'_1$. —

Aus der Definition von $A \cdot B$ ist ohne weiteres ersichtlich, daß der am Schlusse des § 32 angegebene Schnitt durch diese endliche Definition charakterisiert ist als ein Schnitt S, für den $S > 0$, $S \cdot S = 2$ ist.

35. Man sieht nunmehr leicht, daß die Schnitte alle Eigenschaften der Irrationalzahlen besitzen, die wir oben als charakteristische angeführt haben. Wir können also jetzt die Schnitte kurzweg Irrationalzahlen nennen, ausgeschlossen natürlich die durch rationale Zahlen definierten. Dieser Definition gegenüber könnte man einwenden, daß sie die klare Anschauung durch das Surrogat eines unübersichtlichen Tatsachencomplexes ersetze und für Anwendungen unzweckmäßig, wenn nicht unbrauchbar sei. Daß sie nicht nur brauchbar, sondern sogar hervorragend zweckmäßig ist, wollen wir später zeigen. Was die Unübersichtlichkeit, ein ästhetisches Moment, betrifft, so muß vor allen Dingen konstatiert werden, daß sie hier nicht Gegenstand der Diskussion ist. Es handelt sich nur um den Nachweis der M ö g l i c h k e i t rein arithmetischer Definitionen des Irrationalen. Sodann aber ist zu bemerken, daß die Übersichtlichkeit von der Routine abhängt, die man in der Schlußweise eines speciellen wissenschaftlichen Gebietes besitzt. Dem Durchschnittsschüler ist weder der Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes noch das Logarithmenrechnen von Haus aus etwas Übersichtliches. Man wird dies aber im Ernst nicht als Argument gegen ihren Wert anführen. Für den Mathematiker von Fach besitzt die Schnittmethode eine geradezu vollendete Übersichtlichkeit.

Was endlich die Frage der Zweckmäßigkeit betrifft, so könnten wir uns derselben auf Grund desjenigen entziehen, was wir über die Übersichtlichkeit an erster Stelle gesagt haben. Indessen seien zwei schlagende Beispiele angeführt. Wir hatten am Ende des Kapitel IV versprochen, folgenden Satz zu beweisen: Wenn in einer Folge $a_1, a_2 \ldots$ jedes a_n größer ist als das vorangehende, so ist entweder $\lim a_n = \infty$ oder eine endliche (rationale oder irrationale) Zahl. Der Leser versuche nun den analogen geometrischen Satz geometrisch zu beweisen: „Ein Punkt, der sich auf einer Geraden in gleichbleibender Richtung bewegt, ohne sich beliebig weit von einem festen Punkt zu entfernen, nähert sich einem bestimmten festen Punkte L unbegrenzt.“ Da dieser feste Punkt L nur für specielle Fälle mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, versagen alle elementaren Methoden geometrischer Beweise, und man ist gezwungen, sich auf ein Axiom (das der Vollständigkeit) zu berufen, welches man in elementaren Lehrbüchern und auch in der ersten Auflage von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ vergeblich suchen wird. Ebensowenig wird der Beweis auf analytischem Gebiet ohne genaue arithmetische Präcisierung des Irrationalen gelingen.

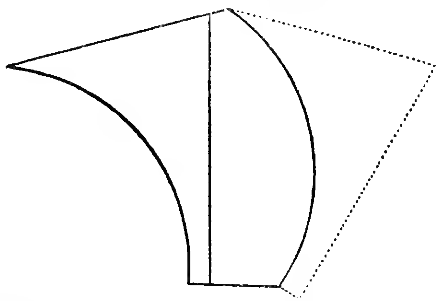
Mit Hülfe unserer Schnittmethode wollen wir ihn sofort erbringen: Es sei r irgend eine rationale oder irrationale Zahl, so kann ich entweder ein n angeben, so daß a_m für $m > n$ größer als r ist, oder ich kann es nicht. Das erste ist der Fall beispielsweise für die Zahlen a_m der Folge selbst. Jede Zahl r, für die die erste Annahme zutrifft, bezeichne ich mit r_1, jede, für die sie nicht zutrifft, mit r_2. Giebt es keine Zahl der zweiten Art, so heißt das wörtlich: Für jedes p kann ein n so angegeben werden, daß $a_m > p$, wenn $m > n$. Dafür war die Bezeichnung $\lim a_n = \infty$ eingeführt.

Giebt es aber Zahlen r_2, so behaupten wir, daß unsere Einteilung in Zahlen r_1, r_2 ein Schnitt ist. Erstens: Unsere Disjunktion ist vollständig, also ist jede Zahl r entweder ein r'_1 oder ein r'_2. Zweitens: Es ist $r_1 < r_2$. Denn auf Grund der Definition ist $a'_m > r_1$, dagegen $r_2 > a_m$, also $r_2 > a'_m$, d. h. a fortiori $r_2 > r_1$, w. z. b. w.

Nennen wir diesen Schnitt R. Wir wollen zeigen, daß $\lim a_n = R$. Zur Vorbereitung bemerken wir, daß zu jedem positiven p r'_2 und r'_1 so angegeben werden können, daß $r'_2 - r'_1 < p$. Danach folgt aber, weil $r'_1 < a'_m$ und $R < r'_2$, daß $R - a'_m < p$, d. h. $\lim A_m = R$. —

Hiermit ist nun zugleich die Möglichkeit erwiesen, irrationale Zahlen durch convergente Reihen, z. B. unendliche Decimalbrüche darzustellen. —

36. Ganz hervorragend geeignet ist die Schnittmethode zur Beschreibung der Ausmessung krummer Flächen. Es fehlt nämlich der Geometrie offenbar eine Methode, krummbegrenzte Flächeninhalte allgemein in Polygone zu verwandeln, weil sich durch Zerschneiden und andere Ordnung die krummen Begrenzungen nicht allgemein beseitigen lassen, wenn es auch in speziellen Fällen (s. Figur) gelingt. Es bleiben daher nur zwei Hülfsmittel zur Flächenvergleichung übrig. Erstens das Princip: „Jedes Ebenenstück, welches durch Wegschneiden von Teilen eines anderen entsteht, ist kleiner als dieses.“ Zweitens



der Lehrsatz: „Zu einem Ebenenstück E, welches von einer stetigen, ganz im Endlichen liegenden Curve C begrenzt ist, können stets zwei Polygone P_1 und P_2 angegeben werden, derart, daß P_1 ganz im Inneren von E, E aber ganz im Innern von P_2 liegt, und daß die Differenz der Flächeninhalte von P_2 und P_1 kleiner als ein beliebig vorgeschriebenes Ebenenstück H ist."

Können wir den Flächeninhalten aller Polygone Zahlen zuordnen, so definiert jedes Ebenenstück E der bezeichneten Art einen Schnitt und dieser allein kann ihm als Maßzahl des Flächeninhaltes zugeordnet werden. In diesem Sinne entspricht z. B. die Kreisausmessung des Archimedes allen modernsten Anforderungen an Strenge. —

37. Es verdient bemerkt zu werden, daß bisher keine Methode ausgebildet ist, um das Gesetz irgend eines beliebigen Schnittes durch rechnerische Symbole auszudrücken. Zwar giebt es gewisse solche Zeichen, z. B. das Wurzelzeichen, aber mit diesem beherrscht man noch nicht einmal die Gesamtheit aller algebraischen Schnitte; auch entspricht es nicht allen Anforderungen der Eindeutigkeit. Für transcendente Schnitte hat man in speciellen Fällen (e und π) besondere Zeichen eingeführt. Der Decimalbruch ist ja, weil unendlich, für diesen Zweck unbrauchbar. Das Zeichen 3,14159... ist keine Definition von π, sowenig wie $\sqrt{2}$ durch 1,414... ersetzt werden kann. Ein Bedürfniß, diese Lücke auszufüllen, liegt zur Zeit nicht vor.

Schlusswort.

Die Zeit, in der alle die Formalismen der Decimal-, Logarithmen- und Infinitesimalrechnung, der analytischen Geometrie, des Irrationalen, der imaginären Zahlen, Potenzreihen u. s. w.

entstanden, hatte ein so reiches Gebiet der Anwendungen vor sich, daß auf die Begründung des ganzen Baues nicht übermäßige Sorgfalt verwendet werden konnte. Wenn das 19te Jahrhundert mehr Zeit dafür hatte, und das Versäumte nachholte, so geschah es nicht zuletzt darum, weil die Produktivität der Mathematik durch die unzuverlässigen Grundlagen gefährdet wurde. Das gefährlichste Baumaterial waren die als wirklich existierend angenommenen unmeßbaren Größen dx und ∞. Indem man prüfte, wie weit man damit rechnen kann, ohne sich in Widersprüche zu verwickeln, kam man zuletzt dazu, sie überhaupt völlig auszuschalten. Denn soweit sie brauchbar waren, waren sie auch überflüssig. So haben sie sich lediglich als formales Element bequemer Rede- und Schreibweise erhalten.

Principiell ist zu bemerken, daß eine Arithmetik logisch widerspruchslos denkbar ist, in der eine Zahl a mit ihren sämtlichen Vielfachen kleiner als eine andere b und ihre sämtlichen aliquoten Teile sein kann. In einer solchen Arithmetik aber sind unsere gemeinen Zahlen als Elemente enthalten und alles was noch dazu kommt, ist ein Ballast, der kein Problem löst, keinen Beweis vereinfacht, sondern nur alle die Schwierigkeiten aufs neue bringt, die in der gemeinen Arithmetik heute glücklich beseitigt sind.

Im Gebiet der Geometrie und Bewegungslehre widerspricht die Annahme solcher unmessbaren Größen der Erkenntnisquelle, der reinen Anschauung. Raum und Zeit sind unbegrenzt teilbar, was soll es unterhalb dieser Teilbarkeit noch kleineres, durch Teilung unerreichbares geben? Raum und Zeit sind unbegrenzt ausgedehnt. Was sollte darüber hinaus noch liegen?

Im Gebiet der empirischen Naturwissenschaften giebt es nur begrenzte Genauigkeit. Unterhalb einer gewissen Grenze ist alles kleinere null, oberhalb einer anderen alles unendlich. Hier werden schon gar nicht alle endlichen Größen gebraucht, was sollen uns unendlichkleine?

Möge bald die Zeit kommen, in der die Resultate der modernen, kritisch forschenden Mathematik sich derselben Verbreitung erfreuen, wie heute die der hellenischen und der beginnenden germanischen; die Zeit, die zur Kenntnis auch in weiteren Kreisen das Verständnis hinzubringt. Dann wird endlich die leichtfertige Beurteilung verstummen, der wir heute noch auf Schritt und Tritt begegnen, die ohne tiefere Sachkenntnis die mühevolle kritische Arbeit eines Jahrhunderts für einen Rückschritt der Mathematik erklärt.

Abhandlungen

der

Fries'schen Schule.

Neue Folge.

Herausgegeben von

Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser

und **Leonard Nelson.**

Zweites Heft.

Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1905.


17 65

IV.

Kant und Fries.

Die anthropologische Wendung der Kritik der Vernunft in ihren wesentlichen Punkten erörtert

von

Heinrich Eggeling.

Bisher unveröffentlichte, auf Wunsch der Herausgeber abgedruckte Habilitationsschrift des Verfassers.

Mit vollem Rechte wird behauptet, daß die Kantische Philosophie in Deutschland für alle späteren Systeme den Ausgangspunkt bilde, und daß jede Spekulation, sofern sie auf allgemeine Beachtung Anspruch erhebt, sich zunächst mit der Kantischen Philosophie aus einander zu setzen habe. Diese ihre bleibende Bedeutung liegt in der Grundforderung, welche Kant der früheren Philosophie entgegenstellte: allen weiteren spekulativen Versuchen müsse eine Untersuchung der Vernunft inbetreff ihres Vermögens zu philosophischer Wahrheit überhaupt vorausgeschickt werden, — und in der dieser Forderung entsprechenden Entdeckung des vollen Tatbestandes, welchen die menschliche Vernunft an reinen oder philosophischen Erkenntnissen besitzt. Die von Kant gehegte Hoffnung, daß es nach Ausführung der von ihm geforderten Untersuchung gelingen werde, die Metaphysik zu einer ebenso evidenten, allgemein anerkannten Wissenschaft auszubilden, wie es die Mathematik sei, ist unerfüllt geblieben. Noch immer, ja man könnte sagen mehr als je ist das Gebiet der reinen Philosophie eine Stätte des Streites und Kampfes, auf welcher ein jeder sich um so mehr Anhänger erwirbt, je größer die Gewalt seiner Rede ist, je mehr er sich dem Geiste seiner Zeit anzubequemen weiß und — je lauter und je gewandter Sprache und Schrift seiner Anhänger sind.

Der Grund dafür, daß es noch immer nicht gelungen ist, die spekulative Philosophie in den sicheren Gang einer Wissenschaft zu bringen, dürfte zum Teil in dem Mangel einer allen Philosophierenden gemeinsamen, einheitlichen Ausdrucksweise zu finden sein; eine jede philosophische Schule redet ihre eigene Sprache, und viel Streit der Schulen unter einander rührt daher, daß sie sich gegenseitig nicht verstehen. Der weitere und tiefere Grund aber liegt darin, daß man den von Kant eingeschlagenen Weg verließ; denn auf diesem allein kann man dazu gelangen, das philosophische Vermögen nach Umfang und Inhalt scharf zu bestimmen und so der Philosophie die sichere Basis zu geben. Die unternehmungslustige Vernunft trieb bald wieder über die von Kant ihr gezogenen Grenzen der Erkenntnis hinaus; sie wagte wieder den salto mortale ins Absolute! Ungeachtet der Warnungen Kants unternahm man es, losgerissen von der Erfahrung, die letzten Gründe des Daseins zu begreifen, und wohl gar, aus ihnen die Welt und den Lauf der Ereignisse in ihr zu konstruieren. —

Wer aufmerksam die Entwickelung der Philosophie nach Kant verfolgt, dem kann es nicht zweifelhaft sein, daß gewisse in der Kantischen Spekulation stehen gebliebene Fehler, obwohl sie für ihn selbst von keinem entscheidenden Einfluß waren, doch die Veranlassung wurden, daß die Spekulation so bald den von Kant eingeschlagenen Weg verließ und, scheinbar über jenen hinausgehend, in Wirklichkeit zurückschritt, wodurch die Hoffnung, die Philosophie zu einer festen Wissenschaft ausgebildet zu sehen, einstweilen vernichtet ward. —

Unter den Philosophen, welche die von Kant angebahnte subjektive Wendung der Spekulation für das entscheidend Wichtige zur wahren Fortbildung der Philosophie erkannten, nimmt Jakob Friedrich Fries die erste Stelle ein. Was Fries hierfür getan, ist im allgemeinen wenig bekannt geworden. Ungünstige Lebensschicksale ließen ihn nur kurze Zeit die so kräftig begonnene Tätigkeit als philosophischer Lehrer ausüben. Die zahlreichen Werke, in denen er die reifen Früchte seiner philosophischen Arbeit niederlegte, wurden von wenigen gelesen, von noch wenigeren richtig verstanden und gewürdigt. Es war eben damals, als Schelling und Hegel die philosophierenden Köpfe Deutschlands einnahmen, nicht möglich, durch literarische Tätigkeit allein für eine strenger wissenschaftliche Richtung der Philosophie die allgemeine Aufmerksamkeit zu gewinnen. Fries war 1816 zugleich mit Hegel an Fichtes Stelle in Berlin primo loco vorgeschlagen, dieser für spekulative, jener für praktische Philosophie. „Hätte dieses," sagt Henke mit Recht, „damals den Erfolg gehabt, daß Hegel gar nicht nach Berlin berufen wäre, sondern statt seiner Fries, wie würde die ganze Geschichte der deutschen Philosophie von 1816 an, mit ihr auch teilweise die der deutschen Theologie, eine so ganz andere geworden sein! — — — und wenn dann von der vereinten Kraft dieser drei Männer (De Wette, Schleiermacher und Fries) eine Glauben und Wissen aus einander haltende, aber eben dadurch vermittelnde Theologie und Philosophie ausgegangen wäre, würde es vielleicht nicht zu einer solchen Verzweiflung an beiden nach den Extremen irreligiöser Wissenschaftlichkeit und unwissenschaftlicher Religiosität und darum zu so tief gehenden Spaltungen in Kirche und Schule gekommen sein."

Von den Geschichtsschreibern der neueren Philosophie ist Fries fast immer falsch verstanden. Hier hat es einer dem anderen nachgesagt, Fries sei von Kant und Jakobi ausgegangen, sein System sei die Vermittelung der Lehren jener beiden und suche die eine durch die andere zu ergänzen. Das Verhältnis von Fries zu Jakobi einer besonderen Betrachtung vorbehaltend, möchten wir hier nur hervorheben, daß Fries selbst in seinen Werken und in den Aufzeichnungen über seine philosophische Entwickelung wiederholt gegen eine solche falsche Auffassung seiner Lehre protestiert und betont, daß Jakobis Philosophie, sofern von einer solchen zu sprechen sei, auf die Ausbildung seiner Ansichten gar keinen Einfluß gehabt habe.

Aus dem Studium der Kantischen Kritiken entwickelte sich für Fries frühzeitig die Lebensaufgabe, zu deren Lösung er, wie er 1799 schreibt, geboren und in die Welt gekommen zu sein scheine. Er erkannte, daß den Kantischen Entdeckungen eine allgemeine psychologische Grundlage fehle, und hieraus entstand ihm die Aufgabe, die Kritik in eine Theorie der Vernunft umzubilden, welche die eigentliche Propädeutik der Philosophie selbst bilde. Wenn Zeller „das Eigentümlichste von Fries' System in den psychologischen Untersuchungen“ findet, „durch welche er die Annahmen seiner Vorgänger genauer zu begründen und näher zu bestimmen versucht habe“, so ist hierin das Richtige wohl angedeutet, aber doch in ungenügender, nicht deckender Weise. Es handelte sich für Fries nicht um Annahmen von Vorgängern, sondern um die großen Entdeckungen, welche Kant gemacht, — nicht um eine genauere Begründung derselben, sondern um die Durchführung und Vollendung der von ihm eingeleiteten subjektiven Wendung der Spekulation. Es klingt aus jener Darstellung der Friesischen Philosophie, wie auch aus anderen ähnlichen, als ein Vorwurf: Fries sei in Hinsicht des Endresultates nicht über Kant hinausgegangen, — und wo es geschehen sei, habe er sich um so enger an Fr. H. Jakobi angeschlossen. Das erstere dürfte wohl nicht als Vorwurf zu erachten sein, das andere ist unrichtig. Kants kritische Arbeiten hatten die der menschlichen Vernunft gehörenden notwendigen Prinzipien und die Grenzen ihres Gebrauches aufgewiesen, und hiermit war die Wissenschaft der Prinzipien, die Metaphysik, so vollständig in Grund gelegt, daß Kant in Bezug auf sie wohl mit Recht sagen konnte: nil actum reputans, si quid superesset agendum.

Was blieb hiernach zu tun? Die Frage wird am klarsten und schärfsten beantwortet durch ein Beispiel aus der Geschichte der Naturwissenschaft. Keppler hatte die Gesetze der Planetenbewegung auf induktivem Wege gefunden, aber Abschluß und Vollendung erhielt seine Entdeckung erst, als Newton sich zu der Theorie der Gravitation erhob und hierin die Kepplerschen Gesetze als die notwendigen Folgen des Grundsatzes der allgemeinen Gravitation aufwies. So auch hier. Nachdem Kant den faktischen Besitzstand der Vernunft an philosophischer Erkenntnis entdeckt, bedurfte es noch dessen, in einer Theorie der Vernunft den Nachweis zu liefern, warum wir gerade diese und nur diese philosophische Erkenntnis besitzen. —

An Stelle der progressiven Methode des logischen Dogmatismus hatte Kant die regressive, zergliedernde Methode als die für die Ausbildung der Philosophie einzig mögliche gefordert; hierdurch und durch die scharfe Unterscheidung analytischer und synthetischer Urteile war alle dogmatische Philosophie, durch den Nachweis des faktischen Bestehens synthetischer Urteile a priori Lockes Empirismus überwunden; gegen Humes Skeptizismus zeigte Kant, daß wir zur Erkenntnis allgemeiner Gesetze für Natur und Menschenleben nur unter Voraussetzung gewisser a priori erkannter Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung gelangen. Die Metaphysik hatte Kant auf die Frage gestellt: wie sind synthetische Urteile a priori aus reinen Begriffen möglich? Die gründliche Durchforschung des menschlichen Erkenntnisvermögens, zu welcher er durch die Erörterung jener Frage veranlaßt wurde, führte ihn zur Entdeckung der reinen Anschauung, der Kategorieen und metaphysischen Grundsätze und endlich zur Auffindung der transcendentalen Ideen, die erst durch die unmittelbare Notwendigkeit des sittlichen Grundbewußtseins Anwendung finden. Alle diese Resultate der Kantischen Spekulation finden wir auch bei Fries, und es ist richtig, er ist in dieser Beziehung nicht über Kant hinausgegangen; er hat freilich weder den Ruhm erlangt, eine „intellektuelle Anschauung", noch denjenigen, ein „absolutes Wissen" entdeckt zu haben. Und was wäre es auch? Sollen doch diese wichtigen Funde mit dem Tode ihrer Entdecker wieder verloren gegangen sein; Wissenschaft und Leben dürften an ihrer Wiederauffindung kein Interesse haben. — Mit Kant behauptet Fries, daß aller Gehalt der menschlichen Erkenntnis aus der Erfahrung stamme, und daß die selbsttätige Vernunft durch jene von Kant entdeckten Prinzipien a priori Einheit und Verbindung in den sinnlich gegebenen Gehalt bringe. Die Lösung des größten Problems, die Beantwortung der Frage nach der Nebenordnung des Sinnlichen und Übersinnlichen, des Endlichen und Ewigen, Natur und Freiheit, gibt auch Fries in der Lehre des transcendentalen Idealismus. Den Mangel aber der Kantischen Philosophie fand Fries darin, daß die Aufgabe der Kritik nicht scharf genug als eine psychisch-anthropologische gefaßt war, und er hoffte, jene dadurch zu vollenden, daß er in einer auf innere Erfahrung gegründeten Theorie der Vernunft aufwies, wie die verschiedenen Formen des geistigen Lebens aus der einen Form der Vernünftigkeit des qualitativ erkennenden, lustfühlenden und begehrenden Geistes entspringen. Hierin wollte er zugleich der kritischen Philosophie die ihr bei Kant fehlende Einheit geben. Dafür bedurfte es zunächst, gewisse Mängel und

Vorurteile namentlich in bezug auf die Begründung der menschlichen Erkenntnis zu heben, welche bei Kant stehen geblieben waren. So bestimmt auch Kant sich gegen die dogmatische Philosophie erklärt hatte, so blieb er, um seine Philosophie vor dem Vorwurf des Empirismus zu schützen, doch in gewissem Sinne von dem rationalistischen Vorurteile für den Beweis befangen, was die Gefahr eines Rückfalls aus der kritischen in die dogmatische Methode in sich schloß.

Wir wollen versuchen, auf den folgenden Blättern die wichtigsten Punkte klar hervorzuheben, bezüglich derer Fries die spekulative Philosophie Kants fortgebildet hat.

Auf welchem Wege ist Kant zur Auffindung der der menschlichen Vernunft a priori gehörenden Bestimmungen geführt? auf welcher Grundlage ruht also die Kritik der Vernunft? Die Entscheidung dieser Frage, über welche wunderbarer Weise noch immer Streit geführt wird, ist für die Philosophie von größter Wichtigkeit. Unter den unmittelbaren Nachfolgern Kants war Fries derjenige, welcher am bestimmtesten behauptete, die Aufgabe der Kritik der Vernunft sei eine psychisch-anthropologische, nur auf dem Wege der inneren Erfahrung sei sie zu lösen; Kant habe auch in der Tat diesen Weg eingeschlagen und auf diesem und keinem anderen sei er zu seinen großen Entdeckungen geführt; er sei sich dessen jedoch nicht klar bewußt gewesen. Eine irrtümliche Auffassung des Verhältnisses der Reflexion zur unmittelbaren Selbsttätigkeit der erkennenden Vernunft habe ihn die psychologische Natur seiner „transcendentalen Erkenntnis“ verkennen lassen, und in diesem Irrtume, welcher Kant verhindert habe, seinem Werke Einheit und Vollendung zu geben, wurzele der Abfall der Identitätsphilosophie von der kritischen Methode. Sein treues Festhalten an der Kantischen Grundforderung, daß nur durch Kritik der Vernunft die dunkel im Menschengeiste liegenden philosophischen Wahrheiten aufgehellt, und die Behauptung, daß jener Forderung nur in psychisch-anthropologischen Untersuchungen genügt werden könnte, brachte Fries in einen unausgleichbaren Gegensatz zu aller Identitätsphilosophie. Im Sinne dieser, sagt Kuno Fischer sehr richtig, „ward die Vernunftkritik eine Erkenntnis, deren Objekt die Identität, d. h. die Einheit der Vernunft und der Welt ist; sie ward eine Wissenschaft des obersten Prinzips sowohl des Erkennens als der Dinge, d. h. sie ward Metaphysik und als solche Erkenntnis a priori." Hiergegen zeigte Fries, daß diese Art von objektiver Spekulation ein unmöglich auszuführendes Unternehmen sei. Wir haben kein Objekt ohne Erkenntnis, keine Erkenntnis ohne Objekt; die Einheit beider begreifen, ein oberstes Prinzip finden zu wollen, in welchem und durch welches die Identität der Erkenntnis und der Dinge und somit die Wahrheit der ersteren dargetan wäre, — hierfür bedürfte es, daß wir aus unserer Erkenntnis der Dinge selbst heraustreten, daß wir uns über dieselbe zu stellen vermöchten und in einer höheren — doch aber immer erkennenden — Tätigkeit Erkennen und Ding mit einander vergleichen und das beiden Gemeinsame, sie Einigende entdecken könnten. So fand oder erfand man denn intellektuelle Anschauung und reines Denken, die uns die gestellte Frage beantworten sollten. Indes, wie es bei unrichtiger Fragestellung nicht anders geschehen kann, man gelangte damit nur zu Phantasiegebilden und zu willkürlichen Spielen mit inhaltlosen logischen Formen. — Diesen Versuchen gegenüber betonte Fries: in uns selbst liegt das Gesetz der Wahrheit; nicht in dem für uns ganz unerkennbaren äußeren Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande, sondern in den inneren Verhältnissen unserer Erkenntnis selbst müssen wir die

Gründe für die objektive Gültigkeit derselben suchen. Innere Selbstbeobachtung allein kann uns die notwendigen Bestimmungen, welche in der menschlichen Vernunft liegen, aufweisen und damit über die Frage der Wahrheit die letzte Entscheidung bringen.

Kuno Fischer, welcher sowohl in der kleinen Schrift: „Die beiden Kantischen Schulen in Jena", als in der Einleitung zum fünften Bande der Geschichte der neuesten Philosophie die Frage nach der Grundlage der Vernunftkritik erörtert, unterzieht dabei auch das Verhältnis von Fries zu Kant einer Betrachtung. Er sieht in der Friesischen Philosophie zwar eine solche, welche in die Entwickelung der kritischen Philosophie gehöre, deren anthropologische Auffassung der Kritik der Vernunft jedoch einen Abfall von Kant bedeute und irrig sei. Kant sowohl als Fries, sagt Fischer, wollen durch Kritik der Vernunft dartun, welche Erkenntnisse a priori wir besitzen, welche Erkenntnisse die Vernunft durch sich hat. „So ist die Vernunftkritik eine Erkenntnis der Erkenntnis a priori." Gewiß! sie hat es mit der Ausbildung des Bewußtseins um diese Erkenntnisse zu tun, sie hat diese in jeder menschlichen Vernunft liegenden, von jeder Vernunft als notwendig und allgemeingültig angewandten Erkenntniselemente aufzuweisen als ursprüngliches Eigentum der erkennenden Vernunft. Wie nun kann dieses geschehen? Offenbar auf keine andere Weise als so, daß wir unsere Erkenntnis zergliedern, hierbei von allem abstrahieren, was sinnliche Wahrnehmung in dieselbe geliefert hat, und so in regressivem Gange finden, was der Vernunft unmittelbar und ursprünglich gehört. Fries nennt diese Aufgabe eine psychisch-anthropologische, die nur durch innere Erfahrung zu lösen sei. Kant dagegen sieht dieses Auffinden der ursprünglichen Bestimmungen der menschlichen Vernunft wieder als eine Erkenntnis a priori an. Kuno Fischer dekretiert für letzteren, indem er sagt: „hier liegt in der Friesischen Philosophie das πρῶτον ψεῦδος. Was a priori ist, kann nie a posteriori erkannt werden.“ Die Emphase eines Satzes trägt nicht zu seiner Klarheit und inneren Wahrheit bei. Die Bedeutung und das Gewicht jenes Satzes, der leicht zu der Meinung Veranlassung geben könnte, als herrsche in der Friesischen Philosophie eine arge Begriffsverwirrung, wird aus dem Folgenden klar werden. Fischer sagt gleich darauf: „Ich gebe zu, daß unsere ursprünglichen Vernunftäußerungen, die allen Vorstellungen und Erkenntnissen zu Grunde liegen, daß Anschauungen wie Raum und Zeit, daß Begriffe wie die Kausalität u. s. f. zunächst auf dem Wege der Erfahrung und Selbstbeobachtung von uns gefunden, daß wir auf diesem Wege zuerst derselben inne werden.“ Scheint in diesen Worten eine Übereinstimmung mit Fries zu liegen, so wird dieselbe durch die darauffolgenden Worte: — „Aber eines kann auf diesem Wege nie entdeckt werden: daß jene Vernunftäußerungen a priori sind!“ — aufgehoben und der Gegensatz auf den schärfsten Ausdruck gebracht. Was heißt denn nun aber a priori? Fischer sagt sehr richtig: „Überhaupt weiß ich den ganzen Unterschied von a priori und a posteriori auf nichts anderes zu beziehen, als auf unsere Erkenntnis.“ Erkenntnis a posteriori ist solche, welche auf der Basis unserer Sinnesanschauungen ruht, Erkenntnis a priori dagegen ursprüngliche Bestimmung der Vernunft, welche keine sinnlich gegebenen Elemente enthält; diese ist mit einem Worte die Form, welche die selbsttätige Vernunft ihrem Erkennen zu Grunde legt. Wie anders sollen wir nun diese finden, als in innerer Erfahrung? Wie anders, als indem wir im Ganzen unserer Erkenntnis von allem sinnlich gegebenen Gehalt abstrahieren und so die ursprüngliche Form unserer Erkenntnis herausheben? Das eben ist die Aufgabe der Vernunftkritik; sie hat den ganzen Besitz unserer Vernunft an ursprünglichen Bestimmungen, an Erkenntnissen a priori aufzuweisen. Wäre ihr Erkennen selbst auch wieder ein apriorisches, so bedürfte es wohl einer Vernunftkritik zweiter Ordnung, welche der ersteren Erkenntnis als ursprüngliches Eigentum der Vernunft aufzuweisen hätte u. s. f. Hier liegt eben der Abfall von dem Grundgedanken der Kritik. Die Vernunftkritik sollte die Metaphysik in Grund legen, indem sie den ganzen Gehalt der menschlichen Vernunft an metaphysischer Erkenntnis aufwies; sobald man ihr Erkennen wieder für ein apriorisches hielt, verwandelte man die Vernunftkritik wieder in Metaphysik und verfiel dem Dogmatismus. Der eigentliche Grund dieser Wandlung liegt in der Besorgnis vor dem Empirismus. Wo bleibt die Notwendigkeit, wo die Allgemeingültigkeit ihrer Resultate, wenn die Vernunftkritik nichts sein will als Beobachtung meiner selbst? — so fragt Kuno Fischer und mit ihm die anderen. Nun vor allem soll die Vernunftkritik nichts anderes sein wollen, als was sie sein kann; nur innere Erfahrung kann uns zeigen, welche Bestimmungen in unserem ganzen geistigen Leben der reinen Selbsttätigkeit der Vernunft entspringen; mit diesen aber ist das Bewußtsein ihrer Allgemeingültigkeit und Notwendigkeit unmittelbar verbunden, und es wird nicht erst auf irgend eine Weise hinzugebracht. Der irreleitende Gedanke ist hier zuletzt immer der, daß man meinte, die Wahrheit jener Erkenntnisse a priori noch dartun, d. h. beweisen zu müssen, wobei man freilich übersieht, daß die höchsten Voraussetzungen der menschlichen Erkenntnis keines Beweises fähig sind. Wir kommen hierauf nachher zurück. —

Jürgen Bona Meyer gelangt in seinem Werke über Kants Psychologie bezüglich der oben gestellten Frage zu ganz anderem Resultate als Kuno Fischer. Er zeigt, daß die Kritik der Vernunft in der Tat auf psychologischer Grundlage ruhe, daß Kant auf dem Wege psychologischer Selbstbeobachtung, Analyse und Reflexion die Erkenntnisse a priori entdeckt habe, und daß man überhaupt auf keinem anderen Wege dazu geführt werden könne. Fries habe also mit Recht geglaubt, Kant in seinem Sinne durch Entwickelung der psychologischen Natur des Kritizismus ergänzen zu können, aber „er hatte Unrecht, wenn er behauptete, Kant habe die psychologische Natur seiner eigenen Untersuchung verkannt, weil er das Wesen der Reflexion nie begriffen habe". Kant habe gesehen, „daß unmittelbares Selbstbewußtsein zur Auffindung des Apriori nicht genügt, daß vielmehr die Selbstbesinnung noch der Hülfe wissenschaftlicher Analyse und Reflexion bedarf. In diesem Sinne lehnte er also gewiß mit Recht die bloße Selbstbeobachtung als Mittel zur Entdeckung des Apriori ab, aber gewiß nicht die durch wissenschaftliche Analyse und Reflexion geleitete Selbsbesinnung". Wodurch nun aber unterscheiden sich Selbstbeobachtung und durch Reflexion geleitete Selbstbesinnung? Die Unklarheit in dieser Unterscheidung hob schon Grapengießer hervor in seinem Aufsatze über die transcendentale Deduktion (65. Bd. 1. Heft der Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik); keineswegs ist mit derselben eine Differenz zwischen Fries und Kant bezeichnet.

Auf das Bestimmteste erklärt Fries aller Orten, daß wir nur durch Reflexion uns der dunkel in uns liegenden, ursprünglichen Bestimmungen der Vernunft bewußt werden könnten, und daß Kant sie auf diesem Wege gefunden habe. Kant habe aber die Natur der Reflexion und ihre Stellung in der Organisation des menschlichen Geistes verkannt, indem er in ihr ein Vermögen der Erkenntnis, und zwar der Erkenntnis a priori erblickte, während es in der Tat doch das höhere Vermögen der Selbsterkenntnis sei, welches selbst nicht neue Erkenntnis gebe, sondern nur anderweitig gegebene zum Bewußtsein bringe. Dieser Punkt, auf welchen es doch für die Beurteilung der Friesischen Philosophie ganz besonders ankommt, ist nie genug beachtet worden. — Während Meyer also inbezug auf die Entdeckung des Apriori der Friesischen Ansicht zustimmt, entscheidet er sich hinsichtlich der damit eng zusammenhängenden Frage nach der Begründung der Erkenntnisse a priori mit Fischer gegen Fries: Der Beweis der Rechtmäßigkeit des Apriori sei mehr als eine psychologische Entdeckung. Wir werden diesen Hauptdifferenzpunkt nachher schärfer ins Auge zu fassen haben, müssen uns aber zunächst zur Betrachtung des anderen bezüglich der Stellung der Reflexion wenden. —

Kant hatte das die notwendigen und allgemeingültigen Erkenntnisse betreffende Grundproblem der Philosophie durch die Beantwortung der Frage: wie sind synthetische Urteile a priori möglich? endgültig entschieden. Nachdem er die Erkenntnisse a priori als ein Faktum aufgewiesen und den vollen Besitzstand der Vernunft an jenen entdeckt hatte, blieb indessen hier noch eine Frage zu entscheiden. Jene Erkenntnisse enthalten die notwendige und allgemeingültige Wahrheit, deren wir uns nur im Denken bewußt werden können; das Denken aber ist eine willkürliche Tätigkeit des Geistes. Es mußte also noch die Frage beantwortet werden, welche schon die Sophisten an der Möglichkeit notwendiger Wahrheit zweifeln ließ, wie kann die willkürliche Tätigkeit des Verstandes uns die notwendige Wahrheit geben? So ward Fries in seiner Kritik der Vernunft auf das Problem der Möglichkeit des willkürlichen Vorstellens geführt, in dessen gründlicher Auflösung er zeigt, daß der Verstand uns nicht neue Erkenntnis gebe, sondern vermittelst der logischen Hülfsmittel Begriff, Urteil, Schluß und Systemform gegebene Erkentnis nur zum Bewußtsein bringe; nicht der willkürlichen Tätigkeit des Verstandes entspringen jene notwendigen und allgemeingültigen Wahrheiten, nicht sie bringt in und mit ihnen Einheit und Verbindung an unsere Erkenntnis; sondern der Quell jener Wahrheiten, welche alle Synthesis unserer Erkenntnis enthalten, ist die Vernunft in ihrer reinen Spontaneïtät. Die von dieser geübte urspüngliche Synthesis hat die analytische Tätigkeit des Verstandes uns zum Bewußtsein zu bringen. — Der Zweck dieser Schrift gestattet uns nicht, den psychologischen Untersuchungen, auf welchen die Entdeckung dieses Verhältnisses ruht, in ausgedehnterer Weise zu folgen; wir versuchen nur, einen Überblick zu geben. Vor der Selbstbeobachtung treten intuitive und diskursive Erkenntnis, die in der Affektion bestimmte Anschauung und die durch Reflexion bestimmte willkürliche Erkenntnis aus einander. Ihre Vereinigung ward auf verschiedene Weise versucht. Die Empiriker suchten die Tätigkeit des Verstandes ganz auf die in der Empfindung gegebene anschauliche Erkenntnis, die diskursive auf die intuitive Erkenntnis zurückzuführen, während die Rationalisten umgekehrt bestrebt waren, die dunkle und verworrene Vorstellung der Sinne in die deutliche Erkenntnis durch Begriffe aufzulösen. Der ersteren Bestreben wird hinfällig, sobald man bemerkt, daß die in der Empfindung entspringende, stets an den Moment des Bewußtseins gebundene Anschauung uns wohl das Wirkliche, nicht aber das Notwendige erkennen lassen kann, daß sie uns wohl zeigt, wie ein Ding jetzt ist, nicht aber, wie es notwendig sein muß. Der in unserer Erkenntnis tatsächlich vorhandene Begriff der Notwendigkeit kann also nicht in der Empfindung gegeben sein; er deutet auf ein über die Anschauung hinaus liegendes Gebiet der Erkenntnis. Eine Auflösung der sinnesanschaulichen Erkenntnis in die gedachte oder diskursive Erkenntnis ist aber eben so wenig möglich. Alle gedachte Erkenntnis ist eine mittelbare durch Begriffe, welche ohne unmittelbare Anschauung nie zustande kommen könnte; die anschaulichen Erkenntnisse aber sind, wie sich leicht zeigen läßt, zum großen Teil gar nicht in Begriffe zu fassen und aufzulösen. Die Vereinigung dieser beiden Stämme der menschlichen Erkenntnis, wie Kant sie nannte, gelingt also nicht durch Zurückführung der einen auf die andere, sondern nur durch den von Fries gegebenen Nachweis, daß jener ganze Unterschied der intuitiven und diskursiven Erkenntnis nur ein Unterschied für die innere Wiederbeobachtung unserer Erkenntnis, nicht aber für die Beschaffenheit unserer Erkenntnis selbst sei.

Die Vernunft ist eine rezeptive Spontaneïtät, eine erregbare Selbsttätigkeit. Sie besitzt die drei Vermögen qualitativ verschiedener, unmittelbarer Tätigkeiten des Erkennens, Fühlens und Wollens, welche nicht weiter auf einander zurückführbar sind. Infolge ihrer Rezeptivität bedarf die Vernunft, um ihre Tätigkeit zu äußern, einer Anregung. Die fremdher angeregte Äußerung der Selbsttätigkeit im Erkennen ist die sinnliche Erkenntnis. Sie gibt den mannigfaltigen Gehalt der Erkenntnis, welcher durch die reine Spontaneïtät der Vernunft zur Einheit der Erkenntnis verbunden wird. Die ursprüngliche reine Selbsttätigkeit im Erkennen ist also ein Vermögen der Synthesis, welche die Einheit und alle Verbindung und kraft ihrer Beharrlichkeit jede notwendige Bestimmung an die menschliche Erkenntnis bringt.

Für jede aufmerksame Selbstbeobachtung zeigt sich nun, daß der Standpunkt der unmittelbaren Erkenntnis von dem Standpunkt des Bewußtseins um dieselbe unterschieden werden muß.

Es ist etwas anderes, eine Erkenntnis haben, etwas anderes, sich ihrer bewußt zu sein, zu wissen, daß man diese Erkenntnis habe. Dem Vermögen der Selbsterkenntnis oder des Bewußtseins um unsere Erkenntnisse liegt das reine Selbstbewußtsein, die reine Apperzeption zugrunde, welche das „Ich“ als das gemeinschaftliche Subjekt aller innerlich wahrgenommenen Tätigkeiten nennt. Wie die Erkenntnis überhaupt, so steht die Selbsterkenntnis unter einem Gesetz der sinnlichen Anregung. Der innere Sinn, die Empfänglichkeit des Vermögens der Selbsterkenntnis, nimmt aber nur die in jedem Augenblick lebhaftesten inneren Tätigkeiten wahr, ohne den Zusammenhang und das Ganze unserer inneren Lebenstätigkeit uns zum Bewußtsein zu bringen. Über dieses sinnlich gegebene Bewußtsein um unsere einzelnen inneren Lebenszustände erhebt uns die Reflexion, die Tätigkeit des Verstandes, indem sie sich vermittelst ihrer allgemeinen Vorstellungen in einem B e w u ß t s e i n ü b e r h a u p t auch jener inneren Vorgänge bemächtigt, welche vom inneren Sinn nicht wahrgenommen werden können. Die der Anregung zunächst liegenden Tätigkeiten der erkennenden Vernunft, die äußeren Sinnesanschauungen, fallen unmittelbar auch in die Beobachtung durch den inneren Sinn und werden von diesem zum Bewußtsein gebracht. Der allgemeinen und notwendigen Bestimmungen aber, welche die reine Selbsttätigkeit der erkennenden Vernunft aus sich hinzubringt, der Vorstellungen der Einheit und Verbindung, in welche die Vernunft vermöge der ihr eigenen synthetischen Kraft das Mannigfaltige des sinnesanschaulich gegebenen Gehaltes faßt, können wir uns nur denkend im Urteil bewußt werden. Der Verstand ist demnach das höhere Vermögen des Bewußtseins um die Akte unserer unmittelbaren Erkenntnis, indem er diejenigen Verhältnisse derselben aufhellt, welche nicht anschaulich wahrgenommen werden können. —

F r i e s macht gelegentlich darauf aufmerksam, wie so viel Irrtum in der Philosophie dadurch entstanden, daß man die willkürliche Tätigkeit des Verstandes mit der Spontaneïtät der Vernunft im Erkennen verwechselt habe. Diese Selbsttätigkeit der erkennenden Vernunft wirkt ganz unwillkürlich nach inneren notwendigen Gesetzen, auf sie kann der Wille gar keinen Einfluß haben. Neben den sinnlich angeregten Tätigkeiten gehören ihr ursprünglich die notwendigen Gesetze unserer mathematischen und philosophischen Erkentnis, in welchen die menschliche Vernunft ihr Gesetz der Wahrheit der ganzen Erkenntnis zugrunde legt, und durch welche alle ihre Erkenntnisse mit Notwendigkeit zur einen Erkenntnis der Welt verbunden sind. Kraft eines unmittelbaren Aktes der Urteilskraft, welchen F r i e s das Wahrheitsgefühl nennt, treten jene Grundbestimmungen der reinen Spontaneïtät im Erkennen in alle Beurteilungen des täglichen Lebens ein; so setzt z. B. jedermann in diesen die Beharrlichkeit der Substanzen, die Bewirkung der Veränderungen und die Wechselwirkung der Dinge in der Natur, er setzt in sittlichen Beurteilungen die Persönlichkeit des Geistes, in religiösen das Dasein Gottes voraus. Die willkürliche Tätigkeit des Verstandes aber hellt diese im dunkeln Innern vollzogenen Akte der ursprünglichen Selbsttätigkeit der Vernunft auf, sie reflektiert die für sich dunkeln Teile der unmittelbaren Erkenntnis und bringt so das der selbsttätigen Vernunft gehörende Gesetz der Wahrheit zum Bewußtsein. Ganz mit Unrecht behaupten also F r i e s' Gegner, dieser habe das wahrhaft Vernunftallgemeine zu einem empirisch-psychologisch Tatsächlichen herabgedrückt. Nicht die allgemeingültigen und notwendigen Erkenntnisse sind nach ihm psychologischen Ursprungs; aber die Erforschung ihrer Stellung im Ganzen der menschlichen Erkenntnis ist empirisch-psychologischer Natur.

Diese Darlegung des Verhältnisses des Verstandes zur Vernunft gibt auch überraschende Aufklärung über verschiedene bei Kant unklar gebliebene Punkte. Kant hatte den Parallelismus zwischen den logischen Urteilsformen des Verstandes und den Formen der ursprünglichen synthetischen Einheit entdeckt, und er war so dazu geführt, die Tafel der Urteilsformen als Leitfaden zur Auffindung des vollständigen Systems der metaphysischen Grundbegriffe oder Kategorieen zu benutzen. Aber woher rührte jener Parallelismus? Der innere Zusammenhang war nicht klar geworden. Fries erst gelang es, diesen Zusammenhang aufzuhellen, indem er zeigte, daß die Urteilsform der die Vernunft beobachtenden Reflexion, die Kategorie aber der ursprünglichen Synthesis der Vernunft gehört, daß mithin jener Parallelismus notwendig bestehen muß. — Ferner ward durch jene Bestimmung des Verhältnisses zwischen Verstand und Vernunft auch der Grund klar, weshalb mit spekulativer Vernunft sich nichts ausrichten lasse; Kant hatte das Unvermögen der spekulativen Vernunft aufgewiesen, ohne einen Grund dafür angeben zu können. Fries zeigte hier, daß Kants spekulative Vernunft nichts anderes sei, als das Schlußvermögen des Verstandes, daß dieses aber als ein bloßes Instrument der Wiederbeobachtung für sich allein nichts Neues zur Erkenntnis beitragen könne, sondern daß ihm aller Gehalt erst durch die von ihm beobachtete unmittelbare Erkenntnis der Vernunft gegeben würde, welche zwar bei Kant immer vorausgesetzt sei, ohne jedoch klar zu werden.

Kant hatte diese Stellung der Reflexion, welche sie tatsächlich in der Organisation des menschlichen Geistes besitzt, verkannt; er hielt seine transzendentale Erkenntnis, in welcher es sich um die Erkenntnisse a priori und deren Gebrauch handelt, selbst wieder für eine Art der Erkenntnis a priori, während sie doch empirischer Natur ist. Dieser Irrtum wurzelt zuletzt bei Kant in einem Vorurteile, welches Fries das transzendentale nennt. Es ist im Grunde das alte rationalistische Vorurteil, nach welchem man in dem Beweis das höchste und letzte Begründungsmittel für die Erkenntnis erblickte, und auf welchem alle dogmatische Entwickelung der Philosophie ruhte. So bestimmt auch Kant der logisch-dogmatischen Methode des Philosophierens entgegentrat und ihr seine kritische Methode entgegensetzte, so verfiel er doch in das Vorurteil für den Beweis, um seine Erkenntnisse a priori sowohl gegen den Vorwurf des Empirismus als gegen den Einwurf des Skeptizismus sicher zu stellen, daß wir nicht berechtigt seien, solche notwendigen Erkenntnisse vorauszusetzen und anzuwenden, ohne sie zuvor bewiesen zu haben. So ward Kant dazu geführt, die objektive Gültigkeit der Erkenntnisse a priori durch die transzendentalen Deduktionen oder Beweise auf das Prinzip der Möglichkeit der Erfahrung zu stützen. Die sinnliche Wahrnehmung hat nach ihm objektive Gültigkeit, weil in ihr der Gegenstand der Grund der Vorstellung von ihm sei; da nun die Anschauung a priori die Bedingung bildet, unter welcher allein Gegenstände angeschaut werden können, die Kategorieen aber den Grund der Möglichkeit enthalten, daß Gegenstände gedacht werden können, wodurch allein Erfahrung zustande kommen kann, so müssen diese wie jene ebenfalls objektive Gültigkeit besitzen. Da solche auf die Tatsache der Erfahrung gestützte Beweisführung nicht an die transzendentalen Ideen, deren Gegenstände nicht in der Erfahrung gegeben werden können, langt, so suchte Kant die objektive Gültigkeit dieser nachher auf die unmittelbare Notwendigkeit des sittlichen Gebotes zu gründen. —

Hiergegen zeigte Fries, daß es ein ganz irriges Unternehmen und ein Abfall vom Geiste der Kritik sei, wenn man die obersten Prinzipien einem Beweise unterwerfen wolle, als besäßen diese nur abgeleitete Gültigkeit, während sie doch die höchsten und unmittelbarsten Voraussetzungen in allem Erkennen sind. Während die Tendenz der Kritik dahin ging, das Gesetz der Wahrheit im eigenen Geiste zu finden, suchte Kant die letzte Entscheidung über die objektive Gültigkeit der höchsten Prinzipien doch in den Dingen und ihrem Verhältnisse zu unserer Erkenntnis. Nachdem die Frage quid facti in bezug auf die Erkenntnisse a priori entschieden war, bedurfte allerdings auch die Frage quid juris der Beantwortung; es bedurften jene Erkenntnisse einer Begründung, einer Rechtfertigung. Fries behielt hierfür die von Kant gewählte Bezeichnung: „Deduktion" bei; aber diese hat bei ihm eine ganz andere Stellung und Bedeutung als bei jenem. Wir können dieselbe erst klar bezeichnen, nachdem wir Fries' vollständig veränderte Ansicht von der tranzendentalen Wahrheit oder objektiven Gültigkeit der Erkenntnis erörtert haben.

Eine Erkenntnis besitzt transzendentale Wahrheit oder objektive Gültigkeit, sofern die Vorstellung mit ihrem Gegenstande übereinstimmt: so pflegt man gemeiniglich zu erklären, und die immer wieder aufgeworfene Frage, das sogenannte Problem der Erkenntnis, lautet: wie kommt der Gegenstand zur Vorstellung hinzu? Fries behauptet nun, daß in jener Frage gar kein wahres Problem ausgesprochen sei, und wäre es — so könnte es von uns absolut nicht gelöst werden. Die Erkenntnis ist ein schlechthin auf sich beruhendes Faktum; sie besitzt unmittelbar Objektivität, und diese kommt nicht erst künstlich hinzu. Das Erkennen, d. h. die Vorstellung vom Dasein eines Gegenstandes oder von dem Bestehen eines Gesetzes, unter welchem die Gegenstände stehen, ist die unmittelbare Grundtätigkeit der erkennenden Vernunft, welche allen anderen Tätigkeiten derselben vorangeht. Die Existenz dieser übrigen zum Erkennen gehörenden Tätigkeiten, die Bildung der allgemeinen, problematischen Vorstellungen, in denen keine Behauptung über das Dasein ihrer Gegenstände liegt, das unwillkürliche Spiel der Assoziation, die willkürliche Leitung derselben in der Reflexion, — das alles sind abgeleitete Tätigkeiten, die einer Erklärung fähig sind und einer solchen bedürfen. Das Erkennen aber ist ein erstes, ursprüngliches Faktum aus innerer Erfahrung, über welches sich gar nichts Erklärendes sagen läßt. Das Verhältnis der Erkenntnis zu ihrem Gegenstande ist kein Kausalverhältnis, in welchem etwa der Geist durch einen Schluß aus der angeregten Vorstellung zu ihrem Gegenstande als ihrer Ursache käme, oder in welchem der Gegenstand die Vorstellung von ihm wahr mache. Der Gegenstand ist unmittelbar mit der Vorstellung verbunden, wir haben ihn nur in und mit ihr und könnten auf ihn gar nicht kommen, wenn es nicht so wäre. Es ist dieses ganze Verhältnis der Erkenntnis zu ihrem Gegenstande also eine Tatsache aus innerer Erfahrung, die schlechthin für sich besteht Wollten wir irgend etwas Erklärendes darüber sagen, so müßten wir aus unserer Erkenntnis heraustreten und Vorstellung und Gegenstand mit einander vergleichen können; aber eine solche Vergleichung ist ganz unmöglich. „Ich habe,“ sagt Fries, „die Erkenntnis nie mit ihren Gegenständen zu vergleichen, die immer schon bei ihr sind, sondern ich bleibe bei der Selbstbeobachtung meines Erkennens, wie dieses sich vor meinem Bewußtsein aus den Sinnesanschauungen, den reinen Anschauungen, dann den gedachten Erkenntnissen sowohl ihren Denkformen nach als nach ihrem metaphysischen Gehalt zum Bewußtsein der Einheit und Notwendigkeit der ganzen menschlichen Erkenntnis zusammenbildet und in dieser Einheit und Notwendigkeit die Wahrheit und Festigkeit der Überzeugung in sich selbst trägt“. Das Leben des Geistes kann ich nicht nach seinen äußeren, sondern nur nach seinen inneren Verhältnissen untersuchen; aber hier in dieser inneren Untersuchung, in der klaren Erfassung und dem richtigen Verständnis der Tätigkeiten, in welchen das Leben des Geistes sich manifestiert, liegen die wahren philosophischen Probleme, deren Lösung den Frieden in der Philosophie bringen würde. Es ist eine Täuschung, entsprungen aus der unmittelbaren Klarheit der sinnesanschaulichen Erkenntnis, wenn man diese zunächst für objektiv gültig hält und wähnt, man könne an sie die objektive Gültigkeit der mathematischen und philosophischen Erkenntnis durch Beweise anschließen. Diese wie jene, sagt Fries, besitzen auf gleiche Weise unmittelbar transzendentale Wahrheit kraft des Selbstvertrauens, mit welchem die Vernunft jede unmittelbare Erkenntnis begleitet. —

Fries macht nun weiter darauf aufmerksam, daß wir die transzendentale Wahrheit wohl von jener Wahrheit unterscheiden müssen, welcher der Irrtum entgegensteht. Für die unmittelbare Erkenntnis ist ein Irrtum ganz unmöglich; denn sie spricht das in der Vernunft liegende Gesetz der Wahrheit aus; einen Irrtum dieser unmittelbaren Erkenntnis würden wir nie als einen solchen zu erkennen vermögen. Hegt jemand Zweifel an der objektiven Gültigkeit seiner unmittelbaren Erkenntnis, so gibt es absolut kein Mittel, diesen Zweifel zu heben. Wenn jemand z. B. daran zweifelt, daß die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei, so kann er auf keine Weise überzeugt werden, daß dieses der Fall ist; hält jemand für möglich, daß es Veränderungen ohne Ursache gebe, zweifelt er also an der Wahrheit des Kausalitätsprinzips, so kann ihm dieser Zweifel nicht gehoben werden

Solche Zweifel sind aber für den geistig gesunden Menschen ganz unmöglich. Nicht die unmittelbare Erkenntnis also ist dem Irrtum unterworfen, sondern nur die mittelbare Erkenntnis, in welcher wir uns jener bewußt werden, und welche jene unmittelbare Erkenntnis in Urteilen ausspricht. Hier nennen wir das Urteil wahr, sofern es mit der unmittelbaren Erkenntnis übereinstimmt. Zum Unterschiede von der transzendentalen Wahrheit oder der Übereinstimmung einer Erkenntnis mit ihrem Gegenstande nennt Fries die Wahrheit des Bewußtseins oder die Übereinstimmung der mittelbaren Erkenntnis mit der in ihr ausgesprochenen unmittelbaren die empirische Wahrheit. Dieser steht der Irrtum gegenüber, und wir besitzen für denselben ein Korrektiv in der Vervollständigung und der genaueren Beobachtung unserer unmittelbaren Erkenntnis. Nicht die Vernunft irrt in ihrer unmittelbaren erkennenden Tätigkeit, wenn sie die Existenz eines farbigen Gegenstandes behauptet, zu dessen Erkenntnis sie sinnlich angeregt ist; wohl aber der Verstand, welcher mit seinem Urteile weiter geht, als die unmittelbare Erkenntnis, welche er aussprechen will, reicht, und etwa behauptet, der betreffende Gegenstand sei ein Apfel, wobei sich dann leicht finden kann, sobald wir die unmittelbare Erkenntnis vervollständigen, daß der Gegenstand ein Stück Wachs von der Gestalt und Farbe eines Apfels war. Alle sogenannten Sinnestäuschungen sind nicht Irrtümer der Sinnesanschauung, sondern der mittelbaren Erkenntnis im Urteil. Aus der unmittelbaren mathematischen Erkenntnis, der unmittelbaren figürlichen Synthesis der Vernunft entspringt das Gesetz, daß der Durchmesser eines Kreises zum Umfange desselben im Verhältnisse von $1 : \pi$ steht. Indeß diese Erkenntnis ist nicht unmittelbar klar, sondern sie gelangt erst durch das die dunkeln Verhältnisse der unmittelbaren Erkenntnisse aufhellende Urteil zum Bewußtsein. Hier ist nun das Urteil über jenes Verhältnis irrig, so lange es sich auf eine nur unvollkommene Beobachtung der unmittelbaren Erkenntnis stützt, wie etwa auf Anschauung oder Messen. Erst durch die strenge Entwickelung des Urteils aus den zugleich unmittelbar klaren ersten Verhältnissen der mathematischen Erkenntnis, durch die folgerichtige Anwendung der logischen Hülfsmittel, wie sie die Geometrie ausübt, wird uns das mit objektiver Gültigkeit in unserer unmittelbaren Erkenntnis liegende Gesetz zum Bewußtsein gebracht.

Nur wenn man die angegebenen Bestimmungen über die unmittelbare Erkenntnis und die Bedeutung und Stellung der Reflexion festhält und damit die Unterscheidung der transzendentalen und empirischen Wahrheit verbindet, vermag man zu verstehen, was die Deduktion im Friesischen Sinne bedeutet.

Der logische Satz vom zureichenden Grunde fordert richtig verstanden für jedes Urteil eine Begründung; man irrt und dehnt ihn über die Grenzen seines Gebrauches aus, wenn man auch für die unmittelbare Erkenntnis eine Begründung fordert. Diese ist, wie oben bemerkt, ein auf sich beruhendes Faktum; die mittelbare Erkenntnis im Urteil aber bedarf einer Begründung. Die Begründung durch den Beweis, welcher stets ein Urteil aus anderen herleitet, führt zuletzt auf Grundurteile, welche eines Beweises nicht weiter fähig sind. Für die Rechtfertigung solcher Grundurteile gibt es kein anderes Mittel als die Berufung auf die unmittelbare Erkenntnis, indem wir nachweisen, daß in ihr die in jenen Urteilen ausgesprochenen Erkenntnisse tatsächlich bestehen. Am klarsten und einfachsten ist hier die Begründung derjenigen Grundurteile, welche eine in der Anschauung gegebene Erkenntnis aussprechen, da wir eben in solchem Falle uns auch sofort der Erkenntnis wieder bewußt sind. Die Begründung solcher Urteile heißt Demonstration, welche in diesem Sinne also nicht mit Beweis zu verwechseln ist. Die auf Sinnesanschauung gegründeten Urteile und die mathematischen Grundurteile oder Axiome sind solcher Demonstration fähig. Weit schwieriger ist aber die Begründung der nur im Denken zum Bewußtsein kommenden philosophischen Grundurteile, welche Deduktion genannt wird. Sie ist weder Beweis noch Demonstration, — jenes nicht, denn es handelt sich hier nicht um abgeleitete Urteile, sondern um Prinzipien, — dieses nicht, denn die in ihnen ausgesprochene Erkenntnis ist nicht anschaulich klar, sondern kommt nur durch Denken zum Bewußtsein. Die Deduktion hat also die in den betreffenden Grundurteilen ausgesprochene Erkenntnis als in der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft tatsächlich bestehend nachzuweisen. Fries fordert für dieselbe eine auf innere Erfahrung gegründete Theorie der Vernunft, durch welche wir in den Stand gesetzt werden, die Grundelemente der menschlichen Erkenntnis zu bestimmen, die Formen der Selbsttätigkeit der Vernunft aufzuweisen und so die Stelle jeder unmittelbaren Überzeugung zu finden, welche in einem solchen philosophischen Grundurteile ausgesprochen wird. Die Deduktion in seinem Sinne hat es also damit zu tun, den Ursprung der Begriffe und Urteile a priori im Geiste aufzuweisen; sie ruht auf der Lehre von den Apperzeptionen und ist von Fries für alle Prinzipien a priori, mathematische und philosophische, spekulative und praktische, Kategorieen und Ideen im zweiten Bande seiner anthropologischen Kritik der Vernunft vollständig gegeben. Wir können dem hier nicht weiter folgen, müssen aber noch jenes Mißverständnisses erwähnen, welchem die Friesische Philosophie gerade wegen dieser Lehre von der Deduktion ausgesetzt gewesen ist; in ihr liegt der Grund, weshalb auch von sonst scharfsinnigen Männern Fries des Rückfalls in

Lockeschen Empirismus beschuldet ist. Wer der Entwickelung des Gedankenganges in der Friesischen Lehre aufmerksam folgt, sollte zu einer solchen Verwechselung nicht kommen können. Mit Kant behauptet Fries auf das bestimmteste, daß „zwar alle menschliche Erkenntnis mit sinnlicher Wahrnehmung beginne, aber in ihren allgemeinen und notwendigen Behauptungen nicht daraus entspringe, sondern daß die Vernunft diese ursprünglich als die reinvernünftigen Formen der menschlichen Erkenntnis besitze". In der einen und beharrlichen Form des inneren Lebens sieht Fries den Quell jener allgemeingültigen und notwendigen Erkenntnisse, welche der Ausdruck jener unmittelbaren Erkenntnistätigkeit unserer Vernunft sind, die ihr beharrlich in jedem Zustande ihrer Tätigkeit zukommt. Die Wahrheit jener notwendigen Erkenntnisse kann nicht erwiesen werden, sondern sie ruht in einem Wahrheitsgefühle, mit welchem die Vernunft kraft ihres Selbstvertrauens sie als Äußerungen ihrer unmittelbaren Selbsttätigkeit der ganzen Erkenntnis zugrunde legt. Der Unterschied dieser Lehre von der Lockeschen, welche die Erwerbung aller Vorstellungen durch Erfahrung behauptet, ist so einleuchtend, daß man nicht begreift, wie der Friesischen Philosophie der Vorwurf des Empirismus gemacht werden konnte. Seine Deduktionenlehre gab dazu den Anlaß. Die Deduktion ist die Rechtfertigung der philosophischen Prinzipien. Nun sagt man, wenn Fries diese Deduktion in seiner auf innere Erfahrung gegründeten Theorie der Vernunft geben will, so stützt er zuletzt doch wieder die philosophischen Grundsätze auf empirische Erkenntnis und sieht in der Erfahrung den letzten und wahrhaft festen Halt der menschlichen Erkenntnis. Es entspringt also jenes Mißverständnis einer falschen Auffassung der Bedeutung der Deduktion. Durch die auf die Theorie der Vernunft gegründete Deduktion werden die allgemeingültigen und notwendigen Prinzipien weder gegeben noch bewiesen. Gegeben sind sie durch die unmittelbare Selbsttätigkeit der Vernunft, wahr sind sie kraft des Selbstvertrauens, welches die Vernunft zu ihrer eigenen Wahrhaftigkeit hegt, und ihre Wahrheit lebt in unserem Bewußtsein in Folge unmittelbaren Wahrheitsgefühles. Eine jede menschliche Vernunft besitzt z. B. den Grundsatz der Kausalität, die Idee der Freiheit und legt diese Prinzipien kraft ihres Selbstvertrauens mit unmittelbarem Wahrheitsgefühle allen ihren Beurteilungen zugrunde, ganz unabhängig von der Deduktion derselben. Diese kann zur Wahrheit jener Prinzipien nichts hinzutun. Die Aufgabe der Deduktion ist eine ganz andere. Nachdem Kant nachgewiesen, welche Prinzipien a priori faktisch die Vernunft besitzt, blieb noch die Frage zu beantworten, weshalb die Vernunft gerade diese und nur diese besitzt. In diesem Sinne allein kann von einer Begründung jener Prinzipien die Rede sein. Die Beantwortung jener Frage hat Fries durch seine auf innere Erfahrung gegründete Theorie der Vernunft vollständig gegeben, und er hat damit der Fortbildung der Philosophie zu fester Wissenschaft den größten Dienst geleistet! Jene, welche die von Fries geforderte und von ihm weiter und tiefer, als von irgend einem Forscher vor oder nach ihm, ausgebildete innere Erfahrung so sehr mißachten und sie für unfähig halten, zu einer klaren Verständigung über die philosophischen Probleme zu führen, sollten doch beachten, daß das innere Leben des Geistes ebenso wie die äußere Welt der Materie ein Gebiet ist, dessen Erkenntnis uns nur durch Erfahrung erschlossen werden kann, und daß dort wie hier alle rein spekulativen Versuche nichts sind als eitle Träume, welche je mit dem Erfinder wechseln.

Die veränderte erkenntnistheoretische Grundansicht und seine ganz andere Ansicht von der transzendentalen Wahrheit veranlaßten Fries, der Lehre von den transzendentalen Ideen sowohl in bezug auf die Ableitung als auf die Begründung eine ganz andere Gestalt zu geben, als sie bei Kant hatte; damit erhielt zugleich die Lehre des transzendentalen Idealismus eine weit festere Stellung. Wir wollen versuchen, dieses Verhältnis im Kurzen darzustellen. —

Kant hatte die drei transzendentalen Ideen als faktischen Besitz der menschlichen Vernunft aufgewiesen; aber es hafteten seiner Lehre von denselben Mängel an, welche gehoben werden mußten, um ihr eine sicherere Gestalt zu geben. Analog der Auffindung der Kategorieen, bei welcher ihm die Tafel der Urteilsformen als Leitfaden diente, suchte Kant die transzendentalen Ideen aus der Form der Vernunftschlüsse herzuleiten. In Wirklichkeit gelang ihm aber diese Ableitung allein dadurch, daß er das Prinzip der Totalität aller Bedingungen oder der Unmöglichkeit des unendlichen Regressus hinzubrachte, welches ihm jedoch von nur subjektiver Bedeutung blieb. Die objektive Gültigkeit der synthetischen Grundsätze, welche wir durch die Verbindung der Kategorieen mit ihren anschaulichen Schematen erhalten, glaubte Kant aus der vorausgesetzten objektiven Gültigkeit der Erfahrungserkenntnis beweisen zu können, insofern jene synthetischen Erkenntnisse die notwendigen Bedingungen aller Erfahrung sind. Jene Voraussetzung langte jedoch nicht hin, die objektive Gültigkeit der transzendentalen Ideen zu beweisen; denn diese gehen auf das Unbedingte oder die Totalität aller Bedingungen. Da die Gegenstände, welche sie uns nennen, in keiner Erfahrung gegeben werden können, so ist die spekulative Vernunft unvermögend, die objektive Realität derselben darzutun. So ward Kant zu seiner transzendentalen Dialektik oder der Lehre vom transzendentalen Schein geführt, worin er zeigte, daß in allen Versuchen, aus den Ideen oder reinen Vernunftbegriffen zu synthetischen Sätzen zu gelangen und diese zu beweisen, die Vernunft durch einen ihr eigentümlichen Schein getäuscht werde, durch welchen jene Ideen den Anschein der Objektivität erhielten. Kant erklärte deshalb alle Unternehmungen der spekulativen Vernunft, mit ihren reinen Begriffen die Erkenntnis über die Grenzen der Erfahrung auszudehnen, für unzulässig. Er erkannte jedoch den Ideen einen regulativen Gebrauch zu, indem sie von der Vernunft als eine Regel gebraucht werden, um die möglichste Vollendung der systematischen Einheit der Erfahrungserkenntnis zu erreichen. So erscheinen bei ihm die Ideen als die höchsten Prinzipien der systematischen Einheit in der menschlichen Erkenntnis, aus denen zwar nicht selbst erkannt wird, denen man sich aber in immer erweiterter Erfahrung mehr und mehr nähern solle. Die Rechtfertigung oder den Beweis der objektiven Gültigkeit der transzendentalen Ideen suchte Kant dann in der Kritik der praktischen Vernunft zu geben, worin er zeigte, daß die Ideen mit dem unmittelbar und notwendig gültigen Sittengesetze in ähnlicher Weise zusammenhängen, wie die Kategorieen mit der Erfahrungserkenntnis. —

Wesentlich anders gestaltet sich die Lehre von den Ideen bei Fries. Er verwirft die Ableitung derselben aus der Form der Vernunftschlüsse; durch die Form des Urteils wird die Kategorie gedacht, die Idee aber nicht durch die Form des Vernunftschlusses; dieser ist seiner Form nach ein analytisch-hypothetisches Urteil, und es kann deshalb in ihr nichts anderes gedacht werden, als was schon durch die Form des Urteils gedacht ist. Jenes Prinzip der Totalität der Bedingungen oder der Unmöglichkeit des unendlichen Regressus, durch dessen Hinzubringen Kant die

Ableitung der Ideen gelang, macht Fries zum Prinzip seiner Ideenlehre. Er nennt es den Grundsatz der Vollendung, dessen Ausspruch lautet: Das Wesen der Dinge kann nicht unvollendbar, sondern muß an sich vollendet sein. Fries weist in der Deduktion diesen Grundsatz als das höchste objektive Prinzip der Vernunft, als den synthetischen Grundsatz der reinen Vernunft auf.

In der Auffindung der transzendentalen Ideen wird er dann so geführt: Unsere sinnlich eingeleitete Welterkenntnis kommt zustande, indem die Vernunft den mannigfaltigen sinnesanschaulich gegebenen Gehalt durch die ihrer reinen Selbsttätigkeit entspringenden Formvorstellungen — reine Anschauungen und Kategorieen — verbindet und verknüpft. Die Kategorieen oder metaphysischen Grundbegriffe erhalten erst dadurch, daß sie in der unmittelbaren Erkenntnis mit ihren reinanschaulichen Schematen verbunden sind, Anwendung auf bestimmte Erkenntnis und liegen so als die formalen synthetischen Prinzipien oder die höchsten Naturgesetze unserer empirischen Erkenntnis der Welt zugrunde. Diese erhält durch den reinanschaulichen Schematismus den Charakter der Unvollendbarkeit, so daß sie uns nur Reihenfolgen von Bedingungen zeigt, in denen jedes Glied von dem vorhergehenden abhängig ist, — lauter Reihen mit unendlichem Regressus. Dagegen fordert der objektivgültige Grundsatz der Vollendung, daß das Wesen der Dinge vollendet sei; mit unabweisbarer Notwendigkeit fordert er für jedes Wirkliche eine Totalität der Bedingungen, die allein durch das Unbedingte oder Absolute möglich ist. Wir müssen deshalb in jenem reinanschaulichen Schematismus der metaphysischen Grundbegriffe, an welchen unsere Erkenntnis gebunden bleibt, eine Schranke anerkennen, welche uns hindert, das Wesen der Dinge in seiner Vollendung, das Unbedingte oder Absolute selbst zu erfassen. Von diesem haben wir nur eine

Idee d. h. eine Vorstellung, deren Gegenstand nicht in bestimmter Erkenntnis gegeben werden kann.

Mit derselben Notwendigkeit, mit welcher die Anschauungen von Raum und Zeit und die Kategorieen in der menschlichen Vernunft liegen, gehört ihr auch die Idee des Absoluten; sie fordert für das Wesen der Dinge Aufhebung der an unserer sinnlich eingeleiteten Erkenntnis haftenden Schranken d. h. Negation des mathematischen Schematismus und absolute Bestimmung der Kategorieen, in welcher die obersten oder idealen Formen der Synthesis — die transzendentalen Ideen wurzeln.

Die Deduktion der transzendentalen Ideen gibt Fries, wie schon bemerkt, zugleich mit derjenigen der Kategorieen; sie weist auch die Ideen als unmittelbare reinvernünftige Überzeugungen auf, als Formen, in denen die Grundvorstellung der objektiven synthetischen Einheit vor das Bewußtsein tritt. Anwendung und Bedeutung in der menschlichen Erkenntnis erhalten die Ideen erst durch den sittlichen Schematismus; aber ihre Gültigkeit können sie nicht erst durch die moralischen Beweise erlangen. Durch den Nachweis des Ursprungs der transzendentalen Ideen aus der vom Grundsatz der Vollendung geforderten Verneinung der Schranken unserer Erfahrungserkenntnis löst sich der dialektische Widerstreit Kants in den Gegensatz zweier verschiedenartiger Prinzipien für die Auffassung und Beurteilung der Dinge, die beide der Vernunft mit gleicher Notwendigkeit gehören. Die Vernunft ist an ein Gesetz der sinnlichen Anregung gebunden; in dieser erhält sie allen Gehalt der Erkenntnis. Deshalb legen sich die formalen Prinzipien des sinnesanschaulichen Erkennens mit ihren charakteristischen Merkmalen, Unvollendbarkeit und Stetigkeit, der menschlichen Erkenntnis zugrunde und geben in Verbindung mit den metaphysischen Grundbegriffen ihr den Charakter der Naturgesetzlichkeit. So lebt also in der menschlichen Vernunft festgegründet und unantastbar gewiß die wissenschaftliche Überzeugung. Ihr gegenüber aber macht sie in der Idee des Absoluten ein anderes Prinzip der Beurteilung geltend, welches der Vernunft mit gleicher Gewißheit gehört; auf ihm beruht die Überzeugung des Glaubens. Auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Erkenntnis sind die transzendentalen Ideen von schlechthin gar keiner Anwendung. Fries verwirft hier auch auf das bestimmteste jenen regulativen Gebrauch der Ideen, welchen Kant ihnen zuerkannt hatte. Die schematisierten Kategorieen sind die wahren. höchsten Prinzipien der Wissenschaft, denen keine Regulative übergeordnet werden können. Trotz aller möglichen Erweiterung bleibt die wissenschaftliche Erkenntnis stets im Gebiet des Unvollendbaren, und sie kann nie das selbständige Wesen, die absolute Ursache oder das absolute All der Dinge erreichen. Jeder Versuch, den transzendentalen Ideen hier eine Anwendung zu geben, ist fehlerhaft. Solange die Prinzipien der wissenschaftlichen Ansicht der Dinge und der Überzeugung des Glaubens nicht scharf aus einander gehalten werden, geschieht es gar leicht, daß die letzteren wegen der unmittelbaren Notwendigkeit, mit der sie der menschlichen Vernunft gehören, sich in die wissenschaftliche Beurteilung einmischen und hier zu Fiktionen führen, die lange täuschen können, zuletzt aber vor der mathematischen Klarheit unserer wissenschaftlichen Naturerkenntnis sich in Nichts auflösen müssen.

Schematisierte Kategorie oder Naturgesetz und Idee des Absoluten gehören beide als objektive synthetische Prinzipien der erkennenden Vernunft. Durch ihren Widerstreit bildet sich subjektiv der Gegensatz zweier Weltansichten aus, der einer Erklärung bedarf. Diese gibt der transzendentale Idealismus.

Kant gründete diese Lehre von der Unerkennbarkeit der Dinge an sich zunächst auf die subjektive Beschaffenheit der formalen Bedingungen der menschlichen Erkenntnis. Wegen ihres subjektiven Ursprungs sollten Raum und Zeit nicht Bedingungen der Möglichkeit der Dinge an sich, sondern nur ihrer Erscheinung sein; deshalb sollten sie Gesetze enthalten, welche nur für die Art, wie die Dinge den Menschen zur Erscheinung kommen, nicht aber für das wahre Wesen der Dinge selbst gelten. Diese Begründung seines Idealismus war indessen unsicher und fehlerhaft; die Erkenntnis ihrer Mängel führte deshalb Viele zur Verwerfung jener Lehre. Fries aber sah in derselben die Hauptlehre der ganzen Metaphysik, welche allein imstande ist, das größte Problem der menschlichen Vernunft in befriedigender Weise zu lösen, nämlich das Verhältnis der natürlichen Ansicht zur idealen Ansicht der Dinge aufzuklären. Seine Begründung des transzendentalen Idealismus ist eine wesentlich andere als bei Kant. Nicht der subjektive Ursprung, sondern die objektive Beschaffenheit der formalen Bedingungen des menschlichen Erkennens ist ihm die Grundlage, auf welcher sich jene Lehre entwickelt. In seiner Deduktion hatte er sowohl die formalen Prinzipien unserer empirischen Erkenntnis, als die Idee des Absoluten als besondere Formen aufgewiesen, in welchen sich die ursprüngliche objektive synthetische Einheit der erkennenden Vernunft ausspricht. Infolge ihrer Sinnlichkeit ist die Vernunft abhängig von einer ihr fremden Bedingung, sie ist dem Gesetze der sinnlichen Anregung unterworfen, in welcher sie allen Gehalt der Erkenntnis erhält. Die ihr ursprünglich gehörende objektive synthetische Einheit im Erkennen muß sich demgemäß der sinnlich eingeleiteten Erkenntnis in einer Form zugrunde legen, welche eine immer weitere Auffassung jeder möglichen Anregung zuläßt, mithin unvollendbar ist. So bedingt die Sinnlichkeit der Vernunft die Unvollendbarkeit der Form ihres Erkennens. Dieser nun setzt die Idee des Absoluten die Forderung entgegen, daß dem wahren Wesen der Dinge Vollendung zukommen müsse; sie zwingt uns also, die Sinnlichkeit als eine Beschränkung der erkennenden Vernunft aufzufassen, und ihre unvollendbare Form als das Gesetz der Erscheinung der Dinge, nicht aber als das Gesetz ihres Daseins zu betrachten. So führt uns der Gegensatz zwischen der Unvollendbarkeit unserer mathematischen Naturerkenntnis und der Forderung der Idee des Absoluten dazu, der Welt, wie wir sie erkennen, die Welt, wie sie an sich beschaffen ist, entgegenzusetzen. Wegen der Immanenz alles menschlichen Erkennens ist eine positive Erkenntnis der Welt, wie sie an sich beschaffen ist, für uns ganz unmöglich; wir können uns der Schranken unserer Erkenntnis nicht entledigen, ohne diese selbst aufzuheben. Aber durch die Idee des Absoluten macht sich gegenüber der natürlichen Ansicht, welche die Welt unter dem Naturgesetz faßt, eine ideale Ansicht geltend, in welcher wir nach den transzendentalen Ideen an das vollendete Wesen der Dinge glauben.

Wer im alleinigen Vertrauen auf die Wahrheit seiner wissenschaftlichen Erkenntnis die Wahrheit der Überzeugung des Glaubens verwirft, der übersieht, daß diese wie jene auf derselben Basis ruht, nämlich auf dem Selbstvertrauen der Vernunft, kraft dessen sie die Wahrheit jeder Äußerung ihrer unmittelbaren Selbsttätigkeit behauptet. Er mißversteht sich selbst und sieht nicht, daß die Prinzipien der idealen Ansicht, welche auch in ihm notwendig und mit unmittelbarer Gewißheit leben, sich in mancherlei Gestalt in alle seine Beurteilungen einmischen, in denen sich wunderbare Widersprüche zeigen würden, wenn er versuchte, sie in ihrem ganzen Zusammenhange aus der Wissenschaft und ihren Gesetzen zu begreifen und zu rechtfertigen.

Die Behauptung, der Gegensatz der natürlichen und der idealen Ansicht der Dinge ziehe sich unversöhnt durch Fries' Philosophie, ist nicht richtig. Die Versöhnung desselben und die einzig mögliche Verständigung über ihn ist in der Lehre des transzendentalen Idealismus tatsächlich gegeben, welche nach Fries nicht auf dem subjektiven Ursprunge der Formen unserer wissenschaftlichen Erkenntnis, sondern auf der objektiven Beschaffenheit und dem in ihr gegründeten Widerstreit der Prinzipien des Wissens und des Glaubens ruht. Diese Art der Begründung jener wichtigen Lehre ist von den meisten übersehen oder nicht verstanden. Deshalb meint denn auch der jüngere Fichte, mit den Einwendungen gegen die Kantische Lehre zugleich Fries' transzendentalen Idealismus überwunden zu haben.

Die Behauptung der Beschränktheit des menschlichen Wissens ist es, welche immer wieder die Opposition gegen jene Lehre hervorrief. So sagt H. J. Fichte: „Damit bleibt es für den Menschen über alle großen und eigentlich entscheidenden Fragen der Menschheit, nach dem Wesen Gottes, nach dem An sich, der Ewigkeit, der menschlichen Seele bei dem traurigen Bekenntnisse des Nichtwissens und Nichtwissenkönnens, der absoluten Unzulänglichkeit.“ Allerdings; aber wir möchten das Eingestehen eines tatsächlichen Verhältnisses nicht ein trauriges Bekenntnis nennen. Eine solche Klage würde so vergeblich und unberechtigt sein, wie diejenige über die Hinfälligkeit und Vergänglichkeit unseres irdischen Daseins. Die Einsicht in die Natur der erkennenden Vernunft zeigt uns, wie in der notwendigen Form unseres Wissens das Gesetz liegt, daß wir mit dem Wissen stets nur das Bedingte zu erfassen vermögen, daß wir ferner nur in der durch die Negation der Beschränktheit unseres Wissens gegebenen Überzeugung des Glaubens uns zum Unbedingten erheben, und daß wegen des negativen Ursprungs der transzendentalen Ideen eine positive Erkenntnis des Unbedingten für uns ganz unmöglich ist.

Der transzendentale Idealismus ist vielfach so mißdeutet und mißverstanden, als behaupte er, unser Wissen gewähre nur einen subjektiven Schein, dem keine Realität zukomme, als verwerfe er das Wissen als eine subjektive Vorstellungsart und ordne ihm den Glauben in der Weise über, daß nur dieser das Reale erfasse. Das Irrtümliche dieser Auffassung wird aus dem Gesagten klar sein. Der transzendentale Idealismus leugnet nicht nur nicht das Dasein der Gegenstände unserer empirischen Erkenntnis, sondern er behauptet ihre Realität auf das bestimmteste. Die Welt, deren Erkenntnis uns durch den Sinn eröffnet wird, ist nach ihm nicht eitel Trug und Schein, sondern die Erscheinung der wahren Welt, d. h. die Auffassung derselben gemäß der unserer sinnlichen Erkenntnis notwendigen Formen. Diesen Formen aber spricht er wegen ihrer Unvollendbarkeit die Bedeutung für das wahre Wesen der Dinge ab. Es ist dieselbe Realität, welche wir positiv in den Schranken Raum und Zeit erkennen, und welche wir durch Negation jener Schranken absolut denken; von einer anderen Realität sprechen zu wollen, hat gar keinen Sinn, da uns alle Realität durch die Anschauung gegeben wird. Mit jenem Idealismus Berkeleys, welcher, um Boden für die freie Geisteswelt zu gewinnen, die Körperwelt für bloßen Schein erklärt, hat also der transzendentale Idealismus nichts gemein. Dieser setzt nicht der Sinnenwelt, als einem nur subjektiven Schein, eine andere, wahre Welt entgegen, sondern er gibt für den Gegensatz zwischen der natürlichen und der idealen Ansicht der Dinge diese Lösung: in jener besitzt die Vernunft nur eine infolge ihrer Sinnlichkeit, also subjektiv beschränkte Ansicht der Dinge, — in dieser erhebt sie sich durch die Negation jener Schranken in den transzendentalen Ideen zur Überzeugung von dem wahren und vollendeten Wesen der Dinge. Mit gleicher Gewißheit leben Glauben und Wissen in der menschlichen Vernunft; der transzendentale Idealismus ordnet aber den Glauben in dem Sinne dem Wissen über, daß er diesem nur eine endliche Wahrheit zuschreibt, nach welcher uns die Welt in Raum und Zeit der Naturnotwendigkeit unterworfen und der Geist als abhängig vom Körper erscheint, — während er der Überzeugung des Glaubens, welche sich auf das vollendete Wesen der Dinge bezieht, eine ewige Wahrheit zuerkennt, nach welcher der Geist als selbständig, der Wille als frei, und das All der Dinge allein durch Gottes Allmacht besteht. Diese ewige Wahrheit lebt uns im Glauben allein kraft unseres sittlichen Selbstvertrauens; wir können sie weder schauen, noch wissenschaftlich erkennen. Wer die ewige Wahrheit des Glaubens wissenschaftlich zu entwickeln versucht, verfällt notwendig der Amphibolie der Reflexionsbegriffe. Es gibt also keine Wissenschaft aus den Prinzipien des Glaubens oder den Ideen. Nicht in theoretischem, sondern nur in rein ästhetischem Urteile vermögen wir Gegenstände Ideen unterzuordnen, und kraft dieser Beurteilung allein ahnen wir in der Erscheinung das wahre Wesen der Dinge, im Endlichen das Ewige.

Die Lehre des transzendentalen Idealismus steht im Mittelpunkte der Friesischen Philosophie; „sie bringt wohlverstanden die Beendigung der ganzen Geschichte der spekulativen Metaphysik, indem sie uns die schulgemäße Ausführung jener Paulinischen Lehre der Unterordnung des Wissens unter den Glauben bringt.“ Fries zeigt, daß diese Lehre in der Tat den Schlüssel zur Auflösung jener Gegensätze gibt, welche das Auseinandergehen der verschiedenen Weltansichten bedingen und das Gebiet der reinen Philosophie so lange zur Stätte des Kampfes machen, bis es gelungen ist, den zwischen jenen Weltansichten herrschenden Widerstreit zu schlichten. —

So lange als man die Natur der analytischen Denkformen des Verstandes verkannte und das Denken für eine eigene Art der Erkenntnis hielt, so lange konnte man der Hoffnung leben, welche das logische Ideal der früheren Philosophie war, das Ganze der menschlichen Erkenntnis in ein wissenschaftliches System zu fassen und aus einem obersten Grundsatze herzuleiten. Diese Hoffnung muß als ein Wahn erkannt werden, sobald man einsieht, daß der Verstand aus sich allein nichts zu erkennen vermag, sondern daß er nur anderweitig gegebene, daß er die unmittelbare Erkenntnis wiederholt und zum Bewußtsein bringt. In der Organisation der menschlichen Vernunft liegt der Grund, weshalb sie nicht imstande ist, die eine Wahrheit in ein geschlossenes System wissenschaftlicher Erkenntnis zu fassen, sondern von ihr stufenweise verschiedene Ansichten gewinnt. Aus zweifacher Quelle fließt unserer unmittelbaren Erkenntnis aller Gehalt zu; der äußere Sinn eröffnet den Blick in die Welt der Materie, der innere in das Leben des Geistes. So werden wir also gleichsam in zwei verschiedene Welten eingeführt, deren Einheit wir nicht wissenschaftlich zu begreifen, sondern nur in der Idee zu fassen vermögen. Dieser Gegensatz zwischen Körper und Geist, verbunden mit jenem anderen, von der Kritik der Vernunft aufgewiesenen, zwischen den Prinzipien unseres Wissens und denjenigen des Glaubens, bedingt das Auseinandertreten der verschiedenen Weltansichten, welche, mit gleich starken Gründen verteidigt, in der Geschichte der Philosophie streitend einander gegenüberstehen. Die kritische Philosophie entscheidet hier nicht für die eine oder die andere, sondern sie zeigt, daß jeder derselben ein Anspruch an Wahrheit, aber nicht in unbeschränkter Weise, zukommt, daß eine jede ihr besonderes Recht in einem bestimmten Kreise, aber keine den Anspruch an die volle Wahrheit besitzt. Indem eine jede der verschiedenen Weltansichten jedoch diesen Anspruch erhebt und sich auf Kosten der übrigen zu der alleinherrschenden zu machen sucht, entbrennt jener Streit, welcher allein dadurch geschlichtet werden kann, daß das Gesetz der Nebenordnung jener verschiedenen Ansichten aufgewiesen, und so einer jeden das Recht zuerkannt wird, welches ihr infolge ihrer Erkenntnisweise und der ihr zugrunde liegenden Prinzipien zukommt. Diese Aufgabe ist allein durch die vollendete kritische Philosophie und die ihr gehörende Lehre vom transzendentalen Idealismus gelöst; nicht mit Unrecht dürfte hierin ein Zeugnis für die Wahrheit der Friesischen Philosophie zu finden sein! —

V.

Jakob Friedrich Fries
und seine jüngsten Kritiker.

Von

Leonard Nelson.

Einleitung.

Über die Wahrheit in der Philosophie.

Man hat in neuerer Zeit von einem „Kant-Friesischen Problem“ gesprochen. Man hat dabei an die von Kuno Fischer in seiner Prorektoratsrede 1862 erörterte Frage angeknüpft, „ob die Vernunftkritik metaphysisch oder anthropologisch sein solle“, eine Frage, die gleichbedeutend ist mit derjenigen, ob die wahre Fortbildung der von Kant begründeten kritischen Philosophie bei den deutschen Identitätsphilosophen oder bei Fries zu suchen sei. Kuno Fischer selbst entscheidet zwar gegen Friesens anthropologische Auffassung der Kritik, meint indessen doch, daß diese „anthropologische Auffassung der Kritik in die Entwicklung der kritischen Philosophie gehöre“, und daß es „von großer Bedeutung sei, daß ein bedeutender Denker wie Fries sie annahm und durchführte.“ „Verliere“ auch infolge dieser Auffassung „die Vernunftkritik ihre ganze Bedeutung“, so sei doch die Durchführung derselben „sein großes, geschichtlich denkwürdiges Verdienst.“ Fragt man aber angesichts dieser Beurteilung: „Wo bleibt die Wahrheit?“, so lautet Fischers Antwort: Eine „allzeit fertige Wahrheit kenne der echte Geist der Philosophie nicht“, in der Philosophie gelte vielmehr der Satz: „Wahre Probleme sind auch Wahrheit.“ Und „die Frage, ob die Vernunftkritik metaphysisch oder anthropologisch sein solle", sei ein solches „echtes, in der Entwicklungsgeschichte der deutschen Philosophie seit Kant unvermeidliches Problem [1]."

Eine andere als eine solche problematische Wahrheit scheint in der Tat Friesens Beteiligung an der Ausbildung der deutschen Philosophie seit dieser Darlegung K. Fischers nicht mehr zuerkannt worden zu sein. Und so ist seitdem Friesens Name und Verdienst in der wissenschaftlichen Welt nahezu als verschollen zu betrachten. Abgesehen von den wenigen litterarischen Erzeugnissen der Friesschen Schule und von einigen Stellen, an denen einer oder der andere der sogenannten Neukantianer der Friesschen Wendung der Kritik eine wegwerfende Bemerkung schenkt, davon abgesehen kommt fast nur einigen jüngeren Gelehrten das Verdienst zu, sich der Erhaltung seines Namens angenommen zu haben. Diese haben, im Anschluß an K. Fischer, es sich angelegen sein lassen, in besonderen Darstellungen die verkehrte Art seines Philosophierens den Zeitgenossen als abschreckendes Beispiel vorzuhalten und im Vernichtungskampfe gegen seine rückschrittlichen Tendenzen ihre jugendlichen Kräfte zu erproben.

Bereits der erste unter diesen hat, nach seiner eigenen Aussage, „nicht bloß den Kernpunkt der Friesschen Philosophie getroffen, sondern ist der Friesschen Anmaßung bis in ihre letzten und äußersten Schlupfwinkel gefolgt [2]." Dennoch fühlten sich an-

[1] Kuno Fischer. Die beiden kantischen Schulen in Jena. Rede zum Antritt des Prorektorats, den 1. Februar 1862. S. 19 u. 20.

[2] Fritz Freiherr von Wangenheim. Verteidigung Kants gegen Fries. Inaugural-Dissertation. Halle a. S. 1876. S. 7.

Vgl. auch: Hermann Strasosky. Jacob Friedrich Fries als Kritiker der kantischen Erkenntnistheorie. Eine Antikritik. Inaugural-Dissertation. Hamburg und Leipzig 1891.

dere berufen, den Kampf von neuem zu beginnen, sei es nun, um dem nur Scheintoten den völligen Garaus zu machen, sei es, um den Toten auch in dem Schlupfwinkel seines Grabes aufzustören.

Diese sich immer wiederholenden Widerlegungen bieten ein höchst seltsames Schauspiel. Warum bedarf es immer erneuter Prüfungen und Zurückweisungen der Friesschen Anmaßung? Steckt das Friessche Philosophem so voller Irrtümer und Verkehrtheiten, daß sie sich gar nicht in absehbarer Zeit alle ausrotten lassen? Bedarf es vielleicht darum immer weiterer Polemik, weil des Unsinns zu viel ist, um mit ihm gänzlich aufzuräumen? Ist dies letztere nicht der Fall, ist Fries wirklich endgültig widerlegt, so sollte man ihn doch ein für allemal ad acta legen. Die Frage verlohnt daher einer Prüfung, ob man, nach dem heutigen Stande der Litteratur, annehmen darf, daß eine solche endgültige Widerlegung stattgefunden hat. Läßt sich zeigen, daß die Hinfälligkeit seines Philosophems bereits bestimmt erwiesen ist, so könnte dieser Nachweis, sollte er auch sonst kein Interesse beanspruchen, doch insofern nützlich sein, als dadurch zukünftigen Forschern die Arbeit eines abermaligen Eingehens auf diesen Fries und eine nochmalige Auseinandersetzung mit ihm erspart würde.

Denkt man an Kuno Fischers Ausspruch: eine allzeit fertige Wahrheit kenne der echte Geist der Philosophie nicht, so läßt sich freilich die Vermutung nicht abweisen, daß das merkwürdige Schauspiel der nicht enden wollenden Reihe von Widerlegungen der Friesischen Vernunftkritik vielleicht noch einen andern Grund habe. So Recht nämlich auch K. Fischer seiner Zeit gehabt haben mag, als er das „πρῶτον ψεῦδος“ der Friesischen Kritik und die „verwundbare Stelle an ihrem anthropologischen Grundgedanken[1]“ aufdeckte, so möchten doch vielleicht jene

[1] a. a. O. S. 18 f.

jüngeren Kritiker nicht bedacht haben, daß die Zeit der Wahrheit der Fischerschen Entdeckung bereits überschritten gewesen sei. Falls diese Vermutung zuträfe, würden wir den in der Philosophie nicht seltenen und sogar den echten philosophischen Geist jener Fischerschen Entdeckung kennzeichnenden Fall vor uns haben, daß der Entdecker die Zeit der Wahrheit seiner eigenen Entdeckung überlebt habe. In diesem Falle würde das Bedürfnis einer stets fortgesetzten Erneuerung der Kritik der Friesischen Philosophie in der Unzulänglichkeit dieser Kritik eine ungezwungene Erklärung finden.

Diese Vermutung wird auch noch durch eine andere Erwägung nahe gelegt. Fries war nämlich, wie einer seiner jüngsten Kritiker in einem „das Ganze zusammenfassenden Urteil über ihn“ treffend sagt, ein „Wissenschaftler“ [1], speciell ein Mathematiker und Naturwissenschaftler. Seine ganze Arbeit, soweit sie dem Gebiete der theoretischen Philosophie angehört, ist der Grundlegung der mathematischen Naturwissenschaft gewidmet. Seine eigenen Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik, der Astronomie, der Physik und der Physiologie wurden von den großen Mathematikern und Naturforschern seines Zeitalters, von Männern wie Gauß, Möbius, Schlömilch, Alexander von Humboldt und Schleiden außerordentlich hoch geschätzt. In der Mathematik und in den Naturwissenschaften gilt aber nicht der Satz, daß wahre Probleme auch Wahrheit seien und daß es keine allzeit fertige Wahrheit gebe. Der Mathematiker und Naturforscher sucht die Wahrheit nicht in den Problemen, sondern einzig und allein in der Auflösung der Probleme. Diese

---

[1] A. Hermann Leser. Die zwei Hauptmomente der kritischen Methode Kants und ihr Verhältnis zur Methode von Fries. Inaugural-Dissertation. Dresden 1900. S. 29.

Wahrheit gewinnt er durch Anschauung und durch Induktion aus Experiment und Beobachtung, und wenn er sie einmal gefunden hat, so bleibt sie ihm unabänderlich stehen, unbekümmert um alle Spekulationen der Philosophen. Was daher vor hundert Jahren mathematische und naturwissenschaftliche Wahrheit war, ist es auch noch heute. Und so könnte sich denn vielleicht bei einer Prüfung herausstellen, daß Friesens Arbeiten, so fremd sie jenem echten philosophischen Geiste auch sein mögen, vielleicht gerade für die principiellen mathematisch-naturwissenschaftlichen Angelegenheiten unserer Tage sich desto wertvoller erweisen.

I.

Fries' Verhältnis zur genetischen Methode[1].

Es ist gemeinhin die Ansicht verbreitet, es sei eine Forderung der wissenschaftlichen Gerechtigkeit, sich bei einem philosophischen Streit auf den Standpunkt des Gegners zu versetzen und auf seine Voraussetzungen einzugehen. Diese Forderung erscheint

---

[1] Die Werke von Fries citiere ich mit folgenden Abkürzungen:

V. d. P. z. M. — Über das Verhältnis der empirischen Psychologie zur Metaphysik. In Carl Christian Erhard Schmids Psychologischem Magazin. 3. Bd. 1798.

R. F. u. S. — Reinhold, Fichte und Schelling. 1803.

N. K. d. V.[1] — Neue Kritik der Vernunft. 3 Bde. 1807.

N. K. d. V.[2] — Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft. 2. Auflage. 1828—31.

S. d. L. — System der Logik. 1. Aufl. 1811, 2. Aufl. 1819, 3. Aufl. 1837.

E. — Handbuch der praktischen Philosophie. 1. Teil. Ethik. 1818.

Ps. A. — Handbuch der psychischen Anthropologie. 1. Aufl. 1820—21; 2. Aufl. 1837—39.

M. N. — Die Mathematische Naturphilosophie. 1822.

P. S. — Polemische Schriften. 1824.

S. d. M. — System der Metaphysik. 1824.

G. d. Ph. — Die Geschichte der Philosophie. 2 Bde. 1837—40.

uns indessen nirgend so ungerechtfertigt wie gerade in der Philosophie. Denn den richtigen Standpunkt überhaupt erst zu gewinnen und die richtigen Voraussetzungen zuerst aufzufinden, möchte eben die Hauptschwierigkeit in der Philosophie sein, und somit auch dasjenige, um das zu streiten vorzüglich der Mühe lohnt. Hat man nämlich erst einmal den rechten Standpunkt eingenommen, so dürfte alles weitere verhältnismäßig leichtes Spiel sein; denn ist man erst im Besitz der richtigen Voraussetzungen, so beschränkt sich das noch übrige Geschäft in der Philosophie — wo es doch nicht, wie in anderen Wissenschaften, darauf ankommt, den allgemeinen Voraussetzungen erst aus der Erfahrung das Feld ihrer Anwendungen zu verschaffen — lediglich darauf, die Konsequenzen aus denselben zu ziehen, die doch mit jenen Voraussetzungen stehen und fallen. Hat man sich über den Standpunkt und den Ausgangspunkt des Schließens geeinigt, so wird man sich mit gutem Willen auch bald über die Entwicklung der Resultate einigen können. Damit also diese Entwicklung der Resultate einen Zweck und Wert erhalte, wird es nötig sein, zuvor den Ausgangspunkt sicher zu stellen. Dieser wird daher in einem wissenschaftlichen philosophischen Streite zunächst allein den Gegenstand der Untersuchung bilden müssen. Das heißt aber nichts anderes als: aller wahrhaft fördernde Streit in der Philosophie wird der Streit um die rechte Methode zu philosophieren sein, und man wird das Streiten um die Resultate so lange aussetzen müssen, bis man sich darüber geeinigt hat, auf Grund welcher Methode man zu den Resultaten gelangen will.

Nach dieser Regel werden wir den Streit um die Friesische Philosophie zu beurteilen haben. Wir werden also zunächst nur fragen, ob die von F r i e s befolgte Methode bisher widerlegt worden ist. Kommen wir zu dem Ergebnis, daß die Behauptung von Fries' Gegnern, er habe in seiner Methode zu philosophieren fehlgegriffen, zu Recht besteht, so sind wir damit zugleich aller Mühe überhoben, noch ferner auf die Kritik der Resultate seines Systems einzugehen.

Die Frage nach der richtigen Methode zu philosophieren ist in neuerer Zeit wiederholt zum Gegenstande besonderer Erörterungen gemacht worden. Dabei handelt es sich überall um einen Gegensatz zweier Grundansichten, der unter verschiedenen Namen als der Streit der metaphysischen und anthropologischen[1], der objektiven und subjektiven[2], der kritischen und genetischen[3], der erkenntnistheoretischen und psychologischen[4] oder der transcendentalen und psychologischen[5] Methode sich geltend gemacht hat. Auf die Methode von Fries hat man bei diesen Erörterungen im allgemeinen keine Rücksicht genommen. Wo sein Name erwähnt wird, da geschieht es nur beispielsweise, um einen Repräsentanten der genetischen Methode oder des „Psychologismus" zu nennen. So ist von den Anhängern der „transcendentalen Methode" ohne Ausnahme über ihn als einen Vertreter des „Psychologismus" das Verdammungsurteil gesprochen worden. Einer Definition dieses Terminus hat man sich dabei allerdings allemal überhoben. Wir werden indessen wohl nicht fehlgehen, wenn wir annehmen, daß dadurch nicht eine psychologische Lehre als solche bezeichnet werden soll, sondern nur diejenige tatsächlich psychologische

---

[1] K. Fischer a. a. O.

[2] P. Natorp. Über objective und subjective Begründung der Erkenntnis. Philosoph. Monatshefte. Bd. XXIII. Heft 5 u. 6. 1887.

[3] W. Windelband. Präludien. 1884. Kritische oder genetische Methode?

[4] C. Stumpf. Psychologie und Erkenntnistheorie. Abhandl. der phil. hist. Kl. d. Kgl. Bayr. Akad. der Wiss. XIX. Bd. S. 465—516.

[5] M. Scheler. Die transzendentale und die psychologische Methode. Eine grundsätzliche Erörterung zur philosophischen Methodik. 1900.

Lehre, die mit dem Anspruch auftritt, eine philosophische zu sein. Psychologismus wäre danach der Standpunkt aller derer, die die Philosophie als eine psychologische Wissenschaft auszubilden suchen. So wird man z. B. die Behauptung von Lipps, die Logik sei eine psychologische Disziplin[1], als psychologistisch zu bezeichnen keine Bedenken tragen.

Ich führe zunächst zum Beleg des Gesagten einige Beispiele an. Cohen urteilt über Fries unter anderm folgendermaßen: „Die Beziehung der Philosophie auf mathematische Naturwissenschaft hat unter den Kantianern vorzugsweise Jacob Friedrich Fries, in willkürlicherem Verhältnis auch Johann Friedrich Herbart vorgeschwebt .... Wie dieses Verhältnis jedoch zu gewinnen und zu fixieren sei, das haben Beide, wie sehr sie im Einzelnen auseinandergehen, gemeinsam verfehlt .... Sie gehen darauf aus, ein Seelengemälde von den Vorgängen im Erkennen zu entwerfen, suchen darin die Selbständigkeit philosophischer Arbeit und füllen die Metaphysik wieder mit eigenen Ausgeburten an, anstatt die Grundlagen der Wissenschaft keusch zu empfangen, und in der kritischen Charakteristik derselben die erzeugende Mitwirkung der Metaphysik zu rekognoscieren .... Es fehlt ihnen der Begriff der kritischen Methode. Diese Methode ist die transcendentale[2]. — Windelband läßt sich bei seiner Darstellung des Gegensatzes der kritischen und der genetischen Methode folgendermaßen vernehmen: „Der Psychologismus, wie ihn etwa die Fries und Beneke darstellen, oder wie er sich in der völkerpsychologischen Richtung neu entwickelt hat, verdankt die große Überlegenheit, die er den entsprechenden früheren Theorieen gegenüber zweifellos besitzt, lediglich dem Anschluß an die

---

[1] Theodor Lipps. Grundzüge der Logik. 1893. § 3. S. 1.

[2] a. a. O. S. 579 f.

kritische Philosophie. Das ist die Größe des Kantianismus, daß er alle seine Gegner veredelt hat." [1] — Ganz ähnlich äußert sich Dr. Max Scheler: „Fries, der die psychogenetische Methode auf die Aprioritätslehre Kants im Geiste von Leibniz anwandte, fand noch keine so bestimmte Gegnerschaft von solchen vor, welche die transzendentale Methode allein als die rechte Methode der Erkenntnistheorie behaupteten, als daß sich seine Methode rein dabei herausgebildet hätte." [2] — Und in der neuesten Beurteilung der Friesischen Philosophie lesen wir: „Dem Gegensatz zwischen Psychologismus und Neukantianismus in der gegenwärtigen Philosophie entspricht der Gegensatz zwischen der „Neuen Kritik der Vernunft" von Fries und der Kantischen Vernunftkritik, so wie sie von der Mehrzahl der Ausleger aufgefaßt wird." [3]

Den Grund, auf den die genannten Autoren diese Urteile über Fries stützen, habe ich in den Schriften von Fries nicht ausfindig zu machen vermocht. Vielmehr weisen alle mir bekannt gewordenen Äußerungen von Fries auf eine strenge Unterscheidung psychologischer und philosophischer Erkenntnisweise. Was insbesondere die genetisch-psychologische Methode in der Philosophie, betrifft so hat sich Fries wiederholt mit unverkennbarer Deutlichkeit gegen deren Vertreter unter seinen Zeitgenossen erklärt; und seine eigene Methode bestimmt er gelegentlich geradezu negativ durch den Gegensatz gegen die der genetischen Psychologie. Sie ist „keine Geschichte der Vernunft, wie sie sich im Kinde zum Erwachsenen, zum Greise entwickelt, wie sie mit Wachen und Schlafen erscheint, wie sie nach Mann und Weib, nach Konstitution, Volk und Race sich nüanciert, oder wie sie in

---

[1] a. a. O. S. 248. [2] a. a. O. S. 34.

[3] Dr. Theodor Elsenhans. Das Kant-Friesische Problem. 1902. S. 1.

körperlichen und Geisteskrankheiten verletzt und zerstört wird. Dieses sind Aufgaben für die psychische Anthropologie, wir suchen hingegen eine Beschreibung der Vernunft, um zu einer Theorie derselben zu gelangen . . .“ [1] — Gegen Benecke erklärt Fries sich folgendermaßen: „Benecke setzt bei dem Vorwurf gegen mich, daß ich das Ende zum Anfang mache, voraus, daß die Psychologie genetische Gesetze des Geisteslebens, die Gesetze der Entstehung desselben geben solle, aber das wird immer eine Täuschung bleiben. Nur den schon zu einer gewissen Reife gediehenen Geist kann ich in mir beobachten, über die Entwicklung des Geistes von der ersten Kindheit herauf kann ich nur Hypothesen machen und diese selbst nur verstehen durch die Vergleichung mit dem schon zu größerer Reife gediehenen Leben . . . Ich kann also Beneckes Hoffnung, auf seinem Wege der Psychologie ein ganz neues Heil zu bereiten, gar nicht teilen, mir scheint vielmehr, daß er auf eine ganz irrige Weise zu dem Empirismus der engländischen Schule zurückgekehrt, und uns Leibnizianern untreu geworden ist. Seine Methode bringt ihn nämlich ganz um die großen Vorteile, welche die Psychologie von der Kritik der Vernunft erhalten hat. Ich will mich bemühen, ihn auf diesen entscheidenden Punkt aufmerksam zu machen. Der feste Wiederhalt aller unsrer geistigen Selbsterkenntnis liegt einzig in dem Gedankengerüste der synthetischen notwendigen Wahrheiten, deren wir uns nur mit Bewußtsein überhaupt (nach der Kantischen Benennung) bewußt werden, welches Bewußtsein überhaupt in jeder Behauptung eines Urteils lebt und uns nicht eine Geistestätigkeit zeigt, welche uns gestern oder heute

[1] N. K. d. V. Einleitung.

oder irgend zu bestimmter Zeit zukommt, sondern die unserm Geiste schlechthin gilt für alle Zeit oder vielmehr ohne dabei der Wandelbarkeit der Zeit zu gedenken. Ihre klarsten Beispiele sind die einleuchtenden mathematischen Wahrheiten, (so wie Platon im Dialog Menon lehrt, was ich meine,) aber in gleicher Weise gehören dahin auch alle philosophischen Überzeugungen vom Wahren und Guten. Dieses Bewußtsein überhaupt und seine notwendigen Wahrheiten wird Beneke mit seiner genetischen Psychologie nie erreichen. Spreche er nun von präformierten oder prädeterminierten Vermögen des Geistes . . ., er wird sich nie den zeitlichen Ursprung dieser Erkenntnisse und Überzeugungen in dem menschlichen Geiste zu erklären vermögen. Sie sind ganz unabhängig von den sinnlichen Anreizungen und Entwicklungen in unsrer Vernunft gegründet und werden mit Bewußtsein überhaupt in uns zur Einsicht gebracht, nicht als etwas jetzt erst uns zufallendes, sondern schlechthin als unser ursprüngliches Eigentum. Wir beobachten diese notwendigen Grundbestimmungen unsrer Geistestätigkeiten im denkend entwickelten Leben, aber ihre Entstehung ist gar nicht wissenschaftlich zu erfragen, sondern des Sokrates Weisheit, die eigene Unwissenheit kennen zu lernen, ist hier allein zur Stelle . . ."[1]

Ähnlich äußert sich Fries in seiner Geschichte der Philosophie: „Aber das versteht Herr Beneke wieder nicht, weil ihn seine unglückliche genetische Psychologie irre macht. So versteht er Kants Ausdruck ‚Erkenntnis rein a priori' gar nicht. Er hält ihn für einen genetischen Begriff dessen, was wir früher als alle Erfahrung erkennen sollen und sagt dann mit Fug und Recht, solche Erkenntnisse gebe es genau genommen für das menschliche

[1] Ps. A. 2. Bd. 2. Aufl. Vorrede. S. X ff.

Erkenntnisvermögen nicht. Kants Erkenntnisse rein a priori gelten aber weder vor noch nach der Erfahrung, sondern in der Erfahrung, aber nicht durch Wahrnehmung und Beobachtung. Notwendige Wahrheiten sind gar nicht zeitlich entstanden im menschlichen Geist, sondern sie gelten mit Bewußtsein überhaupt und sind ursprünglich im menschlichen Erkenntnisvermögen gegründet. Kants Ausdruck a priori geht gar nicht subjektiv auf den Anfang unsrer Vorstellungen, sondern bezeichnet eine Erkenntnisweise, welche Bestimmungen eines Gegenstandes erkennen läßt, ohne daß diese zuvor beobachtet worden wären. So gelten die geometrischen Gesetze rein a priori nicht nur an unsrer Erde, sondern in allen Himmelsräumen, nicht nur heute oder morgen, sondern schlechthin, ohne alle Rücksicht auf den Zeitverlauf. Die Gesetze der allgemeinen Gravitation gelten z. B. so gut für die unbekannten wie für die bekannten Planeten; darum konnte gleichsam auf den ersten Blick Bode die Bahn des Uranus, Gauß die der Ceres bestimmen. Ein solches ursprüngliches Eigentum unsers Erkenntnisvermögens sind also die Anschauungen a priori und bestimmen deswegen für sich nur Erkenntnisse mit Bewußtsein überhaupt.“ [1]

Auch im Streite gegen Herbart kehren dieselben Einwendungen wieder: „Herbart hat sich von Anfang an von Fichtes Phantasie leiten lassen, daß alle menschliche Erkenntnis aus dem sich selbst Setzen des Ich abzuleiten sei. Dies führte ihn auf seine Hypothese, daß die Seele ein einfaches, gestörtes Wesen sei und somit zu seiner genetischen Psychologie, in welcher die Macht der anschaulichen Erkenntnis ganz verkannt, das Bewußt-

---

[1] G. d. Ph. Bd. 2. S. 514.

sein überhaupt nicht beachtet ist und darum die Erkenntnis der allgemeinen und notwendigen Wahrheiten als eine in der menschlichen Vernunft zeitlich entstandene nachgewiesen werden soll. Stolz erhebt er sich neulich über Kant, indem er sagt: ‚wer noch an dem Vorurteil hängt, das Räumliche sei simultan, folglich auch die Vorstellung des Räumlichen ohne Succession, der enthalte sich aller Fragen an die Psychologie in Bezug auf das Räumliche. Die Kantische Meinung von den sogenannten reinen Anschauungen a priori, als Schätzen, worin alle räumlichen und zeitlichen Konstruktionen enthalten wären, so daß man sie nach Belieben herausgreifen könne, hatte alle Untersuchung dieser Gegenstände unterdrückt; aus dieser Befangenheit mußte man zuerst herausgehen‘. Mit diesem Traum mußte sich Herbart in die leere dogmatische Metaphysik zurück verirren. Kant dagegen wird immer recht behalten . . .“ [1]

Diese Stellen sind insofern von besonderem Interesse, als sie gerade gegen diejenigen gerichtet sind, mit denen Fries gemeinhin — wie die obigen Beispiele zeigen — in eine Klasse gestellt worden ist, nämlich in die Klasse der Vertreter der der Kantischen Methode entgegengesetzten genetischen Psychologie. Auch bei Elsenhans lesen wir: „Aus dem Kreise der selbständigeren Vertreter seiner [Fries] methodologischen Richtung verdient besonders hervorgehoben zu werden F. E. Beneke, der die psychologische Methode in konsequenter Weise fortbildete und weiter ausdehnte . . . Die anthropologische oder psychologische Auffassung der Vernunftkritik, welche Fries begründete, hat daher eigentlich erst in Beneke ihren völlig konsequenten Vertreter gefunden.“ [2]

---

[1] G. d. Ph. Bd. 2. S. 710. [2] a. a. O. S. 12 f.

Demgegenüber können wir aus den angeführten Stellen diesen Schluß ziehen: Fries ist, weit entfernt, ein Anhänger der genetisch-psychologischen Methode zu sein, vielmehr ihr entschiedener Gegner.

II.

Fries' Verhältnis zum Psychologismus.

Also war Fries nicht Psychologist? Dies aus den oben angeführten Äußerungen zu schließen wäre voreilig. Hat man doch neuerdings vielfach von einer „transcendentalpsychologischen“ Methode gesprochen, als von einem „durchaus notwendigen Gliede“ sogar „der Kantischen Beweisführung“ [1]. Der Beweis, daß Fries' Lehre nicht Psychologismus in dem oben definierten Sinne ist und zwar auch nicht „Transcendentalpsychologismus“, erfordert daher eine weitere Untersuchung. Um ihn zu erbringen, wird es notwendig sein, nachzuweisen, daß bei Fries eine strenge Scheidung zwischen psychologischer und philosophischer Erkenntnisweise herrscht. Dieser Nachweis ist unschwer zu führen.

Die Psychologie ist eine empirische, die Philosophie eine rationale Wissenschaft. Die Wahrheiten der Psychologie sind zufällige Tatsachen, die der Philosophie notwendige Gesetze. Die Gegenstände der ersteren sind Sache der Kenntnis, die der letzteren sind Sache der Einsicht. Die Psychologie ist eine induktive Naturwissenschaft, die Philosophie eine reine Vernunftwissenschaft. — Hat Fries diesen Unterschied gekannt?

Hören wir zunächst, wie Fries über das Verhältnis der Logik zur Psychologie urteilt [2]:

---

[1] Scheler, a. a. O. S. 27. [2] N. K. d. V. § 66. (2. Aufl. 1. Bd. S. 320 f.)

„Die Erklärung der Logik als einer Wissenschaft von den allgemeinen Gesetzen des Denkens ist zweideutig, denn verstehen wir unter diesen Denkgesetzen nur die Regeln, nach denen unser Verstand begreift, urteilt, schließt und Systeme baut, so ist dies kein Thema für Philosophie, sondern nur für empirische Anthropologie, wir können hier nur aus innerer Erfahrung antworten. Logik hingegen soll formale Philosophie sein. und notwendige Gesetze über das Wesen der Dinge überhaupt, und nicht einzelne Regeln über die Denkweise unsers Verstandes enthalten. Logik als philosophische Wissenschaft ist daher nur Analytik, System der analytischen Urteile, die Denkgesetze sind hier nicht nur subjektiv die Gesetze, nach denen wir denken. sondern objektiv die Gesetze der Denkbarkeit eines Dinges . . . Es würde hier zu weit führen, wenn wir geschichtlich nachweisen wollten, welche Folgen die Verwechselung dieser anthropologischen und philosophischen Ansicht der Logik gehabt hat.“

Demgemäß unterscheidet Fries in seiner Logik die philosophische Logik von der anthropologischen. Von der letzteren heißt es: „Ihre Hauptfrage ist: wie kommen Begriff und Denken unter die Tätigkeiten des menschlichen Geistes? wie verhalten sie sich zu den übrigen Tätigkeiten des Erkennens und wie stimmen sie mit diesen zur Einheit der lebendigen Tätigkeit unsers Geistes zusammen? Diese Art logischer Untersuchungen fragt nur nach der Natur des menschlichen Verstandes, sie gehört also zur innern Sebstbeobachtung des Menschen. Diese anthropologische Logik ist unwillkürlich mit allen Teilen der Logik verflochten und vermengt bearbeitet worden. Das Verhältnis und der Unterschied dieser beiden logischen Erkenntnisweisen ist bisher noch nie richtig verstanden worden . . . Auf der entgegengesetzten Seite verlor sich in der englischen Schule und bei denen, die in

Frankreich und unter uns ihr folgten, alle Philosophie und somit auch die philosophische Logik ganz in empirische Psychologie. Kant fing bei uns zuerst an, diese entgegengesetzten Einseitigkeiten der Vereinigung zur Wahrheit näher zu bringen.“ Es „wäre höchst ungereimt, die Grundsätze der philosophischen Logik, die notwendigen Grundgesetze der Denkbarkeit der Dinge durch empirische Psychologie, d. h. durch Erfahrungen beweisen zu wollen“ [1].

Was das Verhältnis der Metaphysik zur Psychologie betrifft, so finden wir darüber bei Fries unter anderm folgende Äußerungen:

„Suchen wir den Überblick der ganzen Aufgabe für die Fortbildung der Kantischen Lehre, für die spekulative Philosophie, so ist für die Dialektik die Hauptsache, daß die metaphysische Erkenntnis a priori von der psychisch-anthropologischen Selbstbeobachtung unterschieden werde“ [2]. „Über der erfahrungsmäßigen Ausbildung der Psychologie ist den Engländern und Franzosen die Kenntnis der Metaphysik fast ganz verloren gegangen“ [3].

Ausführliche Erörterungen gibt Fries über den Unterschied der induktiven Methode der empirischen Psychologie von der spekulativen Methode der Metaphysik. So heißt es von Herbart: „Er unterscheidet nicht die induktorische Methode, welche auf der Erfahrung selbst ruht und durch Vergleichung der Beobachtungen Naturgesetze entdeckt, von der kritischen, die durch Abstraktion nachdenkend findet, welche allgemeine und notwendige Wahrheiten unsre Vernunft bei der Beurteilung gegebener Er-

---

[1] S. d. L. Einleitung. 3. Aufl. S. 3 ff.

[2] G. d. Ph. 2. Bd. S. 608.

[3] S. d. L. § 134. 3. Aufl. S. 453.

fahrungen voraussetzt und anwendet“ [1]. — „Das regressive Verfahren enthält zwei Hauptfälle der Anwendung unter sich. Der erste ist der hier betrachtete der Spekulation oder der kritischen Methode, durch welche wir nämlich in reinen Vernunfterkenntnissen vermittelst der Zergliederung unsrer eignen Gedanken aufsuchen, aus welchen allgemeinen Regeln und Begriffen ihre ersten Voraussetzungen bestehen. Die andere regressive Methode hat es hingegen mit empirischen Erkenntnissen zu tun; sie geht in Erfahrungswissenschaften von den Beobachtungen aus und sucht aus diesen nach Wahrscheinlichkeiten allgemeine Regeln zu bestimmen, von denen die Gesetzmäßigkeit dieser Erscheinungen abhängt. Diese Methode heißt die induktorische, weil wir diese Beweise allgemeiner Gesetze vermittelst der Beobachtung durch die Induktionen d. h. durch den Schluß von vielen Fällen auf die Einheit der Regel zu führen haben“ [2].

Über Kant heißt es: „Ihm konnte durch seine Methode die Verteidigung der Erkenntnis a priori nur dadurch gelingen, daß er einen von der Induktion, von der Methode der engländisch-französischen Erfahrungsphilosophie wesentlich verschiedenen Regressus befolgte. Dieses ist nämlich der der spekulativen Methode, der Zergliederung unsrer Gedanken. Wir haben oben gezeigt, wie diese kritische Methode allein uns wahrhaft über unsre philosophischen Erkenntnisse aufzuklären und durch ihre Deduktion deren Principien rechtfertigen könne; wie dagegen die Induktion nur den Erfahrungswissenschaften diene, um empirische Naturgesetze zu erforschen“ [3]. „Aus diesem wird man einsehen, daß die Möglichkeit der induktorischen Methoden selbst schon die rein vernünftige

---

[1] G. d. Ph. 2. Bd. S. 705. [2] S. d. M. § 27. S. 157 f.
[3] S. d. M. § 29. S. 183 f.

Erkenntnis in Philosophie und Mathematik voraussetze, daß man also zu deren Ausbildung anderer Methoden bedürfe, und dieses sind eben die regressiven der Kritik der Vernunft“ [1]. — „Ich sehe für diesen Streit die Forderung als höchst wichtig an: eine bessere Theorie der Induktionen zu finden, als die gewöhnliche engländisch-französische, und ich meine diese gefunden zu haben. Die Induktion beruht nicht nur auf Zusammenstellung von Wahrnehmungen, sondern ihre wahre Schlußkraft liegt in leitenden Maximen, welche sie voraussetzt und durch welche sie von Principien a priori abhängig wird. Die Induktion ist also auch nicht das höchste, überhaupt kein unabhängiges Begründungsmittel allgemeiner Behauptungen, sondern dafür kommen wir auf Leibnizens ersten Satz gegen Locke zurück: Erkenntnisse a priori findet der Verstand durch Abstraktion und nicht durch Induktion. Die Induktion für sich könnte keine Begriffe in unsre Erkenntnis einführen, die nicht schon in der Wahrnehmung liegen, wenn sie sich nicht selbst auf a priori erkannte leitende Maximen stützte. So fordert unsre Urteilskraft a priori die Gültigkeit der Kausalbegriffe als Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung und nur kraft dieser Voraussetzung kann die Induktion sie anwenden“ [2]. — „Allgemeine Gesetze lernen wir zuerst immer nur durch Abstraktionen von einzelnen Erfahrungen, durch einen regressiven Gedankengang kennen. Aber diese Abstraktion ist von zwei wesentlich verschiedenen Arten. In den Fällen des spekulativen Verfahrens ist sie eine Zergliederung unsers eignen Gedankens und macht uns klar, welche allgemeine und notwendige Wahrheiten jeder Mensch bei dieser oder jener Art von Beurteilungen unvermeidlich als wahr voraussetze. Dieses sind die Erkenntnisse

---

[1] S. d. M. S. 190. [2] P. S. S. 347 f.

a priori und aus ihnen bilden sich die reinen Theorieen der Wissenschaften. Die andern Fälle hingegen sind die Fälle des **induktorischen Verfahrens.** Hier erraten wir mit Hülfe von unvollständigen Induktionen Naturgesetze, die nur aus Erfahrungen folgen, aus diesen bewiesen werden müssen, und die wir nicht a priori erkennen. Aus solchen Gesetzen bilden sich die empirischen Theorieen. Wir erkennen z. B. bis jetzt die Gesetze, nach denen sich die Lichtstrahlen bewegen, die Gesetze der Elektricität und viele andere auf diese letztere Art“ [1].

In seiner „Geschichte der Philosophie“ wendet sich Fries mit besonderer Ausführlichkeit gegen das Vorurteil, das „die erfahrungsmäßige Selbsterkenntnis des Ich mit der allgemeinen und notwendigen metaphysischen Erkenntnis verwechseln läßt“ [2]. „Unsre Schule wird nicht eher zu einer gesunden Fortbildung der Kantischen Lehre gelangen, als bis dieser Fehler allgemein eingesehen und überwunden wird. Schon diejenigen unter Kants Schülern, welche lehrten, die Tatsachen des Bewußtseins seien die Principien der Philosophie, verwickelten sich weiter in die falsche Abstraktion vom Vorurteil des transcendentalen, denn die Tatsachen des Bewußtseins sind wol die Anfänge der kritischen Erkenntnis, aber nicht die Principien der Metaphysik. Reinhold aber wandte diesen Fehler am schärfsten epistematisch um in seinen Untersuchungen über die Fundamente des philosophischen Wissens ... Diese Betrachtung führte ganz natürlich auf die Verwechslung des psychologischen und metaphysischen im Begriff des transcendentalen, und da Reinhold diesen Fehler nicht gewahr wurde, so verstrickte er sich ganz in demselben. So wurde er auf den Fehler des Tschirnhausen zurückgeführt, in unbestimmten

---

[1] M. N. § 73. S. 399.   [2] G. d. Ph. 2. Bd. S. 640.

psychologischen Formeln, aus denen sich gar keine scharfen Ableitungen machen lassen, die höchsten Principien der Philosophie zu suchen“ [1].

Bereits in seiner ersten philosophischen Veröffentlichung finden wir Fries im Streite gegen Reinholds Vermengung psychologischer Erkenntnisse mit philosophischen [2]:

„ . . . Aber wie gelangte er zu diesem obersten Punkt der Abstraktion? In der Zergliederung selbst liegt nichts, was ihr eine Grenze setzte. Er fand einen Punkt, der seiner Meinung nach der oberste wäre; aber eben hierin tadeln ihn Fichte und Schelling, welche noch weiter gegangen sind als er. Meiner Meinung nach hingegen, war schon Reinhold über das Ziel einer metaphysischen Zergliederung hinaus. Der allgemeinste Begriff ist offenbar der eines Gegenstandes überhaupt, d. h. der einer Vorstellung, so weit dies Wort mit jenem gleichbedeutend ist. Reinhold ging aber von da zum Begriff einer Vorstellung, sofern dies etwas ganz vom Gegenstand verschiedenes bezeichnet, über und gelangte so zum Begriff des Bewußtseins und somit in eine Sphäre von Erkenntnissen, welche der metaphysischen ganz heterogen ist. Denn statt, daß er vorher schon bei den allgemeinsten ontologischen Begriffen war, so gelangte er nun (und doch sollte dies durch Zergliederung geschehen) zu dem vereinzelten Begriff eines bestimmten Gegenstandes der innern Wahrnehmung, eines Bewußtseins. Was ihn nun über die Grenze der Metaphysik in die Psychologie hineintrieb, ist leicht zu übersehen . . . Da er also auf psychologischem Boden das oberste Princip der Philosophie aufsuchte, so ist klar, daß er notwendig dem ganzen Gebäude eine Tatsache aus innerer Erfahrung zu Grunde legen

---

[1] G. d. Ph. 2. Bd. S. 642 f. [2] V. d. P. z. M. S. 190 f.

mußte. Diese sollte aber doch Erkenntnis a priori gewähren, und so wurde endlich Erkenntnis a priori überhaupt zu einem Teil der Erkenntnis aus innerer Erfahrung."

Denselben Vorwurf erhebt Fries gegen Fichtes Wissenschaftslehre: „... Seine Idee ist folglich aus einer Vermischung und Verwechselung von Wissenschaftskunde, Philosophie und Anthropologie entstanden ... Es soll also bei ihm eine Wissenschaft aus innerer Erfahrung nach einer ihr ganz heterogenen Methode notwendiger und allgemeiner Erkenntnisse behandelt werden" [1]. „Der Zusammenhang des Ganzen zeigt uns, daß Fichte eigentlich die Principien für eine Theorie der Organisation unsrer Vernunft geben wollte, um daraus die synthetische Einheit im Systeme unsrer Erkenntnisse abzuleiten, daß er aber verleitet durch jene Idee versuchte, einer anthropologischen Wissenschaft, welche sich also auf innere Erfahrung gründet, die logische Form einer philosophischen Wissenschaft zu geben, welche es nicht mit einzelnen Tatsachen, sondern mit allgemeinen und notwendigen Regeln in abstracto zu tun hat" [2]. — „Ferner er sah laut obigem das unmittelbare Bewußtsein der innern Tätigkeiten des Ich nicht als sinnlich, sondern als unmittelbare intellektuelle Anschauung an, er verwechselte also innere Anschauung, die doch sinnlich ist, mit intellektueller Anschauung. Dadurch mußten ihm notwendig viele Gegenstände der Anthropologie, die doch Erfahrungswissenschaft ist, die Gestalt des rein Spekulativen annehmen. Philosophie und erfahrungsmäßige Kenntnis der Vernunft mußten bei ihm verworren gedacht werden" [3]. — „Indem Fichte aber diese einfachen Rückschritte im Gebiete der Anthropologie tat, glaubte er in den schwierigsten Gegenden der Philosophie zu sein. Es zeigen sich

---

[1] R. F. u. S. S. 24. [2] R. F. u. S. S. 58. [3] R. F. u. S. S. 180.

daher auch durch das ganze System Gegenstände dieser Anthropologie, welche aber immer nach einer philosophisch gemeinten Methode behandelt werden. Fichte verfährt ganz nach den Reinholdischen Ideen über System der Philosophie, er hätte aber im weitern Fortschritte doch wohl bemerken müssen, daß er es mit nichts andern als einer verkünstelten empirischen Anthropologie zu tun habe". — „Die Verwirrung zwischen philosophischen und anthropologischen Begriffen mußte hier noch weit größer werden als bei Reinhold, sie brachte die dunkle zweideutige Sprache hervor, die sich so oft mit identischen oder gar widersprechenden Sätzen zu tun macht, in denen nicht der Buchstabe, sondern der Geist gilt, weil er durchaus die Art der Erkenntnisse verkannte, mit denen er es eigentlich zu tun hat" [1].

Und auch Schellings Philosophem beruht nach Fries nur auf der Fortführung desselben Grundfehlers: „Schelling irrt, wenn er seinen Gegensatz des Subjektiven und Objektiven diesem Gegensatz des Spinoza gleichsetzen will, der letztere ist rein spekulativ, der erstere aber nur durch den Reinholdischen Mißgriff, wodurch ihm die Idee seiner Elementarphilosophie entstand, in die Spekulation hineingezogen worden, da er doch für sich durchaus empirisch ist" [2].

Ich habe diese Stellen ausführlich angeführt, weil das, was sie uns über Fries' Verhältnis zum Psychologismus lehren, das Gewicht fast sämtlicher Darstellungen der Geschichte der Philosophie, die seit hundert Jahren erschienen sind, gegen sich hat und die Fehlerhaftigkeit einer Beurteilungsweise aufdeckt, die sich bis auf diesen Tag traditionell fortgeerbt hat. Die angeführten Stellen beweisen mit unzweideutiger Bestimmtheit,

[1] R. F. u. S. S. 215. [2] R. F. u. S. S. 99.

daß Fries nicht nur selbst nicht Psychologist gewesen ist, sondern sogar den Psychologismus seiner Zeitgenossen auf das lebhafteste bekämpft und in der Befreiung von ihm das wahre Heil für die Fortbildung der Philosophie gesucht hat.

III.

Fries' Verhältnis zur transcendentalen Methode.

Wenn somit urkundlich bewiesen ist, daß Fries nicht Psychologist ist, so fragt sich nunmehr, ob seine Methode die transcendentale ist. Er selbst — soviel können wir zunächst feststellen — hat sein Verfahren nie so bezeichnet, er nennt es vielmehr überall das kritische. Ich bemerke hier nebenbei, daß auch bei Kant die Bezeichnung „transcendentale Methode“, meines Wissens, nicht vorkommt. Wo Kant sonst das Wort „transcendental“ gebraucht hat, da hat er, veranlaßt durch seine Zweideutigkeit und den Unfug, der schon zu seinen Lebzeiten mit diesem Worte getrieben wurde, das Wort „kritisch“ an seine Stelle zu setzen vorgezogen. Die Schule der sogenannten Neukantianer hat sich seiner Wiedereinführung um so eifriger angenommen. Aber schwerlich wird man für dieses Wort bei seinen neueren Liebhabern eine genaue und scharfe Definition finden. Fragt man nach seiner Bedeutung, so ist die übliche Antwort die: es bezeichne den Gegensatz zum Psychologismus. Verlangt man aber eine Erklärung des Psychologismus, so erhält man die Auskunft: der Psychologismus sei ein grundverkehrter und verwerflicher Standpunkt, denn er sei dem Transcendentalen gerade entgegengesetzt.

Die neueste und relativ ausführlichste Darstellung der „transcendentalen Methode" findet sich in der Schrift von Dr. Max Scheler: Die transcendentale und die psychologische Methode. Auch in dieser Schrift wird mit dem Wort transcendental operiert, ohne daß eine Definition desselben vorkäme. Indessen stellen sich doch im Verlaufe der Untersuchung einige „Charakterzüge" der transcendentalen Methode heraus. Ich werde mich dieser Charakteristik der transcendentalen Methode bedienen, um die Frage zu untersuchen, ob man die Friesische Methode — dieser Charakteristik, als der einzig vorliegenden, gemäß — als transcendental zu bezeichnen habe.

„Der erste wesentliche Charakterzug der transcendentalen Methode ist" nach Scheler[1] „im scharfen Gegensatz zum vorkritischen Rationalismus ihre reduktive Art. Zu gegebenen Tatsachen sollen Gründe gesucht werden. Der ältere Rationalismus verfuhr progressiv". — Ist dieser „erste wesentliche Charakterzug der transcendentalen Methode" auch ein Charakterzug der Methode von Fries?

Fries selbst gibt uns die Antwort auf diese Frage:

„Es wird ein regressiver Gang der Untersuchung erfordert, dessen allgemeiner Charakter Fortschritt vom Besondern zum Allgemeinen, Reduktion der Erkenntnis auf ihre Principien ist. In diesem letztern ist ohne Unterschied allein das Leben der Wissenschaft, der progressive Fortschritt ist nur totes Resultat"[2].

„Das Wesen der Spekulation besteht darin, daß die gewöhnliche Erkenntnis durch Zergliederung auf ihre ersten und allgemeinsten apodiktischen Anfänge zurückgeführt wird, von denen

[1] a. a. O. S. 37. [2] N. K. d. V. § 78. (2. Aufl. 1. Bd. S. 383).

man nachweist, daß sie in jeder einzelnen Anwendung in der Tat schon im allgemeinen als wahr vorausgesetzt werden. Wir heben das Gesetz in seiner Allgemeinheit aus der Erkenntnis heraus, welches wir in der einzelnen Anwendung täglich brauchen. Wir beweisen nichts durch die Spekulation, sondern wir machen uns nur deutlich, woraus wir eigentlich gemeinhin alle unsre Beweise zu führen pflegen. Wenn z. B. jemand ohne Widerrede behauptet, ein Gefäß müsse, nachdem es der Künstler gegossen hat, eben so viel wiegen, als das rohe Metall wog, ehe der Künstler ihm die Form gab; so zeigt die Spekulation, daß dieser unbewußt schon die Richtigkeit des metaphysischen Grundsatzes von der Beharrlichkeit der Substanz voraussetze, und nur hieraus sein einzelnes Urteil ableite. Nämlich nur, weil er die Masse des Metalls als Substanz, und die Begriffe von Substanz und Beharrlichkeit als notwendig verknüpft ansieht, urteilt er, das Gewicht dieser bestimmten Masse sei unveränderlich. Eben so, wenn jemand einen einzelnen Stein, weil er fällt, für schwer erklärt, setzt er darin schon voraus die notwendige Verknüpfung der Begriffe, Veränderung und Wirkung nach dem Gesetze der Kausalität.

„Erst wenn die Spekulation vollendet ist, sind wir im Stand, das System der Wissenschaft in der Unterordnung des Besondern unter seine Principien durch Definition und Beweis dogmatisch aufzustellen, welches nur das tote Geschäft der Subsumtion ist“ [1].

„Die Regeln der philosophischen Spekulation sind die Regeln der kritischen Methode. Das Allgemeinste, welches hier als Princip aufgewiesen wird, ist das Schwerste, am wenigsten Evidente und doch Unerweisliche. Es muß also hier jeder Schüler, der eigne Einsicht erlangen will, die Rückschritte der Spekulation

---

[1] N. K. d. V. § 80. (2. Aufl. 1. Bd. S. 387 f.)

vom gemeinen Bewußtsein zu den höheren Abstraktionen erst selbst mit gemacht haben, ehe er zum Verständnis des Systems durchdringen kann . . . Die meisten Philosophen halten es für Unrecht, ihre Spekulationen öffentlich mitzuteilen, sie meinen, es zieme sich nur, das vollendete System der öffentlichen Prüfung vorzulegen. Dadurch aber wird gerade der richtige Gesichtspunkt der Beurteilung ganz verschoben. Evidenz fehlt den Anfängen eines philosophischen Systems unvermeidlich, weil sie die höchsten Abstraktionen sind, das Publikum kann also nur entweder die handwerksmäßige Brauchbarkeit der Resultate für Theologie, Politik oder Medizin zum Maßstab der Beurteilung nehmen, oder die sogenannte Konsequenz, nach der man oft das lächerliche Lob austeilen hört: der Mann behauptet freilich die größten Absurditäten, aber er bleibt sich doch konsequent“[1].

„Die philosophische Methode der Erfindung ist einzig die zergliedernde. Wir nennen sie die kritische Methode... Wir haben gefunden, das Erklären und Beweisen, das Ableiten aus Principien überhaupt ist in der Philosophie nicht die Hauptsache, sondern gerade das Aufsuchen der richtigen Principien lohnt allein der Mühe.... Die Regeln der philosophischen Erfindung sind also folgende: 1) Beobachte man, wo die menschliche Vernunft sich Urteile anmaßt, ohne diese auf Anschauung zu gründen. Überall, wo dies geschieht, müssen wir ein Thema philosophischer Untersuchungen erhalten, denn dies war eben das Eigentümliche der philosophischen Erkenntnis. So kommen wir auf die Fragen nach dem Wahren, Guten und Schönen. 2) Bei jedem einzelnen Thema dieser Art sehe man zu, welche Fälle auf diese Weise beurteilt werden, man sammle diese nach denselben allgemeinen in

[1] N. K. d. V. § 80. (2. Aufl. S. 389 f.)

ihnen vorwaltenden Begriffen und sehe zu, welche Grundvoraussetzungen es eigentlich sind, aus denen hier die Urteile fließen. Darin besteht das Wesen der philosophischen Zergliederung oder Regression . . ." [1].

„Die kritische Methode wird sich also von der entgegengesetzten darin unterscheiden, daß sie in Sachen der freien Spekulation immer unmittelbar analytisch oder zergliedernd, niemals gleich synthetisch oder ableitend verfährt, indem sie jedesmal zuerst vom konkreten einzelnen zum allgemeinen fortschreitet, niemals gleich allgemeine Formen auffaßt, welche sich der Faßlichkeit der gemeinen Erfahrung entziehen. Deswegen setzte Kant, der Erfinder der kritischen Methode in der Philosophie, dem Kriticismus den Dogmatismus entgegen, indem für die Kritik das allgemeine Dogma erst das Resultat ist, dagegen der Dogmatiker unmittelbar davon ausgeht. Fichte hat also diesen Begriff ganz mißdeutet, wenn er dem Dogmatismus den Idealismus entgegensetzt. Idealismus und Realismus, oder, wenn man will, Idealismus und Materialismus stehen sich nur als Lehrmeinungen in Rücksicht der Resultate einer Spekulation entgegen, der Gegensatz des Kriticismus und Dogmatismus ist aber von weit höherer Bedeutung, indem er auf die Methode, auf die Kunst zu spekulieren selbst geht" [2]. — „Wir sollen also in der Philosophie immer der rückwärts vom besondern zum allgemeinen, vom bedingten zu seiner Bedingung, von den Folgen zu den nächsten Gründen aufsteigenden Methode folgen" [3].

„Das spekulative Verfahren ist nur zergliedernd, wir suchen zu besondern Behauptungen durch Zerlegung unserer eignen Ge-

---

[1] S. d. L. § 126. 3. Aufl. S. 417 f. [2] R. F. u. S. S. 197.
[3] R. F. u. S. S. 263.

danken die allgemeinern Gründe, welche wir in ihnen schon voraussetzen — wir durchlaufen die Reihe eines Beweises rückwärts, dadurch finden wir die Principien unsrer apodiktischen Erkenntnis“ [1].

„. . . Daher wird hier unser erster Satz: das Glück in der Ausbildung der Philosophie hängt ganz vom zergliedernden Gedankengang, von regressiven Methoden ab, die vom Besondern zum Allgemeinen aufsteigen, also den Ausdruck der allgemeinen Grundwahrheiten erst suchen. Dieser Ausspruch der Principien ist hier das Schwerste und Unverständlichste; wer diesen auf eine taugliche Weise in seine Gewalt gebracht hat, der ist im Besitz der philosophischen Wissenschaft“ [2].

„Ist dem nun aber so, so liegt in der zergliedernden Methode der Anspruch: die Ordnung der Gründe und Folgen in Betrachtung der philosophischen Erkenntnisse umzukehren. Dogmatisch lehrt man auf geradem Wege, wie sich die Abfolge in unsern Erkenntnissen mache; hier beginnt man umgekehrt mit der Folge und sucht erst von dieser sich zu ihren Gründen durchzufinden“ [3]. —

„Ich leite nicht eigentlich den Grund von der Folge ab, sondern ich zeige, daß meine Annahme der Folge die des Grundes schon voraussetze. . . . Bei allem regressiven Verfahren der Spekulation suche ich geradezu zu meinen eignen Schlußsätzen die Prämissen, von denen ich ausgegangen sein mußte, um den Schlußsatz behaupten zu können . . . . Suchen wir in der Spekulation einen Grund für die Behauptung, daß die Kreisbewegung des Mondes eine stetig wirkende anziehende Kraft der Erde voraussetze, — so findet sich, daß wir diese Behauptung nur als eine Folge des allgemeinen Gesetzes annehmen: daß jede Veränderung

---

[1] S. d. L. § 117. 3. Aufl. S. 393. [2] S. d. M. § 21. S. 91.
[3] S. d. M. § 22. S. 100.

eine Ursache haben müsse. Die Kreisbewegung ist nämlich eine Bewegung, deren Richtung mit einer gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichteten Beschleunigung stetig verändert wird, und wir schließen hier aus dem allgemeinen Gesetz, daß auch die Veränderung der Richtung einer Bewegung ihre Ursache haben müsse. Hier wird der gegebene besondere Satz durch Zergliederung von einem allgemeinern Grunde abgeleitet und zugleich gezeigt, daß der erstere allgemein zugegebene Satz den letztern schon voraussetze“ [1].

Hiermit dürfte hinlänglich bewiesen sein, daß der „erste wesentliche Charakterzug der transcendentalen Methode“ in eminentem Maße auch einen Charakterzug der Methode von Fries bildet.

„Der zweite wesentliche Charakterzug der transcendentalen Methode ist dieser: daß sowohl Ausgangspunkt wie Endpunkt logische Gebilde, Urteile sind. Den Ausgangspunkt bilden wissenschaftliche Urteile, resp. Systeme solcher, und nicht um deren Ursachen wird gefragt, sondern um deren logische Gründe; dies heißt aber, wohlgemerkt, nicht um jene Gründe, welche die Subjekte, die diese Urteile fällten, (die einzelnen Gelehrten) in ihrem denkenden Bewußtsein haben mochten, als sie sie fällten, sondern um jene Gründe, die nach formal-logischen Gesetzen jene Urteile bedingen“ [2]. — Ist dieser „zweite wesentliche Charakterzug der transcendentalen Methode“ ein Charakterzug der Methode von Fries? Die Antwort auf diese Frage ist eigentlich schon zur Genüge in den soeben citierten Stellen gegeben. Zum Überfluß setze ich noch die folgende hierher:

„Das spekulative Verfahren geht den Gang der Abstraktion, indem es beständig das Untergeordnete in Rücksicht seiner Prä-

---

[1] S. d. M. § 22. S. 101 ff. [2] a. a. O.

missen bis zu den Principien hinauf zu orientieren sucht. Es beschäftigt sich mit denselben Beweisen, welche das dogmatische Verfahren aufstellt, aber nur sie regressiv aufsuchend und erfindend. Im Leben ist uns immer der Fall der Anwendung das erste, bei diesem werden apodiktische Gesetze als vorausgesetzte Wahrheiten geltend gemacht. Hier sucht nun das spekulative Verfahren in Mathematik und Philosophie die Fragen zu beantworten: welches sind diese vorausgesetzten Wahrheiten? wie wird der Fall der Anwendung davon abhängig? Es sei mir z. B. in der Mathematik die Rechnung mit logarithmischen und trigonometrischen Tafeln bekannt, und ich frage nun: worauf beruht die Richtigkeit dieser Regeln, die Konstruktion dieser Tafeln? so leite ich meinen Gedankengang hier nach spekulativem Verfahren. Hier suche ich immer höhere arithmetische Beweisgründe, beweise aber nicht etwa regressiv die Wahrheit arithmetischer Grundsätze und Lehrsätze aus dem Gebrauch der Tafeln . . . Das spekulative Verfahren dient also, um uns die Principien unsrer apodiktischen Erkenntnis zum Bewußtsein zu bringen“ [1].

„Ein drittes mit dem Wesen der transcendentalen Methode verbundenes Merkmal ist ihr Anspruch, zugleich eine erkenntniskritische Methode zu sein . . . . So bleibt ihr die Erkenntniskritik d. h. der Gebrauch jener letzten Principien als Kriterien nicht nur der Wahrheit gewisser Sätze, sondern schon des bloßen Versuchs, zu einer gewissen Art von Urteilen zu gelangen, als die bedeutsamste aller ihrer Funktionen im Ganzen der Wissenschaft“ [2].

Ist dieses „dritte mit dem Wesen der transcendentalen Methode verbundene Merkmal“ auch mit dem Wesen der Methode

---

[1] S. d. L. § 97. 3. Aufl. S. 314 f. [2] a. a. O. S. 38 f.

von Fries verbunden? Folgende Äußerungen von Fries können uns der Entscheidung dieser Frage näher führen:

„Besonders werden wir uns aber hier die Beschaffenheit derjenigen Aufgabe bekannt machen müssen, welche ich das System einer rein philosophischen Lehre nenne. Ihr Eigentümliches bestimmt sich durch das Verhältnis, in welchem die philosophischen Grundsätze als Kriterien eigentlich zu unsern Beurteilungen im täglichen Leben stehen“ [1]. — „Die einzelnen philosophischen Grundgedanken können leicht mißverstanden, verschiedene leicht mit einander verwechselt werden, z. B. logische mit metaphysischen, Naturbegriffe mit Ideen. Deswegen bedürfen wir also erstlich einer sorgfältigen zergliedernden Behandlung dieser Beurteilungen in der Grundlegung und nach spekulativer Methode, um eine richtige systematische Übersicht dieser Grundgedanken zu erhalten. Dann aber stellt das System der reinen Philosophie die so erhaltenen Principien auf und hat vorzüglich die Regeln genau zu entwickeln, nach welchen die Kriterien in unsern Beurteilungen jeder Art als leitende Maximen der Induktion gebraucht werden sollen“ [2]. — „Die Principien der reflektierenden Urteilskraft sind nun leitende Maximen, welche uns im Aufsuchen der Wahrheit führen sollen, welche uns behülflich sind, allgemeine Ansichten für die Gesetze in einer Wissenschaft oder auch neue Gebiete der Anwendung für schon bekannte Gesetze aufzufinden“ [3]. — „Philosophische Grundsätze sind nur Kriterien, nach denen sich unter ihnen stehende Fälle beurteilen lassen, wenn diese Fälle erst in Tatsachen zu ihnen hinzugegeben werden“ [4].

Daß das „dritte mit dem Wesen der transcendentalen Methode

---

[1] S. d. M. § 24. S. 119. [2] S. d. M. S. 122 f.
[3] S. d. M. § 27. S. 164. [4] S. d. L. § 124. S. 413.

verbundene Merkmal" auch mit dem Wesen der Methode von Fries verbunden sei, dürfte danach keinem Zweifel unterliegen. Folgen wir also nunmehr weiter der Charakteristik, die Scheler von der transcendentalen Methode entwickelt.

„Ein viertes wesentliches Merkmal der Methode ist der formale Charakter der Principien, zu denen sie gelangt". „Mit irgend welchem Inhalt wären sie an einen bestimmten Kreis von Objekten gebunden" [1]. — Vergleichen wir hiermit wiederum das Urteil von Fries über den Charakter der philosophischen Principien. Dasselbe lautet:

„Wir sagen: alle menschliche Erkenntnis läßt sich unter allgemeine und notwendige Gesetze teils nach Naturbegriffen, teils nach Ideen ordnen; die Gesetze sind von rein vernünftigem Ursprung und ihre Wahrheit läßt sich nicht aus der Erfahrung ableiten; die Erkenntnis der Tatsachen dagegen ist von empirischem Ursprung, ihre Wahrheit fließt nicht aus den notwendigen Gesetzen" [2]. — „In der Philosophie sind nur die Grundsätze rein philosophisch, und die Erkenntnisquelle für die Untersätze liegt immer in der Anschauung" [3]. — „Für jede philosophische Wissenschaft gibt die Vernunft ein Princip, welches in ihren höchsten Obersätzen ausgesprochen wird; in den Untersatz aber tritt der ganze Reichtum der Erfahrung, und die Wissenschaft besteht eigentlich nur in der Anwendung jenes Grundgedankens auf den Teil der Erfahrung, auf den dieser sich bezieht" [4]. — „Gesetz und Regel sind sich nie selbst genug, sondern sie fordern immer erst die Fälle der Anwendung in einzelnen Tatsachen" [5].

„Die Wahrheit der Tatsachen ist nicht in der Wahrheit der

[1] a. a. O. [2] S. d. M. § 27. S. 167. [3] S. d. M. § 21. S. 96.
[4] S. d. M. § 27. S. 160. [5] S. d. M. § 27. S. 165.

Gesetze enthalten, sondern die Tatsachen sind nur unter den Gesetzen mit einander verbunden, sie sind das Besondere, welches, wenn es gegeben ist, sich durch das Allgemeine bestimmen läßt, welches aber nicht durch das Allgemeine gegeben wird“ [1]. „Durch die philosophischen Grundsätze allein käme es zu keiner Theorie, denn in denen besitzen wir nur allgemeine Regeln der Einheit, welche sich aber selbst nie den Fall unter der Regel geben können. Alle Anwendung ist etwas dem philosophischen Princip Fremdes, welches sie erst von empirischer Erkenntnis erwartet“ [2]. „In der Philosophie sind die Grundsätze die Hauptsätze, deren leere Allgemeinheit aber durch die einzelnen Fälle der Tatsachen ausgefüllt werden muß“ [3].

In der Kritik der Vernunft stellt Fries das „Gesetz der Leerheit aller rein vernünftigen Formen“ auf: „Die Gesetze der Notwendigkeit erkennen wir in reiner Einsicht mathematisch und metaphysisch, aber davon getrennt bleibt alle Erkenntnis des Wirklichen Sache der Kenntnis, welche uns nur mit Hülfe der Wahrnehmungen wird . . . Daher ist der rein vernünftige Grund aller Erkenntnis unsers sinnlich bedingten Geistes für sich leere Form ohne bestimmte Gegenstände, aller Gehalt in den Erkenntnissen wird erst mit der sinnlichen Entwicklung unsers Lebens gegeben“ [4].

Der formale Charakter der philosophischen Principien erweist sich also auch als ein wesentliches Merkmal der Methode von Fries.

„Ein fünftes wesentliches Merkmal der Methode ist die Einrechnung jener Principien in die Wissenschaft selbst. Sie sind

---

[1] S. d. L. § 111. 3. Aufl. S. 370. [2] S. d. L. § 114. S. 383.
[3] S. d. L. § 124. S. 413. [4] N. K. d. V. § 89. 2. Bd. 2. Aufl. S. 40 f.

nicht bloß irrationale Sätze, die nur die Eigentümlichkeit besäßen, daß sie gelten müßten, wenn Wissenschaft sein soll, sondern sind selbst wissenschaftliche, auf Wahrheit Anspruch machende Urteile“ [1].

Daß auch dieses fünfte wesentliche Merkmal der transcendentalen Methode ein Merkmal der Methode von Fries ist, wird aus folgenden Stellen hervorgehen:

„Die Anschauung für sich selbst ist ihr eigner Zeuge der Wahrheit, nur wiefern ich der Anschauung vertraue, weiß ich etwas von dem Sein wirklicher Gegenstände. Ebenso unmittelbar gelten uns die metaphysischen Grundwahrheiten“ [2].

„Oben zeigte sich schon, daß alle philosophischen Untersuchungen anfangs regressiv sein müssen. Wir haben aber gesehen, daß hierdurch keineswegs das Allgemeine aus dem Besondern bewiesen, sondern vielmehr nur aufgewiesen wird, die Wahrheit des Besondern bei Erkenntnissen a priori setze jederzeit die des Allgemeinen voraus. Wie soll ich nun durch diese Regression auf ein Letztes kommen, das als Princip gelten kann? . . . Als philosophisches Princip soll es ganz auf Begriffen beruhen, es findet also keine Berufung auf Anschauung statt. Das Princip muß also unmittelbar durch sich selbst gültig und einleuchtend sein“ [3].

„Darin hat sich Kant fälschlich den Vorteil vergeben, indem er die Gültigkeit der Kategorieen von der anschaulichen Erkenntnis abhängig macht, anstatt die in ihnen aufgezeigten Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung direkt als einen wirklichen Bestandteil unserer Erkenntnis nachzuweisen“ [4].

„So fordert unsre Urteilskraft a priori die Gültigkeit der

---

[1] a. a. O. [2] N. K. d. V.[2] 1. Bd. Vorrede S. XXVIII.
[3] V. d. P. z. M. S. 174 f. [4] P. S. Anhang. S. 341.

Kausalbegriffe als Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung und nur kraft dieser Voraussetzung kann die Induktion sie anwenden“ [1].

„Die Urteilskraft ist offenbar so gut wie die Anschauung im Besitz (und möchte es gleich immer unbekannt bleiben, wie sie dazu gelangt sei) von wirklichen metaphysischen Erkenntnissen, die sie nicht aus der Anschauung entlehnt hat. Wir müssen ihr das gleiche Recht wie der Anschauung lassen und unsrer Untersuchung unparteiisch die Tatsachen beider Erkenntnisweisen neben einander vorlegen“ [2].

„Wir sehen also als die erste Angelegenheit der philosophischen Untersuchungen an die Zergliederung der Aussprüche unsers Wahrheitsgefühls und lassen die darin liegenden Behauptungen mit gleichem Recht wie die Anschauungen als Erkenntnisse gelten, aber wir behaupten darin doch keinesweges mit Leibniz (oder Platon) die angeborenen Ideen. Hierin hat der Kantische Ausspruch: alle unsre Vorstellungen fangen mit den sinnlichen Anregungen an, aber ihre allgemeinen und notwendigen Bestandteile entspringen nicht aus der sinnlichen Anregung, — die genügende Erläuterung gegeben“ [3].

„Mit Glück läßt sich eine Untersuchung dieser Grundsätze nur spekulativ und kritisch führen, und die Spekulation hat dabei noch die große Schwierigkeit, daß diese Grundsätze nur als Kriterien vorausgesetzt werden, für welche die Fälle der Anwendung erst durch eine ihnen fremde Erkenntnisquelle hinzugegeben werden müssen. Diese Grundsätze sind nämlich Voraussetzungen (Prämissen), welche allen unsern philosophischen Betrachtungen als Beurteilungsgründe übergeordnet stehen, aber

[1] P. S. S. 348. [2] P. S. S. 357. [3] P. S. S. 358.

nicht als Hypothesen, welche erst durch Induktionen zu beweisen oder wahrscheinlich zu machen wären, sondern als unmittelbar und ursprünglich in der menschlichen Vernunft bestimmte Grundwahrheiten, an die alle menschlichen Urteile notwendig gebunden bleiben"[1].

Hiermit ist die Zahl der wesentlichen Merkmale der transcendentalen Methode erschöpft[2]. Jedes dieser fünf Merkmale hat sich uns als Merkmal der Methode von Fries herausgestellt. Es ist somit auf Grund des Vorstehenden durch vollständige Induktion bewiesen, daß Fries ein Anhänger der transcendentalen Methode ist.

IV.

Theodor Elsenhans und das „Kant-Friesische Problem". Induktion und Spekulation bei Fries.

Wenden wir uns nun zu einer Prüfung der neuesten und zugleich — wenn wir von den Schriften der Schüler von Fries absehen — relativ ausführlichsten Erörterung der Friesischen Vernunftkritik. Dieselbe findet sich in der Schrift von Dr. Theodor Elsenhans: Das Kant-Friesische Problem[3]. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, durch eine „systematische Erörterung" „die Bearbeitung des Problems bis zu dem Punkte zu führen, welcher mit den Mitteln der Gegenwart erreichbar ist"[4]. Eine eindeutige Formulierung dieses Problems giebt er nicht. Einmal findet er das „Kant-Friesische Problem" „angedeutet" in dem Ausspruch K. Fischers: „die Frage, ob die Vernunftkritik

[1] N. K. d. V. § 86. 2. Bd. 2. Aufl. S. 6. [2] Scheler, a. a. O. S. 52.
[3] Heidelberg 1902. [4] S. 20.

metaphysisch oder anthropologisch sein solle, sei ein echtes, in der Entwicklungsgeschichte der deutschen Philosophie seit Kant unvermeidliches Problem“ [1]. Andererseits „lassen sich bei genauerer Betrachtung drei Seiten des Problems unterscheiden. Es handelt sich I. um einen Gegensatz des wissenschaftlichen Verfahrens: transcendentale und psychologische Methode; II. um einen Gegensatz der psychischen Vorgänge, . . . III. um einen Gegensatz der erkenntnistheoretischen Prinzipien . . .“ — Hier soll offenbar in dem ersten Gegensatz, dem des wissenschaftlichen Verfahrens, das oben „angedeutete Problem“ wiederholt werden. Ich will daher hier nur darauf aufmerksam machen, daß dabei die Worte „metaphysisch“ und „transcendental“ als gleichbedeutend genommen oder wenigstens nicht unterschieden werden. Dies hat, wie wir sehen werden, nicht geringen Einfluß auf die nachfolgenden Erörterungen erhalten.

Auf einen „Überblick über die Geschichte und Litteratur des Problems“ folgt zunächst eine Erörterung desselben „nach seiner methodologischen Seite“ [2]. Hier wird mit Recht darauf hinge-

[1] S. 2.

[2] Die Darstellung der „Geschichte und Litteratur des Problems“ wird mit folgendem, „der Untersuchung“ im eigentlichsten Sinne des Worts „vorhergehenden Urteil“ eingeleitet: „So wichtig die Stellung ist, welche Fries als Ausleger Kants und durch seine prinzipielle Bedeutung für die Entwicklung der nachkantischen Philosophie einnimmt, so kann er selbst doch nicht als Denker ersten Ranges bezeichnet werden. Ist sein System auch einheitlicher, als es z. B. Windelband erscheint, der es aus einem ‚Leibnizschen Rumpf‘ einem ‚Kant-Jakobischen Kopf‘, und einem ‚kriticistischen Schwanz‘ zusammengesetzt sein läßt, so fehlt ihm doch der große einheitliche Zug, der den Philosophen großen Stils eigen ist. Die Größen der Philosophie haben sich daher wenig oder wenigstens nicht eingehend mit ihm auseinandergesetzt“. — Es liegt mir fern, mich auf eine Diskussion derartiger Äußerungen persönlicher Wertschätzung einzulassen.

wiesen, daß die von Ulrici[1] und Liebmann[2] gegen Fries gerichtete Polemik „hinfällig ist, da Fries die Ansicht seiner Kritiker über die Unzulänglichkeit der Induktion für die Hauptaufgabe der Vernunftkritik völlig teilt“[3]. Die Induktion sei nach Fries keine selbständige, unabhängige Methode, sie bedürfe vielmehr selbst erst metaphysischer und mathematischer Voraussetzungen als leitender Maximen. Durch diese „werden erst die untauglichen empirischen Induktionen in ‚rationelle Induktionen‘ verwandelt“. „Für Fries ist also hier gerade dasjenige grundlegende Wahrheit, was manche seiner Kritiker gegen ihn geltend machen wollen. In seinen umsichtigen Ausführungen über Induktion erkennt er ganz klar, daß keine Ableitung von Gesetzen aus noch so vielen empirischen Einzelwahrnehmungen zur Gewißheit führt, ohne die anders woher . . . stammenden Voraussetzungen der Allgemeinheit und Notwendigkeit“. „Doch“ — so heißt es weiter — „muß zugegeben werden, daß das Verhältnis der Induktion zu den philosophischen Erkenntnissen bei Fries nicht ganz folgerichtig durchgeführt ist. Einerseits soll sie nur den Erfahrungswissenschaften dienen und für die philosophischen Erkenntnisse die kritische Methode vorbehalten bleiben, andrerseits ist sie ein Hilfsmittel der Spekulation in der Ermittlung der philosophischen und mathematischen Gesetze. Es spielen mehrere Begriffe der Induktion ineinander, wofür die Unterscheidung zwischen ‚empirischen‘ und ‚rationellen‘ Induktionen einen Anhaltspunkt giebt“[4].

Hierzu ist zu bemerken, daß Fries für die Zwecke der Spekulation die Induktion ausdrücklich abweist und daß sein Be-

---

[1] H. Ulrici. Das Grundprincip der Philosophie. 1. Teil. 1845.
[2] Dr. Otto Liebmann. Kant und die Epigonen. 1865. S. 140—156.
[3] S. 24. [4] S. 26.

griff der Induktion durchaus eindeutig und bestimmt ist. Er versteht nämlich unter Induktion überall den Schluß von den Fällen auf das Gesetz nach disjunktiver Schlußart[1]. Die rationelle Induktion unterscheidet sich von der empirischen allein dadurch, daß sie sich in der Erforschung des allgemeinen Gesetzes von heuristischen Maximen leiten läßt, während die empirische Induktion nur dem Princip der Erwartung ähnlicher Fälle folgt[2]. Die Spekulation, d. h. die Aufsuchung der philosophischen und mathematischen Grundwahrheiten hat es nun weder mit empirischer noch mit rationeller Induktion zu tun, da sie überhaupt kein Schlußverfahren ist, sondern vielmehr die Schlußreihen rückwärts durchläuft, um die allgemeinsten Prämissen aller Schlüsse aufzuweisen, die selbst nicht wieder auf Schlüssen beruhen können. Ich erinnere hierfür an die oben (vgl. Kapitel II) angeführten Stellen und füge zu ihrer Bekräftigung noch die folgende hinzu: „Dieses regressive Verfahren der Induktion haben wir schon von der ebenfalls regressiven Spekulation unterschieden. Die Spekulation hat es nur mit dem Aufweisen allgemeiner Regeln zu tun, welche wir in unsern mathematischen und philosophischen Beurteilungen schon als wahr voraussetzen, wenn gleich ohne uns dessen deutlich bewußt zu sein; die Induktion des regulativen Verfahrens hingegen muß für ihre allgemeinen Gesetze regressive Beweise führen, indem sie die Erscheinungen unter leitende Maximen zusammenordnet“[3].

Hier finden wir die Induktion aufs deutlichste und bestimmteste von der Spekulation geschieden. Eine Äußerung von Fries, die dieser Stelle widerspräche, hat Elsenhans nicht angegeben.

---

[1] S. d. L. § 60. [2] S. d. L. § 105.
[3] S. d. L. § 128. (3. Aufl. S. 428 f.)

Der Vorwurf, „daß das Verhältnis der Induktion zu den philosophischen Erkenntnissen bei Fries nicht ganz folgerichtig durchgeführt ist“, ist also ebenso unzutreffend wie unbegründet.

Wir übersehen indessen leicht, wodurch sich Elsenhans zu diesem Vorwurf hat verleiten lassen. Fries versteht nämlich, wie Elsenhans richtig bemerkt, unter Deduktion die Erklärung, wie die philosophischen Grundurteile „aus dem Wesen der Vernunft entspringen. Aus einer Theorie der Vernunft ist abzuleiten, welche ursprüngliche Erkenntnis wir notwendig haben müssen“ [1]. Die Entwicklung dieser Theorie der Vernunft „soll nach Fries auf dem Standpunkt der empirischen Psychologie oder der inneren Selbstbetrachtung beginnen, soll jedoch bei dem nur beschreibenden Standpunkt der Erfahrungsseelenlehre nicht stehen bleiben, sondern die auf diesem Wege gewonnene ‚reine Tatsache‘ nur als Grund brauchen, ‚von welchem eine vernünftige Induktion nach gut gewählten heuristischen Maximen ausgeht, um sich zu den allgemeinen Gesetzen unseres inneren Lebens, und somit zu einer physikalischen Theorie dieses Lebens rein nach seinen geistigen Verhältnissen zu erheben‘ “ [2]. — Diese Theorie der Vernunft soll also nach Fries durch rationelle Induktion ausgebildet werden. Mithin beruht letztlich auch die Möglichkeit der Deduktion der philosophischen und mathematischen Grundsätze auf dieser rationellen Induktion. Dies Verhältnis ist es offenbar, was Elsenhans zu dem Urteil veranlaßt hat, bei Fries sei die Induktion „ein Hilfsmittel der Spekulation in der Ermittlung der philosophischen und mathematischen Gesetze“, während sie andererseits „nur den Erfahrungswissenschaften dienen solle“, und

[1] S. 26. [2] S. 24 f.

wodurch er zu dem Vorwurf der Inkonsequenz in Fries' Darstellung des Verhältnisses der Induktion zu den philosophischen Erkenntnissen verleitet worden ist. Er hat aber hierbei völlig übersehen, daß es der Deduktion gar nicht um die „Ermittlung der philosophischen und mathematischen Gesetze“ zu tun ist; er hat nicht beachtet, daß die Deduktion vielmehr selbst einer durchaus erfahrungsmäßigen Erkenntnisweise angehört, nämlich der ganz subjektiven Untersuchung des Ursprungs gewisser Grundurteile in der Vernunft. — Auf seinen Vorschlag aber, die hier scheinbar bei Fries vorliegende Unklarheit durch Anwendung des Unterschiedes rationeller und empirischer Induktion zu klären, ist er geführt worden, weil es sich bei der Spekulation, als deren Hilfsmittel Fries angeblich die Induktion verwendet, um die Aufsuchung rationaler Sätze handelt, während die Anwendung der Induktion in den Erfahrungswissenschaften, auf deren Dienst sie eigentlich allein beschränkt war, stets nur zu empirischen Sätzen führen kann. Dieser Vorschlag ist aber einerseits an sich fehlerhaft, andererseits überflüssig. Er ist fehlerhaft: denn der Unterschied empirischer und rationeller Induktion betrifft nicht die Sätze, auf die die Induktion führt, sondern diejenigen, aus denen sie geführt wird; er bezieht sich nicht auf die Resultate, die durch sie begründet werden, sondern auf die Principien, durch die sie selbst begründet wird. Der Vorschlag ist aber auch überflüssig: denn die vermeintliche Inkonsequenz findet bei Fries nicht statt.

V.

Der Begriff der transcendentalen Deduktion bei Kant und bei Fries.

Fries hat die eben erwähnte psychologische Deduktion in den Mittelpunkt seiner Kritik der Vernunft gerückt und hiermit einen wesentlichen methodischen Fortschritt über Kant hinaus zu tun behauptet. Er ist überzeugt, daß Kant selbst mit seiner „transcendentalen“ Erkenntnis eigentlich auf diese psychologische Deduktion gezielt habe, sich aber hierüber nicht klar geworden sei, vielmehr diese in der Tat psychologische Natur seiner transcendentalen Untersuchung verkannt habe.

Mit Recht trennt daher Elsenhans, indem er zu einer Prüfung der Berechtigung dieser Friesischen Auffassung der transcendentalen Kritik schreitet, die beiden Fragen, die bisher meist miteinander vermengt worden sind, ob „Fries Recht hat, wenn er behauptet, Kant habe mit seiner transcendentalen Erkenntnis ‚eigentlich‘ die psychologische oder besser anthropologische Erkenntnis gemeint“, und „wie die anthropologische Methode des Friesischen Systems selbst zu beurteilen sei“. „Es handelt sich erstens um das Recht der Friesischen Interpretation Kants, zweitens um das Recht der Friesischen Methode selbst auf dem Boden der Erkenntniskritik“ [1].

Um zunächst der Entscheidung der ersten dieser beiden Fragen näher zu kommen, unterscheidet Elsenhans wiederum zwei Fragen: diejenige, „ob Kant selbst seine Vernunftkritik als eine im Wesentlichen psychologische Untersuchung betrachtet wissen wollte“ und diejenige „ob er die Psychologie zwar prinzipiell ab-

---

[1] S. 29.

wies, aber tatsächlich doch auf psychologischem Wege zu seiner Entscheidung gelangte“ [1].

Elsenhans führt nun eine Reihe von Argumenten an, auf Grund deren, wie er meint, „kaum ein Zweifel darüber sein kann, daß Kant selbst seine Vernunftkritik nicht als eine psychologische oder philosophisch-anthropologische Untersuchung angesehen wissen wollte“ [2].

Das erste dieser Argumente besteht in der Berufung auf eine Stelle der Vorrede zur ersten Auflage der Kritik der reinen Vernunft. Diese Stelle ist Kants Definition der Kritik der reinen Vernunft. Sie lautet: „Ich verstehe aber hierunter nicht eine Kritik der Bücher und Systeme, sondern die des Vernunftvermögens überhaupt, in Ansehung aller Erkenntnisse, zu denen sie, unabhängig von aller Erfahrung, streben mag, mithin die Entscheidung der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Metaphysik überhaupt . . .“ Hieraus zieht Elsenhans den Schluß: „Zu deutlich hat Kant die Unabhängigkeit des gesamten Unternehmens der Vernunftkritik von aller Erfahrung hervorgehoben“. Dieser Schluß ist ein Fehlschluß. Denn in der angezogenen Stelle werden zwar die Erkenntnisse der reinen Vernunft, keineswegs aber wird die Kritik dieser Erkenntnisse, als „unabhängig von aller Erfahrung“ bezeichnet. Den Gegenstand der Kritik bilden die von aller Erfahrung unabhängigen Erkenntnisse; ob aber die Erkenntnisse, die den Inhalt der Kritik bilden, ebenfalls von aller Erfahrung unabhängig sind oder nicht, das bleibt durch jenen Satz völlig unentschieden.

Das zweite Argument für die Behauptung, daß Kant selbst seine Vernunftkritik nicht als eine psychologische Untersuchung

[1] S. 30. [2] S. 32.

angesehen wissen wollte, ist nicht trifftiger als das erste. Elsenhans beruft sich nämlich hierfür auf den bekannten Ausspruch Kants: „Also muß empirische Psychologie aus der Metaphysik gänzlich verbannet sein, und ist schon durch die Idee derselben davon gänzlich ausgeschlossen . . . Es ist also bloß ein so lange aufgenommener Fremdling, dem man auf einige Zeit einen Aufenthalt vergönnt, bis er in einer ausführlichen Anthropologie (dem Pendant zu der empirischen Naturlehre) seine eigene Behausung wird beziehen können“ [1]. — Man sieht ohne weiteres, daß Elsenhans auch bei der Heranziehung dieser Stelle die Metaphysik, d. h. das System der Erkenntnisse aus reiner Vernunft, mit der Kritik der Vernunft verwechselt hat. Die Kritik der Vernunft soll, gemäß ihrer oben angeführten Definition, allererst die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Metaphysik entscheiden, wird also unter allen Umständen eine von der Metaphysik verschiedene Wissenschaft sein müssen; weshalb Kant sie auch oft als die Propädeutik zur Metaphysik bezeichnet. Muß also gleich empirische Psychologie gänzlich aus der Metaphysik verbannt sein, so muß sie doch darum noch keineswegs aus der Kritik der Vernunft verbannt sein.

Das dritte Argument von Elsenhans beruht auf demselben Fehler. Das System der reinen Philosophie zerfällt nämlich nach Kant in das System der analytischen Urteile: die Logik, und in das System der synthetischen Urteile a priori aus bloßen Begriffen: die Metaphysik. Wie nun Elsenhans in den beiden vorigen Argumenten die Kritik mit dem einen Teil des Systems der reinen Philosophie verwechselt hat, nämlich mit der Metaphysik, so verwechselt er sie hier mit seinem andern Teile:

[1] Kritik der reinen Vernunft. (Ausgabe von Kehrbach.) S. 640.

mit der Logik. Wenn Kant sagt: „Eine allgemeine, aber reine Logik hat es also mit lauter Principien a priori zu tun . . . . Als reine Logik hat sie keine empirischen Principien, mithin schöpft sie nichts, (wie man sich bisweilen überredet hat), aus der Psychologie“ [1], und wenn er sich „gegen die Vermischung der reinen Logik mit der Psychologie“ erklärt, so ist auch hiermit über das Verhältnis der Kritik zur Psychologie gar nichts gesagt.

In einem vierten Argument beruft sich Elsenhans auf Kants Lehre von der transcendentalen Deduktion der Kategorieen. Hier liegen die Verhältnisse verwickelter als in den vorigen Fällen, und es bedarf daher einer ausführlicheren Erörterung, um Klarheit in die in Frage stehenden Begriffe zu bringen.

Es handelt sich hier zunächst um fünf verschiedene, in ihrem gegenseitigen Verhältnis bisher trotz aller Erläuterungen noch nicht genügend geklärte Begriffe, nämlich um die Begriffe der „empirischen Deduktion“, der „physiologischen Ableitung“, der „metaphysischen Deduktion“ und der „transcendentalen Deduktion“, welche letztere wieder in zwei Untersuchungen zerfällt, nämlich in die Rechtfertigung der „objektiven Gültigkeit“ der Kategorieen, und in die Untersuchung ihrer „subjektiven Quellen“. Nur wer eine klare Einsicht in diese Begriffe und ihre gegenseitigen Beziehungen besitzt, kann hoffen, zum Verständnis des Verhältnisses der Methode von Fries zu derjenigen von Kant zu gelangen.

Worin zunächst der Unterschied zwischen der empirischen Deduktion und der physiologischen Ableitung besteht, ist weder von Kant ausdrücklich angegeben, noch auch — meines Wissens — von seinen Erläuterern bisher klar gestellt worden. Ich will

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 78 f.

versuchen, dies Verhältnis deutlich zu machen. Daß wir überhaupt zwischen diesen beiden Begriffen zu unterscheiden haben — was bisher meistens übersehen worden ist — geht daraus hervor, daß eine „empirische Deduktion“ der Kategorieen „nichts als eitele Versuche sein soll, womit sich nur derjenige beschäftigen kann, welcher die ganz eigentümliche Natur dieser Erkenntnisse nicht begriffen hat“, während eine „physiologische Ableitung“ der Kategorieen allerdings als möglich bezeichnet wird, indem man nämlich „von diesen Begriffen, wie von allem Erkenntnis, wo nicht das Principium ihrer Möglichkeit, doch die Gelegenheitsursachen ihrer Erzeugung in der Erfahrung aufsuchen kann“[1].

Worin besteht nun der Unterschied beider Verfahren? „Deduktion“ will Kant allgemein, nach dem Sprachgebrauch der Rechtslehrer, den Beweis nennen, der die Befugnis oder auch den Rechtsanspruch eines Begriffs dartut. Er spricht von „usurpierten Begriffen, die bisweilen durch die Frage: quid juris, in Anspruch genommen werden, da man alsdann, wegen der Deduktion derselben in nicht geringe Verlegenheit gerät, indem man keinen deutlichen Rechtsgrund weder aus der Erfahrung, noch der Vernunft anführen kann, dadurch die Befugnis seines Gebrauchs deutlich würde“. — Nach diesen Worten ist die Annahme logisch berechtigt, daß sowohl die Erfahrung wie die Vernunft den Rechtsgrund von gewissen Begriffen enthält. Es gäbe danach zwei Klassen von Begriffen; solche, deren Rechtsgrund in der Erfahrung, und solche, deren Rechtsgrund in der Vernunft liegt. Demgemäß heißt es auch bei Kant weiter, daß „einige . . . unter den mancherlei Begriffen, ... zum Gebrauch a priori (völlig unabhängig von aller Erfahrung) bestimmt sind . . . . Zu der Recht

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 104 f.

mäßigkeit eines solchen Gebrauchs" seien „Beweise aus der Erfahrung nicht hinreichend" ... „Ich nenne daher die Erklärung der Art, wie sich Begriffe a priori auf Gegenstände beziehen, die transcendentale Deduktion derselben .... Von ihnen eine empirische Deduktion versuchen zu wollen, würde ganz vergebliche Arbeit sein; weil eben darin das Unterscheidende ihrer Natur liegt, daß sie sich auf ihre Gegenstände beziehen, ohne etwas zu deren Vorstellung aus der Erfahrung entlehnt zu haben. Wenn also eine Deduktion derselben nötig ist, so wird sie jederzeit transcendental sein müssen".

Hiernach wird es deutlich sein, daß die empirische Deduktion — gemäß der obigen Einteilung der Arten der Rechtsgründe — die Deduktion eines Begriffs durch Anführung eines Rechtsgrundes aus der Erfahrung ist; während die transcendentale Deduktion eines Begriffs in der Aufweisung des Rechtsgrundes in der Vernunft besteht. Daraus folgt dann von selbst, daß nur von empirischen Begriffen eine empirische Deduktion möglich ist. Denn, einen Begriff, dessen Rechtsgrund nicht in der Erfahrung liegt, durch Anführung eines Rechtsgrundes aus der Erfahrung zu deducieren, wäre ein logischer Widerspruch.

Da nun Begriffe nur entweder aus der Erfahrung oder aus der Vernunft entspringen können, (denn „Vernunft ist das Vermögen, welches die Principien der Erkenntnis a priori an die Hand gibt" [1],) so kann es auch keine anderen Arten der Deduktion geben als die empirische und die transcendentale. Alle empirischen Begriffe können nur durch empirische Deduktion, alle Begriffe a priori können nur durch transcendentale Deduktion begründet werden.

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 43.

Danach versteht es sich von selbst, daß die „physiologische Ableitung .... eigentlich gar nicht Deduktion heißen kann“, und daß auch die sogenannte „metaphysische Deduktion“, wofern sie etwas von der empirischen und von der transcendentalen Deduktion Verschiedenes bezeichnen soll, nur uneigentlich Deduktion genannt werden kann. — Was zunächst die physiologische Ableitung betrifft, so unterscheidet sie sich von der empirischen und von der transcendentalen Deduktion schon dadurch, daß sie sich auf alle Begriffe ohne Unterschied ihres Ursprungs anwenden läßt. Man kann von allen Begriffen, „wo nicht das Principium ihrer Möglichkeit, doch die Gelegenheitsursachen ihrer Erzeugung in der Erfahrung aufsuchen, wo alsdann die Eindrücke der Sinne den ersten Anlaß geben, die ganze Erkenntniskraft in Ansehung ihrer zu eröffnen und Erfahrung zu stande zu bringen, die zwei sehr ungleichartige Elemente enthält, nämlich eine Materie zur Erkenntnis aus den Sinnen, und eine gewisse Form, sie zu ordnen, aus dem innern Quell des reinen Anschauens und Denkens, die bei Gelegenheit der ersteren, zuerst in Ausübung gebracht werden und Begriffe hervorbringen. Ein solches Nachspüren der ersten Bestrebungen unserer Erkenntniskraft, um von einzelnen Wahrnehmungen zu allgemeinen Begriffen zu steigen, hat ohne Zweifel seinen großen Nutzen .... Allein eine Deduktion der reinen Begriffe a priori kommt dadurch niemals zu stande, denn sie liegt ganz und gar nicht auf diesem Wege, weil in Ansehung ihres künftigen Gebrauchs, der von der Erfahrung gänzlich unabhängig sein soll, sie einen ganz andern Geburtsbrief, als den der Abstammung von Erfahrungen, müssen aufzuzeigen haben. Diese versuchte physiologische Ableitung, die eigentlich gar nicht Deduktion heißen kann, weil sie eine quaestio facti betrifft, will ich daher die Erklärung des Besitzes einer reinen Erkenntnis nennen“.

Was nun die „metaphysische Deduktion“ betrifft, so kommt dieser Terminus nur ein einziges Mal in der Kritik der reinen Vernunft vor, und zwar nur in der zweiten Auflage, in der „transcendentalen Deduktion des allgemeinen möglichen Erfahrungsgebrauchs der reinen Verstandesbegriffe“. Dort heißt es: „In der metaphysischen Deduktion wurde der Ursprung der Kategorieen a priori überhaupt durch ihre völlige Zusammentreffung mit den allgemeinen logischen Funktionen des Denkens dargetan, in der transcendentalen aber die Möglichkeit derselben als Erkenntnisse a priori von Gegenständen einer Anschauung überhaupt dargestellt“. — Diese Unterscheidung einer metaphysischen und einer transcendentalen Deduktion der Kategorieen in der transcendentalen Analytik läuft der ebenfalls erst in der zweiten Auflage der Kritik der reinen Vernunft eingeführten Unterscheidung einer metaphysischen und einer transcendentalen Erörterung von Raum und Zeit in der transcendentalen Ästhetik parallel. „Metaphysisch ist die Erörterung, wenn sie dasjenige enthält, was den Begriff als a priori gegeben darstellt“. „Ich verstehe unter einer transcendentalen Erörterung die Erklärung eines Begriffs, als eines Princips, woraus die Möglichkeit anderer synthetischer Erkenntnisse a priori eingesehen werden kann. Zu dieser Absicht wird erfordert, 1) daß wirklich dergleichen Erkenntnisse aus dem gegebenen Begriffe herfließen, 2) daß diese Erkenntnisse nur unter der Voraussetzung einer gegebenen Erklärungsart dieses Begriffs möglich sind“. — Auch in der Einleitung der Prolegomena finden wir dieselbe Unterscheidung angedeutet: „Ich versuchte also zuerst, ob sich nicht Humes Einwurf allgemein vorstellen ließe, und fand bald, daß der Begriff der Verknüpfung von Ursache und Wirkung bei weitem nicht der einzige sei, durch den der Verstand a priori sich Verknüpfungen der Dinge denkt, vielmehr, daß Metaphysik ganz und gar daraus bestehe. Ich suchte mich ihrer Zahl zu versichern, und, da dieses mir nach Wunsch, nämlich aus einem einzigen Princip, gelungen war, so ging ich an die Deduktion dieser Begriffe, von denen ich nunmehr versichert war, daß sie nicht, wie Hume besorgt hatte, von der Erfahrung abgeleitet, sondern aus dem reinen Verstande entsprungen seien"[1]. Die hier genannte Aufweisung der Kategorieen nach einem Princip ist es offenbar, die in der zweiten Auflage der Kritik als ihre metaphysische Deduktion bezeichnet wird, während die von ihr unterschiedene transcendentale Deduktion hier kurzweg Deduktion genannt wird. Das genannte Princip aber ist der transcendentale Leitfaden, den Kant so ausspricht: „Die Funktionen des Verstandes können insgesamt gefunden werden, wenn man die Funktionen der Einheit in den Urteilen vollständig darstellen kann"[2]. „Auf solche Weise entspringen gerade so viel reine Verstandesbegriffe, welche a priori auf Gegenstände der Anschauung überhaupt gehen, als es in der vorigen Tafel logische Funktionen in allen möglichen Urteilen gab: denn der Verstand ist durch gedachte Funktionen völlig erschöpft, und sein Vermögen dadurch gänzlich ausgemessen"[3]. Dies Princip ist in der Tat die Regel zur Auflösung der Aufgabe der metaphysischen Deduktion der Kategorieen, die Kant dahin bestimmt: es komme dabei darauf an, „1) daß die Begriffe reine und nicht empirische Begriffe sind; 2) daß sie nicht zur Anschauung und zur Sinnlichkeit, sondern zum Denken und Verstande gehören; 3) daß sie Elementarbegriffe sind und von den abgeleiteten, oder daraus zusammengesetzten, wohl unterschieden werden; 4) daß ihre Tafel voll-

---

[1] Prolegomena. Einleitung. [2] Kritik der reinen Vernunft. S. 89.
[3] Ebenda S. 96.

ständig sei und sie das ganze Feld des reinen Verstandes gänzlich ausfüllen“ [1].

Die metaphysische Erörterung oder Deduktion eines Begriffs oder einer Klasse von Begriffen ist also ganz allgemein der Nachweis ihrer Apriorität.

Schwieriger ist eine genaue Bestimmung des Begriffs der transcendentalen Erörterung oder Deduktion. Kants Definition der transcendentalen Erörterung enthält nämlich eine Unbestimmtheit insofern, als das Wort „transcendentale Erörterung“ sowohl auf „eines Begriffs“ als auch auf „anderer synthetischer Erkenntnisse a priori“ bezogen werden kann. (Vgl. oben S. 283.) Nach der ersteren Beziehung wäre die transcendentale Erörterung eines Begriffs eine Untersuchung desselben, wiefern er den Grund der Möglichkeit anderer Erkenntnisse bildet. Nach der zweiten Beziehung dagegen wäre seine transcendentale Erörterung die Untersuchung des Grundes seiner eigenen Möglichkeit. So würde z. B. diejenige Untersuchung, die wir nach der ersten dieser beiden möglichen Beziehungen als die transcendentale Erörterung des Raumes zu bezeichnen hätten, zugleich nach der zweiten Beziehung die transcendentale Deduktion der Geometrie sein. Denn die Erklärung der Raumanschauung als des Princips der Möglichkeit der Geometrie ist zugleich die Erörterung der Geometrie, wiefern sie a priori möglich ist.

Wenden wir dies auf die Kategorieen an, so erhalten wir die folgenden beiden Begriffe ihrer transcendentalen Deduktion. Nach der einen Bedeutung wäre die transcendentale Deduktion der Kategorieen die Untersuchung derselben, wiefern sie die Principien der Möglichkeit anderer Erkenntnisse sind; nach der

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 85.

zweiten Bedeutung dagegen wäre sie die Untersuchung des Grundes der Möglichkeit der Kategorieen selbst. Damit kommen wir auf die Unterscheidung, die Kant zwischen der „objektiven“ und der „subjektiven“ Deduktion der Kategorieen macht. Im Vorwort zur ersten Auflage der Kritik heißt es von der transcendentalen Deduktion: „Diese Betrachtung, die etwas tief angelegt ist, hat aber zwei Seiten. Die eine bezieht sich auf die Gegenstände des reinen Verstandes und soll die objektive Gültigkeit seiner Begriffe a priori dartun und begreiflich machen .... Die andere geht darauf aus, den reinen Verstand selbst, nach seiner Möglichkeit und den Erkenntniskräften, auf denen er selbst beruht, mithin ihn in subjektiver Hinsicht zu betrachten“. Die eine Untersuchung fragt: „Was und wie viel kann Verstand und Vernunft, frei von aller Erfahrung, erkennen?“ Die andere fragt: „Wie ist das Vermögen zu Denken selbst möglich?“ Die eine wird die „objektive“, die andere die „subjektive Deduktion“ genannt. In der Kritik selbst wird dieser Unterschied mit folgenden Worten eingeführt: „Diese Begriffe nun, welche a priori das reine Denken bei jeder Erfahrung enthalten, finden wir an den Kategorieen, und es ist schon eine hinreichende Deduktion derselben und Rechtfertigung ihrer objektiven Gültigkeit, wenn wir beweisen können: daß vermittelst ihrer allein ein Gegenstand gedacht werden kann. Weil aber in einem solchen Gedanken mehr als das einzige Vermögen zu denken, nämlich der Verstand beschäftiget ist, und dieser selbst, als ein Erkenntnisvermögen, das sich auf Objekte beziehen soll, eben so wohl einer Erläuterung, wegen der Möglichkeit dieser Beziehung, bedarf: so müssen wir die subjektiven Quellen, welche die Grundlage a priori zu der Möglichkeit der Erfahrung ausmachen, nicht nach ihrer empirischen, sondern transcendentalen Beschaffenheit zuvor erwägen"[1]. — Vergleichen wir damit die Stelle, von der Kant in der Vorrede sagt, sie „könne allein hinreichend sein", um der „objektiven" Deduktion „ihre ganze Stärke" zu geben. Diese Stelle ist die folgende: „... so ist doch die Vorstellung in Ansehung des Gegenstandes alsdann a priori bestimmend, wenn durch sie allein es möglich ist, etwas als einen Gegenstand zu erkennen... Nun frägt es sich, ob nicht auch Begriffe a priori vorausgehen, als Bedingungen, unter denen allein etwas, wenn gleich nicht angeschauet, dennoch als Gegenstand überhaupt gedacht wird, denn alsdann ist alle empirische Erkenntnis der Gegenstände solchen Begriffen notwendiger Weise gemäß, weil, ohne deren Voraussetzung, nichts als Objekt der Erfahrung möglich ist. Nun enthält aber alle Erfahrung außer der Anschauung der Sinne, wodurch etwas gegeben wird, noch einen Begriff von einem Gegenstande, der in der Anschauung gegeben wird oder erscheint: demnach werden Begriffe von Gegenständen überhaupt, als Bedingungen a priori aller Erfahrungserkenntnis zum Grunde liegen: folglich wird die objektive Gültigkeit der Kategorieen, als Begriffe a priori, darauf beruhen, daß durch sie allein Erfahrung, (der Form des Denkens nach) möglich sei. Denn alsdann beziehen sie sich notwendiger Weise und a priori auf Gegenstände der Erfahrung, weil nur vermittelst ihrer überhaupt irgend ein Gegenstand der Erfahrung gedacht werden kann"[2].

Hieraus erhellt, daß die objektive Deduktion der Kategorieen identisch ist mit der transcendentalen Deduktion nach der ersten der oben angegebenen Bedeutungen des Worts. Sie ist die Auf-

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 113 f.

[2] Ebenda. S. 109 f.

weisung der Kategorieen als der Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung. Die Erfahrung bildet also hier die „anderen Erkenntnisse", und die Kategorieen das „Princip, woraus ihre Möglichkeit eingesehen werden kann". In der Tat führt Kant fort: „Die transcendentale Deduktion aller Begriffe a priori hat also ein Principium, worauf die ganze Nachforschung gerichtet werden muß, nämlich dieses: daß sie als Bedingungen a priori der Möglichkeit der Erfahrungen erkannt werden müssen. Begriffe, die den objektiven Grund der Möglichkeit der Erfahrung abgeben, sind eben darum notwendig".

Wir finden also bei Kant folgende unter sich verschiedene Begriffe einer transcendentalen Erkenntnis. Der allgemeinste, in der ersten Auflage der Kritik der reinen Vernunft allein vorkommende Begriff ist der in der „Einleitung" der ersten Auflage definierte: „Ich nenne alle Erkenntnis transcendental, die sich nicht sowohl mit Gegenständen, sondern mit unseren Begriffen a priori von Gegenständen überhaupt beschäftigt". Dieser allgemeinsten Bedeutung des Worts entsprechen die auch in der zweiten Auflage beibehaltenen Titel „Transcendentale Ästhetik, transcendentale Logik, Analytik" u. s. w. In der zweiten Auflage wird der Begriff enger gefaßt, durch die Scheidung metaphysischer und transcendentaler Erörterung. Demgemäß ist auch die citierte Definition in der zweiten Auflage enger gefaßt: „Ich nenne alle Erkenntnis transcendental, die sich nicht sowohl mit Gegenständen, sondern mit unserer Erkenntnisart von Gegenständen, insofern diese a priori möglich sein soll, beschäftigt". Diese neue Definition läßt sich indessen streng nur auf die zweite Art der transcendentalen Erörterung oder Deduktion anwenden, die als die subjektive bezeichnet wird. Denn die objektive Deduktion untersucht die Kategorieen mit Rücksicht auf die Erkenntnis, die sie möglich machen, nicht aber mit Rücksicht auf den Grund, der sie selbst möglich macht. Nur die subjektive Deduktion kann die Frage beantworten: „Was ist [bei synthetischen Urteilen a priori] das, worauf ich mich stütze und wodurch die Synthesis möglich wird, da ich hier den Vorteil nicht habe, mich im Felde der Erfahrung darnach umzusehen?“ „Was ist hier das Unbekannte = X, worauf sich der Verstand stützt, wenn er außer dem Begriff von A ein demselben fremdes Prädikat aufzufinden glaubt, das gleichwohl damit verknüpft sei ... Es liegt also hier ein gewisses Geheimnis verborgen, dessen Aufschluß allein den Fortschritt in dem grenzenlosen Felde der reinen Verstandeserkenntnis sicher und zuverlässig machen kann: nämlich mit gehöriger Allgemeinheit den Grund der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori aufzudecken, die Bedingungen, die eine jede Art derselben möglich machen, einzusehen ...“ [1]. Die Auflösung der „eigentlichen Aufgabe der reinen Vernunft“, die Beantwortung der Frage: „Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?“ [2] bildet demnach den strengsten und bestimmtesten Begriff der transcendentalen Erkenntnis [3].

Es genüge hier nochmals festzustellen, daß die physiologische Ableitung von der transcendentalen Deduktion dadurch unterschieden ist, daß sie sich nicht mit dem Rechtsgrund, sondern nur mit der Tatsache des Besitzes eines Begriffs beschäftigt. Die

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. S. 41 f. [2] Ebenda. S. 694.

[3] Wobei natürlich der Unterschied der zu deducierenden Urteile und Begriffe nicht zu übersehen ist. Das Verhältnis derselben bestimmt sich dadurch, daß das Urteil (d. h. die Erkenntnis durch Begriffe) die Begriffe bereits voraussetzt, und daß demgemäß auch die Deduktion der Kategorieen derjenigen der aus ihnen entspringenden Urteile (wie das Mittel dem Zweck) vorhergehen muß.

empirische Deduktion aber unterscheidet sich von der transcendentalen dadurch, daß sie zwar auch auf die Frage nach dem Rechtsgrund eines Begriffs antwortet, diesen Rechtsgrund aber in der Erfahrung sucht, es also nur mit empirischen Begriffen zu tun hat.

Hören wir nunmehr die Darstellung von Elsenhans:

„Vollends für die Hauptaufgabe der Transcendentalphilosophie, für die transcendentale Deduktion, d. h. für die Erklärung der Art, wie sich Begriffe a priori auf Gegenstände beziehen, ist sie [die empirische Psychologie] völlig unbrauchbar. Man kann zwar von diesen Begriffen, wie von aller Erkenntnis, wo nicht das Prinzipium ihrer Möglichkeit, doch die Gelegenheitsursachen ihrer Erzeugung in der Erfahrung aufsuchen. Allein eine Deduktion der reinen Begriffe a priori kommt dadurch niemals zu stande, keine Begründung des Rechtsanspruchs (quid juris), sondern nur eine Erklärung des Besitzes (quid facti) der reinen Erkenntnis. Mit solchen Versuchen einer empirischen Deduktion der reinen Begriffe a priori kann sich daher nur derjenige beschäftigen, welcher die ganz eigentümliche Natur dieser Erkenntnisse nicht begriffen hat".

„Es ist nicht zu leugnen, daß hier Kant den Gedanken einer empirisch-psychologischen Erklärung des Besitzes einer reinen Erkenntnis, einer psychologischen Bearbeitung wenigstens der quaestio facti offen läßt. Aber einerseits wird diese Frage als eine außerhalb der eigentlichen Aufgabe der Vernunftkritik liegende behandelt, andererseits wird an sonstigen Stellen die empirische Psychologie von den Erkenntnisquellen der Metaphysik überhaupt abgewiesen. Am entschiedensten geschieht dies in § 1 der Prolegomena, wo es heißt: ‚Zuerst, was die Quellen einer metaphysischen Erkenntnis betrifft, so liegt es schon in ihrem Begriffe, daß sie nicht empirisch sein können .... Also wird weder äußere Erfahrung, welche die Quelle der eigentlichen Physik, noch innere, welche die Grundlage der empirischen Psychologie ausmacht, bei ihr zum Grunde liegen" [1].

In dieser Darstellung finden wir zunächst die fehlerhafte Identifikation der empirischen Deduktion mit der physiologischen Ableitung. Die Folge dessen ist die, wenn gleich nicht ausdrücklich ausgesprochene Zumutung, Kant habe sich selbst widersprochen. Wenn man nach Kant von den Begriffen a priori, wie von aller Erkenntnis, die Gelegenheitsursachen ihrer Erzeugung in der Erfahrung aufsuchen kann, wenn Kant den Gedanken einer Erklärung des Besitzes einer reinen Erkenntnis offen läßt, wie kann man ihn dann sagen lassen: mit solchen Versuchen könne sich nur derjenige beschäftigen, welcher die ganz eigentümliche Natur dieser Erkenntnisse nicht begriffen hat?

Nun ist Herrn Elsenhans ganz gewiß zuzugeben, daß die genannte „Erklärung des Besitzes einer reinen Erkenntnis" eine „empirisch-psychologische Erklärung" ist. Es ist ihm ferner unbedingt zuzugeben, daß diese Aufgabe von Kant „als eine außerhalb der eigentlichen Aufgabe der Vernunftkritik liegende behandelt" wird. Aber wir können Herrn Elsenhans nicht beipflichten, wenn er daraus den Schluß zieht, daß für die „eigentliche Aufgabe der Vernunftkritik", für die transcendentale Deduktion, die empirische Psychologie „völlig unbrauchbar" sei. Dieser Schluß setzt vielmehr das Vorurteil voraus, daß sich der Satz von der empirisch-psychologischen Natur der physiologischen Ableitung umkehren ließe; das Vorurteil, daß die Leistungsfähigkeit der empirischen Psychologie auf die lediglich genetische

[1] a. a. O. S. 31 f.

Untersuchung der Entstehung der Begriffe beschränkt sei. Dieses Vorurteil ist allerdings weit verbreitet, und auf ihm beruht die noch heute allgemein vorherrschende Ansicht, die Möglichkeit der transcendentalen Deduktion überschreite die Schranken der Psychologie [1]. Es ist indessen die Psychologie so wenig wie die physikalischen Wissenschaften auf die genetische Untersuchungsweise beschränkt. Es mag in der Psychologie schwieriger sein — aber auch sie vermag sich über die bloß historische Beschreibung und Klassifikation der Geistestätigkeiten zu einer Theorie der Vernunft zu erheben, gerade so, wie in der Astronomie die Gravitationstheorie unabhängig ist von der Entwicklungsgeschichte des Sonnensystems.

Es mag aber wohl noch ein anderer Grund gewesen sein, der Elsenhans zu der Meinung veranlaßt hat, die empirische Psychologie sei für die transcendentale Deduktion völlig unbrauchbar. Er hat nämlich offenbar in dem Terminus „empirische Deduktion" das Beiwort „empirisch" so verstanden, als ob dadurch nicht der Gegenstand, sondern die Methode der Untersuchung bezeichnet werden solle. Wir hatten gefunden, die empirische Deduktion sei diejenige, die den Rechtsgrund eines Begriffs in der Erfahrung sucht, sie könne also nur die Deduktion empirischer Begriffe sein. Bezieht man dagegen das Beiwort „empirisch" auf die Methode der Deduktion, so wird der Anschein erzeugt, als bestände der Unterschied der empirischen und transcendentalen Deduktion nicht sowohl in der Verschiedenheit ihrer Gegenstände (nämlich in der Verschiedenheit des Ursprungs der Begriffe, mit denen sie

---

[1] Einen unumwundenen Ausspruch dieses Vorurteils finden wir z. B. bei H. Cohen (Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. 1885. S. 200): „Es ist der methodische Charakter der Psychologie, Entwicklungsgeschichte zu sein".

sich beschäftigen) als vielmehr in einer Verschiedenheit der Erkenntnisart, der sie selbst angehören. Kann also nach dieser Auffassung die transcendentale Deduktion nicht empirischer Natur sein, so kann sie auch nicht empirisch-psychologischer Natur sein: sie gehört also, sofern eine rationale Psychologie unmöglich ist, überhaupt nicht in das Gebiet der Psychologie.

Wenn nun weiterhin Elsenhans zur Begründung dieser Ansicht sich darauf beruft, Kant habe die empirische Psychologie von den Erkenntnisquellen der Metaphysik abgewiesen, so können wir hierin nur seine schon oben hinlänglich beleuchtete Verwechslung der Metaphysik mit der transcendentalen Kritik wiederfinden. Hier zeigt sich die verhängnisvolle Folge der Unbestimmtheit der Problemstellung, auf die wir oben (S. 271) hingewiesen haben.

Zu Kants Zeit war nun allerdings die Psychologie, soweit man überhaupt von einer damaligen psychologischen Wissenschaft sprechen kann, noch gänzlich auf das Gebiet rein deskriptiver und genetischer Forschungsweise beschränkt. Demgemäß war es natürlich auch nicht üblich, das Wort „Psychologie“ in einem anderen als dem deskriptiv-genetischen Sinne zu gebrauchen. Diese Tatsache werden wir in Betracht ziehen müssen, wenn wir gewisse Äußerungen Kants richtig verstehen wollen, die in der Tat — im Unterschiede von denjenigen, auf die sich Elsenhans beruft — die Elsenhanssche Behauptung zu rechtfertigen scheinen, Kant selbst habe seine Vernunftkritik nicht als eine psychologische Untersuchung angesehen wissen wollen. Um nämlich den Unterschied seiner neuen Untersuchungen von den bis dahin allein als psychologisch geltenden deutlich hervortreten zu lassen, hat Kant sie durch die Einführung eines eigenen Namens ausgezeichnet. Dies ist der Sinn seiner Unterscheidung der Transcendentalphilosophie von der empirischen Psychologie. Während diese sich mit dem Besitzstand und der Entstehungsgeschichte der Begriffe und Urteile beschäftigt, fragt jene nach dem „Principium ihrer Möglichkeit“. Von der Frage: „Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?“ heißt es: „Man kann sagen, daß die ganze Transcendentalphilosophie, die vor aller Metaphysik notwendig vorhergeht, selbst nicht anderes, als bloß die vollständige Auflösung der hier vorgelegten Frage sei“ [1]. In der Transcendentalphilosophie ist „nicht von dem Entstehen der Erfahrung die Rede, sondern von dem, was in ihr liegt. Das erstere gehört zur empirischen Psychologie“ [2]. „Die Zergliederung des Verstandesvermögens selbst, um die Möglichkeit der Begriffe a priori dadurch zu erforschen, daß wir sie im Verstande allein, als ihrem Geburtsorte, aufsuchen und dessen reinen Gebrauch überhaupt analysieren; dieses ist das eigentümliche Geschäft einer Transcendental-Philosophie“ [3].

Die transcendentale Untersuchung ist also durch ihren Gegenstand von der empirischen Psychologie unterschieden, und dieser Unterschied der Gegenstände kann bestehen, ohne eine Gemeinschaft der Erkenntnisart der Untersuchung selbst auszuschließen. Suchen wir also, nach dem heutigen wissenschaftlichen Sprachgebrauch, das Charakteristische der Psychologie in der Erkenntnisart, verstehen wir unter Psychologie die Wissenschaft aus innerer Erfahrung, so werden wir, ohne im mindesten den Unterschied der genetischen von der transcendentalen Frage zu verwischen, auch die transcendentale Untersuchung als eine empirisch-psychologische zu bezeichnen haben. Denn ob wir Begriffe a priori oder empirische Begriffe untersuchen, ob wir den Ursprung einer Vor-

---

[1] Prolegomena § 5. [2] Ebenda § 21 a.
[3] Kritik der reinen Vernunft. S. 86.

stellung in Erkenntnisquellen a priori (in „transcendentalen Gemütsvermögen“) oder in den Sinnen suchen, ob wir uns mit den „Gelegenheitsursachen der Erzeugung“ oder mit dem „Principium der Möglichkeit“ gewisser Begriffe beschäftigen, — so werden doch diese Untersuchungen selbst allemal einer empirischen Erkenntnisart, nämlich der inneren Erfahrung angehören. Behalten wir dies im Auge, so werden wir zum Beispiel in folgenden Äußerungen Kants keinen Widerspruch gegen unsere Behauptung finden:

„Wenn man aber von diesen Grundsätzen den Ursprung anzugeben denkt, und es auf dem psychologischen Wege versucht, so ist dies dem Sinne derselben gänzlich zuwider. Denn sie sagen nicht, was geschieht, d. i. nach welcher Regel unsere Erkenntniskräfte ihr Spiel wirklich treiben, und wie geurteilt wird, sondern wie geurteilt werden soll; und da kommt diese logische objektive Notwendigkeit nicht heraus, wenn die Principien bloß empirisch sind. Also ist die Zweckmäßigkeit der Natur für unsere Erkenntnisvermögen und ihren Gebrauch, welche offenbar aus ihnen hervorleuchtet, ein transcendentales Princip der Urteile und bedarf also auch einer transcendentalen Deduktion, vermittelst deren der Grund so zu urteilen in den Erkenntnisquellen a priori aufgesucht werden muß“ [1].

„In dieser Modalität der ästhetischen Urteile, nämlich der angemaßten Notwendigkeit derselben, liegt ein Hauptmoment für die Kritik der Urteilskraft. Denn die macht eben an ihnen ein Princip a priori kenntlich und hebt sie aus der empirischen Psychologie, in der sie sonst unter den Gefühlen des Vergnügens und Schmerzens (nur mit dem nichtssagenden Beiwort eines fei-

---

[1] Kritik der Urteilskraft. Einleitung.

neren Gefühls) begraben bleiben würde, um sie, und vermittelst ihrer die Urteilskraft, in die Klasse derer zu stellen, welche Principien a priori zum Grunde haben, als solche aber, sie in die Transcendentalphilosophie herüberzuziehen“ [1].

„Sofern die Einbildungskraft nun Spontaneität ist, nenne ich sie auch bisweilen die produktive Einbildungskraft und unterscheide sie dadurch von der reproduktiven, deren Synthesis lediglich empirischen Gesetzen, nämlich denen der Association unterworfen ist, und welche daher zur Erklärung der Möglichkeit der Erkenntnisse a priori nichts beiträgt, und um deswillen nicht in die Transcendentalphilosophie, sondern in die Psychologie gehört“ [2].

Verstehen wir also mit Fries unter Psychologie die Wissenschaft aus innerer Erfahrung, so können wir feststellen, daß weder in den von Elsenhans beigebrachten Argumenten, noch auch in den eben von uns angeführten Äußerungen Kants ein hinreichender Grund für die von Fries geäußerte und von Elsenhans verteidigte Behauptung liegt, Kant habe die psychologische Natur seiner transcendentalen Erkenntnis verkannt.

Daß trotzdem Fries mit seiner Behauptung Recht hat, geht hervor aus dem Grunde, den er selbst für sie angeführt hat, den also Elsenhans nicht nur bei Kant, sondern auch bei Fries selbst hätte finden können. Dieser Grund liegt in der folgenden, von Fries zu wiederholten Malen ausführlich diskutierten Erklärung Kants:

„Und hier mache ich eine Anmerkung, . . . nämlich: daß nicht eine jede Erkenntnis a priori, sondern nur die, dadurch wir

---

[1] Kritik der Urteilskraft § 29.

[2] Kritik der reinen Vernunft. 2. Aufl. § 24.

erkennen, daß und wie gewisse Vorstellungen (Anschauungen oder Begriffe) lediglich a priori angewandt werden, oder möglich sein, transcendental . . . heißen müsse. Daher ist weder der Raum, noch irgend eine geometrische Bestimmung desselben a priori eine transcendentale Vorstellung, sondern nur die Erkenntnis, daß diese Vorstellungen gar nicht empirischen Ursprungs sein, und die Möglichkeit, wie sie sich gleichwohl a priori auf Gegenstände beziehen könne, kann transcendental heißen“ [1].

Hier bezeichnet Kant die transcendentale Erkenntnis ausdrücklich als eine Art der Erkenntnis a priori. Es kann also keinem Zweifel unterliegen, daß Kant die psychologische Natur der transcendentalen Erkenntnis verkannt hat[2].

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. Transcendentale Logik. Einleitung.

[2] Bereits in seiner Abhandlung „Über das Verhältnis der empirischen Psychologie zur Metaphysik“ sagt Fries (S. 183 ff.):

„Diese Unterscheidung der Erkenntnisart, welche den Inhalt der Kritik ausmacht, von derjenigen, welche ihr Gegenstand ist, konnte leicht übersehen werden. Kritik galt alsdann für eine Wissenschaft a priori aus Begriffen; man mußte den ihr eigentümlichen Inhalt mit ins System der Philosophie ziehen und dadurch zu mannigfaltigen Mißdeutungen und Verwirrungen Anlaß geben.

„Selbst Kant scheint mir diese Unterscheidung nicht bestimmt im Auge gehabt zu haben, sonst hätte er vielleicht durch eine nähere Erörterung derselben manchen vergeblichen Versuch die Philosophie als Wissenschaft weiter zu bringen, abhalten können. Man sehe die Bestimmung des Begriffes einer transcendentalen Erkenntnis (Kr. d. v. V. 4. Aufl. S. 25 u. 80.) Hier wird die Erkenntnis, wie gewisse Vorstellungen lediglich a priori angewandt werden oder möglich sind, transcendentale Erkenntnis genannt; diese Erkenntnis von der Möglichkeit oder dem Gebrauch einer Erkenntnis a priori aber als eine Art der Erkenntnis a priori aufgestellt. Offenbar aber werden wir uns nur durch innere Wahrnehmung bewußt, was für Vorstellungen a priori wir haben. Die hier genannte transcendentale Erkenntnis ist also Erfahrungs-Erkenntnis. Ist dies richtig, so faßt der Kantische Sprachgebrauch in dem Worte transcendental zwei heterogene Begriffe zusammen. Da hier ein Fall ist, wie es kaum einen zweiten geben möchte, daß

Diese Stelle ist daher auch entscheidend gegen Jürgen Bona Meyer, der Friesens Urteil über Kant korrigieren zu müssen geglaubt hat. Hätte er diese Stelle bei Kant oder die entsprechenden bei Fries beachtet, so hätte er niemals im

---

Kant bei Unterscheidung so wichtiger Begriffe gefehlt hat, so wird es gut sein dies näher auseinander zu setzen . . ."

Noch ausführlicher kommt Fries auf dieselbe Angelegenheit in seiner Streitschrift „Reinhold, Fichte und Schelling" zurück. Dort heißt es (S. 200 f.):

„Kant sieht die Idee der transcendentalen Kritik von der Seite an, daß die Vernunft erst sich selbst und ihr eignes Vermögen kennen müsse, ehe sie mit Sicherheit eines glücklichen Erfolges sich an die Aufbauung eines ganz ihr eigenen Systems wagen dürfe. Allein er hat dabei nie näher angemerkt, daß diese Selbsterkenntnis der Vernunft uns auf den Standpunkt der Anthropologie als Erfahrungswissenschaft stelle, indem wir doch zuletzt nur aus der sinnlichen innern Selbstanschauung unsre Kenntnis von der Beschaffenheit unsrer Vernunft selbst schöpfen können. Man könnte zwar sagen, daß dies ja offenbar schon in dem von ihm gesagten liege, und daß diese Untersuchung ja unmöglich selbst schon Philosophie sein könne, wenn in ihr erst untersucht wird, ob es überhaupt für uns nur Philosophie gebe. Aber dieser Unterschied ist dennoch verkannt, ja von Kant selbst übersehen worden. Ich beziehe mich hier nämlich auf die Bestimmung des Begriffs, den er mit dem Wort transcendental verbindet, und glaube nicht unrecht zu tun, wenn ich dabei etwas länger verweile, indem ihm hier begegnet ist, was man ihm sonst nicht leicht wird aufweisen können, daß er in Bestimmung eines für ihn so äußerst wichtigen Begriffes gefehlt hat . . . Sehen wir hier auf die Erklärung, welche Kant in den zwei ersten Stellen von transcendentaler Erkenntnis giebt, so ist sie die Erkenntnis von Erkenntnissen a priori, sie ist eben diejenige, welche der Kritik eigentümlich ist und ihren Inhalt ausmacht. Wir erkennen durch sie nicht a priori, sondern wir erkennen durch sie nur, wie wir a priori zu erkennen vermögen; nach Kant, sie geht nicht auf den Gegenstand der Erkenntnis a priori, sondern nur auf diese Erkenntnisart. Erkenntnisse a priori sind also der Gegenstand der transcendentalen Erkenntnis, wir erkennen aber Erkenntnisse überhaupt nur durch innere Wahrnehmung, d. h. durch innere Erfahrung . . . Darauf mache ich also besonders aufmerksam: transcendentale (kritische) Erkenntnis, ist nicht etwa eine besondere Art der Erkenntnis a priori, wie es bei Kant scheint, sondern sie ist dieser überhaupt entgegengesetzt, als diejenige, in welcher die Natur und Beschaffenheit unsrer Erkenntnisse a priori aus innerer Erfahrung, erkannt wird".

Widerspruch gegen Fries behaupten können. „Kant habe die psychologische Natur seiner eigenen Untersuchung nicht verkannt“[1].

Kommt nun auch Elsenhans zu dem Resultat, daß die eigentümliche Aufgabe der Transcendentalphilosophie, so wenig Kant selbst sie als eine psychologische ansah, uns in der von ihm dargebotenen Form vom Standpunkte der Gegenwart aus unzweideutig als eine solche erscheinen müsse[2], so findet er doch „zwei wichtige Punkte, welche der Identifikation der transcendentalen und der psychologischen Methode entgegenstehen“[3].

Den ersten dieser entgegenstehenden Punkte findet Elsenhans in Folgendem:

„Erstens kann jene psychologische Untersuchung des Erkenntnisvermögens selbst zu einer Bewußtseinstatsache gelangen, welche ihrer Analyse nicht weiter zugänglich ist und dadurch das ganze Gebiet, welches sie beherrscht, ihrer Zuständigkeit entzieht“. — „Kann“ gelangen? Jede wissenschaftliche Untersuchung von Tatsachen muß notwendig zu irgend welchen Grundtatsachen gelangen, welche der Analyse nicht weiter zugänglich sind, sie vielmehr erst ermöglichen. Warum also soll die Psychologie zu ihnen nur gelangen können und nicht vielmehr, wie jede andere Wissenschaft, notwendiger Weise gelangen müssen? Sollte ferner behauptet werden können, dass dieser Umstand ein Punkt sei, welcher der Identifikation der transcendentalen mit der psychologischen Methode entgegenstehe, so hätte Herrn Elsenhans der Nachweis obgelegen, daß eine, von der psychologischen verschiedene transcendentale Methode der Untersuchung möglich

---

[1] Jürgen Bona Meyer. Kants Psychologie. S. 143, 303.
[2] a. a. O. S. 34. [3] Ebenda S. 35.

ist, welche von jenem angeblichen Mangel der psychologischen Methode frei ist. Diesen Nachweis ist er jedoch schuldig geblieben.

Der zweite der entgegenstehenden Punkte ist der folgende: „Zweitens ist derjenige Haupteinwand eingehender zu berücksichtigen, auf den sich . . . die Gegner der Friesischen Anschauung beriefen: psychologische d. h. empirische Untersuchung bringe es nie zu derjenigen strengen Allgemeinheit und Notwendigkeit, ohne welche eine sichere Begründung der Erkenntnis nicht möglich sei". — Hierauf ist zu antworten, daß dieser „Haupteinwand" durchaus keiner eingehenden Berücksichtigung bedarf, da er bereits von Fries selbst in seinem ersten Buche eine hinlängliche Berücksichtigung erfahren hat. Dieser Haupteinwand beruht nämlich auf der Verwechslung des Unterschiedes der empirischen von der allgemeinen und notwendigen (apodiktischen) Erkenntnis mit dem Unterschiede geringerer und höherer Sicherheit der Erkenntnis. Der modalische Unterschied des Empirischen und Apodiktischen hat indessen nichts mit dem Unterschied des Grades der Gewißheit der Erkenntnis zu tun. So schreibt Fries im Jahre 1803: „Apodiktische und historische Erkenntnis unterscheiden sich nicht nach verschiedenen Graden der Gewißheit, sondern es kommt beiden die gleiche objektive Gültigkeit zu. Grade der Gewißheit finden nur für die rationale Erkenntnis aus Wahrscheinlichkeit statt . . . Für die historische Erkenntnis aus Anschauung gibt es aber nur eine Gewißheit und eine Wahrheit, ihre objektive Gültigkeit . . . Zweitens wird sehr oft die Gewißheit der historischen Erkenntnis für geringer angesehen, als die der apodiktischen. Dieses geschieht aber nur durch eine Verwechselung des historisch Gewissen mit dem Wahrscheinlichen. Das Wahrscheinliche ist nur eine rationale Ableitung aus dem historisch Gewissen, hingegen für dieses selbst gibt es gar keine Wahrscheinlichkeit, sondern nur eine und dieselbe faktische Gewißheit. Die historische Gewißheit beruht auf der Anschauung und auf Autopsie; das historisch Wahrscheinliche hingegen ist eine bloße rationale Ableitung einer Gewißheit aus gegebenen Erzählungen oder gegebenen Ursachen und Wirkungen. Für die reinen Elemente unserer historischen und apodiktischen Erkenntnis ist also die historische Gewißheit des Wirklichen der apodiktischen Gewißheit des Notwendigen durchaus gleich“ [1]. — „Alles Philosophieren soll also mit Kritik anfangen, die Kritik aber geht von mannigfaltigen einzelnen Tatsachen der innern Erfahrung aus. Wer ihr dies zum Vorwurf machen will, wie oft geschehen ist, der versteht sich weder auf das Wesen derselben noch auf das Wesen der Philosophie überhaupt. Er meint nämlich einmal, daß die historische Gewißheit dieser Tatsachen geringer sei als die apodiktische der Philosophie, welches irrig ist, und hat zweitens den Unterschied zwischen einem Beweise und einer kritischen Deduktion nicht gefaßt“ [2].

VI.

Fries' Theorie der Vernunft und der psychologische Tatbestand.

Hiermit ist die Elsenhanssche Erörterung des Problems „nach seiner methodologischen Seite“ beendet, und wir treten in die Behandlung des Problems „nach seiner psychologischen Seite“ ein. Elsenhans bespricht hier kurz Fries' Theorie der Re-

[1] R. F. und S. S. 254 f.

[2] Ebenda S. 269. Vgl. auch S. d. L. § 111. Zweite architektonische Grundregel.

flexion. Dabei sucht er die im ganzen Gefüge der Friesschen Psychologie äußerst wichtige Theorie des Wahrheitsgefühls zu bemängeln:

„Fries' Theorie des Wahrheitsgefühls ist übrigens psychologisch betrachtet keineswegs einwandfrei“ [1]. — Der Leser erwartet, daß nun der psychologische Einwand folgen werde. Elsenhans fährt jedoch fort: „Abgesehen von Einzelheiten, auf welche hier nicht weiter eingegangen werden kann, verrät sich eine gewisse Unsicherheit schon in dem Verhältnis des ‚Gefühls‘ überhaupt zum ‚Wahrheitsgefühl‘“. — Man wird begierig sein, zu hören, wodurch sich diese „Unsicherheit“ „verrät“. — „In der ersten Auflage der ‚Neuen Kritik der Vernunft‘ ist § 85 noch überschrieben: ‚c) die Theorie der Gefühls‘, in der zweiten: ‚c) die Theorie des Wahrheitsgefühls‘, und Fries sieht sich genötigt, aus Anlaß der mancherlei Streitigkeiten über die Natur des Gefühls in der zweiten Auflage (I^2, 411—415) eine besondere Erörterung darüber neu anzufügen, ohne jedoch, wie die Schlußbemerkungen zeigen, zu einer völlig befriedigenden Theorie des Gefühls gelangt zu sein“. —

Soll sich etwa die oben behauptete „Unsicherheit“ in der Änderung des Titels des § 85 der Kritik „verraten“? Das kann nicht der Ernst des Herrn Elsenhans sein. Hat er aber einen anderen Grund für seine Behauptung, warum hat er ihn nicht mitgeteilt? Und wen soll, „wie die Schlußbemerkungen zeigen“, die Theorie nicht völlig befriedigen? Ist gemeint, daß die Theorie Fries nicht völlig befriedige, so muß ich gestehen, daß ich hiervon in den Schlußbemerkungen nicht die mindeste Andeutung zu finden vermag. Um aber den Leser selbst urteilen zu lassen,

[1] S. 38.

so lasse ich die Schlußbemerkungen in der Anmerkung folgen[1]. Meint jedoch Elsenhans, daß er selbst von Fries' Theorie nicht völlig befriedigt werde, so könnte ich in diesem Umstand nur in dem Falle einen Mangel der Friesschen Theorie erblicken, wenn Elsenhans die Gründe seiner Unzufriedenheit mitgeteilt hätte. Das hat er indessen unterlassen.

Es folgt bei Elsenhans eine kurze Darstellung der Friesschen Lehre von der mittelbaren und unmittelbaren Erkenntnis, nebst einer „Kritik" dieser Lehre. Diese „Kritik" umfaßt eine Druckseite und enthält lediglich Angaben über dasjenige, worauf „nicht näher eingegangen" werden soll und was „keines weiteren Nachweises bedarf"[2]: „Wir gehen auf die einzelnen psychologischen Bedenken, zu welchen die zu Grunde liegende Psychologie Anlaß giebt, auf die uneingeschränkte Verwendung der ‚künstlichen Selbstbeobachtung', auf die Bezeichnung und Verwendung

[1] „Ein dringendes wissenschaftliches Bedürfnis nötigt uns also dem Worte Wahrheitsgefühl diese Bedeutung zu sichern, da wir keinen andern Ausdruck haben, um diese unmittelbare Tätigkeit im Denken vom mittelbaren Begreifen und Schließen zu unterscheiden. Aber freilich wird dem gewöhnlichen Sprachgebrauch viel Gewalt angetan, wenn wir verlangen wollen, das Wort Gefühl für innere Verhältnisse überhaupt nur hier zu gebrauchen. Denn allerdings gehört dieses Wort in der gewöhnlichen Rede besonders auch dem nur gemütlichen im Geistesleben im Gegensatz gegen Tat- und Willenskraft, ja es wird im gemeinen Leben in dieser Bedeutung am meisten und bestimmtesten gebraucht, und wir selbst haben, dem Kantischen Sprachgebrauch gemäß, nicht immer vermieden, es in dieser Bedeutung anzuwenden, (es kommt vorzüglich so in der Lehre von den Temperamenten vor, wo aber anstatt desselben auch Herz oder Gemüt gesagt werden könnte). Die hier gegebenen Erörterungen werden indessen hinlangen, um beide Bedeutungen auseinander zu halten und vorzüglich klar zu machen, daß das Wahrheitsgefühl als solches nie durch Lust und Unlust seine Bestimmungen erhalte, sondern ein Akt der Denkkraft sei". (N. K. d. V.[2] § 85. 1. Bd. S. 414 f.)

[2] a. a. O. S. 42.

des ‚Wahrheitsgefühls' als ‚Akt der Denkkraft' und anderes nicht näher ein. Auch die vielumstrittene Frage des ‚Unbewußten' im Leben der Seele, in welcher sich Fries teilweise an Leibniz anschließt, mag dahingestellt bleiben. Daß aber jene verborgene, für sich unaussprechliche, irrtumslose Spontaneität der Vernunft eine mit dem psychologischen Tatbestand nicht vereinbare Abstraktion ist, bedarf keines weiteren Nachweises. Sie widerspricht schon der Notwendigkeit der Entwicklung jeder individuellen Vernunft, welche die Möglichkeit des Irrtums nicht aus, sondern einschließt".

Wieso diese angebliche „Abstraktion" die Möglichkeit des Irrtums ausschließt, hat Elsenhans nicht angegeben. Er hat ferner offenbar keine Kenntnis davon genommen, daß gerade in Fries' Psychologie die Lehre von der „Entwicklung der individuellen Vernunft" [1] sowohl als auch die Lehre vom Irrtum [2] eine Hauptrolle spielen. Was sich im menschlichen Geiste entwickelt, ist allerdings nicht „jene irrtumslose Spontaneität der Vernunft", sondern die Reflexion, die Kraft der willkürlichen Selbstbeherrschung, die in der Tat dem Irrtum unterworfen ist. „Durch den Einfluß des Willens aufs Vorstellen wird Irrtum möglich, indem der Wille sich nach den ihm fremden Gesetzen der Erkenntnis zu richten sucht. Die Sinne irren nicht, auch irrt die unmittelbare Erkenntnis der Vernunft nicht, sondern nur die willkürliche Reflexion. Der Wille kombiniert nur problematische Vorstellungen im Denken, und sucht im Urteil die Regel der Erkenntnis selbst, als Gesetz der Wahrheit, zu treffen, dabei ist

---

[1] Vgl. z. B. Ps. A. I. Bd. 1. Abschnitt. 2) Von den Grundvermögen unsers Geistes und den Stufen seiner Ausbildung. Desgl. II. Bd. 3. Abschnitt. Von den Stufen der Ausbildung des Geistes. Desgl. E. I. Abschnitt. 2. Kapitel. Von der Ausbildung des Menschen. [2] N. K. d. V. § 84.

ihm also das Fehlen möglich, weil er sich künstlich ein ihm unmittelbar fremdes Gesetz vorschreibt“ [1]. — „Der willkürlichen Selbsttätigkeit im Denken gehört die Ausbildung des Bewußtseins; der ursprünglichen Spontaneität der Vernunft gehört die Erkenntnis mit Notwendigkeit selbst“ [2]. — „Wenn hier aber die Rede davon ist, wie ein Verstand oder eine Erkenntniskraft sich von der andern unterscheidet, edler oder unedler, dummer oder gescheuter ist, so liegen alle diese Unterschiede nur im Reflexionsvermögen, denn die Selbsttätigkeit der Vernunft ist eine Grundform, für die es keine Grade giebt, welche in jeder Erkenntniskraft die nämliche sein muß. Es trifft also die Ausbildung des Denkvermögens auch nur Bildung der Reflexion“. „Die Gewalt des Willens über die Vorstellungen ist es, welche die gradweisen Unterschiede des tierischen Vorstellens und der menschlichen Vernunft bestimmt, sie ist es, welche den gedankenlosesten Peschares oder Karaiben vom gebildetsten, geistreichsten Europäer, den stupidesten Verstand von der Genialität unmittelbar unterscheidet“ [3]. „Es kann auffallend scheinen, wie wir so wichtige Momente dem Reflexionsvermögen beilegen, aber wir leben ja unser Leben nur dadurch selbst, daß wir es durch Reflexion auffassen und wiederholen“ [4]. „Die Reflexion ist das bildsame Vermögen in uns . . . Nur durch sie giebt es Erziehung, Bildung und Geschichte“ [5]. „Das einzige theoretische Thema der Geschichte der Menschheit ist die A u s b i l d u n g d e s V e r s t a n d e s und deren Forterbung, d. h. die Geschichte der sich selbst beobachtenden und deutlich erkennenden Reflexion“ [6].

„Wie unnatürlich die Folgerungen sind, zu welchen diese

[1] N. K. d. V. § 84. 2. Aufl. I. Bd. S. 403 ff.
[2] G. d. Ph. II. Bd. S. 601. [3] N. K. d. V. § 74.
[4] Ebenda § 75. [5] Ebenda § 187. [6] M. N. § 5.

Anschauung führt, das zeigt“ nach Elsenhans „unter anderem das Beispiel der optischen Täuschung, nach welcher die Mondscheibe am Horizont größer als hoch am Himmel erscheint“. — Elsenhans irrt, wenn er dies „Beispiel“ für eine Folgerung aus der Friesischen „Anschauung“ hält. Es ist vielmehr eine von allen psychologischen Theorieen unabhängig feststehende Tatsache, die Herr Elsenhans wie jeder andere an sich bei wolkenfreiem Himmel beobachten kann. — „Täuschung soll ich dies nach Fries vorzüglich deshalb nennen, ‚weil meine unmittelbare Anschauung, die ich durch Messung genauer beobachte, ihn das einemal wirklich nicht größer zeigt als das andere‘“. Auch dies ist aber eine von Friesens psychologischen Theorieen völlig unabhängige Tatsache. Hat Elsenhans etwas gegen sie einzuwenden, so hätte er mit diesem Einwand nicht zurückhalten sollen, wenn er sie „unnatürlich“ schelten wollte.

„Durch die schroffe Gegenüberstellung beider Erkenntnisarten wird außerdem die ganze Organisation des menschlichen Erkennens geradezu verdoppelt, da beide philosophische Erkenntnisse liefern“.

Der Beweis des Gegenteils dieser Behauptung ist die ganze Bemühung von Fries' Theorie der Reflexion: Der „Vernunft werden die allgemeinen und notwendigen Erkenntnisse der Philosophie und Mathematik zugeschrieben, welche ein unveränderliches Eigentum jedes menschlichen Geistes sind. Dieser beharrlichen Tätigkeit können wir uns aber erst mittelbar im logischen Gedankenlauf durch Reflexion bewußt werden. Mit allem Reflektieren tun wir nichts neues zur Erkenntnis hinzu . . . Durch unsern Willen machen wir doch offenbar Wahrheit und Erkenntnis nicht, sondern wir leiten nur unsre innere Selbstbeobachtung . . . Die logische Form der Definitionen, Schlüsse und Beweise, welche nur zur Wiederbeobachtung unsrer

Erkenntnisse dient, sollte hinlangen, um durch sie zur Philosophie zu kommen, ein Verfahren, welches dem ganz gleich kommt, wenn jemand durch das Fernrohr zur Astronomie kommen wollte, ohne einen Himmel, den er beobachtet" [1]. „In alle diesen Dingen kann man durchaus zu keinem scharfen Endurteil kommen, wenn man nicht zuvor versteht, das bloß Instrumentale der Reflexion von der unmittelbaren Erkenntnis zu trennen" [2]. —

Aus dieser seiner „Kritik" zieht Elsenhans den Schluß: „Fries hat daher Unrecht, Kant vorzuwerfen, er habe in seiner Lehre von der transcendentalen Apperzeption die Selbsttätigkeit der Erkenntniskraft mit der willkürlichen Reflexion verwechselt. Die Kantische Synthesis sei nichts als ein Akt des Reflexionsvermögens, eine Wiederholung, deren Original er nicht kenne".

Demgegenüber will ich versuchen das Zutreffende von Fries' Urteil über Kants Theorie der Verbindung und die Bedeutung der Friesschen Verbesserung des Kantischen Fehlers zu erläutern. Zu diesem Zwecke werde ich den Nachweis der Mangelhaftigkeit der Kantischen Theorie und der Unentbehrlichkeit der Friesschen Verbesserung an einem Beispiel durchführen. Hierfür mag zunächst auf einige Stellen verwiesen werden, aus denen unmittelbar ersichtlich ist, daß Kant in der Tat keinen Unterschied zwischen der Spontaneität der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft und der Willkürlichkeit der Reflexion kennt.

„Unsre Erkenntnis entspringt aus zwei Grundquellen des Gemüts, deren die erste ist, die Vorstellungen zu empfangen (die Rezeptivität der Eindrücke), die zweite, das Vermögen, durch diese Vorstellungen einen Gegenstand zu erkennen: (Spontaneität der Begriffe); durch die erstere wird uns ein Gegenstand ge-

---

[1] N. K. d. V. § 54. [2] Ebenda § 64.

geben, durch die zweite wird dieser, im Verhältnis auf jene Vorstellung (als bloße Bestimmung des Gemüts) gedacht. Anschauung und Begriffe machen also die Elemente aller unsrer Erkenntnis aus . . . Wollen wir die Rezeptivität unseres Gemüts, Vorstellungen zu empfangen, sofern es auf irgend eine Weise affiziert wird, Sinnlichkeit nennen, so ist dagegen das Vermögen, Vorstellungen selbst hervorzubringen, oder die Spontaneität des Erkenntnisses, der Verstand"[1]. „Es giebt aber, außer der Anschauung, keine andere Art zu erkennen, als durch Begriffe . . . Begriffe gründen sich also auf der Spontaneität des Denkens, wie sinnliche Anschauungen auf der Rezeptivität der Eindrücke"[2]. „. . . Die Spontaneität unseres Denkens erfordert es, daß dieses Mannigfaltige zuerst auf gewisse Weise durchgegangen, aufgenommen, und verbunden werde, um daraus eine Erkenntnis zu machen. Diese Handlung nenne ich Synthesis"[3]. „Es sind aber zwei Bedingungen, unter denen allein die Erkenntnis eines Gegenstandes möglich ist, erstlich, Anschauung, dadurch derselbe, aber nur als Erscheinung, gegeben wird: zweitens, Begriff, dadurch ein Gegenstand gedacht wird, der dieser Anschauung entspricht"[4].

Im § 15 der zweiten Auflage der Kritik der reinen Vernunft spricht Kant „von der Möglichkeit einer Verbindung überhaupt". Hier heißt es: „Die Verbindung (conjunctio) eines Mannigfaltigen überhaupt kann niemals durch Sinne in uns kommen, . . . denn

---

[1] Kritik der reinen Vernunft. Transcendentale Logik. Einleitung. (Kehrbach S. 76.)

[2] Transcendentale Analytik. Analytik der Begriffe. 1. Hauptstück. 1. Abschnitt. (Kehrbach S. 88.)

[3] Analytik der Begriffe. 1. Hauptstück. 3. Abschnitt. (Kehrbach S. 94.)

[4] Analytik der Begriffe. 2. Hauptstück. 1. Abschnitt. (Kehrbach S. 109.)

sie ist ein Aktus der Spontaneität der Vorstellungskraft, und, da man diese, zum Unterschiede von der Sinnlichkeit, Verstand nennen muß, so ist alle Verbindung, wir mögen uns ihrer bewußt werden oder nicht, . . . eine Verstandeshandlung, die wir mit der allgemeinen Benennung Synthesis belegen . . . Man wird hier leicht gewahr, daß diese Handlung ursprünglich einig, und für alle Verbindung gleichgeltend sein müsse, und daß die Auflösung Analysis, die ihr Gegenteil zu sein scheint, sie doch jederzeit voraussetze; denn wo der Verstand vorher nichts verbunden hat, da kann er auch nichts auflösen, weil es nur durch ihn als verbunden der Vorstellungskraft hat gegeben werden können". — „. . . Nur dadurch, daß ich ein Mannigfaltiges gegebener Vorstellungen in einem Bewußtsein verbinden kann, ist es möglich, daß ich mir die Identität des Bewußtseins in diesen Vorstellungen selbst vorstelle, d. i. die analytische Einheit der Apperzeption ist nur unter der Voraussetzung irgend einer synthetischen möglich". „Die analytische Einheit des Bewußtseins hängt allen gemeinsamen Begriffen, als solchen, an, . . . also nur vermöge einer vorausgedachten möglichen synthetischen Einheit kann ich mir die analytische vorstellen. Eine Vorstellung, die als verschiedenen gemein gedacht werden soll, wird als zu solchen gehörig angesehen, die außer ihr noch etwas Verschiedenes an sich haben, folglich muß sie in synthetischer Einheit mit anderen . . . vorher gedacht werden, ehe ich die analytische Einheit des Bewußtseins, welche sie zum conceptus communis macht, an ihr denken kann. Und so ist die synthetische Einheit der Apperzeption der höchste Punkt, an dem man allen Verstandesgebrauch, selbst die ganze Logik, und, nach ihr, die Transcendental-Philosophie heften muß, ja dieses Vermögen ist der Verstand selbst." „Verbindung . . . ist allein eine Verrichtung des Verstandes, der selbst nichts weiter ist, als das Vermögen, a priori zu verbinden, und das Mannigfaltige gegebener Vorstellungen unter die Einheit der Apperzeption zu bringen, welcher Grundsatz der oberste im ganzen menschlichen Erkenntnis ist“ [1]. „. . . . so finde ich, daß ein Urteil nichts anderes sei, als die Art, gegebene Erkenntnisse zur objektiven Einheit der Apperzeption zu bringen“ [2]. „Das mannigfaltige in einer sinnlichen Anschauung Gegebene gehört notwendig unter die ursprüngliche synthetische Einheit der Apperzeption . . . Diejenige Handlung des Verstandes aber, durch die das Mannigfaltige gegebener Vorstellungen . . . unter eine Apperzeption überhaupt gebracht wird, ist die logische Funktion der Urteile“ [3].

Hier zeigt sich deutlich die Unzulänglichkeit der Kantischen Theorie. Das Urteil ist Erkenntnis durch die Synthesis von Begriffen. Der Begriff aber ist eine Vorstellung, „die als verschiedenen gemein gedacht werden soll“, die „folglich in synthetischer Einheit mit anderen vorhergedacht werden muß“. Der Verstand verbindet also, was er vorher aufgelöst hat, er kann aber andererseits nichts auflösen, als was er vorher verbunden hat. Welchen Sinn soll es aber haben, daß der Verstand das Werk seiner eigenen Synthesis wieder auflöst, nur um die Synthesis von neuem zu verrichten?

Und ferner, wenn diese „ursprüngliche“ Synthesis, die aller Analysis vorhergehen soll, wieder eine „gedachte“ ist, wenn sie, wie nach Kant alle Synthesis, eine Verstandeshandlung ist, die nur durch das Urteil verrichtet werden kann, so wäre sie selbst nur durch Begriffe möglich, bedürfte also zu ihrer Möglichkeit bereits der analytischen Einheit. Diese aber ist wiederum nur

[1] § 16. [2] § 19. [3] § 20.

unter Voraussetzung einer synthetischen Einheit möglich. Und so fort ohne Ende. Es könnte also gar keine Synthesis zu stande kommen; wir würden uns vielmehr nur im Kreise herumdrehen.

Wie können wir uns aus diesem Zirkel herausfinden? Nur dadurch, daß wir, mit Fries, die ursprüngliche synthetische Einheit der Apperzeption von der durch das Urteil bewirkten synthetischen Einheit unterscheiden. Das Urteil ist eine Erkenntnis durch Begriffe, ist also nur durch eine vorausgegangene Analysis möglich. Die ursprüngliche Synthesis aber, die dieser Analysis zu Grunde liegt und in der Tat die Bedingung der Möglichkeit aller Analysis ist, kann nicht wieder ein Akt des Verstandes sein. Denn der Verstand (das Reflexionsvermögen) ist das Vermögen zu urteilen. Die ursprüngliche Synthesis ist aber selbst erst die Bedingung der Möglichkeit alles Urteilens. Sie kann folglich selbst nicht wiederum im Urteil bestehen, sondern gehört der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft an.

Diese unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft ist ursprünglich dunkel und kann nur durch Reflexion deutlich werden. Denn durch das Urteil wird uns die synthetische Einheit zum Bewußtsein gebracht. Die analytische Einheit ist also das Instrument, die synthetische Einheit ins Bewußtsein zu erheben.

So sehen wir denn auch ein, daß und warum die Auflösung und Wiederverbindung der Vorstellungen durch den Verstand nicht, wie es bei Kant scheinen muß, das zweckwidrige Spiel der abwechselnden Zerstörung und Wiederherstellung seines eigenen Werkes ist. Sie dient vielmehr dazu, die ursprünglich dunkelen Erkenntnisse, ihrem Gehalte nach, deutlich zu machen und aufzuklären. Der Verstand ist nicht die Spontaneität der reinen Erkenntnis selbst, sondern nur das Vermögen der Wiederholung dieser Erkenntnis vor dem Bewußtsein. Er ist nicht das ursprüngliche Vermögen der Verbindung in unserer Erkenntnis, sondern das Vermögen der Trennung und der Wiederverbindung der getrennten Vorstellungen. Oder, um es anders auszudrücken, die ursprüngliche synthetische Einheit der Apperzeption ist nicht, wie Kant im § 16 sagt, „der Verstand selbst", sondern, nach der richtigeren Andeutung des § 15, dasjenige, „was selbst den Grund der Einheit verschiedener Begriffe in Urteilen, mithin der Möglichkeit des Verstandes, sogar in seinem logischen Gebrauche enthält" und „worauf folglich" (§ 17) „selbst die Möglichkeit des Verstandes beruht".

Erst mit der Aufweisung dieser unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft ist die Frage nach dem Grunde der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori wahrhaft aufgelöst und befriedigend beantwortet. Die ursprüngliche „formale Apperzeption" wie Fries sie nennt, ist in der Tat jenes „X, worauf sich der Verstand stützt". Ihre Aufweisung ist der „Aufschluß des Geheimnisses", der „allein den Fortschritt in dem grenzenlosen Felde der reinen Verstandeserkenntnis sicher und zuverlässig machen kann". (s. o. S. 289.) Die Spontaneität der reinen Vernunft gibt durch ihre unmittelbare Erkenntnis allererst die Regel der Wahrheit für die Urteile des Verstandes. Denn das Urteil ist für sich nur eine willkürliche Verbindung von Begriffen. Es wird zur Erkenntnis (d. h. wir erkennen durch Denken) nur dadurch, daß es — unserem Willen wahr zu urteilen, d. h. durch Denken zu erkennen, gemäß — die unmittelbare Erkenntnis wiederholt, d. h. dadurch, daß die mittelbare Synthesis des Verstandes mit der ursprünglichen Synthesis der reinen Vernunft übereinstimmt. Ohne diese Unterscheidung der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft von der nur wiederholenden Reflexion würden wir daher das Gesetz der Wahrheit preisgeben. Alle Wahrheit und Erkenntnis wäre, wie es Fichte wollte, lediglich ein Produkt der Willkür, d. h. es wäre eigentlich gar keine Wahrheit und Erkenntnis möglich.

Das Verhältnis von Fries' Theorie der Vernunft zum „psychologischen Tatbestand" dürfte hiermit klar gestellt sein.

VII.

Fries' Verhältnis zur Erkenntnistheorie.

Nachdem die „psychologische Grundlage, auf welcher Fries seine anthropologische Kritik aufbaut, sich an dem für die Methodenfrage wichtigsten Punkte, in der Unterscheidung der ‚mittelbaren' und der ‚unmittelbaren Erkenntnis'" vor dem Forum der Elsenhansschen Kritik als „unhaltbar erwiesen" hat, geht Elsenhans zu der Bearbeitung des Problems „nach seiner erkenntnistheoretischen Seite" über[1]. „Hätte sich" jene Friessche Unterscheidung „aus dem psychologischen Tatbestand rechtfertigen lassen, so wäre damit der Haupteinwand gegen die Anwendung der psychologischen Methode auf die Vernunftkritik .... hinfällig geworden". „Mit der Verwerfung dieser Zweiteilung in ‚mittelbare' und ‚unmittelbare' Erkenntnis kehrt aber allerdings auch jener Einwurf mit verdoppelter Stärke zurück. Wir werden damit auf den schwächsten Punkt der rein psychologischen Methode der Erkenntniskritik geführt. Der erkenntnistheoretischen Hauptfrage der zuverlässigen Begründung der Erkenntnisprinzipien, der objektiven Gültigkeit des Erkennens gegenüber scheint sie zu versagen".

Elsenhans hält also die Begründung der objektiven Gültigkeit des Erkennens für die Aufgabe der Erkenntnistheorie.

[1] S. 43.

Dieser Aufgabe gegenüber versagt in der Tat die „rein psychologische Methode der Erkenntniskritik". Will aber Elsenhans dies „Versagen" als einen „schwachen Punkt der rein psychologischen Methode der Erkenntniskritik" bezeichnen, so müßte er vorher den Nachweis der Möglichkeit einer von der psychologischen verschiedenen Methode führen, welche jener „erkenntnistheoretischen Hauptfrage" gegenüber nicht versagt. Mit andern Worten: er hätte nachweisen müssen, daß es überhaupt eine „Erkenntnistheorie" (in seinem Sinne) gibt, oder zum mindesten, daß es sie geben kann, d. h. daß ihr Begriff keine Unmöglichkeit einschließt. Widrigenfalls er Gefahr liefe, sich in dem Begriff der Erkenntnistheorie, der ihm als Maßstab zur Beurteilung der psychologischen Methode dient, von einem bloßen Hirngespinnst täuschen zu lassen. Bereits an früherer Stelle (S. 299f.) hat sich gezeigt, daß nur durch die Erbringung dieses Nachweises die von Elsenhans an Fries geübte Kritik einen Sinn erhalten könne. Schon an derselben Stelle jedoch haben wir zugleich feststellen müssen, daß Elsenhans sich der Pflicht dieser Nachweisung entzogen hat.

Nehmen wir aber selbst an, dieser Nachweis wäre erbracht, so würde sich doch daraus allein noch kein Tadel für die Friesische Vernunftkritik ergeben. Man würde derselben vielmehr nur dann eine „Schwäche" vorwerfen können, wenn sie den Anspruch erhöbe, eine Erkenntnistheorie (im Elsenhansschen Sinne) zu sein; d. h. wenn sie den Anspruch machte, eine Begründung der objektiven Gültigkeit des Erkennens zu geben. Denn in diesem Falle würde sie, sofern die psychologische Methode dieser Aufgabe gegenüber versagt, ihre Aufgabe nicht lösen, sie würde das nicht leisten, was sie verspricht. Nun stellt sich aber Fries in seiner Kritik gar nicht diese Aufgabe, es verhält sich vielmehr umgekehrt so, daß er behauptet und den ausdrücklichen

Beweis für die Behauptung führt, daß diese angebliche Aufgabe der Erkenntnistheorie gar keine Aufgabe für irgend eine Wissenschaft sein könne, da diese Aufgabe einen Widerspruch in sich birgt. Fries beweist also die Unmöglichkeit der Erkenntnistheorie. Dies ist auch Herrn Elsenhans keineswegs verborgen geblieben. Vielmehr berichtet er selbst: Fries „sieht es als seine Aufgabe an, die gewöhnliche nur objektive Art, die Erkenntnisse zu betrachten, zu verlassen und sich auf die subjektive, anthropologische zu beschränken“ [1]. „Nach Fries ist es uns nicht möglich, die transcendentale Wahrheit, die Übereinstimmung mit dem Gegenstande durch unsere Untersuchung festzustellen. Wir können nicht aus unserer Erkenntnis gleichsam heraustreten, um ihn selbst mit dieser zu vergleichen, sondern jeder Gegenstand wird uns nur Gegenstand einer Erkenntnis und jede Vergleichung ist nur subjektive Vergleichung unserer Erkenntnistätigkeiten“ [2]. — Elsenhans hat also Friesens Beweis der Unmöglichkeit der Erkenntnistheorie sehr wohl gekannt. Warum hat er diesen Beweis nicht zuvor widerlegt, ehe er es als eine Schwäche der Friesschen Kritik bezeichnete, daß sie der erkenntnistheoretischen Hauptfrage gegenüber versage?

Elsenhans glaubt nun daraus, daß Fries eine objektive Begründung der Erkenntnis ablehnt, das Recht zu entnehmen, von dem „Subjektivismus der Friesschen Philosophie“ zu sprechen [3]. Dem entsprechend fährt er in dem eben erwähnten Referat von Fries' Lehre von der Begründung der Urteile folgendermaßen fort: „... wir können genau genommen nicht sagen: die Sonne steht am Himmel, sondern nur: jede endliche Vernunft weiß, daß die Sonne am Himmel steht“ [4]. — Das aber sagt Fries keines-

[1] S. 44. [2] S. 47. [3] S. 44. [4] S. 47.

wegs, weder an der Stelle, auf die sich Elsenhans beruft[1], noch sonst irgend wo. An jener Stelle spricht Fries vielmehr von der Begründung der Grundurteile und zeigt, daß diese sich nicht durch eine Vergleichung mit dem Gegenstande begründen lassen, sondern nur durch eine Vergleichung mit der ihnen zu Grunde liegenden unmittelbaren Erkenntnis. Demgemäß dürfen wir uns z. B. für die Wahrheit des Urteils: „die Sonne steht am Himmel“ allein auf unsere Anschauung von dieser Tatsache berufen, ohne diese Anschauung wieder mit der Sonne selbst und ihrem am Himmel Stehen vergleichen zu können. Diese Unmöglichkeit, unsere Erkenntnis mit dem Gegenstande zu vergleichen, bedeutet aber bei Fries keineswegs, wie Elsenhans meint, wir könnten „genau genommen“ nicht über den Gegenstand urteilen, wären vielmehr „genau genommen“ auf ein Urteil über unsere Erkenntnis beschränkt. Fries macht nicht die objektive Gültigkeit oder Ungültigkeit unserer Erkenntnis von der Möglichkeit oder Unmöglichkeit ihrer objektiven Begründung abhängig. Allerdings behauptet er, daß uns eine Begründung der objektiven Gültigkeit unserer Erkenntnis unmöglich sei; nicht aber, als ob er subjektivistisch meinte, es gäbe keine Objektivität für unsere Erkenntnis, sondern darum, weil unsere Erkenntnis ihre objektive Gültigkeit vielmehr von vornherein besitzt, einer objektiven Begründung also nicht nur nicht fähig, sondern auch gar nicht bedürftig ist. — Wie aber diese Behauptung der objektiven Gültigkeit der Erkenntnis mit der Möglichkeit des Irrtums zu vereinigen sei, dies kann nur verstanden werden, wenn man

---

[1] Die Stelle lautet vielmehr so: „Wir sagen nicht [nämlich bei der Begründung der Urteile]: die Sonne steht am Himmel, sondern nur: jede endliche Vernunft weiß, daß die Sonne am Himmel steht“. (N. K. d. V. § 70. 2. Aufl. Bd. I. S. 343).

eine klare Einsicht in den Unterschied und das Verhältnis der mittelbaren und unmittelbaren Erkenntnis besitzt. Denn ohne diese Unterscheidung würde freilich die Behauptung, der Erkenntnis als solcher gehöre ihre objektive Gültigkeit, die Möglichkeit des Irrtums ausschließen, wie dies in der Tat von Elsenhans behauptet wird [1]. Es kann aber nach Fries sehr wohl die Reflexion der Möglichkeit des Irrtums unterworfen sein, während der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft objektive Gültigkeit zukommt. Ja, wir können sogar behaupten, daß, da wir von Irrtum überhaupt nur sprechen können, sofern wir das von uns irrig genannte Urteil mit einer als wahr vorausgesetzten Erkenntnis vergleichen, die Möglichkeit des Irrtums selbst bereits die Voraussetzung der Wahrheit derjenigen Erkenntnis einschließe, mit der wir letztlich das fragliche Urteil vergleichen. Diese ist aber gerade die unmittelbare Erkenntnis. Denn über sie können wir, sofern sie unmittelbare Erkenntnis ist, niemals hinauskommen, alle Begründung in unserer Erkenntnis muß zuletzt auf sie und kann nicht weiter als auf sie zurückgehen. Muß also gleich die psychologische Methode der Kritik der Aufgabe der Begründung der objektiven Gültigkeit des Erkennens (d. h. der Nachweisung der Übereinstimmung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande) gegenüber versagen, so kann sie uns doch sehr wohl zu der subjektiven Begründung unserer Urteile (d. h. zu der Nachweisung der Übereinstimmung der mittelbaren mit der unmittelbaren Erkenntnis) dienen. Wenn also Elsenhans daraus, daß die psychologische Methode der „erkenntnistheoretischen Hauptfrage“ gegenüber versagt, folgert: „sie scheine wohl der Aufgabe einer Auffindung der reinen Begriffe a priori, der quaestio facti gewachsen zu sein,

---

[1] s. o. S. 304.

aber für die Aufgabe einer unbedingten Rechtfertigung derselben, für die quaestio juris nicht auszureichen", so hat er die Frage nach der Übereinstimmung der Erkenntnis mit dem Gegenstande mit der Frage nach der Übereinstimmung der Erkenntnisse untereinander verwechselt. Denn die Rechtfertigung der reinen Begriffe a priori besteht in dem Nachweis ihrer Übereinstimmung mit der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft, welcher Nachweis die transcendentale Deduktion dieser Begriffe heißt. Diese transcendentale Deduktion ist das Geschäft der psychologischen Methode der Kritik. Die psychologische Methode der Kritik ist also nicht allein „der Aufgabe einer Auffindung der reinen Begriffe a priori, der quaestio facti gewachsen", sondern sie „reicht" in der Tat auch „für die quaestio juris aus".

Schlusswort.

Wir kommen zurück auf das, wovon wir ausgingen. Wie steht es mit dem „Kant-Friesischen Problem", jenem „echten, in der Entwicklungsgeschichte der deutschen Philosophie seit Kant unvermeidlichen Problem"? Soviel dürfte aus unseren Darlegungen deutlich geworden sein: daß der Begriff der Kritik, auf Grund seiner Definition, den der Metaphysik ebenso ausschließt, wie der Begriff des Transcendentalen, auf Grund seiner Definition, den des Psychologischen einschließt, und daß das Unternehmen, diesen Sachverhalt zum Gegenstand eines Problems zu machen, allein durch jenes Kantische Mißverständnis des Transcendentalen den Anschein einer ernst zu nehmenden Frage erhalten konnte[1]. Wer sich daher von der Gewohnheit in bloßen Worten zu denken nicht frei machen kann, der mag in der Frage, ob die Kritik metaphysisch oder anthropologisch sein solle, ein echtes philosophisches Problem erblicken, der mag an die Bearbeitung des „Problems“, ob die Kritik psychologisch oder transcendental sei, seine Zeit wenden. Wer aber imstande ist, den Worten klare und bestimmte Begriffe unterzulegen, der wird in solchen Fragen nicht den echten Geist der Philosophie, sondern nur die Sprache der Gedankenlosigkeit vernehmen. Ob aber Leute, für die die Worte eine unübersteigliche Schranke des philosophischen Gedankens bilden, berufen sind, als Kritiker der Friesschen Philosophie aufzutreten, diese Frage sollte unter einem wissenschaftlich gebildeten Publikum keiner ernsthaften Diskussion mehr bedürfen.

---

[1] Wie es ja überhaupt eine bei Dilettanten beliebte Pietätlosigkeit ist, die Fehler großer Männer gegen ihre Verdienste (die ihrem Verständnis weniger leicht erreichbar sind) auszuspielen. Vielleicht durch keine seiner Entdeckungen hat Helmholtz größere Popularität erlangt als durch sein Mißverständnis der transcendentalen Ästhetik.

Druckfehler:

Seite 242 Anmerkung 2 statt a. a. O. lies: H. Cohen, Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. 1885.

VI.

Über kritische Mathematik bei Platon.

Ein Beitrag zur Ideenlehre.

Von

Carl Brinkmann.

Der alte Streit über die Platonische Ideenlehre, den Aristoteles durch den berühmten Vorwurf der Begriffshypostasierung mit der Akademie eröffnete, erscheint noch heute ungeschlichtet. Eine ernste Forschung wenigstens hat sich wohl immer dagegen gesträubt, zu Gunsten einer unklar mystischen Auffassung des Platon das unbequeme Urteil des großen Empiristen als oberflächliches Mißverständnis bei Seite zu legen.

Die Behandlung, die Jakob Friedrich Fries in seiner Geschichte der Philosophie (2 Bde. Halle 1837 und 1840) der Frage gewidmet hat, ist natürlich für ihre heutige Diskussion bisher ungenutzt geblieben. Doch ist sie m. E. geeignet, über alle Probleme hinaus zu einem vollen Verständnis der Ideenlehre zu führen. Sie ruht auf einer vergleichenden Darstellung der ganzen Platonischen Erkenntnistheorie. Die darin gegebenen Anregungen wenigstens in einer wichtigen Richtung der modernen Wissenschaft nahezubringen, ist der Zweck meiner Arbeit.

Den methodologischen Geist, der mich in dieser historischen Untersuchung leitet, werden Friesens Worte (G. d. Ph. Vorr. IX) am besten ausdrücken:

„Ich behaupte also im allgemeinen erstens, niemand, der die Philosophie selbst nicht kennt, kann die Geschichte der Philosophie verstehen. Jeder kann nur in Vergleichung mit seiner Ansicht von der Philosophie die Geschichte der Philosophie auffassen. — Zweitens, noch mehr setzt die Schilderung des Entwickelungsganges in der Geschichte der Philosophie eine eigene Ansicht voraus, nach der gemessen wird. Drittens, niemals aber sollte der frühere Lehrer so angesehen werden, als ob er schon mit unserer Dialektik gedacht hätte; wir dürfen seine Lehre nicht nach unserem System aufstellen und am wenigsten mit unsern Konsequenzen ausführen".

Die ersten Ahnungen einer apriorischen Erkenntnis in der griechischen Philosophie, die pythagoreische Zahl und das eleatische Sein, waren in der Fortbildung der primitiven mythischen Naturphilosophie die ersten Schritte mathematischer Abstraktion. Das ist bedeutsam geblieben bis auf Platons Zeit: *Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην* — die Mathematik auf der Schwelle zur Metaphysik. Hinüber führten nicht alle Wege. Während die eleatische Dialektik den Antinomien auf die Spur geriet, krönte Demokritos sein materialistisches System mit der Erhebung des atomerfüllten Raumes (*κενόν*) zum *ἐτεῇ ὄν*[1]. Es wird somit für Platons Ideenlehre von der größten Wichtigkeit sein, welche Stelle er der mathematischen Erkenntnis zuwies. Seine Lehre zeigt in diesem Punkte eine merkwürdige Zwiespältigkeit. Auf der einen Seite trägt ihn der Schwung seines Idealismus auch ohne die Hülfsmittel der Zenonischen Antinomik[2] bis an die entscheidende Verwerfung des Ansichseins von Raum und Zeit. Auf

[1] Daß er damit, wie H. Cohen (Platons Ideenlehre und die Mathematik, Marburg 1879 S. 2) behauptet, „den eleatischen Gedanken vom Sein zu einer idealistischen Umbildung brachte", hat schon Zeller (Philosophie der Griechen II 1⁴, Leipzig 1889 S. 675 Anm. 1) treffend bestritten: „es besagt nur, daß nach Abzug unserer subjektiven Auffassung die Atome und das Leere als die alleinigen objektiven Bestandteile der Dinge übrig bleiben".

[2] Diese führt im Parmenides wegen der Vieldeutigkeit des Einheitsbegriffs und der sophistischen Dialektik nicht einmal zum klaren Ausspruch von Thesen und Antithesen; vgl. Otto Apelt, Untersuchungen über den Parmenides, Weimar 1879, S. 28 ff. und 44 ff.

der anderen hat gerade sein Idealismus eine zu starke Pythagoreische Färbung, als daß er es vermeiden könnte, in seiner Stufenleiter der Erkenntniswerte die notwendige mathematische Wahrheit der zufälligen sinnlichen überzuordnen und mit seiner metaphysischen zusammenzustellen.

Was griechische Philosophie von den Anfängen ihrer wissenschaftlichen Ausbildung bis auf Platon suchte, war das wahrhafte Sein (ὄντως ὄν). Die Benennung dieses Begriffs zeigt schon seine Entstehung aus der Entgegensetzung gegen die naiv so genannte Wirklichkeit sinnesanschaulicher Erkenntnis. Betrachtet man aus diesem einfachen Gedanken Platons Lehre von den Ideen als den Gegenständen nichtsinnlicher, vernünftiger Erkenntnis, so erscheint sie den vorplatonischen Philosophemen gegenüber als der erste systematische Versuch zur Entdeckung des Ganzen rationaler Wirklichkeit. In diese eröffneten dem Platon die Erbschaften des Herakleitos und des Sokrates zwei Eingänge. Die Überzeugung vom Fluß der Dinge gab ihm das allgemeinere negative Kriterium bei der Auffindung des nur der Vernunft erreichbaren beständigen Seins, die Begriffsphilosophie im allgemeingültigen Denken den Schlüssel zu aller Erkenntnis, die eben nur durch die künstlichen Mittel der Reflexion ins Bewußtsein gehoben werden kann. Dabei mußte sich die Mathematik mit ihrer rationalen, aber unmittelbar klaren und deutlichen Erkenntnisweise dem Herakleitiker von einer anderen, bedeutenderen Seite darstellen als dem Schüler des der Mathematik ebenso wie den Naturwissenschaften abholden Sokrates.

Die uns vorliegende Sammlung der Platonischen Schriften kann heute nicht wohl mehr als gleichmäßiger Ausdruck eines philosophischen Systems, ja nicht einmal als geschlossene und übersehbare Entwickelung eines solchen angesehen werden. Demnach könnte es mißlich scheinen, von einer Platonischen Ideenlehre als Ganzem überhaupt zu reden. Wenn trotzdem ihrer Erörterung aus unklarer Begrenzung des Stoffes bisher keine erheblichen Schwierigkeiten entstanden sind, so erklärt sich das aus einer bemerkenswerten Einigkeit über die Kanonizität der in Betracht kommenden Stellen. Die hier wirkende Tradition ist, wie mich dünkt, durch die neueren philologischen Nachprüfungen im wesentlichen bestätigt worden. Parmenides, Phaidon und Phaidros, die Republik und der Timaios müssen nach wie vor als Hauptwerke um die Ideenlehre, die eigentliche Platonische Philosophie, befragt werden. Darunter aber sind hier, wo das ganze erkenntnistheoretische System aus einem Punkte beleuchtet werden soll, die beiden letzten, vollendetsten, zusammenfassenden Dialoge noch ganz besonders wichtig. So soll hier zunächst eine auch neuerdings[1] in gleicher Absicht teilweis herangezogene Auseinandersetzung der Politeia (St. p. 522 E—527 C) erläutern, wie Platon mit einer Herakleitischen Kritik der Sinneswahrnehmung unter den ersten Vernunfterkenntnissen gleich auf mathematische stößt. Ich übersetze Platons Worte nach dem Text der Cambridge-Ausgabe von 1902 (The Republic of Plato edited by James Adam) wie folgt[2]:

„Also müssen wir, fragte ich, von einem Krieger noch eine andere Kenntnis fordern, nämlich, daß er rechnen und zählen kann? — Zu allererst, versetzte er, wenn er auch nur irgend etwas von der Taktik verstehen, ja wenn er überhaupt ein Mensch sein soll. — Sind wir also über diese Wissenschaft einer Meinung? — Was meinst du denn? — Es ist am Ende ihrer Natur nach eine von den gesuchten, die auf die Vernunft weisen, und wird

---

[1] Von H. Cohen a. a. O. [2] Der Zweck meiner Übersetzung ist weniger Verdeutschung als Verdeutlichung.

nur von keinem Menschen richtig, als zum Sein führend, angewandt? — Wie meinst du das? sprach er. — Ich will versuchen, sagte ich, dir meine Ansicht auseinanderzusetzen. Laß uns nachsehen, was ich unterschiedlich als Wege zu unserem Ziel auffasse und was nicht, und dann stimme bei oder lehne ab, damit wir auch hierin deutlicher sehen, ob es so ist, wie ich verkünde. — Zeig' es mir, sprach er. — So zeige ich dir, sagte ich, wenn du genau hinsiehst, daß bei den Sinneswahrnehmungen einige Erkenntnisse die Vernunft nicht zur Prüfung reizen, weil die Sinnesanschauung sie hinreichend beurteilt, andere hingegen durchaus die Vernunft zur Aufsicht herausfordern, weil die Sinnesanschauung nichts Rechtschaffenes ausrichtet. — Aha, sagte er, du sprichst von den fernen Erscheinungen und den Schattenbildern. — Nicht ganz, erwiderte ich, hast du es getroffen. — Ja wovon redest du denn? sagte er. — Nicht zur Überlegung anreizende Erkenntnisse, versetzte ich, sind alle, die nicht zugleich zu einer entgegengesetzten Sinnesanschauung fortschreiten; die das tun, nenne ich zur Überlegung anreizend, da die Sinnesanschauung ebensogut das éine Objekt wie seinen Gegensatz zeigt, ganz gleichgültig, ob sie aus der Nähe oder aus der Ferne kommen. Besser noch wirst du meine Meinung so verstehen. Dies, sagen wir, werden wohl drei Finger sein, der kleine, der zweite und der Mittelfinger. — Ja, sagte er. — Denke also daran, daß ich sie bei meiner Untersuchung aus der Nähe betrachte; hilf mir aber bei ihnen folgendes suchen. — Was? — Jeder von ihnen erscheint gleichmäßig als Finger und zeichnet sich darin nicht aus, ob er in der Mitte oder am Ende steht, weiß oder schwarz, dick oder dünn und lauter dergleichen ist. Denn bei allen diesen Beschaffenheiten wird die Seele der meisten Menschen nicht genötigt, die Vernunft zu befragen, was denn eigentlich ein Finger sei; denn nirgends hat ihr das Gesicht zugleich mitgeteilt, daß ein Finger der Gegensatz zu einem anderen sei. — Nein, sagte er. — So eine Erkenntnis, entgegnete ich, wird also wohl natürlich nicht die Vernunft reizen und wecken. — Natürlich, sagte er. — Wie aber? Ihre Größe und Kleinheit nimmt wohl das Gesicht hinreichend wahr, ohne daß es etwas verschlägt, ob einer von ihnen in der Mitte oder am Ende steht, und ebenso der Tastsinn Dicke und Dünne oder Weichheit und Härte? Und auch die anderen Sinne teilen wohl solche Erkenntnisse hinreichend mit? Oder macht jeder es so: Zunächst ist der Sinn für Härte notwendig auch der für Weichheit und meldet der Seele in der Wahrnehmung einen und denselben Gegenstand als hart und weich? — Freilich, sagte er. — Muß also nicht, sprach ich, die Seele bei solchen Vorgängen in Verlegenheit geraten, was denn eigentlich das Harte ist, das diese Wahrnehmung anzeigt, wenn sie dasselbe auch weich nennt, und was das Leichte und Schwere ist, das die Wahrnehmung von Leichtem und Schwerem meldet, wenn sie das Schwere als leicht und das Leichte als schwer bezeichnet? — Allerdings, sagte er, sind diese Sinne für die Seele wunderliche und aufsichtsbedürftige Boten. — Natürlich, fuhr ich fort, sucht die Seele zunächst Verstand und Vernunft zur Prüfung herbeizurufen, ob jedes Paar von Meldungen eine Einheit oder eine Zweiheit sei. — Natürlich. — Wenn nun zwei herauskommen, erscheint dann nicht jede als eine andere und als eine? — Wirklich. — Wenn nun jede eine ist, beide aber zwei, so sind die beiden vor der Vernunft getrennt; denn wären sie ungetrennt, so würde sie nicht zwei, sondern eine bemerken. — Richtig. — Auch das Gesicht, behaupten wir, sah Großes und Kleines, aber nicht getrennt, sondern ein Gemenge. Nicht wahr? — Allerdings. — Um nun Klarheit darüber zu erlangen, wurde die Vernunft genötigt, auch ihrerseits Großes und

Kleines zu sehen, aber im Gegensatz zum Gesicht nicht vermengt, sondern getrennt. — Wahr. — Stößt uns nun nicht zuerst hier von ungefähr die Frage auf, was denn eigentlich groß und klein sind? — Ganz recht. — Und so haben wir das eine vernünftige, das andere sinnesanschauliche Erkenntnis genannt. — Sehr zutreffend. — Das also war es, was ich eben sagen wollte, daß einige Erkenntnisse die Vernunft wecken, andere nicht, wobei ich die Erkenntnisse, die zugleich mit ihren Gegensätzen in die Wahrnehmung fallen, als Wecker, die das nicht thun, als Nichtwecker der Vernunft bestimme. — Nun verstehe ich schon, sagte er, und es scheint mir in der Tat so zu sein. — Wie also? Zu welcher von beiden Klassen scheinen dir Zahl und Einheit zu gehören? — Ich weiß nicht, sagte er. — So erschließe es, sprach ich, aus dem vorher Gesagten. Denn wenn die Einheit für sich hinreichend gesehen oder mit irgend einem anderen Sinne erkannt wird, so wird sie wohl nicht zum Sein führen, wie wir beim Finger sagten; wenn aber immer noch ein Gegensatz mit ihr zugleich gesehen wird, sodaß ebensogut wie die Einheit ihr Gegensatz erscheint, so wird wohl die Seele schon der Nachprüferin bedürfen, wird in diesem Falle verwirrt werden und in sich das Denken in Bewegung setzen und suchen und fragen, was denn eigentlich die Einheit selbst sei, und so wird die Wissenschaft von der Einheit unter die gehören, die zur Anschauung des Seienden führen und umlenken. — Ja wirklich, sagte er, so steht es vorzüglich mit der Sinnesanschauung der Einheit; denn wir sehen ja ein und dasselbe Ding zugleich als Einheit und als unendliche Vielheit. — Wenn nun die Einheit diese Eigenschaft hat, fuhr ich fort, so hat sie auch jede Zahl. — Natürlich. — Und die Rechenkunst und Zahlentheorie beschäftigen sich doch nur mit Zahlen? — Gewiß. — So zeigen sie sich als Führer zur Wahrheit. — Ganz richtig. —

Wie es scheint, werden sie dann wohl zu den gesuchten Kenntnissen gehören, denn der Krieger muß sie sich der Taktik wegen aneignen, der Philosoph aber deshalb, weil er die Sinnlichkeit abstreifen und sich an das Sein halten muß, wenn er jemals ein Denker werden will. — So ist es, sagte er. — Und unser Wächter ist doch eben Krieger und Philosoph. — Freilich. — Also wird es wohl gut sein, die Kenntnis gesetzlich zu fordern und die künftigen Inhaber der höchsten Staatsämter anzuweisen, daß sie sich der Rechenkunst zuwenden und sich mit ihr beschäftigen, nicht in der gewöhnlichen Weise, sondern bis sie mit der Vernunft selbst zur Anschauung der Natur der Zahlen gelangen, nicht zu Kauf und Verkauf wie Handelsleute oder Krämer, sondern um des Krieges willen und einer leichten Umkehr der Seele selbst von der Sinnlichkeit zur Wahrheit und zum Sein. Und jetzt sehe ich auch wahrhaftig, schloß ich, wie schön und vielfach nützlich uns die Rechenkunst für unsere Zwecke ist, wenn man sie der Erkenntnis und nicht des Geschäfts halber betreibt. — Wie denn? fragte er. — Die Wissenschaft, von der wir jetzt reden, führt gleichsam mit Macht die Seele aufwärts und zwingt sie, sich über die reinen Zahlen zu verständigen, sodaß sie es sich gar nicht gefallen läßt, wenn einer mit ihr streiten will und dabei an sichtbare oder fühlbare Körper gebundene Zahlen verwendet. Denn du weißt wohl, daß die dieser Wissenschaft Mächtigen es lächerlich finden und ablehnen, wenn man die Einheit selbst in seiner Rede zu teilen versucht, und daß sie sie multiplizieren, wenn du sie dividierst, aus Angst, die Einheit könnte am Ende nicht als Einheit, sondern als vielteilig erscheinen. — Sehr wahr, sagte er. — Was glaubst du also, Glaukon, wenn man sie fragte: Ihr wunderlichen Leute, von was für Zahlen redet ihr, bei denen die Einheit eure Anforderungen erfüllt, jedes Ganze dem anderen gleich und auch kein bischen von ihm verschieden ist und keinen Teil in sich enthält? Was, glaubst du wohl, würden sie antworten? — Dies, glaube ich, daß sie von Dingen redeten, die man nur rein anschaulich [1], anders gar nicht erfassen könne. — Siehst du also, Freund, sprach ich, daß diese Wissenschaft uns am Ende wirklich nötig ist, da es sich herausstellt, daß sie die Seele zwingt, die Vernunft selbst zur Erkenntnis der Wahrheit selbst zu gebrauchen? — Ganz gewiß, sagte er, thut sie das. — Weiter: Hast du schon bemerkt, daß die geborenen Rechner für alle Wissenschaften sozusagen von Natur geschärft sind, die Menschen mit langsamem Verstand aber, wenn sie in der Rechenkunst sich unterweisen lassen und üben, selbst falls sie keinen anderen Nutzen davon haben, gleichwohl alle in der Richtung größerer Geistesschärfe fortschreiten? — So ist es, sagte er, — Und wirklich wird man meines Erachtens wohl schwerlich viele Wissenschaften finden, die beim Lernen und Üben größere Mühe machen als diese. — Ja. — Aus allen diesen Gründen darf diese Wissenschaft nicht außer Acht gelassen werden, sondern die Naturen der Besten müssen darin ausgebildet werden. — Da stimme ich zu, sagte er. — Das also, sprach ich, soll uns eine grundlegende Wissenschaft sein, nun wollen wir sehen, ob die zweite, sich daran anschließende Wissenschaft uns angeht. — Welche? Oder meinst du, fragte er, die Geometrie? — Eben die, antwortete ich. — Alles, was sich davon auf die Kriegskunst erstreckt, geht uns offenbar an; denn wo es sich um Einrichtung von Lagern, Eroberung von Plätzen,

[1] Diese Übertragung von *διανοηθῆναι* soll (auch wo ich sie später brauche) nicht mehr sein als ein Hinweis auf die historische Bedeutsamkeit von Platons kritischer Mathematik. Ich bin mir wohl bewußt, daß Platon unter *διάνοια* = mathematischer Erkenntnisweise neben der reinen Anschauung immer auch und zuweilen (wo ich dann auch anders übersetze) ausschließlich das syllogistische Denkverfahren der Mathematik versteht.

Zusammenziehung oder Ausbreitung von Truppen handelt, und wie man sonst noch in Schlachten oder auf Märschen die Heere gestaltet, wird wohl ein Unterschied sein zwischen einem Geometer und einem Nichtgeometer. — Nun, für solche Dinge, versetzte ich, genügte doch ein kurzes Stück von Geometrie und Rechenkunst; wenn sie sich aber irgend darauf ausdehnen soll, die Idee des Guten deutlicher zu zeigen, so muß man ihr Hauptstück und ihre tieferen Gründe erforschen. Darauf aber, behaupten wir, bezieht sich alles, was die Seele zur Umkehr zwingt nach dem Orte des glücklichsten Wesens, das sie durchaus erblicken *soll*. — Richtig, sagte er. — Also, wenn sie uns nötigt, das Sein anzuschauen, geht sie uns an, wenn das Irdische, dann nicht. — Ja, das ist unsere Behauptung. — Das bestreitet uns doch wohl niemand, fuhr ich fort, der nur ein wenig Geometrie versteht, daß diese Wissenschaft ganz im Gegensatz steht zu den Reden, die ihre Jünger in ihr führen. — Wie? fragte er. — Sie reden doch recht lächerlich und gezwungen; wie Praktiker und um der Praxis willen wählen sie ihre Ausdrücke und sagen: Sie quadrieren, legen an, addieren, und so fort; und die ganze Wissenschaft wird doch um der Erkenntnis willen betrieben. — Gewiß, sagte er. — Muß man sich darüber nicht noch ganz verständigen? — Worüber? — Daß sie um der Erkenntnis des Ewigen willen betrieben wird, nicht um der des Werdenden und Vergehenden willen. — Das ist allgemein zugegeben, sagte er; die Erkenntnis der Geometrie ist doch eine Erkenntnis von Ewigem. — Dann wird sie also wohl, Bester, die Seele zur Wahrheit führen und philosophische Überlegung bewirken zum Zwecke, daß wir aufwärts wenden, was wir jetzt ungebührlich abwärts richten. — So viel wie möglich, sagte er. — Dann muß man sie also möglichst energisch einführen, auf daß die Bürger deiner Musterstadt durchaus nicht der Geometrie fernbleiben. Auch die

Nebenerfolge werden nämlich nicht gering sein. — Welche? fragte er. — Du nanntest sie schon, versetzte ich, die für den Krieg, und auch in der größeren Empfänglichkeit für alle Wissenschaften, das ist uns doch bekannt, wird ein himmelweiter Unterschied liegen zwischen dem in Geometrie Bewanderten und dem, der es nicht ist. — Das will ich glauben, sagte er. — So wollen wir sie denn als Fach in den Jugendunterricht setzen? — Das wollen wir. —"

Was den Wert einer Wissenschaft ausmacht, ist, daß und in welchem Grade sie zu dem der *αἴσθησις* unerreichbaren *ἀεὶ ὄν* führt, also mit *λογισμός* und *νόησις* zu tun hat. Die Erkenntnisweise der Mathematik gehört ganz der Vernunft und dem Denken. Niemand hat mathematische Größen je sinnlich wahrgenommen. Die Wahrheiten der Mathematik sind auch nicht Erzeugnisse der *πρᾶξις* (527 A), der willkürlichen Festsetzung. Diese Einsicht ist heute um so bewundernswerter, als sie gerade von moderner kritischer Mathematik nicht immer beherzigt wird. Ihre Quelle ist ohne Zweifel ein dunkles Bewußtsein der eigentümlich mathematischen, der reinen Anschauung des Raumes und der Zeit. Das beweist die Induktion, durch die Platon in einem Ausschnitt aus dem Ganzen menschlicher Erkenntnis den noetischen und logistischen Teil von der Sinneswahrnehmung zu sondern und für sich herauszuschälen versucht: Was kann über die Finger der Hand bloß sinnesanschaulich ausgemacht werden, und wobei muß die *νόησις* die Epikrise des Denkens übernehmen? Das Ergebnis ist: Jede Einzelwahrnehmung fällt in die erste, jede Verbindung einer solchen mit einem *ἐναντίον*, also von mehreren, in die zweite Klasse der Erkenntnis. Eine Verbindung von Wahrnehmungen aber vollzieht sich zunächst in der reinen Anschauung, die sie im Raume nebeneinander und in der Zeit nacheinander ordnet, sodaß aus dem *συγκεχυμένον* ein *κεχωρισμένον* wird. Eine andere Verbindung von Erkenntnissen aber macht sich im Denken, in der logischen Vergleichung von Dingen und Begriffen und von Begriffen untereinander mittels der Reflexionsbegriffe der Einerleiheit und der Verschiedenheit, der Einstimmung und des Widerstreits. Auch diese Verbindung hat Platon natürlich im Auge, wenn er die *νόησις* darüber entscheiden läßt, ob zwei entgegengesetzte Prädikate einem Dinge zukommen können oder zwei Dingen zukommen müssen. Daher ist auch die Einheit ein so unglückliches Beispiel für die Unsinnlichkeit der Zahlen; der ganze Wirrwarr metaphysischer, logischer und mathematischer Begriffe, der für den griechischen Philosophen von jeher an diesem viel umstrittenen Wort haftete, stellt sich hier der Ergründung von Platons Mathematik entgegen. Was nützt es, auf den Ausdruck *θέα* (*τῆς τῶν ἀριθμῶν φύσεως*) sich zu berufen, den ja Platon auch auf seine Metaphysik anwendet! Die bloß negative Bestimmung von *λογισμός* und *νόησις* gegen die *αἴσθησις* verwehrt ihm eben schärfere Unterscheidungen innerhalb der nichtsinnlichen Erkenntnis.

Der zweite Eingang in die Ideenlehre ist Platon die Sokratische Begriffsphilosophie. Es wird vorzüglich aus dem ersten Teil des Parmenides deutlich, welche neubegründete Wichtigkeit die durch Sokrates gefundenen allgemeinen Bestimmungen des Denkens für Platon gewinnen. Im Sokratischen *τὸ τί ἐστι* glaubt er das wahre Sein, im *ὅ ἐστι δεσπότης* und *ὅ ἐστι δοῦλος* das Ansich der *αὐτὴ δεσποτεία* und der *αὐτὴ δουλεία* zu entdecken. Den tiefsten Grund für diesen Ursprung der Ideenlehre klärt Fries Gesch. d. Ph. I S. 366 auf. Es ist Platons Verlegenheit um eine richtige Theorie des Urteils. Die Beilegung eines Prädikats scheint ihm einen Widerspruch zu enthalten. Der Satz „Ein Ding ist etwas“ behauptet von diesem Dinge zugleich die Einheit und die Vielheit, die Behauptung des seienden Einzelnen

„Ein Mensch ist“ verträgt sich nicht mit der seienden Zweizahl „Ein Mensch ist ein Herr (oder ein Sklave)“[1]. Platon verwechselt also die Kopula mit dem prägnanten „ist“ des Existenzialsatzes. Die Folgerung für die Seinsphilosophie ist, daß den in Urteilen erkannten Dingen die wahre Existenz abgesprochen wird. Ein kurzer Schritt führt den Sokratiker dazu, sie den im Urteil den Einzeldingen übergeordneten Begriffen und ihren in analytischen Urteilen ausgedrückten allgemeinen und notwendigen Verhältnissen[2] zuzuweisen. So schießt die dialektische Begründung, die in dieser Weise zu der Herakleitischen Verwerfung der Sinnenwelt hinzugebracht wird, gleichsam über ihr Ziel hinaus, indem sie unheilvoller Weise zunächst den mittelbaren und für sich leeren Teil der nichtsinnlichen Erkenntnis, das logische Denken, ergreift, um daran das Sein zu binden, und so dem Aristotelischen Vorwurf der Begriffshypostasierung verfällt.

Es ist gut, den vorwiegend dialektischen Charakter dieser Grundlegung der Ideenlehre zu betonen[3]. Ihr Gewinn ist wie der aller griechischen Dialektik gering im Vergleich mit induktorischen Resultaten wie der vorhin übersetzten Stelle. Demnach ist es nicht wunderbar, daß auch ihre Bedeutung für das Ganze der Ideenlehre nicht die einer bleibenden Richtschnur ist. Bei

[1] Vgl. Timaios St. p. 49 E und 50 A, wo die bestimmte Prädikatsbeilegung, die *τοῦ τόδε καὶ τοῦτο φάσις*, geradezu als Bezeichnung von *μόνιμα ὄντα* angesprochen wird.

[2] Vgl. Phaidon St. p. 103 D. Daß Platon in den Ausführungen Phaidon 96—107 unter der Teilschaft des Dinges an der Idee die Unterordnung des Falles unter das Gesetz verstehe, macht P. Natorp (Platons Ideenlehre, 1903, S. 151) nicht wahrscheinlich. Diese Verwechselung von Logischem und Metaphysischem, die in der Tat Platons Hauptfehler ist, gehört hier m. E. doch mehr dem Erklarer.

[3] H. Cohen a. a. O. S. 14/15 scheint mir ihn nicht genügend zu beachten, wenn er die logische Lehre von der *κοινωνία τῶν γενῶν* zum Ausgangspunkt seiner Interpretation der Ideenlehre macht.

dem Versuch einer folgerechten Durchführung seines Philosophems konnte einem so guten Psychologen wie Platon der Ursprung aller Erfahrungsbegriffe aus der mißachteten Sinnesanschauung nicht verborgen bleiben. Warum hätte er sonst Timaios St. p. 52 die Begriffe der Elemente der idealen Geltung beraubt? Hauptsächlich aber verhinderte ihn sein starkes ethisches Interesse daran, sich bei einer einfachen Gleichsetzung von Logik und Metaphysik zu beruhigen. Die Idee des Guten, die herrschende in seiner Welt des wahren Seins, mußte ihm ebenso die Existenz einer von aller Erfahrung unabhängigen Erkenntnis sicherstellen wie die Erhabenheit dieser Erkenntnis über den niederen Abstraktionen des Denkens beleuchten. So wird sich — bezeichnenderweise wiederum abseits von progressiver logischer Systementwickelung — die Ausgestaltung der Ideenlehre zur eigentlichen Platonischen Metaphysik vollzogen haben[1]. Platon hat den Gegensatz von unmittelbarer und gedachter Erkenntnis nicht durchschaut und deshalb in dem Komplex der nicht sinnlichen Erkenntnis beide nie recht trennen können. Aber er hat mit geradezu divinatorischem Takt, mit wirklicher *θεία θεωρία* (Politeia St. p. 517 E) in dem in Begriffen (*εἴδη*) bloß wiederholenden Denken (*λογισμός*) das Hülfsmittel wenigstens geahnt, durch das allein die unanschauliche Erkenntnis der Vernunft (*νοῦς*) von den Ideen (*ἰδέαι*) ins Bewußtsein (*ἀνάμνησις*) gehoben wird. Natürlich gewinnt in dieser Erkenntnistheorie die Mathematik eine ganz andere Wichtigkeit, als sie für den Sokratiker hatte. Das Postulat

[1] Ein Symptom dieser Wandlung kann man in Politeia St. p. 509 B sehen: *οὐκ οὐσίας ὄντος τοῦ ἀγαθοῦ ἀλλ' ἔτι ἐπέκεινα τῆς οὐσίας πρεσβείᾳ καὶ δυνάμει ὑπερέχοντος*, wo die Idee des Guten von den übrigen, immer als *ὄντα* gekennzeichneten Ideen scharf unterschieden erscheint, wenn man nicht, was ich des *ἀλλ' ἔτι* wegen für besser halte, mit O. Schneider (Versuch einer genetischen Entwicklung des Platonischen *ἀγαθόν*) statt *οὐκ* lieber *οὐ μόνον* liest.

des Reinbegrifflichen steht nun ihrer Beachtung nicht mehr im Wege. Die Vereinigung von Apriorität und Anschaulichkeit in ihrer Erkenntnisweise wird klar erfaßt. Auf dieser Höhe schreibt **Platon** Politeia St. p. 509 D bis 511 D. einen Gipfelpunkt griechischer theoretischer Philosophie. Ich übersetze nach der Cambridge-Ausgabe von 1902:

„Hast du also die beiden Begriffe, die sinnesanschauliche und die vernünftige Erkenntnis? — Ja. — So teile nun, als wenn du eine Linie mit zwei ungleichen Abschnitten hast, jeden Abschnitt wieder nach demselben Verhältnis, den Begriff der sinnesanschaulichen und den der vernünftigen Erkenntnis, und wenn du die Teile nach Gewißheit und Ungewißheit gegeneinander hältst, so hast du unter der sinnesanschaulichen Erkenntnis im einen Bilder. Unter den Bildern verstehe ich aber erstlich die Schatten, dann die Schemen im Wasser und in allen glatten und durchscheinenden festen Körpern, und all' so etwas, du verstehst schon. — Freilich. — Als zweiten Teil nimm die Gegenstände dieser Bilder, die Lebewesen um uns und alle Art Natur- und Menschenwerk. — Ja. — Würdest du wohl auch zugeben, daß die sinnesanschauliche Erkenntnis nach Wahrheit und Nichtwahrheit geteilt sei und daß sich die Bilder zu ihren Gegenständen verhalten wie die ganze sinnliche Erkenntnis[1] zur vernunftgemäßen? — Ganz gewiß. — Jetzt sieh zu, wie der Abschnitt der Vernunfterkenntnis zu teilen sei. — Ja wie? — So, wie in einem Teile die Seele bei der Untersuchung die vorher abgebildeten Gegenstände als Bilder brauchen und von Vorausset-

---

[1] Unter *δοξαστά* mit Adam (II S. 158) auch die schwankenden philosophischen Meinungen zu begreifen, liegt um so weniger Grund vor, als es sich hier um höhere und niedere Erkenntnisarten, nicht um wahre und falsche Weltansichten handelt.

zungen aus nicht rückwärts zu einem Prinzip, sondern vorwärts zu einem Schluß schreiten, im anderen Teile dagegen von einer Voraussetzung aus rückwärts zu einem voraussetzungslosen Prinzip ohne die dort verwandten Bilder mit bloßen Begriffen und durch sie ihr Verfahren lenken muß. — Ich habe, sagte er, noch nicht hinreichend verstanden, was du meinst. — Dann noch einmal, versetzte ich; nach dieser Einleitung wirst du leichter begreifen. Ich bin gewiß, du weißt, daß die, die sich mit Geometrie, Rechenkunst und dergleichen beschäftigen, Ungerade und Gerade und die Figuren und die drei Arten von Winkeln und anderes diesem Verwandtes zu Grunde legen, als wenn sie es kennten, es in Grundsätzen aussprechen und darüber als über jedem einleuchtende Dinge weder sich selbst noch anderen mehr Rechenschaft zu geben für nötig halten, vielmehr davon ausgehen und nach Erledigung des übrigen schließlich folgerecht auf die Erkenntnis hinauskommen, derentwegen sie die Untersuchung unternommen haben. — Gewiß, sagte er, das weiß ich. — Weißt du nicht auch, daß, wenn sie nebenbei die sichtbaren Figuren gebrauchen und von ihnen reden, sie nicht diese meinen, sondern ihre Urbilder, weil sie auf das Viereck selbst und auf eine Diagonale selbst reflektieren, nicht auf die gezeichnete, und bei dem anderen entsprechend, und weil sie ihre Körper und Figuren, wovon es auch Schatten und Bilder im Wasser gibt, wiederum als Bilder gebrauchen, während sie das zu sehen suchen, was man wohl nicht anders als in reiner Anschauung sehen kann? — Richtig, sagte er. — Also diese Art nannte ich Vernunfterkenntnis und behauptete, die Seele müsse bei ihrer Erforschung Grundsätze anwenden und nicht zu einem Prinzip zurückgehen — sie kann ja über die Grundsätze nicht hinauskommen —, und müsse die Dinge als Bilder brauchen, die von den untersten abgebildet würden und ihnen gegenüber als leibhaftig vermeint und geschätzt seien. — Ich verstehe, sagte er, du meinst die Methode der Geometrie und ihrer Schwesterwissenschaften. — Mit dem anderen Teil der Vernunfterkenntnis, mußt du verstehen, bezeichne ich die, die der Verstand erreicht durch die Kraft der Reflexion, indem er die Voraussetzungen nicht zu Prinzipien macht, sondern zu wirklichen Voraussetzungen, gleichsam zu Sprungbrettern und Stützpunkten, damit er bis hin zum Voraussetzungslosen immer auf das Prinzip des Ganzen gehe, sich dessen bemächtige, sich wieder an dem festhalte, was daran hängt, und so ans Ende komme, durchaus ohne Nebenverwendung von Sinnesanschaulichem, vielmehr mit bloßen Begriffen durch bloße Begriffe zu bloßen Begriffen, und mit Begriffen endige. — Ich verstehe nicht recht, sagte er; es sieht mir so aus, als meinst du etwas Wichtiges; du willst doch jedenfalls den Unterschied machen, daß, was durch die reine Verstandeswissenschaft von dem Seienden und Vernünftigen geschaut wird, gewisser sei als die Erkenntnis der sogenannten mathematischen, wo die Voraussetzungen Prinzipien sind und die Forscher in reiner, nicht in sinnlicher Anschauung ihre Objekte sehen, aber, weil sie nicht auf ein Prinzip zurückgehen, sondern von Grundsätzen aus, nach deiner Meinung nicht mit philosophischer[1] Vernunft ihre Gegenstände behandeln, obwohl sie doch vernünftige Erkenntnis sind und ein Prinzip haben. Nach deiner Bezeichnung scheinst du mir also die Erkenntnisweise der Geometer und verwandter Forscher der reinen Anschauung und nicht der philosophischen Vernunft zuzuweisen, da die reine Anschauung etwas zwischen Sinnlichkeit und Vernunft mitten inne sei. — Du hast es ganz gut aufgefaßt, ent-

[1] Diese erweiterte Übersetzung von νοῦς rechtfertigt sich wohl selbst, da Platons Gebrauch des Wortes sich aus der Würdigung der Mathematik als noetischer Wissenschaft hier als prägnant erweist.

gegnete ich. Nun nimm zu den vier Linienteilen diese vier Verfahren der Seele, zu dem obersten das der philosophischen reinen Vernunft, zu dem zweiten das der reinen Anschauung, dem dritten laß das der sinnlichen Wahrnehmung entsprechen, dem vierten bildliche Vorstellung, und ordne sie nach Rang in der Überzeugung, daß sie so viel Gewißheit besitzen, wie ihre Objekte Existenz. — Ich verstehe, sagte er, und stimme bei und mache die Rangordnung nach deinem Geheiß."

Weder die Bedeutung noch auch überhaupt der sachliche Sinn dieser Stelle scheinen mir heutzutage recht verstanden zu sein. Ich fasse sie mit Fries (Gesch. d. Ph. S. 266 ff.) folgendermaßen auf. Die Mathematik hat hier die gebührende Stelle zwischen Sinnesanschauung und Philosophie. Gegenüber der philosophischen ist ihre Methode als progressiv gekennzeichnet. Während die Philosophie nur in Begriffen (εἴδη) abstrahierend von allgemein zugestandenen Sätzen (τῷ ὄντι ὑποθέσεις) zu deren Prinzipien regressiv aufsteigt, schreitet die Mathematik von gewissen, nicht wieder begründeten Grundlagen, den Axiomen[1], aus

[1] Die Hauptschwierigkeit für die modernen Interpretatoren liegt in ihrer Scheu, die ὑποθέσεις der Mathematik geradezu als die Axiome zu verstehen, die unmittelbaren Ergebnisse aus der reinen Anschauung des Raumes und der Zeit: Cohen (a. a. O. S. 28) ignoriert durchaus mißverständlich die feine Platonische Unterscheidung der mathematischen von der philosophischen Methode, hält die mathematischen ὑποθέσεις fälschlich für Hypothesen, „gewisse allgemeine Sätze" (?), in denen „die Mathematik von dem strengen Regress (!) der Beweise ausruht", in denen „für Platon noch die Axiome einbegriffen zu sein scheinen", und bei denen sich zu beruhigen er der Behandlungsweise der Mathematik „zum Vorwurf macht". Ich finde nicht, daß der sonstige Platonische Gebrauch von ὑπόθεσις der hier durch den Sinn der Umgebung geforderten Bedeutung im Wege steht. Entsprechend der ganz allgemeinen Bestimmung als „ἀρχὴ ἀναπόδεικτος" in den Ὅροι St. p. 415 D kommt es ebenso gut Theaitetos 183 B Sophistes 244 C als „Dogma" vor, wie Menon 86 E als bloße mathematische „Voraussetzung", Eutyphron 11 C Phaidon 107 B 100 B 101 D als „stillschweigende Voraussetzung".

vorwärts zu Schlüssen (τελευταί). Die reine Anschauung der räumlichen und zeitlichen Größen, auf die sie sich bei der Aufstellung ihrer Axiome beruft, gewährt ihr auch vor der Philosophie den Vorteil der anschaulichen Darstellung oder Konstruktion ihrer Begriffe. Und fast das Wichtigste: Die Gegenstände der reinen Anschauung, die mathematischen Gebilde, sind zugleich Formen der Gegenstände der Sinnesanschauung, liegen ihren Gestaltungen gewissermaßen als Urbilder zugrunde (510 B τοῖς τότε μιμηθεῖσιν εἰκόσι χρωμένη). Eine einfache Anwendung dieser Entdeckung konnte Platon auf die allgemeine Bedeutung von Raum und Zeit für die sinnesanschauliche Erkenntnis führen und so sein System zum transzendentalen Idealismus vollenden. Platon mochte zunächst wohl geneigt sein, sich der Strenge dieser Folgerung zu entziehen und die Mathematik vor einer allzu engen Verbindung mit der Sinneswahrnehmung zu retten, eine Tendenz, die dann in der Idealzahlenlehre der Akademie ihre Fortsetzung fand[1]. Sehr bezeichnend ist Politeia 529 C bis 530 C die Erörterung über den Erkenntniswert der Astronomie, wo die Weltkörper und ihre Bahnen als bloße Bilder (ποικίλματα) von allenfalls ästhetischer Bedeutung dem eigentlichen Ziel der Forschung, den allein λόγῳ καὶ διανοίᾳ erkannten, durch jene schwankenden Gebilde veranschaulichten mathematischen Größen gegenübergestellt werden. Wie nahe aber Platon der Kantischen Wendung gewesen ist, zeigen die überaus wichtigen Stellen Timaios 37 E ff. und 52 A ff., wo die Zeit (χρόνος) mit ihren beiden Formen der Veränderung (εἴδη κινήσεις), Vergangenheit (τὸ ἦν) und Zukunft (τὸ ἔσται), und der Raum (χώρα) ausdrücklich als die Bedingungen der Sinnenwelt anerkannt und für die ἀΐδιος οὐσία, das ὄντως ὄν,

[1] Vgl. Zeller: Philosophie der Griechen II 1 [4] S. 681 ff.

abgelehnt werden. Natürlich erscheint von dieser, doch unzweifelhaft höchsten Stufe der Ideenlehre aus der Erkenntniswert der Mathematik im Sinne der Platonischen *σαφηνεία* (Politeia St. p. 511 E) sehr gesunken. Die Erkenntnisweise, die in der Politeia (517 B) noch als *τοῦ ἀεὶ ὄντος γνῶσις* geschätzt wurde, muß sich jetzt, vielleicht ohne daß Platon die Identität und damit der Widerstreit bewußt wird, mit der Rolle eines *λογισμός τις νόθος* begnügen, der seinen Gegenstand, obzwar ein *μετ' ἀναισθησίας ἁπτόν*, doch nur zum *μόγις πιστόν* machen könne.

Und so bleibt wohl das letzte Wort in Platons kritischer Mathematik symbolisch für das Verhängnis aller griechischen Naturwissenschaft: Das unausrottbare Mißtrauen in die objektive Gültigkeit der sinnesanschaulichen Erkenntnis rächte sich auch an der für sich antiempiristischen und deshalb unangetasteten Mathematik, sobald ihr eigentümlicher Zusammenhang mit der Sinnenwelt — sei es wie hier durch den Idealismus, sei es durch eigenes Vordringen zur Anwendung — enthüllt zu werden anfing; aus unbefangener Würdigung und Zusammenfassung der sinnesanschaulichen, der mathematischen und der philosophischen Erkenntnis die mathematisch schematisierten Kategorien als Grundgesetze des Naturgeschehens zu entdecken, mußte den Erben des Herakleitos versagt bleiben.

VII.

Über
den Gegenstand der Erkenntnis.

Gegen Heinrich Rickert.

Von

Ernst Blumenthal.

Inhalt.

„Ist Metaphysik Wissenschaft. wie kommt es, daß sie sich nicht wie andere Wissenschaften in allgemeinen und dauernden Beifall setzen kann? Ist sie keine. wie geht es zu. daß sie doch unter dem Scheine einer Wissenschaft unaufhörlich groß tut und den menschlichen Verstand mit niemals erlöschenden aber nie erfüllten Hoffnungen hinhält?“ So sagt Kant in der Einleitung seiner Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können. Metaphysik. d. h. das System der synthetischen Urteile a priori aus bloßen Begriffen, ist möglich. Das ist das Resultat der Kantischen Kritik der reinen Vernunft. — Aber wie kommt es, könnte man fragen, daß man hundert Jahre nach dem Tode des großen Denkers noch immer nicht sagen kann: „Hier ist Metaphysik, die dürft ihr nur lernen, und sie wird euch unwiderstehlich und unveränderlich von ihrer Wahrheit überzeugen“? Hat Kant etwa geirrt, giebt es doch keine wissenschaftliche Metaphysik? Es giebt eine solche, und wir sind sogar in der glücklichen Lage, „ein Buch aufzeigen zu können, so wie man etwa den Euklid vorzeigt, und sagen zu können: das ist Metaphysik“. Dieses Buch ist Ernst Friedrich Apelts „Metaphysik“. Doch es genügt nicht, die Philosophie zu erlernen; wichtiger fast noch ist die Kunst des Philosophierens. In diese aber wird uns niemand besser einweihen als Jakob Friedrich Fries, und zwar am gründlichsten durch seine „Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft". So hätten denn also Fries und Apelt schon die gesamte Arbeit auf dem Gebiete der reinen Philosophie geleistet, und alles, was spätere Philosophen hervorgebracht haben, wäre überflüssig? Wenn wir hier von rein historischen Erzeugnissen absehen, so ist dies in der Tat unsere Behauptung, die es nunmehr zu beweisen gilt. Wählen wir als Beispiel eins der jüngsten Erzeugnisse der modernen Philosophie, Rickerts „Gegenstand der Erkenntnis", ein Buch, welches kürzlich in der zweiten, nicht unbeträchtlich veränderten Auflage erschienen ist. Wir werden also zeigen, daß, wenn wir offensichtliche Fehler, die Rickert begangen hat, verbessern, wenn wir, was bei ihm dunkel ist, aufklären, wenn wir Begriffe, die bei ihm verwirrt sind, unterscheiden, wir auf gar nichts weiter stoßen, als was uns von Fries und Apelt her wohl vertraute Lehren sind.

I.

1. Rickert geht davon aus, daß zum Begriff des Erkennens ein Gegenstand gehört (S. 1). Unter Gegenstand aber versteht er dasjenige, wonach sich die Erkenntnis zu richten habe, um ihren Zweck zu erfüllen, das heißt, um objektiv zu sein (S. 1). Ist dies Rickerts Definition vom Gegenstand der Erkenntnis, und gehört nach Rickert ein solcher Gegenstand zum Begriff des Erkennens, so bleibt ihm noch übrig, aufzuweisen, daß es auch in der Tat so etwas wie Erkenntnis giebt. Wir wollen nun zunächst darlegen, daß es keine wissenschaftliche Aufgabe sein kann, zu entscheiden, ob irgend etwas im Rickertschen Sinne Gegenstand sei oder nicht. Haben wir dies gezeigt, so würde folgen, daß wir auch von dem, was im philosophischen Sprachgebrauch Erkenntnis heißt, nicht sagen können, ob es einen Gegenstand habe oder nicht. Daraus aber würde weiter folgen, daß es für Rickert unmöglich ist, die Auf-

gabe zu erfüllen, die für einen Philosophen, der Begriffe aufstellt, unumgänglich nötig ist, nämlich die Realität seiner Begriffe aufzuzeigen. Denn wenn es unmöglich ist, zu entscheiden, ob etwas einen Gegenstand habe oder nicht, und wenn es andererseits zum Begriff der Erkenntnis gehört, einen solchen zu besitzen, so kann man auch niemals entscheiden, ob etwas Erkenntnis sei oder nicht. Daß es aber in der Tat kein wissenschaftliches Problem ist, zu entscheiden, ob etwas Gegenstand sei oder nicht, dafür diene Folgendes zum Beweis. Um zu zeigen, daß etwas Gegenstand ist, d. h. daß sich die Erkenntnis danach richtet, müßte ich die Erkenntnis damit vergleichen können. Dazu müßte ich aber eine Kenntnis von dem angeblichen Gegenstande haben, die nicht Erkenntnis sein dürfte. Denn wäre sie Erkenntnis, so hätte sie, wie nach Rickert jede Erkenntnis, einen Gegenstand, und ich hätte nun wieder diese Erkenntnis mit ihrem Gegenstande zu vergleichen, was auf einen unendlichen Regreß führt. — Für die Ansicht, daß die Vorstellungen den Gegenstand abbilden sollen, hat Rickert dies Verhältnis sehr wohl bemerkt. (S. 84.) Was er aber vollkommen übersehen hat, ist, daß es hierbei ganz gleichgiltig ist, ob die Erkenntnis in Vorstellungen oder in Urteilen besteht, ob die Erkenntnis den Gegenstand abbildet oder sich in anderer Weise nach ihm richtet. Vor allen Dingen aber müssen wir darauf hinweisen, daß es ganz gleich wäre, ob der Rickertsche Gegenstand der Erkenntnis in einem Sein bestünde, oder in einem transcendenten Sollen. Niemals kann es die Aufgabe einer Wissenschaft werden, die Übereinstimmung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande, mag man diesen nun in einem Sein oder in einem Sollen suchen, nachzuweisen. Ob irgend etwas Gegenstand ist oder nicht, es sei, was es wolle, das heißt, ob sich die Erkenntnis nach ihm richtet oder nicht, das auszumachen ist unmöglich. Da aber nun nach Rickert der Gegenstand zum Begriff des Erkennens gehört, so ist damit gezeigt, daß sein Begriff vom Erkennen fehlerhaft ist.

2. Ganz anders gestaltet sich die Sachlage, wenn wir, nach dem üblichen Sprachgebrauch, unter Gegenstand der Erkenntnis nur das verstehen, was erkannt wird, ohne irgend etwas darüber auszusagen, ob sich die Erkenntnis danach richtet oder nicht. Beweisen können wir allerdings auch dann nicht, daß es einen Gegenstand gibt. Aber sollte daraus folgen, daß ein Gegenstand nicht existiert? Dieser Behauptung würde das Dogma zu Grunde liegen, daß sich alle Wahrheit beweisen lasse, ein Dogma, dessen Unrichtigkeit — ohne sie an dem hier vorliegenden Fall besonders zu erörtern — schon von vornherein daraus einleuchtet, daß doch auch jeder Beweis von irgend welchen in letzter Linie unbeweisbaren Voraussetzungen ausgehen muß. Ob aber vielleicht die Behauptung von der Existenz des Gegenstandes zu solchen unbeweisbaren Wahrheiten gehöre, diese Frage ist nicht durch die dogmatische Behauptung abzutun: „Jedenfalls: die transcendente Existenz der Dinge ist nicht unmittelbar gewiß, sondern, wenn sie angenommen wird, erschlossen.“ (S. 19), oder „das Transcendente muß, wenn es überhaupt angenommen werden soll, erschlossen sein“ (S. 36). — So hat das wirkliche Problem der Transcendenz bei Rickert gar nicht genügenden Berücksichtigung gefunden; denn die Frage: „Giebt es eine vom erkennenden Bewußtsein unabhängige Wirklichkeit, die Gegenstand der Erkenntnis ist“ (S. 10 unten), ist eine andere als die: „Existiert eine vom erkennenden Bewußtsein unabhängige Wirklichkeit“ (S. 3 u. S. 28), solange man mit Rickert unter Gegenstand dasjenige versteht, was der Erkenntnis die Regel der Wahrheit vorschreibt. Die Verneinung der ersten Frage zieht keineswegs, wie Rickert meint, die Verneinung der zweiten nach sich. So täuscht eben

Rickert stets der fehlerhafte Begriff, den er sich vom Erkennen gebildet hat, und auch sein Sollen, nach dem er unsere Erkenntnis sich richten läßt, ist auf seinen, wie gezeigt, fehlerhaften Begriff der Erkenntnis gegründet. So müssen wir sagen, daß Rickert an dem Gegenstand der Erkenntnis in Wahrheit vorbeigegangen ist, und daß das Problem der Transcendenz in keiner Weise gefördert worden ist [1].

Was nun die andere Frage betrifft, die Rickert mit der Frage nach dem Gegenstand der Erkenntnis verquickt hat, nämlich die Frage nach der Regel der Wahrheit für unsere Erkenntnis, so haben wir darüber Folgendes zu sagen. Wenn wir nicht entscheiden können, ob sich unsere Erkenntnis nach dem Gegenstande richtet, so müssen wir allerdings eine andere Regel der Wahrheit für unsere Erkenntnis suchen. Diese Regel kann jedoch, da wir, wie oben gezeigt, Erkenntnis nur mit Erkenntnis vergleichen können, nur wieder in Erkenntnissen bestehen. Wir werden jedoch bei dieser Vergleichung nicht auf einen unendlichen Regreß geführt, weil wir einen Gegenstand im Rickertschen Sinne keineswegs als notwendig zum Begriff der Erkenntnis gehörig betrachten können. Es widerspricht sich also nicht, anzunehmen, daß es Erkenntnis giebt, die einer Regel der Wahrheit entbehren kann, d. h. die unmittelbar gewiß ist. Diese unmittelbare Erkenntnis aber kann sehr wohl Regel der Wahrheit für diejenige Erkenntnis sein, die einer solchen bedarf, d. h. für die mittelbare Erkenntnis. Daß wir in der Tat eine solche unmittelbare Erkenntnis besitzen, das werden wir noch später zu zeigen haben.

---

[1] Eine wirkliche Lösung des Problems findet sich in Fries' Neuer Kritik der Vernunft, § 126—131.

II.

1. Doch sehen wir jetzt von dem Fehler in der Problemstellung ab, und betrachten wir die Methode, mit der die gestellte Frage gelöst werden soll. Rickert will „nur Erkenntnistheorie und nicht Psychologie oder Metaphysik geben“ (Vorrede S. VI). Welches ist aber die Methode der Erkenntnistheorie? „Die Erkenntnistheorie soll voraussetzungslos sein“. „Allerdings nicht absolut voraussetzungslos“, sondern nur „in dem Sinne, daß sie ihre Voraussetzungen so weit wie möglich einschränkt“ (S. 8). Nun, damit ist allerdings wenig gesagt, denn soweit wie möglich schränkt auch jede andere Wissenschaft ihre Voraussetzungen ein. Was uns aber gerade interessiert, ist, wie weit es der Erkenntnistheorie möglich ist, ihre Voraussetzungen einzuschränken. Darüber ist bei Rickert nirgends etwas gesagt. Doch weiter. „Die Erkenntnistheorie versucht an allem zu zweifeln“ (S. 8) und stellt auf diese Weise „die unbezweifelbaren Voraussetzungen, die allem Erkennen zu Grunde liegen, klar“ (S. 9). Was heißt aber „unbezweifelbar“? Unbezweifelbar ist erstens dasjenige, dessen kontradiktorisches Gegenteil einen Widerspruch einschließt. Und in der Tat scheint Rickert „unbezweifelbar“ in diesem Sinne zu meinen. Denn er sagt: „Wir untersuchen, ob die Leugnung dieses Sollens sich durchführen läßt, ohne daß man in Widersprüche kommt und dadurch die Leugnung sich selbst aufhebt. Denn ein anderes Kriterium als dies besitzen wir zur Begründung der Voraussetzungen des Erkennens nicht“ (S. 128, ebenso „Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung“ S. 693), und „an einem transcendenten Sollen überhaupt zu zweifeln, führt also zum logischen Widerspruch“ (S. 129). Nun sind aber ausschließlich die analytischen Urteile von der Beschaffenheit, daß ihre Leugnung einen Widerspruch einschließt. Nach Kantischem Sprachgebrauch ist aber das

System der analytischen Urteile die Logik [1]. Wenn demnach der Satz des Widerspruchs für Rickert das alleinige Kriterium der Wahrheit ist, so wäre seine Erkenntnistheorie ein Teil der Logik oder gar mit dieser identisch. Das muß in der Tat so scheinen, wenn er sagt: „Wir reflektieren nur noch auf das, was wir als den logischen oder erkenntnistheoretischen Sinn, den jedes Urteil hat, bezeichnet haben“ (S. 95). Es können aber analytische Urteile niemals eine neue Erkenntnis geben, sondern sie können nur dazu dienen, eine Erkenntnis, die ich schon habe, zu verdeutlichen. Aus bloßer Logik Philosophie zu machen, ist demnach ein Ding der Unmöglichkeit [2]. Ist aber Erkenntnistheorie mehr als bloße Logik, das heißt, enthält sie synthetische Urteile, so ist es auch nicht möglich, daß der Satz des Widerspruchs das hinreichende Kriterium der Wahrheit für die Erkenntnistheorie sei; denn alle synthetischen Urteile müssen zwar den Gesetzen der Logik gemäß sein, aber sie sind nicht allein durch diese bestimmbar. Wäre also nur das unbezweifelbar, dessen Negierung gegen die Gesetze der Logik verstößt, so gelangte die Erkenntnistheorie niemals über analytische Urteile hinaus, und ein synthetisches Urteil wie „wenn ich Töne höre und darüber urteilen will, so bin ich genötigt zu urteilen, daß ich Töne höre“ (S. 115), wäre nicht

---

[1] Vielleicht versteht Rickert etwas anderes unter Logik. Jedenfalls findet sich eine Begriffsbestimmung der Logik im „Gegenstand der Erkenntnis“ nirgends vor. Wir finden dort nur recht allgemeine Bestimmungen. Nach S. 98 heißt logisch betrachten auf das hin ansehen, was das Urteil meint oder als wahr aussagt, und nach S. 99 betrachtet die Logik die Urteile unter dem Gesichtspunkte ihres logischen Sinnes oder ihrer Wahrheit. Wie dem auch sei, an den von uns dargelegten tatsächlichen Verhältnissen vermag eine abweichende Nomenklatur nichts zu ändern.

[2] Ganz ausführlich ist das Verhältnis der Logik zur Philosophie, das hier nur angedeutet werden konnte, von Kant dargestellt worden in der Kritik der reinen Vernunft, Kehrbachsche Ausgabe S. 81 ff.

unbezweifelbar. Und doch sagt Rickert (S. 116), dieser Satz sei in der Tat unbezweifelbar.

So muß denn wohl das Wort „unbezweifelbar“ bei Rickert noch einen andern Sinn haben. Uns scheinen nun allerdings auch gewisse synthetische Urteile unbezweifelbar zu sein, nämlich alle empirischen, mathematischen und philosophischen Grundurteile. Es fragt sich aber, wie wir den Bestand dieser unbezweifelbaren synthetischen Urteile festzustellen vermögen. Sehen wir bei jedem uns vorliegenden Urteil zu, ob es möglich ist, an ihm zu zweifeln, ohne mit der unmittelbaren Erkenntnis, die ihm zu Grunde liegt, in Widerstreit zu geraten, so bürgt uns nichts dafür, daß wir auch wirklich in den vollständigen Besitz dieser unbezweifelbaren Urteile gelangen, sofern wir dabei nicht methodisch vorgehen. Nur eine einzige Methode, die regressive, welche die psychologische Kritik anwendet, leistet uns dies. Mit dieser regressiven Methode, die in Fries' Neuer Kritik der Vernunft vollständig durchgeführt worden ist, werden wir uns später noch zu beschäftigen haben. Sie scheint allerdings Rickert gänzlich unbekannt geblieben zu sein.

2. Überhaupt ist Rickerts Verhältnis zur Psychologie keineswegs klar. In der Vorrede (S. VI) sagt er, er wolle „nur Erkenntnistheorie, und nicht Psychologie oder Metaphysik geben“, und auf S. 88: „Doch die Erkenntnistheorie oder die Wissenschaftslehre ist nicht identisch mit der Psychologie des Erkennens“. Weiter heißt es (S. 107): „Wir brauchen ferner auch nicht noch ausdrücklich zu zeigen, daß diese Wahrheit wiederum unabhängig von allen psychologischen Theorien gilt“, und auf derselben Seite: „Wir haben damit unser Ergebnis nicht nur von jeder psychologischen Theorie, sondern auch von allen Voraussetzungen über ein transcendentes Sein unabhängig gemacht.“ Trotzdem aber soll

„in gewisser Hinsicht das Tatsachenmaterial der Erkenntnistheorie wirklich zum Teil dasselbe sein, wie das der Psychologie, und nur der Gesichtspunkt, unter dem es angesehen wird, soll ein anderer sein“ (S. 69), und es „bestehen zwischen dieser quaestio iuris der Erkenntnistheorie und der quaestio facti der Psychologie Beziehungen, denn auch die Behandlung der Rechtsfrage nach den notwendigen Bestandteilen jedes auf Wahrheit ausgehenden Denkaktes kann nur an der Hand von vorher festgestellten Tatsachen sich auf das besinnen, was gilt. Sieht man die Feststellung solcher Tatsachen als Aufgabe der Psychologie an, so muß auch die Behandlung der Frage nach dem erkenntnistheoretischen Wesen des Urteils mit psychologischen Feststellungen beginnen“ (S. 89). Wie ist es denn dabei möglich, daß die Erkenntnistheorie von aller Psychologie unabhängig ist? Welches ist denn der andere Gesichtspunkt, von dem aus die Erkenntnistheorie die psychologischen Tatsachen betrachtet, so daß die Erkenntnistheorie der Psychologie nicht zugezählt werden darf? „Die Erkenntnistheorie“, sagt Rickert (S. 88), „hat die Geltung der Erkenntnis zum Problem, und sucht nach dem Begriff des Erkennens, der die Objektivität verständlich macht“. Auch hier sind wieder zwei Probleme vermengt. Erstens soll die Erkenntnistheorie den Begriff der Erkenntnis suchen, der die Objektivität verständlich macht. Erkenntnis ist eine Tätigkeit, deren ich mir durch innere Erfahrung bewußt werde. Es gehört aber im allgemeinen zu einer Wissenschaft, die Begriffe, mit denen sie arbeitet, zu definieren. Welches ist der Grund, daß hier nicht die Psychologie, die Wissenschaft, die sich mit den inneren Tätigkeiten beschäftigt, sondern eine andere, nach Rickert davon scharf zu unterscheidende, nämlich die Erkenntnistheorie, die Definition der Erkenntnis zur Aufgabe hat? Denjenigen Begriff aber der Erkenntnis zu suchen, der die

Objektivität verständlich macht, ist eine Aufgabe, die dieser andern ähnlich ist: denjenigen Begriff des Dreiecks zu suchen, der den pythagoräischen Lehrsatz verständlich macht. Daß dies keine wissenschaftliche Aufgabe ist, sieht jeder ein, der weiß, daß die Definition die zur eindeutigen Bestimmung des Gegenstandes notwendigen und hinreichenden Merkmale, und nur diese aufzuzählen hat. Gegen diese Regel des Definierens wird jedoch verstoßen, wenn verlangt wird, eine Definition zu geben, die eine beliebige Eigenschaft der unter den definierten Begriff fallenden Gegenstände verständlich mache. — Zweitens soll die Erkenntnistheorie die Geltung der Erkenntnis zum Problem haben. Dies ist aber ein von der Definition der Erkenntnis ganz verschiedenes Problem. Was diese zweite Frage anbelangt, so soll das Verhältnis der Psychologie zur Erkenntnistheorie folgendes sein (S. 88): „Die Psychologie kann nur fragen, wie das Urteilen tatsächlich beschaffen ist, und aus welchen psychischen Bestandteilen es sich zusammensetzt. Sie interessiert sich nur für das Sein der Urteile. Die Wissenschaftslehre dagegen, welche den Begriff des Erkennens untersucht und feststellen will, worin die Wahrheit der Erkenntnis besteht, hat die Bedeutung dessen kennen zu lernen, was das Urteil meint, und sie fragt daher allein nach dem Sinn, den jedes Urteil haben muß, insofern es den Anspruch erhebt, wahr zu sein. Kurz, sie betrachtet das Urteil nicht mit Rücksicht auf das, was es ist, als vielmehr mit Rücksicht auf das, was es leistet, und woraus es bestehen muß, um diese Leistung vollbringen zu können“. Aber hier hätte gesagt werden müssen, durch welche Methode die Erkenntnistheorie zu entscheiden vermag, welchen Sinn das Urteil haben muß, insofern es den Anspruch erhebt, wahr zu sein. Daß die Logik, im alten, Kantischen Sinne, dies nicht leisten kann, meinen wir deutlich gezeigt zu haben. Versteht aber Rickert unter Logik etwas anderes als Kant, so hätte er seine neue Logik definieren und auch hier vor allem angeben sollen, welche Methode denn seine Logik anwendet. Es genügt durchaus nicht, zu sagen: „Logik betrachtet die Urteile unter dem Gesichtspunkte ihrer Wahrheit“ (S. 99). Welches ist die Methode, die dies möglich macht? — „Nichts unbewiesen hinzunehmen“ (S. 132)? Das ist keiner Wissenschaft möglich. Denn beweisen heißt doch nichts anderes als auf letzte unbeweisbare Grundsätze zurückführen. Sollen aber diese letzten Grundsätze wegen ihrer Unbeweisbarkeit nicht gelten, so sind auch alle Beweise, die sich auf diese Grundsätze stützen, hinfällig, und das Gebäude dieser versuchten Wissenschaft stürzt in sich zusammen. Was endlich berechtigt Rickert, zu sagen, die Psychologie interessiere nur das Sein der Urteile? Unsere, von Fries ausgebildete Methode ist von jeher von ihren Gegnern mit Verachtung, von uns mit Stolz als psychologisch bezeichnet worden. Und doch interessiert sich diese Methode in hohem Maße für die Gültigkeit der Urteile, und es ist ihre vornehmste Aufgabe, mit Hülfe der transcendentalen Deduktion die quaestio iuris der philosophischen Grundsätze zu entscheiden. So klar es nämlich auch ist, daß über die Gültigkeit der unmittelbaren Erkenntnis, das heißt über das Verhältnis der Erkenntnis zum Gegenstande, die Psychologie nichts entscheiden kann, da, wie wir bewiesen haben, dies Verhältnis überhaupt keiner wissenschaftlichen Prüfung unterworfen werden kann, so leicht läßt es sich doch zeigen, daß die danach allein übrig bleibende Aufgabe einer wissenschaftlichen Erkenntnistheorie, nämlich die Ermittelung jener unmittelbaren Erkenntnis, nur auf psychologischem Wege lösbar ist. Grundsätze nämlich können ihren Grund nicht wieder in anderen Urteilen haben; denn sonst wären sie keine Grundsätze. Sie haben aber ihren Grund in der unmittelbaren Erkenntnis der Vernunft. So kann also der Rechtsnachweis der philosophischen Grundsätze nur darin bestehen, daß wir uns unserer unmittelbaren Erkenntnis, die an sich nicht klar ist, vollkommen bewußt werden. Wir entscheiden die quaestio iuris der Grundsätze durch die quaestio facti der unmittelbaren Erkenntnis. Diese letztere Frage aber kann nur psychologisch entschieden werden, da die unmittelbare Erkenntnis als Erkenntnis eine innere Tätigkeit ist und als solche in das Gebiet der inneren Erfahrung fällt.

III.

1. Aber diese Mißachtung der Psychologie ist nicht ohne bedeutende Folgen für die weiteren Ausführungen des „Gegenstandes der Erkenntnis" geblieben. Hätte Rickert sorgfältige psychologische Selbstbeobachtungen angestellt, so hätte er niemals behaupten können: „Jede Erkenntnis beginnt mit Urteilen, schreitet in Urteilen fort und kann nur in Urteilen bestehen" (S. 103), oder „Jede Erkenntnis muß die Form eines Urteils haben" (S. 86), oder „Alles Erkennen bewegt sich in voll entwickelten Urteilen" (S. 106). Nein, Erkenntnis besteht durchaus nicht ausschließlich in Urteilen. Rickert selber sagt (S. 90): „Das bloße Hören von Tönen und ein Urteil über die Töne sind also offenbar zwei völlig verschiedene psychische Zustände". Soll denn dem bloßen Hören der Töne gar kein Erkenntniswert zukommen? Ein ernsthafter Selbstbeobachter wird das niemals behaupten können. Im Gegenteil, das bloße Hören der Töne entscheidet einzig und allein darüber, ob das Urteil, daß ich Töne höre, welches ja von mir in jedem Falle ausgesprochen werden kann, Wahrheit oder Lüge enthält. Wir sind also zwar darin mit Rickert vollkommen einig, daß „das Urteil nicht eine einfache Verbindung von Vorstellungen ist, sondern nur dann allein eine Bedeutung für die Erkenntnis besitzt, wenn sein Sinn in einer

Bejahung oder Verneinung besteht" (S. 96). Trotzdem aber haben wir an dem von Rickert selbst gebrauchten Beispiel klargemacht, daß das Urteil durchaus nicht die einzige Erkenntnisform darstellt.

Wenn Rickert nun aber sagt, daß Erkennen nicht in bloßen Vorstellungen möglich ist, so liegt auch hier eine Verwirrung von Begriffen zugrunde. Der Begriff Vorstellung ist der Oberbegriff für die beiden engeren Begriffe Vorstellungsbilder und Anschauungen. Die Vorstellungsbilder nun machen an sich gar keinen Anspruch auf Wahrheit, sondern sind ganz problematisch. Sie können mit der Zeit undeutlich werden, mehrere verschiedene können in eins verschmelzen, und dergleichen mehr. Anders verhält es sich mit den Anschauungen der Sinneswahrnehmung. Diese Art der Vorstellungen macht einen ganz unmittelbaren und äußerst starken Anspruch auf Wahrheit. Ja, für einen Kantianer dürfte es auch keine Neuigkeit sein, wenn wir behaupten, daß alle Erkenntnis mit der Sinnesanschauung beginnt. Und wie sollte auch das Urteil die alleinige Erkenntnis sein? Im Urteil sind Begriffe in gewisser Weise zu einer Einheit verknüpft. Wie aber gelange ich zu Begriffen? Durch Urteile? Das ist, könnte man meinen, allerdings Rickerts Ansicht, wenn er sagt, „daß man einen Begriff nur wirklich denken kann, indem man ihn in Urteile auflöst" (S. 34). Wäre indessen dieser letzte Satz richtig, so würde ich niemals einen Begriff wirklich denken können, denn die Begriffe, welche in dem Urteil, in welches ich den Begriff aufgelöst habe, verknüpft sind, müßten wieder in Urteile aufgelöst werden, und so fort ad infinitum [1]. Ich gelange aber nicht anders zu Begriffen, als durch

[1] Hierbei ist auf den Unterschied, den Rickert in seinen „Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung" zwischen Begriff und Wortbedeutung macht (S. 40 ff.) nicht eingegangen worden. Diese Unterscheidung könnte allerdings als Einwand gegen unsere obige Darlegung herangezogen werden. Unsere folgenden Ausführungen bleiben jedoch davon unberührt, denn sie verlieren nichts, wenn

Abstraktion von der Sinneswahrnehmung, wie mir dies die Selbstbeobachtung aufs deutlichste zeigt. Da aber das Urteil selbst stets Begriffe voraussetzt, so kann es nicht wieder seinerseits die Voraussetzung der Begriffe sein. Daraus folgt, daß die Sinneswahrnehmungen nicht in Urteilen bestehen können. Da aber nun doch die Sinneswahrnehmung, wie schon hervorgehoben, einen ganz wesentlichen Bestandteil unserer Erkenntnis ausmacht, so wäre auch hiermit der Rickertsche Satz von der Identität von Urteil und Erkenntnis widerlegt. Was aber von der Sinnesanschauung gesagt ist, das läßt sich auch für die anderen Arten der unmittelbaren Erkenntnis zeigen, das heißt also für die reine Anschauung und für die philosophische Erkenntnis der reinen Vernunft. Die Erkenntnis besteht demnach durchaus nicht nur in Urteilen, vielmehr muß unterschieden werden zwischen unmittelbarer Erkenntnis, die gar nicht aus Urteilen bestehen kann, und Urteilen, die stets mittelbare Erkenntnis sind.

Wenn unsere Behauptung noch einer Stütze bedarf, so kann sie vielleicht darin gesehen werden, daß auch bei Rickert eine unmittelbare Erkenntnis, wenngleich sie bei ihm ein anderes Aussehen hat, durchaus nicht vermieden ist. Hierfür wollen wir den Nachweis im Folgenden liefern. Rickert sagt (S. 115): „Sobald wir urteilen wollen, tritt ein Sollen richtunggebend auf“. Es fragt sich nun aber, wie ich zu der Erkenntnis gelange, daß ich hier bejahen, dort verneinen soll. Kann diese Erkenntnis durch ein Urteil vermittelt werden? Das dürfte wohl kaum angängig sein. Wir können hier vom Sollen genau dasselbe sagen, was

---

man hier für Begriff Wortbedeutung einsetzt. An der angeführten Stelle ist auch auf die Entstehung der Wortbedeutung aus der Anschauung klar und deutlich hingewiesen, ohne daß Rickert sich bewußt geworden wäre, daß, da das Urteil Wortbedeutungen und Wortbedeutungen Anschauungen voraussetzen, Anschauung, d. i. eine Art der Erkenntnis, unmöglich aus Urteilen bestehen kann.

Rickert vom Sein sagt (S. 119 u. S. 120): „Um zu wissen, was man soll, muß man doch schon geurteilt haben“. Und da man doch auch zu diesem Urteil wissen muß, was man soll, so würde man auch hier wieder auf einen unendlichen Regreß geführt werden. Aber dies ist Rickert keineswegs entgangen. Denn es heißt ebenfalls S. 119: „Man kommt immer wieder auf das unmittelbare Gefühl des Sollens zurück“, und ähnlich heißt es S. 108, S. 115, S. 118, S. 126 und an anderen Stellen. Ein unmittelbares Gefühl ist es also, was mich bestimmt, zu urteilen. So ist denn dies unmittelbare Gefühl die Erkenntnis von dem, wie ich urteilen soll, und es ist nicht richtig, daß Erkenntnis nur in Urteilen besteht. Aber man vergesse ja nicht, daß Rickerts ganze Lehre mit dem Satze steht und fällt, daß Erkenntnis nur in Urteilen besteht. Ist also gezeigt, daß es auch bei Rickert noch eine andere Erkenntnis als das Urteil, nämlich das „unmittelbare Gefühl des Sollens“ (S. 115, 118) giebt, so ist nicht einzusehen, warum wir dem unmittelbaren Gefühl von der Existenz eines Gegenstandes, wie es dem üblichen Begriff des Erkennens zu Grunde liegt, weniger vertrauen sollen, als dem von Rickert an dessen Stelle gesetzten Gefühl des Sollens. Das Sollen aber löst sich, wie oben dargelegt, bei genauer Selbstbeobachtung in Sinnesanschauung, reine Anschauung und unmittelbare philosophische Erkenntnis auf. Und so fällt denn mit dem Sollen zugleich das ganze darauf errichtete Gebäude in sich zusammen.

2. Aber auch das Gefühl, welches uns vermittelt, was wir sollen, muß näher betrachtet werden. Auch hier wieder macht sich die Verachtung der psychologischen Methode in verhängnisvoller Weise geltend. Rickert behauptet: „Die Evidenz ist psychologisch betrachtet ein Lustgefühl“ (S. 112), „Was ich bejahe, muß mir gefallen, was ich verneine, muß mein Mißfallen er-

regen“ (S. 106). Nun, daß es mein Wohlgefallen erregt, wenn ich sage, meine Handlung sei schlecht, oder daß andererseits das Urteil: meine Handlung ist nicht schlecht, mein Mißfallen erregt, wird, wie wir annehmen, auch Rickert nicht behaupten wollen[1]. Meint Rickert jedoch, die Verbindung des Subjekts mit dem Prädikat errege mein Mißfallen, und deshalb verneine ich sie, so betrachten wir das Urteil: meine Handlung ist nicht gut. Die Verbindung meiner Handlung mit dem Begriff gut erregt durchaus nicht mein Mißfallen, und trotzdem verneine ich sie. „Aber das Lustgefühl des Bejahens, das Unlustgefühl des Verneinens ist kein hedonisches Lustgefühl“. Gewiß nicht, jedoch nur aus dem Grunde, weil beim Bejahen und Verneinen überhaupt kein Lustgefühl mitsprechen darf, sondern wir im Gegenteil stets nur fragen dürfen, was wahr ist, und nicht, was uns gefällt, sei dieses Gefallen nun hedonisch oder nicht. Ein Gefühl, das Wahrheitsgefühl, leitet uns allerdings bei unseren Urteilen, das werden wir niemals bestreiten. Aber es ist ein Dogma, daß „jedes Gefühl stets Lust oder Unlust sei“ (S. 106). Und der von Rickert hierfür versuchte Beweis ist durchaus nicht stichhaltig: „Wenn wir fühlen, fühlen wir entweder Lust oder Unlust. Auch beim Urteilen handelt es sich um ein entweder — oder, also handelt es sich auch beim Urteilen um Lust oder Unlustgefühle“ (S. 105). Nein, hier entscheidet einzig und allein die Selbstbeobachtung. Diese aber zeigt uns, daß zwar jedes wahre Urteil, sei es verneinend oder bejahend, als solches für uns Wert hat, also, mit

[1] Wie wenig klar sich Rickert gerade in Hinsicht auf das Urteil ausdrückt, zeigt auch der Satz S. 103 „... denn erst durch Bejahen oder Verneinen wird aus den Vorstellungen etwas Wahres oder Falsches, das heißt Erkenntnis“. Sollen wir wirklich glauben, daß verneinende Urteile weniger wahr sind als bejahende, oder daß auch etwas Falsches Erkenntnis werden kann?

Rickert zu reden, ein nichthedonisches Lustgefühl auslöst. Davon jedoch ist aufs strengste zu scheiden das Wahrheitsgefühl, das uns zu unseren Urteilen bestimmt. Dies ist ein Gefühl von ganz besonderer Art, das mit Lust und Unlust nicht das Geringste zu tun hat, das im Gegenteil mit Aufbietung aller Kräfte von der Beeinflussung durch jegliche Lustgefühle befreit werden soll und kann.

IV.

1. Wir kommen nunmehr zu Rickerts „Bewußtsein überhaupt". Wir wollen davon absehen, daß der Name bei Rickert etwas von dem Kantischen Bewußtsein überhaupt ganz verschiedenes bezeichnet, und deshalb vielleicht besser vermieden worden wäre. Aber was ist denn nun dieses Bewußtsein überhaupt? „Das Bewußtsein überhaupt ist das Subjekt, das bleibt, wenn wir das individuelle theoretische Ich ganz als Objekt denken." (S. 144.) Aber „das Bewußtsein überhaupt ist nichts anderes, als ein Begriff" (S. 29, 149, 156). „Es ist nichts anderes als das allen immanenten Objekten Gemeinsame" (S. 29), das heißt, es ist von den immanenten Objekten abstrahiert und setzt daher diese voraus. Die immanenten Objekte hingegen setzen das erkenntnistheoretische Subjekt voraus, in dem „wir die logische Voraussetzung alles Seins finden" (S. 147). Nun sagt Rickert zwar: „den Begriff des Bewußtseins überhaupt bilden wir nicht ohne den des dazu gehörigen Bewußtseinsinhaltes" (S. 29). Können wir aber auch den Begriff des Inhaltes nicht bilden, ohne den dazu gehörigen des Bewußtseins überhaupt (S. 147), so stehen wir vor einer Aufgabe, die ebenso unlösbar sein dürfte, wie aus einer Gleichung eine bestimmte Lösung für zwei Unbekannte zu finden. Diese Schwierigkeit hat Rickert keiner Beachtung gewürdigt. — Wel-

chen Sinn soll es ferner haben, von immanentem Sein zu reden, wenn nicht in letzter Linie ein transcendentes Sein vorhanden ist, dem das erste immanent ist. Giebt es nur ein immanentes Sein, so ist eben dieses das Sein schlechthin. Steht diesem immanenten Sein als Transcendentes nichts gegenüber als eine bloße Abstraktion, die noch dazu zu ihrer Möglichkeit das immanente Sein voraussetzt, so verliert die Bezeichnung dieser Lehre als transcendentaler Idealismus jeden Sinn, und sinkt zu einem bedeutungslosen Wort herab. Denn, kann diesem immanenten Sein kein transcendentes Sein gegenübergestellt werden, das im Gegensatz zu dem immanenten an sich existiert, so existiert eben dieses immanente Sein uneingeschränkt, sofern überhaupt irgend etwas existieren und der Begriff der Existenz nicht gänzlich seinen Sinn verlieren soll.

Sodann aber sagt Rickert: „Das Sein ist nichts, wenn es nicht Bestandteil eines Urteils ist“ (S. 120). Wenn wir dies auf das individuelle Ich anwenden, so muß also das Urteil gefällt werden: Das individuelle Ich ist seiend. Urteilen aber ist eine Tätigkeit, und eine Tätigkeit erfordert einen Täter. Wer urteilt hier? Daß Bewußtsein überhaupt ist nur ein Begriff, und ein Begriff kann keine Tätigkeit ausüben. Wollte man jedoch sagen, das individuelle Ich, von dem das Bewußtsein überhaupt abstrahiert ist, urteile, so kann man einwenden, daß dieses das Urteil nicht zu fällen brauche, denn die Voraussetzung zur Fällung dieses Urteils ist doch schon seine Existenz, und dann wäre das Urteil nicht mehr nötig. Wer fällt also nun das Urteil, daß der Bewußtseinsinhalt des Bewußtseins überhaupt seiend ist? Darauf haben wir keine Antwort gefunden. — Und wo bleibt schließlich die exakte Methode der Erkenntnistheorie, die „nichts unbewiesen hinnehmen darf“ (S. 132), bei der dogmatischen Behauptung, daß das Bewußtsein überhaupt urteilend und nicht vorstellend ist? Rickert fragt: „Muß das theoretische Subjekt, wenn wir alles Individuelle daraus entfernen und zum Objekt rechnen, deshalb aufhören, urteilendes Subjekt zu sein?“ (S. 144). Es hätte aber bewiesen werden müssen, daß es nicht aufhören kann, urteilendes Subjekt zu sein. Das ist nicht geschehen; denn daß das Wort „Sein“ gar nichts bedeutet, wenn es nicht Bestandteil eines Urteils ist, was doch die Stütze der S. 147 gegebenen Begründung bildet, ist im Vorhergehenden nur für das individuelle Ich zu beweisen versucht worden. Daß auch das Bewußtsein überhaupt nicht unmittelbar und ohne ein Urteil zu fällen sich des Seins seines Inhaltes bewußt werden kann, ist damit keineswegs bewiesen. Ist aber selbst zugegeben, daß das Bewußtsein überhaupt urteilend ist, so ergibt sich noch folgende Schwierigkeit: Um urteilen zu können, muß ich nach Rickert Gefühle haben, denn er sagt (S. 106), das Erkennen sei ein Vorgang, der durch Gefühle bestimmt werde, und Gefühle seien stets, psychologisch betrachtet, Lust oder Unlust. Aber noch mehr, nach Seite 233 wäre das urteilende Bewußtsein überhaupt auch ein wollendes, denn „das Erkennen beruht in letzter Hinsicht auf einem Willensentschluß“, und „das Bejahen oder Verneinen ist ohne einen Willen zur Wahrheit nicht denkbar“. (S. 140.) Wie aber verträgt sich dies mit dem Ausspruch (S. 25): „Das Wahrnehmen ist ebenso wie das Wahrgenommene, das Fühlen ist ebenso wie das Gefühlte, das Wollen ist ebenso wie das Gewollte dem Objekt zuzuweisen oder dem Bewußtseinsinhalt“.

2. Es sei uns gestattet, über den Rest der Rickertschen Darlegungen, das heißt über seine Kategorieenlehre ganz kurz hinwegzugehen. Dieser Teil seiner Ausführungen hat nur Wert, sofern das Vorhergehende über jeden Zweifel erhaben ist. Nun sind aber unsere Einwände derart, daß nur zwei Möglichkeiten übrig bleiben:

entweder sie werden widerlegt, oder die ganze neue Erkenntnistheorie sinkt in sich zusammen. Ehe also das erste nicht geschehen ist, können wir jede Besprechung der Kategorieen aussetzen. Nur zwei Punkte wollen wir erwähnen. Nach Rickert ist die Kategorie der Akt der Anerkennung, der die transcendenten Normen anerkennt (S. 173). Er unterscheidet nun unter diesen die Norm der Gegebenheit oder des Dies (S. 180), die Norm der objektiven Wirklichkeit und die methodologische Norm. Dem gegenüber stehen nun die entsprechenden Kategorieen. Hier müssen wir uns fragen, ob denn die verschiedenen Kategorieen auch etwas wirklich Verschiedenes darstellen. Sind die Normen von einander verschieden, so bleibt doch für die Kategorie nichts anderes übrig, als die betreffende Norm zu bejahen. Eine Form der Bejahung, die verschieden wäre, je nachdem ich dieses oder jenes bejahe, giebt es nicht. So meinen wir, daß, wenn man verschiedene Normen aufstellt, es nicht angeht, verschiedene Kategorieen im Rickertschen Sinne diesen gegenüberzustellen. Es ist eine und dieselbe Kategorie, die bald die eine, bald die andere Norm anerkennt.

Wichtiger als dies erscheint uns der zweite Punkt. Es ist nach Rickert unzulässig, „die kausal bedingte mit der gesetzmäßigen Veränderung zu identifizieren“ (S. 212). Es wäre in der Tat sehr ungereimt, den einzelnen Fall mit der allgemeinen Regel zu identifizieren; aber nicht weniger fehlerhaft wäre es, zu behaupten, daß in einem Urteil, das die kausale Verknüpfung von Gegebenheiten behauptet, nur „ein Urteil über einen einmaligen individuellen Vorgang enthalten sei“ (S. 217). Wenn ich vielmehr sage: „dieser Stoß war die Ursache dieser Bewegung“, so heißt dies nicht nur: „Auf diesen Stoß ist diese Bewegung gefolgt“, sondern es kommt noch der Gedanke der Bewirkung des einen durch das andere hinzu. Dieser Gedanke ist aber kein anderer als der der Gesetzmäßigkeit dieses Vorgangs, der Gedanke, daß unter gleichen Verhältnissen jedesmal dieser Stoß, wenn ich ihn ausführe, diese Bewegung zur Folge hat. Es enthält also das angeführte Urteil bedeutend mehr, als eine Aussage über einen einmaligen, individuellen Vorgang, nämlich bereits die Behauptung einer Gesetzmäßigkeit. Dieser gesetzmäßige Bestandteil kann nicht aus den entsprechenden Wahrnehmungsurteilen entnommen sein, wie: dieser Stoß ist, diese Bewegung ist, diese Bewegung ist in diesem Augenblick auf diesen Stoß gefolgt. Es ist vielmehr eine ganz neue und eigentümliche Erkenntnis, die in dem Urteil: dieser Stoß ist die Ursache dieser Bewegung, hinzukommt. Wollen wir uns dieser Erkenntnis gesondert bewußt werden, so kann dies in der allgemeinsten Form nur geschehen durch das Urteil: jede Veränderung hat ihre Ursache. Dies Gesetz, das also implicite in dem Urteil: dieser Stoß ist die Ursache dieser Bewegung, enthalten ist, ist die Voraussetzung, die nötig ist, damit das besondere Urteil überhaupt gefällt werden kann. So sehen allerdings auch wir, wie Rickert (S. 227) „im Gesetz keine Wirklichkeit“, wohl aber in der Wirklichkeit Gesetze. Es kann daher sehr wohl „Wissenschaften geben, die sich um Gesetze gar nicht kümmern“ (S. 224), niemals aber solche, die eben diese Gesetze nicht voraussetzten. Das Gesetz ist also weit mehr als ein Mittel zur Bearbeitung der Wirklichkeit, und nur insofern ist es ein „Abstraktionsprodukt“ (S. 216), „ein Produkt der Wissenschaft“ (S. 240), als es in dem, wovon ich es abstrahiere, schon enthalten ist [1]. Wenn ich selbst eine

[1] Kant behält daher Recht, wenn er sagt (Kritik der reinen Vernunft, Kehrbachsche Ausgabe S. 134): „Die Ordnung und Regelmäßigkeit an den Erscheinungen, die wir Natur nennen, bringen wir selbst hinein und würden sie auch nicht darin finden können, hätten wir sie nicht ursprünglich hineingelegt.“ Dem-

noch so große Zahl von „Wirklichkeitsurteilen“ gefällt habe, welche aussagen, daß so und so oft auf gewisse Erscheinungen gewisse Veränderungen erfolgten, so kann ich mit Hülfe der Abstraktion nur dann das Urteil fällen: jede Veränderung hat ihre Ursache, wenn die in diesem Urteil ausgedrückte Gesetzmäßigkeit bereits in den einzelnen Urteilen enthalten ist. Der allgemeingültige Bestandteil, der wie oben gezeigt, auch schon in den Urteilen, die nur „kausale Verknüpfungen“ ausdrücken, enthalten ist, ist hier das allen einzelnen Urteilen Gemeinsame, dem ich durch die Abstraktion gesondert Ausdruck verleihe.

V.

Es ist also wohl deutlich geworden, daß alle Fehler, die wir aufgewiesen haben, und die geeignet sind, das ganze System zu stürzen, aus dem Mangel an Selbstbeobachtung, aus der Verachtung der Psychologie entsprungen sind. Aber seltsam! Man wird sich vielleicht wundern zu hören, daß Rickert, wie hoch er sich auch über die Psychologie erhaben glaubt, unbewußt selber Psychologie treibt. Wir behaupten nämlich, daß Rickert, sofern er nicht Dogmatiker ist, sich ausschließlich auf psychologischem Gebiete bewegt.

1. Nach zwei Richtungen hin machen wir Rickert den Vorwurf eines dogmatischen Verfahrens. Zunächst deshalb, weil er an die Spitze seiner Untersuchungen Definitionen stellt (vgl. S. 346 unsrer Ausführungen) und somit die Warnung unbeachtet läßt, die Kant in der Kritik der reinen Vernunft über den Gebrauch der Definitionen in der Philosophie erhebt. (Transcenden-

---

gegenüber erscheint es wunderbar, wenn Rickert als Kantianer behauptet: „Der Begriff der Wirkung stammt aus den Veränderungen, die wir in der immanenten Sinnenwelt beobachten.“ (S. 47.)

tale Methodenlehre. Die Disciplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche.) Kant setzt hier auseinander, daß die Mathematik zwar sehr wohl mit Definitionen beginnen könne, da ihre Begriffe rein anschaulich und daher konstruierbar sind, daß dies Verfahren jedoch für die Philosophie unzulässig sei. Er sagt (Kehrbachsche Ausgabe, S. 560): „.... man dürfe es in der Philosophie der Mathematik nicht so nachtun, die Definitionen voranzuschicken, als nur etwa zum bloßen Versuche. Denn, da sie Zergliederungen gegebener Begriffe sind, so gehen diese Begriffe, obzwar nur noch verworren, voran, und die unvollständige Exposition geht vor der vollständigen, so daß wir aus einigen Merkmalen, die wir aus einer noch unvollendeten Zergliederung gezogen haben, manches vorher schließen können, ehe wir zur vollständigen Exposition, d. i. der Definition gelangt sind; mit einem Worte, in der Philosophie müsse die Definition, als abgemessene Deutlichkeit, das Werk eher schließen als anfangen". Die Gefahr, die in der Vernachlässigung dieser Warnung liegt, besteht darin, daß die aus der unvollständigen Zergliederung gewonnenen Begriffe durch Worte bezeichnet werden, denen im Sprachgebrauch eine ganz bestimmte Bedeutung zukommt. Giebt man nun den Worten durch eine Definition einen vom Sprachgebrauch abweichenden Sinn, so geschieht es leicht, daß man Merkmale, die dem Begriff zukommen, den das Wort im Sprachgebrauch bezeichnete, unbewußt auf den Begriff überträgt, den das Wort nach der Definition bezeichnen soll. Damit sind wir auf die hauptsächliche Quelle der Irrtümer im „Gegenstand der Erkenntnis" gestoßen. Rickert sieht nämlich ein, daß die oft aufgestellte Behauptung, die Erkenntnis richte sich nach ihrem Gegenstande, d. h. nach einem Sein, nicht haltbar ist. Er meint aber, daß die Schuld hieran das „Sein" treffe, und übersieht, daß keine Wissenschaft feststellen kann, daß die Erkenntnis sich nach irgend etwas, was nicht Erkenntnis ist, richte. Da also nicht behauptet werden kann, daß die Erkenntnis sich nach dem „Sein“ richte, so sucht er einen andern „Gegenstand“, nach dem sich die Erkenntnis richtet, und findet diesen in einem „Sollen“. Rickert hat also unberechtigter und dogmatischer Weise den Gegenstand mit der Regel der Wahrheit identificiert. Damit aber ist sein Begriff vom Gegenstande ein anderer geworden, als im gewöhnlichen Sprachgebrauch mit dem Worte bezeichnet wird. Was also für den Gegenstand im gewöhnlichen Sinne ganz richtig ist, daß er zum Begriff des Erkennens gehört, trifft für den Gegenstand, wie ihn Rickert definiert, nicht mehr zu. Denn die unmittelbare Erkenntnis hat zwar keine Regel der Wahrheit außer sich, sondern trägt ihre Gewißheit in sich selbst; wohl aber hat sie einen Gegenstand im üblichen Sinne des Wortes, und dieser besteht gerade in einem Sein. Anders verhält es sich mit der mittelbaren Erkenntnis. Diese bedarf allerdings einer von ihr selbst verschiedenen Regel der Wahrheit. So mußte Rickert dazu kommen, die mittelbare Erkenntnis, die in Urteilen besteht, mit der Erkenntnis überhaupt zu verwechseln, und daher Erkentnis und Urteil zu identificieren. In der Tat trifft vieles, was Rickert von der Erkenntnis überhaupt aussagt, für die mittelbare Erkenntnis sehr wohl zu. Erst durch die, von ihr selbst verschiedene, Regel der Wahrheit kommt zu ihr, als zu etwas an sich Problematischem, die Assertion hinzu, wird aus dem Urteil Erkenntnis. Das Urteil ist ein dem Willen unterworfener Akt der Reflexion, das Urteil wird durch ein Gefühl, das Wahrheitsgefühl, bestimmt. So sieht man, daß es, die Voraussetzungen einmal zugegeben, dem Rickertschen System keineswegs an Konsequenz fehlt. Aber gerade diese Konsequenz ist stets ein gefährlicher Vorzug für ein philosophisches System. Dient sie doch nur dazu, den in den Voraussetzungen einmal gemachten Fehler durch das ganze System zu schleppen und ihn damit gewissermaßen nur in höhere Potenzen zu erheben.

Zweitens aber scheint uns Rickert deshalb Dogmatiker zu sein, weil er gegen folgende, von Kant im selben Abschnitt aufgestellte Forderung verstößt: „Die Philosophie hat keine Axiomen und darf niemals ihre Grundsätze a priori so schlechthin gebieten, sondern muß sich dazu bequemen, ihre Befugnis wegen derselben durch gründliche Deduktion zu rechtfertigen.“ (S. 562.)

Rickert sagt: „Auf den beiden Sätzen, daß Urteilen nicht Vorstellen ist, und daß das „Sein“ nur einen Sinn gewinnt als Bestandteil eines Urteils, beruhten alle seine Ausführungen.“ (S. 156.) Von diesen beiden Sätzen ist der erste als ein analytisches Urteil allerdings unbestreitbar. Der zweite Satz dagegen ist eine rein dogmatische Behauptung. Wir haben oben ausführlich gezeigt, daß er sogar falsch ist. Sollte aber jemand von der Richtigkeit unserer Darlegungen in diesem Punkte nicht überzeugt sein, so muß doch dies mindestens einleuchten, daß es keinen logischen Widerspruch einschließt. an dem Rickertschen Satz zu zweifeln, daß es vielmehr sehr wohl möglich ist, daß ein Sein durch eine besondere Art der Vorstellung, z. B. durch Anschauung, erkannt wird und daher auch unabhängig vom Urteil Sinn hat. Eine Begründung seines Satzes hat Rickert nirgends gegeben. Es ist ferner dogmatisch, daß die Existenz eines Gegenstandes deshalb nicht behauptet werden dürfe, weil er nicht die Regel der Wahrheit unserer Erkenntnis sein könne, sowie es dogmatisch ist, das vom individuellen Bewußtsein Gesagte auf das Bewußtsein überhaupt zu übertragen.

2. Psychologisch ist dagegen die Lehre von der Urteilsnot-

wendigkeit. Ob ich beim Urteil von einem Gefühl bestimmt werde, und welcher Art dieses Gefühl ist, das kann niemals die Logik entscheiden. Nur die Psychologie, als innere Naturlehre, ist imstande, darüber etwas auszusagen. Es ist falsch, daß es gar nicht „denkbar wäre, daß etwas anderes als ein Gefühl uns zu der Zustimmung oder der Abweisung veranlassen könnte“ (S. 107). Ein logischer Widerspruch ist es durchaus nicht, zu sagen: es ist kein Gefühl, das unsere Urteile bestimmt, sondern irgend etwas anderes. Ob es aber etwas anderes ist, und was dies andere ist, das kann nur Gegenstand psychologischer Untersuchungen sein. Vor allen Dingen aber ist es durchaus kein logischer Widerspruch, daß zwar ein Gefühl, keineswegs aber ein Lust- oder Unlustgefühl, unser Urteilen bestimme. Diese letztere Behauptung haben wir oben aufgestellt, und auch hier wieder ist es gleichgültig, ob man sie zugiebt oder nicht. Auf jeden Fall haben wir gezeigt, daß unsere Behauptung keinen logischen Widerspruch enthält. Will man sie widerlegen, so bedarf man dazu nicht der Logik, sondern der Psychologie. Es sei also Rickerts Behauptung oder die unsrige richtig, man wird sie niemals als „von jeder psychologischen Theorie unabhängig“ (S. 107) hinstellen können. — Ganz ebenso verhält es sich mit dem Satz, daß „das Bejahen oder Verneinen ohne einen Willen zur Wahrheit nicht denkbar ist“, (S. 140) und „daß das Erkennen in letzter Hinsicht auf einem Willensentschluß beruht“ (S. 233). Wenn Urteilen ein willkürlicher Akt der Reflexion ist, so ist es allerdings selbstverständlich, daß zum Urteilen ein Wille nötig sei. Aber wiederum kann nur der Psychologe diese Natur des Urteils feststellen. Eine logische Voraussetzung des Urteils ist der Wille nicht, sondern nur eine psychologische. Was aber für das Urteil in der Tat psychologische Voraussetzung ist, ist deshalb noch nicht psychologische Voraussetzung der Erkenntnis überhaupt; denn die Berechtigung zu der Übertragung vom Urteil auf die Erkenntnis fällt mit dem Satze, daß Erkennen ausschließlich in Urteilen bestehe.

So sehen wir, daß von einer Unabhängigkeit der Erkenntnistheorie von der Psychologie gar keine Rede sein kann. Aus reiner Logik läßt sich nicht Philosophie machen, und niemals kann die Erkenntnistheorie „über sich selbst hinaustreiben" (S. 234). Das ist keiner Wissenschaft möglich. Rickert will „reine Erkenntnistheorie treiben, die von Psychologie und Metaphysik frei sein soll." In Wahrheit aber ist seine Methode teils dogmatisch, teils psychologisch. Auf den beiden angeführten Voraussetzungen, meint er, beruhe allein seine ganze Erkenntnistheorie. Daß Rickert aber unbewußt eine Reihe von psychologischen Behauptungen aufstellt, die, wie wir gesehen haben, nicht einmal den Tatsachen entsprechen, ohne die jedoch sein System nicht bestehen kann, das haben wir gezeigt. Die Psychologie aber, als Physik der inneren Natur, setzt genau so wie die Physik der äußeren Natur gewisse logische und metaphysische Grundsätze voraus. Oder sollte etwa eine Psychologie als Wissenschaft aus innerer Erfahrung möglich sein, die in ihrem System die von Kant aufgewiesenen Bedingungen der Möglichkeit aller Erfahrung, also z. B. das Gesetz der Kausalität oder das Prinzip der Kontinuität, nicht voraussetzt?

Wir aber sind gerade dadurch im Vorteil, daß wir unsere Schranken kennen. Wir wissen, daß die Psychologie eine Erfahrungswissenschaft ist, und wir wissen auch, daß wir als Psychologen eine gewisse Zahl von Grundsätzen voraussetzen. Aber eben weil wir dies wissen, streben wir nicht mit der Psychologie über diese selbst hinauszuwachsen. Wir prüfen, was die Psychologie leisten kann, und nur dies, nichts Unmögliches verlangen wir von ihr. Wir ergreifen nicht „den alten Wanderstab des erkenntnistheoretischen Zweifels“, wir suchen nicht „voraussetzungslos“ zu sein, sondern wir wenden uns an die anthropologische Kritik; wir suchen uns unserer Voraussetzungen bewußt zu werden und sie aus unserer Vernunft zu deduzieren. Die psychologische Kritik aber ermöglicht es uns als Kritik gegen jede dogmatische Behauptung anzukämpfen, und als Psychologie setzt sie uns in den Stand, falsche Selbsbeobachtung zu erkennen und richtig zu stellen.

VIII.

Bemerkungen
über
die Nicht-Euklidische Geometrie
und den
Ursprung der mathematischen Gewissheit.

Von

Leonard Nelson.

Inhalt.

Mathesis scientia eorum est, quae per se clara sunt.
Jacobi.

1.

Die als „mathematische Strenge“ sprichwörtlich gewordene, allen Zweifel ausschließende Sicherheit und Notwendigkeit der mathematischen Erkenntnis hat von jeher das Interesse der Philosophen auf sich gelenkt und einen der vornehmsten Gegenstände ihrer Nachforschungen gebildet. Die Hoffnung, der Mathematik das Geheimnis ihrer wissenschaftlichen Strenge abzulauschen, um durch Nachahmung ihres Verfahrens auch die Philosophie auf dieselbe Stufe der Exaktheit zu erheben, mußte immer wieder auf die Frage nach dem Ursprung der mathematischen Gewißheit führen.

Die despotische Gewalt, mit der die Lehre des Aristoteles zwei Jahrtausende hindurch die wissenschaftliche Welt beherrschte, hat auch dem Gange der Untersuchung dieser Frage auf lange Zeit hinaus ihr charakteristisches Gepräge aufgedrückt. Nach der Lehre des Aristoteles giebt es zwei verschiedene Erkenntnisquellen: die Sinne einerseits und den Verstand andererseits. Aus der einen entspringt die Erfahrung, die andere liefert die Logik. Den Gegenstand der ersteren bilden die zufälligen Tatsachen, den der anderen die notwendigen Wahrheiten. Es liegt nahe, auf Grund dieser Lehre die Mathematik der zweiten Erkenntnisquelle zuzuweisen. Denn die Mathematik lehrt uns nicht zufällige Tatsachen kennen, sondern sie läßt uns notwendige Gesetze einsehen. In der Tat ist diese Ansicht bis auf Kants Zeit die allgemein herrschende gewesen. Selbst Hume, der Skeptiker, wagte nicht an dem logischen Ursprung der mathematischen Wahrheiten und ihrer durch diesen Ursprung gewährleisteten Allgemeingültigkeit zu zweifeln. Ja, so weit ging das Vertrauen auf die Macht der logischen Form der mathematischen Schlußweise, daß man durch ihre Übertragung auf die Philosophie die gleiche Sicherheit und Evidenz auch in dieser erreichen zu können überzeugt war. „Geometricorum more demonstrando" hoffte man den philosophischen Stein der Weisen zu finden. Doch diese Bemühungen führten nicht zu dem erhofften Ziel. Durch das Fehlschlagen der Versuche, durch Anwendung der mathematischen Schlußweise die philosophischen Probleme zu fördern, sah sich Kant veranlaßt, die Frage nach der Herkunft der mathematischen Gewißheit von neuem einer gründlichen Prüfung zu unterziehen. Er geriet dadurch als erster auf den Versuch, jene durch ihr Alter ehrwürdige und durch ihre Ehrwürdigkeit gefestigte Aristotelische Lehre von den zwei Erkenntnisquellen einer radikalen Revision zu unterwerfen.

Daß alle Erkenntnis mit der Erfahrung anfängt und uns nur durch Erfahrung veranlaßt zum Bewußtsein kommt, stand für Kant fest; aber ebenso offenbar war es, daß die Mathematik ihre Wahrheiten nicht aus der sinnlichen Wahrnehmung schöpft, denn diese letztere vermag wohl zufällige Kenntnis, aber nicht notwendige Einsicht zu liefern. Aber sollte daraus folgen, daß der Ursprung der mathematischen Erkenntnis im Verstande zu suchen sei? Kant fand, dass diese Folgerung auf der Verwechslung des mathematischen Schlusses mit der mathematischen Wahrheit selbst beruhte. Die Axiome vorausgesetzt, folgen alle Lehrsätze ohne weiteres durch die bloße logische Form des Schließens; aber diese Lehrsätze selbst entspringen darum nicht aus der logischen Schlußform, sondern sie lassen sich nur vermittelst derselben aus den Axiomen herleiten. Aber diese Axiome selbst, was sind sie und welches ist ihr Ursprung? Diese Frage führte Kant auf die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile.

2.

Worauf beruht die Notwendigkeit der mathematischen Axiome? Um diese Frage zu entscheiden, stellte Kant folgende Überlegung an. Die Notwendigkeit eines Urteils, d. h. die Notwendigkeit, den Subjektsbegriff mit dem Prädikat in einem Urteil zu verbinden, hat ihren Grund entweder in dem Begriff des Subjekts selbst, oder dieser Grund liegt in etwas anderem als dem Subjektsbegriff. Liegt er im Subjektsbegriff, so heißt das Urteil analytisch, denn ich bedarf zu ihm nur einer Zergliederung seines Subjektsbegriffs. Liegt er nicht im Subjektsbegriff, so heißt das Urteil synthetisch, denn ich muß über den Subjektsbegriff hinausgehen, um das Urteil fällen zu können. Daß alle Radien eines Kreises gleiche Länge haben, ist ein analytischer Satz, denn er folgt allein aus einer Zergliederung des Begriffs vom Kreise. Daß aber das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser des Kreises den Wert 3,1415926 . . . hat, ist ein synthetischer Satz, denn er läßt sich durch Zergliederung des Begriffs dieses Verhältnisses allein nicht herleiten. — Es ist klar, dass mit dieser Einteilung der Grund der dem Mathematiker geläufigen Unterscheidung zwischen Definitionen und Axiomen getroffen wird. Die Definition enthält die vollständige Zergliederung eines Begriffs und dient als Kriterium dafür, ob ein Gegenstand (oder eine Klasse von Gegenständen) unter den definierten Begriff fällt oder nicht. Alle Definitionen und aus Definitionen folgenden Sätze sind daher analytische Urteile. Jede Beilegung eines Prädikats dagegen, das nicht zu den definierenden Merkmalen des Begriffs gehört, ist ein synthetisches Urteil.

Daraus geht zweierlei hervor:

1) Die analytischen Sätze sind diejenigen, die Aristoteles dem Verstande zuwies; es sind die Wahrheiten der Logik.

2) Die mathematischen Axiome und alle auf ihnen beruhenden Theoreme sind synthetische Urteile.

Steht dieses beides fest, so folgt, daß die Mathematik eine andere Erkenntnisquelle voraussetzt als den Verstand. Die mathematische Erkenntnis beruht auf Anschauung und nicht auf bloßen Begriffen. Das war das Resultat der Kantischen Untersuchung.

3.

In welchem Verhältnis steht nun diese mathematische Anschauung zur Sinnesanschauung? Zunächst leuchtet ein, daß sie von der Sinnesanschauung — der äußeren sowohl wie der inneren — unterschieden ist. Denn die leztere zeigt uns wohl, was hier oder dort, zu dieser oder jener Zeit ist, aber nicht, was überall und jederzeit gilt. Eine solche notwendige und allgemeine Geltung haftet aber den mathematischen Wahrheiten an. Betrachten wir des näheren die Geometrie und die ihr zu Grunde liegende Anschauung, die Raumanschauung. Das Axiom, daß die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Punkten ist, spricht nicht von dieser oder jener geraden Linie, sondern von allen Geraden überhaupt. Sehen wir davon ab, daß Punkte und Linien überhaupt nicht Gegenstände sinnlicher Beobachtung werden können, so müßten wir doch, da zwischen zwei Punkten unendlich viele Linien möglich sind, erst diese unendlich vielen Linien mit der Geraden verglichen haben, ehe wir zu einer allgemeinen Aussage über ihr Längenverhältnis berechtigt wären; dazu allein aber bedürften wir schon einer unendlichen Zeit. Und doch hätten wir damit den Satz erst für eine einzige Gerade gefunden, während es der Geraden unendlich viele im Raume giebt. Und selbst von dieser einen Geraden könnten wir nur sagen: so viel wir bisher beobachtet haben, war sie kürzer als jede mit ihr verglichene Krumme; ob dies morgen oder zu einer beliebigen anderen Zeit sich ebenso verhalten werde, darüber wären wir auf Grund unserer Messungen zu keinem Urteil berechtigt.

Ein konsequenter Empirist müßte daher die Allgemeingültigkeit der geometrischen Wahrheiten preisgeben und den Umkreis seiner Urteile auf den seiner empirischen Messungen einschränken. Aber die Möglichkeit der Messung beruht selbst erst auf der Anwendung bestimmter geometrischer, durch empirische Messung nicht wieder kontrollierbarer Voraussetzungen. Jede Messung beruht auf der Forttragung eines Maßstabes an dem zu messenden Gegenstande und setzt die Unveränderlichkeit des Maßstabes voraus. Diese letztere ist aber nur möglich unter Voraussetzung des den Kongruenzsätzen zu Grunde liegenden Axioms, daß sich eine Figur ohne Formänderung im Raume bewegen läßt.

Die mathematische Anschauung ist folglich von der empirischen Anschauung unabhängig. Wenngleich wir uns ihrer nur durch Abstraktion von der empirischen Anschauung gesondert bewußt werden können, so hat sie doch einen von dieser unabhängigen Ursprung. Kant nannte sie die reine Anschauung. Die reine Anschauung liegt also aller empirischen Messung als Bedingung ihrer Möglichkeit zu Grunde.

4.

Verbinden wir die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile mit derjenigen der Erkenntnisse a priori und a posteriori, d. h. der notwendigen und der zufälligen Wahrheiten, so erhalten wir folgendes System möglicher Urteilsarten:

analytische Urteile a priori,
analytische Urteile a posteriori,
synthetische Urteile a priori,
synthetische Urteile a posteriori.

Es ist klar, daß der zweite Fall von vornherein ausscheidet. Denn analytische Urteile beruhen allein auf dem Begriff ihres Subjekts und bedürfen daher keiner Erfahrung. Dies gilt auch in dem Falle, wo der Subjektsbegriff des analytischen Urteils ein empirischer ist. Denn nicht auf den Ursprung des Subjektsbegriffs kommt es an, sondern auf den Grund seiner Verbindung mit dem Prädikat. Die Katze sei definiert als das fleischfressende Säugetier mit einziehbaren Krallen. Der Begriff der Katze ist zweifellos empirischen Ursprungs; aber das Urteil: die Katze hat einziehbare Krallen, gilt nichtsdestoweniger mit Notwendigkeit und a priori. Denn eine gegenteilige Erfahrung ist gar nicht denkbar, weil, auf Grund der Definition der Katze, ein Wesen, dem die im Prädikat des Urteils genannte Eigenschaft nicht zukäme, gar nicht unter den Begriff der Katze subsumiert werden könnte.

Alle analytischen Urteile sind also Urteile a priori. Bringen wir den Fehler des A r i s t o t e l e s und seiner Nachfolger auf seinen schulgerechten Ausdruck, so können wir sagen, dass er diesen richtigen Satz unrichtiger Weise umgekehrt hat: Alle analytischen Urteile sind Urteile a priori, aber nicht alle Urteile a priori sind analytisch. Alle logischen Wahrheiten gelten notwendig, aber nicht alle notwendigen Wahrheiten sind logischen Ursprungs. Die Disjunktion des A r i s t o t e l e s zwischen Logik und Erfahrung ist unvollständig: Die Mathematik gehört weder der Logik noch der Erfahrung an; ihre Urteile sind synthetische Urteile a priori.

5.

In der Eigentümlichkeit ihrer Erkenntnisquelle, die Anschaulichkeit und Apriorität vereinigt, liegt also der Grund der Evidenz der mathematischen Erkenntnis einerseits, und ihrer strengen Notwendigkeit andererseits. Die logische Form ihrer Schlüsse und Beweise kann nur zur Übertragung der Gewißheit von den Grundsätzen auf die Lehrsätze dienen. Wohnte die apodiktische Geltung den Grundsätzen nicht von vornherein kraft ihres reinanschaulichen Ursprungs bei, so würde doch bei aller Strenge der Beweise den Lehrsätzen dieselbe Zufälligkeit und Unsicherheit anhaften wie den Grundsätzen. Damit ist der Grund des Mißlingens der Anwendung der mathematischen Schlußweise in der Philosophie ohne weiteres aufgeklärt. Denn die erfolgreiche Anwendung dieser Methode setzt zu ihrer Möglichkeit bereits die der Mathematik eigentümliche Erkenntnisquelle voraus. In der Beschaffenheit dieser ursprünglichen Erkenntnisquelle, in der reinen Anschauung, nicht in der logischen Form der Schlüsse liegt der eigentliche Grund der mathematischen Gewißheit.

6.

Principia praeter necessitatem non esse multiplicanda, mit möglichst wenig Voraussetzungen möglichst viel zu beweisen: dies ist ein Postulat der Logik an jede systematische Wissenschaft. Diesem Postulat in der Mathematik Rechnung zu tragen, war eine der Hauptbemühungen der wissenschaftlichen Arbeit des verflossenen Jahrhunderts. Die mathematischen Axiome sind unmittelbar evidente Wahrheiten. Aber diese unmittelbare Evidenz genügt nicht zur Charakteristik eines Axioms, sondern nur diejenigen unmittelbar evidenten Sätze gelten als Axiome, auf deren Beweis wir verzichten. Dabei gelten als beweisbar nur solche Sätze, die durch eine endliche Anzahl rein syllogistischer Operationen aus unmittelbar evidenten Sätzen hergeleitet werden können. Da das genannte Postulat verlangt, daß alle Sätze, die überhaupt beweisbar sind, auch tatsächlich bewiesen werden, so ergiebt sich daraus die Aufgabe, die Zahl der Axiome auf ein Minimum zu reduzieren. Wir können diese Aufgabe auch so ausdrücken: Es soll ein System von Axiomen aufgestellt werden, derart, daß keins derselben aus den andern logisch hergeleitet werden kann. Soll aber dies System vollständig sein, so müssen wir fordern, daß sich aus den in ihm enthaltenen Axiomen allein, ohne Zuhilfenahme anderer Sätze, sämtliche Lehrsätze der Wissenschaft syllogistisch herleiten lassen. Eine Forderung, die übrigens, wie man leicht bemerkt, nur dann einen Sinn besitzt, wenn die — keineswegs selbstverständliche — Voraussetzung zutrifft, daß die Zahl der als Axiome definierten Sätze endlich ist.

7.

Wie läßt sich nun die logische Unabhängigkeit der Axiome prüfen? Die zur Lösung dieser Aufgabe ausgearbeitete Methode hat sich aus einer Kritik der Euklidischen Parallelentheorie entwickelt. Unter den von Euklid aufgestellten Grundsätzen der Geometrie befindet sich auch der Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden und die inneren an derselben Seite der schneidenden Geraden liegenden Winkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen, so schneiden sich die beiden Geraden auf der Seite dieser Winkel. Dieser Satz, der speziell als Euklidisches Axiom bezeichnet wird, nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als sich eine große Reihe von Lehrsätzen ohne ihn beweisen lassen. Erst zum Beweise seines 29. Lehrsatzes bedient sich Euklid des genannten Axioms. Es ist daher schon früh die

Frage aufgeworfen worden, ob dies Axiom sich nicht vielleicht ganz ausschalten lasse und aus den übrigen Voraussetzungen Euklids bewiesen werden könne. Die zahlreich angestellten Versuche, den Satz zu beweisen, schlugen indessen sämtlich fehl und wurden gegen Anfang des neunzehnten Jahrhunderts endgültig aufgegeben. An die Stelle dieser vergeblichen Bemühungen, den Satz zu beweisen, trat nun die Aufgabe, seine Unbeweisbarkeit darzutun. Zur Lösung dieser Aufgabe schlug Lobatschewsky folgendes Verfahren ein. Wenn das Euklidische Axiom von dem System der übrigen Axiome logisch unabhängig ist, so muß es möglich sein, eine in sich konsequente Geometrie zu entwickeln, in der eine diesem Axiom widersprechende Annahme zu Grunde gelegt wird. Denn, wenn die anderen Axiome nicht hinreichend sind, um über seine Gültigkeit zu entscheiden, so müssen sie mit seinem Gegenteil ebenso verträglich sein wie mit ihm selbst. Der Beweis der inneren Widerspruchslosigkeit einer dem Euklidischen Axiom widersprechenden Geometrie wäre daher zugleich ein überzeugender Beweis der Unbeweisbarkeit des Euklidischen Axioms. Nun ist das Euklidische Axiom gleichbedeutend mit dem sogenannten Parallelensatz: In einer Ebene läßt sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Gerade ziehen, welche die erstere nicht schneidet. Lobatschewsky versuchte daher eine Geometrie auszubilden, unter Beibehaltung aller übrigen Axiome, während er den Parallelensatz durch die Annahme ersetzte, daß sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mehr als eine nicht schneidende Gerade ziehen lassen. Es gelang ihm, diese Geometrie systematisch durchzuführen, ohne in den Folgerungen auf einen logischen Widerspruch zu stoßen. Daß ein solcher auch bei weiterer Entwicklung seiner Geometrie niemals auftreten kann, ohne einen Widerspruch in der gemeinen Euklidischen Geometrie selbst nach sich zu ziehen, ist später von Beltrami und Klein nachgewiesen worden.

8.

Es ist für die von Lobatschewsky ausgebildete „Nicht-Euklidische“ Geometrie charakteristisch, daß die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks nicht wie in der Euklidischen zwei Rechte, sondern weniger als zwei Rechte beträgt, und daß dieser Betrag um so geringer ist, je größer der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Die Differenz zwischen der Winkelsumme eines Dreiecks und zwei Rechten, der sogenannte Defekt, steht nämlich zu dem Flächeninhalt des Dreiecks in einem Verhältnis, welches auf Grund der Kongruenzaxiome einen konstanten Wert hat. Diese Konstante bezeichnet man, nach einer der Flächentheorie entlehnten Ausdrucksweise, als das „Krümmungsmaß“ des Raumes. Der Wert desselben beträgt in der Euklidischen Geometrie 0, während er in der Lobatschewskyschen Geometrie negativ ist. Man sieht ohne weiteres, daß neben der Lobatschewskyschen noch eine andere Nicht-Euklidische Geometrie möglich ist, nämlich diejenige, die ein positives Krümmungsmaß des Raumes zu Grunde legt. Dies ist die sogenannte Riemannsche Geometrie. Sie ist dadurch charakterisiert, daß sie annimmt, in einer Ebene lasse sich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden keine Parallele zu ihr ziehen, und durch die sich daraus ergebende Folgerung, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist. Sie ist ferner dadurch merkwürdig, daß auf Grund ihrer Annahmen dem Raume nicht mehr wie in der gewöhnlichen Geometrie unendliche Ausdehnung zugeschrieben werden kann. Vielmehr muß zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit unterschieden werden. Analog der Kugeloberfläche, die zwar keine Grenze hat, aber endlich ist, muß der Riemannsche Raum als zwar unbegrenzt, aber endlich gedacht werden.

9.

Das Parallelenaxiom ist nicht das einzige, dessen logische Unabhängigkeit durch die Methode der „Nicht-Euklidischen“ Geometrie erwiesen worden ist. Der Beweis seiner Unbeweisbarkeit bildet nur das erste und gleichsam klassische Beispiel einer nach streng logischer Methode geführten kritischen Untersuchung der Grundlagen der Geometrie. Seit Lobatschewsky, Gauß und Riemann hat die erweiterte Anwendung dieser Methode zur Gründung einer neuen, umfangreichen und selbständigen Disziplin der Mathematik geführt.

Auch auf die Grundlagen der Arithmetik beginnt man in neuerer Zeit mit Erfolg dasselbe Forschungsprinzip auszudehnen. Der Unabhängigkeitsbeweis wird hier durch die Aufstellung „komplexer Zahlensysteme“ geführt, d. h. durch den Nachweis der logischen Widerspruchslosigkeit eines Zahlensystems, das nicht sämtliche durch das vollständige System der arithmetischen Axiome bezeichneten Forderungen erfüllt. Zu diesem Axiomsystem gehört z. B. das „Archimedische“ Axiom: Wenn a und b zwei beliebige Zahlen sind und a kleiner ist als b, so giebt es stets ein Vielfaches von a, das größer ist als b. Der Unabhängigkeitsbeweis für dieses Axiom ist in der Tat durch Nachweisung der Möglichkeit eines „Nicht-Archimedischen“ Zahlensystems erbracht worden.

10.

Die angeführten Beispiele werden genügen, um den formalen Wert der Nicht-Euklidischen Geometrie und die methodische Bedeutung, die sie für die kritische Mathematik besitzt, deutlich hervortreten zu lassen[1]. Wenden wir uns nunmehr der Frage zu, in welchem Verhältnis die Nicht-Euklidischen Untersuchungen zu dem Problem des Ursprungs der mathematischen Axiome stehen, und welche Belehrungen uns aus jenen Untersuchungen für dieses Problem erwachsen. Es ist bekannt, welch' heftiger Streit seit der Veröffentlichung von Helmholtz' diesbezüglichen Arbeiten über diese Frage entbrannt ist. Dieser Streit betrifft vornehmlich das Verhältnis der neuen mathematischen Untersuchungen zur Kantischen Lehre von den synthetischen Urteilen a priori. Man hat auf der einen Seite gemeint, auf Grund der Nicht-Euklidischen Geometrie Kants Lehre vom reinanschaulichen Ursprung der Axiome widerlegen zu können, während man auf der anderen Seite geglaubt hat, auf Grund der Kantischen Lehre das ganze Unternehmen der Nicht-Euklidischen Geometrie verwerfen zu müssen. Nach den vorangeschickten Darlegungen der Kantischen Lehre einerseits und der Methode der Nicht-Euklidischen Geometrie andererseits werden wir keine Schwierigkeit finden, die Mißverständnisse, die die Streitfrage verdunkelt haben, zu beseitigen und dadurch eine äußerst einfache Lösung des Problems zu gewinnen.

11.

Kants Philosophie der Mathematik läßt sich in den einen Satz zusammenfassen: Die mathematischen Axiome sind synthetische

---

[1] Ich verstehe im Folgenden unter „Nicht-Euklidischer Geometrie" allgemein jedes geometrische System, das in seinen Voraussetzungen von irgend einem oder mehreren Axiomen der gewöhnlichen, Euklidischen Geometrie abweicht, beziehe mich also nicht speziell auf die eigentlich sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, die eine dem Parallelenaxiom widersprechende Annahme zu Grunde legt. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, spreche ich nur von der Geometrie und nicht auch ausdrücklich von der Arithmetik. Die folgenden Ausführungen lassen sich indessen auf Grund des § 9 Gesagten ohne weiteres auf die Arithmetik übertragen.

Urteile a priori. Darin liegen die beiden Behauptungen: 1) die Axiome sind nicht logischen Ursprungs, 2) sie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Aus der ersten Behauptung folgert Kant ihren Ursprung aus der Anschauung; aus der zweiten schließt er auf den nicht-empirischen Charakter dieser Anschauung.

Fragen wir zuerst: Diese Kantische Lehre vorausgesetzt, was folgt aus ihr für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie?

Die Axiome der Euklidischen Geometrie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Sie sind also notwendige Wahrheiten. Daraus hat man oft so weiter geschlossen: Notwendige Wahrheiten sind solche, deren Gegenteil unmöglich ist, — also ist eine Nicht-Euklidische Geometrie unmöglich. Und aus dieser angeblichen Konsequenz hat man dann von der andern Seite auf die Unrichtigkeit der Kantischen Behauptung zurückgeschlossen.

Der Fehler dieses Schlusses beruht auf einem zweifachen Gebrauch des Wortes „unmöglich“. Die Unmöglichkeit des Gegenteils eines Satzes kann nämlich einmal darin ihren Grund haben, daß sein Gegenteil einen inneren Widerspruch einschließt, d. h. daß die Verneinung seines Prädikatsbegriffs der Definition seines Subjektsbegriffs widerspricht. Dies ist der Fall bei der Verneinung analytischer Urteile. Die Unmöglichkeit des Gegenteils eines Satzes kann aber auch darauf beruhen, daß seine Verneinung irgend einer anderen, sonst schon feststehenden Wahrheit widerstreitet, z. B. der Anschauung, die wir von dem Gegenstande besitzen. Das letztere ist offenbar der Fall bei der Verneinung synthetischer Urteile. Die Notwendigkeit der ersteren Art ist rein logischer Natur und kommt ausschließlich analytischen Urteilen zu. Die Notwendigkeit der zweiten Art ist synthetischer Natur und bedingt keineswegs die logische Unmöglichkeit des

Gegenteils. Der synthetische Charakter der geometrischen Axiome schließt also die logische Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie so wenig aus, daß die Behauptung des ersteren vielmehr mit der der zweiten identisch ist.

Was andererseits die Apriorität der Axiome betrifft, so folgt aus ihr allerdings die synthetische Unmöglichkeit einer ihnen widersprechenden Geometrie. Die Nicht-Euklidische Geometrie bedarf jedoch für ihre Zwecke einzig und allein der logischen Möglichkeit ihres Systems, d. h. ihrer inneren Widerspruchslosigkeit, und es gehört zu den gröbsten Mißverständnissen dieser mathematischen Untersuchungen, daß sie bezweckten, die Gültigkeit der Euklidischen Axiome umzustoßen.

12.

Man hat sich lebhaft über die Vorstellbarkeit Nicht-Euklidischer Raumformen gestritten.

Es ist dem Mathematiker ein Leichtes, die Geometrie eines nach vier oder mehr Dimensionen ausgedehnten Raumes herzustellen: es gelingt ihm dies auf dem Wege der Rechnung. Etwas anderes aber ist die Frage, ob er sich anschaulich vier oder mehr in einem Punkte auf einander senkrecht stehende Geraden vorstellen kann, d. h. ob nicht nur der Begriff, sondern auch die Konstruktion eines mehr als dreidimensionalen Raumgebildes als möglich betrachtet werden muß. Daß die Unmöglichkeit dieser Konstruktion die Möglichkeit des Begriffs nicht ausschließt, ist einleuchtend. Verstehen wir unter Vorstellen Denken, so werden wir alles das als vorstellbar erachten, was keinen logischen Widerspruch einschließt. Wird aber zur Möglichkeit des Vorstellens Anschaulichkeit verlangt, so werden wir, um ein mathematisches Gebilde als vorstellbar zu bezeichnen, über die innere Widerspruchslosigkeit seines Begriffs hinaus die Ausführbarkeit seiner Konstruktion fordern müssen. Das Gebiet des anschaulich Vorstellbaren ist also notwendig enger als das des Denkbaren, und der wesentliche Unterschied beider läßt sich nicht in einen gradweisen verwandeln.

Es ist eine dem Euklidischen Raume wesentliche Eigenschaft, daß eine Figur, wenn sie um eine feste Achse rotiert, nach einmaliger Umdrehung in ihre Anfangslage zurückkehrt. Diese in der Geometrie gewöhnlich stillschweigend gemachte Annahme ist nicht selbstverständlich in dem Sinne, daß ihr Gegenteil undenkbar wäre. Es führt zu keinem Widerspruch, wenn man etwa annimmt, daß bei der Drehung einer Figur ihre Dimensionen proportional dem Drehungswinkel wachsen. In einer solchen Geometrie wäre der Kreis keine geschlossene Linie; die Linie gleicher Entfernung von einem festen Punkte wäre die Spirale. Ich frage nun: Ist eine nicht geschlossene Linie, die zugleich der Bedingung genügt, die Linie gleicher Entfernung von einem festen Punkte zu sein, anschaulich vorstellbar? Wir können den Begriff der Linie gleicher Entfernung ohne Mühe konstruieren; wir können uns desgleichen eine anschauliche Vorstellung der Spirale entwerfen. Aber in der durch Konstruktion erzeugten Anschauung liegt allemal mehr als in dem Begriff, dessen Gegenstand durch diese Anschauung vorgestellt wird. So wird durch Konstruktion der Linie gleicher Entfernung notwendig zugleich eine geschlossene Linie konstruiert, und durch die Konstruktion der Spirale zugleich notwendig eine Linie ungleicher Entfernung. Die Vereinigung beider Begriffe in eine Anschauung durch Konstruktion einer nicht geschlossenen Kreislinie läßt sich also nicht vollziehen, denn sie ist durch die Gesetze unserer Raumanschauung ausgeschlossen, so unzweifelhaft auch die logische Möglichkeit der Vereinigung dieser anschaulich unvereinbaren Begriffe feststeht.

Dieser Unterschied begründet eine Überlegenheit des Denkens über die Anschauung, die sich durch keine noch so große Übung und Gewandtheit in der Handhabung analytischer Operationen und perspektivischer Konstruktionen jemals ausgleichen läßt.

13.

Gehen wir zu der anderen Frage über, die uns noch zu beantworten bleibt: Welche Schlüsse lassen sich aus der Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie auf den Ursprung der Axiome ziehen? — Die Ansicht ist noch heute verbreitet und ist auch von manchen Mathematikern geteilt worden, daß die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie die Gültigkeit der Euklidischen zweifelhaft mache, und man hat, durch diese Meinung veranlaßt, das Vorrecht der letzteren auf ein bloßes Gewohnheitsrecht zurückzuführen gesucht. Ein Geometer, der so schließen würde, würde offenbar den Ast absägen, auf dem er sitzt; er würde die Selbständigkeit seiner eigenen Wissenschaft untergraben und sie in ein bloßes logisches Spiel mit analytischen Sätzen auflösen, nämlich mit der Ableitung der logischen Folgen aus beliebigen, durch Gewohnheit oder Bequemlichkeit bestimmten Annahmen, ohne den Gesichtspunkt der Wahrheit dieser Annahmen und ihrer Folgen. So daß z. B. einmal auf einem Naturforscher-Kongreß beschlossen werden könnte, statt der Euklidischen irgend eine Nicht-Euklidische Geometrie der Physik zu Grunde zu legen, oder daß eine nach in Europa angestellten Berechnungen gebaute Brücke in Amerika einstürzt, weil dort der Krümmungsradius des Raumes ein anderer ist.

Suchen wir nach einem Grunde für die angeführte Schlußweise, so können wir ihn in nichts anderem finden als in dem seit Aristoteles traditionell gewordenen, von Kant bekämpften Dogma, das als Kriterien der Wahrheit nur die Logik und die Erfahrung kennt. Nach diesem Dogma sind alle notwendigen Wahrheiten logischen Ursprungs. Es ist eine notwendige Konsequenz dieser Voraussetzung, daß alle Sätze, die sich der Zuständigkeit der Logik entziehen, aus der Erfahrung stammen. — Geht man indessen nicht von vornherein von diesem Dogma aus so läßt sich aus der Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht mehr und nicht weniger folgern als der nicht-logische Ursprung der Axiome. Daraus, daß der Euklidische Raum nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bildet, geht nur hervor, daß, wie Riemann es ausdrückt, „die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen". Mit andern Worten: die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie ist ein unwidersprechlicher Beweis des synthetischen Charakters der geometrischen Wahrheiten.

Es liegt auf der Hand, daß aus dieser Tatsache ein Schluß auf die Frage der Apriorität schlechterdings unmöglich ist. Denn die logische Widerspruchslosigkeit des Gegenteils findet bei allen synthetischen Sätzen als solchen statt, sie mögen nun a priori oder a posteriori gewiß sein. Es ist also ausgeschlossen, daß aus den Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Systeme jemals etwas für die Beantwortung der Aprioritätsfrage geleistet wird. Jene mathematischen Untersuchungen haben mit dieser philosophischen Frage nicht das geringste zu tun und sind von der Art ihrer Beantwortung gänzlich unabhängig. Die diese Frage betreffende Behauptung Kants wird daher durch die Nicht-Euklidische Geometrie gar nicht berührt.

So weit sich also überhaupt die Angelegenheiten der Nicht-

Euklidischen Geometrie mit denen der Kantischen Lehre berühren, nämlich in bezug auf Kants Entdeckung des nicht-logischen Ursprungs der Axiome, so können wir behaupten, daß die neuere Mathematik auf einem unabhängigen Wege eine glänzende Bestätigung der Kantischen Entdeckung geliefert hat.

Abhandlungen

der

Fries'schen Schule.

Neue Folge.

Herausgegeben von

Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser
und **Leonard Nelson.**

Drittes Heft.

Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1906.

IX.

Bemerkungen
über
die Nicht-Euklidische Geometrie
und den
Ursprung der mathematischen Gewissheit.

Von

Leonard Nelson.

Inhalt.[1]

[1] Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung von Nr. VIII dieser Abhandlungen.

14.

Bereits die Begründer der Nicht-Euklidischen Geometrie selbst haben versucht, erkenntnistheoretische Schlüsse aus ihren mathematischen Untersuchungen zu ziehen. Schon Lobatschewsky hat daraus, daß die Annahme der gewöhnlichen Geometrie, der Wert der Winkelsumme jedes geradlinigen Dreiecks sei konstant, „keine notwendige Folge unserer Begriffe vom Raume ist“, geschlossen, „nur die Erfahrung, z. B. die wirkliche Messung von den drei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks, könne die Wahrheit dieser Annahme bestätigen“ [1]. — Ebenso Riemann. Daraus, „daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen“, folgert er, daß die besonderen Eigenschaften, durch die sich der Euklidische Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten unterscheidet, „nur der Erfahrung entnommen werden können“ [2].

Am deutlichsten tritt die Form derselben Schlußweise bei Helmholtz hervor. Helmholtz sagt über die Kongruenzaxiome: [3]

„Wenn wir aber Denknotwendigkeiten auf diese Annahme freier Beweglichkeit fester Raumgebilde mit unveränderter Form

[1] Pangeometrie § 9. — [2] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. S. 2. — [3] Populär-wissenschaftliche Vorträge. 3. Auflage. 2. Band, 1. Vortrag, S. 7.

nach jeder Stelle des Raumes hin bauen wollen, so müssen wir die Frage aufwerfen, ob diese Annahme keine logisch unerwiesene Voraussetzung einschließt. Wir werden gleich nachher sehen, daß sie eine solche einschließt, und zwar eine sehr folgenreiche. Wenn sie das aber tut, so ist jeder Kongruenzbeweis auf eine nur aus der Erfahrung genommene Tatsache gestützt."

Hier wird ausdrücklich von dem nicht-logischen Ursprung der Axiome auf ihren empirischen Ursprung geschlossen. Dieses Argument setzt offenbar zu seiner Schlußkräftigkeit neben der ausgesprochenen Prämisse vom nicht-logischen Ursprung der Axiome als zweite Prämisse die stillschweigende Annahme irgend eines allgemeinen Obersatzes voraus. Dieser allgemeine Obersatz müßte die Form haben: Jede logisch unerwiesene Voraussetzung ist der Erfahrung entnommen. Man sieht ohne weiteres, daß dieser stillschweigend benutzte Obersatz nichts anderes ist als die Aristotelische Disjunktion zwischen Logik und Empirie als Erkenntnisquellen.

Dieses Argument bildet den Kernpunkt in Helmholtz' Angriff gegen Kant. Aber gerade jene Disjunktion, auf der dies Argument beruht, hatte Kant bestritten. Soll also die Helmholtzsche Argumentation mehr sein als eine Berufung auf das von Kant widerlegte Vorurteil, so ist sie eine offenbare petitio principii. —

15.

Sehen wir einmal von der reinen Anschauung ab, (welche ihrerseits selbst erst eine Bedingung der Möglichkeit der Erfahrung ist.) und suchen wir den a posteriori gegebenen Stoff der Erfahrung zu befragen, welche von den logisch-möglichen Geometrieen die gültige ist. Nehmen wir an, wir wollten durch Nachmessung der Winkel eines geradlinigen Dreiecks zwischen

Lobatschewsky, Euklid und Riemann entscheiden. Bedenken wir zuerst, daß die mathematisch geforderte absolute Genauigkeit durch empirische Messung unerreichbar ist. Wir würden vielleicht die Winkelsumme um einen gewissen Bruchteil einer Sekunde nahe bei zwei Rechten finden, bald darüber, bald darunter, und würden vielleicht auch durch Berechnung des Mittelwertes der gefundenen Beträge zwei Rechten um so näher kommen, je mehr wir die Beobachtungen häufen. Ob die Euklidische Geometrie genau oder nur angenähert gilt, wäre so nicht zu entscheiden. —

Man hat, mit Rücksicht darauf, daß in allen drei Geometrieen die Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei Rechten dem Flächeninhalt des Dreiecks proportional ist, vorgeschlagen, durch Messung möglichst großer, astronomischer Dreiecke die Frage zu entscheiden. Denn bei diesen könnte sich eine so große Abweichung von zwei Rechten herausstellen, daß wir gewiß sein könnten, daß der festgestellte Defekt nicht auf die Ungenauigkeit unserer Beobachtungsmittel zurückzuführen ist. Ist es also zwar unmöglich, die Gültigkeit des Euklidischen Axioms a posteriori zu erweisen, so ließe sich doch seine Ungültigkeit a posteriori erweisen.

Sehen wir ab von der Schwierigkeit, die Parallaxe eines Sterns unabhängig von dem Euklidischen Axiom zu bestimmen: nehmen wir etwa an, wir hätten das durch den Durchmesser der Erdbahn und den Sirius gebildete Dreieck ausgemessen und hätten einen Defekt von 3 Sekunden gefunden, während wir aus anderen Gründen wissen, daß die durch die Ungenauigkeit unserer Beobachtungsmittel bedingte Fehlergrenze 0,6 Sekunden nicht übersteigen kann. — Welcher Schluß wäre aus diesem Beobachtungsergebnis zu ziehen?

Was haben wir eigentlich gemessen? Die Winkel eines geradlinigen Dreiecks? Offenbar nicht. Denn die den Sirius mit der Erde verbindende Gerade ist uns empirisch gar nicht gegeben, sondern nur der vom Sirius zu uns gelangende Lichtstrahl, von dem wir annehmen, daß er geradlinige Form hat.

Würden wir also aus unseren Messungen schließen, daß die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks mehr als zwei Rechte beträgt, gemäß der Riemannschen Geometrie, entgegen der Euklidischen? Würden wir nicht vielmehr umgekehrt schließen — oder doch jedenfalls logisch ebenso gut schließen können —, daß unsere Voraussetzung der Geradlinigkeit der Lichtstrahlen unzutreffend war und daß wir somit gar kein geradliniges Dreieck gemessen haben.

Also weder die Gültigkeit noch die Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie läßt sich auf empirischem Wege nachweisen. Die Erfahrung kann die Axiome weder bestätigen noch widerlegen.[1]

---

[1] Es ist keine seltene Erscheinung, daß ein Entdecker, unter dem Eindruck der überraschenden Fruchtbarkeit der von ihm geschaffenen Forschungsmittel, diesen eine über ihren methodischen Wert hinausgehende metaphysische Bedeutung zuzuschreiben geneigt ist. Vielleicht das interessanteste Beispiel hierfür bietet die Geschichte der Infinitesimalrechnung. Wie nun hier die „unendlich kleinen Größen“ aus der Wissenschaft verschwunden sind, während die Grenzmethode ihre Fruchtbarkeit bewährt hat, so wird zweifellos auch die Nicht-Euklidische Geometrie aufhören ein Gegenstand metaphysischer Deutungsversuche zu sein, während sie ihre methodische Bedeutung nie verlieren wird.

Von historischem Interesse dürfte übrigens die wenig bekannt gewordene Tatsache sein, daß die im 19. Jahrhundert realisierte Idee einer „allgemeinen“ Geometrie ihren ersten Ursprung bei Kant hat. „Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte.“ So bemerkt gelegentlich der dreiundzwanzigjährige Kant (Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte. 1747. § 10). Schon diese Tatsache für sich könnte genügen, um die

16.

Man hört auch häufig folgendes Argument: die Wahrheiten der Geometrie gälten in der Natur nur angenähert, sie seien daher streng genommen Hypothesen, über deren mehr oder weniger genaue Übereinstimmung mit der Natur nur die Erfahrung entscheiden könne. „Daß die Halbmesser eines Kreises gleich sind, ist von allen Kreisen wahr, so weit es von irgend einem wahr ist, allein es ist von keinem einzigen Kreise genau wahr; es ist nur annähernd wahr, — so annähernd, daß man in der Praxis keinen Irrtum von Bedeutung begeht, wenn man es als genau wahr annimmt", sagt John Mill. „Der Charakter der Notwendigkeit, den man den Wahrheiten der Mathematik zuschreibt, ist eine Illusion, die man nicht anders aufrecht erhalten kann, als indem man annimmt, daß sich jene Wahrheiten auf rein imaginäre Gegenstände beziehen und nur deren Eigenschaften ausdrücken."

„Die eigentümliche Gewißheit, die man für eine charakteristische Eigenschaft der ersten Grundsätze der Geometrie hält, beruht also auf einer Fiktion. Die Sätze, auf welche die Schlüsse dieser Wissenschaft gegründet sind, entsprechen den Tatsachen ebensowenig genau, als in anderen Wissenschaften; allein wir nehmen an, daß sie es tun, um die Konsequenzen, die sich aus dieser Annahme ergeben, verfolgen zu können. Die Ansicht Dugald Stewarts rücksichtlich der Grundlagen der Geometrie, daß nämlich diese Wissenschaft auf Hypothesen gegründet ist, ist meines Erachtens wesentlich richtig." [1] — So sprechen auch

Unbesonnenheit derer ins Licht zu setzen, die unter Berufung auf die „Entdeckung" der Möglichkeit verschiedener Geometrieen gegen Kants mathematischen Apriorismus zu Felde ziehen.

[1] System der Logik. 2. Buch. 5. Kapitel, § 1.

Nicht mit Unrecht vergleicht Stallo die Achtung, welche Mill bei den zeitgenössischen Mathematikern und Naturforschern als ihr offizieller Logiker und

Riemann und Helmholtz von den „Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“.

Der Grundfehler dieser Argumentationsweise kann nicht zweifelhaft sein: er besteht in einer Verwechslung der mathematischen Begriffe mit den von diesen Begriffen geltenden Gesetzen. Der Satz von der Gleichheit aller Halbmesser eines Kreises gilt, wenn er überhaupt einen Sinn hat, von allen Kreisen ohne Ausnahme mit absoluter Genauigkeit. Ob aber in der Natur irgend ein Gegenstand existiert, dessen Figur genau oder nur angenähert kreisförmig ist, das bleibt durch jenen Satz ganz dahingestellt, und davon hängt seine Wahrheit und der Grad seiner Genauigkeit in keiner Weise ab.

Gewiß werden wir, wenn wir einen Naturkörper als kreisförmig bezeichnen, die Kreisförmigkeit desselben nur mit beschränkter Genauigkeit behaupten dürfen, und aus diesem Grunde auch die geometrischen Sätze über den Kreis nur nach Maßgabe der Genauigkeit dieser Behauptung, also nur mit einer gewissen Annäherung, auf den Körper anwenden können. Aber es hätte gar keinen Sinn, hieraus den Schluß ziehen zu wollen, daß die Sätze der Geometrie nur annähernd wahr sind und den Tatsachen nicht genau entsprechen. Denn die Geometrie des Kreises handelt nicht von Naturkörpern — weder von kreisförmigen, noch von nicht kreisförmigen —, sondern vom Kreise. Die beschränkte Anwendbarkeit der geometrischen Begriffe auf die Erfahrung vermag daher die Gültigkeit der geometrischen Gesetze auf keine Weise einzuschränken. „Wenn es auch niemals einen Kreis

Metaphysiker genoß, mit dem Ansehen, in dem Aristoteles bei den mittelalterlichen Scholastikern stand. In der Tat ist es vorzugsweise die Autorität Mills, durch die sich auch auf dem Festland das Vorurteil des mathematischen Empirismus mit besonderer Hartnäckigkeit festgesetzt hat.

oder ein Dreieck in der Natur geben sollte, so würden doch die von Euklid demonstrierten Wahrheiten in alle Ewigkeit ihre Gewißheit und Evidenz behalten“, sagt mit Recht Hume. Oder haben wir etwa die Genauigkeit der Gesetze der Kegelschnitte darum einzuschränken, weil wir wissen, daß die Planeten nicht genau die ihnen von Keppler zugeschriebene elliptische Bahn einhalten, oder weil wir Galileis parabolische Konstruktion der Wurfbewegung nur als angenähert richtig betrachten können?

Mill verwickelt sich aber noch dazu in einen groben Widerspruch mit sich selbst, wenn er als die Grundlage der Geometrie die Induktion bezeichnet und demgemäß den Ursprung der geometrischen Begriffe aus der Erfahrung abzuleiten sucht. „Die Punkte, Linien, Kreise und Quadrate, die jemand in seinem Bewußtsein hat“, behauptet er, „sind nichts als Abbilder der Punkte, Linien, Kreise und Quadrate, die ihm die Erfahrung vorgeführt hat.“ Wenn dem so wäre, wie kann dann noch von einer Nicht-Übereinstimmung der Geometrie mit der Erfahrung die Rede sein? Wenn die geometrischen Gebilde nur Abbilder der Gegenstände der Erfahrung sind, so fehlt ja jeder Maßstab, mit dem verglichen die Gegenstände der Erfahrung sich als abweichend erweisen könnten. —

Wenn aber die Mathematik keine Erfahrungswissenschaft ist, so ist es auch von vornherein unstatthaft, ihre Grundsätze, die Axiome, als Hypothesen zu bezeichnen. Hypothesen sind Sätze, deren hinreichender Grund nicht gegeben ist, d. h. deren Verhältnis zur unmittelbaren Erkenntnis unbestimmt ist. Solche Sätze kann es streng genommen nur in empirischen Wissenschaften geben. Denn in diesen und nur in diesen hängt das Gegebenwerden der den Grund ihrer Urteile bildenden unmittelbaren Erkenntnis von für die Vernunft zufälliger sinnlicher Anregung ab. Erfahrungswissenschaften müssen daher infolge der stets möglichen Erweiterung ihrer unmittelbaren Erkenntnis jederzeit einen Spielraum für Hypothesen offen lassen. In rationalen Wissenschaften dagegen steht die den Grund ihrer Urteile bildende unmittelbare Erkenntnis ein für allemal fest und ist jederzeit in unserer Gewalt. Denn sie ist durch die Vernunft selbst gegeben, und es bedarf lediglich der willkürlichen Reflexion, um sie deutlich zu machen und ihr Verhältnis zu dem fraglichen Urteil zu bestimmen, d. h. dieses zu begründen. In rationalen Wissenschaften kann es folglich keine Hypothesen geben.

17.

In der Tat gelangen wir auf keinem anderen Wege zu den Grundbegriffen und Grundsätzen der Geometrie als durch Abstraktion von der Erfahrung. Allein, Abstraktion ist nicht Induktion. Es liegt schon im Begriff des Grundsatzes, daß Grundsätze keine erschlossenen Wahrheiten sein können. Die Induktion ist aber ein Schlußverfahren, nämlich der disjunktive Schluß von den Fällen auf das Gesetz; ein Schluß, der übrigens, wie alle Schlußarten, zu seiner Möglichkeit bereits irgend welche allgemeinen Obersätze nicht-empirischen Ursprungs voraussetzt. Der Zweck der Induktion ist es, über die unmittelbar beobachteten Tatsachen hinaus zur Interpolation und Extrapolation zu leiten. Jede Induktion bedarf daher irgend eines allgemeinen Prinzips, das die Berechtigung und Anweisung zum Hinausgehen über die beobachteten Tatsachen liefert, und das folglich selbst nicht wiederum induktorischen Ursprungs sein kann. Die bloße Möglichkeit einer induktorischen Wissenschaft genügt daher schon, um die Existenz einer nicht-induktorischen Wissenschaft zu beweisen. Eine solche nicht-induktorische Wissenschaft ist die reine Mathematik, (wie dies schon ihr Name andeutet,) und als solche liegt sie allen induktorischen Wissenschaften als Bedingung ihrer Möglichkeit zu Grunde. Keppler kam nicht durch seine Induktion auf die Gesetze der Kegelschnitte, sondern er wandte nur diese Gesetze, die er schon a priori hatte und die ursprünglich nur der Geometrie angehörten, durch seine Induktion auf die Astronomie an. — Wer also weiß, was eine Induktion ist, der wird niemals mit Mill behaupten können, die Induktion sei das Fundament der mathematischen Wissenschaften.

Man hat die Geometrie als das Studium der starren Körper und der die Bewegung derselben regelnden Gesetze bezeichnet. In der Tat: nur die starren Körper, die uns die Erfahrung zeigt, bieten uns Gelegenheit zur Abstraktion unserer Begriffe von Kongruenz, auf welche alle räumliche Messung sich gründet. Wenn es also keine starren Körper in der Natur gäbe, so würden wir auch keine Geometrie haben. — Aber etwas anderes ist die Frage nach den Gelegenheitsursachen der Entwickelung unserer geometrischen Grundbegriffe, etwas anderes die Frage nach dem Ursprung dieser Begriffe. Wenngleich wir nur durch Erfahrung veranlaßt zur Entwickelung dieser Begriffe gelangen, so entspringen dieselben doch nicht aus der Erfahrung[1]. Die Abstraktion, durch die wir zu den geometrischen Grundbegriffen gelangen, besteht in der Reflexion auf die räumliche Form der Anordnung der uns in der Erfahrung gegebenen Sinnesqualitäten und auf

[1] Bis zu welchem Grade von Verblendung die empiristische Verwirrung dieser Begriffe führen kann, davon finden wir ein ergötzliches Beispiel bei E. Schröder, der in seinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra“ diesen Wissenschaften das folgende, „einzige Axiom“ zu Grunde legt: „Das gedachte Prinzip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es gibt uns die Gewißheit, daß bei allen unsern Entwickelungen und Schlußfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung — noch fester aber am Papiere — haften.“

die Ausdehnungs- und Maßverhältnisse dieser Anordnung, während wir von den in diesen Verhältnissen angeordneten Qualitäten selbst absehen. Wir erwerben uns also nicht erst die Raumanschauung durch Abstraktion aus der Erfahrung, sondern wir isolieren sie nur durch diese Abstraktion aus dem verbundenen Ganzen unserer Erkenntnis und bringen sie uns abgesondert zum Bewußtsein.

Nicht also Fiktionen (wie Mill meint) bilden den Gegenstand der Geometrie, sondern Abstraktionen. Es gibt nicht einen besonderen mathematischen Raum, der als Objekt des Geometers diente, und einen von diesem verschiedenen physikalischen Raum, auf welchen die Eigenschaften des ersteren mehr oder weniger genau zu übertragen eine Sache der Erfahrung wäre. Der Raum des Geometers ist mit dem Raum, in dem sich die Naturkörper befinden, schlechthin identisch, und die geometrischen Abstraktionen haben zugleich eine reelle Bedeutung als Formen wirklicher (oder möglicher) Gegenstände.

Die geometrischen Gebilde sind also einerseits Gegenstände der reinen Anschauung, andererseits aber sind sie im Ganzen unserer Erkenntnis doch nur Formen bestimmter (physikalischer) Gegenstände. So z. B. ist das Dreieck eine rein-anschauliche Figur und bildet mit allen aus dem Gesetz seiner Konstruktion folgenden Eigenschaften einen Gegenstand der Geometrie. Aber an Gegenständen der Erfahrung ist es nur die Form solcher, welche dreieckig sind.

Form ist überhaupt dasjenige, was den Grund dafür bildet, daß Mannigfaltiges in gewissen Verhältnissen geordnet erscheint. So finden wir im Raum das Mannigfaltige der Sinnesanschauung in gewissen Ausdehnungs- und Maßverhältnissen angeordnet. Der Raum ist also die Form der Sinnesanschauung. Da nun die Form der Nebeneinanderordnung des Mannigfaltigen der Sinnesanschauung nicht selbst wieder ein Gegenstand der Sinnesanschauung sein kann, so ist der Raum, obgleich die Form der Sinnesanschauung, doch selbst nur ein Gegenstand der reinen Anschauung. — Ist aber der Raum ein Gegenstand der reinen Anschauung, so ist es auch eine wissenschaftliche Aufgabe, die gesetzmäßigen Eigenschaften dieser rein-anschaulichen Form zu erforschen. Die wissenschaftliche Erkenntnis des Raums ist aber die Geometrie. Die Geometrie ist also eine Wissenschaft aus reiner Anschauung.[1]

18.

„Beruhten die geometrischen Sätze auf reiner Anschauung, so brauchten wir sie nicht zu lernen", sagt Ernst Mach[2], einem sehr verbreiteten Mißverständnis Ausdruck gebend. Was heißt es denn, wenn wir sagen, daß wir einen geometrischen Satz lernen? Mach wird den wesentlichen Unterschied nicht leugnen wollen,

---

[1] Ich hebe das letztere besonders deshalb hervor, weil daraus die Unhaltbarkeit der von Helmholtz vertretenen Ansicht hervorgeht, nach der zwar der Raum selbst eine reine Anschauungsform sein, der Ursprung der Axiome dagegen in der Erfahrung liegen soll. Die Axiome sind in der Tat nichts anderes als die begriffliche Formulierung der einfachsten Grundverhältnisse der Raumanschauung selbst.

Der Einwand, daß aus der Apriorität der Raumanschauung zwar die Apriorität gewisser, aber nicht notwendig aller geometrischer Axiome folgt, würde Kant wenigstens nicht treffen. Denn die Vernunftkritik behauptet nur die Existenz einer Wissenschaft vom Raum aus reiner Anschauung, gleichviel welcher Umfang dieser Wissenschaft zuzuschreiben ist. Angenommen, der Beweis der empirischen Natur des Parallelenaxioms wäre gelungen, (was, wie wir gezeigt haben, nicht der Fall ist,) so würde dieser Beweis die Kantische Behauptung nicht umstoßen, sondern nur dahin ergänzen, daß dieser Satz aus der Geometrie in die Empirie zu verweisen wäre. Die einmal von Gauß geäußerte Vermutung, „daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können", ist also mit der Kantischen Lehre sehr wohl vereinbar. (Vgl. Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, S. 490.)

[2] Die Analyse der Empfindungen. 4. Auflage, 1903, S. 270.

der zwischen dem Erlernen historischer Tatsachen und dem Erlernen mathematischer Wahrheiten besteht. Die Kenntnis der ersteren ist für den Einzelnen zufällig und kann nur durch Belehrung von außen her erworben werden. Das Erlernen mathematischer Wahrheiten dagegen besteht (wie bereits Platon im Menon gezeigt hat) nicht sowohl in der Erwerbung der mathematischen Erkenntnis selbst, als vielmehr in der Erwerbung der Einsicht in dieselbe. Diese Einsicht allein ist es, die durch das Studium der mathematischen Wissenschaften erworben wird, und sie ist mithin ein zufälliger, von äußeren Umständen abhängender Besitz. Die mathematische Erkenntnis selbst aber, die man sich durch dies Studium nur zum Bewußtsein bringt, ist für jedermann notwendig, und jedermann kann sich eine Einsicht in dieselbe verschaffen, wenngleich, ob er es wirklich tut, nur von der Erfahrung abhängig ist.

Da nach Mach Alles in der Welt lediglich aus Empfindungen besteht[1], so ist es freilich nur natürlich, daß er auch die Raumvorstellung nur als Empfindung angesehen wissen will. Aber es ist bemerkenswert, daß auch Mach sich genötigt sieht, zu gestehen, daß das, was er als „Raumempfindung“ bezeichnet, „von der Sinnesempfindung zu unterscheiden“ ist und daß die Raumempfindungen „den variierenden Sinnesempfindungen gegenüber ein festes Register bilden, in welches letztere eingeordnet werden“.[2]

Wären übrigens alle Wahrheiten, die wir erst „lernen“ müssen, empirischen Ursprungs, so würde dies nicht allein von der Geometrie, sondern in gleicher Weise auch von der Arithmetik, ja sogar von der Logik gelten. Denn der Besitz keiner dieser Wissenschaften ist uns angeboren. Damit aber wäre zugleich die Notwendigkeit

---

[1] Ebenda, S. 10. — [2] Ebenda, S. 142.

und Allgemeingültigkeit dieser Wissenschaften aufgehoben, — eine Konsequenz, die selbst Mach schwerlich zu vertreten geneigt sein dürfte.

19.

Man hat behauptet, wenn die Erkenntnisquelle der Mathematik in der Anschauung läge, so würde ihren Sätzen die Genauigkeit fehlen. „Die Raumanschauung ist zunächst etwas Ungenaues, welches wir zum Zwecke der mathematischen Behandlung in den sogenannten Axiomen idealisieren“, sagt Felix Klein[1]. Und in seinem berühmten Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von Lie heißt es: „Die Ergebnisse irgend welcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit. In dieser Idealisierung der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome.“[2] — Die Ergebnisse der Beobachtung, d. h. der empirischen Anschauung, gelten allerdings stets nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter bestimmten Bedingungen. Allein, jede Idealisierung setzt ein Ideal voraus, und wir müssen uns daher fragen, von welcher Beschaffenheit und welchen Ursprungs denn das hier vorausgesetzte Ideal sein soll? Dies Ideal kann offenbar nicht selbst der Beobachtung entlehnt sein, da es ja gerade die Norm zur Korrektur der Beobachtung bilden soll. Dies Ideal ist in der Tat nichts anderes als die reine Anschauung, und der hier als Idealisierung bezeichnete Prozeß besteht nicht sowohl in dem

[1] Über Arithmetisierung der Mathematik. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1895. Heft 2, S. 83.

[2] Mathematische Annalen. 50. Band, 1898, S. 585.

Übergang von der „Anschauung“ zu den Axiomen als vielmehr in dem Übergang von der **empirischen** Anschauung zur **reinen** (nicht „inneren“) Anschauung. Die in den Axiomen enthaltene Idealisierung der empirischen Daten wäre ohne die Voraussetzung der **reinen** Anschauung gar nicht möglich, weil uns ohne diese jeder Maßstab fehlen würde, der uns als „Ideal“ der Präzision dienen könnte, und weil uns ebenso jedes Kriterium fehlen würde, das die „absolute Allgemeinheit“ dieser Aussagen gewährleisten könnte. —

Es ist wiederholt darauf aufmerksam gemacht worden, daß manche Fehler in der Geschichte der Mathematik durch eine einseitige Beachtung der Anschauung veranlaßt worden sind, indem diese dazu geführt hat, in übereilter Weise Sätze als allgemeingültig anzusehen, die es in der Tat nicht sind. Das berühmteste Beispiel dieser Art ist die lange Zeit nicht nur für richtig, sondern sogar für selbstverständlich gehaltene Voraussetzung der Differenzierbarkeit aller stetigen Funktionen.

Ein solcher Fehler liegt jedoch in keinem Falle in der mathematischen Anschauung selbst. Er beruht vielmehr entweder darauf, daß man im Vertrauen auf die ungenaue empirische Anschauung diese unbewußt der reinen unterschiebt, oder darauf, daß man sich mit einer unvollständigen Induktion begnügt, die man fälschlich wie eine vollständige ansieht, d. h. also auf einem aus der Anschauung gezogenen Schlusse.

Das letztere ist der Fall bei dem genannten Beispiel. Die Stetigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung der Differenzierbarkeit, und erst die strengere Unterscheidung dieser Begriffe, nicht aber eine Korrektur der Anschauung führte zur Richtigstellung des wahren Sachverhalts. — Wenn sich nur die differenzierbaren stetigen Funktionen durch stetig verlaufende

Kurven geometrisch darstellen lassen, und wenn sich trotzdem die Existenz nicht differenzierbarer stetiger Funktionen auf analytischem Wege beweisen läßt, so steht doch das Ergebnis dieses Beweises keineswegs mit der Anschauung in Widerspruch. Denn die geometrische Darstellbarkeit ist kein notwendiges Kriterium der Existenz eines mathematischen Begriffs. Vielmehr genügt in der Mathematik zur Feststellung der Existenz eines Begriffs die Nachweisung seiner Übereinstimmung mit sich selbst und mit den Axiomen. Die Axiome ihrerseits beziehen sich aber nicht nur unmittelbar auf die reine Anschauung, sondern sie können auch zu ihrer Möglichkeit diese unmittelbare Beziehung auf die Anschauung nicht entbehren. Dies gilt von den Axiomen der Analysis ebenso wie von denen der Geometrie. Es kann folglich auch jeder Existenzbeweis für einen geometrisch nicht darstellbaren und überhaupt nicht unmittelbar anschaulichen Begriff nur auf Grund einer mittelbaren Berufung auf die Anschauung geführt werden.

20.

Aus dem logischen Postulat der vollständigen Zurückführung unserer Erkenntnis auf ihre Prinzipien entspringt die Forderung, jeden überhaupt erweislichen Satz vermittelst rein syllogistischer Operationen auf die Axiome zurückzuführen. Es ist daher ein berechtigtes und der wissenschaftlichen Strenge förderliches Bestreben der neueren Mathematik, den Gebrauch der Anschauung aus der systematischen Entwickelung der Beweise zu eliminieren und insbesondere bei der Ableitung arithmetischer Sätze die Benutzung geometrischer Interpretationen zu vermeiden. Die erfolgreiche Durchführung dieser besonders von Weierstraß ausgegangenen Bestrebungen hat zu der als „Arithmetisierung" bezeichneten Behandlungsweise der Mathematik geführt.

Diese Bestrebungen haben zu mannigfachen Mißverständnissen Anlaß gegeben. Insbesondere hat man vielfach die Vermutung ausgesprochen, die schließliche Folge oder gar das eigentliche Ziel der Arithmetisierung läge in der gänzlichen Verdrängung der mathematischen Anschauung und in ihrer Ersetzung durch einen logischen Formalismus. Es läßt sich indessen leicht zeigen, daß diese Vermutung irrig ist und daß selbst die vollständig durchgeführte Arithmetisierung die mathematische Anschauung nicht entbehrlich machen kann. Ein Beweis ist nämlich nichts anderes als die logische Zurückführung eines Lehrsatzes auf die Axiome, und also, vermittelst dieser, auf die Anschauung. Während uns die unmittelbare Anschauung schon bei der Betrachtung komplizierterer geometrischer Gebilde sehr bald im Stiche läßt, besteht der richtig verstandene Zweck der Arithmetisierung gerade in einer möglichst vollständigen begrifflichen Analyse des in den Axiomen formulierten Gehalts der mathematischen Anschauung.

Dies Verhältnis wird bei einer genaueren Betrachtung des Wesens der Arithmetisierung noch deutlicher werden. Streng genommen sind es nämlich zwei verschiedene Forderungen, die man unter der Bezeichnung der „Arithmetisierung der Mathematik“ zusammengefaßt hat und die nicht immer mit der nötigen Schärfe unterschieden worden sind: einerseits die Forderung der rein syllogistischen Ableitung jedes erweislichen mathematischen Satzes, und andererseits die Forderung der rein arithmetischen Bearbeitung arithmetischer Probleme oder, nach Dedekinds Ausdruck, die Forderung, „daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln solle“[1]. Die eine Forderung läuft auf die Ausscheidung der Anschauung aus den mathematischen Beweisen hinaus, die andere auf

[1] Stetigkeit und irrationale Zahlen. § 3.

die Ausscheidung geometrischer Interpretationen aus der Begründung der Arithmetik. Die eine hat zum Ziel eine strenge Trennung von Anschauung und Denken in der Mathematik, die andere eine strenge Trennung der Analysis von der Geometrie. Die Vermengung dieser beiden an sich richtigen Forderungen hat zu der fehlerhaften Forderung geführt, die Mathematik überhaupt auf die Arithmetik zurückzuführen, zu der irrigen Ansicht, nur das dürfe als gesicherter Bestand mathematischer Wissenschaft gelten, was durch ausschließlich arithmetische Beweisführung begründet werden könne. Die schließliche Konsequenz dieser letzteren Ansicht wäre die Ausscheidung der Geometrie aus der reinen Mathematik, — eine Konsequenz, die wirklich bereits ihre Vertreter gefunden hat.

In der Tat läßt sich ein geometrischer Satz nie restlos auf einen arithmetischen zurückführen, wenngleich sich den geometrischen Konstruktionen arithmetische Ausdrücke zuordnen lassen und man auf Grund dieser Zuordnung die Beziehungen zwischen den geometrischen Gebilden an der Hand derjenigen zwischen den entsprechenden arithmetischen studieren kann. Aber der ursprüngliche Unterschied zwischen der Geometrie und der Arithmetik fällt gleichwohl nicht mit dem Unterschied der anschaulichen Erkenntnis und des logischen Denkens zusammen. Geometrie und Arithmetik sind durch ihre Gegenstände unterschieden; die erstere hat es mit räumlich ausgedehnten Größen, die zweite hat es lediglich mit Zahlen zu tun. Anschauliche und gedachte Erkenntnis hingegen unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer Gegenstände, sondern vielmehr hinsichtlich der Erkenntnisweise. Anschauung ist eine unmittelbare Erkenntnis ihrer Gegenstände, Denken hingegen die durch Begriffe vermittelte Erkenntnis derselben Gegenstände. Die Verwechslung dieser beiden Unterschiede mußte in Verbindung mit der allgemein angenommenen Disjunktion zwischen Logik und Empirie notwendig zu dem Unternehmen führen, die Arithmetik der Logik und die Geometrie der Empirie zuzuweisen und somit die letztere aus der reinen Mathematik auszuschließen. Die Geometrie ist indessen so wenig Empirie wie die Arithmetik Logik. Vielmehr findet die Trennung anschaulicher und gedachter Erkenntnis ganz innerhalb beider Disziplinen statt. Das Postulat der systematischen Strenge, d. h. die Forderung, die Rolle der Anschauung aus den Beweisen auszuscheiden und auf die Begründung der Axiome einzuschränken, betrifft daher gleicherweise beide Wissenschaften und kann mithin ebenso wenig zu einer völligen Beseitigung der Anschauung aus der Begründung der Arithmetik, wie zu einer Ausschließung der Geometrie aus der reinen Mathematik führen.

Die Mathematik entwickelt sich also, obschon in Begriffen und durch Begriffe, dennoch *aus* der Anschauung.

21.

Vor der Entdeckung des Unterschieds der analytischen und synthetischen Urteile mußte freilich der Versuch einer prinzipiellen Scheidung zwischen Mathematik und Logik als ein müßiges und willkürliches Unternehmen erscheinen. Wenn für die Geometrie wenigstens diese Trennung heute unter den Mathematikern allgemeine Anerkennung findet, so hat dies, wie wir gesehen haben, seinen Grund in der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Axiomensysteme, deren Möglichkeit auf das Evidenteste den synthetischen Charakter der geometrischen Axiome erweist. Der Umstand, daß in jüngster Zeit durch das Gelingen des Aufbaus der komplexen Zahlensysteme die analoge Arbeit auch für die Arithmetik geleistet worden ist, wird gewiß auch in dieser Disziplin die rein-logischen

Begründungsversuche bald als unhaltbar und veraltet erscheinen lassen. Damit aber wird man zugleich gezwungen sein, die Alternative zwischen Logik und Erfahrung als Erkenntniskriterien endgültig aufzugeben, und so wird sich endlich auch der aus dieser irrigen Alternative entsprungene geometrische Empirismus als nichtig erweisen.

Um den analytischen Charakter der arithmetischen Urteile zu erhärten, hat man die Behauptung aufgestellt, daß es möglich sei, sie zu beweisen, „ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind“.[1] Hierauf haben wir zunächst zu erwidern, daß, wenn man die analytischen Urteile als solche definiert, welche sich ausschließlich auf „die allgemeinen logischen Gesetze“ gründen, sich die Frage erhebt, nach welchem Kriterium sich denn die „allgemein logische Natur“ eines Gesetzes entscheiden lasse? Ein solches Kriterium werden wir fordern müssen, wenn wir nicht etwa von vornherein das Gebiet der Logik durch eine willkürliche Festsetzung dogmatisch abgrenzen wollen; in welchem Falle offenbar die Frage nach den Grenzen der Logik und der Arithmetik jedes wissenschaftliche Interesse verlieren würde. Ein solches Kriterium bietet sich in der Unterscheidung der analytischen und synthetischen Urteile. Aber wir müssen wohl beachten, daß wir die Definition dieses Unterschiedes nicht wiederum auf den Begriff der Logik gründen dürfen, wofern wir nicht in einen offenbaren Zirkel im Erklären geraten wollen.[2]

Ferner aber müssen wir daran erinnern, daß „die rein logi-

---

[1] Vgl. Frege, Grundlagen der Arithmetik, S. 4.

[2] Diesen Umstand scheint selbst Kerry übersehen zu haben, dessen klaren und gründlichen Ausführungen über die vorliegende Streitfrage wir im Wesentlichen zustimmen müssen. (Vgl. Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, Bd. 11, S. 249—307.)

sche Natur der arithmetischen Schlußweisen“ keineswegs die rein logische Natur der durch solche Schlußweisen erschlossenen Sätze bedingt. Wäre dies richtig, so würde sich alle Wissenschaft überhaupt, soweit sie nur irgend dem Postulat der systematischen Strenge genügt, in bloße Logik auflösen. Daß vielmehr die logische oder nicht-logische Natur eines Satzes davon ganz unabhängig ist, ob er rein logisch erschlossen ist oder nicht, geht schon daraus hervor, daß wir auch aus induktorisch gewonnenen Prämissen streng logische Schlüsse ziehen können. Die letztere Möglichkeit wird durch die theoretische Physik realisiert; und da also die Prämissen derselben zweifellos nicht logischer Natur sind, können auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen nicht rein logischer Natur sein. Die logische oder nicht-logische Natur einer durch logische Schlüsse abgeleiteten Wahrheit hängt also allein von der logischen oder nicht-logischen Natur ihrer Prämissen ab.

Halten wir uns nun an das angegebene Kriterium, so bedarf es nur geringen Nachdenkens, um den nicht-logischen Charakter der arithmetischen Prämissen, und somit der arithmetischen Wahrheiten überhaupt, zu erkennen. Wir brauchen hierzu nur den schon von Leibniz aus angeblich rein logischen Prämissen geführten Beweis des Satzes $2 + 2 = 4$ zu zergliedern. Leibniz definiert die Zahlen 2, 3, 4 durch die Gleichungen: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, und meint aus diesen Definitionen allein den Beweis führen zu können. Allein, näher zugesehen bedürfen wir, um von der Gleichung $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ weiter schließen zu können, eines aus den aufgestellten Definitionen nicht zu entnehmenden Satzes, der uns zu der Gleichung führt:

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1.$$

Erst wenn wir zu dieser letzteren Gleichung gelangt sind, werden wir aus den Definitionen weiter folgern dürfen: $(2+1)+1 = 3+1 = 4$. Das bei dem Beweis stillschweigend vorausgesetzte, aus den Definitionen der vorkommenden Begriffe unableitbare Axiom ist das assoziative Gesetz der Addition.

Die Formel

$$a + (b+1) = (a+b) + 1,$$

die die Graßmannsche Formulierung dieses Axioms bildet, ist zwar, mathematisch betrachtet, eine reine Identität. Aber was der Mathematiker eine Identität nennt, ist keineswegs eine Identität im logischen Sinne. Denn das Gleichheitszeichen ist ein Zeichen für die Identität der Größe zweier Gegenstände. Aber die Identität der Größe zweier Gegenstände ist nicht die Identität zweier Begriffe.

Es springt ferner sofort in die Augen, daß beispielsweise die Unendlichkeit der Zahlenreihe, also das Axiom, daß auf jede Zahl eine andere folgt, sich auf keine Weise als eine begriffliche Notwendigkeit herleiten läßt. Das Axiom entspringt also nicht aus reinem Denken, sondern aus reiner Anschauung. — Wir erkennen aber auch zugleich, daß einige Sätze, die man unter den arithmetischen Axiomen aufzuzählen pflegt, in der Tat logischen Ursprungs sind. Hierher gehört der Satz: Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch untereinander gleich. Denn, wenn wir haben: $a = b$ und $b = c$, so können wir, da Gleichheit Identität hinsichtlich der Größe bedeutet, in der ersten Gleichung b durch c substituieren und erhalten $a = c$. Der Satz geht mithin unmittelbar aus dem Begriff der Gleichheit hervor. — Hierher gehört aber auch das Prinzip der vollständigen Induktion: Ist ein Gesetz für das erste Glied einer Reihe erfüllt, und folgt aus seiner Gültigkeit für irgend ein Glied seine Gültigkeit für das nächstfolgende Glied, so gilt es für alle Glieder der Reihe. Die logische Notwendigkeit dieses Satzes zeigt sich am deutlichsten, wenn man versucht die Annahme seiner Ungültigkeit auch nur an irgend einem Beispiele durchzuführen. — Es läßt sich sehr wohl ohne logischen Widerspruch ein System von Zahlen denken, die z. B. das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht erfüllen, oder für die das Archimedische Axiom nicht gilt. Es läßt sich hingegen kein arithmetisches System ohne logischen Widerspruch durchführen, das das genannte Gesetz der Größengleichheit oder das Prinzip der vollständigen Induktion nicht erfüllt. Das Mißlingen dieser Versuche lehrt uns ebenso bestimmt den logischen Ursprung der letzteren Gesetze einsehen, wie das Gelingen jener den synthetischen Charakter der ersteren.

Auf solche Weise können wir aufs Genaueste die logische oder arithmetische Natur eines jeden vorgelegten Satzes entscheiden.

22.

Natürlich unterliegt die Mathematik, wie jede Wissenschaft, den Gesetzen der Logik. Aber die Logik vermag nur negative Bedingungen der mathematischen Wahrheit aufzustellen, insofern sie den Widerspruch ausschließt. So ist z. B. der Begriff des Differentialquotienten einer an keiner Stelle stetigen Funktion ein logisch unmöglicher Begriff, denn er schließt einen Widerspruch ein. Allein, logische Widerspruchslosigkeit bedeutet noch nicht mathematische Existenz. Der Begriff der größten Primzahl, oder, um ein geometrisches Beispiel zu nennen, der Begriff eines regulären Siebzehnflächners, ist ein logisch möglicher, nichtsdestoweniger aber mathematisch nicht existierender Begriff. Denn, wenn er gleich keinen Widerspruch enthält, so widerstreitet er doch der mathematischen Anschauung. Die positiven Kriterien der mathematischen Existenz lassen sich daher aus bloßer Logik nicht ableiten.[1]

Um dennoch den logischen Charakter der Arithmetik um jeden Preis aufrecht zu erhalten, hat man sich bemüht, die Axiome durch geeignete Definitionen der in ihnen auftretenden Begriffe zu ersetzen. Der Satz $a \cdot 1 = a$, so argumentiert man beispielsweise, besage im Grunde nichts anderes als die Definition der Zahl 1. Nun mag allerdings zugegeben werden, daß wir die Zahl 1 durch diese Identität, d. h. also als Invariante der Multiplikation, definieren können. Aber alsdann bleibt uns noch die wesentliche Aussage übrig, daß es eine solche Invariante der Multiplikation auch wirklich gibt; und diese Aussage ist, wie jeder Existenzialsatz, synthetisch. Und so würden auch die übrigen Axiome durch Definitionen niemals wirklich ersetzt werden können, da zu jeder neuen Definition auch wieder ein eigenes Axiom über die Existenz des definierten Begriffs oder der definierten Operation hinzutreten müßte. Oder, falls man die Existenz der definierten Gebilde beweisen will, so muß doch zur Möglichkeit jedes Existenzbeweises schon die Existenz der in der Definition als Elemente auftretenden Begriffe axiomatisch vorausgesetzt werden. — Hieran scheitert z. B. auch der Versuch das oben genannte Graßmannsche Axiom als Definition der Addition aufzufassen. Denn abgesehen davon, daß wir, um den Sinn des + Zeichens auf der linken Seite der Gleichung durch die rechte Seite zu erklären, bereits die Bedeutung

[1] Wer es freilich vorzieht, das, was wir, dem Sprachgebrauch gemäß, als logische Möglichkeit bezeichnen, „Existenz“ zu nennen, der mag in der Widerspruchslosigkeit eines Begriffs einen hinreichenden Beweis seiner Existenz erblicken. Es dürfte sich jedoch empfehlen, wesentlich verschiedene Begriffe auch durch verschiedene Worte zu bezeichnen, statt ihre Verschiedenheit durch willkürliche Verletzung des Sprachgebrauchs ohne Not unkenntlich zu machen.

kennen müßten, die es auf der rechten Seite hat, — davon abgesehen enthält eine solche „Definition“ schon die Voraussetzung, daß es von jeder beliebigen Zahl und der Zahl 1 eine Summe gebe, daß also die Operation des Addierens in jedem Falle ausführbar sei.

Diese Existenzialaxiome lassen sich allerdings durch eine geeignete Methode auf ein minimales Maß einschränken. Dadurch nämlich, daß man die Zahlen von vornherein nur dadurch definiert, daß sie ein System von Dingen bilden, welches die in den arithmetischen Axiomen formulierten Bedingungen erfüllt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß alle durch diese Methode überhaupt ableitbaren Eigenschaften der Zahlen in dem bloßen Begriff der Zahl ihren Grund haben. Allein, so fruchtbar sich diese (auch in der Geometrie anwendbare) „axiomatische“ Methode für gewisse mathematische Untersuchungen erweist, so ist doch geltend zu machen, daß den auf solche Weise definierten Dingen zwar, sofern die definierenden Bedingungen ein in sich widerspruchsloses System bilden, logische Möglichkeit, an und für sich aber noch keineswegs mathematische Existenz zukommt.[1] Dies zeigt sich sofort, wenn wir das System von Sätzen, das durch den Inbegriff der Axiome und der aus den Axiomen folgenden Theoreme gebildet wird, von dem System von Sätzen unterscheiden, das durch die Schluß-

[1] Über die Anwendung der axiomatischen Methode auf die Arithmetik vgl. Hilbert, Über den Zahlbegriff (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900, S. 180 ff.), sowie: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik (Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1905, S. 174 ff.). Es ist bemerkenswert, daß der in dem letztgenannten Vortrage erhobene Protest gegen den Empirismus von einem Forscher ausgeht, dessen eigene Arbeiten (vgl. Grundlagen der Geometrie, §§ 12, 13, 33) den synthetischen Charakter der arithmetischen Wahrheiten in das hellste Licht setzen. Es scheint daher die Durchführung der neuerdings von Hilbert ausgehenden Bestrebungen rücksichtlich der Grundlagen der Arithmetik unvermeidlich gerade zu der von uns vertretenen kritischen Auffassung zu drängen.

folgerungen gebildet wird, die von den Axiomen zu den aus ihnen folgenden Theoremen führen. Das zweite System besteht lediglich aus analytischen hypothetischen Urteilen; das erste System dagegen ausschließlich aus synthetischen: nämlich aus dem Inbegriff der Vordersätze und Nachsätze der hypothetischen Urteile des zweiten. Die Mittel der Logik können daher nur zur Aufstellung des zweiten Systems hinreichen, das in der Tat nichts anderes ist als ein logischer Formalismus. Nach rein logischer Methode können wir also wohl hypothetisch urteilen: Wenn es Dinge gibt, die ein bestimmtes Axiomensystem befriedigen, so existiert auch alles das, was sich durch rein logische Schlußfolgerungen aus dem Axiomensystem ableiten läßt. Ja, wir können soviele verschiedene hypothetische Systeme der Arithmetik (und ebenso der Geometrie) aufstellen, als sich widerspruchslose Axiomensysteme denken lassen. Da sich aber die in den verschiedenen hypothetischen Systemen enthaltenen Systeme von Vorder- und Nachsätzen gegenseitig logisch ausschließen, so kann es unter diesen letzteren nur eins geben, das kategorisch behauptet werden darf. Zur Aufstellung dieses Systems ist die Logik unzureichend. Denn schon zur Aufstellung auch nur eines einzigen mathematischen Theorems bedarf es des Hinzukommens der Assertion zu den für sich problematischen Prämissen des zu seinem Beweise erforderlichen hypothetischen Systems. Also setzt auch die „axiomatische" Begründungsweise der Arithmetik von vornherein schon ein von dem durch die Axiome definierten Zahlbegriff unabhängiges Existenzialaxiom voraus, von der Form: Es gibt Dinge, welche die durch das Axiomensystem postulierten Bedingungen erfüllen. — Es läßt sich folglich die Notwendigkeit wenigstens eines synthetischen Grundsatzes für jede auf ein eigenes Axiomensystem gegründete Disziplin auf keine Weise umgehen.

Dieser Notwendigkeit hat man sich entziehen zu können geglaubt durch die Behauptung, die Frage nach der kategorischen Gültigkeit eines mathematischen Systems oder nach der Existenz der mathematischen Begriffe gehöre in die Naturwissenschaft und sei daher aus der Mathematik auszuschließen. Soll hiermit nur der Wunsch ausgesprochen werden, man möge der Bearbeitung der genannten Frage nicht den Namen „Mathematik" geben, sondern sie mit unter dem Namen der Naturwissenschaft befassen, so wäre dies ein rein terminologischer Vorschlag, gegen den wir nichts einzuwänden hätten, als daß er einen gefährlichen Irrtum nahe legt. Den Irrtum nämlich, die in Rede stehende Frage sei auf dem Wege der Beobachtung und des Experiments zu entscheiden. Denn unter „Naturwissenschaft" versteht der übliche Sprachgebrauch diejenige Wissenschaft, die sich der Methoden der Beobachtung und des Experiments bedient. — Will aber etwa die genannte Behauptung das Wort „Naturwissenschaft" in diesem herkömmlichen Sinne verstanden wissen, so beruht sie auf der Verwechslung des Begriffs der mathematischen Existenz mit dem Begriffe der empirischen Existenz. Das Kriterium der letzteren liegt in der Sinneswahrnehmung und bedarf zu seiner wissenschaftlichen Anwendung allerdings der Methoden der Naturwissenschaft. Das Kriterium der ersteren aber liegt ausschließlich in der reinen Anschauung und bedarf zu seiner Anwendung keinerlei naturwissenschaftlicher Methoden.

Wem es schließlich scheinen sollte, daß der von uns als notwendig erwiesene synthetische Grundsatz eine zum Aufbau des kategorischen Systems zwar erforderliche, im übrigen aber für die Mathematik interesselose Beigabe zu dem logischen Formalismus der hypothetischen Systeme sei, den müssen wir daran erinnern, daß nicht nur die Möglichkeit des ganzen kategorischen

Systems wesentlich auf diesem Grundsatze beruht, sondern daß auch die methodische Bedeutung, die den verschiedenen möglichen hypothetischen Systemen beiwohnt, gerade in den Aufklärungen besteht, die sie uns über die logischen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Sätzen des kategorischen Systems erteilen, und daß daher das wissenschaftliche Interesse, das sich an die hypothetischen Systeme knüpft, ohne Rücksicht auf das kategorische System völlig hinfällig werden müßte. Wir würden die Mathematik ihrer wissenschaftlichen Würde berauben, wollten wir die Frage, ob wir es mit einer Aneinanderreihung von Hirngespinnsten oder mit der Erkenntnis der Wahrheit zu tun haben, aus ihr streichen.

23.

Es ist eine wohl von keinem Mathematiker bezweifelte, obzwar meist unbewußt die Forschung leitende Überzeugung, daß jedes sich uns darbietende mathematische Problem eine bestimmte Lösung zulasse; mag diese Lösung nun darin bestehen, daß man die gesuchte Antwort auf die vorgelegte Frage erteilt, oder darin, daß man den Grund der Unmöglichkeit, sie in der gesuchten Weise zu beantworten, aufweist. Worauf gründet sich diese Überzeugung? Wenn die Quelle der mathematischen Wahrheit, wie wir zu zeigen suchten, nicht, wie die der logischen, in unseren eigenen Begriffen liegt, mit welchem Rechte können wir uns dann anmaßen, im Besitz der zur Auflösung jedes beliebigen mathematischen Problems hinreichenden Mittel zu sein? Ein solch' eigentümlicher Vorzug scheint mit dem nicht-logischen Charakter der mathematischen Erkenntnis unverträglich zu sein.

Schon in der populären Erörterung bisher ungelöster Probleme hören wir die Frage diskutieren, ob das Mißlingen ihrer Auflösung in einer „prinzipiellen“ Unmöglichkeit seinen Grund habe, oder nur durch Hindernisse veranlaßt werde, welche sich durch die bloße Kraft unseres Verstandes überwinden lassen. Wenn nun die Frage aufgeworfen wird, ob und warum bei mathematischen Problemen eine solche prinzipielle Unlösbarkeit nicht vorkommen kann, so wird es zuerst erforderlich sein, dem Begriff der „prinzipiellen“ Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe eine präzise Formulierung zu geben.

Es ist zunächst klar, daß ein Problem dann und nur dann vorliegt, wenn wir von einem Satze nicht entscheiden können, ob er wahr oder falsch ist. Ein solches Problem werden wir als prinzipiell lösbar oder unlösbar bezeichnen, je nachdem, ob wir im Besitz der zur Entscheidung der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des fraglichen Satzes hinreichenden Kriterien sind oder nicht. Die Handhabung dieser Kriterien und ihre Anwendung auf den besonderen Fall mag noch so großen Schwierigkeiten unterliegen, — solange diese Schwierigkeiten nur die vermittelnden logischen Operationen und nicht die ursprüngliche Gewinnung des Kriteriums selbst betreffen, werden wir sie als durch die bloße Kraft unseres Verstandes überwindlich erachten. Die zur Entdeckung der wahren Figur der Marsbahn hinreichenden Kriterien waren in der Geometrie der Kegelschnitte des Apollonius einerseits und durch die Tychonischen Beobachtungsreihen andererseits vollständig gegeben. Aber es bedurfte freilich der Genialität eines Keppler, um durch die Anwendung der geeigneten logischen Methoden diese Daten für die wirkliche Auflösung des Problems fruchtbar zu machen.

Welches sind nun die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung mathematischer Probleme? Und können wir behaupten, im vollständigen Besitz dieser Prinzipien zu sein?

Unter dem Beweise eines Satzes hatten wir seine Zurückführung auf die Axiome vermittelst rein logischer Operationen verstanden. Die Kriterien, auf die wir beim Beweise eines Satzes zurückgehen, liegen also in den Axiomen. Da aber die Axiome, als Urteile, selbst der Begründung bedürfen, so können die ursprünglichen Kriterien der mathematischen Wahrheit nicht in den Axiomen, sondern erst in der den Axiomen zu Grunde liegenden unmittelbaren Erkenntnis enthalten sein. Wir wollen die Axiome, sofern sie die Gründe bilden, auf die sich ein System von Sätzen vermittelst rein logischer Operationen zurückführen läßt, während sie selbst nicht wiederum eine logische Zurückführung auf andere Erkenntnisse gestatten, als die logischen Prinzipien des Systems bezeichnen. Im Unterschied von diesen logischen Prinzipien eines Systems von Sätzen möge die unmittelbare Erkenntnis, die ihrerseits den Grund der Axiome und somit das allgemeine Kriterium der Wahrheit aller Sätze eines wissenschaftlichen Systems bildet, das konstitutive Prinzip dieses Systems heißen.

Die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung eines Problems sind also in dem konstitutiven Prinzip desjenigen wissenschaftlichen Systems zu suchen, in dessen Gebiet das Problem fällt. Ob eine Wissenschaft von der Art ist, daß jedes beliebige in ihr Gebiet fallende Problem prinzipiell lösbar ist oder nicht, wird also davon abhängen, ob ihr konstitutives Prinzip einen abgeschlossenen, d. h. keiner Erweiterung fähigen Erkenntnisbereich bildet oder nicht.

Die Frage, ob diese Bedingung bei der Mathematik erfüllt ist, haben wir eigentlich schon beantwortet durch den Nachweis, daß es in der Mathematik keine Hypothesen geben könne. Hypothesen sind Sätze, für deren Behauptung oder Verneinung kein hinreichender Grund vorliegt, für deren Richtigkeit oder

Unrichtigkeit wir also kein Kriterium besitzen. Eine Wissenschaft, in der es keine Hypothesen geben kann, kann also auch kein prinzipiell unlösbares Problem enthalten. Daß die Mathematik eine solche Wissenschaft in der Tat ist, erkennen wir als eine notwendige Folge der rein-anschaulichen Natur ihres konstitutiven Prinzips. Wenn nämlich das konstitutive Prinzip der Mathematik in reiner Anschauung besteht, so ist es von der Erweiterung unserer Erfahrung unabhängig. Folglich liegen die Prinzipien der Möglichkeit der Auflösung mathematischer Probleme vollständig im Bereich unseres Verstandes, und es kann deshalb keine mathematische Aufgabe geben, von der nicht entweder eine positive Auflösung oder der Beweis ihrer Unlösbarkeit möglich wäre.

Ein Astronom, der die Existenz eines intramerkuriellen Planeten behauptet, muß es sich notwendig gefallen lassen, daß man diese Behauptung solange als eine bloße Hypothese gelten läßt, bis eine hinreichende Erweiterung unserer unmittelbaren Erkenntnis (der Beobachtung) ein Kriterium der Existenz eines solchen Planeten an die Hand gibt. Die unter den Physikern noch unentschiedene Frage, ob der Ursprung der Radioaktivität auf eine Umwandlung in der Konstitution der Atome oder auf die Absorption äußerer Strahlung zurückzuführen ist, wird sich durch keine Aufbietung noch so scharfsinniger Reflexionen, sondern einzig und allein durch geeignete Experimente befriedigend beantworten lassen. Denn die über diese Frage herrschende Ungewißheit hat ihren Grund nicht in der Unfähigkeit unseres Verstandes, ein in unserer Erkenntnis tatsächlich bestehendes Verhältnis durch Anwendung geeigneter logischer Operationen aufzuweisen, sondern in einer Unvollständigkeit unserer unmittelbaren Erkenntnis selbst. Wenn dagegen ein mathematischer Satz noch unbegründet ist, — man denke nur an den großen F e r m a t-schen Satz aus der Zahlentheorie oder an das sogenannte Vierfarbenproblem aus der Analysis Situs, — so liegt dies nicht sowohl an einer Unvollständigkeit unserer unmittelbaren mathematischen Erkenntnis, als vielmehr an der Schwierigkeit der Auswahl und der mittelbaren Vergleichung geeigneter schon feststehender Sätze.

So leicht sich nach dem Vorstehenden die prinzipielle Lösbarkeit jedes mathematischen Problems als eine Folge des rationalen Charakters der mathematischen Erkenntnis erweisen läßt, so unverständlich müßte dieser wichtige Vorzug der Mathematik für denjenigen bleiben, der ihren empirischen Ursprung behauptet. Ja seine Möglichkeit widerspricht geradezu der Voraussetzung des mathematischen Empirismus. Denn bei der notwendigen Unvollständigkeit ihres konstitutiven Prinzips kann eine empirische Wissenschaft niemals in den Besitz der zur Auflösung eines beliebigen Problems hinreichenden Bedingungen gelangen. Sie würde vielmehr eine prinzipielle Lösungsmöglichkeit nur für diejenigen Probleme beanspruchen dürfen, deren Entscheidungsgründe in dem ihr gerade zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterial enthalten sind. Das Zugeständnis, daß es sich in der Mathematik anders verhält, kann daher seinerseits zur Bestätigung des mathematischen Apriorismus dienen.

24.

Darin liegt das Merkwürdige und Rätselhafte der mathematischen Erkenntnis: Ihre Apodiktizität verbietet es, ihre Erkenntnisquelle in der Empirie zu suchen, und doch wissen wir andererseits durch die Nicht-Euklidische Geometrie, daß in der Logik ihre Erkenntnisquelle gewiß nicht liegen kann. Kant hat dies der Mathematik zu Grunde liegende paradoxe Faktum durch den Terminus „reine Anschauung“ formuliert. Die reine Anschauung ist, als Anschauung, eine Erkenntnis nicht-logischer Art. Und als „reine" Anschauung ist sie eine Erkenntnis nicht-empirischer Art. Mit der logischen hat sie die Notwendigkeit, mit der empirischen die Anschaulichkeit gemein, und steht so gleichsam in der Mitte zwischen diesen beiden. Dies Verhältnis ist es, das schon Platon vorgeschwebt hat, wenn er sagt, daß die Erkenntnisweise der Geometer und verwandter Forscher etwas zwischen Sinnlichkeit und Verstand mitten inne sei.[1]

Über die eigentümliche Stellung der Mathematik innerhalb unserer Gesamterkenntnis hat neuerdings auch Poincaré eingehende Betrachtungen angestellt. Aus ähnlichen Gründen, wie den von uns § 15 erörterten, bricht Poincaré vollständig mit dem mathematischen Empirismus. Er konstatiert, ähnlich wie Kant, die paradoxe Natur der mathematischen Erkenntnis, als einer Erkenntnis nicht-logischen Ursprungs und dennoch von apodiktischem Charakter. Je mehr wir diese Annäherung des großen französischen Mathematikers an den kritischen Standpunkt als einen Fortschritt anerkennen und je mehr wir seine scharfe Unterscheidung zwischen dem Ursprung der mathematischen Begriffe in der Selbsttätigkeit des Erkenntisvermögens und ihrer Entwickelung durch die Erfahrung bewundern müssen, desto mehr müssen wir den Irrtum bedauern, der diesen Fortschritt beeinträchtigt und seiner kritischen Verwertung im Wege steht. Wenngleich nämlich Poincaré die empiristische Erklärung des Ursprungs der geometrischen Axiome verwirft, so glaubt er dennoch ihre Apriorität nicht zugestehen zu dürfen: „Les axiomes géométriques sont-ils des jugements synthétiques a priori, comme

---

[1] Vgl. C. Brinkmann, Über kritische Mathematik bei Platon; im zweiten Heft dieser Abhandlungen.

disait Kant? Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.“[1]

Dies beruht auf bloßem Mißverständnis. Der Unterschied der Apriorität und Aposteriorität ist nicht ein Unterschied der Stärke oder des Grades der Überzeugung, sondern er geht auf die Art des Ursprungs der Urteile. Nur analytische Urteile sind von der Art, daß ihr Gegenteil undenkbar ist, und da die Apriorität eines Urteils keineswegs seine analytische Natur bedingt, so ist auch durch die Apriorität eines Urteils noch nichts über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit seines Gegenteils entschieden.

Was sollen die Axiome aber sein, wenn sie weder Urteile a posteriori noch Urteile a priori sein sollen?

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal das Beispiel von dem astronomischen Dreieck. Wir sehen, daß wir hier ohne die Kantische Lehre von der reinen Anschauung gar keine wissenschaftliche Entscheidung treffen könnten. Wollten wir bloß auf Logik und Erfahrung Rücksicht nehmen, so könnten wir in der Tat ebenso gut auf Grund des gemessenen Defekts auf die Ungültigkeit des Euklidischen Axioms schließen, wie auch auf Grund des Euklidischen Axioms auf die Krummlinigkeit der Lichtstrahlen. Überhaupt könnten wir ohne Rücksichtnahme auf die reine Anschauung irgend eine beliebige Geometrie der Erfahrung zu Grunde legen. Die Frage: welche Geometrie ist gültig? hätte dann gar keinen Sinn. Wir könnten vielmehr nur noch fragen: welche

[1] La science et l'hypothèse, p. 64.

Geometrie ist zweckentsprechend? Welche ist die bequemste? Wobei natürlich je nach dem ins Auge gefaßten Zweck bald diese, bald jene Geometrie die zweckmäßigste sein könnte. Mit einem Wort: Es wäre Sache der Konvention, welche Geometrie wir der Erfahrung zu Grunde legen wollen.

Diese Konsequenz hat Poincaré in der Tat gezogen: „D'où viennent les premiers principes de la géométrie? Nous sont-ils imposés par la logique? Lobatschewsky a montré que non en créant les géométries non euclidiennes. La géométrie dérive-t-elle de l'expérience? Une discussion approfondie nous montrera que non. Nous conclurons donc que ces principes ne sont que des conventions." [1]

Hier macht sich das dogmatische Vorurteil geltend, das Poincaré unmittelbar vor dem entscheidenden kritischen Schritt zurückhält.

Der Ursprung der Geometrie liegt weder in der Logik noch in der Erfahrung. Mithin — so würden wir schließen — ist die Geometrie eine selbständige, sowohl von der Logik wie von der Erfahrung unabhängige Erkenntnisweise; d. h. ihre Urteile sind synthetische Urteile a priori. Poincaré aber verkennt die Möglichkeit dieser Wendung: die Vereinigung des nicht-logischen (synthetischen) mit dem nicht-empirischen (apodiktischen) Charakter der Geometrie erscheint ihm nur möglich unter Preisgabe ihres Erkenntniswertes. Auch Poincaré macht also die vorkritische Disjunktion zwischen Logik und Erfahrung als Kriterien der Wahrheit. [2]

Aber gerade Poincarés eigene Erklärung vermag die Schwierigkeit nicht zu heben. Entweder nämlich ist der Zweck,

---

[1] La science et l'hypothèse, p. 5.

[2] Dem scheint es zu widersprechen, daß Poincaré selbst ausdrücklich

der unsere Konvention leitet und auf Grund dessen wir die Wahl zwischen den verschiedenen möglichen Geometrieen treffen, selbst ein notwendiger und allgemeingültiger: dann würde uns seine Formulierung wieder auf irgend welche synthetischen Urteile a priori zurückweisen, womit offenbar das Problem nicht gehoben, sondern nur zurückgeschoben wäre. Oder aber dieser Zweck besitzt keine Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit: dann ermangelte auch die diesem Zweck entsprechende Geometrie der Notwendigkeit und besäße nur zufällige Geltung. Die Erklärung leistet also auf keinen Fall, was sie verspricht.

Nur die Kantische Erklärung ist im stande dies zu leisten. Sie löst den scheinbaren Widerspruch, in welchem die tatsächlichen Eigenschaften der mathematischen Erkenntnisweise stehen, indem sie seine Wurzel beseitigt: die irrige Disjunktion zwischen Logik und Empirie als Erkenntnisquellen. Mit der Beseitigung dieses Vorurteils verschwindet von selbst die dem Begriff des synthetischen Urteils a priori anhaftende Paradoxie. Die reinanschauliche Erkenntnisweise der Mathematik ist eine Tatsache und kein Problem.

Die Apodiktizität der Mathematik in Verbindung mit der Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie bildet somit einen zuverlässigen Prüfstein für eine gesunde Philosophie der Mathematik. Ein einseitiges Philosophem greift voreilig einen dieser beiden Punkte heraus und macht ihn zum Gegenstand seiner Erklärungsversuche. Die Folge ist dann das Scheitern dieser

---

die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori anerkennt, indem er das Prinzip der mathematischen Induktion für ein solches erklärt. Allein, schon die Begründung dieser Erklärung — durch die Unmöglichkeit einer diesem Prinzip widersprechenden Arithmetik — zeigt, daß dieser Widerspruch nur scheinbar ist und nur in den Worten liegen kann, indem auch an dieser Stelle eine Verwechslung der synthetischen Urteile a priori mit den analytischen Urteilen vorliegt.

Erklärungsversuche an dem anderen Punkte. So scheitert der logische Dogmatismus, (wie ihn z. B. noch die Leibnizsche Schule vertrat) an der Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie. So scheitert umgekehrt der Empirismus an der mathematischen Apodiktizität. Die kritische Methode Kants hingegen leitet uns dadurch zu der allein richtigen Ansicht, daß sie uns lehrt, unter Ablehnung jedes voreiligen Erklärungsversuchs, uns zunächst in den vollständigen Besitz der Tatsachen zu setzen.

X.

Vier Briefe

von

Gauss und Wilhelm Weber an Fries.

Mitgeteilt von

Leonard Nelson.

Von den hier vorliegenden, bisher unveröffentlichten Briefen sind die drei letzten nach den im Friesschen Nachlaß aufgefundenen Originalen mitgeteilt. Der erste, undatierte, hat sich nur in einer von Fries' Biographen E. L. Th. Henke angefertigten Abschrift vorgefunden. Die „Mathematische Naturphilosophie“, auf die er Bezug nimmt, ist im Jahre 1822 erschienen. — Die entsprechenden Briefe von Fries sind im Gaußschen Nachlaß nicht aufzufinden.

Wohlgeborener Herr, Hochzuverehrender Herr Hofrat!

Ich bin ganz beschämt, daß ich so spät Ihren gütigen Brief beantworte und für das schätzbare Geschenk Ihrer mathematischen Naturphilosophie meinen ergebensten Dank abstatte. Nicht zu meiner Rechtfertigung sondern höchstens zu einiger Entschuldigung kann dienen, daß ich nicht bloß zur Zeit des Eingangs derselben von hier abwesend war, sondern auch seitdem bis jetzt mehr abwesend als anwesend gewesen bin, und daß ich die Antwort von einer Zeit zur andern verschob in der Hoffnung Zeit zu gewinnen, Ihnen über manches was mich in diesem Werke besonders angesprochen ausführlicher zu schreiben. Ohne hierauf Verzicht zu leisten, kann ich doch wenigstens jetzt nicht länger anstehen, Ihnen meinen verbindlichsten Dank abzustatten.

Unser gemeinschaftlicher Freund Posselt hat inzwischen von dieser Welt, wo das Geistige nur zu oft in widrigem Konflikt mit der Außenwelt erdrückt wird, einen frühzeitigen Abschied genommen. Warum hat doch die höchste Weisheit es versagt, den Isis-Schleier, der die Rätsel des Daseins auf dieser Welt deckt, vor dessen Zerstörung auch noch so wenig zu lüften!

Erhalten Sie ein freundschaftliches Andenken

Ihrem ganz ergebensten

C. F. Gauß.

Göttingen, 1841. Febr. 12.

Verehrter Freund,

Ihren gütigen Brief vom 28ten v. M. habe ich sogleich Herrn Hofrat Gauß mitgeteilt, der die Güte hatte über die Fragen, die Sie darin wegen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorlegen, sich ausführlich mündlich zu äußern. Ich werde versuchen, so gut ich kann, seine Meinung wiederzugeben.

Er gab Ihnen gleich von Anfang darin Recht, daß in den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gefehlt werden könne, wenn man nur auf die Zahlen bauet, welche wiederholte Beobachtungen geben, und nicht jeder anderen Kenntnis, die man sich von der Natur der Sache und deren Verhältnissen verschaffen kann, ihr Recht widerfahren läßt, so schwer dies oft auch sei. In dieser Hinsicht könne nicht genug Vorsicht empfohlen werden. Die französischen Mathematiker hätten wohl diese Vorsicht nicht immer genug beobachtet; Gauß hat diese Vorsicht bei allen Anwendungen, die er gemacht, nie aus dem Auge gelassen, und hat beim Vortrag immer vorausgeschickt: die Wahrscheinlichkeitsrechnung habe den Zweck, nur in solchen Fällen eine bestimmte Auskunft zu geben, wo man außer den Beobachtungszahlen nichts weiter von der Sache wisse oder berücksichtigen wolle.

Gauß erwähnte einen Fall, wo Laplace durch Mangel an jener Vorsicht einen Fehler begangen, der von Niemand bemerkt zu sein scheint. Laplace sucht nämlich die Wahrscheinlichkeit einer Ursache zu bestimmen, welche die Ebenen der Kometenbahnen den Ebenen der Planetenbahnen genähert habe. Er zählt die Kometen, deren Bahnen mit der Erdbahn einen Winkel zwischen 0° und 45° und zwischen 45° und 90° machen, findet ihre Zahl nahe gleich und schließt daraus, daß keine solche Ursache wahrscheinlich Statt gefunden habe. Laplace hat dabei außer Acht gelassen, daß, wenn jede Lage der Bahn gleiche Wahrscheinlichkeit besäße, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Bahn mit der Erdbahn einen Winkel von 0^0 bis 45^0 mache, viel kleiner ist als die eines Winkels von 45^0 bis 90^0. Zieht man nämlich vom Mittelpunkt einer Kugel senkrecht gegen die Kometenbahn eine gerade Linie nach der einen oder andern Seite, je nachdem die Bahn vorwärts oder rückwärts durchlaufen wird, und nennt den Durchschnittspunkt mit der Kugelfläche den Pol der Bahn, so würde, wenn man diese Fläche in gleiche Teile teilt, der Pol in jedem Teile mit gleicher Wahrscheinlichkeit vermutet werden. Nun ist aber der Teil vom Pol der Erdbahn bis zu 45^0 Abstand nicht dem Teile von 45^0 bis 90^0 Abstand gleich, sondern es muß 60^0 statt 45^0 gesetzt werden, um beide Teile gleich zu machen. Berücksichtigt man dies geometrische Gesetz, so muß man das Gegenteil schließen von dem was Laplace.

In allen Fällen, welche Sie anführen als solche, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Anwendung finde, stimmt Gauß Ihnen im Wesentlichen bei und führt den Grund immer darauf zurück, daß Kenntnisse vorhanden sind, die in den der Rechnung zum Grunde zu legenden Beobachtungszahlen nicht enthalten sind: z. B. wenn es sich bei Leibrenten um eine bestimmte Person handelt, von deren Konstitution und Lebensart wir im Vergleich zur Mehrzahl der Menschen eine gewisse Vorstellung haben.

Der hohe Wert der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht eben darin, daß sie gerade in den Fällen, wo gar keine andern Kenntnisse vorliegen, die uns leiten können, irgend eine Richtschnur an die Hand gibt: z. B. bei der Einrichtung einer Leibrentenanstalt.

Ebenso kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung dem Gesetzgeber eine Richtschnur für die Bestimmung der Zahl der Zeugen und der Richter geben, wenn sie auch für den einzelnen Fall nichts lehrt. Sie gibt eine Richtschnur für Wetten, in welchem Verhältnis die wahren und unwahren Nachrichten in einem Zeitungsblatte sich verhalten werden, wenn Zählungen aus längerer Zeit vorliegen. Sobald es sich aber von einem bestimmten Fall handelt, so gilt von Zeugen dasselbe, wie von einer Zeitungsnachricht, die wir vor Augen haben, von der wir viel mehr wissen, als was jene Zählungen enthalten.

Eine Angabe kann durch Vermehrung der Beobachtungen, denen aus subjektiven Gründen gleiches Vertrauen geschenkt wird, der Wahrheit immer näher gebracht werden, d. h. demjenigen Werte, welcher nach der angewandten Beobachtungsweise ohne Beobachtungsfehler erhalten werden würde. Ist aber die Beobachtungsweise irrig, was aus objektiven Gründen, z. B. nach den dabei in Betracht kommenden Naturgesetzen zu beurteilen ist, so geht ein konstanter Fehler durch alle Beobachtungen, welcher durch Wiederholung der Beobachtung nicht herauszubringen ist.

Bei der Wiederkehr des Sonnenaufgangs kommt nicht bloß die wiederholte Erfahrung in Betracht, sondern weit mehr noch die Kenntnis der Gesetze, welche macht, daß diese und ähnliche Fälle in der Natur ganz anders beurteilt werden müssen, als die wiederkehrenden Erscheinungen in der organischen Natur, wo man von solchen Gesetzen nichts weiß. Dort folgt aus dem Ausbleiben einer erwarteten Erscheinung, daß man ein in der Natur wirkendes Element übersehen hat: wir würden also die Wahrscheinlichkeit eines solchen Übersehens vorher zu schätzen haben. Ganz anders verhält es sich z. B. mit der Verbindung der Tiere, aus der junge Tiere hervorgehen, man weiß nicht wie. Hier hält man sich bloß an die wiederholte Beobachtung des Faktums, und die Wahrscheinlichkeit wächst mit der Wiederholung. Der Erfahrene unterscheidet hier Wahrscheinlichkeiten, wo der Unerfahrene keinen Unterschied macht. Dort hält aber bloß der ungebildete Mann, der nichts von jenen Gesetzen weiß, die künftige Wiederkehr der Sonne bloß der bisherigen Erfahrung wegen für wahrscheinlich.

Gauß hätte selbst wohl einige Zeilen beigelegt, wenn er etwas zu sagen gehabt, dessen Ausdruck, um nichts an Präzision zu verlieren, schwieriger gewesen wäre. Er läßt Sie vielmals grüßen. Eine Anzeige hat ihn mit Ihrer Geschichte der Philosophie bekannt gemacht, wodurch er sehr begierig geworden, Sie näher kennen zu lernen, vorzüglich was die Verirrungen des menschlichen Geistes betreffe, welche neuerlich vorgekommen.

Mit der Bitte, mich Ihrer Frau Gemahlin gütigst zu empfehlen, verharre ich

Ihr ganz ergebener

Wilhelm Weber.

Verehrtester Herr Hofrat

Für die gewogentliche Übersendung Ihrer Geschichte der Philosophie und das gütige Schreiben, womit Sie dieselbe begleitet haben, bin ich Ihnen noch meinen herzlichsten Dank schuldig. Ich habe von jeher große Vorliebe für philosophische Spekulation gehabt, und freue mich nun um so mehr, in Ihnen einen zuverlässigen Führer bei dem Studium der Schicksale der Wissenschaft von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten zu haben, da ich bei eigner Lektüre der Schriften mancher Philosophen nicht immer die gewünschte Befriedigung gefunden habe. Namentlich haben die Schriften mehrerer vielgenannter (vielleicht besser, sogenannter) Philosophen, die seit Kant aufgetreten sind, mich mitunter an das Sieb des Bockmelkers erinnert, oder, um anstatt des antiken ein modernes Bild zu gebrauchen, an Münchhausens Zopf, woran er sich selbst aus dem Wasser zog. Der Dilettant würde nicht wagen, vor dem Meister ein solches Bekenntnis abzulegen, wäre es ihm nicht vorgekommen, als ob dieser nicht viel anders über jene Verdienste urteilte. Ich habe oft bedauert, nicht mit Ihnen an Einem Orte zu leben, um aus der mündlichen Unterhaltung mit Ihnen über philosophische Gegenstände eben so viel Vergnügen als Belehrung schöpfen zu können.

Da Sie auch die Astronomie von Ihren Beschäftigungen nicht ausschließen, so hat folgende Notiz für Sie einiges Interesse. Vor mehr als 50 Jahren glaubte Herschel einen brennenden Vulkan im Monde zu wiederholten malen gesehen zu haben; in Deutschland wollte man aber nicht recht daran glauben. Die interessanteste Beobachtung dieser Art ist die, welche Olbers am 5. Februar 1821 gemacht hat, aus einem Berichte darüber in einem Briefe an mich habe ich damals einen Auszug in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1821 S. 449) gegeben; Olbers hält das Phänomen für reflektiertes Erdenlicht von einer sehr glatten Felswand, vielleicht im oder in der Nähe vom Aristarch. Kater hatte dasselbe Phänomen beobachtet (Philosophical Transactions F. 1821, part I), und nennt es noch geradezu einen Mondvulkan. Ist Olbers Erklärung (wie wohl nicht zu zweifeln ist) die richtige, so hat man Grund, bei ähnlichen Librationsverhältnissen die Wiederkehr einer ähnlichen Erscheinung zu erwarten. Ich finde nun nach einem flüchtig gemachten Überschlage, daß die Librationsverhältnisse am Abend des 24. Mai d. J., und noch etwas mehr die vom 20. Junius, denen vom 5. Februar 1821 ziemlich nahe kommen. Es versteht sich von selbst, daß man auch schon einen Tag früher Acht geben mag, zumal da Kater schon am 4. Febr. 1821 beobachtet hatte; seine Beschreibung weicht übrigens etwas von der des Dr. O. ab, und am 5, wo er selbst abgehalten war und sein Fernrohr einigen Freunden überlassen hatte, scheint in London das Phänomen auch nicht ganz so markiert gewesen zu sein, wie in Bremen. Vielleicht lassen Sie sich durch diese Notiz anreizen, wenn das Wetter in Jena günstig ist, mit einem Fernrohr nach der immer seltenen Erscheinung auszuschauen.

Ihrem freundlichen Andenken mich

in hochachtungsvoller Ergebenheit empfehlend

Göttingen 11. Mai 1841. C. F. Gauß.

Göttingen, 28. Juni 1842.

Hochverehrter Freund,

meinen herzlichen Dank für Ihr gütiges Geschenk Ihrer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ihnen darzubringen, habe ich bis jetzt verzögert, weil ich Ihnen nicht berichten konnte, wie sich Gauß darüber geäußert habe, dessen Meinung zu erfahren doch hauptsächlich Interesse für Sie hatte. Gauß hatte mir nämlich gesagt, daß er mit vielem Vergnügen Ihr Werk gelesen habe und im Wesentlichen Ihnen beistimmen müsse; daß er aber darüber selbst ausführlicher an Sie schreiben wolle. Meine Dazwischenkunft war dadurch überflüssig, und daß ich mich in dieser Sache selbst als Schüler betrachte und nicht mitzusprechen wage, versteht sich von selbst. Dabei wünschte ich, Ihnen etwas Bestimmtes über meine Berufung nach Leipzig schreiben zu können, von der Ihnen Schwarz erzählt haben wird, was ich erst jetzt zu tun im Stande bin, wo ich meine definitive Ernennung erhalten habe. Ich habe anfangs einiges Bedenken gehabt, diesen Ruf anzunehmen aus Rücksicht auf Fechner, den ich dadurch beeinträchtigen zu können fürchtete; doch ist dieses Bedenken ganz gehoben worden, so daß ich mich recht rein aller der Annehmlichkeiten, die sonst diese Stellung für mich hat, erfreuen kann. Die Regierung hat nämlich erstens eingewilligt in eine Verzögerung bis künftige Ostern, bis wohin also Fechner die Stelle beibehalten kann und im Falle der Besserung gar nicht niederzulegen braucht. Ferner hat die Regierung auch gern meine Erklärung acceptiert, daß wenn Fechner später wiederhergestellt würde, ich seinem Rücktritt in keiner Weise hinderlich sein wolle, daß ihm also die Direktion des physikalischen Instituts und der Platz in der Fakultät für diesen Fall stets vorbehalten bliebe. Dabei hat die Regierung solche Anordnungen getroffen, daß auch ich für diesen Fall nicht allein persönlich gesichert bin, sondern auch neben Fechner einen Wirkungskreis fände. Endlich hat Fechner selbst durch seine aufrichtigen freundschaftlichen Erklärungen jede Spur von Bedenken vollends beseitigt. Während dieser Unterhandlungen erhielt ich einen zweiten Ruf, nach Halle, an Kämtz' Stelle, den ich sogleich angenommen haben würde, wenn ich den nach Leipzig nicht gehabt hätte; den ich aber jetzt definitiv abgelehnt habe. —

Ich werde ein magnetisches Observatorium in Leipzig bauen, was mir schon bewilligt ist, und werde mit Gauß die Herausgabe der Resultate fortsetzen: auf diese Weise hoffe ich auch aus der Ferne einige Verbindung mit ihm zu erhalten, eine kleine Entschädigung für den großen Verlust, den ich erleide, indem ich auf den täglichen Verkehr mit ihm verzichten muß; doch freue ich mich, daß ich nach Verlust meiner hiesigen Stelle so lange Zeit, $5^1/_2$ Jahr, mit ihm habe leben können, was ich anfangs nicht gehofft hatte.

Empfehlen Sie mich gütigst Ihrer verehrten Frau Gemahlin und grüßen Sie Schwarz und seine Frau herzlich von mir, wenn Sie sie sehen. Ich werde bald wieder einmal Gelegenheit suchen, nach Jena zu kommen und Ihnen meinen Dank noch mündlich abzustatten.

Mit inniger Verehrung

Ihr ganz ergebener

Wilhelm Weber.

XI.

Wissenschaftliche und religiöse Weltansicht.

Ein Vortrag.

Von

Marcel T. Djuvara.

Inhalt.

Es ist wohl keiner unter uns, der nicht zuweilen mit mehr oder minder regem Interesse über den eigenartigen Konflikt nachgedacht hätte, der sich seit den Anfängen der strengeren modernen Wissenschaft zwischen dieser und der überlieferten Religion entwickelt und mit den wachsenden Erfolgen der Wissenschaft immer mehr verschärft hat. Zwar hat es, besonders in neuerer Zeit, nicht an Versuchen gefehlt den Frieden wieder herzustellen. Doch können wir uns nicht verhehlen, daß bisher die beiden Parteien einander noch so erbittert gegenüberstehen, als ob das Heil einer jeden nur in der völligen Vernichtung des Gegners bestehen könnte. Der Unbefangene indessen wird leicht erkennen oder wenigstens fühlen, daß selbst eine gewaltsame Unterdrückung einer der beiden Weltanschauungen für die andere nur eine vorübergehende Triumphperiode bedeuten könnte und daß der nämliche Kampf wohl bald von neuem entbrennen würde, vielleicht zum Verderben des zeitweiligen Siegers. Nicht Streit und Haß können diesen Konflikt aus der Welt schaffen, sondern nur eine gütliche Verständigung der Gegner. Wir meinen aber nicht etwa, dass durch schwächliche Kompromisse von beiden Seiten abgeholfen werden solle. Vielmehr kann eine Ausgleichung der entgegengesetzen Überzeugungen nur durch die Einsicht eintreten, daß jener Konflikt auf Irrtum und Mißverständnis beruht, indem nämlich der scheinbare Widerspruch zwischen Wissenschaft und Religion sich in der menschlichen Vernunft gar nicht wirklich vorfindet, wie ich mich nachzuweisen bemühen werde. Den Weg zur Versöhnung dieser beiden Weltansichten zuerst gewiesen zu haben, ist das Verdienst **Kants**, durch dessen Auftreten jener Streit im Grunde beigelegt sein sollte. Wenn trotzdem der Friede bis auf den heutigen Tag noch so wenig verwirklicht ist, so mag der Grund dafür darin liegen, daß seitdem entweder die Leidenschaften stärker waren als die Macht der ruhigen Einsicht oder daß vielleicht einzelne Fehler und Widersprüche in den Schriften Kants ihn um die dauernde Anerkennung seiner philosophischen Methode und deren wesentlicher Resultate gebracht haben. — Gestatten Sie mir Ihnen im Folgenden über das Verhältnis der religiösen zur wissenschaftlichen Weltansicht die Anschauungen darzulegen, die ich mir durch das Studium des Philosophen Jacob Friedrich Fries gebildet habe, — eines heutzutage leider wenig bekannten Schülers und Nachfolgers Kants, durch dessen Forschungen mir die wesentlichen Mängel der kantischen Philosophie beseitigt worden zu sein scheinen.

Ich hatte vorhin behauptet, der Widerstreit zwischen Wissenschaft und Religion sei ein nur scheinbarer, nicht im Wesen unserer Vernunft wurzelnder. Wie nun aber, wenn er wirklich in der Organisation unserer Vernunft seinen Ursprung hätte? Liegt nicht in der Tat der Gedanke nahe, daß einem solchen sich durch Jahrhunderte fortpflanzenden geistigen Kampfe vielleicht ein innerer Widerspruch in der menschlichen Vernunft zugrunde liegt, daß möglicherweise der menschliche Geist überhaupt voller Widersprüche ist und daß es daher keinen Zweck hat, über Meinungsverschiedenheiten solcher Art zu streiten. Bevor ich mich an mein eigentliches Thema wende, dürfte es daher vielleicht zweckmäßig sein, uns darüber zu verständigen, was die Begriffe Wahrheit und Irrtum eigentlich bedeuten und ob unsere Vernunft überhaupt darauf Anspruch erheben kann, wahre Erkenntnis zu besitzen.

Der absolute Skeptizismus verneint bekanntlich die letzte Frage; er lehrt, unsere Erkenntnisse seien alle irrig und nichts als eitel Trug und Schein. Es liegt aber auf der Hand, daß dieser Skeptizismus sich selbst widerlegt. Wenn nämlich alle unsere Erkenntnisse irrig sind, wer bürgt dann dem Skeptiker dafür, daß gerade seine Aussage über die Untauglichkeit seiner Vernunft wahr ist? Müßte er nicht vielmehr folgerichtig überhaupt aufhören zu denken und zu urteilen? Ja noch mehr: allein die Möglichkeit des Zweifelns setzt notwendig die Überzeugung voraus, daß es irgend eine Wahrheit für uns giebt. Der Zweifel ist überall da berechtigt, wo er ein Aufschieben des Urteils bedeutet, wo er eine Erkenntnis auf ihre Gültigkeit hin prüft; ein Urteil bezweifeln bedeutet nämlich eine Ungewißheit, ob es wahr oder irrig ist, wobei die Zuversicht auf eine Wahrheit schon zugrunde liegt, wie ich dies gleich näher beleuchten werde. Ohne diese Behauptung zu bestreiten, könnte nun ein Skeptiker einwenden, unsere Vernunft besitze zwar mancherlei wahre Erkenntnisse, aber sie enthielte auch Widersprüche, und zu diesen gehöre auch der Gegensatz zwischen religiöser und wissenschaftlicher Weltansicht. Demgegenüber ist zunächst zu bemerken, daß dieser Einwand völlig willkürlich ist; ob er zutrifft oder nicht, läßt sich nur durch eine vorurteilsfreie Selbstbeobachtung der Vernunft entscheiden, ein Verfahren, welches Fries in seiner „Neuen Kritik der Vernunft“ lehrt, und welches tatsächlich zu dem entgegengesetzten Resultate führt.

Für uns ist es wichtig, festzuhalten, daß wir nicht davon ausgehen dürfen, an der Wahrheit überhaupt zu zweifeln, daß vielmehr jeder Denktätigkeit als solcher, also auch jeglichem Philosophieren, das feste Selbstvertrauen der Vernunft zu ihrer Wahrhaftigkeit als erste notwendige Voraussetzung zugrunde liegt. Jeder Mensch, der nicht durch eine künstliche Spekulation an dem gesunden Gebrauch seiner Vernunft irre gemacht ist, ist von der objektiven Gültigkeit seiner Erkenntnis, d. h. von der Existenz der erkannten Gegenstände unmittelbar überzeugt. Es ist dies eine unumstößliche Tatsache der inneren Erfahrung. Sie läßt sich weder anzweifeln — der Zweifelnde selbst muß sie ja unbewußt voraussetzen —, noch auch näher erklären für jemand, der weiß, worin das Erklären besteht und was für Erkenntnisse sich überhaupt erklären lassen. Erklären muß man vielmehr die Möglichkeit des Irrtums. Dieser entsteht dadurch, daß die Mehrzahl unserer Erkenntnisse nicht unmittelbar aus der selbsttätigen Vernunft entspringen, sondern mittelbare Produkte der Reflexion sind. Die Reflexion aber ist das Vermögen des willkürlichen Wiederbewußtwerdens der Erkenntnisse und besteht darin, daß die Vernunft sich derjenigen ihrer eigenen Erkenntnisse, die dunkel, sozusagen in latentem Zustande, im Gedächtnis ruhen, mittelbar wieder bewußt werden kann. Die Willkürlichkeit, mit der die Reflexion bei dieser Wiederholung der in der Vernunft schon enthaltenen Erkenntnisse vorgeht, ist der eigentliche Grund für die Möglichkeit des Irrtums. Näher hierauf einzugehen würde mich zu sehr von meinem Thema abführen[1]. Für uns kommt es hier darauf an, einzusehen, daß eine unmittelbare Erkenntnis als solche unbezweifelbar ist, gemäß dem vorhin erwähnten Grundsatze des Selbstvertrauens der Vernunft, und daß es in jedem gegebenen

[1] Eine eingehendere Erörterung der hierher gehörigen Lehren findet man im ersten Hefte dieser Abhandlungen, unter dem Titel: Die kritische Methode und das Verhältnis der Psychologie zur Philosophie.

Falle nur darauf ankommen kann, festzustellen, ob eine bestimmte Erkenntnis eine mittelbare, also der Möglichkeit des Irrtums unterworfene, oder eine unmittelbare, also wahre, Erkenntnis ist. Ist nämlich eine Erkenntnis mittelbar, so ist sie nur dann wahr, wenn sie mit den unmittelbaren Erkenntnissen der Vernunft übereinstimmt. In dieser inneren Übereinstimmung der Erkenntnisse unter einander haben wir ein sicheres Kriterium, um Irrtum von Wahrheit zu unterscheiden, so schwierig es auch im einzelnen Falle sein mag, dies Kriterium wirklich anzuwenden.

Anders steht es nun, wenn man rücksichtlich der Wahrheit einer Erkenntnis, statt sie dem Irrtume entgegenzusetzen, die Forderung stellt, daß die Erkenntnis mit dem Gegenstande, auf den sie sich bezieht, übereinstimmen solle. Es ist dies eine andere Idee, die man sich von der Wahrheit bilden kann; es ist aber eben auch nur eine Idee, indem nämlich ein Kriterium für die Wahrheit in diesem Sinne durchaus unmöglich ist. Denn um zu prüfen, ob eine Erkenntnis mit ihrem Gegenstande übereinstimmt, müßte ich die Möglichkeit haben, aus meiner Erkenntnisweise gewissermaßen herauszutreten, um meine Erkenntnis mit dem betreffenden Gegenstande zu vergleichen, was offenbar nicht angeht. Nennt man nun mit Fries diesen Begriff der Wahrheit — also Übereinstimmung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande — transzendentale Wahrheit, den anderen dagegen, der in der Übereinstimmung der Erkenntnis mit den unmittelbaren Erkenntnissen der Vernunft bestand, empirische Wahrheit, so können wir behaupten, daß wir nur die empirische Wahrheit einer Erkenntnis, nicht aber ihre transzendentale Wahrheit einer Prüfung unterwerfen können. Mit dieser Unterscheidung der transzendentalen und empirischen Wahrheit haben wir aber, wie sich im Folgenden zeigen wird, bereits den Kern des Unterschiedes zwischen Religion und Wissenschaft berührt.

In der Tat entspricht diese Unterscheidung genau der zwischen Ding an sich und Erscheinung im Sinne Kants. Transzendentale und empirische Wahrheit, ewiges und endliches Sein, Glaube und Wissen sind verschiedene Bezeichnungen für dasselbe Verhältnis. Was sind nun Dinge an sich? Es sind die Dinge so wie sie unabhängig von der Erkenntnistätigkeit irgend einer Vernunft bestehen. Erscheinung dagegen ist das Ding so, wie ich es auf subjektiv beschränkte Weise erkenne. Wir werden sehen, daß die wissenschaftliche Erkenntnisweise auf Erscheinungen eingeschränkt ist, während der Glaube auf Dinge an sich geht.

Zieht man das Verhältnis zwischen den Dingen an sich und unserer Erkenntnis in Erwägung, so sind überhaupt nur drei Fälle möglich. Entweder wir erkennen die Dinge so, wie sie an sich sind, oder wir erkennen sie zwar nicht wie sie an sich sind, aber doch so, daß unsere Erkenntnis noch irgend eine Beziehung zu den Dingen an sich hat, oder endlich unsere Erkenntnis hat gar keine Beziehung zu Dingen an sich, sie ist bloßer Schein. Der erste Fall wäre der, daß unserer Erkenntnis uneingeschränkte transzendentale Wahrheit zukäme; im zweiten Falle wäre unsere Erkenntnis eine Erkenntnis von Erscheinungen; im dritten Falle dagegen wäre unsere Erkenntnis, selbst wenn sie in sich widerspruchlos — also in empirischer Hinsicht wahr — wäre, in transzendentaler Hinsicht bloßer Schein. Diesen letzten Fall nun haben wir bereits behandelt, und gefunden, daß er dem faktischen Selbstvertrauen der Vernunft widerspricht, welches durch mittelbare Prüfung zwar nicht näher begründet, aber auch nicht widerlegt werden kann, sondern jeder Denktätigkeit als ursprünglichste Voraussetzung zugrunde liegt.

Es kann sich also nur noch darum handeln, ob unsere Erkenntnis den Dingen an sich entspricht oder nur auf Erscheinungen geht, ob wir also die Dinge so erkennen wie sie an sich sind, oder nur auf eine beschränkte Weise. Den ersten Fall haben wir schon flüchtig berührt; wir sahen, daß wir nicht die Möglichkeit haben, Erkenntnis und Gegenstand mit einander zu vergleichen, so daß, selbst wenn unserer Erkenntnis uneingeschränkte Übereinstimmung mit den Dingen an sich zukommen sollte, wir nie einen positiven Beweis hierfür zu führen vermöchten. Dagegen läßt sich in negativem Sinne beweisen, daß die Gegenstände unserer Erkenntnis, so wie sie uns durch die sinnlichen Anschauungen gegeben werden, keine Dinge an sich sein können. Dieser Beweis, daß die Erfahrung nicht auf Dinge an sich gehen kann, wird geführt durch die Auflösung der sogenannten Antinomieen der menschlichen Vernunft, wodurch nachgewiesen wird, daß die Gegenstände der Erfahrung dem Begriff von Dingen an sich widersprechen. Bevor wir nun an die für unser Thema sehr wichtige allgemeine Betrachtung der Antinomie gehen, wird es vielleicht für die Verständlichkeit vorteilhaft sein, uns diese Verhältnisse an dem besonderen Beispiele einer bestimmten Antinomie klar zu machen.

Es möge sich um die Frage handeln, ob die räumliche und zeitliche Ausdehnung der Welt eine endliche oder unendliche Größe hat. Die Antinomie besteht nun in der merkwürdigen Tatsache, daß sich jede der beiden Möglichkeiten beweisen läßt, und zwar dadurch, daß für jeden Fall das Gegenteil widerlegt wird. Daß die Welt unendlich ist, wird folgendermaßen widerlegt. Eine unendliche Größe müßte eine solche sein, die größer ist als jede noch so große gegebene. Keine noch so große gegebene Größe kann daher eine unendliche Größe sein. Der Begriff des Unendlichen bezeichnet vielmehr nur die Aufgabe, eine veränderliche Größe über jede Grenze hinaus wachsen zu lassen. Das Unendliche kann also nur als ein Vorstellungsprozeß, nicht aber als die

Größe eines wirklich existierenden Gegenstandes gedacht werden. Die Größe der Welt kann daher nicht unendlich sein.

Soll die Welt aber eine endliche Größe haben, so muß sie allseitig begrenzt sein. Dem widerspricht aber die Anschauung des Raumes und der Zeit, die sich beide nicht begrenzt, sondern nur unendlich ausgedehnt vorstellen lassen; die Begrenzung eines vorgestellten noch so großen Raumes müßte ja doch wieder von dem außerhalb befindlichen Raume gebildet werden. Die Welt kann also auch keine endliche Größe haben. Diese Antinomie zeigt also, daß die Welt weder eine endliche noch eine unendliche Größe haben kann, bezw. umgekehrt, daß sie sowohl endlich als auch unendlich sein muß.

Dieser Widerspruch läßt sich leicht heben, wenn man bemerkt, daß die Problemstellung bereits einen Fehler enthielt. Die Disjunktion, daß die Welt entweder eine endliche oder eine unendliche Größe hat, ist nämlich unvollständig; es bleibt noch die dritte Möglichkeit, daß sie überhaupt nicht dem Gesetze der Größe unterworfen ist. Nun haben wir in der Antinomie gesehen, daß jede der ersten beiden Annahmen auf Widersprüche führt. Folglich findet der dritte Fall statt, und die Welt, d. h. der Inbegriff aller existierenden Dinge, unterliegt überhaupt nicht dem Größengesetze. Da wir aber die Welt nur unter den Größenverhältnissen des Raumes und der Zeit *erkennen*, so folgt, daß unsere Erkenntnis der Welt nicht mit der Welt, wie sie unabhängig von unserer Erkenntnis besteht, übereinstimmen kann.

Allgemein betrachtet ist der Grundgedanke der Antinomieen und deren Auflösung folgender. Ein Ding an sich ist ein Ding so wie es unabhängig von meiner Erkenntnis schlechthin besteht. Sollen also die Gegenstände unserer Erfahrung Dinge an sich sein, so müssen sie schlechthin gegeben sein. Nun erkenne ich aber die

Gegenstände unter Bedingungen der räumlichen und zeitlichen Ausdehnung, und zwar so, daß die Reihe der Bedingungen unendlich ist; beispielsweise die Reihe der Ursachen irgend einer Begebenheit. Eine unendliche Reihe von Bedingungen kann aber nicht schlechthin gegeben sein, denn eine unendliche Reihe wäre eine solche, die größer ist als jede noch so große gebene. Wenn aber die ganze Reihe der Bedingungen nicht schlechthin bestehen kann, so kann der bedingte Gegenstand noch viel weniger an sich existieren. Die Gegenstände der Erfahrung widersprechen also dem Begriff von Dingen an sich. Sobald man sie für Dinge an sich hält und ihnen Eigenschaften beilegt, die nur Dingen an sich zukommen, gerät man in Widersprüche zwischen diesen Eigenschaften und denen, die den Gegenständen infolge unserer Erkenntnisweise zukommen. Unsere Erkenntnis ist ja an die Anschauungsformen des Raumes und der Zeit gebunden, mithin an Größenbedingungen, die, wie wir sehen, dem Begriff von Dingen an sich widersprechen. Diese mathematischen Anschauungsformen enthalten also den eigentlichen Grund für die Beschränktheit unserer Erkenntnisweise.

Die Auflösung der Antinomieen ergiebt also, daß die Gegenstände der Erfahrung keine Dinge an sich sein können. Andrerseits hatten wir gesehen, daß sie auch nicht bloßer Schein sein können. Folglich bleibt nur noch die Möglichkeit, daß sie Erscheinung der Dinge an sich sind. Wie kommen wir denn aber überhaupt dazu, Dinge an sich anzunehmen, wenn doch alle Gegenstände unserer Erkenntnis nur Erscheinungen sein können? Darauf ist zu antworten: Wenn ein Ding Erscheinung, und nicht Schein, ist, so muß etwas da sein, was erscheint, sonst wäre eben die Erscheinung selbst das Ding an sich. Wir bilden uns nicht etwa willkürlich eine Idee von Dingen an sich, nach denen sich unsere

Erkenntnis richten soll. Vielmehr geht jede unbefangene Vernunft von der Überzeugung aus, Dinge an sich zu erkennen, und erst ein ausgebildetes Reflexionsvermögen bringt ihr zum Bewußtsein, daß die Gegenstände der Erfahrung nicht Dinge an sich sein können. Die Tatsache dieses Vertrauens der Vernunft auf die objektive Gültigkeit ihrer Erkenntnisse, d. h. darauf, daß ihre Erkenntnisse sich auf Dinge an sich beziehen, bildet die eigentliche Wurzel des religiösen Glaubens. Die Gegenstände der Erfahrung dagegen machen das Gebiet des Wissens und der Wissenschaft aus. Mit diesem, als dem leichter Faßlichen und Evidenteren, wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Das Wissen ist diejenige Überzeugungsart der menschlichen Vernunft, die wir von den Gegenständen unserer sinnlichen Anschauungen haben. Zum Wissen gehören aber nicht nur die sinnlichen Anschauungen selbst, sondern auch alle Erkenntnisse, die sich auf die Gegenstände der Sinne anwenden lassen, indem sie dazu dienen, die Sinneswahrnehmungen gesetzmäßig zu verbinden. Die Erkenntnisquellen der menschlichen Vernunft sind nämlich zunächst die Sinne. Diese geben uns aber nur den für sich zusammenhangslosen und ungeordneten Gehalt unseres Wissens. Der äußere Sinn läßt uns die räumlichen Gegenstände wahrnehmen, während wir uns durch den inneren Sinn unserer eigenen Geistestätigkeiten bewußt werden.

Die Form aber, durch die erst Einheit und Verbindung in unsere Erkenntnisse kommt, ist von zweierlei Art: Einerseits die schon erwähnten Anschauungsformen des Raumes und der Zeit, die die mathematische Zusammensetzung des sinnlichen Gehaltes der Erkenntnis ermöglichen; andrerseits die nur denkbaren, von Kant metaphysisch genannten Formen der notwendigen Verknüpfung, zu denen beispielsweise die Begriffe von Causalität, Kraft, Materie gehören.

Wissenschaft ist der Begriff einer logisch-systematischen Anordnung des durch das Wissen gegebenen Materiales, bezw. die methodische Aufsuchung eines solchen Systems. Wissen und Wissenschaft unterscheiden sich lediglich formal, nicht dem Inhalte nach. Ein wissenschaftliches System kommt nun zustande durch die Unterordnung der Gegenstände der sinnlichen Anschauung unter die notwendigen metaphysischen Vernunftgesetze, wodurch uns der Begriff der Natur entsteht als Begriff des Daseins der Dinge unter notwendigen Gesetzen. Dieses Unterordnen macht das eigentliche Geschäft der Erfahrung aus, die ja nicht nur die Summe der einzelnen Sinneswahrnehmungen ist, sondern eine gesetzmäßige Verknüpfung derselben enthält. Naturgesetzmäßigkeit aller Erscheinungen der Sinnenwelt ist das Grundprinzip der Wissenschaft, und zwar erstreckt es sich nicht allein auf die Körperwelt, sondern es findet auch gleicherweise Anwendung auf die gesamte geistige Erscheinungswelt. Wissenschaft und Natur sind durchaus Wechselbegriffe.

Jene Unterordnung der zufälligen sinnlichen Tatsachen unter die notwendigen Vernunftgesetze geschieht durch logische Schlußfolgerungen, in deren systematischem Aufbau das Wesen der Theorie besteht. Diese Unterordnung der Tatsachen unter die Gesetze, d. h. die Vereinigung des sinnlichen Gehaltes unserer Erkenntnis mit ihrer begrifflichen Form, wird vermittelt durch die mathematische Erkenntnisweise, die das Eigentümliche an sich hat, daß sie einerseits mit den Sinnesanschauungen die Anschaulichkeit, andrerseits aber die Notwendigkeit mit dem Naturgesetze gemein hat. Die Herrschaft der Theorie kann sich daher auch nur so weit erstrecken wie die Anwendbarkeit der Mathematik. Denn ohne dieses vermittelnde Bindeglied ist eine Unterordnung der sinnlichen Anschauungen unter das Gesetz unmöglich. Aus diesem Umstande läßt sich eine für unsere weiteren Betrachtungen höchst wichtige Folgerung ziehen. Alle Theorie ist nur imstande die quantitativen Verhältnisse der Gegenstände unter einander festzulegen, während sie an ihren qualitativen Bestimmungen eine unüberwindliche Schranke findet. Alles, was sich nicht zählen und messen läßt, das liegt außerhalb des Gebietes der naturwissenschaftlichen Theorie. Alle Sinnesempfindungen, wie Farbe, Ton und Duft, lassen sich deshalb auf keine Weise näher erklären, und ihre Möglichkeit kann kein Problem der Naturwissenschaft bilden. Wohl läßt sich erklären, wie die Schwingungen einer Saite entstehen, wie diese Schwingungen von der Luft angenommen und auf unser Gehörorgan übertragen werden, und wie sich die Erregung von dort aus weiter durch die Nerven ins Gehirn fortpflanzt. Warum wir aber diese Bewegungen als Klang empfinden, das ist kein Thema für eine wissenschaftliche Erklärung. Es wird immer nur eine Bewegung aus einer anderen erklärt, d. h. es werden die quantitativen Verhältnisse verschiedener Gegenstände, nämlich der Saite, der Luft u. s. w., in ihren Beziehungen zu einander betrachtet. Das Qualitative an diesen Erscheinungen, das, was wir als Klang empfinden, kann aus diesen Erklärungen niemals abgeleitet werden.

Jede erklärende Theorie in den Naturwissenschaften kann sich also einzig und allein auf die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse der Gegenstände unserer Erkenntnis zu einander erstrecken. Dafür aber hat auf diesem Gebiete die Theorie uneingeschränkte Herrschaft, indem jede Naturerscheinung sich auf wissenschaftlichem Wege und nur auf diesem erklären lassen muß. Daß bisher noch gar manche Erscheinungen unerklärt sind, liegt nicht an der

Unzulänglichkeit der wissenschaftlichen Methode, sondern nur daran, daß entweder die Beobachtungen noch nicht ausreichen oder die in Frage kommenden mathematischen Verhältnisse zu kompliziert sind.

Worin besteht nun die Erklärung einer Erscheinung? In nichts anderem als in ihrer Zurückführung auf allgemeine Naturgesetze. Und zwar wird eine Erklärung um so vollständiger sein, je allgemeiner die Gesetze sind, bis auf welche die Zurückführung gelungen ist. Die allgemeinsten Naturgesetze sind aber die Grundgesetze der Mechanik. Von der vollständigen Erklärung einer Erscheinung, welcher Art diese auch sein mag, werden wir also ihre Zurückführung auf mechanische Prinzipien fordern müssen. Die Mechanik ist nämlich nichts anderes als die gesonderte Entwicklung jener vorhin erwähnten mathematisch-metaphysischen Formen der Erfahrung und ist ein System von Begriffen und Gesetzen, das sich aus den Grundbegriffen der Kraft, der Masse, des Raumes und der Zeit ableiten läßt. Es sei indessen bemerkt, daß sich auch andere Systeme aus von einander unabhängigen mechanischen Grundbegriffen denken lassen und daß insbesondere der Versuch gemacht worden ist, den Begriff der Kraft durch den der Energie zu ersetzen. Es ist hier nicht der Ort zu untersuchen, welches von diesen Systemen die einfachsten Erklärungen für die Vorgänge der Erscheinungswelt ermöglicht. Diese Frage ist zur Zeit noch nicht gelöst und für uns hier auch nicht von großem Interesse, da es lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit ist und nicht eine solche, die die Richtigkeit und Sicherheit der aus jenen verschiedenen Systemen abgeleiteten Resultate betrifft.

Es leuchtet wohl ein, daß für jedes System der Mechanik die Zahl der Grundbegriffe und Grundgesetze eine ganz bestimmte sein muß und daß daher die erklärende Naturwissenschaft in regressiver Rücksicht, d. h. in der Aufsuchung der letzten theoretischen Erklärungsgründe, prinzipiell vollendbar ist, indem es möglich sein muß, jede Erscheinung auf die denkbar einfachsten mechanischen Gesetze zurückzuführen. Welches diese Gesetze sind und ob sie zur Zeit überhaupt schon feststehen, ist für unsere Betrachtungen belanglos. In progressiver Hinsicht dagegen, d. h. wenn es sich darum handelt, die gegebenen Erklärungsgründe auf das Gebiet der wirklichen Erscheinungen anzuwenden, ist die Naturwissenschaft prinzipiell unvollendbar; denn die unendliche Mannigfaltigkeit der Erscheinungen stellt der Wissenschaft immer neue Aufgaben. Die unendliche Ausdehnung und Teilbarkeit des Raumes und der Zeit gestatten es nicht, irgend eine Erscheinung als die letzte zu betrachten und lassen stets freies Feld für weitere Forschungen.

Daß die mathematischen Anschauungen des Raumes und der Zeit diesen Charakter der Unvollendbarkeit tragen, hängt mit der vorhin erwähnten Getrenntheit der Quellen unserer Erkenntnis zusammen. Da sich die Vernunft den Gehalt ihrer Erkenntnis nicht selbst zu geben vermag, sondern ihn erst von der äußeren Anregung durch den Sinn erwarten muß, kann auch in ihr kein Grund für die Unmöglichkeit immer neuer sinnlicher Anregungen liegen; denn die Bedingungen dieser Anregung liegen ja nicht in der Vernunft selbst, so daß das Eintreten oder Nicht-Eintreten neuer Anregungen von der Vernunft unabhängig ist und für sie schlechthin zufällig bleibt. Es muß daher die Form der anschaulichen Auffassung dieses Gehaltes die Möglichkeit einer stets fortschreitenden Erweiterung desselben zulassen und deshalb den Charakter der Unvollendbarkeit an sich tragen.

Trotz dieser Unvollendbarkeit bildet aber die Wissenschaft ein ihrem Begriffe nach scharf umschriebenes, unabhängiges, sich selbst durchaus genügendes, widerspruchloses Gebiet in den Erkenntnissen der menschlichen Vernunft. Scharf umschrieben, weil sich von jedem Problem mit Bestimmtheit sagen läßt, ob es in ihr Gebiet gehört oder nicht; unabhängig und sich selbst genügend, weil ihre Erklärungsgründe in ihr selbst enthalten sind und keiner Begründung durch ihr fremde Prinzipien bedürfen; widerspruchslos, weil die Wissenschaft es nur mit der Erscheinungswelt zu tun hat, also nur mit empirischer Wahrheit die ja in der Übereinstimmung der Erkenntnisse untereinander ihr Kriterium hat. Wollte man aber von der Wissenschaft verlangen, sie solle absolute, transzendentale Wahrheit, liefern, so würde man allerdings sogleich die vorhin erwähnten Widersprüche der Antinomieen in sie einführen. Diese Forderung nach transzendentaler Wahrheit führt uns vielmehr aus dem Gebiete der Wissenschaft hinaus unmittelbar in das des Glaubens.

Durch den Umstand, daß unsere Erfahrungserkenntnis an notwendige Schranken gebunden und unvollendbar ist, wird Raum für den G l a u b e n in unserer Vernunft. Es handelt sich aber hier wohlverstanden um den religiösen Glauben, nicht etwa um den Glauben in der Bedeutung von Meinung. Der letztere ist nichts weiter als ein niedrigerer Erkenntnisgrad des Wissens; er unterscheidet sich nur g r a d weise, nicht der Erkenntnis a r t nach vom Wissen. Er bedeutet eigentlich nur eine Zurückhaltung des Urteils in Fällen, wo mir die hinreichenden Daten fehlen, um ein sicheres Urteil auszusprechen. Auch der historische, auf Überlieferung gegründete, Glaube ist streng von dem religiösen zu scheiden. Beiden gemeinsam ist allerdings das Vertrauen, welches im Glauben enthalten ist. Während aber der historische Glaube auf eine fremde Autorität vertraut, handelt es sich beim religiösen Glauben um das Selbstvertrauen zur eigenen Vernunft. Es ist wohl kaum nötig anzudeuten, daß hier der Scheidepunkt liegt zwischen dogmatischer und kritischer Auffassung der Religion und daß wir es hier allein mit der letzteren zu tun haben.

Der religiöse Glaube ist eine vom Wissen ganz unabhängige Überzeugungsart unserer Vernunft, die sich aber in dem **Grade** der Gewißheit von dem Wissen gar nicht unterscheidet. Ich betone dies, weil häufig die Behauptung zur Geltung kommt, mit der Entwicklung der Wissenschaft sei das Gebiet des Glaubens immer mehr eingeengt worden und es stehe zu erwarten, daß die Vollendung der Wissenschaft dereinst den Glauben völlig aus der Welt schaffen werde. Dies trifft wohl zu für den Aberglauben. Der wahre Glaube indessen kann durch die Ausbildung der Wissenschaft niemals verlieren, eben weil sein Gebiet mit dem der Wissenschaft nichts gemein hat, wie ich dies bald bestimmter entwickeln werde. Es ist deswegen überhaupt unmöglich, daß eine höhere Ausbildung der menschlichen Erkenntnis die Selbständigkeit dieser beiden Überzeugungsarten aufhöbe, etwa um beide in eine höhere Erkenntnisart zu verschmelzen.

Worin besteht denn nun der religiöse Glaube? Er ist eine notwendige Überzeugung aus bloßer Vernunft, die uns in den Ideen von der ewigen Weltordnung und den Dingen an sich zum Bewußtsein kommt. Wie ist eine solche Überzeugung aber möglich, da wir doch vorhin sahen, daß wir von den Dingen an sich gar keine positiven Erkenntnisse besitzen können? Hier sei im voraus bemerkt, daß die Glaubensideen in der Tat ihrem Wesen nach durchaus negativen Ursprungs sind. Sie sind reine Begriffe von **der** Art, daß niemals ein ihnen korrespondierender Gegenstand in der Erfahrung gegeben werden kann. Die Ideen sind also wesentlich entgegengesetzt den Begriffen des Wissens, deren

Bedeutung ja gerade in der Anwendbarkeit auf die Gegenstände der Erfahrung besteht. Zu der Bildung der Ideen gelangt aber die Vernunft dadurch, daß sie, nachdem sie sich der Schranken ihrer Erkenntnisfähigkeit (die in der Unvollendbarkeit der Erfahrung bestehen und in der Abhängigkeit der Vernunft vom Sinne ihren Grund haben) bewußt geworden, sich diese Schranken aufgehoben denkt und so zu dem Begriff einer Welt kommt, wie sie an sich, also unabhängig von unserer beschränkten Erkenntnisweise, besteht. Auf der gänzlich negativen Natur dieses Denkprozesses, nämlich der Aufhebung der Schranken unserer Erkenntnis, beruht es, daß die so entstehenden Begriffe, die Glaubensideen, unmöglich, weder anschauliche noch begriffliche, positive Erkenntnisse über die ewige Welt enthalten können. Eine genauere Besprechung der einzelnen Glaubensideen würde uns hier zu weit führen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß jede Idee zu einer Antinomie führt, sobald man ihr zeitliche oder räumliche Attribute beilegt.

Bisher haben wir den Glauben nur von der spekulativen Seite her betrachtet, wobei sich ergab, daß er sich in den Ideen über die Schranken der menschlichen Erkenntnis erhebt, ohne indessen dadurch an positiver Erkenntnis irgend etwas zu gewinnen. Ein solcher Glaube wäre nun eigentlich recht trocken und leblos, denn er würde im Grunde genommen nichts weiter bedeuten als die Feststellung der Tatsache, daß unser Erkenntnisvermögen beschränkt ist, und höchstens vielleicht den unerfüllbaren Wunsch ausdrücken, uns aus dieser beschränkten Lage zu befreien. In ganz anderem Lichte erscheint der Glaube, wenn wir ihn von der praktischen Seite her ins Auge fassen. Erst in ihrer praktischen Anwendung gewinnen die Glaubensideen lebendige Bedeutung.

Der Mensch ist nicht nur ein erkennendes Wesen, sondern er besitzt auch die Vermögen sich zu interessieren und zu handeln. Wir beurteilen den Wert einer Handlung danach, ob sie mit den praktischen Vernunftgesetzen übereinstimmt oder nicht, und nennen sie dementsprechend gut oder schlecht. Die Handlung wird durch den Willen bestimmt, die Bestimmungsgründe des Willens aber sind Zwecke. Ein guter Wille wird daher ein solcher sein, der sich nach den durch die Vernunft vorgeschriebenen Zwecken richtet. Ein Zweck kann nun entweder an sich selbst einen Wert haben, oder er dient nur als Mittel zur Verwirklichung eines anderen Zweckes. Aller Beurteilung der Zweckmäßigkeit irgend welcher Handlungen liegt also notwendig die Voraussetzung irgend eines Endzweckes oder Zweckes an sich zugrunde. Einem Zwecke, der selbst noch als Mittel zu einem anderen dient, kann nur ein mittelbarer, relativer Wert beigelegt werden. Denn es kommt ihm ja nur ein Wert zu, insofern er zur Verwirklichung eines Endzwecks beiträgt, welchem allein absoluter Wert zuerkannt werden kann. Was kann nun für den guten Willen als Endzweck seiner Handlungen angesehen werden?

Zunächst leuchtet ein, daß alles Körperliche, also räumlich Ausgedehnte keinen absoluten Wert beanspruchen kann. Waren es doch gerade die räumlichen und zeitlichen Bestimmungen, die uns, sofern sie den Bedingungen der Unendlichkeit und Stetigkeit unterliegen, daran hindern, den Gegenständen unserer Erfahrung ewige Bedeutung beizulegen. Alles Körperliche kann also in ethischer Hinsicht nur zur Vermittlung anderweit gegebener, selbständiger Zwecke dienen. Einen Zweck an sich können wir vielmehr nur im Geistigen suchen. Denn wenn wir auch das Geistige in unserer Erfahrung nur als Erscheinung erkennen, so sind es doch nur die Zustände des Geistes, nicht dieser selbst, was uns in der Zeit erscheint. Wenn daher auch diese Zustände des Geistes, so wie sie Gegenstände unserer Erfahrung werden, zu den Naturerscheinungen gezählt werden müssen, so liegt doch kein Grund vor, dem Geiste selbst die ewige Bedeutung abzustreiten. Dem geistigen Leben allein kann also absoluter Wert zuerkannt werden. Als Endzweck des guten Willens kann nur die Würde der Person gedacht werden. Die Anerkennung des sittlichen Endzweckes äußert sich also darin, daß wir einen Menschen niemals als Mittel gebrauchen, sondern stets nur als Zweck behandeln. Die Achtung fremder Personen macht die Gerechtigkeit aus; in der Achtung der eigenen Würde besteht die Ehre.

Die absolute Befolgung des sittlichen Gebotes würde einen absolut guten Willen voraussetzen. Wäre unser Wille nur von rein vernünftigen Bestimmungsgründen abhängig, so würde er auch absolut gut sein. Es gäbe für ihn weder ein Sollen noch eine Pflicht, sondern er würde stets schlechthin vernunftgemäß, also gut, handeln, ohne irgend welche Nötigung. Nun wird aber unser Wille nicht allein durch die reine Vernunft bestimmt, sondern ist auch von sinnlichen Antrieben abhängig. Die sinnlichen Antriebe stehen aber oft im Streite mit den rein vernünftigen Bestimmungen des Willens. Die Befolgung des sittlichen Gesetzes gegen den Antrieb der sinnlichen Neigungen setzt daher für den Willen eine Nötigung voraus, die sich in dem Bewußtsein des Sollens ausdrückt. Soll der Wille gut sein, so darf seine Handlung nicht durch sinnliche Neigungen bestimmt werden, sondern er muß aus reiner Achtung vor dem Gesetze handeln. Die Notwendigkeit einer Handlung aus Achtung vor dem Gesetze ist Pflicht. Die willige Unterwerfung unter das Gesetz ist die Tugend, welche in dem Übergewicht des rein vernünftigen Antriebes über den sinnlichen besteht; sie ist die Kraft der guten Gesinnung im menschlichen Entschlusse.

Die Frage nach der sittlichen Zurechnung führt uns nun auf eine nicht unerhebliche Schwierigkeit, die von jeher in dem Konflikte zwischen wissenschaftlicher und religiöser Weltansicht eine Hauptrolle gespielt hat. Wenn der Mensch für seine Entschließungen verantwortlich sein soll, wenn wir ihm seine Handlungen als gut oder böse zurechnen, so setzt eine solche Beurteilung voraus, daß er die Möglichkeit hat, sich seiner Pflicht gemäß zu entschließen, daß er in der Wahl seiner Entschlüsse frei ist. Nun sind aber alle menschlichen Handlungen, als Naturerscheinungen, mit Notwendigkeit durch die Naturgesetze bestimmt. Ist aber bereits durch die Naturgesetze bestimmt, wie der Mensch handeln muß, so kann es keinen Sinn mehr haben, von ihm zu fordern, wie er handeln soll, und jede Zurechnung erweist sich als bedeutungslos. Hier scheint also ein schwerwiegender Widerspruch vorzuliegen zwischen den ethischen Überzeugungen, welche Freiheit des Willens fordern, und den Einsichten der Wissenschaft, welche die Abhängigkeit des Willens von notwendigen Naturgesetzen lehrt. Die Gültigkeit der Naturgesetze scheint diejenige des Sittengesetzes auszuschließen.

Die Auflösung dieses Widerspruches ist sehr einfach, wenn wir uns an die Antinomieen und den Unterschied von Ding an sich und Erscheinung erinnern. Der Mensch erkennt zwar sein Dasein nur als eine zeitliche Erscheinung, er fühlt sich aber doch zugleich der ewigen Weltordnung angehörig. Er kann sich daher einerseits als Naturerscheinung nach wissenschaftlichen Grundsätzen beurteilen, wobei er alle seine Tätigkeiten unerbittlichen Naturgesetzen unterworfen denken muß. Andrerseits aber kann er sich auch als Bürger der ewigen Welt nach Ideen beurteilen, und dies ist der Fall, wenn er sich seine Handlungen nach sittlichen Gesichtspunkten zurechnet. Wir bemerken also, daß es sich hier nicht um einen wirklichen Widerspruch handelt, sondern nur um zwei verschiedene Gesichtspunkte der Beurteilung eines und desselben Gegenstandes. Nur die Vermengung dieser beiden Beurteilungsweisen trägt die Schuld an dem Auftreten jenes scheinbaren Widerspruchs.

In dem Glauben an die persönliche Würde, der den Grundgedanken der ethischen Notwendigkeit bildet, erhebt sich die Vernunft über die Schranken der Erfahrung und geht aus dem Reiche der Naturgesetze über in das Reich der Zwecke. In der Achtung der persönlichen Würde, die den Inhalt des Sittengesetzes ausmacht, drückt sich die Anerkennung der Selbständigkeit des geistigen Lebens aus, die für die ideale Vorstellungsweise im Gegensatze zur wissenschaftlichen charakteristisch ist.

Ich hatte vorhin gesagt, erst durch die praktische Anwendung erhielten die Glaubensideen ihre eigentliche Bedeutung. Diese Behauptung wird durch das soeben Ausgeführte volle Deutlichkeit erhalten haben. Es hat sich gezeigt, daß die praktischen Überzeugungen Unabhängigkeit von der Natur voraussetzen und daß somit die spekulativen Ideen den praktischen als Bedingung ihrer Möglichkeit zu Grunde liegen. Die spekulativen Glaubensideen in ihrer Anwendung auf das sittliche Gebot mit seinen näheren Bestimmungen machen erst das vollständige Gebiet des Glaubens aus. Worin das Sittengesetz besteht, habe ich vorhin in wenigen Zügen anzudeuten versucht. Ich schulde aber eigentlich noch Antwort auf die Frage nach der Rechtfertigung dieses Gesetzes. Was zwingt uns denn ein solches Gesetz in unserer Vernunft anzuerkennen? Diese Frage hinreichend zu beantworten könnte ich nicht übernehmen, ohne die Grenzen dieses Vortrages erheblich zu überschreiten. Die diesbezüglichen Untersuchungen sind das Geschäft der Kritik der praktischen Vernunft, deren Resultate allein ich in betreff dieser Frage hier angeben kann. Ich muß mich hier damit begnügen, zu bemerken, daß dieses Sittengesetz auch zu jenen unmittelbaren Erkenntnissen gehört, deren Vorhandensein in der Vernunft uns gleichzeitig für ihre Gültigkeit bürgt. Es ist also dieses Gesetz, wie der Glaube überhaupt, nicht etwa eine willkürliche Annahme oder Konvention, sondern eine notwendige, ursprüngliche Überzeugung der Vernunft, die durchaus nicht weniger gewiß ist als jede andere unmittelbare Vernunfterkenntnis, beispielsweise eine mathematische oder sinnesanschauliche Überzeugung. Freilich haben letztgenannte Erkenntnisarten den Vorzug der Anschaulichkeit und Evidenz vor den Erkenntnissen des Glaubens, die ja ihrem Wesen nach durchaus unanschaulicher Natur sind. Ein Widerspruch findet indessen zwischen diesen verschiedenen Erkenntnisarten niemals statt, indem nämlich die Glaubensideen nur in praktischer Hinsicht positive Anwendung finden, in spekulativer Hinsicht dagegen gar keine positive Belehrung geben; schon aus diesem Grunde allein können sie nicht mit den wissenschaftlichen Erkenntnissen in Widerstreit geraten. Die Rechtfertigung des Glaubens gegenüber den Ansprüchen des Wissens auf größere Gewißheit liegt in letzter Linie in der Einsicht, daß er nicht subjektiver ist als das Wissen, da für keine der beiden Überzeugungsarten eine Prüfung ihrer Wahrheit durch Vergleichung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande stattfinden kann.

Was ich bis jetzt über das Wesen des Glaubens ausgeführt habe, dürfte vielleicht genügen, um überblicken zu lassen, daß Wissenschaft und Religion vollständig gesonderte Gebiete bilden und daß sie ihrem Wesen nach sich unmöglich gegenseitig irgend wie beeinträchtigen können, was zu zeigen die vornehmliche Aufgabe dieses Vortrages war. Wollen wir uns aber ein klares Bild von dem Wesen der Religion verschaffen, so wird es nötig sein, einige Betrachtungen anzuschließen, die auch das Verhältnis der Religion zur Wissenschaft noch näher beleuchten werden.

Bisher haben wir nämlich nur von dem Glauben gesprochen. Dieser allein füllt aber noch keineswegs das ganze Gebiet der Religion aus, vielmehr gehört zu dieser noch eine andere Überzeugungsart, welche Fries Ahndung benannt hat. Ich behalte dieses Wort absichtlich in der älteren Sprachform bei, weil es in einer bestimmteren Bedeutung zu verstehen ist als das alltägliche Wort Ahnung. Wissen, Glaube und Ahndung sind die drei verschiedenen Überzeugungsarten, die zusammen das ganze Gebiet der menschlichen Erkenntnis ausmachen.

Worin besteht nun diese dritte Überzeugungsart?

Die Ahndung ist eine notwendige Überzeugung der Vernunft aus bloßem Gefühl. Dieses Gefühl drückt die Überzeugung aus, daß den Erscheinungen, die die Gegenstände des Wissens bilden, eben dieselbe Realität zugrunde liegt, auf die der Glaube geht. Dieses vielleicht etwas schwierige Verhältnis müssen wir eingehender erörtern; es bildet eine der Fries'schen Philosophie ganz eigentümliche Lehre. — Inbetreff des Wortes Gefühl sei vorerst bemerkt, daß im gewöhnlichen Sprachgebrauche meist kein Unterschied zwischen Gefühl und Empfindung gemacht wird, daß dagegen Fries streng das Gefühl von allen sinnlichen Bestimmungen scheidet. Die Ahndung ist in der Tat nichts anderes als die Gefühlsstimmung des im Glauben lebenden Menschen. Von dieser Stimmung geht die eigentliche Religion aus. Der Glaube als solcher, also die Idee von dem ewigen Sein, steht dem Wissen um das Zeitliche starr und kalt gegenüber und kann, wenn das Gefühl fehlt, in einem Menschen vorhanden sein, ohne ihm eigentliche Religiosität zu verleihen. Erst durch Handlung und Gefühl erhält der Glaube Leben und Wärme; erst durch die Ahndung, die im Gefühle Glauben und Wissen vereinigt, hebt sich der Zwiespalt dieser beiden Überzeugungsarten der Vernunft, indem uns im Gefühle zum Bewußtsein kommt, daß die beiden Welten, des Glaubens und des Wissens, im Grunde genommen doch nur eine Welt bilden, daß beiden durchaus die gleiche Realität zugrunde liegt.

Es könnte nun leicht scheinen, als ob das eben Gesagte mit unseren früheren Ausführungen im Widerspruche stände. Hatten wir nicht gezeigt, daß Glaube und Wissen völlig getrennte Gebiete in unserer Vernunft bilden und daß eine Verschmelzung derselben zu einer gleichartigen Erkenntnisweise unmöglich ist? Wie soll also durch die Ahndung dennoch Einheit in unsere Vernunft kommen können?

Wir hatten gesehen, daß die Wissenschaft sich auf das Gebiet der Anschauung beschränkt, während der Glaube auf nichtanschauliche Begriffe, die Ideen, geht. Aus der Verschiedenartigkeit der Begriffe, des Wissens und derjenigen des Glaubens ergab sich, daß diese beiden Gebiete nichts mit einander gemein haben können, daß also weder eine Erkenntnis der ewigen Weltordnung aus wissenschaftlichen Prinzipien, noch auch eine wissenschaftliche Erkenntnis der Natur aus Ideen gelingen kann. Sollte eine wissenschaftliche Erkenntnis der Natur aus Ideen möglich sein, so müßten sich die Erscheinungen — die Gegenstände der Sinnesanschauung — logisch unter die Ideen subsumieren lassen. Eine solche Unterordnung verlangt aber einen Mittelbegriff, durch den der Fall, die Erscheinung, auf die Regel, hier die Idee, bezogen wird. Nun besitzen wir aber nur eine einzige Erkenntnisweise, die solche Mittelbegriffe liefern könnte, nämlich die mathematische, indem diese allein den Charakter der Anschaulichkeit des Falles mit der Notwendigkeit der Regel verbindet. Idee und Mathematik schließen sich aber gegenseitig aus, da wir ja zu den Ideen gerade durch Verneinen des Mathematischen in unserer Erkenntnis gelangten. Mithin ist eine wissenschaftliche Unterordnung der Gegenstände des Wissens unter die Ideen in der Tat unmöglich. — Die Ahndung ist aber gar keine wissenschaftliche Erkenntnisweise, sondern sie besteht, wie ich vorhin betonte, lediglich im Gefühle. Die Einheit des Ewigen und Zeitlichen wird in der Ahndung nur gefühlt, nicht begrifflich erkannt. Statt jenes für die wissenschaftliche Unterordnung notwendigen Mittelbegriffs vermittelt hier ein bloßes Gefühl die Beziehung des Falls auf die Regel. Jeder Versuch, den Inhalt dieses Gefühles auf positive Begriffe zu bringen, muß notwendig zu Widersprüchen führen.

Man könnte uns hier entgegenhalten, daß so sehr wir auch hervorheben, daß es nicht möglich ist, den Gegenstand des religiösen Gefühles in bestimmten Begriffen zu erkennen, wir trotzdem fortwährend über Glauben und Ahndung in positiven Begriffen sprechen. Wir versuchen also offenbar doch uns eine wissenschaftliche Erkenntnis der Religion zu bilden, obgleich wir behaupten, daß dies auf Widersprüche führen müsse. Die Antwort auf diesen Einwand ist nicht schwer. Es giebt zwar keine begriffliche Erkenntnis *innerhalb* der Religion; die religiöse Überzeugung läßt sich allerdings nicht in eine wissenschaftliche verwandeln; wohl aber giebt es eine Wissenschaft *von* der Religion. Wenn es also auch keine Wissenschaft *aus* Ideen giebt, so giebt es doch eine Wissenschaft von den religiösen Ideen, die Religionsphilosophie, mit der wir es hier allein zu tun haben.

Nachdem wir das Verhältnis der Ahndung zum Glauben und zur Wissenschaft betrachtet haben, fragt es sich, welche Vorstellungen uns denn eigentlich durch die Ahndung zum Bewußtsein kommen. Unsere Vernunft besitzt nur zwei Vermögen, die es ihr gestatten, sich über die Schranken der sinnlichen Anschauung zu erheben: die Negation für die Bildung der spekulativen Ideen, und die Kombination für die Bildung der ästhetischen Ideen. Die spekulativen Ideen haben wir bereits behandelt; sie sind nichts anderes als die Glaubensideen, auf die wir durch Verneinung der Schranken unserer Erkenntnis kamen.

Um die Möglichkeit der Beurteilungsweise der Natur nach ästhetischen Ideen zu verstehen, müssen wir uns daran erinnern, daß für unsere Vernunft eine notwendige Trennung zwischen dem Gehalte und der Form ihrer Erkenntnis besteht. Eine unvermeidliche Folge der Unabhängigkeit dieser beiden Bestimmungsstücke unserer Erkenntnis war es, daß die reinanschauliche Zusammensetzung des sinnlichen Gehaltes rücksichtlich der formalen Bedingungen unserer Erkenntnis schlechthin zufällig bleibt. Selbst die vollendetste naturwissenschaftliche Theorie vermag diese Zufälligkeit nicht aufzuheben. Der Astronom, der mit unfehlbarer mathematischer Gewißheit für vergangene und zukünftige Zeiten die Lage der Gestirne zu berechnen imstande ist, bedarf doch der empirischen Kenntnis ihrer Konstellation zu irgend einem bestimmten Zeitpunkte. Wenngleich er diesen Zeitpunkt beliebig wählen kann, so ist doch bei der jeweilig gewählten Anfangslage, die ihm als Ausgangspunkt für seine Berechnungen dient, die geometrische Anordnung der betrachteten Gestirne schlechthin zufällig. Diese Zufälligkeit der mathematischen Zusammensetzung schafft Raum für die ästhetische Beurteilungsweise der Natur. Während die Wissenschaft den gegebenen Stoff der Erfahrung nur mit Rücksicht auf seine Abhängigkeit von allgemeinen Gesetzen betrachtet, beruht die ästhetische Beurteilung gerade auf der Anerkennung der Zufälligkeit seiner anschaulichen Zusammensetzung. Diese Zufälligkeit erlaubt es nämlich der kombinierenden Einbildungskraft, sich die Anordnung der Erscheinungen auch anders vorzustellen, als sie uns gerade in der Wirklichkeit entgegen tritt. Dieser Spielraum für Möglichkeiten bereitet den Boden für die Bildung der ästhetischen Ideen. Ästhetische Idee ist eine Form der anschaulichen Zusammenfassung des empirisch gegebenen Mannigfaltigen, die das Eigentümliche an sich hat, daß sie sich nicht auf Begriffe bringen läßt. Solche Formen sind es, die wir als schön oder erhaben beurteilen. Wenn wir einen Gegenstand schön nennen, so schreiben wir ihm eine ihm eigene Bedeutung zu, die wir wohl f ü h l e n, aber nicht theoretisch begreiflich machen oder rechtfertigen können. Die Harmonie der Töne, der Duft der Blumen, das Spiel der Farben und Gestaltungen, sie alle enthalten einen geheimnisvollen Zauber, den keine Begriffe aufzulösen oder zu deuten vermögen.

Die ästhetischen Ideen sind es nun, die den eigentlichen Gehalt der Ahndung bilden. Die Wissenschaft vermag die durch die Vernunft geforderte Beziehung des empirisch gegebenen Mannigfaltigen auf die metaphysische Grundform der notwendigen Einheit nur in beschränkter Weise durchzuführen, indem das vorhin erläuterte Gesetz der Zufälligkeit ihren Erklärungen eine unüberwindliche Schranke setzt. Die vollständige Unterordnung des Gehaltes unserer Erkenntnis unter jene Form der notwendigen Einheit bleibt vielmehr als eine t h e o r e t i s c h unerfüllbare Forderung stehen und kann nur durch die Verneinung der Schranken unserer wissenschaftlichen Erkenntnis, d. h. durch die spekulativen Glaubensideen, als ein durch Begriffe unauflösliches Problem anerkannt werden.

Die Unterordnung des empirischen Gehaltes unserer Erkenntnis unter die sich in den Glaubensideen aussprechende Grundform der notwendigen Einheit kann nicht anders als durch ein bloßes Gefühl vermittelt werden. Eine solche Unterordnung findet tatsächlich in der ästhetischen Beurteilungsweise statt. Vermöge ihrer vorhin dargestellten Eigentümlichkeit — daß sie nämlich das rücksichtlich der Naturgesetze zufällige Mannigfaltige unter die Form eines einheitlichen Ganzen bringt — tritt die ästhetische Idee unter die Glaubensideen. In den Gefühlsstimmungen, die diese Beziehung der Gegenstände der Anschauung auf die Ideen des Ewigen vermitteln und die anstelle des für eine theoretische Unterordnung fehlenden Mittelbegriffes eintreten, besteht das eigentliche Wesen der Ahndung.

In der Ahndung wird der Gegenstand nicht positiv erkannt wie er an sich ist, sondern es wird nur seine Gegenwart anerkannt durch das Gefühl des Schönen und Erhabenen in der Natur. Aus der Unmöglichkeit, die Gegenstände der Ahndung begrifflich oder gar anschaulich zu erkennen, ergiebt sich, daß sie ihrem Wesen nach notwendig unbegreifliche Geheimnisse für unsere Vernunft bleiben müssen. Es sind dies Geheimnisse ganz anderer Art, als die der Wissenschaft; denn für diese kann es keine notwendigen Geheimnisse geben, da alle Erscheinungen, die sinnesanschaulich erkannt werden, auch der wissenschaftlichen Erklärung zugänglich sein müssen. Sobald man über das bloße Gefühl hinausgeht, um in die Geheimnisse der Ahndung einzudringen, verliert man sich notwendig in Widersprüche. Die echte, durch Aberglauben nicht getrübte Religion besteht gerade darin, daß sie im Gefühle der Ahndung das Geheimnis anerkennt, das in dem Verhältnis der Natur zur Ewigkeit liegt und das von uns nicht anders als nach den ästhetischen Ideen beurteilt werden kann.

Die ästhetischen Ideen bilden die einzigen Vorstellungen, die wir über die Beziehung der Erscheinungen zu den Dingen an sich haben, eben weil sie nicht im begrifflichen Denken, sondern im reinen Gefühle aufgefaßt werden. Es ist daher die vielfach geäußerte Befürchtung, daß die fortschreitende Ausbildung der Wissenschaft allmählich das Schönheitsgefühl im Menschen ersticken werde, nicht berechtigt. Dies Gefühl ist vielmehr seinem Wesen nach allen Erklärungen der Wissenschaft überlegen und wird einem reinen, fühlenden Menschen durch keine wissenschaftliche Einsicht irgend welcher Art jemals entrissen werden können.

Die ästhetische Beurteilung der Naturerscheinungen ist nun eigentlich einerlei mit der Teleologie der Natur. Hierüber müssen wir uns etwas näher verständigen. Jede Beurteilung der Zweckmäßigkeit einer Anordnung der Dinge ist entweder logisch oder ästhetisch. Logisch ist sie, wenn man von einem gegebenen Endzwecke ausgeht und vergleicht, ob die Anordnung derartig ist, daß durch sie dieser Endzweck verwirklicht wird. So wird beispielsweise die Zweckmäßigkeit einer Maschine beurteilt. Diese logische Zweckmäßigkeit darf in der Naturwissenschaft höchstens als heuristische Maxime zugelassen werden; als wissenschaftlicher Erklärungsgrund ist sie durchaus nicht anwendbar. Es ist ein unnützes und müßiges Unternehmen, einen Endzweck der Natur oder der einzelnen Erscheinungen in ihr entdecken zu wollen. Vergeblich wird man sich bemühen den Zweck des menschlichen Daseins oder den „Sinn“ der Weltgeschichte zu ergründen.

Jede logische Zweckmäßigkeit setzt nämlich eine Intelligenz voraus, die sich die Zwecke setzt und als etwas erst mittelbar zu

Erreichendes vorstellt. Wir können daher sehr wohl von subjektiven Zwecken reden, nämlich von denen, auf die wir unsere eigenen Handlungen beziehen. Die objektive Zweckmäßigkeit dagegen gehört ganz der religiösen Weltansicht an und kann kein Thema wissenschaftlicher Nachforschungen bilden. Fragen, die sich auf die Zweckmäßigkeit unserer eigenen Handlungen beziehen, lassen sich stets bestimmt beantworten, während die Frage nach Naturzwecken das Vermögen unserer Begriffe notwendig übersteigt. Alle Versuche, die Natur nach logischer Zweckmäßigkeit zu beurteilen, müssen unvermeidlich scheitern, weil eine Lösung dieser Probleme, die in der Tat unlösliche Geheimnisse bilden, in letzter Linie stets positive Erkenntnisse der ewigen Weltordnung zuhülfe nehmen müßte. Die Natur läßt sich ja nicht als ein geschlossenes Ganzes erkennen, so daß es schon aus diesem Grunde unmöglich ist, den logischen Begriff des Endzweckes auf sie anzuwenden.

Nach ästhetischer Zweckmäßigkeit dagegen können wir die Natur sehr wohl beurteilen, indem wir durch das Gefühl in der harmonischen Zusammenstimmung der Teile eines gegebenen Mannigfaltigen zu einem einheitlichen Ganzen seine ewige Bedeutung ahnden.

Der Wert, den wir einem schönen Gegenstande zuschreiben, kommt ihm nicht zu als einem Zwecke unserer Handlungen, noch auch als einem Mittel zu irgend einem anderen Zwecke, sondern er beruht allein auf der inneren Zusammenstimmung seiner Teile unter einander. Das Schöne entlehnt seinen Wert nicht von außen her, sondern gefällt an sich selbst, ohne alle Vergleichung. Die ästhetische Beurteilung ist also die wahre objektive Teleologie.

Da das Schöne ohne alle Vergleichung, in der Beurteilung selbst, gefällt, so ist die ästhetische Wertschätzung gleicherweise zu unterscheiden von der sinnlichen Neigung und von der sittlichen Achtung. Die Gegenstände der Neigung haben ihren Wert darin, daß sie unser Wohlbefinden fördern; die Gegenstände der Achtung haben ihren Wert in der Übereinstimmung mit dem Sittengesetze. Der Wert des Schönen dagegen ist ebenso unabhängig von dem Maßstabe des sinnlichen Genusses wie von dem der sittlichen Pflicht. Der ästhetischen Wertschätzung liegt vielmehr jene selbstlose Hingabe an den schönen Gegenstand zugrunde, die wir zum Unterschiede von Neigung und Achtung nur als Liebe bezeichnen können. Um jedoch die Tragweite der ästhetischen Wertschätzung ganz zu verstehen, müssen wir wohl beachten, daß sie nicht etwa auf die Gegenstände der äußeren Erfahrung beschränkt ist. Sie findet vielmehr ihre vornehmliche und ursprüngliche Anwendung auf das geistige Leben. Von der geistigen Schönheit ausgehend verbreitet sich die ästhetische Wertschätzung über das Ganze auch der äußeren Natur, indem selbst die körperliche Schönheit nur als ein Analogon des persönlichen Daseins ästhetische Bedeutung gewinnt.

Das bisher Ausgeführte dürfte hinreichen, um das Verhältnis der wissenschaftlichen zur religiösen Weltansicht klar zu stellen. Es wird vielleicht noch von Interesse sein, einiges über die positive Religion zu sagen. Die hier vorgetragene Auffassung ist naturgemäß abstrakt und für den ungeschulten Verstand schwer faßlich. Der Mensch hat das Bedürfnis, seinem Verhältnis zur ewigen Welt, das er zwar nur durch ein dunkles Gefühl ahnt, von dessen Vorhandensein er aber unmittelbar überzeugt ist, konkrete Gestalt in anschaulichen Vorstellungen zu geben. Dies geschieht in den Glaubenssymbolen, deren Bedeutung wir leicht erkennen werden, wenn wir uns daran erinnern, daß das ästhetische Prinzip der Ahndung einen wesentlichen Bestandteil der Religion ausmacht. In der Tat liegt es nahe, daß der Mensch die schönen Gestaltungen der Natur, in denen sich ihm die Ewigkeit offenbart, nachzubilden sucht, um in diesen Bildern die Ewigkeit symbolisch zu verehren. Solange nun das Symbol nur nach Schönheitsgesetzen beurteilt wird, wie es seinem Ursprunge nach geschehen sollte, steht es auch mit der kritischen Auffassung der Religion durchaus im Einklange. Dem ungebildeten Verstande wird es indessen leicht begegnen, daß er das Bild mit dem Gegenstande verwechselt, daß er glaubt, in dem willkürlich selbstgebildeten Symbole das Ewige zu erkennen. Diese Verwechslung ist die Wurzel des religiösen Aberglaubens.

Symbole können nun entweder anschaulich oder begrifflich gebildet werden. Anschaulicher Symbole bedienen sich die bildenden Künste, begrifflicher die Dichtkunst. Wenn anschauliche Symbole mit ihrem Gegenstande verwechselt werden, so entsteht der Götzenkultus. Vor höher entwickeltem Verstande kann diese rohe Religionsform nicht bestehen. Die andere positive Religionsform, die begriffliche Symbolik, ist die religiöse Dichtung oder Mythologie. Der aus dieser Religionsform hervorgehende Aberglaube kann selbst bei verhältnismäßig hoch entwickelter Kultur noch eine große Macht auf den Menschengeist ausüben. Er entsteht dadurch, daß das Symbol der Dichtung, statt nach ästhetischen Prinzipien, nach wissenschaftlichen Grundsätzen beurteilt wird, als ob es eine Vorstellung wäre, der ein wirklicher Gegenstand in der Natur entspricht, als ob ein der dichtenden Phantasie entsprungener, nunmehr zum Dogma werdender, Mythus positive Erkenntnisse aus Ideen enthielte.

Hier liegt der fundamentale Irrtum aller religiösen Dogmatik, indem durch die Verwechslung des Symbols mit der Sache einerseits der pretentiöse Wahn entsteht, bestimmte Belehrung über die ewige Weltordnung zu gewinnen oder gar das Ewige selbst anschaulich zu erkennen, andrerseits auf Grund dieser verkannten

Bedeutung des Symbols der Glaube in das Gebiet des Wissens übergreift. Ein solcher Übergriff ist die Theologie als Wissenschaft von Gott und den ewigen Dingen.

Alles Positive in den Religionen ist von dichterischem Ursprung und nicht von wissenschaftlicher Bedeutung. Dieser Ursprung der Symbole läßt uns auch die Bedeutung der Verschiedenheit der historischen Religionsformen erkennen. Es giebt nur eine religiöse Wahrheit, aber die Art diese Wahrheit zu symbolisieren kann nach Individualität und Charakter der Völker verschieden sein.

Die eine, den Symbolen der verschiedenen Religionen zugrunde liegende, notwendige Wahrheit kann nur durch die spekulativen Ideen des Glaubens ausgesprochen werden. Da diese aber infolge ihres negativen Ursprungs keinerlei positive Belehrung zu geben vermögen, so kann das Positive an den einzelnen Religionen nicht die Glaubenswahrheiten selbst betreffen und daher auch für sich noch keinen Anlaß zum Streite bieten. Erst dadurch, daß die Symbole mit den Glaubenswahrheiten verwechselt und dadurch zu Dogmen umgewandelt werden, entsteht hier der Streit. Nur die Lehre von dem negativen Ursprunge der Glaubensideen kann hier zur Verständigung führen.

„Eines Glaubens Wahrheit lebt unter allen Symbolen.“

Eine sorgfältige Scheidung der Wissenschaft von der Religion auf Grund genauer Einsicht in das Wesen dieser beiden Überzeugungsarten tut keiner von beiden Abbruch, entzieht vielmehr jedem Konflikt zwischen ihnen den Boden. Man hat die Befürchtung ausgesprochen, eine kritische Untersuchung des Glaubens müsse folgerichtig zu seiner Vernichtung führen. Das wäre freilich ein schwach gegründeter Glaube, der vor dem prüfenden Blicke einer strengen Kritik nicht bestehen könnte! Dem Aberglauben allerdings muß die Klarheit der Wissenschaft verhängnisvoll werden. Die echte Religion kann aber durch die Beseitigung des Aberglaubens nur gewinnen. Indem die Wissenschaft die Religion alles mystischen Beiwerks entkleidet, kann sie nur dazu beitragen, die Ideen des Ewigen um so reiner hervorleuchten zu lassen.

Gestatten Sie mir mit einigen kurzen historischen Bemerkungen zu schließen[1]. Durch die Auflösung der Antinomieen und die damit verbundene Lehre vom transzendentalen Idealismus hatte Kant ein für alle mal die Gebiete des Glaubens und des Wissens getrennt und damit dem Konflikte zwischen Wissenschaft und Religion eigentlich ein Ende bereitet. Indessen blieb diese Lehre nach zwei Richtungen hin mangelhaft. Zum ersten enthält die Begründung derselben einen Fehler. Kant hat, so bestimmt er sich auch gegen den Rationalismus richtet, dennoch das Vorurteil desselben von der Allgenugsamkeit des Beweisverfahrens beibehalten, indem er versucht die metaphysischen Prinzipien zu beweisen. Als Beweisgrundes für Erkenntnisse a priori bedient er sich bekanntlich des Prinzips der Möglichkeit der Erfahrung, wobei er von einem anderen, dem empiristischen Vorurteile ausgeht, dem zufolge den Sinnesanschauungen allein objektive Gültigkeit zukommen soll. Aus diesem Prinzipe lassen sich natürlich die Ideen nicht beweisen, weil sie ja keine Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung bilden; weswegen Kant die spekulative Gültigkeit der Ideen für einen notwendigen, „transzendentalen" Schein erklärt. Es fehlt also bei ihm die spekulative Begründung der Ideen, welch' letztere ihm nur dadurch Gültigkeit erhalten, daß er willkürlich den Primat der praktischen Vernunft über die spekulative festsetzt.

[1] Wer sich über das im Folgenden nur kurz skizzierte Verhältnis der Friesischen zur Kantischen Philosophie genauer zu unterrichten wünscht, sei auf den Aufsatz „Kant und Fries" im 2. Hefte dieser Abhandlungen verwiesen.

Dagegen zeigt Fries, daß die obersten Erkenntnisgründe sich nicht beweisen lassen, daß vielmehr die unmittelbaren Erkenntnisse der reinen Vernunft, gleich denen der Sinnesanschauung, ihre objektive Gültigkeit in sich selbst tragen und daß es nur darauf ankommen kann, sich mit Hülfe des von ihm angegebenen Deduktionsverfahrens zu vergewissern, daß jene Erkenntnisse unmittelbare sind. Seine spekulative Begründung der Ideen geschieht aus dem Prinzipe der Unmöglichkeit des unendlichen Regressus, das er aus der metaphysischen Grundform der notwendigen Einheit deduziert.

Der zweite Mangel der kantischen Lehre besteht darin, daß in ihr Wissenschaft und Glaube sich schroff und unvermittelt gegenüberstehen, so daß die Einheit der Vernunft in seinem Philosopheme nicht deutlich hervortritt. Dieser Zwiespalt der Vernunfterkenntnisse hat seinen wesentlichen Grund darin, daß Kant die objektive Bedeutung der ästhetischen Beurteilung verkennt und eine logische Teleologie der Natur an ihre Stelle setzt. An diesem Mangel, den Fries durch seine Lehre von der Ahndung gehoben hat, liegt es, daß Kants Kritiken weder in religionsphilosophischer noch in ästhetischer Hinsicht befriedigen.

Schiller, ein gründlicher Kenner und begeisterter Anhänger der kantischen Philosophie, hat diesen Mangel wohl gefühlt. Er sah ein, daß der Kantianismus die Ansprüche der Schönheit gegenüber denen der wissenschaftlichen Wahrheit nicht sicher zu stellen vermag und der Ästhetik nur noch subjektive Bedeutung läßt. In seinem Bemühen, das bei Kant vermißte objektive Prinzip der ästhetischen Beurteilung zu finden, ist er zweifellos als ein Vorläufer von Fries anzusehen.

Erst diesem ist es gelungen, das von Schiller geforderte Prinzip zu entdecken, durch den Nachweis, daß die ästhetische

Beurteilung auf der Unterordnung der Erscheinungen unter die Ideen beruht. Fries dürfte wohl überhaupt der erste Philosoph sein, der die Ästhetik wissenschaftlich rechtfertigt, indem er ihr neben der Wissenschaft eine selbständige Stelle im Systeme anweist und so die „Wahrheit der Schönheit“ behauptet.

Während Schiller in wehmütigen Versen die schrittweise Verdrängung der das griechische Altertum beherrschenden ästhetischen Naturauffassung durch die mechanische der neueren Wissenschaft beklagte und auf die Wiederherstellung der objektiven Bedeutung des Schönen hoffte, hat eine andere Schule, die der Romantiker, denen die strenge Doktrin Kants nicht zusagte, einen ganz anderen, sehr viel bequemeren Weg eingeschlagen, um der Asthetik die ursprüngliche Objektivität wiederzugewinnen. Sie glaubten die Zeiten des Altertums dadurch wiederzubringen, daß sie die Errungenschaften der modernen Wissenschaft ganz einfach vergaßen. Im Altertume freilich gab es keine eigentliche Naturwissenschaft. Die Alten beurteilten die Naturerscheinungen lediglich nach Schönheitsgesetzen. Ihre ästhetische Weltanschauung konnte mit keiner Wissenschaft in Streit geraten, eben weil noch keine solche existierte. Diese Zeiten sind jedoch für immer dahin. Heute giebt es eine Wissenschaft von der Natur, die festgegründet und unumstößlich dasteht. Thöricht und vergeblich ist das Unternehmen, die Naturwissenschaft dadurch aus der Welt schaffen zu wollen, daß man sie ignoriert, um sie durch eine vermeintliche ästhetisch-theoretische Beurteilung der Natur zu ersetzen. Der einzig besonnene Weg ist vielmehr der von Schiller geahnte, von Fries gewiesene. Dieser allein führt zur Verständigung der Wissenschaft, der Religion und der Ästhetik, indem Fries' Lehre jeder derselben ihr Recht widerfahren läßt.

Abhandlungen

der

Fries'schen Schule.

Neue Folge.

Herausgegeben von

Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser
und **Leonard Nelson.**

Viertes Heft.

Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1906.

XII.

Grundbegriffe der Mengenlehre.

Zweiter Bericht über das Unendliche in der Mathematik.

Von

Gerhard Hessenberg.

Berichtigungen:

Seite 526, Zeile 15 v. o. statt z_1, z_3, z_3 lies z_1, z_2, z_3.
Seite 561, letzte Zeile: statt Wohlordnung lies Ordnung.
Seite 562, Zeile 9 v. u. statt Element N lies Element α.
Seite 599, Zeile 6 v. o. statt $\lim(\mu\lambda)$ lies $\lim(\alpha\lambda)$.
Seite 626, Zeile 10 v. o. statt darstellbar lies endlich darstellbar.
Seite 646, Zeile 14 v. u. statt Zahlprozeß lies Zählprozeß.

Vorwort.

Das vorliegende Referat über das Unendliche in der Mathematik war ursprünglich als Fortsetzung des im ersten Heft erschienenen Berichtes gedacht. Es sollte zeigen, daß mit der Ausschaltung aktual unendlicher Größen aus den Grenzmethoden, insbesondere aus der Infinitesimalrechnung, die Mathematik keineswegs auf die Betrachtung des aktual Unendlichen überhaupt verzichtet. Vielmehr sollte das Beispiel der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums die Möglichkeit der Unterscheidung verschiedener unendlicher Mächtigkeiten, und der daraus folgende Cantorsche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen die praktische Bedeutung dieser Unterscheidung dartun.

Das Referat wuchs aber während der Ausarbeitung dauernd; das augenblicklich stark zunehmende Interesse an mengentheoretischen Untersuchungen veranlaßte mich schließlich, den Bericht geradezu zu einer Einleitung in die Grundbegriffe des betrachteten Gebietes auszugestalten. Darüber hinauszugehen und etwa noch die mathematischen Anwendungen in größerem Umfange darzustellen verbot aber die Rücksicht auf den nicht ausschließlich mathematischen Leserkreis dieser Zeitschrift. Andererseits liegt hierüber der ausführliche Schoenfließsche Bericht in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung vor, und endlich hätte der unvermeidliche Literaturnachweis die Fertigstellung der Arbeit ins ungemessene verzögert.

Den mengentheoretischen Kalkul wollte ich ursprünglich nicht in den Umfang des Berichtes einbeziehen. Es zwangen mich aber zwei Gründe dazu: Einmal die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen, die mir die klarste und schärfste Fassung des ultrafiniten Paradoxons zu sein scheint, das unter anderen von Russell in so zahlreiche Formen gebracht worden ist. Zu ihrer Darstellung bedarf man immerhin des Begriffs der Ordnungszahl; und damit der Widerspruch nicht in diesem Begriff selbst gesucht werde, mußte gezeigt werden, welch umfangreiches Gebiet des widerspruchsfreien Kalkuls durch ihn eröffnet wird.

Der zweite Grund, der mich zur Darstellung des Kalkuls veranlaßte, war die Frage der Erzeugungsprinzipien. Bei diesen ist der Satz von Bedeutung, daß jede Mächtigkeit, die eine unmittelbar vorangehende besitzt, ein neues Prinzip verlangt; und hierfür muß man zeigen können, daß das Quadrat jeder Mächtigkeit ihr selbst gleich ist. Ausgesprochen ist dieser Satz nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein zuerst von Herrn Georg Cantor. Ob der in dieser Mitteilung flüchtig skizzierte Beweis derselbe ist, den ich hier darstelle, vermag ich nicht zu beurteilen. Da ferner die Sätze über den Kalkul mit transfiniten Ordnungszahlen von Herrn Cantor nur für die zweite Zahlklasse ausgesprochen sind[1] und auch Herr Schoenfließ in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“[2] sich ausschließlich mit dieser beschäftigt, hielt ich es für angebracht, die Gültigkeit des ganzen Kalkuls für jede Zahlklasse zum Ausdruck zu bringen[3]. Ich verhehlte mir nicht, daß dieser Teil über den transfiniten Kalkul in erster Linie nur für Mathematiker Interesse haben kann, und habe mich daher bemüht, die späteren Kapitel nach Möglichkeit unabhängig von ihm zu gestalten, so daß der mathematisch ungeschulte Leser ihn überschlagen kann.

Wer auf Konsequenz und Geschlossenheit der Darstellung Wert legt, wird nicht damit einverstanden sein, daß die endlichen

---

[1] Math. Annalen, Bd. 21 und 49.

[2] Band I, 1, pag. 193, § 9.

[3] Herr Schoenfließ sagt l. c. § 8, S. 193: Der hieran anschließende Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge von Zahlklassen ... entbehrt noch der Ausführung.

Zahlen zunächst als etwas Bekanntes angenommen werden und die Theorie der unendlichen Mengen vielfach auf sie gestützt wird. Wäre dieser Bericht blos für Mathematiker bestimmt, so hätte ich, wenn ich ihn dann überhaupt zu schreiben für nötig gehalten hätte, vielleicht anders angeordnet und die im letzten Teil gegebenen Theorieen der endlichen Zahlen vorangestellt. Ich hätte auf diesem Wege auch nicht die schönen Dedekindschen Betrachtungen in verschiedene Kapitel zu zerstreuen brauchen. Daß ich eine andere Anordnung zu Grunde gelegt habe, geschah aus der festen Überzeugung heraus, daß dadurch das Verständnis des schwierigen Gegenstandes wesentlich erleichtert wird.

Zu besonderem Danke bin ich Herrn Zermelo verpflichtet für die Durchsicht der Korrekturbogen, vor allem aber für die Mitteilung eigener, noch unveröffentlichter Untersuchungen und die Erlaubnis, von ihnen Gebrauch zu machen. Zu diesen gehört auch der schöne Satz XX. Seite 539, bei dem im Text versehentlich der Hinweis auf den Urheber unterblieben ist. Ferner machte mich Herr Zermelo darauf aufmerksam, daß der Beweis des § 119 (ebenso wie der entsprechende bei Dedekind, „Was sind und was sollen die Zahlen?“) in versteckter Weise von dem in § 102 und § 137 besprochenen Auswahlpostulat Gebrauch macht; es war leider nicht mehr möglich, dies im Text hervorzuheben.

Inhalt.

Erster Teil.

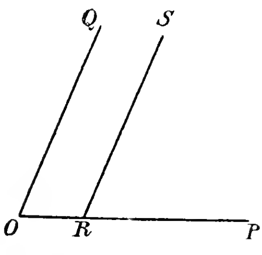
Die Grundbegriffe der Teilung, Vergleichung und Ordnung.

I.

Das Paradoxon der Winkelvergleichung.

§ 1. Im ersten Hefte dieser Zeitschrift ist in einem Referat über „das Unendliche in der Mathematik" dargetan worden, daß weder in den elementaren noch in den als „Infinitesimalrechnung" bezeichneten Kapiteln der Mathematik eine wirklich unendliche „Größe" auftritt; daß vielmehr das Wort „unendlich" lediglich zur abkürzenden Beschreibung wichtiger Tatsachen des endlichen benutzt wird.

Dort bot sich im zweiten Kapitel bei Gelegenheit der Winkelmessung ein Beispiel einer Paradoxie des Unendlichen, die dadurch ausgeschaltet wurde, daß Winkel lediglich durch Scheitelstrahlenzerlegung verglichen werden durften. Dieses Paradoxon der Winkelflächen ist sehr lehrreich und soll daher im folgenden als Ausgangspunkt unserer Betrachtung dienen.



Es sei POQ ein beliebiger, spitzer oder stumpfer Winkel, R ein Punkt des Schenkels OP. Wir ziehen durch R in das innere des Winkels eine Paralelle RS zu OQ. Sie zerlegt die Fläche des Winkels in zwei Teile, in den Streifen $QORS$ und in den Winkel

PRS, der dem Winkel POQ gleich ist und durch Verschiebung mit ihm zur Deckung gebracht werden kann.

Nach dem Grundsatz: „Der Teil ist kleiner als das Ganze" ist andererseits der Winkel PRS kleiner als der Winkel POQ. Da die Begriffe „kleiner" und „gleich" sich ausschliessen, entsteht ein Widerspruch.

§ 2. Es wird vielfach versucht, den Widerspruch durch folgende Argumentation zu beseitigen: Das Ebenenstück POQ ist unendlich, also kein Ganzes. Demnach kann der Grundsatz vom Teil und Ganzen nicht angewandt werden.

Diese Argumentation hat den Fehler, daß sie zuviel beweist. Da sie nämlich in keiner Weise davon Gebrauch macht, daß der zerlegende Halbstrahl RS am Punkte O vorbeigeht, würde sie auch den Fall der Zerlegung durch Scheitelstrahlen treffen, und es wäre damit nachgewiesen, daß Winkel überhaupt nicht verglichen werden können. Außerdem kollidiert dieser Gebrauch der Begriffe Teil und Ganzes mit dem vulgären Sprachgebrauch; Teil und Ganzes sind korrelative Begriffe, und da das Ebenenstück POQ offenbar Teile besitzt, ist es selbst das Ganze, von dem diese Teile genommen werden.

Der Mathematiker im besonderen hat eine tiefe Abneigung gegen solche Argumentation mit Allgemeinbegriffen. Wenn für ihn irgend ein Gegenstand „ganz" ist, so genügt es dafür, daß genau feststeht, was zu ihm gehört, und was nicht. Das Zugehören selbst ist aber wieder ein Allgemeinbegriff, und es sei daher am speziellen Beispiel ausdrücklich festgestellt, daß von jedem Punkt der Ebene feststeht, ob er im innern, im äussern oder auf der Grenze von POQ liegt. Darum gilt POQ mathematisch als Ganzes. Da weiterhin jeder Punkt PRS ein Punkt von POQ, aber nicht jeder Punkt von *POQ* einer von *PRS* ist, gilt *PRS* als Teil von *POQ*.

§ 3. Wollen wir also den falschen Schluss, der unseren Widerspruch verursacht, wirklich scharf „herauspräparieren", so müssen wir die allgemeinen Begriffe, mit denen wir operierten, näher untersuchen. Wir finden drei Grundbeziehungen: die Vergleichung, der das Wort „gleich" entspricht, die Ordnung, der das Wort „kleiner" entspricht, und endlich die Beziehung des Teils zum Ganzen. Die Bedeutung dieser drei Beziehungen und ihre Verknüpfung untereinander reicht natürlich weit über das Paradoxon der Winkelvergleichung hinaus; die Ausführlichkeit der folgenden Betrachtungen ist nicht durch das einzelne Beispiel geboten.

Wir werden bei der Untersuchung unserer drei Grundbeziehungen auf eine Definition derselben zunächst verzichten, da eine solche, falls sie überhaupt möglich ist, an Stelle der zu prüfenden lediglich neue Allgemeinbegriffe von gleicher oder größerer Verschwommenheit zum Ausgangspunkt stempeln würde. Dagegen fragen wir, der kritisch-mathematischen Methode folgend, bei jedem unserer Begriffe nach den Grundsätzen, in denen er auftritt, d. h. nach denjenigen Eigenschaften, die eine Beziehung besitzen muß, damit ihr der Name einer Vergleichung, Ordnung oder Teilung zukommen kann.

II.

Die Teilung und die Vergleichung.

§ 4. Welcher Art die Beziehung auch sei, die wir mit dem Wort „*A* ist ein Teil von *B*" bezeichnen, sie wird folgendem Grundsatz gehorchen müssen:

Ia. Ist A ein Teil von B, B ein Teil von C, so ist A ein Teil von C.

Da man zuweilen ein Ding A mit zu seinen eigenen Teilen als „uneigentlichen" oder „unechten" Teil hinzurechnet, wollen wir jeden mit A nicht identischen Teil von A einen „eigentlichen" oder „echten" Teil nennen. Diese Trennung ist für Satz Ia nicht erforderlich, wohl aber für folgende zwei Sätze:

IIa. Ist A ein eigentlicher Teil von B, so ist B kein Teil von A.

IIIa. Ist A mit B identisch, so ist B kein eigentlicher Teil von A.

Satz IIa handelt von der Umkehrung, Satz IIIa von dem Verhältnis zur Identität.

Drei analoge Sätze gelten von der Vergleichung. Da aber keineswegs alle Vergleichungen durch das Zeichen $=$ und das Wort „gleich" ausgedrückt werden, wollen wir hierfür das mengentheoretische Zeichen $\sim$ und den allgemeinen Terminus „aequivalent" oder „gleichwertig" gebrauchen.

Wir haben alsdann folgende Grundsätze:

Ib. Ist $A \sim B$, $B \sim C$, so ist $A \sim C$.

IIb. Ist $A \sim B$, so ist $B \sim A$.

IIIb. Ist A mit B identisch, so ist $A \sim B$.

Diesen Bedingungen einer Vergleichung genügen in der Geometrie unter anderem die Kongruenz und die Ähnlichkeit von Figuren, die Parallelität von Geraden u. a. m. Da wir allgemein bestrebt sind, jede Vergleichung als Identität gewisser Eigenschaften darzustellen, konstruieren wir vielfach solche Eigenschaften eigens zu diesem Zwecke. So spricht man bei parallelen Geraden von „gleichen Richtungen", bei ähnlichen Figuren von „gleicher Form".

§ 5. Die Beziehungen der Teilung und der Vergleichung können an der gleichen Gruppe von Dingen auftreten. Von einer Verknüpfung der beiden Beziehungen kann aber nur dann die Rede sein, wenn die Teile der verglichenen Gegenstände auch der Vergleichung unterworfen sind. Sind z. B. die Gegenstände ebene Polygone, die hinsichtlich ihres Flächeninhaltes verglichen werden, ihre Teile aber die Punkte des Innern, so findet die Vergleichung auf diese Teile keine Anwendung. Ebenso liegt der Fall beim Winkelmessen. Die Vergleichung besteht im aufeinanderlegen der Schenkel. Bei jeder Zerlegung nun, die nicht durch Scheitelstrahlen erzeugt wird, ist mindestens ein Teil unvergleichbar mit dem Ganzen.

Definieren wir dagegen die Teilung der Polygone durch geradlinige Zerschneidung, so sind die Teile wieder Polygone, also wieder vergleichbar. Definieren wir ebenso die Vergleichung der Winkel durch Zerschneiden in kongruente Teile ohne die Beschränkung auf Scheitelstrahlen, so sind alle Teile, die durch geradliniges Zerschneiden entstehen, demselben Vergleichungsprinzip zugänglich.

Wir betrachten nun lediglich diesen Fall, daß die Teile dem Vergleichungsprinzip zugänglich sind und stellen dazu folgendes Postulat, dessen Gültigkeit im speziellen Fall erst nachzuweisen ist:

IV. (Postulat der äquivalenten Teile.) Ist A zu B äquivalent, und enthält es einen Teil A_1, so enthält B einen zu A_1 äquivalenten Teil B_1.

Für die weiteren Ausführungen werden wir lediglich die Sätze I—III, a und b und IV verwenden. Die eingestreuten Beispiele sollen nur zur Erläuterung und zum Nachweis dessen dienen, daß dem logischen Formalismus der Sätze wirkliche Beziehungen entsprechen. In jedem einzelnen Anwendungsfalle wird man sich selbstverständlich immer erst zu überzeugen haben, daß die vorhandenen Beziehungen wirklich umgekehrt dem Formalismus I—IV genügen.

Da es von Wert ist, daß tatsächlich nur die Sätze I—IV zur Verwendung gelangen, werde ich die nächstfolgenden Beweise zum größeren Teil in ihre Syllogismen zerlegen.

III.

Die Ordnung.

§ 6. Als „Ordnung“ werden alle diejenigen Beziehungen bezeichnet, die wir mit den Zeichen $>$, $<$ und mit Worten wie „größer, kleiner“, „früher, später“, „vor, nach“, „über, unter“, „rechts, links“, aussprechen.

Eine Ordnung muß folgenden Grundsätzen genügen:

Ic. Ist $A < B$, $B < C$, so ist $A < C$.

IIc. Ist $A < B$, so ist sicher nicht $B < A$.

IIIc. Ist A mit B identisch, so ist sicher nicht $A < B$.

Diese Bedingungen unterscheiden sich zunächst nur durch die Bezeichnung von den drei ersten der Teilung, Ia bis IIIa. Der Unterschied zwischen Ordnung und Teilung tritt erst zu Tage, wenn wir die charakteristischen Sätze aufstellen, die die Ordnung mit der Vergleichung verknüpfen. Der erste von ihnen schließt wegen IIIb den Satz IIIc ein und lautet:

V. Ist $A \sim B$, so ist sicher nicht $A < B$.

Satz V und IIc behaupten zusammen die Ausschließung der Begriffe kleiner, größer [1]) und gleich. Diese Ausschließung ist

[1] Es ist hier stillschweigend angenommen, daß $A < B$ und $B > A$ verschiedene Ausdrucksweisen für die gleiche Beziehung sind.

eine Konzession an den Sprachgebrauch: Wir wollen die Worte „größer“ „kleiner“ nur für Begriffe gebrauchen, die die Gleichheit ausschließen.

Der nächste Satz kann als Satz der äquivalenten Ordnung bezeichnet werden und lautet:

VI. Ist $A \sim A'$, $B \sim B'$ und $A < B$, so ist auch $A' < B'$.

Man kann ihn in zwei Sätze zerlegen, deren jeder aus VI folgt und die zusammen wieder VI ergeben:

VI_1. Ist $A \sim B$, $B < C$, so ist $A < C$.

VI_2. Ist $A < B$, $B \sim C$, so ist $A < C$.

Gelten VI_1 und VI_2, so folgt aus den Voraussetzungen $A \sim A'$, $A < B$ in VI zunächst $A' < B$ nach VI_1, hieraus und aus $B \sim B'$ nach VI_2 die Behauptung von VI. Nimmt man umgekehrt A mit A' als identisch an, so geht Satz VI in VI_2 über; VI_1 ist der Spezialfall von VI, der aus der Identität von B mit B' entsteht.

Zu diesen Sätzen kommt als letzter ein Satz von prinzipieller Bedeutung:

VII. (Satz der Trichotomie). Entweder ist $A < B$, oder $B < A$, oder $A \sim B$.

§ 7. Sätze, die die Ordnung mit der Teilung in Beziehung setzen, sind zunächst nicht aufgestellt; denn gerade diese Sätze, wie z. B. der Grundsatz, der Teil sei kleiner als das Ganze, sollen Gegenstand der weiteren Untersuchung sein.

Ehe wir zu diesen übergehen, beweisen wir an einem einfachen Beispiel, daß der Satz von der Trichotomie unabhängig ist von allen vorangehenden Sätzen der Vergleichung und Ordnung.

Zu diesem Nachweis wählen wir als Gegenstände der Vergleichung die Punkte des Raumes und als Vergleichung die Identität. $A = B$ heißt also, daß A und B denselben Punkt bezeichnen.

Um die Punkte zu ordnen, greifen wir zunächst einen beliebigen Punkt O heraus und setzen fest, daß $O < A$ für jeden von O verschiedenen Punkt A sein soll. Sind nun A und B zwei von einander und von O verschiedene Punkte, so schreiben wir $A < B$, wenn die Strecke OA kürzer als OB ist. Wir überzeugen uns sofort von der Gültigkeit der Sätze Ic bis IIIc. Um weiter V und VI zu beweisen, beachten wir, daß aus $A = B$ die Gleichheit der Strecken OA und OB folgt. Daß VII aber nicht gilt, erkennt man sofort daran, daß aus der gleichen Länge der Strecken OA und OB keineswegs die Identität der Punkte A, B folgt.

Die Unabhängigkeit des Satzes VII läßt sich nicht umkehren, vielmehr ist VI eine Folge von VII. Betrachten wir, um dies einzusehen, zunächst VI_1, d. h. die beiden Voraussetzungen:

$$(1)\ A \sim B \qquad\qquad (2)\ B < C.$$

Die Annahme $C < A$ würde mit (2) nach Ic zu $B < A$ führen, was (1) widerspricht. Die Annahme $C \sim A$ ergäbe mit (1) nach Ib $C \sim B$, was (2) widerspricht. Der Widerspruch entspringt in beiden Fällen aus V. Da weder $C < A$ noch $C \sim A$ sein kann, folgt aus VII, daß $A < C$ sein muss. Ebenso beweist man VI_2.

IV.

Das Problem der Trichotomie.

§ 8. Wenn wir zu dem System der bisherigen Sätze noch den Grundsatz hinzunehmen, daß der Teil[1] kleiner als das Ganze sei, so folgt mit Satz VI_1 sofort, daß $A < B$ auch dann statthat, wenn A zwar nicht selbst ein Teil von B, wohl aber einem Teil von B

---

[1] Es kann sich hier und im folgenden natürlich nur um e i g e n t l i c h e Teile handeln.

äquivalent ist. Bei den üblichen Vergleichungsmethoden teilbarer Größen gilt aber auch die Umkehrung: Wenn $A < B$ ist, so gibt es in B einen zu A äquivalenten Teil. Danach liegt es nahe, den Begriff des kleiner überhaupt so zu definieren: A heißt kleiner wie B, wenn es einem Teile von B äquivalent ist.

Trotzdem nun unsere bisherigen Entwicklungen noch lange nicht alle für die Messung endlicher Größen charakteristischen Tatsachen enthalten, sind wir bereits in der Lage, die Unzulässigkeit einer solchen Definition zu erkennen. Sie führt nämlich nicht zu einer dreifachen, sondern zu einer vierfachen Disjunktion.

Benutzen wir lediglich das Kriterium, ob A einem Teile von B äquivalent ist, (ohne es mit dem Zeichen $A < B$ auszudrücken,) so erhalten wir eine Dichotomie: Entweder gibt es einen Teil B_1 von B, so daß $A \sim B_1$, oder es gibt keinen solchen Teil.

Vertauschen wir die Rollen von A und B, so entsteht eine zweite Dichotomie. Beide Dichotomieen vereinigen sich nach dem bekannten logischen Schema zu folgender vierfachen Disjunktion:

VIII. Einer der folgenden vier Fälle muß stets zutreffen, und jeder schließt die drei anderen aus:

(A) A ist einem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent.
(B) A ist einem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent.
(Γ) A ist keinem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent.
(Δ) A ist keinem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent.

Es sind hierbei stets eigentliche Teile gemeint.

§ 9. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

Wird das Eintreten des Falles (B) mit $A < B$ oder $B > A$ bezeichnet, so erfüllt diese, so definierte Beziehung alle Anforderungen der Ordnung mit Ausnahme des Satzes VII von der Trichotomie.

Zunächst weisen wir die Gültigkeit des Postulates V nach: Ist $A \sim B$, so ist gewiß nicht $A < B$. Wäre nämlich $A < B$, so hieße das nach VIII (B):

(1) B besitzt einen Teil B_1, (2) $B_1 \sim A$. Im Verein mit $A \sim B$ folgt hieraus nach IV:

(3) A besitzt einen Teil A_1, (4) $A_1 \sim B_1$.

Aus den Aequivalenzen

$$A_1 \sim B_1, \qquad B_1 \sim A, \qquad A \sim B$$

folgt nun nach Ib, daß A_1 zu B äquivalent ist, im Widerspruch mit der zweiten Aussage von (B).

Das Postulat IIIc ist ein spezieller Fall von V, da die Identität nach IIIb ein spezieller Fall der Äquivalenz ist.

Die Aussagen des Falles (Γ) gehen aus (B) durch Vertauschung von A mit B hervor. Das Eintreten dieses Falles ist also durch $A > B$ oder $B < A$ zu bezeichnen. Da (B) und (Γ) sich logisch ausschließen, ist hiermit das Postulat IIc als erfüllt nachgewiesen.

Das Postulat Ic beweisen wir in zwei Schritten. Wir entnehmen zunächst aus $A < B$ die Voraussetzungen:

(1) B enthält einen Teil B_1, (2) $B_1 \sim A$,

und ebenso aus $B < C$:

(3) C enthält einen Teil C_1, (4) $C_1 \sim B$.

Aus (1) und (4) folgt nach IV:

(5) C_1 enthält einen Teil C_2, (6) $C_2 \sim B_1$.

Aus (3) und (5) nach Ia:

(7) C enthält einen Teil C_2.

Endlich aus (2) und (6) nach Ib:

(8) $C_2 \sim A$.

Damit ist der erste Teil der Behauptung $A < C$ erwiesen. Noch einfacher ist sein Beweis unter den Voraussetzungen der Sätze VI_1 oder VI_2. Im ersten Falle hat man:

(9) $A \sim B$, (10) C enthält einen Teil C_1, (11) $C_1 \sim B$.

Aus (9) und (11) folgt nach Ib:

$$(12)\ C_1 \sim A.$$

Bei Satz VI_2 ist vorausgesetzt:

(13) B enthält einen Teil B_1, (14) $B_1 \sim A$, (15) $C \sim B$.

Aus (15) und (13) folgt nach (IV):

(16) C enthält einen Teil C_1, (17) $C_1 \sim B_1$,

und aus (17) und (14) nach Ib

$$(18)\ C_1 \sim A.$$

Sicher enthält also C einen zu A äquivalenten Teil, und es bleibt zu zeigen, daß das Umgekehrte nicht statthat. Wir nehmen das Gegenteil an:

(19) A enthält einen Teil A_1, (20) $A_1 \sim C$.

Mit (3) und (4) folgt hieraus, daß A_1, also auch A, einen zu B äquivalenten Teil enthielte. Das gleiche folgt aus (15) noch direkter und steht im Widerspruch zu der Voraussetzung $A < B$, die den Sätzen Ic und VI_2 gemeinsam ist.

Aus (9) aber würde folgen, daß auch B als zu A äquivalent einen mit C äquivalenten Teil besäße, und das widerstreitet $B < C$, der in Ic und VI_1 enthaltenen Voraussetzung.

Hiermit sind auch die Postulate Ic und VI als erfüllt nachgewiesen.

§ 10. Wenn A mit B äquivalent ist, so kann, wie gezeigt war, weder die Beziehung (B) noch die Beziehung (Γ) bestehen, d. h. es muß entweder (A) oder (Δ) zutreffen. Da beide sich logisch ausschließen, kann auch nur eines von beiden zutreffen. Als das

„Problem der Trichotomie" kann nun folgende Aufgabe bezeichnet werden:

Es sei für gewisse Dinge $A, B, \ldots$ eine Teilung und eine Vergleichung gegeben, die zusammen das Postulat IV erfüllen, so daß die Disjunktion VIII möglich ist. Es sollen folgende Fragen beantwortet werden:

1) Sind die Fälle B, $\mathsf{\Gamma}$ möglich?
2) Welche der Beziehungen A, $\mathsf{\Delta}$ hat im Falle der Äquivalenz statt?
3) Ist diese im Falle der Äquivalenz zutreffende Beziehung auch eine hinreichende Bedingung der Äquivalenz?
4) Ist eine der Beziehungen A, $\mathsf{\Delta}$ überhaupt ausgeschlossen?

Auf diese Fragen werden wir in den verschiedensten Fällen die verschiedensten Antworten erhalten. Zunächst beachten wir die Antwort, die der Satz vom Teil und Ganzen giebt. Er beantwortet nämlich die Frage (4) dahin, daß (A) unmöglich ist.

Wenn die Beziehung (A) gilt, d. h. wenn $A \sim B_1$, $B \sim A_1$, A_1 Teil von A, B_1 von B ist, so folgt aus $B \sim A_1$, daß auch A_1 einen Teil A_2 besitzt, und daß A_2 zu B_1 äquivalent ist. Danach ist aber erstens A_2 als Teil von A_1 auch Teil von A, zweitens wegen $A_2 \sim B_1$, $B_1 \sim A$ auch $A_2 \sim A$. Dies widerspricht dem Postulat vom Teil und Ganzen, d. h. der Satz vom Teil und Ganzen schließt die Beziehung (A) aus.

Hiermit sind auch die Fragen (1) und (2) erledigt. Im Falle der Äquivalenz hat die Beziehung ($\mathsf{\Delta}$) statt, und die Beziehung (B) ist möglich, wenn es überhaupt Teile giebt. Denn der Teil ist dann kleiner als das Ganze. Die Frage (3) wird durch den

Satz vom Teil und Ganzen nicht erledigt und bedarf einer gesonderten Behandlung, nämlich, sofern sie bejaht werden soll, des Nachweises folgenden Satzes:

IX. Ist kein Teil von A zu B und kein Teil von B zu A äquivalent, so ist A zu B äquivalent.

Wenn dieser Nachweis geführt ist, ist das Problem der Trichotomie in dem gewünschten Sinn gelöst, die Disjunktion VIII ist trichotom und der von (B, Γ) verschiedene Fall stimmt mit der Äquivalenz überein. —

Wir wollen aber auch die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß der Satz vom Teil und Ganzen nicht gilt, d. h. daß A einem seiner Teile, A_1, äquivalent sein kann. Ist dann auch $A \sim B$, so ist $B \sim A_1$. Andererseits enthält nach IV B einen Teil $B_1 \sim A_1$, also ist $B_1 \sim A$, d. h. aus $A \sim B$ folgt die Beziehung (A). Damit ist die Frage (2) beantwortet. Auf die anderen Fragen erhalten wir keine Antwort, dem negativen Charakter der Voraussetzung entsprechend, von der wir ausgingen.

Soll die Frage (3) im Falle der Nichtgültigkeit des Satzes $A_1 < A$ bejaht werden, so muß folgender Satz bewiesen werden:

X. (Äquivalenzsatz). Ist A_1 ein Teil von A, B_1 von B, $A_1 \sim B$, $B_1 \sim A$, so ist $A \sim B$.

Diesem Satz kann folgende engere Fassung gegeben werden:

Xa. Ist A_1 ein Teil von A, A_2 von A_1 und $A_2 \sim A$, so ist $A_1 \sim A$.

Aus dieser Fassung folgt wieder der weitere Äquivalenzsatz X. Denn es war bereits gezeigt, daß aus $A \sim B_1$, $B \sim A_1$ die Existenz eines Teils A_2 von A_1 folgt, der zu A äquivalent ist. Nach Xa ist demnach $A_1 \sim A$ und wegen $B \sim A_1$ auch $A \sim B$.

Nimmt man umgekehrt in X an, es sei B mit A_1 nicht nur äquivalent, sondern auch identisch, so erhält man Xa. Dieser

Satz ist also in der Tat eine engere Fassung des Äquivalenzsatzes, und zwar auch eine vorteilhaftere, weil nur e i n e Äquivalenz in den Voraussetzungen auftritt.

Die bis hierher recht abstrakten, dem Leser vielleicht auch höchst problematisch erscheinenden Ausführungen mögen noch durch einige Beispiele erläutert werden. — Bei der üblichen endlichen Messung gilt der Satz vom Teil und Ganzen, zugleich aber auch Satz IX, so daß der Satz VII zutrifft. Auch die Winkelmessung durch Scheitelstrahlenzerlegung verhält sich so. Sie operiert mit einer speziellen Teilung, die die Postulate Ia — IIIa, IV erfüllt. — Läßt man aber andere geradlinige Zerlegungen der Winkelfläche zu, so gilt der Satz vom Teil und Ganzen nicht mehr. Daß die dahinter gesuchte Paradoxie auf Grund unserer bisherigen Ausführungen keinen logischen Widerspruch einschließt, dürfte klargestellt sein. Man könnte nun immerhin geneigt sein, wenigstens die Unbrauchbarkeit der allgemeinen Teilung auf die Nichtgültigkeit des Satzes vom Teil und Ganzen zurückzuführen. Einmal aber werden wir in den Ausführungen über die Mengenlehre sehen, daß diese Nichtgültigkeit eine Teilung durchaus nicht unbrauchbar für die Definition einer Ordnung macht. Zum andern aber können wir jetzt die Ursache der Unbrauchbarkeit der allgemeinen Zerlegung am Beispiel des Winkels aufdecken. Es war nämlich im ersten Referat gezeigt, daß ein Winkel durch Zerschneiden in jeden andern verwandelt werden kann, d. h. daß zwischen zwei beliebigen Winkeln stets die Beziehung (A) besteht. Es ist daher allerdings die Frage (4) für (Δ) zu bejahen, ebenso ist (3) zu bejahen, aber die Frage (1) ist zu v e r n e i n e n: D i e F ä l l e (B, Γ) s i n d u n m ö g l i c h. Hierin liegt der wahre Grund der Unbrauchbarkeit der freien Zerschneidung: in der Unmöglichkeit von (B) und (Γ), nicht aber in der Möglichkeit von (A).

Zweiter Teil.

Äquivalenz, Teilmenge und Mächtigkeit.

V.

Vergleichung und Teilung der Mengen.

§ 11. Den Begriff der Menge in völlig einwandfreier Weise zu definieren ist bisher nicht gelungen. Wahrscheinlich darf auch hier eine Definition nicht verlangt werden, sondern nur ein Axiomsystem. Aber selbst das fehlt bis jetzt noch. Die üblichen Definitionen der Menge gestatten keinerlei brauchbare Schlüsse zu ziehen, andererseits aber passen unter sie auch paradoxe Mengen, auf die wir weiter unten zurückkommen werden. Da es andererseits widerspruchsfreie unendliche Mengen zu geben scheint, muß eine richtige Definition oder ein korrektes Axiomensystem paradoxe Bildungen ausschließen, wenn es zu einem brauchbaren System von Folgerungen Anlaß geben will.

Wir entwickeln die Grundbegriffe zunächst an den endlichen Mengen. Denken wir uns als ganz konkretes Beispiel etwa einen Korb Äpfel und einen Korb Birnen. Um zu prüfen, ob beide gleichviel Stücke enthalten, können wir so verfahren: Wir ergreifen mit der linken Hand einen Apfel, mit der rechten eine Birne und legen jedes Stück aus seinem Korb heraus. Dieses Verfahren wiederholen wir, solange es geht. Es wird nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einem Ende führen, und zwar entweder dadurch, daß keine Äpfel mehr da sind, oder dadurch, daß keine Birnen mehr vorhanden sind, oder drittens dadurch, daß weder Birnen noch Äpfel mehr übrig bleiben. Im ersten Fall ist die Anzahl der Birnen, im zweiten die der Äpfel die größere, im dritten Fall sind die Anzahlen einander gleich.

Das hier angewandte Verfahren besteht in einer Zuordnung der Elemente zweier Mengen. Je ein Apfel und je eine Birne werden zu einem Paar vereint, und zwar ist jedem der beiden Stücke das andere eindeutig zugeordnet. Wir nennen eine solche Zuordnung „umkehrbar-eindeutig“ [1]. Wir können nun das Kriterium der gleichen Anzahl formal so aussprechen, daß die Voraussetzung der Endlichkeit der verglichenen Mengen nicht darin auftritt. Da wir uns ja auch tatsächlich über diese Voraussetzung erheben wollen, sollen sogleich die Termini „Anzahl“ und „gleich“ durch die mengentheoretischen „Mächtigkeit“ und „äquivalent“ ersetzt und das Kriterium in die Form einer Definition gesetzt werden:

Zwei Mengen heißen „äquivalent“ oder von „gleicher Mächtigkeit“, wenn die Dinge der einen denen der andern umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können.

§ 12. Es ist natürlich noch nicht gesagt, daß dieser Definition auch für unendliche Mengen ein vernünftiger Sinn zukommt. Vielmehr ist bereits eines gewiß: das willkürliche Zuordnungsverfahren, wie es bei dem Beispiel der Äpfel und Birnen angewandt

[1]) Dedekind gebraucht hierfür das Wort ähnlich. Doch hat sich nach dem Vorgang von Georg Cantor dieses Wort für eine engere Bedeutung eingebürgert. Siehe Teil III.

wurde, ist für unendliche Mengen unbrauchbar, da es zu keinem Ende führt. Dagegen können solche Zuordnungen sehr wohl durch irgendwelche Gesetze hergestellt werden. Wie auch die Zuordnung hergestellt sei, jedenfalls läßt sich folgende Bezeichnungsweise anwenden: Ist m ein Ding der Menge M und n das zugeordnete einer äquivalenten Menge N, so schreiben wir die Tatsache der Zuordnung in Zeichen $n = \varphi(m)$, und sprechen von der Zuordnung φ. Daß umgekehrt m zu n zugeordnet ist, wird man zweckmäßig durch ein anderes Zeichen, etwa $\bar{\varphi}$, ausdrücken:

$$m = \bar{\varphi}(n).$$

Die Frage, ob es prinzipiell zulässig ist, eine Menge von unendlich vielen Dingen als ein abgeschlossenes Ganze zu betrachten, berührt die Zulässigkeit unsrer Definition der Äquivalenz nicht, zum mindesten nicht in ihrer praktischen Anwendung. Die Behauptung, „a ist ein Ding der Menge aller ganzen Zahlen," enthält lediglich die Aussage: „a ist eine ganze Zahl."

Da es aber auf diesem Standpunkt bezweifelt werden könnte, ob eine Menge genau genug definiert ist, um von der Identität zweier Mengen zu sprechen, so wollen wir folgende Definition ausdrücklich aufstellen, die ein Spezialfall der sogleich zu gebenden Definition der Teilung ist:

Zwei Mengen heißen identisch, wenn jedes Ding der einen auch ein Ding der andern ist und umgekehrt.

Die Zuordnung eines Dinges zu sich selbst ist umkehrbar eindeutig. Daher ist das Postulat IIIb erfüllt, wonach identische Mengen auch äquivalent sein sollen. — Von den beiden anderen Postulaten der Äquivalenz ist IIb in der Forderung der Umkehrbarkeit der Eindeutigkeit enthalten. Und daß auch Ib erfüllt ist, ergibt sich durch folgende Überlegung:

Wenn a zu b, b zu c zugeordnet ist, so ist damit eine Zuordnung zwischen a und c ausgesprochen; und wenn die Zuordnungen zwischen a, b und zwischen b, c umkehrbar eindeutig sind, so entsprechen sich auch a, c eindeutig. Der Beweis bedarf wohl keiner näheren Ausführung, zumal uns die Zuordnung zweier Mengen über eine dritte aus dem alltäglichen Leben geläufig ist. Die Probe auf die gleiche Stückanzahl in den oben erwähnten Obstkörben wird man nämlich lieber auf dem abstrakten Wege des Abzählens der Äpfel einerseits, der Birnen andererseits ausführen, als durch die zuerst beschriebene konkretere Methode des Ergreifens. Dieses Abzählen bedeutet aber nichts anderes, als daß man die Äpfel für sich und ebenso die Birnen den Dingen einer dritten gedachten Menge 1, 2, 3, 4, 5 .... zuordnet.

§ 13. Ebenso wie wir die Vergleichung definierten, ohne über die Existenz unendlicher Mengen etwas auszumachen, können wir auch die Teilung einführen:

Eine Menge M_1 heißt Teil einer Menge M, wenn jedes Ding von M_1 ein Ding von M ist. Sie heißt eigentlicher Teil, wenn nicht jedes Ding von M auch Ding von M_1 ist.

Den Charakter dieser Definition als reiner Wortdefinition erkennt man leicht aus folgendem Beispiel: „Die Menge aller geraden Zahlen ist eine eigentliche Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen.“ Dieser Satz spricht die völlig einwandfreie Behauptung aus, daß jede gerade Zahl ganz, aber nicht jede ganze Zahl gerade ist.

Die Beweise zu den Postulaten Ia bis IIIa bedürfen keiner Ausführung. Bei dem Postulat IV ist folgendes nachzuweisen: Ist M zu N äquivalent, M_1 eine Teilmenge von M, so besitzt N eine zu M_1 äquivalente Teilmenge N_1. In der Tat überzeugt man sich leicht, daß die den Elementen von M_1 entsprechenden Elemente von N eine Teilmenge N_1 von N bilden, die zu M_1 äquivalent ist. Die Definition von N_1 lautet also: „Ein Ding n von N wird als Ding von N_1 bezeichnet, wenn $m = \varphi(n)$ in M_1 enthalten ist.“ Hierin bedeutet φ die Zuordnung $n = \varphi(m)$ von N zu M. N_1 wird man zweckmässig mit $\varphi(M_1)$ bezeichnen.

Wenn M_1 eine eigentliche Teilmenge von M ist, so muß es Elemente von M geben, die nicht in M_1 sind. Diese Elemente bilden die „zu M_1 komplementäre Teilmenge“ von M; nennt man sie M_2, so ist jedes Ding von M entweder in M_1 oder in M_2 (d. h. nicht in M_1) enthalten. Zwei komplementären Teilmengen entspricht also eine vollständige Disjunktion. Entsprechend kann man komplementäre Systeme mehrerer Teilmengen bilden: Die Teilmengen $M_1, M_2, \ldots M_n$ von M bilden ein komplementäres System, wenn jedes Element von M in einer und nur einer von ihnen enthalten ist. Zum Beispiel sind die Mengen der geraden und der ungeraden Zahlen komplementäre Teilmengen der Menge der ganzen Zahlen, womit die Tatsache ausgesprochen wird, daß jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade ist. Die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen bilden ein komplementäres System von drei Teilmengen der Menge aller Zahlen. Komplementäre Systeme aus unendlich vielen Teilmengen werden wir späterhin zu betrachten haben, können aber vorläufig davon absehen. — Ist M_1 eine Teilmenge von M, so bezeichnet man zweckmäßig ihre komplementäre Menge mit $M - M_1$.

§ 14. Nach dem Beweis der Postulate I—IV können die Betrachtungen des vierten Kapitels einsetzen, durch die wir zu der vierfachen Disjunktion VIII gelangten.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß für endliche Mengen der

Fall (A) ausscheidet und der Satz IX gültig ist. Ob und wie dies zu beweisen ist, d. h. auf einfachere Tatsachen zurückgeführt werden kann, das darf zunächst außer Betracht bleiben, da über die Richtigkeit unserer Behauptung niemals ein Zweifel bestanden hat. Ja, man hat sie als Grundsatz vielfach dahin ausgesprochen, daß das Resultat des Abzählens einer endlichen Menge unabhängig ist von der Reihenfolge des Abzählens. Es wird daher eher einer Rechtfertigung bedürfen, wenn überhaupt der Versuch unternommen wird, die Eigenschaften endlicher Mengen durch eine weitausholende Betrachtung zu begründen, wie dies Dedekind getan hat [1].

Wir werden im nächsten Kapitel zunächst an dem wichtigsten Beispiel unendlicher Mengen zeigen, daß es unendliche Mengen gibt, die äquivalente Teile besitzen. Daran schließt sich naturgemäß die Frage an, ob jede unendliche Menge äquivalente Teile besitzt. Auf diese Frage ist aber eine einwandfreie Antwort nur möglich, wenn der Begriff der unendlichen Menge definiert wird. Die Definition „Unendlich heißt: nicht-endlich" gestattet ihrerseits wiederum keine Schlüsse, wenn nicht der Begriff „endlich" definiert oder wenigstens durch eine Anzahl von Axiomen hinreichend charakterisiert ist. Denn um einen Schluß ziehen zu können, bedürfen wir zweier Obersätze; die Behauptung, eine Menge sei nicht endlich, gibt nur den einen, der andere muß entweder aus der Definition des Endlichen abgeleitet sein oder aus dem Grundbegriff der Endlichkeit als Axiom entspringen. Dies ist die Schwierigkeit, die zu einer Kritik des Begriffs der endlichen Menge geführt hat.

Wir übergehen nun diese Schwierigkeit dadurch, daß wir

[1] „Was sind und was sollen die Zahlen?" Braunschweig 1888.

zunächst nur solche unendliche Mengen betrachten, die äquivalente eigentliche Teile besitzen. Solche Mengen nennen wir mit Georg Cantor transfinite Mengen. Da endliche Mengen keine äquivalenten Teile haben, steht zunächst fest, daß eine transfinite Menge nicht endlich sein kann. Die Frage umgekehrt, ob jede nicht endliche Menge transfinit ist, vertagen wir bis zum letzten Teil und verzichten solange auf eine Herleitung der bekannten Eigenschaften endlicher Mengen. Diesen Standpunkt der Kritik des Endlichen gegenüber kann man wohl treffend als den „naiven Standpunkt" bezeichnen, womit natürlich kein Werturteil ausgesprochen sein soll.

§ 15. Nachdem wir so die schwierige Frage, ob auch jede unendliche Menge Teile besitzt, die ihr äquivalent sind, vorläufig bei Seite geschoben haben, beweisen wir sogleich einen Satz, der das Schema des üblichen Nachweises der Unendlichkeit einer Menge enthält. Er lautet:

XI. Eine Menge, die eine transfinite Teilmenge enthält, ist selbst transfinit.

Sicher ist eine solche Menge nicht endlich, denn eine endliche Menge enthält keine unendliche, also auch keine transfinite Teilmenge. Unser Satz behauptet aber mehr, nämlich die Existenz einer Zuordnung ψ, die die Menge M auf eine Teilmenge abbildet.

Nach Voraussetzung besitzt M eine Teilmenge M_1, die selbst wieder einer eigentlichen Teilmenge M_2 von M_1 äquivalent ist. M_1 ist natürlich als eigentliche Teilmenge von M gedacht, da der Satz sonst zwar richtig, aber trivial wäre. Ihre komplementäre Menge $M—M_1$ heiße M_4. Die zu M_2 komplementäre Teilmenge von M_1 heiße M_3. M besteht also aus den drei komplementären Mengen M_2, M_3, M_4; nach Voraussetzung existiert eine Zuordnung

φ, die jedem Element x von M_1 (d. h. also von M_2 oder M_3) ein Element $\varphi(x)$ von M_2 zuordnet. Diese Zuordnung ergänzen wir dadurch zu einer Zuordnung ψ, daß wir jedes Element von M_4 sich selbst zuordnen. Die Zuordnung $\psi(x)$ ist also wie folgt definiert: $\psi(x)$ bedeutet x selbst, wenn x in M_4 ist. Ist dagegen x in M_2 oder M_3, so bedeutet $\psi(x)$ das bereits als definiert vorausgesetzte Element $\varphi(x)$ von M_2.

Diese Zuordnung ψ bildet M auf eine Teilmenge ab, und zwar eine eigentliche, nämlich auf die beiden Mengen M_2 und M_4, die zusammen die komplementäre Menge von M_3 bilden. Demnach ist M transfinit, was zu beweisen war.

Ebenso leicht beweisen wir folgenden Satz:

XII. Ist M eine transfinite, N eine zu M äquivalente Menge, so ist N transfinit.

Nach Voraussetzung ist $M \sim N$, $M \sim M_1$, M_1 Teil von M. Nach Postulat IV ist daher $M_1 \sim N_1$, N_1 Teil von N; nach Ib folgt aus $N_1 \sim M_1 \sim M \sim N$ auch $N_1 \sim N$, w. z. b. w.

Die weiteren Aufgaben, die sich nun zur Behandlung bieten, entsprechen den vier Fragen des Trichotomieproblems. Nachdem die Frage (2) durch den Nachweis transfiniter Mengen beantwortet sein wird (Kap. VI), erledigen wir (3) durch den Beweis des Äquivalenzsatzes Xa (Kap. VII). Endlich beantworten wir (1) durch die Aufweisung von Mengen verschiedener Mächtigkeit (Kap. VIII). Die Frage (4) wird ihre Behandlung und vorläufige Erledigung erst im Kapitel XXX finden. —

VI.

Die abzählbaren Mengen.

§ 16. Offenbar ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen positiven Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ transfinit, denn die Gleichung $y = x + 1$ ordnet jeder ganzen Zahl x eine ganze Zahl y umkehrbar eindeutig zu. Unter den Zahlen y findet sich indessen die Zahl 1 nicht vor; es wird also $\mathfrak{G}$ auf die eigentliche Teilmenge $2, 3, 4 \ldots$ abgebildet.

Andere Abbildungen, die in gleicher Art zum Nachweis benutzt werden, sind beispielsweise $y = 2x$, $y = x^2$, allgemeiner $y = nx$ und $y = x^n$, worin n eine ganze positive Zahl ist. —

Die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$ ist die kleinste unendliche Mächtigkeit überhaupt und verdient daher eine besondere Bezeichnung. Man nennt eine Menge, die zu $\mathfrak{G}$ äquivalent ist, abzählbar. Daß insbesondere $\mathfrak{G}$ von allen transfiniten Mengen die kleinste Mächtigkeit besitzt, geht aus folgenden beiden Sätzen hervor:

XIII. Jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ist endlich oder abzählbar (d. h. $\sim \mathfrak{G}$).

XIV. Jede transfinite Menge enthält eine abzählbare Teilmenge.

Zum Beweis des ersten Satzes benutzen wir die Ordnung der ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Größe. Zwischen zwei ganzen Zahlen und auch unterhalb einer ganzen Zahl gibt es nur endlich viele, eventuell gar keine ganze Zahlen. Daraus folgt zunächst, daß jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$, in der es eine größte Zahl gibt, endlich ist. Danach ist nur noch der Fall möglich, daß eine Teilmenge M von $\mathfrak{G}$ kein größtes Element enthält. Dann muß es aber zu jeder Zahl x dieser Teilmenge eine nächstgrößere unter den Zahlen von M geben, die wir $\varphi(x)$ nennen wollen. Diese Zuordnung φ ordnet jedem Element von M ein anderes zu. Ferner ist klar, daß M eine kleinste ganze Zahl a enthalten muß. Nun bilde man die Zuordnung ψ auf folgende Art: $\psi(1) = a$, $\psi(2) = \varphi(a)$, $\psi(3) = \varphi(\varphi(a))$ etc., so erkennt man leicht, daß jedem Element von $\mathfrak{G}$ ein Element von M eindeutig zugeordnet wird.

Die Abzählbarkeit einer Menge M kann man mit Hülfe der

Ordnung von $\mathfrak{G}$ leicht schematisch zum Ausdruck bringen, indem man die Elemente von M hintereinander, nötigenfalls über oder unter die ganzen Zahlen schreibt:

$$\begin{array}{cccc} a, & \varphi(a), & \varphi(\varphi(a)), & \varphi(\varphi(\varphi(a)))\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4,\ldots \end{array}$$

Ein solches Schema muß aber immerhin die Bildungsgesetze der abzählbaren Menge zum Ausdruck bringen oder als bekannt voraussetzen. Beispiele hierfür bieten die unendlichen Reihen, wie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857\ldots..$$

während Ausdrücke wie $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ kein Bildungsgesetz anzudeuten vermögen, es vielmehr als bekannt voraussetzen, sofern die Gleichungen richtig und keine approximativen sein sollen.

Der Satz XIV setzt voraus, daß M transfinit sei, d. h. daß jedem Element m von M ein Element $\varphi(m)$ einer Teilmenge M_1 von M zugeordnet sei. Es sei nun z ein Element von $M - M_1$, so gibt es, da $\varphi(m)$ stets in M_1 ist, kein Element x, für welches $\varphi(x) = z$ ist.

Aus z bilden wir die Elemente $\varphi(z) = z_1$, $\varphi(z_1) = z_2, \ldots$ $\varphi(z_k) = z_{k+1}, \ldots$ Wenn wir zeigen können, daß alle diese Elemente von einander verschieden sind, so ist unser Satz bewiesen; denn sie sind alle in M_1, bilden also sicher eine Teilmenge von M, und daß diese Teilmenge abzählbar ist, geht aus den Indices hervor, die bereits die Zuordnung zu $\mathfrak{G}$ ausdrücken.

Sicher ist z von allen Elementen z_k verschieden, da z in

$M - M_1$, $z_k = \varphi(z_{k-1})$ aber sicher in M_1 enthalten ist. Ist nun x von y verschieden, so folgt aus der umkehrbaren Eindeutigkeit der Zuordnung φ, daß auch $\varphi(x)$ von $\varphi(y)$ verschieden sein muß. Demnach ist $\varphi(z)$ von $\varphi(z_k)$, d. h. z_1 von z_{k+1} für jedes k verschieden, daher wieder $\varphi(z_1) = z_2$ von $\varphi(z_{k+1}) = z_{k+2}$ u. s. f. Damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Aus diesem Satz geht hervor, daß eine transfinite Menge nur von gleicher oder höherer Mächtigkeit sein kann, als $\mathfrak{G}$. Daß keine unendliche Menge überhaupt von niederer Mächtigkeit als $\mathfrak{G}$ sein kann, folgt schon aus XIII, doch ist damit noch nicht gesagt, daß sie von gleicher oder höherer Mächtigkeit sein muß, solange nicht die Unmöglichkeit des Falles (Δ) feststeht.

§ 17. Um zu weiteren speziellen abzählbaren Mengen zu gelangen, beweisen wir folgenden allgemeinen Satz:

XV. M sei eine abzählbare Menge, $m_1, m_2, m_3, \ldots m_k, \ldots$ seien ihre Elemente, und jedes dieser Elemente sei wieder eine endliche Menge. Von den Dingen x dieser Mengen komme keines in zwei oder mehreren der Mengen $m_1, m_2, \ldots m_k \ldots$ vor. Dann ist die Menge der Dinge x selbst abzählbar.

Wenn der Sinn des Satzes richtig verstanden ist, kann er auch in folgenden kürzeren Fassungen ausgesprochen werden:

Eine abzählbare Menge endlicher Mengen ist abzählbar, oder:

Ersetzt man in einer abzählbaren Menge jedes Element durch eine endliche Anzahl von Elementen, so entsteht wieder eine abzählbare Menge.

Der Beweis des Satzes ist fast trivial zu nennen, wenn man die letzte Fassung beachtet. Sind $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots$ die Dinge der

Menge m_k und n_k ihre Anzahl, so schreibe man die Dinge x in der durch die Indices gegebenen Reihenfolge an:

$$\overbrace{x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots\ x_{n_1}^{(1)},}^{m_1}\quad \overbrace{x_1^{(2)},\quad x_2^{(2)},\ \ldots\ x_{n_2}^{(2)},}^{m_2}\ \ldots \text{ u. s. f.}$$

$$1,\quad 2,\ \ldots\ n_1,\quad n_1+1,\ n_1+2,\ldots n_1+n_2,\ldots \text{ u. s. f.}$$

Man kann ohne weiteres die Zuordnung der Dinge x zu den ganzen Zahlen angeben. Der Menge m_k gehen die Mengen m_1 bis m_{k-1} voraus, sie liefern $n_1+n_2\ldots+n_{k-1}$ Elemente. Den Elementen $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}\ldots x_l^{(k)}\ldots$ kommen daher die Ordnungszahlen $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+1$, $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+2$, $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l$ zu, womit die Abzählbarkeit erwiesen ist.

Eine stillschweigende Voraussetzung bei diesem Beweise ist die, daß an die n_k Elementen von m_k die unteren Indices 1, 2 bis n_k in irgend einer Art bereits verteilt sind. Dies kann für die unendliche Reihe m_1, m_2, ... nur durch ein Gesetz geschehen. Wie weit die Annahme der Existenz eines solchen Gesetzes zulässig ist, wird später noch untersucht werden, da die Frage von prinzipieller Bedeutung ist. Wir begnügen uns hier mit der Feststellung, daß bei allen Anwendungen des Satzes XV ein solches Gesetz stets aufgewiesen werden kann.

§ 18. Eine erste Anwendung des Satzes XV ist das folgende Theorem:

XVI. (Satz von der endlichen Bezeichnung). Es sei M eine unendliche, Z eine endliche Menge, deren Dinge z_1, z_2, z_3, .. z_n wir „Zeichen" nennen wollen. Jede Reihenfolge $z_a z_b z_c \ldots z_k$ einer endlichen Anzahl von Dingen aus Z, in der jedes z mehrmals auftreten darf, soll eine „Bezeichnung" genannt werden. Wenn jedem Ding m von M eine Bezeichnung $\varphi(m)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet ist, so ist M abzählbar.

In der Definition der Bezeichnungen ist die Reihenfolge betont, es sollen also z. B. $z_1 z_2$ und $z_2 z_1$ verschiedene Bezeichnungen sein.

Der Beweis ist ziemlich einfach. Die Menge der Bezeichnungen ist abzählbar; die Menge der den Dingen von M zugeordneten Bezeichnungen $\varphi(m)$ ist daher als Teilmenge der Menge aller Bezeichnungen nach Satz XIII ebenfalls abzählbar, also auch die zu ihr äquivalente Menge M selbst.

Daß aber die Menge Θ der Bezeichnungen abzählbar ist, folgt nach Satz XV. Sie zerfällt nämlich in eine abzählbare Reihe $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_k, \ldots$ von Mengen; die erste enthält alle Bezeichnungen, die aus einem Element von Z bestehen:

$$\vartheta_1 = z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n,$$

die zweite alle zweigliedrigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{llllll} z_1 z_1, & z_1 z_2, & z_1 z_3, & z_1 z_4, & \ldots & z_1 z_n \\ z_2 z_1, & z_2 z_2, & \ldots & & & z_2 z_n \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ z_n z_1, & \ldots & & & & \ldots z_n z_n, \end{array}$$

die dritte alle dreigliedrigen, die k te alle k gliedrigen. Die Mengen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ sind endlich: ϑ_k enthält genau n^k Elemente. Diese können auch nach einem einheitlichen Gesetz geordnet werden, z. B. nach dem lexikographischen, sofern man ϑ_1 irgendwie willkürlich geordnet hat. Damit folgt aus Satz XV die Abzählbarkeit von Θ und daraus die von M. — Die Ordnungsnummer, die zu einer Bezeichnung $z_a z_b z_c \ldots z_p$ gehört, läßt sich auch explicit angeben. Ist die Bezeichnung k-gliedrig, so ist ihre Ordnungsnummer gleich

$$a \cdot n^k + b \cdot n^{k-1} + c \cdot n^{k-2} + \ldots + p.$$

Die prinzipielle Bedeutung des Satzes XVI geht daraus hervor, daß das Alphabet eine endliche Menge von Zeichen enthält, daß also die Menge aller Wortbildungen, insbesondere der sinnvollen, abzählbar ist. Eine darauf gegründete Paradoxie wird später zu erledigen sein (Kap. XXIII).

Aber auch die Menge der Ziffern 0, 1, 2, bis 9 ist eine endliche; mit ihr bezeichnen wir alle ganze Zahlen, deren Menge in der Tat abzählbar ist. Ferner erweist sich die Menge aller Dezimalzahlen (d. h. Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist) als abzählbar, denn zur Bezeichnung dienen die zehn Ziffern und das Komma. Die Dezimalzahlen sind eine Teilmenge der Menge aller Brüche überhaupt. Da aber jeder Bruch mit den zehn Ziffern und einem Doppelpunkt (3 : 4) bezeichnet werden kann, ist die Menge aller Brüche, d. i. der Rationalzahlen abzählbar. Aber auch die Menge aller algebraischen Zahlen läßt sich abzählen. Algebraisch heißt eine Zahl α, wenn sie einer Gleichung von folgender Form genügt:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots a_n\alpha^n = 0,$$

in der $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bis a_n ganze Zahlen, positive oder negative, sind. Unter allen Gleichungen, denen eine algebraische Zahl genügt, gibt es eine bevorzugte, die irreduzible. Sie ist von nichthöherem Grade n als jede andere, und die Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ haben keinen gemeinsamen Teiler; a_n ist positiv. Die n Wurzeln dieser Gleichung sind alle von einander verschieden und, was hier übrigens belanglos ist, die Gleichung ist für jede ihrer Wurzeln die irreduzible Gleichung. Die n Wurzeln lassen sich, auch wenn sie imaginär sind, nach einem einheitlichen Prinzip ordnen; als erste, zweite, ... n-te.

Demnach ist eine algebraische Zahl eindeutig definiert durch Angabe der Zahlen a_0, a_1, ... a_n, d. h. der Koeffizienten ihrer irreduzibeln Gleichung, und der Ordnungsnummer k, die ihr unter den Wurzeln dieser Gleichung zukommt. Schreiben wir dafür etwa

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, k]$$

so ist α eindeutig beschrieben durch 12 Zeichen: die 10 Ziffern, das Komma und den Minusstrich vor den negativen Koeffizienten. Z. B. wäre

$$\alpha = [-3, 0, 1, 2]$$

die zweite Wurzel der (irreduzibeln) Gleichung

$$-3 + \alpha^2 = 0,$$

d. h., wenn wir der Größe nach ordnen, die positive Wurzel aus 3, $\alpha = 1{,}732 \ldots$

Die angegebene Bezeichnungsweise ist eine endliche; damit folgt aus Satz XVI die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen.

§ 19. Eine weitere Folgerung aus Satz XV ist:

XVII. Eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Diesen Satz pflegt man auch, seiner geometrischen Bedeutung wegen, als den Satz von der Abzählbarkeit des Punktgitters zu bezeichnen.

Nach Voraussetzung ist eine Reihe M_1, M_2, M_3, ... von Mengen gegeben, und jeder Menge ist umkehrbar eindeutig eine ganze Zahl zugeordnet, die wir ihren Index nennen wollen und ihr auch als Index anhängen. Indem wir alle diese Mengen zusammenfassen, entsteht eine Menge M, und jedes Element m von M ist in einer bestimmten Menge M_k enthalten. Den Index dieser Menge setzen wir dem Element als ersten Index an. Da weiter die Abzählbarkeit von M_k angenommen ist, existiert eine Zuordnung, die dem Element m in M_k eine bestimmte Zahl n zuordnet. Diese nennen wir den zweiten Index von m und bezeichnen jetzt m kurz durch die beiden Indices: $m = (k, n)$. Der erste gibt die Teilmenge M_k an, in der m zu suchen ist, der zweite gibt die Stelle an, die m in M_k einnimmt.

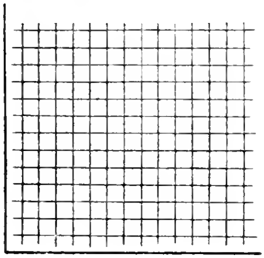
Die Abzählbarkeit von M folgt nun unmittelbar nach XVI daraus, daß jedes Indicespaar (k, n) durch die zehn Ziffern und ein Komma bezeichnet wird.

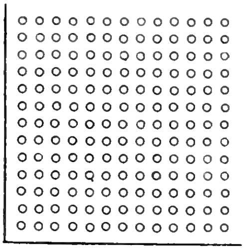
Um die Abzählbarkeit der Menge M aller Indizespaare (k, n) noch auf einem zweiten Wege nachzuweisen, bilden wir die Summe $k+n$ der beiden Indices des Paares. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Paaren, die eine vorgeschriebene Summe s liefern, nämlich $(1, s-1)$, $(2, s-2)$, $(3, s-3)$, bis $(s-1, 1)$. Ihre Anzahl ist $s-1$, diese Zahl nennen wir die Höhe des Indicespaares (k, n). Sie ist eine endliche Zahl.

Es sei jetzt N_h die Menge aller Paare von der Höhe h. Sie ist endlich. Die Menge der Mengen N_h ist, wie der Index zeigt, abzählbar. Die Menge aller Elemente der Mengen N_h ist aber mit der Menge M identisch, also ist M nach Satz XV abzählbar.

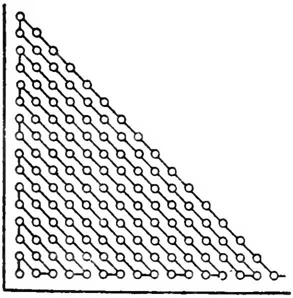
Die bereits erwähnte geometrische Interpretation erhält man, wenn man die beiden Indices nach den Methoden der analytischen Geometrie als Abscisse und Ordinate auf zwei Axen, am einfachsten rechtwinkligen, aufträgt. In der Figur sind zudem die Einheiten auf beiden Axen gleich groß gewählt. Man erhält für die ersten Indices die Teilpunkte 1, 2, 3, etc. auf der horizontalen Axe, in denen Lote nach oben errichtet werden. Den zweiten Indices entsprechen die Punkte der vertikalen Axe mit den auf ihr nach rechts errichteten Loten. Der Schnitt zweier Lote wird dem Element mit den beiden Indices der Lote zugeordnet. Jedes Lot auf der horizontalen Axe enthält die Punkte, die einer der Mengen M_k angehören. Die Lote selbst bilden ersichtlich eine abzählbare Menge.

Denkt man sich die Schnittpunkte markiert und die Lote

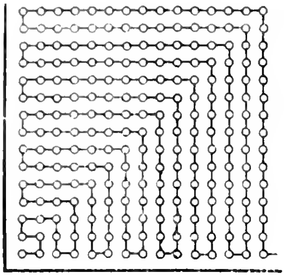




entfernt, so entsteht die als Punktgitter bezeichnete Figur, deren Abzählbarkeit wir nachgewiesen haben. Fassen wir in ihr die Punkte zusammen, die Indicespaaren von gleicher Höhe entsprechen,

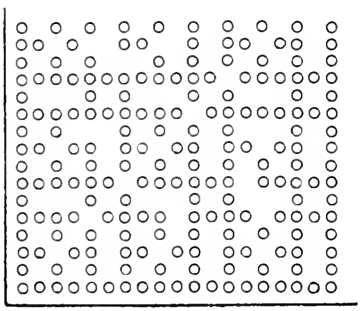


so erhalten wir die in der nächsten Figur eingetragenen Diagonalen, die sich durch die vertikalen und horizontalen Verbindungsstücke in einen einzigen Linienzug vereinigen lassen, der jeden Gitterpunkt treffen muß. Diesem Linienzug entspricht eine Anordnung aller Indicespaare von gleicher Höhe, bei der alle Paare von gleicher gerader Höhe nach dem vorderen, alle von gleicher ungerader nach dem hinteren Index geordnet sind. Natürlich gibt es noch andere Ordnungen, die aber geometrisch weniger einfach aussehen; umgekehrt gibt es geometrisch ele-



gante Ordnungen, die abstrakt schwieriger zu beschreiben sind, z. B. die folgende: (1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (3, 4), (2, 4), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 1), (6, 2) etc.

Auf diesem Wege gelangt man zu einer hübschen Abzählung der rationalen Zahlen. Jede rationale Zahl wird in einfachster Weise als Bruch $a:b$ zweier teilerfremder Zahlen dargestellt. Den beiden Zahlen a, b entspricht ein Punkt des Gitters, und jedem Gitterpunkt, dessen Indices (Koordinaten)



teilerfremd sind, entspricht eine rationale Zahl in ihrer Normaldarstellung. Damit werden die rationalen Zahlen auf die nebenstehend dargestellte Teilmenge des Punktgitters abgebildet und nach dem Höhenverfahren in eine Reihe gebracht, die so beginnt: 1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, 5, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, 6, 7, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{2}$, 8, 9 . . .

Die Figur des Punktgitters enthält auch die Anordnung der rationalen Zahlen nach ihrer natürlichen Größe. Zieht man nämlich von dem Schnittpunkt der Axen aus Strahlen nach den Gitterpunkten, so ordnen sich diese nach demselben Gesetz, wie die rationalen Zahlen: liegt von drei Rationalzahlen a, b, c der Größe nach b zwischen a und c, so liegt auch der b entsprechende Scheitelstrahl zwischen den zu a und c gehörigen. —

Aus Satz XVII folgt nun unmittelbar, daß **auch die Menge** aller Indicestripel (α, β, γ) abzählbar ist; denn zunächst ist die Menge aller Tripel mit gleichem vorderem Index α abzählbar, da jedes Element in ihr durch das Paar (β, γ) eindeutig charakterisiert ist. Die Menge aller Mengen M_α von gleichem vorderen Index α ist aber ersichtlich selbst abzählbar, wonach aus XVII die Abzählbarkeit aller Tripel folgt. Den Indextripeln entspricht geometrisch ein räumliches Punktgitter.

Durch Schluß von n auf $(n+1)$ beweisen wir weiter, daß jede Menge abzählbar ist, in der jedes Element durch n Indizes aus der Reihe der ganzen Zahlen eindeutig charakterisiert ist. Von da aus endlich folgt, daß eine Menge M auch dann abzählbar ist, wenn jedes Element durch eine endliche, aber an sich beliebig große Zahl von Indices bestimmt wird. Denn eine solche Menge zerfällt in die Teilmengen $M_1, M_2, M_3, \ldots M_k, \ldots$, von denen M_1 alle Elemente mit einem, M_2 mit zweien, M_k mit k Indices enthält. Jede dieser Mengen ist abzählbar, die Reihe $M_1, M_2, \ldots$ selbst auch, woraus die Abzählbarkeit von M folgt. Dieses letzte Resultat zeigt wiederum die Abzählbarkeit aller algebraischen Zahlen, von denen jede durch die $n+2$ Indices $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, k$ charakterisiert ist, wobei n endlich, aber keiner oberen Schranke unterworfen ist[1].

§ 20. Die speziellen hier angeführten Beispiele der rationalen, dezimalen und algebraischen Zahlen sind bekannt dafür, daß sie einen völlig überraschenden Eindruck bei jedem hervorrufen, der sie zum ersten Male kennen lernt. Das Überraschende liegt darin, daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen stets

[1] Daß hierbei auch negative Indizes auftreten, ist belanglos, da auch die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen wie folgt abzählbar ist:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\ k,\ -k,\ k+1\ \ldots \quad \text{etc.}$$

noch unendlich viele rationale Zahlen liegen, daß es zu keiner rationalen Zahl eine der Größe nach unmittelbar folgende gibt. Indem wir zwischen je zwei aufeinander folgende ganze Zahlen noch unendlichviele rationale und algebraische Zahlen einschieben, haben wir das Gefühl, den Zahlbereich unendlich zu erweitern. Unsere Betrachtungen zeigen, daß diese Erweiterung wohl eine Menge von neuer Anordnung, nicht aber von neuer Mächtigkeit erzeugt hat.

Die Untersuchung der Mächtigkeit läßt die Anordnungsfrage völlig aus dem Spiel. Die Abbildung der rationalen auf die ganzen Zahlen zerstört die Anordnung der rationalen Zahlen ihrer natürlichen Größe nach völlig und von Grund aus. Ebensogut aber kann man auch sagen, daß sie die der ganzen Zahlen zerstöre. Daß wir dies praktisch nicht taten, vielmehr die rationalen Zahlen in eine Reihe hintereinander schrieben, lag nur an der rein technischen Bequemlichkeit: es ist zu umständlich, die durch die Zuordnung definierte Funktion $\varphi(x)$ explizite aufzustellen, die jeder rationalen Zahl umkehrbar eindeutig eine ganze Zahl zuordnet. Wir brachten daher nach dem Prinzip des § 16 ihr Bildungsgesetz durch Anschreiben einer endlichen Anzahl Terme zum Ausdruck. —

Wir sehen aus dem Voranstehenden, daß es wohl gewisse natürliche Ordnungen einer Menge geben kann, daß dies aber nicht notwendig die einzigen sind. Die Anordnungen der rationalen Zahlen nach Größe und Höhe sind völlig verschieden. So können wir auch die ganzen Zahlen auf die verschiedensten Arten ordnen, nicht nur nach dem üblichen Schema: 1, 2, 3, 4, ... Ein reichhaltiges Hülfsmittel bieten hierzu die Primzahlen. Jede ganze Zahl ist eindeutig in Primfaktoren zerlegbar. Wir können danach die Menge $\mathfrak{G}$ zunächst in abzählbar viele Mengen $G_1, G_2, G_3, \ldots G_k,$

zerlegen, von denen G_k alle Zahlen enthält, die genau k Primfaktoren enthalten. G_1 enthält alle Primzahlen. $16 = 2^4$ gehört nach G_4, $27 = 3^3$ nach G_3, ebenso $30 = 2 . 3 . 5$ etc.

G_k können wir wieder in abzählbar viele Mengen G_{k1}, G_{k2}, G_{kr} zerlegen, von denen G_{k1} alle Zahlen enthält, deren kleinster Faktor 2, G_{k2} alle deren kleinster Faktor 3 ist, G_{k3} alle mit 5 als kleinstem Faktor etc. Jede dieser Mengen kann wieder nach dem kleinsten zweiten Faktor gespalten werden u. s. f. Bei solchem Verfahren wird G in unendlich viele Mengen abzählbarer Mengen gespalten, die wieder der verschiedensten Anordnungen fähig sind. Trotzdem bleibt natürlich die Mächtigkeit stets die gleiche.

Es gibt auch Mengen, denen eine natürliche Ordnung von Hause aus gar nicht zukommt. So z. B. Mengen von Funktionen. Besteht zwischen x und y eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, so heißt y eine rein-algebraische Funktion von x. Dem Laien wird kaum eine Methode bekannt sein, Funktionen zu ordnen, da sie keine Größen, vielmehr Beziehungen zwischen veränderlichen Größen darstellen. Trotzdem ist die Menge aller rein-algebraischen Funktionen abzählbar, also in eine Reihe zu ordnen.

Ob daher durch Äquivalenzen Ordnungen zerstört oder geschaffen werden, ist für die Mächtigkeitsbetrachtungen selbst völlig belanglos. Daß sich uns die Ordnungsverwandlungen aufdrängen, liegt daran, daß gewisse Mengen natürliche Ordnungen besitzen, von deren Betrachtung wir uns nicht völlig loslösen können. Die Bedeutung der natürlichen Ordnungen wird von der Mengenlehre keineswegs unterschätzt, nur gehört sie in ein anderes Kapitel als in das der Mächtigkeiten. Wenn hier trotzdem darauf eingegangen wurde, geschah es, um denjenigen

Lesern, die zum ersten Male mengentheoretische Betrachtungen in die Hand nehmen, über das instinktive Gefühl der Befremdung hinauszuhelfen, das die Umordnung der rationalen und algebraischen Zahlen hervorzurufen pflegt.

VII.

Der Äquivalenzsatz.

§ 21. Die allgemeine Bedeutung des Äquivalenzsatzes und seine zweifache Fassung sind bereits im vierten Kapitel besprochen worden. Für die Mächtigkeit der Mengen ist der Satz zuerst und nahezu gleichzeitig von Schröder und Bernstein bewiesen worden. Der Schröder'sche Beweis arbeitet mit Logikkalkul und ist nur in einer Skizze veröffentlicht. Ich gebe daher den Bernstein'schen Beweis für die engere Fassung mit einigen Abänderungen wieder.

Angenommen ist, daß die Menge A eine Teilmenge A_1 und diese wieder eine Teilmenge A_2 besitze; diese Teile sollen eigentliche sein, da sonst der Satz trivial ist. A_2 sei zu A äquivalent, d. h. es existiere eine Zuordnung φ, welche jedem Element a in A ein Element $\varphi(a)$ von A_2 umkehrbar eindeutig zuordnet, so daß $\varphi(a)$ jedes Element von A_2 darstellen kann, also die inverse Zuordnung $\overline{\varphi}$ jedem Element a_2 von A_2 ein Element $\overline{\varphi}(a_2)$ von A zuordnet. Der Äquivalenzsatz behauptet die Existenz einer Zuordnung ψ, welche jedem Element a von A ein Element $\psi(a)$ von A_1 zuordnet, so daß zu jedem Element a_1 von A_1 auch ein Element $\overline{\psi}(a_1)$ von A gehört.

Zum Beweise bilden wir ein komplementäres System von fünf Teilmengen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 in A. Es sei $B_1 = A - A_1$,

$B_2 = A_1 - A_2$, so daß zunächst B_1, B_2, A_2 ein komplementäres System von A bilden. A_2 zerlegen wir nun folgendermaßen:

Es sei x ein Element in B_1, so ist $\varphi(x)$ ein Element in A_2, da jedes Element $\varphi(a)$ in A_2 ist. Wir rechnen $\varphi(x) = x_1$, $\varphi(x_1) = x_2$, $\varphi(x_2) = x_3, \ldots \varphi(x_k) = x_{k+1}$ etc. zu einer Teilmenge B_3 von A_2.

Es sei ferner y ein Element in B_2 so rechnen wir die Elemente $\varphi(y) = y_1$, $\varphi(y_1) = y_2, \ldots \varphi(y_k) = y_{k+1}$ u. s. f. zu einer Teilmenge B_4 von A_2.

Ist z irgend ein Element in A_2, so hat $\overline{\varphi}(z)$ einen Sinn und bedeutet entweder ein Element von B_1 oder von B_2 oder von A_2. Im ersten Fall ist z als Element von B_3, im zweiten von B_4 definiert. Im dritten Falle hat $\overline{\varphi}(\overline{\varphi}(z)) = \overline{\varphi}(\overline{z}_1) = \overline{z}_2$ wieder einen Sinn, und ist auch $\overline{z}_2$ in A_2, so existiert weiterhin $\overline{\varphi}(\overline{z}_2) = \overline{z}_3$; allgemein muß für jedes Element z in A_2 einer der beiden Fälle eintreten: die Reihe $z, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \ldots (\overline{\varphi}(\overline{z}_k) = \overline{z}_{k+1})$ bricht ab, oder sie bricht nicht ab. Im letzteren Falle rechnen wir z zu der Menge B_5. Bricht die Reihe ab, so hat sie ein letztes Element $\overline{z}_k$, und es ist $\overline{z}_k$ nicht in A_2, da es sonst noch ein Element $\overline{z}_{k+1} = \overline{\varphi}(\overline{z}_k)$ gäbe. Daher ist $\overline{z}_k$ entweder in B_1 und $z = \varphi^k(\overline{z}_k)$, also nach Definition von B_3 in B_3, oder es ist $\overline{z}_k$ in B_2 und daher nach Definition z in B_4.

Hiermit haben wir zunächst gezeigt, daß unsere Disjunktion in der Tat vollständig, also B_1 bis B_5 ein komplementäres System ist. Die Mengen B_1 bis B_4 existieren sicher. Ob es Elemente gibt, die nach B_5 gehören, steht nicht fest, ist aber auch belanglos.

Nunmehr definieren wir die gesuchte Zuordnung ψ:

1. Ist x ein Element in B_2, B_4 oder B_5, so sei $\psi(x) = x$.
2. Ist x ein Element in B_1 oder B_3, so sei $\psi(x) = \varphi(x)$.

Diese Zuordnung ist eindeutig, weil die Identität wie auch φ eindeutig sind und x nur unter 1 oder nur unter 2 fallen kann. Da es unter einen von beiden Fällen zu finden sein muß, ist auch $\psi(x)$ für jedes x in A definiert.

$\psi(x)$ ist stets in A_1. Denn ist x in B_2, B_4 oder B_5, so ist auch $\psi(x) = x$ in B_2, B_4 oder B_5, also in A_1. Ist x in B_1 oder B_3, so ist $\psi(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ aber nach Definition in A_2, also a fortiori in A_1. Außerdem ist in diesem Fall $\varphi(x)$ speziell in B_3, woraus hervorgeht: Fällt y unter 1, x unter 2, so ist $\psi(y)$ von $\psi(x)$ sicher verschieden.

Daraus folgt sofort die Umkehrbarkeit: Denn $\psi(x) = \psi(y)$ ist nur möglich, wenn x, y beide unter 1 oder beide unter 2 fallen. Im ersten Falle folgt aus der Definition von ψ: $x = y$, im zweiten $\varphi(x) = \varphi(y)$, und daraus wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit von φ wiederum $x = y$.

Somit ist nur noch zu zeigen, daß auch jedem Element z in A_1 ein Element x durch $\psi(x) = z$ zugeordnet wird. Nun ist z entweder in B_2 oder B_3 oder B_4 oder in B_5; ist es in B_2, B_4 oder B_5, so ist $\psi(z) = z$; ist z in B_3, so ist es in A_2, also gibt es ein x, für das $\varphi(x) = z$. Es ist aber x nach Definition von B_3 entweder in B_3 selbst oder in B_1, also $\varphi(x) = \psi(x)$, d. h. $\psi(x) = z$.

Hiermit ist gezeigt, daß ψ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von A und A_1 herstellt, d. h. es ist $A \sim A_1$, was zu beweisen war.

§ 22. Ein einfaches Beispiel mag die Beweisführung veranschaulichen: Die Menge A_2 der vielfachen von 4 ist eine Teilmenge der geraden Zahlen, diese wieder der ganzen. Die Menge der geraden Zahlen heiße A_1, die der ganzen A. Die Gleichung $y = 4x$ ordnet jedem Element x von A ein Element y von A_2 zu, es ist also $A \sim A_2$. Gesetzt, wir wüßten die Äquivalenz von A_1 und A nicht herzustellen, (was natürlich durch $z = 2x$ sofort erledigt ist), so würde der Äquivalenzsatz zu folgendem Verfahren anleiten:

A_1 ist die Menge der geraden, also B_1 die der ungeraden Zahlen $2k-1$. A_2 ist die Menge der geraden Vielfachen von 2, A_1 die aller Vielfachen von 2, also B_2 die Menge der ungeraden vielfachen von 2, $2(2k-1)$. Um endlich A_2 zu zerlegen, haben wir aus y rückwärts $x = \frac{y}{4}$ zu bestimmen. Ist x noch in A_2, also weiter durch 4 teilbar, so ist $x:4 = y:16$ zu ermitteln u. s. f. Die Reihe der Zahlen $y:4^n$ bricht sicher ab, es gibt also zunächst keine Menge B_5. Ist die letzte z der Zahlen $y:4^n$ ungerade, also in B_1, so rechnet $y = 4^n(2k-1)$ zu B_3. Ist dagegen z gerade, so ist es nur noch durch 2, nicht mehr durch 4 teilbar, also $y = 4^n.2(2k-1)$; diese Zahl rechnet zu B_4, weil $2(2k-1)$ zu B_2 rechnet.

Die gesuchte Zuordnung ist daher die folgende:

1. Ist x von einer der Formen $2(2k-1)$ oder $4^n.2(2k-1)$, so setze man $\psi(x) = x$.
2. Ist x von einer der Formen $(2k-1)$ oder $4^n.(2k-1)$, so setze man $\psi(x) = 4x$.

Die Zuordnung ist nicht kompliziert, immerhin aber weniger einfach, als die Zuordnung $\chi(x) = 2x$. Sie sieht schematisch so aus:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13,\ldots \\ 4, & 2, & 12, & 16, & 20, & 6, & 28, & 8, & 36, & 10, & 44, & 48, & 52,\ldots \end{array}$$

und ordnet offenbar die geraden Zahlen nicht nach ihrer Größe.

§ 23. Eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Äquivalenzsatz ist die folgende:

XVIII. Die Mächtigkeit einer transfiniten Menge ändert sich nicht, wenn man ein Element hinzufügt.

Ist M transfinit, so ist $M \sim M_1$ und $M - M_1$ enthält mindestens ein Element m. Es ist aber $M - m$ eine Teilmenge von M und M_1 wieder eine Teilmenge von $M - m$, denn jedes Element von M_1 ist in M, aber von m verschieden, also auch in $M - m$ enthalten. Nach dem Äquivalenzsatz ist daher auch $M \sim M - m$.

Es sei nun (M, u) die Menge, die durch Hinzufügen eines nicht in M enthaltenen Elementes u aus M entsteht. Wir besitzen eine Zuordnung ψ, die jedem Element von $M - m$ ein Element von M eindeutig zuordnet. Setzen wir noch $\psi(m) = u$, so haben wir die Elemente von M und (M, u) einander umkehrbar eindeutig zugeordnet, was zu beweisen war.

Der Satz folgt auch leicht aus XIV; M besitzt eine abzählbare Teilmenge $z_1, z_2, z_3, \ldots$, ihr füge man $z_0 = u$ zu und ordne jedes Element z_k seinem folgenden zu. — Analog beweist man, daß durch Hinzufügen einer abzählbaren Menge die Mächtigkeit keiner transfiniten Menge geändert wird. —

VIII.

Die Existenz verschiedener Mächtigkeiten.

§ 24. Im folgenden werden wir zwei Methoden angeben, um aus einer Menge M eine neue M von folgender Eigenschaft herzustellen:

(1) M ist zu M nicht äquivalent.

(2) M ist einer Teilmenge von M äquivalent.

Aus (2) folgt, daß zwischen M und M weder die Beziehung (Δ) noch $\mathsf{M} < M$ bestehen kann. Aber auch (A) ist ausgeschlossen, da nach dem Äquivalenzsatz aus ihr $M \sim \mathsf{M}$ im Widerspruch mit (1) folgen würde. Es ist also M eine Menge von größerer Mächtigkeit als M.

Der Beweis der Beziehung (1) wird sich stets auf folgenden Satz stützen:

(3) Jede zu M äquivalente Teilmenge von M ist eine eigentliche Teilmenge von M; sie definiert nämlich ein in ihr nicht enthaltenes Element von M.

Da M nicht eine eigentliche Teilmenge von sich selbst sein kann, folgt daraus (1).

Die Menge M definieren wir zunächst durch folgende Festsetzung:

α wird Element von M genannt, wenn es eine Teilmenge von M ist.

Da alle Elemente von M auch als Teilmengen von M gelten sollen, ist jedenfalls die Beziehung (2) klargestellt.

Sei nun N eine Teilmenge von M und $\mathsf{N} \sim M$, so ist jedem Element a von M ein Element α von N zugeordnet. Da α eine Teilmenge von M ist, kann a in α enthalten sein. Wir nennen es dann ein x-Element von M. Ist dagegen a nicht in α enthalten, so nennen wir es ein y-Element. Jedes Element von M ist entweder ein x- oder y-Element und nur eins von beiden.

Zunächst erledigt sich leicht der Fall, daß gar keine y-Elemente vorhanden sind. Es spaltet sich in zwei Unterfälle: Erstens kann jedes Element von N eine Teilmenge sein, die nur ein Element von M enthält. Sind dann p, q zwei Elemente von M, so ist (p, q) eine Teilmenge von M, die nicht in N vorkommt. Zweitens finde sich unter den Elementen von N eine aus mehreren Elementen von M bestehende Teilmenge von M. Sie ist einem Element a

zugeordnet und a ist eine Teilmenge von M, die in N nicht vorkommt: denn da sie nur ein Element a enthält, müßte sie diesem zugeordnet sein. a ist aber schon vergeben.

Zu einem der originellsten Schlüsse, den wir unter den Paradoxieen wieder antreffen werden. gibt jetzt der zweite Fall Anlaß: Angenommen, es existieren y-Elemente, dann kann die Teilmenge Y von M, welche aus diesen y-Elementen und nur diesen besteht, nicht in N enthalten sein.

Wäre dies nämlich der Fall, so wäre ihr ein Element z in A zugeordnet. Wäre z ein y-Element, so hieße dies nach der Definition der y-Elemente, daß es in der zu z gehörigen Teilmenge Y nicht enthalten sei. Nach der Definition von Y dagegen müßte es in ihr enthalten sein. Wäre andererseits z ein x-Element, so hieße dies nach der Definition der x-Elemente, daß es in der zu z gehörigen Menge Y enthalten sei, woraus aber nach der Definition der Menge Y folgen würde, daß es ein y-, also kein x-Element wäre.

Also kann Y kein Element in N sein, womit (3) erwiesen ist.

§ 25. Zu einer zweiten Menge M gelangen wir durch die allgemeine Ausbildung des Funktionsbegriffes. Sei ein Gesetz gegeben, welches jedem Element x einer Teilmenge M_1 von M ein Element y von M zuordnet. so nennen wir dieses Gesetz eine „Funktion φ in M" und schreiben $y = \varphi(x)$. Daß es wirklich Funktionen gibt, beweisen folgende Spezialfälle: $\varphi(x) = x$; $\varphi(x) = a$, worin a ein bestimmtes Element von M ist; oder $\varphi(x) = a$ für jedes von a verschiedene x, $\varphi(a) = b$, worin b ein weiteres bestimmtes Element in M ist.

Ist M_1 eine eigentliche Teilmenge von M, so wollen wir φ eine „unvollständige" Funktion nennen. Ist z ein Element in M, aber nicht in M_1, so ist $\varphi(z)$ unbestimmt, was durch die Gleichung $\varphi(z) = u$ ausgedrückt sei; u darf natürlich nicht als Zeichen für ein Element in M gebraucht sein. In diesem Sinne wäre z. B. $\sqrt{x}$ im Gebiet der reellen Zahlen nur für positive x definiert, also unvollständig; im Gebiet der ganzen Zahlen wäre es nur für die Menge der Quadratzahlen definiert. — Eine Funktion, die für alle Elemente von M definiert ist, soll dementsprechend „vollständig" heißen.

Zwei Funktionen heißen gleich, wenn sie jedem Element von M das gleiche Element zuordnen und für dieselben Elemente unbestimmt sind; d. h. es muß für jedes x in M $\varphi(x) = \psi(x)$ sein. Zwei Funktionen sind daher verschieden, wenn für irgend ein spezielles Element a $\varphi(a)$ von $\psi(a)$ verschieden ist.

Zwei Funktionen heißen dagegen „total verschieden," wenn für j e d e s x in M $\varphi(x)$ von $\psi(x)$ verschieden ist. Zu jeder Funktion $\varphi(x)$ lassen sich auf die mannigfachste Weise total verschiedene Funktionen angeben. Seien z. B. a und b zwei nicht identische Elemente in M; wir setzen $\psi(x) = a$, wenn $\varphi(x)$ von a verschieden ist, und $\psi(x) = b$, wenn $\varphi(x) = a$ ist. Dann sind φ und ψ total verschieden.

Die Menge Φ aller Funktionen in M genügt jedenfalls der Forderung (2), denn ich kann dem Element a die durch $\varphi(x) = a$ definierte Funktion umkehrbar eindeutig zuordnen.

Zweitens ist auch (1) erfüllt, denn ich kann einer Teilmenge M_1 von M eine Funktion $\varphi(x)$ umkehrbar eindeutig durch folgende Festsetzung zuordnen: Sei $\varphi(x) = a$ für alle x in M_1, $\varphi(x) = b$ für alle nicht in M_1 enthaltenen x von M, wobei a und b nicht identische Elemente in M seien. Da somit eine Teilmenge aller Funktionen äquivalent der zuerst definierten Menge M aller Teilmengen von M ist, kann die Menge Φ aller Funktionen in M

nicht zu M äquivalent sein. Denn dann wäre M einer Teilmenge von M äquivalent, woraus wegen (2) nach dem Äquivalenzsatz gegen (1) $\mathsf{M} \sim M$ folgen müßte.

Man kann nur die Nichtäquivalenz von Φ und M auch ohne den Umweg über M direkt durch Satz (3) beweisen. Sei F eine zu M äquivalente Teilmenge von Φ, dann ist jedem Element a in M eine Funktion zugeordnet, die wir mit $\varphi_a(x)$ bezeichnen. Danach definieren wir eine Funktion $\delta(x)$ durch die Festsetzung $\delta(x) = \varphi_x(x)$ und bilden weiter eine von δ total verschiedene Funktion $\psi(x)$. Dann kann $\psi(x)$ in F nicht vorkommen, denn wäre $\psi(x) = \varphi_a(x)$, so wäre $\psi(a) = \varphi_a(a) = \delta(a)$ gegen die Definition von ψ.

Dieses elegante Schlußverfahren, dessen praktische Bedeutung ungleich größer ist, als die des Verfahrens in § 23, bezeichnet man als das „Diagonalverfahren“ oder den „Diagonalschluß.“ Lassen sich nämlich, wie dies bei abzählbaren Mengen der Fall ist, die Elemente von M in eine Reihe bringen, so gilt das gleiche von den Funktionen in F, und man erhält eine quadratische Tabelle, in der $\delta(x)$ durch die Diagonale repräsentiert wird, wie es das folgende Schema andeutet:

.	φ_a	φ_b	φ_c	. . .
a	$\underline{\varphi_a(a)}$	$\varphi_b(a)$	$\varphi_c(a)$	. . .
b	$\varphi_a(b)$	$\underline{\varphi_b(b)}$	$\varphi_c(b)$	. .
c	$\varphi_a(c)$	$\varphi_b(c)$	$\underline{\varphi_c(c)}$	. .
⋮	⋮	⋮	⋮	

Zu beachten ist noch, daß bei unserer Definition von ψ diese

Funktion eine vollständige Funktion ist. Infolgedessen ist nicht nur die Menge Φ aller Funktionen in M überhaupt, sondern schon die Menge aller vollständigen Funktionen in M von größerer Mächtigkeit als M.

IX.

Nichtabzählbare Mengen.

§ 26. Jede rationale Zahl r zwischen 0 und 1 läßt sich auf eine und nur eine Weise in einen endlichen Kettenbruch mit ganzzahligen Nennern $a_1 a_2 \ldots . a_n$

$$r = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

entwickeln. Wir schreiben abkürzungsweise

$$r = [a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n].$$

Die Indices zeigen sogleich, daß r eine unvollständige Funktion in der Menge $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen definiert. Die Teilmenge M_1, zu der diese Funktion Elemente zuordnet, besteht aus den ganzen Zahlen unterhalb $n+1$.

Jede Irrationalzahl s zwischen 0 und 1 läßt sich in einen und nur einen unendlichen Kettenbruch von gleicher Form entwickeln, und jeder unendliche Kettenbruch mit ganzzahligen Nennern, (dessen Zähler alle gleich 1 sind), definiert eine und nur eine Irrationalzahl:

$$s = [a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n, \ldots .].$$

Hieraus geht sofort hervor, daß die vollständigen Funktionen in

𝔖 den Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 eindeutig zugeordnet sind und umgekehrt. Also hat die Menge aller Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 größere Mächtigkeit als 𝔖, sie ist nicht abzählbar.

§ 27. Da die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist, ist insbesondere diejenige ihrer Teilmengen abzählbar, welche aus allen algebraischen Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 besteht. Es gibt also zwischen 0 und 1 Irrationalzahlen, die nicht algebraisch sind, und das Diagonalverfahren definiert faktisch solche Zahlen in beliebiger Anzahl.

Nicht-algebraische Zahlen heißen transzendent. Bekannt ist insbesondere die Transzendenz von e und π. Aber schon 1851 konstruierte Liouville transzendente Zahlen, um die Möglichkeit der Transzendenz nachzuweisen. Diese Zahlen sind, wie e und π, einfacher definiert, als die durch das Diagonalverfahren beschriebenen Transzendenten. Aber der Nachweis ihrer Transzendenz ist, was die Einfachheit der mathematischen Hülfsmittel betrifft, nicht entfernt mit dem Diagonalverfahren zu vergleichen. Dabei ist zu bedenken, daß unsere Darstellung infolge der absichtlichen Voranstellung allgemeiner Gesichtspunkte keineswegs diejenige Übersicht besitzt, die dem Diagonalverfahren durch ein ad hoc verfaßtes Referat gegeben werden könnte.

§ 28. Die Menge aller reellen Zahlen, der positiven, negativen, ganzen, gebrochenen und irrationalen, wird als das Kontinuum[1] bezeichnet. Da die Menge der Irrationalen zwischen 0 und

---

[1] Spezieller noch als das „Linearkontinuum."

1 eine Teilmenge des Kontinuums ist, folgt die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums selbst. Es ist von höherer Mächtigkeit als 𝔊.

Das Kontinuum enthält nicht-abzählbare Teilmengen, z. B. die in § 26 benutzte. Von allen diesen, soweit man sie bisher untersucht hat, hat sich nachweisen lassen, daß sie dem Kontinuum äquivalent sind. Georg Cantor hat daher bereits 1877 die Vermutung ausgesprochen, daß die Mächtigkeit des Kontinuums die nächstgrößere nach der von 𝔊 sei. Doch ist bis heute ein Beweis für diesen Satz oder sein Gegenteil nicht erbracht worden; dagegen haben mehrere Fehlversuche das Interesse der Mathematiker an dem schwierigen Gegenstand mehr und mehr belebt, so daß das Kontinuumproblem eine der „aktuellsten" Fragen geworden ist. Man kann es mit den bis hier entwickelten Hülfsmitteln so formulieren:

„Es soll entweder eine Teilmenge des Kontinuums angegeben werden, die von geringerer Mächtigkeit als das Kontinuum, von größerer als die abzählbare Menge ist, oder es soll bewiesen werden, daß es eine solche Teilmenge nicht gibt."

§ 29. Dem Kontinuum äquivalent ist offenbar die Menge aller Punkte einer Geraden. Dies führt auf die Frage nach der Mächtigkeit der Menge aller Punkte der Ebene, des dreidimensionalen oder auch eines n-dimensionalen Raumes. Man erhält das Resultat, daß alle diese Mengen, sogar die der Punkte eines Raumes von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. In analoger Weise läßt sich beweisen, daß die Menge aller stetigen Funktionen von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Überraschend sind diese Resultate aus dem gleichen Grunde wie die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen, weil offenbar die Anordnung der Punkte eines Raumes durch die Zuordnung in das Kontinuum völlig zerstört wird, während umgekehrt die Menge der stetigen Funktionen eine Ordnung erhält, die ihr nach der ursprünglichen Definition nicht zukommt.

Läßt man die Beschränkung der Stetigkeit fallen und betrachtet die Menge aller Funktionen im gewöhnlichen Sinne des Wortes überhaupt, so ist diese keine andere, als die Menge aller zum Kontinuum gehörigen Funktionen, also nach § 25 von größerer Mächtigkeit, als das Kontinuum. —

Hiermit sind drei Mengen aufgewiesen, die schon lange vor Schöpfung der Mengenlehre Gegenstand mathematischer Arbeit waren: die Menge der ganzen Zahlen, der reellen Zahlen und der Funktionen. Sie sind nicht erst zu dem Zweck konstruiert, die Möglichkeit verschiedener Mächtigkeiten darzutun, vielmehr boten sie sogleich der Mengenlehre einen fruchtbaren Anknüpfungspunkt an vorhandene Arbeitsgebiete. Für den Zweck des vorliegenden Referates, das sich nicht an Fachmathematiker allein wendet, dürfte es genügen, die prinzipielle Möglichkeit verschiedener Mächtigkeiten und die Brauchbarkeit dieser Begriffsbildung an den einfachsten Beispielen dargetan zu haben.

Dritter Teil.

Ähnlichkeit, Abschnitt und Ordnungstypus.

X.

Geordnete Mengen.

§ 30. Es war bereits früher auf den sonderbaren Eindruck hingewiesen, den die Abzählbarkeit dichter Mengen, wie der der

Rationalzahlen, hervorruft. Er beruht darauf, daß die natürliche Ordnung der Rationalzahlen durch die Zuordnung zu den ganzen Zahlen zerstört wird. Indem wir nun in den weiteren Ausführungen die Ordnung berücksichtigen, gelangen wir zu einer neuen Art der Vergleichung, die enger ist als die Äquivalenz, zugleich aber nur noch geordnete Mengen in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht.

Wir nennen eine Menge geordnet, und zwar linear geordnet, wenn zwischen jedem Paar von einander verschiedener Elemente eine Beziehung besteht, die den Postulaten Ic bis IIIc genügt[1]. Wir wollen aber die Worte und Zeichen für diese Beziehung anders wählen, als bisher, um Verwechslungen mit der Ordnung der Mächtigkeiten zu verhindern. Für $<$ und $>$ setzen wir $\prec$ und $\succ$ und sprechen diese Zeichen durch die Worte „vor“ und „nach“ aus. Da wir nur linear geordnete Mengen betrachten, kann der Zusatz „linear“ wegbleiben. Er dient zur Unterscheidung von der planaren und räumlichen Ordnung, die wir bei den ebenen und räumlichen Punktmengen vorfinden.

Ein und dieselbe Menge kann natürlich verschieden geordnet werden; wir haben bereits drei Ordnungen der Menge der rationalen Zahlen kennen gelernt. Doch existiert bei allen speziellen Beispielen eine natürliche Ordnung der Menge, sofern überhaupt eine existiert. Dies nehmen wir im folgenden als Grundlage: Jede betrachtete Menge sei auf eine ganz bestimmte Art geordnet, und nur diese eine Art werde in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen. Insbesondere ist bei den Mengen von Zahlen stets die Ordnung nach der Größe als die natürliche anzusehen.

[1] Unserem Bestreben, die Ordnung auf Teilung und Vergleichung zurückzuführen, entspräche es, auch hier von Teilungs- und nicht von Ordnungspostulaten auszugehen. Doch würde dadurch die Entwicklung unnötig umständlich gestaltet. Wir werden sie aber im achtundzwanzigten Kapitel nochmals aufnehmen.

§ 31. Danach definieren wir folgendes Vergleichungsprinzip:

XIX. Zwei geordnete Mengen M und N heißen „ähnlich", $M \simeq N$, wenn eine umkehrbar eindeutige Beziehung φ von folgender Art existiert: Sind a, b zwei Elemente in M, p, q die ihnen entsprechenden in N, und ist $a \prec b$, so ist $p \prec q$.

Bei einer ähnlichen Zuordnung folgt also nicht nur $a = b$ aus $\varphi(a) = \varphi(b)$ und umgekehrt, sondern auch $a \prec b$ aus $\varphi(a) \prec \varphi(b)$ und umgekehrt. Die Ähnlichkeit genügt den Postulaten Ib bis IIIb, ist also eine Vergleichung. Sie ist ferner ein Spezialfall der mengentheoretischen Äquivalenz, also sind ähnliche Mengen äquivalent. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht gestattet: die äquivalenten Mengen der ganzen und der rationalen Zahlen z. B. sind nicht ähnlich.

Von zwei äquivalenten Mengen sagten wir, sie seien von gleicher Mächtigkeit. Von zwei ähnlichen Mengen sagen wir, sie besitzen gleichen Ordnungstypus. Insbesondere nennt man ω den Ordnungstypus der Menge der ganzen positiven Zahlen, $\tilde{\omega}$ den Ordnungstypus der der ganzen negativen Zahlen. Für beide Typen ist charakteristisch, daß zwischen zwei Elementen a und b nur endlich viele Elemente stehen. Für ω ist weiterhin charakteristisch, daß er ein erstes Element enthält, nämlich 1. Ein „erstes Element" e ist eines, das zu jedem anderen, x, in der Beziehung $e \prec x$ steht. Umgekehrt steht ein „letztes" Element l zu jedem andern in der Beziehung $x \prec l$. Es kann in einer geordneten Menge nur ein erstes, ebenso nur ein letztes Element geben. Für $\tilde{\omega}$ ist die Existenz eines letzten Elementes (-1) charakteristisch. ω und $\tilde{\omega}$ sind also sicher nicht ähnlich. — Es gibt Mengen, die Teilmengen von beiden Typen enthalten; z. B. finden sich in der

Menge der rationalen Zahlen die Teilmengen $1, 2, 4, 8, \ldots 2^n \ldots$ und $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots (\frac{1}{2})^n \ldots$; die erste ist vom Typ ω, die zweite vom Typ $\tilde{\omega}$.

§ 32. Wenn wir zur Ähnlichkeit eine Teilung hinzunehmen, die mit ihr zusammen dem Postulat IV genügt, so können wir wieder bis zur Disjunktion VIII und dem Problem der Trichotomie gelangen. Am nächsten liegt es, die Teilung in Teilmengen zu verwenden, da sie dem Postulat IV genügt und da jede Teilmenge einer geordneten Menge auf Grund desselben Ordnungsprinzips selbst eine geordnete Menge ist, also hinsichtlich der Ähnlichkeit verglichen werden kann. Doch verliert diese Methode jede Aussicht auf Erfolg, da die Trichotomie nicht hergestellt werden kann. Zwar ist das Problem der Trichotomie auch für die Vergleichung der Mächtigkeiten noch ungelöst, aber es ist im höchsten Grad wahrscheinlich, daß die Ordnung der Mächtigkeiten trichotom ist. Faktisch sind imkomparable Mächtigkeiten bisher nicht bekannt geworden. Dagegen können wir sofort zwei inkomparable Ordnungstypen angeben, nämlich ω und $\tilde{\omega}$. Zwischen ihnen besteht die Beziehung (Δ); keiner ist einem Teil des andern ähnlich, weil jeder Teil von $\tilde{\omega}$ ein letztes, jeder von ω ein erstes Element enthält. Also ist weder $\omega \prec \tilde{\omega}$ noch $\omega \succ \tilde{\omega}$, aber es ist auch nicht $\omega \simeq \tilde{\omega}$.

Dieser Schwierigkeit kann nur auf zwei Wegen abgeholfen werden; entweder man legt eine andere Teilung zu Grunde, oder man schränkt die Ordnung der betrachteten Mengen weiter ein. Der erste Weg ist nicht betreten worden, es ist auch nicht zu erkennen, welche andere Teilung möglich sein soll. Denn eine Einschränkung auf besondere Teile, wie sie beim Winkelteilen mit Erfolg angewandt wird, ist hier aussichtslos, da ja ω überhaupt keinen zu $\bar{\omega}$ ähnlichen Teile enthält und umgekehrt. Wir werden daher innerhalb der geordneten Mengen noch eine besondere Klasse, die der „wohlgeordneten" oder „eutaktischen", herausheben. Zur Vergleichung der Ordnungstypen solcher Mengen ist dann noch eine besondere Art der Teilung von Bedeutung, die wir als „Abschneiden" bezeichnen. Sie genügt wie wir sehen werden, dem Postulat vom Teil und Ganzen.

XI.

Wohlordnung.

§ 33. Wir nennen mit Georg Cantor eine geordnete Menge „wohlgeordnet", wenn jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzt. Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist die, daß auch jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wohlgeordnet ist. Ferner besitzt auch die Menge selbst ein erstes Element. Denn in der Teilmenge aller Elemente, die einem Element a vorangehen, muß es ein erstes Element geben, von dem man sofort zeigt, daß es jedem Element der ganzen Menge vorangeht.

Die Definition der Wohlordnung ist eine der fruchtbarsten die die Mathematik überhaupt kennt. Aus diesem Grund mag von Beispielen wohlgeordneter Mengen zunächst nur ein einfachstes genannt werden, damit der rein logische Charakter der folgenden Schlüsse deutlich zum Ausdruck kommt. Dieses einfachste Beispiel ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen. Sie ist wohlgeordnet, weil es in jeder Menge ganzer Zahlen stets eine kleinste gibt. Eine Menge die nicht wohlgeordnet ist, ist die der rationalen Zahlen; denn sie enthält die Teilmenge

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots (\frac{1}{2})^n \ldots$, in der es ein niederstes Element nicht gibt.

Die Sätze über wohlgeordnete Mengen fließen, wenn man sie bis zum Ursprung zurück verfolgt, aus zwei typischen Anwendungen der Definition. Die erste besteht in folgendem Satz:

XX. Eine wohlgeordnete Menge kann nicht auf eine Teilmenge derart ähnlich abgebildet werden, daß einem ihrer Elemente ein vorangehendes entspricht.

Der Satz nimmt an, daß jedem Element x einer wohlgeordneten Menge ein Element $\varphi(x)$ der Menge entspricht, und behauptet, daß $\varphi(x)$ nicht vor x stehen kann. In der Tat, gäbe es Elemente x, für die $\varphi(x) \prec x$ wäre, so gäbe es ein erstes, a, unter ihnen. Es wäre $\varphi(a) = b$ vor a. Da nun φ eine ähnliche Zuordnung ist, folgt aus $b \prec a$ auch $\varphi(b) \prec \varphi(a)$, d. h. $\varphi(b) \prec b$, im Widerspruch zu der Annahme, daß a das erste Element sei, für das $\varphi(a) \prec a$ sein soll.

Die zweite typische Anwendung besteht in folgendem Satz:

XXI. Es sei M eine wohlgeordnete Menge und S eine Menge, die nicht geordnet zu sein braucht. Zwischen S und M bestehe folgende Beziehung:

1) S enthält das erste Element von M.

2) Enthält S alle Elemente von M, die einem Element x von M vorangehen, so enthält S auch das Element x selbst.

Dann enthält S alle Elemente von M.

Unter allen Elementen von M, die nicht in S enthalten sind, müßte es nämlich ein erstes a geben. Dann enthielte aber S alle Elemente, die a in M vorangehen, mithin a selbst, gegen die

Annahme. Daß a keine Elemente vorangehen, ist durch die erste Voraussetzung ausgeschlossen, wonach S das erste Element von M enthalten soll.

34. Der Satz XXI macht bereits von einer charakteristischen Teilmenge Gebrauch, die wir für jede geordnete Menge definieren können:

Abschnitt einer geordneten Menge M heißt jede eigentliche Teilmenge M' von folgender Eigenschaft: Ist a in M' und $b \prec a$, so ist auch b in M'.

Die Teilmenge aller Elemente, die einem gegebenen Element x vorangehen, ist ein Abschnitt; wir werden ihn künftig mit $A(x)$ bezeichnen und sagen, er sei von x erzeugt. Ein solcher, von einem Element erzeugter Abschnitt steht in folgender Beziehung zu dem erzeugenden Element:

1) Ist $a \prec x$, so ist a in $A(x)$ und umgekehrt.
2) Ist $b \succ a$ für alle Elemente a von $A(x)$, so ist b mit x identisch oder $b \succ x$ und umgekehrt.

Enthält $A(x)$ ein letztes Element p, so gibt es zwischen x und p kein Element; x ist das auf p unmittelbar folgende Element. Enthält $A(x)$ kein letztes Element, so nennt man x den Limes von $A(x)$, da die beiden Beziehungen 1), 2) gerade die charakteristischen Eigenschaften des arithmetischen Limesbegriffs enthalten. (Vgl. hierzu das erste Referat; Kap. IV, Begriff des Limes). Nur ist zunächst nicht gesagt, daß jeder Abschnitt einer geordneten Menge einen Limes haben muß. In der Menge aller rationalen Zahlen zum Beispiel bilden alle Zahlen unterhalb $\sqrt{2}$ einen Abschnitt ohne Limes. Dagegen im Kontinuum, der Menge aller Irrationalzahlen oder Dedekindschen Schnitte, besitzt jeder Abschnitt ohne letztes Element einen Limes. Das

Gleiche gilt von den wohlgeordneten Mengen, denn auf Grund der Definition der Wohlordnung muß es unter allen Elementen, die einem Abschnitt nicht angehören, ein erstes, x, geben[1]. Dieses wieder muß oberhalb aller Elemente des Abschnittes liegen, was sich unmittelbar aus der Definition des Abschnittes ergibt. — Das Kontinuum ist übrigens nicht wohlgeordnet, da es ja die Teilmenge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ enthält, die kein erstes Element besitzt. Dies tritt noch deutlicher hervor durch die folgende Begriffsbildung:

Rest einer geordneten Menge M heißt jede Teilmenge M'' von folgender Eigenschaft: Ist x in M'' und $y \succ x$, so ist auch y in M''.

Die komplementäre Menge eines Restes ist ein Abschnitt und umgekehrt. Ist M' ein Abschnitt, M'' der komplementäre Rest, so wollen wir diese Beziehung durch das Zeichen

$$M = M' + M''$$

ausdrücken, womit zunächst ein Kalkul nicht eingeführt werden soll.

Besitzt ein Rest ein erstes Element x, so soll er mit $R(x)$ bezeichnet werden. Jedes von x verschiedene Element in $R(x)$ ist hinter x geordnet. Besitzt M ein erstes Element e, so ist $M = R(e)$. (In der Definition ist nicht verlangt, daß ein Rest eine eigentliche Teilmenge sein soll).

In einer wohlgeordneten Menge besitzt jeder Rest ein erstes Element, auf Grund der Definition der Wohlordnung. (Das trifft z. B. im Kontinuum nicht zu). Eine Folge davon ist, daß

[1] Der Abschnitt ist hier als eigentliche Teilmenge definiert. Läßt man den Zusatz eigentlich weg, so ist die wohlgeordnete Menge selbst einer ihrer Abschnitte und der einzige ohne Limes.

in einer wohlgeordneten Menge zu jedem Element x ein unmittelbar folgendes x' existiert, so daß zwischen x und x' kein Element der Menge liegt. Im Kontinuum und der Menge aller rationalen Zahlen dagegen liegt zwischen irgend zwei Elementen stets ein drittes, daher unendlich viele. Man sagt dafür, diese Mengen seien **dicht**. Eine wohlgeordnete Menge ist **nicht dicht**.

§ 35. Betrachten wir nun weiterhin ausschließlich wohlgeordnete Mengen, so ist jeder Abschnitt von einem Element erzeugt, das zugleich erstes Element des komplementären Restes ist. Dem ersten Element der Menge ordnen wir einen **fingierten** Abschnitt zu, der mit „**null**", 0, bezeichnet wird, da er kein Element enthält Diese Fiktion erweist sich zweckmäßig zur Beseitigung kleiner Besonderheiten. Der zu 0 komplementäre Rest ist die Menge selbst.

Es sei T eine beliebige Teilmenge von M, die kein Abschnitt ist. Dann definieren wir die Menge $\mathsf{A}(T)$ durch folgende Festsetzung: Ist x ein Element von $\mathsf{A}(T)$, so ist entweder x in T selbst oder es giebt in T ein Element $y \succ x$.

$\mathsf{A}(T)$ besitzt die Eigenschaft: Ist x in $\mathsf{A}(T)$ und $z \prec x$, so ist auch z in $\mathsf{A}(T)$. Daher ist $\mathsf{A}(T)$ ein Abschnitt $A(t)$ von M oder mit M identisch, je nachdem es eigentliche oder uneigentliche Teilmenge von M ist. Ist $\mathsf{A}(T)$ ein Abschnitt, so besitzt es entweder ein letztes Element oder nicht. Im ersten Fall besitzt auch T dieses letzte Element und umgekehrt, natürlich wiederum als letztes, und t ist das unmittelbar folgende Element. Im zweiten Fall ist t der Limes von $\mathsf{A}(T)$ und steht zu T in der folgenden Beziehung:

(1) Ist $s \prec t$, so gibt es in T ein $x \succ s$ und umgekehrt.

(2) Ist $s \succeq t$, so ist $s \succ x$ für jedes x in T und umgekehrt.

Wir nennen daher t wieder den Limes von T selbst[1].

Aus der Definition des Limes geht hervor, daß nicht jedes Element einer wohlgeordneten Menge ein Limes sein kann[2], daß vielmehr die Limeselemente dadurch ausgezeichnet sind, daß sie kein unmittelbar vorangehendes Element besitzen. Doch soll gesagt werden, daß der Limes einer Teilmenge T auf alle Elemente von T unmittelbar folgt. —

XII.

Die trichotome Disjunktion.

§ 36. Die Abschnitte sowohl wie die Reste sind Klassen von Teilen, die jede für sich die Postulate der Teilung und das Postulat der äquivalenten Teile erfüllen. Es gelten nämlich die Sätze:

XXIIa. Der Abschnitt eines Abschnitts ist Abschnitt der Menge selbst. Der Rest eines Restes ist Rest der Menge selbst.

XXIIb. Sind $M \simeq N$ zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen, so gibt es zu jedem Abschnitt von M einen ähnlichen Abschnitt in N, $A(x) \simeq A(y)$, wenn nämlich y das zu x in M zugeordnete Element in N ist. Ebenso ist $R(x) \simeq R(y)$.

Die Disjunktion VIII läßt sich daher sofort für beide speziellen Teilungen im Verein mit der Ähnlichkeit als Vergleichung

---

[1] Analoge Betrachtungen findet man für das Kontinuum im ersten Referat, § 35, beim Beweise des Satzes, daß jede steigende Folge reeller Zahlen einen Limes besitzt. —

[2] Auch hierin ist eine wohlgeordnete Menge vom Kontinuum wesentlich verschieden. Im Kontinuum ist jedes Element Limes aller vorangehenden.

aufstellen: doch sind die Reste wieder unbrauchbar, weil die Disjunktion nicht trichotom wird. Enthält eine Menge ein letztes Element, so auch jeder ihrer Reste, und umgekehrt. Hat daher M ein letztes Element, N keines, so ist kein Rest von M zu N ähnlich und umgekehrt, und es ist auch M zu N nicht ähnlich.

Legen wir dagegen das Abschneiden als Teilung (und die Ähnlichkeit als Vergleichung) zu Grunde, so erweist sich sogleich das Postulat vom Teil und Ganzen erfüllt, das hier folgende Fassung annimmt:

XXIII. Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus XX. Wäre nämlich $M \simeq A(x)$, so entspräche dem Element x in M ein Element y in $A(x)$, es wäre infolgedessen $y \prec x$, was nach XX unmöglich ist.

§ 37. Mit diesem Satz sind sofort die Fragen 1, 2, 4 des Trichotomieproblems beantwortet und es bleibt zur Erledigung der dritten noch der Beweis des Satzes IX zu erbringen, der in der neuen Terminologie wie folgt lautet:

XXIV. Sind M und N zwei wohlgeordnete Mengen und keine einem Abschnitt der anderen ähnlich, so sind beide zueinander ähnlich.

Die Ähnlichkeit besteht in der Existenz einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung, welche die Ordnung erhält. Wir werden diese Zuordnung zwischen M und N aufzusuchen haben. Ist sie gefunden, so muß nach XXIIb zwischen entsprechenden Elementen x in M, y in N die Beziehung

$$(\varphi) \quad A(x) \simeq A(y)$$

bestehen. Diese Beziehung nehmen wir jetzt umgekehrt als Definition der Zuordnung: wir nennen zwei Elemente x, y entsprechend, wenn ihre Abschnitte ähnlich sind. Wir haben alsdann dreierlei zu zeigen: 1) Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig. 2) Sie erhält die Ordnung. 3) Sie ordnet jedem x in M ein y in N zu und umgekehrt.

Wir schicken folgenden Hülfssatz voraus, der unmittelbar aus der Definition des Abschnittes folgt:

XXV. Von zwei Abschnitten derselben Menge ist einer ein Abschnitt des andern: Ist $x' \prec x$, so ist $A(x')$ Abschnitt von $A(x)$.

Nach XXIII folgt daraus sofort:

XXVI. Zwei verschiedene Abschnitte derselben Menge sind nicht ähnlich; d. h. aus $A(x) \simeq A(x')$ folgt $x = x'$.

Nunmehr folgt der Beweis von XXIV.

ad 1) Aus $A(x) \simeq A(y)$, $A(x) \simeq A(y')$ folgt $A(y) \simeq A(y')$ und nach XXVI $y = y'$. Analog aus $A(x) \simeq A(y) \simeq A(x')$: $x = x'$.

ad 2) Vorausgesetzt ist (α) $A(x) \simeq A(y)$. (β) $A(x') \simeq A(y')$. (γ) $x' \prec x$. Zu beweisen ist (δ) $y' \prec y$. Wir bedürfen zum Beweise nur der Voraussetzungen (α) und (γ). Denn aus $x' \prec x$ folgt, daß $A(x')$ ein Abschnitt von $A(x)$ ist, aus XXIIb nach (α), daß $A(y)$ einen Abschnitt $A(y') \simeq A(x')$ besitzt, aus XXIIa, daß $A(y')$ ein Abschnitt von N ist, endlich aus der Definition des Abschnittes, daß $y' \prec y$ ist.

ad 3) Sei S die Menge aller derjenigen Elemente x in M, denen durch (φ) ein Element y in N zugeordnet wird, so haben wir zu zeigen, daß jedes Element von M zu S gehört. Wir beweisen dies nach Satz XXI. S enthält sicher das erste Element von M, denn diesem ist das erste von N zugeordnet, da beider

Abschnitte null sind. Enthält ferner S einen Abschnitt $A(p)$ von M, so enthält es p selbst. Um dieses einzusehen, betrachten wir die Menge A' derjenigen Elemente y in N, die den Elementen x von $A(p)$ entsprechen.

Aus dem Beweise ad 2) folgt: Ist y in A', $y' \prec y$, so ist y' in A' und zwischen den entsprechenden Elementen x, x' besteht die Relation $x' \prec x$. Es ist also erstens $A(p) \simeq A'$ und zweitens A' ein Abschnitt, da es eine eigentliche Teilmenge von N ist. $A' = N$ ergäbe nämlich $N \simeq A(p)$ gegen die Voraussetzung des Satzes.

Da A' ein Abschnitt $A(q)$ von N und $A(p) \simeq A(q)$ ist, ist p in S, was zu beweisen war.

Nach XXI folgt, daß S alle Elemente von M enthält, d. h. (φ) ordnet jedem Element von M eines von N zu. Ebenso beweist man die Umkehrung.

Damit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht, und wir erkennen, daß die Disjunktion VIII trichotom wird: zwischen zwei wohlgeordneten Mengen M, N besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen:

$$M \prec N, \qquad M \simeq N, \qquad M \succ N$$

von denen $M \prec N$ ausgesprochen wird: „M ist niederer oder von niederem Typus als N“, und aussagt, daß N einen zu M ähnlichen Abschnitt besitzt.

38. Der Satz XXIII klärt die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Abschnitten dahin auf, daß jeder Abschnitt niederen Typus hat, als die Menge. Zu beliebigen Teilen steht eine wohlgeordnete Menge in etwas weiterer Beziehung:

XXVII. **Eine Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist nicht von höherem Ordnungstypus als die Menge.**

Wäre nämlich M' eine Teilmenge von M und $M' > M$, so wäre M einem Abschnitt $A'(x)$ von M' ähnlich, es entspräche daher dem Element x in M ein Element y in $A'(x)$, d. h. $y < x$, was nach XX unmöglich.

Daß aber eine Teilmenge von M den gleichen Typus mit M besitzen kann, beweisen die Reste des Typus ω.

Sind $A(x)$ und $A(x')$ zwei Abschnitte derselben Menge und $A(x') < A(x)$, so ist $A(x')$ einem Abschnitt $A(x'')$ von $A(x)$ ähnlich, nach XXVI aber, da $A(x'')$ Abschnitt von M ist, mit $A(x'')$ identisch; d. h. es ist x' in $A(x)$, oder $x' < x$:

XXVIII. **Aus $A(x') < A(x)$ folgt $x' < x$, wenn beide Abschnitte derselben Menge angehören, und umgekehrt.**

Da jedem Element umkehrbar eindeutig ein Abschnitt entspricht, folgt sofort weiter:

XXIX. **Die Menge aller Abschnitte von M ist zu M ähnlich.**

Sind $R(x)$, $R(x')$ zwei Reste einer Menge und $x < x'$, so ist $R(x')$ Rest von $R(x)$, und umgekehrt. Nach XXVII folgt daraus: $R(x')$ ist nicht von höherem Typus als $R(x)$. Ist daher umgekehrt $R(x') > R(x)$, so ist sicher $x' < x$. Die Menge aller Reste von M wird später untersucht werden. Man sieht aber hier bereits, daß die Ordnung der Reste nach ihrem Typus eine völlig andere ist, als die Ordnung nach den erzeugenden Elementen. Insbesondere kann aus $R(x) \sim R(x')$ nicht wie bei den Abschnitten auf die Identität $x = x'$ geschlossen werden, wie der Typus ω beweist.

XIII.

Die transfiniten Zahlen.

§ 39. Ähnliche Mengen sind äquivalent. Jeder Ordnungstypus hat daher eine ganz bestimmte Mächtigkeit, da zwei Mengen, welche den gleichen Ordnungstyp besitzen, von gleicher Mächtigkeit sind.

Für endliche Mengen liegt der Fall besonders einfach. Jeder Ordnungstypus definiert zugleich eine Mächtigkeit, die ihn rückwärts eindeutig bestimmt: Jede endliche Menge kann nur auf eine Art wohlgeordnet weren. In der Tat bezeichnen wir mit dem Zeichen 7 sowohl die Mächtigkeit einer Menge von sieben Elementen wie auch den einzigen möglichen einfach geordneten Typus einer solchen Menge. Georg Cantor unterscheidet diese doppelte Bedeutung als Kardinalzahl und Ordinalzahl. Die Verwendung von Indices: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_7$ bringt den Charakter der Ordinalzahl rein zum Ausdruck. Sagen wir dagegen, eine gewisse Fläche habe sieben Quadratmeter Inhalt, so fungiert sieben als reine Kardinalzahl.

Für unendliche Mengen liegt der Fall wesentlich anders. Zwei verschiedene Ordnungstypen können von gleicher Mächtigkeit sein. Z. B. werden wir sehen, daß die Menge aller wohlgeordneten Typen von gleicher Mächtigkeit selbst eine höhere Mächtigkeit besitzt, als die Typen selbst; insbesondere ist die Menge aller wohlgeordneten abzählbaren Typen nicht abzählbar. Es fallen also, wenn man Mächtigkeiten und Ordnungstypen allgemein als Zahlen bezeichnet, im transfiniten die Begriffe der Kardinal- und Ordinalzahl auseinander.

Es hat sich nun der Gebrauch eingebürgert, die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen als transfinite Zahlen oder Ordnungszahlen zu bezeichnen. Und hierbei fällt auch der Zusatz „transfinit" fort, sowie er sich von selbst versteht. Dagegen wird das Wort „Kardinalzahl" noch wenig gebraucht, und dies aus folgendem Grunde: Die Bezeichnung „Mächtigkeit" ist hinreichend bequem und keines Ersatzes bedürftig. Anderseits wird man die Bezeichnung „Zahl" nicht gerne anwenden, so lange die Möglichkeit der Inkomparabilität nicht ausgeschlossen erscheint. Es würde zu scharf gegen den Sprachgebrauch verstoßen, von inkomparabeln Zahlen zu reden.

Es bilden nun die Mächtigkeiten der wohlgeordneten Mengen eine Klasse von überaus einfachen Eigenschaften; insbesondere sind alle komparabel. Ja, es läßt sich sogar unter gewissen einfachen Annahmen beweisen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, daß also jede Mächtigkeit auch die einer wohlgeordneten Menge ist. Doch ist dieser Nachweis erst in jüngster Zeit in einer ernst zu nehmenden Art und Weise erbracht[1] worden und hat die Terminologie noch nicht beeinflußt. Solange man mit der Möglichkeit rechnen mußte, daß die wohlgeordneten Mächtigkeiten eine besondere Klasse bilden, durfte man sie nicht Kardinalzahlen nennen; die Bezeichnung „wohlgeordnete Mächtigkeit" ist philologisch nicht einwandfrei, eine einwandfreie wäre noch schwerfälliger als diese. Man nennt daher mit Georg Cantor die Mächtigkeit einer transfiniten wohlgeordneten Menge ein „Alef"; dies ist der Name des ersten Buchstaben $\aleph$ des hebräischen Alphabets. Die Menge aller Alefs, die kleiner sind, als ein gegebenes, ist, wie wir sehen werden, wohlgeordnet. Ihre Ordnungszahl α nennt man den Index des gegebenen Alef und bezeichnet dieses danach mit $\aleph_\alpha$. Die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$, die des Typus ω, ist die kleinste trans-

[1] Vergl. Kap. XXX.

finite Mächtigkeit, es gehen ihr daher keine Alefs voran, und sie ist demnach mit $\aleph_0$ zu bezeichnen. —

§ 40. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Ordnungszahlen und werden dabei unsere Sätze stets so formulieren, daß wir nicht von der Menge aller Ordnungszahlen sprechen. Diese Menge enthält nämlich, wie wir später sehen werden, einen unaufgeklärten Widerspruch.

Eine Ordnungszahl μ ist als gegeben anzusehen, wenn eine Menge M bekannt ist, der sie zukommt. Die Aussage, daß eine Menge N nach der Zahl μ oder dem Typus μ wohlgeordnet sei, behauptet dann nichts anderes, als daß N zu M ähnlich ist. Jeder Abschnitt von M repräsentiert eine Ordnungszahl, die niederer als μ ist, und umgekehrt ist jeder Zahl $\nu < \mu$ ein Abschnitt in M eindeutig zugeordnet. Da weiter die Menge aller Abschnitte von M zur Menge M selbst ähnlich ist, sofern 0 mitgerechnet wird, ist die Menge aller Abschnitte von M nach dem Typus μ wohlgeordnet; das heißt aber:

XXX. **Die Menge aller Ordnungszahlen, die μ vorangehen, einschließlich der Null, ist nach dem Typus μ selbst wohlgeordnet.**

Z. B. hat die Menge der Zahlen unter 7:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

den Ordnungstypus 7, die Menge aller Zahlen $n < \omega$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

den Typus ω, und die Menge aller Zahlen unter ω mit ω zusammen bildet den Typus

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots \omega,$$

der mit $\omega + 1$ bezeichnet wird.

Die Menge aller Ordnungszahlen, welche einer Zahl α vorangehen, ist in jeder Menge von Ordnungszahlen, in der sie als echter Teil enthalten ist, ein Abschnitt, und zwar, wenn auch α vorhanden ist, der zu α gehörige Abschnitt. Wir nennen sie daher künftig einfach $A(\alpha)$.

Nunmehr beweisen wir folgende Sätze:

XXXI. In jeder Menge M von Ordnungszahlen gibt es eine erste Zahl.

XXXII. Jede Menge von Ordnungszahlen ist wohlgeordnet.

XXXIII. Zu jeder Menge M von Ordnungszahlen gibt es eine unmittelbar folgende, nicht in ihr enthaltene Zahl μ.

Der zweite Satz ist eine direkte Folge des ersten. Es sei α eine Zahl in M und M' die Teilmenge aller Zahlen von $A(\alpha)$, die zu M gehören. Enthält M' keine Elemente, so heißt das nichts anderes, als daß α erste Zahl in M ist. Gibt es aber Elemente in M', so gibt es unter ihnen ein erstes, β, weil M' Teilmenge von $A(\alpha)$ und $A(\alpha)$ wohlgeordnet ist. Man übersieht ohne weiteres, daß β erstes Element in M ist.

Um XXXIII zu beweisen, bilden wir zunächst eine Menge, welche den Typus μ besitzt. Sie heiße $\mathsf{A}(M)$, und als Element von $\mathsf{A}(M)$ gelte jede Zahl α, die in M selbst enthalten ist, oder zu der es in M eine größere Zahl λ gibt. $\mathsf{A}(M)$ ist mit M identisch, wenn M mit α auch $A(\alpha)$ enthält; denn $\mathsf{A}(M)$ enthält mit jedem seiner Elemente auch alle vorangehenden. Ist daher $A'(\lambda)$ ein Abschnitt in $\mathsf{A}(M)$, so ist $A'(\lambda) = A(\lambda)$ und λ der Ordnungstypus von $A'(\lambda)$.

Nennen wir jetzt μ den Ordnungstypus von $\mathsf{A}(M)$, so ist μ sicher größer als alle Zahlen von $\mathsf{A}(M)$ und damit von M, weil ja jede dieser Zahlen Typus eines Abschnittes von $\mathsf{A}(M)$ ist; und umgekehrt: ist $\lambda \prec \mu$, so ist λ in $\mathsf{A}(M)$ enthalten, denn es gibt zu λ einen ähnlichen Abschnitt $A(\nu)$ in $\mathsf{A}(M)$; wir sahen aber, daß ν dessen Typus selbst, also $\nu = \lambda$ ist. Da es nun zu jeder Zahl λ in $\mathsf{A}(M)$ eine Zahl $\alpha \geqq \lambda$ in M gibt, haben wir damit konstatiert, daß μ auf alle Elemente von M (und übrigens auch $\mathsf{A}(M)$), unmittelbar folgt, w. z. b. w.

Wir können auch hier wie in § 35 zwei Fälle unterscheiden: Besitzt M kein letztes Element, so besitzt μ kein unmittelbar vorangehendes Element und heißt eine „Limeszahl". Besitzt dagegen M (und mit M auch $\mathsf{A}(M)$) ein letztes Element λ, so folgt μ unmittelbar auf λ selbst. Die Menge $\mathsf{A}(M)$ besteht aus den Zahlen in $A(\lambda)$ und aus λ selbst. Da $A(\lambda)$ den Typus λ hat, entsteht der Typus μ von $\mathsf{A}(M)$ aus dem Typus λ durch Hintanfügen eines Elementes; dementsprechend wird μ mit $\lambda + 1$ bezeichnet.

§ 41. Wir betrachten jetzt die Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen, wobei wir es wiederum vermeiden, von der Menge aller dieser Mächtigkeiten zu sprechen.

Sind M und N zwei wohlgeordnete Mengen, so sind sie entweder ähnlich, also auch äquivalent, oder eine ist einem Abschnitt, d. i. einer Teilmenge der andern ähnlich, somit äquivalent: Die Beziehung (Δ) der Disjunktion VIII ist also zwischen wohlgeordneten Mengen ausgeschlossen, alle Alefs sind komparabel.

Da ähnliche Mengen a fortiori gleichmächtig sind, bestimmt jeder Ordnungstypus eine Mächtigkeit, insbesondere jede Ordnungszahl ein Alef. Dabei gelten offenbar folgende Beziehungen:

XXXIV. Ist $\alpha = \beta$, so ist $\alpha \sim \beta$.

XXXV. Ist $\alpha < \beta$, so ist auch $\alpha \prec \beta$, d. h. ist α von geringerer Mächtigkeit als β, so ist auch α niederer als β.

Diese Beziehungen sind nicht umkehrbar. Ist $\alpha \sim \beta$, so kann α gleich, höher oder niederer als β sein, es läßt sich also gar nichts aussagen. Ist dagegen $\alpha \prec \beta$, so ist wenigstens gewiß, daß α nicht von höherer Mächtigkeit als β sein kann. Man kann diese Verhältnisse durch folgende „Verträglichkeitstabelle" darstellen:

	$\alpha \prec \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha \succ \beta$
$\alpha < \beta$	möglich	unmöglich	unmöglich
$\alpha \sim \beta$	möglich	möglich	möglich
$\alpha > \beta$	unmöglich	unmöglich	möglich

Unter allen Ordnungszahlen, welche eine gegebene Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzen, gibt es nach XXXI eine niederste. Wir bezeichnen sie mit Ω_α und nennen sie „die zu $\aleph_\alpha$ gehörige Anfangszahl". Insbesondere ist $\Omega_0 = \omega$ die zu $\aleph_0$ gehörige Anfangszahl.

§ 42. Die Zuordnung zwischen Alef und Anfangszahl ist umkehrbar eindeutig, und es ist daher $\Omega_\alpha \prec \Omega_\beta$, wenn $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ ist. Damit folgt sofort aus XXXI und XXXII:

XXXVI. In jeder Menge von Alefs ist eines das kleinste.

XXXVII. Jede Menge von Alefs ist wohlgeordnet.

Denn zu jeder Menge Alefs ist die Menge der zugehörigen Anfangszahlen ähnlich, und diese ist wohlgeordnet.

Es läßt sich aber auch der Satz XXXIII auf die Mächtigkeiten übertragen. Es sei M eine Menge von Alefs, so betrachten wir die Menge M aller Ordnungszahlen, deren Mächtigkeit entweder in M vorkommt oder kleiner ist als eine der Mächtigkeiten in M.

Die Mächtigkeit von M bezeichnen wir mit $\aleph_\mu$, die Ordnungszahl mit Ω_μ da wir sogleich sehen werden, daß sie die zu $\aleph_\mu$ gehörige Anfangszahl ist. Wir wissen aus den Betrachtungen des vorangehenden Paragraphen. daß Ω_μ auf alle Zahlen, die zu M gehören, unmittelbar folgt. Ω_μ ist daher von höherer Mächtigkeit, als alle Zahlen in M; denn ist λ in M, so ist die Mächtigkeit von λ in M oder niederer als eine in M. Das gleiche gilt von jeder mit λ gleichmächtigen Zahl. so daß Ω_μ mit λ nicht gleichmächtig sein kann. Daher ist $\aleph_\mu$ größer als jedes Alef in M.

Ist andererseits $\aleph_\alpha < \aleph_\mu$, so ist jede Zahl λ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ niederer als Ω_μ, daher in in M enthalten, woraus wieder folgt. daß $\aleph_\alpha$ kleiner oder gleich einer Mächtigkeit in M ist. Damit ist unsere Behauptung erwiesen:

XXXVIII. Zu jeder Menge M von Alefs gibt es eine nicht in ihr enthaltene Mächtigkeit $\aleph_\mu$, die auf alle Alefs in M unmittelbar folgt.

Daß, wie behauptet, Ω_μ eine Anfangszahl ist, ergibt sich nun sofort: Gäbe es eine Zahl λ unter Ω_μ, die mit Ω_μ gleichmächtig wäre. so gehörte sie noch zu M, ihre Mächtigkeit $\aleph_\mu$ oder eine höhere daher zu M, gegen das soeben bewiesene.

Enthält M eine letzte Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, so ist $\aleph_\mu$ die unmittelbar auf $\aleph_\alpha$ folgende und wird konsequenterweise mit $\aleph_{\alpha+1}$ zu bezeichnen sein. Ist dagegen M ohne höchstes Element, so ist μ eine Limeszahl und $\aleph_\mu$ eine Limes-Mächtigkeit.

So ist zunächst $\aleph_0$ der Limes aller endlichen Mächtigkeiten; $\aleph_1$ ist die Mächtigkeit der Menge aller endlichen und abzählbaren Ordnungszahlen; die Ordnungszahl dieser Menge ist zugleich Ω_1. Nimmt man zu dieser Menge die sämtlichen Ordnungszahlen der Mächtigkeit $\aleph_1$ hinzu, so erhält man den Typus Ω_2 und die Mächtigkeit $\aleph_2$. Denkt man sich alle Mächtigkeiten $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_n, \ldots$

mit endlichem Index definiert, so bilden die Ordnungszahlen aller dieser Mächtigkeiten eine Menge vom Typus Ω_ω und der Mächtigkeit $\aleph_\omega$, auf die dann wieder $\aleph_{\omega+1}$ etc. folgt. — Die Gesamtheit aller gleichmächtigen Ordnungszahlen wird als eine „Zahlklasse“ bezeichnet. Abweichend davon faßt man alle endlichen Zahlen zur ersten Zahlklasse zusammen, von da an konsequent die abzählbaren Zahlen zur zweiten, die Zahlen der Mächtigkeit $\aleph_1$ zur dritten Klasse etc.

Die Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse besitzt insbesondere diejenige Eigenschaft, die nach Cantors Vermutung der Mächtigkeit des Kontinuums zukommt:

XXXIX. Eine Menge von Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse selbst.

Hierdurch tritt zu dem Kontinuumproblem die weitere Frage hinzu, ob die Mächtigkeit des Kontinuums ein Alef, insbesondere vielleicht $\aleph_1$ ist. Wir kommen auf diese Frage später zurück.

XIV.

Die Limeszahlen.

§ 43. Ist M eine Menge von Ordnungszahlen, μ die auf M unmittelbar folgende Zahl, so sei A die Menge aller Mächtigkeiten, die zu den Zahlen von M gehören, $\aleph_\alpha$ die auf A unmittelbar folgende Mächtigkeit. Es erhebt sich die Frage, ob und wann $\aleph_\alpha$ die Mächtigkeit von μ ist.

Gibt es in M eine höchste Zahl λ, so ist ihre Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ die höchste Mächtigkeit in A. Es ist daher $\mu = \lambda + 1$, $\aleph_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$. Da nun das Hinzufügen eines Elementes zu einer transfiniten Menge deren Mächtigkeit nicht ändert (§ 23), ist μ mit λ

gleichmächtig; d. h. μ besitzt **nicht** die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, sondern die vorangehende $\aleph_\gamma$.

Wir betrachten demgemäß den Fall, daß es in M keine höchste Zahl gibt. Dann kann es gleichwohl eine höchste Mächtigkeit in A geben. Diesen Fall untersuchen wir zuletzt und nehmen zunächst an, es gebe weder in M noch in A ein letztes Element. Es gibt also zu jeder Zahl in M nicht nur eine höhere schlechthin, sondern auch eine von höherer Mächtigkeit. Danach muß μ von höherer Mächtigkeit sein, als irgend eine Zahl in M; denn wäre λ in M und $\mu \sim \lambda$, so gäbe es $\nu > \lambda$ in M, daher wäre $\nu > \mu$ und daher auch $\nu > \mu$ gegen die Definition von μ.

Da die Mächtigkeit von μ in A nicht vorkommt, ist μ mindestens von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Da aber kein Typus dieser Mächtigkeit zu M gehören kann, ist μ nicht nur genau von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, sondern es ist auch niederste Zahl dieser Mächtigkeit, d. h. es ist $\mu = \Omega_\alpha$.

Nach Erledigung dieser beiden einfachen Fälle betrachten wir eine Menge M von Zahlen **ohne** letztes Element, aber **mit** höchster Mächtigkeit $\aleph_\gamma$. Zunächst beachten wir wieder, daß die Limeszahl μ dieser Menge höchstens gleich $\Omega_{\gamma+1}$ ist, denn diese Zahl ist sicher höher als alle Zahlen in M. Zugleich ist $\Omega_{\gamma+1}$ der Limes aller vorangehenden Zahlen, d. h. Limes der Menge $A(\Omega_{\gamma+1})$. Diese Menge hat den Typus $\Omega_{\gamma+1}$; jede andere Menge, die $\Omega_{\gamma+1}$ zum Limes hat, ist eine Teilmenge von $A(\Omega_{\gamma+1})$; wir schließen daraus, daß M selbst nicht von höherem Typus sein kann, als $\Omega_{\gamma+1}$, und erhalten daraus zwei Unterfälle: Entweder ist M vom Typus $\Omega_{\gamma+1}$, also von der Mächtigkeit $\aleph_{\gamma+1}$, oder von geringerer Mächtigkeit.

Der erste Fall erledigt sich wieder sofort. Ist μ von geringerer Mächtigkeit als $\aleph_{\gamma+1}$, so auch $A(\mu)$ und als Teilmenge von

$A(\mu)$ a fortiori M. Ist daher umgekehrt M von der Mächtigkeit $\aleph_{\gamma+1}$, so ist $\mu = \Omega_{\gamma+1}$.

Der letzte noch mögliche Fall, daß M nicht von höherer Mächtigkeit als $\aleph_\gamma$ ist, kann hier nicht erledigt werden. Er ist aber der wichtigste und von besonderer Bedeutung für die Erzeugungsprinzipien, Kap. XXVI. Wir werden daher im folgenden Kapitel, nachdem der mengentheoretische Kalkul entwickelt ist, den fehlenden Beweis dafür nachholen, daß in diesem vierten Fall der Limes von gleicher Mächtigkeit mit den höchsten Elementen der Menge M ist. In § 44 mag eine kurze Analysis eingefügt werden, die uns zeigen soll, auf welche Frage der Beweis sich konzentriert. Zuvor stellen wir die Resultate zusammen:

XL. Es sei M eine Menge von Ordnungszahlen, μ das unmittelbar folgende Element, $\aleph_\beta$ seine Mächtigkeit, $\aleph_m$ die Mächtigkeit von M.

1. Gibt es in M ein letztes Element λ, so ist $\mu = \lambda + 1$ und $\aleph_\beta$ die Mächtigkeit von λ.

2. Gibt es in M weder ein letztes Element, noch eine höchste Mächtigkeit, so ist $\aleph_\beta$ Limes aller Mächtigkeiten in M und $\mu = \Omega_\beta$.

3. Gibt es in M kein letztes Element, aber eine höchste Mächtigkeit $\aleph_\gamma$, und ist $\aleph_m > \aleph_\gamma$, so ist $\aleph_m = \aleph_\beta = \aleph_{\gamma+1}$, $\mu = \Omega_\beta$ und zugleich M vom Typus μ.

4. (Unbewiesen) Gibt es in M kein letztes Element, aber eine höchste Mächtigkeit $\aleph_\gamma$, und ist $\aleph_m \leqq \aleph_\gamma$, so ist $\aleph_\beta = \aleph_\gamma$.

§ 44. Wir hatten gezeigt, daß μ der Ordnungstypus von $\mathsf{A}(M)$ ist. Wäre $\mathsf{A}(M) = M$, so bedarf es keines ausgeführten Beweises für Satz 4. Schwierigkeiten entstehen erst, wenn $\mathsf{A}(M)$

mehr Elemente enthält wie M. Es sei λ ein Element in $\mathsf{A}(M)$, welches nicht zu M gehört. Dann gibt es in M höhere Zahlen als λ und unter diesen eine erste, die wir $\varphi(\lambda)$ nennen. Wir setzen für die Zahlen ν in M selbst noch $\varphi(\nu) = \nu$.

Die Zahl $\varphi(\lambda)$ ist durch λ eindeutig bestimmt, aber es gilt nicht notwendig das umgekehrte. Alle Zahlen, für die $\varphi(\lambda)$ dieselbe Zahl ν von M bedeutet, fassen wir zu einer Menge $\Phi(\nu)$ zusammen. Jede Zahl λ von $\mathsf{A}(M)$ gehört in eine und nur eine der Mengen $\Phi(\nu)$. Diese bilden daher ein komplementäres Teilsystem von $\mathsf{A}(M)$, und dieses System ist ähnlich zu M. Die Elemente von M zerlegen $\mathsf{A}(M)$ in dieses Teilsystem.

Die Menge $\Phi(\nu)$ ist Teilmenge von $A(\nu+1)$, denn sie besteht nur aus ν und Elementen $\lambda < \nu$. $A(\nu+1)$ hat gleiche Mächtigkeit mit $\nu+1$, also sicher nicht höhere als $\aleph_\gamma$ nach den Voraussetzungen des Falles (4). Somit ist auch die Mächtigkeit von $\Phi(\nu)$ nicht höher als $\aleph_\gamma$.

Der Beweis unserer Behauptung spitzt sich daher auf folgende Frage zu: Gegeben sei eine Menge M' von Mengen Φ; weder die Mächtigkeit von M' noch die einer der Mengen Φ übersteigt $\aleph_\gamma$; kann dann die Mächtigkeit der durch Zusammenfassung aller Mengen Φ entstehenden Menge A höher als $\aleph_\gamma$ sein? Diese Frage muß verneint werden, wenn unsere Behauptung richtig sein soll. Man kann die Antwort auch so formulieren: Ersetzt man in einer Menge M, deren Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteigt, jedes Element ν durch eine Menge $\Phi(\nu)$, deren Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteigt, so ist auch die resultierende Menge nicht von höherer Mächtigkeit. Dieser Prozeß des Einsetzens wird uns im nächsten Kapitel näher beschäftigen. Er ist die Grundoperation, auf der sich der mengentheoretische Kalkul aufbaut. Daß die Behauptung für $\gamma = 0$ zutrifft, behauptet der früher bewiesene Satz, daß eine abzählbare

Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist (§ 19). Um eine Verallgemeinerung der Abzählung des Punktegitters wird es sich daher handeln, wenn wir zum Beweise der aufgestellten allgemeinen Behauptung gelangen wollen.

§ 45. Die Menge $\mathsf{A}(M)$ ist der kleinste Abschnitt, von dem M noch ein Teil ist. Wir wollen umgekehrt M einen „Kern" des Abschnittes $\mathsf{A}(M)$ nennen. Besitzt M ein letztes Element m, so ist auch dieses Kern von $\mathsf{A}(M)$, da jede Zahl unter m zu $\mathsf{A}(M)$ gehört und andererseits jede Zahl von $\mathsf{A}(M)$ unter m liegt, von m selbst abgesehen. Besitzt M kein letztes Element, so sei μ sein Limes, also $\mathsf{A}(M) = A(\mu)$. Wir wollen dann M auch als „Kern von μ" bezeichnen. Der Ordnungstypus eines Kerns einer Limeszahl μ ist sicher selbst eine Limeszahl, da der Kern kein letztes Element besitzt. Man sieht daraus leicht, daß man aus dem Kern M einer Limeszahl μ irgend eine Teilmenge weglassen darf, die nicht einen Rest von M in sich enthält. Es gibt daher in dem Sinne keinen kleinsten Kern von μ, daß nicht noch ein Teil von ihm selbst Kern von μ wäre. Dagegen gibt es unter den Ordnungstypen der Kerne von μ einen kleinsten; denn unter ω gibt es gewiß keinen mehr.

Man pflegt zu beweisen, daß jede Limeszahl von der Mächtigkeit $\aleph_0$ einen Kern vom Typus ω besitzt. Wir können aber leicht allgemein zeigen, daß der niederste Typus eines Kerns einer Limeszahl stets eine Anfangszahl ist. Da kein Kern von μ höhere Mächtigkeit als μ haben kann, — denn der größte Kern $A(\mu)$ hat den Typus μ, — folgt daraus sofort der spezielle Satz über die abzählbare Mächtigkeit, da für diese nur die eine Anfangszahl ω überhaupt in Betracht kommt. Rechnet man übrigens die Eins mit zu den Anfangszahlen, so hat man auch den Fall mit einzuschließen, daß μ keine Limeszahl ist. Dann ist $\mu = \nu + 1$ und ν ein Kern von μ, der aus einer Zahl besteht. Diesen Trivialfall schalten wir sogleich wieder aus.

Es sei also M ein Kern einer Limeszahl μ, $\aleph_\alpha$ seine Mächtigkeit und M von höherem Typus als $\mathring{\Omega}_\alpha$. Wir zeigen, daß es einen Kern von niederem Typus als M gibt. Daß M und Ω_α die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzen, besagt, daß die Zahlen in M den Zahlen vor Ω_α umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. Es sei also λ in M und $\varphi(\lambda)$ die zu λ zugeordnete Zahl unterhalb Ω_α. Die Zuordnung kann nicht ähnlich sein, denn M ist von höherem Typus als Ω_α nach Voraussetzung. Es gibt daher in M gewiß zwei Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2$, für die $\varphi(\lambda_1) > \varphi(\lambda_2)$ ist, und wir können die Existenz einer Teilmenge M'' von M behaupten, die folgende Eigenschaft besitzt:

a) Ist λ in M'', so gibt es in M ein Element $\varrho > \lambda$, für das $\varphi(\varrho) < \varphi(\lambda)$ ist.

Die komplementäre Teilmenge M' besitzt daher die Definition:

b) Ist σ in M', so gibt es unter den Elementen $\varrho > \sigma$ in M kein Element, für das $\varphi(\varrho) < \varphi(\sigma)$ wäre; d. h. aus $\varrho > \sigma$ folgt $\varphi(\varrho) > \varphi(\sigma)$ und demnach aus $\varphi(\tau) < \varphi(\sigma)$ umgekehrt $\tau < \sigma$, wenn nur σ in M' ist.

Auch diese Menge M' existiert gewiß, denn ist $\varkappa$ in M und $\varphi(\varkappa) = 0$, so gibt es überhaupt kein Element ϱ, für das $\varphi(\varrho) < \varphi(\varkappa)$ sein kann.

Nunmehr zeigen wir, daß die auf M' unmittelbar folgende Zahl μ' mit μ übereinstimmen muß. Wäre sie nämlich kleiner, so gäbe es in M Zahlen $\varrho \geqq \mu'$, und diese würden den Rest $R(\mu')$ von M bilden. Den Elementen dieses Restes entsprächen Elemente $\varphi(\varrho)$ von $A(\Omega_\alpha)$, und unter diesen gäbe es ein erstes, $\varphi(\lambda)$, d. h. für jedes Element ϱ in $R(\mu')$ wäre $\varphi(\varrho) \geqq \varphi(\lambda)$.

Da nun alle Zahlen von M' vor μ' liegen, wäre $R(\mu')$ ein Teil von M'', d. h. es gäbe nach (a) zu λ eine Zahl $\varrho \succ \lambda$, für die $\varphi(\varrho) \prec \varphi(\lambda)$ wäre. Da $\varrho \succ \lambda$, gehört ϱ zu $R(\mu')$, es müßte dann aber nach der Definition von λ $\varphi(\varrho) \succ \varphi(\lambda)$ sein, im Widerspruch mit dem zuletzt gesagten. Demnach kann μ' nicht vor μ liegen. Da $\mu' \succ \mu$ von vornherein ausgeschlossen ist, ist $\mu' = \mu$, d. h. M' ein Kern von μ.

Daß aber M' von niederem Typus als M ist, folgt aus (b). Denn da aus $\varphi(\tau) \prec \varphi(\sigma)$ auch $\tau \prec \sigma$ folgt, ist die Abbildung von M' auf die zugehörige Teilmenge von $A(\Omega_\alpha)$ ähnlich. Nach Satz XXVII ist daher

$$M' \leqq \Omega_\alpha$$

und da $\Omega_\alpha \prec M$ nach Voraussetzung, ist $M' \prec M$, w. z. b. w. Zu jedem Kern von μ, der keine Anfangszahl als Typus besitzt, gibt es also einen anderen Kern von niederem Typus, d. h.

XLI. Unter allen Kernen einer Limeszahl haben die von niederstem Ordnungstypus den Typus einer Anfangszahl.

Vierter Teil.

Der mengentheoretische Kalkul.

XV.

Kalkul mit Mächtigkeiten.

§ 46. Bei den Betrachtungen dieses Kapitels wird von der Wohlordnung kein Gebrauch gemacht, sie gelten also auch für ungeordnete Mengen. Es handelt sich hierbei um die Bildung neuer Mengen aus einer Reihe von gegebenen Mengen. Die gegebenen Mengen bilden selbst eine Menge, die zwei, drei, endlich oder unendlich viele Elemente besitzen kann. Handelt es sich um zwei oder drei Elemente, so kann man jedem Element einen besonderen Buchstaben, M, N, P, beilegen. Wird über die Anzahl nichts weiter als die Endlichkeit vorausgesetzt, so zieht man die Bezeichnung durch einen Buchstaben und Indices vor: M_1, M_2, ... M_n. Diese Indices sind Elemente einer abzählbaren Menge $\mathfrak{G}$, gestatten daher auch die Bezeichnung einer abzählbaren Menge von Mengen M_1, M_2, M_n, ... in inf. — Allgemein kann man sich ebenso die Elemente irgend einer Menge durch ein einziges Zeichen und angehängte Indices dargestellt denken, wobei die Indices Elemente einer äquivalenten Menge bilden. Man wird daher von einer Menge N von Mengen M_a, M_b, M_n ... sprechen, wobei a, b, n Elemente einer zu N äquivalenten, sonst keiner Bedingung unterworfenen Menge N' sind. Diese Bezeichnung ist von besonderem Vorteil, wenn alle Mengen M_a, M_b, M_n ... von gleicher Mächtigkeit sind. Es sei dann M eine zu allen äquivalente Menge, a ein Element von M_n, so entspricht ihm ein ganz bestimmtes Element m in M und die Angabe von m und n bestimmt das Element N eindeutig, sodaß man es mit m_n, n_m, (m, n) oder einer ähnlichen Zusammenfassung bezeichnen kann.

Sind die Mengen M_a, M_b, ... nicht alle von gleicher Mächtigkeit, so ist doch der Fall möglich, z. B. wenn alle wohlgeordnet sind, daß es eine Menge M giebt, welche von höherer Mächtigkeit als alle Mengen M_a, M_b etc., vielleicht auch mit einem Teil von ihnen äquivalent ist. Es giebt dann zu jeder Menge M_n eine Abbildung auf eine Teilmenge T_n von M, so daß wiederum jedem Element von x ein Element m von M zugeordnet ist. Auch hier kann x einem Indicespaar (m, n) eindeutig umkehrbar zugeordnet werden, nur entspricht nicht notwendig jedem Indicespaar ein Element x, vielmehr gehört zu jedem Index n eine Teilmenge T_n von Indices m, die mit n kombiniert, Elementen x entsprechen.

§ 47. Wie man aus zwei Mengen M, N Indiceskombinationen (m, n) bilden kann, so kann man auch aus drei, endlich vielen, unendlich vielen Mengen solche Reihen aufstellen. Während aber die Auswahl einer endlichen Anzahl von Indices durch Willkür erfolgen kann, erfordert die Auswahl unendlich vieler Indices ein Gesetz. Doch ist an sich jede unendliche Auswahl logisch möglich, so daß auch diese Erweiterung in Betracht gezogen werden kann. Es ist dann eine Menge M_a, M_b, ... M_n ... von Mengen gegeben; aus jeder ist ein Element x_a, x_b, ... x_n ... auszuwählen. Die Menge dieser Elemente stellt eine Indiceskombination vor. Die ursprünglichen Indices a, b, ... n bilden eine Menge N und jede Indexkombination entsteht dadurch aus N, daß jedes Element, a, b, ... n, ... durch ein Element der zu ihm gehörigen Menge M_a, M_b, ... M_n ... ersetzt wird.

Besonders einfach gestaltet sich der Fall, wenn wieder alle Mengen M_a, M_b, ... M_n ... von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M sind. Dann kann jedes Element x_n von M_n durch ein Indicespaar (m, n) ersetzt werden, und die Indiceskombination x_a, x_b, ... x_n ... sieht so aus: (s, a), (t, b) ... (m, n) ... Man nennt sie eine Belegung von N mit M, denn es ist jedes Element a, b, ... n, ... von N mit einem Element s, t, ... m, ... von M verbunden, „belegt“, wobei die Elemente s, t, ... nicht von einander verschieden zu sein brauchen. Eine Belegung ordnet daher wohl jedem Element von N ein Element von M eindeutig zu, aber nicht jedem Element von M notwendig eines von N und auch nicht notwendig nur eines. Sind M und N miteinander identisch, so ist eine Belegung nichts anderes als eine vollständige Funktion in M. (Kap. VIII).

§ 48. Sei jetzt M_a, M_b, ... M_n, ... eine Menge von Mengen, so definieren wir als Vereinigungsmenge $S = (M_a + M_b + \cdots M_n + \cdots)$ diejenige Menge, welche alle Elemente von M_a, M_b, ... M_n ... und nur diese enthält. Im folgenden werden stets die Mengen M_a, ... M_n ohne gemeinsame Elemente angenommen. Sie bilden daher ein komplementäres System von S.

Es ist ohne weiteres klar, daß die Vereinigungsmenge mit irgendwelcher Ordnung der Menge N der Indices a, b, ... n nichts zu thun hat, ferner, daß sie auch schrittweise erfolgen kann, indem man N selbst in Teilmengen $(a, b, \ldots)$, $(n, p \ldots)$ zerlegt und zunächst $(M_a + M_b + \cdots)$, $(M_n + M_p + \cdots)$ bildet und diese Mengen wieder vereinigt. Für eine endliche Anzahl zu vereinigender Mengen, A, B, C, spricht sich das in den beiden Gesetzen $(A + B) = (B + A)$, $((A + B) + C) = (A + (B + C))$ aus, die man als kommutatives und associatives Gesetz bezeichnet.

§ 49. Sind die Mengen M_a, M_b, ... M_n alle von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M, so nennt man die Vereinigungsmenge auch die Verbindungsmenge von M mit N, $P = (M . N)$. Jedem Element von P ist, wie wir sahen, ein Elementenpaar (m, n) eindeutig zugeordnet und umgekehrt. Man bezeichnet daher wohl auch die Menge aller Elementenpaare (m, n) als die Verbindungsmenge selbst. Da man ein Elementenpaar ebensogut mit (m, n) wie mit (n, m) bezeichnen kann, ist offenbar $(M . N) = (N . M)$. Legt man indessen Wert auf die Reihenfolge, so ist $(M . N)$ nicht identisch mit $(N . M)$, aber äquivalent, da die Elemente der einen denen der andern durch die Vertauschung umkehrbar eindeutig zugeordnet werden.

Verbindet man $(M.N)$ mit einer dritten Menge P, so entsteht die Menge aller Elemententripel (m, n, p), von denen m in M, n in N, p in P enthalten ist. Daraus erkennt man die Gültigkeit des associativen Gesetzes $((M.N).P) = (M.(N.P))$, welches die Verbindung dreier Mengen durch $(M.N.P)$ zu bezeichnen gestattet.

Ist $S = (M+N)$ und x ein Element von $(S.P)$, so ist $x = (s, p)$, wobei s in S, p in P ist. s ist aber nach der Definition von S entweder in M oder in N, d. h. x ist entweder (m, p), d. h. in $(M.P)$ oder (n, p), d. h. in $(N.P)$. Umgekehrt ist auch (m, p) in $(S.P)$, weil m in S, ebenso (n, p) in $(S.P)$, weil n in S. Die Mengen $(S.P)$ und $((M.P)+(N.P))$ sind daher identisch, womit das sogenannte distributive Gesetz ausgesprochen ist: $((M+N).P) = ((M.P)+(N.P))$.

Vereinigung und Verbindung befolgen mithin die formalen Gesetze der Addition und Multiplikation.

§ 50. Als Verbindung irgend einer Menge von Mengen M_a, M_b, ... M_n, ... ist konsequenterweise die Menge aller Indicesreihen x_a, x_b, ... x_n, ... zu bezeichnen, worin x_a aus M_a, x_b aus M_b, x_n aus M_n entnommen ist. Sind insbesondere die Mengen M_a, M_b, ... M_n, ... alle von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M, so ist ihre Verbindungsmenge die Menge aller Belegungen von N und M und wird daher als die Belegungsmenge von N mit M, $B = (M^N)$ bezeichnet. Speziell ist (M^2) die Verbindungsmenge von zwei äquivalenten Mengen M_1, M_2, (M^3) die von dreien, $(M_1.M_2.M_3)$ u. s. f. Wie die Verbindung als wiederholte Vereinigung, erweist sich die Belegung als wiederholte Verbindung. Sie entspricht daher dem Potenzieren. Für sie gilt weder das assoziative noch das kommutative Gesetz, die ja schon für endliche Mengen ungültig sind. Wohl aber erhalten wir zwei distributive Gesetze, die ihr Analogon im Endlichen besitzen, nämlich

$$((M\,.\,N)^P) = ((M^P)\,.\,(N^P))$$
$$(P^{(M+N)}) = ((P^M)\,.\,(P^N)).$$

Der Beweis dieser Gesetze macht keine Schwierigkeiten.

§ 51. Sind M und M', N und N' Paare äquivalenter Mengen, so sind auch $(M+N)$ und $(M'+N')$, $(M\,.\,N)$ und $(M'\,.\,N')$, (M^N) und $(M'^{N'})$ äquivalente Paare, da die Zuordnungen, die M auf M', N auf N' abbilden, auch die drei anderen Paare einander umkehrbar eindeutig in ihren Elementen zuordnen. Man kann daher die drei Operationen als Operationen mit Mächtigkeiten allein ansehen und nennt sie dann einfach Addition, Multiplikation und Potenzierung. Bei der Bezeichnung dieser Operationen benutzt man die gleichen Zeichen, wie bei dem Operieren mit den Mengen selbst, nur läßt man die Klammern nach den üblichen elementaren Regeln weg, soweit es angängig ist. Sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ die Mächtigkeiten von M, N, P, so sind $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ die Mächtigkeiten der Vereinigungs-, Verbindungs- und Belegungsmenge und es gelten die Sätze:

XLII. $\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p}$, $\quad \mathfrak{m}\,.\,(\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n})\,.\,\mathfrak{p}$

XLIII. $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathfrak{n}+\mathfrak{m}$ $\quad \mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{m}$

XLIV. $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p}$, $\quad (\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\,.\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$, $\quad \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\,.\,\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$.

§ 52. Alle drei Operationen haben wir schon kennen gelernt, z. B. ist die Menge der ganzen Zahlen die Vereinigung der Menge der geraden und der der ungeraden Zahlen. Alle drei haben die Mächtigkeit $\aleph_0$, so daß wir finden:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \text{d. h.} \qquad 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

woraus leicht $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ für jedes endliche n folgt.

Sodann bildeten wir beim Punktgitter die Verbindungsmenge von $\mathfrak{G}$ mit sich selbst, d. h. alle Indicespaare (m, n). Da diese Menge wieder abzählbar ist, folgt:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \text{d. h.} \qquad \aleph_0^2 = \aleph_0,$$

und daraus sofort

$$\aleph_0^n = \aleph_0$$

für jedes endliche n.

Ferner bildeten wir in den Kettenbrüchen die Menge aller vollständigen Funktionen in $\mathfrak{G}$, deren Mächtigkeit höher als $\aleph_0$ ist, nämlich die des Kontinuums. Diese Menge ist die Belegungsmenge $(\mathfrak{G}^{\mathfrak{G}})$, d. h. es ist

$$\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0 .$$

Da jede Zahl zwischen 0 und 1 auch durch einen unendlichen Dezimalbruch eindeutig beschrieben ist, ein solcher aber nichts anderes ist, als eine Belegung von $\mathfrak{G}$ mit den zehn Ziffern, ist die Mächtigkeit des Kontinuums auch gleich $10^{\aleph_0}$, und da die Wahl der Zehn als Basis offenbar der Willkür entspringt, auch gleich $n^{\aleph_0}$, worin $n > 1$. Somit ist:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} .$$

§ 53. Die Mächtigkeit $\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}}$ ist ganz allgemein die der Menge aller vollständigen Funktionen, die zu einer Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gehören. Aber auch für die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$ können wir eine einfache Deutung geben. Sei M eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so ist $2^{\mathfrak{m}}$ die Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen von M. Jede Belegung von M mit den Elementen

a, b einer Menge der Mächtigkeit 2 teilt nämlich M in zwei komplementäre Teilmengen M_1, M_2, von denen die eine alle mit a, die andere alle mit b belegten Elemente enthält.

Legt man statt der Zahl 10 die Zahl 2 als Basis der Zahlendarstellung zu Grunde, so erhält man das dyadische an Stelle des dekadischen Zahlsystems. Das dyadische Zahlsystem braucht nur 2 Ziffern, 0 und 1, und in ihm ist jede Zahl zwischen 0 und 1 durch einen dyadischen Bruch, d. h. eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von 2, dargestellt. Z. B.

$$0{,}101101 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{0}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{0}{32} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{45}{64}$$

$$0{,}1010101 \cdots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{128} + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 : \left(1 - \tfrac{1}{4}\right)\right) = \tfrac{2}{3}.$$

Jeder dyadische Bruch ist aber umkehrbar eindeutig einer Teilmenge von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, nämlich den Nummern derjenigen Stellen, die mit einer 1 belegt sind. Das erste Beispiel entspricht der Menge $(1, 3, 4, 6)$, das zweite der Menge aller ungeraden Zahlen.

§ 54. Als letztes Beispiel sei der in § 44 abgebrochene Beweis herangezogen. Es handelte sich um die Menge $\mathsf{A}(M)$, die entsteht, wenn für jedes Element ν von M eine Menge $\Phi(\nu)$ eingesetzt wird. Diese Menge $\mathsf{A}(M)$ ist also die Vereinigungsmenge der Mengen $\Phi(\nu)$, ν ist der Index der Menge $\Phi(\nu)$, M die Menge der Indices. Es war ferner angenommen, daß $\Phi(\nu)$ die Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteige. Sei nun N eine Menge dieser Mächtigkeit, so läßt sich jede Menge $\Phi(\nu)$ einer Teilmenge von N zuordnen, d. h. zu jedem Element x in $\Phi(\nu)$ gibt es in N ein entsprechendes ϱ, so daß jedem Element von $\mathsf{A}(M)$ ein Indicespaar (ν, ϱ) zugeordnet ist. $\mathsf{A}(M)$ ist damit einer Teilmenge von $(M \cdot N)$

äquivalent, seine Mächtigkeit, um deren Bestimmung es sich handelt, nicht höher als das Produkt der Mächtigkeiten von M und N.

Die Bestimmung des Produktes zweier Alefs ist nun Gegenstand der nächsten Kapitel, die sich mit wohlgeordneten Mengen im speziellen beschäftigen. Wir werden in § 77, Satz LXVII sehen, daß das Produkt $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$ gleich $\aleph_\alpha$ ist, wenn $\aleph_\beta$ nicht größer als $\aleph_\alpha$ ist. In unserem speziellen Fall ist M nicht von größerer Mächtigkeit als N, daher $M \cdot N \sim \aleph_\gamma$, somit ist $\mathsf{A}(M)$, d. h. auch der Limes μ der Typen in M nicht von größerer Mächtigkeit. Von geringerer Mächtigkeit kann μ auch nicht sein, da unter den Typen in M solche des $\aleph_\gamma$ vorkommen sollen. Demnach ist μ genau von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$.

XVI.

Kalkul mit Ordnungszahlen.

§ 55. Die Vereinigungsmenge einer endlichen oder unendlichen Reihe von Mengen $M_a, M_b, M_n \ldots$ kann wohlgeordnet werden, wenn jede der Mengen $M_a, M_b \ldots$ und die Menge N der Indices $a, b, \ldots n$ wohlgeordnet ist. Letztere kann insbesondere sofort wohlgeordnet werden, wenn sie endlich ist, so daß für eine endliche Anzahl von Mengen $M_1, M_2 \ldots M_n$ nur angenommen zu werden braucht, daß die Mengen selbst Wohlordnung besitzen.

Es seien x, y zwei Elemente der Vereinigungsmenge. Gehören sie zu derselben Menge M_n, so ist bereits durch deren Wohlordnung eine Ordnung zwischen x und y vorgeschrieben und diese behalten wir bei. Gehören dagegen x und y zu zwei verschiedenen Mengen M_p, M_n, so ist durch die Wohlordnung der Indices eine Ordnung zwischen p und n vorgeschrieben. Diese übertragen wir auf x und y: Ist x in M_p, y in M_n und $p \prec n$, so sei auch $x \prec y$.

Auf diese Art ist zwischen zwei Elementen x, y der Vereinigungsmenge, sofern sie von einander verschieden sind, stets eine der Beziehungen $x \prec y$, $y \prec x$ eindeutig festgelegt. Der Nachweis der Postulate Ic—IIIc sowie der Wohlordnung (§ 33) kann dem Leser überlassen bleiben.

Die so geordnete Vereinigungsmenge bezeichnen wir unter Weglassung der Klammern mit $M_a + M_b + \cdots M_n + \cdots$. Wir beachten, daß das associative Gesetz $A + (B + C) = (A + B) + C$ nach wie vor erfüllt ist, daß dagegen das kommutative seine Gültigkeit verloren hat, weil die Anordnung der Indices wesentlich für unsere Ordnung der Vereinigungsmenge ist.

Sind die Mengen M_a und M_α, M_b und M_β, ... M_n und M_ν ähnlich und ebenso die Indicesmengen $(a, b, \ldots n \ldots)$ und $(\alpha, \beta, \ldots \nu \ldots)$, so sind auch die Vereinigungsmengen ähnlich; dies berechtigt uns, die Operation als eine Vereinigung von Ordnungstypen $\mu_a, \mu_b, \ldots \mu_n \ldots$ aufzufassen. Diese Operation befolgt also das Gesetz:

XLV. $$\mu + (\nu + \varrho) = (\mu + \nu) + \varrho = \mu + \nu + \varrho.$$

Dagegen ist $\mu + \nu$ von $\nu + \mu$ im allgemeinen verschieden. Beachtet man aber, daß $M + N$ und $N + M$ nur verschiedene Ordnungen derselben Menge darstellen, so ergibt sich, wenn auch nicht die Ähnlichkeit, so doch die Äquivalenz von $\mu + \nu$ und $\nu + \mu$:

XLVI. $$\mu + \nu \sim \nu + \mu.$$

§ 56. Sind alle Mengen $M_a, M_b, \ldots M_n \ldots$ ähnlich (nicht nur äquivalent!) zu ein und derselben Menge M, so entspricht jedem Element x der Vereinigungsmenge ein Paar von Indices (m, n), von denen m das zu x zugeordnete Element in M, n der Index der x enthaltenden Menge M_n ist. Zwischen zwei Elementen $x = (m, n)$ $y = (p, q)$ besteht die Beziehung $x \prec y$, wenn entweder $n \prec q$, oder $n = q$, $m \prec p$ ist.

Hiermit ist eine Wohlordnung der Verbindungsmenge $(M \cdot N)$ ausgesprochen, die eine folgerichtige Weiterbildung derjenigen der Vereinigungsmenge vorstellt. Die so geordnete Verbindungsmenge bezeichnen wir mit $M \cdot N$, ihren Typus mit $\mu \cdot \nu$, wenn μ, ν die Typen von M, N sind. Sie besteht aus allen Elementenpaaren $(m, n), m$ in M, n in N, und bei der Ordnung $(m, n) \prec (p, q)$ gibt zuerst die Ordnung zwischen n und q, und erst, wenn $n = q$, die zwischen m und p den Ausschlag. Es befremdet im ersten Augenblick, daß trotzdem in dem Symbol $M \cdot N$ die Menge N, die das erste Kriterium abgibt, an zweiter Stelle steht. Dies ist aber durch gewisse Analogieen mit der Operation $\mu + \nu$ als das zweckmäßigere geboten. (Vgl. § 60).

§ **57.** Bilden wir aus drei Mengen M, N, P die Verbindungsmenge $(M . N) . P$, so ist ihre Ordnung folgendermaßen definiert: Sei $x = (s, p)$, $y = (s', p')$, s, s' in $(M . N)$, p, p' in P, so ist $x \prec y$ erstens, wenn $p \prec p'$, zweitens, wenn $p = p'$, $s \prec s'$. Nun ist aber weiter $s = (m, n)$, $s' = (m', n')$ und $s \prec s'$ erstens, wenn $n \prec n'$, zweitens, wenn $n = n'$, $m \prec m'$. Daraus ergibt sich durch Zusammenfassen: Es ist x definiert durch das Tripel (m, n, p), y durch (m', n', p') und es ist $x \prec y$: erstens, wenn $p \prec p'$; zweitens, wenn $p = p'$ $n \prec n'$; drittens, wenn $p = p'$, $n = n'$, $m \prec m'$.

Hieraus ergibt sich mühelos das associative Gesetz:

$$(M . N) . P = M . (N . P) = M . N . P$$

und das entsprechende für Ordnungstypen

XLVII. $$(\mu . \nu) . \varrho = \mu . (\nu . \varrho) = \mu . \nu . \varrho .$$

Die Menge $M.N$ ist dagegen anders geordnet, als $N.M$, so daß das kommutative Gesetz seine Gültigkeit einbüßt. Da aber die Menge $M.N$ und $N.M$ nur durch die Ordnung unterschieden sind, während sie in den Elementen übereinstimmen, sind sie immerhin äquivalent, d. h. es ist:

XLVIII. $$\mu . \nu \sim \nu . \mu$$

§ 58. Zwischen der Addition und der Multiplikation der Ordnungszahlen besteht ein distributives Gesetz, nämlich

XLIX. $$\varrho(\mu + \nu) = \varrho\mu + \varrho\nu$$

dagegen das zweite nur in der Form

L. $$(\mu + \nu)\varrho \sim \mu\varrho + \nu\varrho.$$

Seien nämlich x, y zwei Elemente von $\varrho(\mu + \nu)$, so sind sie auch Elemente von $\varrho\mu + \varrho\nu$, da beide Mengen nach § 49 aus denselben Elementen bestehen. Wir haben daher nur die Ordnung nachzuprüfen. Nun ist $x = (r, s)$, $y = (r', s')$, r, r' in ϱ, s, s' in $\mu + \nu$. Ist zunächst $s = s'$, so sind beide zugleich in ϱ oder in ν, also x, y beide zugleich in $\varrho\mu$ oder in $\varrho\nu$. Ihre Ordnung ist die von r, r', also die gleiche in $\varrho(\mu + \nu)$ wie in $\varrho\mu + \varrho\nu$. Ist dagegen s von s' verschieden, so sind 3 Fälle möglich, jenachdem beide in μ, in ν, oder eines in μ, eines in ν enthalten sind. In allen dreien übersieht man wiederum leicht die Übereinstimmung der Ordnung in $\varrho(\mu + \nu)$ und $\varrho\mu + \varrho\nu$. Gerade der letzte Fall, s in μ, s' in ν zeigt aber auch, daß die Ordnungen in $(\mu + \nu)\varrho$ und $\mu\varrho + \nu\varrho$ nicht übereinstimmen. Es ist dann nämlich $x = (s, r)$ in $\mu\varrho$, $y = (s', r')$ in $\nu\varrho$, also in $\mu\varrho + \nu\varrho : x \prec y$. In $(\mu + \nu)\varrho$ dagegen richtet sich die Ordnung nach der von r, r', kann daher die umgekehrte sein.

§ 59. Einige einfache Beispiele mögen das vorstehende erläutern. Setzt man einer Menge vom Typus ω ein Element vor, so ändert sich der Typus nicht. Es ist $1 + \omega = \omega$. Dagegen ist $\omega + 1$ ein von ω verschiedener, nämlich der nächst höhere Typus. Es ist also

$$\omega + 1 > 1 + \omega.$$

Ersetzt man weiter jedes Element der Menge $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ vom Typus ω durch k Elemente $a_n, b_n, c_n, \ldots k_n$, so entsteht die Menge vom Typus $k . \omega$:

$$a_1, b_1, \ldots k_1, a_2, b_2, \ldots k_2, a_3, b_3, \ldots k_3, \ldots a_n, b_n, \ldots k_n, \ldots$$

die wieder vom Typus ω ist. Dagegen hat die Menge $\omega . k$ den Typus

$$a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots, \ldots k_1, k_2, \ldots k_n \ldots,$$

ist also von höherem Typus als ω, da der zu b_1 gehörige Abschnitt schon von Typus ω ist. Es ist daher:

$$k . \omega = \omega, \qquad \omega . k > k . \omega. \qquad (k \text{ endlich})$$

Zugleich sieht man, daß $\omega . k$ aus k hintereinandergesetzten Mengen vom Typus ω besteht. Es ist in der Tat allgemein nach dem distributiven Gesetz XLIX:

$$\alpha + \alpha = \alpha(1 + 1) = \alpha . 2, \qquad \alpha . 2 + \alpha = \alpha . 3 \text{ etc.}$$

Daraus folgt für $\alpha = \omega + 1$:

$$(\omega+1).2 = (\omega+1)+(\omega+1) = \omega+(1+\omega)+1 = \omega+\omega+1 = \omega.2+1,$$

d. h. es ist

$$(\omega + 1) . 2 < \omega . 2 + 2$$

Hiermit ist für jedes der nicht gültigen Gesetze ein besonderes Beispiel aufgewiesen.

XVII.

Ungleichungen und Umkehrungen.

§ 60. Aus der Definition von $M + N$ und $\mu + \nu$ geht ohne weiteres hervor, daß M ein Abschnitt von $M + N$ ist, also ist stets:

LI a. $$\mu + \nu > \mu$$

Ist umgekehrt $M \prec S$, so heißt dies, daß S einen zu M ähnlichen Abschnitt M' besitzt. Die zu M' komplementäre Menge sei N, so ist $S = M' + N$. Nennen wir μ, σ und ν die Typen von M, S und N, so folgt aus $\mu \prec \sigma$ die Existenz eines (von Null verschiedenen) Typus ν, für den $\mu + \nu = \sigma$ wird. Dieser Typus ist, wie man sieht, eindeutig bestimmt.

Während der Ordnungstypus eines Abschnittes $A(m)$ das Element m eindeutig bestimmt und zu jedem Typus $\mu' \prec \mu$ auch ein Abschnitt gehört, bestimmt der Typus eines Restes $R(m)$ das Element nicht eindeutig und es gehört nicht zu jedem Typus unter μ ein Rest. Z. B. haben alle Reste des Typus ω wieder den Typus ω. Mit Sicherheit läßt sich also nur sagen, daß der Typus eines Restes nicht höher sein kann, als der der Menge, d. h.

LI b. $$\mu + \nu \geqq \nu.$$

Ist $\alpha \prec \beta$, so ist α ein Abschnitt von β, $\beta = \alpha + \gamma$. Daraus folgt weiter $\mu + \beta = \mu + (\alpha + \gamma) = (\mu + \alpha) + \gamma$, also ist $\mu + \alpha$ ein Abschnitt von $\mu + \beta$. Ebenso folgt $\beta + \mu = \alpha + \gamma + \mu$, daher ist $\alpha + \mu$ eine Teilmenge von $\beta + \mu$, daher sicher nicht höher als $\beta + \mu$:

LI c. Aus $\alpha \prec \beta$ folgt $\mu + \alpha \prec \mu + \beta$ und $\alpha + \mu \leqq \beta + \mu$.

Ferner folgt aus $\beta = \alpha + \gamma$ auch $\mu\beta = \mu(\alpha + \gamma) = \mu\alpha + \mu\gamma$, also $\mu\alpha \prec \mu\beta$. Zugleich wird $\beta\mu = (\alpha + \gamma)\mu$. Das distributive Gesetz läßt sich hier nicht anwenden. Sind aber A, C, M Mengen von den Typen α, γ, μ, so stimmt $A \,.\, M$ in seinen Elementen und ihrer Anordnung mit einer Teilmenge von $(A + C) \,.\, M$ überein, ist daher nach Satz XXVII (§ 38) gewiß nicht von höherem Typus als $(A + C) \,.\, M$. D. h.

LI d. Aus $\alpha \prec \beta$ folgt $\mu\alpha \prec \mu\beta$ und $\alpha\mu \leqq \beta\mu$.

Die Sätze LI c und d enthalten diejenige Analogie, welche in § 56 der Bezeichnung $M \,.\, N$ vor $N \,.\, M$ den Vorzug gab. In beiden

Sätzen ist es die durch das Vorsetzen angedeutete Operation, die aus der Ungleichung wieder eine Ungleichung macht.

Durch logische Umkehrung schließt man aus LIc und d:

LI e. Aus $\mu+\alpha \prec \mu+\beta$, $\alpha+\mu \prec \beta+\mu$, $\mu\alpha \prec \mu\beta$, $\alpha\mu \prec \beta\mu$ folgt stets: $\alpha \prec \beta$. Aus $\mu+\alpha = \mu+\beta$, $\mu\alpha = \mu\beta$ folgt stets $\alpha = \beta$.

§ 61. Die vorangehenden Betrachtungen enthalten bereits den für die Umkehrung der Addition wichtigen Satz:

LII. Ist $\alpha \prec \beta$, so gibt es eine und nur eine Zahl ξ, die der Gleichung $\alpha+\xi = \beta$ genügt.

Wir müssen weiterhin auch die Multiplikation umzukehren versuchen und werden dabei folgendes Resultat finden:

LIII. Ist $\alpha \prec \beta$, so gibt es eine und nur eine Zahl ξ die den Bedingungen $\beta \mathrel{\overline{\succ}} \alpha\xi$ und $\beta \prec \alpha(\xi+1)$ genügt. Sie bestimmt daher eindeutig eine Zahl $\varrho \prec \alpha$, die mit ihr zusammen der Gleichung $\beta = \alpha\xi+\varrho$ genügt.

Zum Beweise dieses Satzes beachten wir, daß jeder Abschnitt des Typus $\mu . \nu$ die Form $\mu\nu'+\mu'$ hat, worin ν' und μ' Abschnitte von ν und μ sind. Sind nämlich M, N zwei Mengen von den Ordnungstypen μ und ν und $x = (m, n)$ ein Element von $M . N$, so besteht der Abschnitt $A(x)$ aus allen Elementen (m', n') für die $n' \prec n$, m' beliebig ist, und aus allen Elementen (m', n), für die $m' \prec m$ ist. Die ersten bilden eine Menge vom Typus $\mu\nu'$, worin ν' der Typus von $A(n)$ in N, die zweiten eine Menge vom Typus μ' von $A(m)$ in M, und da die ersten wegen $n' \prec n$ vor die zweiten geordnet sind, folgt unsere Behauptung.

Nun besteht (nach LI d), wenn $1 \prec \alpha$ angenommen wird, ($\alpha = 1$ gibt den Trivialfall $\beta = 1 . \beta + 0$) die Ungleichung $\beta \mathrel{\overline{\prec}} \alpha\beta$.

Ist $\beta = \alpha\beta$, so ist unser Satz erwiesen, $\xi = \beta$, $\varrho = 0$. Ist $\beta \prec \alpha\beta$, so ist es ein Abschnitt von $\alpha\beta$, also von der Form $\alpha\xi + \varrho$, $\xi \prec \beta$, $\varrho \prec \alpha$.

§ 62. Aus der Darstellung der Abschnitte von $\mu\nu$ folgern wir noch einen einfachen Satz über die Reste von $\mu\nu$, der analog zu beweisen ist:

LIV. Jeder Rest von $\mu\nu$ hat die Form $\sigma + \mu\tau$, worin σ Rest von μ und $1 + \tau$ Rest von ν ist.

Ist nämlich $\mu\nu' + \mu'$ der zu dem gegebenen Rest ϱ komplementäre Abschnitt, so ist $\mu = \mu' + \sigma$, σ der zu μ' komplementäre Rest. $\nu = \nu' + (1 + \tau)$, $1 + \tau$ der zu ν' komplementäre Rest. (Da ein Rest mindestens ein Element enthält, nämlich dasjenige, zu dem er gehört, so ist der kleinste mögliche Rest sicher vom Typus 1, so daß sicher jeder Resttypus auf die Form $1 + \tau$ gebracht werden kann. Im allgemeinen wird τ auch ein Resttypus sein, er kann aber auch 0 sein und ist dann gewiß kein Rest.) Um nun zu zeigen, daß ϱ die Form $\sigma + \mu\tau$ hat, bilden wir die Vereinigung von ϱ mit seinem Abschnitt und sehen, daß dieselbe $\mu\nu$ ergibt. In der Tat ist

$$(\mu\nu' + \mu') + (\sigma + \mu\tau) = \mu\nu' + (\mu' + \sigma) + \mu\tau = \mu\nu' + \mu + \mu\tau$$
$$= \mu(\nu' + 1 + \tau) = \mu\nu.$$

Damit ist LIV bewiesen. Wir ziehen daraus einen einfachen Schluß. Wenn eine Menge ein letztes Element besitzt, so ist dieses ein Rest vom Typus 1. Wenn nun $\mu\nu$ ein letztes Element hat, so muß es möglich sein, σ und τ so zu bestimmen, daß $1 = \sigma + \mu\tau$ wird. Wäre $\sigma \succ 1$, so wäre a fortiori $\sigma + \mu\tau \succ 1$. Daher kann nur $\sigma = 1$ sein, denn da es Rest von μ ist, kann σ nicht den fiktiven Abschnittstypus 0 haben. Aus $1 = 1 + \mu\tau$ folgt aber weiter $0 = \mu\tau$, also $\tau = 0$, demnach $1 + \tau = 1$. Es haben also

μ und ν je einen Rest vom Typus 1, d. h.: Besitzt $\mu\nu$ ein letztes Element, so auch μ und ν einzeln. —

§ 63. Sei β eine beliebige unendliche Ordnungszahl, so läßt sie sich nach LIII auf die Form $\omega . \xi + \varrho$ bringen, worin $\varrho \prec \omega$, d. h. endlich ist. Ist ϱ nicht null, so besitzt daher β ein letztes Element. Besitzt umgekehrt β kein letztes Element, so ist $\beta = \omega . \xi$, d. h. eine Limeszahl.

LV. Ein Limestypus ändert sich nicht, wenn jedes seiner Elemente durch eine endliche Anzahl von Elementen ersetzt wird.

Der Satz ist bereits im Kapitel VI, § 17 für den Typus ω bewiesen worden, nur daß die Fassung des Satzes XV die Ordnung nicht betont, da es sich dort lediglich um die Mächtigkeit handelt. Der Beweis des Satzes bringt aber bereits die Unveränderlichkeit des Ordnungstypus klar zum Ausdruck. Auch überzeugt man sich, ohne zurückzugreifen, leicht, daß jeder Abschnitt desjenigen Typus, der aus ω durch das Einsetzen endlicher Mengen entsteht, wieder endlich, der Typus selbst also wieder ω ist.

Wie nun die Gleichung $\beta = \omega \xi$ zeigt, ist β die Vereinigungsmenge einer Menge $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots$ von Typen ω, deren Indices den Typus ξ bilden. Da keine einzige dieser Mengen ihren Typus ändert, wird auch der Typus von β durch das Einsetzen endlicher Mengen für jedes Element nicht geändert, was zu beweisen war.

Eine noch einfachere Betrachtung zeigt, daß durch das Vorsetzen einer endlichen Anzahl n von Elementen kein Typus, der unendlich ist, geändert wird. Es gilt offenbar zunächst von ω, denn die Abschnitte von $n + \omega$ sind alle endlich, was bereits im vorigen Kapitel für $1 + \omega = \omega$ gezeigt war. Ist nun $\beta \succ \omega$, so ist $\beta = \omega + \varrho$, also $n + \beta = n + (\omega + \varrho) = (n + \omega) + \varrho = \omega + \varrho = \beta$.

Hieraus läßt sich folgern, daß auch $n+\beta \sim \beta$ ist, ein Satz, der bereits für alle transfiniten Mengen in Kap. VII bewiesen ist (Satz XVIII). Überhaupt lassen sich an dieser Stelle bereits eine ganze Anzahl von Resultaten über Mächtigkeiten ableiten. Wir hatten in § 19 gesehen, daß das Punktgitter die Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Die Typen $\omega \cdot \omega$ und ω sind also von gleicher Mächtigkeit. Ist nun $\beta = \omega \cdot \xi + \varrho$, so ist nach XLVI $\beta \sim \varrho + \omega \cdot \xi$, und da ϱ endlich ist: $\beta \sim \omega \cdot \xi$. Nun ist weiter $\xi = \omega \cdot \eta + \sigma$ und analog $\xi \sim \omega \cdot \eta$. Setzt man andererseits ξ in $\beta \sim \omega \cdot \xi$ ein, so wird: $\beta \sim \omega \cdot \omega \cdot \eta \sim (\omega \cdot \omega) \cdot \eta \sim \omega \cdot \eta \sim \xi$. D. h.: Ist $\beta = \omega \cdot \xi + \varrho$, so ist auch $\beta \sim \xi$. Das gleiche folgt auch aus einem Ansatz $\beta = \xi \cdot \omega$, denn es wird $\xi \cdot \omega \sim \omega \cdot \xi \sim \xi$ nach Satz XLVIII. Diese Betrachtungen führen aber nicht zu einem allgemeinen Satz über das Produkt zweier Alefs.

XVIII.

Die Hauptzahlen.

§ 64. Als **Hauptzahl** oder **Haupttypus** definieren wir eine Zahl, die allen ihren Resten gleich ist.

Es gibt eine und nur eine endliche Hauptzahl, nämlich 1. Sie besitzt nur ein Element, also nur einen Rest, und der besteht aus diesem einen Element. Unter den unendlichen Typen ist sicher ω ein Haupttypus.

Ist h eine Hauptzahl, $\alpha \prec h$, so ist α ein Abschnitt von h, daher nach der Definition

$$h = \alpha + h.$$

Diese Gleichung kann umgekehrt als Definition der Hauptzahl gelten. Denn sie sagt aus, daß α ein Abschnitt von h, also sicher $\alpha \prec h$ ist, und daß der zugehörige Rest wieder den Typus h hat.

Zugleich aber sehen wir aus ihr, daß ein Haupttypus sich nicht ändert, wenn man einen niederen Typus voransetzt. Z. B. ist für endliche n stets $n+\omega = \omega$.

Ist weiterhin $\alpha \prec h$, so ist nach LIII $h = \alpha k + \varrho$, $\varrho \prec \alpha$, also $\varrho \prec h$; dies ist nur möglich für $\varrho = 0$, sonst wäre ϱ ein Rest von h, also gleich h und nicht niederer. Daraus folgt:

Ein Haupttypus ist Multiplum jedes niederen Typus,

$$h = \alpha k.$$

k ist wieder ein Haupttypus. Denn wäre $k = \beta + k'$, $k' \prec k$, so folgte durch Multiplikation mit α: $h = \alpha k = \alpha\beta + \alpha k'$ und $\alpha k' \prec \alpha k$, i. e. $\alpha k' \prec h$, gegen die Definition von h.

Zugleich gilt die Umkehrung: Ist k ein unendlicher Haupttypus, so auch αk. Nach LIV hat nämlich jeder Rest von αk die Form $\sigma + \alpha\tau$, worin $1+\tau$ Rest von k, also $1+\tau = k$, und da k unendlich, $\tau = k$. Nun ist $\sigma + \alpha k$ als Rest von αk sicher nicht höher, nach LI b aber auch sicher nicht niederer, demnach gleich αk, d. h. αk ist ein Haupttypus.

Daß für den endlichen Haupttypus 1 der Satz nicht gilt, ist klar, da $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

§ 65. Ist α eine beliebige Zahl, so ist $\alpha\omega$ ein Haupttypus und $\alpha\omega \succ \alpha$ nach LI d, es gibt also über α Haupttypen. Unter diesen ist einer der niederste, nämlich $\alpha\omega$ selbst: Sind k und h Haupttypen über α und $k \prec h$, so ist zunächst nach dem vorigen Paragraphen $k = \alpha k'$, $h = \alpha h'$, und aus $\alpha k' \prec \alpha h'$ folgt nach LI e: $k' \prec h'$. Da weiter k' und h' Haupttypen sind und ω der niederste unendliche, ist $\alpha\omega \preceq h$, wenn h ein Haupttypus über α ist, d. h. $\alpha\omega$ ist der auf α unmittelbar folgende Haupttypus.

Es gibt aber auch unter allen Haupttypen unterhalb α einen höchsten, falls α nicht selbst ein Haupttypus ist. Dies beweisen wir auf Grund folgenden Satzes:

LVI. Der Limes einer Menge von Hauptzahlen ist selbst eine Hauptzahl.

Nehmen wir ihn zunächst als bewiesen an, so sei α ein Typus, unterhalb dessen ein höchster Haupttypus nicht existiert. Dann sei k der Limes aller Haupttypen $h \prec \alpha$, und es ist $k \overline{\underline{\prec}} \alpha$ nach dem Limesbegriff. Da nach LVI k selbst ein Haupttypus ist, ist $k \prec \alpha$ ausgeschlossen, weil ja dann k selbst zu den Typen gehörte, deren Limes er sein soll. Es ist also $\alpha = k$, d. h. α ein Haupttypus. Und ist α kein Haupttypus, so muß es demnach unter den Haupttypen $h \prec \alpha$ einen höchsten geben; diesen nennen wir den höchsten in α enthaltenen Haupttypus oder schlechtweg den „höchsten Haupttypus von α". Diese Begriffsbestimmung dehnen wir auf den Fall aus, daß α ein Haupttypus ist; wir nennen dann α selbst seinen höchsten Haupttypus. Das Resultat fassen wir in folgendem Satz zusammen:

LVII. Zu jeder Zahl α gibt es eine Hauptzahl h, die folgenden Bedingungen genügt:

$$h \overline{\underline{\prec}} \alpha \prec h\omega, \qquad h\omega = \alpha\omega.$$

Nun bleibt noch der Beweis zu LVI nachzutragen. Wäre der Limes H einer Menge M von Haupttypen h kein Haupttypus, so besäße H einen Rest von niederem Typus, d. h. es wäre $H = \alpha + \beta$, $\beta \prec H$. Da eo ipso $\alpha \prec H$, gäbe es in M einen Typus h, für den $\alpha \prec h$, $\beta \prec h$, daher $\alpha + \beta \prec \alpha + h$ wäre. Da h ein Haupttypus, wäre $\alpha + h = h$, also $H \prec h$ gegen die Definition von H. H ist also ein Haupttypus.

§ 66. Da nach § 63 (Schluß) $h \sim h\omega$ und $\alpha \sim \alpha\omega$, folgt sogleich $\alpha \sim h$ aus $h\omega = \alpha\omega$, d. h.

LVIII. Eine transfinite Zahl hat die Mächtigkeit ihres größten Haupttypus.

und daraus:

LIX. Jede Anfangszahl ist eine Hauptzahl.

Denn sonst ginge ihr ein Haupttypus gleicher Mächtigkeit voran, sie wäre also keine Anfangszahl. Es gibt also zu jeder Mächtigkeit Hauptzahlen.

§ 67. Ganz analog wie die Alefs kann man nun auch alle Haupttypen durch einen Buchstaben, etwa h, mit einer Ordnungszahl α als Index bezeichnen, wobei α der Typus der Menge aller vor h_α gelegenen Hauptzahlen ist. Danach ist zunächst $1 = h_0$, $\omega = h_1$, $\omega \cdot \omega = h_2$, allgemein

(1) $$h_{\alpha+1} = h_\alpha \cdot \omega = h_\alpha \cdot h_1$$

und ferner (2) $h_\alpha \prec h_\beta$ wenn $\alpha \prec \beta$ und umgekehrt.

Für diese Indices gilt nun der Satz:

(3) $$h_\alpha \cdot h_\beta = h_{\alpha+\beta}.$$

Es sei nämlich α beliebig, $\beta = 1$, so gilt (3) nach (1). Sei weiterhin ξ die erste Zahl, für die $h_\alpha \cdot h_\xi$ von $h_{\alpha+\xi}$ verschieden ist, so ist entweder $h_\alpha h_\xi \prec h_{\alpha+\xi}$ oder $h_\alpha h_\xi \succ h_{\alpha+\xi}$.

Nun ist $h_\alpha h_\xi$ sicher ein Haupttypus und höher als h_α, also $h_\alpha h_\xi = h_{\alpha+\eta}$. Im ersten Fall, $h_\alpha h_\xi \prec h_{\alpha+\xi}$, folgt danach $h_{\alpha+\eta} \prec h_{\alpha+\xi}$, woraus nach (2) und (LId, e) $\eta \prec \xi$, $h_\eta \prec h_\xi$, $h_\alpha h_\eta \prec h_\alpha h_\xi$, endlich $h_\alpha h_\eta \prec h_{\alpha+\eta}$ folgt, gegen die Annahme, daß für alle Zahlen unter ξ (3) gültig sein soll.

Andererseits ist $h_{\alpha+\xi}$ sicher höher als h_α, also $h_{\alpha+\xi} = h_\alpha \cdot h_\zeta$, woraus im zweiten Fall successive folgt: $h_\alpha h_\xi \succ h_\alpha h_\zeta$, $h_\xi \succ h_\zeta$,

$\xi \succ \zeta$, $\alpha + \xi \succ \alpha + \zeta$, $h_{\alpha+\xi} = h_\alpha h_\xi \succ h_{\alpha+\zeta}$, wiederum gegen die Definition von ξ.

Demnach ist (3) allgemein gültig, d. h. die Indices besitzen die charakteristische Eigenschaft der Exponenten. Da nun $h_1 = \omega$, $h_2 = \omega \cdot \omega = \omega^2$, $h_3 = \omega^2 \cdot \omega = \omega^3$ u. s. f., so bezeichnen wir allgemein den Haupttypus vom Index α mit ω^α und haben damit alle Potenzen des Typus ω definiert.

§ 68. Diese Definition ist nicht nur formal, sondern auch sachlich vollkommen verschieden von der der Mächtigkeitspotenz. Dies möge an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Die Typen ω, ω^2, ω^3, ... sind nichts anderes als Vereinigungsmengen von $\mathfrak{G}$ mit sich selbst, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^2$, $\mathfrak{G}^3$, u. s. f. Speziell ist jedes Element von ω^2 ein Indexpaar (m, n); ω^3 ist die Menge aller Indicestripel (m, n, p), worin m, n, p ganze Zahlen und die Ordnung der Elemente die bereits früher definierte ist.

Betrachten wir nun den Limes aller Typen ω^n für endliches n. Es ist, da alle Haupttypen sind, $\omega^2 = \omega + \omega^2$, $\omega^3 = \omega + \omega^2 + \omega^3$, $\omega^n = \omega + \omega^2 + \cdots \omega^n$ u. s. f., daher der Limes gleich $\omega + \omega^2 + \omega^3 \cdots$ in inf. Dieser Typus ist nach der Definition des Exponenten mit ω^ω zu bezeichnen. Jedes seiner Elemente ist in einem Typus ω^n mit endlichem n enthalten, daher durch eine endliche Anzahl ganzer Zahlen darstellbar, da ihm n Indices in ω^n entsprechen. Nach dem Satz der endlichen Bezeichnung[1] ist somit ω^ω ein abzählbarer Typus, während $\aleph_0^{\aleph_0}$ als die Mächtigkeit des Kontinuums erkannt war.

Es ist leicht, die Menge $\mathfrak{G}$ direkt nach dem Typus ω^ω zu

[1] Jedes Element ist durch die 10 Ziffern und ein Trennungszeichen zur Unterscheidung der n Indices, etwa ein Komma, darstellbar.

ordnen. Jede ganze Zahl läßt sich nämlich eindeutig in eine endliche Anzahl n von Primfaktoren zerlegen. Die Reihe der Primzahlen hat selbst den Typus ω, weil sie einerseits Teilmenge von $\mathfrak{G}$, andererseits unendlich ist, was schon Euklid bewies.

Sind nun p, q zwei ganze Zahlen, so denken wir beide in ihre Primfaktoren gespalten und diese der Größe nach geordnet. Ist die Zahl der Faktoren in q größer, als in p, so ordnen wir p vor q. Ist sie gleich, so suchen wir in p den ersten Primfaktor, der von dem entsprechenden in q verschieden ist und ordnen die Zahlen nach der Größe dieser Primfaktoren. Hiernach entsteht folgender Ordnungstypus:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... | 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, ... | 9, 15, 21, 33, 39, 51, ... | 25, 35, 55, 65, 85, 95, ... | 49, 77, 91, ... | 121, 143, 187, ... | .... | ...

| 8, 12, 20, 28, ... | 18, 30, 42, 66, ... | 50, 70, 110, ... | ... | ... | 27, 45, ... | 75, 105, 165, ... | ... | ...

u. s. w.

Voran steht die Reihe der Primzahlen; ihr folgt die Reihe der Zahlen von der Form $2p$, p eine Primzahl $\geqq 2$, dieser $3p$, $p \geqq 3$, $5p$, $p \geqq 5$ u. s. f. Sodann folgt die Reihe $2 \cdot 2p$, $p \geqq 2$, $2 \cdot 3p$, $p \geqq 3$, $2 \cdot 5p$, $p \geqq 5$, u. s. f. Weiter $3 \cdot 3p$, $p \geqq 3$, $3 \cdot 5p$, $p \geqq 5$ etc. Der Typus ist ω^ω; seine Abzählbarkeit ist evident.

In ähnlicher Weise kann man die Menge der Rationalzahlen zwischen 0 und 1 nach dem Typus ω^ω ordnen. Denn jeder Rationalzahl entsprechen die (in endlicher Anzahl vorhandenen) Nenner ihrer Kettenbruchentwicklung, die ein n-tupel ganzer Zahlen bilden. Dabei erhielte man die Anordnung:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}, \frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \ldots \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2+\frac{1}{3}}, \frac{1}{2+\frac{1}{4}}, \ldots, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}, \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}, \ldots \text{ etc.}$$

XIX.

Die Cantorsche Normalform.

§ 69. Den Betrachtungen des folgenden Kapitels stellen wir folgenden allgemeinen Satz voran:

LX. Wenn jede Teilmenge einer geordneten Menge M sowohl ein erstes wie ein letztes Element besitzt, so ist M endlich[1].

Denn zunächst ist M wohlgeordnet, daher mit ω komparabel hinsichtlich der Ähnlichkeit. Wäre aber $M \succ \omega$, so wäre der zu ω ähnliche Abschnitt, und wäre $M \simeq \omega$, so jeder Rest von M eine Teilmenge ohne letztes Element. Daher ist $M \prec \omega$, d. h. einem Abschnitt von ω ähnlich, also endlich.

[1] Diese Eigenschaft endlicher Mengen ist ein fruchtbares Ergebnis der mengentheoretischen Untersuchungen. Auf sie stützen sich eine ganze Reihe der schönsten Vereinfachungen zahlentheoretischer Betrachtungen, die man in neuerer Zeit ausgedacht hat. Vgl. Kap. XXVII.

Daraus folgt sofort weiter:

LXI. **Seien M, N zwei wohlgeordnete Mengen und umkehrbar eindeutig so aufeinander abgebildet, daß aus $m \prec m'$ in M zwischen den entsprechenden Elementen $\varphi(m), \varphi(m')$ in N die Ordnung $\varphi(m) \succ \varphi(m')$ folgt, so sind beide endlich.**

Sehen wir zunächst von der Wohlordnung ab und betrachten eine Teilmenge M' von M und die entsprechende $N' = \varphi(M')$ in N. Besitzt M' ein erstes Element m, so ist $\varphi(m)$ letztes in N', weil aus $m \prec m'$ für jedes m' in M' $\varphi(m) \succ \varphi(m')$ für jedes Element $\varphi(m')$ von N' folgt. Ist also M wohlgeordnet, so besitzt jede Teilmenge von N ein letztes Element, zugleich aber ein erstes, wenn auch N wohlgeordnet ist, woraus nach LX die Behauptung folgt.

§ 70. Nunmehr beweisen wir sogleich, als Anwendung von LXI, folgenden Satz:

LXII. **Die Menge aller Ordnungszahlen, welche Reste einer gegebenen Ordnungszahl sein können, ist endlich.**

Sei nämlich ϱ der Typus eines Restes $R(a)$ einer wohlgeordneten Menge M, und a unter allen Elementen von gleichem Resttypus das erste[1]. Es ist durch ϱ eindeutig bestimmt, ebenso umgekehrt ϱ durch a. Die Menge R der Resttypen ϱ ist als Menge von Typen wohlgeordnet, die Menge A der Elemente a als Teilmenge von M. Sind ϱ, σ Elemente in R, a, b die entsprechenden in A, so ist $\varrho \simeq R(a)$, $\sigma \simeq R(b)$. Daher folgt aus $\varrho \prec \sigma$ sogleich

[1] Es genügt für den Beweis, daß es ein bestimmtes sei. Das erste wird gewählt um keine willkürliche Auswahl anzuwenden.

$R(a) < R(b)$ und nach § 38 (Schluß) $a > b$. Nach LXI sind daher A und R endlich.

Der höchste unter den Typen ϱ ist der Typus μ der Menge selbst. Der niederste und nur dieser ist ein Haupttypus. Denn ist $\sigma < \varrho$, so ist σ ein Rest von ϱ, also ϱ kein Haupttypus. Und ist σ der niederste Typus in R, so ist jeder seiner Reste als Rest von σ nicht höher, als Resttypus in M nicht niederer wie σ, also ähnlich zu σ, d. h. σ ist ein Haupttypus. R enthält daher dann und nur dann ein einziges Element, wenn der Typus von M ein Haupttypus ist.

§ 71. Es sei μ ein beliebiger Typus, der kein Haupttypus ist. h der höchste in μ enthaltene Haupttypus, ϱ unter den von μ verschiedenen Resten von μ der höchste. Daß es einen höchsten gibt, folgt aus LXII. Dann ist $\mu = h + \varrho$.

Zum Beweise nennen wir σ den zu h gehörigen Rest von μ und zeigen, daß es keinen höheren Resttypus in μ geben kann, außer μ selbst. Sei nämlich $\mu = \alpha + \beta$ und $\beta > \sigma$. Wäre $\alpha > h$, so wäre $\alpha = h + \gamma$, $\mu = h + \gamma + \beta$ und wegen $\mu = h + \sigma$ nach LIe: $\sigma = \gamma + \beta$ gegen $\beta > \sigma$. Also ist $\alpha < h$, $h = \alpha + h$, da h ein Haupttypus nach Voraussetzung. Damit wird $\mu = h + \sigma = \alpha + (h + \sigma)$, d. h. nach LIe: $h + \sigma = \beta$, $\beta = \mu$, w. z. b. w. Dieser Beweis zeigt zugleich, daß h unter allen Abschnitten, die dem größten Resttypus ϱ komplementär sind, der niederste ist.

Es ist noch leicht zu zeigen, daß der größte Haupttypus h' von ϱ nicht höher wie h sein kann. Denn dann wäre $\varrho = h' + \varrho'$, $\mu = h + h' + \varrho'$ und wegen $h < h'$: $h + h' = h'$, d. h. $\mu = h' + \varrho'$; dies geht sowohl gegen die Annahme $h' > \mu$ wie gegen $\mu > \varrho$.

Die Ergebnisse dieser Betrachtungen fassen wir zusammen:

LXIII. Es sei h der höchste Haupttypus, ϱ der von

μ verschiedene höchste Resttypus von μ, so ist $\mu = h + \varrho$, und jeder andere Typus ξ, der der Gleichung $\mu = \xi + \varrho$ genügt, ist höher als h, d. h. der höchste Haupttypus ist zu dem nach μ selbst höchsten Resttypus ϱ der kleinste komplementäre Abschnittstypus, und ϱ enthält keinen höheren Haupttypus wie μ selbst.

§ 72. Es seien jetzt $\varrho_0 > \varrho_1 > \varrho_2 \ldots > \varrho_n$ die Resttypen von μ; h_k sei der höchste Haupttypus von ϱ_k, speziell also h_0 der höchste von $\mu = \varrho_0$ selbst und $h_n = \varrho_n$. Dann ist

$$\varrho_0 = h_0 + \varrho_1,\ \varrho_1 = h_1 + \varrho_2,\ \ldots\ \varrho_n = h_n, \text{ also } \mu = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots h_n,$$

und in dieser Reihe ist kein Haupttypus höher als ein vorangehender.

Diese Zerlegung eines beliebigen Typus in eine endliche Reihe nicht steigender Haupttypen ist die Cantorsche Normalform. Da jeder Typus seinem vorangehenden oder folgenden gleich sein kann, läßt sich diese Normalform noch etwas vereinfachen. Es sei etwa $h_{k-1} > h_k = h_{k+1} = h_{k+2} = h_{k+r-1} > h_{k+r}, \ldots$ und $h_k = \omega^\alpha$, so kann man den Teil $h_k + h_{k+1} + \cdots h_{k+r-1}$ zu $\omega^\alpha . r$ zusammenfassen und findet somit:

LXIV. Jede transfinite Ordnungszahl μ läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Form

$$\mu = \omega^{\alpha_0} . r_0 + \omega^{\alpha_1} . r_1 + \cdots \omega^{\alpha_m} . r_m$$

bringen, worin $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_m$ Ordnungszahlen, r_0, $r_1 \ldots r_m$ und m natürliche (endliche, ganze) Zahlen sind.

Diesen Satz kann man noch durch eine kürzere Betrachtung ableiten, die aber einer Definition durch Induktion[1] bedarf, auf die ich im Allgemeinen verzichtet habe. Sei nämlich ω^{α_0} der höchste Haupttypus h_0 von μ, so ist nach LIII $\mu = h_0 . r_0 + \varrho_0$, worin $\varrho_0 \prec h_0$ und $r_0 \prec \omega$; letzteres, weil $h_0 \prec \mu \prec h_0 \omega$ ist.

Durch den gleichen Schluß findet man weiter $\varrho_0 = h_1 . r_1 + \varrho_1$, $\varrho_1 = h_2 r_2 + \varrho_2$ etc., und hat dann zu zeigen, daß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einem Ende führt, was aus dem Charakter $h_0 \succ h_1 \succ h_2 \ldots$ der Reihe der Haupttypen folgt, in der ein niederstes Element vorhanden sein muß.

§ 73. Wenn man aus irgendwelcher Reihe von Haupttypen, deren Anzahl n endlich sein soll und unter denen beliebig viele gleich sein können, die Summen in den verschiedenen möglichen Reihenfolgen bildet, so ist deren Anzahl endlich, es gibt also einen höchsten Typus, der durch Summation aus ihnen gebildet werden kann. Dieser höchste Typus wird sicher erhalten, wenn die Reihenfolge so gewählt wird, daß kein Typus vor einem höheren steht[2]. Diese Reihenfolge ist eindeutig bestimmt, wenn wir die Vertauschung zweier ähnlicher Typen nicht als Veränderung der Anordnung mitrechnen. Da nämlich die Anzahl der gegebenen Typen endlich ist, findet sich ein höchster, h_0 unter ihnen; es können noch eine gewisse Anzahl ähnlicher Typen vorhanden sein; diese Anzahl sei r_0, ihre Summe ist, unabhängig von der Anordnung, gleich $h_0 . r_0$ und muß zuvorderst gestellt werden, wenn h_0 nicht hinter einen niederen Typus kommen soll. Unter den übrigen Typen sei h_1 der höchste und komme r_1 mal vor. Dann muß $h_1 r_1$ unmittelbar hinter

[1] D. h. einer Definition der Typen $h_0, h_1, \ldots$ bei der die Definition eines jeden die des vorangehenden voraussetzt.

[2] Da ein Haupttypus jeden niederen vorangestellten Typus in sich aufnimmt.

$h_0 r_0$ stehen, u. s. f., d. h. die gesuchte Anordnung, in der kein Typus vor einem höheren steht, sieht so aus: $h_0 r_0 + h_1 r_1 + \cdots h_m r_m$. (Die Anzahl n aller gegebenen Typen ist $r_0 + r_1 + \cdots r_m$). Diese Summe nennen wir die natürliche Summe der gegebenen Menge von Typen. Jede andere Anordnung liefert einen gleichgebildeten Ausdruck, in dem aber ein Teil der Coefficienten $r_0, r_1 \ldots r_m$ kleinere Werte hat, weil Typen, die vor höheren Typen stehen, verschwinden. Beispielsweise ist die niederste Summe

$$h_m . r_m + h_{m-1} . r_{m-1} + \cdots h_0 . r_0 = h_0 . r_0,$$

da h_0 alle vorangehenden Typen als Haupttypus in sich aufnimmt.

Die Cantorsche Normalform stellt also einen Typus μ als natürliche Summe einer endlichen Reihe von Haupttypen dar. Daß diese Darstellung nur auf eine Weise möglich ist, ging aus der Herleitung der Cantorschen Normalform zur Genüge hervor, wird sich aber im folgenden nochmals bestätigen, wobei zugleich klar wird, daß jede andere Summe einer Haupttypenreihe niederer ist als die natürliche.

§ 74. Es seien

$$\mu = \omega^{\alpha_0} r_0 + \omega^{\alpha_1} r_1 + \cdots \omega^{\alpha_m} r_m$$
$$\nu = \omega^{\beta_0} s_0 + \omega^{\beta_1} s_1 + \cdots \omega^{\beta_n} s_n$$

zwei Typen in der Cantorschen Normalform. Es soll entschieden werden, welcher von beiden der niedere ist.

Jeder Haupttypus von ν findet sich entweder unter denen von μ vor, oder er steht der Höhe nach zwischen zwei Typen von μ, oder er steht der Höhe nach vor, oder endlich hinter allen. Wir können demnach eine Reihe $h_0 \succ h_1 \succ \ldots \succ h_k$ von Haupttypen nennen, die alle Haupttypen von μ und alle von ν enthält und keine andern. Sind in ν Haupttypen, die nicht in μ vorkommen, so fügen wir sie zu μ mit dem Faktor 0 hinzu, und umgekehrt, so daß μ, ν eine gemeinsame Darstellung

$$\mu = h_0 . m_0 + h_1 . m_1 + \cdots h_k . m_k$$
$$\nu = h_0 . n_0 + h_1 . n_1 + \cdots h_k . n_k$$

erhalten. Ist beispielsweise $\omega^{\beta_0} \prec \omega^{\alpha_0}$, d. h. $\beta_0 \prec \alpha_0$, so ist $h_0 = \omega^{\alpha_0}$ und $n_0 = 0$, $m_0 = r_0$ etc.

Um nun zu entscheiden, welcher der Typen μ, ν der höhere ist, suchen wir in der Reihe der Koefficienten $m_0, m_1, \ldots m_k$ den ersten, der von dem darunterstehenden der Reihe $n_0, n_1, \ldots n_k$ verschieden ist. Es kann schon m_0 selbst sein, aber ebensogut ein späterer. Wenn alle Koefficienten gleich wären, so wäre ja $\mu = \nu$.

Sei nun m_t dieser erste Koefficient und die Bezeichnung so gewählt, daß $m_t \succ n_t$ ist. Dann ist m_t mindestens gleich $n_t + 1$, also $m_t \succeq n_t + 1$. Da alle vorangehenden gleich sein sollen, wird, wenn $h_0 m_0 + \cdots h_{t-1} m_{t-1} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\mu = \alpha + h_t . m_t + \mu'$$
$$\nu = \alpha + h_t . n_t + \nu'$$

und hierin ist gewiß $\nu' \prec h_t$, nach der Definition von h_t. Nun erhalten wir nach LI folgende Reihen von Ungleichungen: erstens aus:

$$m_t \succeq n_t + 1:$$
$$h_t m_t \succeq h_t (n_t + 1)$$
$$\alpha + h_t m_t \succeq \alpha + h_t n_t + h_t$$
$$\text{(a)} \qquad \alpha + h_t m_t + \mu' \succeq \alpha + h_t n_t + h_t,$$

zweitens aus

$$h_t \succ \nu':$$
$$\text{(b)} \qquad \alpha + h_t n_t + h_t \succ \alpha + h_t n_t + \nu',$$

und aus (a, b) $\mu \succ \nu$. Über die Ordnungsbeziehung der Zahlen μ, ν entscheidet also vollständig das erste nichtübereinstimmende Koefficientenpaar. Daraus folgt sofort die Eindeutigkeit der Cantorschen Darstellung sowie die Behauptung über die natürliche Summe.

XX.

Die natürliche Summe.

§ 75. Es seien wieder μ, ν zwei Typen in der gemeinsamen Darstellung:

$$\begin{aligned} \mu &= h_0 . m_0 + h_1 . m_1 + \cdots h_k . m_k \\ \nu &= h_0 . n_0 + h_1 . n_1 + \cdots h_k . n_k \end{aligned}$$

Dann definieren wir als die natürliche Summe $\mu \# \nu$ dieser beiden Typen den Typus

$$\mu \# \nu = h_0 (m_0 + n_0) + h_1 (m_1 + n_1) + \cdots h_k (m_k + n_k).$$

Wenn μ, ν Haupttypen sind, so stimmt diese Definition mit der vorhin für Haupttypen gegebenen überein.

Die natürliche Summe ist aus den Elementen der beiden Typen zusammengesetzt, also nichts anderes als die Vereinigungsmenge in neuer Anordnung. Wir finden daher die Äquivalenz:

LXV. $$\mu + \nu \sim \mu \# \nu.$$

Man erkennt leicht, daß die natürliche Summe kommutativ, daß sie von höherem Typus als jeder der Summanden ist, und daß jeder der beiden Summanden durch den anderen eindeutig bestimmt ist, Eigenschaften, die die Bezeichnung dieser Summe als der „natürlichen“ rechtfertigen.

Nun ist folgender Satz von Bedeutung:

LXVI. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Zahlenpaaren, die eine vorgeschriebene natürliche Summe ergeben.

In der Tat, soll $\mu \# \nu = \sigma$ sein, so heißt das für die Cantorschen Normalformen

$$\mu = h_0 m_0 + h_1 m_1 + \cdots h_k m_k$$
$$\nu = h_0 n_0 + h_1 n_1 + \cdots h_k n_k$$
$$\sigma = h_0 s_0 + h_1 s_1 + \cdots h_k s_k:$$

Es soll $m_0 + n_0 = s_0$, $m_1 + n_1 = s_1$, $\ldots$ $m_k + n_k = s_k$ sein. Nun sind die Koefficienten endliche Zahlen. Die erste Gleichung besitzt daher $s_0 + 1$ Lösungen, nämlich

$$0 + s_0,\ 1 + (s_0 - 1),\ 2 + (s_0 - 2),\ \ldots\ s_0 + 0,$$

analog die zweite $s_1 + 1$, die letzte $s_k + 1$. Die Anzahl aller Lösungen ist danach eine endliche Zahl s,

$$s = (s_0 + 1)(s_1 + 1) \ldots (s_k + 1),$$

die wir die Höhe von σ nennen. Hierbei sind noch zwei Lösungen als verschieden gerechnet, wenn sie lediglich durch die Stellung $\mu \# \nu$, $\nu \# \mu$ unterschieden sind. Falls auf diesen Unterschied kein Wert gelegt wird, reduziert sich die Anzahl der Lösungen noch auf $s:2$ oder $(s+1):2$.

§ 76. Nachdem wir eine neue Anordnung der Vereinigungsmenge aufgestellt haben, gehen wir dazu über, auch die Verbindungsmenge neu zu ordnen. Es seien μ, ν die Ordnungstypen zweier wohlgeordneter Mengen M, N; da M und N nach Satz XXX (§ 40) den Mengen aller Ordnungszahlen vor μ und ν ähnlich sind, denken wir sie uns von vornherein durch diese ersetzt. Die Verbindungsmenge $(M.N)$ besteht alsdann (§ 49) aus allen Zahlenpaaren (α, β), worin $\alpha \prec \mu$, $\beta \prec \nu$ ist und die Paare (α, β), (β, α) als verschieden zu gelten haben.

Jedes Zahlenpaar (α, β) hat eine bestimmte natürliche Summe $\gamma = \alpha \# \beta$, und alle Paare von gleicher natürlicher Summe γ

fassen wir zu einer Menge L_γ zusammen. Diese Menge ist nach Satz LXVI des vorigen Paragraphen endlich und kann daher sofort wohlgeordnet werden, etwa durch die Festsetzung, daß $(\alpha_1, \beta_1) \prec (\alpha_2, \beta_2)$ sein soll, wenn $\alpha_1 \prec \alpha_2$ ist.

Die Mengen L_γ ihrerseits bilden die Elemente einer Menge S, und diese ordnen wir nach dem Index γ ihrer Elemente. Da der Index eine Ordnungszahl ist, ist die Ordnung von S eine Wohlordnung. (Satz XXXII, § 40).

Die Verbindungsmenge $(M.N)$ ist nun die Vereinigungmenge aller Mengen L_γ und daher nach den Ausführungen des § 55 durch folgende Festsetzung wohlgeordnet: Es ist $(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta')$, erstens, wenn $\alpha \# \beta \prec \alpha' \# \beta'$, zweitens, wenn $\alpha \# \beta = \alpha' \# \beta'$ und $\alpha \prec \alpha'$ ist. In dieser Wohlordnung bezeichnen wir die Verbindungsmenge mit $M \times N$ und ihren Typus mit $\mu \times \nu$.

§ **77.** Es sei σ der Ordnungstypus von S. Wir bringen ihn auf die Form $\omega . \sigma' + \varrho$, worin ϱ eine endliche Zahl, insbesondere die Null ist, falls S kein letztes Element besitzen sollte. (§ 61) Die Menge $M \times N$ entsteht aus S, indem jedes Element L_γ von S durch eine endliche Anzahl von Elementen, nämlich die zu L_γ gehörigen Zahlenpaare (α, β) ersetzt wird. Hierdurch ändert sich nach Satz LV (§ 63) der Typus $\omega . \sigma'$ als Limeszahl überhaupt nicht und ϱ als endlicher Typus höchstens um eine endliche Zahl $\varkappa$, d. h. es ist

(a) $$\mu \times \nu = \sigma + \varkappa, \quad (\varkappa \prec \omega),$$

und da eine endliche Zahl die Mächtigkeit nicht beeinflußt, (Satz XVIII, § 23):

(b) $$\mu \times \nu \sim \sigma.$$

Aus den Ungleichungen

$$\alpha \prec \mu, \ \beta \prec \nu$$

folgt nun, was ohne Mühe zu übersehen ist, die Ungleichung

$$\alpha \# \beta \prec \mu \# \nu.$$

Da somit die Zahlen $\gamma = \alpha \# \beta$, welche die Ordnung der Elemente L_γ von S definieren, alle unterhalb von $\mu \# \nu$ liegen, kann der Ordnungstypus von S nicht höher sein als der aller Zahlen unter $\mu \# \nu$ (Satz XXVII, § 38), d. h. es ist (Satz XXX, § 40):

(c) $$\sigma \overline{\overline{\prec}} \mu \# \nu.$$

Hiernach aber ist σ und wegen (b) auch $\mu \times \nu$ gewiß nicht von höherer Mächtigkeit als $\mu \# \nu$ (§ 41).

Beachtet man jetzt, daß $\mu \times \nu$ eine Ordnung der Verbindungsmenge, $\mu \# \nu$ der Vereinigungsmenge ist und daß daher auch $\mu \# \nu$ nicht höhere Mächtigkeit wie $\mu \times \nu$ besitzen kann, so erkennt man, daß die Vereinigungsmenge und die Verbindungsmenge gleichmächtig sind; d. h. es ist allgemein

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta.$$

Diese Mächtigkeit wird uns aber durch den Typus $\mu \# \nu$ sofort angegeben. Der höchste, in $\mu \# \nu$ auftretende Haupttypus tritt nämlich sicher in dem größeren der beiden Typen μ, ν als höchster Haupttypus auf, was aus dem Bildungsgesetz von $\mu \# \nu$ hervorgeht. Andererseits bestimmt er die Mächtigkeit. Ist daher $\mu \succ \nu$ oder $\mu = \nu$, so ist $\mu \# \nu \sim \mu$, woraus wir auf die Alefs sofort weiter schließen:

LXVII. Ist $\aleph_\alpha$ höher oder gleich $\aleph_\beta$, so ist

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha.$$

Insbesondere ist $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$ für endliches n.

Hiermit ist ein wesentliches Ziel dieser Ausführungen erreicht, nämlich die Durchführung des Beweises zu Satz XL, 4:

Ist M eine Menge von Typen, deren Mächtigkeiten $\aleph_\alpha$ nicht übersteigen, und ist auch M nicht von höherer Mächtigkeit, so gilt das gleiche von dem zugehörigen Limes. Der Beweis ist in § 56 unter Vorwegnahme des Satzes LXVII bereits zu Ende geführt.

Der Satz LXVII ist nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein zuerst von Herrn Georg Cantor bewiesen worden, doch ist eine Veröffentlichung des Cantorschen Beweises bisher nicht erfolgt. In jüngster Zeit hat mir Herr Zermelo einen Beweis mitgeteilt, der von dem hier gegebenen wesentlich verschieden ist und demnächst an anderer Stelle erscheinen wird.

XXI.

Potenzen und ε-Zahlen.

§ 78. Es seien zwei Typen μ, ν in der Cantorschen Normalform gegeben. Gesucht ist ihre Summe $\mu + \nu$, und zwar ebenfalls in der Normalform.

Es sei k der größte Haupttypus in ν, $\nu = k + \varrho$. Ist dann $\mu < k$, so folgt $\mu + \nu = \nu$. Findet sich dagegen der Typus k in der Normaldarstellung von μ, so läßt sich μ in zwei Teile $\mu' + \mu''$ zerlegen, so daß $\mu'' < k$, $\mu' \geqq k$ wird, und es ist $\mu + \nu = \mu' + \nu$.

Sei insbesondere $\mu = \nu$, so bringen wir μ auf die Form $k . m + \varrho$, worin $\varrho < k$ und m wegen $k < \mu < k\omega$ niederer als ω, d. h. eine endliche Zahl ist. Es wird $\mu + \mu = k . m + \varrho + k . m + \varrho$ und darin ist $\varrho + k . m = k . m$, da k ein Haupttypus, also $\mu + \mu = k . m . 2 + \varrho$. Weiterhin folgt $\mu + \mu + \mu = k . m . 2 + \varrho + k . m + \varrho = k . m . 3 + \varrho$, endlich $\mu + \mu + \cdots \mu = \mu . n = k . mn + \varrho$, falls $n > 0$ ist.

Hiermit ist gezeigt, wie ein Typus mit einer endlichen Zahl multipliziert wird. Das Produkt $\mu\omega$ war schon früher berechnet, und ergab sich als $k\omega$. Damit sind wir in den Stand gesetzt allgemein $\mu \cdot \nu$ zu berechnen. Wir bringen ν auf die Form $\nu = \omega \cdot \nu' + r$, worin $r < \omega$, d. h. endlich ist. Nach dem distributiven Gesetz wird $\mu\nu = \mu\omega\nu' + \mu r = k\omega\nu' + \mu r$. Diese Zerlegungen ergeben sich alle unmittelbar aus der Normalform selbst und die Durchführung der Rechnung liefert sogleich die Summen und Produkte wieder in der Normalform. Dies läßt sich auch leicht durch Formeln zum Ausdruck bringen. Sei

$$\mu = \mu_0 m_0 + \mu_1 m_1 + \cdots \mu_\varrho m_\varrho + m$$

$$\nu = \nu_0 n_0 + \nu_1 n_1 + \cdots \nu_\sigma n_\sigma + n.$$

Hierin bedeuten $\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_\varrho$, $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_\varrho$ unendliche Haupttypen, m, n etwa vorhandene vielfache des Haupttypus 1. Fehlen sie, so sind m, n gleich 0 zu setzen.

Ist $\mu_0 < \nu_0$, so ist $\mu + \nu = \nu$, ist $\mu_0 > \nu_0$, so sei $\mu_{\varkappa-1}$ der niederste Typus über ν_0, $\mu_\varkappa = \nu_0$. Es wird

$$\mu + \nu = \mu_0 m_0 + \cdots \mu_{\varkappa-1} m_{\varkappa-1} + \nu_0 (m_\varkappa + n_0) + \nu_1 n_1 + \cdots + n.$$

Ferner wird

$$\mu\nu = (\mu_0 \nu_0) n_0 + (\mu_0 \nu_1) n_1 \cdots (\mu_0 \nu_\sigma) n_\sigma + \mu \cdot n,$$

und falls $n > 0$ ist, entwickelt sich noch das letzte Glied wie folgt:

$$\mu\nu = (\mu_0 \nu_0) n_0 + (\mu_0 \nu_1) n_1 + \cdots (\mu_0 \nu_\sigma) n_\sigma + \mu_0 (m_0 n) + \mu_1 m_1 + \cdots + m.$$

Diese Formel ist für $n = 0$ ungültig. — Da μ_α, ν_β Haupttypen, sind es auch ihre Produkte, und sie bilden eine fallende Reihe, denn aus $\nu_0 > \nu_1 > \nu_2 \cdots > \nu_\sigma$ folgt $\mu_0 \nu_0 > \mu_0 \nu_1 \cdots > \mu_0 \nu_\sigma$, und aus $\nu_\sigma > 1$ folgt $\mu_0 \nu_\sigma > \mu_0$. Endlich ist $\mu_0 > \mu_1 \cdots > 1$ nach Voraussetzung. Das Produkt $\mu\nu$ ist also in der Normalform dargestellt. Man schließt daraus sogleich, daß der höchste

Haupttypus eines Produktes gleich dem Produkt der höchsten Haupttypen der Faktoren ist.

Setzt man insbesondere $\mu = \nu$, so ist der höchste Haupttypus von μ^2 gleich μ_0^2, der von $\mu^2 . \mu = \mu^3$ gleich $\mu_0^2 . \mu_0 = \mu_0^3$, allgemein für jedes endliche n: Der höchste Haupttypus von μ^n ist gleich μ_0^n.

§ 79. Die Potenz μ^α ist von Georg Cantor durch eine Induktionsdefinition gebildet worden. Da wir bereits ohne Induktion die Potenzen von ω definiert haben, sind wir in der Lage, auch μ^α ohne Induktion für alle höheren Typen zu definieren [1]. Es sei μ_0 der höchste Haupttypus von μ und $\alpha = \omega\alpha' + a$, $a \prec \omega$, d. h. endlich; $\omega\alpha'$ bezeichnen wir mit β und definieren als α-te Potenz von μ die Zahl

(1) $$\mu^\alpha = \mu_0^\beta . \mu^a .$$

Der erste Faktor ist Potenz eines Haupttypus $\mu_0 = \omega^m$. Diese definieren wir als $\omega^{m\beta}$ und überzeugen uns sofort von der Identität

(2) $$\mu_0^\beta . \mu_0^\delta = \mu_0^{\beta+\delta} .$$

Es ist nämlich die linke Seite gleich $\omega^{m\beta} . \omega^{m\delta} = \omega^{m\beta+m\delta}$ und weiter nach dem distributiven Gesetz gleich $\omega^{m(\beta+\delta)}$ oder nach Definition gleich $\mu_0^{\beta+\delta}$.

Der zweite Faktor in (1) hat einen endlichen Exponenten und ist als ein endliches Produkt bereits definiert.

Wir haben nun zu zeigen, daß

(3) $$\mu^\alpha . \mu^\gamma = \mu^{\alpha+\gamma} .$$

---

[1] Die Definition der unendlichen Potenzen endlicher Typen hat keine Bedeutung.

Zu diesem Zweck zerlegen wir γ in $\omega\gamma' + c = \delta + c$, so wird $\mu^\gamma = \mu_0^\delta . \mu^c$ und die linke Seite zu $\mu_0^\beta . \mu^\alpha . \mu_0^\delta . \mu^c$. Das mittlere Produkt $\mu^\alpha . \mu_0^\delta$ ist aber gleich $\mu_0^\alpha \mu_0^\delta$, weil einerseits μ_0^α der höchste Haupttypus von μ^α ist und andererseits μ_0^δ als Haupttypus keinen endlichen Rest besitzt. Nach (2) wird damit

$$\mu^\alpha . \mu^\gamma = \mu_0^{\beta+\alpha+\delta} . \mu^c = \mu_0^{\alpha+\delta} . \mu^c.$$

Andererseits wird $\alpha + \gamma = \alpha + \delta + c$, wobei c der endliche Rest von $\alpha + \gamma$ ist, also $\mu^{\alpha+\gamma} = \mu^{\alpha+\delta} . \mu^c$, womit (3) bewiesen ist. Zugleich ergiebt sich, daß auch für transfinite Potenzen stets μ_0^α der höchste Haupttypus von μ^α ist.

Von weiteren Eigenschaften der Potenz ergiebt sich jetzt

$$(\mu^\alpha)^\beta = \mu^{\alpha\beta} \tag{4}$$

sofort für die endlichen β aus (3). Ist β transfinit, so sei b sein größter endlicher Rest und $\beta = \gamma + b$, Dann ist nach (1):

$$(\mu^\alpha)^\beta = (\mu_0^\alpha)^\gamma . (\mu^\alpha)^b.$$

Hierin ist μ_0 ein Haupttypus ω^m, nach Definition daher $\mu_0^\alpha = \omega^{m\alpha}$ und $(\mu_0^\alpha)^\gamma = (\omega^{m\alpha})^\gamma = \omega^{m\alpha\gamma} = \mu_0^{\alpha\gamma}$. Für den zweiten Faktor ist $(\mu^\alpha)^b = \mu^{\alpha b}$ bewiesen. Somit folgt weiter

$$(\mu^\alpha)^\beta = \mu_0^{\alpha\gamma} \mu^{\alpha b}.$$

Von diesem Ausdruck ist zu zeigen, daß er gleich $\mu^{\alpha\beta}$ ist. Nun ist $\alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha b$, also $\mu^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha\gamma} . \mu^{\alpha b}$. Da $\alpha\gamma$ keinen endlichen Rest hat, weil γ keinen besitzt, ist $\mu^{\alpha\gamma} = \mu_0^{\alpha\gamma}$, womit der Beweis für (4) erbracht ist.

§ 80. Durch Multiplikation zweier Typen gelangt man nicht zu höheren Mächtigkeiten. Es fragt sich nun, ob die Potenz α^β vielleicht eine höhere Mächtigkeit als α und β zugleich besitzen kann. Diese Frage muß verneint werden. Dem Beweis (§ 84) schicken wir eine längere Betrachtung voraus.

LXVIII. Ist M eine Menge von Typen λ, μ ihr Limes, und α ein bestimmter Typus, so ist:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \lim(\alpha+\lambda) &&= \alpha+\mu \\ &\text{b)}\ \lim(\mu\lambda) &&= \alpha\mu \\ &\text{c)}\ \lim \alpha^{\lambda} &&= \alpha^{\mu}. \end{aligned}$$

Am leichtesten ist der erste zu beweisen. Ist $\alpha \prec \nu \prec \alpha+\mu$, so ist $\nu = \alpha+\nu'$ und $\nu' \prec \mu$ also niederer als ein λ, danach $\nu \prec \alpha+\lambda$. Zugleich ist wegen $\mu \succ \lambda$ auch $\alpha+\mu \succ \alpha+\lambda$, also ist $\alpha+\mu$ unter allen Typen über $\alpha+\lambda$ der erste.

Der Beweis des zweiten Satzes wird am kürzesten nach LIII geführt. Jeder Abschnitt von $\alpha\mu$ hat die Form $\alpha\mu'+\alpha'$, $\mu' \prec \mu$, $\alpha' \prec \alpha$. Da $\mu' \prec \mu$, existiert in M ein $\lambda' \succ \mu'$. Da es in M kein letztes Element geben soll, giebt es weiter ein Element $\lambda \succ \lambda'+1$ in M, und nunmehr folgt: $\alpha\mu' \prec \alpha\lambda'$, $\alpha\mu'+\alpha' \prec \alpha\lambda'+\alpha' \prec \alpha\lambda'+\alpha = \alpha(\lambda'+1) \prec \alpha\lambda$. Zu jedem Abschnitt von $\alpha\mu$ gibt es daher unter den Zahlen $\alpha\lambda$ eine höhere. Da andererseits nach $\mu \succ \lambda$ auch $\alpha\mu \succ \alpha\lambda$ ist, ist $\alpha\mu$ unter allen Typen über $\alpha\lambda$ der niederste.

Hierbei ist wesentlich, was für a) nicht in Betracht kommt, daß in M wirklich kein höchstes Element existiert. In der Tat, bestände z. B. M aus allen Typen $\lambda \prec 7$, so wäre $\mu = 7$, gleichzeitig aber das auf die Typen 3λ folgende Element nicht $3.7 = 21$ sondern 19. Das gleiche kommt im nächsten Beweis zur Geltung.

Um c) zu beweisen, beachten wir zunächst, daß μ als Limeszahl keinen endlichen Rest hat. Ist daher $\alpha_0 = \omega^{\beta}$ der höchste Haupttypus in α, so ist $\alpha^{\mu} = \alpha_0^{\mu} = \omega^{\beta\mu}$. Dies ist zugleich die Cantorsche Normalform von α^{μ}. Jeder Typus ξ unter α^{μ} hat also einen höchsten Haupttypus ω^γ unter $\omega^{\beta\mu}$, d. h. es ist $\gamma \prec \beta\mu$; Da weiter $\beta\mu$ kein letztes Element hat, ist auch $\gamma + 1 \prec \beta\mu$, also $\gamma + 1 = \beta\mu' + \beta'$, $\mu' \prec \mu$, $\beta' \prec \beta$. Nach dem vorigen Beweis gibt es daher ein λ in M, für das $\gamma + 1 \prec \beta\lambda$, somit $\omega^{\gamma+1} \prec \omega^{\beta\lambda}$, i. e. $\omega^{\gamma+1} \prec \alpha_0^\lambda$ wird. Nun ist ω^γ der größte Haupttypus in ξ, also $\xi \prec \omega^{\gamma+1}$, andererseits α_0^λ der höchste Haupttypus in α^λ, also $\alpha_0^\lambda \leqq \alpha^\lambda$; daraus folgt $\xi \prec \alpha^\lambda$. Da andererseits aus $\lambda \prec \mu$ auch $\alpha^\lambda \prec \alpha^\mu$ folgt, ist α^μ unter allen Typen über α^λ der erste, w. z. b. w. —

§ 81. Im Gegensatz zu LXVIII muß hervorgehoben werden, daß in keinem der Ausdrücke $\lim(\lambda + \alpha)$, $\lim(\lambda . \alpha)$, $\lim(\lambda^\alpha)$ das hintere Zeichen, α, aus dem Limes heraustreten darf. Drei elementare Beispiele mögen dies erweisen:

Es ist für alle endlichen n $\lim(n) = \omega$. Da auch $n + 2$, $n . 2$ und n^2 endlich sind und unbegrenzt wachsen, ist somit

$$\begin{aligned} \lim(n+2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n+2) \prec \omega + 2 \\ \lim(n.2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n.2) \prec \omega . 2 \\ \lim(n^2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n^2) \prec \omega^2 \end{aligned}$$

Die Beweise zu den drei Sätzen machen in der Tat von den Ungleichungen $\alpha + \lambda \succ \alpha$, $\alpha\lambda \succ \lambda$, $\alpha^\lambda \succ \alpha$ Gebrauch, während für die umgekehrten Operationen die weiteren Beziehungen $\alpha + \lambda \geqq \lambda$, $\alpha\lambda \geqq \lambda$, $\alpha^\lambda \geqq \lambda$ gelten, auf Grund deren der Beweis nicht zu führen ist. Nun ist es interessant, zu sehen, daß die Gültigkeit gerade dieser weiteren Beziehungen eine notwendige Bedingung für die Beweisbarkeit der drei Sätze LXVIII darstellt, so daß umgekehrt die erste Reihe der reinen Ungleichungen das Herausziehen des hinteren Gliedes aus dem Limes unmöglich macht. Es sei nämlich φ eine Zuordnung, die jeder Zahl λ eine nicht niedere $\varphi(\lambda$

zuordnet. Ist dann stets $\varphi(\lambda) \succ \lambda$, so kann nicht $\lim \varphi(\lambda) = \varphi(\lim \lambda)$ für jede Menge M von Typen λ allgemein gelten. Und ist umgekehrt allgemein $\varphi(\lim \lambda) = \lim \varphi(\lambda)$, so gibt es Typen ν, für die $\varphi(\nu) = \nu$ ist. Zum Beweise bilden wir folgende Reihe von Typen aus einer beliebigen Zahl λ_0:

$$\varphi(\lambda_0) = \lambda_1, \quad \varphi(\lambda_1) = \lambda_2, \ldots \quad \varphi(\lambda_n) = \lambda_{n+1}, \ldots$$

und zu dieser den Limes $\beta = \lim\limits_{\varkappa} (\lambda_\varkappa)$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$. Da $\lambda_\varkappa = \varphi(\lambda_{\varkappa-1})$, ist auch $\beta = \lim\limits_{\varkappa} (\varphi(\lambda_\varkappa))$ und wenn φ mit dem Limeszeichen vertauschbar ist, $\beta = \varphi(\lim\limits_{\varkappa} \lambda_\varkappa) = \varphi(\beta)$.

Aus den drei Sätzen LXVIII folgt daher für die drei Operationen $\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda$, $\alpha . \lambda$, α^λ sofort, daß es Typen geben muß, die ihnen gegenüber invariant sind, d. h. daß $\alpha + \lambda$, $\alpha . \lambda$, α^λ nicht allgemein höher sein können wie λ; und da umgekehrt $\lambda + \alpha$, $\lambda . \alpha$, λ^α stets größer wie λ sind, kann nicht allgemein $\lim(\lambda + \alpha)$, $\lim(\lambda . \alpha)$, $\lim(\lambda^\alpha)$ mit $\mu + \alpha$, $\mu . \alpha$, μ^α, $(\mu = \lim \lambda)$ übereinstimmen. —

Wenden wir dies auf einige einfachen Fälle an und setzen zunächst $\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda$, so ist für $\lambda_0 = 0$:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha . 2, \quad \lambda_3 = \alpha . 3, \ldots \quad \lambda_\varkappa = \alpha . \varkappa,$$

und der Limes gleich $\alpha . \omega$ nach b). In der Tat ist $\varphi(\alpha\omega) = \alpha\omega$, nämlich $\alpha + \alpha\omega = \alpha(1 + \omega) = \alpha . \omega$.

Sei weiter $\varphi(\lambda) = \alpha . \lambda$, $\lambda_0 = 1$, so wird:

$\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \alpha^2$, $\ldots \lambda_\varkappa = \alpha^\varkappa$, $\lim \lambda_\varkappa = \alpha^\omega$ und $\alpha . \alpha^\omega = \alpha^{1+\omega} = \alpha^\omega$ wie behauptet war.

Sei endlich $\varphi(\lambda) = \alpha^\lambda$, $\lambda_0 = 1$, so wird

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha^\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha^{\alpha^\alpha};$$

der Limes β läßt sich nicht mehr durch Addition, Multiplikation und Potenzenbildung angeben. Er genügt aber als

$$\lim \lambda_\varkappa = \lim (\alpha^{\lambda_{\varkappa-1}}) = \alpha^{\lim \lambda_\varkappa}$$

der Gleichung $\beta = \alpha^\beta$. —

Umgekehrt können wir nach diesem Prozeß Beispiele herstellen, für die die umgekehrte Limeseigenschaft nicht erfüllt ist. Setzen wir $\varphi(\lambda) = \lambda + \alpha$. $\lambda_0 = 0$, so wird $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \alpha . 2$, etc., $\lambda_\varkappa = \alpha . \varkappa$, $\lim \lambda_\varkappa = \alpha . \omega$ und es ist $\lim (\lambda_\varkappa + \alpha) = \lim (\lambda_\varkappa)$, also nicht gleich $(\lim \lambda_\varkappa) + \alpha$. Sei analog $\varphi(\lambda) = \lambda . \alpha$, so wird für $\lambda_0 = 1: \lambda_\varkappa = \alpha^\varkappa$, $\lim \lambda_\varkappa = \alpha^\omega$. $\lim (\lambda_\varkappa . \alpha) = \lim \lambda_\varkappa$ und von $(\lim \lambda_\varkappa) . \alpha$ verschieden. Ist endlich $\varphi(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda_0 = \omega$, so wird $\lambda_1 = \omega^\alpha$, $\lambda_2 = (\omega^\alpha)^\alpha = \omega^{\alpha^2}$, $\lambda_3 = \omega^{\alpha^3}$ etc. Es ist $\lim (\lambda_\varkappa^\alpha) = \lim \lambda_\varkappa = \omega^{\alpha^\omega} \prec (\lim \lambda_\varkappa)^\alpha$.

Nach dieser Methode sind die drei eingangs angeführten Beispiele hergestellt.

§ 82. Wir betrachten nun die Zahlen näher, für die $\alpha + \lambda = \lambda$, oder $\alpha \lambda = \lambda$ oder $\alpha^\lambda = \lambda$ wird. In allen drei Fällen ist $\alpha \prec \lambda$, weil $\alpha + \lambda$, $\alpha \lambda$ und α^λ höher als α ist.

Unter den Zahlen, für die $\alpha + \lambda = \lambda$ ist, sind die Haupttypen bemerkenswert, da sie dieser Gleichung für jedes $\alpha \prec \lambda$ genügen. Ist andererseits λ kein Haupttypus, so ist α ein Abschnitt des höchsten Haupttypus von λ, so daß die ganze Betrachtung sich auch ausschließlich auf die Haupttyen zurückführen läßt.

Es sei jetzt λ eine Zahl, die der Gleichung $\alpha \lambda = \lambda$ genügt; dann kann λ kein letztes Element besitzen. Denn wäre $\lambda = \mu + 1$, so folgte $\alpha \mu + \alpha = \mu + 1$ im Widerspruch mit der für jeden Typus über 1 geltenden Ungleichung $\alpha \succ 1$. Da nämlich $\alpha \mu \succeq \mu$, folgt $\alpha \mu + \alpha \succ \mu + \alpha$ und aus $\alpha \succ 1: \mu + \alpha \succ \mu + 1$. Der Fall $\alpha = 1$ scheidet natürlich aus.

Da λ kein letztes Element besitzt, ist $\alpha \lambda = \alpha_0 \lambda$, wo α_0 der höchste Haupttypus von α ist. Aus $\alpha_0 \lambda = \lambda$ folgert man aber sofort, daß alle Haupttypen $\omega^\varkappa$ in der Cantorschen Normaldarstellung von λ die Eigenschaft $\alpha\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$ besitzen müssen. Ist speziell $\omega^{\varkappa}$ der niederste von ihnen und genügt er dieser Bedingung, so genügen ihr auch alle folgenden, da $\lambda = \omega^{\varkappa}.\lambda'$ wird. Hiermit ist wiederum die Frage auf Haupttypen zurückgeführt und erledigt sich damit sofort. Ist nämlich $\alpha_0 = \omega^{\beta}$, so folgt aus $\alpha_0\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$ sogleich $\beta + \varkappa = \varkappa$, womit wir bei der ersten Frage angelangt sind. Ist speziell $\varkappa$ ein Haupttypus, so ist für jedes $\beta \prec \varkappa$ $\omega^{\beta}\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$, somit für jedes $\alpha \prec \omega^{\varkappa}$ auch $\alpha\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$. Solche Zahlen δ, die für jedes unter ihnen gelegene α mit $\alpha\delta$ übereinstimmen, wollen wir δ-Zahlen nennen. Sie haben keine besondere Bedeutung, doch brauchen wir sie wiederholt in der folgenden Betrachtung und benutzen daher die abkürzende Bezeichnung.

LXIX. Eine Delta-Zahl δ ist ein Haupttypus $\omega^{\varkappa}$, dessen Exponent $\varkappa$ selbst ein Haupttypus ist. Sie genügt den Gleichungen $\alpha + \delta = \alpha\delta = \delta$ für jedes $\alpha \prec \delta$.

Die einzige endliche δ-Zahl ist 1; die nächstfolgenden sind $\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^2}$ u. s. f. — Zu jeder Zahl α, die keine δ-Zahl ist, gibt es eine letzte vorhergehende und eine erste nächstfolgende. Ist ω^{β} der höchste Haupttypus in α, so ist $\alpha^{\beta\omega}$ die nächstfolgende δ-Zahl nach α. Ist β_0 der höchste Haupttypus in β, so ist ω^{β_0} die letzte δ-Zahl vor α. Speziell ist $\omega^{\beta\omega} = \alpha^{\omega} = (\omega^{\beta_0})^{\omega}$, in Analogie zu dem nächsten Haupttypus $\alpha.\omega$ nach α.

Die Reihe der δ-Zahlen ergibt sich auch leicht durch folgendes Erzeugungsprinzip:

LXX. Ist δ eine δ-Zahl, so ist δ^{ω} die nächstfolgende. Der Limes einer Menge von δ-Zahlen ist selbst eine δ-Zahl.

Die erste Behauptung ergibt sich aus der vorangehenden Betrachtung. Zum Beweis der zweiten beachten wir, daß alle δ-Zahlen die Form ω^{ω^λ} haben. Da nun der Limes einer Reihe von Haupttypen ω^λ ein Haupttypus ω^μ ist, ist $\lim \omega^{\omega^\lambda} = \omega^{\lim \omega^\lambda} = \omega^{\omega^\mu}$ wieder eine δ-Zahl; dieser Beweis macht von dem Satz LXVIIIc Gebrauch.

§ 83. Nunmehr betrachten wir diejenigen Zahlen, die einer Gleichung $\alpha^\lambda = \lambda$ genügen. Besäße λ ein letztes Element, so wäre $\lambda = \mu + 1$, $\alpha^\mu . \alpha = \mu + 1$. Nun ist $\alpha^\mu \geqq \mu$, $\mu\alpha > \mu + 1$ (wenn von $\alpha = 1$, wie selbstverständlich, abgesehen wird), woraus die Unmöglichkeit der letzten Gleichung und damit eines letzten Elementes in λ folgt. Es ist somit α^λ, d. h. λ selbst ein Haupttypus, speziell $\alpha^\lambda = \alpha_0^\lambda$, wenn α_0 der höchste Haupttypus in α ist. Es sei nun $\alpha_0 = \omega^\varkappa$, so folgt $\alpha^\lambda = \omega^{\varkappa\lambda}$ und da $\omega^{\varkappa\lambda} \geqq \varkappa\lambda \geqq \lambda$ sein muß, andererseits $\omega^{\varkappa\lambda} = \lambda$ ist, ergibt sich $\varkappa\lambda = \lambda$, d. h. $\lambda = \omega^\lambda$. Diese Gleichung ist die ursprüngliche Definition Georg **Cantors**. Er nennt die Zahlen, die ihr genügen, **Epsilon-Zahlen**. Eine ε-Zahl λ ist ein Haupttypus, und da sie gleich ω^λ ist, eine δ-Zahl. Daraus folgt aber sofort, daß für *jedes* $\alpha < \lambda$ stets $\alpha^\lambda = \lambda$ wird. Denn ist $\omega^\varkappa$ der kleinste Haupttypus in α, so ist $\varkappa < \lambda$, daher $\varkappa\lambda = \lambda$, womit $\alpha^\lambda = \omega^{\varkappa\lambda} = \omega^\lambda = \lambda$ folgt.

Es fragt sich nun, wie man von irgend einer Zahl α zu der nächst höheren ε-Zahl gelangt. Diese heiße λ, so ist gewiß $\alpha^\lambda = \lambda$, daher $\alpha^\alpha = \alpha_1 < \lambda$. Daher ist weiter $\alpha^{\alpha_1} = \alpha_2 < \lambda$, $\alpha^{\alpha_2} = \alpha_3 < \lambda$ u. s. f. Der Limes der Zahlen

$$\alpha_1 = \alpha^\alpha, \quad \alpha_2 = \alpha^{\alpha_1}, \quad \alpha_3 = \alpha^{\alpha_2}, \ldots \quad \alpha_\varkappa = \alpha^{\alpha_{\varkappa-1}}$$

ist aber eine ε-Zahl, und da alle $\alpha_\varkappa < \lambda$ sind, ist dieser Limes gleich λ selbst, $\lim \alpha_\varkappa = \lim \alpha^{\alpha_\varkappa} = \lambda = \alpha^\lambda$. Auf diese Weise steigt man zunächst etwa von ω über $\omega^\omega = \omega_1$, $\omega^{\omega_1} = \omega_2$, etc. zu der ersten transfiniten ε-Zahl ε_1 auf, von dieser zu ε_2, ε_3 u. s. f.

Ist irgend eine Menge von ε-Zahlen ohne letztes Element definiert, z. B. die eben genannte, so erhält man eine neue ε-Zahl nach dem Satz:

LXXI. Der Limes μ einer Menge M von ε-Zahlen λ ist selbst eine ε-Zahl.

Es ist nämlich $\lambda = \omega^\lambda$, daher $\mu = \lim \lambda = \lim \omega^\lambda = \omega^\mu$, w. z. b. w.

Die charakteristische Eigenschaft der ε-Zahlen liegt in folgendem Satz, der aus der Definition des Exponenten λ eines Haupttypus ω^λ sofort folgt: Die Menge aller Typen unterhalb einer ε-Zahl λ ist ähnlich der Menge aller Haupttypen unter λ, übrigens auch ähnlich der Menge aller Deltazahlen unter λ.

Hieraus folgern wir sogleich den Satz:

LXXII. Jede Anfangszahl ist eine Epsilonzahl.

Jede Anfangszahl Ω_α ist nach § 66 ein Haupttypus, daher gleich ω^μ, wobei μ der Typus der Menge M aller Haupttypen $h \prec \Omega_\alpha$ ist. Wäre nun $\mu \prec \Omega_\alpha$, so wäre es auch von geringerer Mächtigkeit als Ω_α. Ist zunächst α keine Limeszahl, $\alpha = \beta + 1$, so überstiege weder M noch eines seiner Elemente h die Mächtigkeit $\aleph_\beta$, daher nach Satz XL 4 auch der Limes von M nicht; dieser ist aber Ω_α, womit ein Widerspruch entsteht. Damit ist der Satz für alle Mächtigkeiten bewiesen, deren Index keine Limeszahl ist.

Wäre α eine Limeszahl, μ von der Mächtigkeit $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, so wäre auch $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$. Nun ist nach dem eben bewiesenen $\Omega_{\beta+1}$ gleich seinem Exponenten ν in $\Omega_{\beta+1} = \omega^\nu$, weil $\beta + 1$ keine Limeszahl ist, und es ist $\mu \prec \nu$, weil $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$. Dies ergibt den Widerspruch $\omega^\mu \prec \omega^\nu$, d. h. $\Omega_\alpha \prec \Omega_{\beta+1}$. —

Man kann den Fall einer Limesmächtigkeit auch nach LXXI erledigen: Sei Ω_α die niederste Anfangszahl, für die μ in $\Omega_\alpha = \omega^\mu$ niederer als Ω_α ist. Ω_α ist aber als Limes aller vorangehenden

Anfangszahlen (XL 2) nach LXXI selbst eine Epsilonzahl, im Widerspruch mit der Annahme.

§ 84. Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt nun sofort, daß die Mächtigkeit von α^β mindestens einer der beiden Zahlen α, β selbst zukommt. Sei nämlich $\alpha^\beta = \mu$ von höherer Mächtigkeit als α und β, und sei ν die zur Mächtigkeit von μ gehörige Anfangszahl, so ist $\alpha \prec \nu$, also $\nu = \alpha^\nu$ nach LXXII. Da ferner $\beta \prec \nu$, folgt $\alpha^\beta \prec \alpha^\nu$, d. h. $\mu \prec \nu$, gegen die Definition von ν, nach der $\mu \succeq \nu$ sein muß. Also kann α^β nicht von höherer Mächtigkeit als α und β sein.

Die Haupttypen, Delta- und Epsilonzahlen stehen in engster Beziehung mit den Fragen nach den Mächtigkeiten von $\alpha + \beta$, $\alpha . \beta$ und α^β. Genau, wie wir eben bewiesen, daß α^β nicht mächtiger als α und β zugleich sein kann, kann man aus der Tatsache, daß jede Anfangszahl ein Haupttypus resp. eine Deltazahl ist, das analoge für $\alpha + \beta$ und $\alpha . \beta$ beweisen. Wenn es daher gelänge, diese drei Eigenschaften der Anfangszahlen ohne die Kenntnis der Eigenschaften der Alefsumme und des Alefproduktes nachzuweisen, so wäre damit eine wesentliche Vereinfachung für die Mengenlehre gewonnen. —

§ 85. Die eigentümliche Eigenschaft der Epsilonzahlen läßt sich dahin aussprechen, daß die Reihe der Exponenten der Haupttypen $\omega^\varkappa$ die Reihe dieser Haupttypen selbst immer wieder „einholt“. Es ist $\omega^1 \succ 1$, $\omega^2 \succ 2$, $\omega^\omega \succ \omega$ u. s. f., aber für ε_1 wird $\omega^{\varepsilon_1} = \varepsilon_1$; sodann wird wieder $\omega^{\varepsilon_1 + 1} \succ \varepsilon_1 + 1$ und diese Ungleichung bleibt bestehen, bis $\omega^{\varepsilon_2} = \varepsilon_2$ wird und so fort.

Daß dieses Verhältnis typisch ist und bei zahlreichen Betrachtungen wiederkehrt, habe ich in § 81 gezeigt. Natürlich kann man durch Fortsetzung des Gedankens wieder ε-Zahlen ε_α finden, die ihren eigenen Indices gleich sind; man bilde nur $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{\varepsilon_1}$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{\varepsilon^{(2)}}$ u. s. f. und darüber den Limes.

Es ist von prinzipieller Bedeutung, daß es auch Anfangszahlen gibt, die ihren Indices gleich sind. Sei $\omega_1 = \Omega_\omega$, $\omega_2 = \Omega_{\omega_1}$, $\omega_3 = \Omega_{\omega_2}$ u. s. f. und $\Omega_\mu = \lim \omega_\varkappa$, so ist auch $\mu = \Omega_\mu$. Dies bedeutet, daß die Reihe der Alefs selbst von der ihrer Indices eingeholt wird; es ist $\aleph_\mu$ nicht nur die Mächtigkeit der Menge aller Ω_μ vorangehenden Typen überhaupt, sondern auch die der Menge aller vorangehenden Anfangszahlen, d. h. der Menge aller niederen Mächtigkeiten. Diese Eigenschaft kommt zunächst allen endlichen Mächtigkeiten zu, wenn man 0 als Mächtigkeit mitzählt, sodann $\aleph_0$, aber nicht mehr $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... $\aleph_\omega$ ... Sie stellt sich jedoch bei gewissen Alefs, wie wir sehen, wieder ein. Die Kenntnis dieser Tatsache verdanke ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn Zermelo. Nennt man eine Anfangszahl, die ihrem Index gleich ist, eine ζ-Zahl, ($\Omega_\zeta = \zeta$), so gelten wieder die entsprechenden Bildungsgesetze, wie für die ε-Zahlen. Man bilde aus α successive $\Omega_\alpha = \alpha_1$, $\Omega_{\alpha_1} = \alpha_2$, $\Omega_{\alpha_2} = \alpha_3$ etc. und den Limes $\lim \alpha_\varkappa = \lim \Omega_{\alpha_\varkappa}$ so erhält man die auf α folgende erste ζ-Zahl. Der Limes einer Reihe von ζ-Zahlen ist selbst eine ζ-Zahl.

Fünfter Teil.

Prinzipielle Fragen. Erste Reihe[1].

XXII.

Logische Vollständigkeit und Entscheidbarkeit.

§ 86. Wenn eine Disjunktion logisch vollständig ist, so läßt sie sich vielfach, wenn nicht immer, als Teilung einer Menge in zwei komplementäre Teilmengen darstellen. Beispielsweise ist jede ganze Zahl entweder zerlegbar oder eine Primzahl, d. h. die Menge 𝔊 aller ganzen Zahlen zerfällt in die komplementären Teilmengen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 … und 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22 …. Das Kontinuum zerfällt in die Mengen der algebraischen und transzendenten Zahlen, d. h. jede reelle Zahl ist entweder algebraisch oder transzendent. Bei unseren vorangehenden Betrachtungen ist von der logisch vollständigen Disjunktion in umfangreichstem Maße Gebrauch gemacht worden. Mit ihrer Hülfe haben wir Sätze über beliebige Alefs und Ordnungstypen bewiesen, von denen uns eine wirkliche Anschauung beim Beweise selbst sicher fehlte und wohl auch jetzt noch fehlt. In diesem Gebrauch der Disjunktion liegt aber, so zwingend sie sein mag, eine Schwäche der Mengenlehre, die vielleicht Ursache gewisser unerledigter Paradoxieen ist; jedenfalls gibt sie zu Bedenken Anlaß, die zuerst von K r o n e c k e r mit aller Schärfe aus-

[1] Die Fragen dieser ersten Reihe gelten denjenigen Postulaten und Begriffsbildungen, deren Zulässigkeit zur Zeit unentschieden, anfechtbar oder abzulehnen ist.

gesprochen, zugleich aber in einem Umfang formuliert worden sind, der ungerechtfertigt war.

Den Kernpunkt der Kroneckerschen Bedenken wollen wir uns an den beiden Disjunktionen prim-zerlegbar und algebraisch-transzendent klar machen. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl a, beispielsweise 257, eine Primzahl ist, habe ich a durch alle Primzahlen zu dividieren, deren Quadrate unter a liegen. Geht keine dieser Divisionen auf, so ist a eine Primzahl; andernfalls ist a offenbar zerlegt. Es ist also nicht nur gewiß, daß jede ganze Zahl prim oder zerlegbar ist, sondern ich kann auch die Entscheidung in jedem Falle treffen. Das gleiche gilt von der Disjunktion zwischen reduzibeln und irreduzibeln algebraischen Gleichungen.

Es wird zumeist betont, daß die Entscheidung durch eine endliche Anzahl von Operationen getroffen wird. Dies ist aber a priori klar und liegt in der Natur unseres Verstandes begründet. Scheinbar unendliche Schlußketten, wie sie beim Schlusse von n auf $n+1$ unterlaufen, sind durch ein gewisses Gesetz beschrieben, auf Grund dessen geschlossen wird, ohne daß jeder einzelne Schluß der Kette wirklich ausgeführt wird. Der Denkprozeß, der bei dem Treffen einer Entscheidung zu stande kommt, ist eo ipso endlich.

So entscheiden wir die Transzendenz von e und π nicht etwa dadurch, daß wir von jeder algebraischen Gleichung der Reihe nach beweisen, daß ihr weder e noch π genügt. Ebensowenig beweisen wir die Übereinstimmung der beiden Limites

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

indem wir der Reihe nach jede Stelle der Dezimalentwicklung 2,718281 ... aus beiden ausrechnen und uns überzeugen, daß sie gleich ausfällt. Mit solchem Verfahren würden wir zu keinem Ende kommen. Und hier sehen wir den fundamentalen Unterschied zwischen der Disjunktion algebraisch-transzendent und der soeben behandelten: Wenn a zerlegbar sein soll, so kommt nur eine endliche Anzahl von möglichen Zerlegungen in Betracht und ich kann sie systematisch durchprobieren. Wenn aber a algebraisch ist, so kommen unendlich viele algebraische Gleichungen in Betracht, denen a genügen kann und ich kann daher durch Probieren keine Entscheidung treffen. Es gibt heute in der Tat kein allgemeines Kriterium, um die Transzendenz einer gegebenen Irrationalität zu entscheiden, und nach meiner Ansicht läßt es sich auch beweisen, daß es ein solches Kriterium nicht geben kann. Die Definition der Transzendenz: „a genügt keiner algebraischen Gleichung" ist kein Kriterium, sie enthält keine Methode, die Entscheidung zu treffen.

Solche Definitionen, die keine Kriterien enthalten, sind in der Mathematik vielfach anzutreffen. Hierher rechnet u. a. die Definition der Konvergenz und die der Gleichheit zweier verschieden definierten Irrationalzahlen.

§ 87. Wenn wir aus dem Axiomsystem der euklidischen Geometrie das Parallelenpostulat weglassen, so sind wir nicht im Stande, den Satz von der Winkelsumme im Dreieck zu beweisen. Wir können nur zeigen, daß sie zwei Rechte nicht übersteigt und kleiner als zwei Rechte ist, sofern das nur in einem einzigen Dreieck zutrifft. Trotzdem ist die Disjunktion nach wie vor logisch einwandfrei und vollständig, daß in einem gegebenen Dreieck die Winkelsumme entweder gleich zwei Rechten oder kleiner und nur eins von beiden ist.

Es gibt eine große Zahl von Sätzen, die sich ohne Verwendung des Parallelenpostulats beweisen lassen. Es gibt also einen Teil der Geometrie, der dieses Postulates nicht bedarf; es könnte möglicherweise die Existenz und Notwendigkeit dieses Postulates unentdeckt bleiben und solange dies der Fall wäre, müßte notwendigerweise die Disjunktion zwischen Dreiecken von kleinerer als gestreckter und solchen von gestreckter Winkelsumme mathematisch unfruchtbar bleiben; sie würde nur Sätze hypothetischen Charakters liefern.

Das soeben ausgeführte Beispiel ist trivial, weil zu deutlich. Doch können wir ein anderes anführen, das bis in die jüngste Zeit die Mathematiker aufs intensivste beschäftigt hat: es ist dies der projektive Fundamentalsatz. In ihm konzentrierte sich folgendes Problem: Es sollen alle diejenigen geometrischen Sätze, in denen von Beziehungen des Maßes (Ähnlichkeit, Kongruenz, Strecken- und Winkelvergleichung etc.) nicht die Rede ist, ohne Verwendung der Axiome des Messens bewiesen werden. Gegen alle Versuche, diese Aufgabe zu lösen, wurden ein halbes Jahrhundert lang immer wieder erfolgreiche Einwände erhoben, bis es gelang, die Undurchführbarkeit des Unternehmens in einem genau umschriebenen Sinn, nämlich ohne Maaß- und Stetigkeitspostulate, zu beweisen. Hier haben wir direkt einen Fall vor uns, in dem eine logisch vollständige Disjunktion mathematisch unentscheidbar bleiben mußte, weil in dem System der Theorie ein Axiom fehlte.

Der Nachweis, daß unsere arithmetischen Axiome vollständig sind, ist bis heute nicht erbracht, und daher rührt die Frage (wohl das jüngste Schmerzenskind der kritischen Mathematik), ob jede mathematische Aufgabe eine Lösung besitze, wobei als Lösung auch der Unlösbarkeitsnachweis zu gelten hat, wie bei der Quadratur des Kreises. Die Frage ist alt; z. B. wurde schon vor Jahren am Beispiel des großen Fermatschen Satzes gefragt: Ist er richtig, muß er sich dann auch beweisen lassen?

Es wird folgendes ziemlich allgemein als wahrscheinlich angesehen: Wenn a, b zwei algebraische Zahlen sind und b insbesondere irrational ist, so ist a^b eine transzendente Zahl. Beispiel: $2^{\sqrt{2}}$. Es ist noch nicht einzusehen, auf welchem Wege der Beweis dieser Vermutung zu erbringen sein könnte. Der logischen Disjunktion nach muß $2^{\sqrt{2}}$ algebraisch oder transzendent sein. Läßt sich aber entscheiden, welches von beiden der Fall ist? Es darf ohne Übertreibung behauptet werden: Würde eines Tages bewiesen, daß die Frage nach der Transzendenz oder Nichttranszendenz von $2^{\sqrt{2}}$ unlösbar ist, so würde damit die Mathematik vor eine Schwierigkeit gestellt, wie sie bisher noch nicht aufgetreten ist.

Dies mag uns zunächst beweisen, daß die Frage nach der Entscheidbarkeit einer Disjunktion nicht trivial ist; daß wir nicht berechtigt sind, sie kurzerhand beiseite zu legen. Ob die Existenz unentscheidbarer Disjunktionen stets ein Zeichen der Unvollständigkeit des Axiomsystems ist, ist zum mindesten fraglich; gewiß ist nur das umgekehrte. Die Unentscheidbarkeit ist in den geometrischen Fällen dadurch nachgewiesen worden, daß man die logische Möglichkeit und Widerspruchslosigkeit beider Fälle nachgewiesen hat. Und das scheint mir an dem Beispiel $2^{\sqrt{2}}$ unmöglich. Sollte diese Zahl als algebraisch nachgewiesen werden, so müßte eine Gleichung angegeben werden, der sie genügt. Und daß sie ihr genügt, muß von etwaigen unbekannten Axiomen unabhängig sein, weil das Nichtgenügen faktisch zu konstatieren ist. —

§ 88. Die Möglichkeit unentscheidbarer Disjunktionen hat Kronecker den Anlaß gegeben, nur solche Disjunktionen anzuerkennen, deren Entscheidbarkeit nachgewiesen werden kann, und nur solche Definitionen zuzulassen, die zugleich Kriterien sind. Die Konsequenzen dieses Standpunktes führen zur Verwerfung der allgemeinen Theorie der Irrationalzahlen und des Kontinuums, weil die Definition der Gleichheit zweier Irrationalzahlen kein Kriterium ist. Sie führen damit zur Verwerfung der Geometrie und der Theorie der unendlichen Mengen; der Geometrie, weil die Gesamtheit der Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, der Mengenlehre, weil die Definition der Identität zweier Mengen kein Kriterium enthält.

Kroneckers Standpunkt ist für die Algebra berechtigt und direkt fruchtbar gewesen. Aber selbst in diesem Gebiet ist er einseitig und zwingt beispielsweise dazu, die Begriffsbildungen Dedekinds, die mit unendlichen Mengen arbeiten, anzufechten, was Kronecker in der Tat getan hat. Hierin ist ihm, soweit ich es übersehen kann, kein einziger seiner Fachgenossen gefolgt.

Es ist hier nicht der Ort, auf algebraische Fragen näher einzugehen. Es genügt für unsere Zwecke die Konstatierung, daß vom Standpunkte Kroneckers aus erhobene Einwände gegen die Mengenlehre die Mathematik selbst treffen und dadurch ihre zu enge Fassung bereits erweisen, ehe man gezwungen ist, die Mengenlehre gegen sie zu verteidigen.

Es scheint mir nun, daß das Postulat der Entscheidbarkeit an einem inneren Widerspruch krankt, der seine Undurchführbarkeit verschuldet. Es gibt nämlich zu einer Disjunktion Anlaß, die dem Postulat selbst nicht zu genügen braucht. Die Betrachtung dieses Verhältnisses ist nicht einfach, wir wollen sie durch eine einfache Symbolik abzukürzen versuchen.

§ 89. Es sei M_1 eine Teilmenge einer Menge M und a ein Element von M_1. So machen wir folgende Disjunktion: Entweder es läßt sich entscheiden, d. h. beweisen, daß a zu M_1 gehört, oder es läßt sich nicht beweisen. Diese Disjunktion ist vollständig und zerlegt M_1 in zwei Teilmengen, die wir ΔM_1 und ∇M_1 nennen wollen[1]. Wenn a zu ΔM_1 gehört, so heißt dies: es läßt sich beweisen, daß a zu M_1 gehört. Wenn a zu ∇M_1 gehört, so ist a ein Element in M_1, von dem sich nicht beweisen läßt, daß es zu M_1 gehört. Dies erscheint paradox; wenn es aber möglich wäre, zu beweisen, daß über die Transzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ keine Entscheidung möglich ist, so wäre $2^{\sqrt{2}}$ eine solche Zahl, die notwendigerweise entweder transzendent aber nicht nachweislich transzendent, oder algebraisch, aber nicht nachweislich algegebraisch ist. Wenn wir also schon die logische Vollständigkeit von der Entscheidbarkeit einer Disjunktion trennen, müssen wir die Möglichkeit der Teilmenge ∇M_1 in Betracht ziehen. Verwerfen wir sie als paradox, so erkennen wir damit bereits die Unzulässigkeit eines gesonderten Entscheidbarkeitspostulates an.

Gehört ein Element zu ΔM_1, so ist auch beweisbar, daß es zu ΔM_1 gehört, d. h. es ist

$$\Delta\Delta M_1 = \Delta M_1. \tag{1}$$

Jeder Beweis beweist nämlich seine eigene Möglichkeit. Der Transzendenzbeweis von π beweist zugleich, daß die Transzendenz von π beweisbar ist. Gehört a zu ΔM_1, so heißt das: der Beweis seiner Zugehörigkeit zu M_1 läßt sich führen; es ergibt sich aber damit die Möglichkeit dieses Beweises selbst, d. h. auch die Zugehörigkeit zu ΔM_1 ist beweisbar, a gehört auch zu $\Delta\Delta M_1$.

---

1 Das Zeichen ∇ wird „Nabla“ ausgesprochen.

Daraus folgt natürlich als Korollar, daß es in ΔM_1 keine Elemente gibt, deren Zugehörigkeit zu ΔM_1 unbeweisbar wäre. Das heißt, es ist

$$\nabla \Delta M_1 = 0, \tag{2}$$

worin 0 die fiktive, aus keinem Element bestehende Menge bezeichnet.

Gehört ein Element zu ∇M_1, so kann diese Zugehörigkeit nicht beweisbar sein. Denn da ∇M_1 eine Teilmenge von M_1 ist, würde mit der Zugehörigkeit zu ∇M_1 auch die zu M_1 erwiesen sein. Diese Tatsache läßt sich symbolisch durch

$$(3) \qquad \Delta \nabla M_1 = 0, \qquad (4) \qquad \nabla \nabla M_1 = \nabla M_1$$

ausdrücken. Beide Gleichungen bedingen sich gegenseitig, ebenso wie (1) und (2). Denn jede Menge M_1 ist aus ΔM_1 und ∇M_1 zusammengesetzt und daher mit der einen identisch, wenn die andere fehlt. Analog ist $\Delta M_1 = (\Delta \Delta M_1 + \nabla \Delta M_1)$ und daher gilt (2), weil (1) richtig ist und umgekehrt.

Die Relationen (1) bis (4) zeigen, daß die Zerlegung einer Teilmenge M_1 durch die Disjunktion (Δ, ∇) nicht weiter getrieben werden kann, als bis zu den Mengen ΔM_1 und ∇M_1. Die Zugehörigkeit zur ersten schließt die Entscheidbarkeit ein, die zur zweiten schließt sie aus. Mengen erster Art wollen wir kurzweg Delta-Mengen, die der zweiten Nabla-Mengen nennen. Die definierende Eigenschaft einer Delta-Menge N wird durch jede der Relationen $\Delta N = N$, $\nabla N = 0$, die einer Nabla-Menge N' durch $\Delta N' = 0$, $\nabla N' = N'$ angegeben. Eine Menge M_1, die weder Delta- noch Nabla-Menge ist, besteht aus den beiden komplementären Teilmengen $\Delta M_1 + \nabla M_1$, die nach (1) bis (4) Mengen der beschriebenen Sonderarten sind.

§ 90. Ist nun eine Disjunktion

(5) $$M = (M_1 + M_2)$$

gegeben, so können wir fragen, ob sie entscheidbar ist. Ist dies der Fall, so sind M_1 und M_2 Delta-Mengen, es ist daher insbesondere $(\Gamma M_1 + \Gamma M_2) = 0$, und diese Relation sagt umgekehrt aus, daß die Disjunktion (5) entscheidbar ist.

Ist die Disjunktion nicht entscheidbar, so können noch einzelne Besonderheiten eintreten, die wir vorweg nehmen wollen. Erstens können M_1 und M_2 Nabla-Mengen sein. In diesem Fall ist die Disjunktion völlig unentscheidbar. Dies tritt z. B. bei der Disjunktion zwischen den Dreiecken von gestreckter und kleinerer Winkelsumme in einer Geometrie ohne Parallelenpostulat ein. Von keinem einzigen Element in M kann entschieden werden, ob es zu M_1 oder M_2 gehört. Wir wollen dabei hervorheben, daß trotzdem natürlich die Zugehörigkeit zu M selbst für alle Elemente beweisbar sein kann. — Zweitens kann M_1 eine Delta-, M_2 eine Nabla-Menge sein. Dann erhalten wir einen Fall, den wir unter den Paradoxieen nochmals antreffen werden: Die komplementäre Menge von M_1 ist so beschaffen, daß ich von keinem ihrer Elemente beweisen kann, daß es zu ihr gehört. Ist a ein Element in M, so kann ich beweisen, daß es in M_1 ist oder ich kann nichts beweisen.

Diese unentscheidbare Disjunktion ist eine logische Folge des Postulats der Entscheidbarkeit. Denn die Zerlegung der Teilmenge M_1 in ΔM_1 und ∇M_1 ergibt gerade die zuletzt beschriebene Art der unentscheidbaren Disjunktion.

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall zu und zerlegen in (5) die Teilmengen M_1, M_2, so entsteht eine vierfache Disjunktion

$$M = \varDelta M_1 + \varDelta M_2 + \nabla M_1 + \nabla M_2$$

und aus dieser die zweifache:

(6) $$M = N + N'$$

worin:

(7) $$N = \varDelta M_1 + \varDelta M_2$$

(8) $$N' = \nabla M_1 + \nabla M_2 .$$

Die Disjunktion (7) ist entscheidbar, (8) völlig unentscheidbar. Die Menge N ist eine Delta-Menge; denn ist a in N, so ist es entweder in $\varDelta M_1$ oder in $\varDelta M_2$; in jedem der beiden Fälle ist die Zugehörigkeit zu der betreffenden Teilmenge beweisbar, also auch die Zugehörigkeit zu N. Über N' läßt sich nichts aussagen, vor allem nicht, daß es notwendigerweise eine Nabla-Menge sein müßte. Wiederholen wir daher die Zerlegung an (6), so entsteht

(9) $$M = P + P',$$

worin:

(10) $$P = \varDelta N + \varDelta N'$$

(11) $$P' = \nabla N + \nabla N' .$$

P ist wieder eine Delta-Menge, P' aber diesmal eine Nabla-Menge, da $\nabla N = 0$. Die Disjunktion (9) ist daher von einer bereits betrachteten Sonderart und unentscheidbar. Die nochmalige Wiederholung der Teilung führt nicht mehr weiter, da $\varDelta P = P$, $\nabla P = 0$, $\varDelta P' = 0$, $\nabla P' = P'$ ist.

Setzen wir für P, P', N, N' aus (10, 11, 7, 8) ihre Bedeutung wieder ein, so finden wir (indem $\nabla N = 0$, $\varDelta N = N$) für (9) die vierfache Zerlegung:

(12) $$M = \varDelta M_1 + \varDelta M_2 + \varDelta(\nabla M_1 + \nabla M_2) + \nabla(\nabla M_1 + \nabla M_2).$$

Bei der Disjunktion algebraisch-transzendent kennen wir beispielsweise in $\varDelta M_1 : \sqrt{2}$, in $\varDelta M_2 : \pi$. Ob es in den beiden letzten Mengen Elemente gibt, wissen wir nicht. Von einer Zahl α in $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ müßte sich die Unentscheidbarkeit beweisen lassen; bei einer Zahl β dagegen in $\varGamma(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ ist nicht nur die Entscheidung, ob algebraisch oder transzendent, sondern auch der Beweis der Unentscheidbarkeit unmöglich. Eine solche Zahl kann demnach nicht angegeben werden.

§ 91. Nun sind in der Disjunktion (12) zwei Unterfälle von besonderer Bedeutung. Ist erstens $\varGamma(\varGamma M_1 + \varGamma M_2) = 0$, so ist die Disjunktion (12) entscheidbar; es bedarf also nur einer neuen Begriffsbildung, um aus der unentscheidbaren zweifachen Disjunktion (5) zu einer entscheidbaren dreifachen zu gelangen. Ein Beispiel hierfür ist mir nicht bekannt. Ist zweitens $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2) = 0$, so heißt das: Es kann kein Element angegeben werden, für das die Disjunktion *nachweislich* unentscheidbar ist[1]. Dieser Fall tritt praktisch wirklich ein, und der Nachweis hierfür beruht auf folgender einfachen Bemerkung: *Wenn gezeigt werden kann, daß kein Element von M_1 in $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ enthalten ist, so ist $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2) = 0$;* denn andernfalls wäre es ja gewiß, daß alle Elemente dieser Menge in M_2 lägen, gegen die Definition von $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$, die alle Elemente enthält von denen es nachweislich ungewiß ist, ob sie nach M_1 oder M_2 gehören.

Man sieht das gleiche auch aus unserem Kalkul. Ein Element von M_1, das zu $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ gehört, ist Element von $\varGamma M_1$. Enthält $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ kein Element aus M_1, so auch keines aus $\varGamma M_1$; es ist daher $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2) = \varDelta \varGamma M_2 = 0$ nach (3).

[1] Da gleichwohl $\varGamma(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ existieren könnte, braucht die Disjunktion darum noch nicht entscheidbar zu sein. Es läßt sich aber über ihre Entscheidbarkeit nichts ausmachen.

Besonders einfach liegt der Fall dann, wenn M_1 eine Delta-Menge ist. Dann ist nämlich $\Gamma M_1 = 0$, $\Gamma M_1 + \Gamma M_2 = \Gamma M_2$ und daher

$$\Delta(\Gamma M_1 + \Gamma M_2) = \Delta \Gamma M_2 = 0.$$

§ 92. Der zuletzt besprochene Fall liegt bei folgendem Beispiel vor: Es sei α irgend eine reelle Zahl und β eine beliebige andere, durch ein Limesverfahren definierte, z. B. ein Dedekindscher Schnitt. Ist dann β von α verschieden, so läßt sich das auch beweisen. Man entwickelt beispielsweise α und β in Dezimalbrüche, so müssen einmal zwei Stellen verschieden ausfallen. (Die Indier sollen vermutet haben, daß π die Wurzel aus 10 sei. Es ist aber $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$, $\pi = 3{,}14\ldots$, also $\sqrt{10} > \pi$.) Teilen wir daher die reellen Zahlen in die Mengen M_1 der von α verschiedenen und M_2 der zu α gleichen, so ist $\Delta M_1 = M_1$, und es ist somit unmöglich, zwei Grenzverfahren anzugeben, von denen sich nachweisen läßt, daß über die Gleichheit oder Verschiedenheit ihrer Limites eine Entscheidung unmöglich ist.

Es sei nun weiter α eine algebraische Irrationalzahl; die Reihe der algebraischen Gleichungen kann abzählbar geordnet werden: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ (vgl. Kap. VI § 18). Es sei $f_1(\alpha) = \alpha_1$, $f_2(\alpha) = \alpha_2$, $f_3(\alpha) = \alpha_3$ u. s. f., und die erste Gleichung, der α genügt, sei die $\varkappa$-te, also $f_\varkappa(\alpha) = 0$, dagegen α_1, α_2, bis $\alpha_{\varkappa-1}$ von null verschieden. Von letzterer Tatsache kann ich mich durch eine endliche Anzahl von Operationen überzeugen, indem ich jede der Zahlen α_1 bis $\alpha_{\varkappa-1}$ bis zur ersten, von Null verschiedenen Ziffer ihrer Dezimalbruchentwicklung berechne. Ob dagegen $f_\varkappa(\alpha) = 0$ ist, kann ich möglicherweise nicht entscheiden, wenn nicht α direkt als Wurzel von $f_\varkappa(\alpha) = 0$ definiert ist. Ich kann aber auch nach dem vorangehenden nicht beweisen, daß die Entscheidung unmöglich ist, denn 0 ist eine reelle Zahl und $f_\varkappa(\alpha)$ im allgemeinen ein Schnitt oder eine sonstwie durch ein Grenzverfahren definierte Zahl, und von der Gleichheit der beiden läßt sich zwar nicht die Entscheidbarkeit, aber die Unbeweisbarkeit der Nichtentscheidbarkeit zeigen.

Wenn es also Zahlen gibt, von denen der Nachweis der Unentscheidbarkeit ihrer Transzendenz oder Nichttranszendenz geführt werden kann, so sind sie gewiß nicht algebraisch; es gibt darum solche Zahlen nicht, denn mit dem Nachweis, daß sie nicht algebraisch sind, hätten wir ja die angeblich unmögliche Entscheidung getroffen.

Auch hier liegt das besprochene Schlußschema vor. Ist M_1 die Menge der algebraischen, M_2 die der transzendenten Zahlen, so enthält $\varDelta(\varGamma M_1 + \varGamma M_2)$ keine Zahl aus M_1, existiert also nicht.

Hiermit erkennen wir das dem Postulat der Entscheidbarkeit anhaftende unlösliche Dilemma. Selbst wenn uns vom Standpunkt dieses Postulates aus vorgehalten würde, daß es nachweislich, nicht nur praktisch, kein Kriterium der Transzendenz gibt, können wir immerhin erwidern: Es kann uns aber kein spezielles Beispiel angegeben werden, in dem es ein solches Kriterium nicht geben kann[1].

Zum Schlusse sei noch hervorgehoben, daß das Postulat der Entscheidbarkeit in der Geometrie eine stillschweigende und zugleich nirgends in den Schlüssen auftretende Voraussetzung ist. Ob zwei Punkte verschieden sind oder zusammenfallen, betrachten wir stets als bestimmt, ohne nach einem Kriterium zu fragen.

---

[1] Wie mir Herr Geheimrat H. A. Schwarz mitteilt, hat er an Kronecker tatsächlich als Erwiderung auf dessen Einwände gegen Weierstraß' Irrationalzahlentheorie die Aufforderung gerichtet, ein nachweislich unentscheidbares Beispiel anzugeben.

XXIII.

Die Paradoxie der endlichen Bezeichnung.

§ 93. In § 18 bewiesen wir den Satz der endlichen Bezeichnung, daß eine Menge, in der jedes Element durch eine endliche Zusammenstellung von Zeichen eindeutig beschrieben werden kann, abzählbar ist. Umgekehrt ist auch jede abzählbare Menge einer endlichen Bezeichnung fähig, da ihre Elemente nummeriert werden können.

Das Kontinuum ist demnach einer endlichen Bezeichnung nicht fähig, ebensowenig die zweite Zahlklasse oder die Menge aller stetigen Funktionen, geschweige denn die aller Funktionen. —

Jede Definition ist eine endliche Bezeichnung. Denn alles was in Worten ausgesprochen werden kann, läßt sich schreiben und drucken, also durch eine endliche Anzahl von Zeichen eindeutig beschreiben. Hierauf beruht folgendes Sophisma: Jede irrationale Zahl bestimmt eindeutig einen unendlichen Kettenbruch, dessen unendliche Ziffernreihe als solche natürlich nicht gegeben sein kann. Vielmehr muß ein Bildungsgesetz für diese Ziffern (Nenner) vorliegen, das, wie kompliziert es auch sei, jedenfalls durch eine endliche Anzahl von Buchstaben des Alphabets geschrieben oder gedruckt werden kann. Die Menge der Irrationalzahlen ist also einer endlichen Bezeichnung fähig, d. h. abzählbar, gegen unseren früheren Beweis ihrer Nicht-Abzählbarkeit. —

Der Fehlschluß liegt in der Annahme, daß zu jeder Irrationalzahl ein „Bildungsgesetz“ bekannt sei. Man bestätigt leicht, daß dies nicht zutrifft; es folgt auch sofort aus der korrekten Durchführung unseres Schlusses.

Trotzdem liegt in dem Sophisma eine Schwierigkeit verborgen; nur führt sie nicht zu Paradoxieen und ist schwer in Worte zu fassen. Irrationalzahlen wie $\sqrt{2}$ und π betrachten wir als gegeben, weil sie definiert sind. Alle in diesem Sinne „gegebenen“ Irrationalzahlen bilden eine abzählbare Menge: es existieren darum Irrationalzahlen, die nicht gegeben sind. Praktisch liegt darin keine Schwierigkeit: Wir haben es noch nicht nötig gehabt, uns mit ihnen zu beschäftigen. Es gibt ja auch algebraische, speziell rationale, auch ganze Zahlen, die noch nicht Gegenstand mathematischer, auf sie allein gerichteter Arbeit waren. Und die Mathematik geht auf die allgemeinen Gesetze aus; die „individuellen“ Eigenschaften irgend einer Zahl haben zumeist nur Interesse als Anwendungen der allgemeinen Gesetze. Sowie wir aber diese Anwendung versuchen, taucht die Schwierigkeit auf: Die Eigenschaften der allgemeinen Irrationalzahlen sind ohne Kriterien definiert; in der Algebra dagegen besitzen wir fast durchweg Kriterien, und sie lassen sich ohne weiteres anwenden, wenn auch die Durchführung der Rechnung trotz ihrer Endlichkeit menschliche Kräfte übersteigen mag.

Die Möglichkeit der Kriterien in der Algebra entspringt aus der Existenz eines allgemeinen endlichen Definitionsschemas der algebraischen Zahl: dies ist die algebraische Gleichung. Ein solches Schema kann es für die allgemeinen Irrationalzahlen nicht geben, weil ihre Menge sonst abzählbar sein müßte. Und darum kann es meines Erachtens auch keine Kriterien, z. B. kein Kriterium der Transzendenz geben. Für eine algebraische Zahl gibt es eine bevorzugte, einfachste Definition: ihre irreduzible Gleichung. Für eine transzendente Zahl gibt es das nicht; z. B. e ist auf zwei Arten definiert, und es existiert kein Gesichtspunkt allgemeiner Natur, der einer dieser Definitionen den Vorzug gäbe. Geht man die Definitionen der bisher untersuchten Transzendenten durch, so findet man Integrale, Reihen und andere Grenzprozesse, transzendente Gleichungen und Kombinationen solcher Hülfsmittel darunter. Werfe ich die Frage auf: „Wie müßte das Kriterium der Transzendenz einer gegebenen Irrationalität aussehen?“, so entsteht sofort die zweite Frage: Wie müßte denn eine „gegebene“ Irrationalität selbst aussehen? Sucht man die Frage irgend wie zu spezialisieren, z. B. durch Beschränkung auf unendliche Reihen und unter diesen etwa auf Kettenbrüche, so sieht man sofort wieder, daß im Falle der Unendlichkeit dieses Bruches — und der kommt allein in Betracht, — ein Bildungsgesetz bekannt sein muß. Wie aber sieht ein Bildungsgesetz aus?

§ 94. Analoge Schwierigkeiten müssen bei jeder nicht-abzählbaren Menge auftreten. Nächst dem Kontinuum am bekanntesten und in ihrer Struktur in mancher Hinsicht einfacher ist die zweite Cantorsche Zahlklasse. Sie zeigt besser als das Kontinuum, welchen Einfluß die Nichtabzählbarkeit auf die mathematische Behandlung hat.

Durch die drei Operationen $\alpha+\beta$, $\alpha.\beta$, α^β und das neue Zeichen ω können wir eine abzählbare Menge von Zahlen der zweiten Klasse systematisch bezeichnen und damit den Anfang der Reihe hinschreiben, aber auch nur den Anfang. Er sieht so aus:

$$\begin{array}{llllll}
\omega, & \omega+1, & \omega+2, & \ldots & \omega+\varkappa, & \ldots \\
\omega.2, & \omega.2+1, & \omega.2+2, & \ldots & \omega.2+\varkappa, & \ldots \\
\omega.3, & \omega.3+1, & \omega.3+2, & \ldots & \omega.3+\varkappa, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\omega.n, & \omega.n+1, & \omega.n+2, & \ldots & \omega.n+\varkappa, & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
\omega^2, & \omega^2+1, & \omega^2+2, & \ldots & \omega^2+\varkappa, & \ldots
\end{array}$$

$$\omega^2+\omega, \quad \omega^2+\omega+1, \quad \ldots \quad \text{u. s. f.}$$

$$\vdots$$

$$\omega^2+\omega.n, \quad \ldots$$

$$\omega^2.2, \qquad \omega^2.2+1, \quad \ldots \quad \text{u. s. f.}$$

Wir gelangen zu ω^3, ω^4, ... ω^ω, weiter zu ω^{ω^ω} etc., und sind damit imstande, alle Zahlen unterhalb der ersten Epsilonzahl zu bezeichnen. Diese selbst aber genügt den drei Gleichungen $\omega+\varepsilon=\omega.\varepsilon=\omega^\varepsilon$, läßt sich also nicht durch unsere drei Operationen auf ω zurückführen. Fügen wir jetzt ε als neues Zeichen zu den bisher benutzten Zeichen 0, 1, ... 9, ω hinzu, so gestattet dieses neue Zeichensystem die Bezeichnung bis zur zweiten ε-Zahl. Bezeichnen wir die Epsilonzahlen durchweg mit ε_α, worin α der Ordnungstypus der Menge aller vorangehenden Epsilonzahlen ist, so gelangen wir damit bis zu der ersten Epsilonzahl, die ihrem eigenen Index gleich ist und für die eine Bezeichnung noch nicht eingeführt ist. Wir sehen also, daß die Bezeichnung der zweiten Zahlklasse dauernd zur Einführung neuer Zeichen zwingt. Interessant ist dabei nun die Tatsache, daß nur eine endliche Anzahl von neuen Zeichen erforderlich ist, um bis zu einem vorgeschriebenen Typus zu gelangen. Es ist also jede Zahl der zweiten Klasse einer endlichen Bezeichnung fähig, die ganze Zahlklasse selbst dagegen nicht. Das kann nicht ernstlich befremden, wenn man sich erinnert, daß die zweite Zahlklasse ein Haupttypus, d. h. allen ihren Resten ähnlich ist. Bis zu welcher Zahl wir auch vordringen, stets ist der Rest noch von derselben Struktur; hinter jeder noch so weit vorgetriebenen Bezeichnung liegt wieder dieselbe Menge unbezeichneter Zahlen, wie hinter ω selbst. Analoge Verhältnisse treten bei der Menge der endlichen Zahlen auf. Auch dort liegen hinter jeder Zahl ebensoviele wie hinter der Eins.

Und beispielsweise gibt es zu jeder ganzen Zahl a eine Basis $\varkappa$ eines Zahlsystems, in dem a eine vorgeschriebene Anzahl von Stellen hat. Trotzdem also jede Zahl etwa sechsstellig geschrieben werden kann, gibt es kein Bezeichnungsschema um alle ganzen Zahlen sechsstellig zu schreiben. Analog ist das Verhalten der zweiten Zahlklasse, die selbst nicht endlich bezeichnet werden kann, wiewohl jeder Abschnitt einer endlichen Bezeichnung fähig ist.

§ 95. Die vorstehenden Erörterungen zeigen einen Unterschied im Gebrauch der Worte „alle“ und „jeder“, hinter dem man, vielleicht mit Recht, vielleicht auch nicht, einen logischen Unterschied gesucht hat, ohne ihn bisher fixieren zu können. Wenn wir die bisherigen Betrachtungen daraufhin durchsehen, so scheint der Unterschied gar nicht in den Worten „alle“ und „jeder“, sondern in dem Doppelsinn des Wortes „ein“ zu liegen, dessen Sinn zwischen „je ein“ und „ein und dasselbe“ wechselt, wie in folgenden Beispielen:

Es gibt für jede Zahl der zweiten Klasse eine endliche Darstellung, aber nicht eine endliche Darstellung aller Zahlen der zweiten Klasse.

Es giebt für jede Transzendente ein Kriterium ihrer Transzendenz, aber nicht für alle Transzendenten ein Kriterium. (Dieser Satz ist durchaus problematisch.)

Da der Unterschied hier wohl klar zu Tage liegt, könnte der Gegenstand verlassen werden. In jüngster Zeit ist aber dem Paradoxon der endlichen Darstellung eine Formulierung gegeben worden, die auf der soeben beschriebenen Verwechslung beruht; und da diese Formulierung das Paradoxon durch Festlegung im Druck für absehbare Zeit dem Schicksal entrissen hat, trotz seiner Beliebtheit als mathematische Stammtischunterhaltung eines Tages in Vergessenheit zu geraten, so sei es gestattet, an dieser Stelle darauf einzugehen.

a) Da es nicht für alle Zahlen des Kontinuums eine endliche Darstellung geben kann, so gibt es Zahlen, die nicht endlich darstellbar sind.

b) Es sei M die Menge aller endlich darstellbaren Zahlen des Kontinuums. Sie ist abzählbar, definiert also nach dem Diagonalverfahren eine nicht in ihr enthaltene Zahl u.

c) u ist nicht darstellbar, weil nicht in M enthalten. Wir haben aber seine Definition soeben mit einer endlichen Anzahl von Worten ausgesprochen, also ist u doch endlich darstellbar.

Daß a) falsch ist, war soeben gezeigt. Es gibt keine endliche Darstellung für alle Zahlen des Kontinuums zugleich, trotzdem kann jede einzelne endlich darstellbar sein, wie wir deutlicher an der zweiten Zahlklasse sahen, auf die das Paradoxon ebensogut paßt. Infolgedessen ist auch der Schluß b) falsch, der nur a) umkehrt.

Im übrigen verdient hervorgehoben zu werden, daß die Disjunktion zwischen endlich darstellbaren und endlich nicht darstellbaren Zahlen unentscheidbar ist, da es natürlich unmöglich ist, Zahlen der zweiten Art anzugeben: jede Definition ist eine eo ipso e n d l i c h e Darstellung. Man könnte also, wenn das Paradoxon wirklich ernsthaft wäre, seine Lösung getrost derjenigen höheren Intelligenz überlassen, die einer Kenntnis endlich nicht darstellbarer Zahlen fähig ist.

Beachtet man noch, daß eine endliche Darstellung eine Zuordnung eines Dings zu einer Zeichenkombination ist, so erkennt man, daß überhaupt jedes Ding endlich darstellbar ist; wenigstens ist nicht einzusehen, warum ich ihm nicht eine bis jetzt sinnlose

Kombination soll zuordnen können. Endliche Darstellbarkeit hat also nur, auf abzählbare Mengen angewandt, einen vernünftigen Sinn, nicht aber, wenn von einzelnen Dingen die Rede ist. —

XXIV.

Ultrafinite Paradoxieen.

§ 96. Wir kommen nun zu einem ernsthaften Mangel, der den mengentheoretischen Betrachtungen in ihrer allgemeinen Durchführung anhaftet. Er besteht in der Ungeklärtheit des Begriffs der Menge selbst. Wir kennen unendliche Mengen, auf die unsere Betrachtungen widerspruchsfrei anwendbar sind, aber wir haben bisher keine Kenntnis derjenigen Eigenschaften, die der Definition einer Menge zu eigen sein müssen, damit diese Widerspruchslosigkeit gewährleistet ist. Daß solche vorhanden sein müssen, können wir durch die Existenz paradoxer Mengen zeigen. Da der Ausgangspunkt der Mengenlehre ein rein logischer zu sein scheint, nehmen auch die Paradoxieen, auf die wir stoßen, zum Teil einen rein logischen Charakter an, wie das Paradoxon von Russell. Diese sind aber wieder ungefährlich, da sich die in ihnen auftretenden Begriffe als unscharf nachweisen lassen. Eine ernste Schwierigkeit liegt dagegen in dem Paradoxon einer anscheinend mathematisch definierten Menge, die wir an zweiter Stelle betrachten wollen.

Von den paradoxen Mengen, die wir hier untersuchen, läßt sich leicht zeigen, daß sie von größerer Mächtigkeit als jedes Alef sind. Wie nun unendliche Mengen bei der Anwendung des endlichen Anzahlbegriffs Paradoxieen ergeben, so scheint wiederum bei Mächtigkeiten, die über jedes Alef hinausgehen, die Anwendung der transfiniten Mächtigkeitslehre zu versagen. Ob der Grund dafür in gewissen unentdeckten Axiomen des Transfiniten oder aber in der Definition der paradoxen Mengen selbst steckt, die dann gar nicht existieren würden, das ist noch unentschieden. Wir wollen diese Art Mengen und die ihnen eigenen Widersprüche als **ultrafinit** bezeichnen, hiermit das Wort **transfinit** auf Mengen beschränkend, auf die die Lehre vom Transfiniten anwendbar ist. Der Vorschlag, das Wort „Menge“ selbst für widerspruchsfreie Mengen zu reservieren, ist noch nicht zu allgemeiner Anerkennung durchgedrungen. Auch kann ich mich ihm hier darum nicht anschließen, weil die paradoxen Begriffe, von denen ich berichten werde, allgemein unter den Namen: „**Menge** aller Mengen“, „**Menge** aller Ordnungszahlen“ bekannt sind.

§ 97. Bei der Wohlordnung lernten wir die Operation $+1$ kennen, die im Anhängen eines Elementes besteht. Darin liegt die stillschweigende Annahme, daß man zu jeder Menge noch ein Element hinzufügen kann. Betrachtet man aber die „Menge aller Dinge“, so sieht man, daß diese Annahme eine Beschränkung des Mengenbegriffs enthält. Ferner war in Kap. VIII bewiesen, daß die Menge M aller Teilmengen von M höhere Mächtigkeit hat, als M selbst. Dieser Satz kann für die Menge **aller** Dinge nicht gut zutreffen, da es offenbar keine Menge von höherer Mächtigkeit geben kann. Betrachten wir den in § 24 geführten Beweis näher, so sehen wir, daß wir ihn an unserem Beispiel wesentlich vereinfachen können. Nennen wir zunächst die Menge aller Dinge $\mathfrak{D}$. Jede Teilmenge von $\mathfrak{D}$ ist eine Menge, also ein Ding (nämlich ein Gegenstand des Denkens), also in $\mathfrak{D}$ als Element enthalten. Wir brauchen darum nicht erst anzunehmen, daß eine besondere Zuordnung zwischen den Dingen und den Teilmengen von $\mathfrak{D}$ hergestellt werde: wir ordnen jede Teilmenge sich selbst zu, d. h. wir wählen die Identität als Zuordnung.

Der Beweis des § 24 betrachtet nun die Teilmenge Y aller Dinge von $\mathfrak{D}$, die in den ihnen zugeordneten Teilmengen nicht enthalten sind. Ist daher X eine Teilmenge von $\mathfrak{D}$, so haben wir zu fragen: Ist X in sich selbst enthalten? Wenn ja, so rechnen wir es zu einer Menge X, wenn nein, zu Y. Y ist also die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten. Solche Mengen gibt es. Z. B. jedes Element von $\mathfrak{G}$ ist eine ganze Zahl, $\mathfrak{G}$ selbst aber nicht. $\mathfrak{G}$ enthält sich daher nicht. —

Der Schluß des § 24 nimmt jetzt folgende Gestalt an:

1) Y enthalte sich selbst, d. h. es befinde sich unter den Mengen, die wir zu Y rechnen. Wir rechnen aber zu Y diejenigen Mengen die sich nicht selbst enthalten.

2) Y enthalte sich nicht selbst, so ist es eine der Mengen, die wir zu Y rechnen, daraus aber folgt: Y enthält sich selbst.

Dies ist das Russelsche Paradoxon[1] von der Menge der Men-

---

[1] Russell, The Principles of Mathematics. Russell hat dort das Paradoxon auf die verschiedensten logischen Formen gebracht, von denen die folgende hier wiedergegeben sei (§ 78. l. c.):

Jedes Prädikat a (im logischen Sinne) läßt sich entweder von sich selbst aussagen und möge dann der Kürze halber als „prädikabel“ bezeichnet werden, oder es läßt sich nicht von sich selbst aussagen, dann möge es „imprädikabel“ heißen. Das Prädikat „denkbar“ ist prädikabel, denn es ist selbst denkbar. Das Prädikat „tugendhaft“ ist „imprädikabel“, denn es ist selbst nicht tugendhaft.

Die Disjunktion zwischen prädikabel (p) und imprädikabel (i) ist vollständig: Jedes Prädikat a ist entweder p, d. h. a ist a, oder es ist i, d. h. a ist *non*-a. Demnach ist auch das Prädikat i = imprädikabel entweder i oder p. Ist es aber prädikabel (p), so heißt das: „i ist i“, im Widerspruch mit „i

gen, die sich nicht selbst enthalten. Es ist nicht speziell mathematisch, daher auch dem Laien verständlich, aber zugleich ungefährlich für den Mathematiker, der ja mit der Menge aller Dinge nichts zu tun hat.

Die Lösungsversuche des Russelschen Paradoxons[1] sind durchweg Problemverschiebungen, wie der folgende: „Eine Menge ist von jedem einzelnen ihrer Elemente verschieden[2]. Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, ist daher die Menge aller Mengen überhaupt. Diese aber existiert nicht, da sie ja, als Menge, eines ihrer Elemente sein müßte.“ Hier wird aus der Paradoxie auf die Nichtexistenz der Menge geschlossen. Die formale Vereinfachung des Paradoxons nimmt diesem Schluß weder die Banalität, noch den Charakter des Zirkels, der durch den Anspruch hinzukommt, das Paradoxon zu erklären.

§ 98. Da die „Menge aller Dinge“ auch mathematisch nicht-definierbare Objekte enthält, braucht ihre Paradoxie den Mathematiker nicht sonderlich zu beunruhigen. Leider gibt es aber auch rein-mathematisch definierte Mengen, die in sich wider-

---

ist p“. Und ist es imprädikabel, (i ist i), so ist es damit von sich selbst ausgesagt, also prädikabel (p).

In dieser rein logischen Form ist das Paradoxon von Unendlichkeitsfragen frei, wenigstens formal. Man möge danach den Wert der Behauptung beurteilen, die Mathematik verdanke ihre Sicherheit lediglich der Logik.

[1] Die kurz vor Beendigung des Drucks erschienene Arbeit Poincarés (Revue de Métaphysique et de Morale XIV, 3) konnte leider nicht mehr berücksichtigt werden. Ihre Bedeutung geht über das hier besprochene Problem weit hinaus.

[2] Auch dann, wenn sie nur ein Element enthält. Die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen z. B. enthält unendlich viele Dinge, die aus dem einen Ding $\mathfrak{G}$ bestehende Menge $\{\mathfrak{G}\}$ aber nur dieses eine Ding. $\{\mathfrak{G}\}$ ist also von $\mathfrak{G}$ verschieden.

spruchsvoll sind, und ich halte es für gewiß, daß diese Widersprüche denselben Ursprung haben, wie das Paradoxon von 𝔇. Als Typus solcher paradoxen Mengen kann die Menge W aller Ordnungszahlen bezeichnet werden. Daß sie paradox ist, ergibt unser Satz XXXIII, nach dem W eine nicht in ihr enthaltene Ordnungszahl definieren müßte, die andererseits in W als der Menge aller Ordnungszahlen enthalten wäre.

In der Tat: Nach Satz XXXII ist W wohlgeordnet. Der Ordnungstypus ξ von W wäre daher ein Element von W; der Abschnitt dieses Elementes hätte nach Satz XXX den Ordnungstypus ξ, d. h. W wäre einem seiner Abschnitte ähnlich, gegen Satz XXIII.

Die erste Veröffentlichung über diese Paradoxie stammt von Herrn Burali-Forti. Nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein ist sie aber Georg Cantor schon früher bekannt gewesen. Ich halte sie für auch heute noch völlig ungelöst und werde keinen Versuch machen, sie zu beheben. Dagegen ist es notwendig, die einzelnen Lösungsversuche kurz zu besprechen.

Erster Versuch: Jeder Abschnitt von W ist wohlgeordnet, W selbst nicht.

Wir haben bereits gezeigt, daß W wohlgeordnet ist. Außerdem würde aus der Wohlordnung jedes Abschnittes von W ohne weiteres die Wohlordnung von W folgen.

Zweiter Versuch: W ist wohlgeordnet, hat aber keinen Ordnungstypus. Dieser Aussage vermag ich keinen Sinn abzugewinnen. Die Aussage, daß eine wohlgeordnete Menge M einen Ordnungstypus μ besitzt, behauptet, daß eine Menge M' existiert, der M ähnlich ist. Da nun auf alle Fälle M zu sich selbst ähnlich ist, definiert jede wohlgeordnete Menge einen Ordnungstypus.

Dritter Versuch: Es ist nicht möglich, ein Element m hinter die Menge W zu ordnen, d. h. die Vereinigungsmenge $(W+m)$ so zu ordnen, daß m auf alle Elemente von W folgt. Auch den Sinn dieser Behauptung vermag ich nicht zu verstehen. Sind a, b zwei verschiedene Elemente der Vereinigungsmenge $(W+m)$, so sind entweder beide in W oder eines von ihnen ist mit m identisch, das andere in W. Das Zeichen $a \prec b$ möge im ersten Fall den bekannten Sinn haben, im zweiten Fall möge es die Behauptung aussprechen, daß b dasjenige der beiden Elemente sei, welches mit m identisch ist. Durch diese Festsetzung ist faktisch m hinter alle Elemente von W geordnet; ein Beweis, daß solches unmöglich sei, kann also nur davon ausgehen, daß die Bildung der Vereinigungsmenge $(W+m)$ bereits ohne jede Ordnungsfestsetzung unmöglich ist. Dies ist in der Tat der

Vierte Versuch: Es ist nicht möglich, die Vereinigungsmenge $(W+m)$ zu bilden. Diese Behauptung ist direkt falsch, wenn nicht etwa W mit der Menge $\mathfrak{D}$ identisch ist, die doch alle Dinge, nicht nur Ordnungszahlen enthält. Aus der Tatsache allein, daß m hinter W geordnet werden und dadurch zu einem Widerspruch Anlaß geben könnte, läßt sich auf die Nichtexistenz von $(W+m)$ nur durch folgenden Zirkel schließen:

„$(W+m)$ enthält einen Widerspruch. Er rührt davon her, daß diese Menge nicht gebildet werden darf. Sie darf aber darum nicht gebildet werden, weil sie einen Widerspruch enthält."

Übrigens wird durch das Verbot der Bildung von $(W+m)$ nichts gewonnen. Ordnet man nämlich[1] das erste Element 0 von

[1] Durch die Vorschrift: $\alpha \prec \beta$ bedeute, daß α von β verschieden ist, und zwar, wenn beide von 0 verschieden sind, daß $\alpha \prec \beta$ ist, dagegen, wenn eine der beiden Zahlen die 0 ist, daß β diese Zahl bezeichnet.

W hinter den mit 1 beginnenden komplementären Rest W' von W, so erhält man, da W' zu W ähnlich ist, eine wohlgeordnete Menge von höherem Typus als W. Endlich bedeuten die beiden letzten Versuche nichts anderes als eine Anfechtung des ersten Erzeugungsprinzips, das im Anhängen eines Elementes besteht. Damit wird die Bildung von W selbst fraglich, und sofern die besprochenen Versuche das Ziel verfolgen, die Widerspruchslosigkeit von W zu retten, gleichen sie daher dem Verfahren des Mannes, der den Ast absägt auf dem er sitzt, oder jenes Ehepaares, das aus seinem brennenden Hause Stiefelknecht und Mausefallen rettet, das Kind aber vergißt.

Die Menge W selbst ist übrigens gegen alle Ehrenrettungen im höchsten Grade undankbar. So bemühen sich im 60sten Bande der mathematischen Annalen gleichzeitig Bernstein und Jourdain um ihre Widerspruchslosigkeit, wobei der erste auf Grund der Eigenschaften von W beweist, daß es Mengen gibt, die nicht wohlgeordnet werden können, während dem zweiten der Beweis des Gegenteils gelingt.

§ 99. Das Paradoxon der Menge W erinnert an diejenigen Antinomieen, die nach Kant entstehen, wenn wir die Natur als ein abgeschlossenes Ganze betrachten. Nach Fries entspringt ferner die Unendlichkeit des Raumes, der Zeit und der Zahlenreihe daraus, daß sie als formale Bedingungen der Erfahrung deren unvollendbaren Charakter widerspiegeln müssen. Wie weit diese Argumentation durch die mengentheoretischen Entdeckungen beeinflußt werden mag, — ob dies der Fall ist, muß hier außer Betracht bleiben, — sie ist jedenfalls auf die Mengen $\mathfrak{D}$ und W mit aller Schärfe anwendbar. Die Menge aller Dinge ist kein abgeschlossenes Ganze, weil unsere Erkenntnis jederzeit unabgeschlossen ist, und die Menge W ist als formales „Gerippe“ des unvollendbaren Prozesses der Bildung wohlgeordneter Mengen selbst unvollendbar. Nicht das Operieren mit den Begriffen W und $\mathfrak{D}$ ist die Quelle der Widersprüche, vielmehr sind diese Begriffe selbst unhaltbar. Hiermit soll eine Lösung des Paradoxons nicht gegeben sein, wir werden vielmehr die Schwierigkeit sofort an einer anderen Stelle auftreten sehen. Aber sie erscheint dort nicht mehr unbehebbar.

Es fehlt uns bis heute völlig an einer tiefgehenden Kritik des Mengenbegriffs. Die Leichtigkeit, mit der sich mit Zahlen- und Punktmengen einwandfrei operieren läßt, hat zu einem unberechtigten Vertrauen auf die Zulässigkeit des Zusammenfassens unendlich vieler Dinge zu einer Menge geführt. Wenn wir daher die Menge aller Ordnungszahlen als widerspruchsvollen Begriff erkennen, sind wir aufs höchste befremdet, da im Begriff der transfiniten Ordnungszahl ein Widerspruch nicht zu entdecken ist. Die Operation des Zusammenfassens galt vor Entdeckung der Mengenlehre nur für eine endliche Anzahl von Individuen als zulässig. Unendliche Mengen hielt man für schlechtweg paradox. Diese einfache Scheidung ist heute hinfällig geworden, aber paradoxe Mengen existieren noch immer. Wenn wir daher konstatieren, daß die Zusammenfassung aller Ordnungszahlen zu einer Menge unzulässig ist, so sind wir nicht in der Lage, diese Unzulässigkeit aus den Begriffen „Menge“ und „Ordnungszahl“ zu beweisen, wir müssen uns lediglich mit dem Faktum des Widerspruchs begnügen.

Nimmt man den im vorigen Paragraphen besprochenen vierten Vorschlag an, so entsteht ein analoges Problem für die mengentheoretischen Operationen, insbesondere das Verbinden zweier Mengen. Es ist leicht einzusehen, daß hierdurch die ganzen Ergebnisse der Mengenlehre mit einem großen Fragezeichen versehen werden. Denn wenn die elementarsten Voraussetzungen unbekannte Grenzen ihrer Zulässigkeit haben, gilt das Gleiche von allen darauf gestützten Folgerungen. Ganz anders, wenn das Fragezeichen an den Begriff der Menge gesetzt wird. Dann wissen wir zwar nicht, was alles in den Bereich der Mengentheorie fällt; wir wissen aber von einzelnen Mengen, z. B. den beiden ersten Zahlklassen, daß sie dazu gehören, und für diese bleiben daher alle unsere Folgerungen in Kraft. In der Tat kann das Paradoxon von W an den Ergebnissen der ersten vier Teile unseres Referates nicht rütteln, insbesondere nicht an den allgemeinen Sätzen über Ordnungszahlen, die im Bereich der zweiten Zahlklasse sicher richtig sind und ebenso für jede weitere, die als widerspruchsfreie Menge gelten darf.

Die Menge aller Ordnungszahlen ist nur ein typisches Beispiel paradoxer Mengen. Aus jeder zu ihr ähnlichen Menge muß ein analoger Widerspruch entspringen. Dies ist in der Tat der Fall für die Mengen aller Hauptzahlen, aller ε-Zahlen, ebenso für die Menge aller Alefs. Und nicht nur der Ordnungstypus dieser Mengen, sondern auch ihre Mächtigkeit besitzt die widerspruchsvolle Eigenschaft, letzte ihrer Art zu sein: Die Mächtigkeit von W wäre größer als jedes Alef, obwohl sie selbst ein Alef sein müßte. Diese Tatsache mag die Bezeichnung „ultrafinit“ rechtfertigen.

XXV.

Auswahlprinzipien.

§ 100. Ist eine Menge gegeben, so kann man aus ihr ein Ding auswählen, aus der übrigbleibenden Teilmenge ein zweites, sodann wieder ein drittes; eine endliche Menge läßt sich auf diesem Wege erschöpfen und wird dadurch zugleich wohlgeordnet. An einer unendlichen Menge kann das Verfahren bis zu jeder endlichen Zahl fortgesetzt werden.

So einleuchtend diese Tatsache ist, so enthält sie doch ein Postulat, das noch nicht einmal leicht zu formulieren ist. Im allgemeinen wird dieses Postulat der Auswahl eines Dinges dahin verstanden, daß man ein Ding der Menge angeben kann. Und man pflegt es auch in speziellen Beispielen als erfüllt nachzuweisen. So beruht der Cantorsche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen zunächst auf der Abzählbarkeit der abgebraischen und der Nichtabzählbarkeit aller reellen Zahlen. Sieht man ihn genauer an, so werden tatsächlich transzendente Zahlen durch eben diesen Beweis der Nichtabzählbarkeit vermittelst des Diagonalverfahrens angegeben. Aber es kann nicht behauptet werden, daß der Existenznachweis jeder Menge stets ein Element anzugeben gestatten müsse, wenn es auch anscheinend bisher in fast allen Fällen zutrifft. Hierbei stößt man offenbar auf die Frage, welcher Unterschied zwischen Existenz und logischer Möglichkeit besteht. Wir werden sehen, daß unter Anerkennung gewisser unendlicher Auswahlen bewiesen werden kann, daß jede Menge, z. B. auch das Kontinuum, wohlgeordnet werden kann. Wenn eine Menge wohlgeordnet werden kann, so ist ihre Mächtigkeit ein Alef, $\aleph_\alpha$. Die Menge M aller ihrer Wohlordnungen besitzt alsdann die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$. Es läßt sich also etwas über M aussagen ohne daß man eines ihrer Elemente kennt. Faktisch ist bis heute keine Wohlordnung des Kontinuums bekannt. Darf man trotzdem ihre Existenz oder aber nur ihre logische Möglichkeit annehmen? Diese Frage kann ich nicht entscheiden. Ich bin aber der Ansicht, daß man den Unterschied zwischen einer Menge, von der ein Element angebbar ist, und einer als logisch möglich erkannten Menge dadurch nicht beseitigt, daß man beide als existierend bezeichnet.

Auf die logische Möglichkeit der Wohlordnung des Kontinuums stützt sich ein Satz aus der allgemeinen Funktionentheorie, an dem uns hier nur der Beweis interessiert. Es muß nämlich bei diesem Beweis vorausgesetzt werden, daß eine bestimmte Wohlordnung des Kontinuums vorliegt. In dieser Voraussetzung steckt offenbar eine erweiterte Fassung unseres Auswahlpostulates, die etwa in folgender Weise ausgesprochen werden kann: Ist eine Menge M logisch widerspruchslos definiert, so enthält die Annahme, daß eines ihrer Elemente gegeben sei, keinen logischen Widerspruch.

In dieser Fassung ist das Postulat noch nicht trivial. Beispielsweise die Menge der endlich nicht darstellbaren Zahlen genügt ihm nicht. Dies war auch einer der Gründe, mit denen das Paradoxon der endlichen Darstellung abgetan werden konnte. Ein gleiches gilt von der problematischen Menge derjenigen Irrationalzahlen, über deren Transzendenz oder Nichttranszendenz eine Entscheidung unmöglich ist. Unsere ganze Betrachtung dieser Menge hatte den Nachweis dieser Tatsache zum Zweck.

Ob und wie weit die letzte Fassung des Postulates der einmaligen Auswahl brauchbar und zulässig ist, muß ich dahingestellt sein lassen. Es kam mir nur darauf an, Beispiele für die verschiedenen Fassungen anzuführen.

§ 101. Aus der Möglichkeit, ein Element auszuwählen, folgt, wie wir sahen, die Möglichkeit jeder endlichen Auswahl und zugleich die Wohlordnung der ausgewählten endlichen Menge. Die Wohlordnung ist nun für endliche Mengen etwas Gleichgültiges, da sie, wenn nicht gegeben, jederzeit hergestellt werden kann.

Aber auch die Idee einer Auswahl hat mit der Wohlordnung nichts zu thun. Wenn ich drei Elemente a, b, c auswähle, so kann es mir unter Umständen ganz gleichgültig sein, in welcher Reihenfolge dies geschieht. Beurteile ich die Auswahl in diesem Sinne, so werde ich alle Auswahlen als gleichwertig betrachten, die dieselbe Teilmenge liefern, so daß Teilmengen und Auswahlen korrespondierende Begriffe werden. Das Auswählen selbst ist nur ein Verfahren, das ich zur Herstellung einer Teilmenge verwende. Bei endlichen Mengen ist dieses Verfahren zweifellos hinreichend zur Erzeugung der Menge aller Teilmengen, die ja selbst endlich ist; und wenn ich bei der Auswahl einer Teilmenge von der Reihenfolge absehe, so ist diese Auswahl nichts anderes, als eine einmalige Auswahl eines Elementes aus der Menge aller Teilmengen.

Die konsequente Ausdehnung des Auswahlprinzips auf unendliche Mengen führt daher zu dem Postulat der Existenz der Menge aller Teilmengen. Da seine Zulässigkeit angefochten worden ist, ist es jedenfalls praktisch erforderlich, dieses Postulat aufzustellen.

Betrachten wir insbesondere die Menge der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}$. Jeder Teilmenge ist eindeutig eine Zahl des Kontinuums zugeordnet, und die Umkehrung gilt auch, von einem unwesentlichen Ausnahmefall abgesehen. (Vgl. § 53). Wenn also die Existenz des Kontinuums, in welchem Sinne sie auch gemeint sei, zugegeben oder angefochten wird, so gilt das gleiche von der Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$. Da allgemein das erste zutrifft, haben wir hier einen Fall, in dem unser Postulat erfüllt ist.

Die Menge aller Teilmengen des Kontinuums wird schon mit mehr Berechtigung angegriffen, da man von ihr nicht viel weiß. Von ihrer Existenz kann man nur reden, wenn man den Begriff dieser Existenz schärfer faßt. Man übersieht leicht, daß die ganze Frage in engem Zusammenhange mit dem Kontinuumproblem steht.

§ 102. Da die Menge aller Teilmengen von M nichts anderes ist, als die Belegungsmenge 2^M, so ist das Postulat ihrer Existenz in einem allgemeineren Postulat enthalten, welches die Existenz der Belegungsmenge N^M zweier existierenden Mengen M und N verlangt. Eine wichtige Anwendung dieses Postulates ist nicht bekannt, wenn von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{G}}$ abgesehen wird, einer Menge, die sich wieder als das Kontinuum interpretieren läßt. (Vgl. § 52). Doch steckt das Postulat implizite im allgemeinen Funktionsbegriff, da die Menge aller Funktionen die Belegungsmenge des Kontinuums mit sich selbst ist.

Die Belegungsmenge ist ein spezieller Fall der Verbindungsmenge einer unendlichen Menge M von Mengen N. Diese war so definiert: keine zwei der Mengen N sollen ein Element gemeinsam haben. Element der Verbindungsmenge heißt eine Menge M' von folgender Eigenschaft: Sie ist zu M aequivalent, und ist n das Element von M', welches dem Element N von M entpricht, so ist n ein Element von N. Wenn alle Mengen N zu ein und derselben Menge P aequivalent sind, geht die Verbindungsmenge in die Belegungsmenge P^M über. Postulieren wir die Existenz der Verbindungsmenge unendlich vieler Mengen, so ist darin wieder die Existenz der Belegungsmenge enthalten. Gibt es eine Menge P von der Eigenschaft, daß jede der Mengen N einem Teil von P aequivalent ist, — und eine solche ist die Vereinigung aller Mengen N, — so folgt umgekehrt die Existenz der Verbindungsmenge aus der der Belegungsmenge. Wir haben es also hier nicht mit einem wesentlich neuen Postulat zu thun.

Alle diese Postulate können als Auswahlprinzipien bezeichnet werden, insofern ihre Gültigkeit, d. h. die Existenz der postulierten Mengen, an endlichen Mengen durch willkürliche Auswahl bewiesen werden kann. Man bezeichnet jedoch mit dem Namen des Auswahlprinzipes schlechthin ein Postulat, welches in dem zuletzt genannten enthalten ist und anscheinend weniger fordert. Dieses Auswahlprinzip *κατ' ἐξοχην* verlangt, daß mindestens ein Element der Verbindungsmenge existieren soll. Das heißt, ausführlich dargestellt: Ist eine Menge M gegeben, deren Elemente N selbst Mengen sind, so gibt es eine Menge M', die aus jeder Menge N ein und nur ein Element enthält. — Man kann sich hierin leicht von der Voraussetzung frei machen, daß die Mengen N kein Element gemeinsam haben sollen, und erhält dann diejenige Formulierung, der das Prinzip den Namen des „Auswahlprinzips" verdankt: „In einer Menge M von Mengen N ist es möglich, aus jeder Menge N ein Element auszuwählen." Dieses Postulat ist nicht nur für endliche Mengen nachweislich erfüllt, sondern auch für jede Menge M von wohlgeordneten Mengen N. In diesem Fall kann eine Auswahl durch die Festsetzung getroffen werden, daß M' aus den ersten Elementen der Mengen N bestehen soll.

§ 103. Hiermit haben wir die wichtigsten Auswahlprinzipien genannt, die eine Wohlordnung oder sonst irgend eine Ordnung nicht postulieren. Diese Bemerkung ist wichtig, weil solche Prinzipien, die mit der Auswahl zugleich die Wohlordnung der ausgewählten Elemente verlangen, wesentlich enger sind, als die hier genannten. Wir gelangten zu den bisher betrachteten Prinzipien, indem wir zwei Auswahlen nur dann als verschieden ansahen, wenn die ausgewählten Teilmengen verschieden waren.

Unter diesem Gesichtspunkt erscheint auch eine Auswahl von mehreren Elementen nur als eine einzige Auswahl. Gehen wir jetzt dazu über, eine zunächst endliche Auswahl in eine endliche Reihe geordneter Auswahlen zu zerlegen, und betrachten wir zwei Auswahlen derselben Teilmenge als verschieden, wenn die Elemente dieser Teilmenge in verschiedenen Reihenfolgen ausgewählt werden, so gelangen wir zu Postulaten, die nicht nur die Existenz, sondern auch die Wohlordnung gewisser Teilmengen fordern. Sie sind zweifellos für eine endliche Teilmenge zulässig. Ist nun die Menge, aus der ausgewählt wird, unendlich, so ist es prinzipiell möglich, jede endliche Teilmenge aus ihr auszuwählen. Doch ist es klar, daß dieser Prozeß nicht als vollendbar gedacht werden kann, es sei denn, daß man ein neues Postulat hinzufügt. Dieses wird nur dahin formuliert werden können, daß eine Vorschrift existiert, welche jeder ganzen Zahl n ein Element $\varphi(n)$ von M eindeutig zuordnet, derart, daß $\varphi(n)$ von $\varphi(m)$ verschieden ist, wenn n von m verschieden ist. Es liegt gegen dieses Postulat, nach welchem man aus einer unendlichen Menge stets eine Teilmenge vom wohlgeordneten Typus ω soll auswählen können, kein anderes Bedenken vor, als das seiner Unfruchtbarkeit. Es nimmt nämlich den Satz vorweg, dessen Beweis ein wichtiges Problem der Mengenlehre bildet: daß jede unendliche Menge transfinit, d. h. einer Teilmenge äquivalent ist. (Vgl. § 14) Zu einer Zeit, als man den Auswahlpostulaten nicht mit so scharfer Kritik gegenüberstand, wie heute, galt die Plausibelmachung unseres Postulates als Beweis des genannten Satzes. Man schloß aus der Möglichkeit, jede endliche Menge aus M auswählen zu können, auf die Möglichkeit, ω auszuwählen, übersah aber dabei, daß dieser Prozeß, sofern die Willkür dabei im Spiele ist, kein Ende nimmt. In der Tat, soll der Beweis des Satzes XI in § 15 einsetzen können, so muß von jedem Element in M feststehen, ob es zu der ausgewählten Menge vom Typus ω gehört oder nicht. Diese Auswahl muß daher vollendet sein, und das ist niemals der Fall, wenn ich Element nach Element willkürlich herausgreife[1].

§ 104. Man kann nun das Postulat der Auswahl des Typus ω in der Weise verallgemeinern, daß man fordert: **Jede Auswahl, die möglich ist, soll nach dem Typus ω iteriert werden können.** Wenn ich also ein Element auswählen kann, kann ich auch ω Elemente auswählen; kann ich ω Elemente auswählen, so kann ich auch ω-mal ω Elemente auswählen, d. h. eine Menge vom Typus ω^2. Analog kann ich den Typus ω^3, ω^4, ... und nach meinem Prinzip auch ω^ω auswählen. Dies kann ich fortsetzen, und zwar ohne zu einem Ende zu gelangen, es sei denn die Menge werde erschöpft. In diesem Fall ist die ausgewählte Menge mit der gegebenen identisch, aber sie ist jetzt wohlgeordnet. Gelange ich zu keinem Ende, so kommt der Pferdefuß zum Vorschein: Dann wird **jeder** Ordnungszahl ein Element von M zugeordnet, und es besitzt danach M eine zu W ähnliche Teilmenge.

Es ist schon paradox, auf diese Weise dem Verfahren, das zu keinem Ende gelangt, schließlich doch ein Ende beizubringen. Aber diese Paradoxie ist im Begriff der Menge W begründet, und es ist von vornherein klar, daß mit der Möglichkeit einer zu W äquivalenten Teilmenge in M dem Widersinn Tür und Tor geöffnet wird. Der harmloseste Fall ist noch der, daß diese Teilmenge

[1] Auch die unendlich vielen Ziffern eines Dezimalbruches können successive durch Willkur festgesetzt werden, z. B. nach dem Vorschlag eines verstorbenen, angesehenen Mathematikers durch Auswürfeln. Aber eine Aussage über die dadurch definierte Zahl, die nur für diese Zahl gälte, wäre erst möglich nach Vollendung des Prozesses, und dieser ist unvollendbar. —

mit M identisch, also M nach dem Typus W wohlgeordnet ist. Dann partizipiert M an allen Paradoxieen von W, bringt aber wenigstens keine neuen hinzu. Nimmt man aber gar an, es bestehe M aus einer zu W äquivalenten Teilmenge M_1 und einer komplementären Menge M_2, so steht man vor folgender Alternative: Entweder die Menge M_2 kann nun nicht mehr wohlgeordnet werden (denn sonst käme man über W hinaus), oder M_2 kann doch noch wohlgeordnet, aber nicht mehr so an M_1 angehängt werden, daß das ganze wohlgeordnet ist. Die Paradoxie des zweiten Falls war schon bei der Paradoxie von W selbst besprochen. Im ersten Fall dagegen wird das Postulat, von dem wir ausgingen, selbst umgestoßen, da es eine Menge M_2 gibt, auf die das Auswahlprinzip nicht mehr anwendbar ist.

Aber zwischen diesen Alternativen bietet sich noch ein Ausweg, wenn er auch schon zur reinen Selbstironie führt. Man kann nämlich W jeden anderen Typus voransetzen, ohne daß sich W erhöht. Denn zu jedem Typus α gibt es einen nächsthöheren Haupttypus $\alpha\omega$; dieser ist Abschnitt in W, und da $\alpha + \alpha\omega = \alpha\omega$ ist, folgt unsere Behauptung.

Nehmen wir also an, auch M_2 lasse sich successive wohlordnen, hängen aber die dabei entstehenden ausgewählten Mengen nicht mehr an W an, da uns dies im Interesse der Existenz von W verboten ist, setzen sie vielmehr vor M_1 voran. Wie weit dies Verfahren iteriert werden kann, will ich lieber nicht erörtern. Sollte es dafür eine Grenze geben, so können wir noch andere Wege einschlagen, z. B. indem wir hinter jedes Element von W, mit Ausnahme eines etwa vorhandenen endlichen Restes, eine endliche Zahl von Elementen einfügen, wodurch sich bekanntlich der Typus auch nicht erhöht.

§ 105. Es hat keinerlei Wert, diese Gedankenreihe weiter auszuspinnen. Das Vernünftigste ist noch, den paradoxen Fall als unmöglich auszuschließen und zu konstatieren, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Sehen wir uns aber den Beweis dieser Behauptung an, so erkennen wir, daß er einem Zirkel bedenklich ähnlich ist. Unser Postulat fordert nämlich erstens die Existenz einer Menge von Dingen, die „Auswahlen" genannt werden, und diese Menge ist so definiert, daß sie wohlgeordnet ist. Zweitens verlangt unser Postulat, daß jede einzelne Auswahl ein Element aus M herausnimmt, d. h. daß jedem Ding der Menge der Auswahlen ein Ding von M zugeordnet werden kann. Dies alles läuft auf die Forderung hinaus, daß eine wohlgeordnete Menge existiert, der die Elemente von M umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können; dadurch wird aber M wohlgeordnet, d. h. um die Möglichkeit der Wohlordnung von M zu beweisen, haben wir ein spezielles Verfahren zur Herstellung dieser Wohlordnung postuliert.

Bedenkt man noch, daß auch bei diesem erweiterten Postulat der wiederholten Auswahl in einem gegebenen Einzelfall ein Gesetz existieren muß, welches die Reihenfolge der auszuwählenden Elemente vorschreibt, so erkennt man, daß hier der gleiche Zirkel vorliegt, durch den man aus dem Postulat der wiederholten einmaligen willkürlichen Auswahl beweist, daß jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält.

In jüngster Zeit ist man gegen die Verwendung der Auswahlprinzipien recht mißtrauisch geworden und betrachtet alle mit ihrer Hülfe geführten Beweise mit kritischem Blick. Die zuerst betrachteten Auswahlpostulate, die, vom Begriff der Ordnung unabhängig, die Existenz gewisser Mengen, z. B. der Menge aller Teilmengen, der Menge aller Belegungen oder der Menge der

„ausgezeichneten" Elemente fordern, sind alle für spezielle Fälle unentbehrlich: z. B. beruht der Beweis, daß es keine höchste Mächtigkeit gibt, auf dem Teilmengenpostulat oder auf dem allgemeineren der Existenz der Belegungsmenge. Der Beweis dagegen, daß eine Menge von komplementären Teilmengen in M nicht höhere Mächtigkeit als M besitzt[1], wird dadurch geführt, daß man sich aus jeder Teilmenge ein Element ausgewählt denkt. Daß insbesondere die Existenz des Kontinuums mit der aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$ zusammenhängt, war bereits betont.

Von den Postulaten der wiederholten einfachen Auswahl ist dagegen bis jetzt keine brauchbare Anwendung gemacht worden, und man darf sie daher mit Recht ablehnen. —

XXVI.

Erzeugungsprinzipien.

§ 106. Man denkt sich die natürlichen Zahlen zumeist als Erzeugnisse des Zählprozesses, der in der Vermehrung um die Zahl Eins besteht. Da dieser Prozeß unvollendbar ist, könnte konsequenterweise die Menge der ganzen Zahlen nicht als abgeschlossenes Ganze betrachtet werden, wenn nicht die Mengenlehre diesen Abschluß forderte. Die Entdeckung, daß es höhere Mächtigkeiten des Unendlichen gibt, als die des Zählprozesses, hat in erster Linie bahnbrechend gewirkt, sodann aber auch die Entdeckung der allgemeinen wohlgeordneten Mengen mit der in ihnen enthaltenen Fortsetzung des Zählprozesses durch das Limesverfahren.

Von den verschiedenen Erweiterungen der Menge $\mathfrak{G}$ erfolgt die Einführung der rationalen Zahlen durch eine einheitliche, rein

[1] Von diesem Satz ist in diesem Referat kein Gebrauch gemacht worden.

formale Definition, ebenso die der Irrationalzahlen. Von einem Erzeugungsprinzip im Sinne des Zählprozesses kann hier nicht die Rede sein. Dagegen läßt sich die Erweiterung der Zahlenreihe in die höheren Zahlklassen hinein durch Erzeugungsprinzipien darstellen und historisch ging diese Methode, soweit die zweite Zahlklasse in Betracht kommt, der allgemeinen Theorie der wohlgeordneten Mengen voran. Den Namen „Erzeugungsprinzipien" halte ich in einer Hinsicht nicht für glücklich, insofern diese Prinzipien nicht ausreichen, die Eigenschaften der erzeugten Gebiete vollständig zu beweisen. Er ist aber eingebürgert und es läßt sich auch manches zu seinen Gunsten sagen.

Jede Limeszahl der zweiten Klasse ist Limes der Menge aller vorangehenden, also einer abzählbaren Menge. In § 45 ist gezeigt worden, daß sie auch Limes einer Menge vom Typus ω ist. Eine Zahl, die kein Limes ist, besteht aus einer Limeszahl und einem endlichen Rest, der durch das wiederholte Hinzufügen eines Elementes, d. h. durch den Zahlprozeß entsteht. Zur successiven Definition der zweiten Zahlklasse genügt es also, folgende beiden Operationen zu postulieren:

Erstes Erzeugungsprinzip: Hinzufügen eines Elementes zu einer bereits erzeugten Zahl.

Zweites Erzeugungsprinzip: Bildung des Limes über eine Reihe vom Typus ω bereits erzeugter Zahlen.

Das zweite Prinzip ist notwendig und hinreichend für die zweite Zahlklasse. Daß es auch nur für diese hinreicht, folgt aus dem Satz XL 4, dessen allgemeiner Beweis so große Schwierigkeiten bereitete. Aus ihm geht hervor, daß die Anfangszahl Ω_1 der dritten Klasse nicht Limes einer Reihe vom Typus ω sein kann. Denn alle Zahlen dieser Reihe müßten niederer als Ω_1, also von der Mächtigkeit $\aleph_0$ sein. Die Reihe selbst ist auch von dieser

Mächtigkeit, somit auch der Limes selbst, während Ω_1 von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist. Will man daher zu den Zahlen der dritten Klasse gelangen, so braucht man als drittes Erzeugungsprinzip den Limes über eine Reihe vom Typus Ω_1, und von diesem Prinzip läßt sich auf dem gleichen Wege zeigen, daß es zu allen Zahlen der dritten Klasse, nicht aber darüber hinaus führt. Man erhält durch diese Betrachtung die abzählbare Reihe von Erzeugungprinzipien der vierten, fünften, ... $n$ten Zahlklasse. Auf diese sämtlichen Zahlklassen folgt zunächst die „ω-te Klasse“ der Zahlen von der Mächtigkeit $\aleph_\omega$. Diese macht eine Ausnahme, wie alle Zahlklassen, deren Mächtigkeit einen Limes zum Index hat. Die Anfangszahl Ω_ω des $\aleph_\omega$ ist der Limes einer abzählbaren Reihe $\Omega_0 = \omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$, bedarf also nur des ersten Erzeugungsprinzips. Ist ferner α irgend eine Limeszahl der ωten Klasse, so ist sie auch Limes einer Reihe, deren Typus eine der Anfangszahlen $\omega, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ bis Ω_ω ist. (§ 45). Man erkennt aber leicht, daß mit Ω_ω selbst auch jede Reihe vom Typus Ω_ω einen Kern vom Typus ω besitzt. Ein Erzeugungsprinzip, welches die Existenz des Limes einer Reihe vom Typus Ω_ω forderte, ist also nicht erforderlich. Dafür ist aber in der Existenz der unendlichen Reihe der vorangehenden Erzeugungsprinzipien ein neues Postulat enthalten. Da diese Tatsache nur der Vollständigkeit halber erwähnt ist, sei auch noch bemerkt, daß unter den Limesmächtigkeiten die ζ-Zahlen eine Sonderstellung einnehmen. — Für die Mächtigkeit $\aleph_{\omega+1}$ muß wieder ein neues Erzeugungsprinzip postuliert werden. Die Reihe der Erzeugungsprinzipien ist ähnlich zu der der Mächtigkeiten, also vom Typus W. Man pflegt daher vielfach an Stelle der Existenz aller Ordnungszahlen die aller Erzeugungsprinzipien anzufechten.

§ 107. Es war behauptet, daß die Erzeugungsprinzipien nicht zum vollständigen Beweis aller Eigenschaften der erzeugten Gebilde ausreichen. Wir wollen, um das zu zeigen, die übliche Herleitung der ganzen Zahlen aus dem ersten Prinzip betrachten. Das erste Prinzip geht von folgenden Axiomen aus:

1. Es gibt eine Operation φ und ein Ding, genannt „die Eins“, 1. auf welches die Operation φ anwendbar ist.

2. Ist φ auf a anwendbar, so existiert auch $\varphi(\varphi(a))$.

Hiernach definieren wir die Zwei als $\varphi(1)$, die Drei als $\varphi(2)$ etc., wobei es zunächst belanglos ist, nach welchem Verfahren wir die Namen der erzeugten Elemente bilden. Daß wir durch die Operation φ dauernd neue Elemente erhalten, ist ein besonderes Axiom, dessen wir aber zunächst nicht bedürfen.

Nunmehr definieren wir die Operationen $+1$, $+2$, ... etc. durch folgende Festsetzungen: $a+1$ bedeutet $\varphi(a)$, $a+2$ bedeutet $\varphi(a+1)$, $a+3$ bedeutet $\varphi(a+2)$, ... allgemein ist $a+(n+1) = \varphi(a+n)$. Diese Definition ist eine typische Definition durch Induktion. Die Operation $+1$ ist die gegebene; jede weitere ist definiert durch

$$a+(n+1) = (a+n)+1. \tag{1}$$

Wir schließen daran sofort die Definitionen des Produktes und der Potenz:

$$(2) \quad a.1 = a, \qquad (3) \quad a.(n+1) = a.n+a$$
$$(4) \quad a^1 = a, \qquad (5) \quad a^{n+1} = a^n.a.$$

Um nun die bekannten Gesetze des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens zu beweisen, bedienen wir uns des Schlusses von n auf $n+1$.

A. Associatives Gesetz der Addition:

$$a+(b+c) = (a+b)+c. \tag{6}$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (1). Gilt es für $c = n$, d. h. ist $a + (b + n) = (a + b) + n$, so folgt:

$$\begin{aligned} (a+b)+(n+1) &= [(a+b)+n]+1 && \text{nach (1)} \\ &= [a+(b+n)]+1 && \text{nach Voraussetzung} \\ &= a+[(b+n)+1] && \text{nach (1)} \\ &= a+[b+(n+1)] && \text{nach (1),} \end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

B. Distributives Gesetz der Addition und Multiplikation:

(7) $$a(b+c) = ab + ac.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (3) und (2). Es sei ferner giltig für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a[b+(n+1)] &= a[(b+n)+1] && \text{nach (1)} \\ &= a(b+n)+a && \text{nach (3)} \\ &= (ab+an)+a && \text{nach Voraussetzung} \\ &= ab+(an+a) && \text{nach (6)} \\ &= ab+a(n+1) && \text{nach (3),} \end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

C. Associatives Gesetz der Multiplikation:

(8) $$a.(b.c) = (a.b).c.$$

Es gilt für $c = 1$ nach (2). Es gelte für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a.[b.(n+1)] &= a[bn+b] && \text{nach (3)} \\ &= a(bn)+ab && \text{nach (7)} \\ &= (ab)n+ab && \text{nach Voraussetzung} \\ &= (ab)(n+1) && \text{nach (3),} \end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

Die folgenden Gesetze des Potenzierens führen keine besonderen Namen, entsprechen aber dem distributiven und associativen Gesetz:

(9) $$a^{b+c} = a^b . a^c.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (5) und (4). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a^{b+(n+1)} &= a^{(b+n)+1} = a^{b+n} . a && \text{nach (1) und (5)} \\ &= (a^b . a^n) . a = a^b (a^n . a) && \text{nach Voraussetzung und (8)} \\ &= a^b . a^{n+1} && \text{nach (5).} \end{aligned}$$

(10) $$(a^b)^c = a^{bc}.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (4) und (2). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} (a^b)^{n+1} &= (a^b)^n . (a^b) = a^{bn} . a^b && \text{nach (5) und Voraussetzung} \\ &= a^{bn+b} = a^{b(n+1)} && \text{nach (9) und (3).} \end{aligned}$$

§ 108. Die Gesetze (6) bis (10) gelten auch für transfinite Zahlen; nicht so die jetzt folgenden:

Kommutatives Gesetz der Addition:

(11) Hilfssatz. $$a + 1 = 1 + a.$$

Er gilt für $a = 1$. Gilt er für $a = n$, so folgt:

$(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1)$ nach Voraussetzung und (1).

(12) $$a + b = b + a.$$

Die Formel gilt nach (11) für $b = 1$. Gilt sie für $b = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a + (n + 1) &= (a + n) + 1 = (n + a) + 1 && \text{nach (1) und Voraussetzung} \\ &= 1 + (n + a) = (1 + n) + a && \text{nach (11) und (6)} \\ &= (n + 1) + a && \text{nach (11).} \end{aligned}$$

(13) **Zweites distributives Gesetz:** $(a+b)c = ac+bc$.

Es gilt für $c = 1$ nach (2). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}(a+b)(n+1) &= (a+b)n + (a+b) \text{ nach } (3)\\ &= (an+bn) + (a+b) \text{ nach Voraussetzung}\\ &= (an+a) + (bn+b) \text{ nach } (12) \text{ und } (6)\\ &= a(n+1) + b(n+1) \text{ nach } (3).\end{aligned}$$

Kommutatives Gesetz der Multiplikation:

(14) Hilfssatz. $a.1 = 1.a$.

Er gilt für $a = 1$. Gilt er für $a = n$, so folgt:

$$(n+1).1 = n+1 = 1.n+1 = 1.(n+1) \text{ nach } (2), (3).$$

(15) $a.b = b.a$.

Die Formel gilt für $b = 1$ nach (14). Sie gelte für $b = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}a.(n+1) &= a.n+a = n.a+1.a \text{ (3, Voraussetzung, 14)}\\ &= (n+1)a \text{ nach } (13).\end{aligned}$$

Zum Schlusse beweisen wir noch die Formel:

(16) $(ab)^c = a^c.b^c$.

Sie gilt für $c = 1$ nach (4). Sie gelte ferner für $c = n$, so wird:

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n.(ab) = (a^n.b^n).(ab) && \text{nach (5) und Voraussetzung}\\ &= (a^n.a).(b^n.b) && \text{nach (15) und (8)}\\ &= a^{n+1}.b^{n+1} && \text{nach (5).}\end{aligned}$$

Die Beweise der Formeln (12, 13, 15, 16) gehen alle auf den speziellen Fall (11) des kommutativen Gesetzes der Addition zurück und sind daher in keiner Weise für transfinite Zahlen zu verallgemeinern, da bei diesen (11) nicht gilt. Dagegen gilt (14) noch allgemein.

§ 109. Die Übertragung der Beweise des § 107 auf transfinite Zahlen bedarf zunächst einer Erweiterung der Definitionen des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens. Diese wieder stützt sich auf die höheren Erzeugungsprinzipien, die in der Einführung des Limesbegriffes enthalten sind. Wir definieren alsdann:

$$a + \lim b = \lim (a + b) \tag{17}$$

$$a \,.\, \lim b = \lim (a \,.\, b) \tag{18}$$

$$a^{\lim b} = \lim (a^b) \tag{19}$$

Diese Formeln wurden im § 80 bewiesen; hier dienen sie als Definitionen. Die dritte hat Georg Cantor als Definition der Potenz beibehalten, während er die beiden ersten durch die Bildung der Vereinigungs- und Verbindungsmenge und ihre Wohlordnung ersetzte. In den Ausführungen der §§ 67 und 79 haben wir gesehen, daß auch die induktorische Definition der Potenz vermieden werden kann.

Um nun zu zeigen, daß die Gesetze (6) bis (10) auch für Limeszahlen gelten, wenden wir den charakteristischen Schluß vom Abschnitt auf den Limes an. Eine Limeszahl $c = \lim \lambda$ ist Limes aller vorangehenden Zahlen λ. Für diese sei das associative Gesetz $a + (b + \lambda) = (a + b) + \lambda$ bewiesen. Dann folgt:

$$a + (b + c) = a + (b + \lim \lambda) = a + \lim (b + \lambda) = \lim [a + (b + \lambda)]$$

nach (17). Nach Voraussetzung wird weiter:

$$a + (b + c) = \lim [(a + b) + \lambda] = (a + b) + \lim \lambda = (a + b) + c.$$

Analog wird:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= a(b + \lim \lambda) = a \lim (b + \lambda) = \lim [a(b + \lambda)] \\ &= \lim [ab + a\lambda] = ab + \lim (a\lambda) = ab + a \lim \lambda \\ &= ab + ac \text{ nach (17, 18) und Voraussetzung.} \end{aligned}$$

$$a(bc) = a[b \lim \lambda] = a . \lim (b\lambda) = \lim [a(b\lambda)] = \lim [(ab)\lambda]$$
$$= (ab) \lim \lambda = (ab)c \text{ nach (18) und Voraussetzung.}$$

$$a^{b+c} = a^{b+\lim \lambda} = a^{\lim (b+\lambda)} = \lim a^{b+\lambda} = \lim (a^b a^\lambda)$$
$$= a^b \lim a^\lambda = a^b . a^{\lim \lambda} = a^b . a^c \text{ (17—19 und Voraussetzung).}$$

$$(a^b)^c = (a^b)^{\lim \lambda} = \lim (a^b)^\lambda = \lim a^{b\lambda} = a^{\lim b\lambda} = a^{b \lim \lambda} = a^{bc}$$
$$\text{(18, 19 und Voraussetzung)}$$

$$1 . c = 1 . \lim \lambda = \lim (1 . \lambda) = \lim (\lambda) = c = c . 1 \text{ (nach (2)).}$$

Die Undurchführbarkeit der kommutativen Gesetze folgt nun daraus, daß $(\lim \lambda) + a$ nicht gleich $\lim (\lambda + a)$ ist, eine Tatsache, die schon früher ausführlich erörtert wurde und sich unmittelbar aus der Forderung ergibt, daß die Operation $+ 1$ stets zu einem neuen Element führen soll.

§ 110. Die Durchsichtigkeit und Schönheit der ausgeführten Beweismethode darf uns nicht darüber täuschen, daß ihre Begründung lückenhaft ist. Erst durch eine einwandfreie Grundlegung können wir verstehen, worin das zwingende der ganzen Schlußkette liegt. Daß sie zwingend ist, liegt wenigstens für die endlichen Zahlen auf der Hand. Wir erkennen nämlich, daß der Beweis eines der angeführten Gesetze *in jedem Spezialfall* durch eine endliche Anzahl von Schlüssen geführt wird. Es kann uns also niemand ein Beispiel angeben, welches unseren Gesetzen widerspräche; wir sind vielmehr bei jedem derartigen Beispiel in der Lage, den Rechenfehler, der ihm zu Grunde liegen *muß*, systematisch aufzudecken.

Der Beweis, daß 2 mal 2 gleich vier ist, würde sich nach unserer Methode folgendermaßen gestalten:

2 ist definiert als $1 + 1$.

$2 . 2$ ist definiert als $2 . 1 + 2$

2.1 ist nach Definition gleich 2.

2.2 ist demnach definiert als $2+2$.

$2+2$ ist seinerseits definiert als $(2+1)+1$.

$2+1$ heißt 3, $3+1$ heißt 4.

Es liegt von dieser Betrachtung aus der Schluß nahe, daß die ganze Algebra aus analytischen Sätzen bestehe. Sie enthält aber nicht nur die speziellen Sätze $3+4 = 4+3$, $2+7 = 7+2$ u. s. f., sondern den allgemeinen Satz $a+b = b+a$. Jeder Spezialfall dieses allgemeinen Satzes ist durch eine endliche Anzahl von Schlüssen beweisbar, aber die Zahl der Schlüsse ist umso größer, je größer die Zahlen a und b sind: Die Kette derjenigen Schlüsse, die zum Beweis des allgemeinen Satzes erforderlich sind, ist unendlich.

Die Bedenken, die man an diese Tatsache angeknüpft hat, sind noch nicht alt. Heute noch sind viele Mathematiker der Ansicht, daß eine unendliche Schlußkette überhaupt zu keinen prinzipiellen Bedenken Anlaß gäbe. Nachdem sich aber die Analysis des Unendlichen auf den Standpunkt gestellt hat, daß eine unendliche Reihe von Additionen kein Resultat hat, weil sie zu keinem Ende kommt, wird man konsequenterweise diesen Standpunkt auf jede unendliche Folge irgend welcher Gedankenoperationen ausdehnen müssen. Faktisch sind wir ja auch weit entfernt, etwa alle Schlüsse des Beweises für den Satz $7.13 = 13.7$, obwohl ihre Zahl endlich ist, wirklich durchzudenken, geschweige denn, daß die sämtlichen Syllogismen eines unendlichen Beweises irgendwie ausführbar wären. Das wesentliche an der Durchführbarkeit solcher Schlußketten ist vielmehr ihr gesetzmäßiger Bau. Diesen aufzudecken und in ihm die logische Ergänzung der anfechtbaren Schlußreihe nachzuweisen ist eine Aufgabe, auf die uns die Kritik der Erzeugungsprinzipien hinweist.

Hier liegt nun zunächst ein Zirkel sehr nahe, der einen bereits angedeuteten Gedanken weiter führt. Wir können nämlich sagen: Der Schluß von n auf $n+1$ beweist zunächst in der Tat gar nicht, daß beispielsweise $a.b = b.a$ ist, er beweist nur, daß wir jeden Spezialfall dieses Satzes, etwa $7.13 = 17.3$, durch eine endliche Schlußkette beweisen können. Aber erstens kann auch die Endlichkeit aller dieser unendlich vielen Ketten wiederum nur durch eine unendliche Schlußkette bewiesen werden, und zweitens setzt der Beweis dieser Endlichkeit den Begriff der endlichen Anzahl voraus, der doch durch unser Erzeugungsprinzip erst gebildet werden soll.

§ 111. Herr Poincaré hat in seinem Werke „La science et l'hypothèse" den Induktionsschluß eingehend erörtert und vertritt dabei die Anschauung, daß dieser Schluß logisch unbegründbar, also ein synthetisches Urteil a priori sei. Er begründet diese Anschauung unter anderem mit folgenden Worten:

„Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience."

Diese Worte scheinen mir einer Deutung fähig, die über die beabsichtigte psychologische Begründung der Induktion in unzulässiger Weise hinausgeht. Denn wir können uns keineswegs von jedem Schritt die unendliche Wiederholung noch auch jede Art der Unendlichkeit dieser Wiederholung vorstellen. Es klingt zwar sehr plausibel, daß wir durch n Schlüsse beweisen, daß $a.b = b.a$

für alle Zahlen $b = 1$ bis $b = n$ gilt, und daß demnach durch unendlich viele Schlüsse folgt, daß das Gesetz alle Zahlen von 1 bis Unendlich umfaßt. Aber mit der gleichen Begründung ohne jede nähere Bezeichnung des besonderen Unendlichen könnte man ebensogut behaupten, das kommutative Gesetz umfasse auch die transfiniten Zahlen.

Nehmen wir als zu wiederholenden Schritt die Operation $+1$ selbst, so erzeugt sie nach n-maliger Wiederholung, von $1+1$ ausgehend, die Zahl $n+1$, durch unendliche Wiederholung aber keine Zahl. Und betrachten wir etwa die Wiederholung der Operation, die von einer wohlgeordneten Menge das erste Element wegnimmt und hinten ansetzt, so erzeugt ihre unendliche Wiederholung an einer endlichen Menge keine eindeutig definierte Anordnung, und an der Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen ergäbe sich ein eigenartiges Dilemma: Es wäre nach unendlicher Wiederholung jedes Element von $\mathfrak{G}$ transportiert, $\mathfrak{G}$ wäre von seiner ersten Stellung völlig verschwunden und stände jetzt „hinter sich selbst" verschoben; die unendliche Wiederholung würde also $\mathfrak{G}$ selbst ergeben. Andererseits erhöht jede endliche Anwendung des Transportes den Ordnungstypus der Menge. Wir erhielten successive aus dem Typus $\omega = 1, 2, 3, \ldots$ den Typus $\omega + 1$ in $2, 3, 4 \ldots, 1$, $\omega + 2$ in $3, 4, 5, \ldots 1, 2$ u. s. f. Die unendliche Wiederholung würde also eine Menge von niedererem Typus liefern, als jede endliche Wiederholung. Dieses paradoxe Ergebnis zeigt, daß die unendliche Wiederholung, soweit ihr Resultat in Betracht kommt, einer besonderen Definition bedarf und durchaus nichts schlechthin Vorstellbares ist.

Das, was wir uns vorstellen können, ist die Menge aller endlichen Wiederholungen eines Schrittes. Mit dieser Formulierung fallen wir aber auf die endliche Zahl als Grundbegriff zurück und können sie daher nicht durch Wiederholung einer Operation erzeugen. Einem ähnlichen Zirkel fallen die höheren Erzeugungsprinzipien anheim; der Limes über eine Menge vom Typus ω kann diesen Typus selbst nicht erst erzeugen, sondern setzt ihn voraus; er ist der Operationsbereich des ersten Prinzips. Ebenso ist der Limes über einen Typus Ω_1 von der Erzeugung dieses Typus als Operationsbereich des ersten und zweiten Prinzips abhängig. Und auch in der Erzeugung des Typus Ω_ω, der anscheinend keines neuen Prinzips bedarf, steckt doch wieder die Annahme, daß das Aufsteigen von einer Mächtigkeit zur nächstfolgenden analog dem ersten Prinzip nach dem Typus ω iteriert werden kann. —

§ 112. Man könnte versuchen, den Operationsbereich des Aufstieges $+1$ dadurch zu kennzeichnen, daß man nicht nur die Wiederholbarkeit der Operation fordert, („Ist φ auf a anwendbar, so auch auf $\varphi(a)$“) sondern noch hinzusetzt, daß auch jedes Element mit Ausnahme des ersten aus einem anderen durch die Operation gebildet werde. Doch läßt sich leicht zeigen, daß diese Annahmen nicht genügen.

Wir betrachten die komplexen ganzen Zahlen, d. h. Zahlen der Form $a + bi$, worin a, b ganze positive oder negative Zahlen sind und $i^2 = -1$ ist. Wir ordnen sie nach folgender Vorschrift: Es gelte $a + bi$ für „später“ als $c + di$, wenn im algebraischen Sinn entweder $b \succ d$ oder $b = d$, $a \succ c$ ist. (Danach ist z. B. $3 + 4i \succ 4 + 3i \succ 2 + 3i$.) Bei dieser Festsetzung dürfen Ungleichungen addiert werden.

Nun ist offenbar

$$(1) \qquad i \succ 1.$$

Es sei ferner

$$(2) \qquad pi > p$$

worin p irgend eine Zahl unseres Bereiches ist. Diese Ungleichung (2) gilt nach (1) gewiß für $p = 1$, und ist (2) richtig, so folgt durch Addition von (1) und (2):

$$(p+1)i > p+1.$$

Wäre in unserem Bereich der Schluß von n auf $n+1$ zulässig, so müßte (2) für jede Zahl p gelten, die nach der Eins kommt. Für $3+5i > 1$ ist aber

$$(3+5i)i = -5+3i < 3+5i.$$

Der Grund der Unzulässigkeit des Induktionsbeweises ist klar: zwischen 1 und $3+5i$ liegen unendlich viele Zahlen. Es muß also ausdrücklich festgesetzt werden, daß jede Zahl durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen der Operation $+1$ aus der Eins entsteht. Es genügt nicht, daß jede aus der vorangehenden durch diese Operation erzeugt wird.

Unser Beispiel verweist uns aber zugleich auf einen Weg, den wir im nächsten Kapitel betreten werden: die hier betrachtete Menge besitzt Reste ohne erstes und Abschnitte ohne letztes Element. Wenn wir solche Teilmengen ausschliessen, gelangen wir in der Tat zu einer Formulierung des Operationsbereiches des Schlusses von n auf $n+1$, die den Begriff der endlichen Zahl nicht voraussetzt. Aber auch hierbei geben wir den Begriff des Erzeugungsprinzips auf, indem wir von der fertigen Menge sprechen.

§ 113. Die Ergebnisse unserer Betrachtungen können wir in zwei Thesen zusammenfassen:

A) Der Begriff der Wiederholung setzt den endlichen Anzahlbegriff in irgend einer Form voraus.

B) Demnach enthält der Versuch, die Reihe der ganzen Zahlen durch successive Wiederholung ein und derselben Operation zu „erzeugen“, eine petitio principii, die eine logische Begründung der mathematischen Induktion auf diesem Wege unmöglich macht.

Beide Thesen sind in zahlreichen Einzelfällen so allgemein anerkannt, daß man sie mit Recht für trivial erklären kann. Die konvergenten Prozesse der Analysis mit ihren unendlichen Wiederholungen von Additionen, Multiplikationen, Divisionen oder Integrationen bilden ein schlagendes Beispiel für die erste These. In meinem ersten Referate behauptete ich bereits: eine unendliche Reihe von Additionen fördert kein Resultat zu Tage, weil sie kein Ende hat. Die Resultate solcher Prozesse werden vielmehr mittelst des analytischen Limesbegriffes gesondert definiert. Auf der Inhaltlosigkeit des Begriffs einer unendlichen Wiederholung beruht auch die Unfruchtbarkeit aller Versuche, die Infinitesimalrechnung auf einer Theorie unendlich kleiner Größen aufzubauen. Daß eine solche Theorie überflüssig ist, war das Ergebnis der Untersuchungen meines ersten Referates. Daß sie unfruchtbar ist, haben alle Versuche einschließlich des jüngsten von Herrn Geißler unternommenen schlagend bewiesen. Den Grund dieser Unfruchtbarkeit haben Cantor, Peano und andere aufgedeckt: Zum Beweise beispielsweise des Taylorschen Satzes oder zur Definition eines bestimmten Integrals bedarf man, um von unendlich kleinen zu endlichen Größen zu gelangen, einer unendlich wiederholten Addition. Die Definition dieser Wiederholung stößt auf Schwierigkeiten, die, wahrscheinlich unüberwindlich, sicher bis heute nicht überwunden sind. Und eine Begründung der Infinitesimalrechnung, die auf das Integral und den Taylorschen Lehrsatz verzichten muß, versperrt sich von vornherein die Möglichkeit produktiver Betätigung.

Dagegen bietet die Lehre von den wohlgeordneten Mengen eine der glücklichsten Definitionen der unendlichen Wiederholung vermittelst ihres mengentheoretischen Limes, der bei analogen formalen Eigenschaften, die er mit dem analytischen Grenzbegriff gemeinsam hat, im Gegensatz zu diesem über den Ordnungstypus ω hinauszugehen gestattet. Daß aber diese unendliche Wiederholung, beispielsweise der Multiplikation durch α^{ω^2}, einer besonderen Definition bedarf und nichts von Hause aus gegebenes ist, wie α^3, tritt gerade in dieser Theorie mit besonderer Deutlichkeit zu Tage, während es für unendliche Summen, Produkte, Kettenbrüche etc. in der Analysis erst das Ergebnis langer und mühevoller kritischer Arbeit war.

Unsere zweite These dürfte auch heute noch auf vielfachen Widerspruch stoßen. Und doch ist es klar, daß es keinen Satz geben kann, der für alle ganzen Zahlen gilt, wenn nicht alle diese ganzen Zahlen als existierend angesehen werden. Und es kann nicht im Ernst behauptet werden, daß die Zahl Zehn erst zu existieren begonnen habe, als man zum erstenmale alle Finger der beiden Hände zu zählen gelernt habe, noch wird man einen Menschen finden können, der schon bis zu einer Billion gezählt hat. Welchen andern Sinn aber soll es haben, wenn man das Zählprinzip als ein Erzeugungsprinzip bezeichnet? Es ist eine unter vielen Methoden und unter diesen logisch die erste, uns eine bestimmte Zahl vor das Bewußtsein zu stellen; die Zahl wird aber dadurch nicht erzeugt. Das Zählprinzip ist ein Ordnungsprinzip. Es ordnet jeder Zahl a eine unmittelbar folgende $a+1$ zu. Und in dieser Form werden wir es in den Kapiteln XXVII und XXIX wieder antreffen.

Sechster Teil.

Prinzipielle Fragen. Zweite Reihe.

XXVII.

Die Wohlordnung der Menge 𝔊.

§ 114. Wir haben gesehen, daß die Erzeugungsprinzipien, durch die wir die Zahlenreihe definieren, zur Begründung ihrer Eigenschafteu unzureichend sind; wir werden auch im weiteren Verlauf bemerken können, daß der Induktionsschluß stets der Definition durch Induktion logisch voran geht. Mit einer Definition durch Induktion, wie sie in dem Erzeugungsprinzip steckt, können wir daher nicht beginnen, ohne bei der Anwendung des Induktionsbeweises zu bemerken, daß wir am falschen Ende angefangen haben.

Nach dem gegenwärtigen Stand der mathematischen Wissenschaft bleibt uns danach nur ein zweites Verfahren, um zu einer dogmatischen Theorie der Menge 𝔊 zu gelangen, d. h. zu einer Theorie, die alle Sätze aus einem einfachen System von Grundsätzen logisch ableitet. Wir müssen auf eine Definition der Zahl verzichten, die Zahl als Grundbegriff betrachten und eine hinreichende und notwendige Zahl evidenter Sätze über den Zahlbegriff als Axiome aufstellen. Dieses Verfahren, nach dem die griechischen Mathematiker die Geometrie und Mechanik systematisch bearbeitet haben, nennt man das axiomatische.

Zu jeder Axiomatik gehört als stillschweigendes Postulat die für den formalistischen Aufbau gleichgültige und daher vielfach übersehene Annahme, daß es Dinge der beschriebenen Art wirklich gibt. Man kann unter Umständen den Nachweis dieser Existenz erbringen, indem man sich auf die Existenz irgend eines anderen Systems von Dingen stützt. Es gibt Zahlengebilde, welche alle diejenigen formalen Eigenschaften besitzen, die wir in der Geometrie an Punkten, Geraden, Ebenen, Strecken, Winkeln etc. voraussetzen. Und wir werden weiter sehen, daß die Existenz von Mengen, welche alle formalen Eigenschaften der Menge $\mathfrak{S}$ besitzen, beweisbar ist, wenn die Existenz transfiniter Mengen überhaupt zugegeben wird. Für diese Existenz ist aber ein logischer Beweis, der allen Bedenken standhielte, bisher nicht erbracht worden. Und man wird vorläufig am besten den Standpunkt einnehmen, daß umgekehrt die Existenz der transfiniten Menge $\mathfrak{S}$ eine Grundtatsache unserer Erkenntnis ist, aus der wir schließen, daß der Begriff einer transfiniten, d. h. einem ihrer Teile äquivalenten Menge keinen Widerspruch enthält.

Einer der interessantesten Versuche, die Existenz transfiniter Mengen zu beweisen, ist der von Dedekind unternommene. Es sei a irgend ein Gegenstand des Denkens, so kann ich das Urteil fällen: a ist ein Gegenstand meines Denkens. Dieses Urteil $\varphi(a)$ ist selbst ein Gegenstand des Denkens. Die Zuordnung φ zwischen a und $\varphi(a)$ ist umkehrbar eindeutig und bildet die Menge aller Gedankendinge auf einen echten Teil ihrer selbst ab, da nicht jeder Gegenstand des Denkens die Form eines Urteils, daher a fortiori nicht die Form des speziellen Urteils $\varphi(a)$ hat. Demnach ist die Menge aller Gedankendinge transfinit.

Angesichts der Paradoxieen, die der Menge aller Dinge anhaften, kann dieser Beweis heute nicht mehr aufrechterhalten werden. Es wird ihm aber auch entgegengehalten, daß er gar nicht rein logisch, sondern auf die durch innere Erfahrung gewonnene Erkenntnis der Organisation unseres Verstandes, also auf Psychologie gestützt ist. Es wäre in der Tat ein ebenso schlüssiges Verfahren, die Menge 𝔖 selbst als Beweismittel anzuführen, oder, wie wir die Analysis zum Beweis der logischen Möglichkeit nichteuklidischer Geometrieen heranziehen, die Menge aller Punkte eines Halbstrahls als transfinite Menge aufzuzeigen. Ein Irrtum aber wäre es, das Fehlen des rein logischen Charakters als Grund gegen die Zulässigkeit des Beweises anzuführen. Aus reiner Logik Mathematik zu machen, ist bis heute nicht gelungen. Daß es gelingen muß, ist eine unbewiesene Annahme, in den Augen des Kantianers sogar eine falsche. Es ist daher nicht nur ein zulässiger, sondern auch zum mindesten ein durch den Stand unserer Kenntnisse erzwungener Standpunkt, wenn wir sagen: „Aus der Existenz transfiniter Mengen können wir die von 𝔖 beweisen. Daß es aber transfinite Mengen gibt, beweisen gerade diejenigen Erkenntnisse selbst, um deren Darstellung und logische Formulierung wir uns bemühen".

Der mathematische Logizismus mag bestrebt sein, über diesen Standpunkt hinauszukommen; daß wir es heute nicht können, erfahren wir immer von neuem, und den Philosophen setzt das nicht in Erstaunen.

§ 115. Einen axiomatischen Standpunkt haben wir bereits dem allgemeinen Begriff der wohlgeordneten Menge gegenüber eingenommen, indem wir alle ihre Eigenschaften aus dem einen Satz ableiteten, daß jede Teilmenge ein erstes Element besitzt. Den früher gekennzeichneten „naïven" Standpunkt der Theorie des Endlichen gegenüber brachten wir immerhin durch die Behauptung zum Ausdruck, daß alle Abschnitte des Typus ω endlich seien. Dies kann zwar auch aus der Definition von ω als Typus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... der endlichen Zahlen geschlossen werden, dann ist aber wieder die Wohlordnung dieser Reihe vom naïven Standpunkt aus angenommen. — Wir stellen jetzt folgende Eigenschaften der Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen resp. des Typus ω zusammen und benutzen sie als Axiomsystem:

(G). (1) Die Menge $\mathfrak{G}$ ist geordnet.

(2) Sie besitzt ein erstes Element, 1.

(3) Jeder Rest von $\mathfrak{G}$ besitzt ein erstes Element.

(4) Die Menge $\mathfrak{G}$ besitzt kein letztes Element.

(5) Jeder Abschnitt von $\mathfrak{G}$ besitzt ein letztes Element.

Der erste Satz dient den andern als Grundvoraussetzung und tritt daher in unseren Entwicklungen nicht selbständig auf. Von den Axiomen (2) bis (5) enthalten die beiden ersten die Wohlordnung.

Es sei nämlich T eine beliebige Teilmenge und $R(T)$ folgendermaßen definiert: Wenn x ein Element in $R(T)$ ist, so gibt es in T ein Element $y \prec x$. Die Menge $R(T)$, analog der früher benutzten $\mathsf{A}(T)$ gebildet, ist ein Rest oder mit $\mathfrak{G}$ identisch, da wir hier $\mathfrak{G}$ als uneigentlichen Rest von allen seinen Resten unterscheiden wollen. $R(T)$ besitzt daher ein erstes Element, von dem man sofort zeigt, daß es erstes in T ist. Also enthält jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ein erstes Element, $\mathfrak{G}$ ist somit wohlgeordnet.

Ist $\mathfrak{H}$ eine von $\mathfrak{G}$ verschiedene Menge, die dem System (G) genügt, so ist daher auch $\mathfrak{H}$ wohlgeordnet, und da es nach (4) kein letztes Element besitzen soll, keinem Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ähnlich. Ebensowenig kann $\mathfrak{G}$ einem Abschnitt von $\mathfrak{H}$ ähnlich sein, es ist daher $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{G}$ selbst ähnlich, d. h. das System (G) definiert den Typus von $\mathfrak{G}$ vollständig.

§ 116. Wir kommen nun zur Begründung des **Induktionsschlusses** und der **Definition durch Induktion**. Der Induktionsschluß ist in § 33 bereits allgemein auf die Wohlordnung gestützt worden. Doch brauchen wir hier das allgemeine Schlußschema nicht vollständig, da nach Axiom (5) jedes Element mit Ausnahme des ersten ein unmittelbar vorangehendes besitzt.

Es sei S eine Menge, von der wir folgendes wissen:

Erstens: sie enthält das Element 1.

Zweitens: enthält sie ein Element x von $\mathfrak{G}$, so enthält sie auch das unmittelbar folgende.

So zeigen wir, daß S alle Elemente von $\mathfrak{G}$ enthält. Wenn es nämlich in $\mathfrak{G}$ Elemente gäbe, die nicht zu S gehören, so gäbe es ein erstes, y, unter ihnen. Dieses ist nach der ersten Annahme über S von 1 verschieden, besitzt darum ein unmittelbar vorangehendes, x. Da y das erste nicht in S enthaltene Element sein soll, ist x noch Element von S, dann aber nach der zweiten Voraussetzung auch y gegen seine Definition. Es gibt also in $\mathfrak{G}$ überhaupt keine Elemente, die nicht zu S gehören.

Die Definition durch Induktion besteht in folgendem: Es sei uns eine Menge M gegeben und in dieser eine Zuordnung Θ, welche jedem Element m von M ein Element $\Theta(m)$ von M eindeutig, aber nicht notwendigerweise umkehrbar eindeutig zuordnet. Dann existiert eine Zuordnung ψ, welche jedem Element a von $\mathfrak{G}$ ein Element $\psi(a)$ von M eindeutig aber wiederum nicht notwendig umkehrbar eindeutig zuordnet. Und zwar ist ψ eindeutig bestimmt durch folgende zwei Festsetzungen:

Erstens: Es ist darüber verfügt, und zwar nach Willkür, welches Element m von M dem Element 1 von $\mathfrak{G}$ zugeordnet sei: $\psi(1) = m$.

Zweitens: Wenn $\psi(a) = r$ ist, so soll dem auf a in $\mathfrak{G}$ folgenden Element a' das Element $\Theta(r)$ in M zugeordnet sein: $\psi(a') = \Theta\psi(a)$.

Der Inhalt dieser Sätze ist vom naiven Standpunkt aus bekannt.

Man bilde aus m die Reihe

$$\Theta(m) = m_2, \quad \Theta(m_2) = m_3, \quad \Theta(m_3) = m_4 \text{ etc.}$$

Die Indices bringen bereits die Zuordnung ψ zum Ausdruck. Das gleiche tut die Exponentenschreibart:

$$m, \ \Theta(m), \quad \Theta^2(m), \quad \Theta^3(m), \ldots \text{ etc.}$$

Um unsere Behauptung streng zu beweisen, verwenden wir den Induktionsschluß. Die Menge derjenigen Elemente von 𝔊, für die ψ definiert ist, enthält 1 und mit a auch a', also enthält sie alle Elemente von 𝔊. Ebenso ergibt sich die Eindeutigkeit der Zuordnung. Und daß es nur eine Zuordnung gibt, die die beiden Forderungen erfüllt, liegt in diesen Forderungen selbst. Es wäre für eine andere Zuordnung $\psi(1) = \gamma(1)$, und aus $\psi(a) = \gamma(a)$ folgt $\psi(a') = \gamma(a')$, also ist allgemein $\psi(a) = \gamma(a)$.

Die Menge 𝔊 selbst besitzt eine Zuordnung φ, die jeden Element das unmittelbar folgende zuordnet. Wir können daher eine Zuordnung ψ durch die Festsetzung

$$\psi(1) = \varphi(a), \quad \psi(b') = \varphi(\psi(b))$$

definieren. Was das ist, erkennen wir sofort, wenn wir für φ und ψ die Zeichen $+1$, $a+$ einführen. Dann lauten unsere Gleichungen $a+1 = a+1$, $a+(b+1) = (a+b)+1$ und ergeben unsere frühere Definition der Addition, auf der sich dann analog die der Multiplikation und Potenzierung aufbauen. Auf diese Art sind daher die Entwicklungen des Kapitels XXVI in einfacher Weise auf eine sichere Grundlage zurückgeführt.

§ 117. Die Zuordnung $\varphi(a) = a+1$ ist nicht nur eindeutig, sondern auch umkehrbar eindeutig. Und da 1 kein unmittelbar vorangehendes Element besitzt, bildet φ die Menge 𝔊 auf einen echten

Teil ihrer selbst, nämlich auf den Rest $R(2)$ ab. $\mathfrak{G}$ ist also transfinit. Wir haben bereits früher, ohne vom naiven Standpunkt auszugehen, gezeigt, daß jede Menge, die eine transfinite Teilmenge besitzt, selbst transfinit ist. Jede Menge, die eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge enthält, ist daher insbesondere selbst transfinit, d. h. sie ist auf einen echten Teil ihrer selbst abbildbar.

Wir haben auch die Umkehrbarkeit dieses Satzes bewiesen, aber wir gingen dabei vom naiven Standpunkt, nämlich von einer Definition durch Induktion aus. Diese wird jetzt nachzuprüfen sein.

Es sei M eine Menge, Θ eine Abbildung, die eindeutig ist und jedem Element m von M ein Element $\Theta(m)$ von M zuordnet. Wir hatten gezeigt, daß eine Zuordnung ψ existiert, welche jedem Element a von $\mathfrak{G}$ ein Element $\psi(a)$ von M zuordnet. Wir setzen jetzt weiter voraus, Θ sei umkehrbar eindeutig und bilde M auf einen echten Teil M' seiner selbst ab. Bei der Bestimmung von ψ stand uns die Wahl von $\psi(1)$ frei. Wir wählen für $\psi(1)$ ein Element von M, das nicht zu M' gehört. Nunmehr läßt sich zeigen, daß auch ψ umkehrbar eindeutig ist, d. h. daß M eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge enthält. Es ist die bereits früher betrachtete Menge $m = \psi(1)$, $\Theta(m)$, $\Theta^2(m)$, $\Theta^3(m)$ etc.

Es sei a ein Element in $\mathfrak{G}$, $\psi(a) = r$. Gibt es ein von a verschiedenes Element b von $\mathfrak{G}$, für das $\psi(b) = \psi(a)$ wird, so rechnen wir a zu einer Teilmenge T von $\mathfrak{G}$; andernfalls zu der komplementären Menge S. Diese Menge S enthält sicher das Element 1. Denn sei a ein von 1 verschiedenes Element, so gibt es ein unmittelbar vorangehendes b, und es ist $\psi(a) = \Theta\psi(b)$. Nun ist $\psi(1) = m$ nicht in M' enthalten, d. h. es gibt in M kein Element x, für das $m = \Theta(x)$ wäre. Aus $\psi(1) = \psi(a)$ würde aber im Widerspruch damit $m = \Theta(\psi(b))$ folgen. Also kann $\psi(1) = \psi(a)$ nur für $a = 1$ möglich sein.

Es sei ferner a ein beliebiges Element in S, a' das unmittelbar folgende. Ist $\psi(a') = \psi(b)$, so ist b sicher von 1 verschieden, besitzt also ein vorangehendes Element c, $b = c+1$. Es ist aber $\psi(a') = \Theta\,\psi(a)$, $\psi(b) = \Theta\,\psi(c)$. Da Θ umkehrbar eindeutig ist, folgt daher aus $\psi(a') = \psi(b)$ sofort weiter $\psi(a) = \psi(c)$, und da a zu S gehören soll, $a = c$, d. h. $a' = c+1 = b$. D. h. aus $\psi(a') = \psi(b)$ folgt $a' = b$: gehört a zu S, so auch das unmittelbar folgende Element. Demnach enthält nach dem Induktionsschluß S alle Elemente von $\mathfrak{G}$, d. h. aus $\psi(a) = \psi(b)$ folgt stets $a = b$, ψ ist umkehrbar eindeutig und M enthält eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge, w. z. b. w. —

Unser Beweis unterscheidet sich von dem früher gegebenen nur durch die schärfere Darstellung.

§ 118. Wir kommen jetzt zum Beweise eines Satzes, den wir früher vom naiven Standpunkt aus unbewiesen hingenommen haben, zu dem Satz nämlich, daß kein Abschnitt von $\mathfrak{G}$ unendlich ist. Wir beweisen ihn in zwei Schritten.

Kein Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ist transfinit.

Der Satz ist sicher richtig für den Abschnitt $A(2)$. Dieser besteht nämlich aus einem Element, der Eins. Er enthält daher gar keinen echten Teil, kann daher auch keinem echten Teil seiner selbt äquivalent sein.

Sodann beweisen wir, daß der Satz richtig ist für $A(m+1)$, wenn er für den Abschnitt $A(m)$ richtig ist. Zur Vorbereitung beachten wir, daß alle Reste von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}$ äquivalent sind. Da nämlich $\mathfrak{G}$ geordnet ist, ist auch jede Teilmenge geordnet, und da die Ordnung von $\mathfrak{G}$ eine Wohlordnung ist, gilt dies auch von der jeder Teilmenge, speziell von der jedes Restes. Jeder Rest von $\mathfrak{G}$ erfüllt darum die Axiome 1, 2, 3. Ist weiter τ ein Abschnitt eines Restes R, so gibt es in R Elemente, die nach allen Elementen von τ kommen, sofern τ ein echter Abschnitt ist. Diese Elemente sind daher auch hinter alle Elemente von $\mathsf{A}(\tau)$ geordnet, $\mathsf{A}(\tau)$ ist darum echter Abschnitt von $\mathfrak{G}$. Nach Axiom 5 enthält somit $\mathsf{A}(\tau)$ und damit τ selbst ein letztes Element. R genügt daher auch dem Axiom (5), und aus Axiom (4) folgt ja sofort, daß kein Rest von $\mathfrak{G}$, also auch R nicht, ein letztes Element besitzen kann. Jeder Rest von $\mathfrak{G}$ genügt also den Axiomen von $\mathfrak{G}$, und ist daher zu $\mathfrak{G}$ ähnlich, d. h. a fortiori äquivalent.

Es sei nun bewiesen, daß der Abschnitt $A(m)$ nicht transfinit ist. Wäre $A(m+1)$ transfinit, so enthielte $A(m+1)$ eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge τ, nach § 117. Enthielte τ das Element m nicht, so gehörten alle Elemente von τ zu $A(m)$, da ja $A(m+1)$ aus $A(m)$ und m selbst besteht. Das wäre aber gegen die Voraussetzung, da $A(m)$ nicht transfinit ist.

Die Zuordnung, welche τ auf $\mathfrak{G}$ abbildet, heiße ψ, und es sei $m = \psi(a)$. Betrachten wir jetzt diejenigen Elemente von τ, welche dem Rest $R(a+1)$ zugeordnet sind. Sie bilden eine Teilmenge τ', die m nicht enthält, also Teil von $A(m)$ ist. Sie ist zu $R(a+1)$, d. h. zu einem Rest von $\mathfrak{G}$, somit zu $\mathfrak{G}$ selbst äquivalent, wiederum gegen die Voraussetzung. Die Annahme, daß $A(m+1)$ transfinit sei, führt daher auf einen Widerspruch[1].

Die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Abschnitte nicht transfinit sind, enthält daher 1 und mit m auch $m+1$, d. h. sie ist mit $\mathfrak{G}$ identisch, w. z. b. w. —

[1] Ein anderer Beweis findet sich bei Dedekind „Was sind und was sollen die Zahlen?“ § 70, 119.

§ 119. Der zweite Schritt unseres Beweises erledigt die Frage, die sich an die Disjunktion endlich-unendlich geknüpft hat und besteht in dem Nachweis, daß jede Menge entweder transfinit oder zu einem Abschnitt von 𝔖 äquivalent ist. Bei diesem Verfahren ist die völlige Umkehrung des naiven Standpunktes charakteristisch: Wir definierten zuerst durch eine positive Eigenschaft das unendliche in der Fassung des transfiniten. Sodann wiesen wir nach, daß die sogenannten endlichen Zahlen nicht-transfinit sind. Zum Schlusse zeigen wir jetzt, daß die endlichen Zahlen die einzigen nicht-transfiniten sind, woraus dann folgt, daß die Begriffe nicht-endlich und transfinit sich decken. —

Wir machen mit Dedekind folgende Disjunktion: Eine Menge M enthält entweder zu jedem Abschnitt von 𝔖 eine äquivalente Teilmenge, oder nicht zu jedem.

Wir betrachten den ersten Fall. Zu dem Abschnitt $A(a)$ gebe es in M die äquivalente Teilmenge τ_a. Die Zuordnung überträgt zugleich die Ordnung von $A(a)$ auf τ_a. Daher ist τ_a wohlgeordnet, so zwar, daß jeder Abschnitt und τ_a selbst ein letztes Element besitzt.

Zwei Abschnitte von 𝔖 sind niemals äquivalent, da einer ein Abschnitt des andern ist, dieser also transfinit sein müßte. Daher sind auch keine zwei der Teilmengen τ_a äquivalent, umsoweniger identisch: die Zuordnung der Teilmenge τ_a zu ihrem Index ist umkehrbar eindeutig. Die Menge τ dieser Teilmengen ist daher zu 𝔖 äquivalent und durch die Indices nach dem Typus ω wohlgeordnet.

Wir definieren nun folgende Teilmenge M' von M: Ist x ein Element von M', so gibt es eine Teilmenge τ_a, welche x enthält. Es kann mehrere solche Teilmengen geben;

auf Grund der Wohlordnung von τ ist eine darunter die erste. Ihr Index sei ξ und werde mit $\varphi(x)$ bezeichnet.

Die Menge M' wird durch folgende Vorschrift geordnet: Sind x, y zwei Elemente von M', so ist entweder $\varphi(x)$ von $\varphi(y)$ verschieden und alsdann $\varphi(x) > \varphi(y)$ oder $\varphi(x) < \varphi(y)$. Im ersten Fall sei $x > y$, im zweiten $x < y$. Oder es ist $\varphi(x) = \varphi(y) = \xi$, so gehören x und y einer gemeinsamen Teilmenge τ_ξ aus τ an und sind durch deren Wohlordnung bereits geordnet.

Wir beweisen weiter, daß diese Ordnung den Axiomen 2 bis 5 genügt, d. h. daß M' zu $\mathfrak{G}$ ähnlich ist. Daraus folgt dann, daß M eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente, also transfinite Teilmenge enthält, mithin selbst transfinit ist.

Axiom (2) und (3) beweisen wir zusammen aus der allgemeinen Definition der Wohlordnung. Eine Teilmenge M'' von M' definiert eine Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$. Gibt es nämlich in M'' ein Element x, für das $\varphi(x) = a$ ist, so rechnet a zu $\mathfrak{G}'$. Unter den Elementen von $\mathfrak{G}'$ gibt es ein erstes; es heiße a. In τ_a wieder gibt es Elemente, die nach M'' gehören, und unter diesen ein erstes; es heiße x. Man zeigt sofort, daß x erstes Element in M'' ist. Also enthält jede Teilmenge von M' ein erstes Element, ist somit selbst wohlgeordnet.

Zum Beweise von Axiom (5) betrachten wir einen Abschnitt N von M'. Er ist auf Grund der soeben bewiesenen Wohlordnung von einem Element x in M' erzeugt. Für jedes Element y in N ist daher $\varphi(y) \leqq \varphi(x)$. Es gibt aber unter den Indices $\varphi(y)$ einen höchsten, der höchstens gleich $\varphi(x)$ ist. Er heiße ξ. In der Teilmenge τ_ξ gibt es wieder ein letztes Element z, für das $\varphi(z) = \xi$ und, falls $\xi = \varphi(x)$, auch $z < x$ ist. Dieses Element ist letztes in N.

Um endlich die Gültigkeit des Axioms (4) für die Menge M' nachzuweisen, nehmen wir an, es gebe in M' ein letztes Element. Es würde daraus folgen, daß M' einem Abschnitt $A(c)$ von $\mathfrak{S}$ ähnlich wäre. Nun ist die Teilmenge τ_{c+1} äquivalent $A(c+1)$, andererseits Teil von M', woraus folgen würde, daß $A(c+1)$ einem Teil von $A(c)$, also einem Teil seiner selbst äquivalent wäre. Dies ist unmöglich, somit enthält M' kein letztes Element; es ist daher zu $\mathfrak{S}$ äquivalent, w. z. b. w. —

Der Grundgedanke unseres Beweises ist ein ganz einfacher. Man setze die Teilmengen τ_1, τ_2, τ_3, ... hintereinander und streiche aus der so entstandenen Reihe jedes Element, das mehrfach vorkommt, an allen Stellen weg mit Ausnahme derjenigen, an der es zuerst auftritt. Die übrigbleibende Reihe ist unsere Menge M' und hat offenbar den Typus ω. Diese einfache Darstellung entspricht aber den hier gestellten Anforderungen an Strenge nicht; daher mußte das Hintereinandersetzen und Wegstreichen durch die schärfere Definition und einen ausführlichen Beweis der Ordnung von M' nach dem Typus ω ersetzt werden.

§ 120. Sehr viel einfacher erledigt sich der zweite Fall unserer Disjunktion: Es gebe in M nicht zu jedem Abschnitt von $\mathfrak{S}$ eine äquivalente Teilmenge. Dann gibt es unter denjenigen Abschnitten in $\mathfrak{S}$, die keine äquivalenten Teile in M besitzen, einen ersten, $A(c)$, zu c ein unmittelbar vorangehendes Element b, und zu $A(b)$ einen äquivalenten Teil M' in M. Wäre M' ein echter Teil in M, so gäbe es ein nicht zu M' gehöriges Element x in M. Dieses ordne man dem Element b zu, so ist durch $A(b) \sim M'$ und $b \sim x$ dem Abschnitt $A(c) = A(b) + b$ in M eine äquivalente Teilmenge $(M' + x)$ zugeordnet, gegen die Voraussetzung. Demnach ist M' kein echter Teil von M, vielmehr $M' = M$ und

$M \sim A(b)$, d. h. M ist einem Abschnitt von $\mathfrak{G}$ äquivalent und endlich.

Hiermit ist die in § 14 aufgeworfene Frage beantwortet, deren Erledigung vom naiven Standpunkt aus schlechterdings ausgeschlossen war. Wir müssen dabei hervorheben, daß unser Beweis kein Kriterium enthält, nach dem von einer gegebenen Menge entschieden werden kann, ob sie endlich oder unendlich ist. Wenn uns durch einen Grenzprozeß eine Zahl definiert wird, so können wir fragen, ob sie rational oder irrational ist. Im ersten Fall ist die Menge der Nenner ihrer Kettenbruchentwicklung oder der von null verschiedenen Ziffern ihrer Dezimalbruchentwicklung endlich, im zweiten Fall unendlich. Wir haben hier ein Problem vor uns, bei dem die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit einer Menge aufgeworfen wird und in manchen Fällen bis heute noch unentschieden ist. Auch das Problem des großen Fermatschen Satzes gibt zu einer solchen Frage Anlaß: Ist die Menge aller Zahlen m, für die die Gleichung $x^m + y^m = z^m$ in ganzen Zahlen lösbar ist, unendlich oder, wie vermutet wird, endlich? Eine andere bekannte zahlentheoretische Frage betrifft die Menge aller Zahlen $\varkappa$, für die $2^{2^\varkappa} + 1$ eine Primzahl ist. Auch von dieser Menge ist unentschieden, ob sie endlich oder unendlich ist. —

§ 121. Im Anschlusse an die Axiomatik der ersten Zahlklasse mag noch gezeigt werden, daß auch die zweite Zahlklasse, d. h. der Typus Ω_1, axiomatisch behandelt werden kann. Wir stellen zu diesem Zweck wieder die drei ersten Axiome der Wohlordnung auf, an Stelle des vierten und fünften aber treten folgende analoge Bildungen, in denen die Menge mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet wird:

(4*) Die Menge $\mathfrak{H}$ besitzt keinen Kern, dessen Abschnitte sämtlich ein letztes Element haben.

(5*) Jeder Abschnitt von $\mathfrak{H}$ besitzt einen Kern, von der Eigenschaft, daß jeder Abschnitt desselben ein letztes Element hat.

Diese Axiome sagen aus, daß jeder Abschnitt einen Kern vom Typus ω oder einen endlichen Kern hat, die Menge selbst nicht. Daraus folgt wieder wie im § 115, daß jede Menge, die dem gleichen Axiomsystem genügt, zu $\mathfrak{H}$ ähnlich ist, daß also der Ordnungstypus Ω_1 wirklich eindeutig definiert ist. Eine Anwendung dieses Axiomsystems ist mir nicht bekannt; aber es gibt auch bisher keine für die zweite Zahlenklasse allein charakteristischen Sätze, ausgenommen die Abzählbarkeit ihrer Abschnitte. Diese folgert man leicht aus (4*) und dem Satz, daß eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist. —

XXVIII.

Ordnende Teilmengensysteme.

§ 122. Bei der Begründung der Ordnung transfiniter Zahlen war es unser Bestreben, diese Ordnung auf die Teilung und Vergleichung zurückzuführen. Man kann mit Recht verlangen, daß dieses Bestreben auch auf die Ordnung einer geordneten Menge selbst angewandt werde. Das ist auch leicht durchführbar, doch wird dadurch ein wenig übersichtlicher Ausgangspunkt gewonnen, und es würde sich nicht verlohnen, diesen Schritt rückwärts auszuführen, wenn wir nicht bei zwei wichtigen Untersuchungen diese Einführung der Ordnung vermittelst einer besonderen Teilung anträfen.

Eine geordnete Menge besitzt zwei besondere Arten von Teilmengen: die Abschnitte und die Reste. Ein Abschnitt ist dadurch charakterisiert, daß er mit jedem Element auch alle vorangehenden enthält; ein Rest enthält alle Elemente, die auf eines seiner Elemente folgen. Die Menge selbst kann sowohl zu den Abschnitten wie zu den Resten gerechnet werden. Bei den wohlgeordneten Mengen vermieden wir das erstere und ließen das zweite zu. Im folgenden treffen wir keinerlei Festsetzung, nennen aber alle von M verschiedenen Abschnitte und Reste „echte" Abschnitte und Reste, die Menge selbst, wenn wir sie dazu rechnen, „unecht". —

Die Namen „Abschnitt" und „Rest" richten sich nach der Bezeichnung der Ordnung, und diese liegt in unserer Willkür, da wir sie umkehren können, ohne den Formalismus irgendwie zu ändern. Wir können das Zeichen $\prec$ durch irgend ein anderes, auch durch $\succ$ ersetzen, sofern wir nur gleichzeitig das Zeichen $\succ$ gegen ein anderes, etwa $\prec$, austauschen. Es schlösse auch ersichtlich keinen Widerspruch ein, wenn wir von zwei Zahlen die größere als die „frühere" bezeichnen wollten; es entspräche nur nicht dem Sprachgebrauch. Beachten wir diesen Dualismus, so ist von vornherein klar, daß jedem Satz über Abschnitte einer über Reste entsprechen muß, wie es bereits die Definition erkennen läßt.

Die Menge A aller Abschnitte einer geordneten Menge M besitzt folgende Eigenschaft:

(A) Sind A, A' zwei zu A gehörige Mengen, so gibt es nicht gleichzeitig in A ein nicht zu A' und in A' ein nicht zu A gehöriges Element. Das heißt: entweder ist A mit A' identisch oder A' echter Teil von A oder A echter Teil von A'.

Ein analoges Verhalten zeigt eine Schaar konzentrischer Kreise; von zweien derselben ist stets einer ganz in dem andern gelegen. Obwohl der Vergleich nicht in allen Punkten zutrifft, wollen wir doch ein System A von Mengen, welches der Forderung (A) genügt, ein k o n z e n t r i s c h e s System nennen, um einen kurzen Ausdruck zu besitzen. Es ist klar, daß ein konzentrisches System geordnet ist. Bezeichnen wir mit $A' \prec A$ den Fall, daß A' e c h t e r Teil von A ist, so schließen sich die drei Fälle $A' \prec A$, $A' = A$, $A \prec A'$ logisch aus und einer findet notwendigerweise statt. Diese Ordnung stützt sich genau wie in früheren Erörterungen auf die Disjunktion VIII, und zwar ist hierbei die Vergleichung durch den speziellen Fall der Identität ersetzt.

Die Menge aller Reste einer geordneten Menge ist ebenfalls konzentrisch. Aber es ist klar, daß diese Eigenschaft für sich allein weder die Menge aller Abschnitte noch die aller Reste auszeichnet. Z. B. bildet eine Menge M mit einer ihrer eigentlichen Teilmengen zusammen bereits ein konzentrisches System, ebenso ist jedes Teilsystem eines konzentrischen selbst konzentrisch.

§ 123. Wenn x, y zwei Elemente von M sind und $x \prec y$ ist, so ist x in $A(y)$ enthalten, y dagegen nicht. Diese Eigenschaft des Systems A ist unabhängig von der zuerst beschriebenen. Wir formulieren sie folgendermaßen:

(B) S i n d x, y z w e i E l e m e n t e, w e l c h e s i c h i n M e n g e n d e s S y s t e m s A v o r f i n d e n, s o f i n d e t s i c h e i n e s v o n b e i d e n i n e i n e r M e n g e A d e s S y s t e m s v o r, d i e d a s a n d e r e n i c h t e n t h ä l t.

Dieser Bedingung genügt unter anderem die Menge aller Teilmengen von M, die nicht konzentrisch ist.

Wenn an einem System A die beiden Eigenschaften (A), (B) sich vorfinden, so wollen wir es ein ordnendes System nennen, weil alle zu seinen Mengen gehörigen Elemente geordnet sind. Es sei nämlich x von y verschieden, x in A, y aber nicht in A. Dafür schreiben wir kurz: $x \prec y$. Wäre gleichzeitig $x \succ y$, so müßte es eine Menge geben, die y enthält und x nicht enthält. Das ist aber gerade durch (A) ausgeschlossen. Demnach besteht eine und nur eine der drei Beziehungen $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$. Ist insbesondere $x \prec y$, $y \prec z$, so gibt es eine Menge A, die x enthält, y nicht, eine Menge B, die y enthält, z nicht. B enthält x, da sonst auch $y \prec x$ wäre. Demnach ist $x \prec z$. Es ist darum in der Tat die Menge aller Elemente, die Mengen des Systems angehören, geordnet.

Auch hiermit sind nicht alle charakteristischen Eigenschaften der Menge aller Abschnitte von M erschöpft. So bilden z. B. die Abschnitte des Kontinuums, welche zu rationalen Zahlen gehören, ein ordnendes System, aber nicht das System aller Abschnitte des Kontinuums. Wenn man ferner aus der Menge aller Abschnitte einer wohlgeordneten Menge alle diejenigen wegläßt, welche zu Limeselementen gehören, bilden die übrigbleibenden immer noch ein ordnendes System.

Wir haben die Beziehung, „x in A, y nicht in A" mit dem Zeichen $x \prec y$ dargestellt. Hierdurch werden die Mengen des Systems A zu Abschnitten von M in der definierten Ordnung. Hätten wir das Zeichen $x \succ y$ gewählt, so wäre A ein ordnendes System von Resten der Menge M geworden. In diesem Fall empfiehlt es sich, schon die Beziehung: „A ist Teil von B" mit $A \succ B$ zu bezeichnen oder überhaupt ein anderes Zeichen für sie zu verwenden[1].

---

[1] Dedekind schweift das Zeichen $\prec$ so stark, daß es die Form einer 3 annimmt. $A \mathfrak{3} B$ heißt: A ist Teil von B. (Was sind und was sollen die Zahlen?)

§ 124. Das Kriterium (B) ist so formuliert, daß von der Menge M, in der jede Menge des Systems A enthalten ist, nicht gesprochen wird. Diese Einschränkung bedingt eine gewisse Vorsicht. Es kann ein System von Teilmengen in M ordnend sein, ohne M selbst zu ordnen. Z. B. ein ordnendes System gerader Zahlen ordnet nur diese, nicht die Menge $\mathfrak{G}$ aller Zahlen. Wenn die Menge M von dem System A geordnet werden soll, so muß jedes Element von M in einer Menge des Systems vorkommen. Und soll A aus lauter Teilmengen von M bestehen, so muß auch umgekehrt jedes Element einer Menge A des Systems in M vorkommen. Durch diese Bedingungen ist M völlig definiert: Es enthält alle Elemente der Mengen A von A und nur diese, es ist die Vereinigungsmenge des Systems A. Den Begriff der Vereinigungsmenge lernten wir bereits beim mengentheoretischen Kalkul kennen, aber nur in spezieller Anwendung auf Systeme teilfremder Mengen.

Wenn die Vereinigungsmenge eines ordnenden Systems A ein erstes Element enthält, so ist dies allen Mengen des Systems gemeinsam. Und existiert ein Element x, welches allen Mengen des Systems gemeinsam ist, so ist es das einzige dieser Art und erstes der Vereinigungsmenge. Denn ist y ein anderes Element, so muß es ja eine Menge im System geben, die y nicht enthält, da eine Menge, die y enthält und x nicht enthielte, ausgeschlossen ist.

Enthält M ein letztes Element, so ist dies in keiner Menge des Systems enthalten, die echter Teil von M ist. Daraus folgt, daß M selbst Menge des Systems sein muß. Ist umgekehrt ein Element vorhanden, das nur in einer Menge des Systems vorkommt, so ist diese Menge die Vereinigungsmenge des Systems und das Element letztes derselben.

Wenn A irgend ein Abschnitt von M ist, (der **nicht** zum ordnenden System A zu gehören braucht), so bildet die Menge aller zu A gehörigen Teilmengen von A ein ordnendes System[1]. Denn wenn $x \prec y$ zwei Elemente von A sind und B eine Menge des Systems A, welche x enthält und y nicht, so ist B echter Teil von A, da A nicht Teil von B sein kann (y in A, nicht in B).

Wenn der komplementäre Rest von A ein erstes, also A ein unmittelbar folgendes Element besitzt, so ist dieses allen Abschnitten von M, insbesondere allen zu A gehörigen, gemeinsam, welche A als echten Teil enthalten. Es sei umgekehrt N die Menge aller zu A gehörigen Abschnitte von M, die A als echten Teil enthalten, wobei A nicht selbst zu A zu gehören braucht; alle zu N gehörigen Abschnitte haben sämtliche Elemente von A gemeinsam. Haben sie noch ein **nicht** zu A gehöriges Element x gemeinsam, so ist dieses das einzige seiner Art und unmittelbar auf A folgendes Element.

Es gebe nämlich ein zweites, y, von gleicher Art, und es sei $x \prec y$; B sei eine zu A gehörige Teilmenge, die x enthält und y nicht. Dann kann B nicht zu N gehören, da es y nicht enthält. A ist aber echter Teil von B, weil x in B und nicht in A enthalten ist; das ist unmöglich. Daher ist x einziges Element seiner Art. Es gibt darum kein Element unter x, das nicht in A wäre, da es sonst allen Abschnitten $B \succ A$ gemeinsam wäre, d. h. x ist unmittelbar folgendes Element zu A, $A = A(x)$.

Besonders einfach liegt der Fall, wenn es in N einen ersten Abschnitt A' gibt. Jedes seiner Elemente ist allen folgenden Ab-

[1] Die Vereinigungsmenge dieses Systems wird im allgemeinen mit A übereinstimmen, kann aber auch ein Element weniger enthalten, als A; dieses ist dann letztes in A, und A gehört nicht zum System A.

schnitten gemeinsam, und er enthält, da A echter Teil von A' sein soll, ein nicht in A vorhandenes Element x und nur eines. Gibt es also zu A in A einen unmittelbar folgenden Abschnitt, so ist dieser überhaupt der nächste Abschnitt $A+x$ nach A und x das auf A unmittelbar folgende Element.

§ 125. Wenn M wohlgeordnet ist, so ist sowohl A als Menge von Abschnitten von M wohlgeordnet, wie auch jeder einzelne, zu A gehörige Abschnitt von M. Diese einfache Tatsache läßt sich auf zwei Arten umkehren:

LXXIII. Ist ein ordnendes System wohlgeordnet, so ist auch seine Vereinigungsmenge wohlgeordnet.

Ist A wohlgeordnet, so gibt es eine erste Menge, die zu A gehört, und ist a ein Element in ihr, so ist es allen andern Mengen des Systems gemeinsam, daher einziges seiner Art und erstes in M.

Ist ferner A ein Abschnitt von M, der nicht zu dem System zu gehören braucht, N die Menge aller zu A gehörigen Abschnitte $B > A$, so enthält N ein erstes Element, A', auf Grund der Wohlordnung von A. Daraus folgt, wie wir im vorhergehenden Paragraphen sahen, daß A ein unmittelbar folgendes Element besitzt. Da M ein erstes und jeder Abschnitt von M ein unmittelbar folgendes Element besitzt, ist M wohlgeordnet, w. z. b. w. Zugleich sieht man, daß die einzigen Abschnitte von M, die nicht zu A zu gehören brauchen, diejenigen sind, die keinen unmittelbar vorhergehenden Abschnitt, d. h. kein letztes Element besitzen.

LXXIV. Besteht ein ordnendes System A aus lauter wohlgeordneten Mengen, derart, daß jede Menge Abschnitt jeder andern ist, von der s i e e i n e c h t e r T e i l i s t, s o i s t d i e V e r e i n i g u n g s m e n g e v o n A w o h l g e o r d n e t.

Es sei B eine Menge des Systems, so gibt es unter den Mengen $A \prec B$, weil sie alle Abschnitte der wohlgeordneten Menge B sind, eine erste. Diese ist erste von A überhaupt.

Sei ferner N ein Rest von A und B eine zu N gehörige Menge von A. Unter den zu N gehörigen Abschnitten von B ist einer der erste und damit erste Menge in N überhaupt.

Es besitzt also A selbst und jeder seiner Reste ein erstes Element, danach ist A und nach dem vorangehenden Satze auch seine Vereinigungsmenge wohlgeordnet.

§ 126. Wir haben bisher nicht vorausgesetzt, daß die Menge A auch a l l e Abschnitte ihrer Vereinigungsmenge enthalte. Wir haben uns im Gegenteil überzeugt, daß ein ordnendes System nicht notwendig aus allen Abschnitten der von ihm erzeugten Ordnung zu bestehen braucht.

Wir wollen nun die Bedingung dafür aufsuchen, daß ein ordnendes System A v o l l s t ä n d i g ist, d. h. daß es auch a l l e Abschnitte seiner Vereinigungsmenge enthält. Zu diesem Zweck denken wir uns einen von A verschiedenen Abschnitt M des Systems; seine Vereinigungsmenge heiße M_1. Ist also x ein Element von M_1, so gibt es in M eine Menge A des Systems, die x enthält. Ist $y \prec x$, so ist auch y in A enthalten, demnach ist y in M_1, d. h. M_1 enthält mit jedem seiner Elemente auch alle vorangehenden, es ist ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M von A. Wenn also A ein vollständiges System ist, so muß es die Vereinigungsmenge jedes seiner Abschnitte enthalten.

Nunmehr betrachten wir den zu M komplementären Rest N und „s e i n e n g r ö ß t e n g e m e i n s a m e n T e i l", das ist die

Menge N aller Elemente, die allen zu N gehörigen Mengen des Systems A gemeinsam sind. Ist x ein Element in N, so ist es Element jeder zu N gehörigen Menge; das gleiche gilt a fortiori von jedem Element $y \prec x$, d. h. N ist ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M. Ist also A vollständig, so muß auch der größte gemeinsame Teil jedes seiner Reste zu ihm gehören.

Die beiden Bedingungen der Vollständigkeit sind hinreichend. Es sei nämlich A ein unvollständiges System, L ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M, der nicht zu A gehört, M die Menge aller Elemente $A \prec L$ von A, N die Menge aller Elemente $B \succ L$ von A. M ist ein Abschnitt von A, N der komplementäre Rest, M_1 sei Vereinigungsmenge von M, N größter Teil von N. Dann gehört jedes Element von M_1 zu L, jedes Element von L zu N, d. h. es ist $M_1 \prec L \prec N$. Ist insbesondere, was eintreten kann, $M_1 = N$, so ist auch $L = M_1 = N$. Ist aber M_1 von N verschieden, so sei x ein Element in N, das nicht zu M_1 gehört. Es ist das einzige seiner Art, denn gäbe es ein zweites, $y \succ x$, und sei A ein zu A gehöriger Abschnitt, der x enthält, aber y nicht, so wäre $A \succ M$ und $A \prec N$, also A weder in M noch N, was unmöglich ist. Es ist also, falls M_1 und N verschieden sind, $N = M_1 + x$, daher L entweder mit M_1 oder mit N identisch.

Wenn nun A sowohl M_1 als N enthielte, so müßte es auch notwendig L enthalten, gegen die Annahme. Damit erkennen wir, daß unsere beiden Bedingungen der Vollständigkeit zusammen hinreichend sind. Ein einfaches Beispiel mag uns zeigen, daß auch jede von ihnen notwendig ist, daß eine allein nicht genügt. Wir nehmen die unendliche Reihe der rationalen Zahlen $a_1 = 0{,}9$, $a_2 = 0{,}99$, $a_3 = 0{,}999$ etc., ferner die nicht in ihr enthaltene Zahl 1 und sodann wieder die Reihe $b_1 = 1{,}1$, $b_2 = 1{,}01$, $b_3 = 1{,}001$, etc., so daß stets $a_n + b_n = 2$ ist. Wenn wir diese Zahlen der Größe nach ordnen, so entsteht die Reihe

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999 \ldots 1;\ldots 1{,}0001;\ 1001;\ 1{,}01;\ 1{,}1.$$

Sie beginnt mit dem Typus ω; auf diesen folgt ein isoliertes Element, 1, und an dieses schließt sich der Typus $\tilde{\omega}$ an.

Die Menge besitzt folgende Arten Abschnitte: 1) Abschnitte erster Art im Typus ω, $A(x)$, x in der Reihe a_n; sie besitzen alle ein letztes und ein folgendes Element. 2) Abschnitte zweiter Art im Typus $\tilde{\omega}$, $A(x)$, x in der Reihe b_n. Auch diese besitzen ein letztes und ein unmittelbar folgendes Element. 3) Abschnitt $A(1)$, ohne letztes, mit unmittelbar folgendem Element. 4) Abschnitt $\mathsf{A}(1)$, enthält 1 als letztes und kein unmittelbar folgendes Element.

Die Abschnitte erster und zweiter Art bilden zusammen ein ordnendes System Σ; es ist aber nicht vollständig. Dies zeigt sich in der Tat auch an unserem Kriterium. Die Abschnitte erster Art bilden einen Abschnitt M von Σ, dessen Vereinigungsmenge $A(1)$ dem System Σ nicht angehört. Die Abschnitte zweiter Art bilden einen Rest N von Σ, dessen größter Teil $\mathsf{A}(1)$ ebensowenig Σ angehört. Jeder andere Abschnitt unseres Systems dagegen genügt unseren Anforderungen. Fügen wir daher $A(1)$ dem System hinzu, so enthält das System zu jedem seiner Abschnitte die Vereinigungsmenge, auch zu dem neu hinzukommenden $\mathsf{M} + A(1)$, nicht aber den größten Teil von N. Und fügt man $\mathsf{A}(1)$ hinzu, so enthält das System zu jedem seiner Reste, auch zu $\mathsf{A}(1) + \mathsf{N}$, den größten Teil, aber zu M nicht die Vereinigungsmenge. Es sind daher in der Tat beide Vorschriften erforderlich:

LXXV. Ein ordnendes System A ist dann und nur dann vollständig, wenn sowohl die Vereinigungsmenge jedes Abschnittes, wie der größte gemeinsame Teil jedes Restes von A ein Element von A ist.

Jede Teilmenge T von A bestimmt einen Abschnitt A(T) und einen Rest $R(T)$: A(T) enthält alle zu T gehörigen Elemente und alle diesen vorangehenden: $R(T)$ alle zu T gehörigen und alle folgenden. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Vereinigungsmenge von A(T) mit der von T übereinstimmt. Ist nämlich x in $S-T$ und T in T, so ist x in T selbst. Und ebenso ist der größte Teil von $R(T)$ gleich dem größten Teil von T selbst. Es kann also unsere Bedingung der Vollständigkeit in folgende allgemeine Fassung gebracht werden:

LXXVa. Ein ordnendes System A ist dann und nur dann vollständig, wenn es sowohl die Vereinigungsmenge als auch den größten Teiler jeder seiner Teilmengen enthält.

Diese Fassung hat allerdings die unwesentliche Folge, daß die Vereinigungsmenge des Systems selbst zu dem System gehören muß, da sowohl A(T) wie $R(T)$ mit A selbst identisch sein kann. Man kann sie aber jederzeit dem System hinzufügen, falls sie ihm noch nicht angehören sollte.

§ 127. Der zuletzt ausgesprochene Satz spricht nicht mehr von Resten und Abschnitten des Systems und ist daher in seiner Fassung unabhängig davon, ob wir A als Menge der Abschnitte oder der Reste von M betrachten. In Rücksicht darauf, daß wir bei den vorangehenden Betrachtungen stets die Auffassung als Abschnittmenge bevorzugt haben, im folgenden Kapitel aber ein Restesystem betrachten müssen, ist es vielleicht angezeigt, die Umänderung der Definitionen des ersten resp. unmittelbar vorangehenden Elementes kurz anzugeben:

Sei A ein ordnendes Restesystem seiner Vereinigungsmenge M. Ein Rest R besitzt ein Element x als erstes, wenn dieses in keinem echten zu A gehörigen Teil von R enthalten ist. Ein Rest R besitzt ein unmittelbar vorangehendes Element, wenn es ein Element x gibt, das nicht in R, aber in jeder Menge des System A enthalten ist, von der R echter Teil ist. Dieser letzten Aussage wollen wir für den Fall, daß R dem System A angehört, noch eine kürzere Fassung geben:

Ist R in A, $(R+x)$ in A, x nicht in R, so ist x unmittelbar vorangehendes Element zu R.

In der Tat, ist y von x verschieden und nicht in R, so ist auch y nicht in $(R+x)$ enthalten, die Menge $(R+x)$ des Systems enthält also x, aber nicht y, wofür $y \prec x$ zu schreiben ist, da wir hier ein Restesystem betrachten.

Die Betrachtungen dieses Kapitels leiden an einer gewissen Schwerfälligkeit, nehmen aber diejenigen allgemeinen Beziehungen vorweg, die in den folgenden Kapiteln zur Anwendung gelangen. Dadurch werden diese eine größere Durchsichtigkeit gewinnen.

XXIX.

Dedekinds Theorie der ganzen Zahlen.

§ 128. Wir haben im vorangehenden Kapitel gesehen, daß Ordnungspostulate einer Menge durch Teilungspostulate ersetzt werden können. Es ist dieser Ersatz insofern erstrebenswert, als wir ja auch die Ordnung der transfiniten Zahlen auf Teilpostulate zurückführten. Andererseits ist leicht zu sehen, daß unser Axiomsystem (G) eine außerordentlich schwerfällige Form annehmen würde, wenn wir es in Teilungspostulaten aussprechen wollten. Eine wesentliche Vereinfachung der aus dem System (G) entspringenden Teilungspostulate verdanken wir nun **Dedekind**, der, unabhängig von der ganzen **Cantor**schen Wohlordnungstheorie, die Axiome des Typus ω auf Axiome der Zuordnung und der Teilung zurückgeführt hat [1]. Den Bericht über diese **Dedekind**sche Theorie will ich in Form einer Analysis der Beweisführung erbringen, indem ich bei jeder der sehr abstrakten Begriffsbildungen zunächst zeige, wie man zu ihr gelangt. In der Darstellung **Dedekinds** findet sich dieser Hinweis erst am Schlusse, und das verleiht ihr eine eigenartige künstlerische Geschlossenheit und eine unerreichte logische Strenge der Beweisführung, die aber dem Nichtfachmanne das Verständnis erschwert.

Wir betrachten eine Menge M und eine eindeutige Zuordnung φ, welche jedem Element x von M ein Element $\varphi(x)$ von M zuordnet. Sie bildet, wie wir sagen, M auf sich selbst ab, und wir nennen mit **Dedekind** die Menge M eine **Kette in Bezug auf die Abbildung** φ, oder, wenn nur eine Abbildung in Frage steht, schlechthin eine Kette. Die definierende Eigenschaft einer Kette besteht also darin, daß $\varphi(x)$ zu ihr gehört, sofern x eines ihrer Elemente ist.

Die Menge der Elemente $x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^n(x), \ldots$ ist eine Kette und zudem ist sie ein Teil von M, wenn x in M enthalten ist. Sie kann unter Umständen ein **echter** Teil von M sein, sie kann aber auch mit M identisch sein. Wir bezeichnen sie künftig mit $K(x)$. —

Ist M' irgend eine Kette, die Teil von M ist und x enthält, so enthält sie auch $\varphi(x)$, demnach $\varphi^2(x)$ und danach wieder $\varphi^3(x)$ etc., kurz sie enthält $K(x)$. Die Kette $K(x)$ ist also in jeder Kette enthalten, die x enthält, sie ist die kleinste Kette, in der

[1] Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig 1888.

x überhaupt enthalten sein kann. Diese Eigenschaft der Menge $K(x)$ wollen wir nun umgekehrt als ihre Definition wählen.

§ 129. Wir setzen also voraus, es gebe eine Menge M und eine eindeutige, nicht notwendig umkehrbar-eindeutige Abbildung φ von M in sich selbst. Ein Teil von M, der durch φ in sich selbst abgebildet wird, heißt eine Kette. Solcher Ketten gibt es mindestens eine, die Menge M selbst.

Es sei jetzt M_1 irgend ein Teil von M und x ein Element in M. Wir machen folgende Disjunktion:

Entweder es gibt eine Kette in M, die M_1, nicht aber x enthält, oder jede Kette, die M_1 enthält, enthält auch x. Im letzteren Fall rechnen wir x zu einer Menge $K(M_1)$, die nach ihrer Definition Teil von M ist und mindestens alle Elemente von M_1 enthält. Sie ist ferner ein Teil jeder Kette, welche M_1 enthält; sie ist vor allem, wie man sofort nachweist, selbst eine Kette. Denn wäre x in $K(M_1)$ und $\varphi(x)$ nicht in $K(M_1)$, so hieße das: jede Kette, die M_1 enthält, enthält x, aber es gibt eine Kette, die M_1 enthält und $\varphi(x)$ nicht enthält. Dies aber ist unmöglich, denn eine Kette, die M_1 enthält, enthält x, also, als Kette auch $\varphi(x)$.

Wir sind danach in der Tat berechtigt, $K(M_1)$ als die kleinste, M_1 enthaltende Kette zu bezeichnen.

Diese einfache Definition setzt uns sofort in den Stand, den Induktionsschluß in einer allgemeinen Form zu begründen. Es sei S eine Menge, von der wir zweierlei wissen:

Erstens: sie enthält M_1.

Zweitens: enthält sie das Element x von $K(M_1)$, so enthält sie auch $\varphi(x)$.

So beweisen wir, daß S die Kette $K(M_1)$ enthält. Der zweite Teil unserer Voraussetzung sagt aus, daß alle Elemente von $K(M_1)$, die in S enthalten sind, eine Kette bilden. Diese ist natürlich als Teil von $K(M_1)$ auch Kette in M. Der erste Teil der Voraussetzung behauptet weiter, daß diese Kette M_1 enthält. Daher enthält diese Kette auch $K(M_1)$, und da sie nur Elemente aus $K(M_1)$ enthält, ist sie mit $K(M_1)$ identisch, d. h. alle Elemente von $K(M_1)$ gehören zu S.

§ 130. Ist A eine Menge von Ketten, so ist auch die Vereinigungsmenge N aller zu A gehörigen Ketten eine Kette. Die Aussage: „x gehört zu N“ steht nämlich für folgende andere: Es gibt eine zu A gehörige Menge A, welche x enthält. Da nun A als Kette auch $\varphi(x)$ enthält, ist $\varphi(x)$ in einer Menge des Systems A enthalten, d. h. $\varphi(x)$ gehört zu N. Danach ist N eine Kette.

Aber auch der größte gemeinsame Teil N' von A, sofern es überhaupt Elemente gibt, die allen zu A gehörigen Mengen gemeinsam sind, ist eine Kette. Die Aussage „x ist in N'“ steht nämlich für folgende andere: Ist A in A, so ist x in A. Da A eine Kette, ist auch $\varphi(x)$ in A, d. h. mit x ist auch $\varphi(x)$ allen Ketten des Systems A gemeinsam: N' ist eine Kette.

Unter dem Bild $\varphi(M_1)$ eines Teiles M_1 von M verstehen wir nach früheren Festsetzungen die Menge aller Elemente von M, die den Elementen von M_1 durch φ zugeordnet sind. Die Aussage: „x gehört zu $\varphi(M_1)$“, besagt also: „es ist $x = \varphi(y)$, y in M_1.“ Ist nun M_1 eine Kette, so ist auch $\varphi(M_1)$ eine Kette. Denn ist x in $\varphi(M_1)$, so ist $x = \varphi(y)$, y in M_1; da M_1 eine Kette, ist auch x in M_1; daher ist $\varphi(x)$ Bild eines Elementes x in M_1, d. h. $\varphi(x)$ ist in $\varphi(M_1)$, w. z. b. w.

Es sei nun a irgend ein Element von M, $K(a)$ wieder seine kleinste Kette, $\varphi(K(a))$ ihr Bild. Betrachten wir diese Ketten vom naiven Standpunkt aus. $K(a)$ enthält die Elemente a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a), \ldots \varphi^n(a), \ldots$ und $\varphi K(a)$ die Bilder derselben:

$$\varphi(a),\ \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),\ \varphi(\varphi^2(a)) = \varphi^3(a) \text{ etc.}$$

Wir sehen, daß $\varphi(K(a))$ auch kleinste Kette des Elementes $\varphi(a)$ ist.

LXXVI. Die Kette des Bildes $\varphi(a)$ von a ist auch Bild der Kette von a:

$$K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))\,[1].$$

Es handelt sich nun um den scharfen Beweis dieses Satzes. Da $\varphi(K(a))$ das Element $\varphi(a)$ enthält, enthält es auch, als Kette, die Kette von $\varphi(a)$, $K(\varphi(a))$. Es ist also noch umgekehrt zu zeigen, daß $K(\varphi(a))$ das Bild $\varphi(K(a))$ enthält. Zu diesem Zweck bilden wir die Vereinigungsmenge A von a und $K(\varphi(a))$. Ist a in $K(\varphi(a))$ enthalten, so auch $K(a)$ und damit $\varphi(K(a))$. In diesem Fall ist der Satz trivial und $A = K(a) = K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))$. Es sei also a nicht in $K(\varphi(a))$ enthalten. Auch dann ist A eine Kette. Denn ist x in A, so ist entweder $x = a$, also $\varphi(x) = \varphi(a)$ in $K(\varphi(a))$, oder x ist in $K(\varphi(a))$ enthalten, also $\varphi(x)$ ebenfalls, da $K(\varphi(a))$ eine Kette ist. Es ist somit das Bild jedes Elementes von A, d. h. das Bild $\varphi(A)$ in $K(\varphi(a))$ und a fortiori in A selbst enthalten: A ist eine Kette. Da A das Element a enthält, ist $K(a)$ Teil von A, somit $\varphi(K(a))$ Teil von $\varphi(A)$ und damit Teil von $K(\varphi(a))$, w. z. b. w.

Wir nennen die Kette $K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))$ die „Bildkette" von a und bezeichnen sie auch kurz mit $K'(a)$. Es ist leicht zu zeigen, daß A mit $K(a)$ identisch ist. Es war bereits erkannt, daß $K(a)$ Teil von A ist. Es ist aber auch umgekehrt a, $\varphi(a)$

[1] Dieser Satz gilt auch, wenn a nicht einzelnes Element, sondern Teilmenge von M ist; doch bedürfen wir dieser Verallgemeinerung nicht.

und damit $K(\varphi(a))$ in $K(a)$ enthalten, daher ist auch A Teil von $K(a)$, d. h. $A = K(a)$:

LXXVII. **Ist a nicht in seiner Bildkette $K'(a)$ enthalten, so hat man nur a zu $K'(a)$ hinzuzufügen, um die Kette von a, $K(a)$ zu erhalten:**

$$K(a) = a + K'(a).$$

§ 131. Einige einfache Beispiele sollen zunächst zeigen, welche besonderen Voraussetzungen wir noch über $\mathfrak{G}$ aufstellen müssen. Es bestehe zunächst M aus einer endlichen Anzahl von Elementen, etwa aus den Zahlen 1 bis 5, und es sei

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 1.$$

In diesem Fall ist M eine Kette, und zwar Kette jedes Elementes: $M = K(1) = K(2)$ etc. Die Abbildung φ ist umkehrbar eindeutig. Das Bild $\varphi(M)$ ist mit M identisch.

Sei zweitens

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 2.$$

Hier ist $M = K(1)$, das Bild von M enthält das Element 1 nicht. Die Abbildung ist nicht umkehrbar eindeutig.

Sei drittens

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 3.$$

Die Menge ist nicht Kette eines ihrer Elemente, vielmehr sind $K(1)$, $K(2)$ gleich dem Teil (1,2). $K(3)$, $K(4)$, $K(5)$ gleich (3, 4, 5). Das Bild von M ist mit M identisch, φ ist umkehrbar eindeutig.

Wenn wir endliche Mengen betrachten, wird stets M seinem Bilde gleich sein, sofern es sich um eine umkehrbar eindeutige Zuordnung handelt. Für transfinite Mengen sind jedoch diese beiden Tatsachen von einander unabhängig. Insbesondere wird $\mathfrak{G}$ durch die umkehrbar eindeutige Zuordnung $\varphi(n) = n+1$ auf einen echten Teil seiner selbst, nämlich auf die Menge 2, 3, 4 ... abgebildet. Außerdem ist hierbei $\mathfrak{G} = K(1)$ und damit haben wir diejenigen Tatsachen bereits vollständig zur Hand, auf denen sich das Dedekindsche Axiomensystem aufbaut. Es lautet:

(D) 1) Die Menge $\mathfrak{G}$ besitzt eine Abbildung φ auf sich selbst.

2) Die Menge $\mathfrak{G}$ besitzt ein Grundelement 1, dessen kleinste Kette sie ist.

3) Das Bild von $\mathfrak{G}$ ist echter Teil von $\mathfrak{G}$.

4) Die Abbildung φ ist umkehrbar eindeutig.

Die Axiome (2) bis (4) setzen (1) voraus, sind aber unter sich logisch unabhängig, wie die vorausgeschickten Beispiele zeigen. Aus (1, 3, 4) folgt, daß $\mathfrak{G}$ transfinit ist. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer transfiniten Menge M die Existenz einer Menge, die den Axiomen (1) bis (4) genügt. Ist nämlich M transfinit, so heißt das: Es existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf einen echten Teil M_1 seiner selbst. Es gibt daher ein Element a in M, das nicht zu M_1 gehört, d. h. a ist nicht Bild irgend eines Elementes in M. Die kleinste Kette $K(a)$ genügt nun offenbar den Axiomen (1, 2, 4), und daß sie auch (3) genügt, folgt aus der Annahme über a, wonach a nicht in $\varphi(K(a))$ enthalten sein kann.

Aus unserer allgemeinen Fassung des Induktionsschlusses ergibt sich jetzt im besonderen die Zulässigkeit des Schlusses von n auf $n+1$. Enthält eine Menge S das Element 1, und gehört mit n auch $\varphi(n)$ zu ihr, so ist $\mathfrak{G}$ ein Teil von S. Denn die zweite Aussage der Voraussetzung erklärt die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}$, die zu S gehören, für eine Kette, die nach der ersten Aussage 1, somit $K(1) = \mathfrak{G}$ selbst enthält.

Dieser Beweis ist so außerordentlich einfach, daß man wohl sagen kann, das Axiom (2) sei gar nichts anderes als das Postulat der Zulässigkeit des Induktionsbeweises. Geht man aber auf unsere früheren undurchführbaren Versuche zur Begründung oder Formulierung dieses Postulates zurück, so wird man zugeben müssen: Selbst wenn es sich hier nicht um einen Beweis, sondern nur um eine Formulierung der Induktion handelt, so ist doch diese Formulierung selbst eine so einfache und durchsichtige, daß in ihrer Entdeckung ein direkt klassischer Fortschritt der Theorie der ganzen Zahlen enthalten ist.

Die Dedekindsche Begründung der Induktion ist in einer Hinsicht analog zu der oben gegebenen Begründung durch die Wohlordnung von $\mathfrak{G}$. Bei der letzteren ist das entscheidende Postulat dies, daß jeder Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ein letztes Element enthält, daß also $\mathfrak{G}$ selbst den niedersten Typus ohne letztes Element darstellt. In der Dedekindschen Fassung liegt das Schwergewicht in dem Postulat, daß $\mathfrak{G}$ die kleinste Kette ist, welche 1 enthält. Beide Begründungen sind aber darin wesentlich verschieden, daß sie zu völlig abweichenden Verallgemeinerungen führen.

An dieser Stelle sei sogleich hervorgehoben, daß das Axiom (3) eine engere Fassung zuläßt, wenn man es mit (2) vergleicht. Es folgt nämlich sofort:

3') Das Bild $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ enthält jedes Element von $\mathfrak{G}$ mit Ausnahme des Elementes 1. D. h. jedes Element von $\mathfrak{G}$ außer 1 ist Bild eines Elementes von $\mathfrak{G}$.

Enthielte nämlich $\mathfrak{G}'$ die Eins, so wäre auch $K(1)$ und nach (2) $\mathfrak{G}$ selbst Teil von $\mathfrak{G}'$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ gegen (3). $\mathfrak{G}'$ enthält daher 1 nicht. Nun ist aber $\mathfrak{G}'$ als Bild von $\mathfrak{G} = K(1)$ die Bildkette $K'(1)$ von 1 und dieser haben wir nach LXXVII nur das Element 1 wieder hinzuzufügen um $K(1) = \mathfrak{G}$ zurückzuerhalten. — Da die engere Fassung (3*) einen beweisbaren Teil enthält, ist sie in (D) zunächst durch ihren logisch unabhängigen Bestandteil ersetzt worden.

§ 132. Wir haben jetzt zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ durch die Axiome (D) wirklich charakterisiert ist. Wir wollen dies dadurch tun, daß wir die Ordnung von $\mathfrak{G}$ definieren und von ihr zeigen, daß sie dem System (G) des Kapitels XXVII genügt. Wir verlassen dabei allerdings denjenigen Weg, den Herr Dedekind in seiner Darstellung eingeschlagen hat, zum mindesten in der formalen Anordnung, bleiben dafür aber in besserem Zusammenhang mit den bisherigen Entwicklungen dieses Referates.

Wenn wir die Ketten der Elemente von $\mathfrak{G}$,

$$K(1),\ K(2),\ K(3), \ldots K(n) \ldots$$

aus unserer bereits vorhandenen Kenntnis von $\mathfrak{G}$ heraus konstruieren, so sehen wir, daß sie nichts anderes sind, als die Reste von $\mathfrak{G}$:

$$K(1) = R(1) = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$
$$K(2) = R(2) = 2,\ 3,\ 4, \ldots$$
$$K(n) = R(n) = n,\ n+1,\ n+2, \ldots$$

Nach den Ausführungen des vorigen Kapitels können wir daher sofort die Ordnung von $\mathfrak{G}$ definieren, wenn wir zeigen können, daß die Menge dieser Ketten den Axiomen (A, B) der §§ 122, 123 genügt. Das Axiom (A) fordert, auf unseren Fall angewandt, daß unter zwei Ketten $K(a)$, $K(b)$ stets eine existiert, die Teil der andern ist. Es soll also ausgeschlossen sein, das jede von beiden Elemente enthält, die der andern nicht angehören.

Enthält nun $K(a)$ Elemente, die nicht zu $K(b)$ gehören, so ist a eines von diesen, da $K(b)$ mit a auch $K(a)$ enthalten müßte. Demnach nimmt Axiom (A) folgende Fassung an:

5) Ist a nicht in $K(b)$ enthalten, so ist b in $K(a)$ enthalten.

Es liegt nahe, diesen Satz durch Induktion zu beweisen, da er für $a = 1$ sicher richtig ist. Der Beweis folgt nach Beendigung unserer Analyse.

Das Axiom (B) fordert, daß zu zwei verschiedenen Elementen a, b stets eine Kette existiert, die eines enthält, das andere nicht. Ist a nicht in $K(b)$ enthalten oder b nicht in $K(a)$ enthalten, so ist dieser Bedingung sicher genügt. Es fragt sich daher, ob a in $K(b)$ und b in $K(a)$ enthalten sein kann. In diesem Fall enthalten sich $K(a)$ und $K(b)$ gegenseitig, d. h. es ist $K(a) = K(b)$ woraus weiter folgt, daß jede Kette, die a enthält, auch b enthält und umgekehrt. Gilt Axiom (B), so können in diesem Fall a und b nicht verschieden sein, wir müssen daher beweisen:

6) Aus $K(a) = K(b)$ folgt $a = b$.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, die Vollständigkeit des Systems aller Ketten $K(a)$ zu erweisen. Da nun nach § 130 sowohl der größte Teiler wie die Vereinigungsmenge einer Menge von Ketten stets eine Kette ist, spitzt sich der Beweis der Vollständigkeit auf folgenden Satz zu:

7) Jede in $\mathfrak{G}$ enthaltene Kette ist kleinste Kette eines Elementes von $\mathfrak{G}$.

Ist dann T eine Teilmenge des Systems A aller Ketten $K(a)$, so ist ihr größter Teiler wie auch ihre Vereinigungsmenge in dem System A enthalten, dieses also nach Satz LXXVa vollständig.

Fassen wir nun A als das System der Reste von $\mathfrak{G}$ auf, so ergibt sich sofort die Wohlordnung von $\mathfrak{G}$. Jeder Rest $K(a)$ enthält nämlich in a ein Element, das einem echten Teile von $K(a)$, der zu A gehört, nicht angehören kann. Denn wäre a in $K(b)$, so wäre $K(a)$ in $K(b)$, also $K(b)$ gewiß nicht echter Teil von $K(a)$.

Die spezielle Wohlordnung von $\mathfrak{G}$ ist nun dadurch charakterisiert, daß jeder eigentliche Rest ein unmittelbar vorangehendes Element besitzt. Ein eigentlicher Rest kann das Element 1 nicht enthalten, da jede Kette, die 1 enthält, mit $\mathfrak{G}$ identisch ist. Nun ist aber jedes von 1 verschiedene Element in $\mathfrak{G}' = \varphi(\mathfrak{G})$ enthalten, also Bild $\varphi(x)$ eines Elementes von $\mathfrak{G}$. Daher ist jede Kette, die echter Teil von $\mathfrak{G}$ ist, eine Bildkette, $K(\varphi(x))$. Ziehen wir unsere Kenntnis der Menge $\mathfrak{G}$ heran, so sehen wir, daß das unmittelbar vorangehende Element von $K(\varphi(x)) = (x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots)$ das Element x selbst ist. Es ist also zweierlei zu zeigen (§ 127):

8) K e i n E l e m e n t x i s t i n s e i n e r B i l d k e t t e e n t h a l t e n.

und: $(K(\varphi(x)) + x)$ ist eine Kette. Letzteres steht aber nach Satz LXXVII bereits fest, und zwar ist $(K(\varphi(x)) + x) = K(x)$.

Da Satz (8) für das Element 1 durch Axiom (3*) erfüllt ist, liegt es wiederum nahe, ihn durch Induktion zu beweisen. Zugleich erkennen wir aus Satz 8 die letzte typische Eigenschaft der Menge $\mathfrak{G}$: sie besitzt kein letztes Element. Denn durch die Ordnung, die ihr das System der Ketten $K(a)$ vorschreibt, ist hinter jedes Element x noch die ganze Bildkette $K'(x)$ geordnet, die nach (8) x selbst nicht enthält.

Mit Satz (8) erledigt sich aber auch Satz (6). Ist nämlich $K(a) = K(b)$, so ist, da $K(a) = a + K'(a)$, entweder $b = a$ oder b in $K'(a)$. Im letzteren Fall wäre aber auch $K(b)$, d. h. $K(a)$ selbst Teil von $K'(a)$, also auch a in $K'(a)$ gegen Satz 8. Es bleiben demnach nur die Sätze 5, 7, 8 zu beweisen. Da wir ihre Beweise unabhängig von den bisher geführten Betrachtungen erbringen, sind wir an die Reihenfolge nicht gebunden und können daher mit Satz (8) beginnen.

§ 133. Das Element 1 ist nicht in seiner Bildkette $\mathfrak{G}'$ enthalten (Axiom 3*). Es sei a ein Element, das ebenfalls nicht zu seiner Bildkette $K'(a)$ gehört. Wäre $\varphi(a) = a'$ in $K'(a')$ enthalten, so hieße das, da $K'(a') = \varphi K(a')$ ist: a' ist Bild $\varphi(x)$ eines Elementes x in $K(a')$. Nun ist $a' = \varphi(a)$, nach Axiom (4) wäre daher $a = x$, d. h. in $K(a')$ gegen die Annahme. Es ist also a' nicht in seiner Bildkette enthalten, womit durch Induktion Satz 8 folgt.

Wir gehen zu Satz 5 über. Es sei für a bewiesen, daß b in $K(a)$ enthalten ist, wenn a nicht in $K(b)$ enthalten ist. Für $a = 1$ steht dies bereits fest. Es sei ferner c ein Element, dessen Kette a' nicht enthält. Dann enthält sie a fortiori auch a nicht. Daher ist c in $K(a)$ enthalten, somit ist entweder $c = a$ oder c in $K(a')$. Das erste ist unmöglich, da sonst gegen die Annahme $K(c)$ das Element a' enthalten würde. Also ist c in $K(a')$, w. z. b. w. Daraus folgt durch Induktion Satz 5.

Zum Schlusse beweisen wir Satz 7. Es sei K eine Kette in $\mathfrak{G}$. Ist $K = \mathfrak{G}$, so ist $K = K(1)$ und der Satz richtig. Es sei weiter K echter Teil von $\mathfrak{G}$, so enthält K das Element 1 nicht. Die komplementäre Menge L von K ist keine Kette, denn sie enthält 1, ohne $\mathfrak{G}$ zu enthalten. Es gibt daher in ihr ein Element

a, dessen Bild $\varphi(a) = a'$ nicht zu L gehört. Da a' somit zu K gehört, enthält K die Kette $K(a')$.

Enthält K irgend ein Element x, so ist auch $K(x)$ ein Teil von K. Zwischen $K(x)$ und $K(a')$ können drei Beziehungen bestehen. Erstens: $K(x)$ ist echter Teil von $K(a')$, zweitens: $K(x) = K(a')$. In diesen beiden Fällen ist x in $K(a')$ enthalten. Drittens bliebe die Möglichkeit, daß $K(a')$ echter Teil von $K(x)$ wäre, also x nicht zu $K(a')$ gehörte. Dann wäre a' in $K(x')$, d. h. a' Bild eines Elementes in $K(x)$. Dieses Element könnte nach Axiom 4 nur a sein, da $a' = \varphi(a)$. Es wäre dann aber a in K und nicht in L, gegen die Definition von a. Also ist der dritte Fall unmöglich, vielmehr ist jedes Element x von K in $K(a')$ enthalten, und da auch $K(a')$ in K enthalten ist, ist K kleinste Kette von a', was zu beweisen war.

Hiermit ist bewiesen, daß das Dedekindsche Axiomsystem dem Wohlordnungssystem $\mathfrak{S}$ völlig äquivalent ist. Es stützt sich im Gegensatz zu jenem auf den Zuordnungsbegriff an Stelle des Ordnungsbegriffes und führt dadurch die Zulässigkeit seiner Definitionen auf das eine Postulat zurück, daß es transfinite Mengen geben soll.

XXX.

Der Wohlordnungssatz.

§ 134. Am Ende des Kapitels XXVII haben wir gezeigt, daß jede Menge, die nicht endlich ist, eine abzählbare Teilmenge enthält. Dieser Beweis beruhte auf einer rein logischen Disjunktion und benutzte an einer Stelle das Prinzip der einmaligen Auswahl, nämlich bei dem Beweis, daß eine Menge, die nicht endliche Teilmengen von beliebiger Mächtigkeit enthält, endlich sein muß.

Hierdurch ist der sehr anfechtbare Beweis durch iterierte Auswahl überflüssig geworden.

In ähnlicher Weise läßt sich der in § 104 angegebene unbrauchbare Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, von der iterierten Auswahl befreien und auf ein Postulat zurückführen, das keine Ordnung der Auswahl verlangt. In dieser exakten Fassung verliert der Beweis zugleich die Fiktion, als enthalte er irgend eine Methode, die Wohlordnung auszuführen.

Wenn eine Menge wohlgeordnet werden kann, so wird dadurch in jeder Teilmenge ein Element ausgezeichnet, nämlich das erste. Der Wohlordnungssatz kehrt diese Tatsache um: W e n n e s m ö g l i c h i s t , i n j e d e r T e i l m e n g e e i n e r M e n g e M e i n E l e m e n t a u s z u z e i c h n e n , s o k a n n M w o h l g e o r d n e t w e r d e n.

Will man sich mit einer Plausibelmachung begnügen, so kann man folgendermaßen verfahren: Ich wähle aus M ein Element m_1 aus, oder falls auch in M selbst als unechtem Teil von M ein Element ausgezeichnet ist, so wähle ich dieses. In der zu m_1 komplementären Teilmenge $M - m_1$ ist ein Element ausgezeichnet. Es heiße m_2. In $M - m_1 - m_2$ heiße das ausgezeichnete Element m_3, in $M - m_1 - m_2 - m_3$ ist ebenso m_4 ausgezeichnet u. s. f. Auf diese Art entsteht eine wohlgeordnete Teilmenge $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n \ldots$, die, falls M nicht vorher erschöpft ist, den Typus ω hat. Existiert ihre komplementäre Teilmenge, so ist in dieser ein Element m_ω ausgezeichnet, nach dessen Entfernung $m_{\omega+1}$ u. s. f.

Diese Methode unterscheidet sich von der früheren durch iterierte Auswahl in einem wesentlichen Punkt: es wird angenommen, daß jedes „auszuwählende" Element m_α bereits durch die vorangehenden gesetzmäßig bestimmt ist. Trotzdem ist die ganze Betrachtungsweise noch durchaus unexakt. Mit den Indices $1, 2, \omega, \ldots$

beschwören wir die Menge W wieder herauf und damit die Frage der Bezeichnung und der Erzeugungsprinzipien. Es liegt daher in der Darstellung, die Herr Zermelo[1] der Wohlordnung zu Grunde gelegt hat, ein wesentlicher Fortschritt.

§ 135. Es sei M_1 irgend eine Teilmenge von M, $M - M_1$ die komplementäre und x deren ausgezeichnetes Element. Wir bezeichnen es mit $\gamma(M_1)$. Die Zuordnung γ ordnet daher jeder Teilmenge ein nicht in ihr enthaltenes Element zu. Da es zu M keine komplementäre Teilmenge gibt, fingieren wir wieder die aus keinem Element bestehende Menge 0 und bezeichnen mit $\gamma(0)$ dasjenige Element, welches in M selbst ausgezeichnet war.

Die Bildung der Wohlordnung durch

$$\gamma(0) = m_1, \quad \gamma(m_1) = m_2, \quad \gamma(m_1, m_2) = m_3,$$

führen wir nun nicht durch, sondern verwenden sie lediglich, um uns zu überzeugen, daß M Teilmengen M' von folgender besonderen Beschaffenheit enthält:

1) M' ist wohlgeordnet
2) $\gamma(0) = m_1$ ist ihr erstes Element. Ist $A(x)$ ein Abschnitt von M', so ist $x = \gamma(A(x))$.

Solche Teilmengen sind in der Tat die Mengen m_1, (m_1, m_2), (m_1, m_2, m_3). Wir nennen eine Teilmenge von M, die den Postulaten (1, 2) genügt, eine γ-Menge und beachten, daß aus der Definition sofort der Satz folgt:

3) Jeder Abschnitt einer γ-Menge ist selbst eine γ-Menge.

Wir behaupten nun, daß die Menge Γ aller γ-Mengen ein ordnendes System bildet, daß M die Vereinigungsmenge dieses Systems

[1] Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Annalen 59.

ist, und daß die Ordnung von M, sofern wir Γ als System von Abschnitten auffassen, eine Wohlordnung ist.

Das Postulat (A), daß Γ ein konzentrisches System sei, werden wir im Hinblick auf Satz LXXIV sogleich in folgender engeren Fassung beweisen:

4) Von zwei verschiedenen γ-Mengen ist eine ein Abschnitt der andern.

An Stelle dieses Satzes genügt es, folgenden einfacheren zu setzen:

5) Zwei ähnliche γ-Mengen sind identisch.

Nach Satz (4) können sie nämlich nicht verschieden sein, und gilt umgekehrt (5), so können zwei verschiedene γ-Mengen nicht ähnlich sein, also ist eine nach (1) einem Abschnitt der andern ähnlich und mit diesem, da er nach (3) selbst eine γ-Menge ist, nach (5) identisch. Also sind (4) und (5) äquivalente Sätze.

Ehe wir (5) beweisen, betrachten wir die Forderung (B) § 123: Sind x, y zwei Elemente, die in γ-Mengen enthalten sind, so gibt es eine γ-Menge, die eines der Elemente enthält, das andere nicht. Ist nämlich x in A, y in B, so ist entweder $A = B$ oder eine in der anderen enthalten, also enthält etwa A sowohl x wie y. Da A wohlgeordnet ist, ist eines der Elemente das frühere, etwa x; dann ist x in $A(y)$ enthalten, y aber nicht, und $A(y)$ ist nach (3) eine γ-Menge.

Sind die Postulate (A), (B) als erfüllt erkannt, so folgt aus Satz LXXIV, daß die Vereinigungsmenge M_1 aller Γ Mengen wohlgeordnet ist, und es bleibt der Nachweis zu erbringen, daß sie mit M identisch sein muß.

Wir beweisen nun zunächst Satz (5). Seien $A \simeq B$ zwei γ-Mengen, $\varphi(x) = y$ dasjenige Element von B, welches dem Element x von A entspricht, S die Menge aller Elemente von A, für die

$\varphi(x) = x$ ist. Sie enthält das erste Element m_1 von A, da es auch erstes von B ist. Enthält sie ferner alle Elemente eines Abschnitts $A(x)$ von A, so ist dieser mit dem ähnlichen Abschnitt $A(y)$ von B identisch und $\varphi(x) = y$. Es ist aber, weil A und B γ-Mengen sind, $x = \gamma(A(x)) = \gamma(A(y)) = y$, also enthält S mit $A(x)$ auch x. Aus dem allgemeinen Schlußschema XXI des § 33 folgt somit, daß S alle Elemente von A enthält, d. h. es ist A mit B identisch.

§ 136. Nachdem wir gezeigt haben, daß die Vereinigungsmenge M_1 aller γ-Mengen wohlgeordnet ist, beweisen wir ihre Identität mit M, und zwar in zwei Schritten. Zuerst überzeugen wir uns, daß M_1 selbst eine γ-Menge ist. In der Tat, sie ist wohlgeordnet, die γ-Mengen sind Abschnitte von M_1, und daher m_1 erstes Element von M_1. Ist nun x ein Element von M_1, so heißt das: es ist Element einer γ-Menge A. Diese ist ein Abschnitt von M_1, daher ist der Abschnitt $A(x)$ in M auch Abschnitt von A, somit $x = \varphi(A(x))$. M_1 genügt also den Forderungen (1, 2), w. z. b. w.

Wir beweisen nun weiter: Jede γ-Menge, die echter Teil von M ist, ist Abschnitt einer γ-Menge. Daraus folgt, daß M_1 nicht echter Teil von M sein kann, da es sonst Abschnitt einer γ-Menge, daher nicht Menge aller in γ-Mengen enthaltenen Elemente wäre. M_1 ist somit mit M identisch, also M wohlgeordnet.

Der Beweis des genannten Satzes beruht auf dem allgemeinen Satz, daß die Vereinigungsmenge zweier teilfremden wohlgeordneten Mengen P und Q durch Hintereinandersetzen wohlgeordnet werden kann. Daß die Ordnung von $P + Q$ eine Wohlordnung ist, wenn P und Q wohlgeordnet sind, ist mit aller Strenge beweisbar, es läßt sich darum auch an jede wohlgeordnete Menge ein Element anhängen. Wir haben bei den ultrafiniten Paradoxieen gesehen, daß es zu einem Widerspruch führt, wenn man an die Menge W aller transfiniten Ordnungszahlen ein Element anhängt. Wir haben dabei zugleich hervorgehoben, daß dieser Widerspruch in der Definition von W, nicht aber in dem Anhängen eines Elementes liegt; daß vielmehr die Menge W selbst erst recht aufgegeben werden muß, wenn man auf das Anhängen eines Elementes verzichtet. Da unser Beweis des Wohlordnungssatzes sich zudem gerade durch die Vermeidung aller Abstraktionen auszeichnet, die zum Begriff der Ordnungszahl und der Menge W führen, ist er vom Standpunkt dieser Menge aus nicht mehr und nicht weniger anfechtbar, als die ganzen Grundlagen des mengentheoretischen Kalkuls selbst.

Wenn A eine γ-Menge ist, die echter Teil von M ist, so existiert $\gamma(A) = x$ und die Menge $A + x$ ist wieder eine γ-Menge; denn jeder ihrer Abschnitte mit Ausnahme von A selbst ist Abschnitt von A, ihr erstes Element ist erstes Element von A, also gleich m_1; für den Abschnitt A selbst ist aber nach der Definition von x das Postulat (2) erfüllt, und ihre Ordnung ist eine Wohlordnung, wenn x hinter alle Elemente von A geordnet wird, wie dies das Zeichen $A + x$ vorschreibt. Demnach ist A der Abschnitt $A(x)$ der γ-Menge $A + x$.

§ 137. Hiermit ist der Beweis des Wohlordnungssatzes zu Ende geführt. Der einzige Einwand, der gegen den Beweis selbst geführt werden kann, betrifft das Anhängen des Elementes $\gamma(A)$ an eine γ-Menge A. Mit ihm haben wir uns bereits auseinandergesetzt. Alle weiteren Einwände richten sich gegen die Zulässigkeit des Auswahlpostulats, nach dem es möglich sein soll, aus jeder Teilmenge von M ein Element auszuwählen. Diese Auswahl ist beispielsweise für das Kontinuum noch nicht gelungen, der Wohlordnungssatz hat also das Kontinuumproblem seiner Lösung bis jetzt nicht näher gebracht. Da aber bereits die Vermutung aufgetaucht ist, daß eine Wohlordnung des Kontinuums unmöglich sei, ist doch der Wohlordnungssatz insofern von Bedeutung geworden, als er dieser Vermutung so ziemlich jeden Boden entzogen hat. Denn der Nachweis, daß es nicht möglich sein sollte, in jeder Teilmenge des Kontinuums ein Element auszuwählen, wird von vornherein auf schärfere Opposition stoßen, als der Nachweis der Unmöglichkeit seiner Wohlordnung. Eine Teilmenge, aus der sich ein Element nicht auswählen ließe, kann gewiß niemals angegeben werden, weder im Kontinuum noch in sonst einer Menge.

Wenn das Auswahlpostulat zugegeben wird, d. h. wenn es möglich sein soll, in jeder Teilmenge einer Menge M ein Element auszuzeichnen, so läßt sich der Wohlordnungssatz dahin aussprechen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Die Konsequenzen dieses Satzes sind dann außerordentlich weittragende: jede Mächtigkeit ist ein Alef, es sind daher alle Mächtigkeiten komparabel, und das Trichotomieproblem der Mächtigkeiten ist gelöst. Zugleich erhalten wir einen neuen Nachweis, daß jede nicht endliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält.

Es hat sich an den Wohlordnungssatz eine umfangreiche Diskussion angeknüpft, die ihr Ende noch nicht erreicht haben dürfte. Es muß auch aus anderen Gründen auf einen Bericht über diese Diskussion verzichtet werden, vor allem darum, weil durch sie die Frage nach der zulässigen Anwendung des Mengenbegriffs in den Vordergrund getreten ist, und ohne deren Erledigung eine befriedigende Antwort nicht zu erwarten ist. Auch die Frage, welche Unterschiede zwischen logischer Möglichkeit und mathematischer Existenz bestehen, hängt mit dem Auswahlpostulat aufs engste zusammen. Und zu diesen Fragen vermag ich nichts neues zu sagen, geschweige denn eine Antwort zu geben. Solange aber nicht geklärt ist, was eine Menge ist, d. h. welche Gesamtheiten sich den mengentheoretischen Betrachtungen ohne Widerspruch fügen, ist auch über den Umfang des Satzes, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, keine Klarheit zu gewinnen.

Schlusswort.

Werfen wir einen Blick auf unsere Betrachtungen zurück, so sehen wir zunächst, daß eine große Reihe von Begriffen, wie der der Vereinigungsmenge, des gemeinsamen Teiles, der Ordnung und Wohlordnung, einer logisch einwandfreien Verwendung fähig sind, ohne daß die Endlichkeit der betrachteten Mengen vorausgesetzt wird, und daß es weiterhin auch tatsächlich unendliche Mengen gibt, zum mindesten die abzählbaren, bei denen die Verwendung zu positiven und gesicherten mathematischen Ergebnissen führt. Die Mengenlehre ist also nicht etwa derjenige rein formale Teil der Lehre von den endlichen Mengen, der durch Weglassen der Voraussetzung der Endlichkeit entsteht, — eine Deutung, die man ihr vielfach zu geben scheint. Im Gegenteil, wir haben gesehen, daß eine dogmatische Behandlung der ganzen Zahlen unmöglich ist, ohne die Annahme, daß es unendliche Mengen gibt. —

Die Eigenart der ganzen Schlußweise, ihre aufs äußerste getriebene Astraktion, berechtigen uns zu der Behauptung, daß wir in der Mengenlehre eines der eigenartigsten Kapitel der Mathematik besitzen; selbst die Infinitesimalrechnung und die mathematische Formelsprache stützt sich noch auf die klassischen Methoden der antiken Mathematik und besitzt Vorläufer in ihr. Die Mengenlehre bedeutet wohl den weitesten und kühnsten Schritt über die alten Methoden hinaus, den die Mathematik getan hat.

Eigentümlich erscheint mir das Mißverhältnis zwischen der unbegrenzten Reihe von Möglichkeiten, die uns die transfiniten Zahlen, insbesondere die Alefs, eröffnen, und der außerordentlich geringen Kenntnis, die wir faktisch von ihnen besitzen. Innerhalb dieser Reihe ein System durchsichtiger, einfacher Sätze und ein klarer, auf dem einfachen Begriff der Wohlordnung aufgebauter Zusammenhang von mathematischer Schönheit. Und unmittelbar daneben die Unmöglichkeit, über nichtwohlgeordnete nichtabzählbare Mengen, wie das Kontinuum, irgend etwas praktisch Wertvolles zu erfahren. Es hat manche mathematische Disziplin erst nach langem mühevollen Kampfe praktische Ergebnisse zeitigen können, und man wird darum allein der Mengenlehre, die noch in ihren ersten Anfängen steckt, nicht den Vorwurf der Unfruchtbarkeit machen dürfen; der Begriff der abzählbaren Menge hat bereits so vielfache Anwendung gefunden, daß er heute als unentbehrliches Hülfsmittel des Mathematikers gelten darf. Die Schwierigkeiten aber, die sich hinter der abzählbaren Mächtigkeit erheben, die in dem Problem der endlichen Bezeichnung und dem Kroneckerschen Postulat ihren, wenn auch unkorrekten Ausdruck finden, sind nicht mehr rein mathematischer Art, sondern hängen mit philosophischen Problemen aufs engste zusammen. Dies zeigt sich insbesondere an den ultrafiniten Paradoxieen, die uns lehren, daß dem Arbeiten mit Abstraktionen und rein logischen Disjunktionen irgendwelche Grenzen gezogen sein müssen.

Solange diese Fragen unerledigt sind, scheitert der mathematische Logizismus bereits, noch bevor er mit Ergebnissen der Philosophie in Widerstreit gerät. Die Betätigung der Logik im spezifisch mathematischen Gebiet besitzt einen anderen Grad der Gewißheit und Zuverlässigkeit als im Gebiet des allgemeinen Mengenbegriffs. Begriffe wie endliche Darstellbarkeit, Mengen, die sich selbst enthalten u. a. sind keine mathematischen Bildungen mehr, und wer mit ihnen operiert, strauchelt. Dieser verschiedene Grad der Zuverlässigkeit kann nicht aus der Welt geschafft werden, wenn er auch bisher nur Sache des Gefühls und kein scharf umschriebener Begriff ist. Wenn die Mathematik nur ein Teil des Logikkalkuls sein soll, so ist sie doch jedenfalls ein widerspruchloser Teil eines nicht widerspruchlosen Gebietes, und in diesem Gegensatz steht sofort wieder das alte Problem des Unterschiedes zwischen Mathematik und Logik vor uns. Für den Philosophen aber erwächst gerade hier ein neues Arbeitsfeld, das von den Mathematikern heute noch vielfach mit dem logizistischen Vorurteil betreten wird. Wenn die ultrafiniten Paradoxieen, insbesondere die der Menge W, nicht zu beseitigen sind, so liegt die Vermutung nahe, daß sie im Zusammenhang mit den Antinomieen stehen, die Kant aufgestellt hat. Und es scheint mir eine wichtige Frage zu sein, ob solche Antinomieen im Gebiet der reinen Logik allein tatsächlich bereits auftreten.

XIII.

Das Muskelproblem.

Physiologische Betrachtungen.

Von

Karl Kaiser.

Der Muskel ist eine Maschine, die unter Verbrauch von chemischer Energie mechanische Arbeit leistet. Diese Arbeitsleistung ist im Vergleich zur Größe des Muskels eine sehr bedeutende. Der Wadenmuskel eines mittelgroßen Frosches hat ein Gewicht von 0,5 g, ein Volumen von etwa 0,47 ccm und vermag 500 g fünf Millimeter hoch zu heben. Der linke Ventrikel des menschlichen Herzens leistet bei einem Gewicht von 150—160 g in 24 Stunden eine Arbeit von etwa 30000 mkg.

Die Frage nach den Mitteln und Einrichtungen, die den Muskel zu so überraschenden Leistungen befähigen, hat deshalb nicht nur ein großes physiologisches, sondern auch ein bedeutendes mechanisches Interesse.

Die Versuche, das Problem von Ursprung und Natur der Muskelkraft zu lösen, sind von verschiedenen Seiten her gemacht worden. Einmal hat man die mikroskopisch erkennbare Struktur des Muskels zum Ausgangspunkt genommen. Man hat erkannt, daß die quergestreiften Muskelfasern, aus denen sich im allgemeinen die willkürlich bewegbaren Muskeln zusammensetzen, abwechselnd einfach- und doppelbrechende Schichten unterscheiden lassen, die bei der Zusammenziehung des Muskels, also während seiner Tätigkeit, gewisse Veränderungen zeigen, die einen Schluß auf die ihnen zu Grunde liegenden chemisch-physikalischen Vorgänge zulassen.

Ferner hat man, von der Überlegung ausgehend, daß die Ursache der Bewegung aller lebendigen Substanz die gleiche sein müsse, Beobachtungen an Protozoen, also Organismen von verhältnismäßig sehr einfacher Struktur, angestellt und die aus diesen gewonnenen Vorstellungen ganz allgemein auf alle der Bewegung dienenden Organe übertragen.

Schließlich wurden die physikalischen Eigenschaften des Muskels und die mechanischen Veränderungen während seiner Tätigkeit, sowie die damit verbundenen Arbeitsleistungen untersucht, um aus den dabei erkennbaren Regelmäßigkeiten ein allgemeines Gesetz der Muskelbewegung abzuleiten.

Die Verschiedenartigkeit der Wege, die man eingeschlagen hat, das Muskelproblem zu lösen, lässt uns auch die Schwierigkeiten erkennen, die der Vollendung der Aufgabe entgegenstehen. Die Erscheinungen, die als Folgen eines Grundes, als Wirkungen eines allgemeinen Gesetzes dargestellt werden sollen, sind außerordentlich kompliziert und gehören ganz verschiedenen Beobachtungsgebieten an. Es wird gefordert, daß der aus den erkannten mikroskopisch sichtbaren Veränderungen abgeleitete Schluß auch die mechanischen Vorgänge erkläre, und die an diesen beobachteten Regelmäßigkeiten sollen ebenso wie die ersteren mit den chemischen, elektrischen und thermischen Erscheinungen in die Sphäre eines Begriffes gebracht werden. Die Zahl der durch mühevollste mikroskopische Beobachtung, durch klug ersonnene Apparate und geistvoll kombinierte Versuche festgestellten Erscheinungen ist eine so verwirrend große, daß es fast unmöglich erscheint, die Induktion zu finden, die alle jene Merkmale einem Oberbegriffe unterordnet.

Als allgemein anerkannt und feststehend gilt der Satz, daß chemische Energie die letzte Quelle der Muskelkraft bildet. Es findet demnach im Muskel eine Transformierung von chemischer Energie in mechanische Arbeit statt. Lässt sich nicht aus dieser als Grundgesetz der lebendigen Bewegung geltenden Aussage ein Wegweiser, eine heuristische Maxime für die gesuchte Induktion auffinden?

Die Transformierungen der Energie erfolgen nach bestimmten Gesetzen, die uns für gewisse Umwandlungen bekannt sind, für andere nicht. Wir können demnach bei den Untersuchungen über den Ursprung der Muskelkraft so verfahren, daß wir die für die Muskelarbeit aufgefundenen Gesetzmäßigkeiten mit den uns bekannten Gesetzen der Überführung von chemischer Energie in mechanische Arbeit vergleichen und so versuchen, die im Muskel stattfindenden Vorgänge mit uns schon bekannten Erscheinungen und Gesetzen in Übereinstimmung zu bringen, oder wir nehmen für den Muskel eine Energieumwandlung an, deren Gesetze uns bisher verborgen geblieben sind. In letzterem Falle würden wir durch unsere Untersuchungen zu energetischen Sätzen allgemeiner Natur geführt werden, und es würde uns daraus die Aufgabe erwachsen, diese Sätze zu verifizieren, d. h. es müßte der Nachweis geführt werden, daß die aus der Untersuchung der Muskeltätigkeit für die angenommene Art der Energieumwandlung gefundenen Gesetzmäßigkeiten allgemeine Gültigkeit besitzen.

Im ersteren Falle würden wir uns gewissermaßen vor eine Alternative gestellt sehen, da uns nur zwei Wege der Überführung von chemischer Energie in mechanische Arbeit ihren Gesetzen nach bekannt sind. Wir würden uns dafür zu entscheiden haben, ob der Muskel nach Art einer thermodynamischen Maschine arbeitet, oder ob elektrische Kräfte als Vermittler zwischen chemischer Energie und mechanischer Arbeit auftreten.

Nehmen wir dagegen an, daß im Muskel chemische Energie direkt in mechanische Arbeit übergeht, legen wir also unsern Betrachtungen und Versuchen eine Form der Energieumwandlung zu Grunde, die uns weder ihren Gesetzen nach, noch als Tatsache bekannt ist, so würde diese Annahme, daß chemische Energie die Anziehung räumlich getrennter Massen zu bewirken vermag, nur den Sinn haben können, daß wir die Verkürzung des Muskels auf die räumliche Annäherung distanter Teilchen zurückführen wollen und die Elektrizität als anziehende Kraft aus irgendwelchen Gründen ablehnen zu müssen glauben.

Dieser Standpunkt wird von einer großen Zahl von Physiologen eingenommen, von denen ich nur Fick, Chauveau und Verworn nennen will. Chauveau und Fick kommen zu der Vorstellung, daß im Muskel chemische Energie ohne jede Vermittlung, direkt mechanische Arbeit liefere, durch Überlegungen rein theoretischer Natur, aus denen mit Notwendigkeit hervorgeht, daß die Wärme nicht das Mittel zwischen chemischer Energie und mechanischer Arbeit bilden könne, daß also der Muskel nicht nach Art einer thermodynamischen Maschine zu verstehen sei. Chauveau sagt[1]: „Une dernière considération enfin, d'une grande importance, achève de ruiner le système de l'origine thermique du travail des muscles. Quelque opinion qu'on se fasse de la source de ce travail, il reste acquis que le tissu musculaire s'échauffe parfois considérablement pendant son fonctionnement. Le muscle accumule ainsi, sous forme de chaleur sensible, une quantité notable d'énergie potentielle, absolument disponible. Pourquoi ne l'utilise-t-il pas, s'il en a l'aptitude et si c'est en exerçant cette

[1] A. Chauveau, Le travail musculaire et l'énergie qu'il représente. Paris 1891 p. 323.

aptitude qu'il provoque la contraction? Pourquoi ne transforme-t-il pas cette énergie calorique en travail physiologique? Pourquoi se crée-t-il alors incessament de nouvelles quantités de chaleur, quand l'action du muscle se prolonge ou s'exagère de plus en plus? Hé quoi! l'organe possède déjà plus d'énergie calorique qu'il n'en peut transformer en travail, et il continue à faire de la chaleur pour cet objet! Il y a là une flagrante contradiction. — — — La contraction musculaire est une dérivation directe du travail chimique s'effectuant dans le muscle."

Während Chauveau aber nur die Unzweckmäßigkeit als Argument gegen die Auffassung des Muskels als thermodynamischer Maschine ins Feld führt, prüft Fick eingehend die Bedingungen, die im Muskel realisiert sein müßten, wenn die Wärme als Vermittler zwischen chemischer Energie und mechanischer Arbeit in Betracht kommen sollte.

Zunächst ist der Vergleich des Muskels mit einer Dampfmaschine in vielen Beziehungen zutreffend und lehrreich. In beiden Fällen sehen wir aus der Wirkung chemischer Verwandtschaftskräfte Massenbewegung und daneben Wärme entstehen, und in beiden Fällen ist es die Affinität zwischen Kohlenstoff und Wasserstoff einerseits und Sauerstoff andrerseits, aus der die positive Arbeit hervorgeht. Bei der Dampfmaschine dient die chemische Arbeit ausschließlich zur Erzeugung von Wärme. Diese wird auf das Wasser des Kessels übertragen und ein Teil durch die Einrichtungen der Maschine in andere Energieformen umgewandelt. Ein anderer Teil der Wärme wird an die kühle Luft oder an das Kühlwasser des Kondensators abgegeben. Ganz ähnlich könnte der Prozeß im Muskel verlaufen. Die durch den Reiz eingeleitete physiologische Verbrennung könnte zunächst nur Wärme erzeugen, von der ein Teil durch die maschinellen Einrichtungen des Muskels in mechanische Bewegung übergeführt, ein andrer Teil an das den Muskel durchfließende Blut abgegeben und fortgeführt würde.

Bekanntlich ist aber von Clausius in aller Allgemeinheit und Strenge bewiesen worden, daß ein thermodynamischer Kreisprozeß, bei welchem eine Wärmemenge in mechanische Arbeit verwandelt werden soll, und um einen solchen handelt es sich beim Muskel, da er nach dem Ablauf der Kontraktion sich in jeder Beziehung im ursprünglichen Zustande befindet, als unerläßliche Bedingung den Übergang einer Wärmemenge aus einem Körper höherer zu einem Körper niederer Temperatur, einen sogenannten „Wärmefall" fordert. Auch diese Bedingung könnte sehr wohl im Muskel erfüllt sein. Man könnte sich vorstellen, daß die Verbrennungsprodukte oder die Teile des Muskels, in denen die Oxydation stattfindet, den wärmeren Körper bildeten, von dem Wärme auf die kühlere Umgebung übertragen würde.

Nun ist aber von Clausius ferner festgestellt worden, daß zwischen dem Betrage des Wärmefalles und der zu mechanischer Arbeit verwendeten Wärmemenge eine ganz bestimmte quantitative Beziehung besteht. Fick wies nach, daß auf Grund der Clausiusschen Formel für den menschlichen Körper die Annahme gemacht werden müsse, daß die ganze vom Körper während der Arbeit abgegebene Wärmemenge in den Muskeln von einem 114 Zentigrad warmen auf einen 37 Grad warmen Körper übergegangen sei, daß also Temperaturen angenommen werden müßten, die mit der Erhaltung des Lebens des Muskels ganz unvereinbar sind. Th. W. Engelmann[1], der Hauptvertreter der thermischen Muskeltheorie, machte dagegen geltend, „daß schon die Verbrennung

[1] Th. W. Engelmann, Über den Ursprung der Muskelkraft, Leipzig, II. Aufl. 1893 S. 4.

einer relativ unendlich kleinen Zahl von Molekülen zur Erzeugung der Kontraktion eines ganzen Muskels genügt“ und „daß die Temperatur dieser Moleküle, wenigstens im Augenblick der Verbrennung, enorm hoch sein muß, so hoch, daß vielleicht nur die Kleinheit und die geringe Zahl der Wärmequellen verhindert, diese leuchten zu sehen.“[1]

Selbst wenn man zugibt, daß sich die Engelmannsche Annahme einzelner in der Muskelmasse zerstreut liegender, zeitweise glühend heißer Punkte mit den Ergebnissen der myothermischen Untersuchungen vertrage, würde uns diese Annahme, wie Fick weiter ausführt, einer thermodynamischen Erklärung der Muskelwirkung keinen Schritt näher bringen. „Die Temperatur der Wärmequelle, aus der der vermittelnde Körper beim ersten Akte die Wärme schöpft, ist an sich nicht maßgebend (für die zu gewinnende Arbeit). Dies ist nur dann der Fall, wenn man sich — wie man es bei den schematischen Betrachtungen zu tun pflegt — vorstellt, daß die Temperatur des vermittelnden Körpers nur unendlich wenig unter der Temperatur der Wärmequelle liegt. Engelmann hält nun die ganze doppelbrechende Substanz des Muskels für den die Verwandlung vermittelnden Körper, entsprechend der Luft in den Heißluftmaschinen oder dem Dampfe in den Dampfmaschinen. Diese ganze Masse, die doch wohl zu mindestens auf ein Drittel der Muskelmasse angeschlagen werden muß, und nicht bloß die minimen zerstreuten Verbrennungspunkte, muß also bei dem hypothetischen thermodynamischen Kreisprozesse während eines namhaften Bruchteiles der Zeit eine sehr hoch über

---

[1] Th. W. Engelmann, Die Purpurbakterien u. ihre Beziehungen zum Lichte. Onderg. ged in het physiol. Laborat. 3 R. XI Utrecht 1889 S. 190.

37° C liegende Temperatur besitzen. Unter den gemachten tatsächlichen Voraussetzungen z. B. müßte die ganze doppelbrechende Substanz des Muskels während eines namhaften Bruchteiles der Zuckungszeit 144° C warm sein. Das könnte aber doch der thermometrischen Beobachtung nicht entgehen. Die an sich nicht unsinnige Annahme, daß an den zerstreuten Orten der Verbrennung vielleicht zeitweise eine Temperatur von 1000° herrsche, nützt gar nichts zur Erklärung, um die es sich handelt, denn nicht auf das Temperaturgefälle zwischen dem Verbrennungsherde und dem Körper, der schließlich die Wärme aufnimmt, kommt es an, sondern auf das Temperaturgefälle, das in der ganzen Masse des vermittelnden Körpers während des zweiten (des ersten diabatischen) Aktes stattfindet." [1]

An diesem prinzipiellen Einwand muß jede thermodynamische Theorie der Muskelkontraktion scheitern. Wenn ich trotzdem auf die Beobachtungen und Versuche näher eingehe, die Engelmann seinen theoretischen Betrachtungen zu Grunde legt, so geschieht dies wesentlich deshalb, weil die Fehler, die er dabei begeht, von allgemeinem Interesse sind.

Engelmann [2] hat durch eine Reihe ausgezeichneter Untersuchungen gefunden, daß die am Muskel während seiner Tätigkeit zu beobachtenden mikroskopischen Veränderungen sich erklären lassen, wenn man annimmt, daß die anisotropen Teilchen der Muskelfaser infolge des die Kontraktion auslösenden Reizes quellen und zwar auf Kosten der isotropen Teilchen, die einen Teil ihres Wassergehaltes an die doppelbrechenden Teilchen abgeben. Engelmann hat ferner darauf hingewiesen, daß bei

[1] A. Fick, Pflugers Archiv Bd. 53 (1893) S. 611.

[2] Th. W. Engelmann, Pflugers Archiv Bd. XI S. 432 (1875); Bd. VII S. [illegible] Pflugers Archiv Bd. XVIII S. 1 (1878).

allen kontraktilen Formelementen die Richtung der Verkürzung mit der optischen Axe zusammenfällt, und daß auch nicht reizbare, nicht lebende, organisierte Grundformen (Fibrillen des Bindegewebes und der Hornhaut, Zellmembranen etc.) unter gewissen Einflüssen sich bei gleichzeitiger Verdichtung in der Richtung der optischen Axe verkürzen und zwar mit einer Kraft, Schnelligkeit und in einem Umfange, welche die der Muskeln erreichen, ja übertreffen können. Dasselbe Kontraktionsvermögen hat V. von Ebner[1] bei zahlreichen andern, positiv einaxigen, doppelbrechenden Gewebsbestandteilen, ja sogar an künstlich doppelbrechend gemachten imbibitionsfähigen Substanzen (z. B. getrockneten kolloiden Membranen) nachgewiesen, ebenso L. Hermann bei Fibrinfibrillen. In allen diesen Fällen ist die Richtung der Verkürzung, wie bei den Muskeln, dieselbe wie die der optischen Axe. Schließlich hat Engelmann durch Versuche nachgewiesen, daß bei allen doppelbrechenden, speziell bei allen positiv einaxigen imbibitionsfähigen Elementen die zur charakteristischen Verkürzung führende Kraftentwicklung durch Temperatursteigerung der sie umspülenden und tränkenden Flüssigkeiten hervorgerufen werden kann. Da außerdem Schmulewitsch[2] und Samkowy[3] an lebenden und überlebenden Muskeln, Engelmann[4] selbst an getrockneten und in Wasser wieder aufgeweichten, an wärmestarren und an in Alkohol erhärteten Muskeln zeigten, daß durch von außen zugeführte Wärme eine Verkürzung, durch darauf folgende Abkühlung eine Wiederverlängerung her-

---

[1] V. v. Ebner, Untersuchungen über die Anisotropie organisierter Substanzen, Leipzig 1882.

[2] Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1867 S. 83 u. 1870 S. 609.

[3] Pflügers Archiv Bd. IX S. 399 (1874).

[4] Ursprung der Muskelkraft, Leidzig 1893.

beigeführt werden konnte, so erscheint Engelmanns Schluß, daß der Ursprung der lebendigen Bewegung auf der durch Erwärmung hervorgerufenen Quellung der doppelbrechenden Teilchen der kontraktilen Substanz beruhe, als durchaus gerechtfertigt. Sehen wir uns nun diese Schlußfolge etwas genauer an.

Der Obersatz lautet: Alle aus doppelbrechenden, positiv einaxigen, imbibitionsfähigen Elementen bestehenden oder solche Elemente enthaltenden Körper ziehen sich durch Erwärmung in der Richtung der optischen Axe dieser Elemente zusammen.

Der Untersatz: Alle kontraktilen lebenden Organe resp. Organismen enthalten doppelbrechende, positiv einaxige imbibitionsfähige Elemente.

Der Schlußsatz kann dann nur lauten: Also ziehen sich alle kontraktilen lebenden Organe resp. Organismen durch Erwärmung in der Richtung der optischen Axe dieser Elemente zusammen.

Dieser Schluß wird auch unmittelbar durch den Versuch bestätigt. Engelmann schließt aber sehr wesentlich anders. Er sagt: „Also muß die Ursache der Kraftentwicklung bei der lebendigen Muskelkontraktion in der Erwärmung doppelbrechender Teilchen gelegen sein.“[1]

Die in diesem Schluß ausgesprochene Einordnung der lebendigen Muskelkontraktion in die Sphäre der durch Erwärmung herbeigeführten, auf Quellung doppelbrechender Teilchen beruhenden Verkürzung ist durch den angeführten Untersatz keineswegs begründet. Die von Engelmann aufgefundene Beziehung zwischen Doppelbrechung, Quellung, Erwärmung und Verkürzung liefert zunächst nur eine heuristische Maxime für die aufzufindende Induktion. Um diese in dem Engelmannschen Sinne durchzu-

[1] Loc. cit. S. 32.

führen, mußten eine Reihe neuer Untersätze gebildet werden, in denen nachgewiesen wurde, daß die bei der Verkürzung durch Erwärmung zu Tage tretenden Gesetzmäßigkeiten mit den bei der durch Reiz ausgelösten Muskelkontraktion zu beobachtenden übereinstimmen.

Engelmann scheint diesen Fehler oder Mangel seines Schlusses auch bis zu einem gewissen Grade empfunden zu haben. Er weist in wenigen kurzen Sätzen auf eine solche Übereinstimmung in beiden Vorgängen hin. Sie dienen ihm gewissermaßen aber nur als eine Bekräftigung seines Schlusses, sie werden nur nebenbei erwähnt, und eine experimentelle Prüfung dieser aus der physiologischen Litteratur übernommenen Behauptungen wird nicht vorgenommen, trotzdem ein Teil derselben durch Untersuchungen hervorragender Forscher als falsch erwiesen worden ist.

1. Die Zeit, die zwischen dem Beginn der Erwärmung und dem Beginn der Verkürzung liegt, die sogenannte Latenzzeit, nimmt bei der Verkürzung der Erwärmung mit der Größe der Belastung zu, bei der Muskelkontraktion durch Reiz bleibt die Latenzzeit bei wechselnder Belastung stets dieselbe.[1] (Diese Differenz ist von fundamentaler Bedeutung, da sie im Zusammenhang mit andern die elastischen Eigenschaften des Muskels betreffenden Tatsachen bestimmte Annahmen über die Natur der bei der Muskelkontraktion wirksamen Kräfte notwendig macht.)

2. Das Volumen des durch Erwärmen sich verkürzenden Körpers nimmt ab, das Volumen des sich kontrahierenden Muskels bleibt unverändert.[2]

---

[1] Tigestedt, du Bois Archiv 1885 Suppl. Kaiser, Zeitschrift f. Biologie N. F. Bd. XVIII S. 366 f.

[2] I. R. Ewald, Pflüger's Archiv Bd. XLI. S. 215 ff. (1887).

3. Die Elastizität des sich durch Erwärmen verkürzenden Körpers nimmt ab. Für den Muskel ergibt sich folgendes Gesetz: Bezeichnet man die Form des ungedehnten ruhenden Muskels als die normale, so bewirkt jede Deformierung der normalen Form eine Zunahme der Elastizität, die mit dem Grade der Deformierung wächst. Bedingt die Versetzung des Muskels in den tätigen Zustand eine Annäherung an die normale Form, so nimmt die Elastizität ab; bedingt sie eine Entfernung von der normalen Form, so nimmt die Elastizität zu.[1]

4. Die Arbeitsleistung, die durch Erwärmen des Muskels erzielt werden kann, ist sehr gering und verschwindend im Vergleich zu der, welche der durch Reiz sich verkürzende Muskel zu leisten vermag.

Es kann die Kraftentwicklung des tätigen Muskels nicht auf die durch Erwärmung bedingte Quellung anisotroper Elemente zurückgeführt werden, denn „wenn alle Folgen eines Grundes stattfinden, so findet dieser selbst statt; findet hingegen nur eine nicht statt, so findet auch der Grund nicht statt“.[2]

Die Anschauung, daß bei der Muskelarbeit die chemischen Anziehungskräfte unmittelbar mechanisch zur Wirkung kommen, wird, wie schon erwähnt, von Chauveau, Fick und in gewissem Sinne auch von Verworn vertreten. Fick[3] hat ein anschauliches Bild davon entworfen, welche Einrichtungen etwa im Muskel getroffen sein könnten, um den direkten Übergang von chemischer Affinität in mechanische Arbeit zu ermöglichen. Fick verwahrt sich aber dagegen, daß er mit diesem Bilde eine genügende Er-

[1] Kaiser, Zeitschr. f. Biologie N. F. Bd. XX S. 1 u. ff.
[2] E. F. Apelt, Theorie der Induktion, Leipzig 1854 S. 17.
[3] A. Fick, Pflügers Archiv Bd. LIII S. 611 (1893).

klärung der Muskelzusammenziehung und Wiederausdehnung habe geben wollen. Er betont mit Recht, daß wir eine viel tiefere Einsicht in die Natur der chemischen Anziehungskräfte besitzen müßten, ehe wir daran denken könnten, auf diesem Wege das Muskelproblem zu lösen.

Verworn[1] ist von Untersuchungen über die Bewegungsvorgänge des nackten Protoplasmas ausgegangen. Die Ursache der Ausbreitungs- oder Expansionserscheinungen nackter Protoplasmamassen sieht Verworn in der Affinität, die gewisse Teile des Protoplasmas zum Sauerstoff des Mediums und auch zu andern Stoffen, besonders den Nahrungsstoffen, besitzen sollen. Diese Affinität setzt an gewissen Stellen der Protozoen die Oberflächenspannung herab, wodurch Ausbreitungserscheinungen und Kriechbewegungen hervorgerufen werden. Die Kontraktionserscheinungen beruhen andrerseits darauf, daß die mit Sauerstoff gesättigten Protoplasmateilchen von selbst oder infolge eines Reizes zerfallen, und die zerfallenen Teilchen chemotropisch nach gewissen, unter Mitwirkung des Zellkerns gebildeten Stoffen sind, die im Protoplasma so verteilt sind, daß sie von der Peripherie her nach der Umgebung des Kernes hin an Menge zunehmen.

Im Gegensatz zu Fick glaubt Verworn, in seinen phantasievollen Vorstellungen eine wirkliche Erklärung der Bewegungserscheinungen der lebendigen Substanz gegeben zu haben. — „Ich halte es für sehr wohl möglich, daß manche Einzelheiten der auf den vorliegenden Blättern entwickelten Anschauungen nach neuen Erfahrungen werden modifiziert und erweitert werden. Ich gebe mich in dieser Beziehung keiner Illusion hin, denn eine Vollendung darf billiger Weise von einer neuen Vorstellung, die

---

[1] M. Verworn, Bewegung der lebendigen Substanz, Jena 1892.

ein so weites Gebiet von Erscheinungen umfaßt. nicht gleich bei ihrem ersten Schritt in die Welt verlangt werden, aber soviel glaube ich annehmen zu dürfen, daß das Prinzip für alle Bewegungserscheinungen der kontraktilen Substanz, auch für die große Zahl der speziellen Tatsachen zutreffend ist." [1]

Ich habe mich bemüht, das logische Gefüge der Induktionen zu erkennen, die Verworn zu diesen mit solcher Sicherheit ausgesprochenen Schlüssen geführt haben. Meine Mühe ist leider erfolglos geblieben. Die Verwornschen Prinzipien sind gar nicht das Resultat von Induktionsschlüssen, sondern dogmatische Behauptungen, die sich weder beweisen noch widerlegen lassen, weil sie zu ernsthafter Prüfung keinerlei Handhabe bieten. Ein Beispiel mag das zeigen: Verworn geht aus von einer Gruppe von Reizerscheinungen, die man als Chemotaxis oder Chemotropismus[2] bezeichnet, weil durch einen chemischen Reiz frei bewegliche Zellen zu Bewegungen veranlaßt werden, die entweder der Reizquelle zugerichtet oder von ihr abgewandt sind. Ein solches Reizmittel ist z. B. auch der Sauerstoff. Bringt man eine große Menge von Paramaezien in ein mit sauerstoffarmem Wasser gefülltes Reagensglas, das man umgekehrt über Quecksilber aufstellt, so werden die Flimmerbewegungen der Paramaezien infolge des Mangels an Sauerstoff immer langsamer. Wenn man jetzt eine Blase reinen Sauerstoffs von unten her in das Reagensglas eintreten läßt, so sieht man diese schon nach wenigen Sekunden von einer dicken weißen Hülle von Paramaezien umgeben, „die von Sauerstoffdurst getrieben, wild auf die Sauerstoffblase los-

---

[1] M. Verworn. Loco cit. S. 103.

[2] Stahl,! Bacon. Zeit. 1884. W. Pfeffer. Unters. aus dem botan. Institut zu Tübingen Bd. II 1886.;

stürmen."[1] Verworn behauptet nun, daß die Bewegung der Paramaezien gegen die Sauerstoffblase darauf beruhe, daß der Sauerstoff zu gewissen Substanzen an der Oberfläche der Paramaezien eine starke chemische Verwandtschaft besitze. „Die Anziehung eines Moleküls durch ein andres chemisch verwandtes Molekül ist der Elementar-Vorgang des Chemotropismus."[2] Wo in aller Welt finden sich die Tatsachen, die einem wissenschaftlichen Forscher gestatten, die chemische Energie in dieser Weise mechanische Arbeit leisten zu lassen? Verworn holt sich die Berechtigung dazu aus dem Umstande, daß die Pseudopodienbildung, d. h. Ausstülpungen des Protoplasmas, bei Amoeben und andern Protozoen sich erklären lassen, wenn man annimmt, daß die chemische Affinität solche Bewegungserscheinungen veranlassen kann! Die Erklärung einer Hypothese aus einer andern, die beide jeder tatsächlichen Unterlage entbehren, ist keine wissenschaftliche Methode!

Noch gegen ein anderes in den Auseinandersetzungen von Verworn hervortretendes Dogma von allgemeinerer Bedeutung möchte ich mich mit einigen Worten wenden, weil wir ähnlichen Vorstellungen nicht gar selten in der Biologie begegnen. Verworn stellt den Grundsatz auf, daß alle Bewegungserscheinungen, die an den kontraktilen Substanzen und Organen hervortreten, auf denselben Vorgängen beruhen, daß Änderung der Oberflächenspannung bedingt durch wechselnden Chemotropismus überall die Ursache der Bewegung der lebendigen Substanz bilde, daß im quergestreiften Muskel wie im nackten Protoplasma der Protozoen die Umwandlung chemischer potentieller Energie in mechanische Bewegung auf demselben Wege erfolgen müsse.

[1] Verworn, Psycho-physical. Bolistensstudien. Jena 1889.
[2] Verworn, Bewegung der lebend. Substanz. Jena 1892, S. 44.

Es ist ohne weiteres zugegeben, daß alle Kontraktions- und Bewegungserscheinungen in letzter Instanz auf chemische Umsetzungen als Energiequelle zurückzuführen sind, keineswegs ist aber die Annahme gerechtfertigt, daß der Weg, auf welchem die chemische Affinität sich in mechanische Arbeit umsetzt, für alle Bewegungserscheinungen der lebendigen Substanz der gleiche sei. Es kann deshalb für eine Theorie der Muskelkräfte nicht, wie Verworn es will, als eine conditio sine qua non betrachtet werden, daß die für den Muskel angenommene Energieumwandlung für alle Arten der Bewegungserscheinungen der lebendigen Substanz Geltung behalten müsse. Wenn die Bewegungserscheinungen des nackten Protoplasmas sich als Folgen der Änderung der Oberflächenspannung, die aus den Wirkungen chemischer Affinität resultieren, darstellen lassen, so läßt sich daraus nicht ohne weiteres die Notwendigkeit herleiten, daß auch die Kontraktion des quergestreiften Muskels ein Phänomen gleicher Art sei. Ob sich die chemische Affinität direkt in mechanische Bewegung umsetzt, oder eine Transformierung in Wärme, Elektrizität oder eine andere Energieform vorhergeht, kann nur aus den Gesetzmäßigkeiten geschlossen werden, die wir für die einzelnen Bewegungserscheinungen zu erkennen vermögen.

Das Protoplasma, das bei den Protozoen mit einem Minimum von Differenzierung alle Funktionen des Lebens erfüllt, repräsentiert der allgemeinen Anschauung nach auch bei den höheren Organismen die lebendige Substanz, deren Eigenschaften und Kräfte die Phänomene des Lebens bedingen. Aber diese lebendige Substanz hat sich im Laufe der Entwicklung die verschiedenartigsten und kompliziertesten Hülfsmittel geschaffen, mit denen sie die immer mannigfaltiger gewordenen Leistungen des Tierkörpers erfüllt. Diese Hülfsmittel sind maschinelle Einrichtungen, die vorzugsweise dort angewendet werden, wo es für den beabsichtigten Zweck wünschenswert oder notwendig wird, eine Energieform in eine andre überzuführen.

Für die relativ einfachen und ungeordneten Bewegungen des nackten Protoplasmas mag vielleicht die direkt aus chemischen Umsetzungen hervorgehende Änderung der Oberflächenspannung genügen: für die geordneten, mit großer Kraft in bestimmter Richtung erfolgende Kontraktion des Muskels bedarf es möglicherweise einer Umwandlung der chemischen Energie des Protoplasmas in andere Energieformen. Entscheiden können da nur Tatsachen, nicht allgemeine Vorstellungen.

Im Jahre 1891 erschien der erste Teil einer Theorie der Muskelkontraktion von G. Elias Müller.[1] Die umfangreiche Arbeit, es handelt sich um einen Band von mehr als 300 Seiten, ist von den Physiologen bisher wenig beachtet worden. Müller nimmt an, daß die im Muskel durch den Stoffwechsel angehäuften chemischen Spannkräfte durch den den Muskel zur Tätigkeit erregenden Reiz in Wärme umgewandelt werden. Ein Teil der so entstandenen Wärme bewirkt dadurch die Kontraktion des Muskels, daß sie eine elektrische Ladung seiner doppelbrechenden Teile, der Disdiaklasten, hervorruft. Müller läßt also bei der Umwandlung der chemischen Energie in mechanische Arbeit Wärme und Elektrizität als Vermittler auftreten. Um die Müllerschen Ausführungen zu verstehen, müssen wir uns kurz ein Bild von der mikroskopischen Struktur des quergestreiften Muskels entwerfen. Der die Muskelfaser umhüllende bindegewebige Schlauch, das sogenannte Sarkolemma, enthält ein aus Längs- und Querfasern bestehendes Gerüst. An den Knotenpunkten dieses Gerüstes,

---

[1] G. Elias Müller, Theorie der Muskelkontraktion I. Teil. Leipzig 1891.

also da wo die Längs- und die Querfasern sich kreuzen, befinden sich die doppelbrechenden Teilchen des Muskels, die Disdiaklasten, die mit ihren Axen annähernd in der Richtung der Längsfasern orientiert sind. Die in gleicher Höhe des Muskelfaches liegenden Querkolonnen von Disdiaklasten, die die anisotropen Scheiben des Muskels bilden, stehen durch Querbälkchen miteinander in Verbindung und bilden mit diesen zusammen ein Querbälkchensystem, das in seinen Randteilen mit dem Sarkolemma in Verbindung steht. In der Längsrichtung der Faser sind die Disdiaklasten durch Längsbälkchen mit einander verknüpft. In Verbindung mit diesen bilden sie die sogenannten Fibrillen, deren jede aus abwechselnden Längsbälkchen und Disdiaklasten bestehend, das Innere der Muskelfaser in der Längsrichtung durchzieht, indem sie an den beiden Faserenden eine feste Anknüpfung besitzt. Alle von dem Fasergerüst übrig gelassenen Räume des Sarkolemmaschlauchs werden von dem Muskelsaft ausgefüllt, der zum Teil das Substrat des wärmebildenden Erregungsprozesses bildet, zum Teil trophische Bedeutung besitzt, also der Ernährung der Muskelfaser und der Ansammlung von Reservestoffen in ihr dient.

Die elektrische Ladung der Disdiaklasten kommt nun auf folgende Weise zu Stande: Physikalische Untersuchungen, besonders die Versuche H a n k e l s, haben ergeben, daß a l l e Krystalle, die einem Systeme mit ungleichartigen krystallographischen Axen angehören und die Elektrizität hinlänglich zu isolieren vermögen, Pyroelektrizität besitzen, d. h, durch Veränderung ihrer Temperatur elektrisch geladen werden. Da die Disdiaklasten nicht in das reguläre System eingeordnet werden können, so müssen wir ihnen pyroelektrische Eigenschaften zuschreiben, wenn wir annehmen, daß ihre elektrische Leitfähigkeit gering genug ist, um bei einer sehr schnellen Änderung der Temperatur eine wirksame elektrische

Ladung zuzulassen. Wir nehmen weiter an, daß die Disdiaklasten wie die Krystalle des Turmalins, des Zuckers, der Weinsäure und andere polarpyroelektrisch sind, d. h., daß sie bei jeder Temperaturänderung an ihren beiden Polen entgegengesetzt elektrisch geladen werden, nämlich an dem einen, dem analogen, Pole bei der Erwärmung positiv und bei der Abkühlung negativ, an dem andern, dem antilogen Pole, aber umgekehrt. Die elektrische Leitungsfähigkeit der Disdiaklasten soll so beschaffen sein, daß sie zwar gering genug ist, um bei einer sich sehr schnell vollziehenden Temperaturänderung die elektrische Ladung nicht zu hindern, aber doch einen bestimmten Wert besitzt und jedenfalls größer ist, als die Leitfähigkeit der Umgebung der Disdiaklasten. Die elektrische Ladung, die die Disdiaklasten bei einer Steigerung ihrer Temperatur erfahren, wird also diese Temperaturzunahme nicht lange überdauern, und zwar werden sich die an den Polen der Disdiaklasten angesammelten entgegengesetzten Elektrizitäten im wesentlichen nicht durch die Umgebung der Disdiaklasten, sondern durch deren Substanz selbst hindurch ausgleichen.

Die Disdiaklasten sind hinsichtlich der Stellung ihrer Axen in jeder Faser so orientiert, daß sie ihre gleichnamigen elektrischen Pole sämtlich nach demselben Ende der Faser hinwenden, und mithin zwei benachbarte Querkolonnen sich gegenseitig ungleichnamige Pole zuwenden. Wird also durch einen Reiz eine plötzliche Wärmebildung im Muskel hervorgerufen, so werden, so lange die Temperatursteigerung dauert, die Disdiaklasten an ihren analogen Polen mit positiver, an ihren antilogen Polen mit negativer Elektrizität geladen, und die auf solchem Wege entstandenen elektrischen Kräfte werden offenbar in dreifacher Hinsicht die Stellung der Disdiaklasten zu verändern streben. Erstens ziehen sich benachbarte Querkolonnen in der Längsrichtung der Faser (in der sogenannten axialen Richtung) gegenseitig an, da die Pole, welche sie sich gegenseitig zukehren, bei jeder Temperaturänderung mit entgegengesetzten Elektrizitäten geladen werden. Zweitens stoßen sich die Disdiaklasten jeder Querkolonne in queren Richtungen der Muskelfaser gegenseitig ab. Drittens endlich muß sowohl infolge jener Anziehungen als infolge dieser Abstoßungen eine Tendenz entstehen, die Desorientierungswinkel der Disdiaklasten zu verringern. Von diesen drei aus der elektrischen Ladung der Disdiaklasten entspringenden Kräftewirkungen müssen die beiden erstgenannten notwendig zu einer Verkürzung der Faser in axialer Richtung und Verdickung in radialen Richtungen führen.

Müller hat auf Grund dieser Annahmen mit großem Scharfsinn alle mikroskopisch wahrnehmbaren Veränderungen, die der Muskel während seiner Tätigkeit erleidet, die rein histologischen sowohl, als auch besonders die optischen, die Lichtbrechung des Muskels betreffenden, vollständig zu erklären versucht. So bedeutungsvoll und interessant diese Verhältnisse für eine Theorie der Muskelkraft auch sind, so erscheint es mir bei der unerhörten Kompliziertheit und Schwierigkeit der Erscheinungen selbst und der dafür in Betracht kommenden biophysikalischen Fragen ausgeschlossen, an dieser Stelle näher darauf einzugehen. Es bedarf der ganzen ungeteilten Aufmerksamkeit des mit diesen Problemen vertrauten Fachmannes, um mit vollem Verständnis folgen zu können.

Eine die elastischen Eigenschaften des Muskels betreffende Betrachtung Müllers ist es, an die ich anknüpfen möchte, weil gerade die Untersuchung und Darstellung der mechanischen Eigenschaften des Muskels es gewesen sind, die zu einer Art Dogma verdichtet, der Lösung des Muskelproblems die größten Hindernisse bereitet haben und noch bereiten.

In § 2 seines Werkes sagt Elias Müller: „Wenn sich ein Muskel von seiner natürlichen Ruhelänge aus verkürzt, so haben die kontrahierenden Kräfte, die von den Disdiaklasten ausgehen, bei der Kontraktion fortwährend gewisse, von den festen Bestandteilen des Muskels selbst ausgehende Gegenkräfte zu überwinden, die um so beträchtlicher sind, je weiter die Kontraktion bereits fortgeschritten ist. Die Hauptträger dieser innern Widerstände sind die Quer- und Längsbälkchen, die infolge ihrer Elastizität jeder Stellungsänderung der Disdiaklasten entgegenwirken, und zwar in um so höherem Grade, je mehr verkürzt der Muskel bereits ist. Außer der Elastizität der Quer- und Längsbälkchen kommen hier aber auch noch mancherlei andere Faktoren in Betracht, vor allem die Elastizität des Sarkolemmas, des Perimysiums etc. Alle diese von den eignen Bestandteilen des Muskels ausgehenden Gegenkräfte, welche die kontrahierenden Kräfte der Disdiaklasten bei der Kontraktion zu überwinden haben, fassen wir kurz unter der Bezeichnung des innern Kontraktionswiderstandes zusammen.“

„Wenn die vorhandene Länge des Muskels infolge eingetretener Belastung seine natürliche Ruhelänge übertrifft, so kommt an Stelle des innern Kontraktionswiderstandes vielmehr der innere Dehnungswiderstand in Betracht, d. h. die Summe der von den eignen Bestandteilen des Muskels ausgehenden, auf der Elastizität des Fasergerüstes u. s. w. beruhenden Kräfte, mit denen der Muskel der Dehnung durch die Last entgegenwirkt. Nehmen wir an, es werde ein belasteter Muskel, der sich mit seiner Last in Gleichgewicht gesetzt hat, in dem also der innere Dehnungswiderstand gleich der Zugkraft der Last geworden ist, durch einen Reiz erregt, so werden sich die auftretenden kontrahierenden Kräfte der Disdiaklasten zunächst gewissermaßen wie eine Verstärkung des innern Dehnungswiderstandes geltend machen und gemeinsam mit demselben im Sinne einer Verkürzung des Muskels wirken. Während der so zu Stande kommenden Kontraktion nimmt aber der innere Dehnungswiderstand fortwährend ab, bis er zuletzt, wenn der sich verkürzende Muskel seine natürliche Ruhelänge erreicht, gleich Null wird und bei noch weiter fortschreitender Verkürzung dem im entgegengesetzten Sinne wirkenden innern Kontraktionswiderstande Platz macht. Fassen wir diesen Kontraktionswiderstand und jenen Dehnungswiderstand unter der gemeinsamen Bezeichnung des inneren Deformationswiderstandes zusammen, so können wir ganz allgemein behaupten, daß der innere Deformationswiderstand im Sinne einer Verringerung oder einer Vergrößerung der vorhandenen Muskellänge wirksam sei, je nachdem die letztere größer oder kleiner als die natürliche Ruhelänge ist, und daß die Änderung, welche der innere Deformationswiderstand bei einer, von einem beliebigen Längenwerte des Muskels ausgehenden Verkürzung des Muskels erfahre, stets einer Abnahme der kontrahierenden Kräfte der Disdiaklasten äquivalent sei, hingegen diejenige Änderung, welche der innere Deformationswiderstand bei einer Zunahme der Muskellänge erfahre, stets einer Steigerung der kontrahierenden Kräfte der Disdiaklasten gleichwertig sei."

Einem Unbefangenen werden diese Auseinandersetzungen, die Müller nur aus seiner Hypothese deduziert, nicht aber durch Tatsachen zu begründen vermag, fast selbstverständlich erscheinen, die Anschauungen aber, die in der Physiologie über die Elastizität des Muskels und ihre Bedeutung für die Kontraktion verbreitet sind, stehen damit im direkten Gegensatze. In dem berühmten Artikel „Muskelbewegung" in dem von Rudolf Wagner herausgegebenen Handwörterbuche der Physiologie, sagt Eduard

Weber[1]: „Wenn ein Muskel in Tätigkeit versetzt wird, so ändert sich dessen natürliche Form, so daß, wenn er sehr kräftig ist, seine natürliche Länge mindestens um 85 % kleiner, die beiden andern Dimensionen proportional größer werden. Diese neue, ihm jetzt zukommende natürliche Form strebt der Muskel, wenn er sie schon angenommen hat, vermöge seiner elastischen Kräfte zu erhalten und wirkt dadurch Gewichten oder andern Kräften, die ihn auszudehnen streben, entgegen. Hat er die ihm zukommende natürliche Form noch nicht angenommen, oder ist er aus derselben entfernt worden, so strebt er vermöge seiner Elastizität in dieselbe zu gelangen und nähert sich derselben, bis die entgegenwirkende Last seinen elastischen Kräften das Gleichgewicht hält, ebenso wie der untätige Muskel, wenn er aus seiner natürlichen Form entfernt worden ist, zu derselben zurückzukehren strebt. Je größer daher die Elastizität des tätigen Muskels ist, mit desto größerer Kraft strebt er, seine natürliche Form herzustellen und desto größere Gewichte kann er dadurch heben. Die Größe des Gewichtes, das ein Muskel heben kann, hängt demnach bei gegebener Verkürzung seiner natürlichen Form von der Größe seiner Elastizität ab, und kann daher, je nachdem diese verschieden groß ist, auch bei gleicher Verkürzung seiner natürlichen Form verschieden groß ausfallen."

Den Grund für diese Annahme sah Eduard Weber vor allem in einem Versuche, den Theodor Schwann, der berühmte Begründer der Lehre von dem Aufbau des tierischen Organismus aus Zellen, in dem Laboratorium von Johannes Müller ausgeführt hat[2]. Schwann untersuchte, nach welchem Gesetz die Kraft eines

---

[1] Ed. Weber: Muskelbewegung; Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner, Braunschweig 1846 Bd III S. 110.

[2] Joh. Müller, Handbuch d. Physiologie, Coblenz 1840. Bd. II S. 58.

Muskels mit der Kontraktion ab- oder zunähme. Schwann bestimmte das Gewicht, das ein Muskel gerade noch zu heben vermochte, wenn er sich von seiner natürlichen Ruhelänge aus zusammenzog, dann richtete er den Versuch so ein, daß der Muskel sich Strecken von wachsender Länge unbelastet zusammenzog, und dann erst das Gewicht ergriff. Es ergab sich, daß die Kraft des Muskels in demselben Verhältnis zunahm, in welchem der Muskel weniger sich kontrahierte, oder daß sie in geradem Verhältnisse mit der Kontraktion des Muskels abnahm.“ Johannes Müller und Schwann fanden, daß dies Gesetz dasselbe sei, das bei den elastischen Körpern gelte, und schließen: „Durch dieses Gesetz wird zunächst jede Erklärung der Muskelkraft als eine Anziehung der Teilchen desselben durch eine der uns bekannten anziehenden Kräfte widerlegt, welche so wirken, daß die anziehende Kraft wächst, je mehr sich die anziehenden Teilchen nähern, und zwar nach dem Quadrate der Entfernung. Denn ist die Anziehungskraft der Teilchen so groß, daß sie sich schon nähern können, wenn sie weit von einander entfernt sind, so wird die Anziehungskraft noch vermehrt, wenn sich die Teilchen schon etwas genähert haben, d. h. wenn sich der Muskel schon etwas verkürzt hat. Der Muskel müßte daher bei seiner normalen Länge die geringste Kraft äussern, diese müßte wachsen mit seiner Verkürzung und im stärksten Grade der Verkürzung am größten sein. Die Versuche von Schwann beweisen aber, daß es sich gerade umgekehrt verhält, indem die Kraft des Muskels bei seiner normalen Länge am größten, bei dem stärksten Grade der Verkürzung = 0 ist.“

Dieser Schluß aus dem Schwannschen Versuch auf die Natur der Muskelkraft ist indeß keineswegs gerechtfertigt. Die Überlegung, daß der „innere Deformationswiderstand“ des Muskels, also der von seinen eignen elastischen Bestandteilen gegen die

Verkürzung geleistete Widerstand, mit der Kontraktion zunehmen muß, würde hinreichen, die aus dem Schwannschen Versuch für die Annahme anziehender Teilchen erwachsende Schwierigkeit zu beseitigen. Nimmt man noch dazu an, daß die Anziehung auf elektrischer Ladung kleinster Teilchen des Muskels beruht und diese Ladung während der Verkürzung durch Leitung verringert wird, so bleibt von der Beweiskraft dieser von Schwann, Johannes Müller und Weber als entscheidend angesehenen Versuche nicht viel übrig. Trotzdem ist, wohl durch den Einfluß der drei genannten ausgezeichneten Forscher, die Vorstellung von der elastischen Natur der Muskelkraft in den Physiologen haften geblieben. A. Fick, der doch, wie wir gesehen haben, für die direkte Umwandlung der chemischen Energie des Muskels in mechanische Arbeit eingetreten ist, hat eine besondere, von der gewöhnlichen abweichende Definition für Elastizität gegeben, nur um die Arbeitsleistung des Muskels als auf elastischen Kräften beruhend darstellen zu können. Fick[1] definiert: „Elastizität nennen wir diejenige Eigenschaft eines Körpers, vermöge deren seine molekularen Kräfte oder Bewegungen zusammenhängende Massen als solche in Bewegung bringen können, und zwar unter Vermittlung einer Gestaltsveränderung des Körpers derart, daß jene zusammenhängenden Massen in die bei der Gestaltsveränderung erfolgende Bewegung irgend welcher Oberflächenteilchen des Körpers mit hineinbezogen werden.“ Diese Definition hatte, wie gesagt, den besonderen Zweck, die verkürzenden Kräfte des Muskels als elastische darstellen zu können, ein Unternehmen, das auch insofern leicht zu Mißverständnissen und Widersprüchen führen konnte, als Fick, wie er selbst hervorhebt, durch diese Bezeichnung der Muskel-

[1] A. Fick, Unters. über Muskelbarbeit. Basel 1867.

kräfte als elastischer gar nichts über die Natur der Kräfte aussagen, sondern nur zeigen wollte, daß die Arbeitsleistung des Muskels wie durch elastische Kräfte bedingt erfolge. Nach dieser Definition Ficks würden wir alle Kräfte, sofern sie nur an elastischen Körpern Arbeit leisten, als elastische zu bezeichen haben, was zur Klärung so schwieriger mechanischer Verhältnisse, wie sie der Muskel bietet, gewiß nicht beitragen würde.

Wir finden in der ganzen viele Bände füllenden Literatur über die Mechanik des Muskels keinen Versuch, dies von Elias Müller als möglich hingestellte Verhältnis zwischen den aus dem „innern Deformationswiderstand“ erwachsenden elastischen Kräften zu den aus potentieller chemischer Energie stammenden Verkürzungskräften des Muskels experimentell zu prüfen, trotzdem gerade durch die Trennung dieser beiden die Arbeitsleistung des Muskels bedingenden Kräfte neue Gesichtspunkte für die Lösung des Muskelproblems gewonnen werden können.

Elias Müller hat den zweiten Teil seiner Arbeit, der sich mit der Muskelzuckung, der tetanischen Kontraktion, mit den spezielleren Gesetzen der Arbeitsleistung des Muskels und mit den Beziehungen zwischen Wärmebildung und mechanischer Arbeitsleistung des Muskels beschäftigen sollte, bis jetzt nicht erscheinen lassen. Von den sich besonders mit den Kontraktionserscheinungen beschäftigenden Physiologen haben nur Engelmann und Verworn der Müllerschen Arbeit eine kurze Bemerkung gewidmet. Verworn[1] sieht eine Schwierigkeit in dem schnellen Verschwinden der Elektrizität bei der Erschlaffung des Muskels, behält sich aber eine eingehende Kritik nach dem Erscheinen des zweiten Teiles vor. Engelmann[2] hält die Müllersche Theorie für

[1] Verworn, Bewegung d. lebend. Substanz. S. 16.
[2] Engelmann, Ursprung der Muskelkraft. S. 43.

vollkommen widerlegt, weil seine eignen Versuche an Violinsaiten und toten Muskeln zeigten, daß die durch starke Erwärmung bewirkte Verkürzung konstant bleibt, wenn auch die erzeugte hohe Temperatur konstant erhalten wird, während die Müllersche Theorie verlangt, daß bei Konstanterhaltung der Temperatur der Disdiaklasten eine Wiederverlängerung des Muskels eintritt. Engelmann übersieht, daß seine Versuche nur dann eine bündige Widerlegung der Müllerschen Annahmen liefern würden, wenn er den Nachweis erbracht hätte, daß die Verkürzung des Muskels durch von außen zugeführte Wärme identisch sei mit der natürlichen Muskelkontraktion, was aber, wie schon früher hervorgehoben, keineswegs der Fall ist.

Ich selbst habe durch Versuche gezeigt[1], daß die elastische Kraft, die entsteht, wenn ein Muskel durch ein Gewicht gedehnt wird, verschwindet, wenn der Muskel, durch einen Reiz in Tätigkeit versetzt, sich bis zu seiner ungedehnten Ruhelänge oder darüber hinaus verkürzt. Der Nachweis dieser einfachen Tatsache zwingt uns zu ganz bestimmten Annahmen über die Natur der Muskelkräfte. Das Verschwinden der durch Dehnung erzeugten elastischen Kraft bei der Kontraktion des Muskels ist durch keine andere Voraussetzung zu erklären als durch die Annahme, daß die durch Reizung des Muskels erzeugte Verkürzung auf der Wirkung anziehender Kräfte beruht, die an festen, nicht merklich dehnbaren Teilchen des Muskels angreifen, die durch elastische Teilchen mit einander verbunden sind.

Dieses mechanische Prinzip können wir der Konstruktion einer Maschine zu Grunde legen und die Wirkungsweise einer solchen Maschine rein theoretischen Betrachtungen unterziehen. Man würde

[1] Kaiser, Zeitschr. f. Biologie N. F. Bd. XVIII. S. 358.

dadurch zu einer Reihe mathematisch formulierbarer Bestimmungen gelangen, die mit den bekannten Tatsachen des biologischen Erscheinungsgebietes zu vergleichen wären. Ich habe es vorgezogen, diesen Vergleich experimentell durchzuführen; d. h. ich habe unter Berücksichtigung der genannten, für den Muskel gefundenen einfachen Prinzipien eine Maschine konstruiert, deren Arbeitsleistung zunächst insofern mit der des quergestreiften Muskels übereinstimmt, daß eine Last in der Richtung der Hauptachse der Maschine verschoben wird[1]. Die Maschine besteht aus drei kleinen Elektromagneten, deren Drahtwindungen mit einander leitend verbunden sind. Mit Hilfe von Spiralfedern, die an den Windungsrollen der Elektromagnete befestigt sind, hängen diese senkrecht unter einander. Die 26 mm langen, 6 mm dicken Eisenkerne der Elektromagnete sind in den Rollen verschiebbar und durch Schrauben festzustellen, um den Abstand der anziehenden Flächen passend einstellen zu können. Der oberste Magnet wird nach Art eines Muskels aufgehängt, der unterste greift an einen zweiarmigen Hebel an. An dem gleichen Arm des Hebels greift eine Spiralfeder an, die nur durch Bewegung des Hebels gespannt wird. Den elektrischen Strom lieferten bei den Versuchen zwei resp. drei Leclanché-Elemente. Die Zuführung des Stromes geschah auf folgende Weise. Der eine Pol der Elemente war mit der Achse der Registriertrommel verbunden, der andere stand mit einer 30 mm breiten, auf einem Brett von hartem Holz montierten Kupferplatte in Verbindung, deren leitende Fläche für kurz dauernde Magnetisierungen (Einzelreize!) durch Lacküberzug auf 2 mm eingeschränkt wurde. Für rasch auf einander folgende „mehrfache“ Magnetisierungen (tetanische Reizung) waren auf die Kupferplatte

[1] Kaiser, Zeitschr. f. Biologie Bd. XL. (1900) S. 217.

2 mm dicke Kupferdrähte in Abständen von 2 mm aufgelötet. Um zwei kurze Magnetisierungen (Doppelreize) in verschiedenem zeitlichen Abstand auf einander folgen zu lassen, wurde die Kupferplatte durch einen Y-förmigen Kupferdraht ersetzt. Die leitende Verbindung beider Elektroden wurde durch eine am unteren Rande der Registriertrommel befestigte Drahtbürste hergestellt, die bei der Umdrehung der Trommel über die Kupferdrähte oder Platte schleifte. Um die Dauer der Magnetisierung bei „Einzelreizen" sehr kurz machen zu können, wurde im Stromkreis noch ein Kontakt eingeschlossen, der durch die Bewegung des Hebels selbst unterbrochen werden konnte. Der Strom wurde nämlich durch ein Drahtstückchen geleitet, das am Hebel befestigt war und in ein in seiner Höhe verstellbares Quecksilbergefäßchen tauchte. Bei einer bestimmten Elevation des Hebels wurde der Kontakt unterbrochen. Die Eisenkerne der Elektromagnete wurden immer so eingestellt, daß sie sich während des Magnetisierens niemals bis zur Berührung näherten.

Die Arbeit wird bei dieser Maschine durch anziehende Kräfte geleistet, die an festen, relativ undehnbaren Teilen (den Eisenkernen der Elektromagnete) angreifen, die durch dehnbare Teile (die die Windungsrollen mit einander verbindenden Spiralfedern) mit einander verbunden sind. Das Prinzip dieser Maschine entspricht also dem, das wir für den Muskel als notwendig erkannt haben.

Mit dieser Maschine wurden nun alle jene Versuche angestellt, die man zur Charakterisierung der eigentümlichen Arbeitsleistung des Muskels mit diesem anzustellen pflegt. Es wurden untersucht:

1. Die Abhängigkeit der Arbeitsleistung und der Hubhöhe von der Spannung.

Die Versuche ergaben, daß die Arbeitsleistung innerhalb gewisser Grenzen mit der Belastung wächst und bei weiter zunehmender Belastung wieder abnimmt. Aber nicht nur die Arbeitsleistung sondern auch die Hubhöhe nimmt innerhalb bestimmter Grenzen mit der Belastung zu. Die Hubhöhe erreicht etwas früher als die Arbeitsleistung ihr Maximum, um dann bei weiter zunehmender Belastung wieder abzunehmen. Wird der Versuch nach dem „Überlastungsverfahren“ ausgeführt, die elastischen Teile der Maschine durch die angehängte Last also nicht gedehnt, so nehmen zwar die Hubhöhen mit steigender „Überlastung“ ab, die Arbeitsleistungen zeigen aber wie beim Belastungsverfahren erst eine Zunahme, dann eine Abnahme.

Die Abhängigkeit der Arbeitsleistung und Hubhöhe, wie sie die Maschine erkennen läßt, ist anlog derjenigen, die für den quergestreiften Muskel bekannt ist und als eine spezifische Eigentümlichkeit, der lebendigen Muskelsubstanz angesehen wird.

2. Das Verhältnis der isotonischen zur isometrischen Zuckung. A. Fick hat solche Muskelzuckungen, bei denen die Spannung während der Verkürzung konstant erhalten wird, als isotonisch bezeichnet, während er diejenigen, bei denen keine Veränderung der Länge, sondern nur eine Änderung der Spannung auftritt, isometrische nannte. Läßt man die Maschine unter den entsprechenden Bedingungen arbeiten, so lassen die Kurven erkennen, daß das Maximum der Spannung bei der isometrischen Kurve zeitlich früher erreicht wird als das Maximum der Verkürzung bei der isotonischen Kurve. Die Maschine verhält sich auch in Bezug auf den Ablauf der Verkürzung und Spannungsänderung wie der Muskel.

3. Die Verkürzung bei rasch auf einander folgenden Magnetisierungen (tetanische Reizung).

In meinen „Untersuchungen über den Ursprung der Muskelkraft“ [1] habe ich gezeigt, daß die Länge, bis zu welcher sich der Muskel im Tetanus verkürzt, bei einer bestimmten Last immer dieselbe ist, gleichviel ob die Last als Belastung oder als „Überlastung“ wirkt, oder ob der Muskel sich erst um ein beliebiges Stück verkürzt und dann erst die Last ergreift. Sucht man beim Muskel dasjenige Gewicht auf, das er als Überlastung gerade nicht mehr zu heben vermag, dehnt dann den Muskel durch das ganze Gewicht, läßt dieses also als Belastung wirken, so hebt der Muskel dieses Gewicht im Tetanus gerade bis zur Abszisse des ruhenden unbelasteten Muskels.

Damit analoge Versuche an der Maschine gelingen, muß (wenigstens für stärkere Belastungen und für den zuletzt angegebenen Versuch) eine Bedingung erfüllt sein, die den elastischen Teil der Maschine betrifft: Die Elastizität des Muskels nimmt mit steigender Dehnung zu. Die Dehnungskurve des Muskels ist also keine gerade Linie, sondern hat hyperbolische Form. Die Spiralfedern, die an der Maschine den elastischen Anteil repräsentieren, ändern innerhalb der Grenzen, in welchen sie bei den Versuchen in Anspruch genommen werden, ihre Elastizität nicht merklich. Die Dehnungskurve bei den Spiralfedern ist demnach eine gerade Linie. Damit nun der Maschinenversuch in entsprechender Weise gelingt, muß man eine Einrichtung treffen, die bewirkt, daß die Dehnungskurve des elastischen Anteils der Maschine der hyperbolischen Dehnungskurve des Muskels annähernd entspricht. Das wird sehr leicht dadurch erreicht, daß man nicht eine, sondern mehrere Spiralfedern benützt und diese so anbringt, daß bei steigender Belastung nicht alle Federn gleichzeitig, sonder eine nach der andern, also erst nur eine, dann zwei,

---

[1] Kaiser, Zeitschr. f. Biologie Bd. XVIII N. F. S. 409 ff.

dann drei etc. Federn bei steigender Belastung in Anspruch genommen werden.

Die Bedeutung dieser Einrichtung für die Wirksamkeit der verkürzenden Kraft leuchtet ohne weiteres ein: Bei gleichbleibender Elastizität, also geradliniger Dehnungskurve, wächst der Abstand der anziehenden Teilchen mit steigender Belastung zu rasch; bei hyperbolischer Dehnungskurve sind bei Belastung durch das gleiche Gewicht die Bedingungen für die Arbeitsleistung der anziehenden Teile infolge ihres geringen Abstandes bei gleich großer elastischer Kraft der gespannten Federn, viel günstigere.

Unter diesen Bedingungen gelingen die Versuche der Maschine ganz analog den entsprechenden Versuchen am Muskel.

4. Wirkung von zwei kurzen in verschiedenem Abstand auf einander folgenden Magnetisierungen.

Um auch das Verhalten „superponierter Zuckungen" an der Maschine zu prüfen, bediente ich mich der oben beschriebenen Y-förmigen Elektrode. Durch Verschieben derselben gegen die Bahn der an der rotierenden Trommel befestigten Drahtbürste konnte der zeitliche Abstand der magnetisierenden Stromstöße beliebig varriiert werden. Die auf diese Weise mit der Maschine erhaltenen Zuckungskurven stimmen vollständig mit den superponierten Muskelzuckungen überein. Also auch die Addition von zwei kurz aufeinander folgenden Anziehungen geschieht in der gleichen Form wie beim Muskel.

5. Der Schwannsche Versuch.

Daß der Schwannsche Versuch nicht die Möglichkeit nach dem verkehrten Quadrat der Entfernung wirkender Kräfte im Muskel widerlegt, ist schon früher hervorgehoben worden. Die Einschaltung elastischer Teilchen zwischen die nach jenem Gesetz sich anziehenden Teilchen würde genügen, um die von Schwann gefundenen Erscheinungen hervorzurufen. Meine Maschine zeigt die von Schwann beobachtete Gesetzmäßigkeit, wenn der Widerstand der elastischen Teilchen in bestimmter Weise mit der Verkürzung wächst, was sehr einfach durch die Einschaltung mehrerer Spiralfedern in der oben angegebenen Weise gelingt.

Die angeführten Beispiele erschöpfen aber keineswegs die Übereinstimmungen, die sich beim Vergleich der Arbeitsleistung der Maschine mit der des quergestreiften Muskels nachweisen lassen. Mir ist keine bei der Arbeitsleistung des Muskels zu beobachtende mechanische Erscheinnug bekannt geworden, die nicht auch in überraschend gleicher Weise von der Maschine geleistet werden kann. Eine so weit gehende Übereinstimmung in den Bedingungen und Erscheinungen der mechanischen Arbeitsleistung, wie sie zwischen dem quergestreiften Muskel und der Maschine besteht, darf wohl in dem Sinne auf eine Gleichheit des zu Grunde liegenden Wirkungsprinzips bezogen werden, als behauptet werden kann, daß die Verkürzung des Muskels auf nach dem verkehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräften beruht, die an relativ undehnbaren Teilchen des Muskels angreifen, die durch dehnbare Teilchen mit einander verbunden sind.

Was nun die spezielle Form der Müllerschen Theorie betrifft, ich meine die Annahme, daß die anziehenden Kräfte elektrische seien und die elektrische Ladung auf der schnellen Erwärmung polar-pyroelektrischer Krystalloide beruhe, so darf die Bedeutung dieser Hypothese nur nach dem Werte beurteilt werden, die sie für die Erklärung der Erscheinungen der Muskelkontraktion besitzt. Was Müller damit für das Verständnis der mikroskopisch erkennbaren Veränderungen des Muskels während seiner Tätigkeit geleistet hat, ist immerhin so bemerkenswert, daß es wohl gerechtfertigt erscheinen würde, einmal die Gesamtheit der Erscheinungen von diesem speziellen Standpunkte aus zu betrachten.

XIV.

Über einige neuere Missverständnisse der Friesschen Philosophie und ihres Verhältnisses zur Kantischen.

Von

Kurt Grelling.

Täglich mehren sich die Zeichen, daß die Friessche Philosophie, die ein halbes Jahrhundert in Vergessenheit geschlummert hatte, endlich wieder die verdiente Beachtung findet.

Zu diesen Zeichen gehört auch das Buch von Dr. Theodor Elsenhans, betitelt „Fries und Kant“[1], dessen erster, historischer Teil soeben erschienen ist. Der Verfasser gibt in diesem Bande, den er als Vorbereitung zu einer systematischen Grundlegung der Erkenntnistheorie betrachtet wissen will, eine ausführliche Darstellung der theoretischen Philosophie von Fries, indem er sie dabei fortlaufend mit der Kants vergleicht.

Wenn wir nun diesem Buche im Interesse der von uns vertretenen Sache eine möglichst große Verbreitung wünschen, so erscheint es um so notwendiger, auf einige in ihm enthaltene Irrtümer an dieser Stelle aufmerksam zu machen. Schon im Jahre 1902 hat Elsenhans eine Schrift mit dem Titel „Das Kant-Friesische Problem“[2] veröffentlicht, die im 2. Hefte dieser Abhandlungen von Nelson[3] einer eingehenden Kritik unterzogen worden ist. Einige von den in dieser Kritik gerügten Mißverständnissen hat nun Elsenhans in sein neues Buch herübergenommen. Die wichtigsten von ihnen wollen wir im folgenden näher untersuchen.

---

[1] Alfred Töpelmann, Gießen 1906. [2] Bei J. Hörning, Heidelberg.

[3] Jakob Friedrich Fries und seine jüngsten Kritiker; Abschnitt IV bis VII.

I.

Die ursprüngliche Synthesis bei Fries und Kant.

In der oben genannten Schrift hatte Elsenhans behauptet, daß Fries mit Unrecht Kant vorwerfe, „die Kantische Synthesis sei nichts als ein Akt des Reflexionsvermögens“. Dem gegenüber hatte Nelson in der erwähnten Abhandlung versucht den Fries-schen Vorwurf durch ausführliche Zitate zu rechtfertigen (S. 307 f.). Ohne hierauf einzugehen, wiederholt Elsenhans in dem vorliegenden Buche seine Behauptung und fertigt Nelson in einer Anmerkung mit den Worten ab: „Denn auch für Kant ist seine ursprüngliche Synthesis nicht selbst wieder eine gedachte, sondern eine vorbewußte transzendentale Funktion der Einbildungskraft; auch für ihn ist die ursprüngliche Synthesis selbst erst die Bedingung der Möglichkeit alles Urteilens“ [1]. Also das, was Gegenstand des Streites ist, wird hier als Argument benutzt. Was nun die von Elsenhans angeführten Stellen in der Kritik der reinen Vernunft betrifft, so finden wir auf S. 132 [2] schlechthin nichts, was seine Behauptung unterstützen könnte; dagegen steht auf der folgenden Seite der Satz: „An sich selbst ist die Synthesis der Einbildungskraft . . . jederzeit sinnlich“. Deshalb muß zu ihr die reine Apperzeption hinzukommen, um ihre Funktion intellektuell zu machen. Wie ja überhaupt die reine Apperzeption dasjenige Vermögen ist, das nach seiner Bedeutung für die metaphysische Erkenntnis am meisten der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft entspricht [3]. An der zweiten von Elsenhans heran-

[1] S. 125. Es muß darauf hingewiesen werden, daß die von Elsenhans an dieser Stelle in Anführungsstriche gesetzten Worte „selbst . . . Urteilens“ von Nelson (S. 311) und nicht, wie es dort scheinen könnte, von Kant stammen.

[2] Kehrbachsche Ausgabe. [3] S. z. B. Kr. d. r. V. S. 121.

gezogenen Stelle (S. 658) steht jener schon von Fries und Nelson benutzte Satz: „Denn wo der Verstand vorher nichts verbunden hat, da kann er auch nichts auflösen, weil es nur durch ihn als verbunden der Vorstellungskraft hat gegeben werden können". Daß aber Kant die Worte „Einbildungskraft" und „Verstand" gleichbedeutend gebraucht hätte, wird Elsenhans schwerlich nachweisen können. — Der dritte Ort, den Elsenhans anführt, ist S. 672; hier lesen wir: „Diese Synthesis (der Einbildungskraft) des Mannigfaltigen . . . kann figürlich genannt werden, zum Unterschiede von derjenigen, welche . . . in der bloßen Kategorie gedacht würde und Verstandesverbindung heißt". Wir überlassen dem Leser, dies mit der Elsenhansschen Behauptung zu vergleichen.

Im VI. Kapitel seines Buches kommt Elsenhans auf diese Frage zurück; er sucht hier von neuem die von Fries angeführten Argumente zu entkräften, indem er seine Behauptung wiederholt, nach der „diese (ursprüngliche) synthetische Einheit selbst nicht ein Erzeugnis der Reflexion ist", sondern „zuletzt der schöpferischen Fähigkeit der produktiven Einbildungskraft entstammt, die damit gewissermaßen das ersetzt, was bei Fries die unmittelbare Erkenntnis leistet" (S. 256). Aber auch hier ist er nicht glücklicher in der Wahl seiner Belegstellen. Es geht aus ihnen nur so viel hervor, daß Kant einerseits eine synthetische Einheit gekannt hat, die der analytischen zu Grunde liegt, und daß er andrerseits der produktiven Einbildungskraft eine Synthesis des Mannigfaltigen zuschreibt. Daß jedoch diese beiden Arten der Synthesis identisch seien, hat Elsenhans nicht bewiesen. Dagegen ist von uns oben gezeigt worden, daß bei Kant die Synthesis der Einbildungskraft figürlich ist, während die den Kategorien zu Grunde liegende intellektuelle Synthesis dem Verstande zugeschrieben wird [1]. In diesem Begriff des Verstandes aber liegt das ungeschieden nebeneinander, was Fries in Vernunft und Reflexion trennt [2].

II.

Anthropologische und philosophische Logik.

In dem Abschnitt über das Verhältnis der philosophischen zur anthropologischen Logik setzt Elsenhans ganz richtig nach Fries den Unterschied dieser Disziplinen auseinander. Trotzdem sucht er gleich darauf, im Gegensatz zu Nelson, Fries zu einem Anhänger der „praktisch-psychologischen Methode" zu stempeln [3]. Nun ist aber dieser ganze Streit völlig fruchtlos, wenn man nicht sagt, was unter der praktisch-psychologischen Methode verstanden werden soll. Bei Elsenhans haben wir eine Definition dieser Methode nicht gefunden. Dagegen führt Nelson, um zu beweisen, daß Fries ein Gegner der genetisch-psychologischen Methode ist, die Stelle aus der Einleitung der Neuen Kritik an, wo Fries von seiner Methode sagt, sie sei „keine Geschichte der Vernunft, wie sie sich im Kinde zum Erwachsenen, zum Greise entwickelt, wie sie mit Wachen und Schlafen erscheint, wie sie nach Mann und Weib, nach Konstitution, Volk und Race sich nüanciert oder wie sie in körperlichen und Geisteskrankheiten verletzt und zerstört wird" [4]. Daraus geht also deutlich hervor, daß Nelson unter genetischer Psychologie diese „Geschichte der Vernunft" versteht. Da aber Elsenhans diese selbe Stelle im I. Kapitel seines Buches gleichfalls zitiert (S. 7),

[1] S. auch S. 660 Anm., Kr. d. r. V. [2] Daraus folgt auch, daß der Begriff der objektiven Gultigkeit, trotz aller von Elsenhans hervorgehobener Verwandschaft, bei Fries und Kant ein verschiedener sein muß.

[3] S. 128 f. Bei Nelson steht übrigens an der betreffenden Stelle (S. 248) „genetisch-psychologische Methode". [4] S. 37. (2. Aufl.)

so ist damit wohl zur Genüge bewiesen, daß er sich hierin mit Nelson in Übereinstimmung befindet; seine Polemik an jener anderen Stelle kann also nur auf ein Mißverständnis des Ausdrucks „genetisch-psychologisch“ (den er ja auch, wie schon hervorgehoben, in „praktisch-psychologisch“ ändert) zurückgeführt werden [1].

Damit ist aber diese Frage noch nicht erledigt; denn die folgenden Ausführungen zeigen, daß Elsenhans das Verhältnis der anthropologischen zur philosophischen Logik doch nicht klar genug erfaßt hat. Es ist aber dieses Verhältnis dasselbe wie zwischen philosophischer Anthropologie und Philosophie im allgemeinen. (Ein Verhältnis, das Elsenhans selbst in durchaus klarer und einwandfreier Weise auseinandersetzt.) Wir brauchen also blos dieses Verhältnis auf die Reflexion anzuwenden: wir finden dann, daß die Grundsätze der Logik, d. h. die Gesetze der Denkbarkeit von Dingen überhaupt, zwar für sich durch Spekulation aufgefunden werden können, daß sie aber, um ein vollständiges und geordnetes System zu bilden, einer Deduktion bedürfen, die von der anthropologischen Logik mit Hilfe einer Theorie des Reflexionsvermögens geliefert wird.

Wenn daher Elsenhans von der „Schwierigkeit“ spricht, die Trennung der philosophischen Grundsätze von den anthropo-

---

[1] Wie wenig Elsenhans den Kernpunkt der Nelsonschen Ausführungen verstanden hat, geht auch daraus hervor, daß er es tadelt, daß Nelson folgende Stelle aus der Friesschen „Logik“ in seinem Zitat fortgelassen hat: „Die philosophische Logik ist nämlich so arm an Gehalt und so abhängig in allen ihren Behauptungen von der anthropologischen, daß man gar nicht im Stande ist, sie abgesondert für sich aufzustellen“. Es kam nämlich Nelson, wie er ausdrücklich sagt, („Hat Fries diesen Unterschied gekannt?“), in dem betreffenden Abschnitt nur darauf an, zu zeigen, daß Fries jene beiden Disziplinen unterschieden und vor ihrer Verwechslung gewarnt hat, was Elsenhans selbst zugesteht.

logischen . . . streng festzuhalten (S. 138, Anm.), so kann sich eine solche Schwierigkeit nur auf die sprachliche Formulierung beziehen, denn ihrer Bedeutung nach sind die beiden Arten von Sätzen dadurch streng geschieden, daß die ersteren apriorische Grundsätze aus reinem Verstande sind, während die letzteren (die streng genommen nicht Grundsätze heißen sollten) durch Induktion aus innerer Erfahrung gewonnene, also empirische Lehrsätze sind. Aus demselben Grunde ist die von Elsenhans aufgeworfene Frage „ob die Abgrenzung (der analytischen Erkenntnis) gegenüber den Formen der anthropologischen Logik überhaupt eine durchgreifende Bedeutung besitzt“ (S. 142) entschieden zu bejahen.

Wie verhält sich nun der Begriff der anthropologischen Logik bei Fries zu dem der allgemeinen Logik Kants? Elsenhans behauptet, sie fielen ihrer Aufgabe nach zusammen (S. 143). Das ist aber von vornherein unwahrscheinlich, da Kant den Unterschied der philosophischen und anthropologischen Logik ebensowenig scharf erfaßt hat, wie irgend ein anderer Vorgänger von Fries[1]. Wir wollen diese Frage aber noch näher untersuchen. An der Stelle[2], wo Kant die allgemeine Logik definiert, indem er sie von der Logik des besonderen Verstandesgebrauches trennt, sagt er von jener, daß sie die „schlechthin notwendigen Regeln des Denkens“ enthalte, „ohne welche gar kein Gebrauch des Verstandes stattfindet“. Dies kann nun zunächst sowohl auf die philosophische als auf die anthropologische Logik gehen (sofern man den Ausdruck „schlechthin notwendig“ nicht gleich „apodiktisch“ nimmt, was die folgende Einteilung nicht gestattet). Nun teilt er aber die allgemeine Logik in reine und angewandte, wo die reine Logik „es mit lauter Prinzipien a priori zu tun hat“

[1] S. hierüber das Kapitel über die Geschichte der Logik in Fries' „Logik“ S. 151 (2. Aufl.) [2] Kr. d. r. V. S. 77.

und „ein Kanon des Verstandes“ ist. Diese ist nun gewiß nicht mit der anthropologischen Logik identisch, das ist durch ihren apriorischen Charakter ausgeschlossen. Auf sie aber geht gerade jenes von Elsenhans herangezogene Kantische Wort von dem „bloß logischen Kriterium der Wahrheit“. Damit fällt aber auch der von Elsenhans versuchte Beweis dafür, daß „jene abgeblaßte Beziehung auf den Gegenstand bei Fries nicht imstande ist, einen hinreichend scharfen Unterschied zwischen anthropologischen und philosophischen Grundsätzen zu begründen“. Abgesehen davon, daß, wie wir sahen, diese Beziehung keineswegs das einzige Unterscheidungsmerkmal jener beiden Arten von Sätzen bildet.

III.

Empirische Deduktion und physiologische Ableitung.

Wie in diesen Heften schon mehrfach ausgeführt wurde, ist der Begriff der Deduktion der Friesschen Philosophie eigentümlich und steht im engsten Zusammenhange mit der Methode der Vernunftkritik. Allerdings spricht auch Kant von Deduktionen — er hat deren eine ganze Reihe — aber diese Begriffe sind von dem Friesschen wesentlich verschieden. Schon in seinem „Kant-Friesischen Problem“ hatte Elsenhans die Kantischen Deduktionsbegriffe mit dem Friesschen verglichen; dabei hatte er aber die beiden bei Kant vorkommenden Ausdrücke „empirische Deduktion“ und „physiologische Ableitung“ als nahezu gleichbedeutend betrachtet. Dem gegenüber hat nun Nelson in der mehrfach erwähnten Abhandlung (S. 279 f.) nachgewiesen, daß diese Worte von Kant auf zwei ganz verschiedene Begriffe angewendet werden. Er stützt sich dabei zunächst auf zwei Stellen: Von der physiologischen Ableitung sagt Kant, man könne „von diesen Begriffen (den Kategorien), wie von allem Erkenntnis, wo nicht das Principium ihrer Möglichkeit, so doch die Gelegenheitsursachen ihrer Erzeugung in der Erfahrung aufsuchen. ... Ein solches Nachspüren der ersten Bestrebungen unserer Erkenntniskraft ... hat ohne Zweifel seinen großen Nutzen"[1]. Und gleich darauf von den empirischen Deduktionen apriorischer Erkenntnisse: sie seien „nichts als eitele Versuche, womit sich nur derjenige beschäftigen kann, welcher die ganz eigentümliche Natur dieser Erkenntnisse nicht begriffen hat". Wer also empirische Deduktion und physiologische Ableitung identifiziert, zeiht damit Kant eines krassen Widerspruchs innerhalb weniger Zeilen, und das ist so lange unstatthaft als sich eine andere Erklärung anbietet. Eine solche Erklärung hat nun Nelson gegeben. Danach ist die empirische Deduktion die Rechtfertigung eines Begriffs durch Anführung eines Rechtsgrundes aus der Erfahrung, eine Auffassung, die Nelson noch durch weitere Zitate stützt.

Trotzdem verficht Elsenhans in dem vorliegenden Buche von neuem seine Meinung von der Identität jener Begriffe. Hören wir, was er auf die Nelsonschen Ausführungen zu erwidern hat:

„Sollte Kant", so beginnt er, „wirklich eine so eingehende Beweisführung darauf verwenden, einen so einfachen Widerspruch aufzudecken, zu zeigen, daß die Deduktion empirischer Begriffe nicht die Deduktion apriorischer ist?" (S. 163). Das allerdings nicht. Daß aber Begriffe wie die Kategorien ihren Rechtsgrund nicht aus der Erfahrung nehmen können, mußte gezeigt werden, denn das wurde zu Kants Zeiten von der englischen Philosophie und wird noch heute von allen Empiristen übersehen[2].

[1] Kr. d. r. V. S. 101 f. [2] In der Anmerkung S. 163 (in der es wohl heißen soll: „statt auf die Verschiedenheit der Gegenstände auf die Verschiedenheit der Erkenntnisart") verteidigt Elsenhans gegen Nelson die Behauptung, daß sich in den Ausdrucken „empirische" und „transzendentale Deduktion" die Bei-

Weiter soll Kant in der physiologischen Ableitung „den bedeutendsten Versuch einer empirischen Deduktion“ sehen (S. 164). Er soll also zuerst ganz allgemein den Versuch einer empirischen Deduktion der Kategorien als „ganz vergebliche Arbeit“ bezeichnen und eine halbe Seite darauf von dem „bedeutendsten“ dieser Versuche sagen, daß er „ohne Zweifel seinen großen Nutzen“ hat. Nun sagt aber Kant von der physiologischen Ableitung, sie könne eigentlich nicht Deduktion genannt werden. Daraus schließt Elsenhans, daß sie uneigentlich als Deduktion d. h. (natürlich!) als empirische Deduktion könne angesehen werden. (Ein mustergültiger Beweis!) Kant giebt aber auch den Grund an, warum die physiologische Ableitung nicht Deduktion heißen könne, nämlich „weil sie eine quaestionem facti betrifft“. Daraus geht hervor, daß jede wirkliche Deduktion, also auch die empirische, eine quaestionem juris betreffen muß. — Es bleibt also von den Elsenhansschen Argumenten nur eins übrig: Die Berufung auf die Stelle, wo Kant von der empirischen Deduktion sagt, daß sie „nicht die Rechtmäßigkeit, sondern das Faktum betrifft“. Hier liegt nun allerdings bei Kant eine Vermengung der beiden

---

wörter bei Kant nicht auf die Verschiedenheit der Gegenstände, sondern auf die Verschiedenheit der Erkenntnisart beziehen. Nun zeigt aber gerade der Wortlaut der Definitionen, auf den er sich dabei beruft: „Erklärung der Art, wie sich . . . beziehen“ und „Art, wie . . . erworben worden“, daß es Kant hierbei nicht auf die Verschiedenheit der Erklärungsart ankam, sondern vielmehr auf die Verschiedenheit dessen, was erklärt wird, d. h. des Gegenstandes der Deduktion. Wenn sich Elsenhans aber weiter auf den Satz beruft „Der Unterschied des Transzendentalen und Empirischen gehört also nur zur Kritik der Erkenntnisse und betrifft nicht die Beziehung derselben auf ihren Gegenstand“, so hat er sich hier offenbar durch den Terminus „Gegenstand“ verwirren lassen. Die Erkenntnisse, von denen Kant in diesem Satze spricht, werden nämlich in unserem Falle selbst zu Objekten (d. h. Gegenständen), nämlich der Deduktion, so daß sich hier der Unterschied des Transzendentalen und Empirischen tatsächlich auf die „Gegenstände“ bezieht.

in Frage stehenden Begriffe vor, aber gerade die unmittelbar vorhergehenden Worte: „Art ... wie ein Begriff durch Erfahrung ... erworben worden", zeigen, daß Nelson mit seiner Auffassung recht hat, denn durch Erfahrung werden nur empirische Begriffe erworben, während die physiologische Ableitung auf alle Begriffe ohne Unterschied anwendbar sein soll.

Elsenhans sucht dann nach den Motiven der Nelsonschen Interpretation und findet sie darin, daß „man" angeblich die physiologische Ableitung „als der Friesischen Deduktion nahestehend betrachtet". Nun unterscheiden sich diese beiden Verfahren aber dadurch wesentlich, daß jene die zufälligen Ursachen aufsucht, durch die die Kategorien ins Bewußtsein treten, während die Friessche Deduktion ihren Rechtsgrund in der unmittelbaren Erkenntnis der reinen Vernunft aufweist. Es ist also nicht einzusehen, wie Elsenhans zu seiner Motivierung kommt; da er sie auch in keiner Weise belegt, müssen wir sie als seine eigene, freie Erfindung bezeichnen.

IV.

Induktion und Spekulation.

Im „Kant-Friesischen Problem" hatte Elsenhans behauptet, daß das Verhältnis der Induktion zu den philosophischen Erkenntnissen bei Fries nicht folgerichtig durchgeführt sei. Auf diesen Vorwurf, der schon von Nelson in der mehrfach zitierten Abhandlung zurückgewiesen worden ist (S. 272 f.), kommt Elsenhans in seinem neuesten Buche zurück (S. 201 f.). Es erscheint daher eine erneute Darlegung des Sachverhaltes notwendig.

Die Induktion ist ein Beweisverfahren, und zwar das einzige, das von den Fällen auf die Regel schließt. Dieses Verfahren ist daher nur dann streng, wenn alle Fälle bekannt sind (Vollständige

Induktion). In den weitaus meisten Fällen aber, nämlich in den empirischen Wissenschaften[1], trifft diese Voraussetzung nicht zu; wir müssen uns daher in diesen Fällen bestimmter leitender Maximen bedienen, um die Induktion schlußkräftig zu machen. Solche Induktionen nennt Fries rationnelle, die anderen, ohne leitende Maximen, empirische.

Welche Bedeutung hat nun die Induktion für die Philosophie? Da muß zunächst bemerkt werden, daß sie weder zur Auffindung noch zum Beweise der philosophischen Grundsätze dienen kann: ersteres nicht wegen der philosophischen, d. h. apriorischen Natur dieser Sätze, letzteres nicht, weil es sich um Grundsätze, d. h. um unbeweisbare Sätze, handelt. Trotzdem aber spielt sie eine wichtige Rolle bei der Begründung jener Sätze. Die Begründung der philosophischen Grundsätze ist eine der Aufgaben der Vernunftkritik. Ihr Verfahren besteht in der Aufweisung einer jenen Sätzen zu Grunde liegenden unmittelbaren Erkenntnis. Sie bedarf dazu einer Theorie der Vernunft, und hier ist der Punkt, wo die Induktion eine Rolle spielt: Diese Theorie wird nämlich (in der philosophischen Anthropologie) durch Induktion aus innerer Erfahrung gewonnen[2]. Hiermit erklärt sich die Stelle, wo Fries von den „höchsten Prinzipien unserer Theorie der Apperzeption“ sagt, daß sie durch Induktion aus innerer Erfahrung abgeleitet

---

[1] Es ist nicht einzusehen, warum Elsenhans die innere Erfahrung als das wichtigste Anwendungsgebiet der Induktion bezeichnet. Die äußere Erfahrung ist ihr in dieser Hinsicht koordiniert.

[2] In der Anmerkung S. 202 beklagt sich Elsenhans darüber, daß Nelson einen Satz von ihm verstümmelt habe. Nelson hat nämlich in seinem Referat (nicht Zitat) statt der Elsenhansschen Worte „Die Untersuchung der philosophischen Anthropologie“ folgendes eingesetzt: „Die Entwicklung dieser Theorie der Vernunft“ (S. 274). Wenn der Leser bedenkt, daß diese Entwicklung der Theorie der Vernunft die Aufgabe der philosophischen Anthropologie ist, mag er selbst beurteilen, ob damit der Sinn des Elsenhansschen Satzes geändert ist.

werden[1]. Diese Stelle steht also keineswegs, wie Elsenhans meint, mit dem von Fries auf S. 15 Gesagten — aus dem wir übrigens eine „Gegenüberstellung von Deduktion und Induktion" nicht herauslesen können — in Widerspruch. Wenn aber Elsenhans meint, daß Fries an derselben Stelle (S. 74) „im Widerspruch mit der Höherstellung der kritischen Methode" von der Möglichkeit spricht, „die Induktion als oberste Instanz in spekulativen Dingen" anzusehen, so ist dazu erstens zu bemerken, daß Fries hier gar nicht von der Induktion, sondern von „psychologischen Hypothesen" spricht, zweitens aber haben wir eben gesehen, daß die wichtige Rolle der Induktion in spekulativen Dingen nicht nur in keinem Widerspruch zur kritischen Methode steht, sondern daß vielmehr die Induktion selbst einen wesentlichen Bestandteil dieser Methode bildet[2].

In welchem Verhältnis steht nun die Spekulation zur Induktion? Spekulation nennt Fries das Verfahren „die gewöhnliche Erkenntnis durch Zergliederung auf ihre ersten und allgemeinsten apodiktischen Anfänge zurückzuführen"[3]. Sie schreitet also wie die Induktion vom Besonderen zum Allgemeinen fort. Der fundamentale Unterschied der beiden Verfahrungsarten liegt aber darin, daß die Induktion durch Zusammenfassung der Fälle die Regel beweist, während die Spekulation nichts anderes leisten kann und soll, als gewisse Prinzipien in unserem Geiste als vorhanden aufzuweisen. Das ist das „eigene Verhältnis zur Regel", nach dem sich die beiden unterscheiden. Damit hängt eng zusammen, daß die Spekulation zu apriorischen Sätzen führt, während die durch Induktion gewonnenen Sätze immer der Erfahrung ange-

[1] N. K. II S. 74. [2] S. auch hierüber die Abhandlung von Nelson über „die kritische Methode u. s. w." im 1. Heft dieser Abhandlungen. (§ 18.)
[3] N. K. I S. 387.

hören[1]. (Sie werden gebildet durch Vereinigung sinnlicher, mathematischer und metaphysischer Erkenntnis.) Es ist also mindestens mißverständlich, wenn Elsenhans sagt[2], daß die Spekulation in ihrer Aufgabe einer Aufsuchung der Prinzipien durch die Induktion unterstützt wird. Denn die Prinzipien sind in beiden Fällen von verschiedener Art: Die Spekulation dient zur Aufsuchung der regulativen Prinzipien, die für die Induktion die leitenden Maximen bilden; ein solches Prinzip ist z. B. in der Physik das Trägheitsgesetz. Dagegen liefert die Induktion die konstitutiven Prinzipien einer empirischen Theorie, z. B. das Gravitationsgesetz.

Allerdings muß zugegeben werden, daß die einzige Stelle, auf die sich Elsenhans für seine Auffassung beruft[3], eine solche Auslegung nahe legt; Fries hat hier nicht scharf genug zwischen jenen beiden Arten von Prinzipien unterschieden. Indessen scheint uns, daß die ausführlichen Auseinandersetzungen über Spekulation und Induktion in der „Logik" die Richtigkeit der von uns vertretenen Auffassung genügend verbürgen[4]. —

Sehen wir indessen von den hier besprochenen Mißverständnissen ab, so kann das Buch von Elsenhans als eine getreue und leicht verständliche Darstellung der Friesschen Erkenntnistheorie bezeichnet werden. Es bleibt abzuwarten, was der zweite Teil bringen wird.

---

[1] N. K. I S. 390. [2] S. 203. [3] N. K. I S. 401.

[4] Eine musterhafte Darlegung der hier berührten Frage findet sich auch in E. F. Apelts „Theorie der Induktion" (Engelmann, Leipzig 1854). S. das Kapitel über „Induktion und Abstraktion".

Register
zum 1. Bande der Abhandlungen der Fries'schen Schule N. F.